

В. М. БАБИЧ, В. С. БУЛДЫРЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
В ЗАДАЧАХ  
ДИФРАКЦИИ  
КОРОТКИХ ВОЛН

МЕТОД ЭТАЛОННЫХ ЗАДАЧ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1972

**Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.** Бабич В. М., Булдырев В. С. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972.

Книга посвящена современным способам построения коротковолновой асимптотики дифракционных задач: лучевому методу, методу параболического уравнения и методу эталонных задач. Рассматриваются разные приемы нахождения асимптотики собственных функций оператора Лапласа и функций Грина для уравнения Гельмгольца. В книге нашли отражение работы академиков В. А. Фока и М. А. Леонтовича, американского математика Дж. Б. Келлера, многих других отечественных и зарубежных ученых и, в частности, некоторые исследования авторов книги. Книга адресуется специалистам-теоретикам, работающим в области радиофизики, геофизики, квантовой механики, и математикам, интересующимся современными проблемами математической физики. Для чтения книги достаточно владеть математикой в объеме программы, обычной для физических факультетов университетов СССР. Книга является частью задуманного авторами двухтомного курса «Асимптотических методов в задачах дифракции коротких волн». В другой его части найдут свое отражение современные приемы нахождения коротковолновой асимптотики точных решений дифракционных задач.

*Василий Михайлович Бабич, Владимир Сергеевич Булдырев*

Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач

М., 1972 г., 456 стр. с илл.

Редакторы: *И. Е. Морозова, В. А. Боровиков*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *О. А. Сегал*

Сдано в набор 1/V 1972 г. Подписано к печати 20/IX 1972 г. Бумага 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>, тип. № 2. Физ. печ. л. 28,5. Условн. печ. л. 28,5. Уч.-изд. 28,74. Тираж 5500 экз. Т-03394. Цена 1 р. 96 к. Заказ № 136

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1 Лучевой метод . . . . .</b>	<b>20</b>
§ 1. Исходные формулы лучевого метода в скалярном случае . . . . .	20
§ 2. Уравнение эйконала, лучи, волновые фронты . . . . .	21
§ 3. Лучевые координаты . . . . .	25
§ 4. Основные рекуррентные формулы лучевого метода . . . . .	29
§ 5. Уравнения Максвелла . . . . .	31
§ 6. Пример нахождения коротковолновой асимптотики дифракционной задачи лучевым методом . . . . .	36
§ 7. Определение функции $\psi_0$ с помощью соображений локальности . . . . .	40
§ 8. Каустики . . . . .	41
<b>Глава 2. Волновое поле вблизи каустики . . . . .</b>	<b>43</b>
§ 1. Предварительные замечания . . . . .	43
§ 2. Эталонная задача . . . . .	44
§ 3. О выборе параметров $\alpha$ и $\beta$ . . . . .	47
§ 4. Уравнения лучей и волновых фронтов в окрестности каустики . . . . .	49
§ 5. Аналитический характер эйконала $\tau(x, y, z)$ вблизи каустики . . . . .	52
§ 6. Вывод рекуррентных соотношений . . . . .	56
§ 7. Волновое поле в окрестности каустики в первом приближении . . . . .	59
§ 8. Построение $A_n$ и $B_n$ , $n > 0$ . . . . .	62
§ 9. Определение функций $\chi_n$ . . . . .	64
§ 10. Аналитичность $A_n$ и $B_n$ . . . . .	66
<b>Глава 3. Вывод асимптотических формул для собственных чисел и функций лучевым методом . . . . .</b>	<b>69</b>
§ 1. Вводные замечания . . . . .	69
§ 2. Многоэкземплярное пространство . . . . .	70
§ 3. Однозначность собственной функции и условия квантования . . . . .	73
§ 4. Собственные значения и собственные функции круга . . . . .	79
§ 5. Собственные значения эллипса . . . . .	85
<b>Глава 4. Лучевой метод «в малом» . . . . .</b>	<b>101</b>
§ 1. Собственные функции типа шепчущей галереи . . . . .	102
§ 2. Собственные значения типа прыгающего мячика . . . . .	110
§ 3. Собственные значения типа шепчущей галереи в случае переменной скорости . . . . .	120
§ 4. Собственные значения типа прыгающего мячика в случае переменной скорости . . . . .	128
<b>Глава 5 Метод параболического уравнения . . . . .</b>	<b>137</b>
§ 1. Вводные замечания . . . . .	137
§ 2. Вывод параболического уравнения для собственных функций типа шепчущей галереи . . . . .	138

§ 3. Решение параболического уравнения (2.9). Асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи . . . . .	142
§ 4. Вывод основного параболического уравнения задачи в случае, когда $S$ — луч . . . . .	145
§ 5. Решение параболического уравнения (4.8) . . . . .	147
§ 6. О колебаниях типа волновой пленки . . . . .	151
<b>Глава 6. Асимптотика собственных функций, сосредоточенных вблизи границы области . . . . .</b>	<b>157</b>
§ 1. Вводные замечания . . . . .	157
§ 2. Собственные функции круга в случае $c = \text{const}$ . . . . .	158
§ 3. Построение решений уравнения Гельмгольца в пограничном слое . . . . .	162
§ 4. Собственные функции типа шепчущей галереи . . . . .	174
§ 5. Собственные функции области, внешней по отношению к области $\Omega$ . . . . .	181
§ 6. Обоснование полученных асимптотических формул . . . . .	187
<b>Глава 7. О собственных функциях, сосредоточенных в окрестности экстремального луча области . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 1. Эталонная задача . . . . .	193
§ 2. Построение главных членов формальных рядов . . . . .	195
§ 3. Построение полиномов $\alpha_m$ и $\beta_m$ , $m \geq 1$ . . . . .	203
§ 4. Основные результаты и некоторые следствия из них . . . . .	206
§ 5. Постановка краевой задачи и вывод уравнения для собственных значений . . . . .	208
§ 6. Формулы для собственных значений и собственных функций в первом приближении . . . . .	214
§ 7. Схема построения полиномов $\alpha_m(s, \nu)$ и $\beta_m(s, \nu)$ , $m \geq 1$ . . . . .	222
§ 8. Собственные частоты открытого резонатора (неоднородное заполнение, высшие приближения) . . . . .	225
<b>Глава 8. Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической . . . . .</b>	<b>228</b>
§ 1. Постановка задачи и вывод параболического уравнения . . . . .	228
§ 2. Уравнение Якоби для геодезической $l$ . . . . .	235
§ 3. Нулевое приближение . . . . .	243
§ 4. Построение высших приближений . . . . .	252
§ 5. Задача о собственных функциях трехмерной области . . . . .	257
<b>Глава 9. Многозеркальные резонаторы . . . . .</b>	<b>265</b>
§ 1. Многозеркальный резонатор и формулировка задачи . . . . .	265
§ 2. Условия устойчивости резонаторов по первому приближению . . . . .	268
§ 3. Некоторые свойства решений канонической системы (2.16) на цикле $l_N$ . . . . .	277
§ 4. Лучевой метод в малом. Формула для собственных частот резонатора . . . . .	278
§ 5. Постановка задачи для параболического уравнения . . . . .	286
§ 6. Интегрирование уравнения $\mathcal{L}V = 0$ . . . . .	290
§ 7. Собственные функции и собственные частоты многозеркального резонатора в первом приближении . . . . .	292
§ 8. Построение высших приближений . . . . .	296
<b>Глава 10. Поле точечного источника, расположенного вблизи выпуклой кривой . . . . .</b>	<b>303</b>
§ 1. Вводные замечания . . . . .	303
§ 2. Функция Грина для внешности окружности . . . . .	304
§ 3. Волны соскальзывания вблизи кривой с положительной кривизной и их продолжение на произвольные расстояния . . . . .	312



§ 4. Выражение функции Грина через волны соскальзывания . . . . .	316
§ 5. Функция Грина задачи дифракции на цилиндре с переменным импедансом . . . . .	322
<b>Глава 11. Асимптотика функции Грина для поверхностного источника (внутренняя задача) . . . . .</b>	<b>325</b>
§ 1. Постановка задачи и физические предпосылки . . . . .	325
§ 2. Лучевая формула для многократно отраженных волн . . . . .	327
§ 3. Уточнение лучевой формулы . . . . .	334
§ 4. Волновое поле источника, расположенного на границе круга . . . . .	346
§ 5. Поле поверхностного источника вблизи изогнутой границы неоднородного тела . . . . .	362
<b>Глава 12. Высокочастотная асимптотика волнового поля, рассеянного гладким выпуклым телом . . . . .</b>	<b>378</b>
§ 1. Эталонная задача . . . . .	378
§ 2. Построение приближенных каустических сумм . . . . .	386
§ 3. Представление падающей волны интегралом $I_{\text{пад}}$ . . . . .	391
§ 4. Начальные данные для уравнений, определяющих п. к. суммы . . . . .	396
§ 5. Исследование интеграла $I$ в освещенной области . . . . .	399
§ 6. Преобразование интеграла $I$ в зоне тени . . . . .	402
§ 7. Асимптотика волнового поля в глубокой тени . . . . .	405
Дополнение 1. Уравнение и функции Эйри . . . . .	410
Дополнение 2. Неортогональные криволинейные координатные системы . . . . .	425
Дополнение 3. О решении уравнения $y''(s) + K(s)y(s) = y^{-3}(s)$ . . . . .	432
Дополнение 4. Вычисление функции $G_M(\gamma)$ и таблицы для нее . . . . .	435
Примечания . . . . .	439
Литература . . . . .	447
Предметный указатель . . . . .	454

## ПРЕДИСЛОВИЕ

При исследовании задачи теории дифракции коротких волн важную роль играют асимптотические методы: лучевой метод, метод параболического уравнения и его дальнейшее развитие — метод эталонных задач. Изложению этих методов посвящена книга.

Асимптотические методы в теории волновых явлений еще далеко себя не исчерпали, и мы надеемся, что приемы, изложенные в книге, помогут решить ряд новых интересных задач в акустике, геофизике, радиофизике и, может быть, в квантовой механике. С другой стороны, книга может оказаться полезной математику, интересующемуся современными проблемами математической физики.

Каждая глава снабжена примечаниями (они помещены в конце книги). В этих примечаниях дана краткая история вопроса и приводятся ссылки на работы, связанные с содержанием данной главы. В связи с этим в основном тексте книги указываются лишь те работы, в которых можно найти пояснение того или иного рассуждения, той или иной выкладки.

Нумерация формул в каждой главе независима от нумерации в других главах. Если в ссылке на формулу номер главы не указан, значит, речь идет о формуле этой же главы, в противном (более редком) случае в ссылке дается не только номер формулы, но и глава.

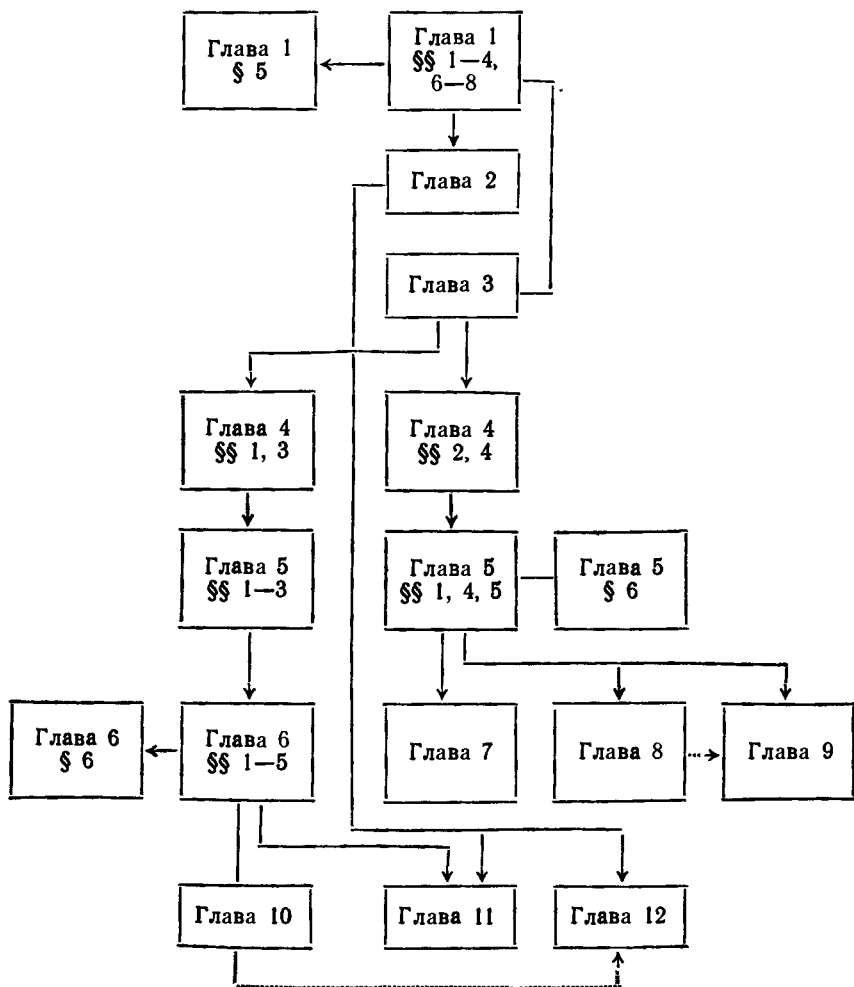
Надеясь облегчить труд читателя, для которого некоторые вопросы, рассматриваемые в настоящей книге, не представляют интереса, мы приводим здесь схему зависимости глав и параграфов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность М. М. Попову, написавшему по их просьбе §§ 1—7 главы 9, и И. А. Молоткову, в постоянном деловом контакте с которым протекала вся работа над книгой. И. А. Молотков

написал § 5 главы 6, большую часть главы 10 и был нашим соавтором при написании главы 5. Мы очень благодарны участникам семинара ЛОМИ и ЛГУ по математической теории дифракции, и в первую очередь В. Ф. Лазуткину, за конструктивную критику. Многим обязаны мы редакторам книги. Их тщательная работа, порою далеко выходящая за пределы прямых редакторских обязанностей, позволила нам устранить ряд недостатков рукописи.

*Авторы*

## СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ И ПАРАГРАФОВ



## ВВЕДЕНИЕ

В различных разделах физики (акустике, теории упругости, электродинамике, квантовой механике и т. д.) изучаются волновые движения в тех или иных проявлениях. Математически такие движения описываются некоторыми гиперболическими дифференциальными уравнениями. Основные свойства этих уравнений проявляются уже при изучении их простейшего представителя — волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $c(x, y, z)$  — скорость распространения волн.

Во многих задачах естественно задавать зависимость от времени в виде множителя  $e^{-i\omega t}$ , в котором  $\omega$  — циклическая или круговая частота колебаний:

$$W(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} u(x, y, z).$$

Функция  $u(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} u = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) должно быть дополнено краевыми условиями, вытекающими из физического содержания задачи.

В задачах на собственные функции ищутся отличные от нуля решения уравнения (2), удовлетворяющие на границе  $S$  трехмерной ограниченной области  $\Omega$  одному из условий:

$$u|_S = 0 \quad (3)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (4)$$

или, наконец,

$$\frac{\partial u}{\partial n} + i\omega g(M) u|_S = 0. \quad (5)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к  $S$  и  $g(M)$  — функция, определенная в точках поверхности  $S$ .

Волновое поле точечного источника удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} u = -\delta(M - M_0), \quad (6)$$

где  $\delta(M - M_0)$  — дельта-функция, сосредоточенная в точке  $M_0$ . Обычно волновое поле точечного источника исследуется в неограниченной области  $\Omega$ . Помимо краевых условий (3), (4) или (5), функция  $u(x, y, z)$  должна удовлетворять некоторым условиям на бесконечности, обеспечивающим единственность решения. Этими условиями могут быть, например, условия принципа предельного поглощения (см. В. И. Смирнов [3])<sup>\*</sup>).

Основным содержанием книги является исследование асимптотики решений краевых задач для уравнений (2) или (6) при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Дадим более подробное описание содержания книги и ее логического построения.

На больших частотах волновые поля, т. е. решения уравнений (2) или (6), как установлено физиками в многочисленных и разнообразных экспериментах, подчиняются определенным геометрическим закономерностям. Естественно ожидать, что эти геометрические закономерности характеризуют асимптотическое при  $\omega \rightarrow \infty$  поведение волновых полей и, следовательно, могут быть получены непосредственно из уравнений (2) или (6).

И действительно, существует формальный способ построения асимптотических разложений по обратным степеням  $\omega$  (или большого параметра, пропорционального  $\omega$ ) решений краевых задач для уравнений (2) и (6). Этот способ, впервые в простейшем случае указанный Зоммерфельдом и Рунге, получил впоследствии название *лучевого метода*. Главный член лучевых разложений содержит в себе не только лучевое описание волнового движения (собственно геометрическую оптику), но и дает амплитудные характеристики волны.

Построение высокочастотной асимптотики лучевым методом возможно только при выполнении определенных условий. Эти условия формулируются следующим образом. Пусть  $\alpha, \beta, \tau$  — лучевые координаты, причем  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют луч, т. е.

экстремаль функционала Ферма  $\int \frac{d\sigma}{c(x, y, z)}$ , где  $d\sigma$  — дифференциал дуги, а  $\tau$  (так называемый *эйконал*) — время распространения вдоль луча (см. § 3 гл. 1). Применение лучевого метода возможно только при условии, если декартовы координаты  $x, y, z$  являются гладкими функциями лучевых координат

$\alpha, \beta, \tau$  и функциональный определитель  $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)}$  отличен от нуля. При выполнении указанного условия поле лучей называют *регулярным*.

---

<sup>\*</sup>) Заметим, что принцип предельного поглощения строго доказан лишь при частных предположениях о поведении функции  $c(x, y, z)$  и границы  $S$  на бесконечности (см. Д. М. Эйдуc [1]).

Однако строгое математическое доказательство того факта, что формулы лучевого метода в случае регулярных лучевых полей являются асимптотическими разложениями решений рассматриваемых краевых задач, представляет собой трудную и в большинстве случаев еще не решенную проблему. Несмотря на отсутствие строгих доказательств, ни физики, ни математики не сомневаются в справедливости асимптотических формул лучевого метода. Эта уверенность основывается, во-первых, на том, что в ряде случаев такие доказательства все же получены (см. § 6 гл. 1 и вводные замечания к гл. 10, где приводятся соответствующие ссылки), во-вторых, на том, что построение формул лучевого метода согласуется с физическими представлениями о распространении коротких волн, и, в-третьих, на том, что эти формулы хорошо подтверждаются экспериментом.

Простота и наглядность лучевого метода делают его незаменимым инструментом для расчета волновых полей на высоких частотах.

*Основам лучевого метода посвящена первая глава книги.* Большое значение имеет изучение волновых полей, соответствующих нерегулярным лучевым полям. Пусть поле лучей имеет огибающую. В точках огибающей  $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} = 0$ , и поэтому в ее окрестности лучевой метод в своем первоначальном виде неприменим. В физике огибающую поля лучей обычно называют каустикой. Поле лучей вблизи каустики представляет собой простейший, но весьма важный в практическом отношении случай нерегулярного лучевого поля.

Для волнового поля в окрестности каустики, не имеющей особых точек, удастся получить асимптотическое разложение, содержащее функции Эйри. Вне некоторой полоски, окружающей каустику, это разложение переходит в разложение лучевого метода. Толщина полоски уменьшается при возрастании частоты.

*Описанию волнового поля в окрестности каустики посвящена вторая глава книги.* Наше изложение основывается здесь на работах Ю. А. Кравцова [1] и Ю. Л. Газаряна [1]. В этой главе читатель найдет не только формулы первого приближения, но и исследование аналитических свойств дальнейших приближений.

Лучевой метод, дополненный некоторыми результатами второй главы, позволяет находить асимптотические формулы для собственных функций и соответствующих им собственных значений краевых задач, связанных с уравнением Гельмгольца (2).

Лучевые представления для получения асимптотики собственных функций оператора Лапласа применили американские ученые Келлер и Рубинау [1]. Метод Келлера — Рубинау

опирается на предположение о существовании инвариантных относительно отражений в границе области и непрерывно зависящих от некоторого числа параметров конгруэнций лучей. Такие конгруэнции удалось построить в плоском случае для круга и эллипса, а в трехмерном случае — для сферы и трехосного эллипсоида, т.е. в задачах с разделяющимися переменными.

Близкие приемы в задачах об асимптотике собственных функций и собственных чисел применяли также Л. А. Вайнштейн [1]—[3] и В. П. Быков [1]—[3].

*Лучевой метод построения асимптотических формул для собственных функций и собственных значений (метод Келлера — Рубинау) излагается в третьей главе книги.*

Обдумывая способ изложения метода Келлера — Рубинау, авторы пришли к выводу, что для придания изложению большей четкости целесообразно использовать некоторые элементарные понятия топологии многообразий. Мы надеемся, что это не лишило построения Келлера — Рубинау их физической наглядности.

К сожалению, метод Келлера — Рубинау в своем первоначальном виде имеет очень узкую область применимости, практически сводящуюся к задачам с разделяющимися переменными. Попытки применить этот метод в более общих случаях наталкиваются на принципиальные трудности, связанные с существованием зон неустойчивости решений динамических систем. Между тем в связи с запросами лазерной техники стала весьма актуальной задача о нахождении асимптотических разложений для собственных функций, сосредоточенных около некоторых замкнутых кривых — одномерных циклов\*).

Собственные функции, сосредоточенные в окрестности границы двумерной области и замкнутой геодезической, расположенной на границе трехмерной области, получили название собственных функций типа *шепчущей галереи*. Собственные функции, сосредоточенные в окрестности луча, инвариантного относительно отражений в границе области, получили название собственных функций типа *прыгающего мячика*. (В простейшем случае двумерной области и  $s(x, y) = \text{const}$  луч, инвариантный относительно отражений, совпадает с диаметром области, пробегаемым дважды, в прямом и обратном направлениях.)

Примеры эллипса и эллипсоида показывают, что возле произвольного одномерного цикла собственные функции не сосредоточиваются. Чтобы в окрестности цикла существовали собственные функции, этот цикл должен удовлетворять некото-

\*) Мы говорим, что функция сосредоточена в окрестности кривой  $l$ , если за пределами достаточно узкой полосы, содержащей  $l$ , эта функция экспоненциально убывает при удалении от  $l$  (точнее и подробнее см. гл. 4 и 5).



рым условиям. Назовем цикл *устойчивым в первом приближении*, если лучи, первоначально близкие к циклу, будут расположены в малой окрестности цикла и после достаточно далекого их продолжения в неоднородной среде и достаточно большого числа отражений в границе области (точные определения см. в гл. 4). Можно ожидать, что требование устойчивости цикла в первом приближении является тем требованием, при выполнении которого существуют собственные функции, сосредоточенные в окрестности цикла. Естественность такого требования следует из интуитивного физического соображения: для того чтобы волны, соответствующие лучам, многократно обошедшим цикл, могли образовать собственную функцию, они должны достаточное число раз проинтерферировать друг с другом, прежде чем покинуть окрестность цикла.

Оказывается, асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи и прыгающего мячика может быть получена методом, представляющим собою видоизменение метода Келлера—Рубинау. Это видоизменение метода Келлера—Рубинау, поскольку оно имеет дело с лучами, принадлежащими достаточно малой окрестности цикла, мы будем называть *лучевым методом в малом*. Необходимо отметить, что лучевой метод в малом применим в том и только том случае, если соответствующий цикл устойчив в первом приближении. Это обстоятельство указывает на то, что требование устойчивости цикла является не только достаточным, но, по-видимому, и необходимым для существования собственных функций типа шепчущей галереи и прыгающего мячика.

*В четвертой главе книги лучевым методом в малом построена асимптотика собственных значений, соответствующих собственным функциям типа шепчущей галереи и прыгающего мячика, в различных двумерных задачах с неразделяющимися переменными и переменной скоростью распространения волн ( $c(x, y) \neq \text{const}$ ).*

Окрестности кривых, в которых существенно отличны от нуля решения уравнений (2) или (6), естественно по аналогии с гидромеханикой называть *дифракционными пограничными слоями*. Волновые поля в пограничных слоях в первом приближении описываются не простыми уравнениями эйконала и переноса (основными уравнениями лучевого метода), а более сложным уравнением типа уравнения Шредингера. Это уравнение, которое в теории дифракции обычно называют параболическим, является аналогом известных гидродинамических уравнений пограничного слоя. Параболическое уравнение для описания волновых полей было предложено академиками М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком [1] (см. также примечания к гл. 5 и 10).

*Метод параболического уравнения рассматривается в пятой главе книги.* В этой главе параболическое уравнение выводится и его решения строятся для гладких границ \*).

Замена исходного уравнения Гельмгольца, принадлежащего к эллиптическому типу, уравнением параболическим позволяет при  $\omega \rightarrow \infty$  получить, как уже отмечалось, лишь главные члены асимптотических разложений. Однако во многих случаях интерес представляют не только главные, но и последующие члены асимптотических разложений.

Построение последующих членов асимптотических разложений привело в последние годы к созданию так называемого *метода эталонных задач*, который может рассматриваться как дальнейшее естественное развитие метода параболического уравнения.

Метод эталонных задач представляет собою обобщение на краевые задачи теории дифракции и распространения волн метода эталонных уравнений, который в настоящее время широко используется при получении асимптотических разложений для решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе метода эталонных задач лежит принцип: *сходная геометрия лучей приводит к сходным асимптотическим формулам (при  $\omega \rightarrow \infty$ ) для волновых полей.*

Таким образом, если эталонное уравнение в асимптотической теории дифференциальных уравнений — это простейшее уравнение с теми же особенностями коэффициентов, что и у исходного уравнения, то эталонная задача в теории дифракции и распространения волн — это простейшая задача, в которой поле лучей обладает теми же особенностями, что и в исходной задаче.

Схема метода эталонных задач состоит в следующем. Рассматриваемая исходная задача заменяется простейшей эталонной задачей, допускающей точное решение обычно путем разделения переменных. Точное решение эталонной задачи исследуется при  $\omega \rightarrow \infty$  и из него выделяется выражение, которое асимптотически описывает волновое поле в интересующей нас области, где поле лучей обладает специфическими для рассматриваемой задачи особенностями. Обычно это выражение представляет собою произведение специальных функций или контурный интеграл от специальных функций, аргументами которых являются асимптотические ряды по дробным отрицательным степеням большого параметра  $\omega$ . Волновое поле в исходной

---

\*) Метод параболического уравнения может быть применен и в задачах с негладкими границами. Так, например, высокочастотная асимптотика волнового поля в задаче дифракции на угле может быть получена не только из точного решения задачи, но и по методу параболического уравнения (см. П. Я. Уфимцев [1]). Однако в книге задачи с негладкими границами не рассматриваются.

задаче ищется в аналогичном виде, но с другими коэффициентами асимптотических рядов, входящих в аргументы специальных функций. Иными словами, найденное при исследовании эталонной задачи аналитическое выражение для волнового поля переносится на исходную задачу. Коэффициенты асимптотических рядов последовательно определяются при подстановке этого аналитического выражения в уравнение Гельмгольца и граничные условия, соответствующие исходной задаче. Чем больше членов найдено и удержано в асимптотических рядах, тем быстрее должна стремиться к нулю с ростом  $\omega$  невязка в уравнении и граничных условиях. При переходе точки наблюдения в область, где поле лучей регулярно, формулы, найденные методом эталонных задач, переходят в формулы лучевого метода. Это обстоятельство может рассматриваться как оправдание построенных асимптотических формул (еще не на уровне теорем, разумеется).

*Метод эталонных задач излагается на примере плоской задачи о собственных функциях типа шепчущей галереи (гл. 6) и типа прыгающего мячика (гл. 7).*

Нетрудно заметить «концентричность» изложения вопроса о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности одномерных циклов. Сначала рассмотрение ведется лучевым методом в малом, затем методом параболического уравнения и, наконец, методом эталонных задач, позволяющим получить и некоторые строгие результаты (§ 6 гл. 6). С помощью такого изложения мы надеемся не только полнее осветить вопрос об асимптотике собственных функций, но и на простых задачах проиллюстрировать важные методы математической теории дифракции.

*В главах восьмой и девятой рассматриваются задачи о собственных функциях для трехмерных и многомерных областей.*

Занимаясь задачей о собственных колебаниях эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a > b > c > 0,$$

Л. А. Вайнштейн [2] и В. П. Быков [1] пришли к выводу, что некоторые подпоследовательности собственных функций эллипсоида могут сосредотачиваться в окрестности самого большого и самого маленького из эллипсов, получающихся в сечении поверхности эллипсоида координатными плоскостями. Эти эллипсы являются замкнутыми геодезическими на поверхности эллипсоида, устойчивыми в первом приближении. Оказывается (см. Т. Ф. Панкратова [1]), что и у оператора Лапласа, заданного на поверхности эллипсоида, существуют подпоследовательности собственных функций, сосредоточенных в окрестности этих же геодезических.

Естественно встает вопрос об обобщении этих результатов. Именно это и сделано в главе 8, где поверхность эллипсоида заменена произвольным  $m+1$ -мерным римановым компактным многообразием. Основным математическим аппаратом здесь является теория гамильтоновых систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих периодические коэффициенты, и некоторые дифференциальные операторы, свойства которых во многом аналогичны знаменитым операторам рождения и уничтожения в квантовой теории поля.

Применение операторов рождения к функции, аналогичной по своим свойствам состоянию вакуума в квантовой теории поля, приводит к построению искомым собственных функций в первом приближении. Полное асимптотическое разложение для этих собственных функций строится здесь в виде ряда по обратным степеням частоты, коэффициенты которого сравнительно просто выражаются через собственные функции первого приближения.

Другой задачей, рассмотренной в главе 8, является задача о построении асимптотики собственных колебаний трехмерной области  $\Omega$ , которые сосредоточены в окрестности замкнутой геодезической поверхности  $S$ , ограничивающей область  $\Omega$ . Эта задача является своеобразным сочетанием задачи о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической на двумерной поверхности, с задачей о собственных функциях шепчущей галереи. Алгоритм построения коэффициентов асимптотических разложений здесь тоже представляет собою сочетание алгоритмов, примененных для построения асимптотического решения этих двух задач.

Математический аппарат, развитый в главе 8, применим и к задачам, рассмотренным в главах 6 и 7, однако более интересным его приложением посвящена глава 9, где изучаются собственные колебания трехмерного многозеркального резонатора. Задачу о многозеркальном резонаторе удастся рассмотреть как методом параболического уравнения, так и с помощью лучевого метода в малом. Проведение лучевого метода в малом потребовало привлечения довольно тонких приемов аналитической механики.

Большой физический и математический интерес представляют задачи о построении функций Грина или, говоря физическим языком, задачи с точечными источниками колебаний.

Классический метод Фурье приводит к выражению для функции Грина в виде наложения собственных функций. Излагаемые в книге методы позволяют строить асимптотику собственных функций. Естественно ожидать, что наложением асимптотических выражений некоторых аналогов собственных функций можно найти и асимптотику решений соответствующих

задач с точечными источниками колебаний. Асимптотика волн типа шепчущей галереи, полученная в главе 6, используется в главах 10 и 11 при построении асимптотических формул для функции Грина.

В десятой главе рассматривается плоская задача о дифракции волны от точечного источника на гладком отражающем препятствии. Исследованию этой классической задачи теории дифракции посвящено много работ, среди которых основополагающее значение имели работы В. А. Фока. Важные результаты были также получены В. Францем, Дж. Б. Келлером.

Метод эталонных задач позволяет сделать следующий шаг и получить не только главный член асимптотики, но и все следующие. В главе 10 основное внимание уделяется построению асимптотических разложений для функции Грина в пограничном слое, примыкающем к отражающей поверхности  $S$ . На поверхности  $S$  может быть поставлено любое из краевых условий (3)—(5), при этом без каких-либо специальных предположений относительно  $g(M)$  в случае смешанного краевого условия. Наиболее подробно рассматривается случай условия Дирихле. Построенные в главе 10 разложения представляют собою достаточно простые формальные ряды по дробным степеням волнового числа  $k$ . Однако за пределами пограничного слоя эти разложения в исходной форме неприменимы. Для получения формул, пригодных за пределами пограничного слоя, требуется выполнить переход от координат пограничного слоя к так называемым эвольвентным координатам. На этом пути получены и выписаны асимптотические формулы, справедливые с погрешностью  $O(k^{-2/3})$  на любом расстоянии от границы препятствия.

В одиннадцатой главе асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи применяется в задаче о волновом поле источника, расположенном на вогнутой поверхности тела. В этой задаче мы сталкиваемся с эффектом шепчущей галереи и существованием поверхностной волны интерференционного типа. В случае поверхностного источника в любой сколь угодно малой окрестности границы тела расположено бесконечное число каустик. Это огибающие многократно отраженных от границы лучей. Задачи об асимптотике волновых полей в случае изолированных особенностей поля лучей до последнего времени почти не рассматривались. Метод нормальных волн (разложение волнового поля в ряд по некоторым специальным решениям волнового уравнения), который обычно используется в задачах такого рода, обладает наряду с несомненными достоинствами и следующим недостатком: представление волнового поля суммой нормальных волн не позволяет проследить при переходе

точки наблюдения в область, где поле лучей регулярно, формирование волн, подчиняющихся обычным геометро-оптическим закономерностям.

В главе 11 книги интерференционное волновое поле поверхностной волны описывается контурным интегралом от специальных функций. Такого рода подход к описанию волновых полей с неизолированными особенностями поля лучей ведет свое начало от работ В. А. Фока, посвященных исследованию волнового поля в области полутени. Контурные интегралы, описывающие поле поверхностной волны, строятся в книге по методу эталонных задач. Подынтегральные функции этих интегралов на контуре интегрирования имеют достаточно резко выраженные максимумы, что значительно облегчает табулирование интегралов на ЭВМ и составление их таблиц. С другой стороны, эти контурные интегралы при выходе точки наблюдения из области наложения большого числа лучей в область, где поле лучей уже регулярно, могут быть вычислены по методу перевала. Формулы, которые при этом получаются, совпадают с формулами лучевого метода. Смыкание контурных интегралов, описывающих интерференционные волновые поля, с формулами лучевого метода выгодно отличает развиваемый в книге метод от метода нормальных волн.

В двенадцатой главе рассматривается задача дифракции волны, заданной своим лучевым разложением, на гладкой отражающей поверхности  $S$ . Поверхность предполагается выпуклой с отличной от нуля гауссовой кривизной.

В основе построений этой главы лежит идея Д. Людвига искать волновое поле в виде наложения выражений, аналогичных каустическим решениям главы 2. На этом пути удается построить функцию  $I(M, k)$  ( $k$  — волновое число,  $k = \omega/c$ ,  $c = \text{const}$ ), удовлетворяющую в полутени краевому условию Дирихле и уравнению Гельмгольца с произвольно малой невязкой (в смысле порядка по  $k^{-1}$ ,  $k \rightarrow \infty$ ). В освещенной области  $I(M, k)$  переходит в формулу лучевого метода. В зоне тени поведение  $I(M, k)$  согласуется с формулами, предложенными в свое время Келлером на основе эвристических соображений.

Пользуясь методикой главы 12, можно построить асимптотику функции Грина (как в плоском, так и в трехмерном случае), если источник удален от отражающей поверхности  $S$  на расстояние, не зависящее от волнового числа. Если же источник достаточно близок к  $S$ , формулы главы 12 неприменимы. В плоском случае тогда можно воспользоваться построениями главы 10. Таким образом, результаты глав 10 и 12 дополняют друг друга.

Ряд вспомогательных вопросов (например, теория функций Эйри) рассматривается в дополнениях.

Большая часть формул книги получена на основе эвристических соображений, другими словами, выведена из дополнительных по отношению к математической постановке задачи предположений. Эти предположения обычно просты и наглядны. К ним, например, относится высказанный В. А. Фоком принцип локальности в теории высокочастотной дифракции, требование существования у решения фазы уходящей волны и ряд других. Все математические построения, ведущие от этих исходных предположений к конечным результатам, мы старались при этом выполнить так, чтобы они удовлетворяли обычным требованиям математической строгости. Ряд результатов, полученных на основе эвристических соображений, может быть строго обоснован, но из-за громоздких оценок эти доказательства в книге не приводятся. Исключением является теорема, устанавливающая асимптотический характер разложений для собственных значений в задаче о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности границы области. Доказательство этой короткой и изящной теоремы дано в главе 6.

Обоснование других (еще строго не доказанных) результатов асимптотической теории дифракции во многом напоминает обоснование теоретических положений в экспериментальных науках. Анализируя явное решение эталонной задачи дифракции, часто бывает возможно прийти с помощью некоторых построений к асимптотической формуле, относящейся к общему случаю. Эта более общая асимптотическая формула проверяется на других задачах, допускающих явное решение. В экспериментальных науках аналогом явных решений является опыт.

Молодой выпускник математического отделения университета редко владеет искусством рассуждения на физическом уровне строгости, между тем эвристические соображения совершенно необходимы при решении многих математических задач, связанных с физикой. Мы надеемся, что наша книга будет полезной еще и тем, что покажет молодому математику пользу и важность нестрогих, наводящих соображений.

В настоящей главе лучевой метод изложен для волнового уравнения и для уравнений Максвелла.

Основные результаты этой главы не зависят от числа измерений пространства. Имея в виду физические приложения, мы ограничиваемся рассмотрением трехмерного случая.

### § 1. Исходные формулы лучевого метода в скалярном случае

Рассмотрим волновое уравнение с переменной бесконечно дифференцируемой скоростью

$$\frac{1}{c^2(M)} W_{tt} - \Delta W = 0, \quad (1.1)$$

$$M = M(x, y, z), \quad c(M) > 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Предположим, что

$$W = e^{-i\omega t} u(M, \omega). \quad (1.2)$$

Тогда функция  $u(M, \omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(M)} u = 0, \quad (1.3)$$

которое при  $\frac{\omega^2}{c^2(M)} = k^2 = \text{const}$  называется *уравнением Гельмгольца*. Будем искать его решение в виде формального разложения

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(M) e^{i\omega \tau(M)}}{(-i\omega)^{s+\gamma}}, \quad (1.4)$$

$$\gamma = \text{const}, \quad (-i)^{s+\gamma} = e^{-\frac{i\pi}{2}(s+\gamma)}.$$

Разложение (1.4) в той форме, в какой оно записано <sup>\*</sup>), представляет собой разложение по размерному параметру — обратным степеням частоты. На самом деле разложение (1.4) есть

---

<sup>\*</sup> В большинстве приложений бывает нужно построить лишь конечное число членов разложения (1.4), для чего достаточно существования лишь конечного числа производных  $c(M)$ .



разложение по степеням малого безразмерного параметра, в который наряду с обратной степенью частоты входят геометрические и другие характеристики конкретной задачи. Преимущество записи (1.4) состоит в том, что она позволяет в наиболее простой форме, не осложненной конкретными деталями, учесть и использовать специфику поведения волнового поля на высоких частотах для целого класса задач. Отметим, что и в следующих главах книги, исходя из этих же соображений, мы часто будем использовать «размерную» форму записи соответствующих разложений, которые в каждом конкретном случае могли бы быть записаны, разумеется, в безразмерном виде. Введение  $(-i)^{s+\nu}$  в знаменатель не играет здесь принципиальной роли и сделано для некоторых формальных упрощений.

Подставим (1.4) в уравнение (1.3) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $1/\omega$ . Главный член имеет вид

$$\left(\frac{1}{-i\omega}\right)^{\nu} \omega^2 u_0(M) \left(\frac{1}{c^2(M)} - (\nabla\tau)^2\right).$$

Считая, что  $u_0(M) \neq 0$ , получим

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2(M)}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называется *уравнением эйконала*. Приравняв нулю коэффициент при  $1/(-i\omega)^{\nu-1+s}$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ), получим, учитывая (1.5),

$$2\nabla\tau\nabla u_s + u_s \Delta\tau = \Delta u_{s-1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad u_{-1} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) называются *уравнениями переноса*. Параграфы 2, 3 и 4 посвящены решению и исследованию уравнений (1.5) и (1.6).

## § 2. Уравнение эйконала, лучи, волновые фронты

Уравнение эйконала (1.5) в некотором смысле «содержит в себе» всю геометрическую оптику. Точнее, анализируя это уравнение, мы естественным образом приходим к основным понятиям геометрической оптики.

Рассмотрим функционал

$$\int_{M_0}^M \frac{ds}{c(M)} = \int_{M_0}^M \frac{\sqrt{x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + z_\sigma^2}}{c(M)} d\sigma, \quad (2.1)$$

который будем называть *функционалом Ферма*. Здесь  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M(x, y, z)$  — точки в пространстве  $(x, y, z)$ ;  $x = x(\sigma)$ ,

$y = y(\sigma)$ ,  $z = z(\sigma)$  — кривая, их соединяющая;  $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma) = \left( \frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma} \right)$ ,  $ds$  — элемент длины дуги.

В соответствии с установившейся терминологией будем называть *экстремалими* функционала (2.1) кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера

$$\frac{1}{|r_\sigma|} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{r_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} \right) - \nabla \frac{1}{c} = 0 \quad (r_\sigma = (x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma))$$

или

$$\frac{d}{ds} \left( s \frac{1}{c} \right) - \nabla \frac{1}{c} = 0, \quad (2.2)$$

где  $s = r_\sigma / |r_\sigma|$  — единичный вектор касательной к экстремали.

Выпустим из точки  $M_0$  по всем направлениям экстремали функционала (2.1). Можно доказать, вводя вблизи  $M_0$  римановы нормальные координаты\*), что существует некоторая окрестность  $\Xi$  точки  $M_0$ , в которой через каждую точку  $M$  проходит одна и только одна экстремаль. В этой окрестности выпущенные из точки  $M_0$  экстремали образуют центральное поле\*\*).

Пусть теперь

$$\tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c}, \quad (2.3)$$

где интеграл берется по экстремали. Функция  $\tau(M, M_0)$  определяется равенством (2.3) в окрестности  $\Xi$  точки  $M_0$ , покрытой полем экстремалей. Если точка  $M$  переменная, а  $M_0$  фиксирована, то функция  $\tau(M, M_0)$  удовлетворяет уравнению эйконала (1.5). В самом деле, для дифференциала  $\tau$ , используя формулу для вариации функционала с подвижным концом\*\*), получим

$$d\tau = \frac{x_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dx + \frac{y_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dy + \frac{z_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dz.$$

С другой стороны,

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz,$$

поэтому

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz = \frac{x_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dx + \frac{y_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dy + \frac{z_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c} dz$$

\*) См О Веблен [1] или П. К. Рашевский [2].

\*\*\*) См В. И. Смирнов [3].

и в силу независимости  $dx, dy, dz$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \tau_x = \frac{x_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \tau_y = \frac{y_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \tau_z = \frac{z_\sigma}{|r_\sigma|} \frac{1}{c},$$

или

$$\nabla \tau = \frac{1}{c} \cdot r_\sigma / |r_\sigma|. \quad (2.4)$$

Из этой формулы следует параллельность  $\nabla \tau$  экстремали функционала Ферма. Приравнявая квадраты длин векторов, стоящих слева и справа в равенстве (2.4), получим уравнение эйконала

$$(\nabla \tau)^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}. \quad (2.5)$$

Можно и несколько иначе строить решения уравнения (2.5). Пусть  $M_0$  пробегает некоторую поверхность  $S$ . Из каждой точки поверхности  $S$  в направлении нормали выпустим экстремаль функционала Ферма и определим  $\tau$  формулой (2.3) (здесь  $M_0$  не фиксирована, а пробегает поверхность  $S$ ). Для функционала (2.1) условия трансверсальности совпадают с условиями ортогональности\*), поэтому

$$d\tau = \frac{1}{c|r_\sigma|} (x_\sigma dx + y_\sigma dy + z_\sigma dz), \quad (2.6)$$

откуда опять следует формула (2.4) и, следовательно, уравнение эйконала (2.5).

Поверхности  $\tau = \text{const}$ , согласно общепринятой терминологии, будем называть *волновыми фронтами*, а экстремали функционала Ферма — *лучами*.

Только что описанное построение функции  $\tau$  есть восстановление волнового фронта  $t = \tau$  по его положению при  $t = 0$  (можно, разумеется, точно так же построить волновой фронт и по его положению при  $t = t_0$ ,  $t_0 = \text{const} \neq 0$ ).

Ортогональность вектора  $\nabla \tau$  поверхности  $\tau = \text{const}$  и формула (2.4) показывают, что лучи ортогональны волновым фронтам. В учебниках физики волновой фронт обычно определяется как поверхность постоянной фазы, что хорошо согласуется с данным выше определением. В самом деле, при  $\omega \rightarrow \infty$  из формул  $W = e^{-i\omega t u}$  и (1.4) получаем

$$W \sim e^{-i\omega(t - \tau(M))} \frac{u_0(M)}{(-i\omega)^{\nu}}. \quad (2.7)$$

Фаза поля  $W$  постоянна на движущихся поверхностях  $t - \tau(M) = C = \text{const}$ , т. е. при фиксированном  $t$  поверхности

\*) См. В. И. Смирнов [3], гл. 2.

постоянной фазы — это поверхности, где постоянна функция  $\tau(M)$ .

Построим поверхность волнового фронта в момент времени  $t$ . Для этого (рис. 1) из каждой точки  $M_0$  поверхности  $\Sigma_{t_0}$  выпустим луч, перпендикулярный этой поверхности и направленный в сторону возрастания функции  $\tau$ . Продолжим каждый из выпущенных лучей до такой точки  $M$ , что интеграл  $\int_{M_0}^M c^{-1} ds$ , вычисленный вдоль луча, принимал бы для всех лучей одно и то же значение, равное  $t - t_0$ . Геометрическое место точек  $M$ , определяемое равенством

$$\int_{M_0}^M \frac{ds}{c} = t - t_0, \quad (2.8)$$

дает положение волнового фронта  $\Sigma_t$  в момент времени  $t$  (т. е. поверхности  $\tau(M) = t - C$ ).

Резюмируя, можно сказать, что волновые фронты распространяются вдоль лучей, оставаясь все время ортогональными к этим лучам. Это хорошо согласуется с физическим понятием лучей как линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Скорость волнового фронта в точке  $M_0$  при  $t = t_0$  естественно определить как предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|M_0 M'|}{t - t_0},$$

где  $|M_0 M'|$  — длина отрезка нормали к  $\Sigma_{t_0}$  восстановленной в точке  $M_0$  и продолженной до пересечения в точке  $M'$  с  $\Sigma_t$  (рис. 1).

В силу ортогональности луча  $M_0 M$  к  $\Sigma_{t_0}$  длина  $|M_0 M|$  луча  $M_0 M$  с точностью до малых высшего порядка совпадает с длиной отрезка  $M_0 M'$ .

Из формулы (2.8) легко получаем

$$\frac{1}{c(M_0)} \cdot |M_0 M| \sim t - t_0,$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|M_0 M'|}{t - t_0} = c(M_0), \quad (2.9)$$

т. е.  $c(M_0)$  — скорость волнового фронта в точке  $M_0$ .

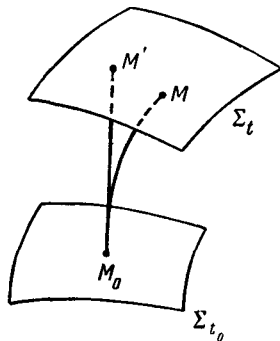


Рис. 1.

### § 3. Лучевые координаты

Чтобы получить решение уравнений (1.6), введем специальную систему координат, естественно связанную с лучами и волновыми фронтами.

Рассмотрим семейство всех лучей, берущих свое начало в некоторой фиксированной точке  $M_0$  (см. § 2), т. е. центральное поле лучей.

За параметр  $\sigma$ , определяющий точки на луче, можно взять эйконал  $\tau$ :

$$\tau = \tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c}. \quad (3.1)$$

Пусть  $r = r(\tau)$  ( $r = (x, y, z)$ ) — параметрическое уравнение луча.

Очевидно, что длина касательного к лучу вектора

$$\frac{1}{c(M_0)} \cdot \frac{dr}{d\tau} \Big|_{M_0} = s_0 \quad (3.2)$$

равна единице. Задав вектор  $s_0$ , мы однозначно определяем луч  $r = r(\tau)$ , выходящий из  $M_0$ , а чтобы задать  $s_0$ , достаточно задать два определяющих его параметра  $\alpha, \beta$ , например сферические координаты конца вектора  $s_0$  на единичной сфере.

Итак, в окрестности точки  $M_0$  определена система координат  $\alpha, \beta, \tau$ : задав  $\alpha, \beta$ , определяем луч; задав  $\tau$ , находим точку на луче. Таким образом, каждая точка  $M(x, y, z)$  есть однозначная функция  $\alpha, \beta, \tau$ :

$$x = x(\alpha, \beta, \tau), \quad y = y(\alpha, \beta, \tau), \quad z = z(\alpha, \beta, \tau),$$

или, в векторной форме,

$$r = r(\alpha, \beta, \tau). \quad (3.3)$$

Можно доказать, что в некоторой окрестности  $M_0$  параметры  $\alpha, \beta$  и  $\tau$  — однозначные функции  $x, y, z$  (см. на стр. 22 абзац, предшествующий формуле (2.3)).

В случае нецентрального поля лучей также можно ввести аналогичную систему координат. Пусть  $\Sigma$  — волновой фронт, на котором  $\tau = \tau_0 = \text{const}$ . Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, определяющие точки на  $\Sigma$ . Из каждой точки  $M_0 \in \Sigma$  проведем луч, перпендикулярный  $\Sigma$  в точке  $M_0$ . Точки на луче будем характеризовать величиной эйконала в соответствии с формулой (3.1). Формула (3.3) определяет опять систему криволинейных координат (теперь уже в окрестности  $\Sigma$ ). Здесь  $\alpha, \beta$  — координаты точки  $M_0 \in \Sigma$ , в точке  $M$  на луче  $\tau = \tau_0 \pm \int_{M_0}^M c^{-1} ds, \tau_0 =$

$= \text{const.}$  С одной стороны  $\Sigma$  следует всегда брать знак «+», с другой — знак «-».

Координаты  $\alpha, \beta, \tau$  как в случае центрального, так и в случае нецентрального поля называются *лучевыми координатами*. Зафиксировав  $\alpha, \beta$  в формуле (3.3), получим луч, зафиксировав  $\tau$  — волновой фронт. Векторы  $\mathbf{r}_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta$  лежат в касательной плоскости к волновому фронту, поэтому  $\mathbf{r}_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta$  перпендикулярны  $\mathbf{r}_\tau$ :

$$(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) = 0. \quad (3.4)$$

Кроме того,

$$|\mathbf{r}_\tau| = c(M). \quad (3.5)$$

Аналогично строятся лучевые координаты и в плоском случае. Здесь, чтобы охарактеризовать луч, достаточно задать один параметр  $\alpha$ , и переход от координат  $\alpha, \tau$  к декартовым координатам в векторной форме запишется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \tau). \quad (3.6)$$

Вернемся к трехмерному случаю.

Введем понятие лучевой трубки. *Лучевой трубкой* называется совокупность лучей, отвечающих параметрам  $\alpha, \beta$ , меняющимся в бесконечно малом прямоугольнике на плоскости  $\alpha, \beta$ :

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + d\alpha; \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_0 + d\beta. \quad (3.7)$$

Площадь нормального поперечного сечения лучевой трубки равна  $J d\alpha d\beta$ , причем

$$J = |[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]|, \quad (3.8)$$

где  $[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{r}_\alpha$  и  $\mathbf{r}_\beta$ .

Нетрудно показать, что  $J = \frac{1}{c} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \right|$ , где  $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)}$  — якобиан перехода от декартовых координат  $x, y, z$  к лучевым  $\alpha, \beta, \tau$ . В самом деле, пользуясь правилом умножения определителей, получаем

$$\left( \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \right)^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) \\ (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) \\ (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\tau) \end{vmatrix}.$$

Искомое выражение для  $J$  теперь легко следует из равенств

$$(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\tau) = c^2,$$

$$J^2 = ([\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta], [\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \\ (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) \end{vmatrix}.$$

Поле лучей при выполнении эквивалентных друг другу неравенств

$$J \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \neq 0$$

называется *регулярным*.

Величина  $J$  играет важную роль в дальнейшем. Чем больше  $J$ , тем больше расходятся лучи. Величину  $J$  называют поэтому *расходимостью поля лучей* или просто *расходимостью*.

В плоском случае аналогом лучевой трубки является совокупность лучей  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + d\alpha$ , а аналогом величины  $J$  — длина вектора  $r_\alpha$ , т. е.  $J = |r_\alpha|$ .

Если  $c = \text{const}$ , то уравнения (2.2) дают

$$r = a\sigma + b,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные векторы, т. е. в случае  $c = \text{const}$  лучи являются прямыми линиями.

Обратимся к плоскому случаю. Пусть (рис. 2)  $\rho$  — радиус кривизны волнового фронта  $\tau = \tau_0$  в точке  $M = M_0$ . Лучи при  $c(M) = c = \text{const}$  будут просто нормальными к кривой  $\tau = \tau_0$ .

Очевидно, что радиус кривизны волнового фронта  $\tau = \tau_1$  в точке  $M_1$  будет  $\rho + c(\tau_1 - \tau_0)$ . Из подобия двух бесконечно тонких треугольников с основаниями  $d\Sigma$  и  $d\Sigma_0$  и вершиной  $O$  ( $O$  — центр кривизны), легко получаем\*)

$$J = \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} = \frac{\rho + c(\tau_1 - \tau_0)}{\rho}. \quad (3.9)$$

В трехмерном случае аналогичная формула выводится столь же легко из геометрических соображений

$$\frac{d\Sigma(M_1)}{d\Sigma(M_0)} = J = \frac{[\rho_1 + c(\tau_1 - \tau_0)] [\rho_2 + c(\tau_1 - \tau_0)]}{\rho_1 \rho_2}, \quad (3.10)$$

здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — главные радиусы кривизны волнового фронта  $\tau = \tau_0$  в точке  $M_0$ ,  $M_1$  — точка на пересечении волнового фронта  $\tau = \tau_1$  и луча, выходящего из точки  $M_0$ ,  $c = \text{const}$  — скорость распространения волн.

\*) Равенство  $J = \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}$  следует из определения геометрической расходимости (3.8), если координаты  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны так, что  $J = 1$  на волновом фронте  $\tau = \tau_0$

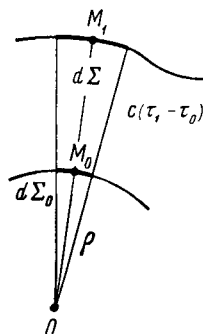


Рис. 2.

Используя понятие лучевой трубки, выведем важную для дальнейших рассмотрений формулу для  $\Delta\tau$ . Воспользуемся равенством \*)

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2} = \Delta\tau = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{|\Omega|} \int_S \frac{\partial\tau}{\partial n} dS, \quad (3.11)$$

где  $\Omega$  — область, стягивающаяся в точку  $M$ ,  $|\Omega|$  — ее объем,  $\frac{\partial\tau}{\partial n}$  — нормальная производная от  $\tau$ , интеграл берется по поверхности  $S$ , ограничивающей  $\Omega$ . За  $\Omega$  возьмем область, ограниченную лучевой трубкой и двумя бесконечно близкими волновыми фронтами

$$\tau(M) = \tau = \text{const} \quad \text{и} \quad \tau(M) = \tau + d\tau = \text{const}.$$

На боковой поверхности лучевой трубки  $\frac{\partial\tau}{\partial n} = 0$ , на торцах  $\tau = \text{const}$  и  $\tau + d\tau = \text{const}$  имеем  $\frac{\partial\tau}{\partial n} = \pm \frac{1}{c}$ , где  $c$  — скорость в соответствующей точке. Получаем

$$\int_S \frac{\partial\tau}{\partial n} dS \approx \frac{1}{c} J d\alpha d\beta |_{\tau+d\tau} - \frac{1}{c} J d\alpha d\beta |_{\tau}. \quad (3.12)$$

В силу ортогональности лучевой трубки волновому фронту

$$|\Omega| \approx J d\alpha d\beta dn = J d\alpha d\beta \frac{dn}{d\tau} d\tau = Jc d\alpha d\beta d\tau, \quad (3.13)$$

$dn$  — высота параллелепипеда  $\Omega$ .

Подставляя (3.12), (3.13) в (3.11), находим

$$\Delta\tau \approx \frac{d\alpha d\beta \left( \frac{J}{c} \Big|_{\tau+d\tau} - \frac{J}{c} \Big|_{\tau} \right)}{d\alpha d\beta d\tau cJ},$$

откуда

$$\Delta\tau = \frac{1}{cJ} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{J}{c} \right). \quad (3.14)$$

Производная здесь берется вдоль луча. Вывод формулы (3.14) вполне аналогичен классическому выводу выражения для оператора Лапласа в произвольных ортогональных координатах \*).

В плоском случае формула (3.14) также имеет место.

\*) См В. И. Смирнов [1].



#### § 4. Основные рекуррентные формулы лучевого метода

Обратимся к уравнениям (1.6). Их удобнее всего записать в лучевых координатах.

Рассмотрим случай  $s = 0$

$$2\nabla\tau\nabla u_0 + u_0\Delta\tau = 0. \quad (4.1)$$

Преобразуем выражение  $2\nabla\tau\nabla u_0$ :

$$2\nabla\tau\nabla u_0 = 2 \frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|} \nabla u_0 \cdot |\nabla\tau| = 2 \frac{du_0}{ds} \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \frac{du_0}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{2}{c^2} \frac{du_0}{d\tau},$$

здесь  $\frac{du_0}{ds}$  и  $\frac{du_0}{d\tau}$  — производные вдоль луча.

Уравнение (4.1) с учетом (3.14) запишется в виде

$$\frac{2}{c^2} \frac{du_0}{d\tau} + \frac{u_0}{Jc} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{J}{c} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Интегрируя, получим

$$u_0(M) = \psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{c/J}, \quad (4.3)$$

причем функция  $\psi_0(\alpha, \beta)$  играет роль постоянной интегрирования. Она зависит только от луча и из уравнения (4.1) не определяется.

Формула (4.3) имеет отчетливый физический смысл, к выяснению которого мы и переходим. Вернемся к динамическому уравнению (1.1):

$$\frac{1}{c^2(M)} W_{tt} - \Delta W = 0 \quad (W(M, t) = e^{-i\omega t} u(M)). \quad (4.4)$$

Во всех случаях, когда волновой процесс описывается уравнением (4.4), выражение

$$\left( \frac{1}{2} \frac{1}{c^2(M)} |W_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2 \right) \text{const} \quad (4.5)$$

имеет смысл плотности энергии (const зависит от выбора единиц измерения энергии).

Рассмотрим лучевую трубку, определенную в предыдущем параграфе. Пусть  $d\Omega_0$  — объем, вырезаемый двумя бесконечно близкими волновыми фронтами

$$\tau(M) = \tau_0 = \text{const}; \quad \tau(M) = \tau_0 + d\tau = \text{const}.$$

Если это положение волновые фронты занимали в момент времени  $t_0$ , то в момент  $t$  они будут занимать положение

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \tau_0 + t - t_0 = \text{const}; \\ \tau(M) &= \tau_0 + t - t_0 + d\tau = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть  $d\Omega_1$  — объем, который вырезают волновые фронты (4.6) из лучевой трубки. Потребуем, чтобы энергия волнового поля в объеме  $d\Omega_0$  совпала с его энергией в объеме  $d\Omega_1$  (с точностью до главных членов).

Подставляя в равенство

$$\left(\frac{1}{2c^2(M)} |W_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2\right)_{M_0} d\Omega_0 = \left(\frac{1}{2c^2(M)} |W_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2\right)_M d\Omega_1$$

(где  $M_0$  — точка с лучевыми координатами  $\alpha_0, \beta_0, \tau_0$ ,  $M$  — точка с лучевыми координатами  $\alpha, \beta, \tau$ , причем  $\tau = \tau_0 + t - t_0$ ), выражение (2.7), т. е.

$$W \sim e^{-i\omega(t-\tau)} u_0 \frac{1}{(-i\omega)^\nu},$$

получим с точностью до главных членов по  $\omega$  ( $\omega \rightarrow \infty$ )

$$\frac{\omega^{2-2\nu}}{c^2(M_0)} |u_0(M_0)|^2 d\Omega_0 = \frac{\omega^{2-2\nu}}{c^2(M)} |u_0^2(M)| d\Omega_1.$$

Заменяя  $d\Omega_0$  и  $d\Omega_1$  выражениями  $cJ|_{M_0} da d\beta d\tau$  и  $cJ|_M da d\beta d\tau$ , придем к формуле

$$|u_0(M)| = |u_0(M_0)| \sqrt{\frac{c(M)}{c(M_0)}} \sqrt{\frac{J(M_0)}{J(M)}}, \quad (4.7)$$

эквивалентной формуле (4.3).

Таким образом, формула (4.3) означает, что энергия внутри бесконечно малого объема  $d\Omega_0$  при движении его с волновым фронтом в первом приближении не меняется.

Формула (4.3) показывает, в частности, как расходимость лучей, т. е. величина  $J$ , влияет на интенсивность волнового поля.

Вернемся к интегрированию уравнений переноса (1.6). Пусть теперь  $s > 0$ . Записывая уравнение (1.6) при  $s > 0$  в лучевых координатах (см. вывод формулы (4.2)), получим

$$\frac{2}{c^2} \frac{du_s}{d\tau} + u_s \frac{1}{Jc} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c}\right) = \Delta u_{s-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на интегрирующий множитель  $\frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{J}{c}}$ , получим

$$\frac{d}{d\tau} \left( \sqrt{\frac{J}{c}} u_s \right) = \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{J}{c}} \Delta u_{s-1},$$

откуда

$$u_s(M) = \sqrt{\frac{c}{J}} \left( \psi_s(\alpha, \beta) + \int_{\tau(\alpha, \beta)}^{\tau} \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{J}{c}} \Delta u_{s-1} d\tau \right) \quad (4.8)$$

(здесь интеграл берется по лучу,  $\psi_s(\alpha, \beta)$  и  $\tau(\alpha, \beta)$  — произвольные функции).

Таким образом, решение уравнений переноса (1.6) имеет вид (4.3) и (4.8). Оно определяется последовательностью функций  $\psi_0, \psi_1, \dots$ , для нахождения которых нужна дополнительная информация о функции  $u(M, \omega)$ .

Формулы (4.3) и (4.8) лежат в основе применений лучевого метода к конкретным задачам коротковолновой асимптотики волнового поля. В § 6 настоящей главы приводится пример получения лучевым методом асимптотики одной дифракционной задачи.

## § 5. Уравнения Максвелла

Без каких-либо принципиальных изменений вывод основных формул лучевого метода распространяется и на уравнения Максвелла.

Рассмотрим уравнения Максвелла для случая непоглощающей неоднородной изотропной среды:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь и всюду в настоящем параграфе  $c$  — скорость света в пустоте,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — магнитная проницаемость, уравнения Максвелла имеют вид (5.1) в гауссовой системе единиц.

Будем искать решение этой системы в виде рядов

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{H}_s(x, y, z) \frac{e^{-i\omega(t-\tau(x, y, z))}}{(-i\omega)^{s+\gamma}}, \\ \mathbf{E} &= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{E}_s(x, y, z) \frac{e^{-i\omega(t-\tau(x, y, z))}}{(-i\omega)^{s+\gamma}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$(-i)^{s+\gamma} = e^{-\frac{\pi}{2}i(s+\gamma)}.$$

Подставляя выражения (5.2) в уравнения Максвелла и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $1/\omega$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E}_{s+1} + [\nabla\tau, \mathbf{H}_{s+1}] &= \operatorname{rot} \mathbf{H}_s, \\ -\frac{\mu}{c} \mathbf{H}_{s+1} + [\nabla\tau, \mathbf{E}_{s+1}] &= \operatorname{rot} \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (5.3)$$

( $s = -1, 0, 1, 2, \dots$ ;  $\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{E}_{-1} \equiv 0$ ,  $[\ ]$  — символ векторного произведения векторов).

Рассмотрим случай  $s = -1$ :

$$\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E}_0 + [\nabla\tau, \mathbf{H}_0] = 0, \quad -\frac{\mu}{c} \mathbf{H}_0 + [\nabla\tau, \mathbf{E}_0] = 0. \quad (5.4)$$

Однородная система (5.4) позволяет получить уравнение эйконала для рассматриваемой задачи. Действительно, из уравнений (5.4) следует, что  $\nabla\tau$ ,  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{E}_0$  взаимно ортогональные векторы. Переносим затем в уравнениях (5.4) вторые слагаемые в правые части и приравняв длины соответствующих векторов, получаем

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{\epsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{c_1^2(M)}, \quad c_1(M) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (5.5)$$

т. е. уравнение эйконала. Функция  $c_1(M)$  определяет скорость распространения волновых фронтов  $t = \tau$  (см. § 2).

Выпишем теперь общее решение системы (5.4). Введем, как и ранее, лучи-экстремали функционала Ферма

$$\int \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} ds = \int \frac{ds}{c_1(M)} \quad (5.6)$$

и лучевые координаты  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau)$ .

Пусть  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\zeta}$  — соответственно главная нормаль и бинормаль луча. В силу того, что  $\mathbf{E}_0 \perp \nabla\tau$  и  $\mathbf{H}_0 \perp \nabla\tau$ , найдутся такие скаляры  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ , что

$$\mathbf{E}_0 = A'\mathbf{n} + A''\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{H}_0 = B'\mathbf{n} + B''\boldsymbol{\zeta}.$$

Подставляя выражения для  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  в (5.4), получим два соотношения для  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ , из которых нетрудно вывести, что общее решение системы (5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{n}\Phi_0(\tau, \alpha, \beta)\sqrt{\mu} + \boldsymbol{\zeta}\Psi_0(\tau, \alpha, \beta)\sqrt{\mu}, \\ \mathbf{H}_0 &= -\mathbf{n}\Psi_0(\tau, \alpha, \beta)\sqrt{\epsilon} + \boldsymbol{\zeta}\Phi_0(\tau, \alpha, \beta)\sqrt{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $\Phi_0$ ,  $\Psi_0$  — подлежащие определению скалярные функции.

Положим теперь в (5.3)  $s = 0$ . Тогда

$$\frac{\epsilon}{c}\mathbf{E}_1 + [\nabla\tau, \mathbf{H}_1] = \text{rot } \mathbf{H}_0, \quad -\frac{\epsilon}{\mu}\mathbf{H}_1 + [\nabla\tau, \mathbf{E}_1] = \text{rot } \mathbf{E}_0. \quad (5.8)$$

Равенства (5.8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$ . Определитель системы равен нулю, так как соответствующая однородная система совпадает с (5.4), а система (5.4) имеет два линейно независимых решения, которые получатся, если в формуле (5.7) положить сначала  $\Phi_0 = 1$ ,  $\Psi_0 = 0$ , потом  $\Phi_0 = 0$ ,  $\Psi_0 = 1$ .

Система линейных алгебраических уравнений с нулевым определителем не всегда разрешима. Имеет место следующая

**Т е о р е м а.** Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\mathbf{f}$  был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы  $A^*\mathbf{y} = 0$ .

Здесь  $A^*$  — эрмитово сопряженная матрица по отношению к  $A$ . (Чтобы получить  $A^*$ , надо в матрице  $A$  заменить все элементы  $a_{ik}$  на комплексно сопряженные и поменять строки и столбцы местами.)

Для системы (5.8) нетрудно показать, что необходимое и достаточное условие разрешимости заключается в том, что для любой пары векторов  $l$  и  $m$  таких, что

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} l + [m, \nabla\tau] &= 0, \\ -\frac{\mu}{c} m + [l, \nabla\tau] &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

должно выполняться равенство

$$l \operatorname{rot} H_0 + m \operatorname{rot} E_0 = 0. \quad (5.10)$$

Фундаментальная система решений системы (5.9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\mu} \xi, & l_2 &= \sqrt{\mu} n, \\ m_1 &= \sqrt{\varepsilon} n, & m_2 &= -\sqrt{\varepsilon} \xi, \end{aligned}$$

поэтому равенство (5.10) эквивалентно двум равенствам

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \xi \operatorname{rot} H_0 + \sqrt{\varepsilon} n \operatorname{rot} E_0 &= 0, \\ \sqrt{\mu} n \operatorname{rot} H_0 - \sqrt{\varepsilon} \xi \operatorname{rot} E_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В основе дальнейших преобразований уравнений (5.11) лежат два тождества

$$\begin{aligned} \xi \operatorname{rot} n - n \operatorname{rot} \xi &= \operatorname{div} s_0, \\ n \operatorname{rot} n + \xi \operatorname{rot} \xi &= \frac{2}{T}, \end{aligned}$$

где  $s_0 = c_1 \nabla\tau$  — единичный касательный вектор к лучу,  $T$  — радиус кручения луча. Первое тождество есть простое следствие классического равенства  $[s_0, n] = \xi$ , доказательство второго громоздко, и мы его опускаем.

Разделим левые части равенств (5.11) на  $c$  — скорость света в пустоте и подставим выражения для  $E_0$  и  $H_0$  из (5.7). После довольно сложных выкладок получим

$$\begin{aligned} -2\nabla\tau\nabla\Psi_0 - \Psi_0 \Delta\tau + \frac{2}{c_1(M)T} \Phi_0 &= 0, \\ -2\nabla\tau\nabla\Phi_0 - \Phi_0 \Delta\tau - \frac{2}{c_1(M)T} \Psi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь  $T$  — радиус кручения луча.

Умножим первое из уравнений (5.12) на  $\Psi_0$ , второе — на  $\Phi_0$  и сложим полученные результаты. После деления на  $-\sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2}$  придем к уравнению

$$2\nabla\tau\nabla\sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} + \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} \Delta\tau = 0,$$

решая которое (см. § 4) найдем

$$\sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} = \psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{c_1(M)}{J}}, \quad (5.13)$$

где  $J = |[r_\alpha, r_\beta]|$  — расходимость поля лучей.

Формула (5.13) имеет тот же энергетический смысл, что и ее скалярный аналог — формула (4.3). Разумеется, вместо плотности энергии (4.5) здесь следует взять плотность энергии электромагнитного поля

$$\frac{1}{8\pi} (\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2).$$

Величина  $\sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2}$  определяет длины векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  (см. формулу (5.7)). Чтобы определить, как меняется направление этих векторов, введем угол  $\theta$  соотношениями

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} \cos \theta, \\ \Psi_0 &= \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Подставим (5.14) в (5.12). После небольших преобразований получим важное равенство

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T},\tag{5.15}$$

где  $T$  — радиус кривизны,  $ds$  — дифференциал длины луча.

Формулы (5.4), (5.7), (5.13)–(5.15) определяют (с точностью до не определенной пока функции  $\psi_0(\alpha, \beta)$ ) изменение векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  при движении волнового фронта вдоль луча.

В самом деле, из формул (5.4) следует, что векторы  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\nabla\tau$  образуют левую тройку взаимно ортогональных векторов (если система координат  $x, y, z$  левая). Эта тройка со скоростью волнового фронта  $c_1(M)$  движется вдоль луча.

Длина векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  меняется согласно формулам

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}_0| &= \sqrt{\mu} \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} = \psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{c_1(M)}{J}}, \\ |\mathbf{H}_0| &= \sqrt{\epsilon} \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2} = \psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{c_1(M)}{J}},\end{aligned}\tag{5.16}$$

легко вытекающим из соотношений (5.7) и (5.13).

Чтобы найти закон вращения вектора  $\mathbf{E}_0$  вокруг вектора касательной  $\nabla\tau$ , спроектируем  $\mathbf{E}_0$  на нормаль  $\mathbf{n}$  и бинормаль  $\zeta$  к лучу. Формулы (5.7), (5.14) и (5.15) дадут

$$E_{0n} = |\mathbf{E}_0| \cos \theta, \quad E_{0\zeta} = |\mathbf{E}_0| \sin \theta,\tag{5.17}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T}.\tag{5.18}$$

Соотношения (5.17), (5.18) показывают, с какой скоростью изменяется угол  $\theta$  между главной нормалью к лучу и вектором  $\mathbf{E}_0$ .

Коснемся коротко одной интересной геометрической интерпретации равенства (5.18). Если назвать *расстоянием между двумя произвольными близ-*

*кими точками*  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M(x, y, z)$  значение  $\tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M c_1^{-1} ds$  (ин-

теграл берется по лучу, соединяющему точки  $M_0$  и  $M$ ), то область, где изучается волновое поле, можно будет рассматривать как риманово многообразие с метрическим тензором

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix},$$

причем лучи, очевидно, совпадут с геодезическими линиями. Любой (ковариантный или контравариантный) вектор в евклидовом пространстве можно рассматривать как вектор (ковариантный или контравариантный) на этом многообразии. Если теперь произвольный вектор, перпендикулярный лучу, параллельно переносить\*) вдоль этого луча (параллельно в смысле римановой геометрии), то он будет все время оставаться перпендикулярным лучу и угол между этим вектором и евклидовой главной нормалью к лучу будет меняться в соответствии с формулой (5.18). Поэтому равенства (5.17) и (5.18) означают, что при распространении электромагнитного поля составляющие векторов поля в нулевом приближении испытывают параллельный перенос (в смысле римановой геометрии) вдоль луча.

Для нахождения  $E_1$ ,  $H_1$  заметим, что в силу того, что условия (5.11), (5.12) выполняются, система алгебраических уравнений (5.8) разрешима, хотя и неоднозначно. Общее решение системы (5.8) можно записать в виде

$$E_1 = E_1^0 + E_1^1; \quad H_1 = H_1^0 + H_1^1, \quad (5.19)$$

где

$$E_1^0 = \frac{\varepsilon}{2c} [(\operatorname{rot} H_0, s_0) s_0 + \operatorname{rot} H_0], \quad (5.20)$$

$$H_1^0 = -\frac{\mu}{2c} [(\operatorname{rot} E_0, s_0) s_0 + \operatorname{rot} E_0],$$

$$s_0 = \frac{c}{V\varepsilon\mu} \nabla\tau = \nabla\tau/|\nabla\tau|; \quad |s_0| = 1,$$

$$\begin{aligned} E_1^1 &= n\Phi_1(\tau, \alpha, \beta) V\bar{\mu} + \xi\Psi_1(\tau, \alpha, \beta) V\bar{\mu}, \\ H_1^1 &= -n\Psi_1(\tau, \alpha, \beta) V\bar{\varepsilon} + \xi\Phi_1(\tau, \alpha, \beta) V\bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Векторы  $E_1^0$ ,  $H_1^0$  — это частное решение неоднородной системы уравнений,  $E_1^1$ ,  $H_1^1$  — общее решение системы однородных уравнений, которое, очевидно, дается формулами (5.7), где индекс «0» следует заменить на «1».

Положим теперь в равенствах (5.3)  $s = 1$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения компонент векторов  $E_2$  и  $H_2$ . Ее определитель равен нулю, так как соответствующее однородное уравнение имеет ненулевые решения.

Составляя условия разрешимости, получим (ср. (5.11))

$$V\bar{\mu} \xi \operatorname{rot} H_1 + V\bar{\varepsilon} n \operatorname{rot} E_1 = 0,$$

$$V\bar{\mu} n \operatorname{rot} H_1 - V\bar{\varepsilon} \xi \operatorname{rot} E_1 = 0.$$

Подставляя сюда выражения (5.19), придем к равенствам

$$\begin{aligned} V\bar{\mu} \xi \operatorname{rot} H_1^1 + V\bar{\varepsilon} n \operatorname{rot} E_1^1 &= -V\bar{\mu} \xi \operatorname{rot} H_1^0 - V\bar{\varepsilon} n \operatorname{rot} E_1^0, \\ V\bar{\mu} n \operatorname{rot} H_1^1 - V\bar{\varepsilon} \xi \operatorname{rot} E_1^1 &= -V\bar{\mu} n \operatorname{rot} H_1^0 + V\bar{\varepsilon} \xi \operatorname{rot} E_1^0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Вместо  $H_1^1$  и  $E_1^1$  подставим их выражения из (5.21). Пользуясь тем, что левые части равенства (5.22) с точностью до замены индекса «1» на индекс

\*) См. П. К. Рашевский [2].

«0» совпадают с левыми частями равенств (5.11) и что левые части равенств (5.12) отличаются от левых частей равенств (5.11) лишь множителем  $1/c$ , получим

$$\begin{aligned} -2\nabla\tau \nabla\Psi_1 - \Psi_1 \Delta\tau + \frac{2}{c_1(M)T} \Phi_1 &= \\ &= \left[ -V\bar{\mu} \xi \operatorname{rot} \mathbf{H}_1^0 - V\bar{\varepsilon} n \operatorname{rot} \mathbf{E}_1^0 \right] \frac{1}{c}, \\ -2\nabla\tau \nabla\Phi_1 - \Phi_1 \Delta\tau - \frac{2}{c_1(M)T} \Psi_1 &= \\ &= \left[ -V\bar{\mu} n \operatorname{rot} \mathbf{H}_1^0 + V\bar{\varepsilon} \xi \operatorname{rot} \mathbf{E}_1^0 \right] \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Для решения этой системы умножим первое из уравнений (5.23) на  $i = \sqrt{-1}$  и полученный результат прибавим ко второму уравнению. Тогда

$$-\frac{2}{c_1^2} \frac{d}{d\tau} \Lambda_1 - \Lambda_1 \left[ \frac{1}{c_1 J} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{J}{c_1} \right) - i \frac{2}{c_1 T} \right] = C_1 i + D_1, \quad (5.24)$$

где  $\Lambda_1 = \Phi_1 + i\Psi_1$ , а  $C_1$  и  $D_1$  обозначают правые части уравнений (5.23).

Уравнение (5.24), очевидно, эквивалентно системе (5.23). В силу того что (5.24) — обыкновенное линейное уравнение 1-го порядка, его решение можно выписать в квадратурах с точностью до произвольной постоянной.

Найдя из формул (5.19)–(5.24)  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$ , можно совершенно аналогично найти  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{H}_3$  и т. д.

Заметим, что в нулевом приближении формулы (5.2), (5.7) дают

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\approx \mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t-\tau)} (-i\omega)^{-\nu} \perp \nabla\tau, \\ \mathbf{H} &\approx \mathbf{H}_0 e^{-i\omega(t-\tau)} (-i\omega)^{-\nu} \perp \nabla\tau, \end{aligned}$$

т. е. в этом приближении электромагнитные волны поперечны. Однако коэффициенты следующих приближений лучевого метода  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s, s = 1, 2, \dots$ , уже, вообще говоря, не перпендикулярны  $\nabla\tau$ .

## § 6. Пример нахождения коротковолновой асимптотики дифракционной задачи лучевым методом

Будем считать, что функция  $u$ , характеризующая волновое поле, зависит только от  $x, y$ , т. е. будем иметь дело с плоской задачей. Пусть в рассматриваемой среде  $c(x, y) = 1$ , и поэтому  $\omega/c = \omega = k$ .

Рассмотрим задачу о падении на гладкий выпуклый контур  $S$ , ограничивающий конечную выпуклую область  $\Omega$ , волны, распространяющейся от точечного источника колебаний, расположенного в точке  $M_0$  (рис. 3).

Строго эта задача ставится так: найти функцию  $u(M, M_0)$  ( $M = M(x, y)$  и  $M_0 = M_0(f_0, y_0)$  лежат вне области  $\Omega$ ),



удовлетворяющую условиям

$$u = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) + u_{\text{отр}}(M, M_0; k), \quad (6.1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u_{\text{отр}} = 0,$$

$$u|_S = 0, \quad \sqrt{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (6.2)$$

$$R = |MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

где  $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR)$  ( $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода) описывает волну, распространяющуюся от точечного источника, расположенного в точке  $M_0$ ,  $u_{\text{отр}}(M, M_0)$  — отраженная волна, причем функция  $u_{\text{отр}}(M, M_0)$  не имеет особенностей вне области  $\Omega$ .

Функция  $u(M, M_0)$ , являющаяся решением задачи (6.1), (6.2), называется *функцией Грина* для уравнения Гельмгольца.

Проведем из  $M_0$  касательные к  $S$ . Если в  $M_0$  поместить источник света, то область  $TRnP'T'$  будет погружена в тень, остальная часть внешности области  $\Omega$  будет освещена. В освещенной области мы и найдем асимптотику  $u(M, M_0; k)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Падающая волна  $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR)$ , соответствующая точечному источнику колебаний в бесконечной плоскости, при  $k \rightarrow \infty$  разлагается в асимптотический ряд \*)

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) \sim e^{ikR} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^{\text{пад}}}{(-ik)^{s+1/2}}, \quad (6.3)$$

где

$$u_s^{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{(2R)^s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{s! \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)} \quad (\Gamma \text{ — гамма-функция Эйлера}),$$

$$(-i)^{s+\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}(s+\frac{1}{2})},$$

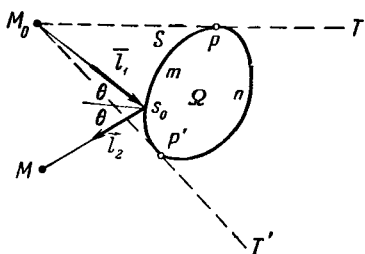


Рис. 3

\*) См., например, В. И. Смирнов [2],

Отраженную волну будем искать в виде

$$u_{\text{отр}} = e^{ik\tau(M, M_0)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^{\text{отр}}(M, M_0)}{(-ik)^{s+1/2}},$$

причем  $\tau(M, M_0)$  и  $u_s^{\text{отр}}$  должны удовлетворять соотношениям (1.5), (1.6), (4.3), (4.8). Потребуем, чтобы выполнялось краевое условие  $u|_S = 0$ . Тогда

$$R = |MM_0|_{M \in S} = \tau(M, M_0)|_{M \in S}, \quad (6.4)$$

$$u_s^{\text{отр}}(M, M_0)|_S + u_s^{\text{пад}}(M, M_0)|_S = 0. \quad (6.5)$$

Задача нахождения решения уравнения (1.5) при условии (6.4) есть задача Коши для уравнения эйконала (см. § 2). Эта задача имеет два решения, что неудивительно, так как уравнение эйконала — второй степени. Одно решение  $\tau(M, M_0) \equiv R = |M, M_0|$  соответствует падающей волне, другое — отраженной.

Построим функцию  $\tau(M, M_0)$ , соответствующую отраженной волне. Для этого прежде всего надо найти значение  $\nabla\tau$  на  $S$ . Из формулы (6.4) следует, что проекции  $\nabla\tau$  и  $\nabla|M, M_0|$  на  $S$  одинаковы. В силу уравнения эйконала, равенства (6.4) и того, что на  $S$  должно выполняться неравенство  $\nabla\tau \neq \nabla|MM_0|$  (иначе, как нетрудно видеть, мы пришли бы к  $\tau = |MM_0|$ ), а нас интересует решение уравнения эйконала, соответствующее отраженной волне, а не падающей), получим

$$\frac{\partial\tau}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}|MM_0|$$

( $\frac{\partial}{\partial n}$  — дифференцирование по нормали к  $S$ ). Таким образом, проекции  $\nabla\tau$  на касательную и нормаль к  $S$  определены, и тем самым вектор  $\nabla\tau$  на  $S$  определен однозначно. Лучи, соответствующие эйконалу  $\tau$ , следует выпустить из точек  $S$  в направлении  $\nabla\tau$ . Единичный вектор  $\nabla\tau$  направлен так, что его проекция и проекция вектора  $\nabla|MM_0| = M_0M/|MM_0|$  на касательную к  $S$  совпадают. Мы пришли, таким образом, к известному закону геометрической оптики: падающий и отраженный лучи составляют с отражающей кривой равные углы, или, короче, угол падения равен углу отражения. Производная эйконала  $\tau$  вдоль отраженного луча равна единице (так как скорость в данном случае равна единице), и в точке отражения  $s_0$  эйконал  $\tau(M, M_0)$  равен значению  $|M_0M|$ , поэтому функция  $\tau(M, M_0)$  равна длине луча  $M_0s_0M$ .

С помощью простых вариационных соображений докажем, что построенная функция  $\tau(M, M_0)$  действительно удовлетворяет уравнению эйконала. Вычислим

$$d\tau(M, M_0) = d \int_{M_0 s_0 M} ds = d \int_{M_0 s_0} ds + d \int_{s_0 M} ds.$$

По формуле для вариации интеграла с подвижными концами \*)

$$d\tau(M, M_0) = (l_1 - l_2, \delta r)|_{s_0} + l_{2x} dx + l_{2y} dy|_M.$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2 = (l_{2x}, l_{2y})$  — единичные векторы, направленные вдоль лучей  $M_0 s_0$  и  $s_0 M$  соответственно;  $\delta r = (\delta x, \delta y)$  — бесконечно малое смещение вдоль  $S$ . Из того, что падающий и отраженный лучи образуют одинаковые углы с  $S$ , следует, что

$$(l_1 - l_2, \delta r)|_{s_0} = 0,$$

откуда

$$d\tau(M, M_0) = l_{2x} dx + l_{2y} dy = \tau_x dx + \tau_y dy.$$

Следовательно,

$$\tau_x = l_{2x}, \quad \tau_y = l_{2y},$$

в силу чего

$$(\nabla\tau)^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 = l_{2x}^2 + l_{2y}^2 = |l|^2 = 1,$$

т. е. функция  $\tau$  действительно удовлетворяет уравнению эйконала (\*\*).

Из условия (6.5) для отраженной волны однозначно находятся все  $\psi_s(\alpha)$  ( $s = 0, 1, \dots$ ) — «произвольные» функции в формулах (4.8). В частности, для  $u_{\text{отр}}$  в нулевом приближении можно получить

$$u_{\text{отр}} \approx \frac{e^{ik\tau} u_0^{\text{отр}}}{\sqrt{-ik}} = \frac{e^{ik\tau(M, M_0)}}{\sqrt{-ik}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{l_0 + l + \frac{2l_0 l}{\rho \cos \theta}}} \quad (6.6)$$

$$\sqrt{-i} = e^{-\pi i/4}.$$

Здесь  $l_0 = |M_0 s_0|$ ,  $l = |M s_0|$ ,  $\rho = \rho(s_0)$  — радиус кривизны контура в точке  $s_0 \in S$ ,  $\theta$  — угол падения луча.

Полученные в этом параграфе формулы удается обосновать на уровне теорем (см. примечания к главе).

\*) См. В. И. Смирнов [3].

\*\*) Тот факт, что  $\tau(M, M_0)$  удовлетворяет уравнению эйконала, легко следует также из теории характеристик для нелинейных уравнений первого порядка (см. В. И. Смирнов [3]).

### § 7. Определение функции $\psi_0$ с помощью соображений локальности

Вывод асимптотических формул для решений дифракционных задач требует знания функций  $\psi_0(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_1(\alpha, \beta)$ , ... (см. § 4), найти которые не всегда просто.

Для нулевого приближения достаточно знать функцию  $\psi_0(\alpha, \beta)$ . Ее часто можно найти из соображений локальности. Например, в случае задачи о точечном источнике в неоднородной среде:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)}\right) u = -\delta(M - M_0)$$

для  $u$  имеет место формула

$$u \approx \sqrt{\frac{c}{J}} \psi_0(\alpha, \beta) \frac{e^{i\omega\tau(M, M_0)}}{(-i\omega)^\nu}, \quad \tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c},$$

где  $\alpha, \beta$  — параметры, характеризующие лучи, выходящие из точки  $M_0$ . За  $\alpha$  и  $\beta$  можно взять, например, сферические координаты конца единичного вектора касательной к лучу в точке  $M_0$ . В плоском случае  $\psi_0 = \psi_0(\alpha)$ . Здесь  $\alpha$  — угол между касательной к лучу в точке  $M_0$  и осью  $x$ .

Соображения локальности в данной задаче заключаются в том, что при  $M \rightarrow M_0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  главный член  $u(M, M_0)$  (нулевое приближение) такой же, как в случае задачи о точечном источнике в однородной среде, скорость распространения волн в которой тождественно равна  $c(M_0)$ .

В плоском случае для такой однородной среды

$$u = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega\tau), \quad \tau = \frac{R}{c(M_0)}, \quad R = |MM_0|.$$

$$u \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\tau\omega}} e^{\pi i/4} e^{i\omega\tau}.$$

В трехмерном —

$$u = \frac{1}{4\pi R} e^{i\omega\tau}, \quad \tau = \frac{R}{c(M_0)}, \quad R = |MM_0|.$$

Отсюда в плоском случае  $\nu = 1/2$ , в трехмерном  $\nu = 0$ ;  $\psi_0$  трудно определить из соотношений

$$\sqrt{\frac{c(M)}{J}} \psi_0(\alpha) \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{\omega}} \xrightarrow{M \rightarrow M_0} \frac{e^{\pi i/4}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{c(M_0)}{R\omega}}$$

в плоском случае и

$$\sqrt{\frac{c}{J}} \psi_0(\alpha, \beta) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} \frac{1}{4\pi R}$$

в трехмерном. Соответственно получаем

$$\psi_0(\alpha) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2c(M_0)}{\pi c(M)}} \sqrt{\frac{J}{R}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\psi_0(\alpha, \beta) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{J}{c}} = \frac{\sqrt{\sin \beta}}{4\pi \sqrt{c(M_0)}}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Здесь  $J = |[r_\alpha, r_\beta]|$ , а координаты  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  конца единичного касательного вектора к лучу в точке  $M_0$  выражаются через  $\alpha$  и  $\beta$  формулами

$$x' = \cos \alpha \sin \beta, \quad y' = \sin \alpha \sin \beta, \quad z' = \cos \beta.$$

## § 8. Каустики

В приложениях лучевого метода часто бывает так, что семейство лучей имеет огибающую кривую в плоском и поверхность в трехмерном случаях. Огибающие семейства лучей называются *каустиками*.

Пусть параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  характеризуют луч, а  $\tau = \tau(\alpha, \beta)$  — значение параметра  $\tau$  на луче в точке  $M$  касания его и каустики. Таким образом, уравнение каустики в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau(\alpha, \beta)).$$

Векторы  $\mathbf{r}_\tau$ ,  $\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\tau \tau'_\alpha$ ,  $\mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}_\tau \tau'_\beta$  компланарны, так как они лежат в касательной плоскости к каустике, следовательно, их векторно-скалярное произведение

$$([\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\tau \tau'_\alpha, \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}_\tau \tau'_\beta], \mathbf{r}_\tau) = 0$$

или, так как  $[\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\tau] = 0$ ,

$$([\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta], \mathbf{r}_\tau) = 0.$$

В силу того, что  $\mathbf{r}_\alpha \perp \mathbf{r}_\tau$ ,  $\mathbf{r}_\beta \perp \mathbf{r}_\tau$ ,  $|\mathbf{r}_\tau| = c > 0$ ,

$$|([\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta], \mathbf{r}_\tau)| = |\mathbf{r}_\tau| |[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]| = c |[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]| = 0,$$

т. е. на каустике  $J = 0$ . Напомним (см. § 3), что

$$J = \frac{1}{c} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \right|,$$

и потому на каустике якобиан  $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)}$  равен нулю. Отсюда следует, что в окрестности каустики лучевые координаты уже

не являются однозначными функциями декартовых. Этот факт очевиден и геометрически. Из того, что  $J = 0$ , следует, что уже нулевое приближение лучевого метода (см. § 4) несправедливо в окрестности каустики.

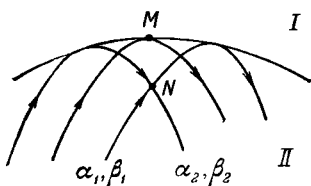


Рис. 4.

Исследованию волнового поля в окрестности каустики будет посвящена глава 2. Приведем некоторые результаты\*), которые получаются из рассмотрений главы 2.

Лучевое приближение несправедливо в слое  $n = O(\omega^{-2/3})$  ( $n$  — расстояние по нормали от каустики). Через каждую точку  $N$  области II (рис. 4) проходят два луча: один, идущий к каустике, другой — от нее. Нулевое приближение лучевого метода в точке  $N$  имеет вид

$$u \approx e^{i\omega\tau_1(N)} \psi_0(\alpha_1, \beta_1) \sqrt{\frac{C(N)}{J(\alpha_1, \beta_1, \tau_1)}} \frac{1}{(-i\omega)^\nu} + \\ + e^{i\omega\tau_2(N) - \frac{\pi i}{2}} \psi_0(\alpha_2, \beta_2) \sqrt{\frac{C(N)}{J(\alpha_2, \beta_2, \tau_2)}} \frac{1}{(-i\omega)^\nu}.$$

Здесь  $\psi_0(\alpha, \beta)$  имеет тот же смысл, что и в § 4,  $\alpha_1, \beta_1$  — параметры, характеризующие луч, идущий к каустике и проходящий через точку  $N$ ,  $\tau_1 = \tau_1(N)$  — значение эйконала на этом луче в точке  $N$ ,  $\alpha_2, \beta_2, \tau_2$  играет ту же роль для луча, идущего от каустики.

Следует обратить внимание на то, что на луче, идущем от каустики, фазовый множитель равен не  $e^{i\omega\tau_1(N)}$ , а  $e^{i\omega\tau_1(N) - \pi i/2}$ . Другими словами, фаза волны, прошедшей каустику, уменьшается скачком на  $\pi/2$ .

В области I вне непосредственной окрестности каустики ( $n = O(\omega^{-2/3})$ ) волновое поле экспоненциально убывает при  $\omega \rightarrow +\infty$ . Заметим, что стремление волнового поля к нулю при  $\omega \rightarrow +\infty$  можно было предвидеть из физических соображений: в область I лучи не попадают, это область геометрической тени.

\*) Ознакомившись с этими результатами, можно, не читая главы 2, непосредственно перейти к изучению глав 3, 4 и т. д. (см. схему взаимной зависимости глав и параграфов книги).

## ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

Важным примером нерегулярного поля лучей (когда формулы главы 1 не везде применимы) является поле лучей вблизи каустики (см. § 8 гл. 1). Построению аналога лучевого метода в этом случае и посвящена глава 2.

## § 1. Предварительные замечания

Напомним, что *каустикой* называется огибающая семейства лучей.

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу для случая, когда скорость  $c(M) \equiv 1$ . Пусть  $AB$  — некоторое положение волнового фронта (рис. 5). Семейство лучей совпадает в данном случае с семейством нормалей к  $AB$ , а каустика — с огибающей  $CD$  этого семейства нормалей. Напомним, что огибающая нормалей к  $AB$  называется *эволютой* кривой  $AB$ , сама же кривая  $AB$  — *эвольвентой* кривой  $CD$ . Заметим, что у кривой  $CD$  бесчисленное множество эвольвент и все они пересекают касательные к  $CD$  под прямыми углами, т. е. являются волновыми фронтами.

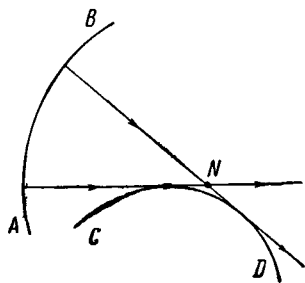


Рис. 5.

Таким образом, классическая теория эволют и эвольвент тождественна геометрии лучей и волновых фронтов (в случае  $c(M) \equiv 1$ ).

Пусть параметрические уравнения  $CD$  суть  $x = f(\alpha)$ ,  $y = g(\alpha)$ . Уравнения всех эвольвент кривой  $CD$  можно, как известно, параметрически представить следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha) + (\tau - s(\alpha)) \gamma_1, \\ y &= g(\alpha) + (\tau - s(\alpha)) \gamma_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \gamma_1(\alpha) = \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(\alpha) = \frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}$$

составляющие единичного вектора касательной к  $CD$ ,  $s(\alpha)$  — длина дуги кривой  $CD$ , отсчитываемая (со своим знаком) от фиксированной точки на  $CD$  до точки  $x = f(\alpha)$ ,  $y = g(\alpha)$ . Величина  $\tau$  постоянна на каждой эвольвенте, т. е. на волновом фронте. Фиксируя  $\alpha$  и меняя  $\tau$ , получаем луч, фиксируя  $\tau$  — волновой фронт (эвольвенту кривой  $CD$ ).

В силу того, что  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ , расстояние  $|M_1 M_2|$  между двумя произвольными точками  $M_1$  и  $M_2$  на одном луче равно  $|\tau_1 - \tau_2|$  ( $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответствуют точкам  $M_1$ ,  $M_2$ ). Таким образом,  $\tau$  играет роль эйконала. (Напомним, что при  $c \equiv 1$  лучами являются прямые линии и

$$\tau(M_1, M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{ds}{c} = \int_{M_1}^{M_2} ds = |M_1 M_2|.$$

Из уравнений (1.1)  $\tau$  можно найти как функцию  $x$ ,  $y$ . Эта функция будет двузначной, ибо через каждую точку  $N$  (рис. 5) вблизи каустики проходит два луча, и значения  $\tau$  в точке  $N$  на каждом таком луче не будут совпадать.

Проиллюстрируем эту неоднозначность  $\tau$  на примере окружности. Пусть  $CD$  — дуга окружности радиуса  $a$ . В полярных координатах  $r$ ,  $\varphi$  ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) окружность имеет уравнение  $r = a$ . Формулы (1.1) дают хорошо известное уравнение эвольвенты круга.

Решая (1.1) относительно  $\tau$ , получим

$$\tau = \pm \left( \sqrt{r^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{r} \right) + a(\varphi - \varphi_0)$$

( $r$ ,  $\varphi$  — полярные координаты той точки, где вычисляется эйконал,  $\varphi_0 = \text{const}$ ).

## § 2. Эталонная задача

Существует простое решение уравнения Гельмгольца  $(\Delta + k^2)u = 0$  такое, что лучи, ему соответствующие, суть касательные к некоторой окружности. Анализируя его коротковолновую асимптотику, можно «угадать» коротковолновую асимптотику волнового поля вблизи каустики и в общем случае.

Это решение в полярных координатах  $r$ ,  $\varphi$  имеет вид:

$$u = J_{ka}(kr) e^{ika\varphi}. \quad (2.1)$$

Здесь  $J_{ka}(kr)$  — функция Бесселя,  $a = \text{const} > 0$ .



Чтобы не иметь дело с многозначностью, будем рассматривать функцию (2.1) в разрезанной плоскости  $\pi \geq \varphi > -\pi$ . Де-Баевская асимптотика функции Бесселя\*) при  $r > a$  дает

$$\begin{aligned}
 e^{ika\varphi} J_{ka}(kr) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \frac{1}{\sqrt{(r/a)^2 - 1}} \times \\
 &\times \exp \left[ ik \left( \sqrt{r^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{r} + a\varphi \right) - \frac{\pi i}{4} \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \frac{1}{\sqrt{(r/a)^2 - 1}} \times \\
 &\times \exp \left[ ik \left( -\sqrt{r^2 - a^2} + a \arccos \frac{a}{r} + a\varphi \right) + \frac{\pi i}{4} \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

где  $O(1/k)$  — асимптотические ряды по натуральным степеням  $1/k$ . Формула (2.2) имеет вид лучевого разложения. Два слагаемых в этой формуле отвечают двум лучам, проходящим через точку  $N$  с координатами  $(r, \varphi)$  (рис. 6). Эйконалы этих слагаемых равны

$$\begin{aligned}
 \tau_{\pm}(r, \varphi) &= a\varphi \pm \\
 &\pm \left( \sqrt{r^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Волновые фронты, описываемые уравнениями  $\tau_{\pm} = \text{const}$ , являются эвольвентами окружности  $r = a$ . Лучи, соответствующие эйконалу

$$\begin{aligned}
 \tau_{-}(N) &= r_{-}(r, \varphi) = \\
 &= a\varphi + a \arccos \frac{a}{r} - \sqrt{r^2 - a^2},
 \end{aligned}$$

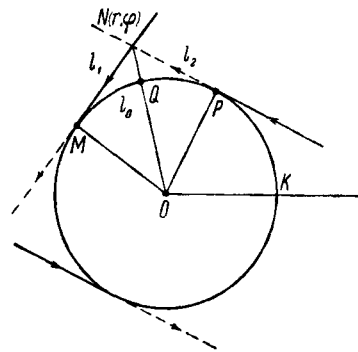


Рис. 6.

это полупрямые, касающиеся окружности  $r = a$ , направление на которых выбрано так, как указано на рисунке (из бесконечности к окружности  $r = a$ ). Первые два слагаемых в формуле для  $\tau_{-}(N)$  — сумма длин дуг  $KQ$  и  $QM$ , третье слагаемое  $\sqrt{r^2 - a^2}$  — длина отрезка  $MN$ . Эта величина вычитается, так как направление на луче выбрано от  $N$  к  $M$ . Аналогично лучи, соответствующие эйконалу

$$\tau_{+}(r, \varphi) = a\varphi - a \arccos \frac{a}{r} + \sqrt{r^2 - a^2},$$

\*) См Дж Ватсон [1].

это пунктирные полупрямые, направленные, как указано на рисунке, от окружности  $r = a$  к бесконечности.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: волна, идущая к окружности  $r = a$ , имеет фазу  $k\tau_-(r, \varphi) + \pi/4$ , в то время как фаза волны, отходящей от окружности, равна  $k\tau_+(r, \varphi) - \pi/4$ . Таким образом, при переходе через каустику фаза скачком меняется на  $-\pi/2$ . Так будет и в общем случае (см § 9).

Амплитудный множитель  $\frac{1}{\sqrt{a}} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]^{-1/4}$  в формуле (2.2), как и следовало ожидать совпадает с  $J^{-1/2}$ , где  $J$  — геометрическая расходимость поля лучей (см. § 3 гл. 1). Естественно, что на каустике  $r = a$ , где  $J = 0$ , этот множитель обращается в бесконечность, так что формула (2.2) неприменима при  $r \rightarrow a$ .

Зоной тени, т. е. областью, куда не проникают лучи, является область  $r < a$ . При  $r < a$  дебаевская асимптотика функции Бесселя дает

$$u = J_{ka}(kr) e^{ika\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -k \left[ a \ln \left( \frac{a}{r} + \sqrt{\left( \frac{a}{r} \right)^2 - 1} \right) + \sqrt{a^2 - r^2} \right] + ika\varphi \right\} \times \\ \times \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right). \quad (2.3)$$

Таким образом, в зоне тени волновое поле экспоненциально убывает с ростом  $k$ , что и следовало ожидать.

Для нас сейчас наибольший интерес представляют асимптотические ( $k \rightarrow \infty$ ) формулы для  $u$ , справедливые равномерно в окрестности окружности  $r = a$ . (При  $r \rightarrow a$ , как уже отмечалось, формула (2.2) неприменима.) Используя равномерные асимптотические формулы для функции Бесселя\*), получаем

$$u = J_{ka}(kr) e^{ika\varphi} \sim \\ \sim (kr)^{-\frac{1}{3}} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\chi^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1}} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{b_l\left(\frac{a}{r}\right)}{(kr)^{2l}} \right] v\left((kr)^{\frac{2}{3}} \chi\left(\frac{a}{r}\right)\right) e^{ika\varphi} + \\ + (kr)^{-\frac{5}{3}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l\left(\frac{a}{r}\right)}{(kr)^{2l}} \cdot v'\left((kr)^{\frac{2}{3}} \chi\left(\frac{a}{r}\right)\right) e^{ika\varphi}. \quad (2.4)$$

\*) См. Олвер [1], [2].

Здесь  $v(t)$  — одна из функций Эйри (см. Дополнение 1), функция  $\chi = \chi(s)$  определяется равенством

$$\frac{2}{3} \chi^{\frac{3}{2}}(s) = \begin{cases} s \ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) - \sqrt{s^2 - 1}, & s \geq 1, \\ i(s \arccos s - \sqrt{1 - s^2}), & 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

В этой формуле радикалы и логарифмы положительные,  $0 \leq \arccos s \leq \pi/2$ . Функция  $\chi(s)$  регулярна в окрестности  $s = 1$  и разлагается в ряд

$$\chi(s) = \sqrt[3]{2} (s - 1) + \frac{\sqrt[3]{2}}{20} (s - 1)^2 + \dots$$

Выражение

$$\frac{1}{i} \frac{4}{3} r \chi^{3/2}\left(\frac{a}{r}\right) = 2 \left( a \arccos \frac{a}{r} - \sqrt{r^2 - a^2} \right)$$

имеет простой геометрический смысл. Обратимся к рис. 6. Длины отрезков лучей между точкой  $N$  и точками касания  $M$  и  $P$  обозначим  $l_1$  и  $l_2$ ; длину дуги окружности  $r = a$ , ограниченную точками  $P$  и  $M$ , обозначим  $l_0$ . Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$\frac{1}{i} \frac{4}{3} r \chi^{3/2}\left(\frac{a}{r}\right) = l_0 - l_1 - l_2.$$

Аналогичная формула имеет место и в общем случае (см. § 5), где в отличие от рассматриваемого случая, вообще говоря,  $l_1 \neq l_2$ . Вводя комплексные лучи, можно было бы вывести аналог полученной только что формулы и в зоне тени  $r < a$ .

Функции  $b_l$  и  $d_l$ , входящие в коэффициенты асимптотических рядов (2.4); регулярны в окрестности значения  $a/r = 1$ .

Формула (2.4) будет образцом для построения волнового поля в окрестности каустики в общем случае. Однако, прежде чем провести эти общие построения, придется подробно заняться дифференциальной геометрией лучей и волновых фронтов вблизи каустики. К этим (довольно громоздким) исследованиям мы и переходим.

### § 3. О выборе параметров $\alpha$ и $\beta$

Пусть поле лучей

$$r = r(\alpha, \beta, \tau) \quad (3.1)$$

(в обозначениях мы следуем главе 1) имеет огибающую, т. е. каустику. Будем рассматривать трехмерный случай. Теория каустик для плоского волнового поля из таких построений вытекает как частный случай.

Будем предполагать, что все аналитично. Это касается и каустики, и скорости  $c(x, y, z)$ , и функции (3.1) при том выборе параметров, который будет сейчас описан. Кроме того, мы ограничимся тем случаем, когда касание лучей и каустики всюду имеет первый порядок. Если предположить только достаточную гладкость скорости  $c(x, y, z)$  и функции (3.1), то основные результаты главы с соответствующими изменениями переносятся и на этот случай.

Чтобы задать луч, достаточно задать точку касания его и каустики. Если на каустике имеется сетка криволинейных координат  $(\alpha, \beta)$ , то эти же  $\alpha, \beta$  могут играть роль параметров  $\alpha, \beta$ , характеризующих луч.

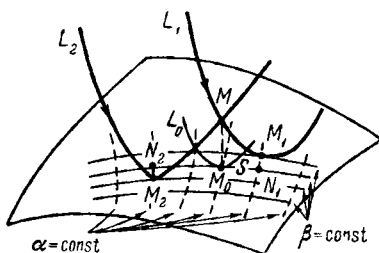


Рис. 7.

Лучи, касаясь каустики, образуют на ней поле направлений. Построим семейство кривых на каустике, для которых векторы этого поля направлений являются касательными векторами. Это семейство кривых на рис. 7 нанесено тонкими сплошными линиями.

Точки на кривых семейства будем характеризовать значением эйконала в этих точках. Пусть луч  $L_0$  касается кривой  $S$  семейства в точке  $M_0$ . Значение эйконала  $\tau$  на этом луче в точке  $M_0$  мы примем за значение параметра  $\alpha$  на кривой  $S$  (в точке  $M_0$ ). Пусть параметр  $\beta$  характеризует кривую  $S$ . Таким образом, на каустике введена ортогональная система координат  $(\alpha, \beta)$ . Ортогональность системы  $(\alpha, \beta)$  следует из того, что линии  $\alpha = \text{const}$  — это линии, где эйконал постоянен, т. е. следы волновых фронтов на каустике, а линии  $\beta = \text{const}$  касательны к лучам и, следовательно, ортогональны к волновым фронтам, а потому и к линиям  $\alpha = \text{const}$ . Заметим, что в плоском случае при  $c(M) \equiv 1$  выбор параметра  $\alpha$  соответствует выбору длины дуги в качестве параметра на эволюте (см. § 1).

При только что описанном выборе параметров  $\alpha$  и  $\beta$  параметрическое уравнение каустики имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau) \Big|_{\tau=\alpha} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \alpha). \quad (3.2)$$

Предположим, что параметры  $(\alpha, \beta)$  образуют регулярную сетку на каустике, т. е. векторное произведение

$$[\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\tau] \Big|_{\tau=\alpha} \neq 0. \quad (3.3)$$

В силу ортогональности координатной сетки  $\alpha, \beta$  скалярное произведение

$$(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\tau) \Big|_{\tau=\alpha} = 0. \quad (3.4)$$

#### § 4. Уравнение лучей и волновых фронтов в окрестности каустики

Прежде всего выведем некоторые важные для дальнейшего свойства производных вектор-функции  $r(\alpha, \beta, \tau)$ .

В точке  $M_0$ , лежащей на каустике, введем декартову систему координат  $x, y, z$ . Пусть плоскость  $(x, y)$  совпадает с касательной плоскостью к каустике в точке  $M_0$ , а ось  $x$  направлена по лучу, проходящему через  $M_0$  в сторону возрастания  $\tau$ . Выбор направления оси  $z$  будет уточнен несколько позже.

Вычислим производные проекций вектор-функций, которые будем обозначать  $x_\alpha, x_\beta, x_\tau, y_\alpha$  и т. д., на выбранные оси декартовой системы координат.

Так как  $|\nabla\tau| = 1/c(M)$  и в точке  $M_0$  градиент  $\tau$  направлен по оси  $x$ , то в точке  $M_0$

$$x_\tau = c_0, \quad y_\tau = z_\tau = 0, \quad (4.1)$$

где  $c_0 = c(M_0)$ .

Направление производной  $r_\beta$  в точке  $M_0$  совпадает с направлением оси  $y$ , поэтому

$$x_\beta = z_\beta = 0, \quad y_\beta \neq 0, \quad (4.2)$$

где неравенство имеет место в силу (3.3).

Докажем теперь, что на каустике

$$r_\alpha = 0. \quad (4.3)$$

Так как луч  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$  и каустика  $\tau = \alpha$  касаются друг друга в точке  $M_0$ , векторы  $r_\tau, r_\beta$  и  $r_\alpha + r_\tau$  лежат в одной плоскости и, следовательно,

$$(r_\tau[r_\beta, r_\alpha + r_\tau]) = 0. \quad (4.4)$$

Далее, поскольку  $(r_\tau, r_\beta) = 0$  и  $(r_\tau, r_\alpha) = 0$  (см. гл. 1), то из (3.4) вытекает, что  $(r_\alpha, r_\beta) = 0$ . Таким образом, векторы  $r_\alpha, r_\beta$  и  $r_\tau$  взаимно ортогональны, и для выполнения (4.4) необходимо, чтобы один из этих векторов обращался в нуль. Но  $r_\tau \neq 0$  и  $r_\beta \neq 0$  (см. (4.1) и (4.2)), так что, действительно,  $r_\alpha = 0$ .

Переходим к выводу уравнений луча и каустики в окрестности точки  $M_0$ .

Разложим вектор-функцию  $r(\alpha, \beta, \tau)$  в ряд по степеням  $\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0, \tau - \tau_0$ , ( $\alpha_0, \beta_0, \tau_0, \alpha_0 = \tau_0$  — значение параметров  $\alpha, \beta, \tau$  в точке  $M_0$ ). Принимая во внимание (4.3), получим

$$\begin{aligned} r = & r_\beta(\beta - \beta_0) + r_\tau(\tau - \tau_0) + \\ & + \frac{1}{2} r_{\alpha\alpha}(\alpha - \alpha_0)^2 + \frac{1}{2} r_{\beta\beta}(\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2} r_{\tau\tau}(\tau - \tau_0)^2 + \\ & + r_{\alpha\beta}(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) + r_{\alpha\tau}(\alpha - \alpha_0)(\tau - \tau_0) + \\ & + r_{\beta\tau}(\beta - \beta_0)(\tau - \tau_0) + \dots \quad (4.5) \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение луча, проходящего через точку  $M_0$ , положим в (4.5)  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ . Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\tau (\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\tau\tau} (\tau - \tau_0)^2 + \dots$$

или в составляющих

$$\begin{aligned} x &= x_\tau (\tau - \tau_0) + \dots = c_0 (\tau - \tau_0) + \dots, \\ y &= \frac{1}{2} y_{\tau\tau} (\tau - \tau_0)^2 + \dots, \\ z &= \frac{1}{2} z_{\tau\tau} (\tau - \tau_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $y_{\tau\tau}$  и  $z_{\tau\tau}$  — проекции  $\mathbf{r}_{\tau\tau}$  на оси  $y$  и  $z$ .

Уравнения (4.6) представляют собою уравнения луча в параметрической форме. Исключая параметр  $\tau$ , приходим к уравнению луча в явном виде

$$y = y_{\tau\tau} \frac{x^2}{2c_0^2} + \dots, \quad z = z_{\tau\tau} \frac{x^2}{2c_0^2} + \dots \quad (4.7)$$

Полагая в (4.5)  $\tau = \alpha$ , получаем уравнение каустики в параметрической форме

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}_\beta (\beta - \beta_0) + \mathbf{r}_\alpha (\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\alpha\alpha} + 2\mathbf{r}_{\alpha\tau} + \mathbf{r}_{\tau\tau}) (\alpha - \alpha_0)^2 + \\ + (\mathbf{r}_{\alpha\beta} + \mathbf{r}_{\beta\tau}) (\alpha - \alpha_0) (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\beta\beta} (\beta - \beta_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Записывая эти параметрические уравнения в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и исключая из полученных равенств  $\alpha$ ,  $\beta$ , с учетом (4.1), (4.2) приходим к явному заданию каустики  $z = z(x, y)$ . С точностью до главных членов

$$z = \frac{1}{2} (z_{\alpha\alpha} + 2z_{\alpha\tau} + z_{\tau\tau}) \frac{x^2}{c_0^2} + d_{xy}xy + d_{yy}y^2 + \dots, \quad (4.8)$$

где  $d_{xy}$  и  $d_{yy}$  — некоторые коэффициенты, не зависящие от  $x$  и  $y$ .

Для вывода уравнения волнового фронта в окрестности точки  $M_0$  нам понадобятся некоторые свойства старших производных вектор-функции  $\mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau)$ .

Прежде всего покажем, что в точке  $M_0$

$$z_{\alpha\alpha} \neq 0 \quad \text{и} \quad z_{\alpha\tau} \neq 0. \quad (4.9)$$

Дифференцируя равенство  $\mathbf{r}_\alpha(\alpha, \beta, \tau)|_{\tau=\alpha} = 0$  по  $\alpha$  и  $\beta$ , получим на каустике

$$\mathbf{r}_{\alpha\alpha} + \mathbf{r}_{\alpha\tau} = 0, \quad \mathbf{r}_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.10)$$

откуда

$$z_{\alpha\alpha} + z_{\alpha\tau} = 0, \quad (4.11)$$

Но

$$\frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} + z_{\alpha\tau} \neq 0, \quad (4.12)$$

так как в противном случае выражения (4.7), описывающие луч, проходящий через точку  $M_0$ , удовлетворяли бы уравнению каустики (4.8) с точностью до членов порядка  $x^2$  включительно, что невозможно, поскольку касание лучей и каустики по предположению, имеет первый порядок. Сравнивая (4.11) и (4.12), получаем (4.9).

Напомним, что направление оси  $z$  не фиксировано. Зафиксируем теперь его так, чтобы выполнялось неравенство  $z_{\alpha\alpha} > 0$ . Найдем, наконец, значения  $x_{\alpha\alpha}$ ,  $x_{\alpha\beta}$  и  $x_{\alpha\alpha\alpha}$ . Дифференцируя равенство  $(r_\alpha(\alpha, \beta, \tau), r_\tau(\alpha, \beta, \tau)) = 0$  два раза по  $\alpha$ , один раз по  $\tau$ , один раз по  $\beta$  и учитывая (4.3), получим на каустике

$$\begin{aligned} (r_{\alpha\alpha}, r_\tau) &= 0, & (r_{\alpha\alpha\alpha}, r_\tau) + 2(r_{\alpha\alpha}, r_{\tau\alpha}) &= 0, \\ (r_{\alpha\beta}, r_\tau) &= 0, & (r_{\alpha\tau}, r_\tau) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$x_{\alpha\alpha} = 0, \quad x_{\alpha\beta} = 0, \quad x_{\alpha\tau} = 0, \quad (4.13)$$

и в силу (4.10)

$$x_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{2}{c_0} |r_{\alpha\alpha}|^2 > 0. \quad (4.14)$$

Установив необходимые свойства производных вектор-функции  $r$ , выведем в окрестности точки  $M_0$  уравнение волнового фронта. Положим в (4.5)  $\tau = \tau_0$ . Проектируя затем это равенство на оси координат и принимая во внимание (4.10) и (4.13), получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} x_{\beta\beta} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{6} x_{\alpha\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^3 + \frac{1}{2} x_{\alpha\alpha\beta} (\alpha - \alpha_0)^2 (\beta - \beta_0) + \dots \\ y &= y_\beta (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} y_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 + \dots \\ z &= \frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 + \frac{1}{2} z_{\beta\beta} (\beta - \beta_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где многоточием заменены члены высшего порядка по  $\alpha - \alpha_0$ ,  $\beta - \beta_0$ .

Уравнения (4.15) дают параметрическое уравнение волнового фронта. Найдем его сечение плоскостью  $y = 0$ . Из равенства  $y = 0$  получаем

$$\beta - \beta_0 = -\frac{1}{2} \frac{y_{\alpha\alpha}}{y_\beta} (\alpha - \alpha_0)^2 + \dots$$

и, следовательно,

$$x = \frac{1}{6} x_{\alpha\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^3 + \dots, \quad z = \frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 + \dots \quad (4.16)$$

Исключим  $\alpha$  из (4.16). Это можно сделать в силу (4.14). Тогда

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{x_{\alpha\alpha\alpha}}{z_{\alpha\alpha}^{3/2}} z^{3/2} + \dots \quad (4.17)$$

Таким образом, кривая (4.17) имеет начало координат точкой возврата, и ее ветви касаются положительной части оси  $z$ .

Поверхность волнового фронта вблизи каустики получим, двигая кривую (4.17) вдоль линии  $\beta = \beta_0 = \text{const}$ . Из (4.17) следует, что волновые фронты расположены с той стороны каустики, где  $z > 0$ . Область  $z < 0$  — это зона тени.

### § 5. Аналитический характер эйконала $\tau(x, y, z)$ вблизи каустики

Основным результатом настоящего параграфа является доказательство формулы для эйконала  $\tau(x, y, z)$  вблизи каустики:

$$\tau(x, y, z) = \xi(x, y, z) \pm \frac{2}{3} \mu^{3/2}(x, y, z), \quad (5.1)$$

где  $\xi(x, y, z)$  и  $\mu(x, y, z)$  — аналитические в окрестности каустики функции, разлагающиеся в ряды

$$\mu(x, y, z) = \frac{2}{z_{\alpha\alpha}} \left( \frac{1}{4c_0} x_{\alpha\alpha\alpha} \right)^{2/3} z + \dots *), \quad (5.2)$$

$$\xi(x, y, z) = \tau_0 + \frac{x}{c_0} + \dots \quad (5.3)$$

Доказательство этих формул довольно громоздко и при первом чтении может быть опущено.

Формула (5.1) указывает на двузначность эйконала как функции от  $x, y, z$ . Это означает, что через каждую точку с той стороны, где  $z > 0$ , проходят два и только два луча. На луче,

\*) Формула (5.2) может быть преобразована к виду (ср. с формулой (3.8) гл. 4)

$$\mu(x, y, z) = \left[ \frac{2}{c_0^2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{c_1}{c_0} \right) \right]^{1/3} z + \dots, \quad c_1 = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{M_0}.$$

Здесь  $1/\rho$  — кривизна нормального сечения каустики вдоль вектора  $r_\alpha$  равная  $\frac{1}{c_0^2} (r_\alpha, n_\alpha)$ ,  $n(\alpha, \beta)$  — единичная нормаль к каустике, направленная в освещенную область  $\mu > 0$ .



не коснувшись каустики, эйконал равен  $\xi - \frac{2}{3} \mu^{3/2}$ , на луче, коснувшись каустики, эйконал равен  $\xi + \frac{2}{3} \mu^{3/2}$ . На самой каустике функция  $\mu(x, y, z)$  обращается в нуль и эйконал  $\tau$  становится однозначным. Подчеркнем (и это важно для дальнейшего), что функции  $\xi$  и  $\mu$  определены и аналитичны не только при  $z \geq 0$ , но и при  $z < 0$  (в зоне, куда не попадают лучи, т. е. в зоне тени).

Перейдем к доказательству формул (5.1)–(5.3). Выразим в окрестности точки  $M_0$  лучевые координаты  $\alpha, \beta, \tau$  через декартовы координаты  $x, y, z$ .

Вернемся опять к разложению функции  $r(\alpha, \beta, \tau)$  в ряд по степеням  $\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0, \tau - \tau_0$  ( $\alpha_0 = \tau_0$ ). Для компонент  $x, y, z$  с учетом формул (4.1)–(4.3), (4.10), (4.13) имеем

$$\begin{aligned} x = c_0 (\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} x_{\beta\beta} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2} x_{\tau\tau} (\tau - \tau_0)^2 + \\ + x_{\beta\tau} (\beta - \beta_0) (\tau - \tau_0) + \frac{1}{6} x_{\alpha\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$y = y_{\beta} (\beta - \beta_0) + \dots,$$

$$z = \frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 + z_{\alpha\tau} (\alpha - \alpha_0) (\tau - \tau_0) + \dots$$

В силу того, что

$$\frac{D(x, y)}{D(\tau, \beta)} \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0 \\ \tau=\tau_0}} = c_0 y_{\beta} \neq 0,$$

первые два уравнения однозначно разрешимы относительно  $\tau - \tau_0$  и  $\beta - \beta_0$ , откуда для  $\tau = \tau(x, y, \alpha)$ ,  $\beta = \beta(x, y, \alpha)$  получаются разложения

$$\begin{aligned} \tau - \tau_0 = \frac{x}{c_0} + \frac{1}{2} (\tau_{xx})_0 x^2 + (\tau_{xy})_0 xy + \frac{1}{2} (\tau_{yy})_0 y^2 - \frac{1}{6c_0} x_{\alpha\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^3 + \\ + \frac{1}{2} (\tau_{\alpha\alpha x})_0 (\alpha - \alpha_0)^2 x + \dots, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\beta - \beta_0 = \frac{y}{y_{\beta}} + \dots$$

Подставляя эти выражения в формулу для  $z$  из (5.4), получим

$$z = \frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 + z_{\alpha\tau} \frac{1}{c_0} x (\alpha - \alpha_0) + \dots \quad (5.6)$$

Найдем из (5.6)  $\alpha - \alpha_0$  как функцию  $x, y, z$ . Основная трудность решения этого уравнения в окрестности точки  $x = y = z = 0$  состоит в том, что при  $x = 0$  член, линейный относительно  $(\alpha - \alpha_0)$ , исчезает. Преодолеть эту трудность позволяет следующая принадлежащая Вейерштрассу

**Теорема \*).** Если  $P(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, w)$  — аналитическая в начале координат функция, удовлетворяющая условиям

$$P(0, 0, 0, \dots, 0, 0) = 0, \quad P(0, \dots, 0, w) \neq 0,$$

\*) См. С. Бохнер, У. Т. Мартин [1], гл. 9.

и  $s$  — порядок нуля функции  $P(0, 0, \dots, 0, \omega)$  в точке  $\omega = 0$ , то в некоторой окрестности начала координат

$$P(z_1, \dots, z_{k-1}, \omega) \equiv (\omega^s + H_{s-1}\omega^{s-1} + \dots + H_0)\Omega(z_1, \dots, z_{k-1}, \omega),$$

где  $H_j(z_1, \dots, z_{k-1})$ ,  $\Omega(z_1, \dots, z_{k-1}, \omega)$  — функции, аналитические в начале координат, причем  $\Omega(0, \dots, 0) \neq 0$ ,  $H_j(0, \dots, 0) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, s-1$ . Функции  $\Omega$ ,  $H_0, \dots, H_{s-1}$  однозначно определяются функцией  $P(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, \omega)$ .

В равенстве (5.6) перенесем все члены в левую часть. Тогда роль функции  $P$  будет играть функция

$$z - \frac{1}{2} z_{\alpha\alpha} (\alpha - \alpha_0)^2 - z_{\alpha\tau} \frac{1}{c(M_0)} x (\alpha - \alpha_0) + \dots,$$

где  $\alpha - \alpha_0$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеют смысл  $\omega$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Таким образом, уравнение (5.6) может быть записано в виде

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + H_1(x, y, z) (\alpha - \alpha_0) + H_0(x, y, z) = 0 \quad (5.7)$$

Сравнивая коэффициенты при  $(\alpha - \alpha_0)$  в (5.6) и (5.7), нетрудно получить

$$H_0 = -\frac{2}{z_{\alpha\alpha}} z + O(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$H_1 = ax + by + cz + O(x^2 + y^2 + z^2).$$

Выражения для коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не представляют интереса, и мы их не выписываем. Решая уравнение (5.7) относительно  $\alpha - \alpha_0$ , находим

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{H_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0}, \quad (5.8)$$

причем у корня возможны оба знака.

Подставим теперь выражение (5.8) для  $\alpha - \alpha_0$  в правую часть первой из формул (5.5):

$$\tau = \tau_0 + \frac{x}{c_0} + \dots \pm \sqrt{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0} \left(\frac{1}{3} x_{\alpha\alpha\alpha} \frac{z}{z_{\alpha\alpha} c_0} + \dots\right)$$

(точками обозначены члены второго и более высокого порядка, не содержащие радикала  $\sqrt{(H_1/2)^2 - H_0}$ ). Точки, где  $(H_1/2)^2 - H_0 = 0$ , — это точки однозначности  $\tau$ , т. е. точки каустики.

Теперь уже нетрудно вывести формулу (5.1). Для этого перепишем полученное для  $\tau$  выражение в виде

$$\tau(x, y, z) = \xi(x, y, z) + \sqrt{\mu_1(x, y, z) \mu_2(x, y, z)}, \quad (5.9)$$

где

$$\xi(x, y, z) = \tau_0 + \frac{1}{c_0} x + \dots,$$

$$\mu_1(x, y, z) = \frac{2}{z_{\alpha\alpha}} z + \dots, \quad (5.10)$$

$$\mu_2(x, y, z) = \frac{1}{3} \frac{x_{\alpha\alpha\alpha}}{c_0 z_{\alpha\alpha}} z + \dots$$

— аналитические функции.

Докажем, что функции  $\mu_1(x, y, z)$  и  $\mu_2(x, y, z)$  одновременно обращаются в нуль. Подставляя выражение (5.9) в уравнение эйконала  $(\nabla\tau)^2 = 1/c^2$ , получим

$$\begin{aligned} (\nabla\xi)^2 + \mu_1 (\nabla\mu_2)^2 + \frac{\mu_2^2 (\nabla\mu_1)^2}{4\mu_1} + (\nabla\mu_1 \nabla\mu_2) \mu_2 + \\ + \mu_1^{-\frac{1}{2}} (\nabla\xi, \nabla\mu_1) \mu_2 + 2(\nabla\xi, \nabla\mu_2) \mu_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c^2(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Правая часть этого равенства — однозначная функция, поэтому коэффициент при  $\mu_1^{-1/2}$  должен обратиться в нуль. В силу аналитичности обеих частей равенства (5.11) функция  $\mu_2^2 (\nabla\mu_1)^2 / 4\mu_1$  должна быть аналитической, откуда, учитывая неравенство  $(\nabla\mu_1)^2 \neq 0$ , получаем, что функция  $\mu_2^2 / \mu_1$  — аналитична в окрестности точки  $x = y = z = 0$ . Таким образом, действительно, обращение в нуль  $\mu_1$  ведет к обращению в нуль  $\mu_2$ . Следствием этого является равенство

$$\mu_2(x, y, z) = \rho(x, y, z) \mu_1(x, y, z), \quad (5.12)$$

где  $\rho(x, y, z)$  аналитична при малых  $x, y, z$ .

Сравнивая в (5.12) коэффициенты при одинаковых степенях  $x, y, z$ , получим

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{6c_0} x_{\alpha\alpha\alpha} + O(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Определим аналитическую функцию  $\mu(x, y, z)$  равенством

$$\sqrt{\mu_1} \mu_2 = \rho \mu_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}}.$$

Очевидно,

$$\mu = \frac{2}{z_{\alpha\alpha}} \left( \frac{1}{4c_0} x_{\alpha\alpha\alpha} \right)^{2/3} z + \dots \quad (5.13)$$

Итак,

$$\tau(x, y, z) = \xi(x, y, z) \pm \frac{2}{3} \mu^{3/2}(x, y, z). \quad (5.14)$$

Формулы (5.14), (5.13) и первая из формул (5.10) тождественны с формулами (5.1) — (5.3).

В следующих параграфах для волнового поля в окрестности каустики будет получена формула, в которую существенным образом входят  $\xi(x, y, z)$  и  $\mu(x, y, z)$ , поэтому для функций  $\xi(x, y, z)$  и  $\mu(x, y, z)$  необходимо указать формулы, удобные для их практического вычисления.

Из равенства (5.1) следует, что в окрестности каустики эйконал двузначен. Пусть  $\tau_1$  — значение эйконала в точке  $M$  для луча  $L_1$ , еще не коснувшегося каустики, и  $\tau_2$  — значение эйконала для луча  $L_2$ , прошедшего каустику (рис. 7). Тогда

$$\tau_1 = \xi - \frac{2}{3} \mu^{3/2}, \quad \tau_2 = \xi + \frac{2}{3} \mu^{3/2},$$

откуда

$$\mu = \left[ \frac{3}{4} (\tau_2 - \tau_1) \right]^{2/3} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}. \quad (5.15)$$

Вычислим разность  $\tau_2 - \tau_1$  и полусумму  $(\tau_1 + \tau_2)/2$ .

Проведем через точку  $M$  нормаль к каустике, пусть  $M_0$  основание этой нормали,  $M_1$  и  $M_2$  — точки касания лучей  $L_1$  и  $L_2$  с каустикой. Проведем на каустике через точки  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  координатные линии  $\beta = \beta_0$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\alpha = \alpha_2$  и обозначим через  $N_1$  и  $N_2$  — точки их пересечения.

В точках каустики эйконал — однозначная функция. Пусть  $\tau(M_1)$  и  $\tau(M_2)$  — значение эйконала в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Введем обозначения

$$l_1 = \int_M^{M_1} \frac{ds}{c}, \quad l_2 = \int_M^{M_2} \frac{ds}{c}, \quad l_0 = \int_{N_2}^{N_1} \frac{ds}{c}. \quad (5.16)$$

Поскольку вдоль линий  $\alpha = \text{const}$  приращение эйконала равно нулю ( $\tau = \text{const}$  на линиях  $\alpha = \text{const}$ ), то

$$\tau(N_2) = \tau(M_2) \quad \text{и} \quad \tau(N_2) = \tau(M_1) - l_0. \quad (5.17)$$

С другой стороны,

$$\tau_1 = \tau(M_1) - l_1, \quad \tau_2 = \tau(M_2) + l_2. \quad (5.18)$$

Из равенств (5.17) и (5.18) следует

$$\tau_2 - \tau_1 = l_1 + l_2 - l_0. \quad (5.19)$$

Для полусуммы  $(\tau_1 + \tau_2)/2$  нетрудно получить следующую формулу:

$$\frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2) = \tau(M_0) + \frac{1}{2} [(l_2 - l_0'') - (l_1 - l_0')], \quad (5.20)$$

где  $\tau(M_0)$  — значение эйконала в точке  $M_0$ ,

$$l_0' = \int_{M_0}^{N_1} \frac{ds}{c}, \quad l_0'' = \int_{N_2}^{M_0} \frac{ds}{c}.$$

Формулами (5.19) и (5.20) удобно пользоваться, если  $c \equiv 1$  (тогда  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$  — просто длины соответствующих линий) и если точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на линии  $\beta = \text{const}$ .

## § 6. Вывод рекуррентных соотношений

Цель настоящей главы — построить волновое поле в окрестности каустики. Фактически мы построим некоторые ряды, формально при  $\omega \rightarrow \infty$  удовлетворяющие уравнению

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} \right) u = 0. \quad (6.1)$$

Этому формальному решению будет соответствовать поле лучей каустического типа, изучавшееся в §§ 3—5 настоящей главы. По-видимому, любое решение уравнения (6.1), которому соответствует каустическое лучевое поле, аналогичное тому, какое изучалось в §§ 3—5, имеет эти формальные ряды своим асимптотическим разложением.

Будем искать формальное решение уравнения (6.1) в виде, который подказан решением эталонной задачи из § 2:

$$u = \left\{ \left[ A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{(-i\omega)} + \frac{A_2(x, y, z)}{(-i\omega)^2} + \dots \right] v \left( -\omega^{\frac{2}{3}} \mu \right) + \right. \\ \left. + i \left[ B_0(x, y, z) + \frac{B_1(x, y, z)}{(-i\omega)} + \dots \right] v' \left( -\omega^{\frac{2}{3}} \mu \right) \cdot \omega^{-\frac{1}{3}} \right\} e^{i\omega\xi} \omega^{-\nu}. \quad (6.2)$$

Здесь  $\mu = \mu(x, y, z)$ ,  $\xi = \xi(x, y, z)$ ,  $\nu = \text{const}$ ,  $v(t)$  — функция Эйри. Формула (6.2) аналогична формуле (2.4).

Следует отметить, что в формуле (2.4)  $A_1 = A_3 = \dots \equiv 0$ ,  $B_0 = B_2 = B_4 = \dots \equiv 0$ . Это объясняется симметрией эталонной задачи. В общем случае введение коэффициентов  $A_1, A_3, \dots, B_0, B_2, \dots$  необходимо. При  $\mu > 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  асимптотика функции  $v(t)$  (см. Дополнение 1) дает

$$u \approx \frac{1}{2} \omega^{-\nu - \frac{1}{6}} e^{i \frac{\pi}{4}} \left( A_0 \mu^{-\frac{1}{4}} - B_0 \mu^{\frac{1}{4}} \right) \exp \left[ i \omega \left( \xi - \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} \omega^{-\nu - \frac{1}{6}} e^{i \frac{\pi}{4}} \left( A_0 \mu^{-\frac{1}{4}} + B_0 \mu^{\frac{1}{4}} \right) \exp \left[ i \omega \left( \xi + \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{\pi i}{2} \right]. \quad (6.3)$$

Таким образом, каждой точке  $x, y, z$  соответствуют два эйконала

$$\tau_1 = \xi - \frac{2}{3} \mu^{3/2} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \xi + \frac{2}{3} \mu^{3/2}, \quad (6.4)$$

как и в случае поля вблизи каустики (см. § 5).

Мы предположим, что  $\xi$  и  $\mu$  в формулах (6.2) и (6.3) — те же, что и в формулах (5.1) — (5.3). Выражения (6.4) тогда будут решениями уравнения эйконала

$$\left[ \nabla \left( \xi \pm \frac{2}{3} \mu^{3/2} \right) \right]^2 = \frac{1}{c^2},$$

откуда

$$(\nabla \xi)^2 + \mu (\nabla \mu)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (\nabla \xi, \nabla \mu) = 0. \quad (6.5)$$

Второе из равенств (6.5) означает, что поверхности

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \text{const} \quad \text{и} \quad \mu = \left[ \frac{3}{4} (\tau_2 - \tau_1) \right]^{2/3} = \text{const}$$

взаимно ортогональны. В плоском случае  $\xi = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$  образуют сетку взаимно ортогональных линий в окрестности каустики. Соотношения (6.5) важны для дальнейшего.

Вблизи каустики волна, идущая от каустики, и волна, идущая к каустике, неразличимы. Этот каустический пограничный слой имеет место там, где функцию Эйри  $v(-\omega^{2/3}\mu)$  нельзя заменять на ее асимптотику, т. е. там, где аргумент функции Эйри  $v$  имеет порядок 1, или  $\mu = O(\omega^{-2/3})$ . Вспоминая, что функция  $\mu$  при  $\mu \rightarrow 0$  (см. формулу (5.2)) имеет тот же порядок, что и расстояние до каустики, приходим к выводу: толщина пограничного слоя также имеет порядок  $O(\omega^{-2/3})$ . Если обозначить через  $n$  расстояние произвольной точки до каустики, вычисленное по нормали к каустике, то для точек пограничного слоя

$$|n| = O(\omega^{-2/3}). \quad (6.6)$$

В области  $\mu < 0$ , т. е. в зоне тени, вне пограничного слоя функция Эйри экспоненциально убывает. Асимптотические формулы для функции Эйри, справедливые при  $\mu < 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  (см. Дополнение 1), приводят к оценке

$$u \sim O\left[\omega^{-\nu-1/6} \exp\left(-\frac{2}{3}|\mu|^{3/2}\omega\right)\right].$$

Подставляя (6.2) в уравнение (6.1), получаем \*)

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u = & v e^{i\omega\xi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\mathcal{L}_2 A_n - \mathcal{L}_3 B_n + \Delta A_{n-1}) (-i\omega)^{1-n} + \\ & + i v' e^{i\omega\xi} \omega^{2/3} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathcal{L}_1 A_n - \mathcal{L}_2 B_n + \Delta B_{n-1}) (-i\omega)^{-n} = 0, \quad (6.7) \\ & A_{-1} \equiv 0; \quad B_{-1} \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_1 f = 2(\nabla\mu, \nabla f) + f\nabla\mu.$$

$$\mathcal{L}_2 f = 2(\nabla\xi, \nabla f) + f\Delta\xi,$$

$$\mathcal{L}_3 f = 2\mu(\nabla\mu, \nabla f) + f[(\nabla\mu)^2 + \mu\Delta\mu].$$

Из (6.7) получаем систему рекуррентных соотношений

$$\mathcal{L}_2 A_n + \mathcal{L}_3 B_n = \Delta A_{n-1}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{L}_1 A_n + \mathcal{L}_2 B_n = \Delta B_{n-1}, \quad (6.9)$$

$$A_{-1} \equiv 0, \quad B_{-1} \equiv 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

анализу которых посвящены следующие параграфы.

\*) Слагаемые, содержащие  $\omega^2 v$  и  $\omega^{5/3} v'$ , в (6.7) отсутствуют, так как мы считаем выполненными уравнения (6.5). Если в формуле (6.2) функции  $\mu$  и  $\xi$  считать функциями неизвестными, подлежащими определению, то, приравнявая нулю коэффициенты при  $\omega^2 v$  и  $\omega^{5/3} v'$  в разложении (6.7), мы придем именно к уравнениям (6.5) для этих функций.

### § 7. Волновое поле в окрестности каустики в первом приближении

Положим в формулах (6.8) и (6.9)  $n = 0$ :

$$\mathcal{L}_2 A_0 + \mathcal{L}_3 B_0 = 0,$$

$$\mathcal{L}_1 A_0 + \mathcal{L}_2 B_0 = 0.$$

Умножая первое равенство на  $\mu^{-1/4}$ , второе — на  $\mu^{1/4}$ , складывая и вычитая полученные результаты, нетрудно прийти к соотношениям

$$2\nabla\tau_1\nabla\Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(1)}\Delta\tau_1 = 0, \quad (7.1)$$

$$2\nabla\tau_2\nabla\Phi_0^{(2)} + \Phi_0^{(2)}\Delta\tau_2 = 0, \quad (7.2)$$

где

$$\tau_1 = \xi - \frac{2}{3}\mu^{3/2}, \quad \tau_2 = \xi + \frac{2}{3}\mu^{3/2}, \quad (7.3)$$

$$\Phi_0^{(1)} = A_0\mu^{-1/4} - B_0\mu^{1/4}, \quad (7.4)$$

$$\Phi_0^{(2)} = A_0\mu^{-1/4} + B_0\mu^{1/4}.$$

Уравнения (7.1), (7.2) подробно рассмотрены в главе 1. Формулы нулевого приближения лучевого метода дают

$$\Phi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{c}{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \chi_0^{(1)}(\alpha_1, \beta_1), \quad (7.5)$$

$$\Phi_0^{(2)} = \sqrt{\frac{c}{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \chi_0^{(2)}(\alpha_2, \beta_2),$$

где  $J_1$  — расходимость поля лучей, еще не коснувшихся каустики,  $J_2$  — то же для коснувшихся каустики лучей.

Функции  $\chi_0^{(1)}(\alpha, \beta)$ ,  $\chi_0^{(2)}(\alpha, \beta)$  зависят только от луча, характеризующегося параметрами  $\alpha, \beta$ . Мы будем как  $\chi_0^{(1)}$ , так и  $\chi_0^{(2)}$  считать достаточно гладкими функциями  $\alpha$  и  $\beta$ .

Из (7.5) и (7.4) следует, что

$$A_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_0^{(1)}(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} + \frac{\chi_0^{(2)}(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \right) \mu^{1/4} \sqrt{c(M)}, \quad (7.6)$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_0^{(2)}(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} - \frac{\chi_0^{(1)}(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \right) \mu^{-1/4} \sqrt{c(M)}.$$

Так как на каустике  $J_1 = J_2 = 0$ , знаменатели в формулах (7.6) обращаются в нуль. Тем не менее коэффициент  $A_0$  оказывается ограниченным, а для ограниченности коэффициента  $B_0$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\chi_0^{(1)}(\alpha, \beta) \equiv \chi_0^{(2)}(\alpha, \beta) = \chi_0(\alpha, \beta). \quad (7.7)$$

Дадим доказательство этих утверждений. Для геометрической расходимости  $J$  поля лучей в главе 1 была получена формула  $J = |[r_\alpha, r_\beta]|$ . Поскольку вектор  $[r_\alpha, r_\beta]$  и единичный вектор  $\frac{1}{c} r_\tau$  коллинеарны, эта формула может быть записана в виде

$$J = \left( [r_\alpha, r_\beta] \frac{r_\tau}{c} \right) (\pm 1).$$

Множитель  $\pm 1$  следует выбрать так, чтобы  $J$  было положительным.

В силу того, что на каустике  $\tau = \alpha$  и  $r_\alpha = 0$  (см. § 4), имеем

$$J|_{\tau=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\alpha} = \left( [r_{\alpha\tau}, r_\beta], \frac{r_\tau}{c} \right) (\pm 1).$$

В локальной системе координат  $x, y, z$  (см. § 4)  $r_\beta$  и  $r_\tau$  параллельны осям, соответственно  $y$  и  $x$ , а  $z_{\alpha\tau} \neq 0$ , поэтому

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\alpha} = \pm \left( [r_{\alpha\tau}, r_\beta], \frac{r_\tau}{c} \right) \neq 0 \quad (7.8)$$

и, следовательно,

$$J = |\tau - \alpha| J_0(\alpha, \beta, \tau), \quad (7.9)$$

где  $J_0$  — аналитическая вблизи каустики функция  $\alpha, \beta, \tau$ , принимающая положительные значения. Таким образом,

$$J_1^2 \sim (\tau_1 - \alpha_1)^2, \quad J_2^2 \sim (\tau_2 - \alpha_2)^2.$$

Далее, обращаясь к рис. 7, приходим к порядковым соотношениям

$$\begin{aligned} J_1^2 &\sim l_1^2 \sim |MM_0| \sim \mu(M), \\ J_2^2 &\sim l_2^2 \sim |MM_0| \sim \mu(M), \end{aligned} \quad (7.10)$$

в которых  $l_1$  и  $l_2$  — длины отрезков лучей соответственно между точками  $M, M_1$  и  $M_2, M$ . Соотношения (7.10) доказывают ограниченность коэффициента  $A_0$ .

Коэффициент  $B_0$ , если выполнено условие (7.7), можно представить в виде

$$B_0 = \frac{1}{2} \chi_0(\alpha, \beta) \frac{J_1(\alpha_1, \beta_1, \tau_1) - J_2(\alpha_2, \beta_2, \tau_2)}{\sqrt{J_1} \sqrt{J_2} (\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2}) \mu^{1/4}}. \quad (7.11)$$

Числитель с точностью до малых высшего порядка можно записать так:

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= a_1(\alpha_1 - \alpha_2) + a_2(\beta_1 - \beta_2) + a_3(\tau_1 - \tau_2) + \\ &\quad + O((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\tau_1 - \tau_2)^2). \end{aligned}$$

Из рис. 7 видно, что

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \tau(M_1) - \tau(M_2) \sim \sqrt{MM_0} \sim \sqrt{\mu(M)}. \quad (7.12)$$

Если спроектировать луч  $L_1$  на каустик, то его проекция будет касаться линии  $\beta_1 = \beta(M_1) = \text{const}$ , поэтому  $|M_1N_1| = O(|M_0M_1|^2)$  и аналогично  $|M_2N_2| = O(|M_0M_2|^2)$ . Отсюда и из соотношений

$$\begin{aligned} |M_1N_1| + |M_2N_2| &\sim |\beta(M_1) - \beta(N_1)| + |\beta(N_2) - \beta(M_2)| \sim \\ &\sim |\beta(M_1) - \beta(N_1) + \beta(N_2) - \beta(M_2)| = |\beta(M_1) - \beta(M_2)| = |\beta_1 - \beta_2| \end{aligned}$$

следует, что

$$\beta_1 - \beta_2 \sim \mu(M). \quad (7.13)$$



В силу формулы (5.15)  $\tau_2 - \tau_1 \sim \mu^{3/2}$ . Таким образом,

$$J_1 - J_2 = a_1 \sqrt{\mu} + O(\mu). \quad (7.14)$$

Но, пользуясь формулами (4.6), (5.2), (7.8), нетрудно подсчитать, что

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{J_1^2}{\mu} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{J_2^2}{\mu} = (3c(M_0)/r_{\alpha\alpha}(M_0))^{2/3} > 0, \quad (7.15)$$

откуда следует, что при  $M \rightarrow M_0$   $J_1$  и  $J_2$  эквивалентные бесконечно малые, т. е. их разность  $J_1 - J_2$  имеет больший порядок малости, чем  $J_1$  и  $J_2$ . Поэтому в формуле (7.14)  $a_1 = 0$ . Ограниченность выражения (7.11) теперь легко вытекает из существования пределов (7.15).

Возвращаясь к формулам (7.4), (7.5), (7.6) и полагая в них  $\chi_0^{(1)}(\alpha, \beta) = \chi_0^{(2)}(\alpha, \beta) = \chi_0(\alpha, \beta)$ , получаем

$$\begin{aligned} A_0 \mu^{-1/4} - B_0 \mu^{1/4} &= \frac{\chi_0(\alpha_1, \beta_1) \sqrt{c(M)}}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}}, \\ A_0 \mu^{-1/4} + B_0 \mu^{1/4} &= \frac{\chi_0(\alpha_2, \beta_2) \sqrt{c(M)}}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

и

$$\begin{aligned} A_0(x, y, z) &= \frac{1}{2} \mu^{1/4} \sqrt{c(M)} \left( \frac{\chi_0(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} + \frac{\chi_0(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \right), \\ B_0(x, y, z) &= \frac{1}{2} \mu^{-1/4} \sqrt{c(M)} \left( \frac{\chi_0(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} - \frac{\chi_0(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Таким образом, волновое поле  $u(M)$  в окрестности каустики в первом приближении описывается формулой

$$\begin{aligned} u(M) &= \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{c(M)} \left\{ \left[ \mu^{1/4} \left( \frac{\chi_0(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} + \frac{\chi_0(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] v(-\omega^{2/3}\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\omega^{1/3}} \left[ \mu^{-1/4} \left( \frac{\chi_0(\alpha_2, \beta_2)}{\sqrt{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} - \frac{\chi_0(\alpha_1, \beta_1)}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] v'(-\omega^{2/3}\mu) \right\} e^{i\omega\xi} \omega^{-\nu}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Вычисление по формуле (7.18) проводится следующим образом. В окрестности каустики через точку  $M$  проходят два луча  $MM_1$  с параметрами  $\alpha_1, \beta_1$  и  $M_2M$  с параметрами  $\alpha_2, \beta_2$ . Для каждого из этих лучей находим соответствующие расходимости  $J_1(\alpha_1, \beta_1)$  и  $J_2(\alpha_2, \beta_2)$  и подставляем их в формулу (7.18). Далее определяем значение эйконалов  $\tau_1, \tau_2$  и с их помощью по формулам (5.15) находим функции  $\mu$  и  $\xi$ . Функция  $\chi_0(\alpha, \beta)$

остается произвольной и может быть определена из условия сшивания волнового поля  $u(M)$  вдали от каустики с заданной падающей волной (см. § 9).

В область тени формула (7.18) распространяется с помощью аналитического продолжения по  $x, y, z$  (аналитичность  $A_0$  и  $B_0$  будет доказана в § 10).

### § 8. Построение $A_n$ и $B_n, n > 0$

Обратимся к формулам (6.8), (6.9). Умножая равенство (6.8) на  $\mu^{-1/4}$ , равенство (6.9) — на  $\mu^{1/4}$ , затем вычитая и складывая полученные результаты, найдем

$$\begin{aligned} 2\nabla\tau_1\nabla\Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(1)}\Delta\tau_1 &= \mu^{-1/4}\Delta A_{n-1} - \mu^{1/4}\Delta B_{n-1}, \\ 2\nabla\tau_2\nabla\Phi_n^{(2)} + \Phi_n^{(2)}\Delta\tau_2 &= \mu^{-1/4}\Delta A_{n-1} + \mu^{1/4}\Delta B_{n-1}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} &= \mu^{-1/4}A_n - \mu^{1/4}B_n, \\ \Phi_n^{(2)} &= \mu^{-1/4}A_n + \mu^{1/4}B_n. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Точно так же, как и в главе 1, из уравнений (8.1) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} &= \sqrt{\frac{c}{J_1}} \left( \chi_n^{(1)}(\alpha_1, \beta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\alpha_1}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-1/4} \Delta A_{n-1} - \mu^{1/4} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right), \\ \Phi_n^{(2)} &= \sqrt{\frac{c}{J_2}} \left( \chi_n^{(2)}(\alpha_2, \beta_2) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\alpha_2}^{\tau_2} \sqrt{\frac{J_2}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-1/4} \Delta A_{n-1} + \mu^{1/4} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right). \end{aligned} \quad (8.3)$$

В формулах (8.3) мы выбрали начало интегрирования при  $\tau_1 = \alpha_1, \tau_2 = \alpha_2$ , т. е. на каустике.

Из (8.2) вытекает равенство

$$B_n = \frac{1}{2} \mu^{-1/4} (\Phi_n^{(2)} - \Phi_n^{(1)}). \quad (8.4)$$

Потребуем ограниченности  $B_n$  на каустике  $\mu(M) = 0$ , считая  $A_s, B_s, s < n$ , достаточно гладкими.

Заметим, что

$$\frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{4}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{J_1}} \int_{\alpha_1}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-\frac{1}{4}} \Delta A_{n-1} - \mu^{\frac{1}{4}} \Delta B_{n-1} \right) d\tau - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{c}{J_2}} \int_{\alpha_2}^{\tau_2} \sqrt{\frac{J_2}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-\frac{1}{4}} \Delta A_{n-1} + \mu^{\frac{1}{4}} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right\} = O(1)$$

при  $M \rightarrow M_0$  (см. рис. 7). Это следует из того, что если  $M \rightarrow M_0$ , то  $\tau_j - \alpha_j \rightarrow 0$ ;  $j = 1, 2$ , и (см. § 7)

$$J_j \sim |\tau_j - \alpha_j| \sim \sqrt{\mu}; \quad \int_{\alpha_j}^{\tau_j} \sqrt{\frac{J_j}{c}} \frac{c^2}{2} (\dots) d\tau \sim (\tau_j - \alpha_j).$$

Для ограниченности при  $M \rightarrow M_0$  выражения

$$\frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{4}} \left( \sqrt{\frac{c}{J_1}} \chi_n^{(1)}(\alpha_1, \beta_1) - \sqrt{\frac{c}{J_2}} \chi_n^{(2)}(\alpha_2, \beta_2) \right)$$

необходимо и достаточно, чтобы функции  $\chi_n^{(1)}$  и  $\chi_n^{(2)}$  совпадали. Полагая в формулах (8.3)

$$\chi_n^{(1)}(\alpha, \beta) = \chi_n^{(2)}(\alpha, \beta) = \chi_n(\alpha, \beta)$$

и используя определение  $\Phi_n^{(1)}$  и  $\Phi_n^{(2)}$ , т. е. формулы (8.2), получим

$$A_n = \frac{1}{2} \mu^{1/4} (\Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)}), \\ B_n = \frac{1}{2} \mu^{-1/4} (\Phi_n^{(2)} - \Phi_n^{(1)}), \quad (8.5)$$

$$\Phi_n^{(j)} = \sqrt{\frac{c}{J_j}} \left( \chi_n(\alpha_j, \beta_j) + \right. \\ \left. + \int_{\alpha_j}^{\tau_j} \sqrt{\frac{J_j}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-\frac{1}{4}} \Delta A_{n-1} + (-1)^{(j)} \mu^{\frac{1}{4}} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right), \quad j = 1, 2. \quad (8.6)$$

О построении  $A_n$  и  $B_n$  по формулам (8.5), (8.6) можно сказать то же, что говорилось в конце § 7 о построении  $A_0$  и  $B_0$  с помощью формулы (7.17).

Остается два неясных вопроса: откуда брать функции  $\chi_n(\alpha, \beta)$  и будут ли достаточно гладкими функции  $A_n$  и  $B_n$ , построенные по формулам (8.5), (8.6). Этим вопросам посвящены §§ 9 и 10 настоящей главы.

### § 9. Определение функций $\chi_n$

Задачу о нахождении волнового поля вблизи каустики и за ней часто приходится решать в том случае, если до каустики «все известно». Например, пусть волновое поле порождено точечным источником колебаний в неоднородной среде, и пусть лучи соответствующего центрального поля лучей имеют огибающую, т. е. каустику. Тогда для волны, идущей к каустике, в принципе будет известно полное лучевое разложение. Задача заключается в том, чтобы найти каустическое разложение (6.2) волнового поля. Это сводится к определению функций  $\chi_n(\alpha, \beta)$  в формулах (8.6).

Аналогичная ситуация создается при нахождении коротковолновой асимптотики волнового поля, возникающего при отражении известной волны (например, плоской) от тела такой формы, что отраженные лучи имеют огибающую.

Итак, пусть известно лучевое разложение волны, идущей к каустике. Как найти  $\chi_n$  в формулах (8.6)?

Пусть волна, идущая к каустике, задана своим лучевым разложением (см. (1.4), (4.8) из гл. 1):

$$u_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^1(M)}{(-i\omega)^{s+\nu}} e^{i\omega\tau_1}, \quad (9.1)$$

$$\nu = \text{const}, \quad (-i)^{\nu} = e^{-\frac{\pi}{2} i\nu}, \quad \tau_1 = \xi - \frac{2}{3} \mu^{3/2},$$

$$u_s^{(1)}(M) = \sqrt{\frac{c}{J_1}} \left[ \psi_s(\alpha, \beta) + \int_{\tau_0(\alpha, \beta)}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} \Delta u_{s-1}^{(1)} d\tau \right]. \quad (9.2)$$

Обратимся к формуле (6.2). В первом приближении при  $\omega \rightarrow \infty$  в силу (6.3) имеем

$$\begin{aligned} u &\approx e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{1}{2} \omega^{-\frac{1}{6}-\nu} \left( A_0 \mu^{-\frac{1}{4}} - B_0 \mu^{\frac{1}{4}} \right) e^{i\omega \left( \xi - \frac{3}{2} \mu^{3/2} \right)} + \\ &+ e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\omega^{-\frac{1}{6}-\nu}}{2} \left( A_0 \mu^{-\frac{1}{4}} + B_0 \mu^{\frac{1}{4}} \right) e^{i\omega \left( \xi + \frac{2}{3} \mu^{3/2} \right)} = \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\omega^{-\frac{1}{6}-\nu}}{2} \sqrt{\frac{c}{J_1}} \chi_0(\alpha_1, \beta_1) e^{i\omega\tau_1} + \\ &+ e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\omega^{-\frac{1}{6}-\nu}}{2} \sqrt{\frac{c}{J_2}} \chi_0(\alpha_2, \beta_2) e^{i\omega\tau_2}. \quad (9.3) \end{aligned}$$

Сравнивая главный член в (9.1) и (9.3), получим

$$e^{\frac{\pi i}{2} \nu} \psi_0(\alpha, \beta) \omega^{-\nu} = e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{1}{2} \omega^{-\frac{1}{6}-\nu} \chi_0(\alpha, \beta). \quad (9.4)$$

Из равенства (9.4) следует

$$\nu = \gamma - \frac{1}{6}, \quad \chi_0(\alpha, \beta) = 2e^{\frac{\pi i}{2}(\gamma - \frac{1}{2})} \psi_0(\alpha, \beta). \quad (9.5)$$

Заметим, что по нулевому приближению лучевого метода для волны, идущей к каустике, мы нашли в нулевом же приближении волну, идущую от каустики. Волна, идущая к каустике, в нулевом приближении имеет вид

$$u_1 \approx \frac{\psi_0(\alpha, \beta)}{(-i\omega)^\nu} \sqrt{\frac{-c}{J_1}} e^{i\omega\tau_1}.$$

Тогда волна, идущая от каустики (в силу формул (9.3), (9.4)), будет иметь вид

$$u_2 \approx \frac{\psi_0(\alpha, \beta)}{(-i\omega)^\nu} \sqrt{\frac{c}{J_2}} e^{i\omega\tau_2 - \pi i/2}.$$

Выражения для  $u_1$  и  $u_2$  совершенно аналогичны, за тем исключением, что из фазы волны  $u_2$  вычитается  $\pi/2$ . Полученный результат коротко формулируют так: при прохождении каустики фаза волны скачком уменьшается на  $-\pi/2$ . Все волновое поле вне зоны тени и пограничного слоя вблизи каустики будет, разумеется, наложением волн  $u_1$  и  $u_2$ .

Обратимся теперь к приближениям более высокого порядка. Пусть  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  заданы. Предположим, что  $A_0, B_0, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}$  можно вычислить по заданным  $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$ . Покажем, как тогда найти  $A_n, B_n$  или (что то же)  $\chi_n(\alpha, \beta)$ . В формуле (6.2) заменяем  $v$  и  $v'$  на их асимптотическое разложение (см. Дополнение 1):

$$\begin{aligned} v(-t) &\sim \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{i \cdot \frac{2}{3} t^{3/2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{V \pi (2s)!} (9t^{3/2}i)^{-s} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{-i \cdot \frac{2}{3} t^{3/2}} e^{\frac{\pi i}{4}} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{V \pi (2s)!} (-9t^{3/2}i)^{-s} \right], \\ v'(-t) &\sim -\frac{1}{2} t^{\frac{1}{4}} e^{i \cdot \frac{2}{3} t^{3/2}} e^{\frac{\pi i}{4}} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3s + \frac{3}{2})}{V \pi (2s)!} \frac{(9t^{3/2}i)^{-s}}{\frac{1}{2} - 3s} \right] + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right) t^{\frac{1}{4}} e^{-i \cdot \frac{2}{3} t^{3/2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3s + \frac{3}{2})}{V \pi (2s)!} \frac{(-9t^{3/2}i)^{-s}}{\frac{1}{2} - 3s} \right]. \end{aligned}$$

Тогда в этой формуле коэффициент при  $\omega^{-\nu-n-1/6}e^{i\omega\tau}$ ,  $(\tau_1 = \xi - \frac{2}{3}\mu^{3/2})$  будем иметь вид

$$\frac{1}{2}e^{\frac{\pi i n}{2} + \frac{\pi i}{4}} \left( A_n \mu^{-\frac{1}{4}} - B_n \mu^{\frac{1}{4}} \right) + \Xi(A_0, B_0, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}). \quad (9.6)$$

Здесь  $\Xi$  — выражение, определяющееся коэффициентами  $A_0, B_0, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}$ . Приравнявая выражение (9.6) коэффициенту при  $\omega^{-n-\nu}$  в лучевом разложении (9.1) и используя формулы (9.2), (8.2), (8.6), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{2}n + \frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{c}{J_1}} \left[ \chi_n(\alpha, \beta) + \right. \\ & \left. + \int_{\alpha_1}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \mu^{-\frac{1}{4}} \Delta A_{n-1} - \mu^{\frac{1}{4}} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right] + \Xi = \\ & = \sqrt{\frac{c}{J_1}} \left( \psi_n(\alpha, \beta) + \int_{\tau_0(\alpha, \beta)}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} \Delta u_{n-1}^{(1)} d\tau \right) e^{\frac{\pi i}{2}(n+\nu)}. \quad (9.7) \end{aligned}$$

Заметим, что интегралы в формуле (9.7) и функция  $\Xi$  определяются через  $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$ . Таким образом, функция  $\chi_n(\alpha, \beta)$  однозначно определяется через  $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$ . Нетрудно видеть, что, обратно,  $\psi_0, \dots, \psi_n$  однозначно при любом  $n$  определяются через  $\chi_0, \dots, \chi_n$ .

Завершим параграф следующим замечанием. Для определения  $A_l$  и  $B_l$ ,  $l < n$ , следует построить функции  $\Phi_l^{(1)}$  и  $\Phi_l^{(2)}$  (см. § 8), причем формула (8.6) показывает, что  $\Phi_l^{(j)}$  вычисляется с помощью интегрирования вдоль лучей, идущих от каустики. Таким образом, несмотря на обманчиво простой вид формулы (9.7), зависимость  $\chi_n(\alpha, \beta)$  от  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  по существу довольно сложна.

## § 10. Аналитичность $A_n$ и $B_n$

Мы будем здесь иметь дело с каустическим лучевым полем, изученным в §§ 3, 4, 5. Имеет место

**Теорема.** Если функции  $\chi_n$  (см. 8.6) аналитичны по  $\alpha, \beta$ , то  $A_n$  и  $B_n$  — аналитические функции  $x, y, z$  в окрестности каустики.

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении § 5 и методе математической индукции. Оно громоздко и без ущерба для понимания дальнейшего его можно опустить.

Пусть  $\chi_0(\alpha, \beta)$  — аналитическая функция. Докажем аналитичность  $A_0$  и  $B_0$ . Заметим, что вблизи каустики функция

$$\chi_0(\alpha, \beta) \sqrt{c(M)} \frac{\mu^{1/4}}{\sqrt{J}} \quad (10.1)$$

является аналитической функцией  $\alpha, \beta, \tau$ . В самом деле, разложение функций  $J^2$  и  $\mu$  по степеням  $\tau - \alpha_0, \alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0$  может быть записано в виде (см. § 7)

$$J^2 = (\tau - \alpha_0)^2 J_0, \quad \mu = (\tau - \alpha_0)^2 \mu_0,$$

где  $J_0$  и  $\mu_0$  — степенные ряды с отличными от нуля свободными членами. Отсюда следует, что функция  $\mu^{1/4}/\sqrt{J}$  будет разлагаться в сходящийся степенной ряд с отличным от нуля свободным членом.

Пусть декартовы координаты  $x, y, z$  введены так же, как и в §§ 4, 5. Функция (10.1) однозначна и аналитична как функция  $\alpha, \beta, \tau$ , однако как функция  $x, y, z$  она уже двузначна, ибо каждой точке  $(x, y, z)$  вблизи каустики соответствуют два луча и два набора чисел  $\alpha_1, \beta_1, \tau_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \tau_2$ .

Разложим функцию (10.1) в ряд по степеням  $\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0, \tau - \tau_0$  ( $\tau_0 = \alpha_0$ ).

Выпишем выражение (5.8) для  $\alpha - \alpha_0$ :

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{H_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0}.$$

Напомним, что уравнение каустики может быть записано как в виде  $\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0 = 0$ , так и в виде  $\mu(x, y, z) = 0$ . Отсюда и из неравенств

$$\nabla \mu|_{\mu=0} \neq 0; \quad \nabla \left( \left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0 \right) \Big|_{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0 = 0} \neq 0$$

вытекает аналитичность функции

$$\frac{\mu}{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0}$$

в окрестности каустики и неравенство

$$\frac{\mu}{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0} \Big|_{\mu=0} = \frac{\mu}{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0} \Big|_{\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 - H_0 = 0} \neq 0.$$

Таким образом,

$$\alpha - \alpha_0 = E_1(x, y, z) \pm \sqrt{\mu(x, y, z)} E_2(x, y, z), \quad (10.2)$$

где  $E_j(x, y, z)$ ,  $j = 1, 2$ , — аналитические функции.

Пусть в равенстве (10.2) знаки соответствуют выбору знаков в формуле для  $\tau - \tau_0$ :

$$\tau - \tau_0 = \xi(x, y, z) - \tau_0 \pm \frac{2}{3} \mu^{3/2} \quad (10.3)$$

( $\xi$  и  $\mu$  — здесь те же, что и в конце § 5), этого легко добиться за счет определения аналитической функции  $E_2(x, y, z)$ .

Формула (5.5) дает

$$\beta - \beta_0 = E_3(x, y, z) \pm \sqrt{\mu} E_4(x, y, z), \quad (10.4)$$

где  $E_j(x, y, z)$ ,  $j = 3, 4$  — аналитические функции, при этом  $E_4$  может быть определена так, чтобы выбор знаков в (10.3) и (10.4) был согласован.

Подставим (10.2), (10.3) и (10.4) в разложение функции (10.1) в ряд по степеням  $\alpha - \alpha_0$ ,  $\beta - \beta_0$ ,  $\tau - \tau_0$ . Если выбрать в (10.3) знак минус, то

$$\chi_0(\alpha_1, \beta_1) \sqrt{\frac{c}{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \mu^{1/4} = K_0 - \sqrt{\mu} F_0,$$

если же в (10.3) взять знак плюс, то

$$\chi_0(\alpha_2, \beta_2) \sqrt{\frac{c}{J_2(\alpha_2, \beta_2)}} \mu^{1/4} = K_0 + \sqrt{\mu} F_0.$$

Здесь  $K_0, F_0$  — некоторые функции, аналитические в окрестности каустики. Формулы (7.17) дают

$$A_0 = K_0, \quad B_0 = F_0$$

и аналитичность  $A_0$  и  $B_0$  доказана.

Пусть теперь  $\chi_n(\alpha, \beta)$ ,  $A_{n-1}(x, y, z)$ ,  $B_{n-1}(x, y, z)$  аналитичны. Докажем аналитичность  $A_n$  и  $B_n$ .

Рассмотрим выражение

$$\sqrt{c} \frac{\mu^{1/4}}{\sqrt{J}} \left[ \chi_n(\alpha, \beta) + \int_{\alpha}^{\tau} \sqrt{\frac{1}{c}} \frac{c^2}{2} \left( \frac{\sqrt{J}}{\mu^{1/4}} \Delta A_{n-1} - \sqrt{J} \mu^{1/4} \Delta B_{n-1} \right) d\tau \right]. \quad (10.5)$$

Функция  $\sqrt{J} \mu^{-1/4}$  аналитична, как функция  $\alpha, \beta, \tau$ . Выражение  $\sqrt{J} \mu^{1/4}$  также будет аналитической функцией, если считать, что на луче, прошедшем каустику, оно отрицательно. Действительно, так как

$$J = |\alpha - \tau| \sqrt{J_0}, \quad \mu = (\alpha - \tau)^2 \mu_0$$

( $\sqrt{J_0}, \mu_0$  — аналитические функции, положительные на каустике), то при  $\alpha > \tau$

$$\sqrt{J} \mu^{1/4} = (\alpha - \tau) P_0$$

( $P_0$  — аналитическая функция). В силу нашего соглашения это равенство справедливо и при  $\alpha < \tau$ .

Если произведение  $\sqrt{J} \mu^{1/4}$  — аналитическая функция, то очевидно будет аналитической функцией  $\alpha, \beta, \tau$  и выражение (10.5). Рассуждая, как раньше, и возвращаясь к обозначениям §§ 7, 8, получим, учитывая формулу (8.6),

$$\begin{aligned} \sqrt{c} \frac{\mu^{1/4}}{\sqrt{J_1(\alpha_1, \beta_1)}} \left[ \chi_n(\alpha_1, \beta_1) + \int_{\alpha_1}^{\tau_1} \sqrt{\frac{J_1}{c}} \frac{c^2}{2} (\mu^{-1/4} \Delta A_{n-1} - \mu^{1/4} \Delta B_{n-1}) d\tau \right] = \\ = K_n - \sqrt{\mu} F_n = \mu^{1/4} \Phi_n^{(1)}, \end{aligned}$$

где  $K_n$  и  $F_n$  — аналитические функции  $x, y, z$  вблизи каустики. Аналогично при  $\tau = \tau_2 = \xi + \frac{2}{3} \mu^{3/2}$  получим

$$K_n + \sqrt{\mu} F_n = \mu^{1/4} \Phi_n^{(2)}.$$

Из формул (8.5) заключаем:  $K_n = A_n$ ,  $F_n = B_n$ , что и доказывает теорему.



## ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ

В этой главе излагается важный эвристический метод вывода асимптотических формул для собственных чисел и функций уравнения

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)}\right)u = 0 \quad (\omega^2 - \text{собственное число}).$$

Мы будем называть этот метод *методом Келлера — Рубинау*.

### § 1. Вводные замечания

В силу того, что собственным функциям с большими номерами отвечают большие значения  $\omega$ , естественно ожидать, что геометро-оптические соображения будут играть существенную роль в построении асимптотики собственных функций. Действительно, многие известные нам работы по асимптотике собственных функций в той или иной степени базируются на изложенном в главе 1 лучевом методе. Рассмотрения настоящей главы тоже основаны на лучевом методе.

Итак, пусть требуется найти асимптотические формулы (при  $\omega \rightarrow \infty$ ) для собственных функций и чисел уравнения

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(M)}u = 0 \quad (M \in \Omega) \quad (1.1)$$

при одном из следующих краевых условий

$$u|_S = 0 \quad (1.2)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\Omega$  — конечная область, внутри которой рассматривается уравнение (1.1),  $S$  — граница  $\Omega$ ,  $M$  — точка  $\Omega$ .

Оказывается, в ряде случаев можно построить асимптотику собственных функций, которая имеет вид лучевого решения (см. гл. 1). Поле лучей, соответствующее этому лучевому решению, обладает очень интересным свойством: при продолжении внутри области, после конечного числа отражений, оно переходит само в себя. Сколько лучей проходит через точку  $M$ ,

столько и слагаемых будет в асимптотической формуле для  $u(M)$ . Асимптотику собственных чисел дают условия однозначности лучевого решения на этом замыкающемся поле лучей.

Общая схема применения лучевого метода в теории собственных чисел и функций рассматривается в §§ 2, 3 настоящей главы. Остальные параграфы посвящены важным для дальнейшего примерам. Построения §§ 2, 3 не зависят от числа измерений пространства, однако изложение ведется для трехмерного случая, причем каждый раз указывается, какие изменения в обозначениях следует сделать в двумерном случае.

## § 2. Многоэкземплярное пространство

Пусть некоторое семейство лучей, т. е. экстремалей функционала  $\int \frac{ds}{c}$ , просто покрывает\*) некоторую подобласть  $\Omega_1$  области  $\Omega$ , т. е. через каждую точку этой подобласти проходит один и только один луч.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое поле векторов  $t(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  (в плоском случае —  $t(\tau_1, \tau_2)$ \*\*), касательных к лучам.

Будем предполагать, что семейство лучей таково, что

$$\sum \tau_\mu^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{\partial \tau_\mu}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_j}{\partial x_\mu} \quad ***).$$

В окрестности каждой точки  $M$  тогда существует функция  $\tau$  (эйконал), дифференциал которой  $d\tau$  равен  $\sum \tau_\mu dx_\mu$ .

Линии уровня функции  $\tau$  ортогональны к лучам и играют роль волновых фронтов. Такое семейство лучей мы будем называть *нормальной конгруэнцией*.

Пусть лучи, входящие в нормальную конгруэнцию, касаются каустики. Предположим, что лучи, идущие от каустики (рис. 8), входят в другую нормальную конгруэнцию, тоже просто покрывающую подобласть  $\Omega_2$  области  $\Omega$ . Склеим подобласть  $\Omega_2$  с подобластью  $\Omega_1$  вдоль каустики. Разумеется, через каждую точку получившейся составной области проходит один и только один луч. Над каждой точкой области  $\Omega$ , которая находится вблизи каустики в области тени, не лежит ни одной точки этой состав-



Рис. 8.

\*) Термин заимствован из вариационного исчисления.

\*\*) В настоящей главе мы используем обозначения  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ,

$t_x = \tau_1, \dots$

\*\*\*) По терминологии вариационного исчисления рассматриваемое семей-

ство лучей является *майеровым* семейством экстремалей функционала  $\int c^{-1} ds$ .

ной области, с освещенной же стороны составная область осуществляет двухлистное покрытие точек  $\Omega$ .

Пусть, далее (рис. 9), лучи некоторой нормальной конгруэнции отражаются от поверхности  $S$  и отраженные лучи тоже образуют нормальную конгруэнцию. Подобласти, которые покрываются этими нормальными конгруэнциями, снова можно

склеить вдоль  $S$ , и тогда через каждую точку такой склеенной области будет проходить один и только один луч. Представляет интерес и такой случай, когда лучи, касающиеся каустики, отражаются от поверхности  $S$ , причем каустика пересекает  $S$  под отличным от нуля углом. В этом случае отраженные лучи будут тоже иметь огибающую — отраженную каустику. В этом случае (рис. 10) падающие лучи выстилают две подобласти  $\Omega$ , склеенные вдоль каустики  $AO$ , и отражаются на участке  $OC$  от поверхности  $S$ , выстилая опять две подобласти  $\Omega$ , склеенные вдоль отраженной каустики  $OB$ . Произведем



Рис. 9.

еще две склейки вдоль  $OC$ , склеивая между собой две пары подобластей таким образом, чтобы падающие лучи на одной подобласти переходили в отраженные лучи склеенной с ней другой подобласти.

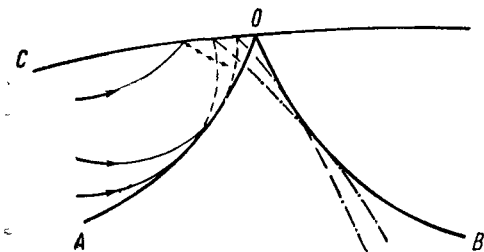


Рис. 10.

области  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \subset \Omega$ , склеены таким образом, что не остается ни одной свободной неприклеенной границы. Границы областей  $\Omega_i$  состоят из каустик и отражающих границ  $S_i$ , которые являются частью границы области  $\Omega$ . Полученное в результате многообразие мы будем называть *многоэкземплярным пространством*, а множество лучей, из которых сотканы нормальные конгруэнции, выстилающие многоэкземплярное пространство, — *замыкающейся конгруэнцией лучей*. Сколько бы мы ни продолжали какой-либо луч, принадлежащий замыкающейся конгруэнции лучей, отражая его в местах встречи с поверхностью  $S$  по закону «угол падения равен углу отражения», он никогда не покинет многоэкземплярного пространства, а будет только переходить через каустики и отражающие поверхности из одной нормальной конгруэнции в другую. Замыкающаяся конгруэнция

лучей и есть то переходящее в себя множество лучей, о котором шла речь в предыдущем параграфе.

Пример. Пусть область  $\Omega$  есть круг  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a$ ,  $c(M) = c(x_1, x_2) \equiv 1$ . Проведем лучи под одним и тем же углом  $\alpha (< \pi/2)$  к окружности  $r = a$  (рис. 11, а). Эти лучи образуют нормальную конгруэнцию, ограниченную окружностью  $S(r = a)$  и каустикой  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a \cos \alpha$ . Продолжая лучи за каустику, получим вторую нормальную конгруэнцию (рис. 11, б).

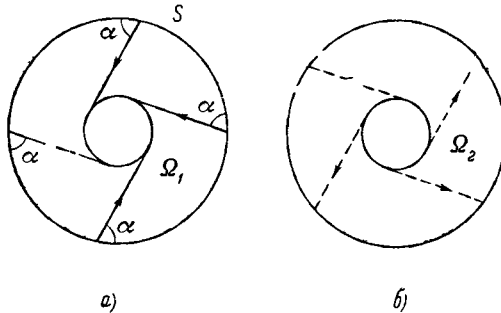


Рис. 11.

Отражая лучи второй нормальной конгруэнции от  $S$  по закону «угол падения равен углу отражения», мы опять приходим к первой нормальной конгруэнции. Склеивая области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ( $a \cos \alpha < r < a$ ) вдоль отражающей границы  $S(r = a)$  и каустики  $r = a \cos \alpha$ , получим «сотканное» из лучей двух нормальных конгруэнций многоэкземплярное (в нашем случае — двухэкземплярное) пространство. Это многоэкземплярное пространство позволяет найти (см. § 4) асимптотику собственных чисел круга. Другие примеры многоэкземплярных пространств и замыкающихся конгруэнций лучей читатель найдет в § 5.

Вернемся снова к общему случаю. Пусть на какой-либо нормальной конгруэнции задано лучевое решение  $u_0 e^{i\omega\tau}$ , где  $\tau$  — эйконал и  $u_0$  удовлетворяет уравнению переноса (4.1) из главы 1. Используя формулу (4.3) главы 1 и тот факт, что при переходе через каустику фаза скачком уменьшается на  $\pi/2$ , можно продолжить это лучевое решение на все многоэкземплярное пространство, кроме, разумеется, каустика, где, как известно, лучевые решения обращаются в бесконечность (см. § 8 гл. 1). В каждой точке  $M$  асимптотика функции  $u(M)$  выражается формулой

$$u(M) \approx \sum u_{0j} \exp(i\omega\tau^{(j)}), \quad (2.1)$$

где суммирование проводится по тем точкам многоэкземплярного пространства, которые имеют те же координаты  $x_j$ , что и точка  $M$ , и лежат на разных нормальных конгруэнциях. Другими словами, число слагаемых в формуле (2.1) равно числу лучей замыкающейся конгруэнции, проходящих через точку  $M$ . Так, на рис. 8 через  $M$  проходят два луча и им соответствуют два слагаемых в сумме (2.1).

### § 3. Однозначность собственной функции и условия квантования

Основное предположение метода Келлера — Рубинау состоит в том, что асимптотику собственных функций дают лучевые решения, однозначные на некоторых замыкающихся конгруэнциях лучей. Произвольное лучевое решение, определенное на какой-либо нормальной конгруэнции (входящей в замыкающуюся конгруэнцию), после продолжения по лучам не определяет, вообще говоря, однозначной функции на всем многоэкземплярном пространстве.

При продолжении функции по лучам мы в конце концов выйдем на нормальную конгруэнцию, на которой это лучевое решение было первоначально определено. Для однозначности лучевого решения необходимо и достаточно, чтобы модуль  $|u_0 e^{i\omega\tau}| = |u_0|$  вернулся к своему первоначальному значению, а  $\arg(u_0 e^{i\omega\tau})$  получил приращение, кратное  $2\pi$ . Как следует из формулы (4.3) главы 1, для  $|u_0|$  имеет место формула

$$|u_0| = |\psi_0| \sqrt{c/J},$$

где  $\psi_0$  — функция, зависящая только от луча,  $c$  — скорость распространения,  $J$  — расходимость. Если замыкающаяся конгруэнция лучей такова, что каждый луч переходит в себя, то функцию  $\psi_0$  можно задавать произвольно —  $|u_0|$  будет однозначно. В противном случае, луч, выйдя из какой-либо точки  $A$  волнового фронта  $AB$  (рис. 12), после ряда отражений и перехода через каустики будет возвращаться в некоторую точку  $B$  на том же волновом фронте, вообще говоря, отличную от точки  $A$ . Для однозначности  $|u_0|$  должно выполняться равенство

$$|u_0(B)| = |u_0(A)| \sqrt{\frac{c(B)}{c(A)}} \sqrt{\frac{|J(A)|}{|J(B)|}}.$$

Это равенство будет иметь место, если  $\psi_0 = \text{const}$ , что мы и будем предполагать.

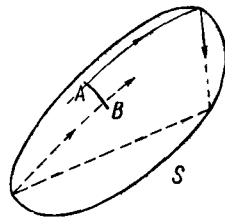


Рис. 12.

Для однозначности  $u_0 e^{i\omega\tau}$  нужно еще, чтобы приращение  $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})$  на любом замкнутом контуре, лежащем на многоэкземплярном пространстве, было кратно  $2\pi$ . Обратимся к полю векторов  $\mathbf{t}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  ( $\mathbf{t}(\tau_1, \tau_2)$  — в двумерном случае), введенному в начале § 2. Это векторное поле является локально потенциальным, т. е. в окрестности произвольной точки существует функция  $\tau(x_1, x_2, x_3)$  (эйконал) такая, что  $\nabla\tau = \mathbf{t}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  ( $\nabla\tau = \mathbf{t}(\tau_1, \tau_2)$  — в двумерном случае). Через каждую точку многоэкземплярного пространства проходит луч. Градиент эйконала  $\nabla\tau$  направлен вдоль луча, причем  $(\nabla\tau)^2 = c^2$ . Хотя сам эйконал и не определен однозначно на многоэкземплярном пространстве, компоненты его градиента — однозначные функции.

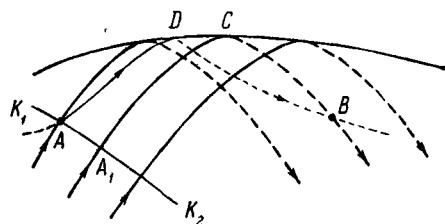


Рис. 13

Теперь мы приступаем к выводу важной для дальнейшего формулы для приращения  $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})$  на произвольном контуре  $\Gamma$ . Будем считать, что на контуре  $\Gamma$  выбрано некоторое направление обхода\*).

Для подсчета приращения  $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})$  на  $\Gamma$  разобьем  $\Gamma$  на достаточно малые дуги, подсчитаем приращение  $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})$  на них и полученные результаты сложим.

Рассмотрим вначале тот случай, когда дуга  $\overline{AB} (\subset \Gamma)$  ( $A$  — начало дуги,  $B$  — конец) целиком лежит на одной нормальной конгруэнции. Тогда приращение  $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})$  сводится к приращению  $\text{arg}(e^{i\omega\tau})$ , что в свою очередь сводится к интегралу

$$\omega \int_A^B d\tau = \omega \int_{\overline{AB}} \sum \tau_\mu dx_\mu = \omega \int_A^B \sum \tau_\mu dx_\mu. \quad (3.1)$$

(Напомним, что в силу равенств  $\frac{\partial \tau_\mu}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_j}{\partial x_\mu}$  этот интеграл не меняется при деформации контура, соединяющего  $A$  и  $B$ .)

Рассмотрим теперь другой случай, когда точки  $A$  и  $B$  принадлежат разным нормальным конгруэнциям, склеенным между собой вдоль каустики (рис. 13). Проведем через точку  $A$  волновой фронт  $K_1 K_2$  и через точку  $B$  — луч. Пусть  $A_1$  — точка пересечения волнового фронта и луча, проходящего через  $B$ . На волновом фронте  $K_1 K_2$   $\text{arg}(u_0 e^{i\omega\tau}) = \text{const}$ . Вдоль луча при

\*) Другими словами, будем рассматривать  $\Gamma$  как ориентированный одномерный цикл на многоэкземплярном пространстве, которое можно трактовать как замкнутое компактное многообразие.

переходе через каустику фаза скачком уменьшается на  $\pi/2$  (см. § 8, гл. 1), поэтому

$$\begin{aligned} \arg(u_0 e^{i\omega\tau}) \Big|_A^B &= \arg(u_0 e^{i\omega\tau}) \Big|_{A_1}^B = \omega \int_{A_1CB} \sum \tau_\mu dx_\mu - \frac{\pi}{2} \varepsilon_c = \\ &= \omega \int_{AA_1CB} \sum \tau_\mu dx_\mu - \frac{\pi}{2} \varepsilon_c = \omega \int_{ADB} \sum \tau_\mu dx_\mu - \frac{\pi}{2} \varepsilon_c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь интеграл по лучу  $A_1CB$  можно было заменить интегралом по дуге  $ADB \subset \Gamma$  в силу того, что контур  $AA_1CB$  можно непрерывно деформировать в контур  $ADB$ . Интеграл по  $AA_1$ , очевидно, равен нулю: векторы  $dr(dx_1, dx_2, dx_3)$  и  $t(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  на  $AA_1$  ортогональны. Число  $\varepsilon_c = 1$ , если лучи из нормальной конгруэнции, содержащей точку  $A$ , переходят в нормальную конгруэнцию, содержащую  $B$  (рис. 13). В этом случае мы будем говорить, что контур  $\Gamma$  переходит через каустику *согласно* с лучами. В случае, если лучи нормальной конгруэнции ( $\alpha$ ) переходят через каустику в нормальную конгруэнцию ( $\beta$ ), точка  $A$  лежит на конгруэнции ( $\beta$ ), а  $B$  на ( $\alpha$ ), то  $\varepsilon_c = -1$ , и мы будем говорить, что контур  $\Gamma$  переходит через каустику *противоположно* лучам. Выясним, как вычисляется приращение  $\arg(u_0 e^{i\omega\tau})$  при отражении лучей от границы  $S$ .

Пусть краевое условие на  $S$  имеет вид (1.3). Лучевое решение  $u_{0j} \exp(i\omega\tau^{(j)})$ , представляющее собой падающую волну, отразится и перейдет в отраженную волну  $u_{0m} \exp(i\omega\tau^{(m)})$ . Лучи нормальной конгруэнции, соответствующие падающей волне, отразятся по закону геометрической оптики от  $S$  и превратятся в лучи, соответствующие отраженной волне. Из краевого условия (1.3) следует

$$\tau^{(m)} \Big|_S = \tau^{(j)} \Big|_S, \quad u_{0j} \Big|_S = u_{0m} \Big|_S, \quad (3.3)$$

откуда

$$\arg(u_0 e^{i\omega\tau}) \Big|_A^B = \omega \int_A^B \sum \tau_\mu dx_\mu. \quad (3.4)$$

Если на  $S$  краевое условие имеет вид (1.2), то формулы (3.3) заменяются на

$$\tau^{(m)} \Big|_S = \tau^{(j)} \Big|_S, \quad u_{0j} \Big|_S = -u_{0m} \Big|_S = u_{0m} e^{i\pi} \Big|_S. \quad (3.5)$$

Аналогично случаю каустики из формул (3.5) следует

$$\arg(u_0 e^{i\omega\tau}) \Big|_A^B = \omega \int_A^B \sum \tau_\mu dx_\mu - \pi\varepsilon_r, \quad (3.6)$$

$\varepsilon_r = 1$ , если контур  $\Gamma$ , или (что то же) дуга  $AB$ , переходит через отражающую поверхность  $S$  согласно с лучами и  $\varepsilon_r = -1$ , если контур  $\Gamma$  переходит через  $S$  противоположно лучам.

Суммируя приращение  $\arg(u_0 e^{i\omega\tau})$  по всем дугам, на которые был разбит контур  $\Gamma$ , и пользуясь формулами (3.1), (3.2), (3.4), (3.6), получим окончательно для приращения  $\arg(u_0 e^{i\omega\tau})$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\arg(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma} = \omega \int_{\Gamma} \sum \tau_{\mu} dx_{\mu} - \frac{\pi}{2} l_c - \pi l_r, \quad (3.7)$$

где

$$l_c = l'_c - l''_c, \quad l_r = l'_r - l''_r, \quad (3.8)$$

$l'_c$  — число переходов контура  $\Gamma$  через каустику согласно с лучами,  $l''_c$  — число переходов контура  $\Gamma$  через каустику противоположно лучам,  $l_r = l'_r - l''_r$ ,  $l'_r$  ( $l''_r$ ) — число переходов согласно с лучами (противоположно лучам) контура  $\Gamma$  через отражающую поверхность  $S$ , если краевое условие имеет вид (1.2). Если краевое условие имеет вид (1.3), то  $l_r = 0$ . Число  $l_c$  будем называть *каустическим индексом*, число  $l_r$  — *отражательным индексом*.

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — два замкнутых контура таких, что их можно непрерывной деформацией перевести друг в друга. Как интеграл  $\int \sum \tau_{\mu} dx_{\mu}$ , так и индексы  $l_c$  и  $l_r$  не меняются при деформации контура\*), поэтому приращения  $\arg(u_0 e^{i\omega\tau})$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  совпадают:

$$\arg(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma_1} = \arg(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma_2}. \quad (3.9)$$

Существует конечное число базисных контуров  $\Gamma_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, f$ , таких, что любой замкнутый контур  $\Gamma$  является их линейной комбинацией с целыми коэффициентами  $c_s$ \*\*) :

$$\Gamma = \sum_{s=1}^f c_s \Gamma_s. \quad (3.10)$$

Равенство (3.10) нужно понимать в следующем смысле: контур  $\Gamma$  можно получить с помощью непрерывной деформации из составного контура, состоящего из  $c_1$  раз повторенного контура  $\Gamma_1$ ,  $c_2$  раз повторенного контура  $\Gamma_2$ , ...,  $c_f$  раз повторенного контура  $\Gamma_f$ . Если  $c_j < 0$ , то следует еще изменить направление, в котором проходит контур  $\Gamma_j$ , на противоположное.

\*) Постоянство индексов  $l_c$  и  $l_r$  при непрерывной деформации контура следует из общей топологической теоремы о гомологической инвариантности индекса пересечения, о чем речь пойдет в конце этого параграфа

\*\*) Это вытекает из того, что фундаментальная группа компактного многообразия имеет конечное число образующих. См. В. Зейферт, Н. Трельфалль [1].



Из равенства (3.9) легко получаем

$$\operatorname{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma} = \sum_{s=1}^f c_s \operatorname{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma_s}. \quad (3.11)$$

В силу (3.7), (3.11) требование, чтобы для любого контура  $\Gamma$

$$\operatorname{arg}(u_0 e^{i\omega\tau})|_{\Gamma} = 2\pi n \quad (n - \text{целое}),$$

эквивалентно выполнению равенств

$$\omega \int_{\Gamma_s} \sum \tau_{\mu} dx_{\mu} - \pi l_r^{(s)} - \frac{\pi}{2} l_c^{(s)} = 2\pi n_s \quad (s = 1, 2, \dots, f), \quad (3.12)$$

где  $n_s$  — целое число,  $\Gamma_s$  — базисный контур. Условия (3.12) называются *условиями квантования*.

Будем считать, что базисные контуры  $\Gamma_s$  линейно независимы в том смысле, что ни один из них нельзя получить непрерывной деформацией какой-либо линейной комбинации остальных базисных контуров. Тогда в формуле (3.12) числа  $n_s$  можно задавать независимо друг от друга.

Если имеется фиксированная замыкающаяся конгруэнция лучей, то задание одного из чисел  $n_s$ , как следует из равенств (3.12), определит  $\omega$ , а оставшиеся  $f-1$  условий квантования не будут, вообще говоря, выполнены. Пусть у нас не одна замыкающаяся конгруэнция лучей, а  $f-1$  параметрическое семейство таких конгруэнций.

Пусть, кроме того, для каждой замыкающейся конгруэнции, входящей в это семейство при любом значении параметров, число линейно независимых базисных контуров равно  $f$ . Эти базисные контуры, а следовательно, и левые части равенств (3.12) будут зависеть от этих  $f-1$  параметров, определяющих конгруэнцию. Тогда, задавая произвольно в равенствах (3.12) целые числа  $n_s$ , мы эти равенства сможем рассматривать как систему  $f$  уравнений с  $f$  неизвестными: одно из этих неизвестных —  $\omega$ , другие неизвестные  $f-1$  параметров, определяющих замыкающуюся конгруэнцию.

Так обстоит дело, например, для замыкающейся конгруэнции круга, построенной в § 2 настоящей главы, где склеивание двух concentрических колец вдоль их границ приводит к двухэкземплярному пространству, которое, очевидно, непрерывной деформацией можно превратить в тор. На торе, как известно, имеется два линейно независимых базисных контура ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на рис. 14), откуда возникает два условия квантования. Из двух уравнений находится  $\omega$  и единственный параметр

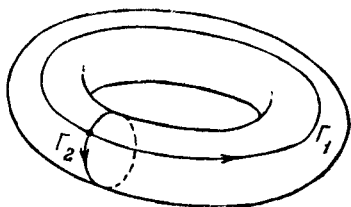


Рис. 14.

(угол  $\alpha$ ), определяющий рассматриваемую конгруэнцию. (Подробнее см. § 4.)

В заключение параграфа наметим связь изложенной теории с некоторыми топологическими понятиями \*).

Прежде всего, в окрестности каждой точки (не исключая точек, принадлежащих каустикам и отражающим поверхностям) можно ввести в качестве координатной системы лучевые координаты  $\alpha, \beta, \tau$ . (Здесь, как всегда, параметры  $\alpha, \beta$  характеризуют лучи, эйконал  $\tau$  — точки на луче.) Тем самым многоэкземплярное пространство можно рассматривать как дифференцируемое многообразие, причем, очевидно, компактное. Считая, что предположения о каустиках, сделанные в § 3 главы 2, выполнены и здесь, мы будем иметь на каустике

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\alpha, \beta, \tau)} = 0; \quad \left. \frac{\partial J}{\partial \tau} \right|_{J=0} \neq 0.$$

Таким образом, множество точек  $J = 0$  можно рассматривать как двумерный цикл, лежащий двусторонне на многоэкземплярном пространстве. Двусторонность вложения каустики в многоэкземплярное пространство следует из того, что касательные векторы к лучам образуют на каустике непрерывное, нигде не касательное векторное поле. Напоминаем, что рассуждения ведутся в системе координат  $\alpha, \beta, \tau$  и лучи  $(\alpha, \beta) = \text{const}$  не касательны к подмногообразию  $J = 0$  в силу неравенства  $\frac{\partial J}{\partial \tau} \neq 0$ . За положительную сторону на каустике можно взять ту сторону, куда обращены касательные к лучам.

Каустический индекс  $l_c(\Gamma)$ , как непосредственно следует из его определения, является индексом пересечения (Кронекера — Пуанкаре) одномерного ориентированного цикла  $\Gamma$  и двусторонне лежащей в многообразии каустики. Из хорошо известной топологической теоремы о гомологической инвариантности индекса пересечения следует равенство

$$l_c(\Gamma) = l_c(\Gamma'), \quad (3.13)$$

имеющее место при гомологичности циклов  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ . Тем более равенство (3.13) справедливо при гомотопности  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , т. е. если их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией.

Все сказанное здесь можно повторить и об отражательном индексе  $l_r(\Gamma)$ , который тоже является индексом пересечения (цикла  $\Gamma$  и отражающей поверхности).

Во всех случаях, когда удалось провести методику §§ 1—3, многоэкземплярное пространство оказывалось многомерным тором, а, как хорошо известно, для тора гомологичные контуры можно непрерывной деформацией перевести друг в друга. Как показал В. И. Арнольд [1], в том случае, если число базисных контуров  $f$  равно числу измерений пространства, а замыкающиеся конгруэнции лучей образуют  $f - 1$  параметрическое семейство, при некоторых уточняющих предположениях многоэкземплярное пространство обязательно будет многомерным тором. Во всех задачах, которые до сих пор удалось решить, предположения теоремы В. И. Арнольда выполняются.

---

\*) Читатель, не знакомый с основами топологии многообразий, может нижеследующий текст до конца этого параграфа пропустить без ущерба для понимания дальнейшего.

#### § 4. Собственные значения и собственные функции круга

Пусть область  $\Omega$  представляет собой круг радиуса  $a$  и скорость  $c$  равна единице. Задачу о собственных функциях круга мы рассмотрим в случае краевого условия (1.2). Случай краевого условия (1.3) рассматривается совершенно аналогично, и о нем будет сказано совсем коротко.

Замыкающаяся конгруэнция лучей, покрывающая кольцо  $a \cos \alpha \leq r \leq a$  (см. § 2), позволяет найти коротковолновую асимптотику собственных функций круга. Многоэкземплярное пространство здесь представляет собой дважды покрытое кольцо  $a \cos \alpha \leq r \leq a$ , склеенное вдоль окружностей  $r = a$  и  $r = a \cos \alpha$ .

Выберем базисные контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Пусть (рис. 15)  $\Gamma_1$  — окружность  $r = a \cos \alpha = a_0$ , направление обхода на  $\Gamma_1$  возьмем то, которое индуцируют на нем лучи. В качестве  $\Gamma_2$  выберем замкнутую кривую, образованную двумя лучами  $AB$  и  $BC$ , расположенными на разных листах, и соединяющей их дугой  $CDA$  окружности  $r = a_0$ .

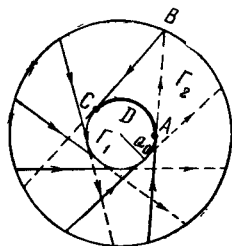


Рис. 15.

Для базисного контура  $\Gamma_1$  как каустический, так и отражательный индексы равны нулю\*), а дифференциальная форма  $\sum \tau_\mu dx_\mu$  совпадает с дифференциалом дуги. Первое условие квантования дает

$$k \int_{\Gamma_1} \sum \tau_\mu dx_\mu = k \int_{\Gamma_1} ds = 2\pi a_0 k = 2\pi q \quad (q = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.1)$$

где  $k = \omega/c = \omega$  — собственное число.

Для базисного контура  $\Gamma_2$  каустический индекс  $l_c = 1$  (контур согласно с лучами один раз переходит через каустику с одной нормальной конгруэнции на другую). Отражательный индекс  $l_r$ , очевидно, тоже равен единице. Дифференциальная форма  $\sum \tau_\mu dx_\mu$  на лучах и кривой  $CDA$  совпадает с дифференциалом дуги  $ds$ . Второе условие квантования дает

$$k \int_{\Gamma_2} \sum \tau_\mu dx_\mu - \frac{\pi}{2} l_c - \pi l_r = 2\pi p \quad (p = 0, 1, \dots),$$

или

$$k \left[ \sqrt{a^2 - a_0^2} - a_0 \arccos \frac{a_0}{a} \right] = \pi \left( p + \frac{3}{4} \right). \quad (4.2)$$

\*) Равенство нулю каустического индекса становится очевидным, если при помощи малой деформации сдвинуть базисный контур  $\Gamma_1$  с каустики на внутренние точки одного из колец.

Исключая  $a_0$  из уравнений (4.1) и (4.2), получим уравнение для собственных чисел  $k_{pq}$

$$\sqrt{(k_{pq}a)^2 - q^2} - q \operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}a} = \pi \left( p + \frac{3}{4} \right). \quad (4.3)$$

В случае краевого условия (1.3) уравнение для собственных чисел будет

$$\sqrt{(k_{pq}a)^2 - q^2} - q \operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}a} = \pi \left( p + \frac{1}{4} \right). \quad (4.4)$$

Трансцендентное уравнение (4.3) (или (4.4)) допускает простые приближенные решения в двух предельных случаях  $p \gg 1$ ,  $q = 0, 1, \dots$  и  $q \gg 1$ ,  $p = 0, 1, \dots$ . Рассмотрим эти предельные случаи для уравнения (4.3).

1. При  $p \gg 1$  и  $q = 0, 1, 2, \dots$ , очевидно,  $\pi p \sim k_{pq}a \gg 1$ . Разлагая  $\sqrt{(k_{pq}a)^2 - q^2}$  и  $\operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}a}$  в ряды по степеням отношения  $q/k_{pq}a$  и ограничиваясь главными членами, получаем

$$k_{pq}a = \pi \left( p + q/2 + 3/4 \right), \quad p \gg 1, \quad q = 0, 1, \dots$$

Определив  $k_{pq}$ , из уравнения (4.1) находим

$$a_0 = \frac{a}{\pi} \frac{q}{p + q/2 + 3/4}.$$

Отсюда следует, что радиус каустики  $a_0$ , соответствующий собственным значениям  $k_{pq}$ , удовлетворяет неравенству  $a_0 \ll a$ , и замыкающаяся конгруэнция лучей покрывает почти весь круг ( $r \leq a^*$ ).

2. При  $q \gg 1$  и  $p = 0, 1 \dots$  правая часть уравнения (4.3) имеет значение порядка нескольких единиц, и мы должны считать  $k_{pq}a \sim q$ . Разложим левую часть уравнения (4.3) по степеням разности  $1 - \frac{q}{k_{pq}a}$ . Сохраняя главный член разложения, получим

$$\frac{2^{3/2}}{3} k_{pq}a \left( 1 - \frac{q}{k_{pq}a} \right)^{3/2} = \pi \left( p + \frac{3}{4} \right),$$

откуда

$$k_{pq}a = q + \frac{q^{1/3}}{2^{1/3}} \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}, \quad (4.5)$$

\*) Строго говоря, наши построения при малых  $a_0$  незаконны, так как при  $a_0 \rightarrow 0$  рассматриваемые лучи фокусируются в центр круга. Однако изучение явных формул для собственных функций показывает, что полученные в этом пункте выражения для  $a_0$  и  $k_{pq}$  все-таки правильные.

и соответствующее значение  $a_0$  равно

$$a_0 = a \left\{ 1 - \frac{1}{2^{1/3}} \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} \frac{1}{q^{2/3}} \right\}.$$

Таким образом, каустика  $r = a_0$  расположена в окрестности границы круга  $r = a$  и лучи покрывают узкое кольцо шириной  $\sim \frac{a}{2^{1/3}} \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} \frac{1}{q^{2/3}}$ . Следует отметить, что на самой каустике и в ее окрестности исходное представление собственной функции в виде суммы (2.1) не имеет места. Поскольку в рассматриваемом случае  $a_0 \sim a$ , представление (2.1) неверно также на самой окружности  $r = a$ , где удовлетворяются граничные условия. Это обстоятельство приводит к тому, что в формуле (4.5) множитель  $\left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}$  оказывается неточным. Как мы увидим ниже (§ 4 гл. 6), этот множитель на самом деле равен корню  $t_p$  функции Эйри  $v(-t)$ . При больших значениях номера корня  $p$  имеет место асимптотическое равенство

$$t_p \approx \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3},$$

указывающее на то, что чем больше  $p$  (при выполнении условия  $q \gg p$ ), тем точнее формула (4.5).

Перейдем к построению собственных функций в случае краевого условия (1.2). Для этого прежде всего нужно вычислить  $\tau^{(j)}$  и  $u_{0j}$ ,  $j = 1, 2$ . Введем полярную систему координат  $r, \varphi$  и будем считать, что  $\tau^{(1)}(a_0, 0) = 0$ . При этом условии вычислим  $\tau^{(1)}(r_0, \varphi_0)$  и  $\tau^{(2)}(r_0, \varphi_0)$  в произвольной точке  $M(r_0, \varphi_0)$ , расположенной в кольце  $a_0 \leq r \leq a$ . Вычисление  $\tau^{(1)}$  сводится к вычислению *оптического расстояния* (длины экстремали функционала геометрической оптики  $\int ds$ ) между точками  $A(a_0, 0)$  и  $M(r_0, \varphi_0)$ . Это расстояние будет представлять собой сумму длин дуги каустики  $\overline{AB}$  и отрезка  $BM$ , касательного к окружности  $r = a_0$  (рис. 16). Очевидно,

$$\tau^{(1)}(r_0, \varphi_0) = a_0 \left( \varphi_0 - \arccos \frac{a_0}{r_0} \right) + \sqrt{r_0^2 - a_0^2}.$$

Для вычисления  $\tau^{(2)}(r_0, \varphi_0)$  следует найти оптическое расстояние между точками  $A$  и  $M$  с учетом отражения луча в окружности

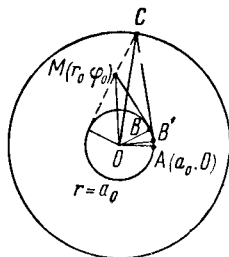


Рис. 16.

$r = a$ . Очевидно, что  $\tau^{(2)}(r_0, \varphi_0) = \overline{AB'} + B'C + CM$ ; отсюда

$$\tau^{(2)}(r_0, \varphi_0) = a_0 \left[ \varphi_0 - \left( 2 \operatorname{arccos} \frac{a_0}{a} - \operatorname{arccos} \frac{a_0}{r_0} \right) \right] + \\ + \sqrt{a^2 - a_0^2} + \left( \sqrt{a^2 - a_0^2} - \sqrt{r_0^2 - a_0^2} \right).$$

Используя уравнение (4.2), полученный результат можно записать в виде

$$\tau^{(2)}(r_0, \varphi_0) = a_0 \left( \varphi_0 + \operatorname{arccos} \frac{a_0}{r_0} \right) - \sqrt{r_0^2 - a_0^2} + \frac{2\pi}{k} \left( p + \frac{3}{4} \right).$$

Очевидно, уравнения

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}(r, \varphi) &= \tau^{(1)}(r_0, \varphi_0), \\ \tau^{(2)}(r, \varphi) &= \tau^{(2)}(r_0, \varphi_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

представляют собой уравнения двух эвольвент окружности  $r = a_0$ , пересекающихся в точке  $r_0, \varphi_0$ . Радиусы кривизны кривых (4.6) в точке  $M(r_0, \varphi_0)$  равны друг другу и равны  $\sqrt{r_0^2 - a_0^2}$ . Поскольку амплитуда изменяется обратно пропорционально квадратному корню из радиуса кривизны волнового фронта (§§ 3, 4 гл. 1), то

$$\begin{aligned} u_{01}(r_0, \varphi_0) &= \frac{A_1}{\sqrt[4]{r_0^2 - a_0^2}}, \\ u_{02}(r_0, \varphi_0) &= \frac{A_2}{\sqrt[4]{r_0^2 - a_0^2}}, \end{aligned}$$

где  $A_1, A_2$  — некоторые постоянные (заметим, что каустика — геометрическое место центров кривизны волновых фронтов).

Краевое условие (1.2) дает  $A_2 = A_1 e^{i\pi}$ . Положим  $A_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{2k^{1/2}}$ .

Опуская при координатах произвольной точки  $M$  несущественный индекс «0» и учитывая равенство  $k_{pq}a_0 = q$ , получаем

$$\begin{aligned} u_{01} e^{ik_{pq}\tau^{(1)}} + u_{02} e^{ik_{pq}\tau^{(2)}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt[4]{(k_{pq}r)^2 - q^2}} \cos \left[ \sqrt{(k_{pq}r)^2 - q^2} - q \operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}r} - \frac{\pi}{4} \right] e^{iq\varphi}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если рассмотреть лучи, совпадающие в кольце  $a_0 \leq r \leq a$ , с построенными хордами и распространяющиеся по часовой

стрелке, то такие лучи привели бы нас к формуле, аналогичной (4.7):

$$u_{03}e^{ik_{pq}\tau^{(3)}} + u_{04}e^{ik_{pq}\tau^{(4)}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(k_{pq}r)^2 - q^2}} \cos \left[ \sqrt{(k_{pq}r)^2 - q^2} - q \arccos \frac{q}{k_{pq}r} - \frac{\pi}{4} \right] e^{-iq\varphi}. \quad (4.8)$$

Складывая и вычитая равенства (4.7) и (4.8), мы приходим к вещественным выражениям для собственных функций

$$u_{pq}(r, \varphi) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(k_{pq}r)^2 - q^2}} \cos \left[ \sqrt{(k_{pq}r)^2 - q^2} - q \arccos \frac{q}{k_{pq}r} - \frac{\pi}{4} \right] \begin{cases} \cos q\varphi \\ \sin q\varphi \end{cases}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) дает представления для собственных функций в покрытом лучами кольце  $a_0 < r \leq a$ , т. е. при  $k_{pq}r > q$ . Чтобы получить выражения для собственных функций за каустикой в круге  $r < a_0$  и в окрестности каустики  $r = a_0$ , следует воспользоваться результатами главы 2.

В случае краевого условия (1.3) выражения для собственных функций получаются тем же способом. Для них тоже имеют место асимптотические формулы (4.7)–(4.9), где, однако, собственные числа  $k_{pq}$  следует находить не из трансцендентного уравнения (4.3), как в случае краевого условия (1.2), а из уравнения (4.4).

Сравним полученные формулы с точными значениями собственных функций. Решение уравнения

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

в полярной системе координат записывается в виде

$$u = \text{const } J_q(kr) \begin{cases} \cos q\varphi, \\ \sin q\varphi, \end{cases} \quad (4.10)$$

где  $J_q$  — функция Бесселя порядка  $q$ . Собственные значения  $k_{pq}$  определяются из уравнений

$$J_q(k_{pq}a) = 0, \quad J'_q(k_{pq}a) = 0 \quad (4.11)$$

соответственно крайевым условиям (1.2), (1.3).

При  $kr \gg 1$  и  $q = 0, 1, 2, \dots < kr$  для функции Бесселя справедлива асимптотическая формула

$$J_q(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(kr)^2 - q^2]^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos \left[ \sqrt{(kr)^2 - q^2} - q \arccos \frac{q}{kr} - \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{\sqrt{(kr)^2 - q^2}}\right) \right\}. \quad (4.12)$$

Заменяя в уравнениях (4.11) функцию Бесселя выражением (4.12), для собственных значений  $k_{pq}$  в первом приближении получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{(k_{pq}a)^2 - q^2} - q \operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}a} &= \pi \left( p + \frac{3}{4} \right), \\ \sqrt{(k_{pq}a)^2 - q^2} - q \operatorname{arccos} \frac{q}{k_{pq}a} &= \pi \left( p + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения полностью совпадают с уравнениями (4.3) и (4.4), полученными лучевым методом. Если выражение (4.12) подставим в формулу (4.10) и заменим  $k$  на  $k_{pq}$ , то придем к асимптотической формуле (4.9). Таким образом, при  $q < k_{pq}r$  имеет место полное совпадение формул, полученных лучевым методом, с асимптотическими формулами, вытекающими из точного решения задачи. Однако сравнение (4.9) при  $q \sim k_{pq}r$  с точным решением, позволяет установить и некоторую ограниченность лучевого метода. При  $q \sim k_{pq}r$  асимптотическая формула (4.12) для функции Бесселя становится неприменимой. В этом случае следует воспользоваться асимптотической формулой, выражающей функцию Бесселя через функцию Эйри \*)

$$J_q(kr) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{kr} \right)^{1/3} v(t),$$

где

$$t = \left( \frac{2}{kr} \right)^{1/3} (q - kr).$$

Для определения собственных значений  $k_{pq}$  получаем в первом приближении уравнения

$$\left( \frac{2}{k_{pq}a} \right)^{1/3} (q - k_{pq}a) = -t_p, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (4.13)$$

и

$$\left( \frac{2}{k_{pq}a} \right)^{1/3} (q - k_{pq}a) = -t'_p, \quad p = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

В этих уравнениях  $-t_p$  и  $-t'_p$  — корни функции Эйри  $v(t)$  и ее производной (см. Дополнение 1).

При достаточно больших  $p$  для  $t_p$  и  $t'_p$  становятся справедливыми асимптотические формулы

$$\begin{aligned} t_p &= \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + O\left(\frac{1}{p}\right), \\ t'_p &= \left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} + O\left(\frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

\*) См В А Фок [2].



Решая уравнения (4.13) и (4.14), получаем для собственных значений  $k_{pq}$  следующие формулы:

$$k_{pq} = \frac{1}{a} \left[ q + t_p \left( \frac{q}{2} \right)^{1/3} + \dots \right]$$

и

$$k_{pq} = \frac{1}{a} \left[ q + t'_p \left( \frac{q}{2} \right)^{1/3} + \dots \right].$$

Если в первой из них  $t_p$  заменить его асимптотикой, то придем к формуле (4.5), выведенной при помощи лучевого метода. Асимптотика собственных функций в этом случае, в отличие от формулы (4.9), будет выражаться через функцию Эйри. При достаточно больших  $p$  мы можем заменить функцию Эйри ее асимптотическим выражением, и тогда получим формулу, вытекающую из (4.9) при условии, что  $k_{pq}a \sim q$ .

Таким образом, формулы, полученные лучевым методом, совпадают с соответствующими асимптотическими формулами, вытекающими из точного решения, лишь при достаточно больших  $p$ . Причина, по которой при малых  $p$  получаются формулы, не совпадающие с точными асимптотическими формулами, уже была нами указана ранее.

## § 5. Собственные значения эллипса

В этом параграфе мы рассмотрим второй пример построения собственных значений лучевым методом. Мы получим собственные значения оператора Лапласа для эллипса, на границе  $S$  которого выполняется одно из условий: (1.2) или (1.3). Как и в § 4, считаем, что  $c = 1$ , и полагаем  $\omega = \omega/c = k$ .

Введем эллиптическую систему координат (рис. 17)

$$\begin{aligned} x_1 &= h \operatorname{ch} \mu \cos \theta, & x_2 &= h \operatorname{sh} \mu \sin \theta, \\ 0 &\leq \mu < \infty, & 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Координатными линиями являются эллипсы

$$\mu = \operatorname{const}$$

и гиперболы

$$\theta = \operatorname{const}.$$

Квадрат элемента длины выражается формулой

$$ds^2 = h^2 (\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta) (d\theta^2 + d\mu^2). \quad (5.2)$$

Пусть для эллипса  $S$ , ограничивающего рассматриваемую область,

$$\mu = a.$$

Получим прежде всего собственные значения, которые соответствуют собственным функциям, сосредоточенным в полосе, примыкающей к границе области. Построения, приводящие к соответствующей системе уравнений, будут вполне аналогичны построениям предыдущего параграфа.

Рассмотрим некоторую хорду  $N_0N_1$  эллипса  $\mu = a$  (рис. 18). Пусть эта хорда является касательной к эллипсу  $\mu = a_0$ , софокусному с эллипсом  $\mu = a$ . Примем хорду  $N_0N_1$  за исходный

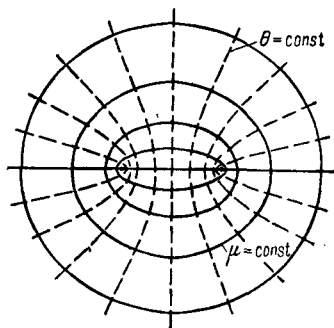


Рис. 17.

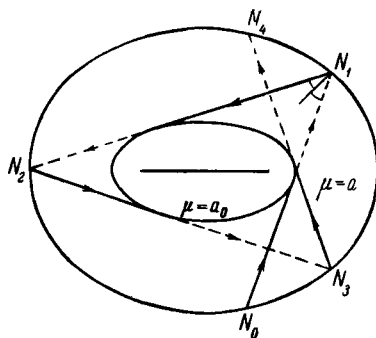


Рис. 18.

луч. Построим по закону отражения хорду  $N_1N_2$  (углы, образованные хордами  $N_0N_1$ ,  $N_1N_2$  и нормалью к эллипсу в точке  $N_1$ , равны друг другу). Построим, далее, по тому же правилу хорды  $N_2N_3$ ,  $N_3N_4$ , ... Очевидно хорды  $N_1N_2$ ,  $N_2N_3$ , ... описывают лучи, возникающие в результате многократных отражений исходного луча  $N_0N_1$  в точках  $N_1$ ,  $N_2$ , ... Чтобы из лучей  $N_iN_{i+1}$  построить замыкающуюся конгруэнцию, необходимо доказать, что все лучи  $N_iN_{i+1}$  касаются одного и того же эллипса  $\mu = a_0$ .

Мы дадим доказательство этого утверждения\*), основанное на интегрировании уравнения эйконала в эллиптической системе координат. (Заметим, что используемая при этом методика играет большую роль при исследовании уравнения для седловых точек, соответствующих падающей и отраженной волнам, в задаче дифракции на эллипсе.)

Докажем следующее утверждение, эквивалентное только что сформулированному.

**Теорема.** Если  $M(a, \vartheta)$  — произвольная точка на эллипсе  $\mu = a$  (рис. 19),  $MB$  и  $MC$  — касательные, проведенные из нее к софокусному эллипсу  $\mu = a_0$ , то углы, которые составляют эти касательные с эллипсом  $\mu = a$ , равны друг другу.

\*) Другое доказательство можно найти в книгах Ж. Сальмана [1] или Л. А. Вайнштейна [3].

Построим прежде всего решение уравнения эйконала  $|\nabla\tau|^2 = 1$ , вещественное в эллиптическом кольце  $a_0 \leq \mu \leq a$ . В эллиптической системе координат уравнение эйконала, как это следует из формул (5.1), (5.2), имеет вид

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial\mu}\right)^2 = h^2(\operatorname{ch}^2\mu - \cos^2\theta)$$

(см. Дополнение 2). Полагая

$$\tau(\mu, \theta) = F(\mu) + \Phi(\theta), \quad (5.3)$$

получаем

$$\begin{aligned} F'^2(\mu) + \Lambda^2 - h^2 \operatorname{ch}^2\mu &= 0, \\ \Phi'^2(\theta) - \Lambda^2 + h^2 \cos^2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $\Lambda$  — постоянная разделения. Мы удовлетворим требованию вещественности решения (5.3) в кольце  $a_0 \leq \mu \leq a$ , если положим

$$\Lambda = h \operatorname{ch} a_0.$$

В качестве решений уравнений (5.4) возьмем

$$\begin{aligned} F(\mu) &= +h \int_{a_0}^{\mu} \sqrt{\operatorname{ch}^2\mu - \operatorname{ch}^2 a_0} d\mu, \\ \Phi(\theta) &= +h \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\operatorname{ch}^2 a_0 - \cos^2\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

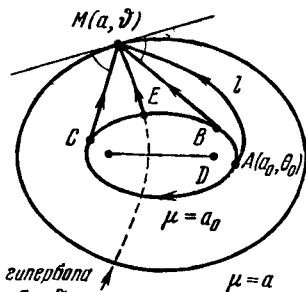


Рис. 19.

Выбор знаков в формулах (5.5) соответствует семейству лучей, касательных к эллипсу  $\mu = a_0$  и идущих от него к эллипсу  $\mu = a$ .

Подсчитаем теперь приращение эйконала  $\tau$ , определенного формулами (5.3) и (5.5), между фиксированной точкой  $A(a_0, \theta_0)$ , расположенной на эллипсе  $\mu = a_0$ , и точкой  $M(a, \theta)$ . Искомое приращение обозначим  $\tau|_A^M$ . Очевидно,

$$\tau|_A^M = \int_l (\nabla\tau \cdot ds),$$

где контур интегрирования  $l$  соединяет точки  $A$  и  $M$ ,  $ds$  — единичный вектор касательной к  $l$ . Интеграл  $\int_l (\nabla\tau \cdot ds)$ , как мы знаем (см. § 3), сохраняет свое значение при непрерывной деформации контура  $l$  и закрепленных точках  $A$  и  $M$ ,

Пусть контур  $l$  идет из точки  $A$  в точку  $M$  так, что вдоль  $l$  угол  $\theta$  возрастает, оставаясь меньше  $2\pi$ . Совместим контур  $l$  (см. рис. 19) с координатными линиями  $ABE$  ( $\mu = a_0$ ) и  $EM$  ( $\theta = \theta$ ). Тогда

$$\tau|_A^M = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau_{\theta} d\theta + \int_{a_0}^a \tau_{\mu} d\mu$$

и в силу формул (5.3), (5.5)

$$\tau|_A^M = h \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta + h \int_{a_0}^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \text{ch}^2 a_0} d\mu.$$

С другой стороны, мы можем совместить контур  $l$  с дугой  $AB$  эллипса  $\mu = a_0$  и касательной  $BM$ . На этом пути интегрирования  $\nabla\tau = s$  и, следовательно,

$$\tau|_A^M = \int_{ABM} (s \cdot ds) = |ABM|,$$

где  $|ABM|$  — длина кривой  $ABM$ .

Сравнивая два последних равенства, получаем

$$h \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta + h \int_{a_0}^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \text{ch}^2 a_0} d\mu = |ABM|. \quad (5.6)$$

Вполне аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} -h \int_{2\pi+\theta_0}^{\theta} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta + \\ + h \int_{a_0}^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \text{ch}^2 a_0} d\mu = |ADCM|, \quad (5.7) \end{aligned}$$

где  $|ADCM|$  — длина кривой  $ADCM$ , составленной из дуги  $ADC$  эллипса  $\mu = a_0$  и касательной  $CM$ .

Сложив равенства (5.6) и (5.7), получим, что длина замкнутой линии  $ABMCDA$  равна

$$\begin{aligned} h \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta + 2h \int_{a_0}^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \text{ch}^2 a_0} d\mu = \\ = h \int_{\theta_0}^{2\pi} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta + 2h \int_{a_0}^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \text{ch}^2 a_0} d\mu \end{aligned}$$

и, следовательно, не зависит от  $\vartheta$ . Напомним, что  $\vartheta$  — координата точки  $M$  на эллипсе  $\mu = a$ . Таким образом, длина линии  $ABMCDA$  не будет меняться при движении точки  $M$  по эллипсу  $\mu = a$ . В силу постоянства длины кривой  $ABMCDA$  вариация интеграла  $\int_{ABMCDA} ds$  равна нулю, т. е.

$$\delta \int_{ABMCDA} ds = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{ABMCDA} \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \sigma}\right)^2} d\sigma = 0,$$

где  $x_1 = x_1(\sigma)$ ,  $x_2 = x_2(\sigma)$  — параметрическое уравнение кривой  $ABMCDA$ . Составляя по общим правилам вариационного исчисления эту вариацию  $^*$ ), получим, что в точке  $M$

$$(s_1 - s_2, \delta r) = 0, \quad (5.8)$$

где  $\delta r$  — вектор, касательный в точке  $M$  к эллипсу  $\mu = a$ ,  $s_1$  — единичный вектор, направленный вдоль касательной  $BM$ , и  $s_2$  — единичный вектор, направленный вдоль касательной  $MC$ . Соотношение (5.8) и доказывает равенство углов, которые составляют касательные  $BM$  и  $MC$  с эллипсом  $\mu = a$ .

Вернемся к построению замыкающейся конгруэнции лучей. Совокупность многократно отраженных лучей  $N_i N_{i+1}$ , касательных к эллипсу  $\mu = a_0$ , легко разбивается на две нормальные конгруэнции.

Одна конгруэнция образована отрезками касательных к эллипсу  $\mu = a_0$ , которые начинаются в точках эллипса  $\mu = a$  и кончаются в точках эллипса  $\mu = a_0$ , другая — отрезками касательных, начинающимися в точках эллипса  $\mu = a_0$  и кончающимися в точках эллипса  $\mu = a$  (рис. 20, а, б). Одна нормальная конгруэнция (сплошные линии) переходит в другую (пунктирные линии) в результате отражений и прохождений через каустику. Таким образом, мы получаем двулистное покрытие эллиптического кольца  $a_0 \leq \mu \leq a$ . Склеивая оба листа по каустике  $\mu = a_0$  и отражающему эллипсу  $\mu = a$ , приходим к двухэкземплярному пространству (см. рис. 20, в), гомеоморфному тору. В качестве базисных кривых на этом многоэкземплярном пространстве выберем эллипс  $\mu = a_0$ , являющийся каустикой, и замкнутую кривую, которая состоит из падающего луча, принадлежащего второй конгруэнции, отраженного луча, принадлежащего первой конгруэнции, и дуги каустики  $\mu = a_0$ , соединяющей их концы. При этом дуга каустики пробегается в направлении, противоположном лучам. Для простоты будем считать построенную замкнутую кривую расположенной симметрично относительно оси  $Ox_2$  так, что падающий луч переходит

\*) См В. И. Смирнов [3].

в отраженный в точке  $\mu = a$ ,  $\theta = \pi/2$  и на дуге каустики  $\mu = a_0$  угол  $\theta$  изменяется в пределах

$$\arcsin \frac{\text{sh } a_0}{\text{sh } a} < \theta < \pi - \arcsin \frac{\text{sh } a_0}{\text{sh } a}.$$

Вдоль выбранных базисных кривых выполняются равенства

$$\sum \tau_\mu dx_\mu = \pm ds,$$

где  $ds$  — элемент длины базисной кривой. Поэтому условия

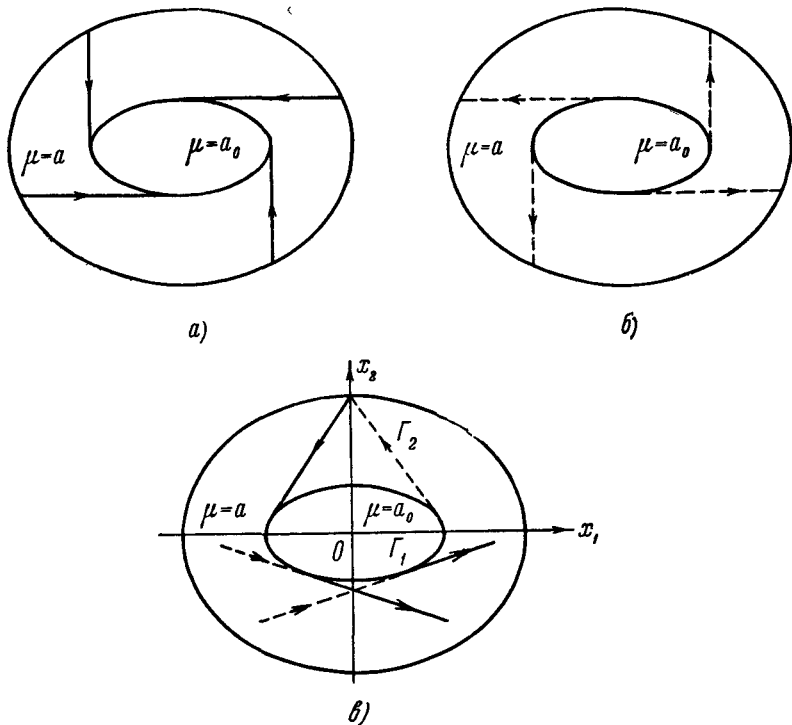


Рис. 20.

квантования (3.12) сводятся к

$$kh \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta = 2\pi q,$$

$$2kh \left[ \frac{\text{ch } a}{\text{sh } a} \sqrt{\text{sh}^2 a - \text{sh}^2 a_0} - \int_{\arcsin \frac{\text{sh } a_0}{\text{sh } a}}^{\pi/2} \sqrt{\text{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta \right] = \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} (5.9)$$

$$= \begin{cases} 2\pi p + 3\pi/2 \\ 2\pi p + \pi/2 \end{cases}$$

Правая часть второго уравнения равна  $2\pi\rho + 3\pi/2$  в случае условия (1.2) и равна  $2\pi\rho + \pi/2$  в случае условия (1.3). Дополнительные слагаемые  $3\pi/2$  и  $\pi/2$  появляются за счет одного пересечения базисной кривой с каустикой и одного — с границей области.

Так как величина  $k$  должна быть большой, то в первом уравнении (5.9) следует считать  $q \gg 1$ . Система уравнений (5.9) определяет собственные значения  $k_{pq}$  и соответствующее им значение  $a_0$ .

Исключим из уравнений (5.9) неизвестное  $k$ :

$$2q \left[ \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} \sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 a_0} - \int_{\arcsin \frac{\operatorname{sh} a_0}{\operatorname{sh} a}}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta \right] \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{ch}^2 a_0 - \cos^2 \theta} d\theta \right)^{-1} = \begin{cases} \rho + 3/4, \\ \rho + 1/4. \end{cases} \quad (5.10)$$

Полученное уравнение для  $a_0$  разрешимо не при всех  $\rho$  и  $q$ . Левая часть уравнения (5.10) при  $a_0 = 0$  принимает наибольшее значение, равное

$$\frac{q}{2} (\operatorname{ch} a - 1).$$

Таким образом, из уравнения (5.10) может быть найдено  $a_0$ , удовлетворяющее неравенству  $0 \leq a_0 \leq a$ , а вслед за ним и соответствующее собственное значение, только если

$$0 \leq \rho \leq \frac{q}{2} (\operatorname{ch} a - 1) - \begin{cases} 3/4, \\ 1/4. \end{cases} \quad (5.11)$$

Однако существует такая замыкающаяся конгруэнция лучей, что ей соответствуют собственные значения  $k_{pq}$ , отвечающие значениям  $\rho, q$ , для которых

$$\rho > \frac{q}{2} (\operatorname{ch} a - 1) - \begin{cases} 3/4, \\ 1/4. \end{cases}$$

Действительно, пусть теперь (рис. 21) исходный луч (хорда  $N_0 N_1$ ) пересекает отрезок между фокусами  $F_1$  и  $F_2$  эллипса  $\mu = a$ . Такой луч будет касаться внутри или вне эллипса  $\mu = a$  некоторой софокусной гиперболы. Пусть правая и левая ветви этой гиперболы описываются соответственно уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \theta = \theta_0, \\ \theta = 2\pi - \theta_0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \theta = \pi - \theta_0, \\ \theta = \pi + \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

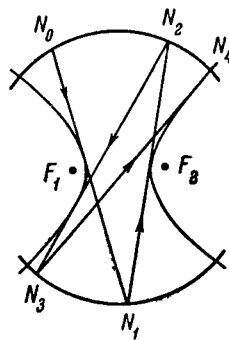


Рис. 21.

Лучи  $N_1N_2$ ,  $N_2N_3$ , ..., возникающие в результате многократных отражений исходного луча от эллипса  $\mu = a$ , или их продолжения будут касаться ветвей той же самой гиперболы. Аналогичное свойство хорд эллипса  $\mu = a$ , касающихся софокусного эллипса  $\mu = a_0$ , мы уже доказали в этом параграфе. В случае софокусной гиперболы рассмотрения аналогичны и мы их опускаем. Рассмотрим всевозможные касательные к ветвям гиперболы (5.12). Совокупность этих касательных внутри эллипса образует четыре нормальные конгруэнции (рис. 22).

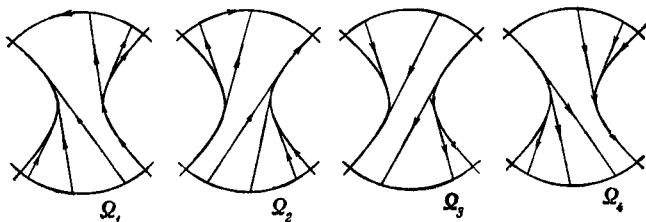


Рис. 22.

Первая конгруэнция образована отрезками касательных, начинающимися на правой ветви гиперболы или на нижней дуге эллипса  $\mu = a$  и кончающимися на левой ветви гиперболы (5.12) или на верхней дуге эллипса  $\mu = a$ . Вторая конгруэнция образована отрезками касательных, начинающимися на левой ветви гиперболы (5.12) или на нижней дуге эллипса  $\mu = a$ ; третья — отрезками касательных, начинающимися на правой ветви гиперболы (5.12) или на верхней дуге эллипса  $\mu = a$ , и, наконец, четвертая — отрезками касательных, начинающимися на левой ветви гиперболы (5.12) или на верхней дуге эллипса  $\mu = a$ . Очевидно, гипербола (5.12) является каустикой для построенных конгруэнций. Лучи каждой из четырех конгруэнций переходят в результате отражений и прохождения каустик в лучи двух других конгруэнций. Так, например, луч первой конгруэнции переходит в луч второй конгруэнции, если он кончается на левой ветви гиперболы (5.12), или в луч третьей конгруэнции, если он кончается на верхней дуге эллипса  $\mu = a$ .

Построенные четыре нормальные конгруэнции покрывают четыре одинаковые подобласти  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$ , ограниченные дугами эллипса  $\mu = a$  и ветвями гиперболы (5.12). Наложим область  $\Omega_1$  на область  $\Omega_2$ , область  $\Omega_3$  — на область  $\Omega_4$  и склеим их друг с другом вдоль ветвей гиперболы (5.12) (рис. 23). В результате получим две «трубки», ограниченные сверху и снизу дугами эллипса  $\mu = a$ . Склеим теперь верхние и нижние края трубок друг с другом; при этом верхняя и нижняя дуги эллипса на  $\Omega_1$  склеиваются соответственно с верхней и



нижней дугами эллипса на  $\Omega_3$ , а верхняя и нижняя дуги эллипса на  $\Omega_4$  — соответственно с верхней и нижней дугами эллипса на  $\Omega_1$ . Очевидно, построенное замкнутое многообразие, как и в предыдущем случае, гомеоморфно тору, и, следовательно на рассматриваемом многообразии существуют две базисные кривые. В качестве первой базисной кривой  $\Gamma_1$  возьмем замкнутую кривую (одномерный цикл), образованную правой ветвью гиперболы (5.12), принадлежащей  $\Omega_1$ , и левой

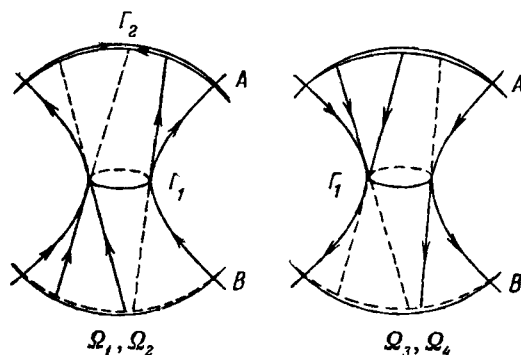


Рис. 23

ветвью гиперболы (5.12), принадлежащей  $\Omega_3$ . В качестве второй базисной кривой  $\Gamma_2$  возьмем замкнутую кривую, образованную дугами эллипса  $\mu = a$ , принадлежащими  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Направление обхода базисных кривых указано стрелками на рис. 23.

В точках кривой  $\Gamma_1$  направление  $\nabla\tau$  совпадает с направлением касательной к кривой  $\Gamma_1$ , и поэтому интеграл

$$\int_{\Gamma_1} \sum \tau_{\mu} dx_{\mu}$$

сводится к длине кривой  $\Gamma_1$ :

$$\int_{\Gamma_1} \sum \tau_{\mu} dx_{\mu} = 4h \int_0^a \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu. \quad (5.13)$$

Вдоль второй базисной кривой  $\sum \tau_{\mu} dx_{\mu} = \tau_{\theta} d\theta$ . Поэтому прежде всего следует подсчитать  $\tau_{\theta}$ . Нам потребуется найти выражения для эйконалов  $\tau$ , соответствующих рассматриваемым нормальным конгруэнциям лучей.

Пользуясь формулами (5.3) и (5.4) и полагая

$$\Lambda = h \cos \theta_0, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi/2,$$

получим, что  $\Phi(\theta)$  вещественна, если  $|\cos \theta| < \cos \theta_0$ , т. е. если  $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$  и  $\pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$ . Если же  $0 < \theta < \theta_0$ ,  $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0$  и  $2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi$ , то функция  $\Phi(\theta)$  — чисто мнимая. Таким образом, эйконал  $\tau$  будет вещественным в области, ограниченной дугами эллипса  $\mu = a$  и ветвями гиперболы (5.12), т. е. как раз в той подобласти, которая была покрыта нормальными конгруэнциями лучей. Решая дифференциальные уравнения (5.4) при  $\Lambda = h \cos \theta_0$ , получаем

$$F(\mu) = \pm h \int \sqrt{\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu + C_1,$$

$$\Phi(\theta) = \pm h \int \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta + C_2.$$

Четыре различных сочетания знаков дают четыре различных значения  $\nabla \tau$ , соответствующих четырем построенным нормальным конгруэнциям.

Выбирая некоторым определенным образом пределы интегрирования и произвольные постоянные, мы можем построить функцию  $\tau$  на многоэкземплярном пространстве так, чтобы эта функция сохраняла непрерывность, например, на левой ветви гиперболы (5.12) и верхней дуги эллипса  $\mu = a$ .

Дифференцируя равенство (5.3), для первой нормальной конгруэнции, покрывающей подобласть  $\Omega_1$ , получаем

$$\tau_\theta = h \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta}. \quad (5.14)$$

Для второй нормальной конгруэнции, покрывающей подобласть  $\Omega_2$ ,

$$\tau_\theta = -h \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta}.$$

Определив значения  $\tau_\theta$  на подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , мы возвращаемся к вычислению интеграла по второй базисной кривой  $\Gamma_2$ . Формулы для  $\tau_\theta$  позволяют написать равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \sum \tau_\mu dx_\mu &= \int_{\Gamma_2} \tau_\theta d\theta = \\ &= h \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta + \left( -h \int_{\pi - \theta_0}^{\theta_0} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta \right) = \\ &= 4h \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Подставляем значение интегралов (5.13) и (5.15) в систему (3.12):

$$4kh \int_0^a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu = \begin{cases} 2\pi p + 2\pi, \\ 2\pi p, \end{cases} \quad (5.16)$$

$$4kh \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta = 2\pi (q + 1/2).$$

Правая часть первого уравнения равна  $2\pi p + 2\pi$  в случае краевого условия (1.2) и равна  $2\pi p$  в случае условия (1.3), так как базисная кривая  $\Gamma_1$  пересекает два раза границу области. Дополнительно слагаемое  $2\pi \cdot 1/2$  в правой части второго уравнения связано с тем, что базисная кривая  $\Gamma_2$  пересекает каустику (ветви гиперболы (5.12)) два раза.

Чтобы  $k$  было велико, в первом уравнении (5.16) следует считать  $p \gg 1$ . Решая систему уравнений (5.16) относительно  $k$  и  $\theta_0$ , найдем собственные значения  $k_{pq}$  и соответствующие им значения параметра  $\theta_0$ . Таким образом, каждой собственной функции будет отвечать свое положение каустики. Система уравнений (5.16) совместна не при любых целых  $p$  и  $q$ . Чтобы убедиться в этом, исключим из уравнений (5.16) неизвестное  $k$ :

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta \left( \int_0^a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{q + 1/2}{p + 1}, \\ \frac{q + 1/2}{p}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Левая часть уравнения (5.17) при  $\theta_0 = 0$  принимает наибольшее значение, равное  $(\operatorname{ch} a - 1)^{-1}$ . Поэтому уравнение (5.17) имеет решение, только если целые числа  $p$  и  $q$  удовлетворяют неравенству

$$0 \leq q + \frac{1}{2} \leq (\operatorname{ch} a - 1)^{-1} \cdot \begin{cases} p + 1, \\ p. \end{cases} \quad (5.18)$$

Собственные функции эллипса можно выразить явными формулами, содержащими функции Матье. Из этих формул следует, что любая собственная функция эллипса с достаточно большим номером будет иметь асимптотику одного из двух лучевых типов, которые здесь рассматривались.

Асимптотика соответствующего собственного числа будет тоже выражаться найденными здесь формулами. Таким образом, методы §§ 1—3 позволяют в случае эллипса найти асимптотическое выражение для всех собственных чисел с достаточно большими номерами.

Как показывают расчеты\*), асимптотические формулы, найденные в этом параграфе, дают хорошее приближение даже для собственных чисел со сравнительно небольшими номерами.

Подводя итоги, мы можем сказать, что при  $q \gg 1$  и сравнительно небольших значениях  $p$  собственные функции эллипса  $u_{pq}$ , соответствующие собственным значениям  $k_{pq}$ , имеют эллиптическую каустику и сосредоточены в окрестности границы области. Чем меньше  $p$ , тем меньше, как это следует из уравнения (5.10), должна быть разность  $a - a_0$ , т. е. тем тоньше будет эллиптическое кольцо, в котором собственные функции осциллируют и за пределами которого экспоненциально затухают. Такие сосредоточенные в окрестности границы собственные функции мы будем называть собственными функциями типа *шепчущей галереи*. Если  $p \gg 1$ , а  $q$  принимает сравнительно небольшие значения, то собственные функции  $u_{pq}$  имеют гиперболическую каустику. При этом чем меньше  $q$ , тем меньше должна быть разность  $\pi/2 - \theta_0$  [см. (5.17)], т. е. тем уже будет полоса, окружающая малую ось эллипса, в которой собственные функции осциллируют и вне которой они экспоненциально затухают. В связи с этим собственные функции при  $p \gg 1$  и  $q = 0, 1, 2, \dots$  могут быть названы собственными функциями типа *прыгающего мячика*.

Попутно заметим, что около большой оси эллипса никакие собственные функции не сосредоточиваются. Это обстоятельство связано с тем, что система лучей, возникающая в результате многократных отражений, как мы увидим дальше, устойчива в окрестности малой оси эллипса и неустойчива в окрестности большой оси.

Системы уравнений (5.9) и (5.16) содержат эллиптические интегралы и поэтому не могут быть решены непосредственно в общем виде. Ниже мы рассмотрим лишь два частных случая:

- 1) систему уравнений (5.9) при  $a - a_0 \ll 1$ ;
- 2) систему уравнений (5.16) при  $\pi/2 - \theta_0 \ll 1$ .

1) При  $a - a_0 \ll 1$  функция  $\frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} \sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 a_0}$  и эллиптические интегралы, входящие в уравнение системы (5.9), могут быть представлены первыми членами их разложений в ряды Тейлора по степеням  $a - a_0$ . Это позволяет систему уравнений

---

\*) См. Келлер, Рубинау [1].

(5.9) при  $a - a_0 \ll 1$  записать в виде

$$k \left\{ h \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{ch}^2 a - \cos^2 \theta} d\theta - h \text{ch} a \text{sh} a \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{ch}^2 a - \cos^2 \theta}} (a - a_0) + O[(a - a_0)^2] \right\} = 2\pi q, \quad (5.19)$$

$$2kh \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{2 \text{ch} a \text{sh} a} (a - a_0)^{3/2} + O[(a - a_0)^{5/2}] \right\} = \begin{cases} 2\pi(p + 3/4), \\ 2\pi(p + 1/4). \end{cases} \quad (5.20)$$

Первый интеграл в уравнении (5.19), очевидно, равен длине дуги эллипса  $\mu = a$ , которую мы обозначим через  $L$ . Второй интеграл в этом уравнении может быть преобразован к интегралу, содержащему радиус кривизны  $\rho$  эллипса  $\mu = a$ . Подставляя в формулу для радиуса кривизны кривой

$$\rho = \frac{\left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \sigma^2}}$$

параметрическое уравнение эллипса  $\mu = a$ , получаем

$$\rho = h \frac{[\text{ch}^2 a - \cos^2 \theta]^{3/2}}{\text{ch} a \text{sh} a}.$$

Перейдем в интересующем нас интеграле к интегрированию по длине дуги  $s$  эллипса  $\mu = a$  ( $ds = h \sqrt{\text{ch}^2 a - \text{ch}^2 \theta} d\theta$ ), отсчитываемой, например, от точки  $x_1 = h \text{ch} a$ ,  $x_2 = 0$  ( $\theta = 0$ ), и выразим подынтегральную функцию через радиус кривизны  $\rho(s)$ :

$$\begin{aligned} h \text{ch} a \text{sh} a \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{ch}^2 a - \cos^2 \theta}} &= \\ &= \text{ch} a \text{sh} a \int_0^L \frac{ds}{\text{ch}^2 a - \cos^2 \theta} = h^{\frac{2}{3}} (\text{ch} a \text{sh} a)^{\frac{1}{3}} \int_0^L \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)}. \end{aligned}$$

Полученное равенство позволяет переписать уравнение (5.19) в виде

$$kL - kh^{\frac{2}{3}} (\text{ch} a \text{sh} a)^{\frac{1}{3}} \int_0^L \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} (a - a_0) + O[(a - a_0)^2] = 2\pi q. \quad (5.21)$$

Исключим из уравнений (5.20) и (5.21) параметр каустики  $a_0$ :

$$kL - \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^L \frac{ds}{\rho^{2/3}} \cdot \left\{ \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \right\} + O(k^{-1/3}) = 2\pi q. \quad (5.22)$$

Решая уравнение (5.22) относительно  $k$ , находим собственные значения

$$k_{pq} = \frac{2\pi q}{L} + \left(\frac{\pi q}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \cdot \left\{ \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \right\} + O\left(\frac{\rho^{4/3}}{q^{1/3}}\right). \quad (5.23)$$

Наконец, подставляя  $k_{pq}$  в уравнение (5.20), определяем параметр каустики  $a_0$ , соответствующий собственной функции  $\mu_{pq}$

$$a_0^{(pq)} = a - \frac{1}{(2\pi q)^{\frac{2}{3}}} \frac{L^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(2 \operatorname{ch} a \operatorname{sh} a)^{\frac{1}{3}}} \cdot \left\{ \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + \left[ \frac{3}{2} \pi \left( \rho + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \right\} + O\left[\left(\frac{\rho}{q}\right)^{\frac{4}{3}}\right]. \quad (5.24)$$

Напомним, что в последних формулах верхний множитель относится к случаю краевого условия (1.2), а нижний — к случаю (1.3).

Так как мы считали  $kL \gg 1$  и  $a - a_0 \ll 1$ , то формулы (5.23) и (5.24) справедливы при  $2\pi q \gg 1$  и  $(\rho/q)^{2/3} \ll 1$ , т. е. при больших значениях номера  $q$  и достаточно малых по сравнению с  $q$  значениях номера  $p$ .

Оценим ширину полосы, в которой при малых  $p$  сосредоточены собственные функции и за пределами которой они экспоненциально убывают. Обозначим ширину этой полосы через  $\delta_{pq}$ . При малых  $p$  справедлива формула

$$\begin{aligned} \delta_{pq} &= h \int_{a_0}^a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta} d\mu \approx h \sqrt{\operatorname{ch}^2 a - \sin^2 \theta} (a - a_0) \approx \\ &\approx \left(\frac{\rho}{2}\right)^{1/3} \left[ \frac{3\pi L}{2} \left( \rho + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} \frac{1}{(2\pi q)^{2/3}} \approx \left(\frac{\rho}{2}\right)^{1/3} \left[ \frac{3\pi}{2k_{pq}} \left( \rho + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}. \end{aligned}$$

Особо подчеркнем то обстоятельство, что при  $p = 0, 1, 2, \dots$  эллиптическая каустика настолько близко подходит к эллипсу  $\mu = a$ , что лучевое представление поля, неверное на каустике, будет неверным и во всем эллиптическом кольце  $a_0 \leq \mu \leq a$ , в том числе и на границе области, где мы удовлетворяем граничным условиям. Поэтому следует ожидать, что

и значения  $k_{pq}$  при  $q \gg 1$  и  $p = 0, 1, 2, \dots$ , определяемые формулой (5.23), будут отличаться от истинных асимптотических значений  $k_{pq}$ . В дальнейшем мы увидим, что множитель  $\left[\frac{3\pi}{2}\left(p + \frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}$  должен быть при малых  $p$  заменен корнем  $t_p$  функции Эйри  $v(-t)$ , а множитель  $\left[\frac{3\pi}{2}\left(p + \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}$  — корнем  $t'_p$  производной функции Эйри  $v'(-t)$ . При этом собственные функции будут также выражаться через функцию Эйри.

2) Рассмотрим теперь систему уравнений (5.16) при  $\pi/2 - \theta_0 \ll 1$ . Разложим интегралы, входящие в уравнения (5.16), в ряды по степеням  $\cos \theta_0$ , ограничиваясь при этом членами, содержащими  $\cos^2 \theta_0$ .

Выполняя в первом интеграле замену переменной  $x = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$ , получаем

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta} d\theta = \cos^2 \theta_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2 \cos^2 \theta_0}} dx = \\ = \frac{\pi}{4} \cos^2 \theta_0 + O(\cos^4 \theta_0). \quad (5.25)$$

Разложение второго интеграла строится непосредственно:

$$\int_0^a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu = \int_0^a \operatorname{ch} \mu d\mu - \frac{1}{2} \cos^2 \theta_0 \int_0^a \frac{d\mu}{\operatorname{ch} \mu} + O(\cos^4 \theta_0) = \\ = \operatorname{sh} a - \frac{1}{2} \operatorname{arcsin}(\operatorname{th} a) \cos^2 \theta_0 + O(\cos^4 \theta_0). \quad (5.26)$$

Обозначим через  $g/2 = h \operatorname{sh} a$  малую полуось эллипса, а через  $\rho_1 = h \frac{\operatorname{ch}^2 a}{\operatorname{sh} a}$  радиус кривизны эллипса в точке его пересечения с малой осью  $\theta = \pi/2$ . Тогда (5.26) можно переписать в виде

$$\int_0^a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta_0} d\mu = \frac{g}{2h} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{g}{2\rho_1}} \cos^2 \theta_0 + O(\cos^4 \theta_0). \quad (5.27)$$

Формулы (5.25) и (5.27) позволяют систему уравнений (5.16) записать в виде

$$k \left\{ \frac{g}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{g}{2\rho_1}} \cos^2 \theta_0 + O(\cos^4 \theta_0) \right\} = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{matrix} (p+1) \\ p, \end{matrix} \right. \quad (5.28)$$

$$kh\pi \{\cos^2 \theta_0 + O(\cos^4 \theta_0)\} = 2\pi(q + 1/2).$$

Решая систему (5.28), получаем для собственных значений  $k_{pq}$  и параметров гиперболической каустики  $\theta_0^{(pq)}$  следующие формулы:

$$k_{pq} = \frac{\pi}{g} \left\{ \frac{(p+1)}{p} + \frac{2q+1}{p} \arcsin \sqrt{\frac{g}{2\rho_1}} + O\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2\right] \right\}, \quad (5.29)$$

$$\cos^2 \theta_0^{(pq)} = 2(2q+1) \operatorname{sh} a \left\{ \frac{1/(p+1)}{1/p} + O\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2\right] \right\}. \quad (5.30)$$

Множители  $p+1$  и  $1/(p+1)$  здесь относятся к случаю краевого условия (1.2), а множители  $p$  и  $1/p$  к случаю (1.3). Формулы (5.29) и (5.30), очевидно, справедливы при  $p \gg 1$  и  $q \ll p$ , т. е. при больших значениях номера  $p$  и достаточно малых значениях номера  $q$ .

Если  $q = 0, 1, 2, \dots$ , то гиперболическая каустика (ветвь гиперболы (5.12)) будет расположена вблизи малой оси эллипса. Ограниченная каустикой полоса, в которой собственные функции осциллируют и за пределами которой экспоненциально убывают, будет иметь ширину  $\delta_{pq}$ , определяемую формулой

$$\delta_{pq} = 2h \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta} d\theta = 2h \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \operatorname{ch} \mu \approx 2h \sqrt{\frac{2q+1}{k_{pq}}}.$$

Лучевое представление собственной функции в такой узкой полосе будет неверным. Мы увидим в дальнейшем, что собственная функция в этой полосе должна выражаться через функции параболического цилиндра. Тем не менее оба члена в формуле (5.29), в отличие от случая эллиптической каустики, оказываются справедливыми.



## ЛУЧЕВОЙ МЕТОД «В МАЛОМ»

Метод Келлера — Рубинау, описанный в предыдущей главе, применим, если существует замыкающаяся конгруэнция лучей, или, точнее,  $f-1$  параметрическое семейство конгруэнций. Такие конгруэнции удалось пока построить только в том случае, когда переменные в соответствующем уравнении эйконала разделяются в выбранных должным образом криволинейных координатах. Однако если переменные в уравнении эйконала разделяются, то задачу о построении асимптотики собственных функций можно свести к нахождению асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, роль построений §§ 1—5 главы 3 сводится, казалось бы, лишь к интересной геометрической интерпретации асимптотических формул, которые могут быть получены более простым путем.

На самом деле метод, развитый в предыдущей главе, применим не только к настоящим замыкающимся конгруэнциям лучей, но и к замыкающимся конгруэнциям, построенным из лучей, которые удовлетворяют уравнению Эйлера и закону отражения лишь в первом приближении.

Такие конгруэнции мы будем называть *конгруэнциями первого приближения*.

Перенесение метода Келлера — Рубинау на замыкающиеся конгруэнции первого приближения значительно расширяет область его применения и позволяет решать задачи с неразделяющимися переменными. Видоизменение метода Келлера — Рубинау применительно к замыкающимся конгруэнциям первого приближения мы называем *лучевым методом в малом*.

При проведении лучевого метода в малом, в частности при построении замыкающейся конгруэнции первого приближения, особо важную роль играет понятие устойчивости системы лучей по первому приближению.

Поэтому вопрос об устойчивости соответствующей системы лучей по первому приближению подробно рассматривается на протяжении всей главы.

В настоящей главе лучевой метод в малом излагается для плоских областей, решение этим методом интересной в физическом отношении трехмерной задачи читатель найдет в главе 9.

## § 1. Собственные функции типа шепчущей галереи

В этом параграфе мы рассмотрим важный и наиболее простой пример применения лучевого метода в малом.

В § 4 главы 3 мы нашли собственные значения и собственные функции, сосредоточенные около границы круга и показали, что такого же типа собственные функции существуют у эллипса. Задача настоящего параграфа — найти собственные значения, соответствующие собственным функциям, сосредоточенным вблизи границы  $S$  произвольной выпуклой области  $\Omega$ .

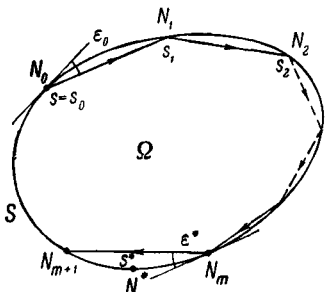


Рис. 24.

Пусть  $S$  имеет длину  $L$  и описывается естественным уравнением  $\rho = \rho(s)$ , где  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $S$ , а  $s$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль  $S$  от некоторой фиксированной начальной точки. Удобно считать, что  $s$  изменяется в пределах  $-\infty < s < \infty$ , так что  $\rho(s)$  — периодическая функция с периодом  $L$ .

Будем предполагать, что  $\rho(s)$  имеет непрерывную третью производную и что  $0 < \rho(s) < \infty$ . (Последнее неравенство означает строгую выпуклость кривой  $S$ .)

Основную роль в построениях данного параграфа играет система лучей, возникающая вблизи границы области  $\Omega$  в результате многочисленных отражений от  $S$ . Оказывается, эта система обладает свойством устойчивости по первому приближению. Определим точно это весьма важное для дальнейшего понятие.

Пусть (рис. 24)  $N_0$  — некоторая произвольно выбранная точка на границе  $S$ , для которой  $s = s_0$  и  $0 \leq s_0 < L$ . Проведем в точке  $N_0$  хорду  $N_0 N_1$  области  $\Omega$ , образующую с касательной к  $S$  в точке  $N_0$  угол скольжения  $\epsilon_0$  ( $0 < \epsilon_0 < \pi/2$ ). Примем хорду  $N_0 N_1$  за исходный луч, в результате последовательных отражений которого в точках  $N_1, N_2, \dots, N_m$  возникает система многократно отраженных лучей  $N_j N_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Будем считать, что точкам отражения  $N_j$  соответствуют значения длины дуги  $s = s_j$  ( $s_0 < s_j < \infty$ ),  $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Пусть  $s^*$  — некоторое фиксированное значение длины дуги  $s$  ( $s_0 < s^* < \infty$ ), и пусть на границе  $S$  значению  $s = s^*$  соот-

ветствует точка  $N^*$ . Обозначим через  $\varepsilon^*$  угол скольжения луча  $N_m N_{m+1}$  такого, что  $|s_m| \leq |s^*| < |s_{m+1}|$ , т. е. стягивающего дугу  $s_m s_{m+1}$ , на которой расположена точка  $N^*$ . Очевидно, число отражений  $m$  такого луча есть функция  $\varepsilon_0$  и  $s^*$ . Для гладкой границы  $S$  при фиксированном значении  $s^*$  и  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$  число отражений  $m \rightarrow \infty$  и угол скольжения  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ .

Систему многократно отраженных лучей мы будем называть *устойчивой по первому приближению*, если выполняется более жесткое условие: для каждого фиксированного значения  $s^*$  существует такое  $\delta(s^*)$ , что для всех  $\varepsilon_0 < \delta(s^*)$  относительное отклонение луча  $\varepsilon^*/\varepsilon_0$  в точке  $N^*$  удовлетворяет неравенству  $\varepsilon^*/\varepsilon_0 < K$ , где постоянная  $K$  не зависит от разности  $s^* - s_0$  и определяется только свойствами контура  $S$ .

Для системы лучей, возникающей в результате многократных отражений вблизи контура  $S$ , мы докажем даже более сильное утверждение, а именно равенство

$$\varepsilon^* = E\varepsilon_0 + |s^* - s_0| O(\varepsilon_0^2). \quad (1.1)$$

Здесь  $E$  — положительное, не зависящее от  $\varepsilon_0$  число, равномерно ограниченное по  $|s^* - s_0|$  (т. е. для всех  $|s^* - s_0|$  выполняется

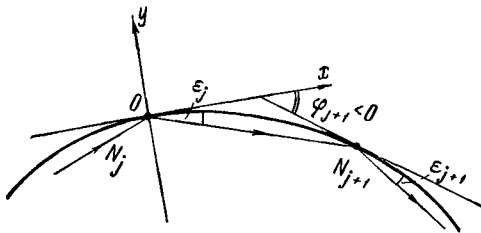


Рис. 25.

неравенство  $E < K_1$ , где  $K_1$  — константа, не зависящая от  $|s^* - s_0|$ ). Устойчивость по первому приближению легко вытекает из (1.1). Действительно, при фиксированном  $s^*$  всегда можно найти такое  $\delta(s^*)$ , что  $|s^* - s_0| O(\varepsilon_0^2) < 1$  при  $\varepsilon_0 < \delta(s^*)$ , и тогда

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} < K_1 + 1 = \text{const.}$$

Переходим к выводу равенства (1.1). Рассмотрим некоторую промежуточную точку отражения  $N_j$ . Пусть в точке  $N_j$  угол скольжения луча равен  $\varepsilon_j$ , а в следующей точке отражения  $N_{j+1}$  он равен  $\varepsilon_{j+1}$ . Найдем связь между  $\varepsilon_{j+1}$  и  $\varepsilon_j$ . Введем локальную систему координат  $xOy$  с началом в точке  $O = N_j$

(рис. 25) Уравнение кривой  $S$  в системе координат  $xOy$  может быть записано в виде

$$x = \int_{s_j}^s \cos \left( \int_{s_j}^s \frac{d\xi}{\rho(\xi)} \right) ds = (s - s_j) - \frac{1}{6\rho_j^2} (s - s_j)^3 + O[(s - s_j)^4], \quad (1.2)$$

$$y = \int_{s_j}^s \sin \left( \int_{s_j}^s \frac{d\xi}{\rho(\xi)} \right) ds = -\frac{1}{2\rho_j} (s - s_j)^2 + \frac{\rho_j'}{6\rho_j^2} (s - s_j)^3 + \\ + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{\rho'}{\rho^2} \right)' + \frac{1}{\rho_j^3} \right] (s - s_j)^4 + O[(s - s_j)^5], \quad (1.3)$$

где

$$\rho_j = \rho(s_j), \quad \rho_j' = \frac{d\rho(s)}{ds} \Big|_{s=s_j}, \quad \left( \frac{\rho'}{\rho^2} \right)' = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)} \right) \Big|_{s=s_j}.$$

Длина дуги  $s_{j+1}$ , соответствующая точке  $N_{j+1}$ , должна удовлетворять уравнению

$$y(s_{j+1}) = -\operatorname{tg} \varepsilon_j x(s_{j+1}),$$

которое с помощью формул (1.2) и (1.3) записывается в виде

$$-\frac{1}{2\rho_j} (s_{j+1} - s_j)^2 + \frac{\rho_j'}{6\rho_j^2} (s_{j+1} - s_j)^3 + \\ + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{\rho'}{\rho^2} \right)' + \frac{1}{\rho_j^3} \right] (s_{j+1} - s_j)^4 + O[(s_{j+1} - s_j)^5] = \\ = -\operatorname{tg} \varepsilon_j \left\{ (s_{j+1} - s_j) - \frac{1}{6\rho_j^2} (s_{j+1} - s_j)^3 + O[(s_{j+1} - s_j)^4] \right\}. \quad (1.4)$$

Решая уравнение (1.4) относительно  $(s_{j+1} - s_j)$  и раскладывая  $\operatorname{tg} \varepsilon_j$  в ряд по степеням  $\varepsilon_j$ , находим, что

$$s_{j+1} - s_j = 2\rho_j \varepsilon_j + \frac{4}{3} \rho_j \rho_j' \varepsilon_j^2 + \left( \frac{4}{9} \rho_j \rho_j'^2 + \frac{2}{3} \rho_j^2 \rho_j'' \right) \varepsilon_j^3 + O(\varepsilon_j^4). \quad (1.5)$$

Вычислим угол  $\varphi_{j+1}$ , образованный касательной к контуру  $S$  в точке  $N_{j+1}$  и осью  $OX$ :

$$\varphi_{j+1} = - \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{ds}{\rho(s)} = -\frac{1}{\rho_j} (s_{j+1} - s_j) + \\ + \frac{\rho_j'}{2\rho_j^2} (s_{j+1} - s_j)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\rho'}{\rho^2} \right)' (s_{j+1} - s_j)^3 + O[(s_{j+1} - s_j)^4]$$

или, заменяя  $s_{j+1} - s_j$  по формуле (1.5) через  $\varepsilon_j$ , получим

$$\varphi_{j+1} = -2\varepsilon_j + \frac{2}{3} \rho'_j \varepsilon_j^2 - \left( \frac{4}{9} \rho_j'^2 - \frac{2}{3} \rho_j \rho_j'' \right) \varepsilon_j^3 + O(\varepsilon_j^4).$$

Так как  $\varepsilon_{j+1} = -\varphi_{j+1} - \varepsilon_j$ , то

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \frac{2}{3} \rho'_j \varepsilon_j^2 + \left( \frac{4}{9} \rho_j'^2 - \frac{2}{3} \rho_j \rho_j'' \right) \varepsilon_j^3 + O(\varepsilon_j^4). \quad (1.6)$$

Чтобы найти зависимость  $\varepsilon^* \equiv \varepsilon_m$  от  $\varepsilon_0$ , составим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \dots \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} = \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} \left[ 1 - \frac{2}{3} \rho'_j \varepsilon_j + \left( \frac{4}{9} \rho_j'^2 - \frac{2}{3} \rho_j \rho_j'' \right) \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3) \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} = \exp \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left[ 1 - \frac{2}{3} \rho'_j \varepsilon_j + \left( \frac{4}{9} \rho_j'^2 - \frac{2}{3} \rho_j \rho_j'' \right) \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3) \right] \right\}.$$

Заменяя здесь  $\varepsilon_j$  через  $s_{j+1} - s_j$  и раскладывая в ряд  $\ln[ \quad ]$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} &= \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \frac{\rho'_j}{\rho_j} + \left( \frac{\rho'_j}{\rho} \right)' \frac{s_{j+1} - s_j}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O[(s_{j+1} - s_j)^2] \right] (s_{j+1} - s_j) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} &= \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Big|_{s=s_j + \frac{1}{2}(s_{j+1} - s_j)} (s_{j+1} - s_j) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O[(s_{j+1} - s_j)^3] \right] \right\}. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Сумма

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Big|_{s=s_j + \frac{1}{2}(s_{j+1} - s_j)} \cdot (s_{j+1} - s_j)$$

представляет собой главный член формулы прямоугольников для приближенного вычисления интеграла  $\int_0^{s_m} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} ds$  \*, и поэтому

$$-\frac{1}{3} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Big|_{s=s_j+\frac{1}{2}(s_{j+1}-s_j)} \cdot (s_{j+1}-s_j) = \\ = \ln \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho_m}} + |s_m - s_0| O[(\max_j |s_{j+1} - s_j|)^2].$$

Значение длины дуги  $s_m$ , отвечающее точке  $N_m$ , может быть определено по  $\varepsilon_0$  и  $s^*$ . Точное значение  $s_m$  для дальнейшего, однако, несущественно, важно лишь, что  $|s^* - s_m| < L$ . Так как, кроме того,

$$\sum_{j=0}^{m-1} O[(s_{j+1} - s_j)^3] = \sum_{j=0}^{m-1} O[(s_{j+1} - s_j)^2](s_{j+1} - s_j) = \\ = |s^* - s_0| O[(\max_j |s_{j+1} - s_j|)^2],$$

то из формулы (1.7) вытекает, что

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho_m}} [1 + |s^* - s_0| O[(\max_j |s_{j+1} - s_j|)^2]].$$

На основании полученного равенства можно утверждать, что при фиксированном  $s^*$  величина  $\varepsilon_j = O(\varepsilon_0)$  и, следовательно, в силу формулы (1.5)

$$\max_j |s_{j+1} - s_j| = O(\varepsilon_0).$$

Таким образом, относительное отклонение луча оказывается равным

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho_m}} + |s^* - s_0| O(\varepsilon_0^2). \quad (1.8)$$

Поскольку мы предполагаем, что  $0 < \rho(s) < \infty$ , величина  $E = \sqrt[3]{\rho_0/\rho_m}$  остается ограниченной, откуда и следует устойчивость по первому приближению \*\*).

\*) См Г. М. Фихтенгольц [1].

\*\*) Для доказательства устойчивости системы лучей по первому приближению достаточно было бы предположить, что  $\rho''(s)$  — непрерывная функция и показать, что

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho_m}} + |s^* - s_0| O(\varepsilon_0).$$

Однако для вычислений главы II последнего равенства было бы недостаточно, именно поэтому мы наложили на контур  $S$  более жесткое условие гладкости и доказали (1.8).

Переходим теперь к построению замыкающейся конгруэнции лучей первого приближения. Такая конгруэнция будет нами построена из устойчивой по первому приближению системы многократно отраженных контуром  $S$  лучей, которые удовлетворяют закону отражения лишь в главных членах. При этом мы будем опираться на аналогию между рассматриваемой задачей и задачей о собственных функциях шепчущей галереи для круга.

Рассмотрим (рис. 26) совокупность лучей, заполняющую некоторую окрестность границы  $S$ , с углами скольжения, определяемыми формулой

$$\varepsilon(s) = \kappa r^{-1/3}(s), \quad \kappa = \text{const} \ll 1. \quad (1.9)$$

В первом приближении лучи этой совокупности инвариантны относительно отражений от контура  $S$ , т. е. при отражении любого луча этой совокупности возникает луч, принадлежащий той же совокупности.

Действительно, с точностью до поправочных членов, из (1.8) следует, что произведение  $\varepsilon_m \rho_m^{1/3}$  не зависит от  $m$ . Построим огибающую этой совокупности лучей. Введем координаты  $s$  и  $n$  точки  $M$ , где  $n$  — длина нормали  $MN$ , опущенной из точки  $M$  на контур  $S$ , и  $s$  — длина дуги кривой  $S$ , отсчитанная от некоторой начальной точки до основания нормали  $N$ . Мы будем считать  $n < 0$  для точек, принадлежащих области  $\Omega$ . Система координат  $(s, n)$  регулярна в полосе  $|n| < \rho_{\min}$ , содержащей контур  $S$  внутри себя.

Уравнение луча, пересекающего контур  $S$  в точке  $s_j$  под углом скольжения  $\varepsilon = \kappa r^{-1/3}(s_j)$ , в локальной системе координат  $xOy$  (см. рис. 25) имеет вид

$$y = -\text{tg} \varepsilon \cdot x \quad (\varepsilon = \varepsilon_j). \quad (1.10)$$

Координаты  $x$ ,  $y$  и  $n$ ,  $s$  связаны простыми соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x(s) - ny'(s), \\ y &= y(s) + nx'(s), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где по-прежнему  $x = x(s)$  и  $y = y(s)$  — параметрическое уравнение кривой  $S$ . Равенства (1.11) позволяют уравнение луча (1.10) в координатах  $n$  и  $s$  записать в виде

$$n = \frac{y(s) + x(s) \text{tg} \varepsilon}{y'(s) \text{tg} \varepsilon - x'(s)}.$$

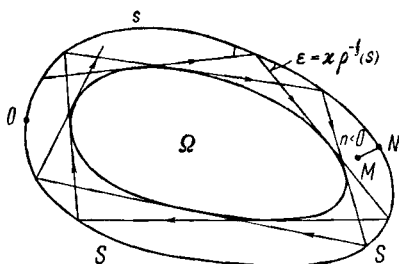


Рис. 26.

Используя разложения (1.2), (1.3) и принимая во внимание, что  $\operatorname{tg} \varepsilon = \kappa \rho^{-1/3}(s_j) + O(\kappa^3)$ , получаем

$$n = -\kappa \rho^{-1/3}(s_j)(s - s_j) + \frac{1}{2\rho(s_j)}(s - s_j)^2 - \frac{\rho'(s_j)}{6\rho^2(s_j)}(s - s_j)^3 + \\ + O[(s - s_j)^4, \kappa(s - s_j)^3, \kappa^2(s - s_j)^2, \kappa^3(s - s_j)]^*.$$

Заменим здесь  $\rho(s_j)$  первыми членами разложения по степеням  $s_j - s$ :

$$\rho(s_j) = \rho(s) + \rho'(s)(s_j - s) + O[(s_j - s)^2].$$

Тогда с прежней степенью точности

$$n = -\kappa \rho^{-1/3}(s)(s - s_j) - \frac{\kappa}{3} \rho^{-4/3}(s) \rho'(s)(s - s_j)^2 + \frac{1}{2\rho(s)}(s - s_j)^2 + \\ + \frac{1}{3} \frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}(s - s_j)^3 + O[(s - s_j)^4, \kappa(s - s_j)^3, \kappa^2(s - s_j)^2, \kappa^3(s - s_j)]. \quad (1.12)$$

Непрерывно изменяя в (1.12) координату  $s_j$  точки пересечения луча с кривой  $S$ , мы получаем уравнение лучей инвариантной совокупности, зависящей от одного параметра  $s_j$ . Чтобы построить огибающую этой совокупности, продифференцируем равенство (1.12) по параметру  $s_j$ :

$$0 = +\kappa \rho^{-1/3}(s) + \frac{2\kappa}{3} \rho^{-4/3}(s) \rho'(s)(s - s_j) - \frac{1}{\rho(s)}(s - s_j) - \\ - \frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}(s - s_j)^2 + O[(s - s_j)^3, \kappa(s - s_j)^2, \kappa^2(s - s_j), \kappa^3] \quad (1.13)$$

и исключим  $s_j$  из уравнений (1.12) и (1.13). В результате получится уравнение огибающей

$$n = -\frac{1}{2} \rho^{1/3}(s) \kappa^2 + O(\kappa^4). \quad (1.14)$$

Отметим, что уравнение огибающей (1.14) не содержит членов третьего порядка относительно  $\kappa$ .

Совокупность лучей (1.9) с огибающей (1.14) аналогична системе лучей, многократно отраженных границей круга (см. § 4 гл. 3). Поэтому нормальные конгруэнции лучей в рассматриваемом случае строятся тем же способом, что и в случае круга. Однако теперь это будет не точная замыкающаяся конгруэнция, а лишь замыкающаяся конгруэнция первого приближения.

Для определения собственных частот шепчущей галереи применим методику предыдущей главы к замыкающейся кон-

\*) Здесь и в дальнейшем по определению

$$O(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = O(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|).$$



груэнции первого приближения (1.9). На многоэкземплярном пространстве, порожденном построенной замыкающейся конгруэнцией первого приближения, выберем две базисные кривые по аналогии с кругом. Тогда система уравнений (3.12) предыдущей главы для краевого условия  $u|_S = 0$  будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} k\Lambda &= 2\pi q, \\ k\eta &= 2\pi \left( p + \frac{3}{4} \right), \end{aligned} \right\}$$

где  $\Lambda$  — длина каустики,  $\eta$  — сумма длин двух лучей за вычетом отрезка каустики, заключенного между их точками касания,  $p, q$  — целые числа.

Элемент длины дуги каустики  $ds_k$  равен

$$ds_k = \frac{ds}{\rho(s)} [\rho(s) + n(s) + O(\kappa^4)] = \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho^{-2/3}(s) \kappa^2 + O(\kappa^4) \right] ds.$$

Поэтому имеем

$$\Lambda = \int_0^L ds_k = L - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^L \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} + O(\kappa^4),$$

где  $L$  — длина контура  $S$ . Величина  $\eta$  в силу того, что в формуле (1.14) отсутствуют члены, пропорциональные  $\kappa^3$ , с точностью до первых поправочных членов подсчитывается так же, как и для случая круга, и оказывается равной

$$\eta = \frac{2}{3} \kappa^3 + O(\kappa^5).$$

Таким образом, для определения собственных значений мы получаем систему уравнений

$$k \left[ L - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^L \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} + O(\kappa^4) \right] = 2\pi q, \quad (1.15)$$

$$k \left[ \frac{2}{3} \kappa^3 + O(\kappa^5) \right] = 2\pi \left( p + \frac{3}{4} \right),$$

откуда вытекает следующая формула для собственных значений:

$$k_{p,q} = \frac{2\pi q}{L} + \frac{\left[ \frac{3\pi}{2} \left( p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}}{2^{1/3}} \left( \frac{2\pi q}{L} \right)^{1/3} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} + \dots \quad (1.16)$$

Так как  $k_{p,q}L$  должно быть велико, то в этой формуле  $g \gg 1$  и  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Поправочные члены по порядку величины сравнимы с  $O(p^{1/3} q^{-1/3})$ .

Определив величину  $k_{p,q}$ , можно найти из второго уравнения (1.15) соответствующее значение  $\kappa$  и, подставляя его в равенство (1.14), получить уравнение каустики

$$n = -\frac{1}{2} \rho^{1/3}(s) \frac{[3\pi(p+3/4)]^{2/3}}{(k_{p,q})^{2/3}} + O\left[\left(\frac{\rho}{q}\right)^{4/3}\right],$$

ограничивающей область колебаний собственной функции со значками  $p$  и  $q$ . Из этой формулы следует, что соответствующая собственная функция номеров  $p$  и  $q$  сосредоточена в окрестности контура  $S$  в слое, толщина которого пропорциональна  $\rho^{1/3}(s) k_{p,q}^{-2/3}$ .

Мы видели, что в случае круга собственные значения, получаемые из асимптотики функций Бесселя, вместо множителя  $\left[\frac{3\pi}{2}\left(p+\frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}$  содержат корень  $t_p$  функции Эйри  $v(-t)$ . Заменяя в формуле (1.16)  $\left[\frac{3\pi}{2}\left(p+\frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}$  на  $t_p$ , мы получим более точное значение для собственных значений

$$k_{p,q} = \frac{2\pi q}{L} + \frac{t_p}{2^{1/3}} \left(\frac{2\pi q}{L}\right)^{1/3} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} + \dots \quad (1.17)$$

В главе 6 мы оправдаем эту замену и получим дальнейшие члены разложения (1.17).

## § 2. Собственные значения типа прыгающего мячика

Изучая собственные функции эллипса, мы установили, что у эллипса существует подпоследовательность собственных функций, сосредоточенных в окрестности малой оси. Собственные значения, соответствующие этим собственным функциям, определялись в первом приближении только через длину малой оси эллипса и радиус кривизны эллипса в точке его пересечения с малой осью.

Это наводит на мысль, что эти собственные функции имеют локальный характер и их асимптотика не изменится при гладкой деформации дуги эллипса вне точек пересечения его с малой осью. Естественно поэтому ожидать, что подпоследовательности собственных функций, обладающие аналогичными свойствами, существуют и в случае произвольных областей.

В этом параграфе, предположив, что такая подпоследовательность собственных функций существует на самом деле, мы построим лучевым методом в малом асимптотику соответствующей ей подпоследовательности собственных значений. Тот факт, что схема лучевого метода в малом не встречает принципиаль-

ных затруднений и может быть здесь проведена до конца, служит еще одним подтверждением существования подпоследовательностей сосредоточенных собственных функций в общем случае произвольных областей \*).

Рассмотрим плоскую область  $\Omega$ , ограниченную достаточно гладкой кривой  $\Sigma$ . Наша ближайшая задача построить в  $\Omega$  систему многократно отраженных лучей, устойчивую по первому приближению и аналогичную системе лучей эллипса, ограниченной софокусными гиперболами.

Экстремальным диаметром области  $\Omega$  мы будем называть всякую хорду, которая образует прямые углы с касательными к кривой  $\Sigma$ , проведенными через концы хорды. Луч света, первоначально совпадающий с некоторым экстремальным диаметром  $CD$  области  $\Omega$ , после любого числа отражений от кривой  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$  по-прежнему будет совпадать с диаметром  $CD$ . Пусть теперь исходный луч  $N_0N_1$  не совпадает с экстремальным диаметром  $CD$ , но расположен достаточно близко к нему. После отражения луча  $N_0N_1$  от кривой  $\Sigma$  в точке  $N_1$  возникает новый луч  $N_1N_2$ . В результате последующих отражений появятся лучи  $N_2N_3$ ,  $N_3N_4$ , ...,  $N_mN_{m+1}$ , ... Исследуем на устойчивость систему лучей

$$N_0N_1, N_1N_2, \dots, N_mN_{m+1}, \dots \quad (2.1)$$

Пусть (рис. 27)  $h$  — длина экстремального диаметра,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы кривизны контура  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ . Поместим начало декартовой системы координат  $xOy$  в среднюю точку диаметра  $CD$ , ось  $Oy$  совместим с самим диаметром. Будем считать, что лучи  $N_jN_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m, \dots$ , системы (2.1) описываются уравнением

$$x = \alpha_j y + \beta_j \frac{h}{2}. \quad (2.2)$$

При каждом отражении параметры  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  луча получают новые значения. Параметры исходного луча  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  будем считать малыми величинами:

$$\epsilon_0 \equiv \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \ll 1,$$

т. е. будем считать исходный луч близким к диаметру  $CD$ . Введем двумерные векторы  $V_j = (\alpha_j, \beta_j)$ . В первом приближении

\*) Асимптотические формулы для собственных значений, полученных в первом приближении лучевым методом в малом, могут быть строго доказаны (см. ниже, § 6 гл. 6 и гл. 7).

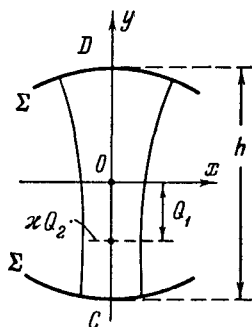


Рис. 27.

с точностью до величин порядка  $\varepsilon_0^2$  векторы  $V_j$  будут испытывать при каждом отражении линейное преобразование. В дальнейшем символом  $O(\varepsilon_0^2)$  будем обозначать векторы, составляющие которых имеют порядок  $\varepsilon_0^2$ . После двух отражений для вектора  $V_2$  получаем

$$V_2 = AV_0 + O(\varepsilon_0^2), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы  $a_{ih}$  выражаются через радиусы кривизны  $r_1$  и  $r_2$  и длину диаметра  $h$  по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{r_1 r_2} [(h - r_1)(h - r_2) + h(h - 2r_2)], \\ a_{12} &= \frac{h}{r_1 r_2} (2h - r_1 - r_2), \\ a_{21} &= \frac{1}{r_1 r_2} [(h - r_1)(h - 2r_2) + (h - r_2)(h - 2r_1)], \\ a_{22} &= \frac{1}{r_1 r_2} [(h - r_1)(h - r_2) + h(h - 2r_1)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Легко подсчитать, что  $\text{Det } A = 1$ .

После  $m = 2l$  отражений для вектора  $V_m$  будем иметь

$$V_m = A^l V_0 + mO(\varepsilon_0^2). \quad (2.4)$$

Очевидно,  $|V_m|$  при фиксированном  $m$  стремится к нулю при  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ . Если, кроме того, для всякого фиксированного  $m$  можно найти такое  $\delta(m) > 0$ , что при  $\varepsilon_0 < \delta(m)$  относительное отклонение луча  $|V_m| \varepsilon_0^{-1} < K$ , где постоянная  $K$  не зависит от  $m$ , систему лучей (2.1) будем называть *устойчивой по первому приближению*.

Выясним, при каких условиях система многократно отраженных лучей (2.1) будет устойчива по первому приближению. Рассмотрим преобразование (2.4) в линейном приближении

$$V_m = A^l V_0. \quad (2.5)$$

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные числа матрицы  $A$ . Будем считать, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда существует матрица  $U$ , приводящая преобразованием подобия матрицу  $A$  к диагональной форме

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U \quad \text{и} \quad A^l = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^l & 0 \\ 0 & \lambda_2^l \end{pmatrix} U.$$

Таким образом, в линейном приближении

$$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^l & 0 \\ 0 & \lambda_2^l \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что система лучей (2.1) устойчива по первому приближению, если собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  удовлетворяют условиям

$$|\lambda_1| \leq 1, \quad |\lambda_2| \leq 1 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2). \quad (2.7)$$

Поскольку  $\lambda_1 \lambda_2 = \text{Det } A = 1$ , то условие (2.7) сводится к требованию

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (2.8)$$

Характеристическое уравнение для определения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{2}{r_1 r_2} [2h^2 - 2h(r_1 + r_2) + r_1 r_2] \lambda + 1 = 0. \quad (2.9)$$

Условие (2.8) будет выполнено, если дискриминант  $d$  уравнения (2.9) меньше нуля:

$$d = 4h(h - r_1 - r_2)(h - r_1)(h - r_2) \frac{1}{r_1^2 r_2^2} < 0. \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) эквивалентно двум системам неравенств:

$$1. \quad h < r_1 + r_2, \quad h > r_1, \quad h > r_2.$$

$$2. \quad h < r_1 + r_2, \quad h < r_1, \quad h < r_2.$$

Если теперь  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то  $d = 0$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ .

При равных собственных значениях матрица  $A$  в общем случае приводится к форме Жордана

$$\begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и ее  $l$ -я степень будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda^l & l\gamma\lambda^{l-1} \\ 0 & \lambda^l \end{pmatrix}.$$

Если  $|\lambda| = 1$  и  $\gamma \neq 0$ , элемент  $l\gamma\lambda^{l-1}$  последней матрицы неограниченно возрастает с ростом  $l$ , и поэтому система лучей (2.1) будет неустойчивой по первому приближению.

Таким образом, при  $d = 0$  система лучей устойчива по первому приближению только в случае  $\gamma = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ . Матрица  $A$  в этом случае будет представлена в виде

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U = \pm U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U,$$

откуда следует, что  $A = \pm I$ , где  $I$  — единичная матрица. Равенство  $A = \pm I$  возможно, только если  $r_1 = r_2 = h$ , т. е. при равенстве радиусов кривизны и длины диаметра.

Отметим, что для относительно минимального диаметра области  $h < r_1 + r_2$ , в то время как для относительно максимального диаметра  $h > r_1 + r_2$ . Таким образом, система лучей, устойчивая по первому приближению, может существовать только в окрестности относительно минимального диаметра области при выполнении одного из дополнительных условий:

$$1) h > r_1, \quad h > r_2; \quad 2) h < r_1, \quad h < r_2; \quad 3) r_1 = r_2 = h. \quad (2.11)$$

В § 5 главы 3 было установлено, что собственные функции эллипса сосредоточиваются только в окрестности малой оси эллипса и не сосредоточиваются в окрестности большой оси. Естественно связать это обстоятельство с тем фактом, что в окрестности большой оси эллипса не существует устойчивой системы лучей.

В дальнейшем мы будем рассматривать только устойчивые по первому приближению системы лучей, и только с ними связанные подпоследовательности собственных функций.

Собственные значения матрицы  $A$ , комплексно сопряженные и равные по модулю единице, можно записать в виде

$$\lambda_1 = e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = e^{-i\varphi}, \quad (2.12)$$

где

$$\varphi = 2 \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{h}{r_1}\right)\left(1 - \frac{h}{r_2}\right)}. \quad (2.13)$$

Перейдем теперь к построению замыкающихся конгруэнций лучей. Основой для наших построений будет служить совокупность лучей (2.2). В дальнейшем мы будем считать, что параметры лучей  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  при отражении испытывают линейное преобразование (2.5). Таким образом, замыкающиеся конгруэнции, которые мы построим, будут сотканы не из истинных отраженных лучей, а из лучей первого приближения.

Прежде всего из всей совокупности лучей (2.2) мы должны будем отобрать совокупность лучей, инвариантную относительно отражений.

Каждой матрице  $A^l$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , соответствует некоторое преобразование линейного пространства векторов  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Мы построим инвариантную относительно отражений совокупность векторов, если в линейном пространстве  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  нам удастся выделить подмножество векторов, инвариантное относительно группы линейных преобразований, осуществляемых мат-

рицами  $A^l$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Переход в линейном пространстве  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  к новому базису

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

эквивалентен замене матрицы  $A^l$  на матрицу  $UA^lU^{-1}$ . Пусть  $U$  — матрица, приводящая матрицу  $A$  к диагональной форме

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что элементы второй строки матрицы  $U$  будут комплексно сопряжены элементам первой строки ( $U_{2,k} = \overline{U_{1,k}}$ ,  $k = 1, 2$ ) и, следовательно, вещественным  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют комплексно сопряженные значения  $\gamma$  и  $\delta$ , так что  $\delta = \overline{\gamma}$ . В новом базисе составляющие луча, испытавшего  $m = 2l$  отражений,  $\gamma_m$  и  $\delta_m$  связаны с исходными составляющими  $\gamma_0$  и  $\delta_0$  преобразованием

$$\begin{pmatrix} \gamma_m \\ \delta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}.$$

В вещественном пространстве  $a = \frac{\gamma + \delta}{2}$ ,  $b = \frac{\gamma - \delta}{2i}$  это преобразование сводится к преобразованию поворота на угол  $\varphi$ . При  $\varphi \neq \pi \frac{q_1}{q_2}$ , где  $q_1, q_2$  — целые числа, единственным инвариантом преобразования поворота является длина вектора, а инвариантным подмножеством — подмножество векторов фиксированной длины\*). Так как длина вектора  $\sqrt{a^2 + b^2}$  определяется выражением

$$\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \delta}{2i}\right)^2 = \gamma\delta, \quad (2.14)$$

в силу комплексной сопряженности  $\gamma$  и  $\delta$  равным  $|\gamma|^2 = |\delta|^2$ , то инвариантное подмножество векторов в пространстве  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  описывается формулами

$$\gamma = \frac{\kappa}{2} e^{i\mu}, \quad \delta = \frac{\kappa}{2} e^{-i\mu}, \quad (2.15)$$

где  $\kappa$  фиксировано и  $\mu$  принадлежит интервалу  $0, 2\pi$ .

\*) Мы не рассматриваем здесь тот случай, когда  $\varphi = \pi \frac{q_1}{q_2}$ ,  $q_1$  и  $q_2$  — целые и группа линейных преобразований наряду с длиной вектора имеет еще и другие инварианты. Заметим только, что рассмотрение этих инвариантов приводит к ряду интересных следствий, касающихся свойств экстремальных диаметров.

Подвергая множество векторов (2.15) линейному преобразованию с матрицей  $U^{-1}$ , получаем инвариантное подмножество в пространстве вещественных векторов  $V(\alpha, \beta)$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} e^{i\mu} \\ \frac{\kappa}{2} e^{-i\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cos \mu \\ \kappa a_{12}^{-1} [-a_{11} \cos \mu + \cos(\varphi + \mu)] \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Таким образом, совокупность лучей, инвариантная относительно отражений, имеет вид

$$x = \kappa y \cos \mu + \kappa a_{12}^{-1} [-a_{11} \cos \mu + \cos(\varphi + \mu)] \frac{h}{2}, \quad (2.17)$$

Теперь мы должны разбить эту совокупность лучей на конечное число нормальных конгруэнций и образовать далее замыкающуюся конгруэнцию лучей. Построим сначала огибающие семейства лучей (2.17). Дифференцируя равенство (2.17) по параметру  $\mu$  и исключая затем параметр  $\mu$ , получаем уравнение огибающих в виде

$$\frac{x^2}{\kappa^2} - (y + Q_1)^2 = Q_2^2, \quad (2.18)$$

где

$$Q_1 = \frac{\cos \varphi - a_{11}}{a_{12}} \frac{h}{2}, \quad Q_2 = \frac{\sin \varphi}{a_{12}} \frac{h}{2}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.18) представляет собой гиперболу, центр которой смещен относительно средней точки диаметра на величину  $-Q_1$  и полуоси равны  $|\kappa Q_2|$  и  $|Q_2|$  (см. рис. 27). Если радиусы кривизны границы в точках  $C$  и  $D$  равны друг другу, т. е. если  $r_1 = r_2 = r$ , то  $\cos \varphi = a_{11}$  и  $Q_1 = 0$ . В этом случае центр гиперболы совпадает со средней точкой диаметра.

Таким образом, инвариантная совокупность лучей ограничена двумя каустиками: левой и правой ветвями гиперболы (2.18). При малых  $\kappa$  инвариантная совокупность лучей покрывает узкую область между ветвями гиперболы (2.18). Очевидно, инвариантная совокупность лучей (2.17) содержит две нормальные конгруэнции. Первая образована лучами, которые начинаются на нижней части границы области и правой дуге гиперболы и кончаются на верхней части границы и левой дуге гиперболы. Вторая — образована лучами, начинающимися на нижней части границы и левой ветви гиперболы. Лучи второй конгруэнции дополняют лучи первой конгруэнции до всей совокупности (2.17). Если мы рассмотрим также лучи, отраженные верхней частью границы и идущие сверху вниз, то получим еще две нормальные конгруэнции — третью и четвертую, для которых гиперболы (2.18) также является каустикой. Эти четыре



нормальные конгруэнции покрывают четыре одинаковые подобласти, вполне аналогичные подобластям  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  и  $\Omega_4$ , которые были рассмотрены нами при построении собственных функций эллипса (§ 5 гл. 3). Склеивая эти четыре подобласти друг с другом точно так же, как были склеены подобласти  $\Omega_j$  в случае эллипса, мы получаем замкнутое многообразие, гомеоморфное тору.

Располагая явными уравнениями лучей, образующих четыре нормальные конгруэнции, нетрудно написать выражения для составляющих градиента эйконала  $\tau$  на каждой подобласти. Исключим  $\mu$  из трех соотношений

$$\begin{aligned} x/\kappa &= (y + Q_1) \cos \mu - Q_2 \sin \mu, \\ \tau_1/\tau_2 &= \kappa \cos \mu, \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = 1, \end{aligned}$$

которые следуют из формул (2.17) и (2.19), параллельности вектора  $(\tau_1, \tau_2)$  лучу (2.17) и уравнения эйконала  $((\nabla\tau)^2 = 1)$ . Разрешая оставшиеся равенства относительно  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , получаем

$$\tau_1 = \tau_1(x, y, \kappa), \quad \tau_2 = \tau_2(x, y, \kappa). \quad (2.20)$$

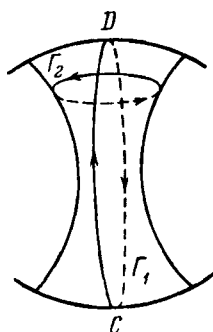


Рис. 28.

В формулах (2.20) естественно ограничиться главными по  $\kappa$  членами, поскольку при построении замыкающейся конгруэнции были использованы лучи, удовлетворяющие закону отражения лишь в первом приближении. Тогда

$$\tau_1 = \pm \frac{x(y + Q_1) \mp \kappa Q_2^2 \sqrt{1 + \frac{(y + Q_1)^2}{Q_2^2} - \frac{x^2}{\kappa^2 Q_2^2}}}{(y + Q_1)^2 + Q_2^2} + O(\kappa^2), \quad (2.21)$$

$$\tau_2 = \pm \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x(y + Q_1) \mp \kappa Q_2^2 \sqrt{1 + \frac{(y + Q_1)^2}{Q_2^2} - \frac{x^2}{\kappa^2 Q_2^2}}}{(y + Q_1)^2 + Q_2^2} \right)^2 \right] + O(\kappa^3). \quad (2.22)$$

Четыре различных сочетания знаков в формуле (2.21) и аналогичные четыре сочетания знаков в формуле (2.22) дают значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  на всех четырех подобластях замкнутого многообразия.

Переходим к выбору базисных кривых на многоэкземплярном пространстве. В качестве базисной кривой  $\Gamma_1$  возьмем (рис. 28) диаметр области  $CD$ , расположенный на первом и третьем экземплярах пространства, в качестве базисной кривой  $\Gamma_2$  — двойной отрезок  $y = y_0$ ,  $|x| \leq \kappa \sqrt{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2}$ ,

пробегаемый на первом и втором экземплярах пространства. (Направление обхода базисных кривых указано на рис. 28 стрелками.) В точках первой базисной кривой

$$\tau_2 = \pm \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 Q_2^2}{(y + Q_1)^2 + Q_2^2} \right) + O(\kappa^3). \quad (2.23)$$

В точках второй —

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{y_0 + Q_1}{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2} x \mp \\ &\mp \kappa |Q_2| \sqrt{1 - \frac{\kappa^{-2} x^2}{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2}} \frac{1}{\sqrt{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2}} + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Формулы (2.23), (2.24) при выбранном направлении обхода базисных кривых позволяют системе уравнений (3.12) главы 3 в случае краевого условия  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$  записать в виде

$$\begin{aligned} k \left\{ 2 \int_{-h/2}^{h/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 Q_2^2}{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2} \right] dy + O(\kappa^3) \right\} &= 2\pi p, \\ k \left\{ \begin{aligned} &\kappa \sqrt{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2} \\ &2\kappa |Q_2| \int \sqrt{1 - \frac{\kappa^{-2} x^2}{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2}} \frac{dx}{\sqrt{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2}} + O(\kappa^3) \\ &- \kappa \sqrt{(y_0 + Q_1)^2 + Q_2^2} \end{aligned} \right\} &= \\ &= 2\pi (q + 1/2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Правая часть второго уравнения учитывает, что базисная кривая  $\Gamma_2$  два раза пересекает каустику. (В случае краевого условия  $u|_{\Sigma} = 0$  в первом уравнении  $p$  следует заменить на  $p + 1$ .)

Вычисляем интегралы в левых частях системы (2.25):

$$\begin{aligned} k \left[ h + \frac{1}{2} |Q_2| \left( \operatorname{arctg} \frac{h/2 + Q_1}{|Q_2|} - \operatorname{arctg} \frac{-h/2 + Q_1}{|Q_2|} \right) \kappa^2 + O(\kappa^3) \right] &= \pi p, \\ k [ |Q_2| \kappa^2 + O(\kappa^3) ] &= 2q + 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Уравнения (2.26) легко решаются относительно  $k$  и  $\kappa$ . Разность арктангенсов удобно выразить через арккосинус. После соответствующих вычислений получаем

$$\begin{aligned} k_{p, q} &= \frac{\pi p}{h} + \\ &+ \frac{q + 1/2}{h} \arccos \left\{ \Lambda \left[ 1 + \left( \frac{h Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2 - h^2/4} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} + O \left( \frac{q^{3/2}}{p^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\kappa_{p, q} = \left( \frac{h}{|Q_2|} \frac{2q + 1}{\pi p} \right)^{1/2} + O \left( \frac{q}{p} \right), \quad (2.28)$$

где

$$\Lambda = \text{sign}(Q_1^2 + Q_2^2 - h^2/4).$$

Вид остаточного члена в формулах (2.27), (2.28) указывает на то, что эти формулы применимы, если

$$p \gg 1, \quad q = 0, 1, 2, \dots = O(1). \quad (2.29)$$

При выполнении условия (2.29)  $\kappa_{p,q} \ll 1$ , и, следовательно, огибающая замыкающейся конгруэнции лучей расположена вблизи диаметра области, а сами лучи сосредоточены в его малой окрестности. Этот вывод согласуется с нашим исходным допущением о линейном преобразовании лучей при отражениях, которое было сделано при построении замыкающейся конгруэнции лучей.

Из уравнения каустик (2.18) непосредственно следует, что ширина полосы, заключающей диаметр области, внутри которой сосредоточены рассматриваемые собственные функции, имеет порядок  $\kappa$ . Если предположить, что  $q = O(1)$ , то из уравнений (2.27) и (2.28) следует, что  $\kappa = O(1/\sqrt{k})$ . Такой же порядок будет иметь и ширина полосы.

Формуле (2.27) для собственных значений можно придать более наглядный вид. Для этого выразим величины  $Q_1$  и  $Q_2$  через радиусы кривизн  $r_1$  и  $r_2$  границы области  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ . Переходя вначале от  $Q_1$  и  $Q_2$  к элементам матрицы  $A$  по формулам (2.19) и (2.13), а затем используя равенства (2.3), получаем

$$k_{p,q} = \frac{\pi p}{h} + \frac{q + 1/2}{h} \arccos \left[ \Lambda \sqrt{\left(1 - \frac{h}{r_1}\right)\left(1 - \frac{h}{r_2}\right)} \right] + O\left(\frac{q^{3/2}}{p^{1/2}}\right), \quad (2.30)$$

где

$$\Lambda = \text{sign}(r_1 + r_2 - 2h). \quad (2.31)$$

При  $r_1 = r_2 = r$  эта формула переходит в формулу (5.29) главы 3 для собственных значений эллипса. Вспоминая выражение (2.13) для угла  $\varphi$  — аргумента собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$ , перепишем формулу (2.30) в виде

$$k_{p,q} = \frac{\pi p}{h} + \frac{q + 1/2}{h} \left( \frac{\Lambda \varphi}{2} + (1 - \Lambda) \frac{\pi}{2} \right) + O\left(\frac{q^{3/2}}{p^{1/2}}\right).$$

Формула (2.30) хорошо известна в теории открытых резонаторов. На самом деле в случае открытой области собственные значения должны быть комплексны. Однако для собственных колебаний, ограниченных близкими каустиками, и, следовательно, сосредоточенных в малой окрестности оси резонатора.

потерями на излучение обычно пренебрегают. Пренебрежение потерями на излучение можно интерпретировать как переход от открытой области к закрытой при сохранении свойств границы области в окрестности точек  $C$  и  $D$ .

В главе 7 мы увидим, как формула (2.30) может быть получена иным путем. Этот иной путь позволяет также дать строгое оправдание формулы (2.30).

### § 3. Собственные значения типа шепчущей галереи в случае переменной скорости

Для исследования поведения лучей в окрестности границы области мы должны будем прежде всего вывести уравнение Эйлера, описывающее лучи, близкие к кривой  $S$ . В этом параграфе кривая  $S$  будет играть роль границы области  $\Omega$ .

Введем в окрестности кривой  $S$  систему координат  $(s, n)$ , где  $n$  — величина нормали, опущенной из точки  $M$  на кривую  $S$ ,  $s$  — длина дуги кривой  $S$ , отсчитываемая от начальной точки до основания нормали. К этим координатам, уже использованным нами в § 1, мы будем часто прибегать и в дальнейшем.

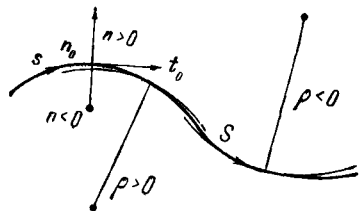


Рис. 29.

Пусть величина нормали положительна для точек  $M$ , расположенных слева от кривой  $S$ , если двигаться вдоль  $S$  в сторону возрастания  $s$  (рис. 29). Мы будем считать также, что радиус кривизны  $\rho(s)$  кривой  $S$  положителен, если центр круга кривизны лежит справа от кривой  $S$ , т. е. при отрицательных значениях  $n$ , и отрицателен в противоположном случае. Если ввести единичный вектор касательной  $t_0$ , направленный в сторону увеличения длины дуги  $s$ , и единичный вектор нормали  $n_0$  к кривой  $S$ , направленный в сторону положительных значений  $n$ , то при нашем соглашении о знаках будут справедливы формулы

$$\frac{dt_0}{ds} = -\frac{1}{\rho} n_0, \quad \frac{dn_0}{ds} = \frac{1}{\rho} t_0. \quad (3.1)$$

Очевидно, координаты  $(s, n)$  ортогональны.

Пусть  $d\sigma$  — дифференциал дуги произвольной кривой вблизи контура  $S$ . Применяя теорему Пифагора к бесконечно малому треугольнику  $ABC$  (рис. 30), получим

$$(d\sigma)^2 = \left[ \frac{\rho + n}{\rho} ds \right]^2 + dn^2 = \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^2 ds^2 + dn^2. \quad (3.2)$$

Таким образом, параметры Ламе  $h_s$  и  $h_n$  в системе координат  $(s, n)$  (см. Дополнение 2) равны соответственно

$$h_s = 1 + \frac{n}{\rho}, \quad h_n = 1. \quad (3.3)$$

Скорость распространения волн в координатах  $s, n$  обозначим по-прежнему через  $c(s, n)$ . Будем далее предполагать, что функция  $c(s, n)$  дифференцируема достаточное число раз по обоим переменным. В координатах  $(s, n)$  основной функционал геометрической оптики

$$T = \int \frac{d\sigma}{c(x, y)} \quad (3.4)$$

принимает вид

$$T = \int \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{n}{\rho(s)}\right)^2 + \left(\frac{dn}{ds}\right)^2}}{c(s, n)} ds. \quad (3.5)$$

Получим уравнение Эйлера для лучей, т. е. для экстремалей интеграла (3.5), в системе координат  $s, n$ , считая уклонение лучей от кривой  $S$  малым как по расстоянию, так и по углу наклона касательной.

Пусть  $n = n(s)$  — уравнение луча, тогда наше предположение означает, что малыми являются величины \*)  $|n|$  и  $\left|\frac{dn}{ds}\right|$ . Разложим подынтегральную функцию

$$\Phi\left(s, n, \frac{dn}{ds}\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\rho(s)}\right)^2 + \left(\frac{dn}{ds}\right)^2} c^{-1}(s, n)$$

в ряд по степеням  $n$  и  $\frac{dn}{ds}$ , ограничиваясь при этом квадратичными членами

$$\begin{aligned} \Phi\left(s, n, \frac{dn}{ds}\right) = & \frac{1}{c_0(s)} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] n + \right. \\ & + \left[ \frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} - \frac{c_2(s)}{c_0(s)} - \frac{1}{\rho(s)} \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] n^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{ds}\right)^2 + O\left[n^3, n \left(\frac{dn}{ds}\right)^2\right] \right\}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

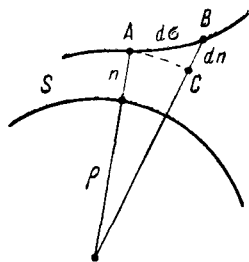


Рис. 30.

\*) Точнее, мы считаем малыми безразмерные величины

$$\frac{n}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial^j c}{\partial n^j} \Big|_{n=0} n^j.$$

где

$$c_0(s) = c(s, 0), \quad c_1(s) = \left. \frac{\partial c(s, n)}{\partial n} \right|_{n=0}, \quad c_2(s) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(s, n)}{\partial n^2} \right|_{n=0}.$$

Разложение (3.6) позволяет записать уравнение Эйлера в виде

$$\frac{d^2 n}{ds^2} - \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} \frac{dn}{ds} - 2 \left[ \frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} - \frac{1}{\rho(s)} \frac{c_1(s)}{c_0(s)} - \frac{c_2(s)}{c_0(s)} \right] n - \\ - \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] + O \left[ n^2, n \frac{dn}{ds}, n \frac{d^2 n}{ds^2}, \left( \frac{dn}{ds} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.7) следует, что кривая  $S$  сама является лучом в том и только том случае, если вдоль  $S$  выполняется равенство

$$\frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} = 0.$$

Играющую важную роль в дальнейшем величину

$$P(s) = \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right]^{-1} \quad (3.8)$$

мы будем называть *эффективным радиусом кривизны* кривой  $S$ .

Получим условие, при котором в окрестности границы  $S$  области  $\Omega$  происходит наложение лучей, многократно отраженных границей. Другими словами, мы выясним, при каком условии вблизи границы области возникает эффект шепчущей галереи. Очевидно, эти условия имеют локальный характер, поэтому при их выводе область  $\Omega$  не обязательно считать ограниченной, а кривую  $S$  замкнутой.

Пусть область  $\Omega$  расположена справа от кривой  $S$ , т. е. при  $n < 0$ . Угол между лучом и касательной к  $S$ , направленной в сторону возрастания длины дуги, будем называть углом скольжения. Условимся угол скольжения считать всегда величиной положительной. Мы говорим, что происходит наложение волн, многократно отраженных границей  $S$ , если луч, отраженный в точке  $N_j = N(s_j)$  под углом скольжения  $\varepsilon_j$ , встречает границу  $S$  в точке  $N_{j+1} = N(s_{j+1})$ , причем малым  $\varepsilon_j$  соответствуют малые  $\Delta s_j = s_{j+1} - s_j > 0$ . Сформулированное условие наложения можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{\Delta s_j}{\varepsilon_j} > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Выразим условие наложения (3.9) через характеристики границы  $S$  и скорости  $c(s, n)$ . Пусть  $n = n_j(s)$  — уравнение луча,

отраженного в точке  $N_j$  под углом скольжения  $\epsilon_j$ . При выбранном расположении области  $\Omega$  относительно кривой  $S$

$$\left. \frac{dn_j}{ds} \right|_{s=s_j} = -\operatorname{tg} \epsilon_j. \quad (3.10)$$

Полагая в уравнении (3.7)  $s = s_j$ ,  $n = 0$  и переходя к пределу при  $\epsilon_j \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \left. \frac{d^2 n_j}{ds^2} \right|_{s=s_j} = \frac{1}{\rho(s_j)} - \frac{c_1(s_j)}{c_0(s_j)} = \frac{1}{P(s_j)}.$$

Точка встречи  $N_{j+1}$  луча  $n = n_j(s)$  с границей  $S$  определится из уравнения  $n_j(s_{j+1}) = 0$ . Представляя функцию  $n_j(s)$  формулой Тейлора

$$n_j(s) = n'_j(s_j)(s - s_j) + \frac{1}{2} n''_j(s_j)(s - s_j)^2 + \\ + \frac{1}{3!} n'''_j(s_j)(s - s_j)^3 + O[(s - s_j)^4] \quad (3.11)$$

и принимая во внимание равенство (3.10), запишем уравнение  $n_j(s_{j+1}) = 0$  в виде

$$-\operatorname{tg} \epsilon_j + \frac{1}{2} n''_j(s_j)(s_{j+1} - s_j) + \\ + \frac{1}{3!} n'''_j(s_j)(s_{j+1} - s_j)^2 + O[(s_{j+1} - s_j)^3] = 0.$$

Если эффективный радиус кривизны  $P(s)$  (см. формулы (3.8)) во всех точках границы  $S$  принимает конечные и отличные от нуля значения, то  $\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} n''_j(s_j) \neq 0$ , и тогда из последнего уравнения следует, что

$$\Delta s_j = s_{j+1} - s_j = \frac{2}{n''_j(s_j)} \epsilon_j - \frac{4}{3} \frac{n'''_j(s_j)}{[n''_j(s_j)]^3} \epsilon_j^2 + O(\epsilon_j^3) \quad (3.12)$$

и

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \frac{\Delta s_j}{\epsilon_j} = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \frac{2}{n''_j(s_j)} = 2P(s_j). \quad (3.13)$$

Таким образом, для того чтобы в области  $\Omega$  происходило наложение многократно отраженных волн, т. е. возникал эффект шепчущей галереи, достаточно потребовать, чтобы неравенство

$$\frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} = \frac{1}{P(s)} > 0 \quad (3.14)$$

выполнялось для всех точек кривой  $S$ . Если область  $\Omega$  расположена слева от кривой  $S$ , то

$$\left. \frac{dn_j}{ds} \right|_{s=s_j} = \operatorname{tg} \varepsilon_j,$$

и наложение многократно отраженных волн вблизи границы области  $\Omega$  происходит при

$$\frac{1}{P(s)} < 0.$$

Отсюда следует, что эффект шепчущей галереи может иметь место только с одной стороны кривой  $S$ . Так, например, при  $P(s) > 0$  эффект возникает справа от кривой  $S$  при  $n < 0$  и не возникает слева от кривой  $S$  ( $n > 0$ ).

Геометрический смысл эффективного радиуса кривизны  $P(S)$  может быть извлечен из равенства (3.13). Заменяя бесконечно малые  $\Delta S$  и  $\varepsilon$  на эквивалентные бесконечно малые, получаем для  $P(s)$  формулу

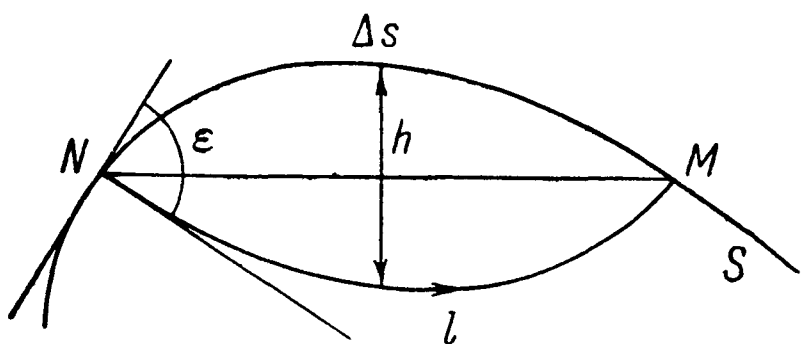


Рис. 31.

$$P(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|NM|^2}{8h},$$

в которой  $|NM|$  — длина хорды  $NM$  двуугольника (рис. 31), образованного дугой границы и лучом  $NlM$ ,  $h$  — его стрелка (максимальная длина хорды, перпендикулярной к  $NM$ ).

С другой стороны, эффективный радиус кривизны — это с точностью до множителя  $c_0$  радиус кривизны в римановом пространстве со специально выбранной метрикой. Действительно, рассмотрим плоскость  $(x, y)$  как риманово многообразие с метрикой, определяемой формулой

$$d\chi^2 = \frac{1}{c^2(x, y)} (dx^2 + dy^2).$$

Его геодезическими линиями будут экстремали интеграла  $\int d\chi$ , т. е. лучи. Риманов радиус кривизны  $\rho_R$  произвольной кривой  $x = x(\chi)$  ( $x = (x, y)$ ;  $\chi$  — риманова длина дуги) определим, как и в евклидовом случае, равенством

$$\frac{D^2 x}{d\chi^2} = -\frac{1}{\rho_R} n_R,$$

где  $n_R$  — единичная (в смысле метрики риманова пространства) нормаль, направленная налево от кривой  $x = x(\chi)$ . Символ  $D/d\chi$  означает ковариантное дифференцирование. Нетрудно показать вычислением, что в любой точке контура  $S$

$$\rho_R = \frac{1}{c_0} P,$$

где  $P$  — эффективный радиус кривизны.

В случае постоянной скорости распространения волн в § 1 было установлено (см. формулу (1.6)), что угол скольжения



$\varepsilon_{j+1}$  в точке отражения  $N_{j+1}$  связан с углом скольжения  $\varepsilon_j$  в предыдущей точке отражения  $N_j$  соотношением

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \frac{2}{3} \rho'_j \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3), \quad (3.15)$$

где  $\rho'_j$  — производная радиуса кривизны границы  $S$  в точке  $N_j$ . Покажем, что в случае неоднородной среды, когда лучи криволинейны (рис. 32), в равенстве (3.15) производная радиуса кривизны  $\rho'_j$  должна быть заменена на  $c_0(s_j) \frac{d}{ds} [P(s) c_0^{-1}(s)] \Big|_{s=s_j}$ .

Очевидно, что  $\operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} = n'_j(s_{j+1})$  или

$$\varepsilon_{j+1} = n'_j(s_{j+1}) + O(\varepsilon_j^3). \quad (3.16)$$

Дифференцируя разложение (3.11) и подставляя вместо разности  $s_{j+1} - s_j$  ее значение (3.12), получаем

$$n'_j(s_{j+1}) = n'_j(s_j) + 2\varepsilon_j +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{n_j''''(s_j)}{[n_j''(s_j)]^2} \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3).$$

Таким образом, равенство (3.16) может быть записано в виде

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{n_j''''(s_j)}{[n_j''(s_j)]^2} \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3). \quad (3.17)$$

Вычислим  $\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} n_j''''(s_j)$ . Для этого продифференцируем уравнение (3.7), положим  $s = s_j$ , и, перейдя к пределу при  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ , найдем

$$\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} n_j''''(s_j) = - \frac{d}{ds} [P(s) c_0^{-1}(s)] \Big|_{s=s_j} c_0(s_j) P^{-2}(s_j).$$

Последнее равенство позволяет формулу (3.17) переписать в виде \*)

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \frac{2}{3} c_0(s_j) \frac{d}{ds} [P(s) c_0^{-1}(s)] \Big|_{s=s_j} \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3). \quad (3.18)$$

\*) Если ввести (см выше, стр. 124) риманов радиус кривизны  $\rho_R$ , то формула (3.18) будет иметь тот же вид, что и аналогичная формула в случае  $c = 1$  (см. § 1):

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \frac{2}{3} \varepsilon_j^2 \frac{d\rho_R}{d\chi}$$

$\left( \frac{d}{d\chi} \right.$  — дифференцирование по римановой длине дуги  $d\chi^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{c^2}$ ).

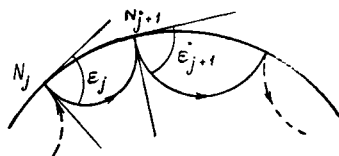


Рис. 32.

Пользуясь формулой (3.18), точно так же как в § 1, нетрудно найти связь между углом скольжения  $\varepsilon_m$  после  $m$  отражений и исходным углом скольжения  $\varepsilon_0$ :

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} = \sqrt[3]{\frac{c_0(s_m)P(s_0)}{c_0(s_0)P(s_m)}} + O(\varepsilon_0). \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) следует, что при условии (3.14) любой луч, встретившийся с контуром  $S$  под достаточно малым углом, при последовательных отражениях будет достаточно долго находиться в малой окрестности  $S$ , т. е. система многократно отраженных лучей будет устойчива по первому приближению.

Если в формулах (3.12) и (3.17) учесть члены порядка  $\varepsilon_0^3$ , то окажется, что в равенстве (3.19), как и в случае  $c(s, n) \equiv 1$ , поправочное слагаемое будет иметь порядок  $\varepsilon_0^2$ .

Получим формулу для собственных значений типа шепчущей галереи в задаче

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

где  $S$  — замкнутая кривая, ограничивающая область  $\Omega$ . Будем считать, что  $n < 0$  для области  $\Omega$  и что в точках кривой  $S$  выполняется неравенство

$$0 < P(s) < \infty. \quad (3.20)$$

В этом случае, как мы только что установили, в области  $\Omega$  вблизи границы  $S$  происходит наложение многократно отраженных волн и систем многократно отраженных лучей обладает устойчивостью по первому приближению.

Для совокупности лучей, инвариантной в первом приближении относительно отражений в границе  $S$ , угол скольжения  $\varepsilon(s)$  определяется равенством

$$\varepsilon(s) = \varkappa \sqrt[3]{\frac{c_0(s)}{P(s)}}.$$

Огибающая или каустика такой совокупности описывается уравнением

$$n = -\frac{1}{2} [P(s) c_0^2(s)]^{1/3} \varkappa^2 + O(\varkappa^3). \quad (3.21)$$

Чтобы получить собственные частоты, инвариантную совокупность лучей следует разбить на две нормальные конгруэнции. Замыкающаяся конгруэнция будет образована криволинейными лучами, идущими от границы  $S$  к огибающей, и лучами, отходящими от огибающей к границе. В качестве базисных кривых, так же как и в случае постоянной скорости в § 1, вы-

бираем каустику  $\mathcal{L}_k$  и криволинейный треугольник  $l_k$ , образованный двумя лучами, имеющими общую точку на  $S$ , и отрезком каустики между их точками касания. Принимая во внимание, что вдоль выбранных базисных кривых

$$\sum \tau_j dx_j = \pm \frac{d\sigma}{c(s, n)} = \pm \frac{1}{c_0(s)} \left\{ 1 - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} n + O(n^2) \right\} d\sigma,$$

где  $d\sigma$  — элемент длины кривой, получаем два уравнения

$$\omega \left\{ \int_0^L \frac{ds}{c_0(s)} - \frac{1}{2} \kappa^2 \int_0^L \frac{ds}{c_0^{1/3}(s) P^{2/3}(s)} + O(\kappa^3) \right\} = 2\pi q,$$

$$\omega \left\{ \frac{2}{3} \kappa^3 + O(\kappa^4) \right\} = 2\pi \left( p + \frac{1}{4} \right), \quad (3.22)$$

где  $L$  — длина границы  $S$ . (В случае граничного условия  $u|_S = 0$  множитель  $p + 1/4$  должен быть заменен множителем  $p + 3/4$ ). Решая систему уравнений (3.22), находим собственные частоты

$$\omega_{p, q} = \frac{1}{\int_0^L \frac{ds}{c_0(s)}} \left\{ 2\pi q + \left[ \frac{3\pi(p + 1/4)}{2} \right]^{2/3} \left( \int_0^L \frac{ds}{c_0(s)} \right)^{1/3} \int_0^L \frac{ds}{c_0^{1/3}(s) P^{2/3}(s)} + \dots \right\},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, q \gg 1. \quad (3.23)$$

Ширина полосы  $\Delta_{p, q}$ , в которой будут сосредоточены соответствующие собственные функции, определяется огибающей (3.21) и оказывается равной

$$\Delta_{p, q} = \left[ \frac{3\pi(p + 1/4)}{2} \right]^{2/3} [P(s) c_0^2(s)]^{1/3} \frac{1}{\omega^{2/3}}. \quad (3.24)$$

При  $p = O(1)$ , очевидно,  $\Delta_{p, q}$  есть величина порядка  $O(\omega^{-2/3})$ .

Мы видим, что так же, как в уже разобранных случаях собственных функций типа шепчущей галереи, ширина полосы, за пределами которой собственные функции экспоненциально затухают, пропорционально  $\omega^{-2/3}$ . Этот простой вывод из формулы (3.24) имеет важное значение для построений главы 5. В дальнейшем (гл. 5 и 6) мы увидим, что в формулах (3.23), (3.24), так же как и в формулах (5.23) и (5.24) главы 3, множитель  $\left[ \frac{3\pi(p + 1/4)}{2} \right]^{2/3}$  должен быть заменен корнем  $t'_p$  производной функции Эйри  $v'(-t)$ .

#### § 4. Собственные значения типа прыгающего мячика в случае переменной скорости

В случае переменной скорости  $c = c(x, y)$  роль экстремального диаметра области  $\Omega$  играет луч  $S$ , ограниченный точками  $C$  и  $D$  и в этих точках ортогональный границе  $\Sigma$  области  $\Omega$  (рис. 33). Сам луч  $CD$  (так же, как и его аналог в случае  $c \equiv 1$  — экстремальный диаметр области  $\Omega$ ) инвариантен в том смысле, что после двух отражений от  $\Sigma$  по закону

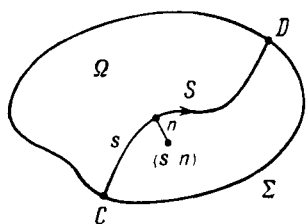


Рис. 33.

геометрической оптики он переходит в себя. Такие лучи мы будем называть *экстремальными лучами* области  $\Omega$ . Для экстремальных лучей можно ввести понятие устойчивости, вполне аналогичное понятию устойчивости экстремального диаметра области (см. § 2). Лучи, близкие к устойчивому экстремальному лучу  $S$ , после многочисленных отражений от границы  $\Sigma$  области  $\Omega$  достаточно долго не поки-

дают малой окрестности  $S$ . Естественно ожидать, что вблизи устойчивого луча  $S$  «сосредоточиваются» некоторые собственные функции области  $\Omega$ .

Этот параграф посвящен нахождению асимптотики соответствующих собственных чисел и выводу аналитического условия устойчивости экстремального луча.

Свяжем с  $S$ , как и в предыдущем параграфе, координаты  $s$  и  $n$ . Длину экстремального луча  $S$  примем равной  $h$  и длину дуги  $s$  вдоль него будем отсчитывать от точки  $C$ . Поскольку кривая  $S$  в рассматриваемом случае является лучом, вдоль кривой  $S$  выполняется равенство  $1/P(s) = 0$ , и для лучей, близких к кривой  $S$ , имеет место (см. § 3) уравнение

$$\frac{d^2 n}{ds^2} - \frac{c'_0(s)}{c_0(s)} \frac{dn}{ds} + 2 \frac{c_2(s)}{c_0(s)} n + (\text{квадратичные члены}) = 0. \quad (4.1)$$

В уравнении (4.1) избавимся от члена, содержащего первую производную. Для этого перейдем к новой неизвестной функции

$$y(s) = \sqrt{\frac{c_0(0)}{c_0(s)}} n(s). \quad (4.2)$$

В линейном приближении для функции  $y(s)$  получаем уравнение

$$y''(s) + K(s)y(s) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$K(s) = \frac{1}{2} \frac{c''_0(s)}{c_0(s)} - \frac{3}{4} \left( \frac{c'_0(s)}{c_0(s)} \right)^2 + 2 \frac{c_2(s)}{c_0(s)}. \quad (4.4)$$

Пусть исходный луч, идущий в направлении отсчета длины дуги вдоль кривой  $S$ , описывается уравнением  $n = n_0(s)$ , луч, отраженный и идущий в обратном направлении, — уравнением  $n = n_1(s)$ , и пусть вообще  $n = n_l(s)$  — уравнение луча, возникшего в результате  $l$  отражений исходного луча. Получим в первом приближении условия, которыми связаны между собой смещение  $n_{m-1}(0)$ ,  $m = 2l$ , и угловой коэффициент  $n'_{m-1}(0)$  луча, падающего на границу  $\Sigma$  в окрестности точки  $C$ , и смещение  $n_m(0)$  и угловой коэффициент  $n'_m(0)$  луча отраженного. Поскольку нас интересует лишь первое приближение, мы можем заменить кривую  $\Sigma$  в окрестности точки  $C$  дугой окружности, радиус которой равен радиусу кривизны  $r_1$  кривой  $\Sigma$  в точке  $C$ . Из рис. 34 легко следует, что

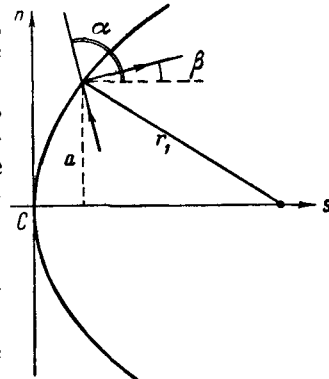


Рис. 34.

$$\pi - \alpha - \arcsin \frac{a}{r_1} = \beta + \arcsin \frac{a}{r_1}. \quad (4.5)$$

Так как в первом приближении

$$n_m(0) = n_{m-1}(0) = a, \quad (4.6)$$

$$n'_m(a) = \beta, \quad n'_{m-1}(0) = \alpha - \pi, \quad \arcsin \frac{a}{r_1} = \frac{a}{r_1},$$

то равенство (4.5) может быть переписано в виде

$$n'_m(0) + \frac{1}{r_1} n_m(0) = - \left( n'_{m-1}(0) + \frac{1}{r_1} n_{m-1}(0) \right). \quad (4.7)$$

Для функций  $y_m(s)$  и  $y_{m-1}(s)$ , связанных с  $n_m(s)$  и  $n_{m-1}(s)$  формулой (4.2), вместо условий (4.6) и (4.7) получаем

$$y_m(0) = y_{m-1}(0), \quad (4.8)$$

$$y'_m(0) + q(0)y_m(0) = - (y'_{m-1}(0) + q(0)y_{m-1}(0)),$$

где

$$q(0) = \frac{1}{2} \frac{c'_0(0)}{c_0(0)} + \frac{1}{r_1}.$$

Аналогичным образом можно найти условия, связывающие  $y_m(h)$ ,  $y'_m(h)$  и  $y_{m+1}(h)$ ,  $y'_{m+1}(h)$ . Эти условия имеют вид

$$y_{m+1}(h) = y_m(h), \quad (4.9)$$

$$y'_{m+1}(h) + q(h)y_{m+1}(h) = - [y'_m(h) + q(h)y_m(h)],$$

где  $q(h) = \frac{1}{2} \frac{c_0'(h)}{c_0(h)} - \frac{1}{r_2}$  и  $r_2$  — радиус кривизны границы  $\Sigma$  в точке  $D$ .

Зададим исходный луч условиями

$$\begin{aligned} y_0(0) = \alpha_0, \quad y_0'(0) + q(0)y_0(0) = \beta_0, \\ \sqrt{(q(0)\alpha_0)^2 + \beta_0^2} \ll 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

и пусть для луча, испытавшего  $j$  отражений,

$$y_j(0) = \alpha_j, \quad y_j'(0) + q(0)y_j(0) = \beta_j.$$

Выразим  $\alpha_m, \beta_m, m = 2l$ , через  $\alpha_0, \beta_0$ . Для этого построим два линейно независимых решения  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  уравнения (4.3), удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} f_1(0) = a_1 > 0, \quad f_1'(0) + q(0)f_1(0) = 0, \\ f_2(0) = a_2 > 0, \quad f_2'(0) + q(0)f_2(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(h) = b_1, \quad f_1'(h) + q(h)f_1(h) = c_1, \\ f_2(0) = b_2, \quad f_2'(0) + q(0)f_2(0) = c_2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

причем мы считаем, что  $c_2 \neq 0$ . Тогда уравнение исходного луча  $y = y_0(s)$  можно записать в виде

$$y_0(s) = \left( \frac{\alpha_0}{a_1} - \frac{b_2}{a_1 c_2} \beta_0 \right) f_1(s) + \frac{1}{c_2} \beta_0 f_2(s). \quad (4.13)$$

Очевидно, параметры  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ , определяющие луч, при каждом отражении в первом приближении испытывают линейное преобразование. Параметры  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ , соответствующие лучу после  $2l$  отражений, выражаются через  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  посредством преобразования

$$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} = A^l \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix},$$

где элементы  $a_{ik}$  матрицы  $A$  могут быть выражены через  $a_1, b_1, c_1$  и  $a_2, b_2, c_2$ . Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} a_{11} = 2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1, \quad a_{12} = 2 \left( \frac{b_2}{c_2} - \frac{b_1 b_2^2}{a_1 a_2 c_2} \right), \\ a_{21} = -2 \frac{b_1 c_2}{a_1 a_2}, \quad a_{22} = 2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Как и в случае однородной среды, система многократно отраженных криволинейных лучей  $n = n_j(s)$  будет устойчива по первому приближению, если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $A$  различны и по модулю равны единице.

Характеристическое уравнение для матрицы  $A$  имеет вид

$$\lambda^2 - 2\left(2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1\right)\lambda + 1 = 0,$$

и следовательно,

$$\lambda_{1,2} = 2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1 \pm \sqrt{\left(2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1\right)^2 - 1}.$$

Таким образом, неравенство

$$\left|2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1\right| < 1$$

или

$$0 < \frac{f_1(h) f_2(0)}{f_1(0) f_2(h)} < 1 \quad (4.15)$$

дает условие устойчивости системы лучей  $n_j(s)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

Если

$$\left|2 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} - 1\right| = 1, \quad (4.16)$$

то  $\lambda_1 = \lambda_2$ , и для того, чтобы система лучей  $n_j(s)$  была устойчивой, необходимо дополнительно потребовать, чтобы  $a_{12} = a_{21}$  (см. § 2), т. е.

$$2\left(\frac{b_2}{c_2} - \frac{b_1 b_2^2}{a_1 a_2 c_2}\right) = -2 \frac{b_1 c_2}{a_1 a_2}. \quad (4.17)$$

Равенства (4.16) и (4.17) выполняются одновременно, только если  $b_1 = b_2 = 0$ , т. е. если

$$f_1(h) = f_2(0) = 0. \quad (4.18)$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда уравнение (4.3) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее однородным условиям

$$y'(0) + q(0)y(0) = 0, \quad y'(h) + q(h)y(h) = 0,$$

и, следовательно, решения  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  не будут уже линейно независимыми. В этом случае в качестве второго решения  $f_2(s)$  выберем любое решение уравнения (4.3), линейно независимое с  $f_1(s)$ . Теперь элементы матрицы  $A$  будут равны

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 2(a_1 a_2 - b_1 b_2) b_1^{-1} c_2^{-1},$$

так что  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , и условие устойчивости запишется в виде  $a_{21} = 0$  или

$$f_1(h) f_2(0) = f_1(0) f_2(h). \quad (4.19)$$

Обозначим аргумент комплексного числа

$$2 \frac{f_1(h) f_2(0)}{f_1(0) f_2(h)} - 1 + i \sqrt{1 - \left(2 \frac{f_1(h) f_2(0)}{f_1(0) f_2(h)} - 1\right)^2}$$

через  $\varphi$  и будем считать,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Нетрудно подсчитать, что

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{f_1(0) f_2(h)}{f_1(h) f_2(0)} - 1} = 2 \arccos \sqrt{\frac{f_1(h) f_2(0)}{f_1(0) f_2(h)}} \quad (4.20)$$

(ср. с (2.13)). С помощью угла  $\varphi$  собственные значения матрицы  $A$  могут быть записаны в виде

$$\lambda_1 = e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = e^{-i\varphi}.$$

Определим собственные значения задачи

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} = 0 \quad (\nu - \text{нормаль к } \Sigma),$$

соответствующие собственным функциям, сосредоточенным в окрестности экстремального луча  $CD$  области  $\Omega$ . Будем считать, что для экстремального луча  $CD$  выполнено условие устойчивости (4.15) и, следовательно, в окрестности луча  $CD$  существует система многократно отраженных лучей, устойчивая по первому приближению.

Для нахождения собственных значений необходимо прежде всего построить инвариантную относительно отражений совокупность лучей, близких к экстремальному лучу. Так же, как в § 2, эта задача сводится к нахождению в пространстве вещественных векторов  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  подмножеств, переходящих в себя при действии матриц  $A^i$ .

Из формулы (2.16) следует, что инвариантную совокупность лучей мы получим, если зададим их параметры  $(\alpha, \beta)$  в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= \kappa \cos \mu, \\ \beta &= \kappa a_{12}^{-1} [-a_{11} \cos \mu + \cos(\varphi + \mu)], \\ \kappa &\ll 1, \quad 0 \leq \mu \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где  $a_{11}$  и  $a_{12}$  выражаются через  $f_1$  и  $f_2$  по формулам (4.14), (4.11), (4.12). Принимая во внимание, что  $\cos \varphi = a_{11}$ , для  $\beta$  получаем

$$\beta = \kappa \frac{\sin \varphi}{a_{12}} \sin \mu.$$

Введем обозначение

$$\frac{b_2 \sin \varphi}{c_2 a_{12}} = Q.$$

Используя формулы (4.14), нетрудно подсчитать, что

$$Q^2 = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}. \quad (4.22)$$



С помощью величины  $Q$  инвариантная совокупность лучей может быть записана в виде

$$y = \kappa \left\{ \frac{1}{a_1} (\cos \mu + Q \sin \mu) f_1(s) - \frac{1}{b_2} (Q \sin \mu) f_2(s) \right\}. \quad (4.23)$$

Обычным приемом находим огибающую совокупность лучей (4.23):

$$\frac{y^2}{\kappa^2} = \frac{Q^2}{a_1 b_2} \left\{ \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s) f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right\}. \quad (4.24)$$

Очевидно, огибающая (4.24) имеет две ветви, так что инвариантная совокупность лучей (4.23) ограничена двумя каустиками, для одной из которых  $y > 0$ , а для другой  $y < 0$ . Точно так же, как и в § 2, инвариантную совокупность лучей разбиваем на две нормальные конгруэнции (отличие состоит лишь в том, что вместо прямых лучей мы имеем теперь лучи криволинейные). Две другие нормальные конгруэнции образуем из совокупности лучей, возникающей при отражении первой совокупности и распространяющейся в направлении от точки  $D$  к точке  $C$ . Склеивая эти нормальные конгруэнции между собой вдоль каустика и участков границы, получаем замыкающуюся конгруэнцию, выстилающую четырехэкземплярное пространство, гомеоморфное тору. Пользуясь формулой (4.23) для инвариантной совокупности лучей, можно найти составляющие  $\nabla \tau$  на каждом экземпляре пространства. Производя вычисления, аналогичные вычислениям § 2, получаем

$$\begin{aligned} \tau_n &= \pm \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{ds} n^2(s) \right. \\ &\quad \left. n \mp \kappa^2 \frac{Q}{a_1 b_2} W \frac{1}{c_0(0)n(s)} \sqrt{1 - \frac{n^2}{n^2(s)}} \right] + O(\kappa^2), \\ \tau_s &= \pm \frac{1}{c(s, n)} \left[ 1 - \frac{c^2(s, n)}{2} \tau_n^2 + O(\kappa^3) \right], \end{aligned}$$

где  $s$  и  $n$  — координаты точки,

$$\begin{aligned} n(s) &= \sqrt{\frac{c_0(s)}{c_0(0)}} y(s) = \\ &= \kappa \sqrt{\frac{c_0(s)}{c_0(0)}} \sqrt{\frac{Q^2}{a_1 b_2} \left\{ \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s) f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right\}^{1/2}} \quad (4.25) \end{aligned}$$

— правая часть уравнения огибающей (4.24) в этих координатах, а  $W = f_1 f_2' - f_1' f_2$  — определитель Вронского.

Базисные кривые выберем также по-прежнему:  $\Gamma_1$  — экстремальный луч, пробегаемый на первом и третьем экземплярах в противоположных направлениях, и  $\Gamma_2$  — двойной отрезок  $s = s_0$  и  $-n(s_0) < n < n(s_0)$ , принадлежащий первому и второму экземплярам,  $s_0$  — некоторое фиксированное значение длины дуги  $s$ .

Так как  $n = 0$  вдоль  $\Gamma_1$ , первое уравнение системы (3.12) главы 3, служащее для определения собственных частот, запишется в виде

$$\omega 2 \left\{ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} - \frac{\kappa^2}{2} \frac{Q^2}{a_1^2 b_2^2} W^2 \frac{1}{c_0^2(0)} \int_0^h \frac{c_0(s)}{n^2(s)} ds \right\} = 2\pi p.$$

При интегрировании  $\tau_n$  вдоль кривой  $\Gamma_2$  интеграл от нечетного первого слагаемого обратится в нуль, поэтому второе уравнение системы (3.12) главы 3 имеет вид

$$2\omega \kappa^2 \frac{Q}{a_1 b_2} \frac{W}{c_0(0)} \frac{1}{n(s_0)} \int_{-n(s_0)}^{n(s_0)} \sqrt{1 - \frac{n^2}{n^2(s_0)}} dn = 2\pi \left( q + \frac{1}{2} \right). \quad (4.26)$$

Используя формулу (4.25) и вычисляя интеграл в уравнении (4.26), получим следующую систему

$$\omega \left\{ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} - \frac{\kappa^2}{2} \frac{W^2}{a_1 b_2 c_0(0)} \int_0^h \frac{ds}{\frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s)} \right\} = \pi p,$$

$$\omega \kappa^2 \frac{Q}{a_1 b_2} W \frac{1}{c_0(0)} = 2q + 1,$$

из которой уже легко найти собственные частоты

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \pi p + \frac{2q+1}{2} \frac{W}{Q} \int_0^h \frac{ds}{\frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s)} \right\} \quad (4.27)$$

$$p \gg 1, \quad q = 0, 1, 2, \dots,$$

и значение параметра

$$\kappa_{p,q}^2 = \frac{2q+1}{\omega_{p,q}} \frac{a_1 b_2 c_0(0)}{Q W}.$$

Подставляя найденные значения  $\kappa_{p,q}$  в уравнение (4.24), мы получаем уравнение каустики

$$n^2 = \frac{2q+1}{\omega_{p,q}} \frac{Q}{W} c_0(s) \left\{ \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right\}, \quad (4.28)$$

ограничивающей полосу, в которой сосредоточена соответствующая собственная функция. Нетрудно видеть, что при  $q = O(1)$  ширина этой полосы  $\sim \omega_{p,q}^{-1/2}$ . Это заключение имеет

важное значение для построений глав 5 и 7. При подсчете величины  $Q$  необходимо извлечь корень в формуле (4.22). Знак этого корня должен быть выбран так, чтобы правая часть (4.28) при всех  $s$  была положительной. Исходя из этого требования, приходим к выводу, что

$$Q = \frac{\operatorname{sign}\left(\frac{a_1}{b_2} W\right)}{\sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - 1}}. \quad (4.29)$$

Вспоминая связь  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  со значениями решений  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  в точках 0 и  $h$ , вместо (4.28) и (4.29) получаем

$$n^2 = \frac{2q+1}{\omega_{p,q}} \frac{Q}{W} \left\{ \frac{f_2(h)}{f_1(h)} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{f_1(0)}{f_2(0)} f_2^2(s) \right\}$$

и

$$Q = \frac{\operatorname{sign}\left(\frac{f_1(0)}{f_2(0)} W\right)}{\sqrt{\frac{f_1(0)f_2(h)}{f_1(h)f_2(0)} - 1}}.$$

Нам остается вычислить интеграл в формуле (4.27) для собственных значений.

Введем в рассмотрение комплексное число

$$Z = f_1(s) + iQ \left( \frac{a_1}{b_2} f_2(s) - f_1(s) \right),$$

его аргумент обозначим  $\Psi(s)$ . При  $s=0$ , очевидно,  $Z = f_1(0) = a_1 > 0$ , и мы примем, что  $\Psi(0) = 0$ .

Вычислим производную функции  $\Psi(s)$ :

$$\Psi'(s) = \frac{W}{Q} \left[ \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right]^{-1}. \quad (4.30)$$

В силу выбора знака в формуле (4.29)  $\Psi'(s) > 0$  и, следовательно, с ростом  $s$  функция  $\Psi(s)$  монотонно возрастает. Обозначим через  $s_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots$ , положительные корни функции  $f_1(s)$ . Поскольку функция  $\Psi(s)$  монотонно возрастает, можно утверждать, что если

$$s_j \leq s \leq s_{j+1},$$

то

$$\pi(j-1/2) \leq \Psi(s) \leq \pi(j+1/2)$$

для всех  $j \geq 1$ .

Используя формулу (4.30), приходим к равенству

$$\frac{W}{Q} \int_0^h \left[ \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right]^{-1} ds = \int_0^h d\Psi(s) = \Psi(h).$$

Если в промежутке  $(0, h)$  функция  $f_1(s)$  имеет  $N$  нулей, то  $\Psi(h) > \pi(N - 1/2)$  и, следовательно,

$$\Psi(h) = \operatorname{arctg} Q \left( \frac{a_1}{b_2} \frac{f_2(h)}{f_1(h)} - 1 \right) + \pi N. \quad (4.31)$$

Здесь используется главная ветвь арктангенса, заключенная в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Подставляя значения  $Q$ ,  $a_1$  и  $b_1$ , формулу (4.31) можно переписать в виде

$$\Psi(h) = \operatorname{sign} \left( \frac{f_1(0)}{f_2(0)} W \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{f_1(0)f_2(h)}{f_1(h)f_2(0)} - 1} + \pi N$$

или, вспоминая (4.20), в виде

$$\Psi(h) = \operatorname{sign} \left( \frac{f_1(0)}{f_2(0)} W \right) \frac{\varphi}{2} + \pi N,$$

где  $\varphi$  — аргумент собственного числа  $\lambda_1$  матрицы  $A$ . Таким образом, мы приходим к следующей окончательной формуле для собственных значений:

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \left[ \operatorname{sign} \left( \frac{f_1(0)}{f_2(0)} W \right) \frac{\varphi}{2} + \pi N \right] \right\}. \quad (4.32)$$

Мы получили формулу для собственных значений, рассматривая только случай выполнения условия устойчивости (4.15). Для условий устойчивости (4.18) и (4.19) формула для собственных значений  $\omega_{p,q}$  может быть получена из формулы (4.32) путем предельного перехода.

В случае условия (4.18) предельный переход  $f_1(h) \rightarrow 0$ ,  $f_2(0) \rightarrow 0$  приводит к формуле

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{\pi}{2} + \pi N \right] \right\}, \quad (4.33)$$

а в случае условия (4.19) предельный переход  $\frac{f_1(0)f_2(h)}{f_1(h)f_2(0)} \rightarrow 1$  — к формуле

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \pi N \right\}. \quad (4.34)$$

## МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе методом параболического уравнения будут решены следующие задачи: о собственных функциях типа шепчущей галереи, о решениях волнового уравнения, сосредоточенных в окрестности луча, о волнах типа волновой пленки.

## § 1. Вводные замечания

В предыдущей главе лучевым методом в малом были найдены первые члены асимптотики собственных значений шепчущей галереи и прыгающего мячика. Несмотря на эвристичность лучевого метода в малом, построения главы 4 имеют большую ценность. Более точные построения настоящей главы мы проведем, используя некоторые выводы главы 4 в качестве наводящих соображений. В частности, важное значение будет иметь тот результат § 3 главы 4, что собственные функции типа шепчущей галереи сосредоточены в полоске, толщина которой при  $\rho = O(1)$  имеет порядок  $O(\omega^{-2/3})$ .

Толщина полоски, окружающей экстремальный луч области, в которой сосредоточены собственные функции типа прыгающего мячика, имеет порядок  $O(\omega^{-1/2})$ . Это следует сразу же из уравнений каустик (4.28) (гл. 4), ограничивающих эту полоску. Мы предполагаем, что в этом уравнении  $q = O(1)$ .

Таким образом, области, где сосредоточены собственные функции обоих этих типов, имеют характер пограничного слоя, толщина которого стремится к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Для искомым функций естественно попытаться вывести соответствующее уравнение пограничного слоя и искать их асимптотику, решая это уравнение. Метод уравнений пограничного слоя в дифракционных задачах хорошо разработан. Он носит по сложившейся традиции название *метода параболического уравнения* (хотя уравнение пограничного слоя в теории дифракции является уравнением типа Шредингера).

Метод параболического уравнения дает возможность получить асимптотику собственных чисел и собственных функций \*)

---

\*) Здесь (и в последующих главах) речь идет лишь о формальном построении асимптотики собственных чисел и функций. О строгом обосновании см. ниже, § 5 гл. 6.

как в случае экстремального луча, так и в случае шепчущей галереи (чем область его применимости далеко не исчерпывается).

Следует однако отметить, что метод параболического уравнения дает лишь главные члены асимптотики дифракционных задач\*). Применение этого метода осложняется еще и тем, что при выводе «параболического уравнения» не всегда можно ограничиваться главными членами уравнения и краевых условий. С этим обстоятельством впервые столкнулся В. И. Иванов в весьма интересной и важной работе [1].

## § 2. Вывод параболического уравнения для собственных функций типа шепчущей галереи

В этом и следующем параграфах мы исследуем методом параболического уравнения ту же задачу, которую мы рассматривали в § 3 главы 4, а именно задачу об асимптотике решений краевой задачи

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)}\right)u = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad u \neq 0, \quad (2.1)$$

$$u|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad (2.2)$$

имеющих характер волн типа шепчущей галереи.

Мы предположим далее, что выполнено условие положительности эффективного радиуса кривизны  $P(s)$  границы  $S$  (см. гл. 4, § 3), т. е. справедливо неравенство

$$\frac{1}{P(s)} \equiv \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1}{c_0} > 0 \quad (2.3)$$

(в обозначениях мы следуем главе 4).

Условие (2.3) обеспечивает наличие эффекта шепчущей галереи в области  $\Omega$  вблизи  $S$ . Если не требовать выполнения условия (2.3), то построение асимптотики собственных функций методом параболического уравнения, как это и следовало ожидать, не пройдет. Если вместо (2.3) выполнено неравенство с противоположным знаком, то не удастся построить решение параболического уравнения, быстро убывающее при удалении от границы  $S$  области  $\Omega$ .

Вблизи границы  $S$  области  $\Omega$  введем, как и в § 3 главы 4, координаты  $s, n$  ( $s$  — длина дуги,  $n$  — расстояние от границы  $S$

\*) От этого недостатка свободен метод, излагаемый в главах 6, 7 и 8, позволяющий находить для решений дифракционных задач полные асимптотические разложения и в некоторых случаях строго оправдывать эти разложения. Заметим еще, что методом главы 6 можно исследовать и такие задачи, которые не удавалось решить при помощи параболического уравнения.

по нормали, для точек  $\Omega$   $n < 0$ ). Используя классическое выражение для оператора Лапласа в произвольных ортогональных координатах (см. Дополнение 2), уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) \right] + \frac{\omega^2}{c^2} u \equiv \\ \equiv \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0. \quad (2.4)$$

(Напоминаем, что координаты  $s$ ,  $n$  ортогональны и параметры Ламе  $h_s$  и  $h_n$  имеют выражение (3.3) (гл. 4).)

Будем искать решения этого уравнения, имеющие характер волн, распространяющихся вдоль  $S$ , и быстро стремящиеся к нулю вне пограничной полосы. Естественно положить

$$u = U(n, s, \omega) \exp \left( i\omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right), \quad (2.5)$$

где  $s_0$  — некоторое фиксированное значение длины дуги  $s$ ,  $U(n, s, \omega)$  — функция, меняющаяся при больших  $\omega$  медленнее фазового множителя  $\exp \left[ i\omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right]$ . Эту функцию, следуя

терминологии В. А. Фока, будем называть *функцией ослабления* и выведем для нее параболическое уравнение.

Подставляя в уравнение (2.4) выражение (2.5), приходим к равенству

$$\left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right) U_{nn} + \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)^{-1} U_{ss} + \frac{1}{\rho(s)} U_n + \frac{2i\omega}{c(s, 0)} \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)^{-1} U_s + \\ + U_s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{1 + \frac{n}{\rho(s)}} \right) + i\omega U \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{c(s, 0) \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)} + \\ + \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right) \frac{1}{c^2(s, n)} - \frac{1}{1 + \frac{n}{\rho(s)}} \frac{1}{c^2(s, 0)} \right] U = 0. \quad (2.6)$$

Параболическое уравнение для  $U$  мы получим, пренебрегая в уравнении (2.6) некоторыми членами. Чтобы выяснить, какие члены в уравнении (2.6) являются главными, обратимся к §§ 1 и 3 главы 4, где было показано, что собственные функции типа шепчущей галереи сосредоточены в пограничной полосе, толщина которой имеет порядок  $O(\omega^{-2/3})$ . Поэтому естественно предположить, что множитель ослабления  $U$  существенно отличен от нуля только при значениях  $n$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq -n \leq O(\omega^{-2/3}),$$

и только для таких значений  $n$  мы и будем рассматривать уравнение (2.6).

В соответствии со сделанным предположением мы будем далее считать, что

$$U = O(1), \quad \frac{\partial U}{\partial n} = O(\omega^{2/3}), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = O(\omega^{4/3}). \quad (2.7)$$

Вычисления §§ 1 и 3 главы 4 показывают также, что с геометрико-оптической точки зрения фаза решения  $u$  не равна точно

$\omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)}$ , так как интеграл здесь берется по границе, которая хотя и близка к лучам, но все-таки лучом не является.

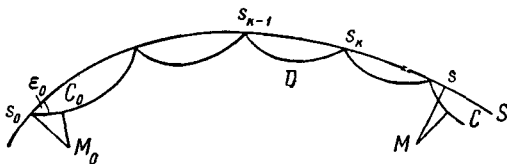


Рис. 35.

Подсчитаем порядок разности фазы решения  $u$ , подсчитанной в соответствии с лучевым методом в малом, и интеграла

$\omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)}$ . Пусть (рис. 35)  $M_0$  и  $M$  — две точки с координатами  $(s_0, n_0)$  и  $(s, n)$ , расположенные в пограничном слое, т. е.

$$0 \leq -n, \quad -n_0 \leq O(\omega^{-2/3}),$$

$M_0 C_0$  — волновой фронт, проходящий через  $M_0$ ,  $C_0$  — точка пересечения волнового фронта и луча, вышедшего из точки  $s = s_0$ ,  $n = 0$  под углом скольжения  $\epsilon_0$ . Аналогично  $MC$  — волновой фронт, проходящий через  $M$ ,  $C$  — точка пересечения волнового фронта с многократно отраженным лучом, идущим из точки  $s = s_0$ ,  $n = 0$ . Для лучей, вышедших из точки  $s = s_0$ ,  $n = 0$  и целиком принадлежащих пограничному слою, угол скольжения  $\epsilon_0$  не превосходит величины  $O(\omega^{-1/3})$ . Этот вывод следует из формулы для угла скольжения (см. § 3 гл. 4)

$$\epsilon(s) = \kappa \sqrt[3]{c(s, 0) P(s)}$$

и уравнения огибающей многократно отраженных лучей

$$n = -\frac{1}{2} [P(s) c^2(s, 0)]^{1/3} \kappa^2 + O(\kappa^3).$$



Действительно, исключая из этих двух уравнений  $\kappa$  и принимая во внимание, что для пограничного слоя  $-n$  не превосходит величины  $O(\omega^{-2/3})$ , мы и получаем неравенство  $\varepsilon(s) \leq O(\omega^{-1/3})$ . Оценим теперь длину стороны  $s_0 C_0$  бесконечно малого прямоугольного треугольника  $s_0 C_0 M_0$ :

$$|s_0 C_0| = n_0 \sin \angle s_0 M_0 C_0 = n_0 \sin \varepsilon_0 = O(\omega^{-2/3}) O(\omega^{-1/3}) = O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Полученная оценка показывает, что фаза  $u$  в точке  $M_0$  отличается от фазы в точке  $s_0$  на величину порядка

$$\omega \int_{s_0 C_0} \frac{ds}{c} \sim \omega c^{-1}(s_0, 0) |s_0 C_0| = O(1).$$

Аналогично лишь на величину порядка  $O(1)$  отличается фаза в точках  $M$  и  $s$ .

Таким образом, изменение фазы функции  $U$  при переходе от точки  $M_0$  к точке  $M$  с точностью до величин порядка  $O(1)$  равно разности

$$\omega \int_{s_0 s} \frac{ds}{c(s, n)} - \omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)},$$

где первый интеграл вычисляется вдоль дуг лучей таких, как  $s_{h-1} D s_h$ , в точках  $s_j$  отражающихся от  $S$ .

Для подсчета первого интеграла удобно воспользоваться формулой (3.6) главы 4, которая дает

$$\begin{aligned} \omega \int_{s_0 s} \frac{ds}{c(s, n)} - \omega \int_{s_0}^s \frac{ds}{c(s, 0)} &= \omega \int_{s_0}^s \left( \Phi\left(s, n, \frac{dn}{ds}\right) - \frac{1}{c(s, 0)} \right) ds \approx \\ &\approx \int_{s_0}^s \frac{1}{c_0(s)} \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] \omega n ds = \int_{s_0}^s O(\omega^{1/3}) ds, \end{aligned}$$

так как на лучах  $n = O(\omega^{-2/3})$ .

Таким образом, геометрико-оптический анализ показывает, что фазовый множитель функции  $U$  имеет вид  $\exp \left[ i \int_{s_0}^s O(\omega^{1/3}) ds \right]$ , поэтому мы будем предполагать справедливыми оценки

$$\frac{\partial U}{\partial s} = O(\omega^{1/3}), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = O(\omega^{2/3}). \quad (2.8)$$

Пользуясь соотношениями (2.7) и (2.8), можно выделить в уравнении (2.6) главные члены (они будут иметь порядок

$O(\omega^{4/3})$  и  $O(\omega)$ ). Вычеркивая оставшиеся члены (они будут иметь порядок самое большее  $O(\omega^{2/3})$ ), получим параболическое уравнение задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{2i\omega}{c(s)} \frac{\partial U}{\partial s} + i\omega U \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{c(s)} + \omega^2 n \frac{2}{c^2(s)} \frac{U}{P(s)} = 0, \quad (2.9)$$

где  $P(s)$  — эффективный радиус кривизны (см формулу (2.3)) и  $c(s) \equiv c(s, 0) = c_0(s)$ .

Разделению переменных в уравнении (2.9) препятствует последний член. Следующий параграф в основном и будет посвящен преобразованию уравнения (2.9) к виду, допускающему разделение переменных.

### § 3. Решение параболического уравнения (2.9).

#### Асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи

В процессе преобразования уравнения (2.9) мы будем пренебрегать членами порядка  $O(\omega^{2/3})$ . Поскольку уравнение (2.9) отличается от исходного уравнения (2.6) на члены именно такого порядка, это не внесет дополнительной погрешности.

Введем новую переменную

$$v = n\omega^{2/3}\eta(s), \quad (3.1)$$

где  $\eta(s)$  — функция, подлежащая определению. В отличие от бесконечно малой при  $\omega \rightarrow \infty$  переменной  $n = O(\omega^{-2/3})$  переменная  $v = O(1)$ . Уравнение (2.9) можно переписать в виде

$$\omega^{4/3} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \frac{2v}{c^2(s)\eta^3(s)P(s)} U \right] + \frac{i\omega}{c(s)\eta^2(s)} \left[ 2 \frac{\partial U}{\partial s} + 2v \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{c'(s)}{c(s)} U \right] = 0.$$

Если положить

$$\eta(s) = \sqrt[3]{\frac{2}{c^2(s)P(s)}}, \quad (3.2)$$

то старшие члены (порядка  $O(\omega^{4/3})$ ) уже составят оператор с разделяющимися переменными. Мешать разделению переменных будет только член  $\frac{i\omega}{c\eta^2} 2v \frac{\eta'}{\eta} \frac{\partial U}{\partial v}$  порядка  $O(\omega)$ . Чтобы избавиться от него, сделаем подстановку

$$U = \exp(iv^2\omega^{-1/3}\Phi(s))V(v, s, \omega), \quad (3.3)$$

где функция  $\Phi(s)$  подлежит определению.

Подставляя вместо  $U$  выражение (3.3) и пренебрегая выражениями порядка  $O(\omega^{2/3})$ , получим

$$\omega^{4/3} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + 4i\nu\omega^{-1/3}\Phi \frac{\partial V}{\partial v} + 2i\omega^{-1/3}\Phi V + \nu V \right) + \frac{i\omega}{c} \left( \frac{c^2 P}{2} \right)^{2/3} \left( 2 \frac{\partial V}{\partial s} + 2\nu \frac{\partial V}{\partial v} \frac{(c^{2/3} P^{1/3})'}{c^{2/3} P^{1/3}} - \frac{c'}{c} V \right) = 0.$$

Выберем  $\Phi(s)$  таким образом, чтобы уравнение не содержало членов  $\nu \frac{\partial V}{\partial v}$ . Очевидно, следует положить

$$\Phi = \frac{1}{4c} \frac{d}{ds} \left( \frac{c^2 P}{2} \right)^{2/3}. \quad (3.4)$$

Полученное в результате уравнение

$$\omega^{4/3} (V_{vv} + \nu V) + \frac{2i\omega}{c} \left( \frac{c^2 P}{2} \right)^{2/3} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{i\omega}{3c} \left( \frac{c^2 P}{2} \right)^{2/3} V \frac{d}{ds} \ln \left( \frac{P}{c} \right) = 0 \quad (3.5)$$

уже допускает разделение переменных. Действуя по классической схеме метода разделения переменных, приходим к выражению

$$V = \omega (-\gamma - \nu) \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_{s_0}^s \frac{ds}{c^{1/3} P^{2/3}} \right] \left( \frac{c}{P} \right)^{1/6}. \quad (3.6)$$

Здесь  $\omega$  — произвольное решение уравнения Эйри  $\omega''_{tt} = t\omega$ ,  $\gamma$  — постоянная разделения и  $s_0$  — некоторое фиксированное значение длины дуги  $s$ , в дальнейшем положим  $s_0 = 0$ .

Собирая воедино подстановки (2.5) и (3.3), для решения  $u$  исходного уравнения (2.4) получаем приближенную формулу

$$u = V \exp(i\nu^2 \omega^{-1/3} \Phi(s)) \exp \left( i\omega \int_0^s \frac{ds}{c} \right), \quad (3.7)$$

в которой  $V$ ,  $\nu$  и  $\Phi$  определяются соответственно формулами (3.6), (3.1) и (3.4). Функция  $u$  должна сосредоточиваться при  $\omega \rightarrow \infty$  в пограничной полоске, поэтому в качестве решения уравнения Эйри следует выбрать функцию  $v(-\gamma - \nu)$  (см. Дополнение 1).

В самом деле, из формул (3.1), (3.2) и того обстоятельства, что  $P(s) > 0$ , следует, что при  $\gamma = O(1)$  и  $-\nu\omega^{2/3} \rightarrow +\infty$  аргумент функции Эйри  $-\gamma - \nu$  тоже будет стремиться к бесконечности (напомним, что  $n < 0$ ). Из асимптотической формулы для функции  $v$  следует, что  $v(-\gamma - \nu) \rightarrow 0$  при  $-\gamma - \nu \rightarrow \infty$ ,

а поэтому и  $u \rightarrow 0$ . Заметим, что положительность эффективного радиуса кривизны используется только в этом месте.

Если потребовать, чтобы функция  $u$  удовлетворяла краевым условиям (2.2), мы получим, что в случае краевого условия  $u|_s = 0$  параметр  $\gamma$  должен быть корнем функции  $v(-t)$ , а в случае краевого условия  $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0$  — соответственно корнем производной  $v'(-t)$  (см. Дополнение 1), т. е. в формуле (3.6) следует положить

$$\gamma = \gamma_p = t_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{в случае } u|_s = 0 \quad (3.8)$$

и

$$\gamma = \gamma_p = t'_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{в случае } \frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0. \quad (3.9)$$

Окончательно получаем

$$u = \left(\frac{c}{P}\right)^{1/6} \exp\left(i\omega \int_0^s \frac{ds}{c}\right) v(-\gamma_p - \nu) \times \\ \times \exp\left[-\gamma_p t \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/3} \int_0^s \frac{ds}{c^{1/3} P^{2/3}}\right] \exp(i\nu^2 \omega^{-1/3} \Phi(s)). \quad (3.10)$$

Интересно отметить одно обстоятельство. Уравнение Эйри  $v''(t) - tv(t) = 0$  имеет точкой поворота  $t = 0$ : при  $t > 0$  функция  $v(t)$  монотонно стремится к нулю, при  $t < 0$   $v(t)$  имеет колебательный характер. Таким образом, при  $-\nu < \gamma_p$  решение (3.10) имеет колебательный характер, при  $-\nu > \gamma_p$  быстро убывает. Уравнение кривой  $-\nu = \gamma_p$ , используя формулы (3.1), (3.2), можно записать в виде

$$n = -\omega^{-2/3} \sqrt[3]{\frac{c^2 P(s)}{2}} \gamma_p. \quad (3.11)$$

Если (формально) в соотношении (3.11) заменить  $\gamma_p$  на асимптотику  $p$ -го корня функции  $v'(t)$

$$\gamma_p \approx \left[\frac{3\pi}{2} \left(p + \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3},$$

то формула (3.11) совпадает с формулами (3.21) и (3.24) главы 4 (в формуле (3.21) следует подставить вместо  $\kappa$  его выражение, которое вытекает из второго условия квантования (3.22) главы 4). Таким образом, на (3.11) можно смотреть как на уточненное уравнение каустики, что, разумеется, и следовало ожидать, так как каустика, так же как и кривая (3.11), отделяет волновую зону от зоны тени, где решение быстро убывает.

Пусть теперь  $S$  — граница конечной \*) области  $\Omega$ . Функция  $u$  должна быть однозначной функцией вблизи  $S$ . Пусть  $L$  — длина контура  $S$ . Требование однозначности, очевидно, приводит к периодичности  $u(s, n)$  с периодом  $L: u(s + L, n) \equiv u(s, n)$ . Потребовав периодичности функции  $u$ , имеющей выражение (3.10), мы легко получим искомые формулы для собственных чисел и собственных функций.

Отбрасывая в (3.10) множитель  $\exp[iv^2\omega^{-1/3}\varphi(s)]$ , который в силу определения функции  $\varphi(s)$  при любых  $\omega$  имеет период  $L$ , и требуя периодичности остающегося выражения, получим равенство

$$\omega_{pq} \int_0^L \frac{ds}{c} - \gamma_p \left( \frac{\omega_{pq}}{2} \right)^{1/3} \int_0^L \frac{ds}{c^{2/3} p^{2/3}} = 2\pi q \quad (q - \text{целое} \gg 1), \quad (3.12)$$

откуда при больших  $\omega_{pq}$

$$\int_0^L \frac{ds}{c} \omega_{pq} = 2\pi q + \gamma_p \int_0^L \frac{ds}{c^{1/3} p^{2/3}} \left( \frac{L}{\int_0^L \frac{ds}{c}} \right)^{1/3} + \dots, \quad (3.13)$$

где  $\gamma_p = t_p$  или  $\gamma_p = t'_p$  (см. (3.8) и (3.9)). Лучевой метод в малом приводит к аналогичной формуле ((3.23) главы 4). Подставляя выражение (3.13) в формулу (3.10), получим асимптотику собственной функции, соответствующей собственному числу  $\omega_{pq}$ . (Дальнейшие члены асимптотики собственных чисел  $\omega_{pq}$  и функций  $u_{pq}$  можно найти методами главы 6.)

#### § 4. Вывод основного параболического уравнения задачи в случае, когда $S$ — луч

Пусть теперь кривая  $S$  имеет бесконечный эффективный радиус кривизны, т. е. сама является лучом.

Рассмотрим сначала вопрос об асимптотике решений  $u$  уравнения

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} \right) u = 0, \quad (4.1)$$

существенно отличных от нуля в окрестности кривой  $S$  и быстро убывающих по мере удаления от нее. В противоположность §§ 2, 3 мы не будем считать  $S$  границей области. Окрестность кривой  $S$  — теперь внутренний пограничный слой, и на  $S$  не будут задаваться никакие краевые условия. С такой задачей мы

\*) До сих пор конечность области  $\Omega$  нигде не использовалась.

уже встречались в предыдущей главе, когда рассматривали вопрос о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности экстремального луча  $CD$  области  $\Omega$  (см. § 4 гл. 4).

Итак, пусть  $S$  — луч, и решение  $u$  уравнения (4.1) при больших  $\omega$  сосредоточено в окрестности  $S$ . Точно также, как и в предыдущих параграфах, все вычисления мы будем вести в координатах  $(s, n)$ , где  $s$  — длина дуги кривой  $S$ , отсчитываемая от фиксированной точки,  $n$  — расстояние по нормали от  $S$  (причем с одной стороны  $S$  мы считаем  $n > 0$ , с другой  $n < 0$ ).

Рассмотрение собственных функций, сосредоточенных вблизи экстремального луча области (см. § 4 гл. 4), наводит на мысль, что функция  $u$  будет сосредоточена в полоске

$$|n| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right), \quad (4.2)$$

точнее,  $u$  должно иметь осциллирующий характер в полоске между каустиками, уравнение которых имеет вид (4.28) (гл. 4)

$$|n| = n(s) = -\frac{\sqrt{2q+1}}{\sqrt{\omega}} \left| \frac{Q}{W} \left| \sqrt{c_0(s)} \right| \frac{a_2}{b_1} f_1^2(s) - 2f_1(s)f_2(s) + \frac{a_1}{b_2} f_2^2(s) \right|^{1/2}, \quad (4.3)$$

где  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  — определенным образом выбранные линейно независимые решения уравнения (4.3) главы 4,

$$Q = \left( \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - 1 \right)^{-1/2},$$

$$W = f_1 f_2' - f_2 f_1' = \text{const}, \quad a_j = \text{const}, \quad b_j = \text{const}, \quad \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} > 1.$$

При  $|n| > n(s)$  функция  $u$  должна переходить от осцилляции к экспоненциальному убыванию при  $\omega \rightarrow \infty$ . Выделяя фазовый множитель, будем искать  $u$  в виде

$$u = U(n, s, \omega) \exp\left(i\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)}\right), \quad (4.4)$$

где  $U$  — функция ослабления.

Если принять, что

$$U = O(1), \quad (4.5)$$

то, учитывая неравенство (4.2), естественно считать, что

$$\frac{\partial U}{\partial n} = O(\sqrt{\omega}), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = O(\omega). \quad (4.6)$$

Поскольку в рассматриваемом случае кривая  $S$  является лучом, фаза  $u$ , по крайней мере на самой кривой  $S$ , опреде-

ляется выражением  $\omega \int_0^s c^{-1} ds$ , содержащимся в показателе экспоненты в формуле (4.4) (в этом существенное отличие этого случая от случая шепчущей галереи). Естественно поэтому считать, что вдоль кривой  $S$  функция ослабления меняется плавно, и

$$\frac{\partial U}{\partial s} = O(1), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = O(1). \quad (4.7)$$

Подставив в уравнение (4.1) выражение (4.4) для  $u$ , мы опять приходим к уравнению (2.6). В противоположность случаю шепчущей галереи, коэффициент при  $U$ , если устремить  $n$  к нулю, будет иметь порядок  $O(n^2)$ .

Соотношения (4.5) — (4.7) показывают, что в уравнении (2.6) при выполнении условия (4.2) главные члены будут иметь порядок  $O(\omega)$ , затем идут члены порядка  $O(\sqrt{\omega})$ ,  $O(1)$ ,  $O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)$  и т. д. Пренебрегая членами порядка  $O(\sqrt{\omega})$  и ниже, после несложных выкладок приходим к основному параболическому уравнению задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{2i\omega}{c(s)} \frac{\partial U}{\partial s} + i\omega U \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{c(s)} - \omega^2 n^2 \Phi U = 0, \quad (4.8)$$

$$\left( \Phi = \frac{c_{nn}(s)}{c^3(s)}, \quad c(s) = c(s, 0), \quad c_{nn}(s) = \frac{\partial^2 c(s, n)}{\partial n^2} \Big|_{n=0} \right).$$

## § 5. Решение параболического уравнения (4.8)

Функцию  $U$ , удовлетворяющую уравнению (4.8), можно выразить через решения обыкновенных дифференциальных линейных уравнений.

Действуя по аналогии с § 3, введем новую независимую переменную

$$v = n \sqrt{\omega} \eta(s), \quad (5.1)$$

где  $\eta(s)$  — функция, подлежащая определению.

Уравнение (4.8) примет вид

$$\omega \left[ U_{vv} + \frac{2i\eta'}{c\eta^3} v U_v + \frac{2i}{\epsilon\eta^2} U_s - \left( v^2 \frac{\Phi}{\eta^4} + \frac{ic'}{c^2\eta^2} \right) U \right] = 0. \quad (5.2)$$

Разделению переменных в этом уравнении препятствуют члены, содержащие  $v U_v$  и  $v^2 U$ . Одним лишь выбором функции  $\eta(s)$  привести уравнение к виду, допускающему разделение переменных, нельзя. Пусть

$$U(n, s, \omega) = V(v, s, \omega) e^{i v^2 h(s)}, \quad (5.3)$$

где функция  $h(s)$  подлежит определению. Подставляя выражение (5.3) для  $U$  в (5.2), получим уравнение для  $V$ :

$$V_{vv} + 4iv \left( h + \frac{\eta'}{2c(s)\eta^3} \right) V_v + \frac{2i}{c(s)\eta^2} V_s - \\ - v^2 \left[ 4h^2 + \frac{4h\eta'}{\eta^3 c(s)} + \frac{2h'}{\eta^2 c(s)} + \frac{\Phi}{\eta^4} \right] V + i \left( 2h - \frac{c'(s)}{c(s)\eta^2} \right) V = 0. \quad (5.4)$$

Для разделения переменных в этом уравнении достаточно подчинить функции  $\eta$  и  $h$  соотношениям

$$h + \frac{\eta'}{2c\eta^3} = 0, \quad (5.5)$$

$$4h^2 + \frac{4h\eta'}{c\eta^3} + \frac{2h'}{c\eta^2} + \frac{1}{\eta^4} \Phi = 1. \quad (5.6)$$

Из уравнения (5.5) выразим  $h(s)$  и подставим в (5.6). Для  $\eta(s)$  получится нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Если от функции  $\eta(s)$  перейти к другой искомой функции  $\sigma(s)$  по формуле

$$\eta(s) = \frac{1}{\sqrt{c(s)\sigma(s)}}, \quad (5.7)$$

то придем к более простому дифференциальному уравнению

$$\sigma''(s) + K(s)\sigma(s) = \frac{1}{\sigma^3(s)}, \quad (5.8)$$

в котором

$$K(s) = c^2\Phi + \frac{1}{2} \frac{c''}{c} - \frac{3}{4} \frac{c'^2}{c^2}, \quad (5.9)$$

где

$$\Phi = \frac{c_{nn}(s)}{c^3(s)}, \quad c' = \left. \frac{\partial c(s, n)}{\partial s} \right|_{n=0}, \quad c'' = \left. \frac{\partial^2 c(s, n)}{\partial s^2} \right|_{n=0}.$$

Если вещественная отличная от нуля функция  $\sigma$ , удовлетворяющая уравнению (5.8), найдена, то, согласно формулам (5.5) и (5.7), имеем

$$h(s) = \frac{\sigma^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{c'}{c} + \frac{\sigma'}{\sigma} \right], \quad (5.10)$$

а уравнение (5.4) переписется в виде

$$V_{vv} - v^2 V + 2i\sigma^2(s)V_s + i\sigma^2(s) \left( \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} + \frac{1}{2} \frac{c'}{c} \right) V = 0. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) допускает разделение переменных. Его решения (с точностью до постоянного множителя) имеют вид

$$V(v, s, \omega) = \frac{c^{1/4}(s)}{\sqrt{\sigma(s)}} \exp \left( \frac{\lambda}{2i} \int_0^s \frac{ds}{\sigma^2(s)} \right) D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}v), \quad (5.12)$$



где  $\lambda$  — постоянная разделения, а  $D_q(z)$  — функция параболического цилиндра, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 D_q(z)}{dz^2} + \left( q + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) D_q(z) = 0. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.3), (5.10), (5.12) в (4.4), получаем

$$u = \frac{c^{1/4}(s)}{\sqrt{\sigma(s)}} \exp \left[ i\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s)} + \frac{1}{2} iv^2 \sigma^2(s) \left( \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} + \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} \right) + \frac{\lambda}{2i} \int_0^s \frac{ds}{\sigma^2(s)} \right] D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}v). \quad (5.14)$$

Найдем теперь асимптотику (при  $\omega \rightarrow \infty$ ) решений, исчезающих при  $|v| \rightarrow \infty$  (по обе стороны от кривой  $S$ ). Уравнение (5.13) имеет решения, стремящиеся к нулю как при  $z \rightarrow \infty$ , так и при  $z \rightarrow -\infty$  при  $q = 0, 1, 2, \dots$  и только при этих  $q$ . Соответствующие решения имеют вид

$$D_q(z) = 2^{-q/2} e^{-z^2/4} H_q\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

где  $H_q(z)$  — полином Эрмита \*). Поэтому в формуле (5.14) необходимо положить  $\lambda = 2q + 1$ . В результате получаем асимптотические формулы для решений уравнения (4.1), сосредоточенных в окрестности заданного луча  $S$  и стремящихся к нулю при удалении от него в обе стороны

$$u_q = C_q \frac{c^{1/4}(s)}{\sqrt{\sigma(s)}} \exp \left[ i\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s)} + \frac{iv^2 \sigma^2(s)}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} + \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} \right) - i \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^s \frac{ds}{\sigma^2(s)} \right] D_q(\sqrt{2}v). \quad (5.15)$$

В формуле (5.15)  $C_q$  — произвольная постоянная, величина  $v$  определена равенствами (5.1) и (5.7), функция  $\sigma(s)$  является решением нелинейного уравнения (5.8).

Покажем, что функция  $\sigma(s)$  выражается через два линейно независимых решения линейного уравнения

$$y''(s) + K(s)y(s) = 0. \quad (5.16)$$

Тем самым решение нелинейного уравнения (5.8) сводится к решению более простого линейного уравнения (5.16). Связь функции  $\sigma(s)$  с решениями уравнения (5.16) мы установим,

\*) См В. И. Смирнов [2].

опираясь на геометро-оптические соображения. Эти наводящие геометро-оптические соображения состоят в следующем.

Функция  $\psi(v) = D_q(\sqrt{2}v)$  удовлетворяет уравнению

$$\psi''_{vv} + (2q + 1 - v^2)\psi = 0,$$

имеющему две точки поворота

$$v = \pm \sqrt{2q + 1}, \quad (5.17)$$

при  $|v| < \sqrt{2q + 1}$  функция  $\psi(v)$  имеет осциллирующий характер, при  $|v| > \sqrt{2q + 1}$   $|\psi(v)|$  монотонно убывает с возрастанием  $|v|$ , стремясь к нулю при  $v \rightarrow \pm\infty$ . Подставляя в формулу (5.17) вместо  $v$  его значение (см. равенства (5.1), (5.7)), приходим к выводу, что при удалении от  $S$ , т. е. при увеличении  $|n|$ , функция  $u$  сначала имеет осциллирующий характер, а начиная с

$$|n| = \frac{\sigma(s)}{\sqrt{\omega}} \sqrt{c(s)} \sqrt{2q + 1} \quad (5.18)$$

переходит к убыванию.

Обратимся к лучевой трактовке задачи об экстремальном луче области (§ 4 гл. 4). Каустики (4.3) — это кривые, между которыми соответствующая функция  $u$  осциллирует, а вне полосы, ими ограниченной, стремится к нулю (при  $\omega \rightarrow \infty$ ). Возникает мысль о тождестве кривых (4.3) и (5.18). Это сейчас же приводит к равенству

$$\sigma(s) = \left\{ \frac{a_2}{b_1} f_1^2 - 2f_1 f_2 + \frac{a_1}{b_2} f_2^2 \right\}^{1/2} \frac{1}{W \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - 1}}, \quad (5.19)$$

где

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} > 1, \quad W = W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_1' f_2 = \text{const}$$

и  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ , — специальным образом выбранные линейно независимые решения уравнения (5.16). Непосредственной проверкой можно убедиться, что действительно функция (5.19) является решением уравнения (5.8).

Обобщением этого результата является

Теорема 1. Если симметричная матрица  $\|a_{ik}\|$ ,  $i, k = 1, 2$ , и фундаментальная система решений  $y_1, y_2$  уравнения (5.16) связаны условием

$$\det \|a_{ik}\| W^2(y_1, y_2) = 1; \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{const}, \quad (5.20)$$

то функция

$$\sigma(s) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} y_i y_k} \quad (5.21)$$

является решением уравнения (5.8).

Имеет место также

Теорема 2. *Каковы бы ни были начальные данные*

$$\sigma(s)|_{s=s_0} = c_1 \neq 0, \quad \sigma'(s)|_{s=s_0} = c_2, \quad (5.22)$$

существует такая матрица  $\|a_{ik}\|$ , удовлетворяющая условию нормировки (5.20), что функция  $\sigma(s)$ , определяемая формулой (5.21), дает решение уравнения (5.8), удовлетворяющее условиям (5.22).

Доказательство этих теорем элементарно и содержится в Дополнении 3.

## § 6. О колебаниях типа волновой пленки

Пусть  $S$  — поверхность в трехмерном пространстве, сотканная из лучей, т. е. поверхность, образованная лучами (экстремальными функционала Ферма  $\int \frac{ds}{c(x, y, z)}$ ), выходящими из каждой точки некоторой кривой  $AB$ . Точнее, мы считаем, что уравнение поверхности  $S$  можно представить параметрически в виде  $r = r(\alpha, \tau)$ ,  $[r_\alpha, r_\tau] \neq 0$  и при фиксированном  $\alpha$  кривая  $r = r(\alpha, \tau)$  есть луч, параметром на котором выбран эйконал. Координатная сетка  $\alpha, \tau$  ортогональна. Далее мы ограничимся регулярным случаем, т. е. будем предполагать, что все участвующие в рассмотрении функции, кривые и поверхности достаточно гладкие.

Методом параболического уравнения будет построена так называемая *волна типа волновой пленки*, т. е. такая функция, которая сосредоточена в окрестности поверхности  $S$  и с точностью до главных членов по  $\omega$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ) удовлетворяет уравнению  $(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2})u = 0$ . Толщина окрестности поверхности  $S$ , где рассматриваемое решение уравнения Гельмгольца существенно отлично от нуля, стремится к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Выберем на  $S$  следующую систему координат: в качестве координатных линий возьмем лучи, составляющие  $S$ , другую систему координатных линий составят ортогональные траектории к этому семейству лучей, т. е. волновые фронты на  $S$ .

Пусть параметр  $\alpha$  характеризует лучи, эйконал  $\tau = \int \frac{ds}{c}$  (интеграл берется вдоль луча) — точки на лучах. В качестве

третьей координаты возьмем  $n$  — расстояние по нормали от  $S$  (с одной стороны  $S$  считаем, что  $n > 0$ , с другой  $n < 0$ ). Связь декартовых координат  $(x, y, z)$  с криволинейными  $\alpha, \tau, n$  дается формулой

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}(\alpha, \tau) + n\mathbf{n}(\alpha, \tau), \quad \mathbf{X} = (x, y, z), \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к  $S$ . Полагая в (6.1)  $n = 0$ , получим  $\mathbf{X} = \mathbf{r}(\alpha, \tau)$  — параметрическое задание поверхности  $S$ .

Ниже будет использовано выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах  $q^1, q^2, q^3$ :

$$\Delta(\dots) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left( G^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial(\dots)}{\partial q^j} \right); \quad G = \det \| G_{ij} \|. \quad (6.2)$$

Здесь  $G_{ij}$  — метрический тензор, матрица  $\| G^{ij} \|$  обратна матрице  $\| G_{ij} \|$  (см. Дополнение 2).

В случае координат  $\alpha, \tau, n$  матрица  $\| G_{ij} \|$  имеет выражение

$$\| G_{ij} \| = \begin{vmatrix} G_{\alpha\alpha} & G_{\alpha\tau} & 0 \\ G_{\tau\alpha} & G_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha} &= |\mathbf{r}_\alpha|^2 + 2(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)n + n_\alpha^2 n^2; \\ G_{\tau\tau} &= |\mathbf{r}_\tau|^2 + 2(\mathbf{r}_\tau, \mathbf{n}_\tau)n + n_\tau^2 n^2; \\ G_{\alpha\tau} &= G_{\tau\alpha} = 2(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}_\tau)n + (\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\tau)n^2. \end{aligned}$$

Пусть  $u$  — решение уравнения

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u = 0$$

( $c$  — скорость, вообще говоря, переменная). Будем считать, что  $u$  описывает волну, при больших  $\omega$  существенно отличную от нуля только в окрестности  $S$  и распространяющуюся вдоль  $S$ . Рассматриваемая нами задача является трехмерным аналогом задачи, которой посвящены §§ 4 и 5.

Полагая, как обычно,  $u = e^{i\omega\tau} V$ , придем к уравнению

$$\Delta(Ve^{i\omega\tau}) + \frac{\omega^2}{c^2} Ve^{i\omega\tau} = 0. \quad (6.4)$$

Будем считать, что

$$|n| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right), \quad \frac{\partial^{k+h+m} V}{\partial \tau^k \partial \alpha^h \partial n^m} = O(\omega^{m/2}).$$

Как нетрудно убедиться с помощью несложных подсчетов, главные члены в левой части формулы (6.4) имеют порядок  $O(\omega)$ . Приравнявая эти главные члены нулю, получим основное

параболическое уравнение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + 2i\omega g^{\tau\tau} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{i\omega}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{g} g^{\tau\tau}) V + \\ + \left( -\frac{c_{nn}}{c^3} \Big|_{n=0} - \frac{3}{c^4} \Big|_{n=0} \frac{(r_\alpha, n_\tau)^2}{|r_\alpha|^2} \right) n^2 \omega^2 V = 0, \quad (6.5) \\ g^{\tau\tau} = G^{\tau\tau} \Big|_{n=0}, \quad g = G \Big|_{n=0}. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что рассматриваемая задача трехмерная, параболическое уравнение здесь имеет двумерный характер: в уравнении (6.5) нет дифференцирования по  $\alpha$ .

Обозначим  $|r_\alpha| = J$ . Так же, как и в главе 1, величина  $J$  имеет смысл расходимости поля лучей (см. § 3 гл. 1). Далее, воспользовавшись формулой (6.3) и очевидным равенством  $|r_\tau| = c$ , уравнение (6.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial V}{\partial s} + i\omega \left[ \frac{1}{Jc} \frac{dJ}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{1}{c} \right] V - \omega^2 n^2 \Phi V = 0, \quad (6.6) \\ \Phi = \frac{c_{nn}}{c^3} + \frac{3(r_\alpha, n_s)^2}{c^2 J^2}, \quad (6.7) \\ c = c(\alpha, \tau, n) \Big|_{n=0} = c(\alpha, \tau, 0) \end{aligned}$$

(вместо дифференцирования по  $\tau$  мы перешли к дифференцированию по длине дуги луча  $S$ :  $\frac{d}{ds} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\tau}$ ). Сделав в уравнении (6.6) подстановку  $V = \frac{1}{\sqrt{J}} U$ , нетрудно убедиться, что оно перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + 2i\omega \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial s} + i\omega U \frac{d}{ds} \frac{1}{c} - \omega^2 n^2 \Phi U = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) отличается от уравнения (4.8) только выражением для  $\Phi$ . Поэтому для  $u \sqrt{J} = e^{i\omega\tau} U$  имеет место формула, отличающаяся от (5.15) лишь заменой  $\exp(i\omega \int_0^s c^{-1}(s) ds)$  на  $\exp(i\omega\tau)$  и новым значением  $\Phi$  в уравнении (5.8) для  $\sigma(s)$ .

Покажем, что для волн рассматриваемого здесь типа, энергия в первом приближении распространяется по лучам.

Уточним это утверждение. В том случае, когда волновой процесс описывается уравнением

$$\frac{1}{\sigma^2(M)} W_{\alpha\alpha} - \Delta W = 0,$$

плотность энергии равна

$$\frac{1}{2} \frac{1}{c^2(M)} W_t \bar{W}_t + \frac{1}{2} (W_x \bar{W}_x + W_y \bar{W}_y + W_z \bar{W}_z)$$

(черта означает комплексное сопряжение).

Рассмотрим энергию  $dE$ , заключенную в малом объеме

$$\begin{aligned} \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + d\alpha_0, \quad t \leq \tau \leq t + d\tau, \\ -n_1 \leq n \leq n_1, \quad n_1 = O(1) > 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

(здесь  $t$  — время). При подсчете  $dE$  воспользуемся выражением для  $W$ , вытекающим из формулы  $W = \frac{U}{\sqrt{J}} \exp[-i\omega(t - \tau)]$ .

Вычисления будем вести с точностью до главных членов по  $\omega$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Мы легко получим

$$dE = |C_q(\alpha)|^2 \frac{\sqrt{c}}{J\sigma} \int_{-n_1}^{n_1} D_q^2 \left( \sqrt{\frac{2\omega}{c}} \frac{n}{\sigma} \right) dn \frac{J\omega^2 d\tau d\alpha}{c}.$$

Пределы интегрирования  $(-n_1, n_1)$  можно заменить на  $(-\infty, +\infty)$ , так как это добавит к рассматриваемому выражению только малые члены (напоминаем, что  $n_1 = O(1) > 1$  и что  $D_q(\sqrt{2} \nu)$  экспоненциально стремится к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$ ).

Производя замену переменных  $\sqrt{\omega} \frac{n}{\sigma \sqrt{c}} = \zeta$ , придем к формуле

$$dE = |C_q(\alpha)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} D_q^2(\sqrt{2} \zeta) d\zeta \omega^{3/2} d\tau d\alpha = |C_q|^2 \omega^{3/2} q! \sqrt{2\pi} d\tau d\alpha.$$

Это выражение зависит только от луча. Таким образом, энергия  $dE$ , заключенная в объеме (6.9), не меняется, когда он движется (со скоростью  $c$ ) вдоль луча.

Покажем еще, что волны типа волновой пленки можно отражать, причем после отражения опять получаются волны типа волновой пленки.

Пусть на некоторую поверхность  $\Sigma$  падает волна  $u_1$  типа волновой пленки. Предположим, что  $\Sigma$  и  $S_1$  ( $S_1$  — поверхность, в окрестности которой сосредоточена падающая волна) пересекаются под ненулевыми углами.

Потребуем, чтобы на поверхности  $\Sigma$  выполнялось краевое условие  $u|_{\Sigma} = 0$  (случай краевого условия  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$  можно

было бы рассмотреть аналогично). Отраженную волну  $u_2$  естественно искать в таком виде, чтобы сумма  $u_1 + u_2$  удовлетворяла краевому условию  $u|_{\Sigma} = 0$ . Оказывается, что такому краевому условию можно удовлетворить (в главных членах при  $\omega \rightarrow \infty$ ), если  $u_2$  тоже искать в виде волновой пленки. В самом деле, пусть

$$u_1 + u_2 = \sum_{j=1}^2 C_j(\alpha_j) \frac{1}{\sqrt{J_j}} \frac{c_j'^{1/4}}{\sqrt{\sigma_j}} \exp \left[ i\omega\tau_j + \right. \\ \left. + \frac{iv_j^2\sigma_j^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{c_j'}{c_j} + \frac{\sigma_j'}{\sigma_j} \right) - i \left( q_j + \frac{1}{2} \right) \int \frac{ds}{\sigma_j^2(s)} \right] D_{q_j}(\sqrt{2} v_j). \quad (6.10)$$

Все величины, относящиеся к падающей (отраженной) волне, мы отмечаем индексом 1 (2), интегралы берутся вдоль лучей. Пусть  $l$  — пересечение  $S_1$  и  $\Sigma$ ; величина  $\gamma = \gamma(M)$  ( $M \in \Sigma$ ) — расстояние вдоль  $\Sigma$  от точки  $M \in \Sigma$  до  $l$ . Расстояние  $\gamma(M)$  считается положительным с одной стороны  $l$  и отрицательным с другой.

Для совпадения наиболее быстро осциллирующих множителей в выражениях для  $u_1$  и  $u_2$  необходимо выполнение равенств

$$\tau_1|_l = \tau_2|_l, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \gamma} \Big|_l = \frac{\partial \tau_2}{\partial \gamma} \Big|_l;$$

их легко получить, разлагая  $\tau$  (см. (6.10)) по степеням  $\gamma$ . Эти условия эквивалентны тому, что поверхности  $S_j$  падающих и отраженных волновых пленок пересекаются с  $\Sigma$  под равными углами, т. е. поверхность  $S_2$  отраженной волновой пленки образуют лучи падающей волновой пленки, если их по закону геометрической оптики отразить от  $\Sigma$ . Приравниваем далее те слагаемые под знаком  $\exp$ , которые имеют порядок  $O(1)$ :

$$\frac{i}{2} \omega \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial \gamma^2} \Big|_{\gamma=0} \gamma^2 + i \frac{v_j^2 \sigma_j^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{c_j'}{c_j} + \frac{\sigma_j'}{\sigma_j} \right), \quad j = 1, 2. \quad (6.11)$$

Первый член здесь получился за счет разложения  $\tau_j$  на  $\Sigma$  по степеням  $\gamma$ . Пользуясь формулами (5.1), (5.7) и существованием на  $\Sigma$  конечных пределов

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{n_j}{\gamma}, \quad j = 1, 2,$$

из равенства выражений (6.11) нетрудно найти  $\frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial s} \Big|_l$ . Для

совпадения множителей  $D_{q_i}(\sqrt{2}v_i)$  следует положить  $q_1 = q_2$  и  $\frac{\partial v_1}{\partial \gamma} \Big|_l = \frac{\partial v_2}{\partial \gamma} \Big|_l$ . Последнее равенство эквивалентно соотношению

$$\sigma_1 \Big|_l = \sigma_2 \Big|_l. \quad (6.12)$$

Итак, на  $l$  известна функция  $\sigma_2$  и ее производная  $\frac{\partial \sigma_2}{\partial s}$ . Напомним, что  $\sigma_2$  есть решение дифференциального уравнения (5.8), где  $\Phi$  имеет вид (6.8). Задание начальных данных  $\sigma_2 \Big|_l$  и  $\sigma_2' \Big|_l$  однозначно определяет  $\sigma_2$  на отраженных лучах.

Теперь в выражении для  $u_1$  и  $u_2$  различны лишь множители, постоянные в первом приближении по всей толщине пленки. Приравнивая их с обратным знаком друг другу (если краевое условие имеет вид  $u \Big|_{\Sigma} = 0$ ), однозначно найдем  $C_2(\alpha_2)$ . Столь же просто найти  $C_2(\alpha_2)$  при краевом условии  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$ .

Аналогично можно было бы рассмотреть преломление волн, имеющих характер волновых пленок.



## АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

В §§ 1 и 3 главы 4 и в § 3 главы 5 были построены лучевым методом в малом и методом параболического уравнения собственные значения и собственные функции, сосредоточенные в окрестности границы плоской выпуклой области. Такие собственные функции были названы собственными функциями *типа шепчущей галереи*. Было показано, что собственные функции типа шепчущей галереи осциллируют в полосе, толщина которой имеет порядок  $\omega^{-2/3}$ , и экспоненциально убывают за пределами этой полосы.

В настоящей главе ту же самую задачу мы рассмотрим другим методом, который позволит не только найти полное асимптотическое разложение соответствующих собственных чисел и функции, но и получить некоторые строгие результаты. Кроме того, будет построена асимптотика собственных значений и собственных функций внешней задачи.

### § 1. Вводные замечания

Пусть плоская область  $\Omega$  ограничена достаточно гладкой кривой  $S$ . Будем считать, что скорость распространения волн в области  $\Omega$  есть достаточное число раз дифференцируемая функция  $c(x, y)$ .

Требуется построить собственные функции типа шепчущей галереи области  $\Omega$ , т. е. отличные от тождественного нуля решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} u = 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющие условию

$$u|_S = 0 \quad (1.2)$$

и сосредоточенные в достаточно узкой пограничной полосе.

Случай, когда на  $S$  выполняется условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (1.3)$$

или смешанное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} - i\omega g(s) u \Big|_S = 0 \quad (1.4)$$

с переменным коэффициентом  $g(s)$ , рассматриваются аналогично. Поэтому эти случаи разбираются в главе менее подробно.

Метод, которым мы воспользуемся при построении собственных функций типа шепчущей галереи, может быть назван *методом эталонной задачи*. По своей основной идее метод эталонной задачи для уравнения Гельмгольца (уравнения в частных производных) близок к методу эталонного уравнения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исходным пунктом метода эталонных задач является изучение поля лучей — экстремалей функционала геометрической оптики. Следующий шаг состоит в подборе простейшей, допускающей точное решение (например, по методу разделения переменных) *эталонной задачи*, поле лучей в которой обладает теми же особенностями, что и у исходной задачи. Анализ решения эталонной задачи позволяет выбрать определенную форму искомого разложения решения исходной задачи. Подставляя это разложение в уравнения и краевые условия первоначальной задачи и требуя их (формального) выполнения, можно получить ряд соотношений между коэффициентами этих разложений. Полученные соотношения позволяют найти неизвестные функции, входящие в эти коэффициенты.

Определяя в разложении решения достаточно большое число членов, можно добиться того, что уравнение и граничные условия будут удовлетворены с заданной наперед точностью. Как уже отмечалось, в некоторых случаях можно строго показать, что возникающее на этом пути разложение для собственных значений является асимптотическим при  $\omega \rightarrow \infty$ .

В силу того, что метод параболического уравнения тоже дает асимптотику решений дифракционных задач (правда, только главный член), на излагаемый здесь метод можно смотреть как на дальнейшее развитие метода параболического уравнения.

Заметим, что вид *эталонных функций*, т. е. функций, входящих в искомое разложение, можно было бы установить, основываясь на решении параболического уравнения. Однако решение эталонной задачи, в отличие от решения параболического уравнения, позволяет указать не только вид эталонных функций, но и характер зависимости дальнейших приближений от координат точки наблюдения.

## § 2. Собственные функции круга в случае $c = \text{const}$ .

Для того чтобы в окрестности границы  $S$  области  $\Omega$ , расположенной при  $n < 0$ , возникало явление шепчущей галереи, эффективный радиус кривизны  $P(s)$  этой границы должен быть положительным:

$$P(s) = \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right]^{-1} > 0. \quad (2.1)$$

Этот результат был получен в § 3 главы 4 из лучевых соображений.

Простейшей задачей, в которой условие (2.1) выполнено, является задача (1.1), (1.2) для круга при постоянной скорости распространения волн. Задачу (1.1), (1.2) для круга  $r \leq \leq \rho = \text{const}$  ( $n = r - \rho$ ) можно считать эталонной задачей для целого класса задач, в которых выполняется условие (2.1). В настоящем параграфе мы построим решения уравнения Гельмгольца, сосредоточенные вблизи границы круга, и соответствующие им собственные функции типа шепчущей галереи (во всех дальнейших формулах этого параграфа величина  $\rho$  является константой). На примере этой простейшей задачи будет «угадан» вид асимптотических разложений собственных функций типа шепчущей галереи в общем случае.

В полярных координатах  $r, \varphi$  уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u(r, \varphi) = 0.$$

Разделение переменных приводит к следующим решениям этого уравнения:

$$u(r, \varphi) = J_{\zeta} \left( \frac{\omega}{c} r \right) e^{i\zeta\varphi}, \quad (2.2)$$

где  $J_{\zeta} \left( \frac{\omega}{c} r \right)$  — функция Бесселя,  $\zeta$  — постоянная разделения. Обычно далее, исходя из требования периодичности решения по переменной  $\varphi$

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi),$$

получают для постоянной разделения  $\zeta$  целочисленные значения. Мы же удовлетворим требованию периодичности на заключительном этапе построения собственных функций.

Будем считать, что  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ , и рассмотрим бесконечнолистную поверхность  $r \leq \rho$ ,  $-\infty < \varphi < \infty$ . Эту поверхность можно получить, удалив из обычной поверхности Римана функции  $\text{Ln}(x + iy) = \text{Ln}(re^{i\varphi})$  точки, расстояние которых от начала координат больше  $\rho$ .

Пусть на бесконечнолистной поверхности выполняется условие (1.2). Это условие приводит к уравнению

$$J_{\zeta}(k\rho) = 0, \quad k = \omega/c. \quad (2.3)$$

Поскольку нас интересует асимптотика собственных функций при  $\omega \rightarrow \infty$ , заменим в уравнении (2.3) функцию Бесселя ее асимптотическим разложением.

Запишем равномерное асимптотическое разложение функции Бесселя в виде \*)

$$J_{\zeta}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{T_r}{\zeta^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ z + \frac{p_1(z)}{(kr)^2} + \dots + \frac{p_n(z)}{(kr)^{2n}} + O((kr)^{-2n-2}) \right] \right\}^{-1/2} \times \\ \times v \left[ T_r + \frac{p_1(z)}{(kr)^{4/3}} + \dots + \frac{p_n(z)}{kr^{2n-2/3}} + O((kr)^{-2n-4/3}) \right], \quad (2.4)$$

где  $T_r$  и  $z$  определяются равенствами

$$T_r = \zeta^{2/3} z = \left[ \frac{3}{2} ikr \int_1^{\zeta/kr} \arccos x \, dx \right]^{2/3} = \\ = 2 \left( \frac{kr}{2} \right)^{2/3} \left( \frac{\zeta}{kr} - 1 \right) \left[ 1 - \frac{1}{30} \left( \frac{\zeta}{kr} - 1 \right) + \dots \right];$$

$v(t)$  — функция Эйри, убывающая при  $t \rightarrow \infty$  и  $p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)$  — регулярные в начале координат функции  $z$ , определяемые последовательно из некоторой системы рекуррентных соотношений. Формула (2.4) справедлива при

$$|\arg \zeta| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varepsilon < \left| \frac{kr}{\zeta} \right| < M < \infty, \quad \left| \arg \frac{kr}{\zeta} \right| < \frac{\pi}{2}, \quad |kr| \rightarrow \infty$$

( $\varepsilon$  и  $M$  — некоторые постоянные).

Подставляя разложение (2.4) в равенство (2.3), получаем для определения постоянной  $\zeta$  уравнение

$$T_p + \frac{1}{(kp)^{4/3}} p_1 \left( \zeta^{-\frac{2}{3}} T_p \right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{(kp)^{2n-2/3}} p_n \left( \zeta^{-\frac{2}{3}} T_p \right) + O((kp)^{-2n-\frac{4}{3}}) = -t_p, \quad (2.5) \\ T_p = 2 \left( \frac{kp}{2} \right)^{2/3} \left( \frac{\zeta}{kp} - 1 \right) [1 - \dots],$$

где  $(-t_p)$  — нуль функции  $v(t)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Решая уравнение (2.5) относительно  $\frac{\zeta}{kp} - 1$ , находим

$$\zeta = \zeta_p = kp \left\{ 1 + \left( \frac{-t_p}{2} \right) \left( \frac{2}{kp} \right)^{2/3} + \frac{1}{30} \left( \frac{-t_p}{2} \right)^2 \left( \frac{2}{kp} \right)^{4/3} + O \left[ t_p^3 \left( \frac{1}{kp} \right)^2 \right] \right\}.$$

\*) В несколько измененной форме это разложение было впервые получено Т. Черри (см. Т. Черри [1]).

Полученное значение  $\zeta_p$  подставим в формулу (2.2) и заменим функцию Бесселя ее асимптотикой:

$$u(r, \varphi) = \text{const} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{1/3} \exp \left\{ ik \left[ s + \frac{-t_p}{2} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} s + \frac{(-t_p)^2}{120} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} s + i \left( \frac{-t_p}{30} \rho + \frac{1}{20} \rho \tilde{v} \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{5/3} + O \left( t_p^3 \frac{4}{k^2 \rho^2} \right) \right] \right\} \times \\ \times v \left\{ -t_p - \tilde{v} + \left( \frac{2}{15} t_p \tilde{v} + \frac{3}{20} \tilde{v}^2 \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ t_p^2 \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\}, \quad (2.6)$$

где  $s = \varphi\rho$  — длина дуги окружности и

$$\tilde{v} = 2 \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{2/3} \frac{r - \rho}{\rho} < 0$$

— приведенное расстояние точки наблюдения  $(r, \varphi)$  от границы круга.

Как известно, функция Эйри  $v(t)$  экспоненциально убывает при  $t > 0$  и осциллирует при  $t < 0$ . Точка  $t = 0$  является для нее точкой поворота. Решение (2.6) будет осциллировать при

$$-t_p + O \left[ \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} \right] < \tilde{v} < 0$$

и экспоненциально убывать при

$$\tilde{v} < -t_p + O \left[ \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} \right].$$

Таким образом, про решение (2.6) можно сказать, что оно сосредоточено в пограничном слое

$$-t_p \leq \tilde{v} \leq 0.$$

Этот слой в переменной  $r$  может быть записан в виде

$$\left[ 1 - \frac{t_p}{2} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} \right] \rho < r \leq \rho.$$

Толщина слоя, в котором сосредоточены решения (2.6), имеет порядок  $(k\rho)^{-2/3}$ , что полностью согласуется с выводом о толщине пограничного слоя, сделанном в главах 4 и 5. Решение (2.6) представляет собой волну, бегущую вдоль границы круга.

Чтобы получить собственную функцию (стоячую волну), нам осталось удовлетворить условию периодичности по переменной  $\varphi$ . Это условие будет выполнено, если мы потребуем, чтобы решение (2.6) при  $s = 2\pi\rho$  совпадало с решением (2.6) при  $s = 0$ , т. е. если мы потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$2\pi\rho k \left[ 1 - \frac{t_p}{2} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + \frac{t_p^2}{120} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} + \dots \right] = 2\pi q, \quad (2.7)$$

где  $q$  — целое число. Уравнение (2.7) служит для определения собственных частот  $k_{p, q}$ :

$$k_{p, q} = \frac{q}{\rho} \left\{ 1 + \frac{t_p}{2} \left( \frac{2}{q} \right)^{2/3} + 3 \frac{t_p^2}{40} \left( \frac{2}{q} \right)^{4/3} + O \left[ t_p^3 \left( \frac{2}{q} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.8)$$

Формула (2.8), как это следует из вида поправочного члена, справедлива при  $q \gg 1$  и небольших значениях  $p$ . Если найденные значения  $k_{p, q}$  подставить в формулу (2.6), то получим асимптотику собственных функций  $u_{p, q}(r, \varphi)$ .

Таким образом, асимптотика решений уравнения Гельмгольца, сосредоточенных в пограничном слое, и соответствующих собственных функций имеет вид экспоненты, умноженной на функции Эйри. Аргументы экспоненты и функции Эйри представляют собой ряды по степеням  $k^{-1/3}$ . Коэффициенты этих рядов — полиномы относительно приведенной нормали  $\tilde{v}$ .

Определив структуру асимптотических формул в эталонной задаче, переходим к исследованию общей задачи.

### § 3. Построение решений уравнения Гельмгольца в пограничном слое

Построим решения уравнения (1.1), сосредоточенные в окрестности кривой  $S$  (причем  $S$  не обязательно замкнутая) и удовлетворяющие на  $S$  условию (1.2) или (1.3).

Как и в § 3 главы 4, в окрестности  $S$  введем координаты  $s$  и  $n$ . Эффективный радиус кривизны  $P(s)$  кривой  $S$  будем считать положительным [см. (2.1)]. Построим решения уравнения (1.1) с той стороны кривой  $S$ , где  $n < 0$ . В силу условия (2.1) здесь происходит наложение лучей, многократно отраженных границей. Уравнение (1.1) в переменных  $s, n$  записывается в виде (см. Дополнение 2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) \right] + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = \\ = \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[ \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right] \right\} + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Будем предполагать, что скорость распространения волн  $c(s, n)$  в пограничном слое может быть представлена отрезком ряда Тейлора с достаточно большим числом членов:

$$c(s, n) = c_0(s) + c_1(s)n + \dots + c_{N-1}(s)n^{N-1} + O(n^N). \quad (3.2)$$

Коэффициенты  $c_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) из (3.2) и радиус кривизны  $\rho = \rho(s)$  кривой  $S$  будем считать достаточно гладкими функциями длины дуги  $s$ .

Поскольку нас интересуют решения, сосредоточенные в пограничном слое, толщина которого порядка  $\omega^{-2/3}$ , перейдем в уравнении (3.1) к приведенной нормали  $v$ , положив

$$v = n\omega^{2/3}.$$

Запишем уравнение (3.1) в переменных  $s$  и  $v$ :

$$\omega^{4/3} A \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \omega^{2/3} B \frac{\partial u}{\partial v} + C \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \omega^{-2/3} D \frac{\partial u}{\partial s} + \omega^2 E u = 0, \quad (3.3)$$

где

$$A = 1 + \omega^{-2/3} \frac{v}{\rho(s)}, \quad B = \frac{1}{\rho(s)}, \quad C = \left(1 + \omega^{-2/3} \frac{v}{\rho(s)}\right)^{-1},$$

$$D = \frac{v}{\rho^2(s)} \rho'(s) \left(1 + \omega^{-2/3} \frac{v}{\rho(s)}\right)^{-2},$$

$$E = \frac{1}{c(s, v\omega^{-2/3})} \left(1 + \omega^{-2/3} \frac{v}{\rho(s)}\right).$$

Коэффициенты  $C$ ,  $D$  и  $E$  представим отрезками рядов Тейлора:

$$C = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^m \left(\frac{v}{\rho}\right)^m \omega^{-2/3 m} + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}M}\right),$$

$$D = \frac{\rho'}{\rho} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^m (m+1) \left(\frac{v}{\rho}\right)^{m+1} \omega^{-2/3 m} + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}M}\right),$$

$$E = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor - 1} e_m(s) \left(\frac{v}{\rho}\right)^m \omega^{-2/3 m} + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}M}\right),$$

где  $\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor = \frac{M}{2}$  при четном  $M$  и  $\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor = \frac{M+1}{2}$  при  $M$  нечетном.

В последнем равенстве функции  $e_m(s)$  выражаются через  $\rho(s)$  и коэффициенты  $c_j(s)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , входящие в разложение скорости (3.2). Несколько первых коэффициентов  $e_m(s)$  равны

$$e_0(s) = \frac{1}{c_0^2(s)}, \quad e_1(s) = \frac{1}{c_0^2(s)} - 2\rho(s) \frac{c_1(s)}{c_0^3(s)},$$

$$e_2(s) = -2\rho(s) \frac{c_1(s)}{c_0^3(s)} + \rho^2(s) \frac{3c_1^2(s) - 2c_2(s)c_0(s)}{c_0^4(s)}.$$

Решения уравнения (3.3) будем искать в виде, аналогичном (2.6):

$$u(s, v) = \text{const exp} \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} \times \\ \times v \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\}, \quad (3.4)$$

где  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$  — искомые полиномы относительно  $v$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ , и  $v(Z)$  — функция Эйри. Наша ближайшая задача — получить рекуррентную систему дифференциальных уравнений, из которой можно было бы последовательно определить все полиномы  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$ . Подставим выражение (3.4) в уравнение (3.3) и, принимая во внимание уравнение Эйри, заменим вторую производную  $v''(Z)$  произведением  $Zv(Z)$ , где

$$Z = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, v) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3})$$

— аргумент функции Эйри. После сокращения на экспоненту уравнения (3.3) примет вид

$$a(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3}) v(Z) + b(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3}) v'(Z) = 0,$$

где

$$a(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3}) = \omega^{\frac{4}{3}} \left\{ \sum_{m=-6}^{M-1} a_m(\alpha_j, \beta_j) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\}, \quad (3.5)$$

$$b(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3}) = \omega^{\frac{4}{3}} \left\{ \sum_{m=-3}^{M-1} b_m(\alpha_j, \beta_j) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} \quad (3.6)$$

и  $a_m(\alpha_j, \beta_j)$  и  $b_m(\alpha_j, \beta_j)$  — дифференциальные операторы, примененные к полиномам  $\alpha_j(s, v)$  и  $\beta_j(s, v)$ . Так как функции  $v(Z)$  и  $v'(Z)$  линейно независимы, то выражения  $a(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3})$  и  $b(\alpha_j, \beta_j; \omega^{-1/3})$  должны быть порознь равны нулю тождественно относительно  $\omega$ . Приравнявая нулю коэффициенты разложений (3.5) и (3.6), получаем искомую рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} a_m(\alpha_j, \beta_j) &= 0, & m \geq -6, \\ b_m(\alpha_j, \beta_j) &= 0, & m \geq -3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) позволяет шаг за шагом построить все искомые полиномы  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ . Прежде всего проанализируем несколько первых уравнений системы. Это позволит записать



дальнейшие уравнения в более простой форме. Полагая  $m = -6, -5, -4$  в первом уравнении системы, получаем

$$a_{-6}(\alpha_j, \beta_j) \equiv \left( \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} \right)^2 = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{-5}(\alpha_j, \beta_j) \equiv 2 \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial v} = 0, \quad (3.9)$$

$$a_{-4}(\alpha_j, \beta_j) \equiv \frac{v}{\rho} \left( \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial v} \right)^2 + 2 \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial v} = 0. \quad (3.10)$$

Из выписанных уравнений следует, что

$$\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial v} = 0. \quad (3.11)$$

С учетом равенств (3.11) следующие шесть уравнений системы ( $m = -3, -2, -1$ ) можно записать в виде

$$a_{-3}(\alpha_j, \beta_j) \equiv 0,$$

$$a_{-2}(\alpha_j, \beta_j) \equiv - \left( \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} \right)^2 + e_0(s) = 0, \quad (3.12)$$

$$a_{-1}(\alpha_j, \beta_j) \equiv -2 \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial s} = 0, \quad (3.13)$$

$$b_{-3}(\alpha_j, \beta_j) \equiv 0,$$

$$b_{-2}(\alpha_j, \beta_j) \equiv 0,$$

$$b_{-1}(\alpha_j, \beta_j) \equiv 2 \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0.$$

Последнее уравнение означает, что  $\frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial v} = 0$  либо  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0$ .

Если мы будем считать, что  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0$ , то придем к противоречию с известным решением (2.6) для круга, в котором  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} = \left( \frac{2}{\rho} \right)^{1/3} c_0^{-2/3} \neq 0$ . Поэтому положим

$$\frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial v} = 0,$$

и тогда из уравнений (3.12) и (3.13) последовательно следует, что

$$\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} = \pm \sqrt{e_0(s)} = \pm \frac{1}{c_0(s)} \neq 0 \quad (3.14)$$

и

$$\frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial s} = 0, \quad (3.15)$$

Уравнение (3.14) легко проинтегрировать. Принимая во внимание, что  $\alpha_{-3}(s, v)$  не зависит от  $v$ , получаем

$$\alpha_{-3}(s, v) \equiv \alpha_{-30}(s) = \pm \int_{d_{-3}}^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}, \quad (3.16)$$

где  $d_{-3}$  — некоторая произвольная постоянная. Два знака в формуле приводят к двум решениям, описывающим волны, распространяющиеся в противоположных направлениях вблизи кривой  $S$ .

В дальнейшем в формуле (3.16) сохраним только знак  $+$ . Уравнения (3.11) и (3.15) означают, что

$$\alpha_{-2}(s, v) = d_{-2}, \quad (3.17)$$

где  $d_{-2}$  — произвольная постоянная, не зависящая ни от  $s$ , ни от  $v$ .

Выпишем теперь еще два уравнения системы (3.7), соответствующие  $m = 0$ . Принимая во внимание не только равенства (3.11), но также (3.14), (3.15) и (3.17), получим

$$a_0(\alpha_j, \beta_j) \equiv -\left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial v}\right)^2 + i \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial v^2} + \beta_0 \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial v}\right)^2 + \frac{v}{\rho} \frac{1}{c_0^2(s)} - 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} + e_1(s) \frac{v}{\rho} = 0, \quad (3.18)$$

$$b_0(\alpha_j, \beta_j) \equiv 2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial v^2} = 0. \quad (3.19)$$

Исключим из уравнений (3.18) и (3.19) производные  $\frac{\partial \alpha_0}{\partial v}$  и  $\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial v^2}$ :

$$-2i \frac{\partial^3 \beta_0}{\partial v^3} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} - (1 - 2i) \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial v^2}\right)^2 + 4\beta_0 \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial v}\right)^4 + 4 \left[ \frac{1}{c_0^2(s)} + e_1(s) \right] \frac{v}{\rho(s)} \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial v}\right)^2 - 8 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial v}\right)^2 = 0. \quad (3.20)$$

Предположим, что  $\beta_0(s, v)$  — полином степени  $l$ :

$$\beta_0(s, v) = \beta_{0l}(s) v^l + \dots + \beta_{00}(s).$$

Тогда при  $l \geq 2$  левая часть уравнения (3.20) представляет собой полином степени  $5l - 4$ :

$$4l^4 \beta_{0l}^5(s) v^{5l-4} + \dots = 0. \quad (3.21)$$

Так как равенство (3.21) должно выполняться тождественно относительно  $v$ , то

$$\beta_{0l}(s) = 0$$

и, следовательно,  $\beta_0(s, \nu)$  может быть только полиномом первой степени:

$$\beta_0(s, \nu) = \beta_{01}(s)\nu + \beta_{00}(s). \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в уравнение (3.20), получаем

$$\left\{ \beta_{01}^3 + \left[ \frac{1}{c_0^2(s)} + e_1(s) \right] \frac{1}{\rho(s)} \right\} \nu + \left\{ \beta_{01}^2 \beta_{00} - 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} \right\} = 0, \quad (3.23)$$

откуда

$$\beta_{01}(s) = - \sqrt[3]{ \left[ \frac{1}{c_0^2(s)} + e_1(s) \right] \frac{1}{\rho(s)} } = - \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) \rho^{1/3}(s)}.$$

Функцию  $\beta_{00}(s)$  можно считать произвольной. Позднее эта функция определится из граничных условий. Приравнявая нулю свободный член в (3.23) и интегрируя, находим

$$\alpha_{-1}(s, \nu) = \alpha_{-10}(s) = \frac{1}{2^{1/3}} \int_{d_{-1}}^s \frac{\beta_{00}(\tau)}{c_0^{1/3}(\tau) \rho^{2/3}(\tau)} d\tau, \quad (3.24)$$

где  $d_{-1}$  — произвольная постоянная.

Поскольку  $\beta_0(s, \nu)$  — полином первой степени, из уравнения (3.19) вытекает, что  $\alpha_0(s, \nu)$  — полином нулевой степени:

$$\alpha_0(s, \nu) = \alpha_{00}(s). \quad (3.25)$$

Чтобы найти полиномы  $\alpha_1(s, \nu)$  и  $\beta_1(s, \nu)$ , а также определить  $\alpha_{00}(s)$ , выпишем уравнения системы (3.7) при  $m = 1$ . Учитывая значения уже найденных полиномов и оставляя в левых частях уравнений неизвестные  $\alpha_1(s, \nu)$ ,  $\beta_1(s, \nu)$ ,  $\alpha_{00}(s)$ , получим

$$i \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \nu^2} + 2(\beta_{01}\nu + \beta_{00})\beta_{01} \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} + \beta_{01}^2 \cdot \beta_1 - \frac{2}{c_0} \frac{d\alpha_{00}}{ds} = i \frac{c_0'}{c_0^2}, \quad (3.26)$$

$$2i\beta_{01} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial \nu^2} = - \frac{2i}{c_0} \left( \frac{d\beta_{01}}{ds} \nu + \frac{d\beta_{00}}{ds} \right). \quad (3.27)$$

Исключим из уравнений (3.26) и (3.27) функцию  $\alpha_1(s, \nu)$ :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^3 \beta_1}{\partial \nu^3} + 4\beta_{01}^2 (\beta_{01}\nu + \beta_{00}) \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} + 2\beta_{01}^3 \beta_1 - \frac{4}{c_0} \beta_{01} \frac{d\alpha_{00}}{ds} = \\ = 2i \frac{c_0'}{c_0^2} + 2i \frac{1}{c_0} \frac{d\beta_{01}}{ds}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тем же способом, что и в предыдущем случае, убеждаемся, что  $\beta_1(s, \nu)$  может быть только полиномом нулевой степени:

$$\beta_1(s, \nu) = \beta_{10}(s). \quad (3.29)$$

Функция  $\beta_{10}(s)$  остается произвольной, она определяется, так же как и  $\beta_{00}(s)$ , из граничных условий. Так как  $\beta_1(s, v)$  не зависит от  $v$ , левая и правая части уравнения (3.28) содержат только переменную  $s$ . Интегрируя это уравнение, определяем функцию  $\alpha_{00}(s)$ :

$$\alpha_{00}(s) = i \frac{1}{2} \ln \frac{\beta_{01}(d_0) c_0(d_0)}{\beta_{01}(s) c_0(s)} + \frac{1}{2} \int_{d_0}^s c_0(\tau) \beta_{01}^2(\tau) \beta_{10}(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

где  $d_0$  — произвольная постоянная.

Подставляя (3.29) в уравнение (3.27) и интегрируя затем это уравнение по  $v$ , находим  $\alpha_1(s, v)$ , которое оказывается полиномом второй степени:

$$\begin{aligned} \alpha_1(s, v) &= \alpha_{12}(s) v^2 + \alpha_{11}(s) v + \alpha_{10}(s) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{c_0(s) \beta_{01}(s)} \frac{d\beta_{01}}{ds} v^2 - \frac{1}{c_0(s) \beta_{01}(s)} \frac{d\beta_{00}}{ds} v + \alpha_{10}(s). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Таким образом, мы продвинулись еще на один шаг в определении искомых коэффициентов разложения (3.4).

Для того чтобы сделать следующий шаг, т. е. найти полиномы  $\beta_2(s, v)$  и  $\alpha_2(s, v)$ , а также определить  $\alpha_{10}(s)$ , нужно обратиться к следующей паре уравнений (3.7), соответствующей  $m = 2$ . Решив эту пару уравнений, мы построим полиномы  $\beta_2(s, v)$  и  $\alpha_2(s, v)$ , за исключением их свободных членов  $\beta_{20}(s)$  и  $\alpha_{20}(s)$ , а также найдем функцию  $\alpha_{10}(s)$ , которая будет выражаться через  $\beta_{20}(s)$ . Функция  $\beta_{20}(s)$  остается произвольной и впоследствии будет найдена из граничных условий.

При помощи указанной схемы могут быть найдены и все последующие полиномы  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$ . Чтобы это доказать предположим, что система уравнений (3.7) нами решена вплоть до пары уравнений, соответствующей  $m = r - 1$ . Другими словами, предположим, что полиномы  $\alpha_j(s, v)$  при  $j \leq r - 2$  и полиномы  $\beta_j(s, v)$  при  $j \leq r - 1$  нам известны полностью, а полином  $\alpha_{r-1}(s, v)$  — за исключением свободного члена  $\alpha_{r-1,0}(s)$ . Для построения полиномов  $\alpha_r(s, v)$  и  $\beta_r(s, v)$ , а также для определения функции  $\alpha_{r-1,0}(s)$  выпишем уравнения системы (3.7), соответствующие  $m = r$ . При этом в левых частях уравнений оставим только неизвестные полиномы  $\alpha_r(s, v)$ ,  $\beta_r(s, v)$  и функцию  $\alpha_{r-1,0}(s)$ :

$$i \frac{\partial^2 \alpha_r}{\partial v^2} + 2(\beta_{01} v + \beta_{00}) \beta_{01} \frac{\partial \beta_r}{\partial v} + \beta_{01}^2 \beta_r - \frac{2}{c_0} \frac{d\alpha_{r-1,0}}{ds} = \Phi_r^{(1)}(s, v), \quad (3.32)$$

$$2i\beta_{01} \frac{\partial \alpha_r}{\partial v} + \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial v^2} = \Phi_r^{(2)}(s, v). \quad (3.33)$$

Правые части уравнений  $\Phi_r^{(1)(2)}(s, v)$  зависят от уже построенных полиномов  $\alpha_j(s, v)$  и  $\beta_j(s, v)$ ,  $j \leq r-1$ , и могут быть расположены по степеням  $v$ .

Докажем, что степени полиномов  $\alpha_r(s, v)$  и  $\beta_r(s, v)$  при четном  $r$  равны  $r/2$  и  $r/2 + 1$  соответственно, а при нечетном  $r$  равны  $(r+3)/2$  и  $(r-1)/2$ . Доказательство проведем по методу математической индукции.

Предположим, что степени полиномов  $\alpha_j(s, v)$  и  $\beta_j(s, v)$  при  $0 \leq j \leq r-1$  равны соответственно  $j/2$  и  $j/2 + 1$ , если  $j$  четное, и равны  $(j+3)/2$  и  $(j-1)/2$ , если  $j$  нечетное. Для  $j = 0, 1$  это предположение выполнено согласно формулам (3.25) и (3.22).

Можно показать, что при сделанном предположении  $\Phi_r^{(1)}(s, v)$  и  $\Phi_r^{(2)}(s, v)$  являются полиномами степени  $r/2 + 1$  и  $r/2 - 1$  при четном  $r$  и полиномами степени  $(r-1)/2$  и  $(r+1)/2$  при нечетном  $r$ . Используя этот результат, найдем степени полиномов  $\alpha_r(s, v)$  и  $\beta_r(s, v)$ . Исключим из уравнений (3.32) и (3.33) полином  $\alpha_r(s, v)$ :

$$-\frac{\partial^3 \beta_r}{\partial v^3} + 4(\beta_{01}v + \beta_{00})\beta_{01}^2 \frac{\partial \beta_r}{\partial v} + 2\beta_{01}^3 \beta_r - \frac{4}{c_0} \beta_{01} - \frac{d\alpha_{r-1,0}}{ds} =$$

$$= 2\Phi_r^{(1)}(s, v)\beta_{01} - \frac{\partial \Phi_r^{(2)}(s, v)}{\partial v}. \quad (3.34)$$

Из уравнения (3.34) следует, что  $\beta_r(s, v)$  является полиномом степени  $r/2 + 1$  при четном  $r$  и полиномом степени  $(r-1)/2$  при нечетном  $r$ . Таким образом, сделанное утверждение относительно степени полинома  $\beta_r(s, v)$  доказано. После того как степень полинома  $\beta_r(s, v)$  установлена, степень полинома  $\alpha_r(s, v)$  легко находится из уравнения (3.33) и оказывается равной  $r/2$  при четном  $r$  и  $(r+3)/2$  — при нечетном  $r$ . Именно этот результат мы и должны были доказать.

Коэффициенты полинома  $\beta_r(s, v)$  определяются следующим образом. Подставим в уравнение (3.34) полином  $\beta_r(s, v)$ , расположенный по степеням  $v$  с неопределенными коэффициентами, зависящими от  $s$ . Приравняем затем друг другу коэффициенты при различных степенях  $v \geq 1$  в левой и правой частях уравнения (3.34). Это приведет нас к системе алгебраических уравнений, из которой находятся все коэффициенты полинома  $\beta_r(s, v)$ , за исключением его свободного члена  $\beta_{r0}(s)$ , который определится позднее из граничных условий.

Наконец, приравняем в (3.34) свободные члены. Интегрируя полученное равенство по  $s$ , находим функцию  $\alpha_{r-1,0}(s)$ .

После того как полином  $\beta_r(s, v)$  найден, интегрируя по  $v$  уравнение (3.33), находим полином  $\alpha_r(s, v)$ . Свободный член полинома  $\alpha_r(s, v)$  определяется при интегрировании следующей пары уравнений (3.7) и выражается через  $\beta_{r+1,0}(s)$ .

Приведем результаты вычислений по указанной выше схеме для случая  $r = 2$ . Функции  $\Phi_r^{(1)}(s, \nu)$  и  $\Phi_r^{(2)}(s, \nu)$  при  $r = 2$  равны

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(s, \nu) &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{2}{c_0(s)} \frac{\partial(\alpha_1 - \alpha_{10})}{\partial s} + \left(\frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s}\right)^2 - \\ &- \frac{2}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} \cdot \frac{\nu}{\rho(s)} - \beta_0 \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \nu}\right)^2 \frac{\nu}{\rho(s)} + \frac{\nu^2}{c_0^2(s) \rho^2(s)} - e_2 \frac{\nu^2}{\rho^2(s)}, \quad (3.35) \\ \Phi_2^{(2)}(s, \nu) &= -\frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial \beta_0}{\partial \nu} - 2i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \beta_1}{\partial s}. \end{aligned}$$

Полином  $\beta_2(s, \nu)$  является полиномом второй степени

$$\beta_2(s, \nu) \equiv \beta_{22}(s) \nu^2 + \beta_{21}(s) \nu + \beta_{20}(s), \quad (3.36)$$

где

$$\beta_{22}(s) = \frac{2^{1/3}}{10} \frac{P^{2/3}(s)}{c_0^{2/3}(s)} Q(s),$$

$$\beta_{21}(s) = \frac{1}{15} \beta_{00}(s) \left[ 2P(s) Q(s) - 10 \frac{1}{\rho(s)} \right]$$

и

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{1}{\rho^2(s)} + \frac{2}{\rho(s) P(s)} + \frac{1}{9} \left[ \frac{d}{ds} \ln(c_0^2(s) P(s)) \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{3} c_0(s) \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{c_0(s)} \frac{d}{ds} \ln(c_0^2(s) P(s)) \right] + \\ &+ \frac{2c_1(s)}{c_0(s) \rho(s)} - \frac{3c_1^2(s) - 2c_2(s) c_0(s)}{c_0^2(s)}. \quad (3.37) \end{aligned}$$

Функция  $\beta_{20}(s)$  остается неопределенной. Свободный член полинома  $\alpha_1(s, \nu)$  оказывается равным

$$\begin{aligned} \alpha_{10}(s) &= 2^{-\frac{1}{3}} \int_{d_1}^s \left\{ \frac{\beta_{20}(\tau)}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} - \right. \\ &\left. - \frac{\beta_{00}^2(\tau)}{2^{4/3} P^{4/3}(\tau)} c_0^{1/3}(\tau) \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] \right\} d\tau, \quad (3.38) \end{aligned}$$

где  $d_1$  — произвольная постоянная.

Полином  $\alpha_2(s, \nu)$  является полиномом первой степени:

$$\begin{aligned} \alpha_2(s, \nu) &\equiv \alpha_{21}(s) \nu + \alpha_{20}(s) = \\ &= \left[ -\frac{i}{10} P(s) Q(s) + \frac{i}{2\rho(s)} + \frac{P^{1/3}(s)}{2^{1/3} c_0^{1/3}(s)} \frac{d\beta_{10}}{ds} \right] \nu + \alpha_{20}(s). \quad (3.39) \end{aligned}$$

Функция  $\alpha_{20}(s)$  определяется на следующем шаге вместе с полиномами  $\alpha_3(s, \nu)$  и  $\beta_3(s, \nu)$ . Опуская вычисления, связанные

с построением полиномов  $\alpha_3$  и  $\beta_3$ , приведем лишь значение  $\alpha_{20}(s)$ :

$$\alpha_{20}(s) = \int_{d_2}^s \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{i}{2^{1/3}} c_0^{2/3} P^{1/3} \left( \frac{1}{2} P^{-1} - \rho^{-1} + \frac{1}{5} PQ \right) \beta_{00} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2^{1/3}}{3} c_0^{1/3} P^{-2/3} \beta'_{10} \right] + \frac{i}{2^{1/3}} c_0^{2/3} P^{1/3} \left( \frac{1}{5} PQ - \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2^{1/3}} c_0^{-1/3} P^{-1/3} \beta'_{10} \right) \beta'_{00} + \right. \\ \left. + 2^{1/3} c_0^{-2/3} P^{-1/3} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{4}{15} PQ \right) \beta_{00} \beta_{10} + \frac{1}{2^{1/3}} c_0^{-1/3} P^{-2/3} \beta_{30} \right\} d\tau. \quad (3.40)$$

Здесь  $d_2$  — произвольная постоянная, функция  $\beta_{30}(s)$ , так же как и  $\beta_{00}$ ,  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{20}$ , остается неопределенной и в дальнейшем определяется из граничных условий.

Таким образом, входящие в решение (3.4) полиномы  $\alpha_m(s, v)$ ,  $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ , определяются формулами (3.16), (3.17), (3.24), (3.25), (3.31), (3.38), (3.39), (3.40), а полиномы  $\beta_m(s, v)$ ,  $m = 0, 1, 2$ , определяются формулами (3.22), (3.29), (3.36). Решение (3.4) уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$u(s, v) = \text{const} \sqrt[6]{\frac{c_0(s)}{c_0(d_0)} \frac{P(d_0)}{P(s)}} \exp \left\{ i\omega \int_{d_3}^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + i\omega^{2/3} d_{-2} + \right. \\ \left. + i \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_{d_{-1}}^s \frac{\beta_{00}(\tau) d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} + \frac{i}{2} \int_{d_0}^s c_0(\tau) \beta_{01}^2(\tau) \beta_{10}(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{i}{\omega^{1/3}} \left[ - \frac{\beta'_{01}(s)}{2c_0(s) \beta_{01}(s)} v^2 - \frac{\beta'_{01}(s)}{c_0(s) \beta_{01}(s)} v + \alpha_{10}(s) \right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\omega^{2/3}} \alpha_2(s, v) + O(\omega^{-1}) \right\} v \left\{ \left[ - \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} v + \beta_{00}(s) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta_{10}(s)}{\omega^{1/3}} + \frac{\beta_2(s, v)}{\omega^{2/3}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right\}. \quad (3.41)$$

Предположим, что полиномы  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$  определены до  $m = M - 1$  включительно и с их помощью построена функция

$$u^{(M)}(s, v) = \text{const} \cdot \exp \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \times \\ \times v \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\}. \quad (3.42)$$

Оценим невязку  $R_M$  (нескомпенсированные члены) в уравнении Гельмгольца (3.3) при подстановке в уравнение функции

$u^{(M)}(s, \nu)$ . Мы будем оценивать  $R_M$  не только в пограничном слое  $-n = O(\omega^{-2/3})$ , где приведенная нормаль остается ограниченной, но и в более широкой полоске  $-n = O(\omega^{-\varepsilon})$  ( $\varepsilon > 0$ ), для которой  $-\Lambda\omega^{2/3-\varepsilon} < \nu \leq 0$ ,  $\Lambda = O(1) > 0$ . Мы получим оценку

$$|R_M| \leq C\omega^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\varepsilon_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{3}\right)M} \exp\left(-\Delta\omega^{\frac{3}{2}\varepsilon_1}\right), \quad C, \Delta = \text{const} > 0, \quad (3.43)$$

справедливую при  $-\nu = O(\omega^{\varepsilon_1})$ ,  $0 \leq \varepsilon_1 < 2/3$ . (Оценка (3.43) существенно используется в § 6 настоящей главы, а также в главах 10 и 11 при исследовании функций Грина.)

Переходим к выводу оценки (3.43). Из равенств (3.5) и (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} |R_M| &< \text{const} \omega^{-\frac{M-4}{3}} \times \\ &\times \left[ \left| \Phi_M^{(1)}(s, \nu) \exp\left\{i \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}}\right\} \nu \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| + \right. \\ &\left. + \left| \Phi_M^{(2)}(s, \nu) \exp\left\{i \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}}\right\} \nu' \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

где  $\Phi_M^{(1)}(s, \nu)$  и  $\Phi_M^{(2)}(s, \nu)$  — полиномы из правых частей уравнений (3.32) и (3.33) при  $r = M$ . Если  $|\nu| = O(1)$ , то оценка (3.43) является очевидным следствием неравенства (3.44).

Положим теперь  $\nu = \omega^{\varepsilon_1}\Lambda$ , где  $\varepsilon_1 > 0$  и  $|\Lambda| < \text{const} < \infty$ . Найдем те значения  $\varepsilon_1$ , при которых оценка (3.43) по-прежнему имеет место. Для этого надо оценить, согласно (3.44),  $\Phi_M^{(1)}$ ,  $\Phi_M^{(2)}$ , экспоненту и функцию Эйри.

Поскольку  $\Phi_M^{(1)}(s, \nu)$  — полином по  $\nu$  степени не выше  $M/2 + 1$  и  $\Phi_M^{(2)}(s, \nu)$  — полином по  $\nu$  степени не выше  $(M + 1)/2$ , выполняются неравенства

$$\omega^{-\frac{M-4}{3}} |\Phi_M^{(1)}(s, \nu)| < C_1\omega^{\frac{4}{3} + \varepsilon_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{3}\right)M}$$

и

$$\omega^{-\frac{M-4}{3}} |\Phi_M^{(2)}(s, \nu)| < C_2\omega^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{3}\right)M},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — положительные постоянные.

Оценим теперь при  $\omega \rightarrow \infty$  поведение аргумента функции Эйри и ее производной. Так как степень полиномов  $\beta_m(s, \nu)$  не превосходит  $(m + 2)/2$ , то

$$\left| \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right| < C_3\omega^{\frac{m+2}{2}\varepsilon_1 - \frac{m}{3}},$$



где  $C_3$  — положительная постоянная, и в сумме

$$\sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-m/3}$$

первое слагаемое  $\beta_0(s, \nu) \sim \omega^{\varepsilon_1}$  будет при  $\omega \rightarrow \infty$  главным, если

$$\omega^{\frac{m+2}{2}\varepsilon_1 - \frac{m}{3} - \varepsilon_1} \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

при  $\omega \rightarrow \infty$ , т. е. если

$$0 \leq \varepsilon_1 < 2/3.$$

Таким образом, при  $0 < \varepsilon_1 < 2/3$  и  $\omega \rightarrow \infty$  аргумент функции Эйри и ее производной возрастают, как  $\omega^{\varepsilon_1}$ . Тогда из асимптотических формул (см. Дополнение 1) для функций Эйри вытекают оценки

$$\begin{aligned} \left| \nu \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| &= O \left[ \omega^{-\frac{\varepsilon_1}{4}} \exp(-\Delta_1 \omega^{\varepsilon_1/2}) \right], \quad \Delta_1 > 0, \\ \left| \nu' \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| &= O \left[ \omega^{\frac{\varepsilon_1}{4}} \exp(-\Delta_1 \omega^{\varepsilon_1/2}) \right], \quad \Delta_1 > 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Обратимся, наконец, к оценке слагаемых суммы, стоящей в аргументе экспоненты. Так как степень полинома  $\alpha_m(s, \nu)$  не превосходит  $(m+3)/2$ , то

$$|\alpha_m(s, \nu)| \omega^{-\frac{m}{3}} < C_4 \omega^{\frac{m+3}{2}\varepsilon_1 - \frac{m}{3}}$$

и, следовательно, при  $0 \leq \varepsilon_1 \leq 2/3 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \left| \exp \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| &= \left| \exp \left\{ i \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} \right\} \right| = \\ &= O \left[ \exp \left( \Delta_2 \omega^{\frac{3}{2}\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right) \right], \quad \Delta_2 > 0. \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, для значений  $\varepsilon_1$  из интервала  $0 \leq \varepsilon_1 \leq 2/3 - \varepsilon$  приходим к неравенству

$$|R_M| < C_5 \omega^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\varepsilon_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{3}\right)M} O \left[ \exp \left( -\Delta_3 \omega^{\frac{3}{2}\varepsilon_1} \right) \right], \quad C_5 > 0, \Delta_3 > 0, \quad (3.46)$$

которое позволяет утверждать, что оценка (3.43) выполняется равномерно в пограничной полосе

$$|v| = O(\omega^{2/3-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad (3.47)$$

или

$$|n| = O(\omega^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (3.48)$$

#### § 4. Собственные функции типа шепчущей галереи

В этом параграфе при помощи выражений (3.4) будут получены асимптотические формулы для собственных значений некоторых краевых задач и выписаны приближенные формулы для соответствующих им собственных функций.

Рассмотрим сначала задачу о собственных значениях и собственных функциях уравнения Гельмгольца (1.1), удовлетворяющих на границе  $S$  области  $\Omega$  условию (1.2). Будем считать, что в точках границы  $S$  выполнено неравенство (2.1). Нас будут интересовать только те собственные функции, которые сосредоточены вблизи границы области.

Подставим (3.4) в граничное условие (1.2). Сокращая на экспоненту, получаем

$$v \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, 0) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} = 0. \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) должно выполняться тождественно относительно  $\omega$ . Оно определяет оставшиеся до сих пор произвольными свободные члены  $\beta_m(s, 0) = \beta_{m0}(s)$  полиномов  $\beta_m(s, v)$ .

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} \beta_{00}(s) &= -t_p, & p &= 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_{m0}(s) &= 0, & m &\geq 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Числа  $t_0, t_1, t_2, \dots$  — нули функций Эйри  $v(-t)$ .

Свободные члены  $\alpha_{m0}(s)$  полиномов  $\alpha_m(s, v)$ ,  $m \geq 1$ , выражаются интегралами с переменным верхним и постоянным нижним пределами. Подынтегральные функции этих интегралов содержат функции  $\beta_{m0}(s)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , определенные согласно (4.2). За счет выбора произвольного постоянного множителя в (3.4) и (3.41) мы можем считать постоянные нижние пределы интегрирования  $d_m$  в упомянутых интегралах равными нулю, т. е. полагать, что

$$\alpha_m(0, 0) = 0, \quad m \geq -3. \quad (4.3)$$

Используя формулы (3.16), (3.17), (3.24), (3.30), (3.38), (3.40) для  $\alpha_m$ ,  $m = -3, -2, -1, 0, \dots$  и принимая во внимание

условия (4.2) и (4.3), получаем:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-30} &= \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}, \\
 \alpha_{-20} &= 0, \\
 \alpha_{-10} &= \frac{t_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)}, \\
 \alpha_{00} &= i \frac{1}{2} \ln \frac{P^{1/3}(s) c_0^{1/3}(0)}{c_0^{1/3}(s) P^{1/3}(0)}, \\
 \alpha_{10} &= -\frac{t_p^2}{2^{5/3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left\{ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left[ \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right] \right\} d\tau, \\
 \alpha_{20} &= -i \frac{t_p}{2^{1/3}} \left\{ c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s) \left[ \frac{1}{2} P^{-1}(s) - \rho^{-1}(s) + \frac{1}{5} P(s) Q(s) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - c_0^{2/3}(0) P^{1/3}(0) \left[ \frac{1}{2} P^{-1}(0) - \rho^{-1}(0) + \frac{1}{5} P(0) Q(0) \right] \right\}, \\
 &\quad p = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

В первом приближении решения уравнения (1.1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 u(s, v) = u_p(s, v) &= \text{const} \sqrt[6]{\frac{c_0(s) P(0)}{P(s) c_0(0)}} \times \\
 &\times \exp \left\{ i \left[ \omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - \omega^{1/3} \frac{t_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \right] \right\} \times \\
 &\times v \left[ -2^{1/3} \frac{1}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} v - t_p \right], \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Функция Эйри  $v(Z)$ , как мы знаем, осциллирует при  $Z < 0$  и экспоненциально убывает при  $Z > 0$ . Следовательно, функции  $u_p(s, v)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , будут осциллировать в полосе

$$-\frac{t_p}{2^{1/3}} c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s) < v \leq 0$$

и экспоненциально убывать при

$$v < -\frac{t_p}{2^{1/3}} c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s).$$

Таким образом, если  $P(s) > 0$ , решения  $u_p(s, \nu)$  сосредоточены в полосе, расположенной при отрицательных значениях нормали, т. е. справа от кривой  $S$ , как раз там, где происходит наложение волн, многократно отраженных границей. Слева от кривой  $S$  сосредоточенных решений построить не удастся, какое бы мы решение уравнения Эйри вместо функции  $v(Z)$  в формуле (4.5) ни выбирали.

В случае ограниченной области  $\Omega$  искомые собственные функции  $u_p(s, \nu)$  должны удовлетворять еще очевидному условию периодичности по переменной  $s$ :

$$u_p(s, \nu) = u_p(s + L, \nu), \quad (4.6)$$

где  $L$  — длина контура  $S$ .

Эффективный радиус кривизны  $P(s)$ , а также коэффициенты разложения скорости  $c(s, \nu)$  по степеням нормали  $\nu$ , т. е. функции  $c_m(s)$ ,  $m \geq 0$ , в случае ограниченной области являются периодическими функциями с периодом  $L$ . Так как коэффициенты полиномов  $\beta_m(s, \nu)$  выражаются непосредственно через  $P(s)$  и  $c_m(s)$ ,  $m \geq 0$ , то все полиномы  $\beta_m(s, \nu)$  будут периодическими функциями  $s$ . Точно так же периодическими функциями являются коэффициенты полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$ , кроме их свободных членов  $\alpha_{m0}(s)$ ,  $m \geq -3$ . Подставляя выражение (3.4) в условия периодичности (4.6) и сокращая получившееся равенство на заведомо периодические множители, приходим к уравнению

$$\exp \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} [\alpha_{m0}(s+L) - \alpha_{m0}(s)] \omega^{-\frac{m}{3}} + O \left( \omega^{-\frac{M}{3}} \right) \right\} = 1,$$

которое в силу (4.3) может быть переписано в виде

$$\sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_{m0}(L) \omega^{-\frac{m}{3}} + O \left( \omega^{-\frac{M}{3}} \right) = 2\pi q, \quad (4.7)$$

где  $q$  — натуральное число.

Уравнение (4.7) служит для определения собственных значений  $\omega_{p,q}$  рассматриваемой задачи. В первом приближении

$$\omega_{p,q} \approx \omega_q = \frac{2\pi q}{\alpha_{-3,0}(L)} = \frac{2\pi q}{L \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)}}. \quad (4.8)$$

Поскольку все наши вычисления относились к случаю  $\omega \gg 1$ , мы должны считать, что целое число  $q \gg 1$ . Решая уравнение (4.7) методом последовательных приближений, для собствен-

ных значений  $\omega_{p,q}$  получаем разложение по дробным степеням  $\omega_q$ :

$$\omega_{p,q} = \omega_q \left[ 1 + a_1 (\omega_q)^{-1/3} + a_2 (\omega_q)^{-2/3} + a_3 (\omega_q)^{-1} + a_4 (\omega_q)^{-4/3} + \dots \right],$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad q \gg 1, \quad (4.9)$$

коэффициенты которого  $a_k$  выражаются через  $\alpha_{m_0}(L)$ .

Используя формулы (4.4), находим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{t_p}{2^{1/3}} \int_0^L \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \cdot \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}, \quad a_3 = 0, \quad (4.10)$$

$$a_4 = \frac{a_2^2}{3} +$$

$$+ \frac{t_p^2}{2^{5/3}} \int_0^L \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau \cdot \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}.$$

Можно показать, что и все прочие нечетные коэффициенты разложения (4.9) равны нулю. Формулы (4.9) и (4.10) определяют асимптотику собственных значений  $\omega_{p,q}$  при  $q \gg 1$ . Отметим, что второй индекс  $p$  входит в выражение собственных значений  $\omega_{p,q}$  только через посредство  $\beta_{00} = -t_p$  — корня функции Эйри  $v(t)$ .

Подставляя найденное значение собственных частот  $\omega_{p,q}$  в формулу (3.41) и учитывая (4.2), (4.4), получаем асимптотические формулы для соответствующих собственных функций:

$$u_{p,q} = A_{p,q} \sqrt[6]{\frac{c_0(s)}{P(s)}} \exp \left\{ i\omega_q \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + \right.$$

$$+ i\omega_q^{1/3} \left[ a_2 \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - \frac{t_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \right] +$$

$$+ \frac{i}{\omega_q^{1/3}} \left[ a_4 \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - a_2 \frac{t_p}{3 \cdot 2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} - \right.$$

$$- \left. \frac{t_p^2}{2^{5/3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau + \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{6c_0(s)} \left( \frac{2c_0'(s)}{c_0(s)} + \frac{P'(s)}{P(s)} \right) v^2 \right] +$$

$$+ O(\omega_q^{-2/3}) \left\} v \left( -t_p - \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} v + O(\omega_q^{-2/3}) \right). \quad (4.11)$$

Здесь  $A_{p,q}$  не зависит от  $s$  и  $v$ , а величины  $\omega_q$ ,  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  определены формулами (4.8), (2.1), (3.37) и (4.10).

Если рассматриваемая область представляет собой круг радиуса  $\rho$ , то  $c_0 = 1$ ,  $c_k(s) = 0$  при  $k \geq 1$  и  $P(\tau) = \rho$ , и, следовательно,

$$a_2 = \frac{t_p}{2^{1/3}} \frac{1}{\rho^{2/3}}, \quad a_4 = \frac{t_p^2}{2^{2/3}} \frac{1}{\rho^{4/3}} \frac{3}{10}.$$

Эти значения совпадают с соответствующими коэффициентами в формуле (2.8) для собственных значений круга.

Получим теперь асимптотическую формулу для собственных значений и собственных функций в том случае, когда на границе области  $\Omega$  выполняется условие (1.3)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0.$$

Продифференцируем выражение (3.4) по нормали и подставим в условие (1.3). После сокращения на экспоненту придем к равенству

$$i \left[ \sum_{m=1}^{M-1} \left. \frac{\partial \alpha_m}{\partial v} \right|_{v=0} \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right] v \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, 0) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} + \\ + \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \left. \frac{\partial \beta_m}{\partial v} \right|_{v=0} \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right] v' \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, 0) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} = 0. \quad (4.12)$$

Суммирование в первой сумме начинается от единицы, так как

$$\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} = 0.$$

В первом приближении равенство (4.12) имеет вид

$$\beta_{01}(s) \cdot v' \{\beta_{00}(s) + O(\omega^{-1/3})\} + O(\omega^{-1/3}) = 0.$$

Поскольку  $\beta_{01} \neq 0$ , то

$$\beta_{00}(s) = -t'_p, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где  $t'_p$  — нули производной функции Эйри  $v'(-t)$  (см. Дополнение 1).

Разложим функцию Эйри и ее производную в равенстве (4.12) в ряды Тейлора по степеням выражения  $\sum_{m=1}^{M-1} \beta_m(s, 0) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3})$ . Располагая затем левую часть равенства (4.12) по степеням  $\omega^{-1/3}$ , получим

$$\sum_{m=1}^{M-1} f_m(\alpha_j, \beta_j) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3}) = 0. \quad (4.13)$$

Коэффициенты  $f_m(\alpha_j, \beta_j)$  зависят от  $\beta_j(s, 0) = \beta_{j0}(s)$ ,  $\frac{\partial \beta_j}{\partial v} \Big|_{v=0} = \alpha_{j1}(s)$ ,  $\frac{\partial \alpha_j}{\partial v} \Big|_{v=0} = \alpha_{j1}(s)$ ,  $j \leq m$ . Равенство (4.13) должно выполняться тождественно относительно  $\omega$ . Следовательно, все коэффициенты  $f_m(\alpha_j, \beta_j)$  должны равняться нулю. Уравнения

$$f_m(\alpha_j, \beta_j) = 0, \quad m = 1, 2, 3 \dots, \quad (4.14)$$

служат для определения функций  $\beta_{m0}(s)$ . Нетрудно подсчитать, что

$$f_1 = [i\alpha_{11}(s) - t'_p \beta_{01}(s) \beta_{10}(s)] v(-t'_p).$$

Так как  $\beta_{00} = \text{const}$ , то  $\alpha_{11}(s) = 0$  (см. (3.31)), и  $f_1$  обращается в нуль при

$$\beta_{10}(s) = 0. \quad (4.15)$$

Учитывая равенство (4.15), находим

$$f_2 = [i\alpha_{21}(s) - t'_p \beta_{01}(s) \beta_{20}(s)] v(-t'_p).$$

Приравнявая  $f_2$  нулю, получаем

$$\beta_{20}(s) = \frac{i\alpha_{21}(s)}{t'_p \beta_{01}(s)} = -\frac{1}{2^{4/3} t'_p} c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s) \left[ \frac{1}{5} P(s) Q(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right].$$

Определив функции  $\beta_{00}(s)$ ,  $\beta_{10}(s)$  и  $\beta_{20}(s)$ , можно полностью подсчитать свободные члены полиномов  $\alpha_{-1}$ ,  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ :

$$\alpha_{-10}(s) = -\frac{t'_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3} P^{2/3}(\tau)},$$

$$\alpha_{00}(s) = i \frac{1}{2} \ln \frac{P^{1/3}(s) c_0^{1/3}(0)}{c_0^{1/3}(s) P^{1/3}(0)},$$

$$\alpha_{10}(s) =$$

$$= -2^{-\frac{5}{3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{1/3}(\tau)} \left[ \frac{t_p'^2}{P(\tau)} + \left( \frac{1}{t_p'} + \frac{8}{3} t_p'^2 \right) \left( \frac{1}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{1}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau.$$

В этих формулах мы выбрали нижний предел интегрирования равным нулю для того, чтобы было выполнено условие (4.3).

Дальнейшие уравнения (4.14) позволяют определить и все прочие функции  $\beta_{m0}(s)$ . В свою очередь функции  $\beta_{m0}(s)$  позволяют вычислить полностью свободные члены полиномов  $\alpha_m$ , т. е. функции  $\alpha_{m0}(s)$ .

Подставив найденные значения  $\alpha_{m0}(s)$  в условие периодичности (4.6), получаем уравнение для определения собственных частот  $\omega_{p,q}$ , соответствующих задаче Неймана. Решение этого уравнения может быть расположено снова по отрицательным степеням

$$\omega_q = 2\pi q \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \text{ и имеет вид}$$

$$\omega_{p,q} = \omega_q [1 + a'_1 \omega_q^{-1/3} + a'_2 \omega_q^{-2/3} + a'_3 \omega_q^{-1} + a'_4 \omega_q^{-4/3} + \dots],$$

$$q \gg 1, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$a'_1 = 0, \quad a'_2 = \frac{t'_p}{2^{1/3}} \int_0^L \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}, \quad a'_3 = 0,$$

$$a'_4 = \frac{a_2'^2}{3} + 2^{-5/3} \int_0^L \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{1/3}(\tau)} \left[ \frac{t_p'^2}{P(\tau)} + \left( \frac{1}{t_p'} + \frac{8}{3} t_p'^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{1}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}, \dots$$

Чтобы получить приближенные выражения для собственных функций задачи Неймана, следует найденные значения  $\omega_{p,q}$  подставить в формулу (3.41).

В физических задачах, помимо условий Дирихле и Неймана, которым искомая функция должна удовлетворять на границе области, часто встречается также условие третьего рода (1.4):

$$\frac{\partial u}{\partial n} - i\omega g(s) u \Big|_s = 0.$$

Здесь  $g(s)$  — положительная функция, описывающая поглощение волн границей области. Обычно безразмерную величину  $1/c_0(s)g(s)$  называют *нормальным импедансом границы*.

Используя построенный выше класс решений уравнения Гельмгольца, нетрудно получить асимптотические формулы для собственных значений и в случае условия (1.4). Подставляя выражение (3.4) в (1.4), разлагая функцию Эйри и ее производную в ряды Тейлора по степеням  $\sum_{m=1}^{M-1} \beta_{m0}(s) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3})$ , приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $\omega^{-1/3}$ , т. е. поступая так же, как и в предыдущем случае, получаем систему уравнений, аналогичную системе (4.14), из которой опре-



деляются функции  $\beta_{m0}(s)$ . Вычисления приводят к следующим результатам:

$$\beta_{00}(s) = -t_p, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\beta_{10}(s) = i2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s) g(s)},$$

$$\beta_{20}(s) = 0.$$

Поскольку значения  $\beta_{00}(s)$  и  $\beta_{20}(s)$  совпадают со значениями этих функций в случае условия  $u|_S = 0$ , функции  $\alpha_{-10}(s)$  и  $\alpha_{10}(s)$  будут по-прежнему определяться формулами (4.4). Для функции  $\alpha_{00}(s)$  вместо формулы (4.4) получаем

$$\alpha_{00}(s) = i \frac{1}{2} \ln \frac{P^{1/3}(s) c_0^{1/3}(0)}{c_0^{1/3}(s) P^{1/3}(0)} + i \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau) P(\tau) g(\tau)}.$$

Появление в выражении для  $\alpha_{00}(s)$  интегрального слагаемого приводит к смещению собственных значений  $\omega_{p,q}$  с вещественной оси в нижнюю полуплоскость:

$$\omega_{p,q} = \omega_q \left[ 1 + \frac{t_p}{2^{1/3}} \int_0^L \frac{d\tau}{c^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \left( \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right)^{-1} \omega_q^{-2/3} - \right. \\ \left. - i \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau) P(\tau) g(\tau)} \left( \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right)^{-1} \omega_q^{-1} + \dots \right].$$

Величина смещения, определяемая в первом приближении интегралом

$$\int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau) P(\tau) g(\tau)} \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1},$$

на языке квантовой механики характеризует полураспад квазистационарного состояния за счет поглощения энергии собственного колебания границей области.

## § 5. Собственные функции области, внешней по отношению к области $\Omega$

Рассмотрим собственные функции области  $S\Omega$ , дополнительной по отношению к области  $\Omega$ . Прежде всего заметим, что речь идет о не совсем обычных собственных функциях. Пусть сначала скорость  $c \equiv 1$ . Из доказательства теоремы

единственности внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца \*) следует, что любое решение уравнения

$$(\Delta + k^2)u(M) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M(x, y) \in C\Omega, \quad (5.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (5.2)$$

и квадратично интегрируемое по всей внешности \*\*)  $\Omega$ , тождественно равно нулю. Доказательство легко распространить и на случай комплексных  $k$ . Таким образом, если и существуют нетривиальные решения уравнения (5.1) при условиях (5.2), они не могут быть, в противоположность обычным собственным функциям, квадратично интегрируемыми.

Перейдем к более точным определениям.

Обозначим через  $G(M_0, M, k)$  функцию Грина внешности  $\Omega$ :

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + k^2)G &= -\delta(M - M_0), \quad k > 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) &= 0, \\ G|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Известно, что функцию Грина  $G(M_0, M, k)$  можно аналитически продолжить по  $k$  в верхнюю полуплоскость, и там она (как функция  $k$ ) будет регулярной функцией. При аналитическом продолжении  $G(M_0, M, k)$  в нижнюю полуплоскость ( $\text{Im } k < 0$ ), можно натолкнуться на полюсы. Вблизи такого полюса  $k = k_0$

$$G(M_0, M, k) = \frac{U(M_0, M)}{(k - k_0)^\alpha} + \text{менее сингулярные члены}. \quad (5.4)$$

Известно \*\*\*) , что функция  $U(M_0, M)$  является линейной комбинацией функций  $u_j(M)$ , удовлетворяющих условиям (5.1), (5.2) при  $k = k_0$ . Эти функции  $u_j(M)$  мы и назовем *собственными функциями внешности  $\Omega$* . По-видимому, аналогичное определение собственных функций применимо при некоторых дополнительных ограничениях и в случае переменного  $c = c(x, y)$ .

Собственные функции внешности круга (их легко можно найти в явном виде методом разделения переменных) экспоненциально растут на бесконечности<sup>1</sup> при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ . Возможно, это обстоятельство имеет место и в общем случае,

\*) См. В. И. Смирнов [3].

\*\*) Мы будем говорить «внешность  $\Omega$ », вместо «область, внешняя по отношению к области  $\Omega$ ».

\*\*\*) См. Рейхардт [1].

если круг заменить произвольной выпуклой и конечной областью  $\Omega$ .

Собственные функции типа шепчущей галереи, построенные в предыдущих параграфах, не исчерпывают всей совокупности собственных функций с большими номерами. Собственные функции внешности  $\Omega$ , которые будут изучены ниже, тоже представляют собой лишь часть собственных функций, а соответствующие им собственные числа являются серией собственных чисел, наиболее близких к вещественной оси из всех собственных чисел с большими номерами. Для внешности круга в этом можно убедиться при помощи непосредственных вычислений, которые имеют хотя и громоздкий, но элементарный характер.

Для построения собственных функций внешности  $\Omega$  прежде всего необходимо найти некоторый класс асимптотических решений уравнения (1.1). По-прежнему вводим координаты  $s$  и  $n$  и полагаем, что  $c = c(s, n)$ . В отличие от § 3, теперь считаем, что  $n > 0$ . Как и ранее,  $P(s) > 0$ . Решение уравнения (3.1) (в котором теперь  $n > 0$ ) ищем в виде

$$u(s, v) = \text{const} \cdot \exp \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\} \times \\ \times w_1 \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right\}, \quad v = \omega^{2/3} n, \quad (5.5)$$

который подсказывается асимптотикой точного решения внешней задачи дифракции на круге. Здесь  $w_1(Z)$  — первая функция Эйри (см. Дополнение 1),  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$  — искомые полиномы от  $v$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ . Функции вида (5.5), к построению которых мы переходим, будут, как мы увидим далее, удовлетворять в некотором смысле принципу предельного поглощения.

Замена функции Эйри  $v(Z)$  первой функцией Эйри  $w_1(Z)$  не отражается на вычислениях § 3, так как обе эти функции удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поэтому, пока речь идет лишь об удовлетворении уравнению (3.1), формулы для полиномов  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  из (5.5) могут быть получены продолжением на значения  $v > 0$  формул § 3 для аналогичных полиномов из (3.4). Эти формулы, однако, содержат произвольные функции, определяющиеся из граничного условия.

Пусть теперь разыскиваются в области  $S\Omega$  (внешней по отношению к  $\Omega$ ) решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию (1.2). Подстановка (5.5) в (1.2) дает

$$w_1 \left( \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, 0) \omega^{-\frac{m}{3}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{3}}\right) \right) = 0. \quad (5.6)$$

Равенство (5.6) определяет оставшиеся произвольными при удовлетворении уравнению (1.1) свободные члены  $\beta_m(s, 0) = \beta_{m0}(s)$  полиномов  $\beta_m(s, \nu)$ :

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= \xi_p, & p &= 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_{m0} &= 0, & m &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Комплексные числа  $\xi_p = t_p e^{i \frac{\pi}{3}}$  — нули функции  $\omega_1(\xi)$ . Новые (по сравнению с § 4) формулы (5.7) для свободных членов полиномов  $\beta_m(s, \nu)$  приводят к новым формулам для свободных членов полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$ . Для них получаются выражения, отличающиеся от (4.4) заменой  $(-t_p)$  на  $\xi_p$ .

Подставляя в (5.5) выражения для  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  из § 3 и учитывая (5.7), получаем

$$\begin{aligned} u(s, \nu) = u_p(s, \nu) &\equiv \text{const} \sqrt[6]{\frac{c_0(s)}{P(s)}} \exp \left\{ i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + \right. \\ &+ \frac{i\xi_p \omega^{1/3}}{2^{1/\varepsilon}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} + \frac{i}{\omega^{1/3}} \frac{\nu^2}{6c_0(s)} \left( \frac{2c_0'(s)}{c_0(s)} + \frac{P'(s)}{P(s)} \right) - \\ &- \frac{i\xi_p^2}{\omega^{1/3} 2^{5/3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau + \\ &\left. + O\left(\omega^{-\frac{2}{3}}\right) \right\} \omega_1 \left( \xi_p - \frac{2^{1/3} \nu}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} + O\left(\omega^{-\frac{2}{3}}\right) \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Входящие в (5.8) функции  $c_0(s)$ ,  $P(s)$  и  $Q(s)$  определены формулами (3.2), (2.1) и (3.37). Первое слагаемое в показателе экспоненты описывает распространение волны вдоль границы области со скоростью  $c_0(s)$ . Второе слагаемое в силу того, что  $\arg \xi_p = \pi/3$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , имеет отрицательную вещественную часть, возрастающую с увеличением  $s$ . За счет этого слагаемого при распространении волны вдоль границы ее интенсивность экспоненциально убывает. Таким образом, решения (5.8) представляют собой волны, скользящие вдоль границы и непрерывно отдающие свою энергию окружающему пространству. В дальнейшем решения (5.8) мы будем называть *волнами соскальзывания* (см. также § 2 гл. 10).

Выше мы указывали, что решения (5.5) в некотором смысле удовлетворяют принципу предельного поглощения. Теперь можно уточнить, что имелось в виду. Пусть среда у нас поглощающая, т. е.  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Тогда  $\arg(-\omega^{2/3} \nu) = \arg(-\nu)$  будет

заклучен между  $-\pi/3$  и  $-\pi$  ( $n > 0$ ). Как следует из асимптотики,  $\omega_1(t) \rightarrow 0$  при  $-\pi < \arg t < -\pi/3$  и  $|t| \rightarrow \infty$  (см. Дополнение 1 и особенно рис. 60). Если мы начнем удаляться вдоль нормали от контура  $S$  ( $|\nu| \rightarrow \infty$ ), то при  $-\pi < \arg(-\nu) < \pi/3$

$$\omega_1 \left[ \xi_p - \frac{2^{1/3} \nu}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} \right] \rightarrow 0,$$

т. е. функция (5.8) при  $\text{Im } \omega > 0$  быстро убывает при удалении от контура  $S$ . Это свойство формального решения (5.5) мы и имели в виду, когда говорили о принципе предельного поглощения\*).

Формулы (5.8) определяют во внешности  $\Omega$  асимптотику решений уравнения (1.1), удовлетворяющих однородному краевому условию  $u|_S = 0$ , в том случае, когда граница  $S$  уходит на бесконечность. Если же граница  $S$  имеет конечную длину  $L$ , то, как и в случае внутренней задачи, возникает дополнительное условие периодичности (4.6). Подстановка (5.8) в (4.6) приводит снова к условию (4.7), в котором, однако, функции  $\alpha_m(s, \nu)$  уже другие, определенные разложением (5.8).

В первом приближении для собственных частот  $\omega_{p,q}$  по-прежнему справедливо равенство (4.8), так как выражение  $\alpha_{-3}$  во внутренней и внешней задачах совпадает. В следующих приближениях (если искать  $\omega_{p,q}$  в виде (4.9)) появляется отличие, сводящееся к тому, что вместо коэффициентов  $a_2$  и  $a_4$  следует писать коэффициенты  $b_2$  и  $b_4$ , получающиеся из  $a_2$  и  $a_4$  заменой  $-t_p$  на  $\xi_p$ . Это отличие, очевидно, переносится и на формулу (4.11) для собственных функций  $u_{p,q}$ . Окончательно имеем

$$\omega_{p,q} = \omega_q \left[ 1 + \frac{b_2}{\omega_q^{2/3}} + \frac{b_4}{\omega_q^{4/3}} + O\left(\frac{1}{\omega_q^2}\right) \right], \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} u_{p,q}(s, \nu) = & B_{p,q} \sqrt[6]{\frac{c_0(s)}{P(s)}} \exp \left\{ i\omega_q \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + \right. \\ & + i\omega_q^{1/3} \left[ b_2 \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + \frac{\xi_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \right] + \\ & + \frac{i}{\omega_q^{1/3}} \left[ \frac{\nu^2}{6c_0(s)} \left( \frac{2c_0'(s)}{c_0(s)} + \frac{P'(s)}{P(s)} \right) + b_4 \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} + \frac{b_2 \xi_p}{3 \cdot 2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} - \right. \end{aligned}$$

\*) В начале настоящего параграфа мы отметили, что достаточно быстро убывающих по мере удаления от контура  $S$  собственных функций внешности  $\Omega$  не существует. Здесь нет противоречия, так как на разложение (5.5) условие  $L$ -периодичности по  $s$  ( $L$  — длина границы  $S$ ), обязательное для собственных функций, сейчас еще не налагается.

$$\begin{aligned}
& - \frac{\xi_p^2}{2^{5/3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau \Big] + \\
& + O\left(\omega_q^{-\frac{2}{3}}\right) \Big\} \omega_1 \left( \xi_p - \frac{2^{1/3} \nu}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} + O\left(\omega_q^{-\frac{2}{3}}\right) \right) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

$$(p=0, 1, 2, \dots; q \gg 1).$$

Коэффициенты  $B_{pq}$  не зависят от координат  $s$  и  $\nu$ , а числа  $b_2$  и  $b_4$  определяются равенствами

$$b_2 = - \frac{\xi_p}{2^{1/3}} \int_0^L \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
b_4 = & \frac{b_2^2}{3} + \\
& + \frac{\xi_p^2}{2^{5/3}} \int_0^L \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau \cdot \left[ \int_0^L \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Из формулы (5.9) и выражения для  $b_2$  в (5.11) следует, что собственные значения  $\omega_{p,q}$ , в отличие от случая внутренней задачи, сдвинуты в нижнюю полуплоскость  $\omega$ . Связь формул (5.9) и (5.10) с формулой (5.4) будет установлена в главе 10 после построения асимптотики функции Грина.

Аналогичным образом могут быть найдены решения уравнения (1.1) для внешности  $S\Omega$  области  $\Omega$  и при других граничных условиях. Приведем окончательный результат для случая граничного условия (1.4). При этом для простоты положим скорость распространения  $c$  постоянной.

Если граница  $S$  области  $\Omega$  уходит на бесконечность, то имеем следующую подпоследовательность асимптотических решений задачи (1.1), (1.4):

$$\begin{aligned}
u_p(s, \nu) = & \frac{C_p}{\rho^{1/6}(s)} \exp \left\{ iks + i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} + \int_0^s \frac{d\tau}{\rho(\tau) g(\tau)} + \right. \\
& + \frac{i\rho'(s) \nu^2}{6k^{1/3} \rho(s)} + \frac{i\xi_p^2 \lambda(s)}{(k/2)^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \Big\} \omega_1 \left( \xi_p - \nu \left( \frac{2}{\rho(s)} \right)^{1/3} - \right. \\
& \left. - \frac{i}{(k/2)^{1/3} \rho^{1/3}(s) g(s)} + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right), \quad p=0, 1, 2, \dots \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Здесь  $C_p$  не зависит от координат,  $k = \omega c^{-1}$ ,

$$\lambda(s) = \int_0^s \rho^{-4/3}(\tau) \left[ \frac{1}{60} + \frac{4}{135} \rho'{}^2(\tau) - \frac{2}{45} \rho(\tau) \rho''(\tau) \right] d\tau. \quad (5.13)$$

Если граница  $S$  имеет конечную длину  $L$ , то дополнительное условие периодичности приводит к появлению собственных значений и собственных функций, подобных (5.9) и (5.10).

Кроме выписанной серии асимптотических решений, существует еще серия асимптотических решений

$$u_p^-(s, v), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих выбору нижнего знака в формуле (3.16) при решении уравнения эйконала.

## § 6. Обоснование полученных асимптотических формул \*)

Ранее были построены выражения, приближенно при  $\omega \rightarrow \infty$  удовлетворяющие уравнениям и краевым условиям.

Этим почти собственным функциям отвечают почти собственные числа (см. § 4). Естественно поставить вопрос, близки ли эти почти собственные числа и функции к некоторым истинным собственным числам и функциям области  $\Omega$ .

Используя некоторые простые теоремы теории самосопряженных операторов в пространстве Гильберта, можно доказать, что построенные нами почти собственные числа близки к некоторым подпоследовательностям истинных собственных чисел.

В отношении собственных функций аналогичного утверждения сформулировать не удастся. Однако некоторую теорему о связи почти собственных функций и истинных собственных функций теории самосопряженных операторов все же позволяет доказать. В основе всех утверждений настоящего параграфа лежит следующая

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — самосопряженный оператор с дискретным спектром в пространстве Гильберта. Пусть, далее,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  — последовательность неотрицательных вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности,  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  — последовательность элементов пространства Гильберта, равных по норме единице и таких, что

1)  $u_n$  принадлежит области определения оператора  $A$ ,

$$2) \quad \|(A - \lambda_n) u_n\| \leq C \lambda_n^{-\xi}, \quad (6.1)$$

где  $C$  и  $\xi$  — постоянные, не зависящие от  $n$ .

Тогда

1) существует подпоследовательность собственных чисел оператора  $A$

$$\lambda_{n_1}^*, \lambda_{n_2}^*, \lambda_{n_3}^*, \dots$$

---

\*) Чтение этого параграфа предполагает у читателя знакомство с основами теории самосопряженных операторов в пространстве Гильберта. Для понимания последующих глав книги чтение параграфа не обязательно.

такая, что

$$|\lambda_n - \lambda_{\kappa_n}^*| < C\lambda_n^{-\zeta}, \quad (6.2)$$

$$2) \quad \|u_n - P_{\Delta_n} u_n\| \leq \frac{C}{C_1} \lambda_n^{-(\zeta - \zeta_1)}, \quad (6.3)$$

где  $P_{\Delta_n}$  — проектор на часть спектра, попадающую в интервал

$$\Delta_n = [\lambda_n - C_1 \lambda_n^{-\zeta_1}, \lambda_n + C_1 \lambda_n^{-\zeta_1}], \quad (6.4)$$

$C_1$  и  $\zeta_1$  — произвольные положительные константы.

Доказательство теоремы короче ее формулировки. Действительно, пусть  $d_\lambda$  — расстояние от точки  $\lambda$  до спектра оператора  $A$ ,  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $A$  ( $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ ),  $\varphi_\kappa$  и  $\lambda_\kappa^*$  — собственные элементы и числа оператора  $A$ .

Первое утверждение теоремы сразу же вытекает из неравенств

$$\frac{1}{d_{\lambda_n}} = \|R_{\lambda_n}\| \geq \frac{\|R_{\lambda_n}(\lambda_n - A)u_n\|}{\|(\lambda_n - A)u_n\|} = \frac{\|u_n\|}{\|(\lambda_n - A)u_n\|} \geq \frac{1}{C\lambda_n^{-\zeta}}. \quad (6.5)$$

Второе утверждение теоремы — следствие цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} C^2 \lambda_n^{-2\zeta} &\geq \| (A - \lambda_n) u_n \|^2 = \sum_{\kappa} |\lambda_\kappa^* - \lambda_n|^2 | (u_n, \varphi_\kappa) |^2 \geq \\ &\geq \sum_{\lambda_\kappa^* \notin \Delta_n} |\lambda_\kappa^* - \lambda_n|^2 | (u_n, \varphi_\kappa) |^2 \geq C_1^2 \lambda_n^{-2\zeta_1} \| P_{\Delta_n} u_n - u_n \|^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Задачи (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3) можно рассматривать как задачи о нахождении собственных элементов самосопряженных операторов в некотором функциональном пространстве Гильберта.

Введем гильбертово пространство  $L_{2c}$  функций  $\{u\}$ , заданных в области  $\Omega$ , скалярное произведение определим равенством

$$(u_1, u_2)_{L_{2c}} = \int_{\Omega} u_1(x, y) \overline{u_2(x, y)} \frac{1}{c^2} d\Omega.$$

Легко убедиться, интегрируя по частям, что для любых двух дважды непрерывно дифференцируемых функций  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющих краевому условию (1.2) или (1.3), имеет место равенство

$$\int_{\Omega} (-c^2 \Delta u_1) \bar{u}_2 \frac{1}{c^2} d\Omega = \int_{\Omega} u_1 \overline{(-c^2 \Delta u_2)} \frac{1}{c^2} d\Omega$$

или

$$(-c^2 \Delta u_1, u_2)_{L_{2c}} = (u_1, -c^2 \Delta u_2)_{L_{2c}},$$

т. е. оператор  $-c^2 \Delta$  симметричен на таких функциях.



Если равенство  $-c^2\Delta u = f$  ( $f \in L_{2c}$ ) и удовлетворение краевых условий (1.2) (или (1.3)) понимать в обобщенном смысле\*), то оператор  $-c^2\Delta$  будет уже самосопряженным оператором в  $L_{2c}$  и к нему будет применима доказанная выше теорема. Таким образом, обобщенный оператор  $-c^2\Delta$  будет самосопряженным в  $L_{2c}$  и имеющим дискретный спектр. При достаточно гладком контуре  $S$  и функции  $c(x, y) > 0$  собственные функции оператора  $-c^2\Delta$  при краевых условиях (1.2) или (1.3) будут достаточно гладкими функциями в замыкании области  $\Omega$ . Доказательство этих утверждений нетрудно провести методами известной монографии О. А. Ладженской [1].

Чтобы воспользоваться теоремой 1, надо построить последовательность функций, которая играла бы роль последовательности  $u_n(x, y)$ . Это и будет нашей ближайшей целью.

Обратимся сначала к случаю краевого условия (1.2)  $u|_S = 0$ .

Положим

$$u_{p, q}^{(M)} = \exp\left(i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}}\right) v \left(\sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, v) \omega^{-\frac{m}{3}}\right), \quad (6.7)$$

где  $\beta_m$  удовлетворяют условиям (4.2), а  $\omega$  определяется из уравнения

$$\sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_{m0}(L) \omega^{-\frac{m}{3}} = 2\pi q, \quad (6.8)$$

где  $q$  — натуральное число. Функции  $u_{p, q}^{(M)}$  точно удовлетворяют условию периодичности и краевому условию (1.2).

Чтобы можно было построить функции  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ ,  $m \leq M-1$ , входящие в (6.7), и чтобы выражение (6.7) удовлетворяло уравнению (1.1) с той точностью, какая указывалась в конце § 3 достаточно, чтобы скорость  $c(x, y)$  имела  $M+1$  производных, а радиус кривизны —  $M$  производных. Заметим, что функция  $u_{p, q}^{(M)}$  определена в пограничной полоске  $0 \geq n \geq \text{const} < 0$ , а для того, чтобы воспользоваться теоремой 1, надо построить функции  $u_n$ , определенные по всей области  $\Omega$ .

Для построения искомой последовательности функции нам следует умножить  $u_{p, q}^{(M)}$  на должным образом подобранную срезающую функцию  $\eta(n)$ , равную единице в окрестности точки  $n = 0$  и равную нулю вне пограничной полоски. Построим срезающую функцию  $\eta(n)$ . Пусть  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$  — два фиксированных положительных числа, причем  $\varepsilon_1 < 2/3$ . При помощи чисел  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  определим две пограничные полоски

$$-C_1 \omega^{-2/3+\varepsilon_1} \equiv n_1 \leq n \leq 0, \quad C_1 = \text{const} > 0, \quad (6.9)$$

и

$$-C_2 \omega^{-2/3+\varepsilon_2} \equiv n_2 \leq n \leq 0, \quad C_2 = \text{const} > 0. \quad (6.10)$$

Поскольку  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , при достаточно больших  $\omega$  полоска (6.10) является более узкой и целиком содержится в полоске (6.9). Определим функцию  $\eta(n)$  в промежутке  $n_1 \leq n \leq 0$  так, что  $\eta(n) \equiv 1$  при  $n_2 \leq n \leq 0$ ,  $\eta(n) \equiv 0$  в

\*) Мы говорим, что для функции  $u \in L_{2c}$  имеет место в обобщенном смысле равенство  $-c^2\Delta u = f$  ( $f \in L_{2c}$ ) и в обобщенном смысле выполняются краевые условия (1.2) (или (1.3)), если для любой дважды непрерывно дифференцируемой в замыкании области  $\Omega$  функции  $v$ , удовлетворяющей краевому условию (1.2) (или (1.3)), имеет место равенство

$$\int_{\Omega} u (-c^2 \Delta v) \frac{1}{c^2} d\Omega = \int_{\Omega} f v \frac{1}{c^2} d\Omega.$$

окрестности  $n = n_1$ , и будем считать, что  $\eta(n)$  имеет производные всех порядков. Заметим, что в полосе

$$n_1 \leq n \leq n_2 \quad (6.11)$$

функция  $u_{p,q}^{(M)}(s, n)$  в силу оценок (3.45) убывает экспоненциально по  $\omega$  вместе со всеми производными.

Рассмотрим теперь функцию  $V_{p,q}(x, y)$ , определенную в области  $\Omega$  равенствами

$$V_{p,q}(x, y) = \begin{cases} u_{p,q}^{(M)} \eta(n), & (x, y) \in \{n_1 \leq n \leq 0\}, \\ 0, & (x, y) \notin \{n_1 \leq n \leq 0\}. \end{cases}$$

Функции  $V_{p,q}(x, y)$  точно удовлетворяют краевому условию (1.2). В полосе (6.11), в силу свойств множителя  $u_{p,q}^{(M)}$ , функция  $V_{p,q}(M)$  и все ее производные экспоненциально убывают по  $\omega$ , точнее имеют место оценки

$$V_{p,q} = O[\exp(-\Delta\omega^{\varepsilon_2/3})], \quad \Delta > 0,$$

и

$$\frac{\partial^{l_1+l_2} V_{p,q}}{\partial s^{l_1} \partial n^{l_2}} = O[\omega^{l_1+2/3 l_2} \exp(-\Delta\omega^{\varepsilon_2/3})], \quad \Delta > 0$$

(см. формулы (3.43)–(3.46)).

Нормируя  $V_{p,q}(x, y)$ , получим функцию

$$\tilde{V}_{p,q}(x, y) = \frac{V_{p,q}(x, y)}{\sqrt{\int_{\Omega} |V_{p,q}|^2 d\Omega}}. \quad (6.12)$$

На основании оценки (3.43) можно утверждать, что функция  $\tilde{V}_{p,q}(x, y)$  будет удовлетворять уравнению

$$(-c^2\Delta - \omega_{p,q}^2) \tilde{V}_{p,q}(x, y) = \frac{O(\omega_{p,q}^{-(M-4)/3})}{\sqrt{\int_{\Omega} |V_{p,q} \eta(n)|^2 d\Omega}}.$$

Знаменатель в последней формуле нетрудно оценить снизу. В самом деле, в пограничной полоске, толщина которой имеет порядок  $O(\omega^{-2/3})$ , функция  $V_{p,q} = O(1)$  и вне ее экспоненциально убывает, поэтому

$$\int_{\Omega} |V_{p,q}(x, y)|^2 d\Omega = O(\omega^{-2/3})$$

и

$$(-c^2\Delta - \omega_{p,q}^2) \tilde{V}_{p,q}(x, y) = O(\omega_{p,q}^{-(M-5)/3}). \quad (6.13)$$

Функции  $\tilde{V}_{p,q}(x, y)$  ( $p$  фиксировано,  $q \rightarrow \infty$ ) могут играть роль последовательности  $u_n$  в теореме 1.

В случае краевого условия (1.3)  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$  функции  $\tilde{V}_{p,q}$  строятся несколько иначе. Если взять функцию  $u_{p,q}^{(M)}$ , определенную равенством (6.7), при условии, что полиномы  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  удовлетворяют условиям (6.8) и (4.14), то такая функция хотя и будет периодична по  $s$ , краевому условию будет удовлетворять лишь с точностью  $O\left(\omega^{-\frac{2}{3}\left(\frac{M}{2}-1\right)}\right)$ , так как

$$\frac{\partial u_{p,q}^{(M)}}{\partial n} \Big|_{n=0} = O\left(\omega^{-\frac{2}{3}\left(\frac{M}{2}-1\right)}\right). \quad (6.14)$$

Оценка (6.14) следует из формул (4.12)–(4.14) и соотношения  $\nu = n\omega^{2/3}$ . Поэтому в случае краевого условия (1.3) функцию  $V_{p,q}$  определим равенством

$$V_{p,q}(x,y) = u_{p,q}^{(M)} \eta(n) \exp\left(-\frac{\frac{\partial u_{p,q}^{(M)}}{\partial n} \Big|_{n=0}}{u_{p,q}^{(M)}} n\right)^* \quad (6.15)$$

в полосе  $n_1 \leq n \leq 0$ . Вне этой полосы пусть  $V_{p,q} = 0$ .

Функция (6.15) будет уже точно удовлетворять краевому условию (1.3). Нормированная функция

$$\tilde{V}_{p,q}(x,y) = \frac{V_{p,q}(x,y)}{\sqrt{\int_{\Omega} |V_{p,q}|^2 d\Omega}} \quad (6.16)$$

будет удовлетворять краевому условию (1.3) и уравнению (6.13). Очевидно, функции (6.16) при фиксированном  $p$  и  $q \rightarrow \infty$  могут играть роль последовательности  $u_n$  в теореме 1 в случае краевого условия (1.3).

Итак, нужная последовательность функций построена для обоих краевых условий. Следовательно, в силу теоремы 1, существуют подпоследовательности собственных чисел  $(\omega_{p,q}^*)^2$  оператора  $-c^2\Delta$ , соответствующие краевым условиям (1.2) (или (1.3)), такие, что

$$|\omega_{p,q}^2 - (\omega_{p,q}^*)^2| \leq C\omega_{p,q}^{-(M-5)/3}, \quad p \text{ фиксировано, } q = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\omega_{p,q}$  — решение уравнения (6.8), откуда при  $M > 2$

$$|\omega_{p,q} - \omega_{p,q}^*| \leq C\omega_{p,q}^{-(M-2)/3}. \quad (6.17)$$

В первом приближении (см. § 4)  $\omega_{p,q} \sim 2\pi q \left[ \int_0^L \frac{ds}{c} \right]^{-1}$ , поэтому правую часть в неравенстве (6.17) можно заменить на  $O(q^{-(M-2)/3})$ .

\*) Функция  $u_{p,q}^{(M)} \Big|_{n=0} \neq 0$  и, более того,  $(u_{p,q}^{(M)})^{-1} \Big|_{n=0} = O(1)$ . Это следует из того, что функция Эйри не имеет кратных корней, и из условий (4.14).

Заменяя в неравенстве (6.17)  $\omega_{p,q}$  на его асимптотическое разложение (4.9) в случае краевого условия (1.2) или на аналогичное ему разложение в случае краевого условия (1.3), окончательно получим следующий результат.

**Теорема 2.** Если скорость  $s(x, y)$  и радиус кривизны контура  $S$  имеют гладкость, достаточную для построений §§ 3, 4, то для каждого  $p = 0, 1, 2, \dots$  существует подпоследовательность собственных частот  $\omega_{p,q}^*$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\omega_q \left( 1 + \sum_{i=1}^M a_{ip} \omega_q^{-i/3} \right) = \omega_{p,q}^* + O(q^{-(M-2)/3}). \quad (6.18)$$

Коэффициенты  $a_{ip}$  в равенстве (6.18) в случае краевого условия (1.2) совпадают с коэффициентами  $a_i$  в формуле (4.9) и с аналогичными им коэффициентами  $a'_i$  в случае краевого условия (1.3).

Как мы уже отмечали, для того чтобы были возможны выкладки §§ 3 и 4, достаточно, чтобы скорость  $s$  имела  $M+1$  производных, а радиус кривизны —  $M$  производных.

# О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЛУЧА ОБЛАСТИ

В § 4 главы 4 с помощью лучевого метода в малом была рассмотрена задача о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности луча, выходящего на границу  $\Sigma$  области  $\Omega$  в двух точках  $C$  и  $D$  и ортогонального  $\Sigma$  в этих точках.

В этой главе тот же класс собственных функций будет рассмотрен методом эталонных задач. Все построения концентрируются вокруг двух вопросов: 1) построение формального решения уравнения

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} u = 0,$$

сосредоточенного в окрестности конечного отрезка произвольного луча и 2) удовлетворение краевых условий. Интересно отметить, что удовлетворить краевым условиям даже в первом приближении удастся лишь в том случае, когда рассматриваемый экстремальный луч области устойчив (см. § 4 гл. 4), хотя для построения формального решения уравнения Гельмгольца в окрестности произвольного луча (без учета краевых условий) выполнения условий устойчивости не требуется.

Идеи настоящей главы получают дальнейшее развитие в главе 9 книги, где рассмотрена более общая задача о собственных функциях трехмерной области, сосредоточенных в окрестности замкнутого луча, отражающегося от границы области в  $N$  точках. Математический аппарат главы 9 может быть применен и к решению плоской задачи, рассматриваемой в настоящей главе.

## § 1. Эталонная задача

В соответствии с методом эталонной задачи (см. § 1 гл. 6) прежде всего мы должны рассмотреть простейшую эталонную задачу, допускающую точное решение, сосредоточивающееся при  $\omega \rightarrow \infty$  в окрестности некоторого луча. Такую задачу мы получим, положив в уравнении

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} u = 0 \tag{1.1}$$

функцию  $c(x, y)$  равной

$$c(x, y) = c(y) = c_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad 0 < c_0 = \text{const.} \quad (1.2)$$

При такой скорости ось  $OX$  является лучом, а решение волнового уравнения (1.1) может быть построено методом разделения переменных.

Будем искать решения уравнения (1.1) в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.3)$$

Подставляя произведение (1.3) в уравнение (1.1), после разделения переменных для функций  $X(x)$  и  $Y(y)$  получаем уравнения

$$X''(x) + \zeta^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \left[ \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( 1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right) - \zeta^2 \right] Y(y) = 0. \quad (1.4)$$

Решения первого уравнения запишем в виде

$$X(x) = e^{\pm i\zeta x},$$

а во втором — перейдем к новой переменной

$$v = \frac{\omega^{1/2}}{\sqrt{c_0 y_0}} y.$$

В результате мы получим уравнение

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (2q + 1 - v^2) Y = 0, \quad 2q + 1 = y_0 \left( \frac{\omega}{c_0} - \frac{c_0}{\omega} \zeta^2 \right),$$

решения которого равны  $D_q(\sqrt{2}v)$  ( $D_q(z)$  — функция параболического цилиндра\*). Функции параболического цилиндра  $D_q(z)$  стремятся к нулю при  $z \rightarrow \pm\infty$  в том и только том случае, когда  $q$  натуральное число:  $q = 0, 1, 2$ . Таким образом, если мы хотим построить решение уравнения (1.1), стремящееся к нулю при  $y \rightarrow \pm\infty$ , мы должны положить

$$y_0 \left( \frac{\omega}{c_0} - \frac{c_0}{\omega} \zeta^2 \right) - \frac{1}{2} = q.$$

\* С функциями параболического цилиндра  $D_q(z)$  мы уже встречались в главе 5. Они образуют полный набор собственных функций краевой задачи

$$y''_{zz} + \left( \lambda - \frac{z^2}{4} \right) y = 0, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm\infty,$$

очевидно, имеющей дискретный спектр, причем собственное число, отвечающее  $D_q(z)$ , равно  $q + 1/2$ . Имеют место формулы

$$D_q(z) = H_q \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) e^{-z^2/4}, \quad D_q(\sqrt{2}v) = H_q(v) e^{-v^2/2},$$

где  $H_q(v)$  — полином Эрмита (см В. И. Смирнов [2]).

Отсюда для постоянной разделения  $\zeta$  получаем выражение

$$\zeta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{c_0}{y_0} \frac{2q+1}{\omega}}.$$

Это дает нам возможность записать решение в виде

$$u_q(x, y) = e^{\pm i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{c_0}{y_0} \frac{2q+1}{\omega}} x} D_q \left( \frac{2^{1/2} \omega^{1/2}}{\sqrt{c_0 y_0}} y \right). \quad (1.5)$$

Если  $\omega < (2q+1) \frac{c_0}{y_0}$ , решения  $u_q(x, y)$  будут экспоненциально расти или убывать с увеличением координаты  $x$ , если же  $\omega > (2q+1) \frac{c_0}{y_0}$ , получаем колеблющиеся решения уравнения (1.1). Если  $\omega \gg (2q+1) \frac{c_0}{y_0}$ , то квадратный корень в показателе экспоненты может быть разложен в ряд, и тогда

$$u_q(x, y) = \exp \left\{ \pm i \frac{\omega}{c_0} \left[ x - \frac{c_0}{y_0} \frac{2q+1}{2\omega} x - \frac{c_0^2}{y_0^2} \frac{(2q+1)^2}{8\omega^2} x + \dots \right] \right\} \times \\ \times D_q \left( \frac{2^{1/2} \omega^{1/2}}{\sqrt{c_0 y_0}} y \right). \quad (1.6)$$

В силу того, что функция  $D_q(\sqrt{2} v)$  осциллирует при  $|v| \leq \sqrt{2q+1}$  и экспоненциально убывает при  $|v| > \sqrt{2q+1}$ , решения (1.6) существенно отличны от нуля только в узкой полоске

$$|y| \leq \sqrt{c_0 y_0} \frac{\sqrt{2q+1}}{\omega^{1/2}},$$

т. е. сосредоточены в окрестности луча  $y = 0$ , совпадающего с осью  $OX$ .

Вывод о том, что решения уравнения Гельмгольца, сосредоточенные в окрестности произвольного луча, выражаются через функции параболического цилиндра, можно было бы сделать и на основании результатов §§ 4, 5 главы 5, посвященной методу параболического уравнения, однако исследование эталонной задачи позволяет выявить аналитический характер не только первого приближения, но и всех последующих.

## § 2. Построение главных членов формальных рядов

Для решений уравнения Гельмгольца, сосредоточенных в общем случае в окрестности отрезка произвольного луча, построим формальные ряды и найдем несколько их первых членов.

Прежде всего, опираясь на аналогию между общей и эталонной задачей, найдем вид решений уравнения Гельмгольца, сосредоточенных в окрестности отрезка произвольного луча в общем случае. Пусть  $S$  — отрезок произвольного луча в неоднородной среде. На основании геометро-оптических построений и исследования эталонной задачи естественно ожидать, что существует формальное решение уравнения (1.1), сосредоточенное в полоске, окружающей  $S$  и имеющей ширину порядка  $O(\omega^{-1/2})$ . Введем в окрестности  $S$  систему координат  $(s, n)$  (см. § 3 гл. 4). В силу того, что параметры Ламе в этой системе координат имеют выражение (3.3) (гл. 4), уравнение (1.1) вблизи  $S$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} \left( 1 + \frac{n}{\rho(s)} \right) u = 0. \quad (2.1)$$

Скорость  $c = c(s, n)$  будем считать имеющей производные всех порядков, и поэтому для любого  $M = 1, 2, 3, \dots$

$$c(s, n) = c_0(s) + c_1(s)n + c_2(s)n^2 + \dots + c_M(s)n^M + O(n^{M+1}),$$

$$c_0(s) = c(s, 0), \quad c_l = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dn^l} c(s, n) \Big|_{n=0}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Введем новую переменную

$$v = \omega^{1/2} n. \quad (2.3)$$

В силу того, что в интересующей нас полоске, окружающей  $S$ , где сосредоточены искомые решения уравнения (2.1),  $n = O(\omega^{-1/2})$ , при больших  $\omega$  переменная  $v$  — уже конечная величина:  $v = O(1)$ . В переменных  $s, v$  уравнение (2.1) примет вид

$$\omega A \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \omega^{1/2} B \frac{\partial u}{\partial v} + c \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \omega^{-1/2} D \frac{\partial u}{\partial s} + \omega^2 E u = 0, \quad (2.4)$$

где

$$A = 1 + \omega^{-1/2} \frac{v}{\rho(s)}, \quad B = \frac{1}{\rho(s)}, \quad C = \left( 1 + \omega^{-1/2} \frac{v}{\rho(s)} \right)^{-1}, \quad (2.5)$$

$$D = \frac{v}{\rho^2(s)} \rho'(s) \left( 1 + \omega^{-1/2} \frac{v}{\rho(s)} \right)^{-2}, \quad E = \left( 1 + \omega^{-1/2} \frac{v}{\rho(s)} \right) c^{-2}(s, n).$$



Разлагая  $C$ ,  $D$  и  $E$  в ряды по степеням  $\omega^{-1/2}$ , получим

$$C = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \left[ \frac{\nu}{\rho(s)} \right]^m \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\nu^M \omega^{-\frac{M}{2}}\right), \quad (2.6)$$

$$D = \frac{\nu}{\rho^2(s)} \rho'(s) \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m (m+1) \left[ \frac{\nu}{\rho(s)} \right]^m \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\nu^M \omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\}, \quad (2.7)$$

$$E = \frac{1}{c_0^2(s)} + \sum_{m=1}^{M-1} e_m(s) \left[ \frac{\nu}{\rho(s)} \right]^m \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\nu^M \omega^{-\frac{M}{2}}\right), \quad (2.8)$$

где

$$e_1 = \frac{\rho(s)}{c_0^2(s)} \left[ \frac{1}{\rho(s)} - 2 \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right], \quad (2.9)$$

$$e_2 = -\frac{\rho^2(s)}{c_0^2(s)} \left[ 2 \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \frac{1}{\rho(s)} + 2 \frac{c_2(s)}{c_0(s)} - 3 \frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} \right], \quad (2.10)$$

$$e_3 = -\frac{\rho^3(s)}{c_0^2(s)} \left[ \left( 2 \frac{c_2(s)}{c_0(s)} - 3 \frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} \right) \frac{1}{\rho(s)} + 2 \frac{c_3(s)}{c_0(s)} - 6 \frac{c_1(s)c_2(s)}{c_0^2(s)} + 4 \frac{c_1^3(s)}{c_0^3(s)} \right], \quad (2.11)$$

Коэффициенты, стоящие в разложениях (2.6)–(2.8) при  $\omega^{-m/2}$ , представляют собой полиномы относительно  $\nu$ , коэффициенты которых являются функциями  $s$ . В связи с этим по аналогии с решениями (1.6) эталонной задачи будем искать решение уравнения (2.4) в виде

$$u(s, \nu) = \text{const} \exp \left\{ i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\} \times \\ \times D_q \left\{ \sqrt{2} \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\}, \quad (2.12)$$

где  $D_q(\sqrt{2}\Psi)$  — функции параболического цилиндра, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2}{d\Psi^2} D_q(\sqrt{2}\Psi) + [(2q+1) - \Psi^2] D_q(\sqrt{2}\Psi) = 0. \quad (2.13)$$

Коэффициенты  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  будем считать, так же как и в разложениях (2.6)–(2.8), полиномами относительно  $\nu$ :

$$\alpha_m(s, \nu) = \sum_{l=0}^{N_1} \alpha_{ml}(s) \nu^l, \quad (2.14)$$

$$\beta_m(s, \nu) = \sum_{l=0}^{N_2} \beta_{ml}(s) \nu^l, \quad (2.15)$$

Найдем уравнения, которым должны удовлетворять полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$ , чтобы выражение (2.12) формально удовлетворяло уравнению (2.4). После подстановки функции  $u(s, \nu)$ , определенной равенством (2.12), в уравнение (2.4) оно будет содержать функцию  $D_q(\sqrt{2}\Psi)$  и ее производные  $\frac{d}{d\Psi} D_q(\sqrt{2}\Psi)$  и  $\frac{d^2}{d\Psi^2} D_q(\sqrt{2}\Psi)$ . Используя уравнение (2.13), мы можем выразить  $\frac{d^2}{d\Psi^2} D_q(\sqrt{2}\Psi)$  через  $D_q(\sqrt{2}\Psi)$ , и тогда результат подстановки  $u(s, \nu)$  в уравнение (2.4) после сокращения на экспоненту запишется в виде

$$a(s, \nu; \omega) D_q \{ \sqrt{2} \Psi(s, \nu, \omega) \} + \\ + b(s, \nu; \omega) \frac{d}{d\Psi} D_q \{ \sqrt{2} \Psi(s, \nu, \omega) \} = 0, \quad (2.16)$$

где  $a(s, \nu; \omega)$  и  $b(s, \nu; \omega)$  — довольно сложные выражения, зависящие от коэффициентов уравнения (2.4) и полиномов  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ . Уравнение (2.16) будет удовлетворено в том и только в том случае, если коэффициенты при линейно независимых функциях  $D_q$  и  $\frac{dD_q}{d\Psi}$  будут равны нулю, т. е.

$$a(s, \nu; \omega) = 0, \quad b(s, \nu; \omega) = 0. \quad (2.17)$$

Эти равенства должны выполняться тождественно относительно  $\omega$ .

Расположим  $a(s, \nu; \omega)$  и  $b(s, \nu; \omega)$  по степеням  $\omega^{-1/2}$ :

$$a(s, \nu; \omega) = \omega \sum_{m=-4}^{M-1} a_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}+1}\right), \\ b(s, \nu; \omega) = \omega \sum_{m=-2}^{M-1} b_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}+1}\right). \quad (2.18)$$

Коэффициенты  $a_m(s, \nu)$  и  $b_m(s, \nu)$  содержат здесь частные производные по  $s$  и  $\nu$  от искомым полиномов  $\alpha_n(s, \nu)$  и  $\beta_n(s, \nu)$ . Уравнения (2.17) будут выполняться тождественно относительно  $\omega$  в том и только в том случае, если

$$a_m(s, \nu) = 0, \quad m = -4, -3, -2, \dots, \\ b_m(s, \nu) = 0, \quad m = -2, -1, 0, \dots \quad (2.19)$$

Равенства (2.19) представляют собой рекуррентную систему уравнений в частных производных, которым должны удовлетворять искомые полиномы  $\alpha_n(s, \nu)$  и  $\beta_n(s, \nu)$ .

Найдем главные члены формальных рядов  $\alpha_{-2}(s, \nu)$ ,  $\alpha_{-1}(s, \nu)$ ,  $\alpha_0(s, \nu)$  и  $\beta_0(s, \nu)$ . Это позволит нам значительно упростить уравнения системы (2.19), соответствующие номерам  $m \geq 1$ .

Проделав необходимые вычисления, получаем

$$a_{-4}(s, v) \equiv - \left( \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \right)^2 = 0, \quad (2.20)$$

$$a_{-3}(s, v) \equiv - 2 \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} - \left( \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \right)^2 \cdot \frac{v}{\rho} = 0, \quad (2.21)$$

$$a_{-2}(s, v) \equiv - \left( \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial a_0}{\partial v} - 2 \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \frac{v}{\rho} + \\ + i \frac{\partial^2 a_{-2}}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial a_{-2}}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{c_0^2(s)} = 0, \quad (2.22)$$

$$a_{-1}(s, v) \equiv - 2 \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \frac{\partial a_0}{\partial v} - \left( \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \right)^2 \frac{v}{\rho} + i \frac{\partial^2 a_{-1}}{\partial v^2} - \\ - 2 \frac{\partial a_{-2}}{\partial s} \frac{\partial a_{-1}}{\partial s} + \left( \frac{\partial a_{-2}}{\partial s} \right)^2 \frac{v}{\rho} + e_1(s) \frac{v}{\rho} = 0, \quad (2.23)$$

$$b_{-2}(s, v) \equiv 2i \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0, \quad (2.24)$$

$$b_{-1}(s, v) \equiv 2i \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + 2i \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + 2i \frac{\partial a_{-2}}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \frac{v}{\rho} = 0. \quad (2.25)$$

Из уравнения (2.20) вытекает, что  $a_{-2}(s, v)$  не зависит от  $v$  и, следовательно, является полиномом нулевой степени относительно  $v$ :

$$a_{-2}(s, v) = a_{-20}(s). \quad (2.26)$$

В силу (2.26) уравнения (2.21) и (2.24) удовлетворяются тождественно, а уравнение (2.25) сводится к

$$2i \frac{\partial a_{-1}}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено как при  $\frac{\partial a_{-1}}{\partial v} = 0$ , так и при  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0$ . Однако, считая  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} = 0$ , мы вступили бы в противоречие с частным случаем (см. § 1) разделяющихся переменных, когда  $\frac{\partial \beta_0}{\partial v} \neq 0$ . Полагая  $\frac{\partial a_{-1}}{\partial v} = 0$ , приходим к равенству

$$a_{-1}(s, v) = a_{-10}(s). \quad (2.27)$$

Подставляя (2.26) и (2.27) в уравнение (2.22), получаем

$$\left( \frac{da_{-20}}{ds} \right)^2 = \frac{1}{c_0^2(s)},$$

откуда

$$a_{-20}(s) = \pm \int_{a_{-20}}^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}, \quad (2.28)$$

где  $d_{-2}$  — некоторая произвольная постоянная. Дальнейшие вычисления мы проведем для знака  $\dagger$  в формуле (2.28). Из формулы (2.9), (2.23) и равенств

$$\frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial s} = \frac{1}{c_0(s)}, \quad \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} = 0 \quad *) \quad (2.29)$$

следует, что

$$\frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{-1}(s, \nu) = d_{-1}, \quad (2.30)$$

где  $d_{-1}$  — произвольная постоянная.

С учетом установленных равенств

$$\frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha_{-1}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{-2}}{\partial s} = \frac{1}{c_0(s)} \quad (2.31)$$

уравнения системы (2.19) при  $m=0$  принимают вид

$$\begin{aligned} a_0(s, \nu) \equiv & - \left( \frac{\partial \alpha_0}{\partial \nu} \right)^2 + i \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \nu^2} - 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_0}{\partial s} - \frac{1}{c_0^2(s)} \frac{\nu^2}{\rho^2} + \\ & + e_2(s) \frac{\nu^2}{\rho^2} - \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial \nu} \right)^2 (2q + 1 - \beta_0^2) - i \frac{c_0'(s)}{c_0^2(s)} = 0, \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$b_0(s, \nu) \equiv 2i \frac{\partial \alpha_0}{\partial \nu} \frac{\partial \beta_0}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \nu^2} + 2i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \beta_0}{\partial s} = 0. \quad (2.33)$$

В уравнении (2.32) коэффициент при  $\nu^2$  на основании формул (2.10) и (2.29) может быть записан в виде

$$- \frac{1}{c_0^2(s)} \frac{1}{\rho^2(s)} + \frac{e_2(s)}{\rho^2(s)} = - 2 \frac{c_2(s)}{c_0^3(s)}.$$

Уравнения (2.32) и (2.33) служат для определения полиномов  $\alpha_0(s, \nu)$  и  $\beta_0(s, \nu)$ . Из уравнения (2.33) следует, что  $\alpha_0(s, \nu)$  — полином второй степени:

$$\alpha_0(s, \nu) = \alpha_{00}(s) + \alpha_{01}(s) \nu + \alpha_{02}(s) \nu^2. \quad (2.34)$$

Если  $\alpha_0(s, \nu)$  — полином второй степени, то из уравнения (2.32) вытекает, что  $\beta_0(s, \nu)$  — полином первой степени:

$$\beta_0(s, \nu) = \beta_{00}(s) + \beta_{01}(s) \nu. \quad (2.35)$$

\*) Соотношение  $1/P(s) = 0$  означает, что эффективный радиус кривизны  $P(s)$  равен бесконечности, т. е. кривая  $S$  является лучом (см. §§ 3 и 4 гл. 4).

Подставляя полиномы (2.34) и (2.35) в уравнения (2.32) и (2.33) и располагая результат по степеням  $v$ , получим

$$\begin{aligned} & \left(-4\alpha_{02}^2 - 2\frac{1}{c_0}\alpha'_{02} - 2\frac{c_2}{c_0^3} + \beta_{01}^4\right)v^2 + \left(-4\alpha_{02}\alpha_{01} - 2\frac{1}{c_0}\alpha'_{01} + 2\beta_{01}^3\beta_{00}\right)v + \\ & + \left(-\alpha_{01}^2 + 2i\alpha_{02} - 2\frac{1}{c_0}\alpha'_{00} - (2q+1)\beta_{01}^2 + \beta_{01}^2\beta_{00}^2 - i\frac{c'_0}{c_0^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

и

$$\left(2\alpha_{02}\beta_{01} + \frac{1}{c_0}\beta'_{01}\right)v + \left(\alpha_{01}\beta_{01} + \frac{1}{c_0}\beta'_{00}\right) = 0. \quad (2.37)$$

Эти два равенства будут тождественно выполняться относительно  $v$  только в том случае, если равны нулю все круглые скобки. Из (2.37) находим

$$\alpha_{02} = -\frac{1}{2c_0}\frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}}, \quad \alpha_{01} = -\frac{1}{c_0}\frac{\beta'_{00}}{\beta_{01}}. \quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.38) в уравнение (2.36) и приравняв нулю коэффициенты при  $v^2$ ,  $v^1$  и  $v^0$ , получаем уравнения для определения  $\beta_{01}$ ,  $\beta_{00}$  и  $\alpha_{00}$ :

$$\frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{c_0}\frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}}\right)' - \left(\frac{1}{c_0}\frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}}\right)^2 + \beta_{01}^4 - 2\frac{c_2}{c_0^3} = 0, \quad (2.39)$$

$$2\frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{c_0}\frac{\beta'_{00}}{\beta_{01}}\right)' - 2\frac{1}{c_0^2}\frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}}\beta'_{00} + 2\beta_{01}^3\beta_{00} = 0, \quad (2.40)$$

$$2\frac{1}{c_0}\alpha'_{00} = -i\frac{c'_0}{c_0^2} - i\frac{1}{c_0}\frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}} - (2q+1)\beta_{01}^2 - \frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\beta'_{00}}{\beta_{01}}\right)^2 + \beta_{01}^2\beta_{00}^2. \quad (2.41)$$

Прежде всего построим решение уравнения (2.39). Перейдем в уравнении (2.39) к новой неизвестной функции  $F(s) = c_0^{-1/2}(s)\beta_{01}^{-1}(s)$ . Для функции  $F(s)$  получаем уравнение

$$\frac{F''}{F} - \frac{1}{F^4} + \frac{1}{2}\frac{c''_0}{c_0} - \frac{3}{4}\left(\frac{c'_0}{c_0}\right)^2 + 2\frac{c_2}{c_0} = 0$$

или

$$F'' + K(s)F = \frac{1}{F^3}, \quad (2.42)$$

где

$$K(s) = \frac{1}{2}\frac{c''_0(s)}{c_0(s)} - \frac{3}{4}\left(\frac{c'_0(s)}{c_0(s)}\right)^2 + 2\frac{c_2(s)}{c(s)}.$$

Коэффициент  $K(s)$  в уравнении (2.42) в точности совпадает с коэффициентом  $K(s)$  в линеаризованном уравнении Эйлера,

описывающим в первом приближении лучи, близкие к  $S$  (см. § 4 гл. 4):

$$f'' + K(s)f = 0. \quad (2.43)$$

Любое решение уравнения (2.42) можно представить в виде

$$F(s) = \sqrt{\sum_{r, t=1}^2 a_{rt} f_r(s) f_t(s)}, \quad (2.44)$$

где  $(f_1, f_2)$  — фундаментальная система решений уравнения (2.43),  $\|a_{rt}\|$  — симметрическая матрица, удовлетворяющая условию нормировки

$$\det \|a_{rt}\| [W(f_1, f_2)]^2 = 1; \quad W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_1' f_2 \quad (2.45)$$

(см. § 5 гл. 5 и Дополнение 3).

Матрицу  $\|a_{rt}\|$  мы будем предполагать положительно определенной и корень в равенстве (2.44) будем понимать в арифметическом смысле. В этом случае всегда, очевидно,  $F > 0$ .

В уравнении (2.40) положим

$$\beta_{00}(s) = \beta_{01}(s) c^{1/2}(s) f(s) = \frac{f(s)}{F(s)}.$$

Для функции  $f(s)$  получаем уравнение

$$f'' + \left(-\frac{F''}{F} + \frac{1}{F^2}\right) f = 0,$$

которое, поскольку  $F(s)$  удовлетворяет (2.42), может быть переписано в виде (2.43), и таким образом представляет собой упомянутое линейаризованное уравнение Эйлера.

Если уравнения (2.42) и (2.43) решены и функции  $F(s)$  и  $f(s)$ , через которые выражается  $\beta_0(s, v)$ , найдены, то коэффициенты  $\alpha_{02}(s)$  и  $\alpha_{01}(s)$  полинома  $\alpha_0(s, v)$  определяются по формулам (2.38), а уравнение (2.41) для коэффициента  $\alpha_{00}(s)$  принимает вид

$$\alpha_{00}' = i \left( -\frac{1}{4} \frac{c_0'}{c_0} + \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \right) - \left( q + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{F^2} - \frac{1}{2} \left( f' - \frac{F'}{F} f \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{f^2}{F^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha_{00}(s) = & -\frac{i}{2} \ln(c_0^{1/2} F^{-1}) - \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_{d_0}^s \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{d_0}^s \left[ -\left( \frac{F'(\tau)}{F(\tau)} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \right)^2 + \frac{1}{F^2(\tau)} \right] f^2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $d_0$  — произвольная постоянная.

§ 3. Построение полиномов  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ ,  $m \geq 1$  \*)

Начнем с определения полиномов  $\alpha_1(s, v)$  и  $\beta_1(s, v)$ . Полагая в системе (2.19)  $m = 1$  и принимая во внимание равенства (2.31), получаем два уравнения

$$\begin{aligned} a_1(s, v) \equiv & -2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + i \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial v^2} - 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} - \\ & - 4 \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \left( q + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta_0^2 \right) + 2\beta_0 \beta_1 \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \right)^2 + \left[ \frac{1}{c_0^2(s)} + e_3(s) \right] \frac{v^3}{\rho^3(s)} + \\ & + \left[ - \left( \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \right)^2 + i \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial v^2} + 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_0}{\partial s} - 2 \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \right)^2 \left( q + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta_0^2 \right) + \right. \\ & \left. + i \frac{c_0'(s)}{c_0^2(s)} + i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right] \frac{1}{\rho(s)} v + i \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \frac{1}{\rho(s)} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} b_1(s, v) \equiv & 2i \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + 2i \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + 2i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \\ & + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial v^2} + \left[ 2i \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial v^2} - 2i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \beta_0}{\partial s} \right] \frac{1}{\rho(s)} v + \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \frac{1}{\rho(s)} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оставляя неизвестные функции  $\alpha_1(s, v)$  и  $\beta_1(s, v)$  в левых частях уравнений и перенося все остальные слагаемые в правые части, запишем уравнения (3.1) и (3.2) в виде

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + i \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial v^2} - 2 \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} - \\ & - 4 \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \left( q + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta_0^2 \right) + 2\beta_0 \beta_1 \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial v} \right)^2 = \\ & = \gamma_{03}(s) v^3 + \gamma_{02}(s) v^2 + \gamma_{01}(s) v + \gamma_{00}(s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \frac{\partial \beta_0}{\partial v} + 2i \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + 2i \frac{1}{c_0(s)} \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial v^2} = \\ = \delta_{02}(s) v^2 + \delta_{01}(s) v + \delta_{00}(s). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты полиномов  $\gamma_{0j}(s)$  и  $\delta_{0j}(s)$  в правых частях уравнений легко выражаются через уже известные функции длины дуги:

$$\begin{aligned} \gamma_{03}(s) &= -4 \frac{c_1(s) c_2(s)}{c_0^4(s)} + 2 \frac{c_3(s)}{c_0^3(s)} + \frac{1}{\rho(s)} \left[ 4\alpha_{02}^2(s) - 2 \frac{\alpha'_{02}(s)}{c_0(s)} - \beta_{01}^4(s) \right], \\ \gamma_{02}(s) &= \frac{1}{\rho(s)} \left[ 4\alpha_{02}(s) \alpha_{01}(s) - 2 \frac{\alpha'_{01}(s)}{c_0(s)} - 2\beta_{01}^3(s) \beta_{00}(s) \right], \end{aligned}$$

\*) При первом чтении этот параграф можно опустить.

$$\gamma_{01}(s) = \frac{1}{\rho(s)} \left[ \alpha_{01}^2(s) - 2 \frac{\alpha'_{00}(s)}{c_0(s)} + 2\beta_{01}^2(s) \left( q + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta_{00}^2(s) \right) - \right. \\ \left. - i \left( 4\alpha_{02}(s) + \frac{c'_0(s)}{c_0^2(s)} + \frac{1}{c_0(s)} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right],$$

$$\gamma_{00}(s) = -i \frac{\alpha_{01}(s)}{\rho(s)}$$

и

$$\delta_{02}(s) = i \frac{4}{\rho(s)} \frac{\beta'_{01}(s)}{c_0(s)}, \quad \delta_{01}(s) = i \frac{4}{\rho(s)} \frac{\beta'_{00}(s)}{c_0(s)},$$

$$\delta_{00}(s) = -\frac{1}{\rho(s)} \beta_{01}(s).$$

Из уравнения (3.4) вытекает, что степень полинома  $\beta_1(s, \nu)$  на единицу меньше степени полинома  $\alpha_1(s, \nu)$ . Тогда из уравнения (3.3) следует, что  $\alpha_1(s, \nu)$  является полиномом третьей степени

$$\alpha_1(s, \nu) = \alpha_{13}(s) \nu^3 + \alpha_{12}(s) \nu^2 + \alpha_{11}(s) \nu + \alpha_{10}(s). \quad (3.5)$$

Полином  $\beta_1(s, \nu)$  запишем в виде

$$\beta_1(s, \nu) = \beta_{12}(s) \nu^2 + \beta_{11}(s) \nu + \beta_{10}(s). \quad (3.6)$$

Подставляя полиномы (3.5) и (3.6), а также полиномы  $\alpha_0(s, \nu)$  и  $\beta_0(s, \nu)$  в уравнение (3.4) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $\nu$ , получаем

$$\alpha_{13}(s) = -\frac{1}{3} \frac{\beta'_{12}(s)}{c_0(s) \beta_{01}(s)} - \frac{4}{3} \alpha_{02}(s) \frac{\beta_{12}(s)}{\beta_{01}(s)} + \frac{1}{6i\beta_{01}(s)} \delta_{02}(s),$$

$$\alpha_{12}(s) = -\frac{1}{2} \frac{\beta'_{11}(s)}{c_0(s) \beta_{01}(s)} - \alpha_{02}(s) \frac{\beta_{11}(s)}{\beta_{01}(s)} - \alpha_{01}(s) \frac{\beta_{12}(s)}{\beta_{01}(s)} + \frac{1}{4i\beta_{01}(s)} \delta_{01}(s), \quad (3.7)$$

$$\alpha_{11}(s) = -\frac{\beta'_{10}(s)}{c_0(s) \beta_{01}(s)} - \alpha_{01}(s) \frac{\beta_{11}(s)}{\beta_{01}(s)} - \frac{\beta_{12}(s)}{i\beta_{01}(s)} + \frac{1}{2i\beta_{01}(s)} \delta_{00}(s).$$

Если теперь подставить найденные выражения для  $\alpha_{1j}(s)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , в уравнение (3.3), то равенство нулю коэффициентов при  $\nu^1$ ,  $\nu^2$  и  $\nu^3$  даст нам уравнения для определения  $\beta_{1l}(s)$ ,  $l = 0, 1, 2$ . Равенство нулю свободного члена позволяет определить  $\alpha_{10}(s)$  в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$\alpha_{10}(s) = \frac{1}{4} \int_{d_1}^s \left\{ -4\alpha_{01}(\tau) \alpha_{11}(\tau) - 4(2q+1) \beta_{01}(\tau) \beta_{11}(\tau) + \right. \\ \left. + 4\beta_{00}^2(\tau) \beta_{01}(\tau) \beta_{11}(\tau) + 4\beta_{00}(\tau) \beta_{01}^2(\tau) \beta_{10}(\tau) + \right. \\ \left. + i [2\alpha_{01}(\tau) \rho^{-1}(\tau) + 2\alpha_{12}(\tau)] \right\} c_0(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$



Если в уравнениях для  $\beta_{1l}(s)$  перейти к новым неизвестным функциям  $f_{1l}(s)$  по формуле

$$\beta_{1l}(s) = \beta_{01}^{l+1}(s) \cdot c_0^{1/2}(s) f_{1l}(s) = \frac{f_{1l}(s)}{c_0^{l/2}(s) F^{l+1}(s)}, \quad (3.9)$$

то эти уравнения принимают вид

$$f_{1l}''(s) + \left[ K(s) + ((l+1)^2 - 1) \frac{1}{F^4(s)} \right] f_{1l}(s) = p_{1l}(s). \quad (3.10)$$

Функция  $p_{12}(s)$  в правой части первого ( $l=2$ ) уравнения (3.10) выражается через коэффициенты  $c_j(s)$ ,  $j=0, 1, 2, 3$ , входящие в разложение скорости (2.2), радиус кривизны  $\rho(s)$  и его производную, а также через функцию  $F(s)$ :

$$p_{12}(s) = \frac{3}{2} c_0^{1/2} F^2 \left\{ -4 \frac{c_1 c_2}{c_0^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{c_3}{c_0} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{14}{3} \frac{c_2}{c_0} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \frac{c_0'}{c_0} + \frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\rho'}{\rho} \left( \frac{1}{2} \frac{c_0'}{c_0} + \frac{F'}{F} \right) - \frac{10}{3} \frac{1}{F^4} \right] \right\}.$$

В выражение для функции  $p_{11}(s)$ , помимо  $c_0(s)$  и  $\rho(s)$ , входят функции  $f(s)$ ,  $F(s)$  и функция  $f_{12}(s)$ . После того как уравнение (3.10) при  $l=2$  проинтегрировано, функция  $f_{12}(s)$  является известной. Отметим, что если  $f(s) = 0$ , то и  $p_{11}(s) = 0$ . Функция  $p_{10}(s)$ , входящая в последнее ( $l=0$ ) уравнение (3.10), зависит от  $c_0(s)$ ,  $\rho(s)$ ,  $f(s)$ ,  $F(s)$ ,  $f_{12}(s)$  и  $f_{11}(s)$ . Если первые два уравнения (3.10) проинтегрированы, функции  $f_{12}(s)$  и  $f_{11}(s)$  известны.

Решения неоднородных уравнений (3.10) могут быть построены методом вариации произвольных постоянных. Для этого, однако, необходимо сначала найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Phi''(s) + \left[ K(s) + ((l+1)^2 - 1) \frac{1}{F^4(s)} \right] \Phi(s) = 0. \quad (3.11)$$

Оказывается, общее решение уравнения (3.11) легко может быть получено, если известны линейно независимые решения  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  уравнения (2.43) и, следовательно, известна функция  $F(s)$ . Перейдем в уравнении (3.11) к новым переменным:

$$t = \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau, \quad y(t) = \Phi(s) F^{-1}(s).$$

Для функции  $y(t)$  получаем уравнение

$$y''(t) + (l+1)^2 y(t) = 0$$

и, следовательно,

$$\Phi(s) = F(s) \left\{ A \sin \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] + B \cos \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (3.12)$$

После того как функции  $f_{1l}(s)$  найдены, коэффициенты  $\beta_{1l}(s)$  полинома  $\beta_1(s, v)$  определяются по формулам (3.9). В свою очередь,  $\beta_{1l}$  позволяют по формулам (3.7) подсчитать коэффициенты  $\alpha_{1j}(s)$ ,  $j=3, 2, 1$ , полинома  $\alpha_1(s, v)$ . Свободный член  $\alpha_{10}(s)$  определяется интегралом (3.8), под знаком которого теперь известны все функции.

Полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  при  $m \geq 2$  определяются по схеме, аналогичной той, которая была использована при построении полиномов  $\alpha_1(s, \nu)$  и  $\beta_1(s, \nu)$ .

Рассмотрим два уравнения системы (2.19) при произвольном  $m \geq 2$ :

$$a_m(s, \nu) = 0, \quad b_m(s, \nu) = 0. \quad (3.13)$$

В уравнения (3.13) наряду с неизвестными полиномами  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  будут входить полиномы  $\alpha_j(s, \nu)$ ,  $\beta_j(s, \nu)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , определенные уже на предыдущих этапах. Можно показать, что полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  являются соответственно полиномами  $m+2$  и  $m+1$  степеней:

$$\alpha_m(s, \nu) = \alpha_{m, m+2}(s) \nu^{m+2} + \alpha_{m, m+1}(s) \nu^{m+1} + \dots + \alpha_{m0}(s),$$

$$\beta_m(s, \nu) = \beta_{m, m+1}(s) \nu^{m+1} + \beta_{m, m}(s) \nu^m + \dots + \beta_{m0}(s).$$

Подставляя эти полиномы в уравнения (3.13) и приравнявая по-прежнему нулю коэффициенты при различных степенях  $\nu$ , мы получим  $2m+5$  уравнений для определения функций  $\alpha_{ml}(s)$ ,  $l = 0, 1, \dots, m+2$  и  $\beta_{ml}(s)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, m+1$ . Если от неизвестных функций  $\beta_{ml}(s)$  перейти к новым неизвестным функциям  $f_{ml}(s)$  по формулам

$$\beta_{ml}(s) = \frac{f_{ml}(s)}{c_0^{l/2}(s) F^{l+1}(s)},$$

то для функций  $f_{ml}(s)$  получим уравнения, вполне аналогичные (3.10)

$$f_{ml}''(s) + \left[ K(s) + ((l+1)^2 - 1) \frac{1}{F^4(s)} \right] f_{ml}(s) = p_{ml}(s), \quad (3.14)$$

$$l = 0, 1, \dots, m+1,$$

где  $p_{m, m+1}(s)$  — известная функция, а  $p_{ml}(s)$  при  $l < m+1$  определяются по функциям  $f_{mj}(s)$ ,  $j > l$ , найденным при решении предыдущих уравнений. Общее решение уравнений (3.14) может быть построено, так же как и уравнений (3.10), путем вариации произвольных постоянных в общем решении (3.12) однородного уравнения (3.11). После того как  $f_{ml}(s)$  найдены, функции  $\alpha_{ml}(s)$  определяются по формулам, аналогичным формулам (3.7), причем  $\alpha_{m0}(s)$ , так же как и в (3.8)  $\alpha_{10}(s)$ , будет выражаться квадратурой, содержащей произвольную постоянную. Эта постоянная, так же как и другие постоянные, возникающие при интегрировании дифференциальных уравнений, определяются из граничных условий, которые должны быть сформулированы в том или ином виде при постановке краевой задачи.

#### § 4. Основные результаты и некоторые следствия из них

Полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$ ,  $m \leq M-1$ , найденные по указанной выше схеме, позволяют построить функцию (2.12), подстановка которой в уравнение Гельмгольца (2.1) дает невязку (нескомпенсированные члены левой части) порядка  $\omega^{-M/2+1}$ .

Сведем воедино основные формулы и результаты, полученные в предыдущих параграфах главы. Затем из выписанных формул мы извлечем простейшие физические следствия.

Волновое поле в окрестности луча  $S$  представлено в виде

$$u(s, n) = \text{const} \exp \left\{ i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\} \times \\ \times D_q \left\{ \sqrt{2} \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\}, \quad (4.1)$$

Коэффициенты  $\alpha_m(s, \nu)$  являются полиномами относительно  $\nu$  степени  $m+2$ , коэффициенты  $\beta_m(s, \nu)$  — полиномами относительно  $\nu$  степени  $m+1$ . Подстановка выражения (4.1) в уравнение Гельмгольца (2.1) приводит к невязке (нескомпенсированным членам левой части уравнения) порядка  $\omega^{-M/2+1}$ . Несколько первых коэффициентов имеют значения

$$\alpha_{-2}(s, \nu) = \int_{d_{-2}}^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}, \quad \alpha_{-1}(s, \nu) = d_{-1}, \\ \alpha_0(s, \nu) = \left( \frac{F'(s)}{F(s)} + \frac{1}{2} \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} \right) \frac{1}{2c_0(s)} \nu^2 + \left( \frac{F'(s)}{F(s)} - \frac{f'(s)}{f(s)} \right) \frac{f(s)}{c_0^{1/2}(s)} \nu - \\ - \frac{i}{2} \ln [c_0^{1/2}(s) F^{-1}(s)] - \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_{d_0}^s \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + \\ + \frac{1}{2} \int_{d_0}^s \left[ - \left( \frac{F'(\tau)}{F(\tau)} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \right)^2 + \frac{1}{F^4(\tau)} \right] f^2(\tau) d\tau, \\ \beta_0(s, \nu) = \frac{1}{c_0^{1/2}(s) F(s)} \nu + \frac{f(s)}{F(s)}, \quad \nu = \omega^{1/2} n.$$

В этих формулах

$$1. F(s) = \sqrt{a_{11} f_1^2(s) + 2a_{12} f_1(s) f_2(s) + a_{22} f_2^2(s)},$$

где  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  — линейно независимые вещественные решения линеаризованного уравнения Эйлера для лучей

$$f''(s) + K(s)f(s) = 0, \quad K(s) = \frac{1}{2} \frac{c_0''(s)}{c_0(s)} - \frac{3}{4} \left[ \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} \right]^2 + 2 \frac{c_2(s)}{c_0(s)}, \quad (4.2)$$

$a_{rt}$  — коэффициенты симметричной матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\det \| a_{rt} \| [f_1 f_2' - f_1' f_2]^2 = 1, \quad a_{11} > 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0.$$

2.  $f(s)$  — любое решение уравнения (4.2).

3.  $d_{-2}, d_{-1}, d_0, \dots$  — произвольные постоянные.

Если положить  $f(s) = 0$  и выбрать постоянные пределы интегрирования  $d_{-2}, d_{-1}, d_0, \dots$  так, чтобы  $\alpha_{m_0}(0) = 0$ , выписанные формулы принимают вид

$$\alpha_{-2}(s, \nu) = \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}, \quad \alpha_{-1}(s, \nu) = 0,$$

$$\alpha_0(s, \nu) = \left( \frac{F'(s)}{F(s)} + \frac{1}{2} \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} \right) \frac{1}{2c_0(s)} \nu^2 - \frac{i}{2} \ln \left[ \frac{c_0^{1/2}(s) F(0)}{c_0^{1/2}(0) F(s)} \right] - \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^s \frac{d\tau}{F^2(\tau)}, \quad (4.3)$$

$$\beta_0(s, \nu) = \frac{1}{c_0^{1/2}(s) F(s)} \nu. \quad (4.4)$$

Построенные решения  $u(s, n)$  стремятся к нулю при  $\nu = n\omega^{1/2} \rightarrow \pm\infty$ , только если индекс  $q$  равен неотрицательному целому числу. Таким образом, при  $q = 0, 1, 2, \dots$  формула (4.1) дает последовательность решений  $u_q(s, n)$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$  таких, что

$$|u_q(s, n)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |n\omega^{1/2}| \rightarrow \pm\infty.$$

Определим ширину полосы, окружающей луч  $S$ , в которой функции  $u_q(s, n)$  осциллируют и за пределами которой экспоненциально убывают. Так как функции  $D_q(\sqrt{2}\Psi)$  экспоненциально убывают при  $|\Psi| > \sqrt{2q+1}$ , полоса, за пределами которой функции  $u_q(s, n)$  экспоненциально убывают, в первом приближении определяется неравенством

$$|n| \leq \sqrt{2q+1} c_0^{1/2}(s) F(s) \omega^{-1/2}. \quad (4.5)$$

При слишком больших значениях  $q$  ширина полосы становится настолько большой, что функции  $u_q(s, n)$  перестают правильно описывать волновое поле. Поэтому в формуле (4.1) мы должны считать, что  $q < N$ , где число  $N$  не зависит от  $\omega$ .

### § 5. Постановка краевой задачи и вывод уравнения для собственных значений

Приступим к нахождению асимптотики собственных чисел и функций в задаче об экстремальном луче области. Методы настоящей главы позволяют построить асимптотику собственных чисел и функций, вообще говоря, в любом приближении в смысле порядка по  $1/\omega$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  (ср. § 4 гл. 4).

Пусть неоднородная среда заполняет ограниченную область с границей  $\Sigma$ , и пусть кривая  $S$ , пересекающая ортогонально границу  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ , является лучом (см. рис. 33). Введем в окрестности кривой  $S$ , как и в предыдущем параграфе, координаты  $s$  и  $n$ . Длину дуги  $s$  вдоль кривой  $S$  будем отсчитывать от точки  $C$  и примем длину кривой  $S$  равной  $h$ . Будем считать, что в окрестности точек  $C$  и  $D$  граница области  $\Sigma$  описывается уравнениями  $s = \varphi(n)$  и  $s = h + \psi(n)$ , в которых функции  $\varphi(n)$  и  $\psi(n)$  могут быть представлены рядами

$$\varphi(n) = a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots, \quad \psi(n) = b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots$$

В этих разложениях отсутствует первая степень  $n$ , так как кривые  $S$  и  $\Sigma$  пересекаются ортогонально, и  $a_2 = 1/2r_1$ ,  $b_2 = -1/2r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы кривизны границы  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ .

Как и в случае функции  $c(s, n)$ , для дальнейшего было бы достаточно предположить, что  $\varphi(n)$  и  $\psi(n)$  могут быть представлены отрезками рядов Тейлора.

Поставим задачу об отыскании решений волнового уравнения

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0, \quad (5.1)$$

обращающихся в нуль на границе области

$$u|_{\Sigma} = 0 \quad (5.2)$$

и сосредоточенных около кривой  $S$ , т. е. удовлетворяющих условию

$$u(s, n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\omega^{1/2} n| \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Помимо функций  $u(s, n)$  мы должны будем найти собственные значения задачи (5.1) — (5.3).

Собственные функции, сосредоточенные около луча  $S$ , удастся построить лишь при определенных ограничениях на  $c(s, n)$  и радиусы кривизны границы  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ . Мы увидим ниже, что эти ограничения полностью совпадают с условиями, при которых в окрестности кривой  $S$  система отраженных лучей устойчива по первому приближению.

Выше были построены решения волнового уравнения (5.1), сосредоточенные в окрестности кривой  $S$ , в виде

$$u(s, n) = \text{const} \exp \left\{ i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\} \times \\ \times D_q \left\{ \sqrt{2} \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} + O\left(\omega^{-\frac{M}{2}}\right) \right\}, \quad (5.4) \\ \nu = n\omega^{1/2}, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Для решений (5.4) граничное условие (5.2) сводится к равенствам \*)

$$u[\varphi(n), n] = 0, \quad u[h + \psi(n), n] = 0. \quad (5.5)$$

Полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  в решениях (5.4) определялись из рекуррентной системы дифференциальных уравнений с точностью до произвольных постоянных. Мы покажем сейчас, что граничные условия (5.5) позволяют определить эти постоянные и, кроме того, приводят к уравнению, из которого находятся собственные значения задачи.

Будем искать собственные функции  $U(s, n)$  задачи (5.1) — (5.3) в виде

$$U(s, n) = Au(s, n) + Bu^*(s, n), \quad (5.6)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, а звездочка означает комплексное сопряжение. Подставляя (5.6) в граничные условия (5.5), получаем для определения постоянных  $A$  и  $B$  систему двух уравнений

$$\begin{aligned} Au[\varphi(n), n] + Bu^*[\varphi(n), n] &= 0, \\ Au[h + \psi(n), n] + Bu^*[h + \psi(n), n] &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Неизвестные постоянные  $A$  и  $B$  будем определять, исходя из требования, чтобы равенства (5.7) имели место с точностью до  $O(\omega^{-M/2})$ . Это означает, что, подставляя в систему уравнений (5.7) выражения (5.4), можно отбросить в этих выражениях все слагаемые, убывающие при  $\omega \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $\omega^{-M/2}$ . После этого система уравнений (5.7) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} A \exp \left\{ i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} D_q \left\{ \sqrt{2} \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} + \\ + B \exp \left\{ -i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m^*(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} \times \\ \times D_q \left\{ \sqrt{2} \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m^*(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} \Big|_{\substack{s=\varphi(n) \\ s=h+\psi(n)}} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для выполнения (5.8) необходимо, чтобы аргументы у функции параболического цилиндра  $D_q$  при  $s = \varphi(n)$  и  $s = h + \psi(n)$  совпадали:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m^*(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}},$$

\*) На участках  $\Sigma$ , далеких от  $C$  и  $D$ , решения (5.4) экспоненциально малы, так что в целом при выполнении условий (5.5) граничное условие (5.2) будет выполнено с точностью до экспоненциально малых членов.

т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\operatorname{Im} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right] \Big|_{\substack{s=\varphi(n) \\ s=h+\psi(n)}} = 0. \quad (5.9)$$

Если эти равенства выполнены, то, сокращая уравнения (5.8) на

$$\exp \left\{ -i \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m^*(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} D_q \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m^*(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\},$$

получаем

$$A \exp \left\{ i \sum_{m=-2}^{M-1} [\alpha_m(s, \nu) + \alpha_m^*(s, \nu)] \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} + B \Big|_{\substack{s=\varphi(n) \\ s=h+\psi(n)}} = 0.$$

Здесь постоянные  $A$  и  $B$  не зависят от  $\nu$ , а поэтому и коэффициент при  $A$  не может зависеть от  $\nu$ . Иначе говоря, необходимо, чтобы при  $s = \varphi(n)$  и  $s = h + \psi(n)$  сумма

$$\operatorname{Re} \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{2}} \Big|_{\substack{s=\varphi(n) \\ s=h+\psi(n)}} \quad (5.10)$$

не зависела от  $\nu$ .

Покажем, что равенства (5.9) и требование независимости сумм (5.10) от  $\nu$  приводят к краевым условиям, которым должны удовлетворять при  $s = 0$  и  $s = h$  коэффициенты полиномов

$$\beta_m(s, \nu) = \sum_{j=0}^{m+1} \beta_{mj}(s) \nu^j,$$

$$\alpha_m(s, \nu) = \sum_{j=0}^{m+2} \alpha_{mj}(s) \nu^j,$$

т. е. функции  $\beta_{mj}(s)$  и  $\alpha_{mj}(s)$ .

Рассмотрим вначале равенства (5.9). Представим коэффициенты  $\beta_{mj}(s)$  рядами Тейлора

$$\beta_{mj}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{mjk}(0) s^k$$

и

$$\beta_{mj}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{mjk}(h) (s - h)^k,$$

в которые вместо  $s$  и  $s - h$  подставим разложения

$$s = \sum_{l=2}^{\infty} a_l \nu^l \omega^{-\frac{l}{2}}, \quad s - h = \sum_{l=2}^{\infty} b_l \nu^l \omega^{-\frac{l}{2}}. \quad (5.11)$$

В результате суммы, входящие в равенства (5.9), будут представлять собой двойное разложение по  $\nu$  и  $\omega^{-1/2}$ :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \sum_{m=j-1}^{M+j-1} \chi_{mj}(s) \omega^{-\frac{m}{2}} \Big|_{s=0, h} \quad (\chi_{mj} \equiv 0 \text{ при } m < 0).$$

Приведем значения нескольких первых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \chi_{m0}(s) \Big|_{s=0, h} &= \beta_{m0}(s) \Big|_{s=0, h}, & m &= 0, 1, 2, \dots, \\ \chi_{m1}(s) \Big|_{s=0, h} &= \beta_{m1}(s) \Big|_{s=0, h}, & m &= 0, 1, 2, \dots, \\ \chi_{m2}(0) &= \beta_{m2}(0) + \beta'_{m-2,0}(0) a_2, & m &= 1, 2, 3, \dots, \\ \chi_{m2}(h) &= \beta_{m2}(h) + \beta'_{m-2,0}(h) b_2, & m &= 1, 2, 3, \dots, \\ \chi_{m3}(0) &= \beta_{m3}(0) + \beta'_{m-2,1}(0) a_2 + \beta'_{m-3,0}(0) a_3, & m &= 2, 3, \dots, \\ \chi_{m3}(h) &= \beta_{m3}(h) + \beta'_{m-2,1}(h) b_2 + \beta'_{m-3,0}(h) b_3, & m &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

(В этих формулах  $\beta_{lj}$  следует полагать равным нулю при  $l < j$ ). Равенства (5.9) будут выполнены тождественно относительно  $\omega$  и  $\nu$ , только если при  $s=0$  и  $s=h$  коэффициенты  $\chi_{mj}(s)$  вещественны, т. е. мнимая часть числа  $\chi_{mj}$  должна равняться нулю:

$$\text{Im } \chi_{mj}(s) \Big|_{s=0, h} = 0, \quad j \geq 0, \quad m \geq j - 1. \quad (5.13)$$

Условия (5.13) могут быть записаны также следующим образом:

$$\text{Im } \beta_{mj}(s) \Big|_{s=0, h} = \text{Im } \vartheta_{mj}^{(0, h)}, \quad j \geq 0, \quad m \geq j - 1, \quad (5.14)$$

где постоянные  $\vartheta_{mj}^{(0, h)}$  выражаются через значения производных  $\beta'_{nj}(s)$ ,  $0 \leq n < m$ ,  $0 \leq j \leq m + 1$ , в точках  $s=0$  и  $s=h$  и коэффициенты  $a_l$  и  $b_l$ . Используя формулы (5.12), легко получить, что

$$\begin{aligned} \vartheta_{mj}^{(0, h)} &= 0, & j &= 0, 1, & m &= 0, 1, 2, \dots \\ \vartheta_{12}^{(0)} &= 0, & \vartheta_{m2}^{(0)} &= -\beta'_{m-2,0}(0) a_2, & m &= 2, 3, \dots, \\ \vartheta_{12}^{(h)} &= 0, & \vartheta_{m2}^{(h)} &= -\beta'_{m-2,0}(h) b_2, & m &= 2, 3, \dots, \\ \vartheta_{23}^{(0)} &= -\beta'_{01}(0) a_2, & \vartheta_{m3}^{(0)} &= -\beta'_{m-2,1}(0) a_2 - \beta'_{m-3,0}(0) a_3, & m &= 3, 4, \dots, \\ \vartheta_{23}^{(h)} &= -\beta'_{01}(h) b_2, & \vartheta_{m3}^{(h)} &= -\beta'_{m-2,1}(h) b_2 - \beta'_{m-3,0}(h) b_3, & m &= 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

Таким образом, равенства (5.9) привели к краевым условиям (5.14) для мнимых частей коэффициентов  $\beta_{mj}(s)$ .

Обратимся теперь к требованию независимости сумм (5.10) от переменной  $\nu$ . Разложим коэффициенты  $\alpha_{mj}(s)$ ,  $0 \leq j \leq$



$\leq m + 2$ , полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$  в ряды по степеням  $s$  и  $s - h$  и подставим вместо  $s$  и  $s - h$  разложения (5.11). После этого в суммах (5.10) произведем перегруппировку членов, в результате которой вместо (5.10) получим двойное разложение по степеням  $\nu$  и  $\omega^{-1/2}$  вида

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_{m0}(s) \omega^{-\frac{m}{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \nu^j \sum_{m=j-2}^{M+j-2} \kappa_{mj}(s) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} \Big|_{s=0, h} = 0. \quad (5.16)$$

Несколько первых коэффициентов  $\kappa_{mj}(s)|_{s=0, h}$  имеют значения

$$\begin{aligned} \kappa_{m1}(s)|_{s=0, h} &= \alpha_{m1}(s)|_{s=0, h}, \quad m = -1, 0, 1, \dots, \\ \left. \begin{aligned} \kappa_{m2}(0) &= \alpha_{m2}(0) + \alpha'_{m-2, 0}(0) a_2, \\ \kappa_{m2}(h) &= \alpha_{m2}(h) + \alpha'_{m-2, 0}(h) b_2, \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots, \\ \left. \begin{aligned} \kappa_{m3}(0) &= \alpha_{m3}(0) + \alpha'_{m-2, 1}(0) a_2 + \alpha'_{m-3, 0}(0) a_3, \\ \kappa_{m3}(h) &= \alpha_{m3}(h) + \alpha'_{m-2, 1}(h) b_2 + \alpha'_{m-3, 0}(h) b_3, \end{aligned} \right\} \\ & m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из формулы (5.16) следует, что суммы (5.10) не будут зависеть от  $\nu$ , если

$$\operatorname{Re} \kappa_{mj}(s)|_{s=0, h} = 0, \quad j \geq 1, \quad m \geq j - 2. \quad (5.18)$$

Условия (5.18) можно записать следующим образом:

$$\operatorname{Re} \alpha_{mj}(s)|_{s=0, h} = \operatorname{Re} \eta_{mj}^{(0, h)}, \quad j \geq 1, \quad m \geq j - 2, \quad (5.19)$$

где постоянные  $\eta_{mj}^{(0, h)}$  зависят от значений производных  $\alpha_{nk}(s)$ ,  $-2 \leq n < m$ ,  $0 \leq k \leq n + 2$ , в точках 0 и  $h$ , а также от коэффициентов  $a_l$  и  $b_l$ . Из формул (5.17) следует, что

$$\begin{aligned} \eta_{m1}^{(0, h)} &= 0, \quad m = -1, 0, 1, \dots, \\ \left. \begin{aligned} \eta_{m2}^{(0)} &= -\alpha'_{m-2, 0}(0) a_2, \\ \eta_{m2}^{(h)} &= -\alpha'_{m-2, 0}(h) b_2, \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots, \\ \left. \begin{aligned} \eta_{m3}^{(0)} &= -\alpha'_{m-2, 1}(0) a_2 - \alpha'_{m-3, 0}(0) a_3, \\ \eta_{m3}^{(h)} &= -\alpha'_{m-2, 1}(h) b_2 - \alpha'_{m-3, 0}(h) b_3, \end{aligned} \right\} m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

Итак, требование независимости сумм (5.10) от  $\nu$  привело к краевым условиям (5.19) для вещественных частей коэффициентов  $\alpha_{mj}(s)$ .

При выполнении условий (5.14) и (5.19), другими словами, при выполнении равенства (5.9) и независимости сумм (5.10)

от переменной  $\nu$ , система уравнений (5.8) принимает вид

$$A \exp \left\{ i2 \operatorname{Re} \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_{m0}(s) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} + B \Big|_{s=0, h} = 0. \quad (5.21)$$

Как мы сейчас увидим, требование разрешимости системы (5.21) относительно постоянных  $A$  и  $B$  приводит к уравнению, из которого находятся собственные значения задачи  $\omega_{p,q}$ .

Напомним, что свободные члены полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$ , т. е. функции  $\alpha_{m0}(s)$ , выражаются интегралами с переменным верхним пределом и произвольным постоянным нижним пределом. Путем выбора постоянных  $A$  и  $B$  мы всегда можем добиться выполнения равенств

$$\alpha_{m0}(0) = 0, \quad m = -2, -1, 0, \dots \quad (5.22)$$

В дальнейшем будем считать, что равенства (5.22) имеют место, и, следовательно, нижние пределы интегрирования в упомянутых интегралах равны нулю. С учетом равенств (5.22) система (5.21) принимает совсем простой вид:

$$A + B = 0, \quad A \exp \left\{ i2 \operatorname{Re} \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_{m0}(h) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\} + B = 0.$$

Для того чтобы эта однородная система имела отличное от нуля решение, ее определитель

$$\Delta = 1 - \exp \left\{ i2 \operatorname{Re} \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_{m0}(h) \omega^{-\frac{m}{2}} \right\}$$

должен быть равен нулю. Уравнение  $\Delta = 0$  равносильно уравнению

$$\operatorname{Re} \sum_{m=-2}^{M-1} \alpha_{m0}(h) \omega^{-\frac{m}{2}} = \pi p, \quad (5.23)$$

где  $p$  — целое число. Мы должны считать  $p \gg 1$ , так как все наши построения относятся к случаю достаточно больших  $\omega$ .

Уравнение (5.23) служит для определения собственных значений  $\omega_{p,q}$  рассматриваемой задачи.

## § 6. Формулы для собственных значений и собственных функций в первом приближении

Определим граничные условия для функции  $F(s)$  и  $f(s)$ , через которые выражаются  $\beta_{01}(s)$  и  $\beta_{00}(s)$ . Обратимся к условиям (5.14) и (5.19). При  $m = -1$  условие (5.19) автоматически выполняется, поскольку (см. формулу (2.30))

$$\alpha_{-1}(s, \nu) = d_{-1} \quad \text{и} \quad d_{-1} = 0$$

в силу равенства (5.22).

Полагая в условиях (5.14) и (5.19)  $m = 0$  и используя формулы (5.15) и (5.20), получаем

$$\operatorname{Im} \beta_{00}(s) \Big|_{s=0, h} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \beta_{01}(s) \Big|_{s=0, h} = 0, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{Re} \alpha_{01}(s) \Big|_{s=0, h} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \alpha_{02}(0) = -\frac{a_2}{c_0(0)},$$

$$\operatorname{Re} \alpha_{02}(h) = -\frac{b_2}{c_0(h)}. \quad (6.2)$$

Поскольку

$$\alpha_{01} = -\frac{1}{c_0} \frac{\beta'_{00}}{\beta_{01}} \quad \text{и} \quad \alpha_{02} = -\frac{1}{2c_0} \frac{\beta'_{01}}{\beta_{01}},$$

условия (6.2) сводятся к требованиям

$$\operatorname{Re} \frac{\beta'_{00}(s)}{\beta_{01}(s)} \Big|_{s=0, h} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \frac{\beta'_{01}(0)}{\beta_{01}(0)} = 2a_2, \quad \operatorname{Re} \frac{\beta'_{01}(h)}{\beta_{01}(h)} = 2b_2, \quad (6.3)$$

налагаемым, так же как и условия (6.1), на функции  $\beta_{00}(s)$  и  $\beta_{01}(s)$ . Мы видели, что  $F(s) = c_0^{-1/2}(s) \beta_{01}^{-1}(s)$  удовлетворяет нелинейному уравнению (2.42)

$$F''(s) + K(s)F(s) = \frac{1}{F^3(s)}. \quad (6.4)$$

Из (6.1) и (6.3) следует, что уравнение (6.4) мы должны решать при следующих краевых условиях:

$$\operatorname{Im} F(s) \Big|_{s=0, h} = 0$$

и

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{F'(0)}{F(0)} + \frac{1}{2} \frac{c'_0(0)}{c_0(0)} + 2a_2 \right] = 0,$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{F'(h)}{F(h)} + \frac{1}{2} \frac{c'_0(h)}{c_0(h)} + 2b_2 \right] = 0. \quad (6.5)$$

Поскольку  $K(s)$  вещественно, функцию  $F(s)$  можно считать также вещественной, удовлетворяющей уравнению (6.4) и граничным условиям

$$F'(s) + g(s)F(s) \Big|_{s=0, h} = 0, \quad (6.6)$$

где

$$g(0) = \frac{1}{2} \frac{c'_0(0)}{c_0(0)} + \frac{1}{r_1} \quad \text{и} \quad g(h) = \frac{1}{2} \frac{c'_0(h)}{c_0(h)} - \frac{1}{r_2},$$

$r_1 = \frac{1}{2a_2}$  и  $r_2 = -\frac{1}{2b_2}$  — радиусы кривизн границы области  $\Sigma$  в точках  $C$  и  $D$ .

Мы видели также, что функция  $f(s) = \beta_{00}(s)F(s)$  удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f''(s) + K(s)f(s) = 0. \quad (6.7)$$

Поскольку  $F(s) \neq 0$ , а условия (6.1), (6.3) и уравнение (6.7) будут удовлетворены только при  $f(s) \equiv 0$  \*), то необходимо  $\beta_{00}(s) \equiv 0$ .

Если функция  $F(s)$  известна, а функция  $f(s) \equiv 0$ , то полиномы  $\alpha_0(s, \nu)$  и  $\beta_0(s, \nu)$  определяются по формулам (4.3) и (4.4) предыдущего параграфа и имеют вид

$$\alpha_0(s, \nu) = \left( \frac{F'(s)}{F(s)} + \frac{1}{2} \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} \right) \frac{1}{2c_0(s)} \nu^2 - \frac{i}{2} \ln \frac{c_0^{1/2}(s) F(0)}{c_0^{1/2}(0) F(s)} - \\ - \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau, \\ \beta_0(s, \nu) = \frac{1}{c_0^{1/2}(s) F(s)} \nu.$$

(Граничные условия для полиномов  $\beta_m(s, \nu)$ ,  $m \geq 1$ , будут выведены в следующем параграфе.)

Получим формулы для собственных значений и собственных функций в первом приближении, используя найденные полиномы  $\alpha_{-2}$ ,  $\alpha_{-1}$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ .

Из уравнения (5.23) следует, что

$$\omega_{p, q} = \frac{1}{\operatorname{Re} \alpha_{-20}(h)} \left\{ \pi p - \operatorname{Re} \alpha_{00}(h) + O\left(\frac{1}{p^{1/2}}\right) \right\}.$$

Ниже (§ 7) будет показано, что поправочное слагаемое на самом деле имеет порядок  $O(1/p)$ . Подставив затем значения  $\alpha_{-20}(h)$  и  $\alpha_{00}(h)$ , получим

$$\omega_{p, q} = \left[ \int_0^h \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}. \quad (6.8)$$

Таким образом, нахождение собственных значений  $\omega_{p, q}$  свелось к вычислению интеграла  $\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)}$ , которое будет проведено

\*) Мы не рассматриваем здесь тот случай, когда уравнение (6.7) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее однородным условиям (6.1) и (6.3).

в конце параграфа. Сейчас же отметим одно важное обстоятельство. Если имеет место равенство

$$\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} = \pi \frac{P}{Q} \quad (P, Q - \text{целые}), \quad (6.9)$$

то собственные значения  $\omega_{p,q}$  в первом приближении будут многократно вырождены в том смысле, что

$$\omega_{p,q} = \omega_{p-pj, q+Qj}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вырождение собственных значений в первом приближении, как это известно из теории возмущений, приводит к затруднениям при построении высших приближений. Ниже (в § 7) мы увидим, что, действительно, в случае равенства (6.9) построение высших приближений наталкивается на серьезные осложнения, которые могут быть преодолены лишь видоизменением всей схемы рассуждений.

Теперь построим функцию  $F(s)$ , удовлетворяющую граничным условиям (6.6), и выясним, какую роль при построении функции  $F(s)$  играют условия устойчивости по первому приближению системы многократно отраженных лучей.

В § 2 для функции  $F(s)$  была выписана формула (2.44) (см. Дополнение 3):

$$F(s) = [a_{11}f_1^2(s) + 2a_{12}f_1(s)f_2(s) + a_{22}f_2^2(s)]^{1/2}, \quad (6.10)$$

в которой  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  — линейно независимые решения уравнения

$$f''(s) + K(s)f(s) = 0$$

и элементы симметричной положительно определенной матрицы  $\|a_{rt}\|$  удовлетворяют нормировочному условию

$$\det \|a_{rt}\| W^2 = 1 \quad (W = f_1f_2' - f_1'f_2). \quad (6.11)$$

Выберем  $a_{rt}$  так, чтобы функция  $F(s)$  удовлетворяла граничным условиям (6.6). Подставляя (6.10) в (6.6), приходим к двум уравнениям

$$\sum_{r=1}^2 [f_r'(s) + g(s)f_r(s)] a_{rt} f_r(s) \Big|_{s=0, h} = 0, \quad (6.12)$$

где  $g(0) = \frac{1}{2} \frac{c_0'(0)}{c_0(0)} + \frac{1}{r_1}$  и  $g(h) = \frac{1}{2} \frac{c_0'(h)}{c_0(h)} - \frac{1}{r_2}$ . Уравнения (6.12) вместе с условием (6.11) образуют систему трех уравнений для определения  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{12}$ .

Будем считать, что не существует отличных от тождественного нуля решений уравнения (6.7), удовлетворяющих условиям  $f'(s) + g(s)f(s)|_{s=0, h} = 0$ . Это предположение позволяет выбрать линейно независимые решения  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} f_1'(0) + g(0)f_1(0) &= 0 & (f_1(0) \neq 0), \\ f_2'(h) + g(h)f_2(h) &= 0 & (f_2(h) \neq 0). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Равенства (6.13) приводят к значительному упрощению уравнений (6.12), которые теперь записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{12}f_1(0) + a_{22}f_2(0) &= 0, \\ a_{11}f_1(h) + a_{21}f_2(h) &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Пусть  $f_1(h) \neq 0$  и  $f_2(0) \neq 0$ , тогда

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)}, \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{f_2(h)}{f_1(h)},$$

и из условия (6.11) следует, что

$$a_{12}^2 \left[ \frac{f_1(0)}{f_1(h)} \frac{f_2(h)}{f_2(0)} - 1 \right] \mathbb{W}^2 = 1. \quad (6.15)$$

Это уравнение имеет вещественное решение, только если выполнено условие

$$\frac{f_1(0)}{f_1(h)} \frac{f_2(h)}{f_2(0)} > 1. \quad (6.16)$$

При извлечении квадратного корня в (6.15) знак  $a_{12}$  следует выбрать противоположным знаком  $\mathbb{W} \frac{f_1(0)}{f_2(0)}$ . Тогда квадратичная форма в (6.10) будет положительно определенной и функция  $F(s)$  — строго положительной. Если неравенство (6.16) не имеет места, то вещественную функцию  $F(s)$  построить не удастся.

Если  $f_1(h) = 0$ ,  $f_2(0) \neq 0$  или  $f_1(h) \neq 0$ ,  $f_2(0) = 0$  и  $\mathbb{W}[f_1, f_2] \neq 0$ , то система уравнений (6.11) и (6.14) имеет только нулевое решение, и в этом случае функция  $F(s)$  также построена быть не может. Невозможность построить функцию  $F(s)$  означает, что не существует собственных функций вида (5.4), которые были бы сосредоточены в окрестности кривой  $S$ .

Если же

$$f_1(h) = f_2(0) = 0, \quad (6.17)$$

то оба уравнения (6.14) удовлетворяются при  $a_{12} = a_{21} = 0$ , и для определения двух элементов  $a_{11}$  и  $a_{22}$  остается одно уравнение (6.11). В этом случае можно построить, очевидно, целое семейство функций  $F(s)$ , зависящее от одного параметра. Соб-

ственные функции рассматриваемой задачи, не могут, однако, непрерывно зависеть от параметра. Поэтому значение этого параметра должно вполне определиться при построении следующих приближений для собственных функций.

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение (6.7) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее условиям  $f'(s) + g(s)f(s)|_{s=0, h} = 0$  и, следовательно, любые два решения  $f_1, f_2$  уравнения (6.7), удовлетворяющие условиям (6.13), линейно зависимы. В этом случае решения  $f_1$  и  $f_2$  уравнения (6.7), с помощью которых строится функция  $F$  (см. формулу (6.10)), нельзя выбирать тем способом, который был только что описан. Возьмем теперь в качестве  $f_1$  ненулевое решение уравнения (6.7), удовлетворяющее условиям  $f'_1(s) + g(s)f_1(s)|_{s=0, h} = 0$ , а в качестве  $f_2$  любое решение уравнения (6.7), линейно независимое с  $f_1$ . Уравнения (6.12) примут вид

$$\begin{aligned} a_{12}f_1(0) + a_{22}f_2(0) &= 0, \\ a_{12}f_1(h) + a_{22}f_2(h) &= 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Система (6.18) будет иметь отличное от нуля решение только при условии

$$f_1(0)f_2(h) - f_1(h)f_2(0) = 0. \quad (6.19)$$

Если условие (6.19) выполнено, можно построить, как и в предыдущем случае, целое семейство функций  $F(s)$ , непрерывно зависящее от одного параметра.

Отметим, что условия (6.16), (6.17) и (6.19), при выполнении которых может быть построена функция  $F(s)$ , полностью совпадают с условиями устойчивости по первому приближению (4.15), (4.18) и (4.19) главы 4, которые были получены для лучей, близких к экстремальному лучу области. Таким образом, функция  $F(s)$  может быть построена во всех тех случаях, когда система лучей устойчива по первому приближению. Если же система лучей не является таковой, функцию  $F(s)$ , а вместе с ней и собственные функции, сосредоточенные в окрестности экстремального луча, построить не удастся.

Переходим к вычислению интеграла  $\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)}$ , считая, что выполнено одно из условий (6.16), (6.17) или (6.19) и функция  $F(s)$  построена.

Интеграл

$$\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} = \int_0^h \frac{d\tau}{a_{11}f_1^2(\tau) + 2a_{12}f_1(\tau)f_2(\tau) + a_{22}f_2^2(\tau)} \quad (6.20)$$

мы уже вычисляли в главе 4 применительно к случаю неравенства (6.16). Способ вычисления интеграла (6.20), описанный в главе 4, можно было бы распространить также и на случай равенств (6.17) и (6.19). Однако сейчас мы найдем значение интеграла (6.20) несколько иным методом.

Пусть на открытой промежутке  $(0, h)$  решение  $f_1(s)$  обращается в нуль  $N$  раз в точках  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Представим интеграл (6.20) суммой интегралов

$$\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} = \int_0^{s_1} \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + \int_{s_N}^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)}. \quad (6.21)$$

В каждом интеграле перейдем к новой переменной интегрирования  $\theta$ , положив

$$\theta(\tau) = \operatorname{arctg} \left[ W \frac{a_{22}f_2(\tau) + a_{12}f_1(\tau)}{f_1(\tau)} \right]. \quad (6.22)$$

В формуле (6.22) используется главная ветвь арктангенса, заключенная в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Функция  $\theta(\tau)$  является на каждом интервале функцией непрерывной. Ее дифференциал, как нетрудно подсчитать, используя соотношение (6.11), равен

$$d\theta = \frac{1}{a_{11}f_1^2(\tau) + 2a_{12}f_1(\tau)f_2(\tau) + a_{22}f_2^2(\tau)} d\tau.$$

Квадратичная форма, стоящая в знаменателе, положительно определенная, поэтому функция  $\theta(\tau)$  на каждом интервале является монотонно возрастающей, и, следовательно, точкам  $s_k$ , стоящим в нижних пределах интегрирования, соответствует значение  $\theta = -\pi/2$ , а точкам  $s_k$  в верхних пределах интегрирования — значение  $\theta = \pi/2$ . Так как  $a_{12}f_1(0) + a_{22}f_2(0) = 0$ , точке  $s = 0$  отвечает  $\theta = 0$ , а точке  $s = h$  —

$$\theta_h = \operatorname{arctg} \left[ W \left( a_{22} \frac{f_2(h)}{f_1(h)} + a_{12} \right) \right].$$

Заменим здесь  $a_{12}$  и  $a_{22}$  их значениями, тогда

$$\theta_h = \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{sign} \left( W \frac{f_1(0)}{f_2(0)} \right) \sqrt{\frac{f_1(0)f_2(h)}{f_2(0)f_1(h)} - 1} \right]. \quad (6.23)$$

В случае равенств (6.17) функция  $f_1(s)$  обращается в нуль на верхнем пределе интегрирования, и поэтому  $\theta_h = \pi/2$ . В случае равенства (6.19), очевидно,  $\theta_h = 0$ . Формула (6.23) может быть переписана в виде

$$\theta_h = \operatorname{sign} \left( g(0) + \frac{f_2'(0)}{f_2(0)} \right) \arccos \sqrt{\frac{f_1(h)f_2(0)}{f_2(h)f_1(0)}}. \quad (6.24)$$



В последней формуле величина арккосинуса заключена в пределах  $(0, \pi/2)$ . Определив в новой переменной пределы интегрирования, соответствующие каждому интегралу в формуле (6.21), приходим к равенству

$$\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} = \int_0^{\pi/2} d\theta + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\theta_h} d\theta,$$

откуда

$$\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)} = \text{sign} \left( g(0) + \frac{f_2'(0)}{f_2(0)} \right) \arccos \sqrt{\frac{f_1(h) f_2(0)}{f_2(h) f_1(0)}} + \pi N. \quad (6.25)$$

Вычислив интеграл  $\int_0^h \frac{d\tau}{F^2(\tau)}$ , мы получаем возможность

по формуле (6.8) определить собственные значения  $\omega_{p,q}$ , а вслед за ними — по формуле (5.4) и собственные функции  $u_{p,q}$ .

Подставляя (6.25) в формулу (6.8), получаем

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \left[ \text{sign} \left( g(0) + \frac{f_2'(0)}{f_2(0)} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \arccos \sqrt{\frac{f_1(h) f_2(0)}{f_2(h) f_1(0)}} + \pi N \right] + O \left( \frac{1}{p} \right) \right\}. \quad (6.26)$$

Напомним, что  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  выбраны так, чтобы выполнялось условие (6.13), и  $N$  — число нулей функции  $f_1(s)$  на промежутке  $(0, h)$ .

В случае условия (6.17) первое слагаемое в квадратных скобках равно  $\pi/2$ , а в случае условия (6.19) оно равно нулю. В этих двух случаях формула (6.26) соответственно упрощается:

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + N \right) \pi + O \left( \frac{1}{p} \right) \right\}, \quad (6.27)$$

$$\omega_{p,q} = \left[ \int_0^h \frac{d\tau}{c_0(\tau)} \right]^{-1} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) N \pi + O \left( \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Несмотря на то, что в том и другом случае в первом приближении собственные функции непрерывно зависят от одного параметра, формулы (6.27) для собственных частот никакого параметра не содержат. (Напоминаем, что функция  $F$ , входящая в решение, зависит от трех параметров — см. формулу (6.10), — на которые накладывается одно линейное соотношение и нормировочное условие (6.11)). Это означает, что одному собствен-

ному числу, полученному в первом приближении, соответствует континуальное множество собственных функций. Пользуясь терминологией квантовой механики, можно сказать, что собственные значения первого приближения континуально вырождены. Разумеется, спектр рассматриваемой задачи дискретен и континуального множества собственных значений быть не может. При построении дальнейших приближений это континуальное вырождение должно сниматься.

Выпишем, наконец, выражение для собственных функций  $u_{p,q}$ . Для этого подставим найденные собственные значения в формулу (5.4). Принимая во внимание, что  $A = -B$ , для собственных функций в первом приближении получаем

$$u_{p,q}(s, n) = \sqrt{\frac{c_0^{1/2}(s)}{F(s)}} \left\{ \sin \left[ \omega_{p,q} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^s \frac{d\tau}{F^2(\tau)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} + \frac{F'(s)}{F(s)} \right) \frac{v^2}{2c_0(s)} \right] + O \left( \frac{1}{\omega_{p,q}^{1/2}} \right) \right\} \left\{ D_q \left[ \frac{\sqrt{2} v}{c_0^{1/2}(s) F(s)} \right] + \right. \\ \left. + D'_q \left[ \frac{\sqrt{2} v}{c_0^{1/2}(s) F(s)} \right] O \left( \frac{1}{\omega_{p,q}^{1/2}} \right) \right\}, \quad v = n\omega^{1/2}. \quad (6.28)$$

Ниже, в § 8, по формуле (6,26) будут рассчитаны собственные частоты открытого резонатора, заполненного неоднородной средой со скоростью распространения волн

$$c(s, n) = c_0 + c_2 n^2.$$

Мы переходим теперь к выводу граничных условий для функций  $f_{ml}(s)$ , через которые выражаются полиномы  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$ ,  $m \geq 1$ , входящие в следующие приближения для собственных функций.

## § 7. Схема построения полиномов $\alpha_m(s, v)$ и $\beta_m(s, v)$ , $m \geq 1$

Рассмотрим условие (5.14) и (5.19) при  $m = 1$ . Используя формулы (5.15) и (5.20), получаем

$$\operatorname{Im} \beta_{1j}(s) |_{s=0, h} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{Re} \alpha_{1j}(s) |_{s=0, h} = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\operatorname{Re} \alpha_{13}(0) = -\frac{1}{c_0(0)} a_3, \quad \operatorname{Re} \alpha_{13}(h) = -\frac{1}{c_0(h)} b_3. \quad (7.2)$$

В § 3 было установлено, что функции  $\alpha_{1j}(s)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , выражаются через функции  $\beta_{1j-1}(s)$  (формулы (3.7)). Таким образом, условия (7.2) по

существо накладываются на функции  $\beta_{1j-1}(s)$  и с учетом формул (6.3) и (7.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \beta'_{10}(s) \Big|_{s=0, h} &= 0, \\ \operatorname{Re} [\beta'_{11}(0) - 2a_2\beta_{11}(0)] &= 0, \\ \operatorname{Re} [\beta'_{11}(h) - 2b_2\beta_{11}(h)] &= 0, \\ \operatorname{Re} [\beta'_{12}(0) - 4a_2\beta_{12}(0)] &= \left[ 3a_3 + 4 \frac{a_2}{\rho(0)} \right] \beta_{01}(0), \\ \operatorname{Re} [\beta'_{12}(h) - 4b_2\beta_{12}(h)] &= \left[ 3b_3 + 4 \frac{b_2}{\rho(h)} \right] \beta_{01}(h). \end{aligned}$$

Можно показать, что в общем случае  $m \geq 2$  условия (5.19) сводятся к условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\beta'_{ml}(0) - 2la_2\beta_{ml}(0)] &= \tau_{ml}^{(0)}, \quad l = m+1, m, \dots, 1, 0, \\ \operatorname{Re} [\beta'_{ml}(h) - 2lb_2\beta_{ml}(h)] &= \tau_{ml}^{(h)}, \quad l = m+1, m, \dots, 1, 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $\tau_{ml}^{(0, h)}$  — постоянные, которые определяются через коэффициенты  $\beta_{nj}(s, \nu)$ ,  $0 \leq n \leq m$ ,  $j > l$ , найденные на предыдущих этапах, и выражаются через  $a_l$ ,  $b_l$ , производные от  $c_l(s)$  и  $\rho(s)$  в точках  $s = 0$  и  $s = h$ .

При определении функций  $\beta_{ml}(s)$  мы ввели новые неизвестные функции  $f_{ml}(s) = c_0^{l/2}(s) F^{l+1}(s) \beta_{ml}(s)$  и имели для них уравнения (3.14). Из (7.3) и (6.6) следует, что на концах промежутка  $[0, h]$  функции  $f_{ml}(s)$  должны удовлетворять условиям

$$\operatorname{Re} [f'_{ml}(s) + g(s)f_{ml}(s)] \Big|_{s=0, h} = c_0^{l/2}(s) F^{l+1}(s) \Big|_{s=0, h} \tau_{ml}^{(0, h)}. \quad (7.4)$$

К этим равенствам должны быть также добавлены условия для мнимых частей

$$\operatorname{Im} f_{ml}(s) \Big|_{s=0, h} = \operatorname{Im} \vartheta_{ml}^{(0, h)}, \quad (7.5)$$

которые вытекают из требований (5.14).

Таким образом, уравнения (3.14) должны решаться при граничных условиях (7.4) и (7.5).

Рассмотрим несколько подробнее случай  $m = 1$ . Для определения функции  $f_{12}(s)$  мы имеем неоднородное уравнение (3.10) с известной вещественной правой частью  $p_{12}(s)$ , неоднородное условие (7.4) и однородное условие (7.5). Если нуль не является собственным значением возникающих таким образом для  $\operatorname{Re} f_{12}(s)$  и  $\operatorname{Im} f_{12}(s)$  задач Штурма — Лиувилля, то  $f_{12}(s)$  — вещественная функция, определяемая единственным образом.

Второе уравнение (3.10) для функции  $f_{11}(s)$  оказывается однородным, так как  $f(s) = 0$ , и, следовательно  $p_{11}(s) = 0$ . Условия (7.4) и (7.5) для функции  $f_{11}(s)$  являются также однородными, и поэтому  $f_{11}(s) = 0$ . При этом мы снова считаем, что нуль не является собственным значением соответствующей граничной задачи. Из обращения в нуль функции  $f_{11}(s)$  следует, что  $\beta_{11}(s) = 0$ . Последнее равенство вместе с равенством  $f(s) = 0$  приводит к выводу (см. формулы (3.7) и (3.8)), что

$$\alpha_{12}(s) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{10}(s) = 0 \quad (7.6)$$

и, следовательно,  $\alpha_{10}(h) = 0$ . Последнее равенство было нами использовано в предыдущем параграфе, когда мы в формуле (6.8) для собственных значений заменили поправочное слагаемое  $O(1/p^{1/2})$  на  $O(1/p)$ . Уравнение (3.10)

при  $l = 0$  снова неоднородное. Решая его при однородных условиях (7.4) и (7.5), находим отличную от нуля функцию  $f_{10}(s)$ , которая служит для определения  $\beta_{10}(s)$  и  $\alpha_{11}(s)$ . Таким образом, полином  $\beta_1(s, \nu)$  содержит только четные степени  $\nu$ , а полином  $\alpha_1(s, \nu)$  — только нечетные.

Можно показать, что в общем случае полиномы  $\beta_{2j-1}(s, \nu)$  и  $\alpha_{2j}(s, \nu)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , содержат только четные степени, а полиномы  $\beta_{2j}(s, \nu)$  и  $\alpha_{2j-1}(s, \nu)$  — только нечетные. Поэтому в уравнении (5.23) для собственных значений будут содержаться только четные слагаемые. Решая это уравнение методом итераций, мы получим разложение для собственных значений  $\omega_{p, q}$  по целым отрицательным степеням  $p \gg 1$ . Число членов этого разложения определяется числом построенных полиномов\*). После того как собственные значения найдены, могут быть построены приближенные выражения и для собственных функций. Невязка в уравнении Гельмгольца, которую будут давать эти приближенные собственные функции, может быть сделана порядка любой отрицательной степени  $\omega_{p, q}$ . Можно строго доказать, что возникающее таким образом разложение для собственных значений будет асимптотическим. Метод доказательства аналогичен методу, которым в § 6 главы 6 была доказана асимптотика собственных значений в случае шепчущей галереи.

Найдем теперь те условия, при которых общее однородное уравнение (3.11) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее однородным условиям (7.4) и (7.5). Решение однородного уравнения (3.11), как мы видели, может быть записано в виде

$$f_{ml}(s) = F(s) \left\{ A \sin \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] + B \cos \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Подставляя  $f_{ml}(s)$  в однородные условия (7.4) и (7.5), а также учитывая граничные условия (6.6) для  $F(s)$ , получаем систему уравнений для определения постоянных  $A$  и  $B$

$$\operatorname{Re} \frac{l+1}{F(s)} \left\{ A \cos \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] - \right. \\ \left. - B \sin \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] \right\} \Big|_{s=0, h} = 0,$$

$$\operatorname{Im} \left\{ A \sin \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] + B \cos \left[ (l+1) \int_0^s F^{-2}(\tau) d\tau \right] \right\} \Big|_{s=0, h} = 0.$$

Полагая  $s = 0$ , находим  $\operatorname{Re} A = \operatorname{Im} B = 0$ . Тогда при  $s = h$  получаем

$$\operatorname{Re} B \sin \left[ (l+1) \int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau \right] = 0,$$

$$\operatorname{Im} A \sin \left[ (l+1) \int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau \right] = 0.$$

\*) В следующем параграфе будет выписана формула для собственных частот открытого резонатора вплоть до членов, пропорциональных  $1/p$ .

Если

$$\int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau \neq \frac{P}{l+1} \pi, \quad (7.7)$$

где  $P$  — целое число, то

$$\operatorname{Re} B = \operatorname{Im} A = 0.$$

При

$$\int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau = \frac{P}{l+1} \pi \quad (7.8)$$

$\operatorname{Re} B$  и  $\operatorname{Im} A$  остаются произвольными.

Очевидно, при условии (7.7) разрешима соответствующая неоднородная задача (3.14), (7.4), (7.5), в то время как при условии (7.8) она, вообще говоря, не имеет решения.

Из сказанного следует, что процесс построения полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  зависит от арифметической природы интеграла  $\int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau$  и может продолжаться неограниченно долго, если

$$\int_0^h F^{-2}(\tau) d\tau \neq \frac{P}{Q} \pi, \quad (7.9)$$

где  $P/Q$  — несократимая дробь.

В противном случае при определении старшего коэффициента  $\beta_{q-2, q-1}(s)$  полинома  $\beta_{q-2}(s, \nu)$  возникает задача Штурма — Лиувилля на собственном числе \*) и при помощи указанной схемы этот полином, вообще говоря, построен быть не может. Напомним, что если условие (7.9) не выполняется, собственные значения в первом приближении оказываются многократно вырожденными.

## § 8. Собственные частоты открытого резонатора (неоднородное заполнение, высшие приближения)

В качестве примера применения формулы (6.26) определим собственные частоты  $\omega_{p, q}$  в частном случае, когда луч  $S$  является прямой и скорость распространения волн в координатах  $(s, n)$  описывается формулой

$$c(s, n) = c_0 + c_2 n^2, \quad (8.1)$$

где  $c_0$  и  $c_2$  не зависят от  $S$ . К такой задаче мы приходим при определении собственных частот открытого резонатора, заполненного неоднородной средой. В процессе работы лазера

\*) Под этим мы понимаем существование нетривиального решения соответствующей однородной задачи Штурма — Лиувилля.

рабочее вещество теряет однородность и появляется зависимость скорости распространения волн от поперечной координаты типа (8.1). Для собственных функций, сосредоточенных вблизи оси резонатора, потерями на излучение можно пренебречь, и это приводит к тому, что при построении собственных функций открытого резонатора можно применить ту же методику, что и для замкнутых областей.

Для скорости, описываемой формулой (8.1), коэффициент  $K(s)$  в уравнении (6.4) оказывается постоянным:  $K(s) = 2 \frac{c_2}{c_0} \equiv \equiv k_0^2$ , а коэффициенты  $g(0)$  и  $g(h)$  в условиях (6.13) сводятся соответственно к  $1/r_1$  и  $-1/r_2$ . Функции  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  выберем равными

$$f_1(s) = -\frac{1}{r_1} \frac{\sin k_0 s}{k_0} + \cos k_0 s,$$

$$f_2(s) = \frac{1}{r_2} \frac{\sin k_0 (s-h)}{k_0} + \cos k_0 (s-h),$$

при этом мы считаем, что

$$W[f_1, f_2] = \left(k_0^2 - \frac{1}{r_1 r_2}\right) \frac{\sin k_0 h}{k_0} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cos k_0 h \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{f_1(h) f_2(0)}{f_2(h) f_1(0)} = \cos^2 k_0 h - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{\cos k_0 h \sin k_0 h}{k_0} + \frac{1}{r_1 r_2} \frac{\sin^2 k_0 h}{k_0^2},$$

и условие, при выполнении которого существуют собственные функции, сосредоточенные вблизи оси, имеет вид

$$0 < \cos^2 k_0 h - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{\cos k_0 h \sin k_0 h}{k_0} + \frac{1}{r_1 r_2} \frac{\sin^2 k_0 h}{k_0^2} < 1, \quad (8.2)$$

а собственные частоты  $\omega_{p,q}$  описываются формулой

$$\omega_{p,q} = \frac{c_0}{h} \left\{ \pi p + \left(q + \frac{1}{2}\right) \left[ \text{sign} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{\cos k_0 h + k_0 r_2 \sin k_0 h}{k_0^{-1} \sin k_0 h - r_2 \cos k_0 h} \right) \times \right. \right.$$

$$\times \arccos \left( \cos^2 k_0 h - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{\sin k_0 h \cos k_0 h}{k_0} + \frac{1}{r_1 r_2} \frac{\sin^2 k_0 h}{k_0^2} \right)^{1/2} +$$

$$\left. \left. + \pi N \right] + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}. \quad (8.3)$$

В условии (8.2) и равенстве (8.3) можно перейти к пределу при  $k_0 \rightarrow 0$ , что эквивалентно переходу к однородной среде. В результате такого предельного перехода получаем

$$0 < \left(1 - \frac{h}{r_1}\right) \left(1 - \frac{h}{r_2}\right) < 1 \quad (8.4)$$

и

$$\omega_{p,q} = \frac{c_0}{h} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \arccos \sqrt{\left( 1 - \frac{h}{r_1} \right) \left( 1 - \frac{h}{r_2} \right)} + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}, \quad (8.5)$$

если

$$1 - \frac{h}{r_1} > 0 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{h}{r_2} > 0,$$

$$\omega_{p,q} = \frac{c_0}{h} \left\{ \pi p + \left( q + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \pi - \arccos \sqrt{\left( \frac{h}{r_1} - 1 \right) \left( \frac{h}{r_2} - 1 \right)} \right) + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}, \quad (8.6)$$

если

$$\frac{h}{r_1} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{h}{r_2} - 1 > 0.$$

Неравенство (8.4) и формулы (8.5), (8.6) хорошо известны в теории открытых резонаторов. Отметим, что в (8.2) и (8.3) величину  $k_0$  можно заменить на  $ik_0$ , и тогда все тригонометрические функции заменятся на гиперболические функции аргумента  $k_0 h$ . Такая замена означает, что мы переходим к случаю  $c_2 < 0$ , когда неоднородность среды оказывает дефокусирующее влияние.

Для однородной среды сравнительно нетрудно в формуле (8.5) вычислить следующий член  $A_{-1}/p$ , пропорциональный  $p^{-1}$ .

Будем считать, что зеркала симметричного резонатора описываются уравнениями

$$s = \frac{1}{2r_1} n^2 + a_4 n^4 + \dots,$$

$$s = h - \frac{1}{2r_2} n^2 + b_4 n^4 + \dots$$

и  $r_1 \neq h$ ,  $r_2 \neq h$  (резонатор неконфокальный).

Выполняя вычисления по указанной выше схеме, для коэффициента  $A_{-1}$  приходим к следующей формуле:

$$A_{-1} = \frac{1}{16\pi} \left[ \left( q + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \right] \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{3}{16\pi} \left[ \left( q + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \times \\ \times \frac{h}{r_1 + r_2 - h} \left\{ \left( \frac{1}{r_1^3} - 8a_4 \right) r_1^2 \frac{h - r_2}{h - r_1} + \left( \frac{1}{r_2^3} + 8b_4 \right) r_2^2 \frac{h - r_1}{h - r_2} \right\}. \quad (8.7)$$

Заметим, что лучевой метод в малом при его дальнейшем развитии (см. гл. 9) и построении системы отраженных лучей в квадратичном приближении позволяет получить в формуле для  $A_{-1}$  лишь старшие члены, пропорциональные  $(q + 1/2)^2$ .

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ  
В ОКРЕСТНОСТИ ЗАМКНУТОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ

Пусть  $l$  — замкнутая геодезическая на  $m + 1$ -мерном компактном ориентируемом римановом многообразии\*). Здесь будет построена последовательность собственных функций оператора Лапласа, сосредоточенных в окрестности  $l$ . При этом предполагается, что  $l$  обладает свойством устойчивости, вполне аналогичным свойству устойчивости диаметра области (см. гл. 4). При построении высших приближений возникает необходимость наложить ограничение на арифметическую природу некоторых параметров  $\alpha_j$ , являющихся важными характеристиками геодезической  $l$ . С аналогичным явлением мы сталкивались уже в главе 7.

Другая задача, рассматриваемая в этой главе — это задача о построении собственных функций трехмерной области, ограниченной поверхностью  $S$ . Предполагается, что собственные функции сосредоточены в окрестности геодезической  $l$ , расположенной на поверхности  $S$ .

§ 1. Постановка задачи  
и вывод параболического уравнения

Займемся исследованием собственных функций оператора Лапласа  $\Delta$  на римановом многообразии, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической  $l$ . Удастся построить ряд  $u$ , формально удовлетворяющий уравнению

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad (1.1)$$

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial y^j} \right), \quad g = \frac{1}{\det \|g^{ij}\|}. \quad (1.2)$$

Компоненты тензора  $\|g^{ij}\|$  связаны с метрическим тензором  $\|g_{ij}\|$  соотношением  $\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}$ . Формула (1.2) — это классическое выражение для оператора Лапласа на римановом

\*) Все построения настоящей главы относятся лишь к окрестности геодезической линии  $l$ . Компактности мы требуем, чтобы не усложнять изложения обсуждением вопроса о том, что понимать под собственной функцией оператора Лапласа (такое обсуждение в некомпактном случае необходимо). От требования ориентируемости многообразия можно отказаться, правда, за счет усложнения некоторых формул.



многообразии. Так определенный оператор Лапласа инвариантен относительно замены переменных  $y^i$ .

Для нахождения асимптотики собственных функций в первом приближении весьма удобен метод параболического уравнения. К выводу параболического уравнения задачи мы и переходим.

Опишем систему координат, в которой будет удобно проводить последующие построения. Точки на  $l$  будем характеризовать длиной дуги, отмеряемой вдоль  $l$  в обе стороны от фиксированной точки. Нам будет удобно считать, что  $-\infty < s < +\infty$ .

Пусть  $O = O(s)$  — некоторая точка  $l$ . Проведем через  $O = O(s)$  все геодезические, ортогональные в точке  $O(s)$  к  $l$ . На подмногообразии  $f_s$ , сотканном из этих геодезических, введем так называемые римановы нормальные координаты. Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — некоторая ортонормированная система векторов, ортогональных к  $l$  в точке  $O(s)^*$ . Чтобы задать произвольную точку  $M$  на  $f_s$ , достаточно задать геодезическую, проходящую через  $O(s)$  и  $M$  (и ортогональную к  $l$ ), и длину дуги  $|OM|$  этой геодезической, для чего, в свою очередь, достаточно задать  $m$  чисел

$$y_j = |OM| \cos(\widehat{\eta_0 e_j}),$$

где  $\eta_0$  — единичный вектор в точке  $O = O(s)$ , касающийся геодезической  $OM$  и направленный от  $O$  к  $M$ . В дальнейшем для краткости вместо «точка  $O(s)$ » мы будем просто писать «точка  $s$ ». Величины  $y_j$  называются *римановыми нормальными координатами* \*\*). Переноса параллельно (в смысле параллельного переноса вдоль кривой  $l$  в римановом пространстве)  $e_j, j = 1, 2, \dots, m$ , можно ввести римановы координаты на любом подмногообразии  $f_{s'}$ ,  $s' \in l$ . В силу того, что при параллельном переносе скалярное произведение любой пары векторов не меняется, векторы  $e_0, e_1, \dots, e_m$  (где  $e_0$  — единичный вектор, касательный к  $l$ ) будут все время представлять собой ортонормированную систему векторов. Напомним, что параллельно переноса вдоль  $l$  единичный вектор  $e_0$ , касательный к  $l$  в точке  $s$ , мы будем в каждой точке геодезической  $l$  получать снова единичный, касательный к  $l$  вектор. Это следует из того, что  $l$  геодезическая.

Если  $y_i$  меняются в малой окрестности нуля (например, внутри шара  $\sqrt{y_1^2 + \dots + y_m^2} < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ ), а  $-\infty < s_1 < s < s_2 < \infty$ , то  $s, y_1, \dots, y_m$  можно принять за

\*) Напоминаем, что рассматриваемое риманово пространство  $m + 1$ -мерное. Все рассмотренные ограничения относятся к некоторой окрестности точки  $O(s)$  на подмногообразии  $f(s)$ . Соответствующие уточнения будут сделаны далее.

\*\*\*) См. П. К. Рашевский [2], О. Веблен [1].

систему координат в окрестности отрезка  $s_1 < s < s_2$  геодезической  $l$ . Ограничение на  $\varepsilon$  сверху необходимо, так как иначе нарушается взаимная однозначность соответствия между точками риманова многообразия в окрестности отрезка  $s_1 < s < s_2$  геодезической  $l$  и точками цилиндра

$$s_1 < s < s_2, \quad \sqrt{y_1^2 + \dots + y_m^2} < \varepsilon.$$

В точках геодезической  $l$  система координат, очевидно, ортонормирована, поэтому на  $l$  имеют место равенства

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, m \quad (1.3)$$

( $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора в координатах  $y^j$ , где  $y_0 = s$ ,  $y^j = y_j$ ,  $j > 0$ ).

В полной окрестности  $l$  такая система координат, вообще говоря, не будет определена, так как параллельно перенося вдоль  $l$  векторы  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , мы в конце концов вернемся в исходную точку, а векторы  $e_1, \dots, e_m$  перейдут в векторы  $e'_1, \dots, e'_m$ , причем система векторов  $e_1, \dots, e_m$  может совпасть с  $e'_1, \dots, e'_m$  при  $m \geq 1$  только случайно.

Из ориентируемости многообразия следует, что ориентации систем векторов  $e_1, \dots, e_m$  и  $e'_1, \dots, e'_m$  одинаковы. Пусть ортогональная матрица  $T_{ij}$  осуществляет переход от ортов  $e_j$  к ортам  $e'_j$ :

$$e'_i = \sum_{j=1}^m T_{ij} e_j, \quad e_j = \sum_{i=1}^m T_{ij} e'_i.$$

Совпадение ориентаций означает, что  $\det(T_{ij}) = 1$ .

Пусть  $\mu$  — произвольный вектор

$$\mu = \sum \mu_i e_i = \sum \mu'_i e'_i.$$

Между компонентами вектора  $\mu$  в координатных системах  $e_i$  и  $e'_i$ , очевидно, имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad T = (T_{ij}),$$

играющее заметную роль в дальнейшем.

В двумерном случае  $m = 1$  и совпадение ориентаций ортонормированных систем  $\{e_i\}$  и  $\{e'_i\}$  вырождается в равенство  $e_1 = e'_1$ .

Выведем некоторые важные для дальнейшего свойства координат

$$(s, y_1, \dots, y_m) \equiv (y^0, y^1, \dots, y^m).$$

Множество точек  $\{s, y_1\gamma, \dots, y_m\gamma; 0 \leq \gamma \leq 1\}$  представляет собой отрезок геодезической, ортогональной к  $l$  в точке  $s$ , поэтому должны выполняться уравнения \*)

$$\frac{d^2 y^j}{d\gamma^2} = -\Gamma_{ab}^j \frac{dy^a}{d\gamma} \frac{dy^b}{d\gamma},$$

$$\Gamma_{ab}^j = \frac{1}{2} g^{jc} \left( \frac{\partial g_{ac}}{\partial y^b} + \frac{\partial g_{bc}}{\partial y^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c} \right),$$

$$(\dot{y}^0, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m) = (0, y_1\gamma, \dots, y_m\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

где  $\Gamma_{ab}^j$  — символы Кристоффеля, или

$$\sum_{a,b=1}^m \Gamma_{ab}^j y_a y_b = 0.$$

Дифференцируя это равенство по  $y_a$  и  $y_b$ , получаем на  $l$

$$\Gamma_{ab}^j|_l = 0, \quad a, b = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

Параллельно перенося вдоль  $l$  единичный вектор  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , будем все время получать вектор с такими же компонентами. Классическая формула для бесконечно малого приращения  $\delta e_j^x$  компонент вектора  $e_j = \{e_j^x\} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , параллельно переносимого вдоль бесконечно малого вектора  $\{\delta y^a\}$ , дает

$$\delta e_j^x = -\Gamma_{ab}^x \delta y^a e_j^b.$$

Учитывая, что  $e_j^b = 1$  при  $j = b$ ,  $e_j^b = 0$  при  $j \neq b$ ,  $\delta e_j^x = 0$ , и считая, что бесконечно малый вектор  $\delta y^a$  параллелен касательной к  $l$ , получим в дополнение к равенствам (1.4)

$$\Gamma_{0j}^x|_l = 0, \quad x, j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

Используя известную формулу \*\*)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} = g_{ka} \Gamma_{ij}^a + g_{ia} \Gamma_{kj}^a$$

и равенства (1.3)—(1.5), получаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} \Big|_l = 0, \quad i, j, k = 0, 1, \dots, m; \quad \frac{\partial}{\partial y^0} = \frac{\partial}{\partial s}. \quad (1.6)$$

\*) См. П. К. Рашевский [2].

\*\*) См. О. Веблеи [1].

Классическая формула для компонент тензора кривизны

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ri}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial y^j \partial y^r} - \frac{\partial^2 g_{rl}}{\partial y^i \partial y^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial y^i \partial y^r} \right) + g_{ab} (\Gamma_{ir}^b \Gamma_{jk}^a - \Gamma_{jr}^b \Gamma_{ik}^a)$$

дает

$$R_{0i0j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_l,$$

т. е.

$$g_{00} = 1 - \sum_{i,j=1}^m K_{ij}(s) y_i y_j + O \left[ \left( \sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{3/2} \right], \quad (1.7)$$

$$K_{ij}(s) = K_{ji}(s) = R_{0i0j} \Big|_l.$$

Теперь искомое параболическое уравнение задачи получить нетрудно.

Уравнение собственных функций  $(\Delta + k^2)u = 0$  запишем в координатах  $s, y_1, \dots, y_m$ :

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial y^j} \right) + k^2 u = 0, \quad (1.8)$$

$$(s, y_1, \dots, y_m) = (y^0, \dots, y^m), \quad \|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}, \quad g = \det \|g_{ij}\|.$$

Его решение будем искать в виде

$$u = e^{iks} U(s, y_1, \dots, y_m, k), \quad (1.9)$$

где  $U$  — новая неизвестная функция — функция ослабления (по терминологии В. А. Фока).

При выводе параболического уравнения для  $U$  будем считать, что  $k$  — большая величина и

$$U = O(1), \quad \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3} U}{\partial s^{r_1} \partial y_1^{r_2} \partial y_1^{r_3}} = O \left( k^{\frac{r_2+r_3}{2}} \right), \quad |y_j| = O(k^{-1/2}). \quad (1.10)$$

В дальнейшем важную роль будут играть соотношения (1.3) и (1.6). Из них легко следует:

$$\sqrt{g} = \sqrt{1 + O(|y|^2)} = 1 + O(|y|^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = 1 + O(|y|^2), \quad |y|^2 = \sum_{j=1}^m y_j^2,$$

$$\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1} = \|I + g_{ij} - I\|^{-1} =$$

$$= I - (\|g_{ij}\| - I) + (\|g_{ij}\| - I)^2 + \dots,$$

где  $I$  — единичная матрица.

Из последнего выражения для  $\|g^{ij}\|$  и формул (1.6) и (1.7) следует

$$\|g^{ij}\| = I + O(|y|^2), \quad g^{00} = 1 + \sum_{i,j=1}^m K_{ij}(s) y_i y_j + O(|y|^3). \quad (1.11)$$

Подставляя выражение (1.9) в уравнение (1.8), учитывая формулы (1.10), (1.11) и пренебрегая членами порядка  $O(\sqrt{k})$  и ниже, получим следующее уравнение для  $U$ :

$$2ik \frac{\partial U}{\partial s} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial y_j^2} - k^2 \sum_{l,h=1}^m K_{lh}(s) y_l y_h U = 0 \quad (1.12)$$

(нетрудно видеть, что каждый член в уравнении (1.12) имеет порядок  $O(k)$ ). Поделим обе части уравнения (1.12) на  $k$  и введем новые переменные

$$\mu_j = \sqrt{k} y_j.$$

Уравнение (1.12) примет вид

$$\mathcal{L}U = 2i \frac{\partial U}{\partial s} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_j^2} - \sum_{l,h=1}^m K_{lh} \mu_l \mu_h U = 0. \quad (1.13)$$

Интересующие нас решения уравнения (1.13) должны удовлетворять условию «стремления к нулю на бесконечности». В силу того, что координатная система  $s, y_1, \dots, y_m$  регулярна лишь при малых  $y_j$ , постановка условий на бесконечности не может быть осуществлена непосредственно в этих координатах. Нам придется провести некоторые вспомогательные построения.

Сопоставляя каждой точке  $s$  геодезической  $l$  нормальную к  $l$   $m$ -мерную гиперплоскость  $\Phi_s$ , проходящую через  $s$ , получим геометрический объект  $\Xi$ , называемый *нормальным расслоением*. Чтобы задать элемент  $\Xi$ , достаточно задать точку  $s \in l$  и вектор  $\xi \in \Phi_s$  (т. е.  $\Xi$  есть множество пар  $(s, \xi)$ ,  $s \in l$ ,  $\xi \in \Phi_s$ ).

На нормальном расслоении  $\Xi$   $s$  пробегает отрезок длины  $L$ , где  $L$  — длина геодезической  $l$ . Удобно считать, что  $s$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Соответствующее множество пар  $(s, \xi)$  ( $-\infty < s < +\infty$ ,  $\xi \in \Phi_s$ ) образует другое нормальное расслоение  $\Xi'$ . отождествляя в нем точки, для которых  $s' - s''$  кратно  $L$ , возвращаемся к расслоению  $\Xi$ .

(Расслоение  $\Xi$  является расслоенным пространством с  $m$ -мерным векторным слоем\*). Базой расслоения является геодезическая  $l$ , слоем —  $m$ -мерное евклидово пространство  $\Phi_s$ . Расслоение  $\Xi'$  является *универсальной накрывающей*\*\*)) для  $\Xi$ .)

\*) См Р. Бишоп, Р. Кри́ттендей [1].

\*\*) См. З. Зейферт, Н. Трельфаль [1].

Точке  $M(s, y_1, \dots, y_m)$ , лежащей на римановом многообразии в окрестности  $l$ , сопоставим точку  $N \in \Xi$  по следующему правилу: введение координат  $s, y_1, \dots, y_m$  предполагает предварительное задание векторов  $e_1, \dots, e_m$  (см. начало параграфа); эти векторы мы примем за базис на нормальной к  $l$  в точке  $s$  гиперплоскости  $\Phi_s$  и точке  $M(s, y_1, \dots, y_m)$  сопоставим точку  $N(s, \mu) \in \Xi$ , где  $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i e_i$ ,  $\mu_i = \sqrt{k} y_i$ .

Вместо уравнения (1.13), выполняющегося на римановом многообразии в окрестности  $l$ , будем рассматривать уравнение на расслоении  $\Xi'$ :

$$2i \frac{DU}{ds} + \Delta U - (K(s)\mu, \mu) U = 0, \quad (1.14)$$

где  $D/ds$  — ковариантная производная функции  $U$ , которую следует понимать как предел

$$\frac{DU(s, \mu)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{U(s + \Delta s, \mu_{\Delta s}) - U(s, \mu)}{\Delta s}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\mu_{\Delta s}$  — результат параллельного перенесения вдоль  $l$  вектора  $\mu$  из точки  $s \in l$  в точку  $(s + \Delta s) \in l$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа на евклидовой гиперплоскости  $\Phi_s$ ,  $(K(s)\mu, \mu)$  — квадратичная форма на  $\Phi_s$  в координатной системе  $s, \mu_1, \dots, \mu_m$ , имеющая вид  $\sum_{j, h=1}^m K_{jh} \mu_j \mu_h$ .

Задача заключается в том, чтобы на нормальном расслоении  $\Xi'$  найти решения уравнения (1.14), удовлетворяющие следующим условиям:

$$\max_{|\mu| = R} |U(s, \mu)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad U \neq 0, \quad (1.16)$$

$$U(s + L, \mu) = e^{i\kappa} U(s, \mu), \quad (1.17)$$

здесь  $L$  — длина  $l$ .

Решив задачу (1.14) — (1.17), мы получим искомое приближение к функции ослабления  $U$  (см. формулу (1.9) и далее), если в решении задачи (1.14) — (1.17) положим  $\mu_j = \sqrt{k} y_j$ , где  $y_j$  — введенные в начале параграфа координаты, характеризующие точки на подмногообразиях  $f_s$ . Координаты  $y_j$  на подмногообразиях  $f_s$  меняются в окрестности нуля.

Вводя расслоение  $\Xi'$  и рассматривая на нем уравнение (1.14) при условиях (1.16), (1.17), мы получим точно поставленную краевую задачу, в то время как, проводя рассмотрения на римановом многообразии и не вводя расслоения  $\Xi'$ , было бы затруднительно придать четкий смысл условию убывания  $U$  на

бесконечности, которое записывается здесь совсем просто формулой (1.16).

Заметим, что расслоенные пространства можно было бы ввести и в других местах, например в главах 7 и 9, однако из-за наличия отражающих границ расслоения описываются там довольно сложно и их введение сделало бы изложение более громоздким.

Решения задачи (1.14), (1.16), (1.17) мы будем по аналогии с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений называть *решениями Флоке*, а  $\kappa$  — *показателем Флоке*. Как окажется в дальнейшем, используя уравнения лучевого метода в малом, эту задачу в некотором смысле можно решить, точнее свести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Для возможности такого решения геодезическая  $l$  должна удовлетворять условию устойчивости в первом приближении (ср. гл. 4, 7). При этом оказывается, что существует счетное множество показателей Флоке  $\kappa$ , которым соответствуют решения задачи (1.14), (1.16), (1.17). Каждому  $\kappa$  отвечает конечное множество решений Флоке.

Если решение задачи (1.14), (1.16), (1.17) построено, асимптотику собственных чисел нетрудно получить, потребовав, чтобы собственная функция (см. формулу (1.9)) была  $L$ -периодична по  $s$ : этим достигается однозначность  $u$  (в первом приближении).

Формулы (1.9), (1.17) и условие периодичности дают следующее выражение для собственного числа  $k^*$ ) в первом приближении

$$k \approx k_p = \frac{1}{L}(2\pi p - \kappa), \quad (1.18)$$

где  $p \gg 1$  — целое число.

## § 2. Уравнение Якоби для геодезической $l$

Роль лучей в рассматриваемой задаче играют геодезические линии. Для нас весьма важно будет исследовать дифференциальные уравнения лучей (т. е. геодезических), близких к геодезической  $l$ , т. е. уравнения Эйлера для лучевого метода в малом.

Пусть  $y_j = y_j(s)$  — уравнение геодезической, близкой к  $l$ . В основном вариационном уравнении для геодезических

$$\delta \int \sqrt{\sum_{i,j=0}^m g_{ij} \frac{dy^i}{ds} \frac{dy^j}{ds}} ds = 0, \quad y^0, y^1, \dots, y^m = (s, y_1, \dots, y_m) \quad (2.1)$$

\*) Здесь и далее мы будем называть  $k$  собственным числом, хотя более правильно было бы называть собственным числом —  $k^2$ .

будем считать  $y_j$  и  $\frac{dy_j}{ds}$  малыми первого порядка. Пользуясь соотношениями (1.3), (1.6) и (1.7) и отбрасывая все члены выше второго порядка малости, получим

$$\int \sqrt{\sum_{ij=0}^m g_{ij} \frac{dy^i}{ds} \frac{dy^j}{ds}} ds \approx \int \sqrt{1 - \sum_{ij=1}^m K_{ij}(s) y_i y_j + \sum_{j=1}^m \left(\frac{dy^j}{ds}\right)^2} ds \approx \int \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{dy^j}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^m K_{ij}(s) y_i y_j\right) ds. \quad (2.2)$$

Уравнения Эйлера функционала (2.2) имеют вид

$$\frac{d^2 y_j}{ds^2} + \sum_{i=1}^m K_{ij}(s) y_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3)$$

Систему уравнений (2.3) можно записать в удобной инвариантной форме. Пусть  $e_1, \dots, e_m \in \Phi_s$  — орты, введенные в § 1. Положим

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m y_j(s) e_j. \quad (2.4)$$

Вектор  $\mathbf{y}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2 \mathbf{y}}{ds^2} + K(s) \mathbf{y} = 0, \quad -\infty < s < +\infty, \quad (2.5)$$

где  $\frac{D}{ds}$  — ковариантное дифференцирование:

$$\frac{D\mathbf{y}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{y}_{s+\Delta s}(s+\Delta s) - \mathbf{y}(s)}{\Delta s}, \quad \frac{D^2 \mathbf{y}(s)}{ds^2} = \frac{D}{ds} \left( \frac{D\mathbf{y}}{ds} \right).$$

Вектор

$$\mathbf{y}_{s+\Delta s}(s+\Delta s) = \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j(s+\Delta s) e_j(s)$$

— результат параллельного переноса вектора  $\mathbf{y}(s+\Delta s)$  из точки  $s+\Delta s$  в точку  $s$ .  $K(s)$  — линейный оператор, действующий из  $\Phi_s$  в  $\Phi_s$ ; в базисе  $e_1, \dots, e_m$

$$K(s) \mathbf{y} = K \sum_{j=1}^m y_j(s) e_j = \sum_{j,r=1}^m K_{rj}(s) y_j e_r, \quad K_{rj} = K_{jr}. \quad (2.6)$$

В силу симметричности и вещественности матрицы  $\|K_{rj}\|$  (см. формулу (1.7))  $K$  — самосопряженный оператор. Уравнение (2.5) для луча в первом приближении  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(s)$  — это хорошо



известное уравнение Якоби для геодезической \*). (Уравнение Якоби определяется как уравнение Эйлера для второй вариации функционала, а выражение (2.2), уравнением Эйлера которого является (2.5), отличается от второй вариации функционала  $\int d\sigma = \int \sqrt{g_{ij} dy^i dy^j}$  лишь постоянным слагаемым.)

Геодезическую  $l$  назовем *устойчивой по первому приближению*, если уравнение (2.5) не имеет неограниченных решений при  $s \rightarrow \pm\infty$ . Излагаемое далее (в § 3) решение задачи (1.14), (1.16), (1.17) имеет смысл только для устойчивой геодезической.

Заметим, что определение устойчивости  $l$  полностью согласуется с понятием устойчивости лучей по первому приближению, играющему фундаментальную роль в главах 4, 6 и 7.

Систему уравнений (2.3) (или, что то же, векторное уравнение (2.5)) удобно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{dy}{ds} = p, \quad \frac{dp}{ds} = -Ky. \quad (2.7)$$

Пусть  $\{X(s)\}$  — множество пар векторов  $X = (x_1(s), x_2(s))$ ,  $x_j(s)$  принадлежат гиперплоскости  $\Phi_s$ , нормальной к  $l$  в точке  $s$ .

Введем операторы  $J$  и  $H$ :

$$JX = J \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kx_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (2.7) эквивалентна уравнению

$$\frac{DZ}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{Dz_1}{ds} \\ \frac{Dz_2}{ds} \end{pmatrix} = JHZ \quad \left( Z = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} \in \{X(s)\} \right). \quad (2.8)$$

Вводя орты  $e_1, \dots, e_m$ , векторное уравнение (2.8) можно записать в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{ds} \\ \vdots \\ \frac{dz_{2m}}{ds} \end{pmatrix} = J_{2m} H_{2m} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$z_1, \dots, z_m = y_1, \dots, y_m, \quad z_{m+1}, \dots, z_{2m} = p_1, \dots, p_m,$$

$$p = \sum_{j=1}^m p_j e_j, \quad y = \sum_{j=1}^m y_j e_j.$$

\*) См. Милнор [1].

Здесь  $J_{2m}$  и  $H_{2m}$  — матрицы:

$$H_{2m} = \begin{vmatrix} \|K_{ij}\| & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}, \quad J_{2m} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix},$$

где  $I$  (соответственно  $0$ ) единичные (соответственно нулевые) матрицы вида  $m \times m$ .

Уравнение (2.8), так же как уравнение (2.5), мы будем рассматривать на всей оси  $-\infty < s < +\infty$ .

Нетрудно видеть, что для устойчивой геодезической (и только в этом случае) любое решение уравнения (2.8) равномерно ограничено на всей оси  $s$ .

Выведем удобные для дальнейшего необходимые и достаточные критерии устойчивости геодезической  $l$ .

Введем обычным образом скалярное произведение векторов  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$  из  $\{X(s)\}$ :

$$(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2m} x_j^{(1)} \overline{x_j^{(2)}}, \quad (X^{(1)}, X^{(2)}) = \overline{(X^{(2)}, X^{(1)})}.$$

Относительно этого скалярного произведения операторы  $J$  и  $H$  удовлетворяют соотношениям

$$J^* = -J, \quad H^* = H$$

(звездочка — символ эрмитова сопряжения), т. е.

$$(JX, Z) = -(X, JZ), \quad (HX, Z) = (X, HZ).$$

Кроме того,  $J^2 X = -X$ .

Пусть  $\Pi$  — матрица  $2m \times 2m$ , столбцы которой являются линейно независимыми векторами — решениями уравнения (2.8):

$$\frac{d\Pi}{ds} = J\Pi. \quad (2.10)$$

Такие матрицы называются *фундаментальными матрицами* системы уравнений (2.10).

Выведем два тождества, содержащих матрицу  $\Pi$ , которые потребуются нам впоследствии.

$$1. \quad \det \Pi = \text{const} \quad (2.11)$$

(т. е.  $\det \Pi$  не зависит от  $s$ ).

Тождество (2.11) легко вытекает из соотношения Лиувилля\*)

$$\det \Pi(s) = \det \Pi(s_0) \exp \int_{s_0}^s \text{sp}(J_{2m} H_{2m}) ds,$$

\*) См. Л. С. Понтрягин [1].

где  $\text{sp}(J_{2m}H_{2m})$  — сумма диагональных элементов матрицы  $J_{2m}H_{2m}$ , очевидно, равная нулю. Тождество (2.11) выражает классическую теорему о сохранении объема в фазовом пространстве для гамильтоновых систем.

2. Докажем, что

$$\Pi^* J \Pi = \text{const.} \quad (2.12)$$

Для этого вычислим  $\frac{d}{ds} \Pi^* J \Pi$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Pi^* J \Pi &= \frac{d\Pi^*}{ds} J \Pi + \Pi^* J \frac{d\Pi}{ds} = \left( \frac{d\Pi}{ds} \right)^* J \Pi + \Pi^* J \frac{d\Pi}{ds} = \\ &= (J \Pi)^* J \Pi + \Pi^* J \frac{d\Pi}{ds} = \Pi^* H^* J^* J \Pi + \Pi^* J^2 H \Pi = \\ &= \Pi^* H^* \Pi - \Pi^* H \Pi = \Pi^* (H^* - H) \Pi = 0. \end{aligned}$$

Формулы (2.11) и (2.12) играют важную роль для дальнейшего.

Множество решений уравнения (2.8) образует  $2m$ -мерное линейное пространство. В силу того, что геодезическая  $l$  замкнута, заменяя  $s$  на  $s + L$  ( $L$  — длина  $l$ ), получим некоторое линейное взаимно однозначное отображение этого пространства на себя. Оператор  $E$ , осуществляющий это отображение, будем называть *оператором монодромии* (как это принято в теории гамильтоновых линейных систем с периодическими коэффициентами).

Введем основное для дальнейшего понятие решения типа Флоке. Решение  $Z(s)$  уравнения (2.8), удовлетворяющее условию

$$Z(s + L) = \lambda Z(s), \quad (2.13)$$

называется *решением Флоке*, а число  $\lambda$  — *мультипликатором* уравнения (2.8). В силу (2.13) и того, что

$$Z(s + L) = E Z(s),$$

мультипликаторы (и только они) являются собственными числами оператора монодромии  $E$ . Имеет место следующая

*Теорема. Для устойчивости геодезической  $l$  необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии равнялись по модулю единице и у них не было бы присоединенных векторов\*).*

\*) Последовательность векторов  $Z_0, Z_1, \dots, Z_\eta$  образует серию, соответствующую собственному числу  $\lambda$ , если

$$Z_0 \neq 0, \quad E Z_0 = \lambda Z_0, \quad E Z_1 = \lambda Z_1 + Z_0, \quad \dots, \quad E Z_\eta = \lambda Z_\eta + Z_{\eta-1}.$$

Векторы  $Z_j, j > 0$ , называются *присоединенными векторами* (см. Л. С. Понтрягина [1]).

Необходимость. Пусть  $Z$  — решение Флоке, тогда последовательность

$$E^n Z(s) = \lambda^n Z(s) = Z(s + nL), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ограничена при  $n \rightarrow \pm\infty$  тогда и только тогда, когда  $|\lambda| = 1$ . Если  $Z_0$  — решение Флоке, а  $Z_1$  — первый присоединенный вектор, то, как нетрудно подсчитать,

$$Z_1(s + nL) = \lambda^n Z_1(s) + n\lambda^{n-1} Z_0(s).$$

Если  $|\lambda| = 1$ , а  $n \rightarrow \pm\infty$ , то  $\|Z_1(s + nL)\| \rightarrow \infty$ , что противоречит устойчивости.

Достаточность следует из того, что если условия теоремы выполнены, то решения Флоке ограничены на всей оси и образуют фундаментальную систему решений. Любое решение уравнения (2.8) ограничено как линейная комбинация ограниченных решений.

В каждом базисе (задать базис в пространстве решений это все равно, что задать фундаментальную систему решений) оператор  $E$  представляется матрицей вида  $2m \times 2m$ . Корни характеристического многочлена

$$\mathcal{J}(\lambda) = \det(E - \lambda I),$$

где  $I$  — единичная ( $2m \times 2m$ )-матрица, будут собственными числами оператора монодромии  $E$ , т. е. мультипликаторами уравнения (2.8).

Докажем два простых свойства многочлена  $\mathcal{J}(\lambda)$ .

1. Все коэффициенты многочлена  $\mathcal{J}(\lambda)$  вещественны.

В самом деле, в силу вещественности коэффициентов уравнения Якоби (2.8) оператор монодромии вещественные решения переводит в вещественные. Отсюда следует, что в вещественном базисе (т. е. при выборе вещественной фундаментальной системы решений) матрица оператора монодромии будет вещественной. С другой стороны, многочлен  $\mathcal{J}(\lambda)$  не зависит от выбора базиса (меняя базис, мы будем матрицу  $E$  заменять на подобную ей), поэтому  $\mathcal{J}(\lambda)$  будет полиномом с вещественными коэффициентами в любом базисе.

2. Характеристический многочлен является возвратным, т. е.

$$\det(E - \lambda I) = \mathcal{J}(\lambda) = \lambda^{2m} \mathcal{J}(1/\lambda). \quad (2.14)$$

Пусть  $\Pi(s)$  (соответственно  $\Pi(s + L)$ ) — фундаментальная матрица, столбцы которой соответствуют выбору на гиперплоскости  $\Phi_s$  в качестве базиса ортонормированной системы  $e_j(s)$  (соответственно  $e'_j = e_j(s + L)$ ). После небольших выкладок получим

$$\Pi(s + L) = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \Pi(s) E,$$

где  $0$  — нулевая  $(m \times m)$ -матрица,  $T$  — ортогональная  $(m \times m)$ -матрица, осуществляющая переход от ортов  $e_j(s)$  к ортам  $e'_i = e_i(s + L)$  (см. § 1),  $E$  — матричное представление оператора монодромии, роль базиса играют столбцы матрицы  $\Pi(s)$ .

Переходя к определителям и пользуясь тем, что

$$(\det T)^2 = 1, \quad \det \Pi(s) = \text{const} = \det \Pi(s + L) \neq 0,$$

получаем

$$\det E = 1. \quad (2.15)$$

Тождество (2.12) и формула, связывающая  $\Pi(s + L)$  и  $\Pi(s)$ , дают

$$\begin{aligned} \Pi^*(s + L) J \Pi(s + L) &= \left[ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \Pi(s) E \right]^* \cdot J \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \Pi(s) E = \\ &= E^* \Pi^*(s) J \Pi(s) E = \Pi^*(s) J \Pi(s), \end{aligned}$$

откуда

$$E = D E^{*-1} D^{-1}, \quad D = \Pi^*(s) J \Pi(s).$$

Следовательно,

$$E - \lambda I = D (E^{*-1} - \lambda I) D^{-1} = \lambda D \left( \frac{1}{\lambda} I - E^* \right) E^{*-1} D^{-1},$$

где  $I$  — единичная матрица вида  $(2m \times 2m)$ . Переходя к определителям и пользуясь вещественностью многочлена  $\mathcal{Z}(\lambda)$ , получаем тождество (2.14).

Уравнение  $\mathcal{Z}(\lambda) = 0$  нетрудно свести к уравнению степени  $m$ : в самом деле, хорошо известно, что в том случае, когда  $\mathcal{Z}(\lambda)$  — возвратный многочлен степени  $2m$ , его можно представить в виде  $\mathcal{Z}(\lambda) = \lambda^m \mathcal{Z}_1(\lambda_1)$ , где  $\mathcal{Z}_1$  — многочлен степени  $m$ , а  $\lambda_1 = (\lambda + \lambda^{-1})/2$ .

Все дальнейшие построения (имеющие смысл лишь в случае устойчивой по первому приближению геодезической) удобно проводить, если решения Флоке выбраны специальным образом, именно так, как указано в следующей теореме.

**Теорема.** *Фундаментальную систему решений векторного дифференциального уравнения (2.8) можно составить из решений Флоке  $Z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2m$ , причем так, что для матрицы  $\|(JZ_j, Z_r)\|$  будет иметь место формула*

$$\|(JZ_j, Z_r)\| = i \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad j, r = 1, \dots, 2m, \quad (2.16)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $(JZ_j, Z_r)$  — скалярное произведение векторов  $JZ_j$  и  $Z_r$ ,

$$Z_{j+m} = Z_j^* \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.17)$$

( $Z_j^*$  — вектор, компоненты которого комплексно сопряжены с компонентами вектора  $Z_j$ ).

Заметим сначала, что, каковы бы ни были решения  $\mathbf{Z}_j$  и  $\mathbf{Z}_r$  уравнения (2.8), компоненты матрицы

$$A = \|(J\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_r)\|$$

не зависят от  $s$ . (Это сразу же вытекает из равенства (2.12), если считать, что векторы  $\mathbf{Z}_j$  образуют столбцы матрицы  $\Pi$ .) Отсюда следует, что если  $\mathbf{Z}_j$  и  $\mathbf{Z}_k$  — решения Флоке, отвечающие различным мультипликаторам  $\lambda_j$  и  $\lambda_k$ , то

$$(J\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_k) = 0. \quad (2.18)$$

В самом деле,

$$(J\mathbf{Z}_j(s), \mathbf{Z}_k(s)) = (J\mathbf{Z}_j(s+L), \mathbf{Z}_k(s+L)) = \lambda_j \bar{\lambda}_k J(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_k).$$

Учитывая, что  $|\lambda_k| = 1$  и  $\bar{\lambda}_k = 1/\lambda_k$ , имеем

$$\begin{aligned} (J\mathbf{Z}_j(s), \mathbf{Z}_k(s)) - (J\mathbf{Z}_j(s+L), \mathbf{Z}_k(s+L)) &= \\ &= (1 - \lambda_j \lambda_k^{-1}) (J\mathbf{Z}_j(s), \mathbf{Z}_k(s)) = 0, \end{aligned}$$

откуда при  $\lambda_j \neq \lambda_k$  следует (2.18).

Заменяя отвечающие одному и тому же мультипликатору решения Флоке на их линейные комбинации, можно добиться, чтобы матрица

$$A = \|(J\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_m)\| \quad j, m = 1, 2, \dots, 2m,$$

стала диагональной.

Дальнейшее построение фундаментальной системы сводится к умножению решений Флоке на нормирующие множители и перенумеровке решений. Подробное проведение этих преобразований мы опускаем.

Вспоминая, что вектор  $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{Dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$ , где  $y$  — решение уравнения (2.5), равенства (2.16) — (2.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{Dy_j}{ds}, y_h \right) - \left( y_j, \frac{Dy_h}{ds} \right) &= (p_j, y_h) - (y_j, p_h) = i\delta_{jh}, \quad (2.19) \\ j, h &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{Dy_j}{ds}, y_h^* \right) - \left( y_j, \frac{Dy_h^*}{ds} \right) &= (p_j, y_h^*) - (y_j, p_h^*) = 0, \quad (2.20) \\ j, h &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Компоненты векторов  $y_h$  и  $y_h^*$  комплексно сопряжены. Введем матрицы  $Y, P$ , столбцы которых составлены из компонент векторов  $y_1, \dots, y_m$  и  $\frac{Dy_1}{ds}, \dots, \frac{Dy_m}{ds} = p_1, \dots, p_m$ . Равенства

(2.19), (2.20) можно переписать в виде двух матричных соотношений

$$Y^*P - P^*Y = iI, \quad (2.21)$$

$$Y^T P - P^T Y = 0 \quad (2.22)$$

(значок  $T$  означает транспонирование).

Из формулы (2.19) следует, что на всей геодезической  $l$

$$\det Y(s) \neq 0, \quad s \in l. \quad (2.23)$$

В самом деле, нам достаточно доказать линейную независимость векторов  $y_j(s)$  в каждой точке  $s \in l$ . Пусть

$$\sum_{j=1}^m a_j y_j(s) = 0. \quad (2.24)$$

Умножим (2.19) на  $a_j \bar{a}_h$  и просуммируем полученные равенства по  $j$  и  $h$ . Учитывая (2.24), получим

$$\sum_{j=1}^m |a_j|^2 = 0,$$

откуда

$$a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Этим доказана линейная независимость  $y_j(s)$  и, следовательно, неравенство (2.23).

### § 3. Нулевое приближение

Будем искать решения параболического уравнения (1.14) в виде

$$U = S(s) e^{\frac{i}{2} (\Gamma(s) \mu, \mu)}, \quad (3.1)$$

где  $S(s)$  — функция, зависящая только от  $s$ ,  $(\Gamma(s) \mu, \mu)$  — квадратичная форма на  $m$ -мерной гиперплоскости  $\Phi_s$ , нормальной в точке  $s$  к  $l$ .

В системе координат  $(s, \mu_1, \dots, \mu_m)$  ( $\mu_1, \dots, \mu_m$  — компоненты вектора  $\mu$  на гиперплоскости  $\Phi_s$ ) квадратичную форму  $(\Gamma \mu, \mu)$  можно записать в виде

$$\sum_{i, j=1}^m \Gamma_{ij}(s) \mu_i \mu_j, \quad (3.2)$$

где

$$\Gamma = \|\Gamma_{ij}(s)\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

симметричная матрица. Подставляя выражение (3.1) в параболическое уравнение (1.14), получим для  $\Gamma$  матричное уравнение Риккати

$$\Gamma' + \Gamma^2 + K = 0, \quad (3.3)$$

здесь  $K = \|K_{ij}(s)\| = \|R_{0i0j}(s)\|$  — матрица вида  $m \times m$  (см. формулу (1.7)).

Для  $S(s)$  получаем уравнение

$$2S' + S \operatorname{sp} \Gamma = 0 \quad (3.4)$$

( $\operatorname{sp} \Gamma$ , как обычно, обозначает сумму диагональных элементов матрицы  $\Gamma$ ).

Матричное уравнение Риккати (тем же способом, что и его обычный аналог) сводится к системе линейных обыкновенных уравнений. Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$\Gamma = Y'Y^{-1} = \frac{dY}{ds} Y^{-1}, \quad (3.5)$$

где  $Y$  — новая искомая матрица. Подставляя (3.5) в (3.3) и используя очевидное тождество

$$Y \frac{dY^{-1}}{ds} + \frac{dY}{ds} Y^{-1} = \frac{d}{ds} YY^{-1} \equiv 0,$$

получим для матрицы  $Y$  уравнение

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} + KY = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) означает, что удовлетворяются уравнения

$$\frac{d^2 y_{hj}}{ds^2} + \sum_{a=1}^m K_{ha}(s) y_{aj} = 0, \quad h, j = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

которые при фиксированном  $j$  и  $h = 1, 2, \dots, m$  совпадают с уравнением (2.5), записанным в координатной форме, если положить

$$y = (y_1, \dots, y_m) = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj}) = y_j.$$

Таким образом, мы получим решение уравнения (3.3), если в качестве матрицы  $\Gamma$  возьмем выражение (3.5), где  $Y$  — матрица, столбцы которой  $y_j$  — решения уравнения (2.5). Пусть  $y_j$  являются решениями Флоке уравнения (2.5) (см. формулы (2.8), (2.13), (2.16) — (2.24)).

Обратимся теперь к уравнению (3.4). Используя (3.5), легко получить, что  $S$  с точностью до постоянного множителя равно

$$S(s) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^s \operatorname{sp} Y'Y^{-1} ds \right].$$



Пользуясь известной формулой для производной определителя \*)

$$\frac{d}{ds} \det Y = \operatorname{sp}(Y'Y^{-1}) \det Y,$$

получим (опять с точностью до постоянного множителя)

$$S(s) = \frac{1}{\sqrt{\det Y}}. \quad (3.8)$$

Напомним, что  $\det Y \neq 0$  (формула (2.23)). Формулы (3.1), (3.5) и (3.8) теперь дают

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{\det Y}} e^{\frac{i}{2}(Y'Y^{-1}P, P)} = \frac{e^{\frac{i}{2}(PY^{-1}P, P)}}{\sqrt{\det Y}}, \quad P = Y'. \quad (3.9)$$

Надо показать, что  $U_0$ , даваемое этой формулой, есть действительно одно из решений задачи (1.14), (1.16), (1.17). Покажем прежде всего, что формула (3.5) определяет симметричную матрицу. Обратимся к соотношению (2.22):

$$Y^T Y' - Y'^T Y \equiv Y^T P - P^T Y = 0, \quad P = Y'.$$

Умножая это равенство слева на  $(Y^T)^{-1}$  и справа на  $Y^{-1}$ , получим

$$PY^{-1} - (Y^T)^{-1} P^T = 0,$$

или

$$\Gamma = PY^{-1} = (PY^{-1})^T = \Gamma^T,$$

т. е. матрица (3.5) действительно симметрична.

Для доказательства свойства (1.16) достаточно показать, что

$$\operatorname{Im} \Gamma = \frac{1}{2i} (\Gamma - \Gamma^*) \quad (3.10)$$

— положительно определенная матрица.

Воспользуемся формулой (2.21):

$$Y^* P - P^* Y = iI.$$

Умножая это равенство слева на  $(Y^*)^{-1}$  и справа на  $Y^{-1}$ , получим

$$PY^{-1} - Y^{*-1} P^* = iY^{*-1} Y^{-1},$$

или

$$\Gamma - \Gamma^* = 2i \operatorname{Im} \Gamma = i(Y Y^*)^{-1}, \quad (3.11)$$

откуда следует положительная определенность матрицы (3.10).

\*) См. Н. Бурбаки [1].

Осталось показать, что функция (3.9) удовлетворяет условию (1.17).

При сдвиге на  $L$  ( $L$  длина  $l$ ) векторы  $y_j$  получают сомножители  $\lambda_j = \exp i\alpha_j$ . Числа  $\alpha_j$  назовем *показателями Флоке*. (Они определены с точностью до слагаемого, имеющего вид целого числа, умноженного на  $2\pi$ .)

Пусть орты  $e_j(s)$  после обхода геодезической  $l$  превратятся в орты  $e'_j(s) = e_j(s + L)$  и связь между ортами  $e_j$  и  $e'_j$  дается матрицей  $T = (T_{ij})$  (см. § 1). Считая, что столбцы матрицы  $Y(s)$  (соответственно  $Y(s + L)$ ) это компоненты векторов  $y_j(s)$  (соответственно  $y_j(s + L)$ ) в ортонормированном базисе  $\{e_j\}$  (соответственно  $\{e'_j\}$ ), получим

$$\begin{aligned} Y(s + L) &= TY(s)Y(\alpha), \\ P(s + L) &= TP(s)Y(\alpha), \quad P = Y', \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$Y(\alpha) = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_1} & & & 0 \\ & e^{i\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i\alpha_m} \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Вектор  $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i e_i$  в базисе  $\{e'_i\}$  будет иметь компоненты  $\mu'_i$ , причем (см. § 1)

$$\begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из формул (3.5), (3.12), (3.13) следует, что

$$(\Gamma(s)\mu, \mu) = \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}(s)\mu_i\mu_j = \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}(s + L)\mu'_i\mu'_j. \quad (3.14)$$

Соотношение  $\det T = 1$ \*) и формулы (3.8), (3.9), (3.12), (3.13) приводят к равенству

$$U_0(s + L, \mu) = e^{i\alpha_0} U_0(s, \mu), \quad (3.15)$$

\*) Соотношение  $\det T = 1$  есть следствие ориентируемости риманова многообразия. Если многообразие неориентируемо, то все построения главы 8 проходят и в этом случае, однако при выполнении равенства  $\det T = -1$  в некоторые формулы (например, в формулу (3.16)) следует внести незначительные изменения. Мы пользуемся удобным случаем заметить, что все построения работы В. М. Бабича [8] относятся к случаю  $\det T = 1$ , что, к сожалению, нигде не было оговорено в этой работе.

где

$$\kappa_0 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m), \quad (3.16)$$

т. е.  $U_0$  — действительно решение Флоке параболического уравнения (1.14). Напомним, что показатели Флоке определялись нами пока с точностью до целых, кратных  $2\pi$ . Для справедливости же формулы (3.16) они должны удовлетворять условию

$$e^{-\frac{i}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} = e^{i\kappa_0} = \frac{S(L)}{S(0)}, \quad (3.17)$$

на которое можно смотреть как на условие нормировки. (Заметим, что правая часть в равенстве (3.17) определена однозначно.) Будем считать, что  $\alpha_j$  выбраны так, что равенство (3.17) выполнено.

Исходя из построенного выше решения Флоке  $U_0$ , можно найти и другие решения Флоке параболического уравнения (1.14).

Введем сейчас такие операторы  $\Lambda_1^*, \dots, \Lambda_m^*$ , что при любых целых неотрицательных  $q_1, \dots, q_m$  функция

$$U_{q_1, \dots, q_m} = \Lambda_1^{*q_1}, \dots, \Lambda_m^{*q_m} U_0$$

будет решением Флоке уравнения (1.14).

Заметим прежде всего, что, как нетрудно установить непосредственной проверкой, любой оператор вида

$$\Lambda = \frac{1}{i} \sum_{\nu=1}^m y_\nu \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} - (y', \mu) = \frac{1}{i} (y, \nabla_\mu) - (p, \mu) \quad (p = y'), \quad (3.18)$$

где  $y_\nu(s)$  — компоненты вектора  $y$ , решающего уравнение (2.5), коммутирует с оператором  $\mathcal{L}$ .

Составим теперь следующие операторы:

$$\Lambda_j = \frac{1}{i} (y_j, \nabla_\mu) - (p_j, \mu), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.19)$$

и

$$\Lambda_j^* = \frac{1}{i} (y_j^*, \nabla_\mu) - (p_j^*, \mu), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.20)$$

где  $y_j$  — решения Флоке. Операторы (3.19), (3.20) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Lambda_j \Lambda_h - \Lambda_h \Lambda_j = 0, \quad \Lambda_j^* \Lambda_h^* - \Lambda_h^* \Lambda_j^* = 0, \quad (3.21)$$

$$\Lambda_j \Lambda_h^* - \Lambda_h^* \Lambda_j = \delta_{hj} \quad (\delta_{hj} \text{ — символ Кронекера}). \quad (3.22)$$

Кроме того,

$$\Lambda_j U_0 = S(s) e^{\frac{i}{2} \mathcal{L}^* s} [(\Gamma y_j, \mu) - (y_j', \mu)] \equiv 0. \quad (3.23)$$

Из перестановочности  $\mathcal{L}$  и  $\Lambda_j^*$  следует, что функции

$$\begin{aligned} U_q &= U_{q_1 q_2 \dots q_m} = (\Lambda_1^*)^{q_1} (\Lambda_2^*)^{q_2} \dots (\Lambda_m^*)^{q_m} U_0 = \\ &= Q_{q_1 \dots q_m}(\mu) e^{\frac{i}{2}(\Gamma^{\mathbb{P}, \mathbb{P}})} = Q_q(\mu) e^{\frac{i}{2}(\Gamma^{\mathbb{P}, \mathbb{P}})} \end{aligned} \quad (3.24)$$

( $q_j$  — целые  $\geq 0$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ ,  $Q_q(\mu)$  — полином по  $\mu_1, \dots, \mu_m$  степени  $|q| = q_1 + \dots + q_m$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ ) будут решениями параболического уравнения  $\mathcal{L}U = 0$ .

Применение операторов  $\Lambda_1^{q_1}, \dots, \Lambda_m^{q_m}$  к  $U_0$  дает тривиальное нулевое решение уравнения

$$\mathcal{L}U = 0.$$

Покажем, что функция  $U_q$  является решением Флоке уравнения  $\mathcal{L}U = 0$  с показателем

$$\kappa_q = - \left[ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) + \sum_{j=1}^m \alpha_j q_j \right], \quad q = (q_1, \dots, q_m). \quad (3.25)$$

В самом деле, то, что  $U_q$  есть решение уравнения  $\mathcal{L}U = 0$ , уже отмечалось; равенство

$$U_q(s + L, \mu) = e^{i\kappa_q} U_q(s, \mu)$$

следует из (3.15), равенств

$$y_j^*(s + L) = e^{-i\alpha_j} y_j^*, \quad p_j^*(s + L) = e^{-i\alpha_j} p_j^*(s), \quad p_j = y_j^*,$$

и вида операторов  $\Lambda_j^*$ ; неравенства  $U_q \neq 0$  следуют из приводимых далее соотношений ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_s} U_q \overline{U_{q'}} d\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} U_{q_1 \dots q_m} \overline{U_{q'_1 \dots q'_m}} d\mu_1 \dots d\mu_m = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq q', \text{ т. е. при } (q_1, \dots, q_m) \neq (q'_1, \dots, q'_m), \\ q_1! \dots q_m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{\frac{i}{2}(\Gamma^{\mathbb{P}, \mathbb{P}})}|}{|\det Y|} d\mu = q_1! \dots q_m! (2\pi)^{\frac{m}{2}} & (3.26) \\ 0 & \text{при } q = q', \text{ т. е. при } (q_1, \dots, q_m) = (q'_1, \dots, q'_m). \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi_s$  — гиперплоскость, ортогональная к геодезической  $l$  в точке  $s$ .

Равенство  $q = q'$  (соответственно неравенство  $q \neq q'$ ) означает, что выполнены одновременно все равенства  $q_1 = q'_1, \dots$

...,  $q_m = q'_m$  (соответственно по крайней мере одно из этих неравенств не выполнено).

Доказательство равенств (3.26) легко провести, пользуясь интегрированием по частям и формулами (3.21), (3.22), (3.23). Таким образом, операторы  $\Lambda_j$  как бы уничтожают решение  $U_0$ , и их поэтому можно назвать операторами уничтожения. Наоборот, применение операторов  $\Lambda_j^*$  дает возможность получать новые решения, и эти операторы можно назвать операторами рождения.

Приведем некоторые дополнительные сведения о решениях Флоке задачи (1.14), (1.16), (1.17).

Из формул (3.21)—(3.23) легко вытекает, что  $U_q$  есть собственная функция эллиптического дифференциального оператора

$$\sum_{j=1}^m \Lambda_j^* \Lambda_j, \quad (3.27)$$

действующего на функциях, заданных на  $\Phi_s$ . Собственной функции  $U_q$  соответствует собственное число

$$|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_m.$$

Из соотношений ортогональности (3.26) следует линейная независимость полиномов  $Q_q(\mu)$  (см. (3.24)). Поэтому любой полином переменных  $(\mu_1, \dots, \mu_m) = \mu$  — есть линейная комбинация  $Q_q$ . Действительно, множество полиномов от  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , степень которых не превосходит  $q_1 + \dots + q_m$ , представляет собой линейное пространство, в котором одночлены  $\mu_1^{q_1} \mu_2^{q_2} \dots \mu_m^{q_m}$  образуют линейно независимый базис. Сопоставляя каждому одночлену  $\mu_1^{q_1} \dots \mu_m^{q_m}$  многочлен  $Q_{q_1 \dots q_m}$ , получим, что тех и других одинаковое число. В силу линейной независимости  $Q_{q_1 \dots q_m}$  эти полиномы тоже образуют базис в множестве полиномов степени  $q_1 + q_2 + \dots + q_m$ . В силу того, что функции вида

$$\hat{Q}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) U_0,$$

где  $\hat{Q}$  — полином, плотны в  $L_2(\Phi_s)$ , функции  $U_q$  образуют полную систему в  $L_2(\Phi_s)$ .

Из полноты системы функций  $U_q$  вытекает, что они образуют в некотором смысле полный набор решений Флоке уравнения  $\mathcal{L}U = 0$ . В самом деле, умножая уравнение  $\mathcal{L}U = 0$  на  $\bar{U}_q$  и интегрируя по  $\Phi_s$ , получаем при весьма общих предположениях относительно  $U$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{\Phi_s} U \bar{U}_q d\mu = 0. \quad (3.28)$$

Разлагая  $U$  по  $U_q$  (что тоже возможно при весьма широких предположениях относительно  $U$ ), получим

$$U = \sum_q C_q U_q, \quad q = (q_1, \dots, q_m), \quad q_j \geq 0. \quad (3.29)$$

Из соотношений ортогональности (3.26) и формулы (3.28) следует, что  $C_q = \text{const}$ . Из равенства

$$U(s+L) - e^{ix}U(s) = 0$$

и формулы (3.29) вытекает соотношение

$$\sum_q C_q U_q(s) (e^{ixq} - e^{ix}) = 0,$$

из которого в силу ортогональности  $U_q$  следует, что при всех  $q = (q_1, \dots, q_m)$  имеют место равенства

$$C_q (e^{ixq} - e^{ix}) = 0.$$

По крайней мере одно из чисел  $C_q$  отлично от нуля, поэтому при некотором  $q$   $e^{ixq} = e^{ix}$  и число  $x$  обязательно должно иметь вид (3.25) (с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ ). Если  $q'$  таково, что  $e^{ixq'} \neq e^{ix}$ , то  $C_{q'}$  равно нулю. Из формулы (3.29) теперь следует, что  $U$  равно линейной комбинации (может быть, бесконечной) таких  $U_q$ , что

$$U_q(s+L) = e^{ix}U_q(s), \quad e^{ix} = e^{ixq}.$$

Пусть теперь  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  линейно независимы над кольцом целых чисел, т. е. из равенства

$$\pi\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_m\gamma_m = 0 \quad (\gamma_0, \dots, \gamma_m - \text{целые числа}) \quad (3.30)$$

следует, что

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0.$$

Тогда все мультипликаторы  $e^{ixq}$  различны и равенство  $e^{ix} = e^{ixq}$  может осуществляться не более чем при одном выборе  $q$  (см. формулу (3.25)). Как следует из формулы (3.29), при этом  $q$

$$U = \text{const } U_q.$$

Подставляя решения Флоке  $U_q$  в формулу (1.9), получим главный член асимптотики собственной функции, формула (1.18) даст главный член асимптотики соответствующего собственного числа.

Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  все различны и, больше того, числа  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  линейно независимы над кольцом целых чисел, т. е. из равенства (3.30) следует, что все  $\gamma_j = 0$ , то набор чисел  $(q_1, \dots, q_m) = q$  однозначно определяет собственное число в первом приближении:

$$k_{pq} = k_{p q_1 \dots q_m} = \left[ 2\pi\rho + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) + \sum_{j=1}^m q_j \alpha_j \right] \frac{1}{L} = \\ = \left[ 2\pi\rho + \sum_{j=1}^m \left( q_j + \frac{1}{2} \right) \alpha_j \right] \frac{1}{L}.$$

В противном же случае (например, когда полином  $\mathcal{J}(\lambda)$  имеет кратные корни (см. § 2) разным наборам  $q_1, \dots, q_m$  могут соответствовать одинаковые собственные числа, но разные выражения для собственных функций.

В самом деле, пусть в равенстве (3.30) не все  $\gamma_j$  одновременно равны нулю, тогда при

$$p' - p = \gamma_0 \zeta, \quad q'_j - q_j = 2\gamma_j \zeta \quad (\zeta - \text{целое число}),$$

очевидно,

$$k_{p q_1 \dots q_m} = k_{p' q'_1 \dots q'_m}.$$

Пользуясь квантовомеханической терминологией, можно сказать, что собственное значение  $k_{p q_1 \dots q_m}$  вырождено. В случае линейной независимости  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  легко найдем (см. § 4) высшие приближения как для собственных чисел, так и для собственных функций. Случай линейно зависимых чисел  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  вызывает затруднения, как и метод возмущения в квантовой механике, если собственное значение вырождено.

Заметим еще, что функции

$$U_q = U_{q_1 \dots q_m}(\mu) = Q_{q_1 \dots q_m}(\mu) e^{\frac{i}{2}(\Gamma_p, \mu)} = \\ = \Lambda_1^{*q_1} \dots \Lambda_m^{*q_m} \frac{1}{\sqrt{\det Y}} e^{\frac{i}{2}(\Gamma_p, \mu)},$$

где  $\Gamma$  — любая, можно рассматривать совершенно независимо от задач (1.14), (1.16), (1.17) как некоторое многомерное обобщение функций Эрмита. Действительно, при выводе соотношений ортогональности и доказательстве того, что собственные функции оператора (3.27) совпадают с  $U_{q_1 \dots q_m}$ , мы пользуемся только перестановочными соотношениями (3.21), (3.22), в свою очередь вытекающими из формул (2.21), (2.22). Любую симметрическую матрицу  $\Gamma$  с положительно определенной мнимой частью, как нетрудно доказать, можно представить в виде  $\Gamma = PY^{-1}$ , где  $P$  и  $Y$  — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.21) и (2.22).

### § 4. Построение высших приближений

В предположении линейной независимости  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  над кольцом целых чисел опишем способ построения собственных чисел и собственных функций в любом приближении. Компоненты метрического тензора  $g_{ij}$  в координатах  $s, y_1, \dots, y_m$  считаем бесконечно дифференцируемыми.

Будем искать решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u = \lambda u$ ,  $\lambda = \lambda_q = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , в виде формального ряда

$$u_q = e^{i k_q s} \left( U_q^0 + \frac{1}{\sqrt{k_q}} U_q^1 + \frac{1}{k_q} U_q^2 + \frac{1}{k_q^{3/2}} U_q^3 + \dots \right), \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} U_q^0 = U_q = \Lambda_1^{\alpha_{q1}} \dots \Lambda_m^{\alpha_{qm}} U_0, \quad U_0 = \frac{1}{\sqrt{\det Y}} e^{\frac{i}{2}[(pY^{-1}p), \mu]}, \\ k_q = \frac{1}{L} \left[ 2\pi p + \sum_{j=1}^m \left( q_j + \frac{1}{2} \right) \alpha_j \right], \quad q = (q_1, \dots, q_m), \end{aligned} \quad (4.2)$$

а функции

$$U_q^l = U_q^l(s, \mu_1, \dots, \mu_m) \quad (4.3)$$

( $\mu_h = \sqrt{k_q} y_h$ ;  $s, y_1, \dots, y_m$  — координаты на римановом многообразии в окрестности  $l$ ) подлежат определению.

Пусть собственное число  $k$  (чтобы не усложнять обозначений, будем писать его без индексов), соответствующее собственной функции (4.1), имеет следующее асимптотическое разложение:

$$k = k_q + \frac{\delta_1}{\sqrt{k_q}} + \frac{\delta_2}{k_q} + \dots, \quad (4.4)$$

где  $\delta_j$  — числа, подлежащие определению.

Заменяя в уравнении  $(\Delta + k^2)u = 0$   $u$  и  $k$  по формулам (4.1) и (4.4) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k_q$ , приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 U_q^0 &= 0, \\ \mathcal{L}_0 U_q^1 + \mathcal{L}_1 U_q^0 &= 0, \\ \dots \dots \dots & \\ \mathcal{L}_0 U_q^h + \mathcal{L}_1 U_q^{h-1} + \dots + \mathcal{L}_h U_q^0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Обращение в нуль выражения  $\mathcal{L}_0 U_q^h + \dots$  соответствует обращению в нуль коэффициента при  $k_q^{1-h/2}$ .



Нетрудно получить, пользуясь формулами § 1, что оператор  $\mathcal{L}_0$  совпадает с параболическим оператором  $\mathcal{L}$  (см. формулу 1.13), а при  $h \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h U = & R_h^0 \frac{\partial U}{\partial s} + \sum_{j=1}^m R_{h+1}^j \frac{\partial U}{\partial \mu^j} + R_{h-2}^{00} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \sum_{j=1}^m R_{h-1}^{0j} \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \mu^j} + \\ & + \sum_{i,j=1}^m R_h^{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^i \partial \mu^j} + (\psi_h + R_{h+2}) U \quad (R_{-1}^{00} \equiv 0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\psi_h = \delta_h + \delta_1 \delta_{h-3} + \delta_2 \delta_{h-4} + \dots + \delta_{h-3} \delta_1 + \delta_h \quad (4.7)$$

и  $R_{h+2}$ ,  $R_h^0$ ,  $R_{h+1}^j$ ,  $R_h^{ij}$  ... — полиномы по  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , коэффициенты которых бесконечно дифференцируемы по  $s$ . Степень этих полиномов не превосходит нижнего индекса. Кроме того, их четность\*) совпадает с четностью нижнего индекса, т. е. полином  $R$  и его нижний индекс четны или нечетны одновременно.

Полиномы  $R$  обладают еще одним важным свойством: при сдвиге  $s$  на длину  $L$  геодезической  $l$  каждое слагаемое в формуле (4.6) переходит в себя, если  $U$  — однозначная функция в окрестности  $l$ . (Если бы орты  $e_1, \dots, e_m$ , введенные в начале § 1, переходили в себя при параллельном перенесении на длину  $L$  вдоль геодезической  $l$ , то это последнее свойство полиномов  $R$  можно было бы сформулировать совсем просто: коэффициенты полиномов  $R$  имеют по  $s$  период  $L$ .)

Функции  $U_q^h$  найдем с помощью описываемого далее рекуррентного процесса. Будем считать теперь  $(s, \mu_i)$  координатами на нормальном расслоении  $\Xi'$  (см. § 1. В формулах (4.2), (4.3)  $\mu_i$  имеют иной смысл  $\mu_i = \sqrt{k} y_i$ , но, как мы надеемся, это не приведет к недоразумениям).

Пусть функции  $U_q^1, \dots, U_q^{h_0-1}$  и числа  $\delta_1, \dots, \delta_{h_0-1}$  найдены, а  $U_q^0$  имеет вид (4.2). Функцию  $U_q^{h_0}$  будем искать как решение  $h_0 + 1$ -го уравнения из рекуррентной системы (4.5):  $\mathcal{L}_0 U_q^{h_0} + \dots = 0$ , которое рассматривается как уравнение на расслоении  $\Xi'$ .

Потребуем еще: 1)  $L$ -периодичности на  $\Xi'$  функции  $U_q^{h_0} \exp ik_q s$ , 2) стремления к нулю  $U_q^{h_0}$ , если  $\mu \rightarrow \infty$ .

Решив эту краевую задачу и положив  $\mu_i = \sqrt{k} y_i$ , мы получим являющиеся целью наших построений функции, заданные

\*) Полином  $R(\mu)$  называется *четным* (соответственно *нечетным*), если  $R(-\mu) = R(\mu)$  (соответственно  $R(-\mu) = -R(\mu)$ ).

уже на римановом многообразии вблизи  $l$ . В процессе нахождения  $U_q^{h_0}$  будет также определено число  $\delta_{h_0}$ .

Предположим, что при  $h < h_0$

$$U_q^h = \Phi_q^h(\mu, s) U_0, \quad U_0 = \frac{1}{\sqrt{\det Y}} e^{\frac{i}{2}[(PY^{-1}P), P]}, \quad (4.8)$$

где  $\Phi_q^h$  — полином по  $\mu$  с бесконечно дифференцируемыми по  $s$  коэффициентами.

Если провести все необходимые дифференцирования, то уравнению для  $U_q^{h_0}$  можно придать вид

$$\mathcal{L}U_q^{h_0} = -\mathcal{L}U_q^{h_0-1} - \dots - \mathcal{L}U_q^0 = \Psi_q^{h_0}(\mu, s) U_0. \quad (4.9)$$

Здесь  $U_0$  имеет то же выражение, что и в формуле (4.8),  $\Psi_q^{h_0}$  — полином по  $\mu$  с бесконечно дифференцируемыми по  $s$  коэффициентами.

Правая часть формулы (4.9) после умножения на  $\exp ik_q s$  будет  $L$ -периодической функцией в силу того, что этим свойством обладают функции  $U_q^h$ . Ее можно представить в виде конечной линейной комбинации (с бесконечно дифференцируемыми по  $s$  коэффициентами) функций

$$U_r = \Lambda_1^{r_1} \dots \Lambda_m^{r_m} U_0 = Q_r(\mu, s) U_0, \quad r = (r_1, \dots, r_m), \quad (4.10)$$

так как любой полином можно представить в виде линейной комбинации полиномов  $Q_r$  (см. § 3). Итак,

$$\Psi_q^{h_0}(\mu, s) U_0 = \sum_{(r)} A_{qr}^{h_0}(s) U_r. \quad (4.11)$$

В силу ортогональности  $U_r$  (см. (3.26))

$$A_{qr}^{h_0}(s) = \frac{1}{r_1! \dots r_m! (2\pi)^{m/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_q^{h_0} U_0 \bar{U}_r d\mu. \quad (4.12)$$

Из этой формулы и свойств  $\Psi_q^{h_0} U_0$  и  $U_r$  легко следует равенство

$$A_{qr}^{h_0}(s + L) \equiv e^{i(\kappa_q - \kappa_r)} A_{qr}^{h_0}(s), \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_q &= -\sum_{j=1}^m (1/2 + q_j) \alpha_j, & q &= (q_1, \dots, q_m), \\ \kappa_r &= -\sum_{j=1}^m (1/2 + r_j) \alpha_j, & r &= (r_1, \dots, r_m). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Функцию  $U_q^{h_0}$  будем искать в виде линейной комбинации  $U_r$ :

$$U_q^{h_0} = \sum_{(r)} B_{qr}^{h_0}(s) U_r. \quad (4.15)$$

Для того чтобы  $U_q^{h_0} \exp ik_q s$  была  $L$ -периодической функцией, достаточно, чтобы

$$B_{qr}^{h_0}(s + L) = B_{qr}^{h_0}(s) \exp i(\kappa_q - \kappa_r). \quad (4.16)$$

Будем искать  $B_{qr}^{h_0}(s)$ , удовлетворяющие этому условию.

Подставляя выражения (4.11) и (4.15) в уравнение (4.9) и пользуясь тем, что  $\mathcal{L}U_r = 0$ , легко приходим к совсем простым дифференциальным уравнениям

$$2i \frac{d}{ds} B_{qr}^{h_0}(s) = A_{qr}^{h_0}(s), \quad (4.17)$$

причем ищутся функции  $B_{qr}^{h_0}$ , удовлетворяющие условиям (4.16). Правые части  $A_{qr}^{h_0}$  удовлетворяют аналогичным условиям (4.13). Задача (4.16), (4.17) является самосопряженной краевой задачей на отрезке  $(0, L)$ . Легко показать, не обращаясь даже к общей теории, а непосредственным подсчетом, что для разрешимости (причем однозначной) этой задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача имела только тривиальное решение, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы

$$\exp i(\kappa_q - \kappa_r) \neq 1.$$

Из выражений (4.14) для  $\kappa_q$ ,  $\kappa_r$  и линейной независимости  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  над кольцом целых чисел сразу же следует, что при  $r \neq q$  ( $r \neq q$  эквивалентно неравенству  $\sum_{j=1}^m |q_j - r_j| > 0$ ,  $r = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_m)$ ) все краевые задачи (4.16), (4.17) однозначно разрешимы.

Обратимся к случаю  $r = q$ ; тогда краевая задача сводится к нахождению  $L$ -периодической функции  $B_{qq}^{h_0}$ , удовлетворяющей уравнению (4.17) с  $L$ -периодической правой частью.

Для разрешимости этой задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^L A_{qq}^{h_0}(s) ds = 0. \quad (4.18)$$

Оказывается, условию (4.18) можно всегда удовлетворить за счет выбора неопределенного пока параметра  $\delta_{h_0}$ . В самом деле, учитывая формулы (4.6), (4.7) и (4.9), (4.12), условию (4.18) можно придать вид

$$\int_0^L (\delta_{h_0} + D_q^{h_0}(s)) ds = 0, \quad (4.19)$$

где  $D_q^{h_0}$  — некоторая уже известная функция. Равенство (4.19) однозначно определяет  $\delta_{h_0}$ .

Докажем по индукции, что: 1) все  $\delta_h$  с нечетными индексами равны нулю, 2)  $U_q^h$  всегда можно построить так, что четности числа  $h + |q| = h + q_1 + \dots + q_m$  и полинома  $\Phi_q^h(\mu, s)$  (см. (4.8)) совпадут\*).

Пусть эти утверждения верны при  $h < h_0$ , тогда в формуле (4.9), как следует из свойств операторов  $\mathcal{L}_j$  и индукционного предположения, правая часть будет иметь вид

$$-\psi_{h_0} U_q + H_q^{h_0}(\mu, s) U_q, \quad (4.20)$$

где  $H_q^{h_0}$  — полином, четность которого совпадает с четностью

$$h_0 + |q| = h_0 + q_1 + \dots + q_m.$$

Из равенств (4.12) следует, что  $A_{qr}^{h_0}(s)$  ( $r \neq q$ ) отличны от нуля только в том случае, если четности  $h_0 + |q|$  и  $|r|$  совпадают. При  $r = q$ , пользуясь формулой (4.20), получаем

$$A_{qq}^{h_0}(s) = -\psi_{h_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_q^{h_0}(\mu, s) U_q(\mu, s) d\mu}{q_1! \dots q_m! (2\pi)^{m/2}}. \quad (4.21)$$

Если  $h_0$  нечетно, интеграл в этой формуле равен нулю как интеграл от нечетной функции по всему пространству. Равенство (4.7) и индукционное предположение при нечетном  $h_0$  дают  $\psi_{h_0} = 2\delta_{h_0}$ . Равенство (4.21) принимает вид

$$A_{qq}^{h_0}(s) = -2\delta_{h_0}, \quad (4.22)$$

и из (4.18) сразу следует, что  $\delta_{h_0} = 0$ . Положив  $B_{qq}^{h_0} = 0$ , получим полином  $\Phi_q^{h_0}$ , четность которого совпадает с четностью  $h_0 + |q|$ . Это вытекает из формул (4.15), (4.17) и того, что

\* Функция  $U_q^h$  определяется неоднозначно потому, что решение задачи (4.16), (4.17) при  $r = q$  определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Неоднозначность в определении собственной функции легко было предвидеть заранее: умножая собственную функцию на константу, имеющую вид

$$1 + \frac{C_1}{k_q^{1/2}} + \frac{C_2}{k_q} + \dots, \quad C_i = \text{const},$$

опять получим собственную функцию, в асимптотику которой войдут постоянные  $C_i$ .

$A_{qr}^{h_0}$  отличны от нуля (напоминаем, что  $h_0$  нечетно) только при нечетной разности  $|q| - |r|$ . Совпадение четности  $h_0 + |q|$  и полинома  $\Phi_q^{h_0}$  при четном  $h_0$  является следствием равенств (4.15), (4.17) и равенства нулю  $A_{qr}^{h_0}$  при нечетной разности  $|q| - |r|$ .

## § 5. Задача о собственных функциях трехмерной области

Пусть  $\Omega$  — область в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченная бесконечно дифференцируемой поверхностью  $S$ .

Рассмотрим следующую задачу на собственные функции:

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad u \neq 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$u|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (5.2)$$

Мы будем изучать собственные функции задачи (5.1), (5.2), сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической  $l$  на поверхности  $S$ .

Построения, относящиеся к внутренней задаче, легко переносятся на случай внешней задачи (см. конец этого параграфа).

Введем в окрестности  $l$  на  $S$  так называемую полугеодезическую систему координат  $^*$ ), которая является частным случаем при  $m = 1$  системы координат, введенной в § 1. Точки на  $l$  будем характеризовать длиной дуги  $s$  (отсчитываемой от некоторой фиксированной точки). Точка  $M$ , принадлежащая поверхности  $S$ , имеет координаты  $s, y$ , если она лежит на ортогональной к  $l$  геодезической, проходящей через точку  $s \in l$  на расстоянии  $y$  от  $l$ . На геодезической  $l$  координата  $y = 0$ , с одной стороны  $l$  пусть  $y > 0$ , с другой —  $y < 0$ . Обычные приемы вариационного исчисления показывают ортогональность системы координат  $(s, y)$  (см. § 2 гл. 1). Точку  $M$  на нормали к  $S$ , восставленной в точке  $(s, y)$ , будем характеризовать величиной  $n$  — расстоянием вдоль нормали от  $S$ , причем вне  $S$  считаем  $n > 0$ , внутри (т. е. в области  $\Omega$ )  $n < 0$ . Тем самым вблизи  $l$  нами определена регулярная система криволинейных координат  $s, y, n$ . Связь координат  $s, y, n$  с декартовыми  $x_1, x_2, x_3$  удобно выразить векторным равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(s, y) + nn^0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (5.3)$$

Здесь  $n^0$  — внешняя единичная нормаль к  $S$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, y)$  — векторная запись параметрического задания  $S$  вблизи  $l$ . Для

\*) См. П. Е. Рашевский [1].

элемента дуги произвольной кривой в системе координат  $(s, y, n)$  имеем следующее выражение:

$$d\sigma^2 = |dx|^2 = \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial s} + n \frac{\partial n^0}{\partial s} \right) ds + \left( \frac{\partial r}{\partial y} + n \frac{\partial n^0}{\partial y} \right) dy + n^0 dn \right]^2 = \\ = g_{ih} d\xi^i d\xi^h, \quad (s = \xi^1, y = \xi^2, n = \xi^3), \quad (5.4)$$

откуда для компонент метрического тензора легко получаем

$$g_{11} = g_{ss} = (r_s, r_s) + 2n(r_s n_s^0) + n^2(n_s^0)^2, \\ g_{12} = g_{21} = g_{sy} = g_{ys} = n[(n_s^0, r_y) + (n_y^0, r_s)] + n^2(n_s^0, n_y^0), \\ g_{22} = g_{yy} = (r_y, r_y) + 2n(r_y, n_y^0) + n^2(n_y^0)^2, \\ g_{23} = g_{32} = g_{yn} = g_{ny} = 0, \quad g_{33} = g_{nn} = 1. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.1) в системе координат  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (s, y, n)$  запишется в виде (см. Дополнение 2)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \xi^j} u \right) + k^2 u = 0, \quad (s, y, n) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (5.6)$$

(Матрица  $\|g^{ij}\|$  обратна матрице  $\|g_{ij}\|$ .)

Вводя  $b_{ss}$ ,  $b_{sy}$  и  $b_{yy}$  — коэффициенты второй квадратичной формы Гаусса поверхности  $S$  в системе координат  $s, y$  и заменяя точками величины, не превышающие

$$\text{const}(|y|^3 + |y| \cdot |n| + n^2),$$

можно получить

$$g^{11} = g^{ss} = 1 + K(s)y^2 + 2nb_{ss}(s, 0) + \dots, \\ g^{22} = g^{yy} = 1 + 2nb_{yy}(s, 0) + \dots, \\ g^{12} = g^{sy} = -2nb_{sy}(s, 0) + \dots, \\ g^{13} = g^{sn} = 0, \quad g^{23} = g^{yn} = 0, \quad g^{nn} = 1. \quad (5.7)$$

Здесь  $K(s)$  — гауссова кривизна  $S$  в точке  $(s, 0)$ .

Все дальнейшие рассмотрения мы будем проводить в предположении, что

$$b_{ss}(s, 0) < 0. \quad (5.8)$$

При выполнении неравенства (5.8) в области  $\Omega$  вблизи  $l$  будет иметь место эффект шепчущей галереи (см. гл. 4). Используя классическое выражение для коэффициентов второй квадратичной формы Гаусса, неравенство (5.8) можно переписать в виде

$$(r_s, n_s^0) = -b_{ss}(s, 0) > 0. \quad (5.9)$$

Вектор  $r_s$  — это единичный вектор касательной к геодезической  $l$ , направленный в сторону возрастания дуги. Используя

формулы для кривизны кривой на поверхности, получим, что неравенство (5.9) эквивалентно неравенству

$$-b_{ss}(s, 0) = \frac{1}{\rho} > 0, \quad (5.10)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны плоского нормального сечения поверхности  $S$  вдоль  $l$  в точке  $(s, 0)$ . Последнее неравенство означает, что центр кривизны указанного плоского нормального сечения поверхности  $S$  лежит с той стороны  $l$ , где  $n < 0$ . (Напоминаем, что точки вблизи  $S$ , где  $n < 0$ , — это точки области  $\Omega$ .) Неравенство (5.10) в случае плоской кривой — условие возникновения эффекта шепчущей галереи (см. § 3 гл. 4) с той стороны от  $l$ , где  $n < 0$ .

Поведение собственных функций при фиксированном  $n$ , как следует ожидать, должно быть аналогично поведению собственных функций задачи, рассмотренной в §§ 1—4 при  $m = 1$ . С другой стороны, при фиксированном  $y$ , естественно ожидать, что собственные функции будут вести себя (при  $n < 0$ ) аналогично собственным функциям типа шепчущей галереи (см. гл. 6). Последующие построения оправдывают эти предположения.

Будем искать функцию  $u$  в виде

$$u = e^{ik_0 s + i\Phi_1(s)k_0^{1/3} + i\Phi_0(s)} V(s, \mu, \nu, k_0), \quad \mu = \sqrt{k_0} y, \quad \nu = k_0^{2/3} n, \quad (5.11)$$

где  $k_0$  — первое приближение к собственному числу. Его мы вычислим позже. Собственное число  $k$  нам удастся найти в виде формального ряда

$$k = k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j k_0^{-j/6}. \quad (5.12)$$

Предположим далее, что функция  $V$  имеет вид

$$V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(s, \mu, \nu) k_0^{-j/6}. \quad (5.13)$$

Подставим выражения (5.11) — (5.13) в уравнение (5.6). Главным членом будет член порядка  $k_0^{4/3}$ . Приравнявая его нулю, получаем

$$-2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} V_0 - 2b_{ss} \nu V_0 + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \nu^2} = 0. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.13) надо решать при краевых условиях

$$V_0|_{\nu=0} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial V_0}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} = 0, \quad V_0 \xrightarrow{\nu \rightarrow -\infty} 0. \quad (5.15)$$

(Напоминаем, что здесь решается внутренняя задача (5.11) и решения ищутся убывающие при удалении от поверхности  $S$ .)

Уравнение (5.14) — обыкновенное линейное уравнение относительно  $V_0$ , в котором  $v$  играет роль независимой переменной. Это уравнение легко сводится к уравнению Эйри. Учитывая условие на бесконечности для  $V_0$ , получаем

$$V_0 = A_0(s, \mu) v(-\sqrt{\beta}(s) - t), \quad \beta(s) = \sqrt[3]{-2b_{ss}(s)} > 0, \quad (5.16)$$

$$t = -\frac{2\varphi_1'(s)}{\beta^2(s)}. \quad (5.17)$$

Здесь  $v$  — функция Эйри.

Принимая во внимание краевое условие при  $v = 0$ , получим, что  $t$  — корень функции  $v(-t)$  (соответственно  $v'(-t)$ ) при краевом условии  $u|_S = 0$  (соответственно  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$ ). Отсюда и из формулы (5.17) следует:

$$\varphi_1(s) = t \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}}, \quad (5.18)$$

где  $t$  — корень функций Эйри  $v(-t)$  или ее производной  $v'(-t)$  и  $\rho(s) = -1/b_{ss}(s, 0)$  (см. (5.9), (5.10)). Постоянную интегрирования мы положили равной нулю, что не ограничивает общности наших построений.

Теперь для отыскания первого приближения к решению осталось найти функцию  $\varphi_0(s)$  (см. (5.11)) и функцию  $A_0(s, \mu)$  в выражении (5.16) для  $V_0$ . Найдем эти функции, исходя из условия разрешимости краевых задач для следующих приближений.

Приравнявая нулю выражения порядка  $k_0^{7/6}$  и  $k_0$ , получим

$$V_1 = A_1(s, \mu) v(-\sqrt{\beta}(s) - t), \quad (5.19)$$

$$2i \frac{\partial V_0}{\partial s} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \mu^2} - K(s) \mu^2 V_0 - 2 \frac{d\varphi_0}{ds} V_0 + \\ + \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} - \left( 2 \frac{d\varphi_1}{ds} + 2b_{ss} v \right) V_2 = 0. \quad (5.20)$$

В уравнение (5.20) вместо  $V_0$  подставим его выражение:

$$\left( 2i \frac{\partial A_0}{\partial s} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial \mu^2} - K(s) \mu^2 A_0 \right) v(-\sqrt{\beta}(s) - t) - \\ - 2 \frac{d\varphi_0}{ds} A_0 v(-\sqrt{\beta}(s) - t) + 2i A_0 \cdot v\beta' \cdot v'(-\sqrt{\beta}(s) - t) + \\ + \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} - 2 \left( \frac{d\varphi_1}{ds} + b_{ss} v \right) V_2 = 0. \quad (5.21)$$

Перенесем все члены, не содержащие  $V_2$ , в правую часть. Для функции  $V_2$  получим тем самым обыкновенное линейное диф-



ференциальное уравнение с правой частью, которое мы будем решать, требуя, чтобы  $V_2$  удовлетворяло краевым условиям (5.15). Таким образом, для нахождения  $V_2$  надо решить краевую задачу типа Штурма — Лиувилля на полубесконечном промежутке. Ее надо решать при краевых условиях (5.15). Задача эта на собственном числе (т. е. соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение), поэтому для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы свободный член был ортогонален решению однородного уравнения, т. е. был бы ортогонален  $v(-\beta(s)v - t)$ :

$$\left(2i \frac{\partial A_0}{\partial s} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial \mu^2} - K(s)\mu^2 A_0\right) \int_{-\infty}^0 v^2(-\nu\beta(s) - t) dv + \\ + \int_{-\infty}^0 \left(2 \frac{d\varphi_0}{ds} A_0 v + 2i A_0 \nu\beta' v'\right) v(-\nu\beta(s) - t) dv = 0. \quad (5.22)$$

Выберем  $\varphi_0$  так, чтобы второй интеграл обратился в нуль, т. е. потребуем, чтобы  $\varphi_0$  удовлетворяло уравнению

$$\frac{d\varphi_0}{ds} \int_{-\infty}^0 v^2(-\nu\beta(s) - t) dv + \\ + i \int_{-\infty}^0 \nu\beta' v(-\nu\beta(s) - t) v'(-\nu\beta(s) - t) dv = 0.$$

Отсюда, после несложных выкладок, с точностью до постоянного слагаемого находим выражение для  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0(s) = \frac{i}{6} \ln \rho(s) \quad \left(\rho(s) = -\frac{1}{b_{ss}}\right). \quad (5.23)$$

Равенство (5.22) сводится теперь к параболическому уравнению для  $A_0$

$$2i \frac{\partial A_0}{\partial s} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial \mu^2} - K(s)\mu^2 A_0 = 0,$$

которое решается методами §§ 1—4:

$$A_0 = \Lambda^{*q} \frac{1}{\sqrt{Y}} e^{\frac{i}{2} \frac{Y'}{Y} \mu^2}, \quad (5.24)$$

$$\Lambda^* = \frac{1}{i} Y^*(s) \frac{\partial}{\partial \mu} - Y^{*'} \mu,$$

где  $Y(s)$  — решение Флоке уравнения

$$Y'' + K(s)Y = 0, \quad K(s+L) \equiv K(s); \quad Y(s+L) = e^{i\alpha} Y(s). \quad (5.25)$$

(Уравнение (5.25) — частный случай уравнения (2.5). Здесь  $K(s)$  — гауссова кривизна  $S$  в точке  $(s, 0)$ ). Как и раньше, будем требовать  $L$ -периодичности каждого приближения. Требование  $L$ -периодичности первого приближения приводит к уравнению, определяющему  $k_0$ :

$$k_0 L - t k_0^{\frac{1}{3}} \int_0^L \rho^{-\frac{2}{3}}(s) ds \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(q + \frac{1}{2}\right) \alpha = 2\pi p, \quad (5.26)$$

$\alpha$  — показатель Флоке уравнения (5.25).

Функция  $A_1(s, \mu)$  (см. формулу (5.19)) находится аналогично функции  $A_0(s, \mu)$  из требования разрешимости краевой задачи для  $V_3(s, \mu, \nu)$ . К краевой задаче для  $V_3$  мы придем сразу, приравняв нулю члены порядка  $k_0^{5/6}$ .

Нахождение дальнейших приближений проводится аналогично. Пусть мы знаем  $V_0, V_1, \dots, V_{h_0-1}$ , которые имеют вид

$$V_h = \left( \sum_{j=0}^{N_h} D_{jh} \nu^j \right) v(-\nu\beta(s) - t) + \left( \sum_{j=0}^{N_h} \tilde{D}_{jh} \nu^j \right) v'(-\nu\beta(s) - t), \quad (5.27)$$

где  $D_{jh}$  и  $\tilde{D}_{jh}$  — полиномы по  $\mu$ , умноженные на  $\exp\left(\frac{i}{2} \frac{Y'}{Y} \mu^2\right)$ .

Кроме того, предположим, что  $V_{h_0}$  и  $V_{h_0+1}$  имеют вид (5.27), но коэффициенты  $D_{0h_0}$  и  $D_{0h_0+1}$  в них еще не определены.

Покажем, как найти  $D_{0h_0}$  и  $V_{h_0+2}$  (функции  $V_{h_0+3}$  и  $D_{0h_0+1}$  находятся аналогично). Обратимся к уравнению (5.6). Приравняв нулю коэффициент при  $k_0^{1-h_0/6}$ , получим

$$\begin{aligned} & -2 \frac{d\varphi_0}{ds} V_{h_0} + \mathcal{L}V_{h_0} + \frac{\partial^2 V_{h_0+2}}{\partial \nu^2} - \left( 2 \frac{d\varphi_1}{ds} + 2b_{ss}\nu \right) V_{h_0+2} + 2\delta_{h_0} V_0 = \\ & = U_0 \left[ \sum_{j=0}^{N_{h_0+2}-1} C_{jh_0} \nu^j v(-\nu\beta(s) - t) + \sum_{j=0}^{N_{h_0+2}} \tilde{C}_{jh_0} \nu^j v'(-\nu\beta(s) - t) \right]; \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{Y}} e^{\frac{i}{2} \frac{Y'}{Y} \mu^2},$$

где  $C_{jh_0}$ ,  $\tilde{C}_{jh_0}$  — полиномы по  $\mu$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ . Функцию  $V_{h_0+2}$  подчиним краевым условиям (5.15). Уравнение (5.28), дополненное условиями (5.15), — краевая задача на собственном числе для нахождения  $V_{h_0+2}$ . Составим интегральное условие ее разрешимости. Подставляя в уравнение (5.28) вместо  $V_{h_0}$  выражение (5.27), при  $h = h_0$  получим для неизвестного еще коэффициента  $D_{0h_0}$  параболическое уравнение с правой частью. Из разрешимости его, так же как и в §§ 1—4, находится  $\delta_{h_0}$ .

Для определения  $V_{h_0+2}$  получается уже разрешимая краевая задача: 1) уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 V_{h_0+2}}{\partial \mathbf{v}^2} - \left( 2 \frac{d\varphi_1}{ds} + 2b_{ss}\mathbf{v} \right) V_{h_0+2} = \\ = \sum_{j=0}^{N_{h_0+2}-1} e_{jh_0} \mathbf{v}^j v (-\mathbf{v}\beta(s) - t) + \sum_{j=0}^{N_{h_0+2}} \bar{e}_{jh_0} \mathbf{v}^j v' (-\mathbf{v}\beta(s) - t), \quad (5.29)$$

( $e_{jh_0}$ ,  $\bar{e}_{jh_0}$  — полиномы по  $\mu$ , умноженные на  $e^{\frac{t}{2} \frac{Y'}{Y} \mu^2}$ );

2) краевые условия даются формулами (5.15), где  $V_0$  следует заменить на  $V_{h_0+2}$ .

Для нахождения  $V_{h_0+2}$  можно было бы применить обобщенную функцию Грина\*), однако здесь удобнее искать  $V_{h_0+2}$  методом неопределенных коэффициентов в виде (5.27), при этом все коэффициенты, кроме  $D_{0h_0+2}$ , найдутся. Мы опускаем все эти выкладки. Процесс построения  $V_h$  и  $\delta_h$  может продолжаться неограниченно, если отношение показателя Флоке  $\alpha$  к  $\pi$  иррационально.

Так же, как и в предыдущем параграфе, можно показать, что все коэффициенты  $\delta_h$  с нечетными индексами  $h$  равны нулю. Этим замечанием мы завершим рассмотрение внутренней задачи (5.1).

Аналогично задаче (5.1) можно было бы рассмотреть внешнюю задачу для области, находящейся вне области  $\Omega$ . Задача эта ставится формально так же, как и задача (5.1), только решение уравнения  $(\Delta + k^2)u = 0$  ищется в точках, не принадлежащих  $\Omega$ . Некоторые дополнительные уточнения, касающиеся постановки внешней задачи, можно было бы сделать так же, как это сделано в § 5 главы 6 для плоского случая.

Для внешней задачи тоже можно построить формальные ряды для собственных чисел и функций, только роль функции Эйри  $v$  будет играть функция Эйри  $\omega_1$ , корни  $t$  функции  $v(-t)$  (или  $v'(-t)$ ) заменяются на корни  $\xi$  функции  $\omega_1(\xi)$  (или  $\omega_1'(\xi)$ ).

В заключение приведем выражения для собственных функций в первом приближении. В случае внутренней задачи (5.1).

$$u \approx e^{ik_0 s} \rho^{-1/6}(s) \theta^{-1/2}(s) \exp \left[ ik_0 s - i \left( q + \frac{1}{2} \right) \int_0^s \frac{ds}{\theta^2(s)} - \right. \\ \left. - t \frac{ik_0^{1/3}}{\sqrt{2}} \int_0^s \left( \frac{1}{\rho} \right)^{2/3} ds + i \frac{\theta}{2\theta} \mu^2 \right] D_q \left( \sqrt{2} \frac{\mu}{\theta} \right) v \left( - \left( \frac{2}{\rho} \right)^{1/3} \mathbf{v} - t \right), \quad (5.30)$$

\*) См В. И. Смирнов [3].

где

$$\theta = |Y|, \quad \rho = -\frac{1}{b_{ss}}, \quad D_q(\sqrt{2} x) = e^{-x^2/2} H_q(x);$$

$H_q$  — полином Эрмита,  $t = t_r$  (соответственно  $= t'_r$ ) —  $r$ -й корень функции Эйри  $v(-t)$  (соответственно  $v'(-t)$ ) при краевом условии  $u|_s = 0$  (соответственно  $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0$ ),  $k_0$  определяется из уравнения (5.26).

Для получения асимптотики собственных функций и собственных чисел в первом приближении для внешней задачи следует в формуле (5.30)  $v$  заменить на  $\omega_1$ ,  $t$  на  $-\xi$ , где  $\xi$  корень функции Эйри  $\omega_1(\xi)$  в случае краевого условия  $u|_s = 0$  или ее производной при краевом условии  $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0$ .

Для собственных чисел имеет место формула (5.26), где опять  $t$  надо заменить на  $-\xi$ .

Выкладки, в результате которых получается формула (5.30), мы опускаем.

В этой главе будет рассматриваться задача о собственных колебаниях трехмерных открытых многозеркальных резонаторов, заполненных неоднородной средой со скоростью распространения волн  $c = c(M)$  без учета дифракционных потерь.

Интерес к подобным задачам возник в связи с созданием в последние годы лазеров, в особенности газовых лазеров.

В математическом отношении задача о собственных колебаниях резонаторов приближенно приводится к задачам на собственные значения и собственные функции для скалярного уравнения Гельмгольца. В частности, собственные колебания двухзеркального резонатора представляют собой собственные функции типа прыгающего мячика, рассмотренные в главах 4 и 7.

Собственные частоты резонатора находятся с помощью лучевого метода в малом, применение которого здесь нетривиально и потребовало привлечения аппарата классической механики.

Главные члены асимптотических формул для собственных функций выводятся методом параболического уравнения. Для решения возникающей здесь краевой задачи для параболического уравнения используется методика, ранее разработанная для задачи о замкнутой геодезической (см. §§ 1—3 гл. 8). Завершается глава построением следующих приближений для собственных колебаний многозеркального резонатора.

### § 1. Многозеркальный резонатор и формулировка задачи

Дадим описание многозеркального резонатора, заполненного неоднородной средой (рис. 36).

Рассмотрим функционал геометрической оптики  $I = \int \frac{d\sigma}{c(M)}$ , где  $d\sigma$  — элемент длины в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ . Пусть  $r = r_1(s)$ ,  $r \in R^3$  — экстремаль этого функционала,  $s$  — длина дуги экстремали, отсчитываемая от некоторой точки. Положим, что при  $s = s_1$  исходная экстремаль попадает на идеально отражающее зеркало  $S_1$  и отражается от него по законам геометрической оптики, порождая экстремаль  $r = r_2(s)$ ,

которая в свою очередь при  $s = s_2$  отражается от поверхности  $S_2$ , второго зеркала и т. д. Наконец, после отражения от  $N - 1$  зеркала  $S_{N-1}$  возникает экстремаль  $r = r_N(s)$ , которая при  $s = s_N$  отражается от  $N$ -го зеркала  $S_N$ . Предположим, что зеркала  $S_k$  расположены так, что отраженная от  $S_N$  экстремаль совпадает с исходной экстремалью  $r = r_1(s)$ . Таким образом, получаем замкнутый криволинейный  $N$ -угольник  $l_N$ , вершины которого  $r = r_k(s_k)$  расположены на зеркалах  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

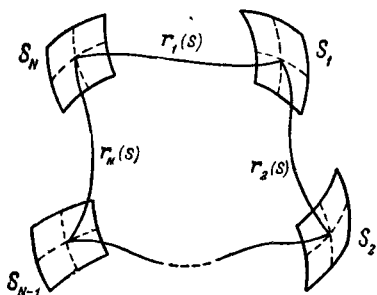


Рис. 36.

$\dots, N$ , а стороны образованы экстремалью функционала  $I$ . Очевидно, что на  $l_N$  первая вариация функционала геометрической оптики  $\delta I = 0$ , поэтому  $l_N$  можно назвать *экстремальным одномерным циклом*.

Пользуясь аналогией, существующей между геометрической оптикой и классической механикой материальной точки, можно сказать, что  $l_N$  представляет траекторию в  $R^3$  периодического движения материальной точки со-

ответствующей задачи механики. Эта аналогия окажется весьма полезной для нас в дальнейшем.

Замкнутую кусочно гладкую экстремаль  $r = r(s)$ , образующую стороны  $l_N$ , назовем *осью резонатора*. Будем считать, что вдоль оси длина дуги  $s$  изменяется в пределах от 0 до  $s_N$ , так что  $s_N$  — длина оси резонатора и  $r(s_N) = r(0)$ ,  $k$ -ю сторону  $N$ -угольника  $r = r_k(s)$ ,  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ , будем называть *осью  $k$ -го плеча резонатора*.

На каждом зеркале  $S_k$  (рис. 37) векторы

$$t_k = \left. \frac{dr_k}{ds} \right|_{s=s_k} \quad \text{и} \quad t_{k+1} = \left. \frac{dr_{k+1}}{ds} \right|_{s=s_k}$$

определяют плоскость отражения. Нормаль к поверхности  $k$ -го зеркала лежит в этой плоскости и образует равные углы  $\delta_k$  с векторами  $-t_k$  и  $t_{k+1}$ .

В окрестности каждого зеркала введем ортогональную систему координат  $\zeta_{1k}, \zeta_{2k}, \zeta_{3k}$  следующим образом: ось  $\zeta_{1k}$  направим вдоль биссектрисы угла, образованного векторами  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , ось  $\zeta_{3k}$  — вдоль биссектрисы угла между векторами  $-t_k$  и  $t_{k+1}$  (т. е. по нормали к  $S_k$ ), а ось  $\zeta_{2k}$  — перпендикулярно плоскости отражения и так, чтобы  $\zeta_{1k}, \zeta_{2k}, \zeta_{3k}$  образовали правую систему координат. В окрестности  $k$ -й вершины поверхность зеркала  $S_k$  будем считать бесконечно дифференцируемой поверхностью (это

означает, что функция  $\zeta_{3k} = \zeta_{3k}(\zeta_{1k}, \zeta_{2k})$ , дающая явное уравнение поверхности  $S_k$ , имеет непрерывные производные всех порядков в окрестности точки  $\zeta_{1k} = \zeta_{2k} = 0$ . Для большинства рассуждений этой главы достаточно, однако, чтобы функции  $\zeta_{3k} = \zeta_{3k}(\zeta_{1k}, \zeta_{2k})$  имели конечное число производных. Для построений §§ 2—7 потребуются только квадратичные члены разложения функции  $\zeta_{3k}$  в окрестности начала координат:

$$\zeta_{3k} = D_{11}^{(k)} \zeta_{1k}^2 + 2D_{12}^{(k)} \zeta_{1k} \zeta_{2k} + D_{22}^{(k)} \zeta_{2k}^2 + \dots = (D^{(k)} \zeta_k, \zeta_k) + \dots; \quad (1.1)$$

$$D^{(k)} = \begin{vmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} \\ D_{12}^{(k)} & D_{22}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad \zeta_k = (\zeta_{1k}, \zeta_{2k}).$$

Предполагая, что волновое поле в резонаторе может быть описано скалярной функцией  $u$ , задачу о собственных колебаниях резонаторов можно сформулировать следующим образом: найти функции  $u$ , осциллирующие в окрестности оси резонатора

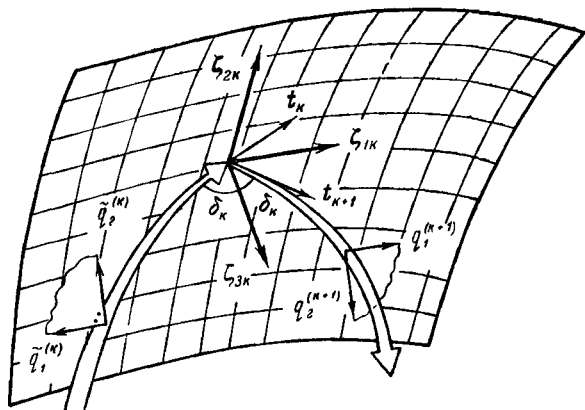


Рис. 37.

и быстро стремящиеся к нулю по мере удаления от нее, с точностью до членов порядка  $O(\sqrt{\omega})$  (или более высокой), удовлетворяющие уравнению

$$\left[ \Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)} \right] u(M) = 0; \quad u(M) \neq 0 \quad (1.2)$$

и краевым условиям

$$u|_{S_k} = 0 \text{ (I) или } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_k} = 0 \text{ (II), } k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Вещественное число  $\omega$  считается большим параметром задачи. Заведомо очевидно, что не во всяком резонаторе (т. е. в окрестности не всякого экстремального цикла  $l_N$ ) существует подпоследовательность собственных функций задачи (1.2), (1.3), сосредоточенных в окрестности оси. В дальнейшем, однако, мы увидим, что в резонаторе, устойчивом по первому приближению, могут быть асимптотически при  $\omega \rightarrow \infty$  построены решения задачи (1.2), (1.3), сосредоточенные в окрестности его оси.

Таким образом, понятие устойчивости резонаторов по первому приближению играет фундаментальную роль при изучении их собственных колебаний (как и в других аналогичных задачах на отыскание асимптотики собственных функций (см. гл. 4—8)).

## § 2. Условия устойчивости резонаторов по первому приближению

В каждом плече резонатора можно ввести систему координат  $s, v_1, v_2$ :

$$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(s) + v_1 \mathbf{n}(s) + v_2 \mathbf{b}(s), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{r}(M)$  — радиус-вектор произвольной точки  $M$ ,  $\mathbf{r}(s)$  — радиус-вектор некоторой точки на оси, а  $\mathbf{n}(s)$  и  $\mathbf{b}(s)$  — соответственно главная нормаль и бинормаль оси. Эта система координат регулярна в окрестности оси резонатора. Система координат  $s, v_1, v_2$ , вообще говоря, не ортогональная, и поэтому ею пользоваться неудобно.

Введем систему координат  $s, q_1, q_2$  с помощью формулы

$$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(s) + q_1 \mathbf{e}_1(s) + q_2 \mathbf{e}_2(s), \quad (2.2)$$

где единичные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  повернуты относительно векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  на угол  $\vartheta = \vartheta(s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{b} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{n} \sin \vartheta + \mathbf{b} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определим функцию  $\vartheta = \vartheta(s)$  условием\*)

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{T(s)}, \quad \vartheta(s) = \int_0^s \frac{ds}{T(s)} + \vartheta(0), \quad (2.4)$$

\*) Ср. с формулой (5.18) на стр. 34.



где  $1/T(s)$  — кручение оси в данной точке. Используя формулы Френе \*)

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &\equiv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = K(s)\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{\mathbf{b}}{T(s)} - K(s)\mathbf{t} \\ (K(s) &\text{— кривизна оси}), \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{\mathbf{n}}{T(s)}\end{aligned}$$

и равенства (2.3), (2.4), для производных единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  получаем

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = -K(s)\cos\vartheta\mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -K(s)\sin\vartheta\mathbf{t}. \quad (2.5)$$

Из формул (2.2), (2.5) следует:

$$\begin{aligned}d\sigma^2 = (d\mathbf{r}(M), d\mathbf{r}(M)) &= [1 - K(s)(q_1\cos\vartheta + q_2\sin\vartheta)]^2 ds^2 + \\ &+ dq_1^2 + dq_2^2 = G^2 ds^2 + dq_1^2 + dq_2^2. \quad (2.6)\end{aligned}$$

Таким образом, система координат  $s, q_1, q_2$  \*\*) оказывается ортогональной, и коэффициенты Ламе ее равны  $G, 1, 1$ , где

$$G = 1 - K(s)(q_1\cos\vartheta + q_2\sin\vartheta). \quad (2.7)$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют в каждом плече резонатора независимо построить ортогональные системы координат (в  $k$ -м плече резонатора  $s_{k-1} \leq s \leq s_k, q_1 = q_1^{(k)}, q_2 = q_2^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$ ), которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Отметим, что, как следует из условия (2.4), в каждом плече резонатора система координат  $s, q_1^{(k)}, q_2^{(k)}$  определяется однозначно заданием угла  $\vartheta_k(s)$  при каком-либо значении  $s$ .

В дальнейшем удобно считать, что  $s$  меняется на всей оси  $-\infty < s < +\infty$ . Тогда функции, заданные и однозначные в окрестности оси резонатора можно рассматривать как периодические функции  $s$  с периодом  $s_N$ .

Уравнение оси  $k$ -го плеча резонатора в построенной системе координат имеет вид  $q_1^{(k)} = 0, q_2^{(k)} = 0$ .

\*) См. П. К. Рашевский [1].

\*\*) Эти координаты полностью аналогичны координатам, введенным в § 1 гл. 8. Из формул (2.5) следует, что единичные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  переносятся параллельно вдоль луча, если параллельный перенос понимать как параллельный перенос в римановом пространстве, метрика в котором определена

$$\int \frac{d\sigma}{c}.$$

Обратимся к функционалу Ферма

$$I = \int \frac{1}{c(s, q)} \frac{d\sigma}{ds} ds, \quad q = (q_1, q_2),$$

где  $d\sigma$  — элемент длины дуги. В дальнейшем мы будем пользоваться выражением функционала  $I$  в гамильтоновой форме

$$I = \int p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - H(s, q, p) ds, \quad (2.8)$$

где  $p_i$  — обобщенные импульсы, сопряженные координатам  $q_i$ , и функция Гамильтона  $H$  определяются формулами

$$p_i = \frac{1}{c(s, q)} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\sigma}{ds}, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{ds}, \quad i = 1, 2, \quad (2.9)$$

$$H(s, q, p) = - \frac{G}{c(s, q)} \sqrt{1 - c^2(s, q)(p_1^2 + p_2^2)}, \quad (2.10)$$

$G$  имеет вид (2.7). В окрестности оси резонатора  $H(s, q, p)$  разлагается в степенной ряд

$$H(s, q, p) = - \frac{1}{c(s, 0)} + \sum_{k=2}^{\infty} H_k(s, q, p), \quad (2.11)$$

где  $H_k(s, q, p)$  — однородный полином степени  $k$  по каноническим переменным  $q, p$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ . Заметим, что в разложении (2.11) отсутствуют линейные члены по  $p$  и  $q$ . Обращение в нуль производных от  $H(s, q, p)$  по  $p_j$  и  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ) на оси резонатора следует из канонической системы уравнений для лучей

$$\frac{dq_j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \frac{dp_j}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2.12)$$

и того, что ось резонатора  $q_1 = q_2 = 0$  сама является лучом. Несложные подсчеты приводят к формуле

$$H_2(s, q, p) = c(s, 0) \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{1}{2c(s, 0)} (\Psi q, q), \quad (2.13)$$

где  $q = (q_1, q_2)$  и вещественная симметричная матрица  $\Psi$  имеет вид

$$\|\Psi_{ij}(s)\| = \frac{1}{c(s, 0)} \left\| \frac{\partial^2 c}{\partial q_i \partial q_j} \right\|_{s, 0}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.14)$$

Все дальнейшие рассмотрения будем вести в первом приближении, отбрасывая в разложении (2.11) все  $H_k, k \geq 3$ .

В первом приближении функционал  $I$  (2.8) заменяем функционалом

$$I_0 = \int p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \left[ \frac{1}{c(s, 0)} - H_2(s, q, p) \right] ds, \quad (2.15)$$

уравнения Эйлера для которого имеют вид

$$\frac{dq}{ds} = c(s, 0) p, \quad \frac{dp}{ds} = - \frac{1}{c(s, 0)} \Psi q, \quad (2.16)$$

где  $q = (q_1, q_2)$ ,  $p = (p_1, p_2)$ . Формулы (2.15) и (2.16) имеют место в каждом плече резонатора. Гамильтонова система линейных уравнений (2.16) будет лежать в основе дальнейших построений. Решение системы (2.16), определенное на  $k$ -й стороне  $l_N$ , т. е. при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ , обозначим вектором  $\chi_{(k)}(s) = (q^{(k)}(s), p^{(k)}(s))$  и назовем лучом в  $k$ -м плече резонатора  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Рассмотрим отражение лучей от поверхности зеркал резонатора.

Пусть вектор  $\chi_k(s)$  задает в  $k$ -м плече луч, падающий на зеркало  $S_k$ , расположенное в  $k$ -й вершине  $r(s_k)$  многоугольника  $l_N$ , а вектор  $\chi_{k+1}(s)$  — луч, возникающий в  $k+1$ -м плече после отражения от поверхности зеркала  $S_k$ . Геометро-оптический закон отражения лучей эквивалентен обращению в нуль первой вариации функционала Ферма  $\int \frac{d\sigma}{c}$  при условии, что кусочно гладкие кривые, по которым проводится интегрирование, имеют одну точку на отражающей поверхности, а концы их фиксированы. Отраженные лучи (первого приближения) мы будем искать из условия обращения в нуль первой вариации функционала  $I_0$  \*)

$$\delta I_0 = \left[ \sum_{j=1}^2 p_j^{(k)} \delta q_j^{(k)} + \left( \frac{1}{c(s, 0)} - H_2^{(k)} \right) \delta s^{(k)} \right]_{S_k} - \left[ \sum_{j=1}^2 p_j^{(k+1)} \delta q_j^{(k+1)} + \left( \frac{1}{c(s, 0)} - H_2^{(k+1)} \right) \delta s^{(k+1)} \right]_{S_k}, \quad (2.17)$$

где  $H_2^{(k)}$  по формуле (2.13) выражается через канонические переменные  $q_j^{(k)}$ ,  $p_j^{(k)}$ , а вариации  $\delta q_j^{(k)}$ ,  $\delta q_j^{(k+1)}$ ,  $\delta s^{(k)}$ ,  $\delta s^{(k+1)}$  связаны уравнением поверхности  $k$ -го зеркала (1.1), индекс  $S_k$  означает, что выражение (2.17) рассматривается на  $k$ -м зеркале. Пусть координаты  $\bar{q}_1^{(k)}$ ,  $\bar{q}_2^{(k)}$ , связанные с падающим лучом, выбраны таким образом, что в точке  $s_k$  (см. рис. 37)

\*) См И. М. Гельфанд, С. В. Фомин [1].

направление осей  $\tilde{q}_2^{(k)}$  и  $\zeta_{2k}$  совпадает, а ось  $\tilde{q}_1^{(k)}$ , лежащая в плоскости  $(\zeta_{1k}, \zeta_{3k})$ , составляет с осью  $\zeta_{1k}$  угол  $\pi - \delta_k$ . Аналогично пусть координаты  $q_1^{(k+1)}$ ,  $q_2^{(k+1)}$  таковы, что в точке  $s_k$  направление осей  $q_2^{(k+1)}$  и  $\zeta_{2k}$  противоположно, а ось  $q_1^{(k+1)}$  составляет угол  $\delta_k$  с осью  $\zeta_{1k}$ . С точностью до малых второго порядка координатные системы  $\tilde{q}_1^{(k)}$ ,  $\tilde{q}_2^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$  и  $q_1^{(k+1)}$ ,  $q_2^{(k+1)}$ ,  $s^{(k+1)}$  можно вблизи точки  $\zeta_{1k} = \zeta_{2k} = \zeta_{3k} = 0$  рассматривать как прямоугольные декартовы координаты\*). Для  $\tilde{q}_j^{(k)}$  ( $j = 1, 2$ ) и  $q_j^{(k+1)}$  имеют место формулы

$$\tilde{q}_1^{(k)} = -\zeta_{1k} \cos \delta_k - \zeta_{3k} \sin \delta_k, \quad \tilde{q}_2^{(k)} = \zeta_{2k} \quad (2.18)$$

и

$$q_1^{(k+1)} = \zeta_{1k} \cos \delta_k - \zeta_{3k} \sin \delta_k, \quad q_2^{(k+1)} = -\zeta_{2k}, \quad (2.19)$$

верные с точностью до квадратичных членов. Полагая

$$s^{(k)} = s_k + \tau_k, \quad s^{(k+1)} = s_k + \tau_{k+1}, \quad (2.20)$$

получим с той же точностью

$$\begin{aligned} \tau_k &= \zeta_{1k} \sin \delta_k - \zeta_{3k} \cos \delta_k, \\ \tau_{k+1} &= \zeta_{1k} \sin \delta_k + \zeta_{3k} \cos \delta_k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из равенств (1.1), (2.18), (2.19) легко следует, что на поверхности зеркала  $S_k$  (тоже в линейном приближении)

$$q_j^{(k+1)}(s_k) + \tilde{q}_j^{(k)}(s_k) = 0. \quad (2.22)$$

Приравняем теперь нулю коэффициенты при независимых вариациях в условии (2.17). Используя формулы (1.1), (2.18) — (2.22), получим

$$\begin{aligned} & p_1^{(k+1)}(s_k) + \tilde{p}_1^{(k)}(s_k) + \\ & + \frac{4}{c(s_k, 0)} \left[ -\frac{D_{11}^{(k)}}{\cos \delta_k} \tilde{q}_1^{(k)}(s_k) + D_{12}^{(k)} \tilde{q}_2^{(k)}(s_k) \right] + O(p^2 + q^2) = 0, \\ & p_2^{(k+1)}(s_k) + \tilde{p}_2^{(k)}(s_k) - \\ & - \frac{4}{c(s_k, 0)} \left[ -D_{12}^{(k)} \tilde{q}_1^{(k)}(s_k) + D_{22}^{(k)} \cos \delta_k \tilde{q}_2^{(k)}(s_k) \right] + O(p^2 + q^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

В первом приближении условия отражения лучей от зеркал резонатора, выражаемые равенствами (2.22), (2.23), представляют собой линейное преобразование в пространстве векторов  $\chi_k$

$$\chi_{k+1}(s_k) = \gamma_k \tilde{\chi}_k(s_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

\*) В соответствии с принятыми ранее обозначениями, длина дуги  $s$  меняется непрерывно вдоль оси резонатора в пределах  $0 \leq s \leq s_N$ . Здесь индекс  $k$  указывает, что  $s^{(k)}$  изменяется вдоль  $k$ -й стороны  $l_N$ .

Матрицы отражения  $\gamma_k$ ,  $\det \gamma_k = 1$ , имеют вид

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ \tilde{D}^{(k)} & -I \end{vmatrix}, \quad (2.25)$$

где  $I$  — единичная матрица, а через  $\tilde{D}^{(k)}$  обозначена симметричная матрица второго порядка

$$\tilde{D}^{(k)} = \begin{vmatrix} -4H_0(s_k) \frac{D_{11}^{(k)}}{\cos \delta_k} & 4H_0(s_k) D_{12}^{(k)} \\ 4H_0(s_k) D_{12}^{(k)} & -4H_0(s_k) D_{22}^{(k)} \cos \delta_k \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

$$(H_0(s) = -1/c(s, 0)).$$

Заметим, что явное выражение для матриц отражения  $\gamma_k$ , даваемое формулами (2.25) и (2.26), определяется специальным выбором систем координат, в которых задаются падающий и отраженный лучи.

Пусть далее при  $s = s_k$  в  $k+1$ -м плече резонатора используемая система координат фиксирована равенствами (2.19). Тогда при  $s = s_{k+1}$  направления осей выбранной системы координат, не совпадут с направлениями осей той специальной системы координат  $\tilde{q}_1^{(k+1)}$ ,  $\tilde{q}_2^{(k+1)}$ , которая связана с координатами  $\xi_{1, k+1}$ ,  $\xi_{2, k+1}$ ,  $\xi_{3, k+1}$  формулами (2.18). Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(k+1)} \\ \tilde{q}_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \omega_{k+1} \begin{pmatrix} q_1^{k+1} \\ q_2^{k+1} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

где  $\omega_{k+1}$  — ортогональная матрица, определитель которой равен  $-1$ , поскольку  $\omega$  описывает преобразование от левой системы координат к правой. Так как компоненты  $\omega$  не зависят от  $s$ , то и

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \omega_{k+1} \begin{pmatrix} p_1^{(k+1)} \\ p_2^{(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Объединяя последнюю формулу с формулой (2.27), получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{vmatrix} \omega_{k+1} & 0 \\ 0 & \omega_{k+1} \end{vmatrix} \mathbf{x}_{k+1} = W_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}, \quad (2.28)$$

где  $\det W_{k+1} = 1$ . Матрица  $W_{k+1}$  определяется свойствами резонатора.

Ввиду того, что в первом приближении отражение лучей от зеркал резонатора описывается линейным преобразованием (2.24), распространение луча в резонаторе может быть описано в виде линейного взаимно однозначного отображения некоторого векторного пространства  $R^4$  на себя.

Перейдем к построению так называемого *оператора монодромии*  $E$ , осуществляющего это отображение. (Вводимый в этой главе оператор монодромии совершенно аналогичен оператору монодромии, рассмотренному в § 2 гл. 8.)

Пусть матрица четвертого порядка  $\Pi_k(s)$  является фундаментальной матрицей канонической системы (2.16), рассматриваемой на  $k$ -й стороне  $l_N$  при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , т. е. столбцы ее представляют линейно независимые решения системы уравнений (2.16).

С помощью матриц  $\Pi_k(s)$  луч в каждом плече резонатора определяется заданием четырехмерного вещественного вектора  $A_k$ , не зависящего от  $s$ , по формуле

$$\chi_k(s) = \Pi_k(s) A_k. \quad (2.29)$$

Отражение лучей от зеркал резонатора в силу формул (2.24), (2.28), (2.29) описывается линейным преобразованием, осуществляемым неособенными матрицами  $F_k$ ,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \Pi_{k+1}^{-1}(s_k) \gamma_k W_k \Pi_k(s_k) A_k = F_k A_k, \\ F_k &= \Pi_{k+1}^{-1}(s_k) \gamma_k W_k \Pi_k(s_k). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Если вектор  $A_k(0)$  задает в  $k$ -м плече резонатора некоторый исходный луч, то после однократного прохождения его в резонаторе в  $k$ -м плече получаем новый луч, задаваемый вектором  $A_k(1)$ , причем

$$A_k(1) = F_{k-1} \dots F_2 F_1 F_N \dots F_{k+1} F_k A_k(0) \equiv E_k A_k(0). \quad (2.31)$$

После  $n$ -кратного прохождения луча в резонаторе имеем

$$A_k(n) = E_k^n A_k(0). \quad (2.32)$$

Неособенная вещественная матрица четвертого порядка  $E_k$  осуществляет взаимно однозначное отображение пространства решений канонической системы (2.16), рассматриваемой на  $k$ -й стороне  $l_N$ , на себя, т. е. является оператором монодромии. Полагая  $k = 1, 2, \dots, N$ , получаем  $N$  матриц  $E_k$ , причем в силу (2.31)  $E_{k+1} = F_k E_k F_k^{-1}$ , и потому собственные числа  $\lambda_j$  матрицы  $E_k$  не зависят от  $k$ .

Докажем, что  $\det E_k = 1$ .

Заметим прежде всего, что из известного тождества Лиувилля\*) и гамильтоновости системы (2.16) следует, что  $\det \Pi_\eta(s)$ ,  $\eta = 1, 2, \dots, N$ , не зависит от  $s$  (см. § 2 гл. 8).

Далее,  $\det E_k$  не зависит от выбора фундаментальных матриц  $\Pi_\eta(s)$ . В самом деле, замена одной фундаментальной си-

\*) См. Л. С. Понтрягин [1].

стемы решений, образующих столбцы матриц  $\Pi_\eta(s)$ , на другую приводит к замене  $\Pi_\eta(s)$  на матрицу  $\tilde{\Pi}_\eta(s) = \Pi_\eta(s)C_\eta$ , где  $C_\eta = \text{const}$  — неособая матрица. Замена  $\tilde{\Pi}_\eta$  на  $\Pi_\eta C_\eta$  приводит к замене  $E_\eta$  на  $C_\eta^{-1}E_\eta C_\eta$ .

Выберем теперь фундаментальные системы решений так, чтобы  $\det \Pi_\eta(s) \equiv 1$ ,  $\eta = 1, 2, \dots, N$  (это, очевидно, возможно). Из равенств (2.30), (2.31) и соотношений  $\det W_k = 1$ ,  $\det \gamma_k = 1$  легко следует искомое равенство  $\det E_k = 1$ .

Соотношения  $\det \Pi_\eta(s) = \text{const}$  и  $\det \gamma_k = 1$  эквивалентны сохранению объема  $\int \int \int \int_\Omega dq_1 dq_2 dp_1 dp_2$ , если каждая его точка будет двигаться в соответствии с системой (2.16) и с «краевыми условиями» (2.24)–(2.28) в точках  $s_k$ .

Выражение  $\int \int \int \int_\Omega dq_1 dq_2 dp_1 dp_2$  называется *абсолютным интегральным инвариантом четвертого порядка* \*) канонической системы уравнений (2.16).

Резонатор называется *устойчивым по первому приближению*, если при каждом фиксированном  $A_k(0) \|A_k(n)\| < M < +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$  (что согласуется с определением устойчивости по первому приближению замкнутой геодезической, данным в гл. 8).

Для того чтобы резонатор был устойчив по первому приближению, необходимо и достаточно, чтобы:

- а) собственные числа  $\lambda_j$  матрицы  $E_k$  были равны по модулю 1, т. е.  $|\lambda_j| = 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ;
- б) элементарные делители  $E_k$  были простыми.

В предыдущей главе содержится доказательство подобного утверждения для случая замкнутой геодезической, которое легко переносится и на случай резонатора. Поэтому мы ограничимся лишь некоторыми пояснениями. Если среди элементарных делителей  $E_k$  есть кратные, то матрица  $E_k$  преобразованием подобия приводится к форме Жордана, условие  $\|A_k(n)\| < M < \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  не будет выполняться, если даже все собственные числа  $|\lambda_j| = 1$ .

Характеристическое уравнение  $\det(E_k - \lambda I) = 0$  будет возвратным, в чем можно убедиться, повторяя рассуждения § 2 главы 8 применительно к данному случаю.

Обозначим через  $a_1, a_2$  коэффициенты характеристического уравнения матрицы  $E_k$ ; тогда

$$\det(E_k - \lambda I) = \lambda^4 - a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + 1 = 0. \quad (2.33)$$

\*) См. Е. Т. Уиттекер [1].

Полагая  $\nu = (\lambda + \lambda^{-1})/2$ , уравнение (2.33) преобразуем к виду

$$\nu^2 - \frac{a_1}{2}\nu + \frac{a_2 - 2}{4} = 0. \quad (2.34)$$

Достаточным условием устойчивости резонатора по первому приближению является требование, чтобы корни уравнения (2.34) были различны и принадлежали интервалу  $(-1, 1)$ . Это требование приводит к системе неравенств

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4(a_2 - 2) &> 0, \\ |a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}| &< 4. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать только резонаторы, устойчивые по первому приближению. В этом случае матрица  $E_k$  имеет четыре линейно независимых собственных вектора  $h_k^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , удовлетворяющих условию

$$E_k h_k^{(\alpha)} = e^{i\varphi_\alpha} h_k^{(\alpha)}, \quad E_k h_k^{(2+\alpha)} = e^{-i\varphi_\alpha} h_k^{(2+\alpha)}, \quad h_k^{(2+\alpha)} = h_k^{(\alpha)*} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.35)$$

Компоненты вектора  $h_k^*$  комплексно сопряжены с компонентами вектора  $h_k$ .

Числа  $e^{\pm i\varphi_\alpha}$  называют *мультипликаторами* уравнения (2.16),  $\varphi_\alpha$  — *показателями Флоке*. Формулой (2.35) показатели Флоке определяются с точностью до слагаемого кратного  $2\pi$ . Далее, в § 7, выбор  $\varphi_\alpha$  будет уточнен.

Для каждого собственного вектора  $h_k^{(j)}$  по формуле (2.29) можно построить решение  $\chi_k^{(j)}(s)$  канонической системы уравнений (2.16), рассматриваемой на цикле  $l_N$ , обладающее в силу формул (2.31) и (2.35) следующим свойством:

$$\begin{aligned} \chi_k^{(\alpha)}(s + s_N) &= e^{i\varphi_\alpha} \chi_k^{(\alpha)}(s), \quad \alpha = 1, 2, \\ \chi_k^{(2+\alpha)}(s + s_N) &= e^{-i\varphi_\alpha} \chi_k^{(2+\alpha)}(s), \\ \chi_k^{(2+\alpha)} &= \chi_k^{(\alpha)*}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

В дальнейшем при обозначении этих решений, которые называют *решениями Флоке* системы уравнений (2.16) на цикле  $l_N$ , опустим индекс плеча резонатора  $k$ , понимая, что в  $k$ -м плече резонатора, т. е. при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ ,

$$\chi^{(j)}(s) \equiv \chi_k^{(j)}(s).$$

В следующем параграфе мы остановимся на некоторых свойствах этих решений Флоке, которые потребуются для дальнейших построений.



### § 3. Некоторые свойства решений канонической системы (2.16) на цикле $l_N$

В главе 8 в связи с задачей о замкнутой геодезической на римановом многообразии рассматривалась линейная каноническая система  $2m$  уравнений. Установленные там свойства ее решений являются общими свойствами решений всякой линейной гамильтоновой системы уравнений с периодическими коэффициентами. В задаче о многозеркальном резонаторе мы приходим к рассмотрению на замкнутом многоугольнике  $l_N$  линейной канонической системы уравнений (2.16): особенностью в этом случае является то, что решения уравнений (2.16) на двух сторонах  $l_N$  с общей вершиной должны быть связаны линейным преобразованием (2.24). Однако матрицы отражения оказываются такими, что свойства решений линейных гамильтоновых уравнений с периодическими коэффициентами имеют место и в рассматриваемом случае.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства решений Флоке. Перейдем к их выводу.

Пусть  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = (q_1, q_2, p_1, p_2)$  — произвольный вектор в четырехмерном пространстве  $(q, p)$ ,  $q = (q_1, q_2)$ ,  $p = (p_1, p_2)$ . Введем оператор  $J$

$$J\chi = J(q, p) = (p, -q)$$

и скалярное произведение

$$(\chi', \chi'') = \sum_{\eta=1}^4 \chi'_\eta \bar{\chi}''_\eta = (q', q'') + (p', p'').$$

Если  $\chi(s)$  и  $\chi'(s)$  — векторы, удовлетворяющие уравнению (2.16) и условиям сопряжения в точках  $s_k$  (см. § 2), то, как нетрудно убедиться,

$$(J\chi(s), \chi'(s)) = \text{const}, \quad (3.1)$$

т. е.  $J$ -скалярное произведение постоянно на всем цикле  $l_N$ .

Пусть  $\chi(s)$  и  $\chi'(s)$  — два решения Флоке, причем соответствующие им мультипликаторы  $\lambda$  и  $\lambda'$  ( $|\lambda| = |\lambda'| = 1$ ) различны, тогда

$$(J\chi(s), \chi'(s)) \equiv 0 \quad (3.2)$$

в силу того, что после обхода цикла  $l_N$  выражение (3.1) приобретает отличный от единицы множитель  $\lambda\lambda' = \lambda/\lambda'$ .

В случае, когда среди четырех мультипликаторов  $e^{\pm i\varphi_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) есть совпадающие, можно (заменяя, если это нужно, решения Флоке, соответствующие одинаковым мультипликаторам, на их линейные комбинации) добиться выполнения равенства (3.2) для любой пары  $\chi, \chi'$  ( $\chi \neq \chi'$ ) из четырех

решений Флоке, образующих фундаментальную систему решений. В случае  $\chi = \chi'$  тогда будет иметь место неравенство

$$(J\chi, \chi) \neq 0. \quad (3.3)$$

Нормируя (и перенумеровывая, если это нужно) решения Флоке, можно добиться, чтобы они удовлетворяли условиям

$$(J\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = i\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3.4)$$

и

$$(J\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = (J\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta+2)}) = 0. \quad (3.5)$$

Подробный вывод свойств решений Флоке мы опускаем, чтобы не дублировать здесь § 2 главы 8.

#### § 4. Лучевой метод в малом. Формула для собственных частот резонатора

Найдем собственные частоты  $\omega_m$  \*) устойчивых по первому приближению резонаторов с помощью лучевого метода в малом. Существование аналогии между геометрической оптикой и классической механикой материальной точки наводит на мысль использовать хорошо развитый аппарат аналитической динамики.

Попытки применить к рассматриваемой задаче метод Келлера — Рубинау сталкиваются с той трудностью, что здесь не удастся найти множества замыкающихся конгруэнций лучей, непрерывно зависящего от должного числа параметров (см. гл. 3).

С этими трудностями мы не сталкиваемся при использовании лучевого метода в малом, в основе которого лежат не экстремали функционала геометрической оптики  $I$  (2.8), а лучи первого приближения — экстремали функционала  $I_0$  (2.15), или (что то же) решения линейной канонической системы (2.16).

Для описания распространения этих лучей в резонаторе воспользуемся специальными координатами  $Q_\alpha, P_\alpha, \alpha = 1, 2$ , известными в аналитической динамике под названием *нормальных координат* \*\*). Перейдем к их построению.

Используя решения Флоке, построенные в § 2, введем четыре линейно независимые и периодические на  $l_N$  векторные функции  $\mathbf{B}^{(j)}(s)$  следующей формулой:

$$\mathbf{B}^{(\alpha)}(s) = e^{-i\mu_\alpha s} \chi^{(\alpha)}(s), \quad \mathbf{B}^{(2+\alpha)}(s) = e^{i\mu_\alpha s} \chi^{(2+\alpha)}(s), \quad (4.1)$$

\*) В этой главе, в отличие от предыдущих, собственные частоты и функции будут иметь индексы не  $p$  и  $q$ , а  $m = (m_0, m_1, m_2)$ .

\*\*\*) См. Е. Т. Уиттекер [1].

где  $\mu_\alpha = \varphi_\alpha / s_N$ ,  $\alpha = 1, 2$ . В дальнейшем  $B_k^{(\alpha)}(s)$  — это значение  $B^{(\alpha)}(s)$  в  $k$ -м плече резонатора. Очевидно, что  $B^{(2+\alpha)}(s) = B^{*(\alpha)}(s)$ , и функции  $B^{(j)}(s)$  удовлетворяют равенствам (3.4) и (3.5). При переходе из одного плеча резонатора в другое векторы  $B_k^j(s_k)$  и  $B_{k+1}^j(s_k)$  преобразуются в соответствии с формулой (2.24).

От координат  $(q, p)$  перейдем к координатам  $(Q, P)$  по формуле

$$X = \sum_{\alpha=1}^2 (B^\alpha(s) Q_\alpha + B^{(2+\alpha)}(s) P_\alpha), \quad (4.2)$$

где компонентами вектора  $X$  являются прежние координаты  $X = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ , а вектор-функции  $B^{(j)}(s)$  определяются формулой (4.1). Поскольку  $X$  — вещественный вектор,  $Q_\alpha$  и  $P_\alpha$  — комплексно сопряженные числа.

Запишем функционал  $I_0$  (2.15) в нормальных координатах. Используя равенства (3.4), (3.5) и (4.1), после простых, но громоздких преобразований, которые мы опускаем, получаем

$$I_0 = \int -i \sum_{\alpha=1}^2 P_\alpha dQ_\alpha + \left[ c^{-1}(s, 0) - \sum_{\alpha=1}^2 \mu_\alpha P_\alpha Q_\alpha \right] ds + d\Omega, \quad (4.3)$$

где  $d\Omega$  — полный дифференциал некоторой функции  $\Omega = \Omega(s, Q, P)$ .

Система уравнений Эйлера для функционала (4.3) имеет вид

$$\frac{dQ_\alpha}{ds} = i\mu_\alpha Q_\alpha, \quad \frac{dP_\alpha}{ds} = -i\mu_\alpha P_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.4)$$

и тотчас интегрируется

$$Q_\alpha(s) = Q_\alpha(0) e^{i\mu_\alpha s}, \quad P_\alpha(s) = P_\alpha(0) e^{-i\mu_\alpha s}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.5)$$

где  $Q_\alpha(0) = \bar{P}_\alpha(0)$  — постоянные интегрирования (черта над буквой означает комплексное сопряжение).

Таким образом, в нормальных координатах луч в резонаторе описывается простыми функциями (4.5), непрерывными на оси резонатора  $l_N$ . Простота формул (4.5) объясняется тем, что всю сложность геометрии задачи (связанную, в частности, с отражением лучей от зеркал  $S_k$ ) взяли на себя нормальные координаты.

Рассмотрим в резонаторе множество лучей, постоянные интегрирования которых  $Q_\alpha(0)$ ,  $P_\alpha(0)$  удовлетворяют условиям

$$Q_\alpha(0) \cdot P_\alpha(0) = \varepsilon_\alpha^2, \quad Q_\alpha(0) = \bar{P}_\alpha(0) = \varepsilon_\alpha e^{i\theta_\alpha^0}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.6)$$

Каждый луч этого множества в результате любого числа отражений в резонаторе переходит в луч, принадлежащий этому же множеству, так как в силу формул (4.5) тождественно по  $s$

$$Q_\alpha(s)P_\alpha(s) = Q_\alpha(0)P_\alpha(0) = \varepsilon_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.7)$$

Следовательно, множество лучей, определяемое условиями (4.6) при фиксированных значениях  $\varepsilon_\alpha$ , является замыкающейся конгруэнцией лучей. Это множество лучей выстилает многообразие  $T_\varepsilon$ , играющее здесь роль многоэкземплярного пространства (см. § 2 гл. 3).

Наша ближайшая цель — выяснить топологическую структуру многообразия  $T_\varepsilon$ . Зафиксируем точку  $s$  на  $l_N$  и, полагая

$$Q_\alpha = \xi_\alpha + i\eta_\alpha \quad \text{и} \quad P_\alpha = \xi_\alpha - i\eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \quad \text{Im } \xi_\alpha = \text{Im } \eta_\alpha = 0, \quad (4.8)$$

запишем уравнения (4.7) в виде

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \varepsilon_1^2, \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 = \varepsilon_2^2. \quad (4.9)$$

Задавая две точки: одну на окружности  $\xi_1^2 + \eta_1^2 = \varepsilon_1^2$ , другую на окружности  $\xi_2^2 + \eta_2^2 = \varepsilon_2^2$ , мы однозначно определим точку на  $T_\varepsilon$ , и обратно. Пользуясь топологической терминологией, можно сказать, что сечения  $s = \text{const}$  многообразия  $T_\varepsilon$  представляют собой прямое произведение двух окружностей. Произведение двух окружностей называется также *двумерным тором*. (Для того чтобы характеризовать точку на торе, достаточно задать две точки на двух фиксированных окружностях. В самом деле, параметрическое уравнение тора имеет вид:

$$x = (a + b \cos \varphi) \cos \psi, \quad y = (a + b \cos \varphi) \sin \psi, \quad z = b \sin \varphi, \\ a > b > 0.$$

Этими же параметрами  $\varphi$  и  $\psi$ , определенными с точностью до слагаемых вида  $2\pi n$ , где  $n$  — целое, можно характеризовать точки на двух фиксированных окружностях.)

Значениям параметра  $s$ ,  $0 \leq s \leq s_N$ , однозначно сопоставим точки некоторой третьей окружности. Пользуясь опять топологической терминологией, можно сказать, что многообразие  $T_\varepsilon$  гомеоморфно прямому произведению трех окружностей. Такое многообразие называется *трехмерным тором*. В качестве базисных контуров возьмем окружности (4.9) и замкнутый контур, на котором параметр  $s$  меняется в пределах от 0 до  $s_N$ , а точки  $(\xi_j^0, \eta_j^0)$ ,  $j = 1, 2$ , лежащие на окружностях (4.9), фиксированы. Напомним, что любой замкнутый контур на трехмерном топологическом торе  $T_\varepsilon$  можно получить непрерывной деформацией некоторой линейной комбинации с целыми коэффициентами этих базисных контуров.

Мы еще не проверили, является ли построенное только что семейство лучей полем, т. е. существуют ли волновые фронты, соответствующие построенному семейству лучей (см. § 2 гл. 3). Для этого достаточно показать, что дифференциальная форма (см. формулу (4.3))

$$-i \sum_{\alpha=1}^2 P_{\alpha} dQ_{\alpha} + \left[ \frac{1}{c(s, 0)} - \sum_{\alpha=1}^2 \mu_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha} \right] ds \quad (4.10)$$

является полным дифференциалом на  $T_e$ .

Введем вещественные параметры  $h_{\alpha}$  по формулам

$$Q_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} e^{ih_{\alpha}}, \quad P_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} e^{-ih_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.11)$$

тогда при  $0 \leq h_{\alpha} < 2\pi$  совокупность трех вещественных чисел  $s, h_1, h_2$  взаимно однозначно определяет точку на  $T_e$ . Используя формулы (4.7), получаем для дифференциальной формы (4.10) на  $T_e$  следующее выражение:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon_{\alpha}^2 dh_{\alpha} + \left[ c^{-1}(s, 0) - \sum_{\alpha=1}^2 \mu_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}^2 \right] ds, \quad (4.12)$$

из которого непосредственно следует, что эта форма есть полный дифференциал (накрест взятые производные равны).

Условия квантования возникают из требования однозначности на инвариантном многообразии  $T_e$  главного члена лучевого разложения волнового поля (см. гл. 1 и 3)

$$\Psi_0 \left( \frac{1}{c} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\sigma, \alpha, \beta)} \right| \right)^{-1/2} \exp(i\omega\Phi), \quad (4.13)$$

где  $\psi_0$  — функция, зависящая только от луча,  $c$  — скорость распространения,  $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\sigma, \alpha, \beta)} \right|$  — модуль якобиана перехода от декартовых координат  $x, y, z$  к лучевым  $\sigma, \alpha, \beta$  ( $\sigma$  — длина луча, отсчитываемая от некоторой точки,  $\alpha, \beta$  — параметры, фиксирующие луч),  $\Phi$  — решение уравнения эйконала.

Эйконал, соответствующий замыкающейся конгруэнции лучей (4.6), как функция точки на  $T_e$  находится интегрированием дифференциальной формы (4.12) и полного дифференциала  $d\Omega$  (см. формулу (4.3)).

Обратимся к предэкспоненциальному множителю в формуле (4.13), называемому обычно лучевой амплитудой. Замыкающаяся конгруэнция лучей (4.6) в координатах  $s, q_1, q_2$  описывается функциями

$$q_i = q_i(s, h_1^0, h_2^0; \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad i = 1, 2, \quad (4.14)$$

явный вид которых нетрудно получить, используя формулу замены переменных (4.2) и равенства (4.5), (4.6). Фиксируя  $h_1^0, h_2^0$  и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  в формулах (4.14), получаем уравнение луча  $q_i = q_i(s), i = 1, 2$ , принадлежащего замыкающейся конгруэнции лучей (4.6) с данными значениями параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Параметрами, фиксирующими луч, являются в данном случае  $h_1^0$  и  $h_2^0$ . Учитывая, что

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\sigma, h_1^0, h_2^0)} = \frac{D(x, y, z)}{D(s, q_1, q_2)} \frac{D(s, q_1, q_2)}{D(\sigma, h_1^0, h_2^0)},$$

лучевая амплитуда, соответствующая полю лучей, заданному функциями (4.14), в  $k$ -м плече резонатора может быть представлена в виде

$$u_0^{(k)} = \psi_0(h_1^0, h_2^0) \left( \frac{G}{c} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \left| \frac{D(q_1^{(k)}, q_2^{(k)})}{D(h_1^0, h_2^0)} \right| \right)^{-1/2}, \quad (4.15)$$

где  $G$  — коэффициент Ламе используемой системы координат (2.6),  $\sigma$  — длина луча, так что

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma} = \left[ G^2 + \left( \frac{dq_1}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dq_2}{ds} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

На зеркалах лучи (4.14) удовлетворяют приближенно условиям отражения, поэтому в этом же приближении функция  $\frac{G}{c} \frac{\partial s}{\partial \sigma}$  меняется непрерывно при переходе от одного плеча резонатора к другому. Определитель  $\frac{D(q_1, q_2)}{D(h_1^0, h_2^0)}$  зависит от ориентации системы координат и при переходе в  $k$ -м плече резонатора от координат  $q_1^{(k)}, q_2^{(k)}$  к  $\tilde{q}_1^{(k)}, \tilde{q}_2^{(k)}$  меняет знак, так как умножается на  $\det \omega_k$  (см. равенство (2.27)). Выберем постоянные  $C_k$  так, чтобы функции

$$f_k(s, h_1, h_2) = C_k \frac{D(q_1^{(k)}, q_2^{(k)})}{D(h_1^0, h_2^0)} \quad (4.16)$$

при

$$s_{k-1} \leq s \leq s_k, \quad k = 1, 2, \dots, N+1,$$

были непрерывны в вершинах многоугольника  $l_N$ . Для этого достаточно, в силу явного выражения для матриц отражения (2.25), чтобы

$$C_{k+1} = C_k (\det \omega_k)^{-1}, \quad (4.17)$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad C_1 = 1.$$

При этом функция  $f(s, h_1, h_2)$ , равная  $f(s, h_1, h_2) = f_k(s, h_1, h_2)$  при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k, k = 1, 2, \dots, N, N+1$ , будет непрерывной функцией точки на  $T_e$ . Подставляя в формулы (4.16) явный

вид функции (4.14), получаем следующее выражение для

$f(s, h_1, h_2)$ :

$$f(s, h_1, h_2) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \{ |b(s)| \cos [h_1 - h_2 - \mu_1 s + \mu_2 s + \arg b(s)] - \\ - |a(s)| \cos [h_1 + h_2 - \mu_1 s - \mu_2 s + \arg a(s)] \}, \quad (4.18)$$

$$h_\alpha = h_\alpha^0 + \mu_\alpha s, \quad \alpha = 1, 2,$$

где через  $a(s)$  и  $b(s)$  обозначены комплекснозначные функции

$$a(s) = C_k \det \| q^{(1)}, q^{(2)} \|, \quad b(s) = C_k \det \| q^{(1)}, q^{(4)} \| \quad (4.19)$$

при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N, N+1$ . В формулах (4.19) вектор  $q^{(i)}$  является компонентой решения Флоке  $\mathcal{X}^{(i)} = (q, p)$  с номером  $i$  ( $i = 1, 2, 4$ ).

Из равенств (3.4) и (3.5) следует, что  $a(s)$  не обращается в нуль (см. конец § 2 гл. 8), поэтому  $\arg a(s)$  является непрерывной функцией  $s$  на оси резонатора. Сложнее обстоит дело с функцией  $b(s)$ . Она может, вообще говоря, обращаться в нуль, при этом  $\arg b(s)$  терпит разрыв в нулях функции  $b(s)$ . Формула (4.18), очевидно, имеет смысл и в этих случаях. В дальнейших построениях мы будем считать, что  $b(s)$  не обращается в нуль на оси резонатора, т. е. при  $0 \leq s \leq s_N$ .

Из формулы (4.15) следует, что каустика на  $T_e$  определяется уравнением

$$f(s, h_1, h_2) = 0. \quad (4.20)$$

Перейдем к выводу формул для собственных частот резонатора.

В случае (I) краевой задачи (1.2), (1.3) условия квантования, представляющие систему трех уравнений относительно  $\omega$  и двух параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , имеют вид (см. гл. 3)

$$\omega \oint_{l_j} d\tau = 2\pi m_j + \pi m'_j + \frac{\pi}{2} m''_j, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.21)$$

где  $d\tau$  — дифференциальная форма (4.12),  $m_j$  — произвольное целое число,  $m'_j$  и  $m''_j$  — соответственно отражательный и каустический индексы, т. е. индексы пересечения ориентированных базисных контуров  $l_j$  соответственно с поверхностями зеркал и каустики. В качестве двух базисных контуров  $l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , возьмем окружности (4.9) в плоскости  $s = \text{const}$ , их ориентация определяется из условия  $\oint_{l_\alpha} d\tau > 0$ . Для этих базисных контуров, очевидно,  $m'_\alpha = 0$  и  $m''_\alpha = 2$ , причем послед-

нее равенство может быть непосредственно получено из уравнения каустики (4.20) на  $T_\epsilon$ : при фиксированном  $s$  и каждом фиксированном значении  $h_\alpha$ , уравнение (4.20) имеет два вещественных корня  $h_\alpha^{(i)}$ ,  $\alpha \neq \alpha'$ ,  $i = 1, 2$ ; при этом  $h_\alpha^{(2)} - h_\alpha^{(1)} = \pi$ . Из формул (4.21), (4.12) для  $l_\alpha$  следует

$$\omega \epsilon_\alpha^2 = m_\alpha + \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.22)$$

Третий базисный контур  $l_0$  фиксируем условиями  $h_\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $0 \leq s \leq s_N$ . Для  $l_0$ , очевидно,  $m_0'' = N$ , однако определить каустический индекс  $m_0''$  оказывается весьма не просто: нужно найти число корней уравнения (4.20), в левой части которого положено  $h_\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , при изменении  $s$  в промежутке  $[0, s_N]$ . Как видно из формулы (4.18), число таких корней зависит от имеющегося произвола в выборе показателей Флоке  $\varphi_1, \varphi_2$  и соответственно чисел  $\mu_1, \mu_2$  \*). Описанную трудность можно преодолеть следующим образом. Возьмем на инвариантном многообразии  $T_\epsilon$  кривую  $\lambda$ , определяемую уравнениями \*\*)

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 - \mu_1 s + \mu_2 s + \arg b(s) &= \pi/2, \\ h_1 + h_2 - \mu_1 s - \mu_2 s + \arg a(s) &= \pi. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Из формулы (4.18) следует, что на этой кривой  $f(s, h_1, h_2)|_\lambda = 2\epsilon_1 \epsilon_2 |a(s)| > 0$ , т. е. она не пересекает каустику и  $m_\lambda'' = 0$ . На кривой  $\lambda$  приращения  $\Delta h_\alpha = h_\alpha(s_N) - h_\alpha(0)$  в силу системы уравнений (4.23) определяются формулами

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &= \mu_1 s_N - \frac{1}{2} [\Delta \arg a(s) + \Delta \arg b(s)], \\ \Delta h_2 &= \mu_2 s_N - \frac{1}{2} [\Delta \arg a(s) - \Delta \arg b(s)], \end{aligned} \quad (4.24)$$

где через  $\Delta \arg a(s)$  обозначено приращение непрерывной функции  $\arg a(s)$  при изменении  $s$  от 0 до  $s_N$ . Из равенств (4.24) следует, что кривая  $\lambda$ , вообще говоря, не является замкнутой, навивается на базисные контуры  $l_1, l_2$  и поэтому не гомотопна

\*) Напомним, что показатели Флоке определяются формулой (2.35) с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ .

\*\*\*) Можно считать, что параметры  $h_1, h_2$ , определяемые формулой (4.11), изменяются в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом одной точке на многообразии  $T_\epsilon$  отвечают все значения  $h_1, h_2$ , отличающиеся на целое кратное  $2\pi$ . Такое расширение области значения параметров  $h_1, h_2$  означает, что вместо многообразия  $T_\epsilon$  рассматривается пространство, накрывающее это многообразие. Строго говоря, уравнения (4.23) определяют кривую на этом накрывающем пространстве.



базисному контуру  $l_0$ . Число обходов окружности  $l_\alpha$ , сделанных кривой  $\lambda$ , равно целой части отношения  $\Delta h_\alpha / 2\pi$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Рассмотрим кривую  $\tilde{\lambda}$  в сечении  $T_e$  плоскостью  $s = s_N$ , соединяющую точки  $h_\alpha(s_N)$  и  $h_\alpha(0)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и делающую столько оборотов, сколько кривая  $\lambda$  делает оборотов на окружностях  $l_1$  и  $l_2$ , причем направление обхода кривой  $\tilde{\lambda}$  противоположно направлению обхода кривой  $\lambda$ . Для кривой  $\tilde{\lambda}$ , очевидно,  $m'_\lambda = 0$  и

$$m''_\lambda = - \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \frac{\Delta h_\alpha}{\pi} \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\Delta h_\alpha}{\pi}, \quad (4.25)$$

где символ  $[ \quad ]$  означает целую часть.

Равенство (4.25) следует из того, что каждую окружность  $l_\alpha$  каустика (4.20) пересекает ровно в двух точках, отстоящих друг от друга на  $\pi$ .

Кривая  $\lambda + \tilde{\lambda}$ , таким образом, является замкнутой кривой на  $T_e$ , гомотопной базисному контуру  $l_0$ . Третье условие квантования принимает вид

$$\omega \oint_{l_0} d\tau = \omega \oint_{\lambda + \tilde{\lambda}} d\tau = 2\pi m_0 + \pi N + \frac{\pi}{2} m''_\lambda. \quad (4.26)$$

Из равенств (4.12), (4.22), (4.24)–(4.26) получаем следующую формулу для собственных частот  $\omega_m$  многозеркального резонатора при краевом условии (I) (см. формулы 1.3) на поверхности зеркала:

$$\omega_m \int_0^{s_N} c^{-1}(s, 0) ds = 2\pi \left( m_0 + \frac{N}{2} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_\alpha m_\alpha + \frac{1}{2} \Delta \arg a(s), \quad (4.27)$$

где целое  $m_0 \gg 1$ ,  $m_\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  — показатели Флоке (2.36).

Из равенств (4.17), (4.19) следует, что сумму показателей Флоке всегда можно доопределить так, чтобы

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi N + \Delta \arg a(s). \quad (4.28)$$

В этом случае формула (4.27) запишется в виде

$$\omega_m \int_0^{s_N} c^{-1}(s, 0) ds = 2\pi \left( m_0 + \frac{N}{4} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha, \quad (4.29)$$

где  $m_0$  отличается от соответствующего числа в (4.27) на целое число, что, однако, несущественно. Заметим, что для четного числа зеркал  $N$  сумму показателей Флоке можно было доопределить так, чтобы  $\varphi_1 + \varphi_2 = \Delta \arg a(s)$ .

В случае краевого условия (II) на поверхности зеркал в условиях квантования (4.21) отсутствует слагаемое  $\pi m'_j$ , поэтому собственные частоты описываются формулой

$$\omega_m \int_0^s c^{-1}(s, 0) ds = 2\pi \left( m_0 - \frac{N}{4} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha. \quad (4.30)$$

Напомним, что формулы (4.29), (4.30) получены на основе лиnearизованной гамильтоновой системы уравнений (2.16). Используя решения системы (2.16) в качестве первого приближения, можно по стандартной схеме теории возмущения последовательно учитывать следующие члены в разложении (2.11) функции Гамильтона, если  $\varphi_\alpha$  и  $2\pi$  линейно независимы над кольцом целых чисел (ср. результаты § 8 гл. 8). Эта процедура осуществляется путем построения формальных рядов, так называемых *рядов Биркгофа* \*).

## § 5. Постановка задачи для параболического уравнения

На основании задачи (1.2), (1.3), считая  $\omega \rightarrow \infty$ , сформулируем задачу для параболического уравнения, точное решение которой будет получено ниже.

Оператор Гельмгольца в координатах  $s, q_1, q_2$ , заданных формулой (2.2), можно, учитывая равенства (2.6), записать в виде

$$\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( G \frac{\partial}{\partial q_i} \right) + \frac{\omega^2 G}{c^2(s, q)} \right\}.$$

В соответствии с методом параболического уравнения (см. гл. 5) перейдем от координат  $q_i$  к координатам  $x_i$  по формулам

$$x_i = \sqrt{\omega} q_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.1)$$

\* ) Используя ряды Биркгофа (см. Дж. Биркгоф [1], В. И. Арнольд [3]), можно строить следующие приближения для собственных частот  $\omega_m$ . Однако сопоставление результатов В. П. Быкова [3], использовавшего один из вариантов этого метода, с результатами В. Ф. Лазуткина [4], применявшего метод эталонных задач, показывает, что для справедливости полученных на этом пути поправок следует считать большими параметрами все три числа  $m_0, m_1, m_2$ , а не только число  $m_0$ .

а вместо  $u$  введем функцию  $U$ :

$$u = \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} U(s, x_1, x_2; \omega) \exp \left\{ i\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\}. \quad (5.2)$$

Будем предполагать, что координаты  $x_1, x_2$  и функция  $U$  вместе со всеми своими частными производными по  $s, x_i$  порядка единицы при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Подставив (5.1) и (5.2) в уравнение Гельмгольца, разложив левую часть по степеням  $\omega$  и разделив обе части равенства на  $\omega$ , после несложных вычислений получаем

$$\mathcal{L}U + O(\omega^{-1/2}) = 0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$\mathcal{L} = \frac{2i}{c(s, 0)} \frac{\partial}{\partial s} + \nabla^2 - \frac{1}{c^2(s, 0)} (\Psi_x, x), \quad (5.3)$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad x = (x_1, x_2)$$

и  $\Psi(s)$  — вещественная симметричная матрица, определенная равенством (2.14).

В этом и двух следующих параграфах мы будем интересоваться только главным членом собственной функции  $u$ . Для построения этой функции удобно ввести вместо функции  $U$  другую функцию  $V$ , в отличие от  $U$  точно удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{L}V = 0. \quad (5.4)$$

В силу того, что

$$\mathcal{L}(U - V) = O(\omega^{-1/2}),$$

естественно ожидать, что  $U - V = O(\omega^{-1/2})$ . Это найдет себе подтверждение в вычислениях § 8.

Будем рассматривать для определенности только краевое условие  $u|_S = 0$ . Чтобы удовлетворить этому условию, построим волны, отраженные от зеркал. Все построения будем вести в первом приближении.

Пусть волна, рассматриваемая с точностью до главных членов, сосредоточенная в окрестности  $k$ -го плеча резонатора и падающая на зеркало  $S_k$ , имеет вид

$$v^{(k)} = \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} V^{(k)}(s, \tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}; \omega) \exp \left\{ i\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\}, \quad (5.5)$$

$$(s_{k-1} \leq s \leq s_k),$$

где

$$\bar{x}_i^{(k)} = \sqrt{\omega} \bar{q}_i^{(k)} \quad (i = 1, 2).$$

Волну  $V^{k+1}$ , отраженную от поверхности зеркала  $S_k$  и распространяющуюся в  $(k+1)$ -м плече резонатора, будем искать в том же виде, что и (5.5), но считаем заданной в координатах  $x_i^{(k+1)} = \sqrt{\omega} q_i^{(k+1)}$ . В случае краевого условия  $u|_S = 0$  получаем следующее равенство, связывающее падающую и отраженную волны:

$$u^{(k)}|_{S_k} + u^{(k+1)}|_{S_k} = 0, \quad (5.6)$$

где  $u^{(h)}$  (соответственно  $u^{(h+1)}$ ) — волна, сосредоточенная в окрестности  $k$ -го (соответственно  $k+1$ -го) плеча резонатора. Выражая (с точностью до главных членов)  $u^{(h)}$  и  $u^{(h+1)}$  через  $V^{(h)}$  и  $V^{(h+1)}$  (см. формулу (5.5)), мы после некоторых выкладок получим из равенства (5.6) краевые условия, связывающие  $V^{(h)}$  и  $V^{(h+1)}$ . Перейдем к выводу этих краевых условий.

Обозначая  $z_{jk} = \sqrt{\omega} \zeta_{jk}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и используя формулы преобразования координат (2.18) и (2.19), запишем  $u^{(h)}$  и  $u^{(h+1)}$  в координатах  $z_{jh}$ . Учитывая формулы (2.20), (2.21) и тот факт, что на поверхности зеркала  $S_k$  координаты  $\zeta_{jh}$  связаны соотношением (1.1),  $z_{1k}, z_{2k} = O(1)$ ,  $z_{3k} = O(\omega^{-1/2})$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , разложим левую часть равенства (5.6) по степеням  $\omega$ . Так, например, если точка  $(s, z_{1k}, z_{2k})$  лежит на поверхности зеркала  $S_k$ , имеем

$$\omega \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \Big|_{S_k} = \omega \int_0^{s_k} \frac{ds}{c(s, 0)} + \sqrt{\omega} z_{1k} \frac{\sin \delta_k}{c(s_k, 0)} - (D^{(k)} z_k, z_k) \frac{\cos \delta_k}{c(s_k, 0)} + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{ds} c^{-1}(s, 0) \right]_{s=s_k} z_{1k}^2 \sin^2 \delta_k + O(\omega^{-1/2}),$$

где  $z_k = (z_{1k}, z_{2k})$ , а симметричная матрица  $D^{(k)}$  определяется уравнением (1.1) поверхности зеркала в координатах  $\zeta_{jh}$ . Кроме того,

$$U^{(k)}(s, \bar{x}_1^{(k)}, \bar{x}_2^{(k)}, \omega) \Big|_{S_k} = U^{(k)}(s_k, -z_{1k} \cos \delta_k, z_{2k}) + O(\omega^{-1/2}),$$

здесь  $U^{(h)}$  — функция  $U$  (см. формулу (5.2)) в окрестности  $k$ -го плеча резонатора. Подставляя все эти равенства в формулу (5.6) и выражая  $u^{(h)}$ ,  $u^{(h+1)}$  с точностью до главных членов через  $V^{(h)}$  и  $V^{(h+1)}$ , получим искомые краевые условия для  $V^{(h)}$  и  $V^{(h+1)}$ . Для нахождения  $V$  получается, таким образом, сле-

дующая краевая задача:

$$\mathcal{L}V = 0, \quad (5.7)$$

$$(V = V^{(k)}, \mathcal{L} = \mathcal{L}_k \text{ при } s_{k-1} \leq s \leq s_k, k = 1, 2, \dots, N, N+1, \\ \mathcal{L}_{N+1} \equiv \mathcal{L}_1),$$

$$V^{(k)}(s_k, -z_{1k} \cos \delta_k, z_{2k}) \exp \left[ -i \frac{\cos \delta_k}{c(s_k, 0)} (D^k z_k, z_k) \right] + \\ + V^{(k+1)}(s_k, z_{1k} \cos \delta_k, -z_{2k}) \exp \left[ i \frac{\cos \delta_k}{c(s_k, 0)} (D^{(k)} z_k, z_k) \right] = 0. \quad (5.8)$$

Нас будут интересовать решения уравнения (5.7), сосредоточенные в окрестности оси резонатора, т. е. такие, что

$$|V| \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Наложим еще одно важное ограничение на искомое решение. Собственные колебания должны быть однозначны в окрестности оси резонатора. Для того чтобы удовлетворить этому требованию, достаточно потребовать, чтобы после отражения от  $N$ -го зеркала соответствующая волна совпала бы с волной в окрестности 1-го плеча резонатора, т. е. чтобы имело место равенство

$$v^{(N+1)} \equiv v^{(1)}.$$

Этому условию можно удовлетворить следующим образом: пусть нам удалось построить функцию  $V$ , удовлетворяющую уравнению (5.7) и условиям (5.8) и (5.9), которая после прохождения резонатора получает множитель, равный по модулю единице, т. е.

$$V(s + s_N, x) = e^{i\kappa} V(s, x) \quad (V \neq 0, \text{Im } \kappa = 0). \quad (5.10)$$

Такая функция является аналогом решения Флоке для уравнения (5.7) с частными производными.

Если  $V$  — решение Флоке задачи (5.7) — (5.9), удовлетворяющее условию (5.10), то для однозначности функции  $v$  в окрестности оси резонатора необходимо и достаточно, чтобы частота  $\omega$  удовлетворяла уравнению

$$\omega \int_0^{s_N} \frac{ds}{c(s, 0)} = 2\pi m_0 - \kappa \quad (m_0 - \text{целое}). \quad (5.11)$$

Поскольку  $\omega$  — большое число, в формуле (5.11)  $m_0 \gg 1$ .

Мы решим задачу (5.7) — (5.10) в некотором смысле в явном виде, точнее, выразим как функцию  $V$ , так и показатель Флоке  $\kappa$  через решение Флоке и соответствующие показатели Флоке  $\varphi_\alpha$  гамильтоновой системы, рассмотренной в §§ 2 и 3.

### § 6. Интегрирование уравнения $\mathcal{L}V = 0$

Параболическое уравнение  $\mathcal{L}V = 0$ , где оператор  $\mathcal{L}$  определяется формулой (5.3), немногим отличается от рассмотренного в главе 8 уравнения (1.13). Это позволяет применить методику главы 8 для решения задач (5.7) — (5.10), что и будет сделано в этом параграфе. Все дальнейшие построения в равной степени относятся к каждому плечу резонатора, поэтому индекс  $k$ , нумерующий сторону  $l_N$ , опускаем.

Возьмем два решения Флоке  $\chi^{(\alpha)}(s) = (q^{(\alpha)}(s), p^{(\alpha)}(s))$ ,  $\alpha = 1, 2$ , построенные в § 2 этой главы. Образует из их компонент следующие две матрицы второго порядка, столбцы которых составлены из компонент векторов  $q^{(\alpha)}(s)$  и  $p^{(\alpha)}(s)$ :

$$\hat{Q}(s) = \|q^{(1)}(s), q^{(2)}(s)\|, \quad \hat{P}(s) = \|p^{(1)}(s), p^{(2)}(s)\|. \quad (6.1)$$

Поскольку  $\chi^{(\alpha)}(s)$  являются решениями канонической системы (2.16), матрицы  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{ds} \hat{Q} = c(s, 0) \hat{P}, \quad \frac{d}{ds} \hat{P} = -\frac{1}{c(s, 0)} \Psi \hat{Q}. \quad (6.2)$$

Из равенств (3.4) и (3.5), которым удовлетворяют решения Флоке, вытекает, что при всех  $s$   $\det \hat{Q}(s) \neq 0$  (доказательство см. в § 2 гл. 8) и тождественно по  $s$  выполняется равенство

$$\hat{Q}^* \hat{P} - \hat{P}^* \hat{Q} = iI, \quad (6.3)$$

где  $\hat{P}^*$ ,  $\hat{Q}^*$  — матрицы, эрмитовски сопряженные матрицам  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$ , а через  $I$  обозначена единичная матрица второго порядка. Кроме того, из равенств (3.5) следует

$$\hat{Q}^T \hat{P} - \hat{P}^T \hat{Q} = 0, \quad (6.4)$$

где  $\hat{Q}^T$ ,  $\hat{P}^T$  — матрицы, транспонированные по отношению к  $\hat{Q}$ ,  $\hat{P}$ . Положим далее

$$\Gamma(s) = \hat{P}(s) \hat{Q}^{-1}(s). \quad (6.5)$$

С помощью простых вычислений, используя уравнения (6.2), также как и в § 1 главы 8, нетрудно убедиться, что функция

$$V(s, x_1, x_2) = \frac{\text{const}}{\sqrt{\det \hat{Q}(s)}} e^{\frac{i}{2} (\Gamma x, x)} \quad (6.6)$$

удовлетворяет параболическому уравнению  $\mathcal{L}V = 0$ . Матрица  $\Gamma(s)$  в силу равенств (6.4), (6.5) оказывается симметричной  $\Gamma^T = \Gamma$ , а из формулы (6.3) следует, что

$$\text{Im} \Gamma(s) = \frac{\Gamma - \Gamma^*}{2i} = \frac{1}{2} (\hat{Q} \hat{Q}^*)^{-1}. \quad (6.7)$$

Так как матрица, стоящая в правой части (6.7), является положительно определенной, функция  $V(s, x_1, x_2)$ , определяемая формулой (6.6), удовлетворяет условию сосредоточенности в окрестности оси резонатора (5.9).

Располагая решением уравнения  $\mathcal{L}V = 0$  в виде (6.6), можно построить и другие решения этого уравнения, удовлетворяющие условию (5.9). Используя построенные в § 1 решения Флоке  $\chi^{(j)}(s) = (q^{(j)}(s), p^{(j)}(s))$ , образуем четыре оператора  $\Lambda_\alpha$  и  $\Lambda_\alpha^*$  по следующим формулам:

$$\Lambda_\alpha = \frac{1}{i} (q^{(\alpha)}(s), \nabla) - (p^{(\alpha)}(s), x), \quad (6.8)$$

$$\Lambda_\alpha^* = \frac{1}{i} (q^{(2+\alpha)}(s), \nabla) - (p^{(2+\alpha)}(s), x) \quad (\alpha = 1, 2),$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  и  $x = (x_1, x_2)$ . Нетрудно установить непосредственной проверкой, что операторы  $\Lambda_\alpha$  и  $\Lambda_\alpha^*$  коммутируют с оператором  $\mathcal{L}$  (5.3), и поэтому при любом целом  $n > 0$  функции  $\Lambda_\alpha^n V$ ,  $\Lambda_\alpha^{*n} V$  удовлетворяют уравнению (5.7), если функция  $V$  удовлетворяет ему.

В силу свойств (3.4), (3.5) решений Флоке, определенные формулой (6.8) операторы  $\Lambda_\alpha$ ,  $\Lambda_\alpha^*$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Lambda_\alpha \Lambda_\beta - \Lambda_\beta \Lambda_\alpha = 0, \quad (6.9)$$

$$\Lambda_\alpha^* \Lambda_\beta^* - \Lambda_\beta^* \Lambda_\alpha^* = 0,$$

$$\Lambda_\alpha \Lambda_\beta^* - \Lambda_\beta^* \Lambda_\alpha = \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.10)$$

где  $\alpha, \beta = 1, 2$  и  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера. Непосредственными вычислениями можно проверить, что

$$\Lambda_\alpha V_{00}(s, x_1, x_2) = 0 \quad \Lambda_\alpha^* V_{00}(s, x_1, x_2) \neq 0, \quad (6.11)$$

где функция  $V_{00} \equiv V$  определяется формулой (6.6) и, следовательно,  $\Lambda_1, \Lambda_2$  можно назвать *операторами уничтожения*, а  $\Lambda_1^*, \Lambda_2^*$  — *операторами рождения*.

Таким образом, с помощью операторов  $\Lambda_1^*$  и  $\Lambda_2^*$  можно построить решения уравнения  $\mathcal{L}V = 0$ , удовлетворяющие условию сосредоточенности (5.9) и имеющие вид

$$V_{m_1 m_2}(s, x_1, x_2) = \Lambda_1^{*m_1} \Lambda_2^{*m_2} V_{00}(s, x_1, x_2) = \\ = V_{00}(s, x_1, x_2) \Phi_{m_1 m_2}(s, x_1, x_2), \quad (6.12)$$

где  $m_1, m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\Phi_{m_1 m_2}(s, x_1, x_2)$  — полином по  $x_1, x_2$  степени  $m_1 + m_2$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ .

### § 7. Собственные функции и собственные частоты многозеркального резонатора в первом приближении

В § 6 в каждом плече резонатора были построены решения уравнения (5.7), удовлетворяющие условию сосредоточенности в окрестности оси резонатора (5.9). Для того чтобы построить (в первом приближении) собственные функции и собственные частоты многозеркального резонатора, следует завершить решение задачи (5.7) — (5.10), что и будет здесь сделано. Так же как и в главе 8, построим сначала некоторое специальное решение задачи (5.7) — (5.10), которое будем называть *основной гармоникой*. Другие решения этой задачи — *высшие гармоники* — мы получим, применяя к основной гармонике операторы  $\Lambda_j^*$ ,  $j=1, 2$  (см. § 3 гл. 8).

Возьмем в  $k$ -м плече резонатора решение, записанное в координатах  $q_1^{(k)}, q_2^{(k)}$  в виде

$$V_{00}^{(k)}(s, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = M_k a_k^{-\frac{1}{2}}(s) e^{\frac{i}{2}(\Gamma_k x^{(k)}, x^{(k)})}, \quad (7.1)$$

где  $M_k = \text{const}$ ,

$$a_k(s) = C_k \det \hat{Q}_k(s), \quad (7.2)$$

$C_k$  — некоторая постоянная, а  $\hat{Q}_k(s)$  — значение матрицы  $\hat{Q}(s)$  в  $k$ -м плече резонатора. Подставим функции вида (7.1) в условие (5.8), предварительно перейдя в функции  $V_{00}^{(k)}$  от системы координат  $q_1^{(k)}, q_2^{(k)}$  к  $\tilde{q}_1^{(k)}, \tilde{q}_2^{(k)}$  (см. рис. 37). Эти системы координат связаны линейным преобразованием (2.27) с ортогональной матрицей  $w_h$ , поэтому квадратичная форма в формуле (7.1) не меняется при таком преобразовании координат, а функция  $\det \hat{Q}_h(s)$  меняет знак, так как умножается на  $\det w_h$ . В результате подстановки получаем

$$\tilde{\Gamma}_k(s_k) - \Gamma_{k+1}(s_k) = \tilde{D}^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (7.3)$$

где матрица  $\tilde{D}^{(k)}$  определяется формулой (2.26), и второе условие

$$M_{k+1} \tilde{a}_{k+1}^{-1/2}(s_k) = -M_k \tilde{a}_k^{-1/2}(s_k), \quad (7.4)$$

где через  $\tilde{\Gamma}_h, \tilde{a}_h$  обозначены  $\Gamma_h, a_h$  в координатах  $\tilde{q}_1^{(k)}, \tilde{q}_2^{(k)}$ . Можно убедиться, что соотношение (7.3) для матриц  $\tilde{\Gamma}_h$  выполняется автоматически в силу условий отражения (2.24), которым удовлетворяют построенные в § 2 решения Флоке. Это следует из явного вида матриц отражения  $\gamma_h$  и формулы (6.5), определяющей матрицу  $\Gamma(s)$  через матрицы  $\hat{P}(s)$  и  $\hat{Q}(s)$ , составленные из решений Флоке.



Обратимся к равенству (7.4). Выберем в формуле (7.2) постоянные  $C_k$  так, чтобы функция  $a(s) = a_h(s)$  при  $s_{h-1} \leq s \leq s_h$ ,  $k = 1, 2, \dots, N, N+1$ , была непрерывной на оси резонатора. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы

$$C_{k+1} = C_k (\det \omega_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad C_1 = 1. \quad (7.5)$$

Ветвь корня  $\sqrt{a(s)}$  будем выбирать так, чтобы эта функция тоже была непрерывной на оси резонатора. Формула (7.4) тогда сильно упростится и примет вид

$$M_{k+1} = -M_k = e^{-\pi i} M_k,$$

откуда

$$M_{N+1} = e^{-i\pi N} M_1; \quad (7.6)$$

при этом константа  $M_1$  остается произвольной.

Как отмечалось в § 6, функция  $\det \hat{Q}(s)$  ни при каком  $s$  не обращается в нуль, поэтому и комплекснозначная функция  $a(s)$  не обращается в нуль, а следовательно  $\arg a(s)$  является непрерывной функцией  $s$  на оси резонатора и приращение  $\Delta \arg a = \arg a(s + s_N) - \arg a(s)$  определяется однозначно. Из формулы (7.5) следует равенство

$$C_{N+1} = \prod_{k=1}^N (\det \omega_k)^{-1} = (-1)^N. \quad (7.7)$$

Принимая во внимание свойства решений Флоке и формулы (7.2), (7.7), находим, что модуль функции  $a(s)$  не получает приращения и

$$\Delta \arg a = \varphi_1 + \varphi_2 - \pi N. \quad (7.8)$$

Этой формулой сумма показателей Флоке  $\varphi_1 + \varphi_2$  доопределяется однозначно. Заметим, что в случае четного числа зеркал показатели Флоке можно доопределить так, чтобы  $\varphi_1 + \varphi_2 = \Delta \arg a$ .

Из формул (7.1), (7.6) и (7.8) и равенства  $\Gamma_{N+1}(s) = \Gamma_1(s)$  следует, что функция  $V_{00} = V_{00}^{(k)}$  при  $s_{h-1} \leq s \leq s_h$  действительно решает задачу (5.7) — (5.10), причем показатель Флоке  $\kappa$  (см. формулу (5.10)) равен

$$\kappa = -\frac{1}{2}(\pi N + \varphi_1 + \varphi_2).$$

Формула (5.11) теперь дает

$$\omega_{m_0, 0} \int_0^{s_N} c^{-1}(s, 0) ds = 2\pi \left( m_0 + \frac{N}{4} \right) + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (7.9)$$

где целое число  $m_0 \gg 1$ .

Перейдем теперь к построению высших гармоник (поперечных мод резонатора). В этом случае в каждом плече резонатора берем решение уравнения (5.7) в виде

$$V_{m_1 m_2}^{(k)} = \Lambda_1^{*m_1} \Lambda_2^{*m_2} V_{00}^{(k)} = V_{00}^{(k)} \Phi_{m_1 m_2}^{(k)}(s, x^{(k)}),$$

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}). \quad (7.10)$$

Здесь  $V_{00}^{(k)}$  имеет вид (7.1), однако частота, входящая в выражение для  $x^{(k)}$  (см. формулу (5.1)), будет определяться не формулой (7.9), а полученной далее формулой (7.14). Функции  $\Phi_{m_1 m_2}^{(k)}$ , входящие в правую часть равенства (7.10), являются полиномами по  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$  степени  $m_1 + m_2$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ .

Заметим, что при переходе от координат  $q_1^{(k)}$ ,  $q_2^{(k)}$  к координатам  $\tilde{q}_1^{(k)}$ ,  $\tilde{q}_2^{(k)}$  значения полиномов  $\Phi_{m_1 m_2}^{(k)}(s, x^{(k)})$  остаются неизменными. Это следует из того, что при линейном преобразовании (2.27) с ортогональной матрицей  $\omega_k$  операторы  $\Lambda$  и квадратичная форма  $(\Gamma_k x^{(k)}, x^{(k)})$  не меняются. В связи с этим можно считать, что полиномы  $\Phi_{m_1 m_2}^{(k)}$  в (7.10) заданы в координатах  $\tilde{q}_1^{(k)}$ ,  $\tilde{q}_2^{(k)}$ , а знак « $\sim$ », отмечающий этот факт, опустить в последующих выкладках.

Напомним, что на зеркалах функции (7.10) должны удовлетворять условиям отражения (5.8). Так как функции  $V_{00}^{(k)}$  удовлетворяют этим условиям, остается проверить, что тождественно по  $z_{1k}$  и  $z_{2k}$  выполняется

$$\Phi_{nm}^{(k+1)}(s_k, z_{1k} \cos \delta_k, -z_{2k}) = \Phi_{nm}^{(k)}(s_k, -z_{1k} \cos \delta_k, z_{2k}). \quad (7.11)$$

Как и равенство (7.3) в случае основной гармоники, тождество (7.11) выполняется автоматически при каждом  $k = 1, 2, \dots, N$  в силу условий отражения (2.24), которым удовлетворяют решения Флоке  $\chi^{(3)}(s)$  и  $\chi^{(4)}(s)$ , входящие в выражение для операторов  $\Lambda^*$  (6.8). Это проверяется по индукции. Пусть  $\Lambda^{(k)} = \frac{1}{i}(q^{(k)}, \nabla) - (p^{(k)}, x^{(k)})$  — любой из операторов  $\Lambda_\alpha^*$ ,  $\alpha = 1, 2$  (см. (6.8)), в  $k$ -м плече резонатора (следовательно,  $q^{(k)}$ ,  $p^{(k)}$  — компоненты одного из четырех решений Флоке \*). Очевидно, что

$$\Lambda^{(k)} V_{00}^{(k)} = V_{00}^{(k)} (\Gamma_k q^{(k)} - p^{(k)}, x^{(k)}) = V_{00}^{(k)} \Phi_1^{(k)}$$

\*) Подчеркнем, что верхний индекс у векторов  $q^{(k)}$ ,  $p^{(k)}$  означает здесь не номер решения Флоке, как в формуле (6.8), а номер плеча резонатора.

(круглые скобки — символ скалярного произведения) и аналогично для  $(k+1)$ -го плеча резонатора. Тождество (7.11) эквивалентно равенству

$$p^{(k)}(s_k) + p^{(k+1)}(s_k) = \Gamma_k q^{(k)}|_{s_k} + \Gamma_{k+1} q^{(k+1)}|_{s_k}, \quad (7.12)$$

справедливость которого легко установить, используя явный вид матриц отражения  $\gamma_k$  (2.24) и формулу (6.5). Далее в соответствии с методом индукции предположим, что тождество (7.11) выполняется для полиномов  $\Phi_{m_1 m_2}^{(k+1)}$  и  $\Phi_{m_1 m_2}^{(k)}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda^{(k)} V_{00}^{(k)} \Phi_{m_1 m_2}^{(k)} &= V_{00}^{(k)} \left\{ \Phi_{m_1 m_2}^{(k)} (\Gamma_k q^{(k)} - p^{(k)}, x^{(k)}) + \frac{1}{i} (q^{(k)}, \nabla) \Phi_{m_1 m_2}^{(k)} \right\} = \\ &= V_{00}^{(k)} \Phi_{m_1+m_2+1}^{(k)} \quad (7.13) \\ (\Phi_{m_1+m_2+1}^{(k)} &= \Phi_{m_1, m_2+1}^{(k)} \quad \text{или} \quad \Phi_{m_1+1, m_2}^{(k)}) \end{aligned}$$

и аналогично в  $(k+1)$ -м плече резонатора. Из формул (7.12) и (7.13) вытекает, что полиномы  $\Phi_{m_1+m_2+1}^{(k)}$  и  $\Phi_{m_1+m_2+1}^{(k+1)}$  удовлетворяют условию (7.11) при всех  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Этим доказано, что тождество (7.11) автоматически выполняется при любой комбинации операторов  $\Lambda^{(h)}$  в выражении (7.10) для функции  $V_{m_1 m_2}^{(k)}$ .

Учитывая явный вид (6.8) операторов  $\Lambda_1^*$  и  $\Lambda_1^*$  и свойства (2.36) решений Флоке гамильтоновой системы (2.16), получим, что функции  $V_{m_1 m_2}$ , определяемые в  $k$ -м плече формулами (7.10), будут решениями Флоке задачи (5.7) — (5.10), причем показатель Флоке

$$\begin{aligned} \kappa &= - \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha - \frac{\pi N}{2}, \quad (7.14) \\ m_\alpha &= 0, 1, 2, \dots \quad (m_\alpha = O(1)). \end{aligned}$$

Для главного члена  $\omega_m$  асимптотики собственных чисел формула (5.11) дает

$$\omega_m \int_0^{s_N} \frac{ds}{c(s, 0)} = 2\pi \left( m_0 + \frac{N}{4} \right) + \left( m_1 + \frac{1}{2} \right) \varphi_1 + \left( m_2 + \frac{1}{2} \right) \varphi_2, \quad (7.15)$$

где  $m = (m_0, m_1, m_2)$ , целое  $m_0 \gg 1$ , а  $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$  ( $m_1, m_2 = O(1)$ ).

Выпишем теперь выражение для функции  $v_m = v_{m_0 m_1 m_2}$  главного члена асимптотики собственной функции задачи (1.2),

(1.3). В  $k$ -м плече резонатора функция  $v_m$  равна

$$\begin{aligned}
 v_m^{(k)} &= M_k \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \Lambda_1^{*m_1} \Lambda_2^{*m_2} \frac{1}{\sqrt{a_k(s)}} \times \\
 &\times \exp \left[ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} + \frac{1}{2} (\Gamma_k x^{(k)}, x^{(k)}) \right] = \\
 &= \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} V_{m, m_2}^{(k)} \exp i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} = M_k \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \frac{1}{\sqrt{a_k(s)}} \times \\
 &\times \exp \left[ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} + \frac{i}{2} (\Gamma_k x^{(k)}, x^{(k)}) \right] \Phi_{m, m_2}(s, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}). \quad (7.16)
 \end{aligned}$$

Отметим, наконец, что полученная формула для собственных частот  $\omega_m$  (7.15) совпадает с формулой (4.29), найденной лучевым методом. Кроме того, нетрудно убедиться, что функции (7.16) обладают свойствами, изложенными в конце § 3 главы 8.

## § 8. Построение высших приближений

В этом параграфе будет описан процесс построения следующих приближений как для собственных частот, так и для собственных функций многозеркального резонатора в предположении, что показатели Флоке и число  $\pi$  линейно независимы над кольцом целых чисел. Другими словами, будем предполагать, что из равенств

$$\pi g_0 + \varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 = 0, \quad (8.1)$$

где  $g_i$  — целые не обязательно положительные числа, следует, что

$$g_0 = g_1 = g_2 = 0.$$

Собственные функции и числа удается при этом построить в виде формальных рядов по собственной частоте первого приближения, т. е. по степеням частоты  $\omega_m$ , определяемой формулой (7.15).

Пусть  $u$  — искомая собственная функция. Будем искать разложение  $u$  в виде

$$u = \sum_{r=0}^{\infty} u_r \omega_m^{-r/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \exp \left\{ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\} U_r \omega_m^{-r/2}, \quad (8.2)$$

где  $U_r^{(k)} = U_r^{(k)}(s, x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ ;  $x_i^{(k)} = \sqrt{\omega_m} q_i^{(k)}$ . (Выражение для  $u$ ,  $u_r$ ,  $U_r$  в окрестности  $k$ -го плеча резонатора, как и прежде, будем снабжать индексом  $k$ .)

Пусть далее

$$u_0^{(k)} = \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \exp \left\{ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\} U_0^{(k)} = v_m^{(k)}, \quad (8.3)$$

здесь  $m = (m_0, m_1, m_2)$ ,  $v_m^{(k)}$  — значение  $v_m$  (собственной функции в первом приближении) в  $k$ -м плече резонатора. Из формулы (7.16) следует, что  $U_0^{(k)} = V_{m, m_2}^{(k)}$  — значение в  $k$ -м плече резонатора решения Флоке  $V_{m, m_2}$ . Соответствующий показатель Флоке равен

$$\kappa_m = - \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha - \frac{1}{2} \pi N \quad (8.4)$$

(см. формулу (7.14)).

Подставим теперь выражение (8.2) в уравнение (1.2), считая, что оператор Гельмгольца записан в координатах  $s, q_1, q_2$  (см. § 5) и что

$$\omega = \omega_m + \frac{\delta_1}{\sqrt{\omega_m}} + \frac{\delta_2}{\omega_m} + \dots \quad (8.5)$$

( $\delta_1, \delta_2, \dots$  — искомые числа).

Приравнявая нулю коэффициент при  $\omega_m^{-r/2+1}$ , после некоторых выкладок придем к уравнениям

$$\sum_{j=0}^r \mathcal{L}^j U_{r-j} = 0, \quad (8.6)$$

где  $\mathcal{L}^j$  — дифференциальные операторы второго порядка, применимые к функциям, определенным в окрестности оси резонатора.

Оператор  $\mathcal{L}^0$  совпадает с параболическим оператором  $\mathcal{L}$  (см. формулу (5.3)). Операторы  $\mathcal{L}^j$  ( $j \geq 1$ ) в  $k$ -м плече резонатора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j U = & R_j^0 \frac{\partial U}{\partial s} + R_{j-2}^{00} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \sum_{\alpha=1}^2 R_{j+1}^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \\ & + \left( R_{j+2} + \frac{\psi_j}{c^2(s, 0)} \right) U; \quad j \geq 1, \quad R_{-1} = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Здесь индексы  $k$  опущены для простоты записи;  $R_j^0, R_{j-2}^{00}, R_{j+1}^\alpha, R_{j+2}$  — полиномы по  $x_1, x_2$  (с коэффициентами, зависящими от  $s$ ), степень которых не больше их нижнего индекса.

Четность полиномов \*)  $R$  совпадает с четностью их нижних индексов. Для чисел  $\psi_j$  имеет место формула

$$\psi_j = \delta_j + \delta_{j-1}\delta_3 + \delta_{j-2}\delta_4 + \dots + \delta_4\delta_{j-2} + \delta_3\delta_{j-1} + \delta_j. \quad (8.8)$$

Будем считать, что  $s$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  (см. § 1). Функции, однозначные в окрестности оси резонатора, можно тогда рассматривать как функции, имеющие период  $s_N$  ( $s_N$  — длина оси резонатора). Операторы  $\mathcal{L}^j$  переводят такие функции также в  $s_N$ -периодические функции.

Имеет место более общий факт. Пусть функция  $T(s, x)$ ,  $-\infty < s < +\infty$ , заданная в окрестности оси резонатора, удовлетворяет условию, аналогичному условию Флоке (5.10),

$$T(s + s_N, x) = e^{ix}T(s, x); \quad (8.9)$$

тогда

$$\mathcal{L}^j T(s + s_N, x) = e^{ix} \mathcal{L}^j T(s, x). \quad (8.10)$$

Доказательства перечисленных свойств операторов  $\mathcal{L}^j$  мы опускаем, чтобы не загромождать изложение громоздкими (и совершенно элементарными) построениями.

Возвращаясь к построению высших приближений  $U_r$ , потребуем, чтобы:

1) на зеркале  $S_k$  выполнялось краевое условие

$$u^{(k)} + u^{(k+1)}|_{S_k} = 0; \quad (8.11)$$

2) после обхода всех плечей резонатора волна переходила в себя, т. е.

$$u^{(N+1)} \equiv u^{(1)}; \quad (8.12)$$

3) каждое приближение было сосредоточено в окрестности оси резонатора.

Выполнение условий 1), 2), 3) в любом приближении по  $\omega_m$  позволяет последовательно найти все функции  $U_r$ , удовлетворяющие уравнениям (8.6), и числа  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$  (см. формулу (8.8)).

Пусть функции  $U_{r'}$  при  $0 \leq r' < r$  найдены в виде конечной линейной комбинации функций  $V_{n_1, n_2}$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ :

$$U_{r'} = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1, n_2}^{r'}(s) V_{n_1, n_2}(s, x), \quad (8.13)$$

\*) Полином  $R(x_1, x_2)$  называется *четным* (соответственно *нечетным*), если  $R(-x_1, -x_2) \equiv R(x_1, x_2)$  (соответственно  $R(-x_1, -x_2) \equiv -R(x_1, x_2)$ ).

где  $V_{n_1 n_2} = \Lambda_1^{*n_1} \Lambda_2^{*n_2} V_{00}$  — решения Флоке задачи (5.7)–(5.10) с показателем Флоке  $\kappa_n$ :

$$\kappa_n = - \sum_{\alpha=1}^2 \left( n_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha - \frac{\pi N}{2}, \quad n = (n_1, n_2). \quad (8.14)$$

(По каким  $n = (n_1, n_2)$  проводится суммирование в формуле (8.13) будет указано дальше.)

Пусть функции  $U_{r'}$ ,  $r' < r$ , удалось найти такими, что:

1) краевое условие (8.11) выполняется с точностью до членов порядка  $\omega_m^{-r'/2}$  ( $r' < r$ ), т. е. на каждом зеркале  $S_k$  выполняются условия

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{r'} \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \exp \left\{ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\} U_h^{(k)} \omega^{-\frac{h}{2}} + \\ & + \sum_{h=0}^{r'} \sqrt{\frac{c(s, 0)}{c(0, 0)}} \exp \left\{ i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right\} \omega^{-\frac{h}{2}} U_h^{(k+1)} = O \left( \omega_m^{-\frac{r'+1}{2}} \right), \\ & r' = 0, 1, 2, \dots, r-1; \end{aligned} \quad (8.15)$$

2)

$$U_{r'}(s + s_N, x) = e^{i\kappa_m} U_{r'}(s, x), \quad r' = 0, 1, 2, \dots, r-1. \quad (8.16)$$

Условие (8.16) обеспечивает условие замыкания (8.12) в соответствующем приближении, так как из условий (8.16) следует  $S_N$ -периодичность функций

$$U_{r'} \exp \left( i\omega_m \int_0^s \frac{ds}{c(s, 0)} \right), \quad r' < r,$$

где

$$\omega_m \int_0^{s_N} \frac{ds}{c(s, 0)} = 2\pi m_0 - \kappa_m = 2\pi m_0 + \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \pi N;$$

3) выполняются уравнения

$$\sum_{j=0}^{r'} \mathcal{L}^j U_{r'-j} = 0, \quad r' < r. \quad (8.17)$$

Будем также считать известными числа  $\delta_{r'}$ ,  $r' < r$ . Построим функции  $U_r$  и число  $\delta_r$  так, чтобы только что перечисленные условия имели место и при  $r' = r$ .

Уравнение (8.6) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}U_r = - \sum_{j=1}^r \mathcal{L}^j U_{r-j} = K_r - \frac{\Psi_r}{c^2(s, 0, 0)} V_{m, m_2}. \quad (8.18)$$

Функция  $K_r$  однозначно определяется функциями  $U_{r'}$ ,  $r' < r$ , а число  $\Psi_r$  — формулой (8.8).

В силу формул (8.9), (8.10), (8.16) функция  $K_r$  будет удовлетворять условию (8.10) при  $\kappa = \kappa_m$ :

$$K_r(s + s_N, x) = K_r(s, x) e^{i\kappa_m x}, \quad \kappa_m = - \sum_{\alpha=1}^2 \left( m_\alpha + \frac{1}{2} \right) \Phi_\alpha - \frac{\pi N}{2}. \quad (8.19)$$

Из выражения (8.7) для операторов  $\mathcal{L}_j$  следует, что в  $k$ -м плече резонатора функция  $K_r$  имеет вид

$$K_r = \Psi_r^{(k)}(s, x) V_{00}(s, x),$$

где  $\Psi_r^{(k)}$  — полином, коэффициенты которого зависят от  $s$ .

Рассуждая так же, как и в § 3 главы 8, можно убедиться, что любой полином есть линейная комбинация полиномов  $\Phi_{n_1, n_2}$  (см. § 7), поэтому

$$K_r(s, x) = \sum_{n_1, n_2} d_{n_1, n_2}^r(s) \Phi_{n_1, n_2}(s, x) V_{00} = \sum_{n_1, n_2} d_{n_1, n_2}^r(s) V_{n_1, n_2}(s, x) \quad (8.20)$$

(см. формулу (7.10)).

Из условия (8.19) и того, что  $V_{n_1, n_2}$  — решения Флоке задачи (5.7) — (5.10) с показателями  $\kappa_n$ , следует

$$\begin{aligned} K_r(s + s_N, x) &= e^{i\kappa_m x} K_r(s, x) = \sum_{n_1, n_2} d_{n_1, n_2}^r(s + s_N) e^{i\kappa_n x} V_{n_1, n_2}(s, x) = \\ &= e^{i\kappa_m x} \sum_{n_1, n_2} d_{n_1, n_2}^r(s) V_{n_1, n_2}(s, x). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Из равенства (8.21) и линейной независимости функций  $V_{n_1, n_2}(s, x)$  \*) вытекает, что

$$d_{n_1, n_2}^r(s + s_N) = e^{i(\kappa_m - \kappa_n)} d_{n_1, n_2}^r(s). \quad (8.22)$$

Будем теперь искать  $U_r$  в виде (8.13) (при  $r' = r$ ). Потребуем, чтобы  $U_r$  удовлетворяло условию (8.16). Точно так же, как из (8.20) и (8.21) были выведены условия (8.22), получим условия

$$C_{n_1, n_2}^r(s + s_N) = e^{i(\kappa_m - \kappa_n)} C_{n_1, n_2}^r(s), \quad (8.23)$$

---

\*) Линейная независимость функций  $V_{n_1, n_2}$  — есть следствие того, что это ненулевые решения Флоке, отвечающие различным мультипликаторам  $e^{i\kappa_n}$ . Линейную независимость  $V_{n_1, n_2}$  можно также вывести из их ортогональности (см. § 3 гл. 8)



необходимые и достаточные, чтобы  $U_r$  удовлетворяло условию (8.16) ( $r' = r$ ).

Подставляя в краевое условие (8.15)  $r' = r$ , вместо  $U_{r'}$  ( $r' \leq r$ ) их выражения (8.13), после некоторых вычислений получим, что при  $r' = r$  краевое условие (8.15) эквивалентно условиям

$$C_{n_1 n_2}^r(s_k + 0) - C_{n_1 n_2}^r(s_k - 0) = e_{n_1 n_2}^r(s_k), \quad (8.24)$$

где  $e_{n_1 n_2}^r(s_k)$  — известные числа.

Подставляя, наконец, выражение (8.13) в уравнение (8.18), пользуясь формулой (8.20) и тем, что  $V_{n_1 n_2}$  являются решениями параболического уравнения, придем к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{2i}{c(s, 0)} \frac{d}{ds} C_{n_1 n_2}^r &= d_{n_1 n_2}^r(s), \quad (n_1, n_2) \neq (m_1, m_2), \\ \frac{2i}{c(s, 0)} \frac{d}{ds} C_{m_1 m_2}^r &= d_{m_1 m_2}^r(s) + \psi_r \frac{1}{c^2(s, 0)}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Укажем теперь, по каким парам чисел  $(n_1 n_2)$  производится суммирование в формуле (8.13). Это пары чисел, соответствующие неоднородным задачам (8.23) — (8.25), т. е. при этих  $(n_1 n_2)$

$$\sum_{k=1}^N |e_{n_1 n_2}^r(s_k)| + \max_{0 \leq s \leq s_N} |d_{n_1 n_2}^r(s)| > 0.$$

Покажем, что из уравнений (8.25) и дополнительных условий (8.23), (8.24) однозначно найдутся  $c_{n_1 n_2}^r$ ,  $(n_1, n_2) \neq (m_1, m_2)$ , и число  $\delta_r$ .

Задачи (8.23) — (8.25) аналогичны классическим неоднородным задачам Штурма — Лиувилля. Эти задачи фредгольмовы в том смысле, что для их однозначной разрешимости при любых  $d_{n_1 n_2}^r(s)$  и  $e_{n_1 n_2}^r$  необходимо и достаточно отсутствие нетривиальных решений для однородной задачи.

Покажем, что все задачи (8.23), (8.24) при  $(n_1, n_2) \neq (m_1, m_2)$  однозначно разрешимы. В самом деле, пусть  $\hat{C}_{n_1 n_2}^r(s)$  — решение однородной задачи (8.23), (8.24). Тогда

$$\hat{C}_{n_1 n_2}^{(r)} = \text{const}. \quad (8.26)$$

В силу линейной независимости  $\pi$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  над кольцом целых чисел \*) (см. начало этого параграфа)

$$e^i(x_m - x_n) \neq 1. \quad (8.27)$$

\*) Это единственное место, где требуется линейная независимость  $\pi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ .

Равенства (8.23) при  $C_{n_1 n_2}^r = \widehat{C}_{n_1 n_2}^r$ , (8.26) и (8.27) совместны только при  $\widehat{C}_{n_1 n_2}^r \equiv 0$ .

Задача (8.23) — (8.25) для отыскания  $C_{m_1 m_2}^r$  находится на собственном числе: решением (единственным) однородной задачи является константа. Интегрируя обе части уравнения (8.25) для  $C_{m_1 m_2}^r$  по всей оси резонатора и пользуясь периодичностью функции  $C_{m_1 m_2}^r$ , получим необходимое условие разрешимости задачи (8.23) — (8.25), которое является, как нетрудно подтвердить непосредственным подсчетом, и достаточным:

$$2i \sum_{k=1}^N e_{m_1 m_2}^r(s_k) = \int_{I_N} d_{m_1 m_2}^{(r)}(s) c(s, 0) dS + \psi_r \int_{I_N} \frac{ds}{c(s, 0)}. \quad (8.28)$$

Из условия (8.28) однозначно находится число  $\delta_r$ , определяющее поправку к собственной частоте. Так же как и в § 4 главы 8, можно доказать, что все числа  $\delta_r$  с нечетными номерами равны нулю. Пользуясь тем, что собственные числа самосопряженных задач вещественны, и тем, что полученные формулы (8.5) являются асимптотическими формулами для собственных чисел некоторой самосопряженной задачи (см. § 6 гл. 6), можно доказать вещественность всех чисел  $\delta_r$ .

## ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ВЫПУКЛОЙ КРИВОЙ

Глава посвящена построению в зоне тени коротковолновой асимптотики решения плоской задачи о точечном источнике, расположенном с той стороны кривой  $S$ , где не могут возникнуть колебания шепчущей галереи (см. §§ 1 и 4 гл. 4) \*).

### § 1. Вводные замечания

Пусть  $S$  — достаточно гладкая выпуклая кривая (замкнутая или уходящая на бесконечность) с положительной кривизной  $\rho^{-1}(s)$ , в точке  $M_0 = M_0(x_0, y_0)$  расположен источник колебаний, точка  $M = M(x, y)$  — точка наблюдения. Будем полагать для простоты скорость распространения волн величиной постоянной. Математически задача состоит в построении решения уравнения Гельмгольца с  $\delta$ -функцией Дирака в правой части

$$(\Delta + k^2) G(M_0, M; k) = -\delta(M - M_0) = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (1.1)$$

удовлетворяющего на кривой  $S$  условию

$$G(M_0, M; k)|_S = 0. \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.1)—(1.2) будем искать в классе функций, допускающих аналитическое продолжение в область  $\text{Im } k > 0$  и экспоненциально убывающих при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ , если  $\text{Im } k > 0$ . В этом смысле искомые решения будут удовлетворять принципу предельного поглощения\*\*). Решение задачи (1.1), (1.2) мы будем называть, в соответствии с установившейся терминологией, *функцией Грина*. Если точка  $M$  принадлежит области, освещенной из точки  $M_0$ , то асимптотика функции Грина при  $k \rightarrow \infty$  находится лучевым методом (см. § 6 гл. 1), поэтому в настоящей главе основное внимание уделяется построению асимптотики функции Грина в зоне тени.

Методы, примененные в этой главе, позволяют получить не только главный член асимптотики функции Грина, но и вычислить поправочные члены любого порядка малости по  $1/k$ .

\*) Другой метод построения асимптотики функции Грина в полутени и тени излагается в главе 12. Методы настоящей главы и главы 12 дополняют друг друга, об их связи мы уже говорили во введении.

\*\*\*) См. В. И. Смирнов [3].

Построение асимптотики функции Грина при импедансном краевом условии

$$\frac{\partial G}{\partial n} + ikg(s) G|_s = 0, \quad (1.3)$$

которое часто встречается в физических задачах, проводится точно так же, как и в случае условия Дирихле (1.2). Чтобы не загромождать изложение однотипными формулами и рассуждениями, мы не рассматриваем подробно импедансных краевых условий. Краткому выводу асимптотических формул, относящихся к этому случаю, посвящен § 5.

Методы настоящей главы позволяют также построить асимптотику функции Грина в случае краевого условия Неймана

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_s = 0. \quad (1.4)$$

Заметим, что предельный переход при  $g \rightarrow \infty$  в формулах § 5 позволяет получить асимптотику решений задачи Дирихле (1.1), (1.2). Однако предельный переход при  $g \rightarrow 0$  к задаче Неймана (1.1), (1.4) в формулах этого параграфа недопустим, так как при их выводе в § 5 существенно используется предположение  $g^{-1}(s) = O(1)$ . Это обстоятельство указывает на то, что задача Неймана (1.1) — (1.4) имеет свою специфику.

В заключение этого вводного параграфа подчеркнем, что многие построения настоящей главы будут основываться на интуитивных соображениях и носить формальный характер. Тем не менее в полученных формулах вряд ли приходится сомневаться, так как 1) они подтверждаются в тех случаях, когда задача допускает явное решение; 2) для контура весьма специального вида (не допускающего, однако, разделения переменных) при некоторых ограничениях на положение источника и точки наблюдения они были строго доказаны американскими математиками Блумом и Матковским\*); 3) вытекающий из формул настоящей главы факт экспоненциального убывания с показателем  $k^{1/3}$  функции Грина в зоне тени подтверждается строгими доказательствами\*\*).

## § 2. Функция Грина для внешности окружности

Как и в предыдущих главах, мы обращаемся прежде всего к исследованию эталонной задачи, в качестве которой естественно взять задачу о функции Грина для внешности окружности.

Рассмотрим в полярных координатах  $r, \varphi$  бесконечнолистную риманову поверхность  $r \geq \rho, -\infty < \varphi < +\infty$ . Источник колебаний поместим в точке  $M_0(r_0, \varphi_0)$ . Функцию Грина на бес-

\*) См. Блум, Матковский [1].

\*\*) См. В. М. Бабич, [5], В. М. Бабич и И. В. Олимпиев [1].

конечнолистной поверхности обозначим через  $\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$ . Она должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2\right) \Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \\ = -\frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (2.1)$$

и условиям

$$\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{r+|\varphi| \rightarrow \infty} \{\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) |_{\text{Im } k > 0}\} = 0. \quad (2.3)$$

Функция

$$G(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi + 2\pi j; k), \quad (2.4)$$

имеющая период  $2\pi$ , является функцией Грина для внешности окружности  $r = \rho$  уже не на бесконечнолистной римановой поверхности логарифмического типа, а на обычной плоскости \*).

Задача (2.1) — (2.3) допускает точное решение

$$\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \\ = \frac{i}{8} \int_C e^{i\nu|\varphi - \varphi_0|} H_\nu^{(1)}(kr_>) \left[ H_\nu^{(2)}(kr_<) - \frac{H_\nu^{(2)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(k\rho)} H_\nu^{(1)}(kr_<) \right] d\nu \quad (2.5)$$

или при  $\varphi \neq \varphi_0$

$$\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma_\nu(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \\ = \frac{\pi}{4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{\nu\rho}^{(1)}(kr) H_{\nu\rho}^{(1)}(kr_0) H_{\nu\rho}^{(2)}(k\rho)}{\frac{\partial}{\partial \nu} [H_\nu^{(1)}(k\rho)]_{\nu\rho}} e^{i\nu\rho|\varphi - \varphi_0|}; \quad (2.6)$$

здесь  $r_>$  и  $r_<$  — большая и меньшая из координат  $r_0, r$ ;  $\nu_0, \nu_1 \dots$  — корни уравнения

$$H_\nu^{(1)}(k\rho) = 0, \quad (2.7)$$

принадлежащие верхней полуплоскости  $\nu$ , а  $C$  — контур, охватывающий эти корни в положительном направлении (рис. 38).

Формула (2.6) получается применением теоремы о вычетах к интегралу (2.5). Подставляя (2.6) в равенство (2.4), получаем следующее представление для «физической функции»

\*) См. Фридлейдер [1].

Грина  $G(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  \*):

$$G(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k), \quad (2.8)$$

где

$$G_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi + 2\pi j; k). \quad (2.9)$$

В свою очередь функции  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$ , как это будет видно из дальнейшего изложения, целесообразно представить при  $\varphi > \varphi_0$  в виде

$$\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \frac{1}{2i(k/2)^{1/3}} \frac{1}{[\omega'_1(\xi_p)]^2} u_p^-(r_0, \varphi_0; k) u_p^+(r, \varphi; k), \quad (2.10)$$

где

$$u_p^{\pm}(\xi, \eta; k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \omega'_1(\xi_p) \sqrt{\frac{H_{\nu_p}^{(2)}(k\rho)}{\frac{\partial}{\partial \nu} H_{\nu}^{(1)}(k\rho)|_{\nu_p}}} H_{\nu_p}^{(1)}(k\xi) e^{\pm i\nu_p \eta}, \quad (2.11)$$

$\omega_1(\xi)$  — функция Эйри и  $\xi_p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , — ее корни. Если  $\varphi_0 > \varphi$ , в формуле (2.10) следует поменять местами аргументы  $u_p^+$  и  $u_p^-$ .

Найдем асимптотические формулы для  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $p = O(1)$ . Их вид зависит от взаимного расположения точек  $(r_0, \varphi_0)$ ,  $(r, \varphi)$  и окружности  $r = \rho$ . Прежде всего напишем асимптотическое разложение для корней  $H_{\nu}^{(1)}(k\rho)$ . Асимптотика корней функции  $H_{\nu}^{(1)}(k\rho)$  при  $k\rho \rightarrow \infty$  может быть найдена точно тем же способом, каким в § 2 главы 6 была получена асимптотика корней функции Бесселя  $J_{\nu}(k\rho)$ . Для функции  $H_{\nu}^{(1)}(k\rho)$  имеет место асимптотическая формула (2.4) главы 6, в

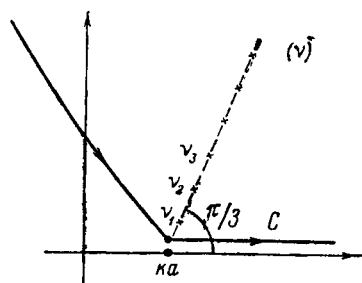


Рис. 38.

которой функцию Эйри  $v$  следует заменить комплекснознач-

\*) Можно показать, что двойной ряд  $\sum_{p,l} \Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi + 2\pi j; k)$  сходится абсолютно, поэтому законна перестановка порядка суммирования при получении формул (2.8), (2.9).

ной функцией Эйри  $\omega_1$ . Поэтому асимптотическая формула для корней  $H_v^{(1)}(kr)$  получается из формулы (2.5) главы 6 заменой  $-t_p$  на  $\xi_p$  и имеет вид

$$v_p = kr \left[ 1 + \frac{\xi_p}{2} \left( \frac{2}{kr} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{30} \left( \frac{\xi_p}{2} \right)^2 \left( \frac{2}{kr} \right)^{\frac{4}{3}} + O \left[ \left( \frac{\xi_p}{kr} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \right]. \quad (2.12)$$

Обратимся теперь к функции  $u_p^+(r, \varphi; k)$  и получим асимптотическое представление зависящего от координат точки наблюдения множителя

$$H_{v_p}^{(1)}(kr) e^{i v_p \varphi}, \quad (2.13)$$

входящего в  $u_p^+(r, \varphi; k)$ .

Пусть  $r - \rho \geq \text{const} > 0$ . Воспользуемся асимптотической формулой Дебая

$$H_v^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{(kr)^2 - v^2}} \times \\ \times \exp \left[ i \left( \sqrt{k^2 r^2 - v^2} - v \arccos \frac{v}{kr} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{k} \right) \right], \quad (2.14)$$

справедливой в силу  $r - \rho \geq \text{const} > 0$  при  $v = v_p$ , где  $v_p$  — корень уравнения (2.7),  $p = O(1)$ . В формуле (2.14) предполагается, что радикалы и арккосинус принимают главные значения на промежутке  $-kr \leq v \leq kr$ , а разрезы проведены от точек  $v = \pm kr$  на бесконечность. В соответствии с асимптотическими формулами (2.12) и (2.14) функции (2.13) характеризуются фазовым множителем

$$\exp \left[ ik \left( -\rho \arccos \frac{\rho}{r} + \sqrt{r^2 - \rho^2} + \rho \varphi \right) + \right. \\ \left. + i \xi_p \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \varphi - \arccos \frac{\rho}{r} \right) \right].$$

Нетрудно показать, что соответствующие лучи представляют собой дуги окружности  $r = \rho$  и полукасательные к ним, направленные в сторону возрастания  $\varphi$  (рис. 39).

Таким образом, функции  $u_p^+(r, \varphi; k)$  описывают волны, движущиеся вдоль окружности  $r = \rho$  с экспоненциальным затуханием, пропорциональным  $k^{1/3}$  (обращаем внимание читателя на то, что  $\text{Re} i \xi_p < 0$ ,  $(\varphi - \arccos \frac{\rho}{r}) \rho = |\overline{AB}|$ ), и соскальзывают по полукасательным. Их естественно называть волнами

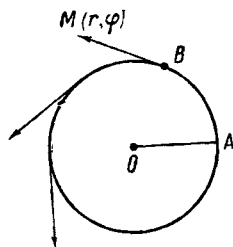


Рис. 39.

соскальзывания (см. § 5 гл. 6). Окружность  $r = \rho$  служит каустикой для соответствующих лучей. Теорию главы 2, однако, здесь нельзя применить потому, что на окружности должно выполняться краевое условие (2.2).

Формулу, аналогичную (2.14), можно получить и для множителя  $H_{\nu_p}^{(1)}(kr_0)e^{-i\nu_p\varphi_0}$ , входящего в функцию  $u_p^-(r_0, \varphi_0; k)$ . Если координаты  $r_0$  и  $\varphi_0$  считать координатами переменной точки, то функции  $u_p^-(r_0, \varphi_0; k)$  будут представлять собой волны соскальзывания, распространяющиеся в противоположную сторону (в сторону убывания  $\varphi_0$ ).

Пользуясь формулами (2.12) и (2.14), нетрудно при  $r - \rho \geq \text{const} > 0$ ,  $r_0 - \rho \geq \text{const} > 0$  найти асимптотику нескольких первых членов ряда (2.6),

$$\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \frac{1}{k} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{|M_0P| \cdot |QM|}} \exp\{ik[|M_0P| + |\widetilde{PQ}| + |QM|]\} \times \\ \times \exp\left\{i\xi_p \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \frac{|\widetilde{PQ}|}{\rho^{2/3}}\right\} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{(k\rho)^{1/3}}\right)\right]; \quad (2.15)$$

$$p = 0, 1, \dots, p = O(1),$$

$|M_0P| = \sqrt{r_0^2 - \rho^2}$ ,  $|QM| = \sqrt{r^2 - \rho^2}$  — длины отрезков  $M_0P$  и  $QM$ ,

$$|\widetilde{PQ}| = \rho \left( |\varphi - \varphi_0| - \arccos \frac{\rho}{r_0} - \arccos \frac{\rho}{r} \right)$$

— длина дуги  $|\widetilde{PQ}|$  (рис. 40), по которой скользит луч, прежде чем в точке  $Q$  покинет окружность. Если точки  $M$  и  $M_0$  находятся в тени относительно друг друга, то функции  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  убывают с ростом  $k$  экспоненциально за счет множителя

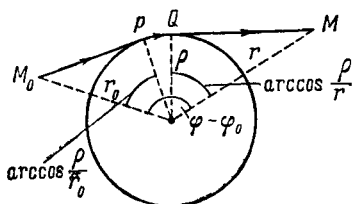


Рис. 40.

$$\exp\left[i\xi_p \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \frac{|\widetilde{PQ}|}{\rho^{2/3}}\right]. \quad (2.16)$$

Поскольку  $\text{Im} \xi_{p+1} > \text{Im} \xi_p$ , это убывание происходит тем быстрее, чем больше номер  $p$ .

Последнее утверждение может быть сделано только относительно функции  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  с малыми номерами  $p$ , для которых справедлива формула (2.15). Исследование членов ряда при больших  $p$  громоздко\*) и здесь опущено. Это исследование показывает, что при  $|\widetilde{PQ}| \geq \text{const} > 0$  уже первый член ряда

\*) См. Эрселл [1].



(2.6), т. е. функция  $\Gamma_0(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$ , дает всю степенную асимптотику функции Грина. Последующие члены ряда  $p = 1, 2, \dots$  будут вносить в асимптотику экспоненциально малые вклады, тем меньшие, чем больше  $p$ .

Фазовые множители функций  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  равны

$$\exp[ik(|M_0P| + |\widetilde{PQ}| + |QM|)]$$

и соответствуют распространению возмущения вдоль падающего луча  $M_0P$ , дуги окружности  $PQ$  и соскальзывающего луча  $QM$ . Множитель

$$(r_0^2 - \rho^2)^{-1/4} (r^2 - \rho^2)^{-1/4} = \frac{1}{V|M_0P| \cdot |QM|}$$

описывает геометрическую расходимость соответствующей волны (см. гл. 1).

Мы рассмотрели случай, когда точки  $M_0$  и  $M$  находятся на ограниченном снизу расстоянии от окружности  $r = \rho$ .

Пусть теперь точки  $M_0$  и  $M$  расположены достаточно близко к окружности  $r = \rho$ . Используя для функций Ханкеля, входящих в (2.11), асимптотическую формулу, аналогичную (2.4) из главы 6 (или асимптотические формулы В. А. Фока\*), получим

$$u_p^+(r, \varphi; k) = \rho^{-\frac{1}{6}} \exp \left[ ik\rho\varphi + i\xi_p \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{1/3} \varphi + \frac{i\xi_p^2}{60} \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{-1/3} \varphi - \right. \\ \left. - \frac{2y + \xi_p}{20 \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{2/3}} + O \left( \frac{1}{k\rho} \right) \right] \omega_1 \left[ (\xi_p - y) + \frac{9y^2 - 8y\xi_p}{60 \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{2/3}} + O \left( \frac{1}{(k\rho)^{4/3}} \right) \right], \quad (2.17)$$

где

$$y = \frac{k(r - \rho)}{(k\rho/2)^{1/3}}$$

— приведенная нормаль к окружности  $r = \rho$ . Формула для  $u_p^-(r_0, \varphi_0; k)$  получается из (2.17) заменой  $i$  на  $-i$ ,  $\varphi$  на  $\varphi_0$  и  $y$  на  $y_0 = k(r_0 - \rho)/(k\rho/2)^{1/3}$ . Заметим, что множитель  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \omega_1'(\xi_p)$  был нами введен в формулу (2.11), служащую определением функций  $u_p$  для того, чтобы в формуле (2.17) множитель, не зависящий от радиуса окружности, был равен единице.

Формула (2.17) указывает на то, что волна соскальзывания  $u_p^+(r, \varphi; k)$  вблизи окружности  $r = \rho$  представляет собой волну

\*) См. В. А. Фок [2].

с экспоненциально убывающей амплитудой, бегущую в сторону возрастания координаты  $\varphi$ . Асимптотическая формула (2.17) — частный случай формулы (5.8) из главы 6.

Используя формулу (2.17) и аналогичную ей формулу для  $u_p^-(r_0, \varphi_0; k)$ , получаем следующее асимптотическое представление для членов ряда (2.6)

$$\begin{aligned} \Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = & \frac{e^{ik\rho|\varphi-\varphi_0|}}{2i\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}} \frac{1}{[\omega_1'(\xi_p)]^2} \omega_1 \left[ (\xi_p - y) + \right. \\ & \left. + \frac{9y^2 - 8y\xi_p}{60\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2/3}} + O((k\rho)^{-4/3}) \right] \omega_1 \left[ (\xi_p - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{9y_0^2 - 8y_0\xi_p}{60\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2/3}} + O((k\rho)^{-4/3}) \right] \exp \left[ i\xi_p \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3} |\varphi - \varphi_0| + \right. \\ & \left. + \frac{i\xi_p^2 |\varphi - \varphi_0|}{60\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}} - \frac{(y + y_0) + \xi_p}{10\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2/3}} + O((k\rho)^{-1}) \right]. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Формула (2.18) имеет место только при малых номерах  $p$ . Из этой формулы следует, что, как и в предыдущем случае, первые члены ряда быстро убывают, если точки  $M(r, \varphi)$  и  $M_0(r_0, \varphi_0)$  находятся в тени относительно друг друга ( $|\varphi - \varphi_0| > \text{const} > 0$ ). Исследование функций  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  при номерах  $p \sim k\rho$  и  $p \gg k\rho$  позволяет утверждать что, как и в предыдущем случае, ряд (2.6) сходится и дает асимптотику функции

Грина. Точнее, сумма нескольких первых членов  $\sum_0^{p_0} \Gamma_p$  представляет собой асимптотическое разложение  $\Gamma$ , где каждый последующий член экспоненциально мал по сравнению с предыдущим.

В том случае, когда при фиксированной точке  $M_0(r_0, \varphi_0)$  точка  $M(r, \varphi)$  приближается к границе свет — тень, члены ряда (2.6) становятся сравнимыми по величине за счет стремления к нулю дуги  $|\overline{PQ}|$  (см. формулы (2.12) — (2.16) и рис. 40), и первые члены ряда (2.6) уже не дают асимптотического представления  $\Gamma$ . В этом случае формула (2.5) удобнее для исследования функции  $\Gamma$ , чем ряд (2.6). В освещенной области асимптотическое представление для  $\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  получается, если к интегралу (2.5) применить метод перевала, заменяя в окрестности седловых точек функции Ханкеля их

асимптотикой (формулами Дебая). В результате получаем

$$\Gamma(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \frac{e^{ikR + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kR}} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] - \frac{e^{ik(l_0+l) + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k\left(l_0+l + \frac{2l_0l}{\rho \cos \theta}\right)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]. \quad (2.19)$$

Здесь  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  — функции, разлагающиеся в асимптотические ряды по степеням  $1/k$  и имеющие порядок  $1/k$ ,  $R$  — расстояние между точками  $M_0$  и  $M$ ,  $l_0$  и  $l$  — длины отрезков падающего и отраженного лучей,  $\theta$  — угол отражения. Формула (2.19) согласуется с формулами (6.3) и (6.6) главы 1.

Рассмотрим полюсы функции Грина  $G(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$ , определенной формулами (2.8) и (2.9), на комплексной плоскости  $k$ . Напомним, что (см. § 5 гл. 6) полюсы функции Грина на плоскости  $k$  можно считать собственными числами оператора Лапласа для внешности выпуклой области, в данном случае — внешности круга  $r = \rho$ .

Функция Грина  $G$  является бесконечной суммой функций  $G_p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Поэтому естественно вопрос о полюсах функции  $G$  начать с исследования полюсов функций  $G_p$  при фиксированном  $p$ . Функция  $G_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  определена равенством (2.9). Для функций  $\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi + 2\pi j; k)$  в силу равенств (2.10) и (2.11) справедлива формула

$$\Gamma_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi + 2\pi j; k) = u_p^-(r_0, \varphi_0; k) u_p^+(r, \varphi; k) e^{2\pi v_p j i}, \quad (2.20)$$

используя которую получаем

$$G_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{k}\right)^{1/3} \frac{1}{[\omega_1'(\xi_p)]^2} \left\{ u_p^-(r_0, \varphi_0; k) u_p^+(r, \varphi; k) + \frac{u_p^-(r_0, \varphi_0; k) u_p^+(r, \varphi; k) + u_p^-(r, \varphi; k) u_p^+(r_0, \varphi_0; k)}{1 - e^{2\pi v_p i}} e^{2\pi v_p i} \right\}. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) написана в предположении, что  $\varphi > \varphi_0$ . Если  $\varphi < \varphi_0$  в первом слагаемом формулы, следует поменять местами  $\varphi$  и  $\varphi_0$ . Из формулы (2.21) следует, что полюсы функции  $G_p(r_0, \varphi_0; r, \varphi; k)$  на плоскости  $k$  определяются из уравнения

$$v_p = v_p(k) = q, \quad (2.22)$$

где  $q$  — целое число. При каждом фиксированном  $p = 0, 1, 2, \dots$  уравнение (2.22) определяет серию полюсов  $k_{pq}$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$  соответствующую члену ряда (2.8) с номером  $p$ .

Мы будем предполагать, что полюсы  $G_p$  при любом  $p$  являются полюсами функции Грина  $G$ , и других полюсов функция Грина  $G$  не имеет\*).

\*) Для доказательства этого предположения требуется тонкое исследование сходимости ряда (2.8) при комплексных  $k$ , которое никем не было опубликовано и, возможно, никем не было проведено. Тем не менее о совпадении множества полюсов функции Грина  $G$  и множества наборов всех полюсов функций  $G_p$  обычно говорят, как о хорошо известном факте.

Другими словами, будем считать, что полюсы функции Грина  $G$  целиком определяются корнями  $k_{pq}$  уравнения (2.22).

Отметим некоторые свойства полюсов  $k_{pq}$ . Чем меньше  $p$ , тем ближе к вещественной оси расположена соответствующая серия полюсов  $k_{pq}$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$

Воспользовавшись асимптотической формулой (2.12) для  $v_p$ , можно получить при больших  $k$  асимптотические формулы для серий полюсов функции Грина, расположенных в нижней полуплоскости в достаточно малой окрестности ( $p = O(1)$ ) вещественной оси:

$$k_{pq} = \frac{q}{\rho} \left\{ 1 - \frac{\xi_p}{2} \left(\frac{2}{q}\right)^{2/3} + 3 \frac{\xi_p^2}{40} \left(\frac{2}{q}\right)^{4/3} + O \left[ \xi_p^3 \left(\frac{2}{q}\right)^2 \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Формула (2.23) полностью согласуется с формулой (5.9) § 5 главы 6.

Проведенные в этом параграфе исследования асимптотики функции Грина эталонной задачи являются эвристической основой для построения и исследования функции Грина в случае произвольного выпуклого контура  $S$ .

### § 3. Волны соскальзывания вблизи кривой с положительной кривизной и их продолжение на произвольные расстояния

Волнами соскальзывания  $u_p^\pm(M, k)$  в случае достаточно гладкой кривой  $S$ , имеющей положительную кривизну, будем называть решения однородного уравнения Гельмгольца  $(\Delta + k^2)u_p^\pm = 0$ , удовлетворяющие на  $S$  однородному краевому условию

$$u_p^\pm|_S = 0 \left( \text{или } \frac{\partial u_p^\pm}{\partial n} \Big|_S = 0, \text{ или } \frac{\partial u_p^\pm}{\partial n} + ikgu_p^\pm \Big|_S = 0 \right),$$

обладающие свойствами

$$u_p^+ \rightarrow 0 \text{ при } k > 0, n > 0 \text{ и } s \rightarrow +\infty,$$

$$u_p^- \rightarrow 0 \text{ при } k > 0, n > 0 \text{ и } s \rightarrow -\infty$$

и при  $\text{Im } k > 0$  экспоненциально убывающие при удалении от контура  $S$ .

Существование волн соскальзывания в общем случае не доказано, однако в тех случаях, когда удается разделить переменные, волны соскальзывания существуют и их можно построить в явном виде. (Построение волн соскальзывания для окружности выполнено в предыдущем параграфе, для эллипса и параболы волны соскальзывания могут быть построены аналогично.)

Мы будем предполагать, что волны соскальзывания существуют в общем случае и формальные решения уравнения Гельмгольца, построенные в § 5 главы 6, дают их асимптотику.

Эта асимптотика имеет вид:

$$u_p^+(M, k) = \exp[iks + iE(\xi_p, M)] \omega_1[T(\xi_p, M)], \quad (3.1)$$

$$E(\xi_p, M) = \sum_{m=-1}^{N-1} \alpha_m(s, \nu) k^{-\frac{m}{3}} + O\left(k^{-\frac{N}{3}}\right), \quad (3.2)$$

$$T(\xi_p, M) = \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m(s, \nu) k^{-\frac{m}{3}} + O\left(k^{-\frac{N}{3}}\right),$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, N = 1, 2, 3, \dots$$

В этих формулах  $\xi_0, \xi_1, \dots$ , как и в § 2, — нули функции Эйри  $\omega_1(\xi)$ , причем  $\arg \xi_p = \pi/3$ ; функции  $\alpha_m(s, \nu)$ ,  $\beta_m(s, \nu)$  — полиномы от  $\nu = nk^{2/3}$  с коэффициентами, зависящими от  $s$  и  $\xi_p$ ; начало отсчета длины дуги  $s$  выбрано произвольно. Постоянные множители в выражениях для  $u_p^+$  (см. (5.8) гл. 6) выберем теперь так, чтобы в случае  $\rho = \text{const}$  получалось совпадение с формулами (2.17). Приведем формулы для нескольких первых полиномов  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$ :

$$\alpha_{-1}(s, \nu) = \frac{\xi_p}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)}, \quad (3.3)$$

$$\alpha_0(s, \nu) = \frac{i}{6} \ln \rho(s),$$

$$\alpha_1(s, \nu) = \frac{\rho'(s)}{6\rho(s)} \nu^2 + \alpha_{10}(s),$$

$$\alpha_{10}(s) = 2^{1/3} \xi_p^2 \int_0^s \rho^{-4/3}(s) \left[ \frac{1}{60} + \frac{4}{135} \rho'^2(s) - \frac{2}{45} \rho(s) \rho''(s) \right] ds, \quad (3.4)$$

$$\alpha_2(s, \nu) = \alpha_{21}(s) \nu + \alpha_{20}(s),$$

$$\alpha_{21}(s) = \frac{i}{10\rho(s)} \left[ 2 - \frac{1}{3} \rho(s) \rho''(s) + \frac{2}{9} \rho'^2(s) \right],$$

$$\alpha_{20}(s) = \frac{i\xi_p}{10} \left( \frac{2}{\rho(s)} \right)^{2/3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \rho(s) \rho''(s) - \frac{2}{9} \rho'^2(s) \right],$$

$$\beta_0(s, \nu) = \xi_p - \left( \frac{2}{\rho(s)} \right)^{1/3} \nu, \quad (3.5)$$

$$\beta_1(s, \nu) = 0,$$

$$\beta_2(s, \nu) = \beta_{22}(s) \nu^2 + \beta_{21}(s) \nu,$$

$$\beta_{22}(s, \nu) = \frac{1}{20} \left( \frac{2}{\rho(s)} \right)^{4/3} \left[ 3 + \frac{1}{3} \rho(s) \rho''(s) - \frac{2}{9} \rho'^2(s) \right], \quad (3.6)$$

$$\beta_{21}(s) = \frac{2\xi_p}{15\rho(s)} \left[ -2 + \frac{1}{3} \rho(s) \rho''(s) - \frac{2}{9} \rho'^2(s) \right].$$

При  $\rho(s) = \text{const}$  формулы (3.1)—(3.6) переходят в формулу (2.17). Формула (3.1) соответствует выбору знака плюс при решении уравнения эйконала (формула (3.16) гл. 6). При выборе в уравнении эйконала знака минус получаем асимптотику волн соскальзывания  $u_p^-(M, k)$ . Асимптотические формулы для  $u_p^-(M, k)$  отличаются от формул для  $u_p^+(M, k)$  заменой  $i$  на  $-i$  под знаком экспоненты в формуле (3.1) и в формулах (3.3) и (3.4).

Перейдем к выводу выражений для  $u_p^+(M, k)$ , пригодных на больших расстояниях от контура  $S$ .

Входящие в выражения (3.2) полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  имеют степени  $m/2$  и  $m/2 + 1$  при четном  $m \geq 0$  и степени  $(m + 3)/2$  и  $(m - 1)/2$  при нечетном  $m \geq 1$  (см. § 3 гл. 6). При увеличении  $\nu$  поведение этих полиномов начинает определяться их старшими членами. С другой стороны, отрезки рядов (3.2) пригодны для вычисления  $u_p^+(M, k)$  в той области изменения координат, где члены этих рядов еще продолжают убывать. Отсюда приходим к выводу (см. § 3 гл. 6), что формулами (3.2) можно пользоваться не только при конечных  $\nu$ , но и при больших  $\nu$ , если только

$$\nu = O(k^\varepsilon), \quad \varepsilon < 2/3. \quad (3.7)$$

Перепишем формулы для  $u_p^+(M, k)$  в лучевых координатах (вблизи  $S$ ). Если  $\nu$  — большая величина, удовлетворяющая ограничению (3.7), то функцию Эйри, входящую в равенство (3.1), можно заменить ее асимптотикой. Полученные в результате этих преобразований формулы для  $u_p^+$  имеют смысл не только в пограничной полоске вблизи  $S$ , но и вне ее. Мы предположим, что эти формулы осуществляют продолжение  $u_p^+$  на произвольные расстояния от  $S$ .

Проведем соответствующие выкладки. Заменяем в формуле (3.1) функцию Эйри  $\omega_1$  ее асимптотикой:

$$\omega_1(t) \sim \frac{e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}}{\sqrt{\pi} t^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3m + \frac{1}{2}\right)}{(2m)!} \left(9t^{\frac{3}{2}}\right)^{-m}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\pi}{3} - \delta \geq \arg t \geq -\frac{5\pi}{3} + \delta, \quad \delta > 0,$$

(см. Дополнение 1).

Члены с различными степенями  $\nu$ , входящие в полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  или  $\beta_m(s, \nu)$ , теперь имеют разный порядок при  $k \rightarrow \infty$ .

Используя формулу (3.8), получаем

$$u_p^+(M, k) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{v^{1/4}} \left( \frac{\rho(s)}{2} \right)^{1/12} \times \\ \times \exp \left[ ik s + iE(\xi_p, M) + \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}}(\xi_p, M) \right] \chi_p(M, k), \quad (3.9)$$

где

$$\chi_p(M, k) = Q^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{V\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3m + \frac{1}{2})}{(2m)!} \left[ 9iQ^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\rho(s)}{2} \right)^{1/2} \right]^{-m}, \\ Q = 1 - \frac{\xi_p}{v} \left( \frac{\rho(s)}{2} \right)^{1/3} - \frac{\beta_2(s, v)}{k^{2/3} v} \left( \frac{\rho(s)}{2} \right)^{1/3} - \frac{\beta_3(s, v)}{k v} \left( \frac{\rho(s)}{2} \right)^{1/3} - \dots$$

Множитель  $\chi_p(M, k)$  при  $k \rightarrow \infty$  стремится к единице и может быть представлен в виде двойного разложения по степеням  $k^{-1/3}$  и  $v^{-1/2} = O(k^{-2/3})$ .

Проведем из точки наблюдения  $M(s, n)$  касательную и нормаль к  $S$  (рис. 41). Пусть  $\sigma$  — значение длины дуги в точке

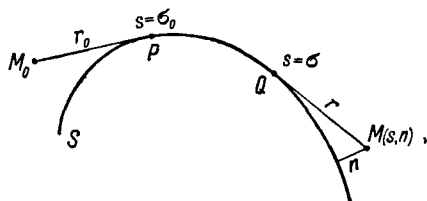


Рис. 41.

касания, а  $r$  — длина касательной. Положение точки можно характеризовать также лучевыми координатами  $\tau = \sigma + r$  и  $\sigma$ . Эти координаты ортогональны. При  $n \rightarrow 0$  стремятся к нулю также  $s - \sigma$  и  $r$ .

Используя естественное уравнение контура  $S$  (см. § 1 гл. 4), можно найти следующую связь  $s$  и  $n$  с лучевыми координатами  $\sigma$  и  $\tau = \sigma + r$  при  $n \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow 0$ ):

$$s = \sigma + r - \frac{1}{3\rho^2} r^3 + \frac{7}{24} \frac{\rho'}{\rho^3} r^4 + \dots, \\ n = \frac{1}{2\rho} r^2 - \frac{\rho'}{6\rho^2} r^3 + \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' - 3}{24\rho^3} r^4 + \dots \quad (3.10) \\ (\rho \equiv \rho(\sigma), \quad \rho' \equiv \rho'(\sigma), \dots).$$

Перейдем в (3.9) к лучевым координатам по формулам (3.10). Полученному выражению (после громоздких вычислений) можно

придать следующий вид:

$$u_p^+(M, k) = \frac{q_p^+(\sigma, r, k) e^{ik\tau}}{\sqrt{r}}, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} q_p^+(\sigma, r, k) = & e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\rho}{k}\right)^{\frac{1}{6}} \exp \left[ i\xi_p \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^\sigma \frac{ds}{\rho^{2/3}} + \right. \\ & \left. + \frac{i\alpha_{10}(\sigma)}{k^{1/3}} + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left(\frac{2}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\rho'}{3}\right) + \frac{i\alpha_{20}(\sigma)}{k^{2/3}} \right] \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\xi_p}{k^{2/3}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{\rho}{2r^2} + \frac{\rho'}{3r} + \frac{1}{30} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2}{9\rho} + \frac{7}{3}\rho''\right) \right] + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Нетрудно убедиться, что длина касательной  $r$  имеет смысл геометрической расходимости. Равенства (3.11)—(3.12) определяют главный член асимптотического разложения для функции  $u_p^+(M, k)$ , аналогичного лучевому (см. гл. 1 и статью Фриденлендера и Келлера [1]). Формула (3.11) осуществляет искомое продолжение волн соскальзывания вне пограничного слоя. В узкой полосе вблизи  $S$ , где  $\nu = O(k^\varepsilon)$ ,  $1/3 < \varepsilon < 2/3$ , формулы (3.1) и (3.11) дают одно и то же асимптотическое представление для  $u_p^+$ .

#### § 4. Выражение функции Грина через волны соскальзывания

Построения § 2 позволяют высказать гипотезу, что в общем случае выпуклого, уходящего на бесконечность контура  $S$  функция Грина может быть получена посредством наложения волн соскальзывания. Основная цель этого параграфа — получить с помощью асимптотических формул для  $u_p^\pm$  из предыдущего параграфа асимптотику для функции Грина  $\Gamma(M_0, M, k)$ .

Предположим, что в общем случае функцию Грина  $\Gamma(M_0, M, k)$  можно представить, с одной стороны, от источника  $M_0$  в виде наложения волн соскальзывания  $u_p^+$ , с другой стороны — соответственно в виде наложения волн соскальзывания  $u_p^-$ :

$$\Gamma(M_0, M, k) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} \mu_p^+ u_p^+(M, k), \\ \sum_{p=0}^{\infty} \mu_p^- u_p^-(M, k), \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mu_p^+ = \mu_p^+(M_0, k), \quad \mu_p^- = \mu_p^-(M_0, k).$$



Линией, разделяющей области, где имеют место первое и второе представления (4.1), в случае круга является полупрямая, идущая из центра круга и пересекающая источник. В дальнейшем будем считать, что представление  $\Sigma \mu_p^+ u_p^+$  (соответственно  $\Sigma \mu_p^- u_p^-$ ) имеет место для функции Грина  $\Gamma$  при  $s > s_0$  (соответственно  $s < s_0$ ), если точка наблюдения  $M(s, n)$  не освещена точечным источником  $M_0(s_0, n_0)$ , т. е. находится в зоне тени.

Мы будем искать асимптотику функции Грина, считая, что имеет место принцип взаимности

$$\Gamma(M, M_0, k) = \Gamma(M_0, M, k).$$

Для его выполнения достаточно положить

$$\mu_p^+(M_0, k) u_p^+(M, k) = \mu_p^-(M, k) u_p^-(M_0, k), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда в тех точках, где  $u_p^+, u_p^- \neq 0$ ,

$$\frac{\mu_p^+(M_0, k)}{u_p^-(M_0, k)} = \frac{\mu_p^-(M, k)}{u_p^+(M, k)} = B_p, \quad p = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Согласно (4.2)  $B_p$  не зависит ни от  $M_0$ , ни от  $M$ , т. е. является функцией только от  $k$ . В дальнейшем мы будем использовать для  $u_p^+, u_p^-$  асимптотические выражения, имеющие размерность длины в степени  $-1/6$ . В силу того, что функция Грина безразмерна (что следует из уравнения  $\Delta \Gamma + k^2 \Gamma = -\delta(M - M_0)$ , которому она удовлетворяет), коэффициент  $B_p$  имеет размерность длины в степени  $1/3$ . Выделим из  $B_p$  безразмерный множитель, полагая

$$B_p(k) = \left(\frac{k}{2}\right)^{-1/3} A_p. \quad (4.3)$$

Собирая вместе формулы (4.1), (4.2), (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(M_0, M, k) &= \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma_p(M_0, M, k) = \\ &= \left(\frac{k}{2}\right)^{-1/3} \sum_{p=0}^{\infty} A_p \begin{cases} u_p^-(M_0, k) u_p^+(M, k), & s > s_0, \\ u_p^+(M_0, k) u_p^-(M, k), & s < s_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

( $M$  находится в зоне тени).

Нам осталось определить безразмерные множители  $A_p$ , не зависящие ни от  $M_0$ , ни от  $M$ . Считая, что для  $u_p^+$  и  $u_p^-$  имеют место асимптотические формулы § 3, найдем выражение для коэффициентов  $A_p$  в случае краевого условия  $\Gamma|_S = 0$ . Для этого воспользуемся так называемыми соображениями локальности.

Из формулы (3.11) следует, что эйконал  $\tau$ , соответствующий слагаемым  $\Gamma_p$  в формуле (4.4) ( $p = 0, 1, \dots, p = O(1)$ ), равен длине луча  $M_0PQM$  (см. рис. 41). Естественно предположить (в этом и заключается принцип локальности), что асимптотика функций  $\Gamma_p$  определяется целиком трассой луча  $M_0PQM$  (в частности, асимптотика  $\Gamma_p$  зависит не от контура  $S$  в целом, а только от его участка  $PQ$ ). Однако зависимости  $A_p$  от участка  $\overline{PQ}$  также не может быть, так как дуга  $\overline{PQ}$  изменяется при изменении положения точек  $M$  и  $M_0$ , а множители  $A_p$  не зависят от  $M$  и  $M_0$ . Следовательно, множители  $A_p$  вообще не зависят от свойств контура  $S$ . Но тогда они не могут зависеть и от  $k$ , так как при их независимости от  $S$  невозможно образовать безразмерный параметр, включающий в себя  $k$ .

Итак, будем считать, что  $A_p$  является абсолютной константой. Ее можно определить, изучая точное решение какой-либо частной задачи. Обратимся к формулам (2.6), (2.10). Асимптотика функций  $u_p^+(M, k)$  при  $\rho = \text{const}$  превращается в асимптотику функций  $u_p^+(r, \varphi; k)$ , а асимптотика функций  $u_p^-(M, k)$  — в асимптотику функций  $u_p^-(r, \varphi; k)$ . Сравнивая (4.4) и (3.1), (3.2) с (2.6) и (2.10), (2.17), находим

$$A_p = \frac{1}{2i [\omega_1'(\xi_p)]^2}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Разумеется, точно такое же выражение для  $A_p$  получается и при сравнении волновых полей вдали от контура  $S$  и окружности  $r = \rho$ .

Равенство (4.5) приводит нас к следующим окончательным формулам для функций  $\Gamma_p$  (см. 4.4) в случае контура, уходящего на бесконечность:

$$\begin{aligned} \Gamma_p(M_0, M, k) &= \\ &= \frac{1}{2i \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3}} \frac{1}{[\omega_1'(\xi_p)]^2} \begin{cases} u_p^-(M_0, k) u_p^+(M, k), & s \geq s_0, \\ u_p^+(M_0, k) u_p^-(M, k), & s \leq s_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если точки  $M_0$  и  $M$  принадлежат пограничному слою ( $v_0$  и  $v$  подчиняются условию (3.7)), то при  $k \rightarrow \infty$  и

$p = 0, 1, \dots, p = O(1)$ , имеет место формула

$$\begin{aligned} \Gamma_p(M_0, M, k) = & \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{k}\right)^{1/3} [\rho(s_0) \rho(s)]^{-1/6} [\omega'_1(\xi_p)]^{-2} \times \\ & \times \exp \left[ ik(s - s_0) + i\xi_p \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \frac{i}{6k^{1/3}} \left[ \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} v^2 - \frac{\rho'(s_0)}{\rho(s_0)} v_0^2 \right] + \right. \\ & \left. + i \frac{\alpha_{10}(s) - \alpha_{10}(s_0)}{k^{1/3}} + i \frac{\alpha_{21}(s) v + \alpha_{21}(s_0) v_0}{k^{2/3}} + \right. \\ & \left. + i \frac{\alpha_{20}(s) + \alpha_{20}(s_0)}{k^{2/3}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \omega_1[T(\xi_p, M_0)] \omega_1[T(\xi_p, M)]. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Обозначения величин, входящих в (4.7), уже введены формулами (3.3). Формула (4.7) относится к случаю  $s \geq s_0$ , в противном случае  $s$  и  $s_0$  нужно поменять местами.

Пусть  $M_0$  принадлежит пограничному слою, а  $M$  находится вне его — в зоне тени, в том числе на сколь угодно большом расстоянии от  $S$ . Будем характеризовать положение точки  $M$  координатами  $r$  и  $\sigma$  (длина касательной из  $M$  к  $S$ , проведенной по направлению к  $M_0$ , и значение длины дуги в точке касания; см. рис. 41). Подставив (3.11), (3.12) в (4.6), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_p(M_0, M, k) = & \\ = & \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2kr}} \left[ \frac{\rho(\sigma)}{\rho(s_0)} \right]^{1/6} \exp \left[ ik(\sigma - s_0 + r) + i\xi_p \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \int_{s_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} - \right. \\ - & \frac{i\rho'(s_0) v_0^2}{6\rho(s_0) k^{1/3}} + i \frac{\alpha_{10}(\sigma) - \alpha_{10}(s_0)}{k^{1/3}} + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left(\frac{2}{\rho(\sigma)}\right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma)}{r} + \frac{\rho'(\sigma)}{3} \right) + \\ & \left. + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right] [\omega'_1(\xi_p)]^{-2} \omega_1 \left[ \xi_p - \frac{2^{1/3} v_0}{\rho^{1/3}(s_0)} + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right], \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$p = 0, 1, \dots; \quad p = O(1).$$

Пусть теперь обе точки  $M_0$  и  $M$  находятся вне пограничного слоя. Их положение будем характеризовать длинами касательных  $r_0$  и  $r$ , проведенных из этих точек к  $S$ , и точками касания  $s = \sigma_0$  и  $s = \sigma$  (рис. 41). Используя формулы (3.11), (3.12),

(4.8), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_p(M_0, M, k) = & \frac{\sqrt[6]{\rho(\sigma_0)\rho(\sigma)}}{2^{1/3}k^{2/3}\sqrt{r\sigma'}} [\omega'(\xi_p)]^{-2} \exp \left[ ik(r_0 + r + \sigma - \sigma_0) + \right. \\ & + i\xi_p(k/2)^{1/3} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + i \frac{\alpha_{10}(\sigma) - \alpha_{10}(\sigma_0)}{k^{1/3}} + \\ & + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma)}{r} + \frac{\rho'(\sigma)}{3} \right) - \\ & \left. - \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma_0)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma_0)}{r_0} + \frac{\rho'(\sigma_0)}{3} \right) + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right], \quad (4.9) \\ & p = 0, 1, 2, \dots; \quad p = O(1). \end{aligned}$$

Обсуждение физического смысла различных множителей, входящих в формулу (4.9), дано в конце § 7 главы 12.

Формулы (4.5)–(4.9) при  $p \rightarrow \infty$ , по-видимому, не имеют места. В том случае, когда точки источника и наблюдения находятся в глубокой тени относительно друг друга, асимптотику  $\Gamma$  дает конечная сумма нескольких первых членов ряда (4.4):

$$\Gamma \approx \sum_{p=0}^{p_0} \Gamma_p, \quad p_0 = O(1).$$

Каждый последующий член в этой сумме экспоненциально мал по сравнению с предыдущим. Остаточный член  $\sum_{p_0+1}^{\infty} \Gamma_p$ , как следует ожидать из рассмотрения эталонной задачи, мал уже по сравнению с  $\Gamma_{p_0}$ .

Обратимся к случаю замкнутого контура  $S$ . Введем бесконечнолистную риманову поверхность, аналогичную римановой поверхности, рассмотренной в § 2. В координатах  $(s, n)$  край римановой поверхности будет тогда описываться следующим образом:  $n = 0, -\infty < s < +\infty$ . Пусть  $\Gamma(M_0, M, k) = \Gamma(s_0, n_0; s, n; k)$  — функция Грина этой поверхности. Формула

$$G(M_0, M, k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma(s_0, n_0; s + jL, n; k), \quad (4.10)$$

где  $L$  — длина контура  $S$ , определит  $L$ -периодическую по  $s$  физическую функцию Грина для внешности выпуклого контура  $S$ . Заменяя  $\Gamma$  на сумму  $\Gamma_p$  (см. 4.4), получим

$$G = \sum_{p=0}^{\infty} G_p(M_0, M, k) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_p(s_0, n_0; s + jL, n; k), \quad (4.11)$$

где

$$G_p = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_p(s_0, n_0; s + jL, n; k). \quad (4.12)$$

Из асимптотических разложений для  $u_p^+$  и  $u_p^-$  (см. § 3) следует, что по крайней мере при больших  $k$

$$\begin{aligned} u_p^+(s + jL, n; k) &= \exp[ij\Phi_p(k)] u_p^+(s, n; k), \\ u_p^-(s + jL, n; k) &= \exp[-ij\Phi_p(k)] u_p^-(s, n; k), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\Phi_p(k) = kL + \sum_{m=-1}^{N-1} (\alpha_m(L, 0) - \alpha_m(0, 0)) k^{-\frac{m}{3}} + O\left(k^{-\frac{N}{3}}\right). \quad (4.14)$$

Из формул (4.6), (4.12) — (4.14) вытекает равенство

$$\begin{aligned} G_p(M_0, M, k) &= \frac{1}{2i(k/2)^{1/3}} \frac{1}{[w_1'(\xi_p)]^2} \left\{ u_p^-(M_0, k) u_p^+(M, k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_p^-(M_0, k) u_p^+(M, k) + u_p^+(M_0, k) u_p^-(M, k)}{1 - e^{i\Phi_p(k)}} e^{i\Phi_p(k)} \right\}, \\ p &= O(1). \end{aligned}$$

Приравняв нулю знаменатель, получим уравнение для полюсов  $G_p$

$$\Phi_p(k) = 2\pi q, \quad p = 0, 1, \dots, q - \text{целое} \gg 1, \quad (4.15)$$

совпадающее с уравнением § 5 главы 6, определяющим собственные числа внешности контура  $S$ . С увеличением номера  $p$  полюсы удаляются от вещественной оси. Положение полюсов при значениях  $p$ , сравнимых с  $k$ , уже не может быть определено из уравнения (4.15).

Заметим в заключение, что формула (4.5) находит себе подтверждение в следующих формальных построениях: можно каждый член ряда  $\sum_{p=0}^{\infty} \Gamma_p$ , представляющего функцию Грина  $G$ , заменить по формуле (4.7), просуммировать ряд, пользуясь теоремой о вычетах, и в освещенной области вычислить полученный интеграл асимптотически по методу перевала. Результаты этих расчетов вблизи границы свет — тень согласуются с формулами, которые дает в соответствующих точках лучевой метод.

Другое подтверждение дает формальное вычисление вблизи  $S$  выражения

$$(\Delta + k^2) \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma_p,$$

где  $\Gamma_p$  опять заменены на выражения (4.7). Результаты этих вычислений (проведенные в нулевом, первом и втором приближении) дают выражение для  $-\delta(M - M_0)$  в координатах  $s, n$ , что и следовало ожидать.

### § 5. Функция Грина задачи дифракции на цилиндре с переменным импедансом

Задача о построении асимптотики функции Грина в случае, когда на  $S$  задано краевое условие

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} + ik g(s) \Gamma \Big|_S = 0, \quad (5.1)$$

решается совершенно так же, как рассмотренная задача с условием  $\Gamma|_S = 0^*$ .

В качестве эталонной задачи используется задача о функции Грина, удовлетворяющей краевому условию (5.1) при  $g = \cos \varphi$  на бесконечнолистной поверхности  $r \geq \rho$ ,  $-\infty < \varphi < \infty$  (см. § 2). Решение такой задачи известно (\*\*).

Функцию Грина  $\Gamma(M_0, M; k)$ , удовлетворяющую условию (5.1), будем по-прежнему строить в виде ряда (4.4) по волнам соскальзывания  $u_p^+$  и  $u_p^-$ . Асимптотика функций  $u_p^+(M, k)$  для внешности контура  $S$  в случае импедансного граничного условия на  $S$  построена в § 5 главы 6:

$$u_p^+(M, k) = \rho^{-\frac{1}{6}}(s) \exp \left[ ik s + i \xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \int_0^s \frac{ds}{\rho(s) g(s)} + \right. \\ \left. + \frac{i \rho'(s) v^2}{6 k^{1/3} \rho(s)} + \frac{i a_{10}(s)}{k^{1/3}} + O \left( \frac{1}{k^{2/3}} \right) \right] \omega_1 [T^+(\xi_p, M)], \quad (5.2)$$

$$p = 0, 1, \dots, p = O(1);$$

$$T^+(\xi, M) = \xi - v \left( \frac{2}{\rho(s)} \right)^{1/3} - \frac{i}{(k/2)^{1/3} \rho^{1/3}(s) g(s)} + O \left( \frac{1}{k^{2/3}} \right). \quad (5.3)$$

При выводе формул (5.2) и (5.3) считалось, что  $1/g(s) = O(1)$ , поэтому в них допустим предельный переход при  $g \rightarrow \infty$  к условию Дирихле  $u_p^+|_S = 0$  и недопустим предельный переход при  $g \rightarrow 0$  к задаче Неймана.

\*) При краевом условии (5.1) картина колебаний может усложниться вследствие появления поверхностной волны. В физически наиболее важном случае  $\text{Im} g > 0$  поверхностные волны отсутствуют. Этот случай и будет далее рассматриваться.

\*\*\*) См. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн [1].

Заменяя здесь  $i$  на  $-i$ , получаем

$$u_p^-(M, k) = \rho^{-\frac{1}{6}}(s) \exp \left[ -iks - i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} - \int_0^s \frac{ds}{\rho(s)g(s)} - \right. \\ \left. - \frac{i\rho'(s)v^2}{6k^{1/3}\rho(s)} - \frac{i\alpha_{10}(s)}{k^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right] \omega_1 [T^-(\xi_p, M)], \quad (5.4) \\ p = 0, 1, \dots, \quad p = O(1).$$

Формулы (5.2)–(5.4) относятся к случаю, когда точка наблюдения  $M$  не слишком удалена от контура  $S$ , а именно: координата  $v = nk^{2/3}$  этой точки удовлетворяет условию (3.7). Функции (5.2) (ср. § 3) могут быть продолжены на любые расстояния от контура  $S$ . При этом получаются формулы, аналогичные формулам (3.11) – (3.12),

$$u_p^+(M, k) = \frac{q_p^+(\sigma, r, k) e^{ik\tau}}{\sqrt{r}}, \quad (5.5) \\ p = 0, 1, \dots, \quad p = O(1),$$

$$q_p^+(\sigma, r, k) = e^{i\frac{\pi}{4}} \left( \frac{2\rho(\sigma)}{k} \right)^{1/6} \exp \left[ i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_0^\sigma \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \int_0^\sigma \frac{ds}{\rho(s)g(s)} + \right. \\ \left. + \frac{i\alpha_{10}(\sigma)}{k^{1/3}} + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma)}{r} + \frac{\rho'(\sigma)}{3} + \frac{1}{g(\sigma)} \right) + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) \right]. \quad (5.6)$$

Входящие сюда лучевые координаты  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $r = \tau - \sigma$  те же, что в § 3.

Определение универсального множителя  $A_p$ , входящего в разложение функции Грина  $\Gamma(M_0, M, k)$  по волнам  $u_p^\pm$ , основано, как и в предыдущем параграфе, на сравнении разложения (4.4) с аналогичным разложением в эталонной задаче. Такое сравнение показывает, что формула (4.5) для универсального множителя  $A_p$  сохраняется и в случае граничного условия (5.1). Это обстоятельство позволяет сразу же выписать асимптотические формулы для  $\Gamma_p$ :

$$\Gamma_p(M_0, M, k) = \frac{1}{2i} \left( \frac{2}{k} \right)^{1/3} [\rho(s)\rho(s_0)]^{-\frac{1}{6}} [\omega_1'(\xi_p)]^{-2} \times \\ \times \exp \left[ ik(s - s_0) + i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \int_{s_0}^s \frac{ds}{\rho(s)g(s)} + \right.$$

$$+ \frac{i}{6k^{1/3}} \left( \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} v^2 - \frac{\rho'(s_0)}{\rho(s_0)} v_0^2 \right) + i \frac{\alpha_{10}(s) - \alpha_{10}(s_0)}{k^{1/3}} + O\left(k^{-\frac{2}{3}}\right) \Big] \times \\ \times \omega_1 [T(\xi_p, M_0)] \omega_1 [T(\xi_p, M)], \quad (5.7) \\ p = 0, 1, \dots; \quad p = O(1).$$

Если обе точки  $M_0$  и  $M$  расположены вне пограничного слоя, одна в тени относительно другой, то

$$\Gamma_p(M_0, M, k) = \frac{[\rho(\sigma_0) \rho(\sigma)]^{1/6}}{2^{1/3} k^{2/3} \sqrt{r_0 r}} \frac{1}{[\omega_1'(\xi_p)]^2} \exp \left[ ik(r_0 + r + \sigma - \sigma_0) + \right. \\ \left. + i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho(s)g(s)} + i \frac{\alpha_{10}(\sigma) - \alpha_{10}(\sigma_0)}{k^{1/3}} + \right. \\ \left. + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma)}{r} + \frac{\rho'(\sigma)}{3} + \frac{1}{g(\sigma)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma_0)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma_0)}{r_0} + \frac{\rho'(\sigma_0)}{3} - \frac{1}{g(\sigma_0)} \right) + O\left( \frac{1}{k^{2/3}} \right) \right], \quad (5.8)$$

где  $p = 0, 1, 2, \dots$ ,  $p = O(1)$ ,  $r_0, r$  — длины касательных, проведенных из  $M_0$  и  $M$  к  $S$  навстречу друг другу (рис. 41), а  $s = \sigma_0, s = \sigma$  — координаты соответствующих точек касания.

Наконец, если одна из точек (например,  $M_0$ ) находится в пограничном слое, а другая (точка  $M$ ) расположена вне его и притом в зоне тени, то получаем

$$\Gamma_p(M_0, M, k) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2kr}} \left( \frac{\rho(\sigma)}{\rho(s_0)} \right)^{1/6} \exp \left[ ik(r + \sigma - s_0) + \right. \\ \left. + i\xi_p \left( \frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_{s_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + \int_{s_0}^{\sigma} \frac{ds}{\rho(s)g(s)} + i \frac{\alpha_{10}(\sigma) - \alpha_{10}(s_0)}{k^{1/3}} + \right. \\ \left. + \frac{i\xi_p^2}{4k^{1/3}} \left( \frac{2}{\rho(\sigma)} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho(\sigma)}{r} + \frac{\rho'(\sigma)}{3} + \frac{1}{g(\sigma)} \right) + O\left( \frac{1}{k^{2/3}} \right) \right] \times \\ \times [\omega_1'(\xi_p)]^{-2} \omega_1 [T(\xi_p, M_0)], \quad p = 0, 1, \dots; \quad p = O(1). \quad (5.9)$$

Формулы (5.7), (5.8) и (5.9) прослеживают влияние различных участков пути луча на амплитуду и фазу функции Грина.

В заключение заметим, что на импедансный случай переносятся и все те построения, о которых говорилось в конце § 4.

В ряде задач акустики и электромагнитной теории для двух сред импедансное граничное условие (5.1) при соответствующем выборе функции  $g(s)$  описывает в первом приближении граничный режим на поверхности раздела сред. Функции Грина таких задач могут быть записаны с помощью формул (4.4), (5.7) — (5.9).



## АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА (ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА)

В этой главе мы исследуем при больших частотах  $\omega$  скалярное волновое поле линейного источника внутри неоднородного неограниченного тела вблизи его поверхности.

### § 1. Постановка задачи и физические предпосылки

Пусть границей тела является уходящая на бесконечность цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси  $z$ , неоднородность зависит от двух координат  $x$  и  $y$ , и линейный источник совпадает с одной из образующих поверхности. Будем считать, что на поверхности тела вне источника волновое поле обращается в нуль.

Более точно: рассматриваемая задача состоит в отыскании решения уравнения Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} \right) u(x, y) = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad (1.1)$$

при краевом условии

$$u|_S = \delta(s), \quad (1.2)$$

где  $S$  — направляющая цилиндрической поверхности — достаточно гладкая плоская кривая, являющаяся границей области  $\Omega$ ,  $s$  — длина дуги кривой  $S$ , отсчитываемая от точки, в которой помещен источник и  $\delta(s)$  — дельта-функция.

Будем предполагать выполненным принцип предельного поглощения, т. е. аналитическое продолжение  $u(x, y; \omega)$  по  $\omega$  с вещественной оси в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \omega > 0$  должно стремиться к нулю при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  (напоминаем, что рассматривается неограниченная область). Пусть, кроме того, эффективный радиус кривизны  $P(s)$  кривой  $S$  (см. § 3 гл. 4) удовлетворяет условию

$$0 < \frac{1}{P(s)} \equiv \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} < \infty, \quad (1.3)$$

при котором вблизи границы области  $\Omega$  происходит наложение многократно отраженных волн, т. е. имеет место эффект шепчущей галереи. (Противоположный случай  $P^{-1}(s) < 0$ , когда

вблизи границы тела возникает зона тени, был рассмотрен в предыдущей главе.)

В дальнейшем волну, распространяющуюся от источника и испытавшую  $m$  отражений от границы  $S$ , будем обозначать через  $u_m$ .

В случае выполнения неравенства (3) в точку наблюдения, расположенную на границе  $S$ , приходят волны  $u_m$  со сколь угодно большим значением  $m$ .

Если точка наблюдения, расположенная на  $S$ , фиксирована, оптическая разность хода для волн  $u_m$  стремится к нулю с увеличением числа отражений  $m$ . Начиная с некоторого номера  $M$ , волны с числом отражений  $m \geq M$  будут интерферировать друг с другом. Чем выше частота  $\omega$ , тем при меньшей оптической разности хода волн происходит явление интерференции, поэтому с увеличением частоты  $\omega$  число  $M$  возрастает.

При удалении точки наблюдения от источника вдоль кривой  $S$  оптическая разность хода волн соседних номеров увеличивается, и это приводит к тому, что число  $M$  будет тоже возрастать. Очевидно, интерференция волн с большим числом отражений происходит не только на самой границе  $S$ , но и вблизи нее — во внутренних точках области  $\Omega$ . В результате возникает поверхностная волна достаточно сложной структуры, распространяющаяся вблизи границы  $S$ .

Начиная с некоторой глубины, оптическая разность хода для всех отраженных волн будет достаточно велика. На такой глубине поверхностная волна полностью распадается на отдельные волны с вполне определенными геометрическими характеристиками. Каждая такая волна может быть вычислена по формулам лучевого метода главы 1. В то же время очевидно, что для вычисления волнового поля поверхностной волны такие формулы неприменимы.

Цель настоящей главы и состоит в том, чтобы получить формулу, описывающую поле поверхностной волны. Формула должна быть такой, что из нее с увеличением частоты  $\omega$  или с увеличением расстояния от источника до точки наблюдения должны автоматически выделяться более простые выражения, имеющие лучевую форму и описывающие волны  $u_m$  с определенным числом отражений  $m$ .

Некоторые построения настоящей главы будут носить эвристический характер и не могут претендовать на математическую строгость.

Отметим, что до сих пор ни в физической, ни в математической литературе не рассматривались сколько-нибудь сложные случаи скользящего падения волн. Исключение составляет лишь формула Вейля — Ван дер Поля, описывающая поле волны, распространяющейся вдоль импедансной плоскости.

## § 2. Лучевая формула для многократно отраженных волн

В этом параграфе с помощью лучевого метода будет получена формула, описывающая на поверхности тела производную  $\frac{\partial u_m}{\partial n}$ . Исследуя фазу  $\frac{\partial u_m}{\partial n}$ , мы установим число  $M$ , начиная с которого возникает интерференция волн с числом отражений  $m > M$ .

Все вычисления для наглядности изложения проведем для случая  $c(x, y) = c_0$  ( $\omega/c_0 = k$ ) и только в конце приведем без подробных выкладок соответствующую формулу для переменной скорости распространения волн.

Пусть волна  $u_m^{(2)}$ , приходящая в точку наблюдения  $N$ , испытывает отражение от кривой  $S$  в точках  $N_1, N_2, \dots, N_m$ . Если обозначить через  $u_{m+1}^{(1)}$  волну, отходящую от точки  $N$  после отражения, то в силу граничного условия (1.2) суммарное поле обеих этих волн

$$u_m = u_m^{(2)} + u_{m+1}^{(1)}$$

должно быть равно нулю в точке  $N(s, 0)$ , поэтому мы и вычисляем в точке  $N$  величину нормальной производной

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} = \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial n} + \frac{\partial u_{m+1}^{(1)}}{\partial n}.$$

Подсчитаем  $\left. \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial n} \right|_{n=0}$  и  $\left. \frac{\partial u_{m+1}^{(1)}}{\partial n} \right|_{n=0}$  по формулам лучевого метода.

В нулевом приближении

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial n} \right|_{n=0} &= \left. \frac{\partial u_{m+1}^{(1)}}{\partial n} \right|_{n=0} = \\ &= A \frac{(-1)^m}{\sqrt{J_m}} ik \left. \frac{\partial L_m}{\partial n} \right|_{n=0} \exp \left[ i \left( k L_m - \frac{\pi}{2} m \right) \right]. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь  $A$  — величина, постоянная вдоль каждого луча, для ее однозначного определения нужно задать источник колебаний. Далее,  $J_m$  — полная геометрическая расходимость волны, учитывающая изменение геометрической расходимости в точках отражения;  $L_m$  — длина ломаной  $N_0 N_1, \dots, N_m N$ . Множитель  $(-1)^m$  представляет собой произведение коэффициентов отражений ( $R = -1$ ) в точках  $N_1 N_2, \dots, N_m$ ; слагаемое  $-\pi m/2$  в показателе экспоненты учитывает изменение фазы волны при прохождении волной  $m$  каустик, которые образуются при  $m$ -кратном отражении волны от границы  $S$ .

Для нахождения величины  $A$  заметим, что в том случае, когда  $\Omega$  — полупространство  $y \geq 0$ ,  $c(x, y) = \text{const}$ ,  $s = x$ , задача (1.1), (1.2) легко решается в явном виде. Это решение равно

$$\tilde{u} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(kr), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(здесь  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля). При больших  $k$  и  $r > 0$

$$\tilde{u} \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \cdot \frac{y}{r^{3/2}} e^{ikr} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right).$$

Отсюда с помощью обычных соображений локальности (см. § 7 гл. 1) находим

$$A = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \sin \varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0$  — угол скольжения луча  $N_0 N_1$ . Считая, что этот угол мал, получим с точностью до  $\varepsilon_0^3$

$$A = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \varepsilon_0.$$

Выведем приближенные формулы для  $L_m$  и  $J_m$ , справедливые при достаточно больших значениях  $m$ . Эти формулы будут выражать величины  $L_m$  и  $J_m$  через радиус кривизны  $\rho(s)$  кривой  $S$  и координату  $\tilde{s}$  точки наблюдения  $N$ .

Пусть (см. § 1 гл. 4)  $\rho_j$  — радиус кривизны кривой  $S$  в точке  $N_j$ ,  $\varepsilon_j$  — угол скольжения луча  $N_j N_{j+1}$  в точке  $N_j$ ,  $\Delta s_j$  — длина дуги  $N_j N_{j+1}$  кривой  $S$ ,  $l_j$  — длина луча  $N_j N_{j+1}$ .

В § 1 главы 4 было показано, что

$$\varepsilon_j = \varepsilon_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho_j}} [1 + O(\varepsilon_0^2)]. \quad (2.2)$$

Если подставить это выражение в формулу (1.5) гл. 4, выражающую  $\Delta s_j$  через  $\varepsilon_j$ , то получится равенство

$$\Delta s_j = 2\rho_0^{1/3} \rho^{2/3} \left(s_j + \frac{\Delta s_j}{2}\right) \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^3), \quad (2.3)$$

из которого следует, что

$$\frac{(\Delta s_j)^3}{\rho^2 \left(s_j + \frac{\Delta s_j}{2}\right)} = 2^3 \rho_0 \varepsilon_0^3 + O(\varepsilon_0^5), \quad (2.4)$$

т. е. отношение  $(\Delta s_j)^3 / \rho^2 (s_j + \Delta s_j / 2)$  с точностью до величин  $O(\varepsilon_0^5)$  остается неизменным для всех точек отражения. Пола-

гая в формуле (2.4)  $j = 0, 1, \dots, m$  ( $N_{m+1} = N$ ) и складывая все получающиеся таким образом равенства, находим

$$\sum_{j=0}^m \frac{(\Delta s_j)^3}{\rho^2 \left( s_j + \frac{\Delta s_j}{2} \right)} = (m+1) 2^3 \rho_0^3 \varepsilon_0^3 + (m+1) O(\varepsilon_0^5). \quad (2.5)$$

Сумму, стоящую в левой части равенства, можно приближенно заменить интегралом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \frac{(\Delta s_j)^3}{\rho^2 \left( s_j + \frac{\Delta s_j}{2} \right)} &= \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{\rho^2 \left( s_j + \frac{\Delta s_j}{2} \right)} \left[ 4\rho_0^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \left( s_j + \frac{\Delta s_j}{2} \right) \varepsilon_0^2 + O(\varepsilon_0^4) \right] \Delta s_j = \\ &= 4\rho_0^{\frac{2}{3}} \varepsilon_0^2 \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + (m+1) O(\varepsilon_0^5). \end{aligned}$$

Здесь (как и в § 1 гл. 4) мы воспользовались формулой прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла.

Теперь равенство (2.5) может быть записано в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho_0^{1/3}} \frac{1}{m+1} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O(\varepsilon_0^3), \quad (2.6)$$

откуда

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2\rho^{1/3}(0)} \frac{1}{m+1} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O \left[ \left( \frac{1}{m+1} \frac{1}{\rho^{1/3}(0)} \int_0^s \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right)^3 \right]. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) дает значение угла  $\varepsilon_0$ , под которым луч должен выйти из источника, чтобы после  $m$  отражений прийти в точку наблюдения  $N$ .

Вычислим теперь

$$L_m = \sum_{j=0}^m l_j,$$

где  $l_j$  — длина прямолинейного отрезка, соединяющего точки  $s_j$  и  $s_{j+1}$ .

Используя формулы (1.2) и (1.3) главы 4, находим

$$l_j = \sqrt{[x(s_{j+1}) - x(s_j)]^2 + [y(s_{j+1}) - y(s_j)]^2} = \\ = (s_{j+1} - s_j) - \frac{1}{24} \frac{1}{\rho_j^2} (s_{j+1} - s_j)^3 + \frac{1}{24} \frac{\rho_j'}{\rho_j^3} (s_{j+1} - s_j)^4 + \\ + O[(s_{j+1} - s_j)^5],$$

или

$$l_j = \Delta s_j - \frac{1}{24} \frac{1}{\rho^2\left(s_j + \frac{\Delta s_j}{2}\right)} (\Delta s_j)^3 + O[(\Delta s_j)^5]. \quad (2.8)$$

Складывая равенства (2.8) при  $j=0, 1, 2, \dots, m$  друг с другом, получаем

$$L_m = \tilde{s} - \frac{1}{24} \sum_{j=0}^m \frac{(\Delta s_j)^3}{\rho^2\left(s_j + \frac{\Delta s_j}{2}\right)} + (m+1) O[(\Delta s_j)^5]. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.5) переписываем (2.9) в виде

$$L_m = \tilde{s} - \frac{1}{24} (m+1) 2^3 \rho_0 \varepsilon_0^3 + (m+1) O[(\Delta s_j)^5]$$

и, наконец, используя для  $\varepsilon_0$  выражение (2.7), приходим к окончательной формуле

$$L_m = \tilde{s} - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1)^2} \left[ \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right]^3 + O[(m+1) \varepsilon_0^5]. \quad (2.10)$$

Подсчитаем величину производной  $\left. \frac{\partial L_m}{\partial n} \right|_{n=0}$ . Направим вдоль луча  $N_m N$  единичный вектор  $l_m$  и запишем производную  $\left. \frac{\partial L_m}{\partial n} \right|_{n=0}$  в виде

$$\left. \frac{\partial L_m}{\partial n} \right|_{n=0} = \frac{\partial L_m}{\partial l_m} (l_m \cdot n) = \sin \varepsilon_{m+1},$$

где  $\varepsilon_{m+1}$  — угол скольжения луча  $N_m N$  в точке  $N$ . Используя формулы (2.2) и (2.7), получаем

$$\left. \frac{\partial L_m}{\partial n} \right|_{n=0} = \varepsilon_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho(\tilde{s})}} [1 + O(\varepsilon_0^2)] = \\ = \frac{1}{2\rho^{1/3}(\tilde{s})} \frac{1}{m+1} \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O(\varepsilon_0^3). \quad (2.11)$$

Нам осталось получить формулу для полного геометрического расхождения  $J_m$ , которое по определению (рис. 42) равно

$$J_m = \lim_{d\varepsilon_q \rightarrow 0} \frac{r_m d\varepsilon_m}{d\varepsilon_q}. \quad (2.12)$$

При фиксированном числе отражений  $m$  положение точки  $N$  зависит от  $\epsilon_0$  и, следовательно,  $\tilde{s} = \tilde{s}(\epsilon_0)$ . В силу теоремы

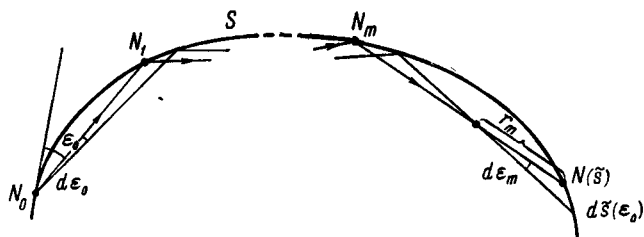


Рис. 42.

синусов формула (2.12) эквивалентна равенству

$$J_m = \lim_{d\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{d\tilde{s}(\epsilon_0)}{d\epsilon_0} \sin \epsilon_{m+1}.$$

Дифференцируя (2.7) и принимая во внимание (2.2), получаем

$$J_m = \rho_0^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}(\tilde{s}) \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O(\epsilon_0). \quad (2.13)$$

Используя формулы (2.10), (2.11) и (2.13), запишем искомую величину  $\left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0}$  в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{k^{3/2}}{\sqrt{\rho(0)\rho(\tilde{s})}} \frac{1}{(m+1)^2} \left[ \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right]^{3/2} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[ \tilde{s} - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1)^2} \left( \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right)^3 \right] + i\frac{\pi}{2} m \right\}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Вводя приведенную длину дуги

$$\gamma = (k/2)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\tilde{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)},$$

вместо (2.14) получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0} &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{k}{\sqrt{\rho(0)\rho(\tilde{s})}} \frac{\gamma^{3/2}}{(m+1)^2} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ k\tilde{s} - \frac{1}{12} \frac{\gamma^3}{(m+1)^2} + \frac{\pi}{2} m \right] \right\}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

В случае неоднородной среды вычисления проводятся совершенно аналогично. Опуская все выкладки, приведем окончательную формулу:

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_{n=0} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\omega}{\sqrt{c_0(0)P(0)c_0(\bar{s})P(\bar{s})}} \frac{\gamma^{3/2}}{(m+1)^2} \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ \omega \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{c_0(\tau)} - \frac{1}{12} \frac{\gamma^3}{(m+1)^2} + \frac{\pi}{2} m \right] \right\}, \quad (2.16)$$

где  $P(s)$  — эффективный радиус кривизны границы  $S$ ,  $c_0(s)$  — скорость распространения волн на  $S$  и

$$\gamma = \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{c_0^{1/3}(s)P^{2/3}(s)}$$

— приведенная длина дуги в случае неоднородной среды. Обратим внимание читателя на то, что структура формул (2.15) и (2.16) (соответственно для однородной и неоднородной среды) одинакова. Чтобы от формулы (2.15) перейти к формуле (2.16), радиус кривизны  $\rho(s)$  следует заменить (как и в § 3 гл. 4) эффективным радиусом кривизны  $P(c)$ , а волновое число  $k$  в формуле (2.15) должно быть заменено выражением  $\omega/\sqrt{c_0(0)c_0(\bar{s})}$ .

Заметим, что формула (2.16) симметрична по точкам 0 и  $\bar{s}$ . Этого следовало ожидать в силу того, что должен иметь место принцип взаимности для решения задачи (1.1), (1.2).

Рассмотрим фазу величины  $\frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_{n=0}$ . Исходя из физических представлений, можно считать, что две волны, пришедшие в точку наблюдения  $N$  после  $m-1$  и  $m$  отражений от границы  $S$ , сохраняют свою индивидуальность и могут наблюдаться порознь, если разность  $T_m - T_{m-1}$  времен их прихода в точку наблюдения  $N$  превосходит период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Будем предполагать в дальнейшем, что две волны могут наблюдаться независимо друг от друга, если выполняется несколько более жесткое условие:

$$T_m - T_{m-1} > q \left( \frac{\omega P(\bar{s})}{2c_0(\bar{s})} \right)^{3\delta} T, \quad (2.17)$$

где  $q \sim 1$  и  $\delta$  — малое фиксированное число. Неравенство (2.17) означает, что запаздывание одной волны относительно другой должно быть тем больше периода, чем выше частота колебаний. (Конкретное значение величины  $\delta$  будет установлено в § 3 при анализе погрешности в уточненной формуле, описывающей отраженные волны.)



Из формулы (2.16) следует, что

$$T_m - T_{m-1} \approx \frac{1}{\omega} \frac{\gamma^3}{12} \left[ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right] \approx \frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{m^3} \frac{1}{\omega}.$$

Подставляя найденное значение разности  $T_m - T_{m-1}$  в неравенство (2.17), получаем

$$m < \frac{\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P}{2c_0} \right)^{-\delta}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta = \left( \frac{3}{2} \pi q \right)^{2/3}$ . Таким образом, волны, испытавшие различное число отражений, будут наблюдаться в точке  $N$  отдельно друг от друга, если число отражений  $m < M$ , где  $M = \left[ \frac{\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P}{2c_0} \right)^{-\delta} \right]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $\frac{\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P}{2c_0} \right)^{-\delta}$ . Волны с числом отражений  $m \geq M$  интерферируют друг с другом, в результате чего возникает сложное волновое поле поверхностной волны.

Найдем ширину полосы, в которой распространяется поверхностная волна. Луч, приходящий в точку наблюдения  $N$  после  $M$  отражений, выходит из источника под углом скольжения, равным

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{c_0^{1/3}(0)}{P_0^{1/3}(0)} \frac{1}{M+1} \int_0^s \frac{ds}{c_0^{1/3}(s) P^{2/3}(s)} \approx \sqrt{\Delta} \left[ \frac{\omega P(0)}{2c_0(0)} \right]^{-1/3} \left[ \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right]^{\delta}.$$

Поверхностную волну, распространяющуюся вблизи границы  $S$ , порождают лучи, для которых  $e_0 \leq E_0$ . Оценим для неоднородной среды максимальное расстояние  $d_j$  от границы  $S$  до звена  $N_j N_{j+1}$  криволинейного луча, вышедшего из источника под углом  $E_0$ . При оценке  $d_j$  в первом приближении можно считать, что прямолинейный луч  $N_j N_{j+1}$  стягивает дугу окружности эффективного радиуса  $P(s_j)$ , поэтому

$$d_j \approx P(s_j) - P(s_j) \cos \varepsilon_j \approx \frac{1}{2} P(s_j) \varepsilon_j^2,$$

где угол  $\varepsilon_j$  связан с углом  $E_0$  формулой (2.2). Используя эту связь, получаем

$$d_j \approx \frac{\Delta}{2} P(s_j) \left[ \frac{\omega P(s_j)}{2c(s_j)} \right]^{-2/3 + 2\delta}. \quad (2.19)$$

Из формулы (2.19) следует, что поверхностная волна распространяется в пограничном слое, толщина которого оказывается пропорциональной  $\omega^{-2/3+2\delta}$ . Именно в таком пограничном слое в главе 6 были построены решения (3.4) однородного уравнения Гельмгольца, имеющие вид рядов по степеням  $\omega^{-1/2}$ .

Мы получили формулы (2.15) и (2.16) для волнового поля, используя лишь нулевое приближение лучевого метода. Однако применение нулевого приближения лучевого метода для описания отраженных волн вблизи вогнутой поверхности недостаточно. Дело в том, что при фиксированном источнике и точке наблюдения каустики многократно отраженных волн будут расположены тем ближе к границе, чем больше число отражений. Обычные же формулы лучевого метода неприменимы в окрестности каустик. Формально недостаточность нулевого приближения лучевого метода проявляется при оценке следующего приближения в формулах (2.15) и (2.16).

Уточнение формул (2.15) и (2.16) (см. далее, § 3) приводит к появлению в этих формулах дополнительного фазового множителя

$$e^{-i \cdot \frac{5}{3} \frac{(m+1)^4}{\gamma^3}}. \quad (2.20)$$

### § 3. Уточнение лучевой формулы \*)

Для уточнения формулы (2.15) и (2.16) можно использовать как дальнейшие приближения лучевого метода, так и аппарат, развитый нами в главе 2 и предназначенный специально для описания волнового поля в окрестности каустик. Мы пойдем по второму пути, причем подробно рассмотрим лишь случай постоянной скорости, полагая ее равной единице.

Прежде всего выведем уравнения каустик для многократно отраженных лучей.

Будем по-прежнему считать, что источник волнового поля и точка наблюдения помещены на границе  $S$  в точках  $N_0$  и  $N$ , (длина дуги кривой  $S$  отсчитывается от точки  $N_0$ , точке  $N$  соответствует длина дуги равная  $\bar{s}$ ).

Впишем в кривую  $S$  ломаную  $N_0, N_1, \dots, N_m, N$  так, что в ее вершинах  $N_j(s_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , выполняется закон отражения света, т. е. угол скольжения звена  $N_{j-1}N_j$  равен углу скольжения звена  $N_jN_{j+1}$ . В дальнейшем эту ломаную будем называть *экстремальным полигоном*.

Луч света, выпущенный из источника  $N_0$  вдоль звена  $N_0N_1$  экстремального полигона после  $m$  отражений в точках  $N_1, N_2, \dots, N_m$  придет в точку наблюдения  $N$ . Угол выхода  $\epsilon_0$  исходного луча  $N_0N_1$  при заданной координате  $\bar{s}$  точки наблюдения  $N$  и числе отражений  $m$  определяется формулой (2.7)

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2\rho^{1/3}(0)} \frac{1}{m+1} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O \left[ \left( \frac{1}{m+1} \frac{1}{\rho^{1/3}(0)} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right)^3 \right]. \quad (3.1)$$

При изменении угла  $\epsilon_0$  в окрестности значения (3.1) каждое звено экстремального полигона  $N_0, N_1, \dots, N_m, N$  образует семейство прямых. Семейства прямых, порожденные звеньями  $N_jN_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , будут иметь огибающие — каустики  $K_j$  многократно отраженных лучей.

Построим огибающую звена  $N_jN_{j+1}$ , другими словами, построим каустику  $K_j$  лучей, испытавших  $j$  отражений. Для этого прежде всего получим в координатах  $(s, n)$  уравнение звена  $N_jN_{j+1}$ .

\*) При первом чтении этот параграф может быть опущен. Для дальнейшего существенна лишь формула (3.33), отличающаяся от формулы (2.16) множителем (2.20).

Воспользуемся формулой (2.6), которую запишем в виде

$$\frac{1}{2\rho^{1/3}(0)} \frac{1}{m+1} \int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} = \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^3). \quad (3.2)$$

Помещая точку наблюдения  $N$  в точки отражения  $N_j(s_j)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ , наряду с (3.2) будем иметь

$$\frac{1}{2\rho^{1/3}(0)} \frac{1}{j} \int_0^{s_j} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} = \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^3). \quad (3.3)$$

Для угла скольжения  $\varepsilon_j$  луча  $N_j N_{j+1}$ , на основании формулы (2.2), получаем

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2\rho^{1/3}(s_j)} \frac{1}{j} \int_0^{s_j} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} + O \left[ \left( \frac{1}{j} \int_0^{s_j} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} \right)^3 \right].$$

В координатах  $s, n$  луч  $N_j N_{j+1}$  описывается уравнением

$$n = -\frac{1}{2} \rho^{-\frac{1}{3}}(s_j) \frac{1}{j} \int_0^{s_j} \frac{ds}{\rho^{2/3}(s)} (s - s_j) + \\ + \frac{1}{2\rho(s_j)} (s - s_j)^2 - \frac{\rho'(s_j)}{6\rho^2(s_j)} (s - s_j)^3 + \dots, \quad j=1, 2, \dots \quad (3.4)$$

(вывод уравнения (3.4) аналогичен выводу уравнения (1.12) в гл. 4).

В формуле (3.4) при изменении угла  $\varepsilon_0$  будет изменяться координата  $s_j$  начальной точки луча. Таким образом, уравнение (3.4) можно рассматривать как уравнение семейства лучей, порожденное изменением  $\varepsilon_0$  и зависящее от одного параметра  $s_j$ . Нас интересует каустика  $K_j$  этого семейства лучей. Исключая параметр  $s_j$  из (3.4) и уравнения  $\frac{\partial n}{\partial s_j} = 0$ , находим уравнение иско- мой каустики

$$n = -\frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{3}}(s) \frac{1}{j(j+1)} \left( \int_0^s \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{1}{j} \int_0^s \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^4 \right].$$

Введем функцию длины дуги:

$$\kappa_j(s) = \frac{1}{2j} \int_0^s \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)}. \quad (3.5)$$

Тогда уравнение огибающей запишется в виде:

$$n = -2\rho^{\frac{1}{3}}(s) \frac{j}{j+1} \kappa_j^2(s) + O[\kappa_j^4(s)]. \quad (3.6)$$

Очевидно, поправочное слагаемое в уравнении огибающей (3.6) на отрезке  $0 \leq s \leq s_{j+1}$  (где  $l$  — целое число порядка единицы) не превосходит величины

$O(\varepsilon_0^4)$ . В дальнейшем уравнение каустики (3.6)  $j$ -кратно отраженных лучей будет рассматриваться на отрезке  $s_j \leq s \leq s_{j+1}$ . Полагая в (3.6)  $j = 1, 2, \dots, m$ , получаем систему каустик  $K_j$  однократно, двукратно и т. д. отраженных лучей на взаимно соприкасающихся отрезках  $[s_1, s_2]$ ,  $[s_2, s_3]$  и т. д.

В § 1 мы условились считать, что поверхностная волна возникает в результате интерференции многократно отраженных волн, для которых  $\varepsilon_0 \leq E_0 = O(\omega^{-1/3+\delta})$ . Волны же, для которых  $\varepsilon_0 > E_0$ , сохраняют свою индивидуальность и могут наблюдаться отдельно друг от друга. Сейчас мы должны будем получить формулы, описывающие эти волны для значений  $\varepsilon_0$ , близких к  $E_0$ , т. е. в момент их отделения от поверхностной волны. Поэтому угол  $\varepsilon_0$  и функцию  $\kappa_j(s)$  на отрезке  $s_j \leq s \leq s_{j+1}$  будем считать впредь величинами порядка  $\omega^{-1/3+\delta}$ .

Уточним формулу лучевого типа, описывающую на границе тела  $S$  волновое поле  $j$ -кратно отраженной волны. (При построении таких формул нами будут использованы результаты главы 2 и уравнения каустик (3.6).)

Волновое поле  $u_j(M)$  волны, испытавшей  $j$  отражений, в окрестности соответствующей ей каустики  $K_j$  описывается формулой (см. формулу (7.18) гл. 2)

$$u_j(M) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \mu_j^{1/4}(M) \left( \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_1)}{\sqrt{J_1^{(j)}(M)}} + \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_2)}{\sqrt{J_2^{(j)}(M)}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] v\left(-\omega^{2/3}\mu_j(M)\right) + \frac{i}{\omega^{1/3}} \left[ \mu_j^{-1/4}(M) \left( \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_2)}{\sqrt{J_2^{(j)}(M)}} - \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_1)}{\sqrt{J_1^{(j)}(M)}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times v'\left(-\omega^{2/3}\mu_j(M)\right) \right\} e^{i\omega\xi_j(M)} \cdot \omega^{-r}, \quad (3.7)$$

где

$$\mu_j = \left[ \frac{3}{4} (\tau_2^{(j)} - \tau_1^{(j)}) \right]^{2/3}, \quad \xi_j = \frac{\tau_1^{(j)} + \tau_2^{(j)}}{2},$$

и  $\tau_1^{(j)}$  — эйконал луча, подходящего к каустике  $K_j$ ,  $\tau_2^{(j)}$  — эйконал луча, прошедшего каустику;  $J_1^{(j)}$ ,  $J_2^{(j)}$  — геометрические расходимости соответствующих лучей;  $\chi_0^{(j)}(\alpha_1)$  — произвольная функция, сохраняющая постоянное значение на подходящем к каустике луче, который характеризуется параметром  $\alpha_1$ ,  $\chi_0^{(j)}(\alpha_2)$  — та же функция, вычисленная для значения параметра  $\alpha_2$ , характеризующего прошедший каустику луч и, следовательно, постоянная на этом луче;  $v$  и  $v'$ , как всегда, означают функцию Эйри и ее производную.

Считая  $\kappa_j(s)$  малой величиной порядка  $\omega^{-1/3+\delta}$ , вычислим в точке  $M(s')$ ,  $s_j \leq s' \leq s_{j+1}$ , расположенной на границе  $S$ , т. е. при  $n = 0$ , функцию  $\mu_j(M)$  и коэффициенты при  $v(-\omega^{2/3}\mu_j)$  и  $v'(-\omega^{2/3}\mu_j)$  в формуле (3.7). Вычисления выполним с точностью до величины порядка  $O(\kappa_j^3)$ .

Очевидно, при постоянной скорости распространения волн, равной единице,  $\tau_1^{(j)}$  — длина  $L_{j-1}(s')$  экстремального полигона  $N_0N'_1, \dots, N'_{j-1}M(s')$ , состоящего из  $j$  звеньев, а  $\tau_2^{(j)}$  — длина  $L_j(s')$  экстремального полигона  $N_0N''_1 \dots N''_jM(s)$ , состоящего из  $j+1$  звена. В силу формулы (2.10)

$$L_{j-1}(s') = s' - \frac{1}{24} \frac{1}{j^2} \left[ \int_0^{s'} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right]^3 + O(\kappa_j^4),$$

и

$$L_j(s') = s' - \frac{1}{24} \frac{1}{(j+1)^2} \left[ \int_0^{s'} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right]^3 + O(\kappa_j^4),$$

а, следовательно,

$$\mu_j(s') = 2^{-\frac{2}{3}} \left[ \frac{j(j + \frac{1}{2})}{(j+1)^2} \right]^{2/3} \kappa_j^2(s') + O(\kappa_j^3), \quad (3.8)$$

где  $\kappa_j(s)$  определяется формулой (3.5).Для геометрических расходимостей  $J_j^{(1)}$  и  $J_j^{(2)}$  имеют место формулы

$$J_1^{(j)} = \frac{l_1}{\rho_1^{(j)}} \quad \text{и} \quad J_2^{(j)} = \frac{l_2}{\rho_2^{(j)}},$$

где  $\rho_1^{(j)}$  и  $\rho_2^{(j)}$  — радиусы кривизны каустики  $K_j$  в точках прикосновения луча, подходящего к каустике, и луча, отходящего от каустики;  $l_1$  и  $l_2$  — длины этих лучей между точками прикосновения и точкой  $M(s')$ . В дальнейшем величины  $\rho_1^{(j)}$  и  $\rho_2^{(j)}$ , постоянные на соответствующих лучах, объединим с множителями  $\chi_0^{(j)}(\alpha_1)$  и  $\chi_0^{(j)}(\alpha_2)$  и введем обозначения

$$\chi_0^{(j)}(\alpha_r) \sqrt{\rho_r^{(j)}} = \chi_j(\alpha_r), \quad r = 1, 2.$$

Пусть  $s^{(1)}$  — координата точки прикосновения к каустике  $K_j$  луча, подходящего к каустике,  $s^{(2)}$  — координата точки прикосновения к каустике  $K_j$  луча, прошедшего каустику (рис. 43). Очевидно, длины  $l_1$  и  $l_2$  выражаются через

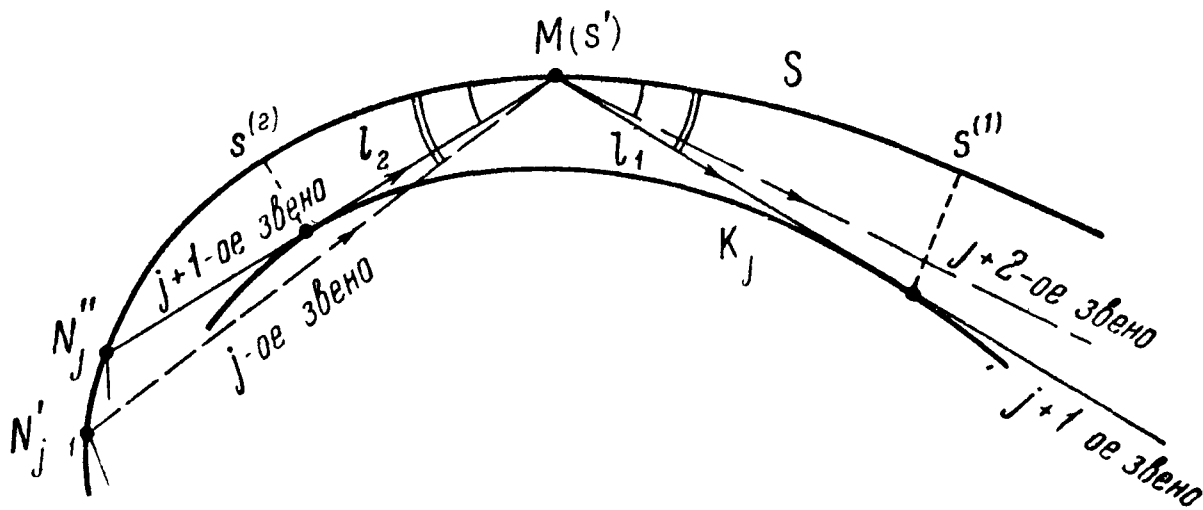


Рис. 43.

координаты  $s'$ ,  $s^{(1)}$  и  $s^{(2)}$  по формулам

$$\begin{aligned} l_1 &= s^{(1)} - s' + O[(s^{(1)} - s')^3], \\ l_2 &= s' - s^{(2)} + O[(s' - s^{(2)})^3]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Определим  $s^{(1)}$  и  $s^{(2)}$ . Пусть  $n = n_1(s)$  и  $n = n_2(s)$  — два луча, принадлежащие совокупности (3.4) и проходящие через точку  $M(s')$ . Уравнение (3.6) каустики  $K_j$  запишем в виде  $n = n(s)$ , где

$$n(s) = -2\rho^{\frac{1}{3}}(s) \frac{j}{j+1} \kappa_j^2(s) + O[\kappa_j^4(s)].$$

Величины  $s^{(1)}$  и  $s^{(2)}$  должны, очевидно, удовлетворять уравнениям  $n_1(s^{(1)}) = n(s^{(1)})$  и  $n_2(s^{(2)}) = n(s^{(2)})$ , решая которые находим

$$\begin{aligned} s^{(1)} - s' &= \kappa_{j+1/2}(s') \rho^{2/3}(s') + \frac{1}{3} \kappa_{j+1/2}^2(s') \rho^{1/3}(s') \rho'(s') + O(\kappa_{j+1/2}^3), \\ s' - s^{(2)} &= \kappa_{j+1/2}(s') \rho^{2/3}(s') - \frac{1}{3} \kappa_{j+1/2}^2(s') \rho^{1/3}(s') \rho'(s') + O(\kappa_{j+1/2}^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для выделения главных членов при написании искомых коэффициентов при  $v$  и  $v'$  в формуле (3.7) оценим разность  $\chi_j(\alpha_2) - \chi_j(\alpha_1)$ . Выберем в качестве параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  координаты  $s^{(1)}$  и  $s^{(2)}$  точек прикосновения соответствующих лучей к каустике. Тогда

$$\chi_j(\alpha_2) - \chi_j(\alpha_1) = O(\alpha_2 - \alpha_1) = O(s^{(2)} - s^{(1)}),$$

и в силу равенств (3.10)

$$\chi_j(\alpha_2) - \chi_j(\alpha_1) = O(\kappa_{j+1/2}(s)). \quad (3.11)$$

С помощью формул (3.9) — (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_1)}{\sqrt{J_1^{(j)}(M)}} + \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_2)}{\sqrt{J_2^{(j)}(M)}} &= \frac{1}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}(s') \rho^{1/2}(s')} \{[\chi_j(\alpha_1) + \chi_j(\alpha_2)] + O(\kappa_{j+1/2}^2)\}, \\ \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_2)}{\sqrt{J_2^{(j)}(M)}} - \frac{\chi_0^{(j)}(\alpha_1)}{\sqrt{J_1^{(j)}(M)}} &= \frac{1}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}(s') \rho^{1/2}(s')} \{[\chi_j(\alpha_2) - \chi_j(\alpha_1)] + \\ &+ \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s) \rho'(s) [\chi_j(\alpha_2) + \chi_j(\alpha_1)] \kappa_{j+1/2}(s) + O(\kappa_{j+1/2}^2)\}. \end{aligned}$$

Величины  $\chi_j(\alpha_1)$  и  $\chi_j(\alpha_2)$ , входящие в эти формулы, будут определены ниже.

Обратимся теперь к функции Эйри  $v(-\omega^{2/3}\mu)$  и ее производной  $v'(-\omega^{2/3}\mu)$ . Поскольку мы считаем  $\kappa_j(s) \sim \omega^{-1/3+\delta}$ , аргумент функции Эйри имеет порядок  $\omega^{2\delta}$ , и поэтому сама функция Эйри и ее производная могут быть представлены асимптотическими рядами (см. Дополнение 1):

$$\begin{aligned} v\left(-\omega^{\frac{2}{3}}\mu\right) &\sim \frac{\omega^{-1/6}\mu^{-1/4}}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}n}}{(\omega\mu^{3/2})^n} \exp\left(i\frac{2}{3}\omega\mu^{\frac{3}{2}} - i\frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}}{(\omega\mu^{3/2})^n} \exp\left(-i\frac{2}{3}\omega\mu^{\frac{3}{2}} + i\frac{\pi}{4}\right) \right\}, \\ v'\left(-\omega^{\frac{2}{3}}\mu\right) &\sim \frac{\omega^{\frac{1}{6}}\mu^{\frac{1}{4}}}{2i} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}n}}{(\omega\mu^{3/2})^n} \exp\left(i\frac{2}{3}\omega\mu^{\frac{3}{2}} - i\frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}}{(\omega\mu^{3/2})^n} \exp\left(-i\frac{2}{3}\omega\mu^{\frac{3}{2}} + i\frac{\pi}{4}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{5}{48}$ ,  $a_n = \frac{(6n-1)!!}{144^n (2n-1)!! n!}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_n = a_n - \left(\frac{3}{2}n - \frac{5}{4}\right) a_{n-1}$ .  
Разлагая в формуле (3.7) функцию Эйри и ее производную в асимптотические ряды, выпишем в явном виде только те члены, порядок которых ниже  $\omega^{-9\delta}$ ,  $\omega^{-2/3+2\delta}$  и  $\omega^{-1/3-2\delta}$ .

$$u_j(M) = u_j^{(1)}(M) + u_j^{(2)}(M), \quad (3.12)$$

где

$$u_j^{(1)}(M) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_j(\alpha_1)}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}(s') \rho^{1/3}(s')} \left\{ 1 + ia_1 \frac{1}{\omega \mu_j^{3/2}(s')} - a_2 \frac{1}{\omega^2 \mu_j^3(s')} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s') \rho'(s') \kappa_{j+1/2}(s') + O(\omega^{-9\delta}) + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) \right\} \times \\ \times \exp(i\omega\tau_1^{(j)}) \omega^{-r} \quad (3.13)$$

и

$$u_j^{(2)}(M) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_j(\alpha_2)}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}(s') \rho^{1/3}(s')} \left\{ 1 - ia_1 \frac{1}{\omega \mu_j^{3/2}(s')} - a_2 \frac{1}{\omega^2 \mu_j^3(s')} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s') \rho'(s') \kappa_{j+1/2}(s') + O(\omega^{-9\delta}) + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) \right\} \times \\ \times \exp(i\omega\tau_2^{(j)}) \omega^{-r}. \quad (3.14)$$

Первое слагаемое  $u_j^{(1)}(M)$  в формуле (3.12) описывает волну, идущую через точку  $M$  по направлению к каустике  $K_j$ , второе слагаемое  $u_j^{(2)}(M)$  — волну, проходящую через точку  $M$  в направлении от каустики  $K_j$ .

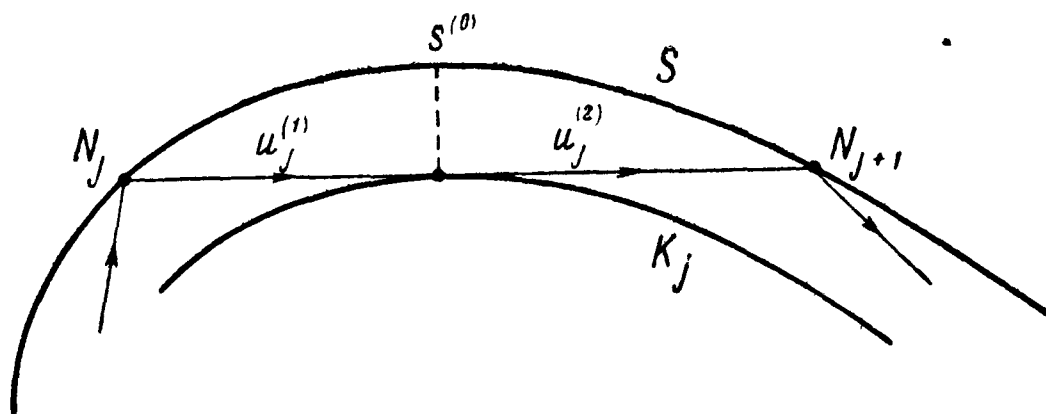


Рис. 44.

Возьмем теперь (рис. 44) на границе  $S$  две точки  $N_j(s = s_j)$  и  $N_{j+1}(s = s_{j+1})$  так, чтобы луч, проходящий через эти точки, касался каустики  $K_j$  в некоторой точке с координатой  $s = s^{(0)}$ . В каждой из этих точек волновое поле может быть представлено суммой двух слагаемых  $u_j^{(1)}(N_j) + u_{j-1}^{(2)}(N_j)$  и  $u_{j+1}^{(1)}(N_{j+1}) + u_j^{(2)}(N_{j+1})$ , вычисляемых по формулам (3.13) и (3.14).

Будем считать, что волна

$$u_j^{(1)}(N_j) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_j}{\chi_{j+1/2}^{1/2}(s_j) \rho^{1/3}(s_j)} \left\{ 1 + ia_1 \frac{1}{\omega \mu_j^{3/2}(s_j)} - a_2 \frac{1}{\omega^2 \mu_j^3(s_j)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s_j) \rho'(s_j) \chi_{j+1/2}(s_j) + O(\omega^{-9\delta}) + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) \right\} \times \\ \times \exp [i\omega \tau_1^{(j)}(s_j)] \omega^{-r} \quad (3.15)$$

возникла в результате отражения в точке  $N_j$  волны, испытавшей до этого на пути из источника в точку  $N_j$   $j-1$  отражений. Эта волна, распространяясь вдоль луча  $N_j N_{j+1}$ , в точке  $N_{j+1}$  даст волновое поле, описываемое функцией

$$u_j^{(2)}(N_{j+1}) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_j}{\chi_{j+1/2}^{1/2}(s_{j+1}) \rho^{1/3}(s_{j+1})} \left\{ 1 - ia_1 \frac{1}{\omega \mu_j^{3/2}(s_{j+1})} - \right. \\ \left. - a_2 \frac{1}{\omega \mu_j^3(s_{j+1})} + \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s_{j+1}) \rho'(s_{j+1}) \chi_{j+1/2}(s_{j+1}) + O(\omega^{-9\delta}) + \right. \\ \left. + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) \right\} \exp [i\omega \tau_2^{(j)}(s_{j+1})] \omega^{-r}. \quad (3.16)$$

Обратим внимание читателя на то, что в формулах (3.15) и (3.16) множитель  $\chi_j$  принимает одно и то же значение, так как и в той, и в другой формуле функция  $\chi_j(\alpha)$  должна вычисляться при одном и том же значении аргумента  $\alpha = s^{(0)}$ , соответствующем лучу  $N_j N_{j+1}$ . Отражение волны  $u_j^{(2)}$  в точке  $N_{j+1}$  приводит к возникновению волны  $u_{j+1}^{(1)}$ . Эта волна будет распространяться от границы  $S$  в направлении каустики  $K_{j+1}$  и, следовательно, будет описываться в точке  $N_{j+1}$  формулой (3.15), в которой значок  $j$  должен быть заменен на  $j+1$ . Последующие отражения приводят к волнам, для которых каустиками являются  $K_{j+2}$ ,  $K_{j+3}$  и т. д.

Определим связь между эйконалами  $\tau_2^{(j)}$  и  $\tau_1^{(j)}$  и множителями  $\chi_j$  и  $\chi_{j+1}$ , входящими в описание волнового поля в окрестности соседних каустик  $K_j$  и  $K_{j+1}$ .

Рассмотрим распространение волны вдоль экстремального полигона  $N_0, N_1, \dots, N_m, N$ , соединяющего источник  $N_0$  и точку наблюдения  $N(\bar{s})$ . В силу граничного условия  $U|_S = 0$  в вершинах полигона  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_m$  должны выполняться равенства

$$u_0 + u_1^{(1)}|_{N_1} = 0 \quad (3.17)$$

и

$$u_j^{(2)} + u_{j+1}^{(1)}|_{N_{j+1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.18)$$

где  $u_0$  — волна, распространяющаяся непосредственно от источника. После подстановки (3.15) и (3.16) в равенства (3.18), поскольку эти равенства должны выполняться тождественно относительно  $\omega$ , получаем

$$\tau_1^{(j+1)}(s_{j+1}) = \tau_2^{(j)}(s_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.19)$$



и

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_{j+1}}{\kappa_{j+3/2}^{1/2}(s_{j+1})} \left\{ 1 + \frac{ia_1}{\omega \mu_{j+1}^{3/2}(s_{j+1})} - \frac{a_2}{\omega^2 \mu_{j+1}^3(s_{j+1})} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s_{j+1}) \rho'(s_{j+1}) \kappa_{j+3/2}(s_{j+1}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) + \right. \\ \left. + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-9\delta}) \right\} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\chi_j}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}(s_{j+1})} \left\{ 1 - \frac{ia_1}{\omega \mu_j^{3/2}(s_{j+1})} - \right. \\ \left. - \frac{a_2}{\omega^2 \mu_j^3(s_{j+1})} + \frac{1}{6} \rho^{-\frac{1}{3}}(s_{j+1}) \rho'(s_{j+1}) \kappa_{j+1/2}(s_{j+1}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) + \right. \\ \left. + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-9\delta}) \right\}. \quad (3.20)$$

Равенство (3.20) позволяет определить оставшиеся до сих пор неизвестными множители  $\chi_j$ . Из этого равенства с учетом порядковых соотношений  $\omega \mu_j^{3/2} \sim \omega \mu_{j+1}^{3/2} \sim \omega^{-3\delta}$ ,  $\kappa_{j+1/2} \sim \omega^{-1/3+\delta}$  следует, что

$$\chi_{j+1} = i \frac{\kappa_{j+3/2}^{1/2}}{\kappa_{j+1/2}^{1/2}} \left\{ 1 - ia_1 \left( \mu_j^{-\frac{3}{2}} + \mu_{j+1}^{-\frac{3}{2}} \right) \omega^{-1} - \right. \\ \left. - \left[ a_2 (\mu_j^{-3} - \mu_{j+1}^{-3}) + a_1^2 \left( \mu_{j+1}^{-3} + \mu_j^{-\frac{3}{2}} \mu_{j+1}^{-\frac{3}{2}} \right) \right] \omega^{-2} - \right. \\ \left. - \frac{d}{ds} \left( \ln \rho^{-\frac{1}{6}} \right) \cdot \rho^{\frac{2}{3}} (\kappa_{j+1/2} + \kappa_{j+3/2}) + O(\omega^{-1/3-2\delta}) + \right. \\ \left. + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-9\delta}) \right\}_{s=s_{j+1}} \chi_j. \quad (3.21)$$

Формула (3.21) позволяет выразить  $\chi_m$  через  $\chi_1$ . Прологарифмируем равенство (3.21) и затем полученный результат просуммируем по всем  $j$  от 1 до  $m-1$ . Используя разложение  $\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$  и принимая во внимание формулы (3.5) и (3.8), получаем

$$\ln \chi_m = i \frac{\pi}{2} (m-1) + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2m+1} - \sum_{j=1}^{m-1} \left[ \alpha(j) \kappa_{j+1}^{-3}(s_{j+1}) \omega^{-1} + \right. \\ \left. + \beta(j) \kappa_{j+1}^{-6}(s_{j+1}) \omega^{-2} + \gamma(j) \frac{d}{ds} \ln \rho^{-\frac{1}{6}}(s) \Big|_{s=s_{j+1}} 2\rho^{\frac{2}{3}}(s_{j+1}) \kappa_{j+1}(s_{j+1}) + \right. \\ \left. + O(\omega^{-1/3-2\delta}) + O(\omega^{-2/3+2\delta}) + O(\omega^{-9\delta}) \right] + \ln \chi_1, \quad (3.22)$$

где

$$\alpha(j) = 4a_1 i \left[ \frac{j^2}{(j+1)(2j+1)} + \frac{(j+2)^2}{(j+1)(2j+3)} \right] = 4a_1 i + \frac{\alpha_1(j)}{j^2}, \\ |\alpha_1(j)| < \text{const},$$

$$\beta(j) = \frac{\beta_1(j)}{j}, \quad |\beta_1(j)| < \text{const},$$

$$\gamma(j) = \frac{1}{2} \left( \frac{2j+2}{2j+1} + \frac{2j+2}{2j+3} \right) = 1 + \frac{\gamma_1(j)}{j^2}, \quad |\gamma_1(j)| < \text{const}.$$

Из формулы (3.3) следует, что

$$\kappa_{j+1}(s_{j+1}) = \rho_0^{1/3} \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^3),$$

т. е.  $\kappa_{j+1}(s_{j+1})$  при всех  $j$  с точностью до величины  $\varepsilon_0^3 \sim \omega^{-1+3\delta}$  принимает равные значения. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m-1} \alpha(j) \kappa_{j+1}^{-3}(s_{j+1}) \omega^{-1} = i4a_1 \frac{m-1}{\rho_0 \varepsilon_0^3 \omega} + O(\omega^{-3\delta}) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} + (m-1) O(\omega^{-2/3-\delta})$$

и

$$\sum_{j=1}^{m-1} \beta(j) \kappa_{j+1}^{-6}(s_{j+1}) \omega^{-2} = O(\omega^{-6\delta}) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}.$$

Чтобы в формуле (3.22) просуммировать выражение, содержащее  $\gamma(j)$ , вспомним, что (см. (2.3))

$$2\rho^{2/3}(s_{j+1}) \rho_0^{1/3} \varepsilon_0 = s_{j+1} - s_j + O(\varepsilon_0^2) = \Delta s_j + O(\varepsilon_0^2). \quad (3.23)$$

Равенство (3.23) позволяет заменить сумму соответствующим интегралом:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \gamma(j) \frac{d}{ds} \ln \rho^{-1/6}(s) \Big|_{s=s_{j+1}} \cdot 2\rho^{2/3}(s_{j+1}) \kappa_{j+1}(s_{j+1}) = \int_{s_1}^{s_m} \frac{d}{ds} \ln \rho^{-1/6}(s) ds + \\ + O(\omega^{-1/3+\delta}) + O(\omega^{-1/3+\delta}) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} + (m-1) O(\omega^{-2/3+2\delta}).$$

Таким образом, поскольку

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} < \log m + C$$

(где  $C$  — постоянная Эйлера) и в силу формулы (3.2)

$$m = O(\varepsilon_0^{-1}) = O(\omega^{1/3-\delta}),$$

равенство (3.22) может быть записано в виде

$$\ln \chi_m = i \frac{\pi}{2} (m-1) + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2m+1} - i4a_1 \frac{m-1}{\rho_0 \varepsilon_0^3 \omega} + \\ + \ln \frac{\rho^{1/6}(s_m)}{\rho^{1/6}(s_1)} + \ln \chi_1 + O(\omega^{-1/3+\delta}) + O(\omega^{-3\delta}) + O(\omega^{1/3-10\delta}),$$

откуда

$$\chi_m = e^{i \frac{\pi}{2} (m-1)} \sqrt{\frac{3}{2m+1}} \exp\left(-i \frac{5}{12} \frac{m-1}{\rho_0 \varepsilon_0^3 \omega}\right) \times \\ \times \frac{\rho^{1/6}(s_m)}{\rho^{1/6}(s_1)} \chi_1 [1 + O(\omega^{-1/3+\delta}) + O(\omega^{-3\delta}) + O(\omega^{1/3-10\delta})].$$

Для определения  $\chi_1$  обратимся к равенству (3.17). Волновое поле  $u_0$ , распространяющееся из источника вдоль луча  $N_0N_1$ , в точке  $N_1$  описывается формулой лучевого метода:

$$u_0 = -\frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k} \varepsilon_0 \frac{e^{ikN_0N_1}}{\sqrt{N_0N_1}} [1 + O(\omega^{-3\delta})], \quad (3.24)$$

где  $k = \omega/c_0 = \omega$ , так как  $c_0 = 1$ . (Погрешность в формуле (3.24) будет установлена в следующем параграфе при исследовании точного решения для круга). Так как

$$N_0N_1 = 2\rho(0)\varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^3) = 2\rho(0)\varepsilon_0 [1 + O(\omega^{-2/3+2\delta})],$$

формула (3.24) может быть переписана в виде

$$u_0 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{\rho(0)}} e^{i\omega\tau_0} [1 + O(\omega^{-3\delta})], \quad (3.25)$$

где  $\tau_0 = N_0N_1$  — эйконал волны в точке  $N_1$ . Подставляя (3.15) и (3.25) в равенство (3.17), получаем

$$\tau_1^{(1)} = \tau_0 \quad (3.26)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\chi_1}{\kappa_1^{1/2}(s_1)\rho^{1/3}(s_1)} \omega^{-r-1/6} [1 + O(\omega^{-3\delta})] = \\ = -\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{\pi\rho(0)}} [1 + O(\omega^{-3\delta})]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Так как

$$\kappa_1^{1/2}(s_1) = \rho^{1/6}(0)\varepsilon_0^{1/2} [1 + O(\omega^{-2/3+2\delta})]$$

и

$$\rho^{1/6}(s_1) = \rho^{1/6}(0) [1 + O(\omega^{-1/3+\delta})],$$

то из (3.27) следует, что  $r = -2/3$  и

$$\chi_1 = i \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{\rho^{1/6}(s_1)}{\rho^{1/6}(0)} \varepsilon_0 [1 + O(\omega^{-3\delta})].$$

Найденное значение  $\chi_1$  приводит к следующей формуле для  $\chi_m$ :

$$\begin{aligned} \chi_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{2}m} \frac{1}{\rho^{1/6}(0)} \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{m+1/2}} \exp\left(-i\frac{5}{12} \frac{m-1}{\rho(0)\varepsilon_0^3\omega}\right) \times \\ \times [1 + O(\omega^{-1/3+\delta}) + O(\omega^{-3\delta}) + O(\omega^{1/3-10\delta})]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Определив  $\chi_m$ , можно вычислить волну  $u_m^{(2)}$ , приходящую в точку наблюдения  $N$  вдоль луча  $N_mN$ . Для этого в формуле (3.16) следует положить  $j = m$  и заменить  $s_{m+1}$  на  $\tilde{s}$  и  $N_{m+1}$  на  $N$ . Волна  $u_{m+1}^{(1)}$ , возникающая в точке  $N$  в результате отражения волны  $u_m^{(2)}$ , может быть вычислена по формуле (3.15),

в которой следует положить  $j = m + 1$ . Значение множителя  $\chi_{m+1}$  даст формула (3.28) после замены в ней  $m$  на  $m + 1$ .

Вычислим на границе  $S$  в точке  $N$  нормальную производную волны, испытавшей  $m$  отражений:

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_N = \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial n} \Big|_N + \frac{\partial u_{m+1}^{(1)}}{\partial n} \Big|_N.$$

Чтобы получить величины  $\frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial n} \Big|_N$  и  $\frac{\partial u_{m+1}^{(1)}}{\partial n} \Big|_N$  с точностью  $O(\omega^{-3\delta})$ , достаточно продифференцировать по  $n$  лишь экспоненциальные множители, входящие в  $u_m^{(2)}$  и  $u_{m+1}^{(1)}$ , и положить  $\chi_{m+1} = i\chi_m$ . Таким образом, используя формулы (3.15) и (3.16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_N &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{2}m} \frac{1}{\rho^{1/6}(0)} \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{m+1/2}} \exp\left(-i\frac{5}{12} \frac{m-1}{\rho(0)\varepsilon_0^3\omega}\right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2m+1}{2m+2}} \frac{i\omega^{3/2}}{2\rho^{1/6}(\bar{s})\rho^{1/6}(0)\varepsilon_0^{1/2}} \left[ e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\partial \tau_2^{(m)}}{\partial n} \Big|_{n=0} e^{i\omega\tau_2^{(m)}} + \right. \\ &\left. + ie^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\partial \tau_1^{(m+1)}}{\partial n} \Big|_{n=0} e^{i\omega\tau_1^{(m+1)}} \right] \{1 + O(\omega^{-1/3+\delta}) + O(\omega^{-3\delta}) + O(\omega^{1/3-10\delta})\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Значение  $\tau_2^{(m)}(\bar{s}) = \tau_1^{(m+1)}(\bar{s})$  в силу условий (3.19) и (3.26) равно длине экстремального полигона  $N_0N_1\dots N_mN$  и определяется формулой (2.10).

Величина  $\frac{\partial \tau_2^{(m)}}{\partial n} \Big|_{n=0} = -\frac{\partial \tau_1^{(m+1)}}{\partial n} \Big|_{n=0}$  определяется формулой (2.11). При-

нимая во внимание порядковые соотношения  $m+1 \sim \omega^{1/3-\delta}$  и  $\frac{1}{\varepsilon_0^3\omega} \sim \omega^{-3\delta}$ ,

перепишем (3.29) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_N &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}m} \frac{\omega^{3/2}\varepsilon_0^{3/2}}{\rho^{1/2}(\bar{s})} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \exp\left(-i\frac{5}{12} \frac{m+1}{\rho(0)\varepsilon_0^3\omega}\right) \times \\ &\times \exp\left\{i\omega \left[ \bar{s} - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1)^2} \left( \int_0^{\bar{s}} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^3 \right] \right\} \times \\ &\times \{1 + O(\omega^{-1/3+4\delta}) + O(\omega^{-3\delta}) + O(\omega^{1/3-10\delta})\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Поправочные члены указывают на то, что формула (3.30) имеет смысл для значений  $\delta$ , удовлетворяющих неравенству  $1/30 < \delta < 1/12$ . Минимальная погрешность порядка  $\omega^{-1/7}$  получается при  $\delta = 1/21$ . Придадим формуле

(3.30) вид, симметричный относительно положения источника и точки наблюдения. Воспользовавшись для этого формулой (3.1) и выбирая  $\delta = 1/21$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_N &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\rho(0)\rho(\bar{s})}} \frac{1}{(m+1)^2} \left[ \int_0^{\bar{s}} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right]^{3/2} \times \\ &\times \exp \left\{ i\omega \left[ \bar{s} - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1)^2} \left( \int_0^{\bar{s}} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^3 \right] - \right. \\ &\left. - i \frac{10}{3} \frac{(m+1)^4}{\omega} \left( \int_0^{\bar{s}} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^{-3} + i \frac{\pi}{2} m \right\} [1 + O(\omega^{-1/7})]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Формула (3.31) получена в предположении  $c_0 = 1$ . Если  $c_0$  постоянно, но отлично от единицы, частота  $\omega$  в (3.31) должна быть заменена волновым числом  $k$  ( $k = \omega/c_0$ ). Формула (3.31) будет отличаться тогда от формулы (2.14) лишь дополнительным множителем

$$\exp \left\{ -i \frac{10}{3} \frac{(m+1)^4}{\omega} \left( \int_0^{\bar{s}} \frac{d\tau}{\rho^{2/3}(\tau)} \right)^{-3} \right\}, \quad (3.32)$$

по модулю равным единице. Этот дополнительный множитель возник благодаря учету малой величины  $\alpha(j) \frac{1}{\kappa_{j+1}^3 \omega} \sim \omega^{-3\delta}$  в большом числе  $m \sim \omega^{1/3-\delta}$  актов отражения. Естественно, что при достаточно грубом выводе формулы (2.14) в § 2 он оказался утерянным.

Для случая переменной скорости распространения волн аналогичный множитель может быть получен из (3.32) посредством замен, указанных в § 2.

Добавляя этот множитель в формуле (2.16) и опуская значок тильды  $\sim$  у координаты  $\bar{s}$  точки наблюдения  $N$ , получаем следующую уточненную формулу в случае переменной скорости распространения волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_N &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\omega}{\sqrt{c_0(0)P(0)c_0(s)P(s)}} \frac{\gamma^{3/2}}{(m+1)^2} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - \frac{1}{12} \frac{\gamma^3}{(m+1)^2} - \frac{5}{3} \frac{(m+1)^4}{\gamma^3} + \frac{\pi}{2} m \right] \right\} \times \\ &\times [1 + O(\omega^{-1/7})], \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} \quad (3.34)$$

— приведенная длина дуги, соответствующая точке наблюдения  $N(s, 0)$ .

#### § 4. Волновое поле источника, расположенного на границе круга

В предыдущих параграфах мы получили формулы, описывающие многократно отраженные волны в момент их выделения из поверхностной волны. Волны с большим числом отражений, распространяющиеся внутри пограничного слоя, не могут быть описаны полученными формулами. Такие волны, интерферируя друг с другом, порождают поверхностную волну, распространяющуюся в пограничном слое вблизи границы  $S$ . Для описания поверхностной волны следует использовать решения однородного уравнения Гельмгольца, построенные (см. гл. 6) вблизи границы  $S$ . Из этих решений мы должны будем сконструировать такую суперпозицию, которая бы описывала поверхностную волну, распространяющуюся от точечного источника. Вначале мы обратимся к исследованию поверхностной волны в случае круговой границы, когда переменные разделяются и для поверхностной волны может быть построено представление в виде контурного интеграла. Этот интеграл укажет нам конструкцию искомой суперпозиции, описывающей поверхностную волну в общем случае.

Таким образом, как и в предыдущих главах, мы прежде всего обращаемся к простейшей эталонной задаче, решение которой затем должно быть перенесено на общий случай.

Рассмотрим решение задачи о поле точечного источника, действующего на границе круга радиуса  $\rho$ . Другими словами, мы построим и проведем исследование функции Грина для круга в том частном случае, когда источник находится на его границе. Скорость распространения волн внутри круга будем считать величиной постоянной. Чтобы поставленная задача имела решение при любой частоте  $\omega$ , будем предполагать, что  $\omega$  — комплексная величина с малой положительной мнимой частью

$$\omega = \omega' + i\omega'', \quad 0 < \omega'' \ll \omega' \quad (0 < \arg \omega \ll 1).$$

Введем полярные координаты. Пусть  $\rho, \varphi_0$  — координаты источника,  $r, \varphi$  — координаты точки наблюдения. Искомое волновое поле точечного источника (функцию Грина) обозначим  $g(r; \varphi; \rho, \varphi_0)$ . Функция Грина должна при  $r < \rho$  удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + k^2 g = 0, \quad (4.1)$$

$$(|g(0, \varphi; \rho, \varphi_0)| < \infty).$$

и при  $r = \rho$  — краевому условию

$$g|_{r=\rho} = \delta[\rho(\varphi - \varphi_0)] = \frac{1}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.2)$$

где  $k = \omega/c$  ( $c = \text{const}$ ),  $\delta$  — дельта-функция.

Решение задачи (4.1), (4.2) проще всего построить методом разделения переменных в виде ряда Фурье по  $\cos n(\varphi - \varphi_0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для исследования решения при  $kr \rightarrow \infty$  ряд Фурье целесообразно преобразовать, используя теорему о вычетах (метод Ватсона), в контурный интеграл \*).

Прежде всего построим для функции Грина  $g(r, \varphi; \rho, \varphi_0)$  ряд Фурье. Частными решениями уравнения (4.1), ограниченными в начале координат и  $2\pi$ -периодическими по углу  $\varphi$ , являются выражения

$$J_n(kr) \sin n\varphi \quad \text{и} \quad J_n(kr) \cos n\varphi. \quad (4.3)$$

Здесь  $J_n(kr)$  — функция Бесселя и  $n \geq 0$  — целое. Будем искать функцию  $g(r, \varphi; \rho, \varphi_0)$  в виде линейной суперпозиции решений (4.3):

$$g(r, \varphi; \rho, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) J_n(kr). \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  следует выбрать так, чтобы выполнялось краевое условие (4.2). Сравнивая правую часть равенства (4.4) при  $r = \rho$  с известным разложением дельта-функции \*\*)

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \cos n(\varphi - \varphi_0) \right),$$

получаем

$$a_n = 0, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{1}{J_0(k\rho)}, \quad b_n = \frac{1}{\pi\rho} \frac{1}{J_n(k\rho)}, \quad n \geq 1.$$

Таким образом,

$$g(r, \varphi; \rho, \varphi_0) = \frac{1}{\pi\rho} \left\{ \frac{1}{2} \frac{J_0(kr)}{J_0(k\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n(k\rho)} \cos n(\varphi - \varphi_0) \right\}. \quad (4.5)$$

Ряд (4.5) при  $r < \rho$  сходится абсолютно, при  $r = \rho$  сходимость ряда (4.5) следует понимать в смысле теории обобщенных функций.

\*) Контурный интеграл для функции Грина  $g(r, \varphi; \rho, \varphi_0)$  может быть построен непосредственно. Этот способ опирается на известную формулу, представляющую (в случае разделяющихся переменных) функцию Грина многомерной задачи в виде контурного интеграла от функций Грина соответствующих одномерных задач

\*\*\*) См. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов [1].

По теореме о вычетах каждый член ряда можно представить контурным интегралом

$$\frac{J_n(kr)}{J_n(k\rho)} \cos n(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2i} \oint_{C_n} \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi - \varphi_0| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta,$$

где  $C_n$  — окружность с центром в точке  $\zeta = n$  и настолько малого радиуса, что внутри окружности расположен только один полюс подынтегральной функции в точке  $\zeta = n$ . Сумму интегралов по окружностям  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , можно представить одним интегралом, распространенным по контуру  $\mathcal{L}_1$ , охватывающему положительную часть вещественной оси (рис. 45).

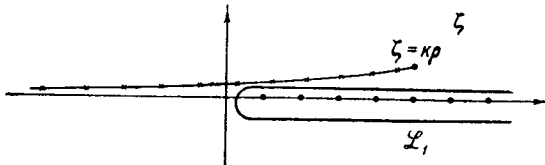


Рис. 45.

В результате получим искомую формулу

$$g(r, \varphi; \rho, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi i \rho} \oint_{C_0} \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi - \varphi_0| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i \rho} \int_{\mathcal{L}_1} \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi - \varphi_0| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta. \quad (4.6)$$

Предполагается, что внутри контура  $\mathcal{L}_1$  нет других полюсов подынтегральной функции, кроме полюсов в точке  $\zeta = n$ . Отметим, что при комплексных значениях  $k$  нули функции  $J_\zeta(k\rho)$  (являющиеся также полюсами подынтегральной функции) на плоскости  $\zeta$  расположены на кривой, начинающейся в точке  $\zeta = k\rho$  и уходящей на  $-\infty$ . (Эти нули на рис. 45 изображены крестиками.)

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы формулу (4.6) преобразовать к сумме таких выражений, каждое из которых описывало бы на высоких частотах (при  $\omega' \rightarrow \infty$ ) волны геометрической оптики, которые вышли из источника, обошли вокруг начала координат определенное число раз и испытали при этом то или иное число отражений.

В дальнейшем будем считать, что  $\varphi_0 = 0$ , т. е. что угол  $\varphi$  отсчитывается от источника.

Построим два вспомогательных контура интегрирования  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 46). Контур  $l_1$  начинается на окружности  $C_0$  в точке



$ee^{-i\frac{3\pi}{4}}$  ( $e$  — радиус окружности  $C_0$ ), описывает правую половину окружности  $C_0$ , далее, не пересекая линии нулей функции  $J_\zeta(k\rho)$ , соединяет точки  $ee^{i\frac{\pi}{4}}$  и  $k\rho$  и уходит на  $i\infty$ , асимптотически приближаясь к мнимой оси. Контур  $l_2$  симметричен относительно начала координат с контуром  $l_1$ , но пробегается точкой интегрирования от  $-i\infty$  до  $ee^{i\frac{\pi}{4}}$ .

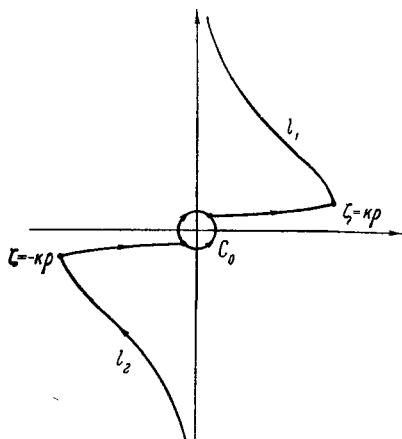


Рис. 46.

Проинтегрируем по контурам  $l_1$  и  $l_2$  нечетную функцию комплексной переменной  $\zeta$ :

$$\frac{1}{2\pi i\rho} \frac{1}{2} \left[ \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} + \frac{J_{-\zeta}(kr)}{J_{-\zeta}(k\rho)} \right] \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta}. \quad (4.7)$$

Очевидно, сумма двух таких интегралов будет равна нулю:

$$\frac{1}{2\pi i\rho} \left( \int_{l_1} + \int_{l_2} \right) \frac{1}{2} \left[ \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} + \frac{J_{-\zeta}(kr)}{J_{-\zeta}(k\rho)} \right] \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta = 0. \quad (4.8)$$

Сложим равенства (4.6) и (4.8) друг с другом, предварительно продеформировав нижнюю ветвь контура  $\mathcal{L}_1$  так, чтобы она совпадала с контуром  $l_2$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i\rho} \frac{1}{2} \int_{ee^{i\frac{\pi}{4}}}^{ee^{-i\frac{3\pi}{4}}} \left[ \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} + \frac{J_{-\zeta}(kr)}{J_{-\zeta}(k\rho)} \right] \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi i\rho} \frac{1}{2} \oint_{C_0} \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} d\zeta, \quad (4.9) \end{aligned}$$

в результате такого сложения получим

$$\begin{aligned}
 g(r; \varphi; \rho, 0) &\equiv g(r, \varphi) = \\
 &= -\frac{1}{2\pi i \rho} \frac{1}{2} \int_l \left[ \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} - \frac{J_{-\zeta}(kr)}{J_{-\zeta}(k\rho)} \right] \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi \zeta} d\zeta + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i \rho} \int_{l_0} \frac{J_\zeta(kr)}{J_\zeta(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi \zeta} d\zeta. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Контуры  $l$  и  $l_0$  указаны на рис. 47. Подынтегральная функция второго интеграла в первой четверти выше контура  $l_0$  регулярна и экспоненциально стремится к нулю при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ ,

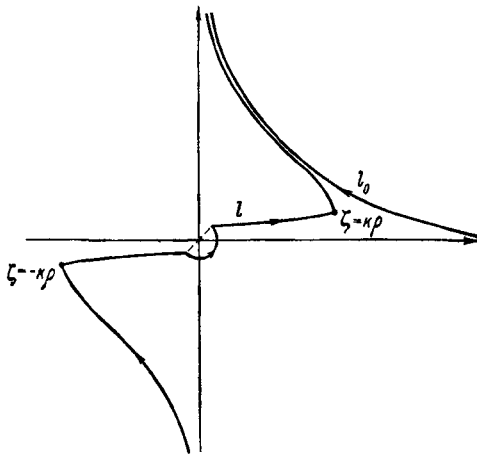


Рис. 47.

( $r \neq \rho$ ,  $\varphi \neq 0$ ). Следовательно, второй интеграл в формуле (4.10) равен нулю. Займемся теперь тождественным преобразованием подынтегральной функции первого интеграла.

Введем три функции:

$$\begin{aligned}
 q(\zeta) &= \frac{H_\zeta^{(1)}(k\rho)}{H_\zeta^{(2)}(k\rho)}, & F_0(\zeta) &= \frac{H_\zeta^{(2)}(kr)}{H_\zeta^{(2)}(k\rho)}, \\
 F_1(\zeta) &= \frac{H_\zeta^{(1)}(kr) H_\zeta^{(2)}(k\rho) - H_\zeta^{(2)}(kr) H_\zeta^{(1)}(k\rho)}{[H_\zeta^{(2)}(k\rho)]^2}. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

В силу равенства  $H_{-\zeta}^{(1),(2)}(z) = e^{\pm i\pi\zeta} H_\zeta^{(1),(2)}(z)$  справедливы соотношения

$$q(-\zeta) = e^{2\pi i \zeta} q(\zeta), \quad F_0(-\zeta) = F_0(\zeta), \quad F_1(-\zeta) = e^{2\pi i \zeta} F_1(\zeta). \quad (4.12)$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\zeta}(kr)}{J_{\zeta}(k\rho)} \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} &= \left[ \frac{F_1(\zeta)}{1+q(\zeta)} + F_0(\zeta) \right] \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta} = \\ &= F_1(\zeta) \frac{e^{i\pi\zeta} [\cos|\varphi|\zeta - q(\zeta) e^{i\pi\zeta} \cos(|\varphi| - \pi)\zeta]}{(1-q^2(\zeta) e^{2\pi i\zeta}) \sin \pi\zeta} + \\ &+ iF_1(\zeta) \frac{-e^{i|\varphi|\zeta} + q(\zeta) e^{2\pi i\zeta - i|\varphi|\zeta}}{(1-q^2(\zeta) e^{2\pi i\zeta})(1+q(\zeta))} + F_0(\zeta) \frac{\cos(|\varphi| - \pi)\zeta}{\sin \pi\zeta}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Первое и третье слагаемые в правой части тождества (4.13) в силу соотношений (4.12) являются функциями нечетными, а второе слагаемое не имеет особенностей на вещественной оси.

Подынтегральная функция первого интеграла в формуле (4.10) не имеет особенности в точке  $\zeta = 0$ , поэтому контур интегрирования  $l$  может быть проведен через точку  $\zeta = 0$  симметрично относительно начала координат (см. пунктир на рис. 47). Используя тождество (4.13) и симметрию контура интегрирования, преобразуем формулу (4.10) для функции Грина  $g(r, \varphi)$  к виду

$$g(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_l F_1(\zeta) \frac{e^{i|\varphi|\zeta} - q(\zeta) e^{i(2\pi - |\varphi|)\zeta}}{(1-q^2(\zeta) e^{2\pi i\zeta})(1+q(\zeta))} d\zeta. \quad (4.14)$$

Представим, наконец, функцию Грина  $g(r, \varphi)$  суммой

$$g(r, \varphi) = g_0(r, \varphi) + g^+(r, \varphi) + g^-(r, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} g_0(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_l F_1(\zeta) \frac{e^{i|\varphi|\zeta}}{1+q(\zeta)} d\zeta, \\ g^+(r, \varphi) &= -\frac{1}{2\pi\rho} \int_l F_1(\zeta) \frac{q(\zeta) e^{i(2\pi - |\varphi|)\zeta} d\zeta}{(1-q^2(\zeta) e^{2\pi i\zeta})(1+q(\zeta))}, \\ g^-(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_l F_1(\zeta) \frac{q^2(\zeta) e^{i(2\pi + |\varphi|)\zeta} d\zeta}{(1-q^2(\zeta) e^{2\pi i\zeta})(1+q(\zeta))}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В дальнейшем мы проведем исследование лишь одного интеграла  $g_0(r, \varphi)$  и установим, что при  $\omega' \rightarrow \infty$  он описывает волны, прошедшие угловое расстояние  $|\varphi|$  и испытавшие на пути из источника в точку наблюдения  $0, 1, 2, \dots$  отражений от границы круга. Теми же методами можно было бы убедиться, что интеграл  $g^+(r, \varphi)$  описывает волны, прошедшие угловые расстояния  $2\pi m - |\varphi|$ ;  $m = 1, 2, \dots$  Легко показать, что волна, прошедшая угловое расстояние  $2\pi m - |\varphi|$ , должна испытать не менее  $2m - 1$  отражений от границы круга. Интеграл  $g^-(r, \varphi)$

описывает волны, прошедшие угловые расстояния  $2\pi m + |\varphi|$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и испытавшие  $2m, 2m + 1, \dots$  отражений от границы круга.

Приступим к исследованию интеграла  $g_0(r, \varphi)$ . Его подынтегральная функция на плоскости  $\zeta$  имеет простые полюсы, совпадающие с нулями функций  $J_\zeta(kr)$  и  $H_\zeta^{(2)}(kr)$ . (На рис. 48 нули функции  $J_\zeta(kr)$  изображены крестиками, нули  $H_\zeta^{(2)}(kr)$  — кружками.)

Продеформируем контур интегрирования  $l$  в контур  $C$ . В верхней полуплоскости  $\zeta$  контур  $C$  совпадает с линией

$$\arg \left[ kr \int_1^{\zeta/kr} \arccos x dx \right] = 0 \text{ нулей}$$

$$\text{функции } H_\zeta^{(1)}(kr), \text{ в нижней — с}$$

$$\text{линией } \arg \left[ kr \int_1^{\zeta/kr} \arccos x dx \right] =$$

$$= 3\pi/2, \text{ уходящей на бесконечность в третьем квадранте. Подставим под знак интеграла (4.15)}$$

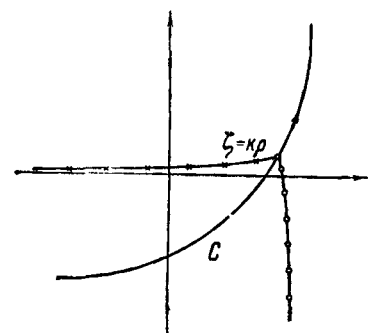


Рис. 48.

вместо  $F_1(\zeta)$  и  $q(\zeta)$  их значения (4.11). Тогда

$$g_0(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi r} \int_C \frac{H_\zeta^{(1)}(kr) H_\zeta^{(2)}(kr) - H_\zeta^{(2)}(kr) H_\zeta^{(1)}(kr)}{H_\zeta^{(2)}(kr) J_\zeta(kr)} e^{i|\varphi|\zeta} d\zeta. \quad (4.16)$$

Обозначим подынтегральную функцию интеграла (4.16) через  $\pi(r, \varphi; \zeta)$ . Чтобы исследовать при  $|kr| \gg 1$  и  $|\zeta| \gg 1$  поведение функции  $\pi(r, \varphi; \zeta)$  на плоскости комплексной переменной  $\zeta$ , заменим цилиндрические функции на их равномерную асимптотику.

Асимптотическая формула для функции Бесселя имеет вид (см. § 2 гл. 6)

$$J_\zeta(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{T_r(\zeta)}{\zeta^2 - (kr)^2} \right)^{1/4} v(T_r(\zeta) + R_r(\zeta)) \left\{ 1 + O\left[ \left( \frac{1}{kr} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.17)$$

$$\left| \arg \frac{kr}{\zeta} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Здесь

$$T_r(\zeta) = \left[ \frac{3}{2} ikr \int_1^{\zeta/kr} \arccos x dx \right]^{2/3}, \quad (4.18)$$

$$R_r(\zeta) = O\left[ \left( \frac{1}{kr} \right)^{4/3} \right]$$

и  $v$  — функция Эйри. На плоскости  $\xi$  проведены два разреза  $(-\infty, -kr]$  и  $[kr, \infty)$ , причем  $\arg T = \pi$  при вещественном  $k$  и  $-kr < \xi < kr$ .

Формулы для функций  $H_{\xi}^{(1)}(kr)$  и  $H_{\xi}^{(2)}(kr)$  получаются из формулы (4.17) простой заменой  $v(T+R)$  на функции Эйри  $-i\omega_1(T+R)$  и  $i\omega_2(T+R)$  соответственно. Формулы для производных цилиндрических функций могут быть получены дифференцированием формулы (4.17) и аналогичных ей. Если аргумент функций Эйри достаточно велик ( $T_r(\xi) \gg 1$ ), функции Эйри в свою очередь могут быть заменены асимптотическими формулами. Такая замена приводит к обычным дебаевским формулам для цилиндрических функций.

Используя указанные асимптотические формулы, получаем

$$\pi(r, \varphi; \xi) = -i \left[ \frac{T_r \xi^2 - (kr)^2}{T_\rho \xi^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \times \\ \times \frac{\omega_1(T_r + R_r) \omega_2(T_\rho + R_\rho) - \omega_2(T_r + R_r) \omega_1(T_\rho + R_\rho)}{\omega_2(T_\rho + R_\rho) v(T_\rho + R_\rho)} e^{i|\varphi|\xi} \times \\ \times \left\{ 1 + O \left[ \left( \frac{1}{kr} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.19)$$

Исследование выражения (4.19) при  $|\xi| \gg |kr|$ , когда становится возможным заменить функции Эйри их асимптотикой, показывает, что функция  $\pi(r, \varphi; \xi)$  экспоненциально убывает на контуре  $C$  при  $0 < |\varphi| < \pi$ , и, следовательно, при  $0 < \varepsilon < |\varphi| < \pi - \varepsilon$  интеграл (4.16) равномерно сходится. Исследуем быстроту убывания функции  $\pi(r, \varphi; \xi)$  в окрестности точки  $\xi = kr$ . Это позволит установить величину участка контура интегрирования  $C$ , существенного при интегрировании.

Проведем это исследование на плоскости

$$t = T_\rho(\xi) + R_\rho(\xi) \quad (4.20)$$

(т. е. на плоскости аргумента функций Эйри, входящих в формулу (4.19)).

На плоскости  $t$  контур интегрирования  $C_t$  близок к прямой линии  $\infty e^{i4\pi/3}$ ,  $\infty e^{i\pi/3}$ , проходящей через начало координат. Точки контура  $C_t$  удалены от указанной прямой на расстояния порядка  $(1/k\rho)^{4/3}$ . При помощи малой деформации контур  $C_t$  может быть совмещен с прямой линией  $\infty e^{i4\pi/3}$ ,  $\infty e^{i\pi/3}$ , и мы будем считать в дальнейшем, что интегрирование на плоскости  $t$  происходит именно вдоль такой прямой.

Функция  $\zeta(t)$ , обратная по отношению к функции (4.20), при достаточно малых значениях отношения  $t(k\rho)^{-2/3}$  представляется в виде

$$\zeta = k\rho \left\{ 1 + \frac{t}{2} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + \frac{t^2}{120} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} + O \left[ (|t|^3 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.21)$$

Будем считать, что точка наблюдения  $r, \varphi$  расположена настолько близко к границе круга, что приведенная нормаль

$$\tilde{v} = 2 \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{2/3} \frac{r - \rho}{\rho}$$

есть величина порядка единицы. Это предположение позволяет функцию  $T_r(\xi)$  представить в виде, аналогичном (4.21)

$$T_r(\xi) = t - \tilde{v} + \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} \tilde{v}t \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right]. \quad (4.22)$$

Подставляя разложения (4.21) и (4.22) в равенство (4.19), получаем

$$\begin{aligned} \pi(r, \varphi; \xi) = & \\ = & \frac{-i}{v(t)} \left\{ \omega_1 \left\{ t - \tilde{v} + \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} \tilde{v}t \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\} - \right. \\ & - \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \omega_2 \left\{ t - \tilde{v} + \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} \tilde{v}t \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\} \Big\} \times \\ \times & \exp \left\{ iks + it\gamma + i \frac{t^2}{60} \frac{s}{\rho} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{1/3} - \frac{1}{20} \tilde{v} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \frac{2}{k\rho} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{1/3} \frac{s}{\rho} \quad (4.24)$$

— приведенная длина дуги окружности. Квадратная скобка в формуле (4.23) может быть представлена в виде

$$\frac{2t\tilde{v}}{\omega_2(t)} \left\{ 1 + O(t\tilde{v}^2) + O \left[ (|t| + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} \right] \right\}.$$

Таким образом, при достаточно малых значениях  $\tilde{v}^2$  поведение функции  $\pi(r, \varphi; \xi)$  на плоскости  $t$  определяется множителем

$$\frac{1}{v(t) \omega_2(t)} e^{i\gamma t}. \quad (4.25)$$

При оценке множителя (4.25) уже при  $t \geq 3$  для функций Эйри  $v(t)$  и  $\omega_2(t)$  можно использовать асимптотические формулы из Дополнения 1. Получаемая на этом пути оценка имеет вид

$$\frac{1}{v(t) \omega_2(t)} e^{i\gamma t} \sim \begin{cases} 2t^{1/2} \exp(i\gamma t), & \arg t = \pi/3, \\ -2it^{1/2} \exp\left(-\frac{4}{3}t^{3/2} + i\gamma t\right), & \arg t = 4\pi/3. \end{cases}$$

Из второй строчки следует, что на нижней части контура интегрирования множитель (4.25) становится меньше единицы

только при

$$|t| > \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} \gamma \right)^2,$$

и, следовательно, с увеличением  $\gamma$  быстрота сходимости интеграла (4.16) ухудшается. Наоборот, при малых значениях  $\gamma$  интеграл медленно сходится на верхней части контура интегрирования.

Для значений  $\gamma$ , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2}{\sqrt{3}\Delta} \leq \gamma < 2\sqrt{\Delta} \left( \frac{k\rho}{2} \right)^\delta, \quad (4.26)$$

где  $\Delta = O(1)$  и  $\delta$  — малая положительная величина\*), основным участком контура интегрирования  $C_t$  является окрестность начала координат, для которой

$$|t| < t_0, \quad t_0 \sim 2\Delta \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{2\delta}. \quad (4.27)$$

При таких значениях  $t$  ряды (4.21), (4.22) сходятся еще достаточно быстро, так что при оценке функции  $\pi(r, \varphi; \zeta)$ , действительно, можно было ограничиться первыми членами приведенных разложений.

Итак, при выполнении неравенства (4.26) интеграл (4.16) в переменной  $t$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} g_0(r, \varphi) = & - \frac{i}{4\pi\rho} \left( \frac{k\rho}{2} \right)^{1/3} \int_{t_0 e^{-\frac{\pi}{3}i}}^{t_0 e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{1}{v(t)} \times \\ & \times \left[ \omega_1 \left\{ t - \tilde{v} + \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} \tilde{v}t \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \omega_2 \left\{ t - \tilde{v} + \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} \tilde{v}t \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ iks + it\gamma + i \frac{t^2}{60} \frac{s}{\rho} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{1/3} - \frac{1}{20} \tilde{v} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + \right. \\ & \left. + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right) \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{30} t \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3} + O \left[ (|t|^2 + 1) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{4/3} \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

\*) При не слишком больших значениях  $k\rho/2$  ( $k\rho/2 \sim 10^3 \div 10^6$ ) и малых  $\delta$  ( $\delta = 1/21$ ) множитель  $(k\rho/2)^\delta$  близок к единице и существенного значения не имеет. Конкретное значение коэффициента  $\Delta$ , при котором погрешность вычислений оказывается минимальной, определяется параметрами задачи. При указанных значениях  $k\rho/2$  и  $\delta$  коэффициент  $\Delta$ , как показывают расчеты, выполненные в работе А. И. Ланина [2], близок к единице. При  $k\rho \rightarrow \infty$  множитель  $(k\rho/2)^\delta$  позволяет получить оценки, содержащие отрицательные степени  $k\rho/2$ .

Интеграл (4.28) представляет собой линейную суперпозицию решений (2.6) из главы 6 с тем лишь отличием, что вместо функции Эйри  $v(Z)$  под знак интеграла (4.28) входят функции  $w_1(Z)$  и  $w_2(Z)$  и, кроме того, корень функции Эйри —  $t_p$  заменен переменной интегрирования  $t$ .

Весовыми функциями являются

$$-\frac{i}{4\pi\rho} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3} \frac{1 + \frac{1}{30} t \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{2/3} + O\left[ (|t|^2 + 1) \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{4/3} \right]}{v(t)}$$

для первого слагаемого подынтегральной функции и

$$+\frac{i}{4\pi\rho} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3} \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \frac{1 + \frac{1}{30} t \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{2/3} + O\left[ (|t|^2 + 1) \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{4/3} \right]}{v(t)}$$

для второго слагаемого.

Наметим вычисление интеграла (4.16) при

$$\gamma \geq 2 \sqrt{\Delta} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\delta}.$$

В этом случае функцию  $1/v(t)$  следует разложить в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{v} = \frac{2i}{w_1 - w_2} = -2i \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{w_1}{w_2}\right]^m \frac{1}{w_2} + \left[\frac{w_1}{w_2}\right]^M \frac{1}{v}.$$

Тогда для интеграла  $g_0(r, \varphi)$  получаем

$$g_0(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} g_{0m}(r, \varphi) + \tilde{G}_{0M}(r, \varphi),$$

где

$$g_{0m}(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_C \left[ \frac{T_r}{T_\rho} \frac{\xi^2 - (k\rho)^2}{\xi^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \left[ \frac{w_1(T_\rho + R_\rho)}{w_2(T_\rho + R_\rho)} \right]^m \times \\ \times \left[ \frac{w_1(T_r + R_r)}{w_2(T_\rho + R_\rho)} - \frac{w_1(T_\rho + R_\rho)}{w_2^2(T_\rho + R_\rho)} w_2(T_r + R_r) \right] \times \\ \times e^{i|\varphi|\xi} \left\{ 1 + O\left[ \left(\frac{1}{k\rho}\right)^2 \right] \right\} d\xi \quad (4.29)$$

и

$$\tilde{G}_{0M}(r, \varphi) = -\frac{i}{4\pi\rho} \int_C \left[ \frac{T_r}{T_\rho} \frac{\xi^2 - (k\rho)^2}{\xi^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \left[ \frac{w_1(T_\rho + R_\rho)}{w_2(T_\rho + R_\rho)} \right]^M \times \\ \times \left[ w_1(T_r + R_r) - \frac{w_1(T_\rho + R_\rho)}{w_2(T_\rho + R_\rho)} w_2(T_r + R_r) \right] \frac{1}{v(T_\rho + R_\rho)} \times \\ \times e^{i|\varphi|\xi} \left\{ 1 + O\left[ \left(\frac{1}{k\rho}\right)^2 \right] \right\} d\xi. \quad (4.30)$$

Дополнительный множитель  $[w_1/w_2]^M$  под знаком интеграла (4.30), не меняя сходимости интеграла на верхней части кон-



тура  $C$ , улучшает ее на нижней части контура. При надлежащем выборе числа  $M$ , зависящего от приведенных длины дуги  $\gamma$  и нормали  $\tilde{\nu}$ , основным участком интегрирования для интеграла (4.30) будет по-прежнему отрезок контура  $C$ , для которого  $|t| = |T_\rho + R_\rho| < t_0$ . Интегралы  $g_{0m}$  при этом удается вычислить по *методу перевала*.

Вычисление интегралов  $g_{0m}$  по методу перевала показывает, что с помощью интегралов  $g_{0m}$  описываются волны, испытавшие  $m$  отражений от границы  $S$ . Ниже такое вычисление будет подробно проведено для интеграла  $g_{00}$ . По аналогичной схеме вычисляются и интегралы  $g_{0m}$ ,  $m \geq 1$ .

Мы не будем исследовать интеграл  $G_{0M}$ , так как в § 5 исследование аналогичного интеграла будет выполнено в общем случае неоднородной среды и некруговой границы. Заметим только, что интеграл  $G_{0M}$  описывает поверхностную волну, т. е. суммарный эффект волн, для которых число отражений больше или равно  $M$ . Выражается интеграл  $G_{0M}$  через специальную функцию  $G_M(\gamma)$ , таблицы которой приведены в Дополнении 4.

Обратимся к вычислению интеграла  $g_{00}$  по методу перевала\*). При этом мы получим формулу (4.36), которая была использована в § 3 настоящей главы.

Введем функции

$$A_j(T) = e^{i\frac{\pi}{2}(j-2)} T^{1/4} \exp\left[(-1)^{j-1} \frac{2}{3} T^{3/2}\right] \omega_j(T), \quad j = 1, 2.$$

Используя асимптотические разложения функций Эйри (Дополнение 1), нетрудно для функций  $A_j(T)$  при  $|T| \gg 1$  и  $\pi/3 + \varepsilon < \arg T < 5\pi/3 - \varepsilon$  получить следующие формулы:

$$A_j(T) = 1 + O(T^{-3/2}), \quad j = 1, 2. \quad (4.31)$$

Функции  $A_j(T)$  тем и удобны, что

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} A_j(T) = 1.$$

Из равенств (4.31) следует, что при достаточно больших  $T$  функции  $A_j(T)$  изменяются достаточно медленно. С помощью функций  $A_j(T)$  интеграл  $g_{00}$  записывается в виде

$$g_{00}(r, \varphi) = -\frac{i}{2\pi\rho} \int_C \left[ \frac{\xi^2 - (k\rho)^2}{\xi^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \left\{ \frac{A_1(T_r)}{A_2(T_\rho)} \exp\left[-\frac{2}{3} T_r^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} T_\rho^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{A_1(T_\rho)}{A_2^2(T_\rho)} A_2(T_r) \exp\left[\frac{2}{3} T_r^{\frac{3}{2}} - 2T_\rho^{\frac{3}{2}}\right] \right\} e^{i|\varphi|\xi} \left\{ 1 + O\left[\frac{1}{k\rho}\right] \right\} d\xi. \quad (4.32)$$

\*) Для понимания § 5 ознакомление с вычислением интеграла  $g_{00}$  по методу перевала не обязательно.

Фазовые функции первого и второго слагаемого под знаком интеграла (4.32) равны соответственно

$$\begin{aligned} k\rho\psi_{0,0}^{(1)} &= -\frac{2}{3}T_r^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}T_\rho^{\frac{3}{2}} + i|\varphi|\zeta = \\ &= ik\rho \left[ |\varphi|z - \frac{1}{a} \int_1^{az} \arccos x dx - \int_1^z \arccos x dx \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} k\rho\psi_{0,0}^{(2)} &= \frac{2}{3}T_r^{\frac{3}{2}} - 2T_\rho^{\frac{3}{2}} + i|\varphi|\zeta = \\ &= ik\rho \left[ |\varphi|z + \frac{1}{a} \int_1^{az} \arccos x dx - 3 \int_1^z \arccos x dx \right], \end{aligned}$$

где

$$z = \frac{\zeta}{k\rho} \quad \text{и} \quad a = \frac{\rho}{r} > 1.$$

На плоскости  $z$  седловые точки фазовых функций  $\psi_{0,0}^{(1)}$  и  $\psi_{0,0}^{(2)}$  определяются из уравнений  $\psi_{0,0}^{(1)'}(z) = 0$  и  $\psi_{0,0}^{(2)'}(z) = 0$ . Запишем эти уравнения в виде

$$|\varphi| = \arccos az + \arccos z = \Phi_1(z), \quad (4.33)$$

$$|\varphi| = -\arccos az + 3 \arccos z = \Phi_2(z). \quad (4.34)$$

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Phi_2(z)$  имеют вещественные значения только на интервале  $-\frac{1}{a} \leq z \leq \frac{1}{a}$ . Их графики при  $a < 2$  изображены на рис. 49.

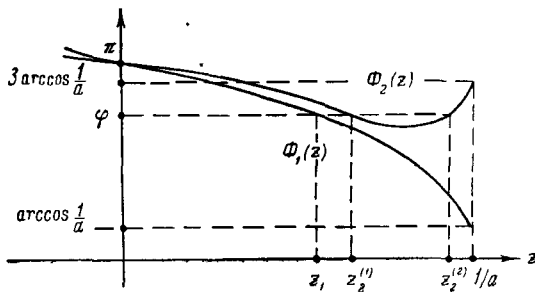


Рис. 49.

Очевидно, фазовая функция  $\psi_{0,0}^{(1)}$  при углах  $\varphi > 0^*$ , заключенных в пределах  $\arccos \frac{1}{a} \leq \varphi \leq \pi$ , имеет одну седловую точ-

\* ) Отрицательные углы  $\varphi$  рассматриваются совершенно аналогично.

ку  $z_1$ . Фазовая функция  $\psi_{0,0}^{(2)}$  при углах  $\varphi > 0$ , удовлетворяющих неравенству

$$\min \Phi_2(z) \leq \varphi \leq 3 \arccos \frac{1}{a},$$

имеет две седловые точки  $z_2^{(1)}$  и  $z_2^{(2)}$ , из которых для углов  $3 \arccos \frac{1}{a} < \varphi \leq \pi$  сохраняется только седловая точка  $z_2^{(1)}$ .

Можно показать, что при  $\varphi = 3 \arccos \frac{1}{a}$  седловая точка  $z_2^{(2)}$  превращается в седловую точку первого слагаемого подынтегральной функции следующего интеграла  $g_{01}$ . Уравнения (4.33) и (4.34) и положение седловых точек  $z_1$  и  $z_2^{(1)}$ ,  $z_2^{(2)}$  легко интерпретировать с помощью лучевых построений.

Рассмотрим вначале уравнение (4.33) и седловую точку  $z_1$ . Обратимся к рис. 50. На нем пунктиром изображена окружность, на которой помещаются точки наблюдения с фиксированной координатой  $r$ . В дальнейшем мы будем называть эту окружность *окружностью наблюдения*  $C_r$ . В точку  $P$  с угловой координатой  $\varphi$  из источника  $Q$  приходит луч  $QP$ . Опустим из центра  $O$  окружности на луч  $QP$  перпендикуляр  $OM$ . Если обозначить

$$\sin(\angle OQP) = z,$$

то

$$\angle QOM = \arccos z$$

и

$$\cos(\angle MOP) = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ \sin(\angle OQP)}{OP} = \frac{\rho}{r} z = az,$$

откуда  $\angle MOP = \arccos az$ . И, следовательно,  $z$  удовлетворяет уравнению (4.33). Таким образом, седловая точка  $z_1$  есть синус угла, образованного радиусом  $OQ$  и лучом  $QP$ , приходящим в точку наблюдения с координатами  $(r, \varphi)$ .

Мы видели, что уравнение (4.33) имеет решение  $z_1$  при  $\arccos \frac{1}{a} \leq \varphi \leq \pi$ . Углу  $\varphi = \arccos \frac{1}{a}$  соответствует седловая точка  $z_1 = 1/a$  и луч, касательный к окружности радиуса  $r$ , углу  $\varphi = \pi$  — седловая точка  $z_1 = 0$  и луч, проходящий через центр окружности. Отсюда вытекает, что различным значениям седловой точки  $z_1$  соответствуют лучи, приходящие на окружность наблюдения радиуса  $r$  между касательным лучом  $QK$  и вертикальным лучом  $QB$  (см. рис. 50). Вычисление первого

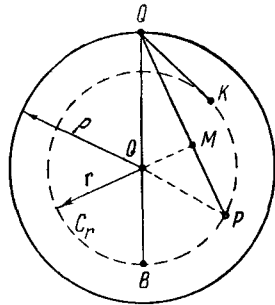


Рис. 50.

слагаемого интеграла  $g_{00}$  (4.29) по обычной схеме метода перевала в седловой точке  $z_1$  приводит к выражению

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \sin \varepsilon_0 \frac{e^{ikQP}}{\sqrt{QP}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{k\rho(\varphi - \varepsilon_0)^3}\right) \right\}, \quad (4.35)$$

где  $\varepsilon_0$  — угол скольжения луча  $QP$ , т. е. угол между лучом  $QP$  и касательной к окружности  $r = \rho$  в точке  $Q$ . Выражение (4.35) описывает, очевидно, волну  $u_0$ , приходящую в точку наблюдения непосредственно от источника. Множитель  $e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \sin \varepsilon_0$  характеризует интенсивность и направленное действие источника.

При малых значениях разности  $\varphi - \varepsilon_0$ , как следует из вида поправочного члена, обычная схема метода перевала неприменима. Это связано с тем, что при малых  $\varphi - \varepsilon_0$  седловая точка  $z_1$  расположена вблизи точки  $z = 1/a$ , являющейся точкой разветвления фазовой функции  $\psi_{00}^{(1)}(z)$ . Заметим еще, что прямую волну, приходящую на окружность наблюдения в точки, для которых  $\varphi < \arccos \frac{1}{a}$ , ( $\varphi - \varepsilon_0 < 0$ ) также можно получить из интеграла  $g_{00}(r, \varphi)$ , если должным образом его преобразовать.

Для точки наблюдения  $P$ , расположенной на границе круга ( $a = 1$ ), формула (4.35) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k \sin \varepsilon_0}{\pi \rho}} e^{i\left(k\rho^2 \sin \varepsilon_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ 1 + \frac{1 + O(\varepsilon_0^2)}{12k\rho\varepsilon_0^3} + O\left[\left(\frac{1}{k\rho\varepsilon_0^3}\right)^2\right] \right\}. \quad (4.36)$$

Поправочные слагаемые указывают на то, что при малых углах скольжения  $\varepsilon_0$  выражение (4.36) перестает быть применимым. Для значения  $\varepsilon_0 = \sqrt{\Delta} (k\rho/2)^{-1/3+\delta}$  ( $\gamma = 2\sqrt{\Delta} (k\rho/2)^\delta$ ), при котором из интеграла  $g_0(r, \varphi)$  выделяется первое слагаемое  $g_{00}$ , поправочные члены в (4.36) становятся равными

$$\frac{1}{6\Delta^{3/2}} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{-3\delta} + O\left[\frac{1}{\Delta^3} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{-6\delta}\right],$$

и, следовательно, формула (4.36) уже достаточно точно описывает волну, приходящую непосредственно от источника на границу круга. Формула (4.36) была нами использована в § 3 для определения произвольной функции в многократно отраженной волне.

Дадим теперь геометрическую трактовку седловых точек  $z_2^{(1)}$  и  $z_2^{(2)}$ . Для этого рассмотрим луч, приходящий на окружность наблюдения  $C_r$  после одного отражения в граничной окружности (рис. 51). Если по-прежнему обозначить

$$\sin(\angle OQN_1) = z,$$

то, как легко видеть,

$$\angle QOM_1 = \angle M_1ON_1 = \angle N_1OM_2 = \arccos z$$

и

$$\angle POM_2 = \arccos az.$$

Таким образом, величина  $z$  должна удовлетворять уравнению

$$\varphi = 3 \arccos z - \arccos az,$$

т. е. уравнению (4.34), и следовательно, седловые точки  $z_2^{(1)}$  и  $z_2^{(2)}$  суть синусы углов выхода из источника лучей, приходящих после одного отражения в точку наблюдения  $P$  с координатами

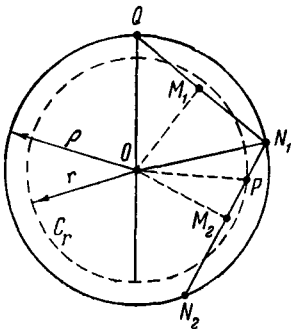


Рис. 51.

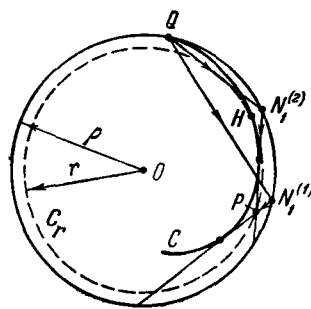


Рис. 52.

$r$ ,  $\varphi$ . Таких лучей, как видно из рис. 52, два: один луч  $QN_1^{(1)}P$  приходит в точку наблюдения до касания с каустикой  $QHC$ , второй луч  $QN_1^{(2)}P$  — после касания с каустикой. В точке  $H$  пересечения окружности наблюдения  $C_r$  с каустикой  $QHC$  оба луча сливаются. Точке  $H$ , в которую, таким образом, приходит только один луч, отвечает

$$\varphi = \varphi_{\min} \equiv \min(3 \arccos z - \arccos az).$$

При углах  $\varphi < \varphi_{\min}$  окружность наблюдения попадает в зону каустической тени и, очевидно, для таких углов  $\varphi$  ни один однократно отраженный луч не достигает точки наблюдения. Луч, приходящий в точку наблюдения с углом  $\varphi = 3 \arccos(1/a)$  после касания с каустикой, является касательной к окружности  $C_r$ ; такому лучу соответствует максимальное значение  $z_2^{(2)} = 1/a$ . При углах  $\varphi > 3 \arccos(1/a)$  лучу, имевшему касание с каустикой, отвечает, как можно показать, уже седловая точка первого слагаемого следующего интеграла  $g_{01}$ . Лучу же, не имевшему касания с каустикой, по-прежнему будет соответствовать

седловая точка  $z_2^{(1)}$ . Таким образом, при вычислении по методу перевала второго слагаемого интеграла  $g_{00}$  (4.29) седловая точка  $z_2^{(1)}$  дает однократно отраженную волну, приходящую в точку наблюдения до касания с каустикой, а седловая точка  $z_2^{(2)}$  — волну, приходящую в точку наблюдения после касания с каустикой. Мы не будем приводить результаты вычислений, так как они полностью совпадают с формулами первого приближения лучевого метода.

Для углов  $\varphi$ , близких к углу  $\varphi = \varphi_{\min}$ , обычная схема метода перевала неприменима. Здесь следовало бы воспользоваться известной модификацией метода перевала для случая двух близко расположенных седловых точек. После соответствующих вычислений мы получили бы для поля представление, содержащее функцию Эйри  $v(Z)$ , что полностью согласуется с результатами главы 2.

Точно так же, вычисляя по методу перевала интегралы  $g_{0m}$ , можно было бы прийти к выводу, что первое слагаемое в интегралах  $g_{0m}$  описывает волну, испытавшую  $m$  отражений, прошедшую соответствующую ей каустику и падающую на границу круга, в то время как второе слагаемое — результат отражения этой волны, т. е. начало волны, испытавшей  $m + 1$  отражение от границы круга.

Таким образом, на долю интеграла  $G_{0M}$  остается описание суммарного эффекта волн, для которых число отражений от границы круга больше или равно числу  $M$ . Если положение точки наблюдения таково, что через нее не проходят лучи, для которых число отражений больше или равно  $M$ , то в этом случае интеграл  $G_{0M}$  может быть сведен к сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах отношения  $1/\omega_2(T_\rho + R_\rho)$ . При этом его величина оказывается порядка  $\exp(-\Delta_1 k\rho)$ ,  $\Delta_1 > 0$ .

## § 5. Поле поверхностного источника вблизи изогнутой границы неоднородного тела

Настоящий параграф является основным параграфом главы. Здесь будут получены формулы, описывающие распространение волн вблизи границы  $S$  в задаче (1.1), (1.2), сформулированной в § 1. Напомним, что область  $\Omega$ , в которой ищется решение задачи и для которой кривая  $S$  является границей, уходит на бесконечность и предполагается выполненным принцип предельного поглощения. В окончательных формулах, носящих локальный характер, частота колебаний  $\omega$  — большой вещественный параметр. Полученные формулы в силу их локального характера остаются справедливыми и для замкнутых областей. В этом случае для существования решения задачи (1.1), (1.2)

при любых  $\omega$  требуется предположение о затухании волн в среде.

В §§ 2—4 при помощи лучевого метода и его уточнения были получены формулы, описывающие волны, которые испытали большое, но конечное число отражений от границы  $S$ , и была исследована эталонная задача для круга. Здесь мы будем рассматривать общий случай задачи (1.1), (1.2). Нам удастся построить асимптотику ( $\omega \rightarrow \infty$ ) решения этой задачи вблизи границы  $S$  в виде суперпозиции формальных решений уравнения Гельмгольца, построенных в главе 6. Эта суперпозиция составляет по аналогии с формулой (4.28), которая была выведена для волны, распространяющейся вблизи границы круга. Исследование составленной суперпозиции покажет, что при увеличении частоты  $\omega$  или при удалении точки наблюдения от источника из нее в качестве слагаемых выделяются функции  $u_m$ , найденные в §§ 2, 3 и описывающие волны, которые испытали определенное число отражений. Это обстоятельство может рассматриваться как подтверждение того, что составленная по аналогии с задачей для круга суперпозиция правильно описывает интерференционное волновое поле точечного источника вблизи границы в общем случае.

Следует, однако, отметить, что строгого математического обоснования формул, полученных в этом параграфе, еще нет.

Выпишем решения уравнения Гельмгольца, из которых будет составлена линейная суперпозиция, описывающая в общем случае асимптотику решения задачи (1.1), (1.2).

В главе 6 нас в первую очередь интересовали решения уравнения Гельмгольца, сосредоточенные в пограничном слое, и поэтому в качестве решения уравнения Эйри была выбрана функция  $v(Z)$ . Теперь же основную роль будут играть решения уравнения Гельмгольца, содержащие комплексные функции Эйри  $\omega_1(Z)$  и  $\omega_2(Z)$ . Очевидно, вычисления и результаты § 3 главы 6 не изменятся от замены в исходной формуле (3.4) главы 6 функции  $v(Z)$  на  $\omega_1(Z)$  или  $\omega_2(Z)$ . Таким образом, интересующие нас теперь решения имеют вид

$$u^{(j)}(s, \nu) = \text{const} \cdot \exp \left\{ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} + O \left( \omega^{-\frac{M}{3}} \right) \right\} \times \\ \times \omega_j \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu) \omega^{-\frac{m}{3}} + O \left( \omega^{-\frac{M}{3}} \right) \right\}, \quad j=1, 2, \quad (5.1)$$

где полиномы  $\alpha_m(s, \nu)$  и  $\beta_m(s, \nu)$  определяются формулами § 3 главы 6.

При удовлетворении граничному условию  $u|_S = 0$  мы полагаем (§ 4 гл. 6)

$$\beta_{00}(s) = -t_p, \quad p=0, 1, 2, \dots; \quad \beta_{m0}(s) = 0, \quad m=1, 2, 3 \dots$$

Теперь будем считать

$$\beta_{00}(s) = t, \quad (5.2)$$

где  $t$  — произвольная постоянная, и по-прежнему

$$\beta_{m0}(s) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

Так как некоторые коэффициенты полиномов  $\alpha_m(s, v)$  и  $\beta_m(s, v)$  зависели от  $\beta_{00}(s)$  (см., например, формулы (3.24), (3.38), (3.40) гл. 6), то теперь они будут зависеть от произвольной постоянной  $t$ , и потому постоянную  $t$  мы введем третьим аргументом в обозначения полиномов:

$$\alpha_m = \alpha_m(s, v; t), \quad \beta_m = \beta_m(s, v; t).$$

Напомним, что формулы для свободных членов полиномов  $\alpha_m(s, v; t)$ , т. е. для  $\alpha_m(s, 0; t) = \alpha_{m0}(s; t)$ , содержали произвольные постоянные  $d_m$ . В главе 6 мы условились считать эти постоянные нулями, относя соответствующий производил при построении решений (5.1) к константе, стоящей множителем в формуле (5.1). Таким образом, не зависящая от координат  $s, v$  константа в формуле (5.1), вообще говоря, является функцией  $t$  и  $\omega$ .

С учетом сделанных замечаний формулы для полиномов  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  из главы 6 принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_{-3}(s, v; t) &= \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}; \\ \alpha_{-2}(s, v; t) &= 0; \\ \alpha_{-1}(s, v; t) &= \frac{t}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)}; \\ \alpha_0(s, v; t) &= \frac{i}{2} \ln \frac{P^{1/3}(s) c_0^{1/3}(0)}{P^{1/3}(0) c^{1/3}(s)}; \\ \alpha_1(s, v; t) &= \frac{1}{6} \frac{1}{c_0^2(s)} \left[ 2 \frac{c_0'(s)}{c_0(s)} + \frac{P'(s)}{P(s)} \right] v^2 - \\ &\quad - \frac{t^2}{2^{5/3}} \int_0^s \frac{c_0^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left[ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left( \frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] d\tau; \quad (5.4) \\ \alpha_2(s, v; t) &= \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{5} P(s) Q(s) \right] v - it [R(s) - R(0)]; \\ &\dots \end{aligned}$$



$$\beta_0(s, \nu; t) = -\frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} \nu + t;$$

$$\beta_1(s, \nu; t) = 0;$$

$$\beta_2(s, \nu; t) = \frac{2^{1/3}}{10} \frac{P^{2/3}(s)}{c_0^{2/3}(s)} Q(s) \nu^2 - \frac{2t}{3} \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{5} P(s) Q(s) \right] \nu; \quad (5.5)$$

В этих равенствах эффективный радиус кривизны  $P(s)$  и функция  $Q(s)$  определены формулами (2.1), (3.37) главы 6, а

$$R(s) = \frac{1}{2^{1/3}} c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s) \left[ \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{5} P(s) Q(s) - \frac{1}{2P(s)} \right].$$

Наша ближайшая цель — найти асимптотическое выражение для коротковолновой асимптотики  $g$  решения задачи (1.1), (1.2). По аналогии со случаем круга будем искать это асимптотическое выражение в виде такого наложения решений (5.1), которое было бы аналогично формуле (4.28):

$$g = \int_{C_{t_0}} c(\omega, t) \left\{ \omega_1 \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu; t) \omega^{-\frac{m}{3}} \right] - \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \omega_2 \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m(s, \nu; t) \right] \right\} \exp \left[ i \sum_{m=-3}^{M-1} \alpha_m(s, \nu; t) \omega^{-\frac{m}{3}} \right] dt. \quad (5.6)$$

Здесь контур интегрирования  $C_{t_0}$  — отрезок прямой линии, соединяющей точки  $t_0 e^{i4\pi/3}$  и  $t_0 e^{i\pi/3}$ ,  $t_0 > 0$ . Весовая функция  $c(\omega, t)$ , не зависящая от  $s$  и  $\nu$ , и постоянная  $t_0$  подлежат определению.

Подынтегральная функция в (5.6) удовлетворяет уравнению Гельмгольца с точностью до величины порядка  $\omega^{-M/3+4/3}$  и обращается в нуль при  $\nu = 0$ . Последнее происходит в силу условий (5.2) и (5.3).

Весовая функция  $c(\omega, t)$  и постоянная  $t_0$  должны быть выбраны так, чтобы:

1) на концах промежутка интегрирования подынтегральная функция интеграла  $g$  была экспоненциально малой по  $\omega$  величиной вида  $O[\exp(-A\omega^\varepsilon)]$ ,  $A > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  \*);

2) интеграл  $g$  правильно описывал волновое поле источника выбранной интенсивности;

3) интеграл  $g$  удовлетворял принципу взаимности в соответствующей формулировке.

\* При выполнении этого условия степенные члены в асимптотическом разложении интеграла  $g$  по дробным степеням  $\omega^{-1}$  не будут зависеть от  $t_0$ .

Используя формулы (5.4), (5.5) и введенную ранее величину

$$\gamma(s) = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/3} \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)},$$

которая была названа *приведенной длиной дуги*, перепишем равенство (5.6) следующим образом:

$$g = \sqrt{\frac{c_0(s) P(0)}{c_0(0) P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} \times \\ \times \int_{c_{t_0}} c(\omega, t) \left\{ \omega_1 \left[ t - \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} v + (\beta_{22}(s) v^2 + \beta_{21}(s) v) \omega^{-\frac{2}{3}} + \dots \right] - \right. \\ \left. - \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \omega_2 \left[ t - \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} v + (\beta_{22}(s) v^2 + \beta_{21}(s) v) \omega^{-\frac{2}{3}} + \dots \right] \right\} \times \\ \times \exp[i\gamma(s)t + i\alpha_1(s, v; t) \omega^{-1/3} + i\alpha_2(s, v; t) \omega^{-2/3} + \dots] dt, \quad (5.7)$$

где многоточием заменены члены более высокого порядка малости.

Переходим к выбору весовой функции  $c(\omega, t)$ . Прежде всего удовлетворим условию взаимности. Вычислим значение нормальной производной  $\frac{\partial g}{\partial n}$  при  $n = 0$ . Продифференцировав равенство (5.7) и приняв во внимание, что  $\frac{\partial}{\partial n} = \omega^{2/3} \frac{\partial}{\partial v}$  и  $\omega_1 \omega_2' - \omega_1' \omega_2 = 2i$ , получим

$$\frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{n=0} = i\omega^{\frac{2}{3}} \frac{2^{1/3}}{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)} \sqrt{\frac{c_0(s) P(0)}{c_0(0) P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} \times \\ \times \int_{c_{t_0}} \frac{c(\omega, t)}{\omega_2(t)} \left[ 1 - \frac{c_0^{2/3}(s) P^{1/3}(s)}{2^{1/3}} \beta_{21}(s; t) \omega^{-\frac{2}{3}} + \dots \right] \times \\ \times \exp[i\gamma(s)t + i\alpha_{10}(s; t) \omega^{-1/3} + t(R(s) - R(0)) \omega^{-2/3} + \dots] dt. \quad (5.8)$$

Производная  $\frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{n=0}$  должна удовлетворять обычному принципу взаимности, т. е. быть величиной, симметричной относительно точки наблюдения и источника. Такая симметрия будет иметь место, если положить

$$c(\omega, t) = \frac{\omega^{1/3}}{c_0^{1/3}(0) P^{2/3}(0)} \left[ 1 - \frac{c_0^{2/3}(0) P^{1/3}(0)}{2^{1/3}} \beta_{21}(0; t) \omega^{-\frac{2}{3}} + \dots \right] \times \\ \times \exp[2tR(0) \omega^{-2/3} + \dots] p(t). \quad (5.9)$$

Множитель  $\omega^{1/3}$  в формуле (5.9) выбран из соображений размерности. Невыписанные члены разложений убывают не медленнее  $1/\omega$  и легко определяются по функциям  $\beta_{m1}(s; t)$  и  $\alpha_{m0}(s; t)$ ,  $m \geq 3$ . Новая безразмерная весовая функция  $p(t)$  уже не зависит от координат источника. Будем предполагать, что  $p(t)$  не зависит и от частоты  $\omega$ . Это предположение оправдывается следующим образом. Частота  $\omega$  могла бы входить в функцию  $p(t)$  только в безразмерных комбинациях с другими размерными параметрами задачи. Поскольку зависимость от координат источника и точки наблюдения уже выделена, такими параметрами могли бы быть только некоторые интегральные характеристики задачи (например, длина границы  $S$  для замкнутых областей). Однако, допустив зависимость функции  $p(t)$  от интегральных характеристик задачи, мы получили бы противоречие с принципом локальности, утверждающим, что высокочастотная асимптотика волнового поля зависит только от свойств трассы между источником и точкой наблюдения.

Подставим найденное разложение для  $c(\omega, t)$  в формулу (5.7):

$$\begin{aligned}
 g = & \frac{\omega^{1/3}}{\sqrt{c_0(0)P(0)}} \sqrt[6]{\frac{c_0(s)}{P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} \times \\
 & \times \int_{c_{t_0}} p(t) \left[ 1 - \frac{c_0^{2/3}(0)P^{1/3}(0)}{2^{1/3}} \beta_{21}(0; t) \omega^{-2/3} + \dots \right] \times \\
 & \times \{ \omega_1 [t - \tilde{v}(s) + \beta_2(s, v; t) \omega^{-2/3} + \dots] - \\
 & - \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \omega_2 [t - \tilde{v}(s) + \beta_2(s, v; t) \omega^{-2/3} + \dots] \exp \{ i\gamma(s)t + \\
 & + i\alpha_1(s, v; t) \omega^{-1/3} + [i\alpha_2(s, v; t) + 2tR(0)] \omega^{-2/3} + \dots \} dt, \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

где величина

$$\tilde{v}(s) = 2^{1/3} \frac{1}{c_0^{2/3}(s)P^{1/3}(s)} v$$

может быть названа *приведенной нормалью*.

Отметим, что быстрота сходимости интеграла (5.10) зависит от величины приведенной длины дуги  $\gamma$ . Чтобы величина основного участка контура интегрирования в формуле (5.10) не увеличивалась с ростом  $\gamma$ , будем функцию  $p(t)$  выбирать различным образом на различных интервалах изменения  $\gamma(s)$ . С аналогичным обстоятельством мы уже сталкивались в предыдущем параграфе при исследовании точного решения задачи

(1.1), (1.2) для круга. Замена одного выражения для  $p(t)$  под знаком интеграла (5.10) другим выражением приводит к скачкообразному изменению интенсивности волны, распространяющейся вблизи границы  $S$ , и выделению из интеграла (5.10) слагаемого, которое, как оказывается, может быть вычислено по методу перевала и имеет *лучевой вид* \*). Легко показать, что это слагаемое дает волну, испытавшую определенное число отражений от границы. Таким образом, скачкообразное изменение интенсивности волны, распространяющейся вблизи границы, связано с отщеплением от нее волн, различное число раз отраженных границей. Из сказанного видно, что обусловленная сходимостью интеграла (5.10) необходимость замены с увеличением  $\gamma(s)$  одного выражения для  $p(t)$  другим находится в согласии с физической картиной распространения волн вблизи границы (см. § 1).

Пусть приведенная длина дуги  $\gamma(s)$  удовлетворяет условию

$$\frac{2}{\sqrt{3} \Delta} \leq \gamma(s) < 2\sqrt{\Delta} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta, \quad (5.11)$$

где  $\Delta = O(1)$  и  $0 < \delta \ll 1$ .

Выберем функцию  $p(t)$  так, чтобы интеграл (5.10) описывал волновое поле, соответствующее точечному источнику заданной интенсивности. Обратимся к построенному нами в § 4 решению (4.28) эталонной задачи. При переходе к постоянной скорости распространения волн и постоянному радиусу кривизны условие (5.11) переходит в неравенство (4.26), и, следовательно, выражение (5.10) должно переходить в решение (4.28) эталонной задачи для круга.

При  $c(s, v) = \text{const}$  и  $\rho(s) = \rho = \text{const}$  имеют место равенства  $P(s) = \rho$ ,  $Q(s) = 3\rho^{-2}$ , приведенная нормаль  $\tilde{v}(s)$  совпадает с приведенной нормалью  $\tilde{v}$  (см. § 4) в случае круга и в силу формул (5.4) и (5.5) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{c_0^{2/3}(0) P^{1/3}(0)}{2^{1/3}} \beta_{21}(0; t) \omega^{-2/3} &= -\frac{2}{15} t \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \\ \beta_2(s, v; t) &= \left( \frac{3}{20} \tilde{v}^2 - \frac{2}{15} t \tilde{v} \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3}, \\ i\alpha_1(s, v; t) &= i \frac{t^2}{60} \frac{s}{\rho} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{1/3}, \\ [i\alpha_2(s, v; t) + 2tR(0)] \omega^{-2/3} &= \left( -\frac{1}{10} \tilde{v} + \frac{t}{10} \right) \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким образом, выражение (5.10) будет переходить в решение

\*) Мы говорим, что волна имеет *лучевой вид*, если она может быть описана формулами лучевого метода.

эталонной задачи, если положить

$$\rho(t) = -\frac{i}{4\pi 2^{1/3}} \frac{1}{v(t)} *). \quad (5.13)$$

В дальнейшем при исследовании смыкания формулы для волн, распространяющейся в пограничном слое, с формулами геометрической оптики для волн, испытавших различное число отражений, выбор функции  $\rho(t)$  в виде (5.13) получит дополнительное обоснование.

Исследование сходимости интеграла (5.10) при выполнении условия (5.11) и равенства (5.13) аналогично исследованию сходимости интеграла (4.28) для круга. Для достаточно малых значений приведенной нормали  $\tilde{v}(s)$  величину  $t_0$ , определяющую размеры контура интегрирования в (5.10), следует полагать равной

$$t_0 \sim 2\Delta \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{20}. \quad (5.14)$$

Постоянная  $\delta$  должна быть настолько малой, чтобы вычисленные на концах промежутка интегрирования члены разложений, входящих в формулу (5.10), содержали по-прежнему большой параметр  $\omega$  в отрицательных степенях. Поскольку  $\alpha_{10}(s; t) \sim t^2$  и  $t_0 \sim \omega^{20}$ , постоянная  $\delta$  должна быть по крайней мере меньше  $1/12$ . Можно показать, что при  $\delta < 1/12$  старшие члены разложений будут также содержать возрастающие отрицательные степени  $\omega$ . (О значении множителя  $\left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta$  и о выборе коэффициента  $\Delta$  см. сноску на стр. 355).

Установим вид функции  $\rho(t)$  при  $\gamma(s) \geq 2\sqrt{\Delta} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta$ .

Для простоты будем вместо выражения для  $g$  (формула (5.10)) рассматривать  $dg/dn$  в точках граничной поверхности, т. е. при  $n = 0$ .

Подставляя в (5.8) вместо  $c(\omega, t)$  (5.9) и (5.13) и ограничиваясь лишь главными членами, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{n=0} &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_0(0) c_0(s) P(0) P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} \times \\ &\times \int_{C_{t_0}} \frac{1}{v(t) \omega_2(t)} \exp[i\gamma(s)t] \left\{ 1 + O\left[ (t^2 + 1) \omega^{-\frac{1}{3}} \right] \right\} dt. \quad (5.15) \end{aligned}$$

\*) На основании формул (5.12) можно утверждать, что при выполнении равенства (5.13) общее выражение (5.10) переходит в решение эталонной задачи (4.28) с точностью до членов порядка  $\omega^{-1}$ . Вычисление дальнейших членов разложений позволило бы показать, видимо, что такой переход имеет место и во всех высших порядках.

При больших значениях  $\gamma(s)$  множитель

$$\frac{1}{v(t) \omega_2(t)} \exp[i\gamma(s)t],$$

входящий в подынтегральную функцию, начинает убывать на нижней части контура интегрирования только при достаточно больших  $t$ . Для больших  $\gamma(s)$  величину  $t_0$  пришлось бы выбрать настолько большой, что поправочное слагаемое стало бы сравнимо с главным членом. Отсюда следует, как уже отмечалось, что функция  $p(t)$  должна выбираться по-разному для различных значений  $\gamma(s)$  и так, чтобы:

1) величина  $t_0$  не увеличивалась с ростом  $\gamma(s)$ ,

2) значения  $\left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{n=0}$  с учетом сформировавшихся многократно отраженных волн лучевого вида непрерывно переходили друг в друга.

Раскладывая функцию  $1/v(t)$  в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{2i}{\omega_1(t) - \omega_2(t)} = -2i \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{\omega_2(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^m + \frac{1}{v(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^M,$$

преобразуем интеграл, входящий в выражение (5.15) для  $\left. \frac{\partial g_n}{\partial n} \right|_{n=0}$ , в сумму интегралов

$$\int_{C_{t_0}} \frac{1}{v(t) \omega_2(t)} \exp[i\gamma(s)t] \left\{ 1 + O\left[(t^2 + 1) \omega^{-\frac{1}{3}}\right] \right\} dt = \sum_{m=0}^{M-1} g_m + \tilde{G}_M, \quad (5.16)$$

где

$$g_m = -2i \int_{C_{t_0}} \frac{1}{\omega_2^2(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^m e^{i\gamma t} \left\{ 1 + O\left[(t^2 + 1) \omega^{-\frac{1}{3}}\right] \right\} dt$$

и

$$\tilde{G}_M = \int_{C_{t_0}} \frac{1}{v(t) \omega_2(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^M e^{i\gamma t} \left\{ 1 + O\left[(t^2 + 1) \omega^{-\frac{1}{3}}\right] \right\} dt.$$

Формула (5.16) позволяет записать выражение (5.15) для  $\left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{n=0}$  в виде

$$\left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{n=0} = \sum_{m=0}^{M-1} \left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0} + \left. \frac{\partial u_M}{\partial n} \right|_{n=0}, \quad (5.17)$$

где по определению

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_0(0)c_0(s)P(0)P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} g_m$$

и

$$\frac{\partial v_M}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_0(0)c_0(s)P(0)P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} \tilde{G}_M. \quad (5.18)$$

Оценим на контуре интегрирования  $C_{t_0}$  при  $|t| \gg 1$  подынтегральную функцию интеграла  $\tilde{G}_M$ . Пользуясь асимптотическими формулами для функций Эйри, получаем

$$\left| \frac{1}{v(t)w_2(t)} \left[ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right]^M e^{i\gamma t} \right| < \begin{cases} \text{const} |t|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{2}{\sqrt{3}} \gamma |t| \right], & \arg t = \frac{\pi}{3}, \\ \text{const} |t|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{4}{3} |t|^{\frac{3}{2}} (M+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma |t| \right], & \arg t = \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

Из приведенной оценки следует, что если с ростом  $\gamma$  соответствующим образом увеличивать число  $M$ , то величина контура интегрирования для интеграла  $\tilde{G}_M$  не будет существенно изменяться. В дальнейшем число  $M$  будем выбирать так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$(M+1)2\sqrt{\Delta} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta > \gamma(s). \quad (5.19)$$

Тогда величина  $t_0$ , определяющая размеры контура интегрирования, будет удовлетворять условию (5.14) при всех  $\gamma(s) \geq \geq \frac{2}{\Delta\sqrt{3}}$ , и формула (5.18) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial u_M}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_0(0)c_0(s)P(0)P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} G_M(\gamma) [1 + O(\omega^{-1/3+4\delta})], \quad (5.20)$$

где

$$G_M(\gamma) = \int_{C_{t_0}} \frac{1}{v(t)w_2(t)} \left[ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right]^M e^{i\gamma t} dt.$$

Проведем теперь исследование слагаемых  $\left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0}$ , входящих в сумму (5.17), и покажем, что они описывают волны, испытавшие определенное число отражений от граничной поверхности. Очевидно, такое исследование сводится к вычислению интегралов  $g_m$  (см. (5.16) и далее).

Введем, так же как и в § 4, функции

$$A_j(t) = e^{i \frac{\pi}{2} (j-2)} t^{\frac{1}{4}} \exp \left[ (-1)^{j-1} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right] \omega_j(t), \quad j = 1, 2.$$

При больших  $|t|$  функции  $A_j(t)$  в секторах

$$\frac{\pi}{3} (3 - 2j) + \varepsilon < \arg t < \frac{\pi}{3} (9 - 2j) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

разлагаются в асимптотические ряды (см. Дополнение 1)

$$A_j(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(2-j)n} \frac{a_n}{i^{3/2}}, \quad \left( a_1 = \frac{5}{48}, \quad a_n = \frac{(6n-1)!!}{144^n (2n-1)!! n!} \right).$$

С помощью функций  $A_j(t)$  подынтегральные функции в интегралах  $g_m$  записываются в виде

$$\begin{aligned} & -2i \frac{1}{\omega_2^2(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^m e^{i\gamma t} = \\ & = -e^{i \frac{\pi}{2} (m+1)} 2t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A_2^2(t)} \left[ \frac{A_1(t)}{A_2(t)} \right]^m \exp \left\{ i\gamma t - \frac{4}{3} (m+1) t^{\frac{3}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

причем при  $|t| \gg 1$  и  $\frac{\pi}{3} + \varepsilon < \arg t < \frac{5\pi}{3} - \varepsilon$ ,

$$\frac{1}{A_2^2(t)} \left[ \frac{A_1(t)}{A_2(t)} \right]^m = \exp \left\{ -2a_1 (m+1) t^{-\frac{3}{2}} [1 + O(t^{-3})] \right\} [1 - O(t^{-3})]. \quad (5.21)$$

Положим

$$\gamma(s) = (m+1) \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{\theta} \tilde{\gamma}(s)$$

и перейдем в интегралах  $g_m$  к переменной  $z$  по формуле

$$t = e^{i\pi} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{2\theta} z.$$

В результате получим

$$g_m = -2e^{i \frac{\pi}{2} (m+2)} \theta \int_{C_{t_0}} F(z) e^{i(m+1)\theta f(z)} \left\{ 1 + O \left[ \left( z^2 \theta^{\frac{4}{3}} + 1 \right) \omega^{-\frac{1}{3}} \right] \right\} dz, \quad (5.22)$$



где

$$\theta = \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{3\theta}, \quad f(z) = \frac{4}{3} z^{\frac{3}{2}} - \tilde{\gamma} z$$

и

$$F(z) = z^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A_2^2(-\theta^{2/3}z)} \left[ \frac{A_1(-\theta^{2/3}z)}{A_2(-\theta^{2/3}z)} \right]^m.$$

При определении функций  $f(z)$  и  $F(z)$  считаем, что разрез проведен по отрицательной части вещественной оси,  $z^{3/2} > 0$  и  $z^{1/2} > 0$  при  $z > 0$ .

В секторе  $-2\pi/3 + \varepsilon < \arg z < 2\pi/3 - \varepsilon$  функция  $F(z)$  допускает асимптотическое представление, вытекающее из (5.21):

$$F(z) = z^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -2ia_1 \frac{m+1}{\theta} z^{-\frac{3}{2}} [1 + O(\theta^{-2}z^{-3})] \right\} [1 + O(\theta^{-2}z^{-3})]. \quad (5.23)$$

Очевидно при  $\theta \gg 1$  интегралы (5.22) могут быть вычислены по методу перевала. Фазовая функция  $f(z)$  имеет единственную седловую точку  $z_0 = \left( \frac{1}{2} \tilde{\gamma}(s) \right)^2$ . Стационарные контуры  $f(z)$  изображены на рис. 53.

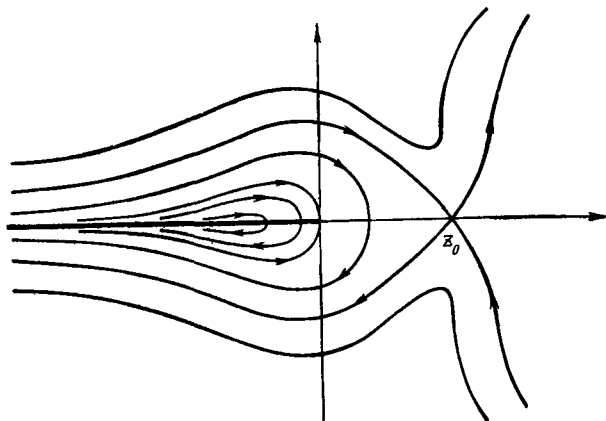


Рис. 53.

Обычный метод перевала применим к интегралу (5.22) только в том случае, если седловая точка  $z_0$  достаточно удалена от точки  $z = 0$ , являющейся точкой разветвления  $f(z)$  и  $F(z)$ . В дальнейшем будем считать, что

$$\tilde{\gamma}(s) \geq 2\sqrt{\Delta} \quad (5.24)$$

и, следовательно,  $z_0 > \Delta$ . Неравенство (5.24) эквивалентно условию

$$\gamma(s) \geq (m+1) \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta 2\sqrt{\Delta},$$

которое будет иметь место при всех  $m$ , если

$$\gamma(s) \geq 2\sqrt{\Delta} M \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^\delta. \quad (5.25)$$

Неравенство (5.25) вместе с неравенством (5.19) однозначно определяют целое число  $M$  при фиксированном значении  $\gamma(s)$ :

$$\frac{\gamma(s)}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{-\delta} - 1 < M \leq \frac{\gamma(s)}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{-\delta}. \quad (5.26)$$

Для конечных расстояний точки наблюдения от источника  $\gamma(s) \sim \omega^{1/3}$  и, следовательно,  $M \sim \omega^{1/3-\delta}$ . При таких значениях  $M$  показатель экспоненты в формуле (5.23) пропорционален  $\omega^{1/3-4\delta}$ , и поэтому при  $\delta < 1/12$  функцию  $F(z)$  нельзя, вообще говоря, считать функцией, медленно меняющейся в обычном для метода перевала смысле. Оценим вклад производных функции  $F(z)$  в поправочное слагаемое метода перевала. Так как по существу в интегралах  $g_m$  большим параметром является произведение  $(m+1)\theta$ , поправочное слагаемое метода перевала, обусловленное функцией  $F(z)$ , будет пропорционально произведению

$$\left| \frac{1}{2} \frac{F''(z_0)}{F(z_0)} \frac{1}{f''(z_0)(m+1)\theta} \right| \sim \frac{1}{5} \frac{1}{z_0^{9/2}} \frac{m+1}{\theta^3} = \frac{1}{5} (m+1)^{10} \left( \frac{2}{\gamma} \right)^9. \quad (5.27)$$

Величина (5.27) имеет порядок  $\omega^{1/3-10\delta}$  и, следовательно, при  $\delta > 1/30$  стремится к нулю вместе с  $1/\omega$ .

Совмещая в интеграле (5.22) контур интегрирования  $C_{t_0}$  в окрестности седловой точки  $z_0$  со стационарным контуром фазовой функции, проводя обычные для метода перевала вычисления и объединяя поправочные слагаемые одного порядка, получаем

$$g_m = \sqrt{\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m\right)} \frac{\gamma^{3/2}}{(m+1)^2} \exp\left\{-\frac{i}{12} \frac{\gamma^3}{(m+1)^2} - 2ia_1 \frac{(m+1)^4}{\gamma^3}\right\} \times \\ \times \left\{ 1 + O[z_0^2 \omega^{-1/3} Q^{4/3}] + O[\Delta^{-9/2} (m+1) Q^{-3}] + \right. \\ \left. + O[\Delta^{-3} Q^{-2}] + O\left[\Delta^{-3/2} \frac{Q^{-1}}{m+1}\right] \right\}. \quad (5.28)$$

Для интегралов  $g_m$  число  $m+1 \leq M$ , и, следовательно, в силу

неравенства (5.26)  $m + 1$  по порядку величины не превосходит  $\omega^{1/3-\delta}$ . Таким образом, поправочные слагаемые в формуле (5.28) имеют следующие порядки:  $\omega^{-1/3+4\delta}$ ,  $\omega^{1/3-10\delta}$ ,  $\omega^{-6\delta}$  и  $\omega^{-3\delta}$ . Чтобы получить оптимальную погрешность порядка  $\omega^{-1/7}$ , следует положить  $\delta = 1/21$ .

Формула (5.28) справедлива как при  $\gamma(s) \sim \omega^\delta$ , так и при  $\gamma(s) \sim \omega^{1/3}$ ,  $m + 1 = M, M - 1, \dots$ . Другими словами, формула (5.28) справедлива как на малых расстояниях точки наблюдения от источника ( $s \sim \omega^{-1/3+\delta}$ ), так и на расстояниях конечных, но для достаточно больших значений  $m$ . При  $\gamma(s) \sim \omega^{1/3}$  и малых значениях  $m$  формула (5.28) неприменима, так как при  $m$  малых  $|z_0| \sim \omega^{1/3-\delta}$ . Это связано с тем, что при малых  $m$  подинтегральная функция интегралов  $g_m$  в окрестности седловой точки не удовлетворяет уравнению Гельмгольца с достаточной точностью. Используя найденное значение интегралов  $g_m$  и заменяя  $\gamma(s)$  по формуле (3.34), для величин  $\left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0}$ , входящих в сумму (5.17), получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0} &= \frac{\omega^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m\right)} \frac{1}{\sqrt{c_0(0)c_0(s)P(0)P(s)}} \times \\ &\times \frac{1}{(m+1)^2} \left[ \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau)P^{2/3}(\tau)} \right]^{3/2} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)} - \frac{1}{24} \frac{\omega}{(m+1)^2} \left( \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau)P^{2/3}(\tau)} \right)^3 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{10}{3} \frac{(m+1)^4}{\omega} \left( \int_0^s \frac{d\tau}{c_0^{1/3}(\tau)P^{2/3}(\tau)} \right)^{-3} \right] \right\} [1 + O(\omega^{-1/7})]. \quad (5.29) \end{aligned}$$

Выражение (5.29) полностью совпадает с формулой (3.33), которая была получена в § 3 для нормальной производной волнового поля волны, испытавшей  $m$  отражений и распространяющейся вблизи границы  $S$ .

Подведем итоги исследований настоящего параграфа. Из того факта, что  $\left. \frac{\partial u_m}{\partial n} \right|_{n=0}$ , входящие в сумму (5.17), описывают волны, испытавшие  $m$  отражений и распространяющиеся вблизи границы  $S$ , следует, что функция  $\left. \frac{\partial u_M}{\partial n} \right|_{n=0}$  (5.18) описывает нормальную производную интерференционного волнового поля, порожденного волнами с числом отражений, большим  $M - 1$ .

Другими словами,  $\left. \frac{\partial u_M}{\partial n} \right|_{n=0}$  описывает нормальную производную поверхностной волны. Совпадение формул (5.29) и (3.33) может рассматриваться как обоснование правильности выбора контура  $C_{i_0}$  и весовой функции  $c(\omega, t)$  при построении суперпозиции (5.6).

Итак, для вычисления нормальной производной волнового поля на границе  $S$ , в фиксированной точке наблюдения  $N(s, 0)$ , прежде всего следует определить целое число  $M$ , удовлетворяющее неравенству (5.26). Число  $M$  указывает максимальное число волн геометрической оптики, которые могут наблюдаться порознь друг от друга в точке  $N$ . Волновые поля этих волн описываются формулами лучевого метода, причем для волн последних номеров справедлива формула (5.29), которая может быть получена как при помощи уточнения формул лучевого метода, так и путем выделения соответствующих интегралов из суперпозиции (5.15). Нормальная производная поверхностной волны, т. е. суммарного эффекта волн, для которых число отражений превосходило бы  $(M-1)$ , описывается формулой (5.20)

$$\left. \frac{\partial u_M}{\partial n} \right|_{n=0} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c_0(0) c_0(s) P_0(0) P(s)}} e^{i\omega \int_0^s \frac{d\tau}{c_0(\tau)}} G_M(\gamma) \left[ 1 + O\left(\omega^{-\frac{1}{7}}\right) \right], \quad (5.30)$$

$$G_M(\gamma) = \int_{C_{i_0}} \frac{1}{v(t) w_2(t)} \left[ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right]^M e^{i\gamma(s)t} dt.$$

Модуль подынтегральной функции интеграла  $G_M(\gamma)$ , при выбранном значении  $M$  имеет достаточно резкий максимум на контуре интегрирования вблизи точки  $t=0$ . Это обстоятельство позволяет сравнительно просто протабулировать интеграл  $G_M(\gamma)$ . Таблицы специальной функции  $G_M(\gamma)$  приведены в Дополнении 4.

С увеличением частоты  $\omega$  или координаты точки наблюдения  $s$  возрастает приведенная длина дуги  $\gamma(s)$ . При тех значениях  $\gamma(s)$ , при которых величина  $\frac{\gamma(s)}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{-\delta}$  становится целым числом, подынтегральная функция в (5.30) скачкообразно изменяется. Прежнее выражение для поля поверхностной волны становится равным сумме полей новой поверхностной волны и волны, испытавшей  $\frac{\gamma(s)}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{-\delta} - 1$  отражений,

Таким образом, при целых значениях  $\frac{\gamma(s)}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_0(s)} \right)^{-\delta}$  происходит отщепление от поверхностной волны волны геометрической оптики. С увеличением  $\gamma(s)$  путь этой отщепленной волны все более удаляется от границы  $S$ , и это приводит к тому, что она перестает описываться формулой (5.29).

Формула (5.30) дает только главный член разложения поверхностной волны по дробным отрицательным степеням  $\omega$ . Чтобы получить дальнейшие члены разложения, следует обратиться к формуле (5.8), заменить в ней функцию  $c(\omega, t)$  разложением (5.9) и выбрать безразмерную функцию в виде

$$\rho(t) = -\frac{i}{4\pi 2^{1/3}} \frac{1}{v(t)} \left[ \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \right]^M.$$

## ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ГЛАДКИМ ВЫПУКЛЫМ ТЕЛОМ

Цель этой главы — построение высокочастотной асимптотики решения задачи о дифракции волны, заданной своим лучевым разложением, на гладкой выпуклой поверхности  $S$ , гауссова кривизна которой ни в одной точке не равна нулю. Будет рассмотрен случай краевого условия Дирихле  $u|_S = 0$  и скорости  $c = 1$  (циклическая частота  $\omega$  и волновое число  $k$  совпадают:  $\omega/c = \omega = k$ ).

Асимптотические формулы будут построены в некоторой окрестности  $\Omega_n$  кривой  $C$  — геометрического места касания лучей падающей волны и поверхности  $S$ . Эти формулы после некоторых преобразований применимы в полутени вдали от  $S$  и в зоне глубокой тени, а в освещенной области переходят с произвольной степенью точности (в смысле порядка по  $k^{-1}$ ,  $k \rightarrow \infty$ ) в асимптотические разложения, которые дает лучевой метод.

При написании главы мы прежде всего руководствовались целью изложить идейную сторону вопроса, поэтому многие формулы и утверждения приводятся без доказательств. Читатель, разобравший предыдущие главы книги и главным образом вторую главу, сможет провести эти доказательства самостоятельно.

В последующем мы часто будем говорить «асимптотическая формула» или «асимптотическое разложение», хорошо понимая, что формально выведенные нами соотношения еще нуждаются в строгом обосновании.

### § 1. Эталонная задача

Формулы, которые будут получены для общего случая, аналогичны асимптотическим формулам для решения классической задачи дифракции плоской волны на круге. Учитывая наводящий характер построений этого параграфа, мы не будем заниматься подробным обоснованием получаемых формул.

Пусть плоская волна  $u_{\text{пад}} = e^{ikh}$  падает на круг  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$ . Отраженная волна  $u_{\text{отр}}$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) u_{\text{от}} = 0, \quad r \geq a, \quad (1.1)$$

краевому условию

$$u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}|_{r=a} = 0 \quad (1.2)$$

и условию излучения

$$\sqrt{r} \left( \frac{\partial u_{\text{отр}}}{\partial r} - iku_{\text{отр}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.1) — (1.3) хорошо известно \*)

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\delta_n \left( J_n(kr) - \frac{H_n^{(1)}(kr) J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \right) e^{i \frac{\pi}{2} n} \cos n\varphi. \quad (1.4)$$

Здесь  $r, \varphi$  — полярные координаты;  $\delta_0 = 1/2$ ,  $\delta_n = 1$ ,  $n \geq 1$ . Решение (1.4) можно представить контурным интегралом

$$u = ik \int_{\mathcal{L}} \left( J_{k\zeta}(kr) - \frac{H_{k\zeta}^{(1)}(kr) J_{k\zeta}(ka)}{H_{k\zeta}^{(1)}(ka)} \right) e^{-ik\zeta \frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\zeta\varphi}{\sin k\zeta\pi} d\zeta, \quad (1.5)$$

причем

$$ik \int_{\mathcal{L}} J_{k\zeta}(kr) e^{-i \frac{\pi}{2} k\zeta} \frac{\cos k\zeta\varphi}{\sin k\zeta\pi} d\zeta = e^{ikhx}. \quad (1.6)$$

Контур  $\mathcal{L}$  на плоскости комплексного переменного  $\zeta$  состоит из полупрямых  $(+\infty - i\beta, -i\beta)$ ,  $(i\beta, i\beta + \infty)$  и соединяющего их отрезка  $[-i\beta, i\beta]$ ,  $\beta > 0$  — достаточно малое число. Направление интегрирования выбрано так, что положительная часть вещественной оси остается справа. Интегралы (1.5) и (1.6) следует понимать в смысле главного значения, так как подынтегральное выражение имеет полюс при  $\zeta = 0$ .

Проведем сейчас исследования интеграла (1.5) в зоне полутени  $\Omega_{\text{п}}$ , расположенной в верхней полуплоскости, точнее в независимой от  $k$  окрестности предельного луча  $y = a$ ,  $x \geq 0$ . Найдем участок контура интегрирования, вносящий основной вклад в интеграл (1.5) при условии, что точка наблюдения  $M(r, \varphi) \in \Omega_{\text{п}}$ .

Нетрудно убедиться, что результат интегрирования по нижней части контура  $\mathcal{L}$  ( $\text{Im} \zeta = -\beta$ ,  $\text{Re} \zeta \geq 0$ ) в интегралах (1.5) и (1.6) будет экспоненциально мал. Для этого достаточно заменить функции Ханкеля и Бесселя их асимптотическими выражениями (см. гл. 2) и воспользоваться тем, что отношение  $\cos k\zeta\varphi / \sin k\zeta\pi$  равно

$$i \exp [ik\zeta(\varphi - \pi)] (1 + O(\exp[-2k\beta\varphi])).$$

\*) См., например, В. И. Смирнов [2].

В интеграле по верхней части контура  $\mathcal{L}$  ( $\text{Im } \zeta = \beta$ ,  $\text{Re } \zeta \geq 0$ ) заменим  $\cos k \zeta \varphi / \sin k \zeta \pi$  на  $-i \exp[ik \zeta (\pi - \varphi)] (1 + O(\exp[-2k \beta \varphi]))$ .

Пользуясь тем, что при  $\zeta > r$  функция Бесселя экспоненциально убывает, а функция Ханкеля экспоненциально возрастает (это следует из асимптотических формул для этих функций), и отбрасывая экспоненциально малые члены порядка  $e^{-k\delta}$ ,  $\delta > 0$ , получим

$$u \approx k \int_{\mathcal{L}'} \left( J_{k\zeta}(kr) - \frac{H_{k\zeta}^{(1)}(kr) J_{k\zeta}(ka)}{H_{k\zeta}^{(1)}(ka)} \right) e^{ik\zeta \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)} d\zeta + \\ + ik \int_{-i\beta}^{i\beta} \left( J_{k\zeta}(kr) - \frac{H_{k\zeta}^{(1)}(kr) J_{k\zeta}(ka)}{H_{k\zeta}^{(1)}(ka)} \right) e^{-ik\zeta \frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\zeta \varphi}{\sin k\zeta \pi} d\zeta, \quad (1.7)$$

$$u_{\text{пад}} = e^{ikx} \approx k \int_{\mathcal{L}'} J_{k\zeta}(kr) e^{ik\zeta \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)} d\zeta + \\ + ik \int_{-i\beta}^{i\beta} J_{k\zeta}(kr) e^{-ik\zeta \frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\zeta \varphi}{\sin k\zeta \pi} d\zeta. \quad (1.8)$$

Здесь  $\mathcal{L}'$  — отрезок  $\text{Im } \zeta = \beta$ ,  $0 \leq \text{Re } \zeta \leq N$ , причем  $N$  фиксировано и не зависит от  $k$ .

Изучим поведение подынтегрального выражения первого слагаемого в формуле (1.8), используя асимптотические формулы для функции Бесселя и Ханкеля. Если заменить функцию Бесселя  $J_{k\zeta}$  на полусумму функций Ханкеля  $(H_{k\zeta}^{(1)} + H_{k\zeta}^{(2)})/2$ , то подынтегральное выражение в (1.8) разобьется на два слагаемых с фазовыми множителями  $\exp[ikf_0(r, \varphi; \zeta)]$  и  $\exp[ikf_1(r, \varphi; \zeta)]$ , где

$$f_j(r, \varphi; \zeta) = (-1)^j \left[ \sqrt{r^2 - \zeta^2} - \zeta \arccos \frac{\zeta}{r} \right] + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \zeta, \quad j = 0, 1.$$

Если исследовать на вещественной оси знак производных  $\frac{df_j}{d\zeta}$  и воспользоваться уравнениями Коши — Римана, то легко установить, что при  $0 < \varphi < \pi$  слагаемое, содержащее  $H_{k\zeta}^{(1)}/2$ , экспоненциально велико на отрезке  $0 < \text{Im } \zeta \leq \beta$ ,  $\text{Re } \zeta = 0$ , а также на отрезке  $\text{Im } \zeta = \beta$ ,  $0 \leq \text{Re } \zeta < r$  или на некоторой его части, примыкающей к точке  $\zeta = i\beta$ .

Седловую точку  $\zeta_0 = r \sin \varphi$  имеет один и только один из двух фазовых множителей  $\exp[ikf_j]$  ( $j = 0, 1$ ). Если точка  $M = M(r, \varphi)$  находится вблизи предельного луча (т. е.  $r \approx a/\sin \varphi$ ), то седловая точка  $\zeta_0$  близка к точке  $a$ .



Установив поведение слагаемых подынтегральной функции первого интеграла в (1.8), продеформируем (для каждого слагаемого по-своему) контур интегрирования  $\mathcal{L}'$ . Выберем для этого на вещественной оси точки  $\xi_1 < \xi_0$  и  $\xi_2 > \xi_0$ . В первом слагаемом контур  $\mathcal{L}'$  совместим с ломаной, имеющей вершины в точках:  $i\beta$ ,  $-i\beta$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $N + i\beta$ . Во втором — с ломаной:  $i\beta$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $N + i\beta$ . Таким образом, получается два интеграла по отрезку  $(-i\beta, i\beta)$ , которые, как нетрудно установить, пользуясь соотношениями  $H_{-k\xi}^{(1)}(kr) = e^{ik\xi\pi} H_{k\xi}^{(1)}(kr)$ ,  $H_{-k\xi}^{(2)}(kr) = e^{-ik\xi\pi} H_{k\xi}^{(2)}(kr)$ , взаимно сокращаются.

Интегралы по отрезкам, не лежащим на вещественной оси, не имеют седловых точек, поэтому главные члены асимптотики функции  $u_{\text{пад}}$  при  $k \rightarrow \infty$  определяются интегрированием функции  $kJ_{k\xi}(kr) e^{ik\xi(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$  лишь по отрезку  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Аналогично можно преобразовать выражение для  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  (см. формулу (1.7)) и прийти к заключению, что асимптотика волнового поля в полутени получается при интегрировании выражения

$$k \left( J_{k\xi}(kr) - \frac{H_{k\xi}^{(1)}(kr) J_{k\xi}(ka)}{H_{k\xi}^{(1)}(ka)} \right) e^{ik\xi(\frac{\pi}{2}-\varphi)}$$

по отрезку вещественной оси  $(\xi_1, \xi_2)$ , содержащему стационарную точку  $\xi_0 = r \sin \varphi$  и точку  $a$ . Заметим, что если точка  $M$  находится вблизи предельного луча  $r = a/\sin \varphi$ , который является границей между освещенной областью и зоной тени, то промежуток интегрирования  $(\xi_1, \xi_2)$  можно взять малым.

Однако если заменить контур интегрирования  $\mathcal{L}'$  в формуле (1.7) отрезком вещественной оси, то в асимптотику полученного выражения внесут нежелательные вклады концы промежутка интегрирования — точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Чтобы исключить эти дополнительные вклады, под знак интеграла следует ввести так называемый *нейтрализующий множитель*  $\Upsilon(\xi)$ . Нейтрализующий множитель может быть выбран, например, равным

$$\Upsilon(\xi) = \exp \left[ -\frac{k^{-1/3}b}{\xi - \xi_1} + \frac{k^{-1/3}b}{\xi - \xi_2} \right] \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left( \frac{1}{\xi - \xi_1} - \frac{1}{\xi - \xi_2} \right)^l \frac{b^l}{k^{l/3}}, \quad (1.9)$$

где  $N$  — целое число и  $b > 0$  — произвольная константа. Нейтрализующий множитель  $\Upsilon(\xi)$  имеет в точках  $\xi_1$  и  $\xi_2$  нули бесконечного порядка и  $\Upsilon(\xi) = 1 + O\left(\frac{1}{k^{(N+1)/3}}\right)$  во внутренних точках промежутка  $(\xi_1, \xi_2)$ . Выбирая число  $N$  достаточно большим, мы всегда можем добиться того, что нейтрализующий множитель, устраняя влияние концов промежутка интегрирования, не

изменит заданной точности асимптотического представления  $u_{\text{пад}}$  и  $u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ .

В дальнейшем мы часто будем пользоваться возможностью в пределах заданной точности изменять выражения, асимптотика которых разыскивается, при этом  $N$  (а также  $N_1, N_2, N_3$ ) всегда будет обозначать произвольное (достаточно большое) положительное число. Итак, со сколь угодно высокой точностью по  $k^{-1}$  ( $k \rightarrow \infty$ )

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} \approx$$

$$\approx k \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left( J_{k\zeta}(kr) e^{ik\zeta \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} - H_{k\zeta}^{(1)}(kr) e^{ik\zeta \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \frac{J_{k\zeta}(ka)}{H_{k\zeta}^{(1)}(ka)} \right) \Upsilon(\zeta) d\zeta. \quad (1.10)$$

В § 2 главы 2 было показано, что волновое поле, описываемое функцией  $J_{k\zeta}(k\zeta) e^{ik\zeta(\pi/2 - \varphi)}$ , имеет каустику  $K$ , представляющую собой окружность с центром в начале координат и радиусом  $\zeta$ . Функция  $H_{k\zeta}^{(1)}(kr) e^{ik\zeta(\pi/2 - \varphi)}$  также естественно связывается с каустикой  $K$ . Она описывает волну, отходящую от каустики  $K$  и удовлетворяющую условию излучения.

Таким образом, асимптотическое выражение для падающей и отраженной волны можно получить в виде суперпозиции решений уравнения Гельмгольца, имеющих каустику. Наложение решений, содержащих функцию Бесселя  $J_{k\zeta}(kr)$ , описывает падающую волну, содержащих функцию Ханкеля  $H_{k\zeta}^{(1)}(kr)$  — отраженную волну.

Заменим теперь в выражении (1.10) функции  $J_{k\zeta}(ka)$  и  $H_{k\zeta}^{(1)}(ka)$  их асимптотическими представлениями в форме Черри\*). Тогда

$$\frac{J_{k\zeta}(ka)}{H_{k\zeta}^{(1)}(ka)} \approx \frac{iv(h)}{\omega_1(h)}, \quad h = T_a + \frac{p_1(z)}{(ka)^{4/3}} + \dots + \frac{p_N(z)}{(ka)^{2N-2/3}}, \quad (1.11)$$

где  $v(h)$ ,  $\omega_1(h)$  — функции Эйри, а  $T_a$  и  $z$  определяются равенством

$$T_a = (k\zeta)^{2/3} z = \left[ \frac{3}{2} ika \int_1^{\zeta/a} \arccos dx \right]^{2/3} = \\ = 2 \left( \frac{ka}{2} \right)^{2/3} \left( \frac{\zeta}{a} - 1 \right) \left[ 1 - \frac{1}{30} \left( \frac{\zeta}{a} - 1 \right) + \dots \right],$$

$p_j(z)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — регулярные в окрестности  $z = 0$  функции и  $N$  — достаточно большое положительное число. Функции  $J_{k\zeta}(kr)$  и  $H_{k\zeta}^{(1)}(kr)$  заменим асимптотическими представлениями

\*) См. Черри [1], а также гл. 6, § 2.

в форме Олвера\*). Выполнив указанные замены, перейдем к новой переменной интегрирования  $\gamma$  по формуле

$$T_a + \sum_{j=1}^N \frac{p_j(z)}{(ka)^{2j-2/3}} = k^{2/3} \gamma. \quad (1.12)$$

При этом очевидно, что  $\xi = a + \gamma(a/2)^{1/3} + O(\gamma^2 + k^{-2})$  и в новой переменной интегрирование будет вестись по промежутку  $(\gamma_1^c, \gamma_2^c)$ , где  $\gamma_1^c < 0$ ,  $\gamma_2^c > 0$ .

После ряда преобразований из формулы (1.10) со сколь угодно высокой точностью по  $k^{-1}$  ( $k \rightarrow \infty$ ) можно получить равенство

$$u \approx k \int_{\gamma_1^c}^{\gamma_2^c} \left[ J_c(M, \gamma) - H_c(M, \gamma) \frac{v(k^{2/3}\gamma)}{w_1(k^{2/3}\gamma)} \right] e^{ik\xi_c(M, \gamma)} \gamma d\gamma, \quad (1.13)$$

где

$$J_c(M, \gamma) e^{ik\xi_c(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ \sum_{n=0}^N A_n^c(M, \gamma) k^{-n} v(-k^{2/3}\mu_c(M, \gamma)) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \sum_{n=0}^N B_n^c(M, \gamma) k^{-n} v'(-k^{2/3}\mu_c(M, \gamma)) \right] e^{ik\xi_c(M, \gamma)} \quad (1.14)$$

и

$$H_c(M, \gamma) e^{ik\xi_c(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ \sum_{n=0}^N A_n^c(M, \gamma) k^{-n} w_1(-k^{2/3}\mu_c(M, \gamma)) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \sum_{n=0}^N B_n^c(M, \gamma) k^{-n} w_1'(-k^{2/3}\mu_c(M, \gamma)) \right] e^{ik\xi_c(M, \gamma)} \quad (1.15)$$

асимптотика функций  $J_{k\xi}(kr) e^{ik\xi(\pi/2-\varphi)} \frac{d\xi}{d\gamma}$  и  $(-i) H_{k\xi}^{(1)}(kr) e^{ik\xi(\pi/2-\varphi)} \frac{d\xi}{d\gamma}$  после замены переменной (1.12),  $M = M(r, \varphi)$  — точка, где вычисляется волновое поле. Если точка  $M$  находится вблизи предельного луча, то так же, как и в переменной  $\xi$ , промежуток интегрирования  $(\gamma_1^c, \gamma_2^c)$  можно считать малым. В формулах (1.13)—(1.15) индекс  $c$  указывает, что все величины относятся к случаю круга. Очевидно, функциям  $J_c(M, \gamma) e^{ik\xi_c(M, \gamma)}$ ,  $H_c(M, \gamma) e^{ik\xi_c(M, \gamma)}$  будут соответствовать те же каустики, что и функциям  $J_{k\xi}(kr) e^{ik\xi(\pi/2-\varphi)}$  и  $H_{k\xi}^{(1)}(kr) e^{ik\xi(\pi/2-\varphi)}$ . Эти каустики, имеющие вид окружностей, будем обозначать  $S_\gamma^c$ , причем  $S_0^c$

\*) См. Олвер [1], [2], а также гл. 2, § 2.

совпадает с окружностью  $x^2 + y^2 = a^2$ , а  $S_\gamma^c$  при  $\gamma > 0$  ( $\gamma < 0$ ) расположены вне (внутри)  $S_0^c$ . Отметим следующее важное обстоятельство: лучи, касающиеся  $S_\gamma^c$  ( $\gamma < 0$ ), после отражения от  $S_0^c$  снова касаются  $S_\gamma^c$ .

Функции  $J_{k\zeta}(kr)e^{ik\zeta(\pi/2-\varphi)}$ ,  $H_{k\zeta}^{(1)}(kr)e^{ik\zeta(\pi/2-\varphi)}$  удовлетворяли уравнению Гельмгольца, поэтому после замены функций  $J_{k\zeta}$  и  $H_{k\zeta}^{(1)}$  на их асимптотические разложения и замены переменных мы опять получим решение уравнения Гельмгольца, на этот раз формальное. Конечная сумма  $J_c(M, \gamma)e^{ik\zeta_c(M, \gamma)}$  (см. (1.14)) удовлетворяет уравнению Гельмгольца с точностью до членов  $O(k^{-N})$ , и поэтому коэффициенты  $A_n^c$  и  $B_n^c$  должны удовлетворять рекуррентным соотношениям § 6 главы 2.

Заметим, что кривые  $\mu_c(M, \gamma) = 0$  — это каустики  $S_\gamma^c$  и подынтегральное выражение в (1.13) удовлетворяет краевому условию  $u|_S = 0$ , так как подынтегральное выражение в формуле (1.10) удовлетворяет этому же краевому условию.

В дальнейшем будем называть *каустическими суммами* (сокращенно к. суммами) выражения, которые получаются, если в формальном разложении (6.2) главы 2 функцию  $v$  заменить на произвольное решение уравнения Эйри  $\omega$  и потом отбросить члены порядка  $O(\omega^{-N-1})$  ( $\omega = k$ ) и выше.

Выражения (1.14), (1.15) — частные случаи к. сумм.

Отправляясь от формулы (1.13), доставляющей асимптотику волнового поля в области полутени в эталонной задаче, перейдем к общему случаю.

Пусть волна, заданная своим лучевым разложением

$$u_{\text{пад}} \approx e^{ikr_{\text{пад}}(M)} \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{\text{пад}}(M)}{(-ik)^j}, \quad M = M(x_1, x_2, x_3), \quad (1.16)$$

падает на выпуклую гладкую поверхность  $S$  с ненулевой гауссовой кривизной.

Полное волновое поле  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  в освещенной области легко найдется лучевым методом. Лучи, касающиеся поверхности  $S$ , отделяют зону тени от освещенной области (рис. 54). Окрестности  $\Omega_{\Pi}$  этих лучей — зона полутени. Построение асимптотики  $u$  в полутени и в зоне тени — задача существенно более трудная. Предыдущие рассуждения наводят на мысль искать дифракционное поле в области  $\Omega_{\Pi}$  в виде

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} \approx$$

$$\approx k \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \left[ J(M, \gamma) - H(M, \gamma) \frac{v(k^{2/3}\gamma)}{\omega_1(k^{2/3}\gamma)} \right] e^{ik\zeta(M, \gamma)} \Upsilon(\gamma) d\gamma, \quad (1.17)$$

где

$$J(M, \gamma) e^{ik\xi(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ v(-k^{2/3}\mu(M, \gamma)) \sum_{n=0}^N A_n(M, \gamma) k^{-n} + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} v'(-k^{2/3}\mu(M, \gamma)) \sum_{n=0}^N B_n(M, \gamma) k^{-n} \right] e^{ik\xi(M, \gamma)}, \quad (1.18)$$

$$H(M, \gamma) e^{ik\xi(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ \omega_1(-k^{2/3}\mu(M, \gamma)) \sum_{n=0}^N A_n(M, \gamma) k^{-n} + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \omega_1'(-k^{2/3}\mu(M, \gamma)) \sum_{n=0}^N B_n(M, \gamma) k^{-n} \right] e^{ik\xi(M, \gamma)} \quad (1.19)$$

— к. суммы, аналогичные к. суммам (1.14), (1.15) и  $\Upsilon(\gamma)$  — нейтрализующий множитель, соответствующий промежутку  $(-\gamma_0, \gamma_0)$  (см. формулу (1.9)).

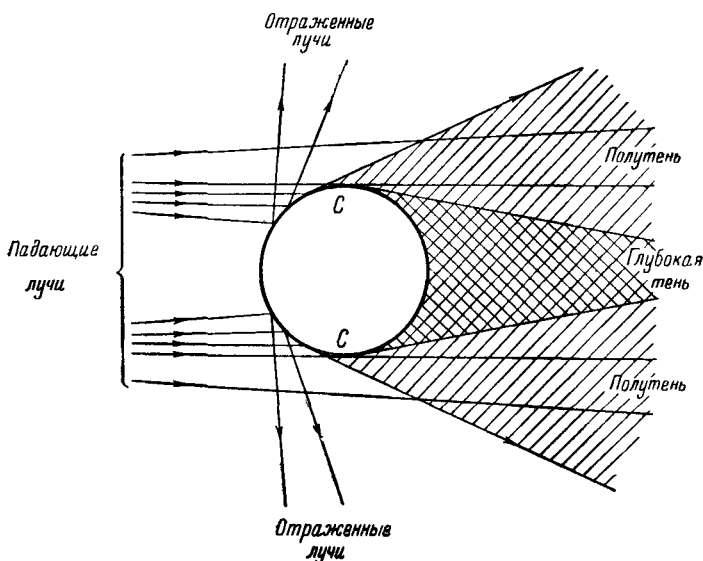


Рис. 54.

Для точки наблюдения, расположенной в области  $\Omega_{\text{п}}$ , промежуток интегрирования  $(-\gamma_0, \gamma_0)$  можно считать малой окрестностью начала координат.

Мы видели, что подынтегральное выражение в формуле (1.13), дающей решение эталонной задачи, удовлетворяет краевому условию. Естественно поэтому потребовать, чтобы и подынтегральное выражение в (1.17) удовлетворяло краевому

условию на поверхности \*)  $S$ . Этого можно добиться, если поверхности  $S_\gamma$ , играющие роль каустик для  $Je^{ikh}$  и  $He^{ikh}$  будут удовлетворять условиям:

1) поверхность  $S_\gamma$  при  $\gamma = 0$  совпадает с  $S$ , при  $\gamma < 0$  и  $\gamma > 0$  расположена соответственно внутри и вне  $S$ ;

2) если  $\gamma < 0$ , то лучи, касающиеся  $S_\gamma$ , после отражения от  $S$  снова касаются  $S_\gamma$ .

Условие 2) указывает на аналогию рассматриваемых здесь семейств лучей с замыкающимися конгруэнциями лучей (см. гл. 3).

Построить в общем случае к. суммы, для которых поверхности  $S_\gamma$  удовлетворяли бы указанным условиям, не удастся, поэтому дифракционное поле мы будем искать не в виде наложения к. сумм, а в виде наложения некоторых их аналогов, так называемых приближенных каустических сумм, которые будут построены в § 2.

## § 2. Построение приближенных каустических сумм

В силу того, что мы интересуемся асимптотикой  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  только вблизи границы свет — тень, промежуток интегрирования в (1.17) — малая окрестность  $(-\gamma_0, \gamma_0)$  начала координат. Естественно поэтому возникает мысль искать  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $A_n$  и  $B_n$  в виде разложения по степеням  $\gamma$ :

$$\xi(M, \gamma) \sim \sum_{j=0}^{\infty} l_j(M) \gamma^j, \quad \mu(M, \gamma) \sim \sum_{j=0}^{\infty} m_j(M) \gamma^j, \quad (2.1)$$

$$A_n(M, \gamma) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_{nj}(M) \gamma^j, \quad B_n(M, \gamma) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}_{nj}(M) \gamma^j. \quad (2.2)$$

Однако ряды (2.1), (2.2), вообще говоря, расходятся \*\*). Мы получим приближенное выражение к. сумм, если  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $A_n$  и  $B_n$  представим конечными отрезками рядов (2.1) и (2.2). Эти приближенные выражения будут удовлетворять соотношениям § 6 главы 2 с достаточно высокой точностью по  $\gamma$ . Оказывается, построения таких приближенных каустических сумм вполне достаточно для наших целей. Итак, выражения

$$\mathcal{F}(M, \gamma) e^{ikh(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ \sum_{n=0}^N \mathcal{A}_n(M, \gamma) k^{-n} v(-k^{2/3} m(M, \gamma)) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_n(M, \gamma) k^{-n} v'(-k^{2/3} m(M, \gamma)) \right] e^{ikh(M, \gamma)} \quad (2.3)$$

\*) Здесь и в дальнейшем (если это не может вызвать недоразумений) мы, говоря об  $S$ , будем иметь в виду лишь ту часть этой поверхности, которая находится в области, где мы изучаем асимптотику волнового поля  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ .

\*\*) Ср. Д. Л ю д в и г [2].

и

$$\mathcal{H}(M, \gamma) e^{ikl(M, \gamma)} = k^{-1/3} \left[ \sum_{n=0}^N \mathcal{A}_n(M, \gamma) k^{-n} \omega_1(-k^{2/3} m(M, \gamma)) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_n(M, \gamma) k^{-n} \omega_1'(-k^{2/3} m(M, \gamma)) \right] e^{ikl(M, \gamma)}, \quad (2.4)$$

в которых  $l$ ,  $m$ ,  $\mathcal{A}_n$  и  $\mathcal{B}_n$  — частные суммы рядов (2.1) и (2.2):

$$l(M, \gamma) = \sum_{n=0}^{N_1} l_n(M) \gamma^n, \quad m(M, \gamma) = \sum_{n=0}^{N_1} m_n(M) \gamma^n; \quad (2.5)$$

$$\mathcal{A}_n(M, \gamma) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \mathcal{A}_{n_1}(M) \gamma^{n_1}, \quad \mathcal{B}_n(M, \gamma) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \mathcal{B}_{n_1}(M) \gamma^{n_1}, \quad (2.6)$$

будем называть *приближенными каустическими суммами* (сокращенно п. к. суммами).

В дальнейшем дифракционное поле  $u$  будет построено в виде интеграла

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} \approx I = I_1 + I_2 =$$

$$= k \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \left[ \mathcal{F}(M, \gamma) - \mathcal{H}(M, \gamma) \frac{v(k^{2/3} \gamma)}{\omega_1(k^{2/3} \gamma)} \right] e^{ikl(M, \gamma)} \Upsilon(\gamma) d\gamma, \quad (2.7)$$

представляющего собой наложение п. к. сумм (2.3) и (2.4).

(В формуле (2.7) интегралы

$$I_1 = k \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \mathcal{F}(M, \gamma) e^{ikl(M, \gamma)} \Upsilon(\gamma) d\gamma, \quad (2.8)$$

$$I_2 = -k \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \mathcal{H}(M, \gamma) \frac{v(k^{2/3} \gamma)}{\omega_1(k^{2/3} \gamma)} e^{ikl(M, \gamma)} \Upsilon(\gamma) d\gamma$$

описывают собственно падающую  $u_{\text{пад}}$  и отраженную  $u_{\text{отр}}$  волны. Величину  $\gamma_0$ , определяющую длину промежутка интегрирования, возьмем равной \*)

$$\gamma_0 = Dk^{-1/6},$$

где  $D > 0$  — произвольная фиксированная константа. Тогда, поскольку п. к. суммы (2.3) и (2.4) удовлетворяют уравнению Гельмгольца с относительной ошибкой порядка  $k^{-N} + \gamma^{N_1} k$ , интеграл (2.7) будет удовлетворять уравнению Гельмгольца с

\*) Вместо  $k^{-1/6}$  можно взять  $k^{-\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — фиксированное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \varepsilon < 2/3$ , а в остальном произвольное. Замена  $k^{-1/6}$  на  $k^{-\varepsilon}$  привела бы к изменению вида остаточных членов в ряде формул.

точностью до членов  $O(k^{-N} + k^{1-N_1/6})$ , сколь угодно малых по порядку величины при достаточно больших  $N$  и  $N_1$ .

Способ построения п.к. сумм (2.3), (2.4) кратко сводится к следующему: формальные ряды (2.1), (2.2) подставляем в уравнения (6.5), (6.8), (6.9) главы 2 и требуем, чтобы коэффициенты при последовательных степенях  $\gamma$  в обеих частях этих равенств совпадали. Это приводит к рекуррентным соотношениям между  $l_j$ ,  $m_j$ ;  $\mathcal{A}_{nj}$ ,  $\mathcal{B}_{nj}$ . Искомые функции  $l_j$ ,  $m_j$ ;  $\mathcal{A}_{nj}$ ,  $\mathcal{B}_{nj}$  находятся из полученных рекуррентных соотношений и некоторых дополнительных естественных требований.

Перейдем к построению п.к. сумм. Потребуем, чтобы ряды (2.1), (2.2) удовлетворяли соотношениям

$$(\nabla\xi)^2 + \mu(\nabla\mu)^2 = 1, \quad (2.9)$$

$$\nabla\xi\nabla\mu = 0, \quad (2.10)$$

$$2\nabla\xi\nabla\mathcal{A}_n + \Delta\xi\mathcal{A}_n + 2\mu\nabla\mu\nabla\mathcal{B}_n + \mu\Delta\mu\mathcal{B}_n + (\nabla\mu)^2\mathcal{B}_n = \Delta\mathcal{A}_{n-1}, \quad (2.11)$$

$$2\nabla\mu\nabla\mathcal{A}_n + \Delta\mu\mathcal{A}_n + 2\nabla\xi\nabla\mathcal{B}_n + \Delta\xi\mathcal{B}_n = \Delta\mathcal{B}_{n-1}, \quad (2.12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad A_{-1} = 0, \quad B_{-1} = 0.$$

Уравнения (2.9), (2.10) следуют из уравнений (6.5) главы 2, а рекуррентные соотношения (2.11), (2.12) — из соотношений (6.8), (6.9) главы 2. Потребуем далее, чтобы

$$\mu \xi = -\gamma. \quad (2.13)$$

Условие (2.13) обеспечивает приближенное выполнение требования (см. конец § 1), чтобы *лучи, соответствующие каустике  $S_\gamma$  ( $\gamma < 0$ ), после отражения опять принадлежали к полю лучей этой же каустики.*

Для обоснования этого утверждения предположим на минуту, что  $\xi$  и  $\mu$  не формальные ряды (2.1), а гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям (2.9), (2.10) и краевому условию (2.13). Заменив в формуле (1.18) функцию Эйри  $v$  и ее производную  $v'$  асимптотикой, мы получим наложение волны, идущей к каустике  $S_\gamma$ , и волны, отходящей от каустики  $S_\gamma$ . Эйконаллы этих волн соответственно равны

$$\xi - \frac{2}{3}\mu^{3/2}, \quad \xi + \frac{2}{3}\mu^{3/2},$$

и, следовательно, направление лучей, вдоль которых распространяются эти волны, определяется векторами

$$\nabla\left(\xi - \frac{2}{3}\mu^{3/2}\right), \quad \nabla\left(\xi + \frac{2}{3}\mu^{3/2}\right). \quad (2.14)$$

В силу (2.10) и (2.13)  $\nabla\mu \perp S$  и  $\nabla\xi \perp \nabla\mu$ , поэтому проекции векторов (2.14) на касательную плоскость к  $S$  одинаковы, а на



нормаль к  $S$  равны по величине и противоположны по знаку, т. е. действительно выполняется закон отражения.

Так как все дальнейшие построения основываются не на точных решениях уравнений (2.9), (2.10), а на частных суммах (2.5) с произвольным конечным числом слагаемых, то указанные выше свойства лучей будут выполняться лишь приближенно с точностью до слагаемых, порядок которых по  $\gamma$  при  $\gamma \rightarrow 0$  определяется числом слагаемых в суммах (2.5).

Обратимся к построению коэффициентов разложений (2.1). Пусть  $M \in S$ . Положим  $\gamma = 0$ ; тогда уравнение (2.13) дает  $m_0|_S = 0$ , а из (2.9) и (2.10) следует, что  $\nabla l_0$  лежит в плоскости, касательной к  $S$ , и выполняется равенство

$$(\nabla l_0)^2 = 1. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) — это уравнение Гамильтона — Якоби для вариационной задачи  $\delta \int ds_1 = 0$  ( $\delta$  — оператор первой вариации,  $ds_1$  — первая квадратичная форма Гаусса поверхности  $S$ ), определяющей геодезические линии поверхности  $S$ . По аналогии с терминологией главы 1 уравнение (2.15) естественно назвать *поверхностным уравнением эйконала*, а функцию  $l_0$  — *поверхностным эйконалом*. Решения уравнения (2.15) можно строить методами главы 1, причем роль лучей здесь будут играть геодезические линии поверхности  $S$ . Задание поля геодезических на  $S$  определяет  $l_0|_S$  с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Как уже указывалось ранее, все построения будут проводиться в окрестности  $\Omega_{\Pi}$  кривой  $C$  — геометрического места точек касания лучей падающей волны и поверхности  $S$ . Это связано, в частности, с тем, что поле геодезических, определяющих  $l_0|_S$ , при удалении от  $C$  может потерять регулярность.

Пусть в некоторой окрестности  $C$  функция  $l_0(M)$ , удовлетворяющая уравнению (2.15), построена по некоторому полю геодезических на поверхности  $S$ . В дальнейшем это поле геодезических будет согласовано с полем лучей падающей волны, что равносильно заданию начальных условий для уравнения (2.15). После того как функция  $l_0(M)$  построена на поверхности  $S$ , уже нетрудно найти  $l_0(M)$  и  $m_0(M)$  вне  $S$ .

Лучи, касающиеся геодезических поверхности  $S$ , соответствуют эйконалам

$$\tau_0^{\pm}(M) = l_0(M) \pm \frac{2}{3} \mu_0^{3/2}(M)$$

в том смысле, что в каждой точке векторы  $\nabla \tau_0^{\pm}$  касаются этих лучей. Пользуясь тем, что в точках  $M \in S$  имеет место равенство  $\tau_0^{\pm}(M) = l_0(M)$ , можно однозначно определить эти

эйконалы вне  $S$ , и, следовательно, построить вне  $S$  функции  $l_0(M)$  и  $m_0(M)$ .

Перейдем к нахождению следующих коэффициентов разложений (2.5).

Дифференцируя формулы (2.9), (2.10), (2.13) по  $\gamma$  и полагая  $\gamma = 0$ , получим

$$m_1 (\nabla m_0)^2 + 2m_0 \nabla m_0 \nabla m_1 + 2\nabla l_0 \nabla l_1 = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla m_0 \nabla l_1 + \nabla m_1 \nabla l_0 = 0, \quad (2.17)$$

$$m_1|_S = -1. \quad (2.18)$$

Пусть  $M \in S$ . Используя (2.16) и (2.18), находим  $2\nabla l_0 \nabla l_1 = = (\nabla m_0)^2$ . Это равенство эквивалентно выполнению вдоль геодезических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2 \frac{dl_1}{ds} = (\nabla m_0)^2, \quad (2.19)$$

где  $ds$  — дифференциал дуги геодезической. Для  $(\nabla m_0)^2$  имеет место важная для дальнейшего формула

$$(\nabla m_0)^2 = (2/\rho(s))^{2/3}, \quad (2.20)$$

в которой  $\rho(s)$  — радиус кривизны плоского, нормального к  $S$  сечения, проведенного в точке  $s$  в направлении вектора  $\nabla l_0$ . Выкладки, приводящие к равенству (2.20), мы опускаем.

Определив функцию  $l_1$  на поверхности  $S$ , построим функции  $l_1$  и  $m_1$  в не  $S$ . Умножая уравнение (2.17) на  $\pm 2\sqrt{m_0}$  и прибавляя к (2.16), придем к соотношению

$$2\nabla \left( l_0 \pm \frac{2}{3} m_0^{3/2} \right) \nabla (l_1 \pm m_1 \sqrt{m_0}) = 0, \quad (2.21)$$

из которого следует, что вдоль лучей, соответствующих эйконалам  $l_0 \pm \frac{2}{3} \mu_0^{3/2}$ , выполняются равенства

$$l_1 \pm m_1 \sqrt{m_0} = \text{const}. \quad (2.22)$$

Из равенств (2.22) следует, что по  $l_1|_S$  функции  $l_1$  и  $m_1$  вне  $S$  определяются однозначно.

На том же пути находятся  $l_j$  и  $m_j$ . Заметим только, что равенство (2.13) приводит к условиям

$$m_j|_S = 0. \quad (2.23)$$

Функции  $l_j|_S$  вдоль геодезических будут удовлетворять дифференциальным уравнениям, аналогичным уравнению (2.19). Начальные данные для уравнений (2.19) и их аналогов, а также для уравнения (2.15) мы получим в § 4 из условия сопряжения

асимптотики интеграла (2.7) с лучевыми разложениями в освещенной области.

Перейдем теперь к построению коэффициентов формальных разложений (2.6). Потребуем, чтобы подинтегральное выражение в интеграле (2.7) обращалось в нуль на поверхности  $S$ . При  $M \in S$  функцию  $m(M, \gamma)$  следует заменить на  $-\gamma$ . Отсюда и из формул (2.3), (2.4) легко вытекает, что подинтегральное выражение обращается на  $S$  в нуль, если все коэффициенты разложений (2.2) для  $\mathcal{B}_n$  равны нулю на  $S$ :

$$\mathcal{B}_{nj}|_S = 0. \quad (2.24)$$

Для построения  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{B}_0$  обратимся к формулам (2.11), (2.12) и положим в них  $n = 0$ . Пусть  $M \in S$ ; тогда уравнение (2.11) сводится к равенству

$$2\nabla l_0 \nabla \mathcal{A}_{00} + \Delta l_0 \mathcal{A}_{00} = 0, \quad (2.25)$$

которое представляет собой линейное дифференциальное уравнение вдоль геодезической линии.

Функции  $\mathcal{A}_{00}(M)$  и  $\mathcal{B}_{00}(M)$  вне  $S$  удовлетворяют тем же уравнениям, что  $A_0$  и  $B_0$  в § 6 главы 2, и могут быть построены по формулам (7.17) главы 2. Задание функции  $\mathcal{A}_{00}$  на  $S$  однозначно определяет функцию  $\chi_{00}$ , входящую в эти формулы, и, следовательно, однозначно определяет  $\mathcal{A}_{00}(M)$  и  $\mathcal{B}_{00}(M)$  вне  $S$ . Дифференцируя по  $\gamma$  равенства (2.11) и (2.12) при  $n = 0$ , мы аналогично найдем  $\mathcal{A}_{0j}, \mathcal{B}_{0j}, j \geq 1$ . Затем, положив в (2.11), (2.12)  $n = 1$ , последовательно определим  $\mathcal{A}_{1j}, \mathcal{B}_{1j}, j \geq 0$ , и т. д.

Начальные данные для дифференциального уравнения (2.25) и его аналогов для функций  $\mathcal{A}_{nj}$  мы найдем (так же как и в случае уравнений (2.15) и (2.19)) из требования, чтобы выражение (2.7) при переходе из полутени в освещенную область становилось асимптотически эквивалентным лучевым разложениям для падающей и отраженной волны.

Подчеркнем в заключение этого параграфа, что из условий (2.24) и равенств  $m_0|_S = 0, m_1|_S = -1, m_2|_S = 0, m_3|_S = 0, \dots$  следует, что интеграл (2.7) точно удовлетворяет краевому условию  $l|_S = 0$ .

### § 3. Представление падающей волны интегралом $I_{\text{пад}}$

Как мы уже отмечали, наша задача — построить такие выражения для  $l_j, m_j, \mathcal{A}_{nj}, \mathcal{B}_{nj}$ , чтобы асимптотически выражение для  $I$  в освещенной области переходило в формулы лучевого метода. Интеграл  $I_1$  в (2.8) будет при этом иметь разложение (1.16), интеграл  $I_2$  — лучевое разложение отраженной волны. В силу того, что по падающей волне лучевое разложение

отраженной определяется однозначно (см. § 6, гл. 1), естественно ожидать, что для наших целей достаточно добиться лишь асимптотического совпадения падающей волны (1.16) и  $I_1$ . Совпадение асимптотического разложения  $I_2$  и лучевого разложения отраженной волны должно получиться автоматически. Эти соображения будут уточнены в § 5.

Падающую волну (1.16) мы представим (с точностью до членов порядка  $O(k^{-N-1})$ ) некоторым интегралом  $I_{\text{пад}}$ , построению которого и посвящен этот параграф. Интеграл  $I_{\text{пад}}$  будет удобно сравнивать с  $I_1$ . Выражение для  $I_{\text{пад}}$  аналогично выражению для  $I_1$ . Основное отличие этих интегралов заключается в том, что  $I_{\text{пад}}$  — не наложение п. к. сумм, как  $I_1$ , а наложение к. сумм (см. конец § 1):

$$I_{\text{пад}} = k \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_{\text{пад}}(M, \gamma, k) e^{ik\xi_{\text{пад}}} \Upsilon(\gamma) d\gamma, \quad (3.1)$$

где  $\gamma_1$  — фиксированная положительная константа (в отличие от интеграла  $I_1$ , где  $\gamma_0 = Dk^{-1/6}$ ,  $D = \text{const} > 0$ , см. (2.8)),  $\Upsilon(\gamma)$  — нейтрализующий множитель, а  $J_{\text{пад}} e^{ik\xi_{\text{пад}}}$  — к. сумма:

$$J_{\text{пад}} e^{ik\xi_{\text{пад}}} = k^{-1/3} e^{ik\xi_{\text{пад}}} \left[ v(-k^{2/3} \mu_{\text{пад}}) \sum_{n=0}^N \frac{A_n^{\text{пад}}}{(-ik)^n} + ik^{-1/3} v'(-k^{2/3} \mu_{\text{пад}}) \sum_{n=0}^N \frac{B_n^{\text{пад}}}{(-ik)^n} \right]. \quad (3.2)$$

Интеграл  $I_{\text{пад}}$  должен удовлетворять условию совпадения с падающей волной (1.16):

$$I_{\text{пад}} = e^{ik\tau_{\text{пад}}(M)} \sum_{l=0}^N \frac{u_l^{\text{пад}}(M)}{(-ik)^l} + O(k^{-N-1}). \quad (3.3)$$

Предположим, что каустики  $S_\gamma$  (или, что то же, поверхности  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma) = 0$ ) определены вблизи кривой  $C$  и представляют собой семейство достаточно гладких поверхностей, гладко зависящих от параметра  $\gamma$ . Пусть далее, как и в эталонной задаче, поверхность  $S_0$  совпадает с  $S$ , при  $\gamma < 0$  поверхность  $S_\gamma$  лежит внутри  $S$ , при  $\gamma > 0$  вне  $S$ . Предположим далее, что на  $S$

$$\frac{\partial \mu_{\text{пад}}(M, \gamma)}{\partial \gamma} < 0. \quad (3.4)$$

Только что сформулированными условиями и равенством (3.3) к. суммы (3.2) однозначно не определяются. В § 4 поверхности  $S_\gamma$  будут выбраны специальным образом, причем, разумеется, так, что неравенство (3.4) сохранится. Этот специальный выбор

$S_\gamma$  позволит осуществить сравнение асимптотических разложений интегралов  $I_1$  и  $I_{\text{пад}}$ .

Выясним теперь, какие ограничения на к. суммы (3.2) налагает условие (3.3). Заменяя в формуле (3.2) функцию Эйри  $v$  на ее интегральное представление

$$v(-k^{2/3}\mu_{\text{пад}}) = \frac{k^{1/3}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(\mu_{\text{пад}}v - v^{3/3})} dv$$

(см. Дополнение 1), перепишем интеграл (3.1) в виде

$$I_{\text{пад}}(M, k) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(\xi_{\text{пад}} + \mu_{\text{пад}}v - v^{3/3})} (A_{\text{пад}} + vB_{\text{пад}}) \Upsilon(\gamma) dv, \quad (3.5)$$

где

$$A_{\text{пад}} = \sum_{n=0}^N \frac{A_n^{\text{пад}}}{(-ik)^n}, \quad B_{\text{пад}} = \sum_{n=0}^N \frac{B_n^{\text{пад}}}{(-ik)^n}. \quad (3.6)$$

Асимптотическое разложение интеграла (3.5) дает интегрирование по окрестности стационарной точки, т. е. по окрестности решения  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{v}$ , системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \xi_{\text{пад}} + \mu_{\text{пад}}v - \frac{1}{3}v^3 \right) = \frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \mu_{\text{пад}}}{\partial \gamma} v = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \xi_{\text{пад}} + \mu_{\text{пад}}v - \frac{1}{3}v^3 \right) = \mu_{\text{пад}} - v^2 = 0. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) следует, что  $\hat{v} = \pm \sqrt{\mu_{\text{пад}}}$ , поэтому выполнение уравнений (3.7), (3.8) эквивалентно обращению в нуль по крайней мере одной производной  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tau^+$  или  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tau^-$ , где

$$\tau^\pm = \xi_{\text{пад}} \pm \frac{2}{3} \mu_{\text{пад}}^{3/2}. \quad (3.9)$$

Укажем способ построения  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  и  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$ , который позволит с помощью простого геометрического приема найти решение системы (3.7), (3.8). В силу уравнений (6.5) главы 2  $\xi_{\text{пад}}$  на  $S_\gamma$  удовлетворяет поверхностному уравнению эйконала

$$(\nabla \xi_{\text{пад}})^2 = 1, \quad (3.10)$$

аналогичному уравнению (2.15).

Обозначим через  $C_\gamma$  кривую, вдоль которой лучи падающей волны касаются  $S_\gamma$ , и положим на  $C_\gamma$

$$\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)|_{C_\gamma} = \tau_{\text{пад}}(M)|_{C_\gamma}, \quad \nabla \xi(M, \gamma)|_{C_\gamma} = \nabla \tau_{\text{пад}}(M)|_{C_\gamma}. \quad (3.11)$$

Задача нахождения  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  на  $S_\gamma$  из условий (3.10), (3.11) —

это задача Коши для уравнения (3.10), имеющая вблизи  $S_\gamma$  единственное решение. Построив  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  на  $S_\gamma$ , мы уже однозначно восстановим  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  и  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$  вне  $S_\gamma$  с помощью лучей, касающихся в точках  $S_\gamma$  вектора  $\nabla \xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  (см. гл. 2). Внутри  $S_\gamma$  найденные значения  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$ ,  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$  продолжим произвольно с тем лишь ограничением, чтобы  $\xi_{\text{пад}}(M, \gamma)$  и  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$  после продолжения остались бы гладкими функциями и чтобы функция  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$  внутри  $S_\gamma$  была отрицательной. Последнее возможно, так как  $\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)$  на  $S_\gamma$  равно нулю, а нормальная производная  $\frac{\partial \mu_{\text{пад}}(M, \gamma)}{\partial n}$  положительна (см. гл. 2).

Докажем теперь существенную для дальнейших построений лемму.

**Лемма 1.** Пусть точка  $M$  расположена в освещенной области в окрестности предельного луча и число  $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(M)$  таково, что поверхность  $S_\gamma$  касается луча падающей волны, проходящего через  $M$ . Тогда  $\hat{\gamma}$  обращает в нуль какую-либо из производных  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tau^\pm(M, \gamma)$ , т. е.  $\hat{\gamma}$  — стационарное значение параметра  $\gamma$ .

**Доказательство.** Функции  $\tau^\pm(M, \gamma)$  удовлетворяют уравнению  $(\nabla \tau^\pm(M, \gamma))^2 = 1$ , дифференцируя которое по  $\gamma$  получим:  $\nabla \tau^\pm \nabla \tau_\gamma^\pm = 0$ , или  $\frac{\partial}{\partial s} \tau_\gamma^\pm = 0$ , т. е.  $\tau_\gamma^\pm$  постоянно вдоль луча. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tau^\pm(M, \gamma) = 0$  в точках  $C_\gamma$ . Если менять  $\gamma$ , то кривые  $C_\gamma$  опишут гладкую поверхность  $\Sigma$ , пересекающую вдоль кривой  $C$  поверхность  $S$  под отличным от нуля углом. (Это почти очевидное геометрически утверждение можно доказать, пользуясь неравенством (3.4).) Из каждой точки  $\sigma \in C$  проведем геодезическую линию поверхности  $\Sigma$  ортогонально к  $C$ . Эти геодезические будут пересекаться с линиями  $C_\gamma \subset \Sigma$  под отличными от нуля углами. Точку пересечения геодезической и линии  $C_\gamma$  будем характеризовать величиной параметра  $\gamma$ .

Пусть  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\gamma)$  — геодезическая линия на  $\Sigma$ , проходящая через точку  $M \in C_\gamma$  и ортогональная к  $C$ .

В точках этой линии  $\tau_{\text{пад}}(\mathbf{y}(\gamma)) = \xi_{\text{пад}}(\mathbf{y}(\gamma), \gamma) = \tau^\pm(\mathbf{y}(\gamma), \gamma)$ . Дифференцируя это равенство по  $\gamma$ , получим

$$\nabla \tau_{\text{пад}} \mathbf{y}'_\gamma = \nabla \xi_{\text{пад}} \mathbf{y}'_\gamma + \frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma} = \nabla \xi_{\text{пад}} \mathbf{y}'_\gamma + \frac{\partial \tau^\pm}{\partial \gamma}.$$

Утверждение леммы следует из того, что  $\nabla \tau_{\text{пад}} = \nabla \xi_{\text{пад}}$  в точках  $C_\gamma$ , и поэтому

$$\frac{\partial \tau^\pm}{\partial \gamma} = \frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma} = 0. \quad (3.12)$$

Из леммы 1 вытекает простое следствие: в стационарной точке  $\hat{\nu} = \pm \sqrt{\mu_{\text{пад}}}$ ,  $\hat{\nu} = \hat{\nu}(M)$  экспоненциальный множитель в интеграле (3.5) совпадает с фазовым множителем  $\exp i k \tau_{\text{пад}}(M)$  падающей волны.

В самом деле, пусть луч падающей волны, проходящий через точку  $M$  и касается  $S_\nu$  в точке, лежащей на  $C_\nu$ . Нам нужно доказать равенство  $\tau_{\text{пад}}(M) = \tau^\pm(M)$ .

В силу того, что луч падающей волны, проходящий через точку  $M$ , является лучом, соответствующим как эйконалу  $\tau_{\text{пад}}$ , так и эйконалу  $\tau^\pm$ , то для совпадения  $\tau_{\text{пад}}$  и  $\tau^\pm$  на этом луче достаточно, чтобы равенство  $\tau_{\text{пад}} = \tau^\pm$  имело место хотя бы в одной точке этого луча и чтобы в этой точке  $\nabla \tau_{\text{пад}} = \nabla \tau^\pm$ . Последние два равенства выполняются в точке, где этот луч касается  $S_\nu$ , т. е. в точке на  $C_\nu$ .

Докажем теперь единственность стационарной точки, когда точка  $M$  находится в окрестности  $C$ . Имеет место следующая лемма.

**Лемма 2.** В достаточно малой окрестности кривой  $C$  и достаточно малом интервале  $(-\gamma_1, \gamma_1)$  система уравнений (3.7), (3.8) не может иметь больше одного решения.

**Доказательство.** В силу того, что выполнение системы уравнений (3.7) и (3.8) эквивалентно обращению в нуль хотя бы одной из производных  $\frac{\partial \tau^+}{\partial \nu}$  и  $\frac{\partial \tau^-}{\partial \nu}$  (см. формулу (3.9)), для наших целей достаточно показать, что произведение  $\frac{\partial \tau^+}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \tau^-}{\partial \nu}$  не может иметь вблизи  $C$  более одного корня. Последнее сразу следует из монотонности этой функции, вытекающей в свою очередь из неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \tau^+}{\partial \nu} \frac{\partial \tau^-}{\partial \nu} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \left( \frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \nu} \right)^2 - \mu_{\text{пад}} \left( \frac{\partial \mu_{\text{пад}}}{\partial \nu} \right)^2 \right) > 0. \quad (3.13)$$

Неравенство (3.13) в точках  $C$  выполняется в силу обращения  $\mu_{\text{пад}}(M, 0)$  в нуль на  $S$ , совпадения при  $\nu = 0$  кривой  $C_\nu$  с  $C$ , формулы (3.12) и неравенства (3.4). При  $M$ , лежащих вблизи  $C$ , и малых  $\nu$  неравенство (3.13) тоже имеет место, так как входящие в него функции непрерывны.

Как уже отмечалось, фазовый множитель интеграла (3.1), или что то же, интеграла (3.5), совпадает с фазовым множителем  $\exp(i k \tau_{\text{пад}}(M))$  падающей волны. Асимптотически вычисляя интеграл по методу стационарной фазы, мы придем к разложению по степеням  $1/k$ . Это разложение удовлетворяет уравнению Гельмгольца с точностью до членов порядка  $O(k^{-N})$  (как суперпозиция функций, удовлетворяющих этому условию). Формально удовлетворяющее уравнению Гельмгольца разложение с фазовым множителем  $\exp(i k \tau_{\text{пад}})$  может быть только лучевым

решением, коэффициенты которого удовлетворяют уравнениям переноса главы 1. Наша цель сейчас наложить на  $A_n^{\text{пад}}$ ,  $B_n^{\text{пад}}$  такие ограничения, чтобы лучевые разложения падающей волны и интеграла  $I_{\text{пад}}$  совпали. В силу уравнений переноса, для совпадения лучевых разложений вдоль луча, достаточно их совпадения в одной точке этого луча. В рассматриваемом случае удобно приравнять лучевые разложения падающей волны и интеграла (3.7) на поверхности  $\Sigma$ ; это обеспечит совпадение указанных разложений в полной окрестности  $C$ . На этом пути мы приходим к равенствам

$$\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} A_n^{\text{пад}}(M, \gamma) + f_n = u_n, \quad M \in C_\gamma \subset S_\gamma, \quad (3.14)$$

в которых  $f_0 = 0$  и  $f_n$  при  $n > 0$  определяются по  $A_j^{\text{пад}}$  и  $B_j^{\text{пад}}$ ,  $j < n$ . В формуле (3.14)  $\Delta$  — гессиан фазовой функции

$$\Phi = \xi_{\text{пад}}(M, \gamma) + \mu_{\text{пад}}(M, \gamma) \nu - \frac{1}{3} \nu^3$$

интеграла (3.5), равный

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_{\gamma\gamma} & \Phi_{\gamma\nu} \\ \Phi_{\gamma\nu} & \Phi_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \xi_{\text{пад}} + \hat{\nu} \frac{\partial^2 \mu_{\text{пад}}}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial \mu_{\text{пад}}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \mu_{\text{пад}} & -2\hat{\nu} \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Гессиан  $\Delta$  в окрестности кривой  $C$  и при малых  $\gamma$  отрицателен, так как при  $\gamma = 0$  на  $C$  в силу (3.4), (3.7), (3.8), (3.12).

$$\hat{\nu} = 0, \quad \Delta = - \left( \frac{\partial \mu_{\text{пад}}}{\partial \gamma} \right)^2 < 0. \quad (3.16)$$

#### § 4. Начальные данные для уравнений, определяющих п. к. суммы

До сих пор построения §§ 2 и 3 никак не были связаны друг с другом. Теперь мы должны связать эти построения между собой.

П. к. суммы, построенные в § 2, не имеют каустика в точном смысле, так как частные суммы  $l$  и  $m$  (см. (2.5)) не удовлетворяют точно уравнениям (2.9), (2.10). Однако поверхность, описываемая уравнением

$$m = \sum_{j=0}^{N_1} m_j(M) \gamma^j = 0, \quad (4.1)$$

играет для п. к. сумм ту же роль, что и каустическая поверхность для к. сумм. В связи с этим поверхность (4.1) будем называть *приближенной каустикой* (сокращенно п. каустикой) п. к. суммы.



Построим, считая что п. каустика лежит внутри  $S$ , два касательных к п. каустике семейства лучей: одно, образованное лучами, подходящими к  $S$ , другое — лучами, отходящими от  $S$ . Каждый из лучей этих двух семейств ограничен точкой касания с п. каустикой, и пусть в точке касания его направление совпадает с направлением проекции вектора  $\nabla l(M, \gamma)$  на п. каустик. Этими условиями подходящие к  $S$  и отходящие от  $S$  лучи однозначно определяются. Тогда, как было показано в § 2, отходящие от  $S$  лучи с точностью до величин порядка  $O(\gamma^{N_1+1})$  будут совпадать с лучами, получающимися в результате отражения от  $S$  подходящих лучей. Изменение начальных данных при построении  $l_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , означает некоторую деформацию п. каустики и, следовательно, изменение семейств подходящих и отходящих лучей.

Задача настоящего параграфа — выбрать начальные данные таким образом, чтобы каждый луч падающей волны, проходящий вблизи кривой  $C$ , совпадал с точностью до величин порядка  $O(\gamma^{N_1+1})$  с каким-нибудь лучом из лучей, подходящих к некоторой п. каустике (4.1). Если такое согласование выполнено, то уже нетрудно добиться асимптотического совпадения интегралов  $I_{\text{пад}}$  и  $I_1$  в освещенной части полутени. В следующем параграфе мы покажем, что совпадение это действительно имеет место, если в качестве семейства каустик  $S_\gamma$ , на базе которых были построены к. суммы (3.2) для падающей волны, взять семейство поверхностей (4.1) и потребовать выполнения соотношений

$$\xi_{\text{пад}} - l = O(\gamma^{N_1+1}), \quad \mu_{\text{пад}} - m = O(\gamma^{N_1+1}), \quad (4.2)$$

$$A_n^{\text{пад}} - \mathcal{A}_n = O(\gamma^{N_1+1}), \quad B_n^{\text{пад}} - \mathcal{B}_n = O(\gamma^{N_1+1}), \quad (4.3)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $\mathcal{A}_n$  и  $\mathcal{B}_n$  — частные суммы (2.5), (2.6) и  $N_1$ , как и прежде, — произвольное положительное число. В дальнейшем поверхности (4.1) будем обозначать  $S_\gamma$ . (Правомерность такого обозначения вытекает из сформулированного выше требования о совпадении каустик к. сумм (3.2) и поверхностей (4.1).). Совпадение каустик к. сумм (3.2) и поверхностей (4.1) эквивалентно равенству

$$\mu_{\text{пад}}(M, \gamma)|_{S_\gamma} = 0.$$

В силу формул (4.9), (4.14), (5.2) главы 2 имеем также

$$|\text{grad } \mu_{\text{пад}}|_S \geq \frac{\partial \mu_{\text{пад}}}{\partial n} \Big|_S > 0$$

и, следовательно,

$$\mu_{\text{пад}}(M, \gamma) = E(M, \gamma) \sum_{j=0}^{N_1} m_j(M) \gamma^j,$$

где  $E(M, \gamma)$  — гладкая функция, положительная вблизи  $S$  при малых  $\gamma$ . Дифференцируя это равенство по  $\gamma$  и принимая во внимание равенство (2.18), получаем, что при малых  $\gamma$  имеет место неравенство (3.4), играющее существенную роль в § 3.

Покажем теперь, что требования (4.2) и (4.3) действительно однозначно определяют начальные условия для уравнений (2.15), (2.19), (2.25) и аналогичных им. Пусть на кривой  $C$  функция  $l_0(M)$  удовлетворяет начальному условию

$$l_0(M) = \tau_{\text{пад}}(M), \quad \nabla l_0(M) = \nabla \tau_{\text{пад}}(M). \quad (4.4)$$

Это обеспечит выполнение соотношения (4.2) с точностью до членов порядка  $O(\gamma)$ . Дифференцируя первое из равенств (3.11) вдоль кривой  $y = y(\gamma)$  (см. доказательство леммы 1 в § 3) и потом полагая  $M \in C$ , получаем

$$\frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma} = 0, \quad M \in C. \quad (4.5)$$

Заменяя в равенстве (4.5)  $\xi_{\text{пад}}$  на  $C$  по формуле (4.2) при  $N_1 = 2$ , приходим к выводу что,

$$l_1(M) = 0, \quad M \in C. \quad (4.6)$$

Равенство (4.6) представляет собой искомое начальное условие для уравнения (2.19). Легко видеть, что если (4.6) выполнено, то  $\frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma}$  и  $l_1(M)$  совпадают и вне  $S$ . В самом деле,  $\frac{\partial \xi_{\text{пад}}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}$  и  $l_1(M)$  удовлетворяют одному и тому же уравнению (2.19), и при выполнении (4.6) начальные данные для этих уравнений совпадают, поэтому они совпадают при  $M \in S$  и вне  $C$ , а следовательно, и вне  $S$ . Аналогично дифференцированием первого из равенств (3.11) вдоль кривой  $y = y(\gamma)$  найдутся начальные данные для уравнений, определяющих функции  $l_j(M)$ ,  $M \in S$ ,  $j > 1$ .

Переходим к выводу начальных данных для  $\mathcal{A}_{nj}(M)$ ,  $M \in S$ . Положим в (3.14) сначала  $n = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Используя равенства (4.2) и (4.3) при  $N_1 = 0$  и формулы (2.18), (3.15) и (3.16), получаем, что на кривой  $C$

$$\Delta = -1.$$

Тогда из соотношения (3.14) сразу же следует

$$\sqrt{\pi} \mathcal{A}_{00}|_C = u_0^{\text{пад}}(M)|_{M \in C}. \quad (4.7)$$

Равенство (4.7) — искомое начальное условие для уравнения (2.25). Вывод начальных условий для уравнений, определяющих  $\mathcal{A}_{nj}(M)$ ,  $M \in S$ , вполне аналогичен только что описанно-

му выводу начальных условий для  $l_j(M)$ ,  $M \in S$ . Дифференцируя при  $n = 0$  вдоль кривой  $y = y(\gamma)$  равенство (3.14), мы получим начальные условия на кривой  $C$  для уравнений, которым удовлетворяют функции  $\mathcal{A}_{0j}$ ,  $j > 0$ . Затем положим в (3.14)  $n = 1$  и аналогичным образом найдем начальные данные для  $\mathcal{A}_{1j}$ , затем положим  $n = 2$  и т. д. Построив функции  $\mathcal{A}_{nj}$  сначала на, а затем и вне поверхности  $S$ , продолжим их внутри  $S$  произвольным образом, но так, чтобы их гладкость сохранилась. После того как  $\mathcal{A}_{nj}$ ,  $\mathcal{B}_{nj}$  определены, нетрудно завершить построение интеграла  $I_{\text{пад}}$ . Заметим, что функции  $A_n^{\text{пад}}(M, \gamma)$  заданы формулами (3.14) на  $S_\gamma$  только в точках кривой  $C_\gamma \subset S_\gamma$ . Кроме того, при  $\gamma \rightarrow 0$  с точностью до выражений порядка  $O(\gamma^{N+1})$  поведение  $A_n^{\text{пад}}$  должно описываться выражением  $\mathcal{A}_n$  (см. (2.6)). Для построения к. сумм (3.2) необходимо, чтобы  $A_n^{\text{пад}}$  было определено всюду на  $S_\gamma$ . Возможность доопределения  $A_n^{\text{пад}}$  на  $S_\gamma$  с помощью некоторого процесса интерполяции следует из того, что значения  $A_n^{\text{пад}}$  и выражения  $\mathcal{A}_n$  согласованы (см. (4.3)). Этот процесс интерполяции мы описывать не будем. Уравнение переноса главы 2 определяет  $A_n^{\text{пад}}$  и  $B_n^{\text{пад}}$  вне  $S_\gamma$ , внутри же этих поверхностей  $A_n^{\text{пад}}$ ,  $B_n^{\text{пад}}$  можно продолжить произвольно (но так, чтобы их гладкость не нарушилась).

## § 5. Исследование интеграла $I$ в освещенной области

Теперь, когда построение всех элементов подынтегральной функции интеграла  $I$  завершено, нужно доказать, что асимптотика интеграла  $I$  в освещенной части полутени совпадает с лучевыми разложениями падающей и отраженной волн.

Мы предположим, что кратчайшее расстояние  $h$  точки  $M$  от границы свет — тень удовлетворяет неравенству

$$D_1 k^{-1/6} < h < D_2 k^{-1/6}; \quad D_1, D_2 = \text{const} > 0. \quad (5.1)$$

В этих предположениях при достаточно малой константе  $D_2$  асимптотика интеграла  $I_1$  (соответственно  $I_2$  в (2.8)) совпадает с лучевым разложением (1.16) падающей волны (соответственно отраженной волны).

Рассмотрим сначала  $I_1$ . С точностью до членов порядка  $O(k^{-(N+1)/6})$  функции  $l$  и  $m$  можно заменить на  $\xi_{\text{пад}}$  и  $\mu_{\text{пад}}$  (§ 3). Это следует из того, что промежуток интегрирования в интеграле имеет вид  $|\gamma| < Dk^{-1/6}$ ,  $D = \text{const} > 0$ .

Стационарная точка интеграла  $I_1$ , т. е. нуль производной  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tau^\pm(M, \gamma) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \xi_{\text{пад}} \pm \frac{2}{3} \mu_{\text{пад}}^{3/2} \right)$  лежит внутри промежутка

интегрирования, если константа  $D_2$  достаточно мала. Функции  $\mathcal{A}_n$  и  $\mathcal{B}_n$  совпадают с  $A_n^{\text{пад}}$  и  $B_n^{\text{пад}}$  с точностью до членов порядка  $O(\gamma^{N_1+1})$  (см. (4.3)). Применяя к интегралам  $I_{\text{пад}}$  и  $I_1$  метод стационарной фазы, мы придем к выражениям, отличающимся не более чем на  $O(k^{-N_1/6})$ , что и доказывает совпадение асимптотик падающей волны и  $I_1$ . Обратимся к интегралу  $I_2$ . Заменяем  $l$  и  $m$  на  $\xi_{\text{пад}}$  и  $\mu_{\text{пад}}$ , а функции Эйри, входящие в подынтегральное выражение, — на их асимптотику, считая аргументы отрицательными. Мы получим два выражения, содержащих экспоненциальные множители. Эйконал в этих выражениях будет равен с точностью до слагаемых порядка  $O(\gamma^{N_1+1})$  функциям

$$\tau^+ = \xi_{\text{пад}} + \frac{2}{3} \mu_{\text{пад}}^{3/2}$$

и

$$\tau^+ - \frac{4}{3} (-\gamma)^{3/2}.$$

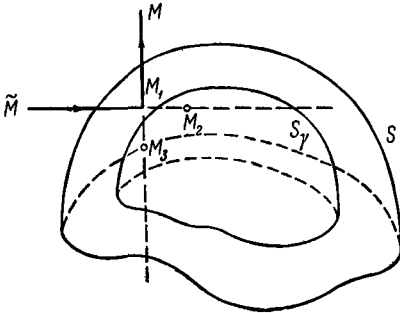


Рис. 55.

Первое слагаемое на промежутке интегрирования не имеет стационарной точки.

Рассмотрим второе слагаемое. Семейства лучей, соответствующих  $\tau^+$  и  $\tau^+ - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2}$ , при постоянном  $\gamma$ , очевидно, совпадают. Пусть луч падающей волны  $\tilde{M}M_1$  (рис. 55) отражается в точке  $M_1$  от поверхности  $S$  и отраженный луч приходит в точку  $M$ . Продолжим луч падающей волны. Пусть его продолжение касается в точке  $M_2$  поверхности  $S_\gamma$ . Построим поверхность  $S_{\tilde{\gamma}}$ , касающуюся продолжения отраженного луча в точке  $M_3$ . Из способа построения поверхностей  $S_\gamma$  следует, что  $\tilde{\gamma} - \gamma = O(\gamma^{N_1+1}) = O(k^{-(N_1+1)/6})$  (так как  $|\gamma| < Dk^{-1/6}$ , см. § 2).

С точностью до членов порядка  $O(k^{-(N_1+1)/6})$  можно положить  $\tilde{\gamma} = \gamma$ . С той же точностью направление вектора  $\nabla\tau^+$  в точке  $M_3$  совпадает с направлением луча  $M_3M$  отраженной волны, а значение эйконала  $\tau^+(M_3) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2}$  совпадает со значением эйконала отраженной волны в этой точке. Последнее следует из выкладки

$$\begin{aligned} \tau^+(M_3) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2} &= \tau^+(M_1) - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2} = \\ &= \xi_{\text{пад}}(M_1) + \frac{2}{3}\mu_{\text{пад}}^{3/2}(M_1) - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi_{\text{пад}}(M_1) + \frac{2}{3}(-\gamma)^{3/2} - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2} = \\
 &= \xi_{\text{пад}}(M_1) - \frac{2}{3}(-\gamma)^{3/2} - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)) = \\
 &= \tau^-(M_1) - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)) = \tau^{\text{пад}}(M_1) - (\tau^+(M_1) - \tau^+(M_3)).
 \end{aligned}$$

(Проводя выкладку, мы заменили  $\mu_{\text{пад}}(M)$  величиной  $-\gamma$  и отбросили члены порядка  $O(\gamma^{N_1+1})$ .) Пользуясь совпадением в точке  $M_3$  эйконала отраженной волны с  $\tau^+(M_3) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2}$  и равенством в этой же точке направлений вектора  $\nabla\tau^+(M_3)$  и луча отраженной волны  $M_3M_1M$  (рассуждая так же, как в § 3), нетрудно прийти к выводу, что с точностью до членов порядка  $O(\gamma^{N_1})$  величина  $\tilde{\gamma} = \gamma + O(\gamma^{N_1+1})$  является стационарной точкой интеграла  $I_2$ , т. е. обращает в нуль производную

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \tau^+(M, \gamma) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2} \right).$$

Значение эйконала  $\tau^+(M, \gamma) - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2}$  в этой стационарной точке совпадает (тоже с точностью до членов порядка  $O(k^{-N_1/6})$ ) со значением эйконала отраженной волны, найденным с помощью лучевого метода. Если расстояние  $h$  от рассматриваемой точки  $M$  до границы свет — тень удовлетворяет неравенству (5.1), то интеграл  $I_2$  (см. (2.8)) можно асимптотически вычислить по методу стационарной фазы\*). Первое слагаемое в формуле (2.7)  $I_1$  имеет лучевое разложение, совпадающее с разложением падающей волны,  $I_2$ , будучи формальным решением уравнения Гельмгольца, имеет эйконал отраженной волны, и сумма этих слагаемых обращается в нуль на  $S$ . Из того, что по лучевому разложению падающей волны лучевое разложение отраженной волны определяется однозначно (см. гл. 1), следует, что в области (5.1) асимптотическое разложение  $I_2$  совпадает с лучевым разложением отраженной волны.

Итак, построенный нами интеграл  $I$  (см. (2.7)) удовлетворяет в окрестности  $\Omega_{\text{т}}$  кривой  $C$  уравнению Гельмгольца с точностью до членов порядка  $O(k^{-N} + k^{-N_1/6+1})$  и точно удовлетворяет краевому условию  $I|_S = 0$ . В освещенной области его асимптотика совпадает с лучевыми разложениями падающей и отраженной волн. Естественно поэтому ожидать, что в зоне тени асимптотика  $I$  также совпадает с асимптотикой волнового поля. Асимптотика  $I$  в зоне тени будет получена в следующих параграфах.

\*) Отметим, что из-за сложности поведения функций Эйри на промежутке интегрирования оценка остаточного члена метода стационарной фазы здесь требует более длинных преобразований, чем обычно. С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались в § 4 главы II.

Всюду в этой главе мы рассматривали лишь некоторую окрестность кривой  $C$ : только в малой (хотя и не зависящей от  $k$ ) окрестности  $C$  можно строить регулярное поле геодезических на  $S$ , играющее важную роль в § 2, только вблизи  $C$  была доказана единственность стационарной точки интеграла  $I_{\text{пад}}$  в § 3. Однако зона полутени — это окрестность бесконечной поверхности, отделяющей освещенную область от зоны тени. Естественно построить асимптотические формулы для  $u_{\text{отр}} + u_{\text{пад}}$  и в той части полутени, которая удалена от кривой  $C$  на расстояние, большее некоторой положительной константы, не зависящей от  $k$ . Для этого преобразуем, считая, что  $m \geq \text{const} > 0$ , интеграл  $I$  следующим образом: заменим функции  $v(-k^{2/3}m)$  и  $v(k^{2/3}\gamma)$  соответственно на

$$\frac{1}{2i} (\omega_1(-k^{2/3}m) - \omega_2(-k^{2/3}m)), \quad \frac{1}{2i} (\omega_1(k^{2/3}\gamma) - \omega_2(k^{2/3}\gamma)).$$

Члены, содержащие  $e^{ikl}\omega_2(-k^{2/3}m)$ ,  $e^{ikl}\omega_2'(-k^{2/3}m)$ , отбросим (они в рассматриваемой области не имеют стационарных точек и не вносят вклада в асимптотику  $I$ ). Заменим функции Эйри  $\omega_1(-k^{2/3}m)$  и  $\omega_1'(-k^{2/3}m)$  их асимптотикой (это возможно, так как сейчас  $m \geq \text{const} > 0$ ). Полученный интеграл

$$V\bar{k} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \Xi(M, \gamma, k) \frac{\omega_2(k^{2/3}\gamma)}{\omega_1(k^{2/3}\gamma)} e^{ik\tau^+(M, \gamma)} \Upsilon(\gamma) d\gamma$$

( $\omega_j$  — функции Эйри,  $\tau^+ = l + \frac{2}{3}m^{3/2}$ , где  $l$  и  $m$  — суммы (2.5),  $\Xi(M, \gamma, k)$  — полином по обратным степеням  $1/k$  с коэффициентами, зависящими от  $M$  и  $\gamma$ ), асимптотически совпадающий с  $I$  при  $m > \text{const} > 0$ ,  $|\gamma| \leq Dk^{-1/6}$ , и будет давать искомую асимптотику волнового поля в той части полутени, которая не находится вблизи  $C$ . Подробно проводить намеченные здесь построения мы не будем.

## § 6. Преобразование интеграла $I$ в зоне тени

Пусть теперь точка  $M$  находится в зоне тени и удалена от границы свет — тень на расстояние, превышающее некоторую не зависящую от  $k$  константу. В этом случае обычно говорят, что точка  $M$  находится в глубокой тени. Мы предполагаем еще, что поле геодезических, соответствующих поверхностному эйконалу  $l_0$  (см. § 2), регулярно. Это налагает дополнительное ограничение на  $M$ : эта точка хотя и находится в глубокой тени, все же не может слишком далеко отстоять от границы света и тени. Если не сделать такого предположения, то функции  $\mathcal{A}_{00}(M)$ ,  $l_0(M)$  и т. п. будут иметь особенности.

Для получения асимптотики  $I$  продеформируем контур интегрирования так, как это указано на рис. 56. Заменяем отрезок  $(-\gamma_0, \gamma_0)$  ломаной  $(-\gamma_0), \gamma', \gamma'', \gamma_0$ . При этом мы считаем, что

$$\begin{aligned} \arg(\gamma' + \gamma_0) &= \pi/4, & \arg(\gamma'' - \gamma_0) &= 3\pi/4, \\ \arg(\gamma'' - \gamma') &= 0, & \text{Im } \gamma' &= \text{Im } \gamma'' = b_1 k^{-2/3}. \end{aligned}$$

После деформации пути интегрирования  $I$  заменится на интеграл по контуру  $(-\gamma_0), \gamma', \gamma'', \gamma_0$  и сумму вычетов в полюсах функции  $1/w_1(k^{2/3}\gamma)$ , расположенных ниже контура  $(-\gamma_0), \gamma', \gamma'', \gamma_0$ . Если точка  $M$  находится в глубокой тени, то при должном выборе нейтрализующего множителя  $\Upsilon(\gamma)$  и константы  $b_1$  интеграл по контуру  $(-\gamma_0), \gamma', \gamma'', \gamma_0$  мал по сравнению с указанной суммой вычетов. Нейтрализующий множитель  $\Upsilon(\gamma)$  мы возьмем в виде

$$\Upsilon(\gamma) = \exp\left(-\frac{k^{-1/3}b}{\gamma + \gamma_0} + \frac{k^{-1/3}b}{\gamma - \gamma_0}\right) \sum_{j=0}^{N_2} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\gamma + \gamma_0} - \frac{1}{\gamma - \gamma_0}\right)^j \frac{b_1^j}{k^{j/3}} \quad (6.1)$$

(ср. формулу (1.9)). Здесь  $b$  и  $N_2$  — достаточно большие положительные числа.

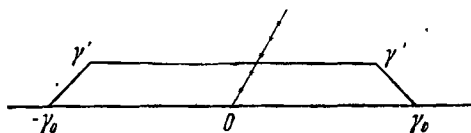


Рис. 56.

Оценим контурный интеграл. На отрезке, где  $\arg(\gamma + \gamma_0) = \pi/4$ , экспонента в нейтрализующем множителе (6.1) удовлетворяет неравенству

$$\left| \exp \frac{-bk^{-1/3}}{\gamma + \gamma_0} \right| \leq \exp\left(-\frac{bk^{1/3}}{r\sqrt{2}}\right); \quad 0 \leq r = k^{2/3}|\gamma + \gamma_0| \leq b_1\sqrt{2}.$$

Учитывая, что любое выражение вида  $r^{-1}\exp(-\text{const}/r)$ ,  $\text{const} > 0$ , равномерно ограничено на полуоси  $r \geq 0$ , получим оценку для нейтрализующего множителя  $\Upsilon(\gamma)$ :

$$|\Upsilon(\gamma)| \leq \text{const} \exp\left(\frac{-bk^{1/3}}{2r}\right), \quad 0 \leq r \leq b_1\sqrt{2}.$$

Последнее выражение достигает максимума при  $r = b_1\sqrt{2}$ , откуда

$$|\Upsilon(\gamma)| \leq \text{const} \exp\left(-\frac{b}{2^{3/2}b_1}k^{1/3}\right).$$

Аналогично оценивается нейтрализующий множитель  $\Upsilon(\gamma)$  на отрезке  $\gamma'', \gamma_0$  (см. рис. 56). Заменим теперь в интеграле (2.7) обе функции Эйри  $v$  по формуле  $(w_1 - w_2)/2i = v$ . После некоторых сокращений получим под интегралом сумму двух выражений, асимптотики которых при отрицательных значениях аргументов функций Эйри имеют вид экспонент

$$\exp ik\tau_{N_1}^-, \quad \exp ik\left(\tau_{N_1}^- - \frac{4}{3}(-\gamma)^{3/2}\right),$$

где

$$\tau_{N_1}^{\pm} = \sum_{j=0}^{N_1} l_j \gamma^j \pm \frac{2}{3} \left( \sum_{j=0}^{N_1} m_j \gamma^j \right)^{3/2} = l \pm \frac{2}{3} m^{3/2}.$$

Так как эйконал  $\tau_{N_1}^-$  только на слагаемое  $O(\gamma^{N_1+1})$  отличается от  $\tau^-$  (см. § 4), производная  $\frac{\partial \tau_{N_1}^-}{\partial \gamma}$  с точностью до выражений порядка  $\gamma^{N_1}$  постоянна вдоль луча, соответствующего эйконалу  $\tau^-$ . Следовательно, эта производная равна с той же точностью своему значению на поверхности  $S$ :

$$\frac{\partial \tau_{N_1}^-(M', \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial l(M', \gamma)}{\partial \gamma} + \sqrt{-\gamma} + O(\gamma^{N_1}); \quad M' \in S.$$

Здесь  $M'$  — точка пересечения с  $S$  луча, соответствующего эйконалу  $\tau^-$  и проходящего через  $M$ . Направление этого луча таково, что  $M'$  находится в тени еще дальше от границы тени, чем точка  $M$ . В таких точках  $\frac{\partial l(M', \gamma)}{\partial \gamma} > 0$  (это следует из формул (2.15), (2.18), (2.19) и (4.6)). Таким образом, если отрезок  $(-\gamma_0, \gamma_0) = (-Dk^{-1/6}, Dk^{-1/6})$  достаточно мал, производная  $\frac{\partial \tau_{N_1}^-}{\partial \gamma}$  при  $-\gamma_0 < \gamma < \gamma_0$  положительна и интеграл по контуру  $(-\gamma_0)$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_0$  от выражения, содержащего экспоненту  $\exp(ik\tau_{N_1}^-)$ , будет иметь оценку

$$\text{const} \left( \exp\left(-\frac{b}{2^{3/2}b_1} k^{1/3}\right) + \exp(-b_1 k^{1/3} \text{const}) \right). \quad (6.2)$$

Аналогично оценивается интеграл, содержащий вторую экспоненту. Этот интеграл содержит также сингулярный множитель  $1/\omega_1(k^{2/3}\gamma)$ , поэтому контур  $(-\gamma_0)$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_0$  следует провести точно между двумя соседними полюсами функции  $1/\omega_1(k^{2/3}\gamma)$ . Найдем константу  $b$  из условия

$$b/2^{3/2}b_1 = \text{const} b_1$$

(см. (6.2)); тогда оценка интеграла по контуру  $(-\gamma_0)$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_0$  примет вид

$$\text{const} \exp(-b_1 k^{1/3} \text{const}). \quad (6.3)$$

Если константа  $b_1$  достаточно велика, то асимптотика интеграла  $I$  будет совпадать с асимптотикой суммы вычетов в полюсах, расположенных ниже контура  $(-\gamma_0)$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_0$ , а интеграл по этому контуру будет играть роль малого остаточного члена. Это следует из того, что при большой константе  $b_1$  асимптотика вы-



четов будет иметь при  $k \rightarrow +\infty$  порядок меньший, чем выражение (6.3). Асимптотику отдельных вычетов мы рассмотрим в следующем параграфе.

## § 7. Асимптотика волнового поля в глубокой тени

В конце § 5 было высказано предположение, что интеграл  $I$  в зоне тени дает асимптотику волнового поля. Эта асимптотика, как сейчас будет показано, определяется уже первым вычетом интеграла  $I$  и допускает наглядное физическое истолкование.

Подынтегральная функция интеграла  $I$  имеет простые полюсы в точках

$$\gamma_h = k^{-2/3} \xi_h,$$

где  $\xi_h = t_h e^{i\pi/3}$ ,  $t_h > 0$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$ , — нули функции Эйри  $\omega_1(\xi)$ . Используя формулы (2.3)–(2.7), находим вычет  $u_h$  подынтегральной функции в полюсе  $\gamma_h$

$$u_h = \frac{\pi \omega_2(\xi_h)}{\omega_1'(\xi_h)} \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^{N_1} \mathcal{A}_{nj} \nu_h^j (-ik)^{-n} \omega_1(-k^{2/3} m(M, \gamma_h)) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^{N_1} \mathcal{B}_{nj} \nu_h^j (-ik)^{-n} \omega_1'(-k^{2/3} m(M, \gamma_h)) \right] e^{ikl(M, \gamma_h)}. \quad (7.1)$$

В противоположность формальным решениям, построенным в § 5 главы 6, выражения (7.1) определены не только в пограничном слое, но и в точках, расстояние которых от  $S$  превышает константу, не зависящую от  $k$ . Заменяя в формуле (7.1)  $l$  и  $m$  суммами (2.5), придем к выражению вида

$$u_h = \left[ \left( \sum_{n=0}^{N_3} F_n k^{-n/3} \right) \omega_1 \left( -k^{2/3} \sum_{j=0}^{N_1} \theta_j(M) k^{-2j/3} \right) + \right. \\ \left. + ik^{-1/3} \left( \sum_{n=0}^{N_3} G_n k^{-n/3} \right) \omega_1' \left( -k^{2/3} \sum_{j=0}^{N_1} \theta_j(M) k^{-2j/3} \right) \right] \times \\ \times \exp \left( ik \sum_{j=0}^{N_1} \psi_j(M) k^{-2j/3} \right). \quad (7.2)$$

Здесь  $N_3$  выражается через  $N$  и  $N_1$ ;  $F_n$ ,  $G_n$ ,  $\theta_j$ ,  $\psi_j$  — некоторые функции  $M$ , причем

$$\psi_0(M) = l_0(M), \quad \psi_1(M) = \xi_h l_1(M), \quad \theta_0(M) = m_0(M), \\ \theta_1(M) = \xi_h m_1(M), \quad F_0 = \frac{\pi \omega_2(\xi_h)}{\omega_1'(\xi_h)} \mathcal{A}_{00}, \quad G_0 = \frac{\pi \omega_2(\xi_h)}{\omega_1'(\xi_h)} \mathcal{B}_{00}$$

Проведем подробное исследование главного члена выражения (7.2). Воспользовавшись соотношением  $\omega_2(\xi_h) = -2i/\omega'_1(\xi_h)$  (справедливым, поскольку  $\xi_h$  — корень функции  $\omega_1$ ), получим

$$u_h \approx \frac{-2\pi i}{\omega'_1(\xi_h)^2} \exp[ik(l_0(M) + \xi_h k^{-2/3} l_1(M))] \times \\ \times [\mathcal{A}_{00}(M) \omega_1(-k^{2/3} m_0(M) - \xi_h m_1(M)) + \\ + ik^{-1/3} \mathcal{B}_{00}(M) \omega'_1(-k^{2/3} m_0(M) - \xi_h m_1(M))]. \quad (7.3)$$

Если точка  $M$  находится на расстоянии  $O(k^{-2/3})$  от  $S$ , то формулу (7.3) можно привести к виду, согласующемуся с формулами § 5 главы 6. Нас будет сейчас интересовать противоположный случай, когда точка  $M$  расположена достаточно далеко от  $S$ , и функции  $\omega_1$  и  $\omega'_1$  в формуле (7.3) можно заменить их асимптотиками. После такой замены получаем

$$u_h \approx \frac{-2\pi i e^{i\pi/4}}{\omega'_1(\xi_h)^2 k^{1/6}} e^{ik(l_0 + \frac{2}{3} m_0^{3/2})} e^{ik^{1/3} \xi_h (l_1 + \sqrt{m_0} m_1)} (\mathcal{A}_{00} m_0^{-1/4} + \mathcal{B}_{00} m_0^{1/4}). \quad (7.4)$$

Преобразуем формулу (7.4) к виду, допускающему интересную физическую интерпретацию. Нетрудно прежде всего заметить, что

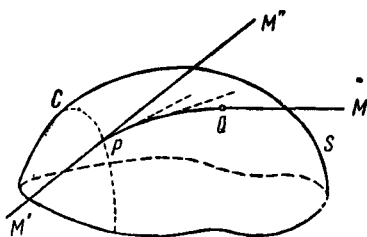


Рис. 57.

туть, что  $e^{ik(l_0(M) + \frac{2}{3} m_0^{3/2}(M))}$  — фазовый множитель: значение функции  $l_0(M) + \frac{2}{3} m_0^{3/2}(M)$  в точке  $M$  равно сумме  $l_0(P)$ ,  $P \in C$ , и длины кривой  $PQM$  (рис. 57), где  $PQ$  — геодезическая поверхности  $S$ , выходящая из точки  $P$  и везде касающаяся  $\nabla l_0(M)$ ,  $QM$  — касательная к геодезической.

Обратимся к множителю  $\exp[ik^{1/3} \xi_h (l_1 + \sqrt{m_0} m_1)]$ . В § 2 было показано (см. формулу (2.22)), что  $l_1 + \sqrt{m_0} m_1 = \text{const}$  вдоль луча  $QM$ . Используя далее формулы (2.19), (2.20), находим

$$l_1 + \sqrt{m_0} m_1 = \int_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2} \rho^{2/3}(s)}, \quad (7.5)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны нормального к  $S$  сечения, проведенного в точке  $s$ , лежащей на геодезической  $PQ$ , в направлении касательной к геодезической.

Множитель  $\mathcal{A}_{00} m_0^{-1/4} + \mathcal{B}_{00} m_0^{1/4}$  удовлетворяет обычному уравнению переноса (1.6) главы 1, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{00}(M) m_0^{-1/4}(M) + \mathcal{B}_{00}(M) m_0^{1/4}(M) = \\ = (\mathcal{A}_{00}(M_0) m_0^{-1/4}(M_0) + \mathcal{B}_{00}(M_0) m_0^{1/4}(M_0)) \sqrt{J(M_0)/J(M)}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь  $J$  — геометрическое расхождение,  $M_0$  — произвольная точка на луче  $QM$ . Геометрическое расхождение — величина, определяемая вдоль луча лишь с точностью до постоянного на луче множителя. Из построений § 7 главы 2 следует, что при  $M_0 \rightarrow Q$  отношение  $J(M_0)/|M_0Q|$ , где  $|M_0Q|$  — длина отрезка  $M_0Q$ , имеет конечный предел. Нормируем  $J(M)$  соотношением

$$J(M) = |MQ| + o(|MQ|). \quad (7.7)$$

Переходя в формуле (7.6) к пределу при  $M_0 \rightarrow Q$  и пользуясь формулой (2.20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{00}(M) m_0^{-1/4}(M) + \mathcal{B}_{00}(M) m_0^{1/4}(M) = \mathcal{A}_{00}(Q) \frac{\sqrt[4]{2\rho(Q)}}{\sqrt[4]{\left|\frac{\partial m_0(Q)}{\partial n}\right|}} \frac{1}{\sqrt{J(M)}} = \\ = \mathcal{A}_{00}(Q) 2^{1/6} \rho^{1/3}(Q) \frac{1}{\sqrt{J(M)}}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $\rho(Q)$  — радиус кривизны нормального сечения к  $S$ , проведенного вдоль касательной  $PQ$ .

Для определения  $\mathcal{A}_{00}(Q)$  воспользуемся уравнением (2.25) и начальным условием (4.7). Из уравнения (2.25) и начального условия (4.7) следует равенство

$$\mathcal{A}_{00}(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u_0^{\text{пад}} \exp \left[ \frac{1}{2} \int_P^Q \Delta l_0 ds \right]. \quad (7.9)$$

С помощью формул (2.9), (2.10), (2.15) и выражения для оператора Лапласа в криволинейных координатах (см. Дополнение 2) нетрудно вывести формулу для  $\Delta l_0$ :

$$\Delta l_0|_S = \frac{1}{j_s} \frac{d}{ds} j_s - \frac{1}{3} \frac{1}{\rho(s)} \frac{d}{ds} \rho(s), \quad (7.10)$$

где  $j_s$  — геометрическое расхождение геодезических на поверхности (см. также § 3 гл. 1). Учитывая формулу (7.10), приходим к следующему выражению для  $\mathcal{A}_{00}(Q)$ :

$$\mathcal{A}_{00}(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u_0^{\text{пад}}(P) \sqrt{\frac{j_s(P)}{j_s(Q)}} \left( \frac{\rho(P)}{\rho(Q)} \right)^{1/6}. \quad (7.11)$$

Собирая воедино формулы (7.4) — (7.11), окончательно получаем

$$u_h \approx u_0^{\text{пад}}(P) \frac{T(P)T(Q)}{\sqrt{J(M)}} \sqrt{\frac{j_s(P)}{j_s(Q)}} e^{ik^{1/3}\xi_h} \int_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2}\rho^{2/3}(s)} e^{ik\tau_0(M)}. \quad (7.12)$$

Здесь  $\tau_0(M) = l_0(M) + \frac{2}{3} m_0^{3/2}(M)$  — эйконал волны в зоне тени

$$\begin{aligned} T(P) &= e^{-i\frac{\pi}{8}} \frac{2^{7/12}\pi^{1/4}}{w'_1(\xi_h)} \rho^{1/6}(P) k^{-\frac{1}{12}}, \\ T(Q) &= e^{-i\frac{\pi}{8}} \frac{2^{7/12}\pi^{1/4}}{w'_1(\xi_h)} \rho^{1/6}(Q) k^{-\frac{1}{12}}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Итак, волновое поле  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  с точностью до пренебрежимо малых членов равно сумме вычетов  $\sum u_h$ . Каждое из этих слагаемых экспоненциально мало в силу наличия множителя  $\exp\left[ik^{1/3}\xi_h \int_P^Q ds/\sqrt{2}\rho^{2/3}(s)\right]$  (напомним, что  $\arg \xi_h = \pi/3$ ).

Таким образом, асимптотику  $u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  дает уже первое слагаемое — первый вычет интеграла (2.7).

Выражение (7.12) можно, следуя Дж. Келлеру (см. примечания к главе 12), проинтерпретировать следующим образом. Падающая волна, пришедшая вдоль луча  $M'M$  в точку  $P$ , дальше скользит вдоль геодезической  $PQ$  (см. рис. 57), по касательной сходит с  $S$  и, двигаясь далее по прямой, достигает точки  $M$ . Таким образом, фазовый множитель  $\exp[ik\tau_0(M)]$  согласуется с оптической длиной пути волны вдоль линии  $M'PQM$ .

Амплитуда волны в точке  $M$ , очевидно, должна быть пропорциональна амплитуде в точке  $P$  (т. е.  $u_0^{\text{пад}}(P)$ ). Волна, пришедшая в точку  $P$ , имеет две возможности: или продолжать свой путь далее по лучу  $PM''$ , или двигаться вдоль геодезической  $PQ$ . Других возможностей у нее нет: они бы противоречили принципу Ферма. Какая часть волны пойдет вдоль луча  $PM''$ , какая вдоль геодезической — определяется краевыми условиями и геометрическими характеристиками поверхности  $S$  в точке  $P$ . Точка  $P$  играет как бы роль регулировщика на перекрестке: из пришедшей волны, пропорциональной  $u_0^{\text{пад}}$ , она допускает к следованию вдоль геодезической лишь часть, определяемую множителем  $T(P)$ .

Волна, двигаясь вдоль поверхности  $S$ , будет непрерывно рассеивать свою энергию за счет волн, лучи которых совпадают с касательными к дуге  $PQ$  (см. пунктиры на рис. 57). Это рас-

сеяние приведет к уменьшению амплитуды, которое описывается в формуле (7.12) множителем

$$\exp \left[ ik^{1/3} \frac{\xi h}{2^{1/3}} \int_P^Q \frac{ds}{\rho^{1/3}(s)} \right]. \quad (7.14)$$

Физический смысл множителя (7.14) поясняет следующее рассуждение. Предполагая, что на участке  $ds$  уменьшение амплитуды  $\Psi$  пропорционально самой амплитуде и длине  $ds$ , получим

$$d\Psi = -\alpha(s)\Psi ds, \quad (7.15)$$

где  $\alpha(s)$  — коэффициент пропорциональности. Естественно предположить, что  $\alpha(s)$  зависит только от краевых условий и геометрических свойств поверхности  $S$  в точке  $s$ . Интегрируя дифференциальное уравнение (7.15), получаем, что затухание описывается множителем  $\exp \left[ -\int_P^Q \alpha(s) ds \right]$ , совпадающим с (7.14), если положить

$$\alpha(s) = (-i) k^{1/3} 2^{-1/3} \xi h \rho^{-2/3}(s). \quad (7.16)$$

При распространении волны вдоль  $S$  амплитуда будет еще уменьшаться за счет геометрического расхождения геодезических поверхности  $S$ , что должно приводить к появлению множителя  $\sqrt{j_s(P)/j_s(Q)}$ , действительно присутствующему в формуле (7.12). Какая же часть волны, двигающейся вдоль  $PQ$  и пришедшей в точку  $Q$ , будет уходить по лучу  $QM$ ? Очевидно, эта часть должна быть пропорциональна амплитуде волны, пришедшей в точку  $Q$ . В формуле (7.12)  $T(Q)$  — соответствующий коэффициент пропорциональности. Совпадение вида функций  $T(P)$  и  $T(Q)$  можно предугадать заранее, используя симметрию функции Грина по точкам наблюдения и источника. При распространении волны вдоль луча  $QM$  ее амплитуда будет уменьшаться из-за геометрической расходимости лучей. Этим объясняется наличие множителя  $1/\sqrt{J(M)}$  в формуле (7.12).

Итак, формула (7.12) именно такая, какой ей следует быть, если исходить из наглядных (сколь остроумных, столь и рискованных) физических соображений. Эта является еще одним подтверждением ее правильности.

## УРАВНЕНИЕ И ФУНКЦИИ ЭЙРИ \*)

Уравнением Эйри называется уравнение

$$w'' - tw = 0; \quad w = w(t). \quad (Д_1.1)$$

Как известно, в случае линейных уравнений особенности решений могут быть только в тех точках, где имеют особенности коэффициенты, поэтому ни в одной точке плоскости комплексного переменного решения уравнения Эйри не могут иметь особенностей. Итак, все решения уравнения Эйри являются целыми функциями  $t$  и разлагаются по степеням  $t$  в ряды, сходящиеся при любых  $t$ .

Подставляя степенной ряд  $w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$  ( $C_0 = w(0)$ ,  $C_1 = w'(0)$ ) с неопределенными коэффициентами в уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , нетрудно получить, что любое решение уравнения Эйри имеет вид

$$w(t) = w(0) \left( 1 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) + \\ + w'(0) \left( t + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right). \quad (Д_1.2)$$

Уравнение Эйри обладает важным свойством: *если функция  $w(t)$  есть решение уравнения Эйри, то  $w\left(e^{\pm \frac{2\pi i}{3}} t\right)$  будет тоже его решением.* Это легко проверить, производя в уравнении (Д<sub>1</sub>.1) замену переменной  $t = e^{\pm 2\pi i/3} t'$  или с помощью формулы (Д<sub>1</sub>.2).

Уравнение Эйри можно свести к уравнению Бесселя. Во многих справочниках указывается, что если  $Z_\nu(x)$  есть решение уравнения Бесселя порядка  $\nu$ , то функция

$$u = t^\alpha Z_\nu(\beta t^\gamma)$$

\*) Другое изложение теории уравнения и функций Эйри можно найти в книгах В. И. Смирнова [2], В. А. Фока [2] и Г. Д. Яковлевой [1]. Последние две книги содержат таблицы функций Эйри.

удовлетворяет уравнению

$$u''_{tt} + \frac{1-2\alpha}{t} u'_t + \left[ (\beta\gamma t^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{t^2} \right] u = 0.$$

Потребовав, чтобы последнее уравнение совпадало с уравнением Эйри, получим

$$1 - 2\alpha = 0, \quad (\beta\gamma)^2 = -1, \quad 2\gamma - 2 = 1, \quad \alpha^2 - \nu^2 \gamma^2 = 0.$$

Из этих формул следует, что любое решение  $w$  уравнения Эйри имеет вид

$$w(t) = t^{1/2} Z_{1/3} \left( \frac{2}{3} i t^{3/2} \right); \quad i = \sqrt{-1}, \quad (Д_1.3)$$

где  $Z_{1/3}(x)$  — некоторое решение уравнения Бесселя порядка  $1/3$ .

Используя теорию функций Бесселя и формулу (Д<sub>1</sub>.3), нетрудно получить для решений уравнения Эйри интегральные представления и асимптотические формулы при  $|t| \rightarrow \infty$ . Однако удобнее рассмотреть уравнение Эйри непосредственно.

Получим сначала интегральные представления для решений уравнения Эйри. Заметим, что это уравнение относится к классу так называемых *уравнений Лапласа*, т. е. уравнений, коэффициенты которых линейны относительно независимых переменных. Решения этих уравнений можно представить контурными интегралами типа Лапласа.

Следуя общему правилу, будем искать решение уравнения (Д<sub>1</sub>.1) в виде

$$w(t) = \int_{\mathcal{L}} e^{tz} s(z) dz,$$

$\mathcal{L}$  — некоторый контур на плоскости комплексной переменной  $z$ .

Подставляя в уравнение и интегрируя по частям, получим

$$w'' - tw = -[s(z) e^{tz}]_{\mathcal{L}} + \int_{\mathcal{L}} e^{tz} [z^2 s(z) + s'(z)] dz = 0,$$

где  $[s(z) e^{tz}]_{\mathcal{L}}$  — приращение  $s(z) e^{tz}$  на контуре  $\mathcal{L}$ .

Чтобы удовлетворить уравнению, достаточно выбрать  $s(z)$  и контур  $\mathcal{L}$  так, чтобы выполнялись соотношения

$$s' + z^2 s = 0; \quad [s(z) e^{tz}]_{\mathcal{L}} = 0.$$

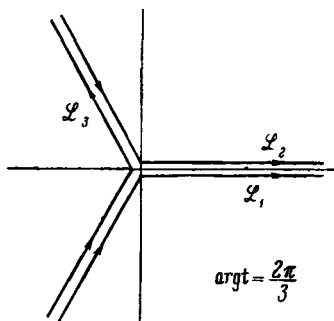


Рис. 58.

Отсюда

$$s(z) = \text{const } e^{-z^3/3}, \quad w(t) = \text{const} \int_{\mathcal{L}} e^{tz - z^3/3} dz, \quad [e^{tz - z^3/3}]_{\mathcal{L}} = 0. \quad (\text{Д}_1.4)$$

При  $z \rightarrow \infty$  функция  $e^{tz - z^3/3}$  стремится к нулю в секторах  $|\arg z| < \pi/6$ ;  $\pi/2 < \arg z < 5\pi/6$  и  $-5\pi/6 < \arg z < -\pi/2$ . Последние два сектора получаются из сектора  $|\arg z| < \pi/6$  поворотами на углы  $\pm 2\pi/3$ . Чтобы удовлетворить условию  $[e^{tz - z^3/3}]_{\mathcal{L}} = 0$ , следует взять любой из контуров, начинающийся в бесконечности в одном из этих секторов, переходящий в другой сектор и уходящий на бесконечность внутри этого второго сектора (рис. 58).

Выбирая  $\text{const}$  и контур  $\mathcal{L}$  в формуле (Д<sub>1.4</sub>) специальным образом, мы придем к решениям уравнения (Д<sub>1.1</sub>), которые обычно и называются *функциями Эйри*.

Функция

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}_1} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{+\infty e^{-2\pi i/3}}^0 + \int_0^{+\infty} \right] e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz \quad (\text{Д}_1.5)$$

называется *первой функцией Эйри*, или просто *функцией Эйри*, или *функцией Эйри в определении В. А. Фока*. Индекс 1 у  $w_1(t)$  часто опускают. Контур  $\mathcal{L}_1$  состоит из двух лучей  $\arg z = 0$  и  $\arg z = -2\pi/3$ . Интегрирование идет из  $+\infty e^{-2\pi i/3}$  до нуля и от нуля на  $+\infty$  (см. рис. 58).

Функция

$$w_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}_2} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{+\infty e^{2\pi i/3}}^0 + \int_0^{+\infty} \right] e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz \quad (\text{Д}_1.6)$$

называется *второй функцией Эйри*. Контур  $\mathcal{L}_2$  состоит из двух лучей:  $\arg z = 2\pi/3$  и  $\arg z = 0$ . Интегрирование идет из  $+\infty e^{2\pi i/3}$  до нуля и от нуля на  $+\infty$ . Нетрудно видеть, что

$$\overline{w_1(t)} \equiv w_2(\bar{t}). \quad (\text{Д}_1.7)$$

Большую роль играет также функция Эйри  $v(t)$ , равная

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} i} \int_{\mathcal{L}_3} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi} i} \left[ \int_{-\infty e^{-2\pi i/3}}^0 + \int_0^{+\infty e^{2\pi i/3}} \right] e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz \quad (\text{Д}_1.8)$$



(см. расположение контуров  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$  на рис. 58). Очевидно, что

$$v(t) = \frac{w_1(t) - w_2(t)}{2i}. \quad (Д_1.9)$$

Важно отметить, что в силу соотношения (Д\_1.7) функция Эйри  $v(t)$  вещественна при вещественных  $t$ . Деформируя контур  $\mathcal{L}_3$ , можно перевести его в мнимую ось. Это дает

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(ty + \frac{y^3}{3}\right)} dy \quad (z = iy).$$

Выражая  $e^{i\left(ty + \frac{y^3}{3}\right)}$  через  $\sin$  и  $\cos$  и учитывая, что интеграл от  $\sin\left(ty + \frac{y^3}{3}\right)$  равен нулю, получим

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(ty + \frac{y^3}{3}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\left(ty + \frac{y^3}{3}\right) dy. \quad (Д_1.10)$$

При вещественных  $t$  функция  $v(t)$  является мнимой частью функции Эйри  $w_1(t)$ , что сразу же следует из формул (Д\_1.7) и (Д\_1.9).

Из формулы (Д\_1.5) нетрудно найти  $w_1(0)$ ,  $w_1'(0)$ . Интегралы  $w_1(0)$  и  $w_1'(0)$  легко выражаются через гамма-функцию Эйлера

$$w_1(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad w_1'(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{4/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

откуда

$$w_2(0) = \overline{w_1(0)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}}; \quad w_2'(0) = \overline{w_1'(0)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{4/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad (Д_1.11)$$

$$v_2(0) = \text{Im } w_1(0), \quad v'(0) = \text{Im } w_1'(0).$$

Формула (Д\_1.2) и значения  $w_k(0)$ ,  $w_k'(0)$ ,  $v(0)$ ,  $v'(0)$  дают возможность написать степенные ряды для  $w_k(t)$  и  $v(t)$ .

Между функциями Эйри нетрудно установить некоторые соотношения. Вспомним, что уравнение Эйри инвариантно относительно поворота плоскости  $t$  на угол  $\pm 2\pi/3$ , т. е. функции  $w_k(e^{\pm 2\pi i/3}t)$  и  $v(e^{\pm 2\pi i/3}t)$  — тоже решения уравнения Эйри, откуда

$$\begin{aligned} w_k\left(te^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \sum_{i=1}^2 a_{ki} w_i(t), & w_k\left(te^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \sum_{i=1}^2 b_{ki} w_i(t), \\ v\left(te^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \sum_{i=1}^2 c_i w_i(t), & v\left(te^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \sum_{i=1}^2 d_i w_i(t), \end{aligned} \quad (Д_1.12)$$

где  $a_{kl}, b_{kl}, c_l, d_l$  — const,  $k = 1, 2$  (напомним, что  $w_1, w_2$  образуют фундаментальную систему решений). Коэффициенты в равенствах нетрудно найти, сравнивая два первых члена разложения левых и правых частей по степеням  $t$  и используя формулы (Д.11).

Легко получить

$$\begin{aligned} w_1 \left( te^{\frac{2\pi i}{3}} \right) &= e^{\frac{\pi i}{3}} w_2(t), \\ w_1 \left( te^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) &= e^{-\frac{\pi i}{3}} [w_1(t) - w_2(t)] = 2e^{\frac{\pi i}{6}} v(t), \\ w_2 \left( te^{\frac{2\pi i}{3}} \right) &= 2e^{-\frac{\pi i}{6}} v(t), \quad w_2 \left( te^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) = e^{-\frac{\pi i}{3}} w_1(t), \\ v \left( te^{\frac{2\pi i}{3}} \right) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{6}} w_1(t), \quad v \left( te^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{6}} w_2(t). \end{aligned} \quad (\text{Д.13})$$

Соотношения (Д.13), как нетрудно видеть, не все независимы. Их, разумеется, можно получить и по-другому — преобразуя контурные интегралы, представляющие  $w_k(t)$  и  $v(t)$ .

Очень большой интерес представляют асимптотические формулы для функций Эйри. Раньше чем приводить вывод этих формул, мы их полностью выпишем и получим из них простые следствия, касающиеся нулей функций Эйри и их производных. При вещественных  $t$  имеют место формулы:

$$\begin{aligned} w_1(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}}{t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(9t^{\frac{3}{2}}\right)^{-n} \sim \\ \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (\text{Д.14})$$

$$\begin{aligned} w_2(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}}{t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(9t^{\frac{3}{2}}\right)^{-n} \sim \\ \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (\text{Д.15})$$

$$\begin{aligned} v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}}{2t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(-9t^{\frac{3}{2}}\right)^{-n} \sim \\ \sim \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (\text{Д.16})$$

$$\begin{aligned} \omega_1(-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)t}}{\sqrt{\pi} t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(9t^{\frac{3}{2}}i\right)^{-n} \sim \\ \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \quad (D_1.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2(-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)t}}{\sqrt{\pi} t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(-9t^{\frac{3}{2}}i\right)^{-n} \sim \\ \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{-\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \quad (D_1.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{Im} \frac{e^{\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)t}}{\sqrt{\pi} t^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} \left(9t^{\frac{3}{2}}i\right)^{-n} \sim \\ \sim t^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (D_1.19) \end{aligned}$$

Особо следует отметить асимптотику функции  $v(t)$ . Эта функция быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  и осциллирует при  $t < 0$  (рис. 59). Асимптотическое свойство функции  $v(t)$  осуществлять переход от быстрого убывания к осцилляции и объясняет во многом частое ее применение.

Заметим еще, что при  $t \rightarrow +\infty$   $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  имеют одинаковую асимптотику. Это связано с тем, что асимптотика  $\omega_1$  и  $\omega_2$  экспоненциально растущая, в то время как их разность

$$\begin{aligned} \omega_1(t) - \omega_2(t) = \\ = 2iv(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} it^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}} \end{aligned}$$

экспоненциально убывает.

Приведем результаты, касающиеся асимптотики функций Эйри при комплексных  $t$ .

Доказательство приводимых ниже правил получения асимптотических рядов для  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  и  $v(t)$  можно провести с помощью метода перевала, чему посвящены последние страницы этого дополнения.

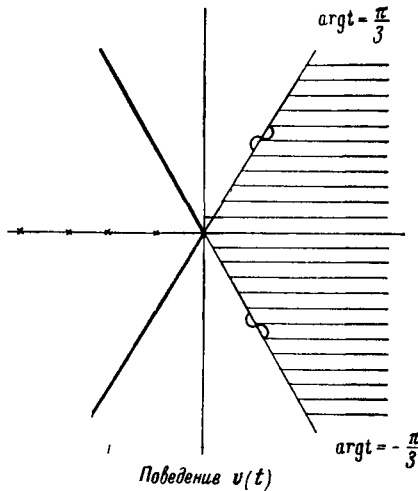


Рис. 59.

Обратимся сначала к асимптотике функции  $v(t)$ . Выделим на плоскости  $t$  отрицательную часть вещественной оси двумя лучами  $\arg t = \pi \pm \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . В оставшейся части плоскости  $t$ ,  $\pi - \alpha \geq \arg t \geq -\pi + \alpha$ , асимптотику  $v(t)$  дает формула (Д<sub>1</sub>.16). В плоскости  $t$  с вырезанным углом условия  $t^{-1/4} > 0$ ,  $t^{\pm 3/2} > 0$  однозначно определяют ветви многозначных функций в формуле (Д<sub>1</sub>.16). Внутри угла  $|\arg t - \pi| \leq \alpha$  асимптотику  $v(t)$  можно получить следующим образом: нужно аналитически продолжить члены асимптотического ряда формулы (Д<sub>1</sub>.16) в угол  $|\arg t - \pi| \leq \alpha$  как сверху через

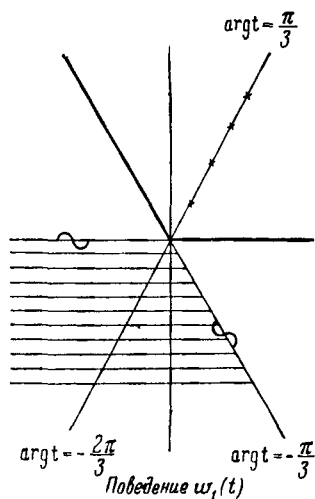


Рис. 60.

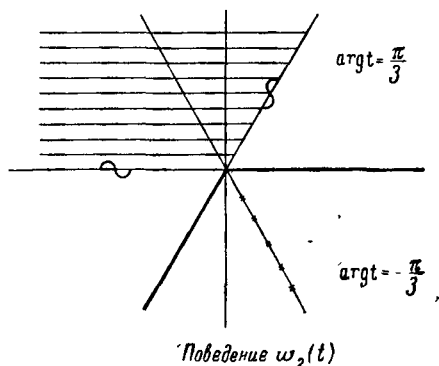


Рис. 61.

луч  $\arg t = \pi - \alpha$ , так и снизу через луч  $\arg t = \pi + \alpha$ . В результате для каждой точки  $t$  внутри угла  $|\arg t - \pi| \leq \alpha$  будем иметь два асимптотических ряда. Асимптотику  $v(t)$  дает их сумма. Это правило получения асимптотики  $v(t)$  полностью согласуется, разумеется, с формулой (Д<sub>1</sub>.19).

Асимптотику функций  $\omega_k(t)$  при больших комплексных  $t$  можно получить совершенно тем же приемом. Для получения асимптотики  $\omega_1(t)$  (соответственно  $\omega_2(t)$ ) выделим луч  $\arg t = \pi/3$  двумя лучами  $\arg t = \pi/3 \pm \alpha$  (соответственно луч  $\arg t = -\pi/3$  выделяется двумя лучами  $\arg t = -\pi/3 \pm \alpha$ ). Асимптотику в оставшейся части плоскости  $\pi/3 - \alpha \geq \arg t \geq -2\pi + \pi/3 + \alpha$  (соответственно  $-\pi/3 + \alpha \geq \arg t \geq 2\pi - \pi/3 - \alpha$ ) дает формула (Д<sub>1</sub>.14) (соответственно формула (Д<sub>1</sub>.15)).

Для получения асимптотики  $\omega_1(t)$  внутри угла  $|\arg t - \pi/3| \leq \alpha$  следует аналитически продолжить члены асимптотического ряда в (Д<sub>1</sub>.14) внутрь угла  $|\arg t - \pi/3| \leq \alpha$  как спра-

ва через луч  $\arg t = \pi/3 - \alpha$ , так и слева через луч  $\arg t = \pi/3 + \alpha$ . В результате для каждой точки  $t$  внутри угла  $|\arg t - \pi/3| \leq \alpha$  будем иметь два асимптотических ряда. Асимптотику  $\omega_1(t)$  дает их сумма.

Аналогично получается асимптотика  $\omega_2(t)$  с помощью аналитического продолжения членов асимптотического ряда формулы (Д<sub>1</sub>.15) внутрь угла  $|\arg t + \pi/3| \leq \alpha$  и сложения результатов обоих возможных продолжений. Поведение  $\omega_k(t)$  и  $v(t)$  при больших  $|t|$  иллюстрируют рис. 59—61. (Заштрихованы секторы, в которых соответствующая функция экспоненциально убывает. Самое быстрое убывание, порядка  $|t|^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}|t|^{3/2}}$ , имеет место вдоль биссектрис соответствующих секторов. Лучи, вдоль которых асимптотика имеет вид  $\text{const}|t|^{-1/4} e^{\frac{2}{3}|t|^{3/2}}$ , нарисованы жирно, лучи, вдоль которых асимптотика имеет вид осциллирующей экспоненты  $\exp(\pm i \frac{2}{3}|t|^{3/2})$ , умноженной на  $\text{const}|t|^{-1/4}$ , помечены значком  $\sim$ . Лучи, на которых имеются нули, снабжены крестиками.)

Докажем, что все нули функции  $v(t)$  и ее производной расположены на луче  $\arg t = \pi$ .

Пусть  $-t_s$  — корень функции  $v(t)$ , тогда функция  $y_s(t) = v(-t_s + t)$  удовлетворяет условиям

$$-y_s'' + ty_s = t_s y_s, \quad y_s|_{t=0} = 0, \quad y_s|_{t=+\infty} = 0, \quad (\text{Д}_1.20)$$

т. е.  $t_s$  можно рассматривать как собственные числа краевой задачи (Д<sub>1</sub>.20). Умножая уравнение для  $y_s(t)$  на комплексно сопряженную функцию  $\overline{y_s(t)}$  и интегрируя по частям, получим

$$t_s \int_0^{\infty} |y_s|^2 dt = \int_0^{\infty} (t |y_s|^2 + |y_s'|^2) dt.$$

(Внеинтегральные члены исчезают в силу краевого условия  $y_s|_{t=0} = 0$  и асимптотики  $y_s$  при  $t \rightarrow \infty$ .) Из последнего равенства вытекает, что  $t_s$  вещественно и положительно. Итак, корни  $v(t)$  имеют вид  $-t_s$ , где  $t_s > 0$ .

Аналогично доказывается отрицательность корней производной  $v'(t)$ .

Из асимптотики функции  $v(t)$  при  $t \rightarrow -\infty$  вытекает, что корней у  $v(t)$  бесчисленно много (этот факт легко можно вывести и из дискретности спектра задачи (Д<sub>1</sub>.20)).

Приведем численные значения первых корней функций  $v(-t)$  и  $v'(-t)$ :

$s$	$t_s$	$t'_s$
1	2,33811	1,01879
2	4,08795	3,24820
3	5,52056	4,82010
4	6,78671	6,16331
5	7,94417	7,37218

Исходя из асимптотики функции  $v$ , легко получить асимптотику  $t_s$  и  $t'_s$  при  $s \rightarrow \infty$ :

$$t_s = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{s}\right) \right]^{2/3} = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} + O\left(\frac{1}{s^{4/3}}\right), \quad (Д_1.21)$$

$$t'_s = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{3}{4} \right) + O\left(\frac{1}{s}\right) \right]^{2/3} = \left[ \frac{3}{2} \pi \left( s - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + O\left(\frac{1}{s^{4/3}}\right). \quad (Д_1.22)$$

Асимптотические формулы (Д<sub>1</sub>.21) и (Д<sub>1</sub>.22) дают удовлетворительное приближение для  $t_s$  и  $t'_s$  уже при  $s = 5$ . В самом деле,

$$\left[ \frac{3}{2} \pi \left( 5 - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \approx 7,9425, \quad \left[ \frac{3}{2} \pi \left( 5 - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} \approx 7,3748.$$

С ростом  $s$  точность асимптотических формул (Д<sub>1</sub>.21) и (Д<sub>1</sub>.22) быстро возрастает.

Из равенства

$$\omega_1 \left( t e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) = 2e^{\frac{\pi i}{6}} v(t)$$

вытекает, что все корни функций  $\omega_1(t)$  и  $\omega'_1(t)$  расположены на луче  $\arg t = \pi/3$  и имеют соответственно вид  $t_s e^{i\pi/3}$  и  $t'_s e^{i\pi/3}$ .

Корни функций  $\omega_2(t)$  и  $\omega'_2(t)$ , как следует из равенства

$$\omega_2 \left( t e^{\frac{2\pi i}{3}} \right) = 2e^{-\frac{\pi i}{6}} v(t),$$

имеют вид  $t_s e^{-i\pi/3}$  и  $t'_s e^{-i\pi/3}$ .

Покажем теперь, каким образом можно вывести приведенные асимптотические разложения для функций  $v$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Исходным пунктом для достижения этой цели могут быть интегральные представления для функций Эйри (Д<sub>1</sub>.5), (Д<sub>1</sub>.6), (Д<sub>1</sub>.8). Эти

интегральные представления имеют вид

$$\text{const} \int_{\mathcal{L}} e^{tz-z^3/3} dz,$$

где  $\mathcal{L}$  — контур интегрирования.

Полагая  $t = \rho e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , и делая замену переменной интегрирования  $z = \sqrt{\rho} \zeta$ , последний интеграл приведем к классическому виду интеграла метода перевала:

$$\int_{\mathcal{L}} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \sqrt{\rho} \int_{\mathcal{L}} e^{\rho^{3/2} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right)} d\zeta. \quad (D_1.23)$$

Для нахождения асимптотики функций Эйри при комплексных  $t$  ( $|t| \rightarrow \infty$ ) достаточно найти асимптотику этого интеграла при  $\rho \rightarrow +\infty$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Седловые точки, как следует из уравнения  $\frac{d}{d\zeta} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) = e^{i\theta} - \zeta^2 = 0$ , равны  $\zeta_{1,2} = \pm e^{i\theta/2}$ .

Контур наиболее быстрого убывания (возрастания) функции  $\text{Re} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right)$ , проходящие через седловые точки, не могут оканчиваться в конечной точке плоскости  $\zeta$  ввиду регулярности фазовой функции  $e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3$ . Асимптоты при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  любой кривой

$$\text{Im} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) - C = 0$$

определяются старшим членом левой части и имеют вид  $\text{Im} \zeta^3 = 0$ , или

$$\arg \zeta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

Таким образом, контуры наиболее быстрого убывания  $\text{Re} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right)$  (соответственно возрастания), проходящие через седловые точки, уходят на бесконечность, приближаясь к биссектрисам секторов, где отрицательна (соответственно положительна)  $\text{Re}(-\zeta^3)$ , т. е. к полупрямым  $\arg \zeta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$  (соответственно  $\arg \zeta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$ ).

Рассмотрим перевальные контуры, проходящие через седловые точки  $\pm e^{i\theta/2}$ . В зависимости от того, какие контур имеет асимптоты, интеграл по нему от  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\rho} \exp \left[ \rho^{3/2} \left( e^{i\theta} \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) \right]$  будет равен  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  или  $2i\nu$ . Асимптотику интеграла по перевальному контуру при  $\rho \rightarrow +\infty$  легко найти стандартными методами. Таким образом, для нахождения асимптотики функций Эйри нужно знать поведение стационарных контуров при  $\zeta \rightarrow \infty$ , к чему мы и переходим.

Перевальные контуры будут непрерывно деформироваться при увеличении  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ . Уравнение их имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) - \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right)\Big|_{\zeta=\pm \exp i\frac{\theta}{2}} &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{3}\eta^3 - \xi^2\eta + (\xi_j^2 - \eta_j^2)\eta + 2\xi_j\eta_j\xi - \frac{1}{3}\eta_j^3 + \xi_j^2\eta_j - \\ &\quad - (\xi_j^2 - \eta_j^2)\eta_j - 2\xi_j^2\eta_j = 0 \\ (\zeta = \xi + i\eta; \xi_1 + i\eta_1 = \exp i\frac{\theta}{2}; \xi_2 + i\eta_2 = -\exp(i\frac{\theta}{2}); i = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{Д}_1. 24)$$

Полагая в (Д<sub>1</sub>. 24)  $\theta = 0$ , т. е.  $\xi_j + i\eta_j = \pm 1$ , получим распадающуюся кривую

$$\eta\left(\frac{1}{3}\eta^2 - \xi^2 + 1\right) = 0.$$

Она изображена на рис. 62.

Каково бы ни было  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), из каждой перевальной точки будут выходить четыре линии (см. рис. 62—70) — четыре ветви кривой (Д<sub>1</sub>. 24). Вдоль двух линий  $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right)$  убывает по мере удаления от перевальной точки, вдоль двух — возрастает.

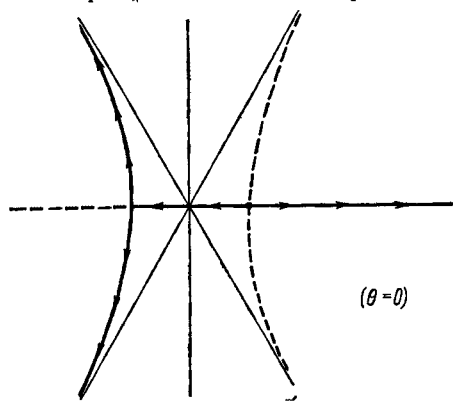


Рис. 62.

Контур убывания везде изображены жирными линиями, контуры возрастания — пунктирными, асимптоты и координатные линии — тонкими сплошными линиями. Стрелки указывают направления, в которых  $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right)$  убывает.

При малых  $\theta > 0$  контур уже не распадается\*) (рис. 63). Видно, что перевальный контур, проходящий через  $\zeta_1 = e^{i\theta/2}$ , будет соответствовать функции Эйри

$\omega_2(t) = \omega_2(\rho e^{i\theta})$ , контур, проходящий через  $\zeta_2 = -e^{i\theta/2}$ , — функции  $v(t) = v(\rho e^{i\theta})$ .

При дальнейшем увеличении  $\theta$  перевальные контуры деформируются (рис. 64), и, наконец, при  $\theta = 2\pi/3$  два участка ста-

\*) Здесь и в дальнейшем мы опускаем громоздкое, хотя и элементарное исследование формы контуров.



ционарного контура между седловыми точками сливаются между собой и стационарный контур соединяет обе седловые точки. В этом случае уравнение (Д<sub>1</sub>.24) принимает вид

$$(\eta - \sqrt{3} \xi) \left( \frac{1}{3} \eta^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta \xi - \frac{1}{2} \right) = 0$$

и стационарный контур распадается на гиперболу и прямую линию (рис. 65). При дальнейшем увеличении  $\theta$  контур, проходящий через точку  $e^{-i\theta/2}$ , уже имеет концы в точках  $+\infty e^{4\pi i/3}$  и

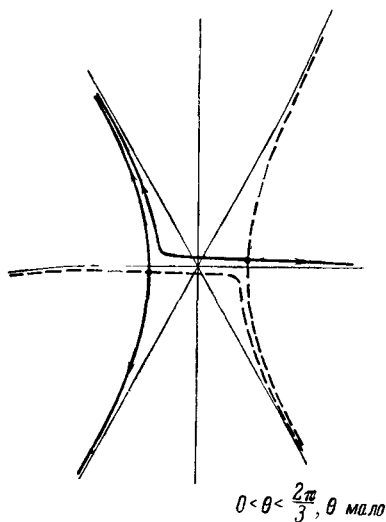


Рис. 63.

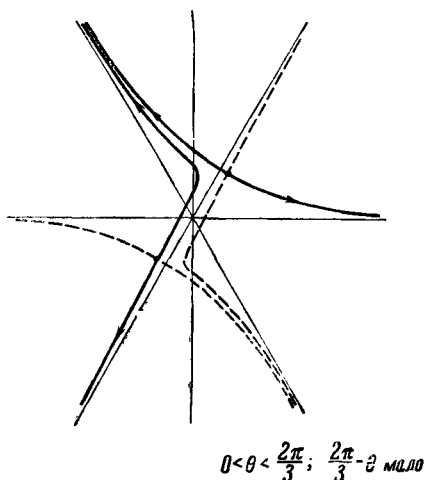


Рис. 64.

$+\infty$  (рис. 66, 67). При  $\theta = 4\pi/3$  уравнение (Д<sub>1</sub>.24) опять распадается:

$$(\eta + \sqrt{3} \xi) \left( \frac{1}{3} \eta^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta \xi - \frac{1}{2} \right) = 0$$

(рис. 68) и при дальнейшем увеличении  $\theta$  контур, проходящий через  $e^{i\theta/2}$ , соединяет уже  $+\infty e^{4\pi i/3}$  и  $+\infty e^{2\pi i/3}$ , а контур, проходящий через  $-e^{i\theta/2}$  идет из  $+\infty e^{4\pi i/3}$  в  $+\infty$  (рис. 69, 70). Наконец, при  $\theta = 2\pi$  мы опять возвращаемся к рис. 62.

Остановимся коротко на нахождении асимптотики функции

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty \exp \frac{4\pi i}{3}}^{+\infty} e^{tz - \frac{z^3}{3}} dz = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty \exp \frac{4\pi i}{3}}^{+\infty} e^{\rho^{\frac{3}{2}} \left( e^{i\theta} t - \frac{1}{3} t^3 \right)} dt \quad (\text{Д}_1.25)$$

$$(\rho = |t|, e^{i\theta} = t/\rho),$$

При  $\theta = 0$  контур интегрирования деформируем так, чтобы он совпал со стационарным контуром.

Применяя метод перевала, получаем

$$\omega_1(t) \sim e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} t^{-\frac{1}{4}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(t^{3/2})^j} \right) \quad (\text{Д}_1.26)$$

(Здесь  $t$ ,  $t^{3/2}$ ,  $t^{-1/4}$ ,  $t^{3j/2}$  положительны, ряд  $\sum_{j=1}^{\infty}$  асимптотический.)

При  $0 > \arg t \geq -(\pi - 2\pi/3) = -4\pi/3$  или (что то же) при

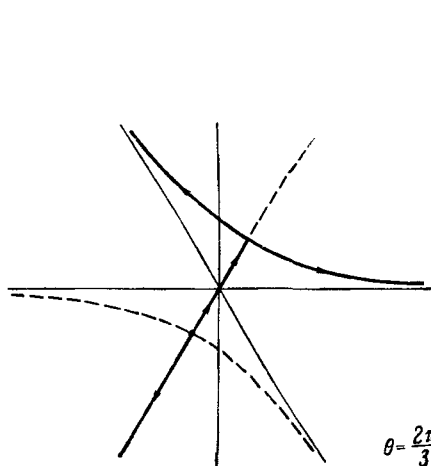


Рис. 65.

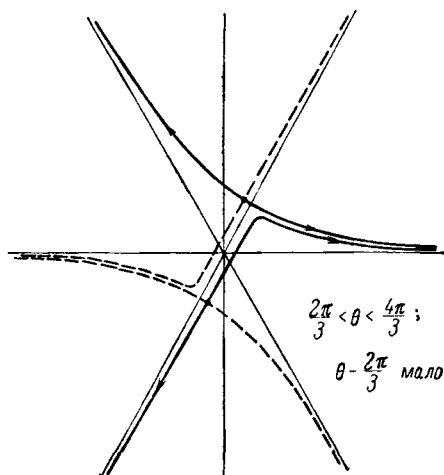


Рис. 66.

$2\pi/3 \leq \arg t < 2\pi$  за контур интегрирования в интеграле (Д<sub>1</sub>.25) можно взять стационарный контур, проходящий через точку  $-e^{+i\theta/2}$ ,  $2\pi/3 \leq \theta < 2\pi$  (рис. 65—70). Применение метода перевала дает опять формулу (Д<sub>1</sub>.26), где под  $t^{3/2}$ ,  $t^{-1/4}$ ,  $t^{3j/2}$  следует понимать аналитическое продолжение ветвей этих функций, положительных при  $t > 0$ , в область  $0 > \arg t \geq -4\pi/3$ . При  $-4\pi/3 > \arg t > -2\pi$  (или  $0 < \theta < 2\pi/3$ ;  $t = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$ ) за контур интегрирования в формуле (Д<sub>1</sub>.25) возьмем ветвь стационарного контура, идущую из  $+\infty \exp \frac{4\pi i}{3}$  в  $+\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , и далее ветвь стационарного контура, идущую из  $+\infty \exp 2\pi i/3$  в  $+\infty$  (рис. 63, 64).

Первая ветвь содержит седловую точку  $-e^{+i\theta/2}$ ,  $0 < \arg \theta < 2\pi/3$ , вторая — точку  $e^{i\theta/2}$ .

Применение метода перевала дает

$$\omega_1(t) = t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{t^{3j/2}} \right) \Big|_{t=\rho e^{i\theta}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}} +$$

$$+ t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{t^{3j/2}} \right) \Big|_{t=\rho e^{i\theta'}, \theta' = \theta - 2\pi}$$

(под  $t^\beta$  при  $t = \rho e^{i\theta}$  следует понимать  $\rho^\beta e^{i\theta\beta}$ ). Таким образом, для нахождения асимптотики  $\omega_1(t)$  при  $0 < \arg t < 2\pi/3$  следует

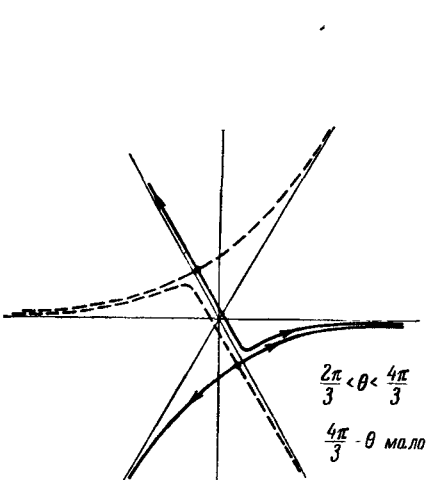


Рис. 67.

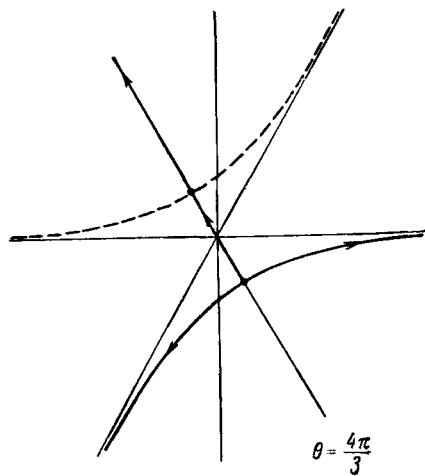


Рис. 68.

правую часть соотношения (Д.26) формально аналитически продолжить внутрь угла  $0 < \arg t < 2\pi/3$ . Это аналитическое продолжение нужно провести, увеличивая  $\arg t$  и уменьшая его. Результаты этого аналитического продолжения в соответствующих точках следует сложить (см. стр. 416—417).

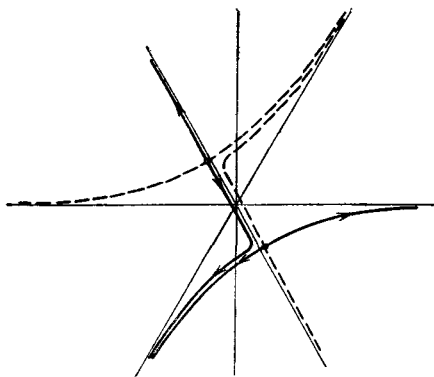
Выражение для коэффициентов  $c_j$  можно найти с помощью следующих соображений: поскольку полученные по методу перевала асимптотические ряды можно дифференцировать, правая часть асимптотического равенства

$$\omega_1(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty \exp \frac{4\pi i}{3}}^{+\infty} e^{t^{\frac{3}{2}} (\zeta - \zeta^3/3)} d\zeta \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{t^{3j/2}} \right) \quad (\text{Д. 27})$$

должна быть формальным решением уравнения Эйри. Подставляя в уравнение Эйри  $w'' - tw = 0$  выражение

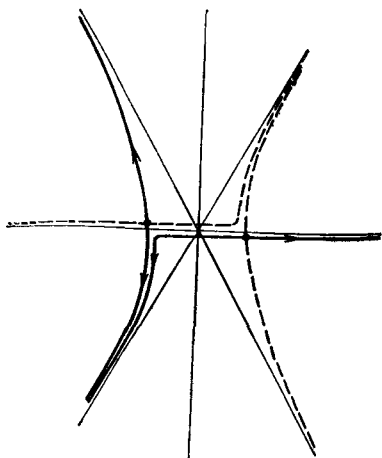
$$t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{t^{3j/2}} \right)$$

и требуя, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях  $t_j$



$$\frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi; \theta - \frac{4\pi}{3} \text{ мало}$$

Рис. 69.



$$\frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi; 2\pi - \theta \text{ мало}$$

Рис. 70.

взаимно уничтожались, получим рекуррентные соотношения для  $c_j$ , из которых они однозначно определяются, и придем к формуле (Д.14).

Асимптотики функций  $v(t)$  и  $w_2(t)$  находятся аналогично.

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
КООРДИНАТНЫЕ СИСТЕМЫ \*)

Введем криволинейные координаты  $q^1, q^2, \dots, q^n$ , считая, что

$$x^i = x^i(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (D_{2.1})$$

и что уравнения (D<sub>2.1</sub>) однозначно разрешимы относительно  $q^j$  в рассматриваемой области изменения декартовых координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Все функции предполагаются достаточно гладкими.

Пусть в некоторой точке  $M$  задан набор чисел  $A_i, i = 1, \dots, n$  ( $A_i$  зависят от выбора криволинейной координатной системы). Говорят, что эти числа образуют *ковариантный вектор*, если при переходе от системы координат  $q^1, q^2, \dots, q^n$  к новой системе  $q^{1'}, q^{2'}, \dots, q^{n'}$  числа  $A_i$  преобразуются согласно формуле

$$A_{i'} = \frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}} A_i. \quad (D_{2.2})$$

Здесь  $A_{i'}$  — рассматриваемый набор чисел в системе координат  $q^{i'}$ , производные  $\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}}$  вычисляются в точке  $M$  (предполагается, что  $q^i = q^i(q^{1'}, q^{2'}, \dots, q^{n'})$  и что эти уравнения однозначно разрешимы относительно  $q^{i'}$ ). В формуле (D<sub>2.2</sub>) по повторяющимся индексам происходит суммирование.

Во многом сходным образом определяется *контравариантный вектор*  $A^1, A^2, \dots, A^n$ . Отличие в определении контравариантного вектора от ковариантного заключается в законе преобразований чисел  $A^i$ . Вместо формул (D<sub>2.2</sub>) имеет место формула

$$A^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} A^i \quad (D_{2.3})$$

(как всегда по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Более общим понятием, чем вектор, является *тензор*.

\*) Более подробное изложение теории неортогональных координатных систем можно найти в книге П. К. Ра ш е в с к о г о [2].

Пусть в каждой криволинейной координатной системе в некоторой точке  $M$  задан набор чисел

$$T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1' i_2' \dots i_s'}, \quad i_k, j_l = 1, 2, \dots, n.$$

Этот набор чисел называется  $r$  раз ковариантным и  $s$  раз контравариантным тензором, если при переходе к новой координатной системе  $q''$  он преобразуется по закону

$$T_{i_1' i_2' \dots i_r'}^{i_1' i_2' \dots i_s'} = \frac{\partial q^{i_1'}}{\partial q^{i_1}} \frac{\partial q^{i_2'}}{\partial q^{i_2}} \dots \frac{\partial q^{i_s'}}{\partial q^{i_s}} \frac{\partial q^{j_1}}{\partial q^{i_1'}} \dots \frac{\partial q^{j_r}}{\partial q^{i_r'}} T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{i_1' i_2' \dots i_s'}. \quad (D_2. 4)$$

В случае, когда вектор или тензор заданы в каждой точке рассматриваемой области, говорят о *векторном* или *тензорном поле*.

Если в рассматриваемой области каждой точке  $M$  сопоставлено некоторое число, определяемое только точкой  $M$  и не зависящее от того, в какой координатной системе проводится рассмотрение, то говорят, что задано *скалярное поле* или в каждой точке  $M$  задан *скаляр*. Скаляр иногда удобно рассматривать как 0-ковариантный и 0-контравариантный тензор.

Если определено несколько тензорных или векторных полей, то с их помощью можно построить новые скалярные, векторные или тензорные поля.

Нетрудно доказать, например, что если имеется два тензора

$$T_{i_1 \dots i_r}^{i_1 \dots i_s} \quad \text{и} \quad S_{i_1' \dots i_t'}^{k_1 \dots k_p},$$

то набор чисел

$$R_{i_1 \dots i_r i_1' \dots i_t'}^{i_1 \dots i_s k_1 \dots k_p} = T_{i_1 \dots i_r}^{i_1 \dots i_s} \cdot S_{i_1' \dots i_t'}^{k_1 \dots k_p}$$

является  $(r + t)$ -ковариантным и  $(s + p)$ -контравариантным тензором.

Столь же просто доказывается, что набор чисел

$$T_{a i_2 \dots i_r}^{a i_1 \dots i_s} = U_{i_2 \dots i_r}^{i_1 \dots i_s} \quad (D_2. 5)$$

будет  $(r - 1)$  раз ковариантным и  $(s - 1)$  раз контравариантным тензором.

Операция образования нового тензора с помощью суммирования по одному верхнему контравариантному и одному нижнему ковариантному индексам называется *сверткой*. Свертку, резумеется, можно производить и сразу по  $\beta$ -контравариантным и  $\beta$ -ковариантным индексам ( $\beta \leq r$ ;  $\beta \leq s$ ). В частности, если  $A_i$  — ковариантный, а  $B^i$  — контравариантный векторы, то  $A_i B^i$  будет скаляром (называемым *скалярным произведением векторов  $A_i$  и  $B^i$* ).

Если  $T_{ij}$  — дважды ковариантный тензор, а  $A^i$  — контравариантный вектор, то

$$T_{ij}A^iA^j \quad (\text{Д}_2.6)$$

будет скаляром. Имеет место

**Теорема.** Если в каждой системе координат задан набор чисел  $T_{ij}$ , причем для любого контравариантного вектора выражение (Д<sub>2.6</sub>) является скаляром, то  $T_{ij}$  — дважды ковариантный тензор.

Доказательство теоремы несложно, и мы его опускаем.

Приведем примеры скаляров, векторов и тензоров. Пусть  $\varphi = \varphi(q^1, q^2, \dots, q^n)$  — некоторое скалярное поле. Легко показать, что набор чисел

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}$$

образует ковариантный вектор, называемый *градиентом* функции  $\varphi$  и обозначаемый  $\text{grad } \varphi$ .

Примером 1 раз ковариантного и 1 раз контравариантного тензора является символ Кронекера  $\delta_i^j$ :

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Контравариантный вектор образуют дифференциалы координат

$$A^i = dq^i.$$

Введем так называемый *метрический* тензор. Элемент длины в евклидовом пространстве выражается формулой  $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$ .

Подставляя вместо  $x^i$  их выражения (Д<sub>2.1</sub>), получим

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j,$$

где

$$g_{ij} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^s}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial q^j}.$$

В силу того, что  $ds^2$  — скаляр,  $g_{ij}$  — дважды ковариантный тензор, называемый *метрическим тензором*.

Составим матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице  $g_{ij}$  (это возможно, так как матрица  $g_{ij}$ , очевидно, положительно определенная). Матрица  $g^{ij}$  является дважды контравариантным тензором.

С помощью тензоров  $g^{ij}$  и  $g_{ij}$  можно осуществлять так называемые операции поднятия и опускания индексов. Например, если  $A_i$  — ковариантный вектор, то числа

$$A^i = g^{ij} A_j$$

образуют уже контравариантный вектор. Числа  $A^i$  называют контравариантными составляющими вектора  $A = (A^1, \dots, A^n)$ . Аналогично, если  $B^i$  — контравариантный вектор, то числа

$$B_i = g_{ij} B^j$$

образуют ковариантный вектор и называются ковариантными составляющими вектора  $B = (B^1, \dots, B^n)$ .

Важной формулой, в которую входят компоненты метрического тензора, является формула замены переменных в кратном интеграле

$$\int_{\Omega} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{\Sigma} f(q^1, \dots, q^n) \sqrt{g} dq^1 \dots dq^n. \quad (D_2.7)$$

Здесь  $g = \det \|g_{ij}\|$ ,  $\Sigma$  — та область, в которой должны меняться  $q^1, \dots, q^n$ , чтобы точка  $x^1, \dots, x^n$  пробежала область  $\Omega$ . Элемент объема  $\Omega$  в координатах  $q^1, \dots, q^n$  имеет вид  $d\Omega = \sqrt{g} dq^1 \dots dq^n$ . Формула (D<sub>2.7</sub>) играет немаловажную роль в дальнейшем.

Приведем нетривиальный пример скаляра. Пусть  $\phi(q^1, \dots, q^n)$  — произвольная гладкая функция, равная нулю в окрестности границы области  $\Sigma$ , а  $A^i(q^1, \dots, q^n)$  — некоторое векторное поле. С помощью интегрирования по частям нетрудно получить равенство

$$-\int_{\Sigma} A^i \frac{\partial \phi}{\partial q^i} \sqrt{g} dq^1 \dots dq^n = \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} A^i) \phi \sqrt{g} dq^1 \dots dq^n. \quad (D_2.8)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} A^i) = \operatorname{div} A$$

и покажем, что  $\operatorname{div} A$  является скаляром, т. е. при переходе к новым координатам  $q^{1'}, q^{2'}, \dots, q^{n'}$

$$q^1 = q^1(q^{1'}, \dots, q^{n'}), \dots, q^n = q^n(q^{1'}, q^{2'}, \dots, q^{n'}),$$

имеет место равенство

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} A^i) \Big|_{q^i = q^i(q^{1'}, \dots, q^{n'})} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial q^{i'}} (\sqrt{g'} A^{i'}) \Big|_{q^{1'}, \dots, q^{n'}}. \quad (D_2.9)$$

Здесь  $A^{i'}$  — компоненты рассматриваемого вектора в координатной системе  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$ ;  $\sqrt{g'} = \sqrt{\det \|g_{i'j'}\|}$ ;  $g_{i'j'}$  — компоненты метрического тензора в системе координат  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$ .



Для доказательства равенства (Д<sub>2</sub>.9) вернемся к равенству (Д<sub>2</sub>.8).

Заменим переменные интегрирования  $q^1, \dots, q^n$  на  $q^{1'}, \dots, q^{n'}$ . Пользуясь тем, что  $A^i \frac{\partial \Phi}{\partial q^i}$  скаляр, получим

$$\int_{\Sigma'} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (V \bar{g} A^i) \Big|_{q^i = q^i(q^{1'}, \dots, q^{n'})} \Phi(q^{1'}, \dots, q^{n'}) \sqrt{g'} dq^{1'} \dots dq^{n'} =$$

$$= - \int_{\Sigma'} A^{i'} \frac{\partial \Phi}{\partial q^{i'}} V \bar{g}' dq^{1'} \dots dq^{n'}.$$

Интегрируя по частям правую часть равенства, получим

$$0 = \int_{\Sigma'} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (V \bar{g} A^i) \Big|_{q^i = q^i(q^{1'}, \dots, q^{n'})} \Phi V \bar{g}' dq^{1'} \dots dq^{n'} -$$

$$- \int_{\Sigma'} \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial q^{i'}} (V \bar{g} A^{i'}) \Phi V \bar{g}' dq^{1'} \dots dq^{n'} =$$

$$= \int_{\Sigma'} \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (V \bar{g} A^i) \Big|_{q^i = q^i(q^{1'}, \dots, q^{n'})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial q^{i'}} (V \bar{g} A^{i'}) \right] \Phi V \bar{g}' dq^{1'} \dots dq^{n'}.$$

Из произвольности  $\Phi$  и основной леммы вариационного исчисления следует, что подынтегральное выражение, стоящее в квадратных скобках, тождественно равно нулю, что эквивалентно равенству (Д<sub>2</sub>.8).

Скаляр

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (A^i V \bar{g}) = \text{div } \mathbf{A} \tag{Д<sub>2</sub>.10}$$

называется *дивергенцией вектора*  $\mathbf{A} = \{A^1, \dots, A^n\}$ . Если вектор  $\mathbf{A}$  задан своими ковариантными составляющими:  $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ , то дивергенция его определяется формулой (Д<sub>2</sub>.10), где теперь  $A^i$  следует заменить по формуле

$$A^i = g^{ij} A_j. \tag{Д<sub>2</sub>.11}$$

В частности, если  $u(q^1 \dots q^n)$  — скаляр, то скаляром будет и дивергенция его градиента. Дивергенция градиента скаляра называется *оператором Лапласа* и обозначается обычным символом  $\Delta$ :

$$\Delta u = \text{div grad } u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial q^j} \right). \tag{Д<sub>2</sub>.12}$$

В декартовых координатах в силу того, что  $g_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $g_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , выражения для дивергенции (Д<sub>2</sub>.10) и (Д<sub>2</sub>.11) принимают вид \*)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A^i}{\partial x_i}, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Таким образом, формулы (Д<sub>2</sub>.10) и (Д<sub>2</sub>.12) дают выражения для дивергенции и оператора Лапласа в произвольной криволинейной координатной системе.

Заметим, что при доказательстве того, что  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  — скаляр, мы пользовались только метрическим тензором и формулой  $\sqrt{g} dq^1 \dots dq^n$  для элемента объема, поэтому выражения

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (A^i \sqrt{g})$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial q^j} \right)$$

будут скалярами и для произвольного риманова многообразия. Их тоже называют в этом случае *дивергенцией вектора* и *оператором Лапласа*. В частности, любую гладкую поверхность можно рассматривать как риманово многообразие. Коэффициенты первой квадратичной формы Гаусса здесь образуют метрический тензор. Если координаты на поверхности обозначить через  $q^1$  и  $q^2$ , то элемент длины дуги будет

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{g_{11} (dq^1)^2 + 2g_{12} dq^1 dq^2 + g_{22} (dq^2)^2} = \\ &= \sqrt{E (dq^1)^2 + 2F dq^1 dq^2 + G (dq^2)^2} \\ (E &= g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22}), \end{aligned}$$

а оператор Лапласа запишется в виде

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{G \frac{\partial u}{\partial q^1}}{\sqrt{EG - F^2}} - \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{F \frac{\partial u}{\partial q^2}}{\sqrt{EG - F^2}} - \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{F \frac{\partial u}{\partial q^1}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{E \frac{\partial u}{\partial q^2}}{\sqrt{EG - F^2}} \right].$$

\*) В декартовых координатах ковариантные составляющие совпадают с контравариантными, в частности  $x^i = x_i$ .

В частности, если система координат ортогональна, то

$$ds^2 = E(dq^1)^2 + G(dq^2)^2,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) \right]. \quad (D_2.13)$$

Формула (D<sub>2</sub>.13) применима, разумеется, и в случае плоскости. Если  $q^1$  и  $q^2$  — ортогональные координаты на плоскости, то обычно полагают  $\sqrt{E} = h_1$ ;  $\sqrt{G} = h_2$ , и формула (D<sub>2</sub>.13) принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) \right].$$

Функции  $h_i = h_i(q^1, q^2)$  ( $i = 1, 2$ ) называются *коэффициентами Ламе*.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ  $y''(s) + K(s)y(s) = y^{-3}(s)$  \*)

Решение уравнения

$$y''(s) + K(s)y(s) = y^{-3}(s) \quad (\text{Д}_3.1)$$

сводится к решению линейного уравнения

$$y''(s) + K(s)y(s) = 0, \quad (\text{Д}_3.2)$$

точнее, имеет место

*Теорема.* Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — фундаментальная система решений уравнения (Д<sub>3.2</sub>), а  $\|a_{rt}\|$ ,  $r, t = 1, 2$ , — симметричная постоянная матрица такая, что

$$\det \|a_{rt}\| W^2(y_1, y_2) = 1 \quad (\text{Д}_3.3)$$

(здесь  $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$  — вронскиан решений  $y_1, y_2$ ). Тогда функция

$$Y = \sqrt{\sum_{r,t=1}^2 a_{rt} y_r y_t} \quad (\text{Д}_3.4)$$

будет решением уравнения (Д<sub>3.1</sub>), и обратно, любое решение уравнения (Д<sub>3.1</sub>) можно представить в виде (Д<sub>3.4</sub>), где  $\|a_{rt}\|$  — симметричная матрица, зависящая от выбора  $y_1, y_2$ ,  $Y$  и удовлетворяющая условию (Д<sub>3.3</sub>). Если, кроме того,  $Y, y_1, y_2$  вещественны, то  $a_{rt}$  — вещественная положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию (Д<sub>3.3</sub>).

В самом деле,

$$Y' = Y^{-1} \sum_{r,t=1}^2 a_{rt} y_r y_t',$$

$$Y'' = Y^{-1} \sum_{r,t=1}^2 (a_{rt} y_r' y_t' + a_{rt} y_r y_t'') - Y^{-3} \left( \sum_{r,t=1}^2 a_{rt} y_r y_t' \right)^2.$$

Заменяя  $y_t''$  на  $-K(s)y_t$  и приводя последнее выражение

\*) Это уравнение изучалось в работе В. А. Якубовича [1] и в работе В. М. Бабича, В. Ф. Лазуткина [1].

к общему знаменателю, получим

$$Y'' + K(s)Y = \frac{Q(s)}{Y^3}, \quad (Д_3.5)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{r, t=1}^2 a_{rt}y_r y_t \sum_{m, n=1}^2 a_{mn}y'_m y'_n - \sum_{r, t=1}^2 a_{rt}y_r y'_t \sum_{m, n=1}^2 a_{mn}y_m y'_n = \\ &= \sum_{r, t, m, n=1}^2 a_{rt}a_{mn}y_r y'_n (y_t y'_m - y'_t y_m); \quad (Д_3.6) \end{aligned}$$

так как  $y_t y'_m - y'_t y_m = 0$  при  $t = m$  и  $y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = W$ , то

$$\begin{aligned} Q &= W \sum_{r, n=1}^2 (a_{r1}a_{2n} - a_{r2}a_{1n}) y_r y'_n = \\ &= W [(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) y_1 y'_2 + (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) y_2 y'_1] = W^2 \det \|a_{rt}\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (Д\_3.3) и (Д\_3.5) следует, что  $Y$  есть решение уравнения (Д\_3.1).

Для доказательства того, что любое решение уравнения (Д\_3.1) можно представить в виде (Д\_3.4), достаточно показать, что в виде (Д\_3.4) можно представить любое решение задачи Коши:

$$Y(s_0) = c_0 \quad (c_0 \neq 0); \quad Y'(s_0) = c_1 \quad (Д_3.7)$$

( $Y$  — решение уравнения (Д\_3.1)).

Покажем, что по начальным данным (Д\_3.7) определяется симметричная матрица  $a_{rt}$  ( $r, t = 1, 2$ ). Для этого подставим в начальные условия (Д\_3.7) вместо  $Y$  выражение (Д\_3.4), возведем в квадрат первое из начальных данных (Д\_3.6). Уравнения (Д\_3.6) станут тогда линейными относительно  $a_{rt}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{r, t=1}^2 a_{rt}y_r y_t &= c_0^2, \quad \sum_{r, t=1}^2 a_{rt}y'_r y'_t = c_0 c_1 \\ (y_r &= y_r(s_0), y'_t = y'_t(s_0)). \quad (Д_3.8) \end{aligned}$$

Умножим первое из уравнений (Д\_3.8) на  $\sum_{m, n=1}^2 a_{mn}y'_m y'_n$ , возведем второе в квадрат и вычтем друг из друга результаты. После несложных вычислений, учитывая (Д\_3.3), получим еще одно уравнение

$$\sum_{r, t=1}^2 a_{rt}y'_r y'_t = c_1^2 + \frac{1}{c_0^2}. \quad (Д_3.9)$$

Определитель системы трех уравнений (Д<sub>3.8</sub>), (Д<sub>3.9</sub>) относительно трех неизвестных  $a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{22}$  равен, как нетрудно вычислить,  $[W(y_1, y_2)]^2 \neq 0$ . Остается проверить, что  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ , найденные из системы (Д<sub>3.8</sub>), (Д<sub>3.9</sub>), удовлетворяют условию (Д<sub>3.3</sub>). Действительно, из (Д<sub>3.6</sub>) следует, что

$$W^2 \det \|a_{rt}\| = Q = c_0^2 \left( c_1^2 + \frac{1}{c_0^2} \right) - (c_0 c_1)^2 = 1.$$

Приведенные рассуждения годились как для вещественного, так и комплексного случаев. Обратимся к вещественному случаю. Если  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $y_1(s)$ ,  $y_2(s)$  вещественны, то матрица  $\|a_{rt}\|$ , определяемая из уравнений (Д<sub>3.8</sub>), (Д<sub>3.9</sub>), будет вещественной и положительно определенной. В самом деле, вещественность  $\|a_{rt}\|$  очевидна. Далее, определитель этой матрицы удовлетворяет условию (Д<sub>3.3</sub>) и поэтому положителен. Матрица  $\|a_{rt}\|$ , как и всякая вещественная матрица второго порядка с положительным определителем, будет знакоопределенной. В силу первого уравнения (Д<sub>3.8</sub>) она может быть только положительной ( $c_0^2 > 0$ ).

Вычисление функции

$$G_M(\gamma) = \int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^{\infty e^{\pi i/3}} \frac{1}{v(t) w_2(t)} \left[ \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \right]^M e^{t\gamma t} dt \quad (Д_4.1)$$

проводилось на ЭВМ БЭСМ-2. Интеграл (Д<sub>4</sub>.1) был разбит на сумму двух интегралов:

$$\int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^{\infty e^{\pi i/3}} = \int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^0 + \int_0^{\infty e^{\pi i/3}}, \quad (Д_4.2)$$

которые заменой переменной приводились к интегралам, распространенным по интервалу  $(0, \infty)$ . Формулы (см. Дополнение 1)

$$\begin{aligned} w_2(t) &= -e^{2\pi i/3} w_1(e^{2\pi i/3} t), \\ w_1(e^{\pi i/3} t) &= 2e^{\pi i/6} v(-t), \\ w_2(e^{-2\pi i/3} t) &= 2e^{-\pi i/6} v(t) \end{aligned}$$

позволяют разделить вещественную и мнимую части подынтегральных функций, после чего вычисление (Д<sub>4</sub>.1) сводится к вычислению двух вещественных интегралов для  $\text{Re } G_M(\gamma)$  и  $\text{Im } G_M(\gamma)$ .

Аргумент  $\gamma$  функции  $G_M(\gamma)$  и целое число  $M$  связаны неравенством (5.26) главы 11:

$$\frac{\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P}{2c_0} \right)^{-1/21} - 1 < M \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\omega P}{2c_0} \right)^{-1/21},$$

в котором числовой коэффициент  $\Delta$  выбирается из условия минимума погрешностей вычисления поверхностной волны и отделившихся волн геометрической оптики. Анализ этих погрешностей, проведенный для нескольких значений параметров\*), показывает, что при  $\frac{\omega p}{2c_0} \sim 10 \div 10^4$  числовой

\*) См. А. И. Ланин [2].

коэффициент  $\Delta$  целесообразно выбирать так, чтобы

$$\Delta \left( \frac{2c_0}{\omega P} \right)^{-2/21} = 3.$$

Поэтому при составлении таблиц функции  $G_M(\gamma)$  ориентировочно считалось, что

$$\frac{\gamma}{2\sqrt{3}} - 1 < M \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{3}};$$

функция  $G_0(\gamma)$  вычислялась для значений  $0,9 \leq \gamma \leq 3,4$  \*);

»  $G_1(\gamma)$  » » »  $3,2 \leq \gamma \leq 6,9$ ;

»  $G_2(\gamma)$  » » »  $6,6 \leq \gamma \leq 10,2$ ;

»  $G_3(\gamma)$  » » »  $10,1 \leq \gamma \leq 12$ .

Таблицы составлены для  $\operatorname{Re} G_M(\gamma)$ ,  $\operatorname{Im} G_M(\gamma)$ ,  $|G_M(\gamma)|$  и  $\arg G_M(\gamma)$  ( $-\pi < \arg G_M(\gamma) \leq \pi$ ) с шагом по  $\gamma$ , равным 0,1.

$\gamma$	$\operatorname{Re} G_M(\gamma)$	$\operatorname{Im} G_M(\gamma)$	$ G_M(\gamma) $	$\arg G_M(\gamma)$
$M = 0$				
0,9	-0,708	3,402	3,475	1,799
1,0	-0,444	3,282	3,312	1,705
1,1	-0,092	3,158	3,159	1,600
1,2	0,250	3,054	3,064	1,400
1,3	0,596	2,958	3,017	1,373
1,4	0,952	2,852	3,007	1,249
1,5	1,324	2,728	3,032	1,119
1,6	1,712	2,568	3,086	0,983
1,7	2,118	2,362	3,173	0,840
1,8	2,532	2,094	3,286	0,651
1,9	2,950	1,748	3,429	0,535
2,0	3,356	1,310	3,603	0,373
2,1	3,730	0,766	3,808	0,203
2,2	4,044	0,104	4,045	0,027
2,3	4,268	-0,680	4,322	-0,158
2,4	4,354	-1,588	4,635	-0,350
2,5	4,256	-2,604	4,989	-0,549
2,6	3,920	-3,700	5,390	-0,756
2,7	3,292	-4,822	5,839	-0,971
2,8	2,322	-5,900	6,340	-1,195
2,9	0,980	-6,828	6,898	-1,428
3,0	-0,742	-7,476	7,513	-1,669
3,1	-2,806	-7,692	8,188	-1,920
3,2	-5,114	-7,314	8,925	-2,181
3,3	-7,498	-6,190	9,723	-2,451
3,4	-9,280	-5,346	10,710	-2,661

\*) Ограничение  $\gamma \geq 0,9$  определяется сходимостью интеграла (Д.4.1) на верхней части контура интегрирования (см. неравенство (4.26) главы 11).



Продолжение

$\gamma$	Re $G_M(\gamma)$	Im $G_M(\gamma)$	$ G_M(\gamma) $	arg $G_M(\gamma)$
$M = 1$				
3,2	-0,892	2,064	2,248	1,947
3,3	-0,670	2,126	2,229	1,878
3,4	-0,454	2,174	2,221	1,777
3,5	-0,238	2,224	2,237	1,677
3,6	-0,002	2,258	2,258	1,571
3,7	0,252	2,272	2,286	1,460
3,8	0,524	2,260	2,320	1,343
3,9	0,812	2,218	2,362	1,220
4,0	1,112	2,136	2,408	1,091
4,1	1,420	2,014	2,464	0,957
4,2	1,730	1,844	2,528	0,817
4,3	2,036	1,620	2,602	0,672
4,4	2,326	1,338	2,683	0,522
4,5	2,588	0,996	2,773	0,367
4,6	2,814	0,592	2,876	0,207
4,7	2,984	0,126	2,987	0,042
4,8	3,084	-0,392	3,109	-0,127
4,9	3,096	-0,966	3,243	-0,303
5,0	3,004	-1,570	3,390	-0,482
5,1	2,792	-2,192	3,550	-0,667
5,2	2,446	-2,808	3,724	-0,855
5,3	1,954	-3,390	3,913	-1,048
5,4	1,314	-3,900	4,115	-1,246
5,5	0,528	-4,302	4,334	-1,449
5,6	-0,390	-4,552	4,569	-1,656
5,7	-1,414	-4,610	4,822	-1,869
5,8	-2,506	-4,434	5,093	-2,086
5,9	-3,612	-3,980	5,375	-2,408
6,0	-4,666	-3,238	5,679	-2,535
6,1	-5,586	-2,198	6,003	-2,767
6,2	-6,286	-0,872	6,346	-3,004
6,3	-6,666	0,700	6,703	-3,246
6,4	-6,646	2,450	7,083	-3,495
6,5	-6,146	4,264	7,480	2,535
6,6	-5,114	6,010	7,891	2,276
6,7	-3,340	7,530	8,237	2,010
6,8	-1,088	8,748	8,816	1,799
6,9	-0,162	9,420	9,421	1,608
$M = 2$				
6,6	1,126	1,940	2,243	1,047
6,7	1,340	1,720	2,180	0,907
6,8	1,608	1,518	2,211	0,757
6,9	1,862	1,294	2,267	0,608
7,0	2,096	1,020	2,331	0,454
7,1	2,292	0,698	2,396	0,297
7,2	2,446	0,332	2,468	0,136
7,3	2,546	-0,074	2,547	-0,029
7,4	2,582	-0,512	2,632	-0,196
7,5	2,540	-0,978	2,722	-0,367

Продолжение

$\gamma$	$\text{Re } G_M(\gamma)$	$\text{Im } G_M(\gamma)$	$ G_M(\gamma) $	$\arg G_M(\gamma)$
7,6	2,416	-1,452	2,819	-0,641
7,7	2,198	-1,924	2,921	-0,718
7,8	1,885	-2,372	3,030	-0,899
7,9	1,478	-2,782	3,150	-1,082
8,0	0,974	-3,126	3,274	-1,268
8,1	0,382	-3,382	3,404	-1,458
8,2	-0,280	-3,528	3,539	-1,650
8,3	-1,000	-3,550	3,688	-1,946
8,4	-1,746	-3,418	3,838	-2,043
8,5	-2,486	-3,124	3,992	-2,242
8,6	-3,200	-2,658	4,160	-2,448
8,7	-3,824	-2,024	4,327	-2,654
8,8	-4,324	-1,230	4,496	-2,864
8,9	-4,656	-0,300	4,666	-3,077
9,0	-4,782	0,732	4,838	2,990
9,1	-4,662	1,818	5,004	2,770
9,2	-4,274	2,896	5,163	2,547
9,3	-3,606	3,978	5,369	2,320
9,4	-2,672	4,744	5,445	2,084
9,5	-1,500	5,356	5,562	1,844
9,6	-0,146	5,656	5,658	1,597
9,7	1,308	5,576	5,727	1,341
9,8	2,758	5,072	5,773	1,073
9,9	4,076	4,126	5,800	0,791
10,0	5,124	2,752	5,816	0,493
10,1	5,756	1,008	5,844	0,174
10,2	5,860	0,044	5,860	0,013
$M = 3$				
10,1	2,202	-1,002	2,419	-0,413
10,2	2,076	-1,384	2,495	-0,588
10,3	1,864	-1,782	2,579	-0,763
10,4	1,574	-2,056	2,589	-0,940
10,5	1,208	-2,488	2,766	-1,119
10,6	0,770	-2,766	2,871	-1,299
10,7	0,266	-2,972	2,984	-1,482
10,8	-0,292	-3,088	3,102	-1,666
10,9	-0,890	-3,104	3,229	-1,850
11,0	-1,510	-3,012	3,369	-2,036
11,1	-2,130	-2,796	3,515	-2,222
11,2	-2,726	-2,456	3,669	-2,408
11,3	-3,272	-1,990	3,831	-2,595
11,4	-3,744	-1,408	4,000	-2,782
11,5	-4,112	-0,724	4,175	-2,967
11,6	-4,356	0,046	4,356	3,131
11,7	-4,452	0,870	4,536	2,948
11,8	-4,390	1,724	4,716	2,767
11,9	-4,150	2,570	4,881	2,587
12,0	-3,900	3,242	5,072	2,419

# ПРИМЕЧАНИЯ

## К главе 1

Лучевой метод для случая одного скалярного волнового уравнения рассматривался во многих работах (см. обзор этих работ в статье Келлера, Льюиса и Секлера [1]).

Лучевой метод для уравнения Максвелла в нулевом приближении был впервые предложен С. М. Рытовым [1]). Из более поздних работ см. статью М. Клейна [1].

Примеры, приведенные в §§ 6 и 7, также рассматривались ранее многими авторами. В частности, задача об асимптотике функции Грина для внешности выпуклой ограниченной области рассмотрена Келлером в работе [1].

Ряд работ посвящен обоснованию лучевого метода в этой задаче. В. С. Буслаев [1] доказал, что в случае краевого условия  $u|_S = 0$  главные члены лучевых разложений действительно дают асимптотику функции  $u$ .

В случае краевого условия  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$  В. М. Бабич [1], [2] с помощью ме-

тода, для другой задачи примененного Эрселом [1], показал, что два первых члена лучевого ряда дают асимптотику функции Грина. Позднее Р. Гримшоу [1] установил, что формально построенный лучевой ряд действительно является асимптотическим рядом для  $u$ . По поводу обоснования лучевых разложений см. также примечания к главе 12.

Обширная библиография по лучевому методу приведена в книге В. М. Бабича, М. Б. Капилевича, С. Г. Михлина и др. [1] (гл. IX, § 9).

## К главе 2

Использованная в § 1 классическая теория эволют и эвольвент излагается, например, в учебнике Г. М. Фихтенгольца [1]. Вывод асимптотических формул (2.4) для функций Бесселя можно найти в статьях Олвера [1] и [2]. Дебаевская асимптотика функций Бесселя выводится в известной монографии Ватсона [1] и в статье Г. И. Петрашеня, Н. С. Смирновой и Г. И. Макарова [1].

Изучению волнового поля вблизи каустики посвящено очень много работ. Сама функция Эйри впервые была «изобретена» именно для того, чтобы выразить в явном виде коротковолновую асимптотику волнового поля вблизи каустики. Классическое рассмотрение каустического волнового поля приводится в монографии Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1] (гл. VII, § 59).

Настоящее изложение основывается на работах Ю. Л. Газаряна [1] и Ю. А. Кравцова [1] (главным образом на последней), по сравнению с которыми глава 2 значительно подробнее и математически строже. Эти уточнения и дополнения сделаны В. М. Бабичем.

Интересные результаты по теории каустик, имеющие много общего с результатами Ю. А. Кравцова [1], получил Людвиг [1]. Доказательство аналитичности  $A_n$  и  $B_n$  (§ 10) во многом аналогично соответствующим построениям работы Людвига.

Главный член асимптотического разложения волнового поля в окрестности каустики можно было бы также построить, взяв в качестве исходного представление волнового поля через канонический оператор В. П. Маслова (см.

В. П. Маслов [1]). Аналогично можно получить и последующие члены разложения волнового поля по обратным степеням частоты. В. С. Буслев [1] не только указал на такую возможность, но и построил обобщение канонического оператора. Однако вычисление интеграла по методу стационарной фазы в случае близких седловых точек, которое нужно проделать на этом пути, было бы не проще вычислений главы 2. Представление волнового поля через канонический оператор, справедливое при достаточно общем поведении поля лучей, дает возможность получить ряд строгих результатов. В то же время нам представляется, что способ, описанный в гл. 2, является более предпочтительным при получении асимптотических разложений волнового поля в случае каустики, не имеющей особых точек.

### К главе 3

Излагаются и несколько уточняются основные положения работы Келлера и Рубинау [1]. Сделать эти уточнения нам помогли консультации с В. П. Масловым и В. Ф. Лазуткиным.

«Квантование», с которым читатель встречается в § 3, имеет непосредственную связь с настоящим квантованием. Таким образом, идеи, лежащие в основе построений главы 3, восходят к работам создателей квантовой механики (из этих работ прежде всего следует упомянуть работу А. Эйнштейна [1]).

Аналог лучевого метода (так называемое квазиклассическое приближение) можно развить и для уравнения Шредингера. Роль большого параметра там будет играть величина, обратная постоянной Планка. Известные условия квантования Бора — Зоммерфельда в задаче о связанных состояниях квантомеханической системы (т. е., другими словами, в задаче о собственных функциях уравнения Шредингера) будут тогда полностью аналогичны условиям (3.12).

Следует также упомянуть о тесной связи изложенных в главе приемов с так называемым *методом конструктивной интерференции*, часто используемым физиками при построении дисперсионных кривых (см., например, Д. К. Озеров [1], Д. К. Озеров и А. С. Алексеев [1]). Собственные числа и функции трехосного эллипсоида, используя аналогичную лучевую методику, изучили Л. А. Вайнштейн [2] (см. также Л. А. Вайнштейн [3]) и В. П. Быков [1].

В том случае, когда отсутствует отражение, сотканное из лучей многоэкземплярное пространство однозначно определяет замкнутое лагранжево многообразие (см. В. П. Маслов [1]). В работах В. П. Маслова [1] и В. И. Арнольда [3] дана строгая теория индекса, обобщающего  $l_c$  на случай произвольного лагранжева многообразия. Этот более общий индекс часто называют *индексом Маслова* или *индексом Маслова — Арнольда*.

### К главе 4

В этой главе были рассмотрены лишь плоские задачи. Однако в круге тех же идей могут быть исследованы и аналогичные трехмерные и многомерные задачи.

Указание на возможность использовать лучевой метод для построения собственных значений и собственных функций, сосредоточенных вблизи выпуклой границы произвольной области и ее минимального диаметра, содержится в работе Келлера и Рубинау [1]. Для построений Келлера — Рубинау (см. гл. 3) принципиально важным является предположение о существовании замыкающейся конгруэнции истинных лучей, непрерывно зависящей от достаточного числа параметров. Однако даже для плоской задачи в общем случае, как это следует из работ В. И. Арнольда [2], Ю. Мозера [1] и Д. Ш. Могилевского [1], не существует устойчивых ограниченных кау-

стиками систем многократно отраженных лучей, которые непрерывно зависели бы от одного параметра.

Гипотеза о существовании подпоследовательности собственных функций, сосредоточенных в окрестности одномерных циклов, устойчивых по первому приближению, была высказана В. С. Булдыревым [2]. Ему же принадлежат основные результаты главы 4.

В работах В. С. Булдырева, М. М. Попова [1] и М. М. Попова [1] лучевой метод в малом был использован для определения собственных частот многозеркальных резонаторов.

Параксиальные пучки лучей применял для определения собственных частот открытых резонаторов В. П. Быков [1] (см. также Л. А. Вайнштейн [3]). Основная идея В. П. Быкова состоит в замене рассматриваемого открытого резонатора зеркальным эллипсоидом с теми же свойствами параксиального пучка лучей в окрестности малой оси, что и у открытого резонатора.

## К главе 5

Метод параболического уравнения для решения дифракционных задач был предложен М. А. Леонтовичем [1] и В. А. Фоком [1] (см. также М. А. Леонтович и В. А. Фок [1]) еще в сороковых годах и с тех пор широко применяется. В § 9 гл. 9 книги В. М. Бабича, М. Б. Капилевича и др. [1] приводится обширная библиография по приложениям этого метода. Мы здесь кратко коснемся только тех работ, которые связаны с содержанием главы 5.

В работе В. И. Иванова [1] метод параболического уравнения был применен к задаче о дифракции коротких волн на гладком выпуклом цилиндре и привел к отысканию быстро осциллирующих множителей, входящих в асимптотику решения. Нахождение амплитудного множителя (в рамках метода параболического уравнения) впервые осуществил В. С. Буслаев [1].

Асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи была получена В. С. Булдыревым [3]. И. А. Молотковым [1] была найдена асимптотика волнового поля в тени, выражающаяся через функцию Эйри  $\omega_1(t)$ , в случае неоднородной по двум координатам среды.

Для собственных функций типа прыгающего мячика в случае  $c(x, y) \equiv 1$  метод параболического уравнения применяли Л. А. Вайнштейн [1], В. С. Булдырев [3], В. Ф. Лазуткин [1]. Переход к переменной скорости распространения  $c(x, y)$  вносит дополнительные трудности, преодоленные в работе В. М. Бабича и В. Ф. Лазуткина [1].

Изложение § 6 близко к тексту работы В. М. Бабича и Т. С. Кравцовой [1]. При написании § 6 исправлен ряд ошибок, содержащихся в формулах этой работы.

## К главе 6

Рэлей (см. [1]), рассматривая уравнение Гельмгольца в круге (в связи с эффектом шепчущей галереи), обратил внимание на то, что при больших частотах существуют решения этого уравнения, осциллирующие в пограничной полосе и быстро убывающие за ее пределами. Дальнейшему изучению таких решений были посвящены работы П. Е. Краснушкина [1], П. Е. Краснушкина и Е. Р. Мустеля [1]. В этих работах авторы не ограничивают себя акустическим случаем, как Рэлей, а рассматривают также и электромагнитные колебания. Соответствующие решения названы были ими *нормальными волнами*, прилипающими к стенке волновода.

Построение класса решений волнового уравнения в приповерхностном слое в виде бесконечного ряда по обратным степеням частоты родственно построениям теории пограничного слоя (см. М. И. Вишики и Л. А. Люстерник [1]), однако другой знак малого параметра при старшей производной приводит к появлению функции Эйри и совершенно иным выкладкам.

Форма решения (3.4), имеющая вид произведения экспоненты на функцию Эйри, аргументами которых являются бесконечные ряды по степеням  $\omega^{-1/3}$ , и основные вычисления первых четырех параграфов главы взяты из статьи В. С. Булдырева [4]. В асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений прообраз рядов (3.4) был предложен Черри [1]. Наряду с асимптотикой в форме Черри известна асимптотика в форме Олвера [1] (сумма двух асимптотических рядов, из которых один умножен на функцию Эйри, а другой — на ее производную). Форма Олвера позволила Р. Льюису и др. [1] получить интересные асимптотические разложения, из которых можно как частный случай вывести некоторые формулы § 5 гл. 6. Построения этой работы во многом аналогичны построениям главы 2. Другие применения методики Олвера можно найти в работах И. В. Мухиной и И. А. Молоткова [1] и Н. Я. Кирпичниковой [1], посвященных теории упругих поверхностных волн.

Идея отыскания членов асимптотических рядов в виде полиномов от  $\nu = n\omega^{2/3}$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ , предложена В. Ф. Лазуткиным [2]. Полиномы  $\alpha_{-3}$ ,  $\alpha_{-2}$ ,  $\alpha_{-1}$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  находились ранее из метода параболического уравнения В. И. Ивановым [1], В. С. Буслаевым [1] и В. С. Булдыревым [3]. На возможность приближенно удовлетворить импедансному граничному условию посредством введения в аргумент функции Эйри слагаемого  $\beta_1(s)\omega^{-1/3}$  впервые было указано И. А. Молотковым [2].

Нечеткий характер определений § 5 вызван тем, что строгой теории собственных функций, рассматриваемого здесь типа, не создано. Легко доказать, что при  $s \equiv 1$ , функция Грина  $G(M_0, M, k)$  (решающая задачу (5.3)) аналитически продолжима по  $k$  не только на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } k \geq 0$ , но и на бесконечнолистную риманову поверхность  $-\infty < \arg k < \infty$  логарифмического типа, где она не может иметь особенностей, отличных от полюсов, причем положение полюсов не зависит от  $M$  и  $M_0$  (см. Рейхардт [1]). В трехмерном случае  $G(M_0, M, k)$  — мероморфная функция уже не на логарифмической римановой поверхности, а просто на плоскости  $k$ .

Для выпуклой области  $\Omega$  в плоском случае удалось показать, что область  $0 > \text{Im } k > -c(\text{Re } k)^{1/3}$  не содержит собственных чисел (В. М. Бабич [2]). В трехмерном случае для класса областей, несколько более общих, чем выпуклые, Лаксом, Моравец и Филлипсом [1] получены результаты, из которых следует, что существует полоса  $0 \geq \text{Im } k \geq -c_1$  ( $c_1 > 0$  — некоторая константа), в которой нет собственных чисел. По-видимому, собственных чисел нет и в более широкой области  $0 > \text{Im } k > -c_2(\text{Re } k)^{1/3}$ . (В случае шара эту гипотезу нетрудно проверить, пользуясь явным выражением для собственных функций.)

Доказательство асимптотического характера разложения для собственных значений (см. § 6) было проведено В. Ф. Лазуткиным [2]. Метод доказательства аналогичен методу В. П. Маслова из [1].

## К главе 7

Решения уравнения Гельмгольца, сосредоточенные в окрестности оси волновода и имеющие вид произведения экспоненты на функцию параболического цилиндра, аргументы которых представляют собой бесконечные ряды, строили В. С. Булдырев [6] и В. Ф. Лазуткин [3]. Впервые с неразрешимостью задач на собственные значения при условии, что величины  $\varphi$  и  $2\pi$  линейно зависимы над кольцом целых чисел, столкнулся В. Ф. Лазуткин [5], исследовавший собственные функции типа прыгающего мячика в однородной среде. Собственные функции типа прыгающего мячика в неоднородной среде рассматривались В. С. Булдыревым в [7]. Им же получена формула для собственных частот открытого резонатора, заполненного неоднородной средой. Поправки в формуле для собственных частот неконфокальных резонаторов нашел В. Ф. Лазуткин [4].



К главе 8

Исходным пунктом для рассмотрения вопроса о собственных функциях, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической, были работы Л. А. Вайнштейна [2], [3], В. П. Быкова [1] и эвристические построения В. С. Буслаева, который предположил, что *каждой* \*) замкнутой геодезической  $l$  на замкнутой поверхности  $S$  (в трехмерном евклидовом пространстве) соответствует своя серия собственных чисел бесконечной области, лежащей вне  $S$  (см. работу В. М. Бабича [2], где приводятся соображения В. С. Буслаева). Гипотезу о том, что главный член асимптотики собственных чисел области, внешней к  $S$ , имеет вид

$$k_{pq} = \frac{2\pi p}{L} - \xi_q \left( \frac{\pi p}{L} \right)^{1/3} \int_0^L \frac{ds}{\rho^{2/3}} \frac{1}{L},$$

$p \gg 1$ ,  $q = O(1)$ ,  $p, q$  — целые, впервые высказал В. С. Буслаев. Лучевой метод в малом дает возможность найти следующее приближение для  $k_{pq}$  при  $p \rightarrow \infty$  (см. В. М. Бабич [3]).

В §§ 1—3 излагается работа В. М. Бабича [6]. Случай  $m = 1$  был ранее рассмотрен в работе В. М. Бабича и В. Ф. Лазуткина [1]. Свойства системы координат  $(s, y_1, \dots, y_m)$ , используемые в §§ 1—3, известны (см., например, монографию Милнора [1]). Теория уравнения Якоби (§ 2) изложена по образцу классической теории линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (см. М. Г. Крейн [1]). Формула (3.9) хорошо согласуется с тем, что уравнению Шредингера с квадратичным потенциалом можно точно удовлетворить выражениями, имеющими вид квазиклассического приближения. Об интегрировании уравнения Шредингера с квадратичным потенциалом см. Сегал [1] и Н. А. Черников [1]. Сведения задачи об асимптотике собственных чисел и функций к нахождению решений Флоке уравнения (1.14) и вывод формул для этих решений (см. § 3) принадлежит В. М. Бабичу. Решение матричных уравнений Риккати, аналогичных уравнению (3.3), можно найти в учебнике И. М. Гельфанда и С. В. Фомина [1].

В квантовой механике операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (3.21), (3.22), и оператор (3.27) играют важную роль. Нетрудно усмотреть аналогию между операторами  $\Lambda_j$  и  $\Lambda_j^*$  и операторами рождения и уничтожения, ранее использованными В. Ф. Лазуткиным в его работе [6]. С функциями, аналогичными  $U_{q_1, \dots, q_m}$ , (см. § 3), не раз сталкивались исследователи, разрабатывающие математический аппарат квантовой механики (см., например, Н. А. Черников [1]).

Доказательство того, что кроме  $U_q$  других решений Флоке уравнения (1.14) не существует (см. § 3), принадлежит В. Ф. Лазуткину и публикуется впервые.

Построение высших приближений (§ 4) провела М. Ф. Пышкина [1]. Идея искать  $U_q^{(j)}$  в виде линейной комбинации функций  $U_r$  была высказана В. Ф. Лазуткиным. Он же другим способом ранее рассмотрел случай  $m = 1$  (см. В. Ф. Лазуткин [3]).

---

\*) Нам представляется более вероятным, что, как и в случае задачи о собственных колебаниях эллипсоида, собственные функции области, внешней по отношению к  $S$ , могут сосредотачиваться только в окрестности устойчивой геодезической. Методы главы 8 не дают возможности найти асимптотику собственных функций, если соответствующая геодезическая неустойчива, и это нам представляется некоторым подтверждением нашей точки зрения.

Задача о собственных колебаниях трехмерной области  $\Omega$ , сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической  $l$ , лежащей на ее поверхности, в первом приближении была рассмотрена В. М. Бабичем и В. Ф. Лазуткиным [1]. Высшие приближения в этой задаче (см. § 5) нашел В. И. Дымченко, используя методику, разработанную Н. Я. Кирпичниковой [1] в связи с теорией узконаправленного распространения поверхностных упругих волн.

### К главе 9

Подробно излагаются работы М. М. Попова [2]—[4]. Двухзеркальный резонатор с развернутыми зеркалами был рассмотрен также В. Ф. Бойцовым [1]. Результаты последнего параграфа принадлежат Б. Н. Семенову [1].

### К главе 10

Для построения асимптотики функций Грина большое значение имели работы основоположников метода параболического уравнения В. А. Фока и М. А. Леонтовича (см. В. А. Фок [1], М. А. Леонтович и В. А. Фок [1]). Они получили с помощью этого метода ряд важных формул для решения задачи о точечном источнике электромагнитных колебаний.

В. С. Буслев [1] доказал, что полученные в полутеневой зоне методом параболического уравнения формулы для функции Грина действительно дают ее асимптотику.

Методом параболического уравнения решалась также и задача о функции Грина при импедансном граничном условии, случай  $\rho = \text{const}$ ,  $g = \text{const}$  в работе Г. Д. Малюжинца и Л. А. Вайнштейна [1], случай  $\rho^{1/2}(s)g(s) = \text{const}$  в работе В. А. Фока и Л. А. Вайнштейна [1], случай произвольных гладких и положительных функций  $\rho(s)$  и  $g(s)$  — в работе И. А. Молоткова [1]. В. М. Бабичем в [4] на основании принципа локальности была высказана гипотеза о главном члене асимптотики в этом случае. Полученные разными методами асимптотические формулы работ В. М. Бабича [4] и И. А. Молоткова [2] оказались совпадающими. Идея использовать при построении асимптотических разложений функций Грина теорему взаимности и принцип локальности была высказана В. С. Булдыревым [5]. Решения дифракционных задач акустики и теории упругости, сводящихся к нахождению асимптотики функций Грина при импедансном условии, получены в работах И. А. Молоткова [4], [1].

О некоторых других работах, посвященных асимптотике функции Грина во внешних задачах дифракции, говорится в примечаниях к главе 12.

В основу главы 10 положены работы И. А. Молоткова [2], [4]. При написании главы 10 последовательность изложения была незначительно изменена и внесены ряд уточнений. На ошибки, имевшие место в некоторых формулах первоначального варианта гл. 10, нам любезно указал Е. А. Леонтьев.

### К главе 11

Исследование асимптотики функции Грина поверхностного источника при условиях, приводящих к возникновению эффекта шепчущей галереи, было проведено в плоском случае В. С. Булдыревым [4]. В этой работе предполагалось, что на границе области выполняется импедансное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} - i\omega g(s)u \Big|_S = 0, \quad g(s) > 0,$$

и для поверхностной волны было получено выражение, аналогичное формуле (5.30). По сравнению с этой работой глава 11 написана более подробно, уточ-



нена формула лучевого метода для неинтерферирующих волн и приведены необходимые оценки.

Исследованию поверхностной волны типа  $SH$  в упругом шаре посвящена работа В. С. Булдырева и А. И. Ланина [1]. Условие (2.18), при котором отраженные волны могут быть описаны лучевыми формулами, в частном случае полупространства и линейной зависимости скорости волн от глубины было получено Л. М. Бреховских и И. Д. Ивановым [1] (см. также Л. М. Бреховских [1]).

Аналогичным образом может быть получена и исследована интерференционная головная волна, возникающая при распространении волн в двух средах, разделенных границей с эффективным радиусом кривизны  $R(s) > 0$ . Простейшей задачей такого рода является задача об исследовании волнового поля линейного источника в двух однородных средах, разделенных поверхностью кругового цилиндра. Для образования интерференционной головной волны скорость распространения волн во внутренней среде должна превосходить скорость распространения волн во внешней среде и источник волнового поля должен помещаться во внешней среде. При этих условиях во внутренней среде вблизи поверхности цилиндра распространяются волны шепчущей галереи, преломление которых приводит во внешней среде к образованию головной волны интерференционного типа. Эта задача, рассмотренная В. С. Булдыревым [1] и В. С. Булдыревым и А. И. Ланиным [2], может служить эталонной задачей для целого класса задач, в которых возникают головные волны интерференционного типа. Исследование интерференционной волны, возникающей при распространении волн над неоднородной средой с произвольной границей, было проведено в плоском случае В. С. Булдыревым [5] и в трехмерном А. И. Ланиным [2]. А. И. Ланиным [1] также составлены таблицы функции  $G_m(\gamma)$  (см. Дополнение 4) и проведена оценка погрешностей в ряде конкретных задач.

## К главе 12

В примечаниях к главе 10 уже упоминались работы, посвященные асимптотике функции Грина во внешних задачах и основанные на методе параболического уравнения. Не перечисляя их заново, укажем сейчас лишь те работы, которые имеют непосредственное отношение к главе 12.

В работе Д. Людвига [2] находится равномерная асимптотика решения дифракционной задачи о падении заданной волны на гладкую выпуклую поверхность  $S$ .

К сожалению, работа эта содержит ряд ошибок и неточностей. Укажем некоторые из них. Д. Людвиг использует для построения асимптотики отраженного поля эйконал, в наших обозначениях имеющий вид  $\tau^+ = \xi_{\text{пад}} + \frac{2}{3} \mu_{\text{пад}}^{3/2}$  (см. § 3). Нетрудно построить пример (в случае трех измерений), когда направление  $\nabla \tau^+$  и направление луча отраженной волны, проходящего через точку  $M$  и касающегося поверхности  $S$ , не совпадают. Это обстоятельство делает по существу неверными все дальнейшие построения работы Д. Людвига, если иметь в виду трехмерный случай.

Нейтрализующий множитель, предложенный Д. Людвигом (см. [2], § 5), имеет во внутренних точках интервала интегрирования вид  $1 + R$ , где  $R$  сверху и снизу оценивается выражениями, вида  $\text{const } k^{-1/3}$ ,  $\text{const} > 0$ . Такой нейтрализующий множитель повлияет уже на второй член асимптотического разложения дифракционного поля

Заметим еще, что в работе Д. Людвига ничего не говорится о выборе начальных данных для уравнений, которым (в наших обозначениях) удовлетворяют коэффициенты  $\mathcal{A}_{n,j}$  частных сумм (2.6).

Однако, как показал В. М. Бабич, имеющиеся в статье Д. Людвига ошибки и неточности могут быть исправлены. Таким образом, главная ценность

работы Д. Людвига — содержащиеся в ней идеи. Эти идеи и были положены в основу главы 12, которая рядом конструкций и планом всего изложения в значительной степени отличается от работы Д. Людвига.

Базируясь на работе Д. Людвига [2] и на интегральных априорных оценках решений уравнения Гельмгольца, К. Моравец и Д. Людвиг [1] строго оправдали лучевые разложения функции Грина задачи Дирихле в освещенной области и асимптотические формулы для нее в полутени.

Важным результатом главы 12 является формула (7.12), описывающая волновое поле в тени за трехмерным препятствием. Эта формула на основе эвристических соображений (частично описанных в § 7) была в плоском случае впервые выведена Келлером (Келлер [1]) в 1956 г. и позднее в трехмерной задаче получена Келлером и Леви (Келлер и Леви [1]).

Подчеркнем в заключение, что перенесение построений работы Д. Людвига [2] и главы 12 на случай краевого условия Неймана в первом приближении не вызывает затруднений. Рассмотрение высших приближений сталкивается с рядом осложнений.

## ЛИТЕРАТУРА

А д а м а р (Hadamard J.)

1. Le problème de Cauchy..., Paris, 1932.

А р н о л ь д В. И.

1. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики, Сиб. матем. ж. 4, № 2 (1963).
2. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике, УМН 18, № 6 (1963).
3. О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функциональный анализ и его приложения 1, № 1 (1967).

Б а б и ч В. М.

1. О коротковолновой асимптотике функции Грина для внешности ограниченной выпуклой области, ДАН 146, № 3 (1962).
2. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца, Матем. сб. 65, № 4 (1964).
3. О соображениях локальности в задачах дифракции коротких волн, сб. «Третий Всесоюзный симп. по дифракции волн», «Наука», 1964.
4. О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде, Журнал вычисл. матем. и матем. физики 5, № 5 (1965).
5. Некоторые оценки для функции Грина уравнения Гельмгольца в зоне тени, Вестн. Ленингр. ун-та № 7 (1965).
6. Об аналитическом продолжении резольвенты внешних задач для оператора Лапласа на второй лист, сб. «Теория функций, функц. анализ и их приложения», вып. 3, Изд-во Харьковск. Гос. ун-та, 1966.
7. К вопросу об асимптотике «квазисобственных» чисел внешних задач для оператора Лапласа, сб. «Проблемы математической физики», вып. 2, изд-во ЛГУ, 1967.
8. Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 9, Ленинград (1968).

Б а б и ч В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М.

1. Линейные уравнения математической физики, «Наука», 1964.

Б а б и ч В. М., Кравцова Т. С.

1. О распространении колебаний типа волновой пленки с квантованной толщиной, ПММ 31, № 2 (1967).

Б а б и ч В. М., Лазуткин В. Ф.

1. О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической, сб. «Проблемы матем. физики», вып. 2, Изд-во ЛГУ, 1967.

Б а б и ч В. М., Олимпиев И. В.

1. Оценки поля в области тени при дифракции цилиндрической волны на ограниченном выпуклом цилиндре, сб. «Третий Всесоюзный симп. по дифракции волн», «Наука», 1964.

Б и р к г о ф Дж. Д.

1. Динамические системы, Гостехиздат, 1941.

В и ш о п Р., Криттенден Р.

1. Геометрия многообразий, «Мир», М., 1967.

Блум, Матковский (С. О. Bloom, В. J. Matkowsky)

1. On the Validity of Geometrical theory of Diffraction by Convex Cylinders, ARMA 33, № 1 (1969).

Бойцов В. Ф.

1. Собственные частоты и распределение полей на зеркалах астигматического резонатора при приближении геометрической оптики, Оптика и спектроскопия 25, № 2 (1968).

Бохнер С., Мартин У. Т.

1. Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.

Бреховских Л. М.

1. Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1956.

Бреховских Л. М., Иванов И. Д.

1. О расширении границ применимости лучевой теории при исследовании распространения волн в слоистых средах, ДАН 83, № 4 (1952).

Булдырев В. С.

1. Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре I, сб. «Численные методы решения дифф и интегр. уравнений и квадратурные формулы», «Наука», 1964.
2. Коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца, ДАН 163, № 4 (1965).
3. Асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца для плоских выпуклых областей, Вестн. Ленингр. ун-та № 22 (1965).
4. Распространение волн вблизи изогнутой поверхности неоднородного тела, сб. «Проблемы матем. физики», вып. 2, Изд-во ЛГУ, 1967.
5. Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения, Изв. вузов, Радиофизика 10, № 5 (1967).
6. Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде, сб. «Проблемы матем. физики», вып. 3, Изд-во ЛГУ, 1968.
7. Метод эталонных задач в теории дифракции и распространения волн, Докторская диссертация, Ленинград, ЛГУ (1969).

Булдырев В. С., Ланин А. И.

1. Об исследовании интерференционного волнового поля на поверхности упругого шара, сб. «Численные методы решения задач матем. физики», «Наука», 1966.
2. Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре II, Журнал вычисл. матем. и матем. физики 6, № 1 (1966).

Булдырев В. С., Попов М. М.

1. Применение лучевого метода для вычисления собственных частот многозеркальных резонаторов, Оптика и спектроскопия 20, № 5 (1966).

Бурбаки Н.

1. Функция действительного переменного. Элементарная теория, «Наука», 1965.

Буслаев В. С.

1. О формулах коротковолновой асимптотики в задаче дифракции на выпуклых телах. Вестн. Ленингр. ун-та № 13, (1962).
2. Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ, Функциональный анализ и его приложения 3, № 3 (1969).

Быков В. П.

1. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах, сб. «Электроника больших мощностей» вып. 4, «Наука», 1965.
2. Лучевая теория открытых резонаторов и открытых волноводов, колебания в которых ограничены каустическими поверхностями, Радиотехника и электроника 11, № 3 (1966).
3. Аберрации в геометрической оптике открытых резонаторов, сб. «Электроника больших мощностей», вып. 5, «Наука», 1968.

Вайнштейн Л. А.

1. Открытые резонаторы со сферическими зеркалами, ЖЭТФ 45, № 3(9) (1963).
2. Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде, сб. «Электроника больших мощностей», вып. 4, «Наука», 1965.
3. Открытые резонаторы и открытые волноводы, Изд-во «Сов. радио», 1966.

Ватсон Дж. Н

1. Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ, 1949.

Веблен О.

1. Инварианты квадратичных дифференциальных форм, ИЛ, 1948.

Вишик М. И., Люстерник Л. А.

1. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН 12, № 5 (1957).

Газарян Ю. Л.

1. О геометро-акустическом приближении поля в окрестности неособого участка каустики, сб. «Вопросы динамич. теории распротр. сейсм. волн», вып. 5, Изд-во ЛГУ, 1961.

Гельфанд И. М., Фомин С. В.

1. Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

1. Обобщенные функции и действия над ними, вып. 1, Физматгиз, 1959.

Гримшоу (Grimshaw R.)

1. High-frequency scattering by finite convex regions, Commun on the Pure and Appl. Math. 19, № 2 (1966).

Зейферт В., Трельфаль Н.

1. Топология, ГОНТИ, 1938.

Иванов В. И.

1. Дифракция коротких волн на гладком выпуклом цилиндре, НДВШ, физ.-мат. наук 1, № 6 (1958).

Келлер (J. V. Keller)

1. Diffraction by a convex cylinder. Trans. IRE, Ant. and Prop. 4, № 3 (1956).

Келлер, Льюис, Секклер (J. V. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler)

1. Asymptotic solution of some diffraction problems, Commun on the Pure and Appl. Math. 9, № 2 (1956).

Келлер, Рубинау (J. V. Keller, S. Rubinow)

1. Asymptotic solution of eigenvalue problems, Annals of Physics, 9, № 1 (1960). Поправка, Annals of Physics, 10, № 2 (1960).

Кирпичникова Н. Я.

1. Волны Рэлея, сосредоточенные вблизи луча на поверхности неоднородного упругого тела. Зап. научн. семинаров ЛОМИ 15, Ленинград (1969).

Клейн (M. Kline)

1. An asymptotic solution of Maxwell equation, Commun. on Pure and Appl. Math. 4, № 2—3 (1951).

Кравцов Ю. А.

1. Об одной модификации метода геометрической оптики, Изв. вузов, Радиофизика 7, № 4 (1964).

Краснушкин П. Е.

1. Метод нормальных волн в применении к волноводам, Вестн. Моск. ун-та № 1 (1946).

Краснушкин П. Е., Мустель Е. Р.

1. О прилипанию электромагнитных волн к вогнутой металлической поверхности, ДАН 54, № 3 (1946).

Крейн М. Г.

1. Теория  $\lambda$ -зон устойчивости дифференциальных уравнений, сб. «Памяти Александра Александровича Андропова», Изд-во АН, 1955.

Ладыженская О. А.

1. Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат (1953).

Лазуткин В. Ф.

1. Параболическое уравнение и асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца для трехмерных областей, Вестн. Ленингр. ун-та № 22 (1965).
2. Асимптотика собственных функций оператора Лапласа, сосредоточенных вблизи границы области, Журнал вычисл. матем. и матем. физики 7, № 6 (1967).
3. Асимптотические разложения для собственных функций оператора Лапласа, сосредоточенных вблизи некоторых одномерных циклов, Кандидатская диссертация, Ленинград, ЛОМИ (1967).
4. Формула для собственных частот неконфокального резонатора с цилиндрическими зеркалами, учитывающая абберацию зеркал, Оптика и спектроскопия 24, № 3 (1968).
5. Построение асимптотического ряда для собственных функций типа «прыгающего мячика», Тр. МИАН 95 (1968).
6. Спектральное вырождение и «малые знаменатели» в асимптотике собственных функций типа «прыгающего мячика», Вестн. Ленингр. ун-та № 7 (1969).

Лакс, Моравец, Филлипс (P. D. Lax, C. S. Morawetz, R. S. Phillips)

1. Exponential decay of solution of the wave equation in exterior of a starshaped obstacle, Commun on Pure and Appl. Math. 16, № 4 (1964).

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.

1. Теория поля, «Наука», 1967.

Ланин А. И.

1. К расчету интерференционных волн в задачах дифракции на цилиндре и шаре, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 9, Ленинград (1968).
2. Интерференционная волна в задаче дифракции на неоднородной области с произвольной границей, Изв. вузов, Радиофизика 12, № 8 (1969).

Леонтович М. А.

1. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн, Известия АН СССР, сер. физ. 8, № 1, (1944).

Леонтович М. А., Фок В. А.

1. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, ЖЭТФ 16, № 7 (1946).

Людвиг (D. Ludwig)

1. Uniform asymptotic expansions at a caustic, Commun on Pure and Appl. Math. 19, № 2 (1966).
2. Uniform Asymptotic Expansion of the field Scattering by an Convex Object at High Frequencies, Commun on Pure and Appl. Math. 20, № 1 (1967).

Льюис, Блейстейн, Людвиг (R. M. Lewis, N. Bleistein, D. Ludwig)

1. Uniform asymptotic theory of creeping waves, Commun on Pure and Appl. Math. 20, № 2 (1967).

Ляпунов А. М.

1. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Малюжинец Г. Д.

1. Развитие представлений о явлении дифракции, УФН 69, № 2 (1959).

Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А.

1. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, Радиотехн. и электроника 6, № 8, 9 (1961).

Маслов В. П.

1. Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во МГУ, 1965.

Милнор Дж.

1. Теория Морса, Изд-во «Мир», 1965.

Могилевский Д. Ш.

1. О неустойчивости замыкающихся лучевых конгруэнций, Вестн. Ленингр. ун-та № 4 (1969).

Мозер (J. Moser)

1. On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus, Nach. Acad. Wiss. Math. Phys. Göttingen 11a, № 1 (1962) (русский перевод: «Математика» 6:5 (1962)).

Молотков И. А.

1. Распространение волн в неоднородном полупространстве с показателем преломления, зависящим от двух координат, сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», вып. 6, Изд-во ЛГУ, 1966.
2. Дифракция на выпуклом контуре с плавно изменяющимся радиусом кривизны и импедансом, сб. «Проблемы матем. физики», вып. 2, Изд-во ЛГУ, 1967.
3. Дифракция на гладком выпуклом цилиндре при существовании двух скоростей распространения, Вестн. Ленингр. ун-та № 10 (1967).
4. Функция Грина задачи дифракции на выпуклом цилиндре с переменным импедансом, Тр. МИАН 95, «Наука» (1968).

Моравец, Людвиг (S. Morawetz, D. Ludwig)

1. An Inequality for the Reduced Wave Operator and the Justification of Geometrical Optics, Commun on Pure and Appl. Math. 21, № 2 (1968).

Мухина И. В., Молотков И. А.

1. О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 4 (1967).

Озеров Д. К.

1. О лучевом методе получения дисперсионных уравнений для интерференционных волн  $SH$ , распространяющихся в средах со сферическими границами, сб. «Вопросы динамич. теории распротр. сейсм. волн», вып. 8, «Наука», 1966.

Озеров Д. К., Алексеев А. С.

1. О построении годографов волн  $SH$  по дисперсионным кривым волн Лява, сб. «Вопросы динамич. теории распротр. сейсм. волн», вып. 8, «Наука», 1966

Олвер (F. W. J. Olver)

1. The asymptotic solutions of linear differential equations of the second order for large values of parameter, Phill Trans. R. Soc. London, A-247, № 930 (1954).
2. The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. Phil Trans. R. Soc. London. A-247, № 930 (1954).

Олимпиев И. В.

1. Оценки поля в области тени при дифракции цилиндрической волны на ограниченном выпуклом цилиндре, ДАН 156, № 5 (1964).

Панкратова Т. Ф.

1. О собственных функциях оператора Лапласа на поверхности трехосного эллипсоида и в области, внешней к нему, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 9, Ленинград (1962).

Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Макаров Г. И.

1. Об асимптотических представлениях цилиндрических функций, Уч. зап. Ленингр. ун-та, № 170 (1953).

Понтрягин Л. С.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965.

Попов М. М.

1. Геометрическая оптика и собственные частоты кольцевых резонаторов, Вестн. Ленингр. ун-та, № 4 (1967).
2. Резонаторы для лазеров с развернутыми направлениями главных кривизн. Метод параболического уравнения, «Оптика и спектроскопия» 25, № 2 (1968).



3. Асимптотика некоторых подпоследовательностей собственных значений краевых задач уравнения Гельмгольца в многомерном случае, ДАН 184, № 5 (1969).
  4. Собственные колебания многозеркальных резонаторов, Вестн. Ленингр. ун-та, № 22 (1969).
- Пышкина М. Ф.
1. Асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 15, Ленинград (1969).
- Рам Ж.
1. Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956.
- Рашевский П. К.
1. Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 1956.
  2. Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1967.
- Рейхардт (H. Reichardt)
1. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung, Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 24 (1960).
- Рытов С. М.
1. О переходе от волновой к геометрической оптике, ДАН 18, № 4—5 (1938).
- Рэлей (O. M. Rayleigh)
1. The problem of the whispering gallery, Phil. Mag. 20, № 120 (1910).
- Сальман Ж. М.
1. Курс аналитической геометрии двух измерений (конические сечения), С. Петербург, 1908.
- Сегал (I. E. Segal)
1. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. II, Canadian Journ. of math. 13, № 1 (1961).
- Семенов Б. Н.
1. Асимптотика собственных функций и собственных частот многозеркального резонатора, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 15, Ленинград (1969).
- Смирнов В. И.
1. Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1965.
  2. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, «Наука», 1969.
  3. Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.
- Уиттекер Е. Т.
1. Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
- Уфимцев П. Я.
1. Поперечная диффузия при дифракции на клине, Радиотехника и электроника 9, № 6 (1965).
- Фихтенгольц Г. М.
1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, «Наука», 1966.
- Фок В. А.
1. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела, Изв. АН СССР, сер. физ. 10, № 2 (1946).
  2. Таблицы функций Эйри, ГИТТЛ, 1946.
  3. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд-во АН, 1946.
  4. Дифракция Френеля от выпуклых тел, УФН 43, № 4 (1951).
- Фок В. А., Вайнштейн Л. А.
1. Поперечная диффузия при дифракции на выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной, Радиотехника и электроника 8, № 3 (1963).
- Фридлендер Ф.
1. Звуковые импульсы, ИЛ, 1962.
- Фридлендер, Келлер (F. G. Friendlander, J. B. Keller)
1. Asymptotic expansions of solutions of  $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ . Commun. on Pure and Appl. Math. 8, № 3 (1955).



Черников Н. А.

1. Система с гамильтонианом в виде зависящей от времени квадратичной формы от  $p$  и  $q$ , ЖЭТФ 53, № 3(9) (1967).

Черри Т.

1. Равномерные асимптотические формулы для функций с точками поворота, Математика, сб. переводов 8, № 4 (1965).

Эйдус Д. М.

1. О принципе предельного поглощения, Матем. сб. 57, № 1 (1962).

Эйнштейн А.

1. К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна, Собрание научн. тр., т. 3 (1966).

Эрселл (F. Ursell)

1. On the short wave asymptotic theory of the wave equation, Proc. Cambridge Phil. Soc. 53, № 1 (1957).

Яковлева Г. Д.

1. Таблицы функций Эйри и их производных, «Наука», 1969.

Якубович В. А.

1. Вопросы устойчивости решений системы двух линейных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами, Матем. сб. 37, № 1 (1955).

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Вектор ковариантный 35, 425  
— контравариантный 35, 425  
Векторы присоединенные 239  
Волна, имеющая лучевой вид, 368  
— нормальная 441  
— поверхностная 333  
— соскальзывания 184, 307  
— стоячая 161  
— типа волновой пленки 151  
Волновое поле в окрестности каустики 59

Гармоники высшие 292  
Геодезическая, уравнение Якоби 235  
—, устойчивая по первому приближению 237

Диаметр области минимальный 114, 440  
— — экстремальный 111  
Дивергенция вектора 429, 430  
Дифракционный пограничный слой 13  
Длина дуги приведенная 366

Задача эталонная 44, 158, 193, 378  
Зона глубокой тени 402—405

Импеданс нормальный 180  
Инвариант четвертого порядка интегральный 275  
Индекс каустический 76  
— Маслова (индекс Маслова — Арнольда) 440  
— отражательный 76  
— пересечения (Кронекера — Пуанкаре) 78

Каустика 11, 41—68  
— приближенная 396  
Каустические суммы 384  
— — приближенные 386

Конгруэнция лучей замыкающаяся 71  
— — нормальная 70  
— — первого приближения 101  
Координатная система полугеодезическая 257  
Координаты лучевые 26  
— ортогональные произвольные 28  
— полярные 44  
— римановы нормальные 229  
Кривизна гауссова 258

Лучевая формула для многократно отраженных волн 327  
Лучи 23  
— экстремальные 128

Матрица системы фундаментальная 238  
Метод Келлера — Рубинау 12, 69, 440  
— конструктивной интерференции 440  
— лучевой 10, 20, 439, 440  
— — в малом 13, 101, 278  
— —, рекуррентные формулы 29  
— —, уравнения Максвелла 31  
— параболического уравнения 14, 137  
— эталонных задач 14, 158  
Многообразие риманово 34, 228  
Множитель нейтрализующий 381  
Мультипликатор уравнения 239, 276

Накрывающая универсальная 233  
Нормаль приведенная 367

Образующие фундаментальной группы 76  
Огибающая поля лучей 11, 43  
Окружность наблюдения 359  
Оператор Лапласа 429  
— — в криволинейных координатах 152, 430  
— Маслова канонический 440

- Оператор монодромии 239, 274  
 — рождения 249, 291  
 — с дискретным спектром 187  
 — уничтожения 249, 291  
 Ось резонатора 266
- Плотность энергии 29, 33  
 Поверхность Римана логарифмического типа 305  
 Показатель Флоке 235, 276  
 Покрытие области простое 70  
 Поле векторное 426  
 — источника, на границе круга 346  
 — лучей регулярное 10, 27  
 — поверхностного источника (внутренняя задача) 325  
 — скалярное 426  
 — тензорное 426  
 — центральное 22  
 Полигон экстремальный 334  
 Полином нечетный 298  
 — четный 298  
 — Эрмита 194, 264  
 Принцип взаимности 317  
 — локальности 40  
 — предельного поглощения 10, 185  
 Произведение векторов скалярное 426  
 Производная ковариантная 234  
 Проницаемость среды диэлектрическая 31  
 — — магнитная 31  
 Пространство многоэкземплярное 71, 440  
 — расслоенное с  $m$ -мерным векторным слоем 233  
 Прохождение контура через каустику противоположно лучам 75  
 — — — согласно с лучами 75  
 — — — отражающую поверхность противоположно лучам 76  
 — — — — согласно с лучами 76
- Радиус кривизны кривой 39, 97  
 — — — эффективный 122  
 — — риманов 125  
 — — эллипса 97  
 — кручения луча 33  
 Расслоение нормальное 233  
 Расстояние оптическое 81  
 Расходимость поля лучей 27, 33, 41, 59  
 Резонатор многозеркальный 265  
 — неконфокальный 227  
 — устойчивый по первому приближению 275
- Решение уравнения Гельмгольца в пограничном слое 162  
 — Флоке 235, 276  
 Ряды Биркгофа 286
- Свертка 426  
 Символ Кронекера 427  
 Система единиц гауссова 31  
 — лучей, устойчивая по первому приближению 103, 112  
 Собственные значения круга 79  
 — — типа прыгающего мячика 110  
 — — — — в случае переменной скорости 128  
 — — эллипса 85  
 — функции внешности  $\Omega$  182  
 — — и собственные частоты многозеркального резонатора 291  
 — — круга 79, 158  
 — —, сосредоточенные вблизи границы области, асимптотика 157  
 — —, — в окрестности замкнутой геодезической 228  
 — —, — — экстремального луча области 193  
 — — типа прыгающего мячика 12, 15, 96  
 — — — шепчущей галереи 12, 15, 96, 102, 157, 174  
 — — — —, асимптотика 142  
 — — — — в случае переменной скорости 120  
 — частоты открытого резонатора 225
- Соотношение Лиувилля 238  
 Составляющие вектора ковариантные 428  
 — — контравариантные 428
- Тензор 425  
 — метрический 34, 427  
 Тор двумерный 280  
 — трехмерный 280  
 Трубка лучевая 26
- Уравнение волновое 9  
 — Гельмгольца 9, 20, 44  
 — переноса 21  
 — Эйлера линеаризованное 202, 207, 237  
 — эйконала 21, 23  
 — — поверхностное 389  
 Уравнения Максвелла 31  
 — Эйлера 271

Условия квантования 77

— устойчивости резонаторов по первому приближению 268

Фронты волновые 23

Функции параболического цилиндра 149, 194

— Эрмита, многомерное обобщение 251

Функционал Ферма 10, 21, 270

Функция Бесселя 44

— —, асимптотика через функцию Эйри 84, 160

— —, дебаевская асимптотика 45

— Грина для внешности окружности 304

— — — римановой поверхности 320

— — — уравнения Гельмгольца 37, 303

— ослабления 139, 232

—, сосредоточенная в окрестности кривой 12

— срезающая 189

— Ханкеля 37

Функция Ханкеля, асимптотический ряд 37

— Эйри вторая 412

— — первая (или функция Эйри в определении Фока) 412

— эталонная 158

Характеристики нелинейного уравнения первого порядка 39

Цикл одномерный 12

— — экстремальный 266

— ориентированный одномерный 74

—, устойчивый в первом приближении 13

Эвольвента кривой 43, 439

Эволюта кривой 43, 439

Эйконал 10

— поверхностный 389

Экстремали функционала 22

— —, майеровое семейство 70

Эффект шепчущей галереи 325