

В. М. БАБИЧ, Н. Я. КИРПИЧНИКОВА

**МЕТОД
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД 1974**

Ленинградский ордена Ленина и ордена
Трудового Красного Знамени
государственный университет имени А.А.Жданова

В.М.Бабич, Н.Я.Кирпичникова

М Е Т О Д
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Издательство Ленинградского университета

Ленинград

1974

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 517.934

Б а б и ч В. М., К и р п и ч н и к о в а Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л., 1974. 124з.

В этой небольшой книге излагается метод пограничного слоя - весьма универсальный метод, позволяющий находить коротковолновую асимптотику решений многих дифракционных задач.

Книга рассчитана на специалистов-теоретиков, работающих в области теории дифракции акустических, электромагнитных и других волн, и на математиков, интересующихся асимптотическими методами математической физики.

Ил.- 7, библиогр.- 36 назв.

Б $\frac{20203, 20404-142}{076(02) - 74}$ 125-74

© Издательство Ленинградского университета, 1974г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время появилось много работ, в которых строились равномерные асимптотические разложения решений дифракционных задач. Эти разложения обладали рядом неоспоримых достоинств, однако имелись и недостатки. Например, коэффициенты равномерных разложений вблизи каустики имеют вид неопределенности $0/0$, что затрудняет расчет волнового поля на ЭВМ. Равномерные разложения с трудом поддаются физической интерпретации.

Для того чтобы выяснить характер волнового процесса в той или иной области, приходится от равномерных разложений переходить к неравномерным, справедливым в интересующей нас области волнового поля. Встает вопрос: а не рассмотреть ли локальные разложения, т.е. разложения метода пограничного слоя с самого начала, не пытаюсь представить волновое поле единой формулой?

И действительно, этот путь, ведущий свое начало от классических работ В.А.Фока и М.А.Леонтовича [1, 2] 40-х годов и более поздней работы Р.Бачела и Дж.Келлера [3] приводит, как правило, к адекватной физической теории.

Методика пограничного слоя в теории дифракции имеет много общего с методикой пограничного слоя, применяемой в других областях математической физики. Это относится, например, к рекуррентным последовательностям уравнений [4]

$$L_0 U_0 = 0, \quad L_0 U_1 + L_1 U_0 = 0, \quad L_0 U_2 + L_1 U_1 + L_2 U_0 = 0, \dots$$

и ко многим используемым в настоящей книге приемам.

Следует отметить, что дифракционный вариант метода пограничного слоя сталкивается с серьезной трудностью: локальные разложения должны быть согласованы друг с другом. „Склеивание“ локальных разложений, да еще во всех приближениях, — задача непростая, однако, как правило, разрешимая. Здесь на помощь

приходится привлекать специфическую аналитическую технику, связанную с так называемыми леммами единственности.

Цель этой книги — разъяснение основных принципов метода пограничного слоя в теории дифракции. Мы не стремимся вывести как можно больше формул. Напротив, мы иллюстрируем методику на ограниченном числе задач. Мы рассматриваем задачи, уже решенные другими методами, что дает возможность читателю лучше оценить сильные и слабые стороны пропагандируемых нами методов. Интересно, что методика пограничного слоя позволила взглянуть с единой точки зрения на довольно разные задачи. Несколько, быть может, неожиданным оказалась естественность методики пограничного слоя в задаче дифракции произвольной волны на гладком теле (гл.5).

Заметим в заключение, что мы всюду ведем разложение по „размерному“ параметру — частоте. На самом деле получаемые нами разложения всегда являются разложениями по некоторым безразмерным параметрам, которые в каждом частном случае можно было бы выделить явно. Принятый нами способ изложения приводит к некоторым формальным упрощениям при выводе формул.

Излагая решение задачи, мы не касаемся истории вопроса. Эти сведения помещены в конце книги в библиографическом комментарии.

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД

В настоящей главе лучевой метод изложен для волнового уравнения.

Основные результаты этой главы не зависят от числа измерений пространства. Задачи, рассмотренные в следующих главах, относятся либо к плоскому (гл.2,3,4,5), либо к трехмерному (гл.6) случаю. Для определенности ограничимся здесь рассмотрением трехмерного случая.

§ I. Исходные формулы лучевого метода в скалярном случае

Рассмотрим волновое уравнение с переменной бесконечно дифференцируемой скоростью:

$$\frac{1}{c^2(M)} W_{tt} - \Delta W = 0, \quad (I.1)$$

$$M = M(x, y, z), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c(M) > 0.$$

Предположим, что

$$W = e^{-i\omega t} u(M, \omega). \quad (I.2)$$

Тогда функция $u(M, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)} \right) u = 0, \quad (I.3)$$

которое при $\frac{\omega^2}{c^2(M)} = k^2 = \text{const}$ называется уравнением Гельмгольца.

Будем искать решение уравнения (I.3) в следующем виде:

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(M) e^{i\omega r(M)}}{(-i\omega)^{s+\gamma}}, \quad \gamma = \text{const}, \quad (-i)^{s+\gamma} = e^{-\frac{\pi}{2}(s+\gamma)i}. \quad (I.4)$$

Разложение (I.4) в той форме, в какой оно записано, представляет собой разложение по размерному параметру — обратным степеням частоты. На самом деле (I.4) есть разложение по степеням малого безразмерного параметра, в который наряду с обратной степенью частоты входят геометрические и другие характеристики конкретной задачи.

Преимущество записи (I.4) состоит в том, что она позволяет в наиболее простой форме, не осложненной конкретными деталями, учесть и использовать специфику поведения волнового поля на высоких частотах для целого класса задач. Введение $(-i)^{s+l}$ в знаменатель не играет здесь принципиальной роли и сделано для некоторых формальных упрощений.

Подставим (I.4) в уравнение (I.3) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях $1/\omega$. Главный член имеет вид

$$\left(\frac{1}{-i\omega}\right)^l \omega^2 u_0(M) \left(\frac{1}{c^2(M)} - (\nabla\tau)^2\right).$$

Считая, что $u_0(M) \neq 0$, получим

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2(M)}. \quad (I.5)$$

Уравнение (I.5) называется уравнением эйконала. Приравнявая нулю коэффициент при $\frac{1}{(-i\omega)^{l+s}}$ ($s=0,1,2,\dots$) и учитывая (I.5), получаем

$$2\nabla\tau \nabla u_s + u_s \Delta\tau = \Delta u_{s-1}, \quad s=0,1,2,\dots; \quad u_{-1} = 0. \quad (I.6)$$

Уравнения (I.6) называются уравнениями переноса. Параграфы 2,3 и 4 посвящены решению и исследованию уравнений (I.5) и (I.6).

§ 2. Уравнение эйконала, лучи, волновые фронты

Уравнение эйконала (I.5) в некотором смысле „содержит в себе“ всю геометрическую оптику. Точнее, анализируя это уравнение, мы естественным образом приходим к основным понятиям геометрической оптики.

Рассмотрим функционал

$$\int_{M_0}^M \frac{ds}{c(M)} = \int_{M_0}^M \frac{\sqrt{x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + z_\sigma^2}}{c(M)} d\sigma, \quad (2.1)$$

который будем называть функционалом Ферма. Здесь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ — точки в пространстве (x, y, z) ; $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$, $z = z(\sigma)$ — кривая, их соединяющая; $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma) = \left(\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}\right)$; ds — элемент длины дуги.

В соответствии с установившейся терминологией будем называть экстремальми функционала (2.1) кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_\sigma|} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{r}_\sigma}{|\mathbf{r}_\sigma|} \cdot \frac{1}{c} \right) - \nabla \frac{1}{c} = 0 \quad (\mathbf{r}_\sigma = (x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma)),$$

или
$$\frac{d}{ds} \left(\mathbf{s} \frac{1}{c} \right) - \nabla \frac{1}{c} = 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{r}_\sigma / |\mathbf{r}_\sigma|$ — единичный вектор касательной к экстремали.

Выпустим из точки M_0 по всем направлениям экстремали функционала (2.1). Можно доказать, вводя вблизи M_0 римановы нормальные координаты (см. [5]), что существует некоторая окрестность Ξ точки M_0 , в которой через каждую точку M проходит одна и только одна экстремаль. В этой окрестности выпущенные из точки M_0 экстремали образуют центральное поле (см. [6]).

Пусть теперь
$$\tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c}, \quad (2.3)$$

где интеграл берется по экстремали. Функция $\tau(M, M_0)$ определяется равенством (2.3) в окрестности Ξ точки M_0 , покрытой полем экстремалей. Если точка M переменная, а M_0 фиксирована, то функция $\tau(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению эйконала (1.5). В самом деле, для дифференциала τ , используя формулу для вариации функционала с подвижным концом, получаем

$$d\tau = \frac{x_\sigma}{|\mathbf{r}_\sigma|} \cdot \frac{1}{c} dx + \frac{y_\sigma}{|\mathbf{r}_\sigma|} \cdot \frac{1}{c} dy + \frac{z_\sigma}{|\mathbf{r}_\sigma|} \cdot \frac{1}{c} dz.$$

С другой стороны, $d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz$, поэтому

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz = \frac{x_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c} dx + \frac{y_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c} dy + \frac{z_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c} dz$$

и, в силу независимости dx, dy, dz ,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \tau_x = \frac{x_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \tau_y = \frac{y_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \tau_z = \frac{z_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|} \cdot \frac{1}{c},$$

или
$$\nabla \tau = \frac{1}{c} \cdot \frac{\mathbf{r}_{\sigma}}{|\mathbf{r}_{\sigma}|}. \quad (2.4)$$

Из этой формулы следует параллельность $\nabla \tau$ и экстремали функционала Ферма. Приравнявая квадраты длин векторов, стоящих слева и справа в равенстве (2.4), получаем уравнение эйконала:

$$(\nabla \tau)^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{c^2}. \quad (2.5)$$

Можно и несколько иначе строить решения уравнения (2.5). Пусть M_0 пробегает некоторую поверхность S . Из каждой точки поверхности S в направлении нормали выпустим экстремаль функционала Ферма и определим τ формулой (2.3). Для функционала (2.1) условия трансверсальности совпадают с условиями ортогональности (см. [6]), поэтому

$$d\tau = \frac{1}{c|\mathbf{r}_{\sigma}|} (x_{\sigma} dx + y_{\sigma} dy + z_{\sigma} dz),$$

откуда опять следует формула (2.4) и, следовательно, — уравнение эйконала (2.5).

Поверхности $\tau = \text{const}$ согласно общепринятой терминологии будем называть волновыми фронтами, а экстремали функционала Ферма — лучами. Только что описанное построение функции τ есть восстановление волнового фронта $t = \tau$ по его положению при $t = 0$ (можно, разумеется, точно так же построить волновой фронт и по его положению при $t = t_0$, $t_0 = \text{const} \neq 0$).

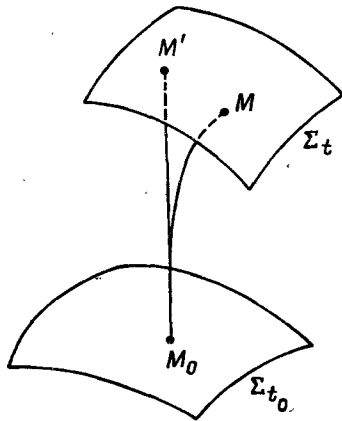


Рис. 1.

Ортогональность вектора $\nabla \tau$ поверхности $\tau = \text{const}$ и формула (2.4) показывают, что лучи ор-

тогональными волновым фронтам.

В учебниках физики волновой фронт обычно определяется как поверхность постоянной фазы, что хорошо согласуется с данным выше определением. В самом деле, при $\omega \rightarrow \infty$ из формул $W = e^{-i\omega t}$ и (1.4) получаем

$$W \sim e^{-i\omega(t-\tau(M))} \frac{u_0(M)}{(-i\omega)^k} \quad (2.6)$$

фаза поля W постоянна на движущихся поверхностях $t - \tau(M) = C = \text{const}$, т.е. при фиксированном t поверхности постоянной фазы — это поверхности, где постоянна функция $\tau(M)$. Построим поверхность волнового фронта в момент времени t . Для этого (рис.1) из каждой точки M_0 поверхности Σ_{t_0} выпустим луч, перпендикулярный этой поверхности и направленный в сторону возрастания функции τ . Продолжим каждый из выпущенных лучей до такой точки M , что интеграл $\int_{M_0}^M \frac{ds}{c}$, вычисленный вдоль луча, принимал бы для всех лучей одно и то же значение, равное $t - t_0$. Геометрическое место точек M , определяемое равенством

$$\int_{M_0}^M \frac{ds}{c} = t - t_0, \quad (2.7)$$

дает положение нового волнового фронта Σ_t в момент времени t (т.е. поверхности $\tau(M) = t - C$).

Резюмируя, можно сказать, что волновые фронты распространяются вдоль лучей, оставаясь все время ортогональными к этим лучам. Это хорошо согласуется с физическим понятием лучей как линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. Скорость волнового фронта в точке M_0 при $t = t_0$ естественно определить как предел

$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|M_0 M'|}{t - t_0}$, где $|M_0 M'|$ — длина отрезка нормали к Σ_{t_0} , восстановленной в точке M_0 и продолженной до пересечения в точке M' с Σ_t (см. рис.1). В силу ортогональности луча $M_0 M$ к Σ_{t_0} длина $|M_0 M|$ луча $M_0 M$ с точностью до малых высшего порядка совпадает с длиной отрезка $M_0 M'$. Из формулы (2.7) легко получаем

$$\frac{1}{c(M_0)} |M_0 M| \sim t - t_0, \quad \text{откуда}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|M_0 M'|}{t - t_0} = c(M_0),$$

т.е. $c(M_0)$ - скорость волнового фронта в точке M_0 .

§ 3. Лучевые координаты

Чтобы получить решение уравнений (1.6), введем специальную систему координат, естественно связанную с лучами и волновыми фронтами. Рассмотрим семейство всех лучей, берущих свое начало в некоторой фиксированной точке M_0 (см. § 2), т.е. центральное поле лучей. За параметр σ , определяющий точки на луче, можно взять эйконал τ :

$$\tau = \tau(M, M_0) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c}. \quad (3.1)$$

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ ($\mathbf{r} = (x, y, z)$) - параметрическое уравнение луча. Очевидно, что длина вектора

$$\frac{1}{c(M_0)} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right|_{M_0} = \mathbf{s}_0$$

равна единице. Задав вектор \mathbf{s}_0 , мы однозначно определяем луч $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, выходящий из M_0 , а чтобы задать \mathbf{s}_0 , достаточно задать определяющие его два параметра α, β , например, сферические координаты конца вектора \mathbf{s}_0 на единичной сфере.

Итак, в окрестности точки M_0 определена система координат α, β, τ : задав α, β , определяем луч; задав τ , находим точку на луче. Таким образом, каждая точка $M(x, y, z)$ есть однозначная функция α, β, τ :

$$x = x(\alpha, \beta, \tau), \quad y = y(\alpha, \beta, \tau), \quad z = z(\alpha, \beta, \tau),$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau). \quad (3.2)$$

Можно доказать, что в некоторой окрестности M_0 параметры α, β и τ - однозначные функции x, y, z (см. на стр. 7 абзац, предшествующий формуле (2.3)).

В случае нецентрального поля лучей также можно ввести аналогичную систему координат. Пусть Σ - волновой фронт, на котором $\tau = \tau_0 = \text{const}$. Пусть α и β - параметры, определяющие точки на Σ . Из каждой точки $M_0 \in \Sigma$ проведем луч, перпендикулярный Σ в точке M_0 . Точки на луче будем характеризовать величиной эйконала в соответствии с формулой (3.1). Формула (3.2) определяет опять систему криволинейных координат (теперь уже в окрестности Σ). Здесь α, β - координаты точки $M_0 \in \Sigma$, в точке M на луче $\tau = \tau_0 + \int_{M_0}^M ds/c$, $\tau_0 = \text{const}$. С одной стороны Σ следует всегда брать знак "+", с другой - знак "-".

Координаты α, β, τ как в случае центрального, так и в случае нецентрального поля называются лучевыми координатами. Формула (3.2) при фиксированных параметрах α и β определяет луч, а при фиксированном τ (α, β произвольны) - волновой фронт. Векторы \mathbf{r}_α и \mathbf{r}_β лежат в касательной плоскости к волновому фронту, поэтому \mathbf{r}_α и \mathbf{r}_β перпендикулярны \mathbf{r}_τ :

$$(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) = 0.$$

Кроме того, $|\mathbf{r}_\tau| = c(M)$. Аналогично строятся лучевые координаты и в плоском случае. Здесь, чтобы охарактеризовать луч, достаточно задать один параметр α , и переход от координат α, τ к декартовым координатам в векторной форме запишется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \tau).$$

Вернемся к трехмерному случаю. Введем понятие лучевой трубки. Лучевой трубкой называется совокупность лучей, отвечающих параметрам α, β , меняющимся в бесконечно малом прямоугольнике на плоскости α, β :

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + d\alpha; \quad \beta_0 < \beta < \beta_0 + d\beta.$$

Площадь нормального поперечного сечения лучевой трубки равна $J d\alpha d\beta$, причем

$$J = |[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]|,$$

где $[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]$ - векторное произведение векторов \mathbf{r}_α и \mathbf{r}_β .

Нетрудно показать, что $J = \frac{1}{c} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \right|$, где $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)}$ - якобиан перехода от декартовых координат x, y, z к лучевым α, β, τ . В самом деле, пользуясь правилом умножения определителей, получаем

$$\left(\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \right)^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) \\ (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) \\ (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\beta) & (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\tau) \end{vmatrix}.$$

Искомое выражение для J теперь легко следует из равенств:

$$(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\tau) = 0, \quad (\mathbf{r}_\tau, \mathbf{r}_\tau) = c^2,$$

$$J^2 = ([\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta], [\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \\ (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\alpha) & (\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) \end{vmatrix}.$$

Поле лучей при выполнении эквивалентных друг другу неравенств $J \neq 0$ и $\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \tau)} \neq 0$ называется регулярным.

Величина J играет важную роль в дальнейшем. Чем больше J , тем больше расходятся лучи; поэтому J называют расходимостью поля лучей или просто расходимостью.

В плоском случае аналогом лучевой трубки является совокупность лучей $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + d\alpha$, а аналогом величины J - длина вектора \mathbf{r}_α , т.е. $J = |\mathbf{r}_\alpha|$. Если $c = \text{const}$, то уравнения (2.2) дадут $\mathbf{r} = \alpha \mathbf{a} + \mathbf{b}$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} - постоянные векторы, т.е. в случае $c = \text{const}$ лучи являются прямыми линиями.

Обратимся к плоскому случаю. Пусть (рис.2) ρ - радиус кривизны волнового фронта $\tau = \tau_0$ в точке $M = M_0$. Лучи при $c(M) = c = \text{const}$ будут просто нормальными к кривой $\tau = \tau_0$. Очевидно, что радиус кривизны волнового фронта $\tau = \tau_1$ в точке M_1 будет $\rho + c(\tau_1 - \tau_0)$. Из подобия двух бесконечно тонких треугольников с основаниями $d\Sigma$ и $d\Sigma_0$ и вершиной O (O - центр кривизны), легко получаем

$$\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} = J = \frac{\rho + c(\tau_1 - \tau_0)}{\rho},$$

здесь ρ - главный радиус кривизны волнового фронта $\tau = \tau_0$ в точке M_0 , M_1 - точка на переосечении волнового фронта $\tau = \tau_1$ и луча, выходящего из точки M_0 , $c = \text{const}$ - скорость распространения волны.

Используя понятие лучевой трубки, выведем важную для дальнейших рассмотрений формулу для $\Delta\tau$. Воспользуемся равенством (см. [7])

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \Delta\tau = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{|\Omega|} \iint_S \frac{\partial \tau}{\partial n} dS, \quad (3.3)$$

где Ω - объем, стягивающийся в точку M , $\partial\tau/\partial n$ - нормальная производная от τ ; интеграл берется по поверхности S , ограничивающей объем Ω . За Ω возьмем объем, образованный лучевой трубкой и двумя бесконечно близкими волновыми фронтами

$\tau(M) = \tau = \text{const}$ и $\tau(M) = \tau + d\tau = \text{const}$.

На боковой поверхности лучевой трубки $\partial\tau/\partial n = 0$, на торцах $\tau = \text{const}$ и $\tau + d\tau = \text{const}$ имеем $\partial\tau/\partial n = \pm 1/c$, где c - скорость в соответствующей точке. Получаем

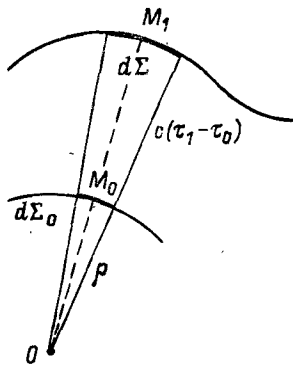


Рис.2.

$$\iint_S \frac{\partial \tau}{\partial n} dS \approx \frac{1}{c} \int d\alpha d\beta \Big|_{\tau+d\tau} - \frac{1}{c} \int d\alpha d\beta \Big|_{\tau}. \quad (3.4)$$

В силу ортогональности лучевой трубки волновому фронту

$$|\Omega| = \int d\alpha d\beta dn = \int d\alpha d\beta \frac{dn}{d\tau} d\tau \approx \int c d\alpha d\beta d\tau, \quad (3.5)$$

dn - высота параллелепипеда Ω . Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3), находим

$$\Delta\tau \approx \frac{d\alpha d\beta \left(\frac{J}{c} \Big|_{\tau+d\tau} - \frac{J}{c} \Big|_{\tau} \right)}{d\alpha d\beta d\tau c J}, \quad \text{откуда} \quad \Delta\tau = \frac{1}{cJ} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right). \quad (3.6)$$

Производная здесь берется вдоль луча. Вывод формулы (3.6) вполне аналогичен классическому выводу выражения для оператора Лапласа в произвольных ортогональных координатах (см. [7]).

В плоском случае формула (3.6) также имеет место.

§ 4. Основные рекуррентные формулы лучевого метода

Обратимся к уравнениям (1.6). Их удобнее всего записать в лучевых координатах. Рассмотрим случай $s=0$:

$$2 \nabla u_0 \nabla \tau + u_0 \Delta \tau = 0 . \quad (4.1)$$

Преобразуем выражение $2 \nabla \tau \nabla u_0$:

$$2 \nabla \tau \nabla u_0 = 2 \frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|} \nabla u_0 \cdot |\nabla \tau| = 2 \frac{du_0}{ds} \cdot \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \frac{du_0}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_0}{d\tau} .$$

Здесь du_0/ds и $du_0/d\tau$ — производные вдоль луча. Уравнение (4.1) с учетом (3.6) запишется в виде

$$\frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_0}{d\tau} + \frac{u_0}{Jc} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) = 0 . \quad (4.2)$$

Интегрируя, получаем

$$u_0(M) = \psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{c/J} , \quad (4.3)$$

причем функция $\psi_0(\alpha, \beta)$ играет роль постоянной интегрирования. Она зависит только от луча и из уравнения (4.1) не определяется. Формула (4.3) имеет отчетливый физический смысл, к выяснению которого мы и переходим. Вернемся к динамическому уравнению (1.1), (1.2):

$$\frac{1}{c^2(M)} W_{tt} - \Delta W = 0 , \quad W(M, t) = e^{-i\omega t} u(M) .$$

Во всех случаях, когда волновой процесс описывается уравнением (1.1), выражение

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c^2(M)} |W_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2 \right) \text{const}$$

имеет смысл плотности энергии (const зависит от выбора единиц измерения энергии).

Рассмотрим лучевую трубку, определенную в предыдущем параграфе. Пусть $d\Omega_0$ - объем, вырезаемый двумя бесконечно близкими волновыми фронтами $\tau(M)=\tau_0=\text{const}$, $\tau(M)=\tau+\tau_0=\text{const}$. Если это положение волновые фронты занимали в момент времени t_0 , то в момент t они будут занимать положение

$$\tau(M)=\tau_0+t-t_0=\text{const}, \quad \tau(M)=\tau_0+t-t_0+d\tau=\text{const}. \quad (4.4)$$

Пусть $d\Omega_1$ - объем, который вырежут волновые фронты (4.4) из лучевой трубки. Потребуем, чтобы энергия волнового поля в объеме $d\Omega_0$ совпала с его энергией в объеме $d\Omega_1$ (с точностью до главных членов).

Подставляя в равенство

$$\left(\frac{1}{2c^2(M)} |W_z|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2 \right)_{M_0} d\Omega_0 = \left(\frac{1}{2c^2(M)} |W_z|^2 + \frac{1}{2} |\nabla W|^2 \right)_M d\Omega_1$$

(где M_0 - точка с лучевыми координатами $\alpha_0, \beta_0, \tau_0$; M - точка с лучевыми координатами α, β, τ , причем $\tau=\tau_0+t-t_0$) выражение (2.6), т.е.

$$W \sim e^{-i\omega(t-\tau)} u_0 \frac{1}{(-i\omega)^{\gamma}},$$

получаем с точностью до главных членов по ω ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\frac{\omega^{2-2\gamma}}{c^2(M_0)} |u_0(M_0)|^2 d\Omega_0 = \frac{\omega^{2-2\gamma}}{c^2(M)} |u_0(M)|^2 d\Omega_1.$$

Заменяя $d\Omega_0$ и $d\Omega_1$ выражениями $c J|_{M_0} d\alpha d\beta d\tau$ и $c J|_M d\alpha d\beta d\tau$, придем к формуле

$$|u_0(M)| = |u_0(M_0)| \sqrt{\frac{c(M)}{c(M_0)}} \sqrt{\frac{J(M_0)}{J(M)}},$$

эквивалентной формуле (4.3). Таким образом, формула (4.3) означает, что энергия внутри бесконечно малого объема $d\Omega_0$ при движении его с волновым фронтом в первом приближении не меняется. Формула (4.3) показывает, в частности, как расходимость лучей, т.е. величина J , влияет на интенсивность поля.

Вернемся к интегрированию уравнений переноса (1.6). Пусть теперь $s > 0$. Записывая уравнение (1.6) при $s > 0$ в лучевых

координатах (см. вывод формулы (4.2)), имеем

$$\frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_s}{d\tau} + u_s \frac{1}{Jc} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) = \Delta u_{s-1} .$$

Умножая обе части этого равенства на интегрирующий множитель $(c^2/2)\sqrt{J/c}$, получаем

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sqrt{\frac{J}{c}} u_s \right) = \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{J}{c}} \Delta u_{s-1} , \quad \text{откуда}$$

$$u_s(M) = \sqrt{\frac{c}{J}} \left(\Psi_s(\alpha, \beta) + \int_{\tau(\alpha, \beta)}^{\tau} \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{J}{c}} \Delta u_{s-1} d\tau \right) , \quad (4.5)$$

(здесь интеграл берется по лучу, $\Psi_s(\alpha, \beta)$ и $\tau(\alpha, \beta)$ — произвольные функции). Таким образом, решение уравнений переноса (1.6) имеет вид (4.3) и (4.5). Оно определяется последовательностью функций Ψ_0, Ψ_1, \dots , для нахождения которых нужна дополнительная информация о функции $u(M, \omega)$.

Формулы (4.3) и (4.5) лежат в основе применений лучевого метода к нахождению коротковолновой асимптотики конкретных задач.

§ 5. Отражение волны, заданной лучевым разложением

Рассмотрим задачу об отражении от некоторой гладкой выпуклой поверхности S , ограничивающей область Ω , волны, заданной лучевым разложением вида (1.4):

$$u_{\text{пад}} \sim e^{i\omega\tau_{\text{пад}}(M, M_0)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^{\text{пад}}(M)}{(-i\omega)^{s+\gamma}} , \quad \gamma > 0 ,$$

где $u_s^{\text{пад}}$ — функции (4.5), а $\tau_{\text{пад}}$ — эйконал (2.3)–(2.5). Требуется найти функцию $u(M, M_0, \omega)$ (точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ лежат вне области Ω), удовлетворяющую уравнению (1.3) и граничному условию $u|_S = 0$, где

$$u(M, M_0, \omega) = e^{i\omega\tau_{\text{пад}}(M, M_0)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^{\text{пад}}(M)}{(-i\omega)^{s+\gamma}} + u_{\text{отр}} . \quad (5.1)$$

Подставляя (5.1) в уравнение (1.3), получаем, что в главных

членах (при $\omega \rightarrow \infty$) $u_{\text{отр}}$ тоже следует искать в виде лучевого ряда

$$u_{\text{отр}} \sim e^{i\omega\tau_{\text{отр}}(M, M_0)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s^{\text{отр}}(M)}{(-i\omega)^{s+\gamma}},$$

причем $u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}|_S = 0$. Из граничного условия тогда имеем

$$\tau_{\text{отр}}(M, M_0)|_{M \in S} = \tau_{\text{пад}}(M, M_0)|_{M \in S}. \quad (5.2)$$

Задача нахождения решения уравнения (1.5) при условии (5.2) есть задача Коши для уравнения эйконала. Это уравнение имеет два решения, так как оно второй степени. Одно решение $\tau = \tau_{\text{пад}}(M, M_0)$ соответствует падающей волне, другое - отраженной.

Построим функцию $\tau_{\text{отр}}$, отвечающую отраженной волне. Как следует из (5.2), проекции $\nabla\tau_{\text{пад}}$ и $\nabla\tau_{\text{отр}}$ на S одинаковы. В силу уравнения эйконала (2.5), условия (5.2) и того, что на S $\nabla\tau_{\text{пад}} \neq \nabla\tau_{\text{отр}}$ (иначе $\tau_{\text{отр}} = \tau_{\text{пад}}$, и мы получили бы снова падающую волну, а не отраженную), имеем $\partial\tau_{\text{отр}}/\partial n = -\partial\tau_{\text{пад}}/\partial n$. (Здесь $\partial/\partial n$ - дифференцирование по нормали к S). Таким образом, проекции $\nabla\tau_{\text{отр}}$ на касательную и нормаль к S определены, следовательно, однозначно найден $\nabla\tau(M, M_0)$ на S . Мы пришли к известному закону геометрической оптики: на S направление отраженной волны определяется по закону - угол падения равен углу отражения. В соответствии с этим и строим поле отраженных лучей.

Проверим, что построенная функция $\tau = \tau_{\text{отр}}(M, M_0)$ действительно удовлетворяет уравнению эйконала. Вычислим

$$d\tau(M, M_0) = d \int_{M_0, s_0, M} \frac{ds}{c(M)} = d \int_{M_0, s_0} \frac{ds}{c(M)} + d \int_{s_0, M} \frac{ds}{c(M)}, \quad s_0 \in S.$$

По формуле для вариации функционала с подвижными концами

$$d\tau(M, M_0) = \frac{1}{c} (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2, \delta\mathbf{r}) + \frac{1}{c} (l_{2x}\delta x + l_{2y}\delta y + l_{2z}\delta z),$$

здесь \mathbf{l}_1 и $\mathbf{l}_2 = (l_{2x}, l_{2y}, l_{2z})$ - единичные векторы, направленные вдоль лучей M_0, s_0 и s_0, M соответственно, $\delta\mathbf{r} =$

$= (\delta x, \delta y, \delta z)$ - бесконечно малое смещение вдоль S .

Из того, что падающий и отраженный лучи образуют одинаковые углы с S , следует, что $(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2, \delta \mathbf{r})|_{S_0} = 0$, т.е.

$$d\tau(M, M_0) = \frac{1}{c} (l_{2x} dx + l_{2y} dy + l_{2z} dz) = \tau_x dx + \tau_y dy + \tau_z dz .$$

Окончательно

$$(\nabla \tau)^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \frac{1}{c^2} |\mathbf{l}|^2 = \frac{1}{c^2} ,$$

следовательно, функция $\tau_{\text{отр}}$ действительно удовлетворяет уравнению эйконала.

ЗАДАЧА О КАУСТИКЕ

В данной главе методика пограничного слоя иллюстрируется на примере хорошо исследованной задачи о волновом поле в окрестности неособого участка каустики. Выбор этой сравнительно простой задачи позволяет, с одной стороны, избежать некоторых технических осложнений, с другой — продемонстрировать основные приемы этой методики.

§ 1. Лучевое разложение в окрестности каустики

Пусть волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца с переменной скоростью:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)}\right) u = 0, \quad c(M) \in C^\infty. \quad (1.1)$$

Мы рассмотрим для простоты плоский случай

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M = (x, y), \quad u = u(x, y). \quad (1.2)$$

Пусть поле лучей имеет огибающую, другими словами, каустику. Будем считать, что каустика — достаточно гладкая кривая, и лучи везде имеют лишь первый порядок касания.

Пусть далее $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \tau)$ — параметрическое уравнение луча, соответствующего параметру α ($\mathbf{r} = (x, y)$), τ — эйконал. Мы будем считать, что параметр α , характеризующий луч, выбран так, что на каустике $\tau = \alpha$ (см. [8, гл.2]). Через каждую точку вблизи каустики проходит два луча. Лучам, приходящим к каустике (уходящим от каустики), соответствует эйконал, который мы будем обозначать τ_- (соответственно τ_+).

Задачу о волновом поле вблизи каустики поставим так: по волне, приходящей к каустике и имеющей лучевое разложение

$$u_- \sim e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^-(M)}{(-i\omega)^j}, \quad (1.3)$$

определить волну u_+ , уходящую от каустики

$$u_+ \sim e^{i\omega\tau_+} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^+(M)}{(-i\omega)^j}, \quad (1.4)$$

и волновое поле в окрестности каустики. Наши рассмотрения здесь будут относиться как к случаю приходящей, так и уходящей волн. Соответствующие индексы мы поэтому опускаем.

Изучим прежде всего аналитический характер коэффициентов лучевого разложения при малых $\tau - \alpha$. Запишем основные рекуррентные соотношения лучевого метода в координатах τ , α :

$$u_j = \sqrt{\frac{c}{J}} \left[\psi_j(\alpha) + \int \sqrt{\frac{J}{c}} \cdot \frac{c^2}{2} \Delta u_{j-1} d\tau \right]. \quad (1.5)$$

Здесь $\psi_j(\alpha)$ - дифракционные коэффициенты, которые в случае приходящей волны считаются известными, в случае уходящей подлежат определению; J - геометрическая расходимость:

$J = |\mathbf{r}_\alpha| = (\tau - \alpha) J_1(\alpha, \tau)$, где $J_1(\alpha, \tau)$ - гладкая положительная функция (нетрудно доказать, что $J_1(\alpha, \tau)|_{\tau=\alpha} = |\mathbf{r}_{\alpha\tau}|_{\tau=\alpha} > 0$). Выражение для u_0 имеет вид

$$u_0 = \sqrt{\frac{c}{J}} \psi_0(\alpha) = \sqrt{\frac{c}{|\tau - \alpha| J_1}} \psi_0(\alpha) \sim |\tau - \alpha|^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^0(\alpha) (\tau - \alpha)^k. \quad (1.6)$$

Обратимся к формулам для u_j . Выражение для оператора Лапласа (1.2) в координатах τ , α имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{cJ} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{J}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} (\dots) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{c}{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\dots) \right]. \quad (1.7)$$

Из формул (1.5)-(1.7) легко следует, что

$$u_j \sim |\tau - \alpha|^{-1/2 - 3j} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^j(\alpha) + \dots) (\tau - \alpha)^k. \quad (1.8)$$

Многоочие означает, что при интегрировании в формулах (1.5) могут появляться логарифмы, и коэффициенты при $(\tau - \alpha)^j$, вообще говоря, имеют вид

$$\alpha_{k_0}^j(\alpha) + \alpha_{k_1}^j(\alpha) \ln|\tau-\alpha| + \dots + \alpha_{k_s}^j \ln^s|\tau-\alpha| .$$

(Заметим, забегая вперед, что на самом деле логарифмические члены в рядах (1.8) отсутствуют). То, что при переходе от j к $j+1$ в знаменателе (см. формулу (1.8)) добавляется $|\tau-\alpha|^3$, нетрудно предугадать: оператор Лапласа (1.7) содержит два дифференцирования по α , и еще два раза приходится делить на J , тем самым в знаменатель идет $|\tau-\alpha|^4$. Интегрирование в формуле (1.5) понижает порядок сингулярности на единицу.

§ 2. Аналитический характер эйконалов приходящей и уходящей волн вблизи каустики *)

Для дальнейших рассмотрений большое значение имеют рассмотрения эйконала в естественных для окрестности каустики координатах s, n (s - длина дуги каустики, отмеряемая вдоль нее от некоторой фиксированной точки $s=0$, n - расстояние до каустики. В освещенной области $n > 0$, в зоне тени $n < 0$).

Запишем уравнение эйконала в координатах s, n :

$$H = \frac{1}{2} \left[c^2 (\nabla\tau)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left\{ c^2 \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial n} \right)^2 + \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial s} \right)^2 \right] - 1 \right\} = \quad (2.1)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \left\{ c^2 \left[p^2 + \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-2} q^2 \right] - 1 \right\} = 0, \quad p = \frac{\partial\tau}{\partial n}, \quad q = \frac{\partial\tau}{\partial s} .$$

Система дифференциальных уравнений характеристик уравнения (2.1) (т.е. лучей) имеет вид

$$\frac{dn}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = p \frac{\partial H}{\partial p} + q \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{d\sigma} = - \frac{\partial H}{\partial n}, \quad \frac{dq}{d\sigma} = - \frac{\partial H}{\partial s}. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что $d\tau/d\sigma = 1$, и мы можем просто

*) Аналитический характер эйконала вблизи каустики был изучен Д.Людвигом [9] способом, аналогичным нашему, но более сложным в деталях, см. также [10] и [8, гл.2].

положить $\tau \equiv \sigma$. Далее при $\tau = \alpha$ $p = \partial\tau / \partial n = 0$ (так как лучи параллельны $\nabla\tau$ и касаются каустики), поэтому

$$\left. \frac{dp}{d\tau} \right|_{\tau=\alpha} = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial c / \partial n}{c} = \frac{1}{\rho} > 0 \quad (2.3)$$

(ρ - эффективный радиус кривизны, см [8, гл.4]). Из (2.2), (2.3) и равенства $n|_{\tau=\alpha} = 0$ следует

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= c^2 p = \frac{c^2}{\rho} (\tau - \alpha) [1 + O(\tau - \alpha)], \\ n &= \frac{(\tau - \alpha)^2}{2} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \Big|_{\tau=\alpha} [1 + O(\tau - \alpha)], \end{aligned}$$

откуда при $\tau > \alpha$ (для уходящей волны)

$$\sqrt{n} = (\tau - \alpha) \sqrt{\frac{c^2}{2\rho}} [1 + O(\tau - \alpha)], \quad (2.4)$$

при $\tau < \alpha$ (для приходящей волны)

$$-\sqrt{n} = (\tau - \alpha) \sqrt{\frac{c^2}{2\rho}} [1 + O(\tau - \alpha)]. \quad (2.5)$$

Правые части в формулах (2.4) и (2.5) совпадают.

Пользуясь формулами (2.4) и (2.5), нетрудно показать, что функциональный определитель $D(\sqrt{n}, s) / D(\tau, \alpha)$ как в случае приходящей, так и уходящей волн отличен от нуля, поэтому

$$\tau = f(\pm\sqrt{n}, s), \quad (2.6)$$

"-" (соответственно "+") относится к случаю приходящей (соответственно уходящей) волны.

Функция (2.6) удовлетворяет условию $\partial\tau / \partial n|_s = 0$, поэтому коэффициенты разложения f по степеням \sqrt{n} имеют вид

$$f = A_0(s) + A_1(s)(\sqrt{n})^3 + O(n^2). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.1), легко находим

$$A_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad A_1(s) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{c_0^2 \rho}} > 0, \quad c_0 = c(s, 0). \quad (2.8)$$

§ 3. Лучевые ряды в координатах s , n и s , ν

Переходя в формулах (1.8) к координатам (s, n) и пользуясь формулами (2.4), (2.5), получаем, что

$$u_j \sim n^{-4-\frac{1}{2}j} \sum_{k=0}^{\infty} (b_k^j(s) + \dots) n^{k/2}. \quad (3.1)$$

Для того чтобы члены лучевого ряда (1.3) или (1.4) убывали, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$n \geq \text{const} \cdot \omega^{-2/3+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.2)$$

ибо тогда (см. формулу (3.1))

$$\frac{u_j}{(-i\omega)^j} \sim O(\omega^{-j} n^{-1/4-3/2j}) = O(\omega^{1/6-\varepsilon/4-3\varepsilon j/2}). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) показывает, что в пограничном слое вблизи каустики $|n| \leq \text{const} \cdot \omega^{-2/3}$ волновое поле имеет специфический "нелучевой" характер.

Для рассмотрения пограничного слоя $|n| \leq \text{const} \cdot \omega^{-2/3}$ и примыкающих к нему областей сделаем замену переменной n на ν :

$$\nu = \omega^{2/3} n \sqrt{\frac{2}{c_0^2 D}} = \omega^{2/3} n \eta(s), \quad (3.4)$$

(переход к "растянутым" переменным - характерная черта методики пограничного слоя, множитель $\eta(s)$ делает переменную ν безразмерной и ведет к некоторым важным формальным упрощениям). Лучевое разложение примет вид ^{*})

$$u \sim \exp[l\omega\tau_0(s) \pm i\frac{2}{3}\nu^{3/2} + \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j(s)\nu^{(j+3)/2}] \omega^{-j/3} \times \quad (3.5)$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega^{-1/6+j/8}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_j^k(s) \frac{\nu^{j/2}}{\nu^{1/4+3/2k}} \right\} + \dots \right\}, \quad \tau_0(s) = \tau|_{n=0},$$

^{*}) Коэффициент при ν в формуле (3.5) выбран так, что важное слагаемое $\pm 2/3 \nu^{3/2} i$ не имеет множителя, содержащего s .

Здесь многоточием заменены члены, содержащие $\ln^k \omega$, $k > 0$ - целое. Эти члены отсутствуют, если в разложении $u_j(s, n)$ (см. (3.1)) нет членов вида $\ln^k n$. Пусть теперь

$$|\nu| \leq \text{const} \cdot \omega^\varepsilon, \quad \varepsilon < 1/6. \quad (3.6)$$

Тогда в (3.5) выражение $e^{\sum_{i=1}^{\infty} \dots}$ может быть переразложено по степеням $\omega^{-1/3}$. После соответствующих преобразований получаем

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{V_j(s, \nu) e^{i2/3\nu^{3/2}i}}{\omega^{j/3-1/6}} + \dots \right). \quad (3.7)$$

Многоточием заменены члены, содержащие $\ln^k \omega$ (если такие члены существуют). Выражения $V_j(s, \nu)$ представляют собой ряды вида

$$V_j(s, \nu) \sim \sum_{k=-M_j}^{\infty} W_{k/2-1/4}^j, \quad (3.8)$$

$$W_{k/2-1/4}^j = \frac{W_{0k}^j(s) + W_{1k}^j(s) \ln \nu + W_{2k}^j(s) \ln^2 \nu + \dots}{\nu^{1/4+k/2}}. \quad (3.9)$$

Числитель в формуле (3.9) - полином по $\ln \nu$.

В случае, если выполнены условия (3.2), (3.6), выражение (3.7) будет формально удовлетворять уравнению (1.1). Отсюда можно легко вывести степень неопределенности в разложениях (3.7). А именно имеет место "лемма единственности".

Лемма. Все коэффициенты W_{ik}^j разложений (3.8) определяются однозначно требованиями

1) правая часть формулы (3.7) - формальное решение уравнения (1.1);

2) заданы коэффициенты W_{00}^j (см. (3.9)).

Доказательство не зависит от того, с приходящей или уходящей волной мы имеем дело.

Запишем уравнение (1.1), (1.2) в координатах (s, n) :

$$\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0. \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) ряд (3.7), получаем для рядов V_j (см. (3.8)) рекуррентную систему соотношений

$$L_0 \tilde{V}_0 = 0, \quad L_0 \tilde{V}_1 + L_1 \tilde{V}_0 = 0, \dots, \quad (3.11)$$

где $\tilde{V}_j = e^{\pm 2i s \nu^{3/2} t} V_j$. Здесь, как в случае приходящей, так и уходящей волн $L_0 = \partial^2 / \partial \nu^2 + \nu$ - оператор Эйри ^{*)}, а L_j - дифференциальные операторы по ν и s , причем коэффициенты этих операторов - полиномы по ν . Нетрудно подсчитать, что максимальная степень этих полиномов в случае оператора L_j не превышает j . Решение j -го уравнения из рекуррентной системы (3.11) определено с точностью до решения однородного уравнения $L_0 \tilde{V} = 0$, где

$$\tilde{V} = e^{\pm i \frac{2}{3} \nu^{3/2}} \sum_{k=-M}^{\infty} \hat{W}_{-k/2-1/4}, \quad (3.12)$$

$$\hat{W}_{-k/2-1/4} = \frac{W_{0k}(s) + W_{1k}(s) \ln \nu + \dots}{\nu^{k/2+1/4}}.$$

Простой подсчет показывает, что функция $\hat{W}_{-k/2-1/4}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L_0 \tilde{V} \sim \sum_{k=-M}^{\infty} \left[\pm (2\sqrt{\nu}) \hat{W}'_{-k/2-1/4} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \hat{W}_{-k/2-1/4} \right] + \quad (3.13)$$

$$+ \hat{W}''_{-k/2-1/4} \Big] e^{\pm \frac{2}{3} \nu^{3/2} t} \sim 0, \quad \hat{W}_{\frac{M+3}{2}-1/4} = \hat{W}_{\frac{M+2}{2}-1/4} = \hat{W}_{\frac{M+1}{2}-1/4} = 0.$$

Приравнявая в (3.13) старшие члены нулю, получаем

$$2\sqrt{\nu} \hat{W}'_{-k/2-1/4} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \hat{W}_{-k/2-1/4} = 0, \quad k = -M, -M+1, -M+2, \quad \text{или}$$

$$\left(\nu^{1/4} \hat{W}_{-k/2-1/4} \right)' = 0, \quad \hat{W}_{-k/2-1/4} = C(s) \nu^{-1/4}. \quad (3.14)$$

^{*)} Уравнение $L_0 u = 0$ подстановкой $\nu = -x$ сводится к классическому уравнению Эйри, часто встречающемуся в теории распространения волн (см. [1] и [8]).

Поэтому, считая $\hat{W}_{M/2-1/4} \neq 0$, имеем $M=0$ (ибо иначе $\hat{W}_{M/2-1/4}$ имеет степень однородности, противоречащую формуле (3.14)). Из тех же соображений $\hat{W}_{1/4} \equiv 0$, $\hat{W}_{3/4} \equiv 0$. Дальнейшие функции $\hat{W}_{-k/2-1/4}$ найдутся однозначно из равенств

$$\pm \left(2\sqrt{\nu} \hat{W}'_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \hat{W}_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} \right) = \hat{W}''_{-\frac{k+3}{2}-\frac{1}{4}}, \quad \text{или}$$

$$\pm 2\nu^{\frac{1}{4}} \left(\nu^{\frac{1}{4}} \hat{W}_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} \right)' = \hat{W}''_{-\frac{k+3}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Однозначность следует из того, что у всех искомого $\hat{W}_{-k/2-1/4}$ $k > 0$. Логарифмических членов не возникает, и разложение (3.12) с точностью до множителя совпадает с асимптотическим разложением функции $w_1(-\nu)$ или $w_2(-\nu)$ (где w_1, w_2 — функции Эйри) и формально удовлетворяет уравнению $L_0 \tilde{V}_0 = 0$ (см. [8, дополнение 1]).

Лемма единственности доказана.

§ 4. Волновое поле в пограничном слое, окружающем каустику

Будем искать разложение волнового поля в окрестности каустики в виде разложения (см. (3.7))

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(s, \nu)}{\omega^{j/3-1/6}}, \quad (4.1)$$

где $U_j(s, \nu)$ — функции от s, ν , а не разложения (см. (3.7)–(3.9)), только что рассмотренные нами. Очевидно, что U_j будут удовлетворять той же системе рекуррентных соотношений (3.11), что и \tilde{V}_j :

$$L_0 U_0 = 0, \quad L_0 U_1 + L_1 U_0 = 0, \quad \dots \quad (4.2)$$

Рассмотрим задачу о нахождении U_0 . Очевидно, что

$$L_0 U_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \right) U_0 = 0, \quad U_0 \xrightarrow{\nu \rightarrow -\infty} 0. \quad (4.3)$$

Последнее имеет место в силу того, что в зоне тени волновое поле стремится к нулю по мере удаления от каустики. Из (4.3) следует, что

$$U_0 = A_0(s) \mathcal{U}(-\nu) , \quad (4.4)$$

где $\mathcal{U}(-\nu)$ - функция Эйри: $\mathcal{U}(-\nu) \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{2} (-\nu)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}(-\nu)^{3/2}}$.

В освещенной области

$$U_0 \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} A_0(s) \left(e^{\frac{\pi i}{4}} e^{-\frac{2}{3}\nu^{3/2}i} + e^{-\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{2}{3}\nu^{3/2}i} \right) . \quad (4.5)$$

Два слагаемых в (4.5) соответствуют двум волнам: идущей к каустике и уходящей от нее. Волна, идущая к каустике, считается заданной:

$$u_- \sim e^{i\omega\tau_0(s) - \frac{2}{3}\nu^{3/2}i} \frac{W_{00}^{(0)}(s)}{\nu^{1/4} \omega^{-\nu_0}} = \frac{e^{i\omega\tau_0(s) - \frac{2}{3}\nu^{3/2}i}}{\omega^{-1/6} \nu^{1/4}} \sqrt{\frac{D}{2c_0}} \Psi_0^-(\alpha(s)) , \quad (4.6)$$

$d\alpha/ds = 1/c$, а $\Psi_0^-(\alpha(s))$ - дифракционный коэффициент (см. (1.5)). Формулы (4.3) и (4.6) определяют классическую задачу рассеяния для уравнения $L_0 U_0 = 0$. Для ее решения достаточно определить коэффициент $A_0(s)$ (см. (4.4)). Считая, что $\nu \rightarrow \infty$ в (4.5)-(4.6), находим

$$\frac{1}{2} A_0(s) e^{\pi i/4} = \sqrt{\frac{D}{2c_0}} \Psi_0^-(s) ,$$

$$\text{откуда } A_0(s) = 2 \sqrt{\frac{D}{2c_0}} e^{-\pi i/4} \Psi_0^-(s) . \quad (4.7)$$

Из формул (4.4), (4.5), (4.7) и „лучевого“ соотношения

$$u_+ \sim e^{i\omega\tau_+(s) + i\frac{2}{3}\nu^{3/2}i} \sqrt{\frac{D}{2c_0}} \Psi_0^+(s) \quad \text{следует}$$

$$\frac{1}{2} A_0(s) e^{-\pi i/4} = \sqrt{\frac{D}{2c_0}} \Psi_0^+(s) , \quad \Psi_0^+(s) = \Psi_0^-(s) e^{-\pi i/2} .$$

Это соотношение часто выражают словами так: при переходе через каустику фаза волны скачком уменьшается на $\pi/2$.

Если $\nu \gg 1$, то разложения в асимптотический ряд по ν , $\nu \rightarrow +\infty$, функции $e^{i\omega\tau_0} U_0 = e^{i\omega\tau_0} A_0(s) U(-\nu)$ и разложения приходящей и уходящей волн совпадают в силу леммы единственности и того, что эти разложения имеют вид (3.12).

Обратимся к нахождению последующих приближений. Все функции $U_j(s, \nu)$ последовательно находятся из (4.2). Из условий $U_j \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow -\infty$ и того, что для приходящей волны коэффициенты W_{∞}^j известны, для U_j получается неоднородный аналог задачи рассеяния. Далее нетрудно по индукции доказать, что

$$U_j = \Phi_{2j}(s, \nu) U(-\nu) + \Psi_{2j-2}(s, \nu) U'(-\nu), \quad (4.8)$$

где Φ_{2j} и Ψ_{2j-2} — полиномы по ν степеней $2j$ и $2j-2$ соответственно. Это легко следует из того, что максимальная степень по ν коэффициентов полиномов L_j не превышает j . Из этих результатов сразу же следует, что разложения (3.7)–(3.9) не содержат логарифмов (т. е. $W_k^j = W_{2k}^j = \dots = 0$), так как при больших ν в силу леммы единственности выражения (4.8) и \tilde{U}_j (см. (3.11)) имеют одинаковые разложения при $\nu \rightarrow +\infty$, а асимптотика функций вида (4.8) логарифмов не содержит.

Вернемся к рассмотрению членов разложения (4.1). При переходе от j к $j+1$ в числителе дроби $U_j / \omega^{j/3-1/6}$ полиномы Φ_{2j} и Ψ_{2j-2} заменяются на Φ_{2j+2} , Ψ_{2j} , степени которых не превышают $2j$ (см. формулу (4.8)), а в знаменателе добавляется множитель $\omega^{1/3}$. Поэтому при

$$|\nu| \leq \text{const} \cdot \omega^\varepsilon, \quad \varepsilon < 1/6, \quad (4.9)$$

частные суммы $e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^N$ при достаточно большом N дают в уравнении невязку сколь угодно малую по порядку величины. Интересно отметить, что соотношения (4.9) и (3.6) согласованы (этого естественно было ожидать).

Заметим далее, что асимптотика выражений (4.8) состоит из двух разложений:

$$e^{-\frac{2}{3}\nu^{3/2}L} \sum_{h=-4j}^{\infty} \frac{c_k^j}{\nu^{k/2+1/4}} + e^{+2/3\nu^{3/2}L} \sum_{k=-4j}^{\infty} \frac{d_k^j}{\nu^{k/2+1/4}}. \quad (4.10)$$

Разложение, содержащее множитель $e^{\frac{2}{3}\nu^{3/2}i}$, может быть получено из первого (содержащего множитель $e^{-\frac{2}{3}\nu^{3/2}i}$) с помощью следующего формального приема ^{*}): надо аналитически продолжить члены разложения, содержащего $e^{-\frac{2}{3}\nu^{3/2}i}$, вдоль окружности $|\nu|=R$, увеличивая аргумент ν от 0 до 2π .

Слагаемые первого (соответственно второго) разложения в (4.10) после подстановки в (4.1) можно переразложить в лучевое разложение приходящей (соответственно уходящей) волны. Аналитическому продолжению членов асимптотического ряда, которое только что было описано, соответствует (в силу формул (2.4) (2.5) и равенства $\nu = \omega^{2/3} n \eta(s)$) аналитическое продолжение членов лучевого ряда в координатах τ , α вдоль некоторого контура на плоскости комплексной переменной $\zeta = \tau - \alpha$, который начинается с отрицательной части вещественной оси, где идет в нижней полуплоскости и приходит на положительную часть вещественной оси. Таким образом, мы получаем следующий способ нахождения членов лучевого разложения уходящей волны по лучевому разложению приходящей: следует все члены лучевого разложения падающей волны (1.8) продолжить из области, где $\tau < \alpha$, в область, где $\tau > \alpha$, перемещая τ в нижней полуплоскости. Это хорошо известно, (для нестационарного случая см. [11]). Это правило позволяет сравнительно просто находить дифракционные коэффициенты уходящей волны ψ_j^+ по заданным ψ_j^- .

§ 5. Основные формулы

1. Поле приходящей волны в первом приближении:

$$e^{i\omega\tau} \psi_0^-(\alpha) \sqrt{c/\mathcal{L}}, \quad (5.1)$$

^{*} Результат этот верен, поскольку он имеет место для полиномов Φ_{2j} , Ψ_{2j-2} и функции $\nu(-\nu)$ (см. [8, дополнение 1]). Асимптотическое разложение $\nu'(-\nu)$ получается формальным дифференцированием разложения для $\nu(-\nu)$.

$$J_- \underset{\tau+\alpha}{\sim} (\alpha-\tau) c_0^2 / \rho, \quad c_0 = c(s, 0),$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial c}{\partial n} \cdot \frac{1}{c_0},$$

ρ - радиус кривизны каустики.

2. Волновое поле в окрестности каустики в первом приближении:

$$2 \left(\frac{\rho}{2c_0} \right)^{1/6} e^{-\pi i/4} \psi_0^-(\alpha) \nu \left(-\sqrt{\frac{2}{c_0^2 \rho}} \omega^{2/3} n \right) e^{i\omega \tau_0(s)} \omega^{1/6}, \quad (5.2)$$

$$\alpha = \alpha(s), \quad \frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{1}{c_0}.$$

3. Поле уходящей волны в первом приближении:

$$e^{i\omega \tau_+} \psi_0^+(\alpha) \sqrt{c/J_+}, \quad (5.3)$$

$$\psi_0^+(\alpha) = e^{-\pi i/2} \psi_0^-(\alpha), \quad J_+ \underset{\tau+\alpha}{\sim} (\tau-\alpha) c_0^2 / \rho.$$

ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ И ВОЛНЫ СОСКАЛЫЗЫВАНИЯ

Здесь будут построены асимптотические формулы для волн шепчущей галереи, волн соскальзывания и соответствующих собственных колебаний. По существу, мы рассмотрим те же задачи, которым посвящена гл.6 монографии [8], однако здесь рассмотрение ведется методом пограничного слоя.

§ 1. Волны шепчущей галереи

Волны шепчущей галереи распространяются вблизи отражающей границы S , и условие, обеспечивающее их возникновение, состоит в том, что при $n < 0$ эффективный радиус кривизны $\rho > 0$. Лучи, соответствующие этим волнам, образуют малые углы с S (рис.3). Изучение геометрических вопросов, связанных с такими лучами, позволяет узнать достаточно много о волнах шепчущей галереи [8, гл.4]. Мы пойдем другим, более формальным путем методике пограничного слоя, позволяющей быстро получить искомые результаты. Эти построения имеют много общего с известным методом Олвера построения асимптотических формул в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр. Построения гл.6 монографии [8] ближе к методике Черри.

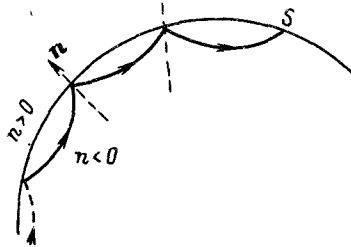


Рис.3.

Пусть волновой процесс описывается, как и раньше, уравнением Гельмгольца с переменной скоростью $c(M)$:

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)})u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad c(M) \in C^\infty, \quad (1.1)$$

а на S' выполнено классическое краевое условие Дирихле

$$u|_{S'} = 0. \quad (1.2)$$

Краевое условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial n}|_{S'} = 0$ можно рассмотреть тем же способом.

Будем искать формальное разложение волны шепчущей галереи в виде ряда

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s) + i\omega^{1/3}\tau_1(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(s, \nu_j)}{\omega^{j/3}}. \quad (1.3)$$

Мы предполагаем, как и в гл.2, что рассмотрения ведутся в системе (s, n) , причем

$$\tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad c_0 = c_0(s) = c(s, n) \Big|_{n=0}. \quad (1.4)$$

Выражение $\exp[i\omega\tau_0(s)]$ для наиболее быстро осциллирующего множителя, входящего в решение, нетрудно угадать из физических соображений: эйконал волны вблизи S' в силу малого наклона лучей к S' должен быть близок к эйконалу волны, со скоростью $c_0(s)$ бегущей вдоль S' , т.е. должен быть близок к $\tau_0(s)$. Далее, $\nu_j = n\omega^{2/3}$, т.е., как и во второй главе, слой, где волны шепчущей галереи заметно отличны от нуля, имеет порядок $O(\omega^{-2/3})$. Функции U_j и $\tau_1(s)$ подлежат определению. Будем искать функции U_j в классе гладких функций, удовлетворяющих условиям

$$U_j|_{\nu_j=0} = 0, \quad U_j|_{\nu_j \rightarrow -\infty} = 0. \quad (1.5)$$

Первое из этих условий должно выполняться в силу (1.2), второе есть требование "сосредоточенности" решения вблизи S' .

Запишем уравнение (1.1) в координатах (s, n) :

$$\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0. \quad (1.6)$$

Подставим ряд (1.3) в уравнение (1.6), предварительно используя то, что все рассмотрения проводятся вблизи кривой S' , т.е. для $n = O(\omega^{-2/3})$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=-6}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^{j/3} \omega^{2/3 k}} \left\{ (-1)^k \left(\frac{\nu_1}{\rho} \right)^k \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_{j+2}}{\partial \nu_1} + \right. \\
& + (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2!} \left(\frac{\nu_1}{\rho} \right)^{k+1} \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{i}{c_0} U_{j+1} + i \tau_1' U_{j-1} + \frac{\partial U_{j-2}}{\partial s} \right) + \\
& + (-1)^k \left(\frac{\nu_1}{\rho} \right)^k (k+1) \left[-\frac{U_{j+6}}{c_0^2} - \frac{2}{c_0} \tau_1' U_{j+4} - (\tau_1')^2 U_{j+2} + \frac{2i}{c_0} \cdot \frac{\partial U_{j+3}}{\partial s} + \right. \\
& + i \frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} U_{j+3} + 2i \tau_1' \frac{\partial U_{j+1}}{\partial s} + i \tau_1'' U_{j+1} + \left. \frac{\partial^2 U_j}{\partial s^2} \right] + \\
& \left. + U_{j+6} \frac{\nu_1^k}{c_0^2} \tilde{c}_k + \frac{\partial^2 U_{j+4}}{\partial \nu_1^2} \right\} = 0 \quad , \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$U_{-6} = U_{-5} = U_{-4} = U_{-3} = U_{-2} = U_{-1} = 0 \quad ,$$

$$\tilde{c}_0 = 1, \quad \tilde{c}_1 = -\frac{2c_1}{c_0}, \quad \tilde{c}_2 = \left(\frac{3c_1^2}{c_0^2} - \frac{2c_2}{c_0} \right), \dots, \quad \tilde{c}_k = \frac{\partial^k c}{\partial \nu^k} \Big|_{\nu=0}.$$

Члены, содержащие ω^2 и $\omega^{5/3}$, сокращаются. Приравнявая нулю члены порядка $\omega^{4/3}$, получаем

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \nu_1^2} + \left(\frac{2}{\rho c_0^2} \nu_1 - \frac{2\tau_1'}{c_0} \right) U_0 = 0 \quad . \quad (1.8)$$

Равные условия (1.5) дают

$$U_0 \Big|_{\nu_1=0} = 0, \quad U_0 \xrightarrow{\nu_1 \rightarrow -\infty} 0 \quad . \quad (1.9)$$

Задача (1.8)-(1.9) - задача Штурма - Лиувилля *) на отыскание собственных функций, причем роль собственного числа играет

*) В отличие от классической задачи Штурма - Лиувилля промежутки в (1.9) бесконечны: $(-\infty, 0)$.

функция $-2\tau'_1/c_0$. Заменой переменной ^{*})

$$\nu = \left(\frac{2}{c_0^2 \rho} \right)^{1/3} \nu_1 = \eta(s) \nu_1$$

сведем задачу (I.8)-(I.9) к задаче

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) U_0 = 0, \quad (I.10)$$

$$\zeta = \left(\frac{\rho c_0^2}{2} \right)^{2/3} \frac{2\tau'_1}{c_0} = \frac{2\tau'_1}{\eta^2 c_0}, \quad (I.11)$$

$$U_0|_{\nu=0} = 0, \quad U_0 \xrightarrow{\nu \rightarrow -\infty} 0. \quad (I.12)$$

Краевое условие (I.12) на бесконечности для решения уравнения (I.10) может выполняться лишь в том случае, если функцию U_0 выбрать в виде

$$U_0 = A_0(s) U(\zeta - \nu), \quad (I.13)$$

U - функция Эйри, $A_0(s)$ - множитель, который мы определим позже. Краевое условие при $\nu=0$ приводит к равенству

$$\zeta = -t_\rho, \quad \rho = 1, 2, 3, \dots, \quad (I.14)$$

где t_ρ - корень функции Эйри U . Из равенств (I.11), (I.14) функция $\tau_1(s)$ определяется с точностью до произвольного слагаемого $\tau_1(0) = \text{const}$:

$$\tau_1(s) = -\frac{t_\rho}{2} \int_0^s \eta^2 c_0 ds = \frac{\zeta}{2} \int_0^s \eta^2 c_0 ds. \quad (I.15)$$

Эту постоянную мы полагаем равной нулю, что сводится к умножению решения на множитель $\exp(-i\omega^{1/3} \text{const})$, не зависящий ни от s , ни от n . Введем в уравнении (I.7) вместо ν_1 переменную $\nu = \eta(s) \nu_1$, затем, деля обе части равенства на $\eta^2(s)$ получаем

^{*}) Интересно, что выражения для ν здесь и в предыдущей главе совпадают.

$$(\omega^{4/3}L_0 + \omega L_1 + \omega^{2/3}L_2 + \dots)u = 0, \quad (1.16)$$

L_j - дифференциальные операторы по s и v не выше второго порядка с полиномиальными по v коэффициентами, которые имеют следующие выражения:

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + (v - \zeta), \quad (1.17)$$

$$L_1 = i\eta^{-2} \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_0} \cdot \frac{d}{ds} \right), \quad (1.18)$$

$$L_2 = \frac{1}{\eta^2} \left\{ -\frac{v^2}{c_0^2 \eta^2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-2} \right]_{n=0} + \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial v} + \frac{c_0^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{1}{c^2} \right]_{n=0} + \zeta \eta v \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-2} \right]_{n=0} - \frac{\zeta^2 \eta^4 c_0^2}{4} \right\}. \quad (1.19)$$

Для нахождения U_j мы получаем рекуррентную последовательность задач типа Штурма - Лиувилля:

$$L_0 U_j + L_1 U_{j-1} + \dots + L_j U_0 = 0, \quad (1.20)$$

$$U_j|_{v=0} = 0, \quad U_j|_{v \rightarrow -\infty} \rightarrow 0.$$

По существу, уравнения (1.20) рассматриваются на прямом произведении участка кривой S и полупрямой $0 \leq v < \infty$. Во второй главе уравнения пограничного слоя рассматривались на прямом произведении S на прямую $-\infty < v < +\infty$.

Уравнение (1.20) при $j=0$ уже рассмотрено. Положим $j=1$ в (1.20):

$$L_0 U_1 + L_1 U_0 = 0, \quad U_1|_{v=0} = 0, \quad U_1|_{v \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (1.21)$$

Задача (1.21) - задача Штурма - Лиувилля с нулевыми краевыми условиями. Соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение (1.13), поэтому задача (1.21), вообще говоря, не-

разрешима. Наша ближайшая цель - выяснить, каково должно быть ограничение на F , чтобы задача

$$L_0 V = -F, \quad V|_{\nu=0} = 0, \quad V \xrightarrow{\nu \rightarrow -\infty} 0$$

была разрешима. Собственно говоря, нам нужно будет рассмотреть лишь задачи следующего вида:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \right] V = P_{2n-2}^{(1)}(\nu) V + P_{2n-1}^{(2)}(\nu) V', \quad n=1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

$$V|_{\nu=0} = 0, \quad V \xrightarrow{\nu \rightarrow -\infty} 0, \quad v(\zeta) = 0,$$

где $P_n^{(i)}(\nu)$, $i=1, 2$, - полином по ν степени n с коэффициентами, зависящими от ζ . Решение неоднородного уравнения (1.22) нетрудно найти методом неопределенных коэффициентов, задавая V в виде

$$V = [Q_{2n}^{(1)} + A(\zeta)] V(\zeta - \nu) + Q_{2n-2}^{(2)} V'(\zeta - \nu), \quad (1.23)$$

$Q_{2n}^{(1)}$, $Q_{2n-2}^{(2)}$ - полиномы по ν степеней соответственно $2n$, $2n-2$, причем $Q_{2n}^{(1)}(0) = 0$, величина $A(\zeta)$ произвольна.

Коэффициенты полиномов $Q_{2n}^{(1)}$ и $Q_{2n-2}^{(2)}$ определяются однозначно.

Сформулируем важную для дальнейшего теорему.

Теорема. Для разрешимости задачи (1.22) необходимо и достаточно, чтобы свободный член $F = P_{2n-2}^{(1)}(\nu)V + P_{2n-1}^{(2)}(\nu)V'$ был ортогонален решению соответствующей однородной задачи, а именно

$$\int_{-\infty}^0 F(\nu) V(\zeta - \nu) d\nu = 0. \quad (1.24)$$

Если условие (1.24) выполнено, то выражение (1.23), удовлетворяющее уравнению и краевому условию при $\nu \rightarrow -\infty$, будет автоматически удовлетворять и краевому условию при $\nu = 0$.

Это известный результат теории задач Штурма-Лиувилля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Дано условие

(1.22), надо доказать, что выполнено (1.23). Умножим уравнение (1.22) на $V(\zeta-\nu)$ и проинтегрируем его от $-\infty$ до 0 по ν :

$$\int_{-\infty}^0 L_0 V \nu d\nu = \int_{-\infty}^0 F(\nu) V(\zeta-\nu) d\nu. \quad (1.25)$$

Взяв в равенстве (1.25) интеграл слева по частям, учитывая краевые условия задачи (1.22) и поведение функций Эйри V и V' при $\nu=0$ и $\nu \rightarrow -\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^0 F \nu d\nu = \int_{-\infty}^0 V L_0 \nu d\nu + V \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{-\infty}^0 - V \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{-\infty}^0 = 0,$$

так как $L_0 V = 0$, $V|_{\nu=0} = V|_{\nu=-\infty} = 0$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1.24), а V - решение вида (1.23) уравнения (1.22). Подставляя V в тождество

$$0 = \int_{-\infty}^0 L_0 V \nu d\nu = \int_{-\infty}^0 L_0 V \nu d\nu + \left(V \frac{\partial \nu}{\partial \nu} - \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \Big|_{-\infty}^0 \quad (1.26)$$

и учитывая свойство оператора L_0 :

$$L_0 [(Q_{2n}^{(1)} + A) V + Q_{2n-2}^{(2)} V'] = R_{2n-2}^{(1)} V + R_{2n-1}^{(2)} V',$$

($R_j^{(1)}$, $Q_k^{(2)}$ - полиномы степеней соответственно j , k) и то, что $V'(\zeta) \neq 0$ (функция Эйри не может иметь кратных корней), получим из (1.26)

$$V|_{\nu=0} = 0, \quad (1.27)$$

т.е. функция V вида (1.23) есть решение задачи (1.22). Теорема доказана.

Вернемся к краевой задаче (1.21). Подставляя вместо L_0 и L_1 их выражения (1.17), (1.18), имеем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \right] U_1 + i \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_0} \cdot \frac{d}{ds} \right) A_0 V(\zeta - \nu) = 0.$$

Для существования решения задачи (1.21) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^0 \left[\left(\frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_0} \cdot \frac{d}{ds} \right) A_0 v \right] v dv =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} A_0 v^2 + \frac{2}{c_0} \cdot \frac{dA_0}{ds} v^2 - \frac{2}{c_0} A_0 v \frac{\eta'}{\eta} v v' \right] dv = 0 \quad (1.28)$$

Проинтегрировав последний член по частям, полагая $v'(\zeta - v)v(\zeta - v)dv = -1/2 dv^2(\zeta - v)$, получаем следующее: после сокращения на положительный множитель $\int_{-\infty}^0 v^2 dv$ приходим в (1.28) к уравнению, играющему роль уравнения переноса для волн шепчущей галереи:

$$\frac{2}{c_0} \cdot \frac{dA_0}{ds} + \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{c_0} - \frac{d\eta}{ds} \frac{1}{\eta c_0} \right) A_0 = 0 \quad (1.29)$$

следовательно,

$$A_0(s) = \text{const} \cdot \sqrt{\eta(s)c_0(s)} \quad (1.30)$$

Итак, на этом шаге ($j=1$) из краевой задачи (1.21) мы определили

$$U_1 = A_1(s)v(\zeta - v) + Q_2^{(1)}v(\zeta - v) + Q_0^{(2)}v'(\zeta - v) \quad (1.31)$$

причем $Q_2^{(1)}(0) = 0$ в силу условия нормировки, и $Q_0^{(2)}(0) = 0$, что следует из граничного условия (1.27), а остальные коэффициенты полиномов определяются однозначно методом неопределенных множителей.

Функция $A_1(s)$ на этом этапе произвольна и определяется лишь при $j=2$ из краевой задачи (1.20). Последующие U_j ($j \geq 2$) находятся аналогично: U_{j-1} найдется из уравнения

$$L_0 U_{j-1} + L_1 U_{j-2} + \dots + L_{j-1} U_0 = 0$$

с точностью до множителя у слагаемого вида $A_{j-1}(s)v(\zeta - v)$.
Условие разрешимости задачи для U_j :

$$L_0 U_j + L_1 U_{j-1} + \dots + L_j U_0 = 0, \quad U_j|_{v=0} = 0, \quad U_j \xrightarrow[v \rightarrow -\infty]{} 0,$$

т.е. $\int_{-\infty}^0 (L_1 U_{j-1} + \dots + L_j U_0) v(\zeta - v) dv = 0$

дает уравнение переноса с ненулевой правой частью для определения $A_{j-1}(s)$:

$$i \frac{2}{c_0} \cdot \frac{dA_{j-1}}{ds} + \frac{i}{c_0} \left(-\frac{c_0'}{c_0} - \frac{\eta'}{\eta} \right) A_{j-1} + f_{j-1} = 0 ,$$

решение которого находится с точностью до некоторой постоянной аналогично коэффициенту $A_0(s)$ (см. (I.30)).

Окончательно имеем

$$u \sim \exp \left[i\omega \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)} + \frac{i\zeta}{2} \omega^{1/3} \int_0^s \eta^2 c_0 ds \right] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(s, \nu)}{\omega^{j/3}} ,$$

$$U_j = C_j \sqrt{\eta(s)c_0(s)} \cdot \tilde{U}_j , \quad C_j = \text{const} , \quad \zeta = -t_p ,$$

$$\zeta = -t_p , \quad p=1,2,\dots , \quad v(-t_p)=0 , \quad v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$\tilde{U}_0(s, \nu) = v(\zeta - \nu) ,$$

$$\tilde{U}_1(s, \nu) = \left[A_1(s) - \frac{i}{c_0} \cdot \frac{\eta'}{\eta^3} \nu^2 \right] v(\zeta - \nu) ,$$

$$\tilde{U}_2(s, \nu) = \left[A_2(s) + Q_4^{(1)} \right] v(\zeta - \nu) + Q_2^{(2)} v'(\zeta - \nu) ,$$

$$A_1(s) = \int_0^s \left(\frac{2c_0}{\rho} + 4c_0 g(s) + \frac{\eta^2 c_0^3}{8} \right) ds + \text{const} ,$$

$$\text{где } g(s) = \frac{1}{3\eta^2} \left[\frac{1}{2c_0^2} \cdot \frac{\eta'^2}{\eta^4} - \frac{1}{c_0} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\eta'}{\eta^3 c_0} \right) + \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{3}{c_0^2} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{3c_1^2}{c_0^2} - \frac{2c_2}{c_0} \right) \right] \right] + \frac{\eta'^2}{2c_0^2 \eta^6} ,$$

$A_2(s)$ - произвольная функция, которая определяется с точностью до постоянной из условия разрешимости задачи для функции $U_3(s, v)$.

Заметим, что при распространении волн шепчущей галереей энергия в первом приближении распространяется вдоль S . Точнее, в первом приближении интеграл энергии не зависит от времени t . Вычислим этот интеграл от нулевого приближения к u по малому прямоугольнику, в котором поверхностный эйконал $\tau_0(s)$ меняется от $\tau_0 + t$ до $\tau_0 + d\tau_0 + t$, а координата n меняется от 0 до $-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ - малое число, не зависящее от ω .

Покажем, что в первом приближении энергия в этом прямоугольнике не зависит от t . В самом деле, энергия \mathcal{E} с точностью до главных членов равна (см. гл. I)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tau_0+t}^{\tau_0+d\tau_0+t} \int_{-\varepsilon}^0 \left(u_t \bar{u}_t \frac{1}{c^2} + \nabla u \nabla \bar{u} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\tau_0+t}^{\tau_0+d\tau_0+t} d\tau_0 \int_{-\varepsilon}^0 \frac{\omega^2}{c_0^2} \sqrt[3]{\frac{c_0}{\rho}} v^2 \left(\zeta - \omega^{2/3} \sqrt[3]{\frac{2}{c_0^2 \rho}} n \right) c_0 dn = \\ & = d\tau_0 \int_{-\infty}^0 v^2(\zeta - v) dv \cdot \omega^{4/3} \frac{1}{c_0^2} \sqrt[3]{\frac{c_0}{\rho}} \cdot \frac{\sqrt[3]{c_0^2 \rho}}{\sqrt[3]{2}} c_0 = \\ & = d\tau_0 \omega^{4/3} \int_{-\infty}^0 v^2(\zeta - v) dv \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\omega^{4/3}}{\sqrt[3]{2}} \left[v'(\zeta) \right]^2 d\tau_0. \end{aligned}$$

Мы получили величину, не зависящую от t .

§ 2. Квазимоды типа шепчущей галереи

Пусть кривая S , участок которой мы рассматривали в предыдущем параграфе, замкнута и ограничивает область Ω . Здесь мы построим формальные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие однородному краевому условию (1.2). Такие "формальные собственные функции" В.И. Арнольд [12] предложил называть квазимодами.

Формальные ряды для собственных чисел на самом деле являются асимптотическими рядами для некоторой подпоследователь-

ности истинных собственных чисел. Такого простого результата в отношении собственных функций доказать не удается [12; 8, гл.6] .

Перейдем к построению квазимод. Рассмотрим нулевое приближение

$$u \sim e^{i\omega_0 \tau_0(s) + i\omega_0^{1/3} \tau_1(s)} \sqrt{\eta c_0} v(\xi - \nu). \quad (2.1)$$

Собственные колебания должны быть однозначными. В случае функции (2.1) это требование эквивалентно тому, что приращение показателя экспоненты должно быть целым кратным 2π :

$$(\tau_0(s+l) - \tau_0(s))\omega_0 + \omega_0^{1/3}(\tau_1(s+l) - \tau_1(s)) = 2\pi q$$

($q \gg 1$ - целое, l - длина контура S), или

$$\omega_0 \int_0^l \frac{ds}{c_0(s)} - \omega_0^{1/3} t_p \int_0^l \eta^2 \frac{c_0}{2} ds = 2\pi q, \quad q \gg 1, \quad \rho = 1, 2, \dots, \quad v(-t_p) = 0. \quad (2.2)$$

Из равенства (2.2) по заданному q частота ω_0 определяется однозначно и имеет асимптотическое разложение

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\int_0^l ds/c_0(s)} \left[2\pi q + \left(\frac{2\pi q}{\int_0^l ds/c_0(s)} \right)^{1/3} t_p \int_0^l \frac{\eta^2 c_0}{2} ds + \dots \right]. \quad (2.3)$$

Будем искать формальное разложение собственной частоты в виде разложения по степеням ω_0 - решения уравнения (2.2):

$$\omega = \omega_0 + \frac{\delta_1}{\omega_0^{1/3}} + \frac{\delta_2}{\omega_0^{2/3}} + \frac{\delta_3}{\omega_0} + \dots, \quad (2.4)$$

а собственные функции (точнее квазимоды) представим так:

$$u \sim e^{i\omega_0 \tau_0(s) + i\omega_0^{1/3} \tau_1(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_j(s, \nu)}{\omega_0^{j/3}}, \quad (2.5)$$

где
$$\nu = \omega_0^{2/3} n \eta(s). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4)-(2.6) в уравнение (1.1) и приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих степенях ω_0 , мы придем к рекуррентным задачам Штурма - Лиувилля, аналогичным задачам (1.20):

$$\tilde{L}_0 V_j + \tilde{L}_1 V_{j-1} + \dots + \tilde{L}_j V_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$V_j|_{v=0} = 0, \quad V_j \xrightarrow{v \rightarrow -\infty} 0. \quad (2.8)$$

Здесь операторы \tilde{L}_0, \tilde{L}_1 совпадают с операторами L_0, L_1 (1.17), (1.18), а $\tilde{L}_j, j > 1$, отличаются от L_j на слагаемые, содержащие $\delta_{j-1}, \delta_{j-2}, \dots, \delta_1$, точнее,

$$\tilde{L}_j = L_j + \frac{2}{c_0^2 \eta^2} \left[\delta_{j-1} - \frac{2c_1}{c_0 \eta} v \delta_{j-2} + \dots \right], \quad (2.9)$$

где многоточием заменена некоторая линейная комбинация $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{j-3}$ с полиномиальными коэффициентами по v . Искомые числа δ_j находятся из условия l -периодичности по s каждого члена $V_j(s, v)$ разложения (2.5), так как экспоненциальный множитель в формуле (2.5) l -периодичен по s . Функция $V_0 = \sqrt{\eta} c_0 \times v(\zeta - v)$ найдена, и она, очевидно, l -периодична по s .

Обратимся к задаче нахождения $V_j, j \geq 1$. Как следует из (1.31),

$$V_1 = V_1^0 + A_1(s) v(\zeta - v), \quad \zeta = -t_p, \quad v(-t_p) = 0, \quad (2.10)$$

где $V_1^0 = Q_2^{(1)}(v) v(\zeta - v) + Q_0^{(2)} v'(\zeta - v)$ - решение, полученное методом неопределенных множителей соответствующей задачи Штурма - Диувиля (2.7), (2.8) при $j = 1$:

$$L_0 V_1 = -L_1 V_0, \quad V_1|_{v=0} = 0, \quad V_1 \xrightarrow{v \rightarrow -\infty} 0,$$

при этом

$$Q_2^{(1)}(0) = 0, \quad Q_0^{(2)}(0) = 0, \quad (2.11)$$

(первое равенство в (2.11) следует из условия нормировки, второе из граничного условия $V_1|_{v=0} = 0$).

Неизвестную функцию $A_1(s)$ и число δ_1 найдем из условия разрешимости следующей задачи (2.7)-(2.8) при $j = 2$:

$$L_0 V_2 = -(L_1 V_1 + \tilde{L}_2 V_0), \quad (2.12)$$

$$V_2|_{v=0} = 0, \quad V_2 \xrightarrow{v \rightarrow -\infty} 0, \quad (2.13)$$

а именно:

$$\int_{-\infty}^0 [L_1(A_1(s) \mathcal{V}(\zeta-v)) + L_1 V_1^0 + \tilde{L}_2 V_0] \mathcal{V}(\zeta-v) dv = 0, \quad (2.14)$$

где оператор \tilde{L}_2 определен формулой (2.9). Условие разрешимости задачи (2.12)-(2.13), т.е. равенство (2.14), дает уравнение переноса для функции $A_1(s)$:

$$\frac{2i}{c_0} \cdot \frac{dA_1}{ds} + \frac{i}{c_0} \left(\frac{dc_0}{ds} \cdot \frac{1}{c_0} - \frac{d\eta}{ds} \cdot \frac{1}{\eta} \right) A_1 - \tilde{F}_1(s) = 0. \quad (2.15)$$

Здесь, как следует из предыдущих построений,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(s) &= [\mathcal{V}'(\zeta)]^{-2} \int_{-\infty}^0 \left[\eta^2 (L_1 V_1^0 + L_2 V_0) + \frac{2}{c_0^2} \delta_1 V_0 \right] \mathcal{V} dv = \\ &= [\mathcal{V}'(\zeta)]^{-2} \int_{-\infty}^0 \eta^2 (L_1 V_1^0 + L_2 V_0) \mathcal{V} dv - \frac{2}{c_0^2} \delta_1 A_0(s) = f_1(s) - \frac{2}{c_0^2} \delta_1 A_0, \end{aligned}$$

$\tilde{F}_1(s)$ — l -периодическая функция s , так как коэффициенты операторов L_j , l -периодичны, V_1^0 , V_0 периодичны в силу условий (2.11). Следовательно, для периодичности по s функции (2.10) $V_1 = V_1^0 + A_1(s) \mathcal{V}(\zeta-v)$ необходимо и достаточно, чтобы $A_1(s)$ была l -периодична, т.е. следует найти l -периодическое решение $A_1(s+l) = A_1(s)$ уравнения (2.15). Соответствующая однородная задача (1.29) имеет периодическое решение $A_0(s) = \text{const} \cdot \sqrt{\eta(s) c_0(s)}$, поэтому, вообще говоря, задача отыскания l -периодического решения неоднородного уравнения (2.15) неразрешима. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция $\frac{c_0}{2} \left[f_1(s) - \frac{2}{c_0^2} \delta_1 A_0 \right]$ была ортогональна к решению соответствующего однородного сопряженного уравнения

$$i \frac{dA_0^*}{ds} + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{c_0} \cdot \frac{dc_0}{ds} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{ds} \right) A_0^* = 0,$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^l \frac{c_0}{2} \left[f_1(s) - \frac{2}{c_0^2} \delta_1 A_0 \right] \frac{ds}{\sqrt{\eta(s) c_0(s)}} = 0.$$

Предыдущее равенство определяет число δ_1 однозначно:

$$\delta_1 = \frac{\int_0^l \frac{c_0}{2} f_1(s) \frac{ds}{\sqrt{\eta c_0}}}{\int_0^l \frac{ds}{c_0}} \quad (2.16)$$

Остальные δ_j , $j > 1$, находятся аналогично.

§ 3. Волны соскальзывания

Если вблизи кривой S при $n < 0$ могут распространяться волны пещущей галереи, то при $n > 0$ вблизи S могут существовать так называемые волны соскальзывания [8, гл.6].

Мы будем исходить из уравнения (1.1) и краевого условия (1.2), считая $n > 0$ и $\rho > 0$. Делая те же подстановки, что и в § 1, и выбирая

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s) + i\omega^{1/3}\tau_1(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(s, \nu)}{\omega^{j/3}} \quad (3.1)$$

причем функция $\tau_0(s)$ определена формулой (1.4), а

$$\nu = \omega^{2/3} n \eta(s) = \omega^{2/3} n \sqrt[3]{\frac{2}{\rho c_0^2}} \quad (3.2)$$

придем к системе рекуррентных уравнений (1.16). При решении ее мы будем требовать выполнения краевых условий

$$U_j|_{\nu=0} = 0, \quad U_j|_{\nu \rightarrow \infty, \text{arg} \nu > 0} = 0 \quad (3.3)$$

Условие на бесконечности аналогично известному принципу предельного поглощения [8, с.184].

Для U_0 легко получить формулу

$$U_0 = A_0(s) W_1(\zeta - \nu) \quad (3.4)$$

W_1 - функция Эйри, имеющая асимптотику

$$W_1(-\nu) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \nu^{-1/4} e^{i\pi/4} e^{2/3 \nu^{3/2} i} \quad (3.5)$$

Условие разрешимости уравнения

$$L_0 V \equiv -\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) V = f(\nu) \quad (3.6)$$

при краевых условиях (3.3) и

$$f(v) = D^{(1)}(v) u_1(\zeta - v) + D^{(2)}(v) u_1'(\zeta - v)$$

можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} \exp(i\varepsilon v) f(v) u_1(\zeta - v) dv = 0, \quad (3.7)$$

где интегрирование берется по полупрямой

$$v = |v| e^{i\varepsilon}, \quad \pi/3 > \varepsilon > 0, \quad 0 \leq |v| < \infty. \quad (3.8)$$

Все формулы и построения полностью аналогичны случаю волн шепчущей галереи. Следует заметить, что делать заново пересчеты здесь не нужно. Между формулами (3.1)-(3.8) для волн соскальзывания и формулами (1.3), (1.4), (1.13)-(1.15) для волн шепчущей галереи имеет место двойственность, вытекающая из совпадения рекуррентных формул, с той лишь разницей, что в соответствующих формулах для волн шепчущей галереи следует заменить $U(\zeta - v)$ на $u_1(\zeta - v)$ и корень функции $U(\zeta) = 0$, $\zeta = -t_p$, заменить на $\zeta = \xi_p$ - корень функции u_1 :

$$u_1(\xi_p) = 0, \quad \xi_p = |\xi_p| e^{i\pi/3}. \quad (3.9)$$

Сказанное в равной мере относится как к волнам соскальзывания, так и к квазиподам соскальзывания.

Выйдем в заключение параграфа формулу для волны соскальзывания:

$$u_p \sim C \sqrt{\eta(s) c_0(s)} \exp \left[i\omega \tau_0(s) + i\omega^{1/3} \frac{\xi_p}{2} \int_0^s \eta^2 c_0 ds \right] \times \quad (3.10)$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} V_j(s, v) \frac{1}{\omega^{j/3}},$$

где $C = \text{const}$, $V_j(s, v) = D_{2j}^{(1)}(v) u_1(\zeta - v) + D_{2j-2}^{(2)}(v) u_1'(\zeta - v)$, причем

$$V_0(s, v) = u_1(\zeta - v),$$

$$V_1(s, v) = \left[A_1(s) - \frac{i}{c_0} \cdot \frac{\eta'}{\eta} v^2 \right] u_1(\zeta - v). \quad (3.11)$$

Если точка $M(s, \nu)$, в которой рассматривается выражение (3.10), будет выходить за пределы пограничного слоя ($n \sim 0(\omega^{2/3})$), удаляясь от S , то величина ν станет большой и функцию Эйри U_i можно заменить ее асимптотикой ($\nu \rightarrow +\infty$). Отсюда наиболее осциллирующий множитель в u_p следующий:

$$\exp\left(i\omega\tau_0(s) + \frac{2}{3}i\nu^{3/2} + i\omega^{1/3}\frac{\xi_p}{2}\int_0^s \eta^2 c_0 ds\right). \quad (3.12)$$

Рассматривая лучи в окрестности каустики, из формул (2.6)-(2.8), (5.1)-(5.3) гл.2 мы получаем, что при приближении к каустике фазовый множитель уходящей (соответственно приходящей) волны имеет вид

$$\exp\left(i\omega\tau_0(s) + i\frac{2}{3}\nu^{3/2}\right) \quad (\text{соответственно } \exp\left(i\omega\tau_0(s) - i\frac{2}{3}\nu^{3/2}\right)).$$

Таким образом, при удалении от S лучевое поле волны u_p (по крайней мере в первом приближении) представляет собою совокупность лучей, соответствующих уходящей волне, имеющей каустикой S (см. гл.2 и [8]).

§ 4. Решение Фридендера - Келлера

Формулы (3.10)-(3.12) показывают, что при распространении вдоль S волна соскальзывания убывает как экспонента

$$\exp\left[i\omega^{1/3}\xi_p\int_0^s \frac{ds}{(c_0 \rho^2 \cdot 2)^{1/3}}\right], \quad (4.1)$$

для которой $\arg \xi_p = \pi/3$. Физически это объясняется тем, что при распространении волны соскальзывания лучи, сходя по касательной к S (рис.4), уносят энергию из пограничного слоя (ср. с рассуждениями Келлера [13], см. также [8, гл.12]).

Наша ближайшая цель - построить формальное решение уравнения (1.1), соответствующего лучам соскальзывания, а потом (в следующем параграфе) "сшить" решение пограничного слоя и решение, отвечающее волнам соскальзывания. Это шивание имеет много общих черт со шиванием волны в окрестности каустики (см. гл.2). Полученное в результате "кусочное" асимптотическое

разложение имеет свой равномерный аналог: формулы Льюиса, Блейштейна, Людвига [14].

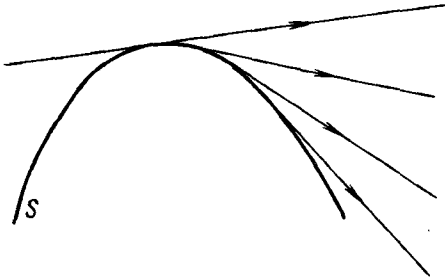


Рис.4.

Формальное решение уравнения (1.1), соответствующее лучам соскальзывания, было найдено Фридендером и Келлером [15]. Они предложили искать решение уравнения (1.1) в виде

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(M) + i\omega^{1/3}\tau_1(M)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(M)}{\omega^{j/3}}, \quad (4.2)$$

при этом эйконал $\tau_0(M)$ отвечает лучам соскальзывания. Подставляя разложение (4.2) в уравнение (1.1), получаем

$$(\nabla\tau_0)^2 = 1/c^2(M), \quad (4.3)$$

$$\nabla\tau_0 \nabla\tau_1 = 0, \quad (4.4)$$

$$\hat{L}_0 u_0 = 0, \quad \hat{L}_0 u_1 + \hat{L}_1 u_0 = 0, \dots, \quad \sum_{k=0}^3 \hat{L}_k u_{j-k} = 0, \quad (4.5)$$

здесь

$$\hat{L}_0 u = 2 \nabla\tau_0 \nabla u + \Delta\tau_0 u, \quad \hat{L}_1 u = -(\nabla\tau_1)^2 u, \quad (4.6)$$

$$\hat{L}_2 u = 2 \nabla\tau_1 \nabla u + \Delta\tau_1 u, \quad \hat{L}_3 u = \Delta u.$$

Из рекуррентных соотношений (4.5), вполне аналогичных уравнениям переноса (1.6) гл.1, следует, что функция $\tau_1(M)$ и коэффициенты $u_j(M)$ определяются интегрированием вдоль лучей с использованием с точностью до задания в том или ином виде начальных данных для τ_1 и u_j .

Оператор \hat{L}_0 - это линейный дифференциальный оператор с дифференцированием вдоль луча (см. гл.1, где \hat{L}_0 подробно изучен), $\tau_1(M)$ - функция, постоянная на лучах, что легко видно из уравнения (4.4),

$$\partial \tau_1 / \partial \tau = 0 \quad (4.7)$$

Умножая на интегрирующий множитель $c^2/2\sqrt{J/c}$ (см. [8, гл.1]) правые части уравнений (4.5), мы приходим к рекуррентной системе, определяющей $u_j(M)$:

$$u_j(M) = \sqrt{\frac{c}{J}} \left\{ \Psi_j(\alpha) + \int \frac{c^2 \sqrt{J}}{2c} \left[(\nabla \tau_1)^2 u_{j-1} - (2 \nabla \tau_1 \nabla u_{j-2} + \Delta \tau_1 u_{j-2}) + \Delta u_{j-3} \right] d\tau \right\} \quad (4.8)$$

здесь $J = |\mathbf{x}_\alpha|$ - расходимость лучей.

Изучим аналитический характер коэффициентов лучевого разложения Фридлендера-Келлера вблизи поверхности S . Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые в гл. 2 касались выбора вида эйконала как функции n и s , получаем что $\tau(M)$ и $\tau_1(M)$ есть гладкие функции \sqrt{n} и s . Поэтому найдем коэффициенты разложения по \sqrt{n} функций $\tau_0(M)$ и $\tau_1(M)$ в окрестности грани из уравнений (4.3), (4.4) и (4.7):

$$\tau_0(s, n) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)} + \frac{2}{3} \eta^{3/2} n^{3/2} - \frac{1}{2c_0} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} n^2 + \dots, \quad (4.9)$$

$$\tau_1(s, n) = \tau_1(s, 0) + \sqrt{n} \left(\frac{2}{c_0} \frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{\partial \tau_1(s, 0)}{\partial s} \right) + n \psi(s) + \dots, \quad (4.10)$$

где
$$\eta(s) = \sqrt[3]{\frac{2}{c_0^2 D}} \quad (4.11)$$

Заметим, что эйконал τ_0 соответствует лучам, уходящим от каустики S , т.е. эйконалу τ_+ гл.2 (см.(2.6)-(2.8)). Этим объясняется то, что в формуле (4.9) при $n^{3/2}$ стоит положительный множитель.

Учитывая вид функций τ_0 и τ_1 , и связь расходимости J с τ_0 , произведем переразложение по степеням n в формулах (4.8) для $u_j(M)$:

$$u_j \sim n^{-1/4-1/2j} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^j(s) + \dots) n^{k/2}, \quad (4.12)$$

где многоточием обозначены члены, содержащие, быть может, $\ln^k n$, $k=0,1,\dots$. Как будет следовать из дальнейших построений, логарифмических членов u_j не содержит.

Переходя в (4.9), (4.10) и (4.12) к растянутым координатам (ср. с (3.2))

$$v = \omega^{2/3} n \eta(s) \quad (4.13)$$

и полагая, как в гл.2, что выполнены соотношения

$$0 < C_1 \omega^{\varepsilon_1} \leq v \leq C_2 \omega^{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_i, C_i = \text{const}, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1/6, \quad (4.14)$$

имеем

$$\begin{aligned} \tau_0(s, v) = & \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)} + \frac{2}{3} \omega^{-1} v^{3/2} - \frac{2\eta'}{\eta^3 c_0} v^2 \omega^{-4/3} + \\ & + O(\omega^{-5/3}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\tau_1(s, v) = \tau_1(s, 0) - \frac{2}{c_0} \frac{\omega^{-1/3}}{\eta^2} \frac{\partial \tau_1(s, 0)}{\partial s} v^{1/2} + O(\omega^{-2/3}), \quad (4.16)$$

$$u_j \sim v^{-1/4-1/2j} \omega^{1/6} \omega^{j/3} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^j(s) + \dots) \frac{v^{k/2}}{\omega^{k/3}}. \quad (4.17)$$

одставляя разложения (4.13)-(4.17) в (4.2), получаем

$$u \sim \exp \left\{ i\omega \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)} + i\tau_1(s,0)\omega^{1/3} + \frac{2}{3}i\nu^{3/2} - \frac{2}{c_0\eta^2} \cdot \frac{\partial\tau_1}{\partial s} \nu^{1/2}i \right\} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_j(s,\nu)}{\omega^{j/3-1/6}}, \quad (4.18)$$

$$\text{где } V_j(s,\nu) = \sum_{k=-M_j}^{\infty} \frac{W_{0k}^j(s) + W_{1k}^j \ln \nu + \dots}{\nu^{1/4+k/2}} \quad (4.19)$$

(ср. с разложениями (3.6)–(3.9) гл.2).

§ 5. "Сшивание" волн соскальзывания и волн Фридлендера – Келлера

Рассмотрим теперь волны соскальзывания в той же полосе (4.14). Здесь ν – большая величина, и в формулах (3.10), (3.11) можно пользоваться асимптотикой для функций Эйри $w_1(\zeta-\nu)$ и $w_1'(\zeta-\nu)$ ($\nu \rightarrow +\infty$, $\zeta = \xi_\rho = O(1)$, $w_1(\xi_\rho) = 0$, $\rho = 1, 2, \dots$)

$$w_1(\zeta-\nu) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \nu^{-1/4} e^{2/3\nu^{3/2}\zeta - \zeta\sqrt{\nu}i + \pi i/4} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\nu^{3/2+k/2}} \right),$$

$$w_1'(\zeta-\nu) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \nu^{1/4} e^{2/3\nu^{3/2}\zeta - \zeta\sqrt{\nu}i + \pi i/4} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\nu^{3/2+k/2}} \right).$$

Подставляя эти ряды в (3.1), получаем следующий вид для волн соскальзывания:

$$u_c^\rho \sim \exp \left[i\omega \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)} + i\xi_\rho \omega^{1/3} \int_0^s \frac{\eta^2 c_0}{2} ds + \frac{2}{3} \nu^{3/2} i + \frac{\pi}{4} i - \xi_\rho \sqrt{\nu} i \right] \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-M_j}^{\infty} \frac{c_k^j(s)}{\nu^{1/4+k/2}} \cdot \frac{1}{\omega^{j/3-1/6}}. \quad (5.1)$$

В полосе (4.14) это формальное разложение удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям убывания при $|\nu| \rightarrow +\infty$, $\arg \nu > 0$.

Здесь, как и в гл.2, можно доказать лемму единственности для разложений вида

$$u \sim \exp \left[i\omega\tau_0 + i\omega^{1/3}\tau_1(s) + \frac{2}{3}v^{3/2}i - \zeta\sqrt{v}i \right] \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-M_j}^{\infty} \frac{W_{k0}^j(s) + W_{k1}^j(s) \ln v + \dots}{v^{k/2+1/4} \omega^{j/3-1/6}} \quad (5.2)$$

Лемма. Все коэффициенты $W_{ki}^j(s)$ разложения (5.2) определяются однозначно требованиями:

1) правая часть формулы (5.2) формально удовлетворяет системе рекуррентных соотношений (1.20):

$$L_0 \tilde{V}_j + L_1 \tilde{V}_{j-1} + \dots + L_j \tilde{V}_0 = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

$$\tilde{V}_j = e^{2/3v^{3/2}i - \zeta\sqrt{v}i} \sum_{k=-M_j}^{\infty} \frac{W_{k0}^j(s) + \dots}{v^{1/4+k/2}}$$

(см. формулы (1.17)-(1.19));

2) заданы коэффициенты W_{00}^j и функция $\tau_1(s)$.

Доказательство леммы принципиально не отличается от доказательства аналогичной леммы гл.2 и потому не приводится.

Заметим, что в процессе доказательства леммы можно определить нижний индекс суммирования по k в формуле (5.3), а именно $M_j = 4j$ ($j = 0, 1, \dots$), что согласуется с разложениями пограничного слоя (5.1), использующими явный вид полиномов в формулах (3.10)-(3.11).

Сшивание разложений проводится тоже во многом аналогично соответствующим построениям гл.2. Прежде всего, сравнивая (4.18) и (5.1), получаем

$$\tau_1(s, 0) = \zeta \int_0^s \frac{\eta^2 c_0}{2} d\bar{s} = \xi_p \int_0^s \frac{d\bar{s}}{2^{1/3} c_0^{1/3} p^{2/3}}.$$

Пусть далее $W_{00}^j = c_0^j(s)$. Как следует из леммы единственности, тогда разложения (4.18) и (5.1) в полосе (4.14) совпадут. В силу того, что логарифмические члены в разложении (5.1) отсутствуют, их не будет и в разложениях (4.19) и (4.12).

С точностью до главных членов волна Фрийдлендера - Келлера, являющаяся продолжением волны соскальзывания

$$u_p \sim C_p \sqrt{\gamma(s) c_0(s)} e^{i\omega\tau_0(s) + i\omega^{1/3} \xi_p \int_0^s \frac{d\gamma \eta^2 c_0}{2}} w_1(\xi_p - \nu), \quad p=1, 2, \dots,$$

имеет вид

$$u \sim C_p \sqrt{\frac{c(\tau, \alpha)}{J(\tau, \alpha)}} \left(\frac{2C_0}{\omega p} \right)^{1/6} \cdot e^{i\omega\tau + i\omega^{1/3} \xi_p \int_0^\alpha \frac{\gamma^2 c_0^2 d\alpha}{2}} .$$

Здесь τ , α - координаты, совпадающие с координатами гл.2.
Роль каустики $\tau = \alpha$ играет кривая \mathcal{S} , а $C_p = \text{const}$.

КОЛЕБАНИЯ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЛУЧЕЙ

В настоящей главе известные задачи о колебаниях, сосредоточенных в окрестности луча и квазимоды типа прыгающего мячика, рассмотрены методом, аналогичным методу гл.8 и 9 монографии [8]. Применение этой методики в плоском случае позволяет просто получить соответствующие формальные разложения. Другой подход к таким задачам описывается в [8, гл.4,5 и 7].

§ 1. Лучи в первом приближении

Введем в окрестности некоторого луча S координатную систему s, n (длина дуги, нормаль) на луче $n=0$. Луч является экстремалью интеграла Ферма (см. § 2 гл.1), который в координатах s, n имеет вид

$$\int \frac{\sqrt{dn^2 + (1+n/\rho)^2 ds^2}}{c(s, n)} = \int \sqrt{\frac{(dn/ds)^2 + (1+n/\rho)^2}{c(s, n)}} ds \quad (1.1)$$

Считая n и $\frac{dn}{ds}$ малыми величинами, заменим подынтегральное выражение на

$$\frac{1}{c_0(s)} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] n + \left[\frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} - \frac{c_2(s)}{c_0(s)} - \frac{1}{\rho(s)} \cdot \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right] n^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{ds} \right)^2 + O \left(|n|^3 + \left| \frac{dn}{ds} \right|^3 \right) \right\} \left(c_j(s) = \frac{\partial^j c}{\partial n^j} \Big|_{n=0}, \quad j=0, 1, \dots \right).$$

Так как $n=0$ - экстремаль интеграла (1.1), то эффективный радиус кривизны луча ρ обращается в бесконечность:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} = 0$$

Экстремали интеграла

$$\int \left[1 + \left(\frac{c_1^2}{c_0^2} - \frac{c_2}{c_0} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{c_1}{c_0} \right) n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{ds} \right)^2 \right] \frac{ds}{c_0(s)}$$

назовем лучами в первом приближении ^{*}). Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d^2 n}{ds^2} - \frac{c_0'}{c_0} \cdot \frac{dn}{ds} + \frac{c_2(s)}{c_0(s)} n = 0 . \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) есть уравнение Якоби для экстремали S функционала (1.1).

Уравнение для лучей в первом приближении несколько неожиданно встретится при решении параболического уравнения для волн, сосредоточенных в окрестности луча S .

§ 2. Вывод уравнения пограничного слоя

Рассмотрим уравнение Гельмгольца с переменной скоростью

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u = \left[\left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \frac{\omega^2}{c^2(s, n)} u = 0 . \quad (2.1)$$

Будем считать, что основной фазовый множитель в выражении для u имеет вид

$$e^{i\omega\tau_0(s)}, \quad \tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)},$$

т.е. $u = e^{i\omega\tau_0(s)} U, \quad (2.2)$

где U меняется медленнее, чем u , и быстро стремится к нулю при росте $|n|$ и больших ω .

Подставляя (2.2) в (2.1), приходим к уравнению

$$\left(1 + \frac{n}{\rho} \right) U_{nn} + \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} U_s + \frac{1}{\rho} U_n + \frac{2i\omega}{c_0} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} U_s + \\ + \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} U_s + i\omega U \frac{\partial}{\partial s} \left[c_0^{-1} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \right] +$$

^{*}) Приводимые здесь сведения о лучах в первом приближении можно найти в [8, гл.4].

$$+ \omega^2 \left[\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{1}{c^2(s, n)} - \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \frac{1}{c_0^2(s)} \right] U = 0 \quad (2.3)$$

Считая, что в уравнении (2.3) n мало и $\omega \gg 1$, получаем, что с точностью до главных членов уравнение (2.3) можно записать в виде

$$U_{nn} + \frac{2i\omega}{c_0(s)} U_s + i\omega \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{c_0(s)} \right) U - \omega^2 n^2 \frac{c_2(s)}{c_0^3(s)} U + \dots \quad (2.4)$$

Естественно предположить, что член $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ является поправочным по сравнению с $2i\omega \frac{\partial U}{\partial s} c_0^{-1}$, так как по предположению главная осцилляция учтена множителем $\exp[i\omega\tau_0(s)]$ и дифференцирование по s не может дать такого увеличения порядка, как умножение на $2i\omega c_0^{-1}$. Делая подстановку в (2.4)

$$U = \sqrt{c_0(s)} V,$$

освободимся от члена, содержащего $\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{c_0(s)}$. Уравнение (2.3) с точностью до главных членов примет теперь вид

$$V_{nn} + \frac{2i\omega}{c_0(s)} V_s - \omega^2 n^2 \frac{c_2}{c_0^3} V + \dots = 0 \quad (2.5)$$

Введем новую переменную

$$v = \omega^{1/2} n \quad (2.6)$$

Уравнение (2.3) можно будет записать так:

$$(\omega L_0 + \omega^{1/2} L_1 + L_2 + \omega^{-1/2} L_3 + \dots) V = 0,$$

где, как это следует из (2.5) и (2.6),

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2i}{c_0(s)} \frac{\partial}{\partial s} - v^2 \frac{c_2(s)}{c_0^3(s)} \quad (2.7)$$

Если искать решение V в виде разложения

$$V \sim V_0 + \omega^{-1/2} V_1 + \omega^{-1} V_2 + \dots,$$

где $V_j = V_j(s, v)$, то мы получим рекуррентную систему уравнений

$$L_0 V_0 = 0, \quad L_0 V_1 + L_1 V_0 = 0, \quad \dots \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) являются уравнениями пограничного слоя для колебаний, сосредоточенных в окрестности луча.

§ 3. Решение рекуррентной системы уравнений для V_j

Будем искать решение уравнения $L_0 V_0 = 0$ в виде $*$)

$$V_0^0 = \alpha(s) e^{i/2 \Gamma(s) v^2} \quad (3.1)$$

($\alpha(s), \Gamma(s)$ - искомые функции). Подставляя в уравнение

$$L_0 V_0^0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2i}{c_0(s)} \frac{\partial}{\partial s} - v^2 \frac{c_2(s)}{c_0^3(s)} \right) V_0^0 = 0 \quad (3.2)$$

выражение (3.1), получаем соотношения

$$\Gamma^2 + \frac{1}{c_0(s)} \Gamma' + \frac{c_2(s)}{c_0^3(s)} = 0, \quad (3.3)$$

$$\alpha \Gamma + (2/c_0) \alpha'(s) = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.3) - классическое уравнение Риккати. Делая подстановку

$$\Gamma = \frac{f'}{f c_0}, \quad (3.5)$$

сведем это уравнение к уравнению

$$f'' - \frac{c_0'}{c_0} f' + \frac{c_2}{c_0} f = 0. \quad (3.6)$$

Мы пришли к уравнению для лучей в первом приближении (см. (1.2)). Подставляя (3.5) в уравнение (3.4), получаем с точностью до несущественного постоянного множителя

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{f(s)}}.$$

Для того чтобы решение (3.1) не имело особенностей, $f = f(s)$ нигде не должно обращаться в нуль. Этого мы добьемся, положив

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = f_1 + i f_2,$$

$*$) Возможность найти решение уравнения $L_0 V_0 = 0$ в виде (3.1) - факт, известный из квантовой механики.

где f_1 и f_2 — линейно-независимые вещественные решения уравнения (3.6). Для сосредоточенности функции V_0^o в окрестности луча \mathcal{S} надо, чтобы $V_0^o \xrightarrow{|v| \rightarrow +\infty} 0$, а для этого достаточно выполнения условия

$$\text{Im } \Gamma(s) = \text{Im } \frac{f'}{f} = \frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1^2 + f_2^2} > 0.$$

Потребуем поэтому, чтобы

$$W(\text{Re } f, \text{Im } f) = \text{Re } f \frac{d}{ds} \text{Im } f - \text{Im } f \frac{d}{ds} \text{Re } f = \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

Это обеспечит «сосредоточенность» решения в окрестности луча. Нормировка на $1/2$ удобна для дальнейшего. Таким образом,

$$V_0^o = \frac{1}{\sqrt{f(s)}} e^{\frac{i}{2} \cdot \frac{f'}{f} v^2} \quad (3.8)$$

является примером решения уравнения (3.2), сосредоточенного в окрестности луча \mathcal{S} . Исходя из решения (3.8), построим бесчисленное множество других сосредоточенных в окрестности \mathcal{S} решений. Введем обозначения

$$\Lambda = \frac{1}{i} f \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c_0} v f',$$

$$\Lambda^* = \frac{1}{i} \bar{f} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c_0} v \bar{f}'.$$

Дифференциальные операторы Λ и Λ^* коммутируют с оператором L_0 , что нетрудно проверить непосредственно. Их коммутатор в силу (3.6) равен единичному оператору:

$$\Lambda \Lambda^* - \Lambda^* \Lambda = 1. \quad (3.9)$$

Кроме того, $\Lambda V_0^o = 0$. (3.10)

Равенства (3.9), (3.10) проверяются непосредственным подсчетом. В силу перестановочности Λ^* с L_0 получаем счетное множество решений уравнения

$$V_0^q = (\Lambda^*)^q V_0^o, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Решения V_0^q все отличны от тождественного нуля. Более того, они линейно-независимы и образуют ортогональную систему при фиксированном s на прямой $-\infty < v < \infty$. В самом деле,

$$I_{q_1, q_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0^{q_1} \overline{V_0^{q_2}} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^{* q_1} V_0^{q_1} \overline{\Lambda^{* q_2} V_0^{q_2}} dv \quad (3.12)$$

Не ограничивая общности, считаем, что $q_2 \geq q_1$. Интегрируя по частям (3.12), получаем

$$I_{q_1, q_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Lambda^{q_2} \Lambda^{* q_1} V_0^{q_1}) \overline{V_0^{q_2}} dv.$$

Если $q_2 > q_1$, то, применяя несколько раз соотношение (3.9) и учитывая (3.10), нетрудно убедиться, что

$$\Lambda^{q_2} \Lambda^{* q_1} V_0^{q_1} = 0.$$

Поэтому $I_{q_1, q_2} = 0$, $q_2 > q_1$.

При $q_2 = q_1$ применение коммутационного соотношения (3.9) и формулы (3.10) дает

$$\Lambda^{q_1} \Lambda^{* q_1} V_0^{q_1} = q_1 \Lambda^{q_1-1} \Lambda^{* q_1-1} V_0^{q_1} = \dots = q_1! V_0^{q_1},$$

поэтому

$$\begin{aligned} I_{q_1, q_1} &= q_1! \int_{-\infty}^{+\infty} |V_0^{q_1}|^2 dv = \frac{q_1!}{|f(s)|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Im} \frac{f'}{f}) v^2} dv = \\ &= \frac{q_1!}{|f|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2c_0 |f|^2}} dv = q_1! \sqrt{c_0(s) 2\pi}. \end{aligned}$$

Этим равенством завершается доказательство ортогональности V_0^q . Нетрудно показать по индукции, что

$$V_0^q = Q_q(v) e^{\frac{i}{2c_0} \frac{f'}{f} v^2},$$

где $Q_q(v)$ — полином степени q . Из ортогональности системы функций V_0^q , $q=0, 1, \dots$, следует ортогональность полиномов $Q_q(v)$ с весом $\exp\left(-\frac{v^2}{2c_0 |f|^2}\right)$, откуда нетрудно вывести, что $Q_q(v)$ отличается от полинома Эрмита $H_q(x)$, $x = \sqrt{2c_0 |f|} v$, по-

стоянным множителем. Функции (3.11) V_0^s образуют в некотором смысле полную систему решений уравнения $L_0 V_0 = 0$, сосредоточенных в окрестности луча (см. § 3 гл.8 [8]).

Перейдем к построению высших приближений. Операторы L_j (см. § 2) — это дифференциальные операторы по s и v не выше второго порядка с полиномиальными по v коэффициентами. Пусть $V_0 = V_0^s$, тогда $L_1 V_0 = T_1(v) V_0^s$, где $T_1(v)$ — некоторый полином. Представим $T_1(v)$ в виде линейной комбинации полиномов $Q_i(v)$, что, очевидно, всегда возможно:

$$L_1 V_0 = \sum_i A_i^1(s) Q_i(v) e^{\frac{i}{c_0} \frac{v^2}{r}} = \sum_i A_i^1(s) V_0^i.$$

Решение V_1 уравнения $L_0 V_1 = -L_1 V_0$ тоже удобно искать в виде линейной комбинации V_0^i . Полагая

$$V_1 = \sum_{i=0}^{\infty} B_i^1(s) V_0^i,$$

имеем

$$L_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i^1(s) V_0^i \right) = - \sum_{i=0}^{\infty} A_i^1(s) V_0^i.$$

Учитывая вид L_0 и то, что V_0^i — решения $L_0 V_0^i = 0$, получаем

$$\frac{2i}{c_0} \cdot \frac{d}{ds} B_i^1 + A_i^1(s) = 0. \quad (3.13)$$

Из равенства (3.13) $B_i^1(s)$ определяются квадратурой; V_2, V_3, \dots, V_j при $j > 1$ последовательно находятся таким же способом, что и V_1 .

§ 4. Об устойчивости экстремального диаметра области

Пусть луч \mathcal{S} пересекает конечную область Ω (рис.5). Предположим, что луч \mathcal{S} и граница Σ области Ω имеют две общие точки и в этих точках Σ и \mathcal{S} ортогональны. Такой луч, следуя В.С.Буддыреву [8], мы будем называть экстремальным диаметром области. Наша задача — рассмотреть квазимоды, сосредоточенные в окрестности луча \mathcal{S} . Эти квазимоды называют обыч-

но собственными колебаниями типа прыгающего мячика. Название это связано с тем, что при построении квазимод важную роль играют семейства лучей первого приближения, отражающиеся попеременно от Σ в окрестностях точек C и D . Вдоль этих лучей

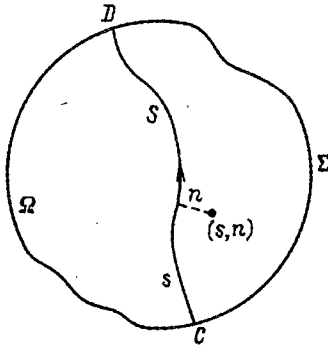


Рис. 5.

при $c(M)=\text{const}$ будто бы движется мячик, отскакивая от Σ в том же направлении, что и отраженные лучи. Оказывается, интересующие нас квазимоды можно построить лишь в том случае, когда семейство лучей в окрестности S обладает некоторым свойством устойчивости. Пусть луч, близкий к S , отражается от Σ в окрестности точки D , затем в окрестности точки C и т.д. Для устойчивого в первом приближении экстремального диаметра такой луч после многих отражений достаточно долго остается в окрестности S .

Перейдем к более точным определениям. Пусть $n=n(s)$, $0 \leq s \leq h$ (h — длина S), — луч, который по закону "угол падения равен углу отражения" отражается от Σ в окрестности точки D . Считая, что n и dn/ds малы и что на отраженном луче $h \leq s \leq 2h$, получаем [8, гл.4]

$$n^{\text{omp}}(h) = n^{\text{naq}}(h), \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{ds} n^{\text{omp}}(h) - \frac{1}{r_2} n^{\text{omp}}(h) = \frac{d}{ds} n^{\text{naq}}(h) + \frac{1}{r_2} n^{\text{naq}}(h). \quad (4.2)$$

Здесь и в дальнейшем $1/r_j$, $j=1,2$, — кривизна Σ в точках C и D соответственно. Условия (4.1) и (4.2) задают данные Коши для уравнения луча (1.2) в окрестности точки C при $h \leq s \leq 2h$, а $c(s, n) = c(2h - s, n)$. Теперь луч $h \leq s \leq 2h$ будет падающим, а луч $2h \leq s \leq 3h$ в окрестности точки C — отраженным. Для этой точки закон отражения "угол падения равен углу отражения" дает

$$n^{\text{amp}}(2h) = n^{\text{naq}}(2h), \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{ds} n^{\text{amp}}(2h) + \frac{1}{r_1} n^{\text{amp}}(2h) = \frac{d}{ds} n^{\text{naq}}(2h) - \frac{1}{r_1} n^{\text{naq}}(2h). \quad (4.4)$$

Условия (4.3), (4.4) задают начальные данные для уравнения луча (1.2) на отрезке $2h \leq s \leq 3h$, при этом $c(s, n) = c(s-2h, n)$. Разделим бесконечную прямую $-\infty < s < \infty$ на отрезки $kh \leq s \leq (k+1)h$, k - целое, $-\infty < k < \infty$. Задав решение уравнения (1.2) на отрезке $0 \leq s \leq h$ и продолжив это решение на все отрезки $[kh, (k+1)h]$ путем, указанным выше, мы получим функцию $n(s)$, определенную на всей прямой. Разумеется, такого типа продолженные решения можно рассматривать абстрактно, не обращаясь каждый раз к породившей их задаче о лучах в окрестности S . В частности, можно рассматривать (что мы и будем делать ниже) комплексные решения уравнения (1.2), продолженные на всю прямую $-\infty \leq s < \infty$. Экстремальный диаметр области мы назовем устойчивым в первом приближении, если любые продолженные на всю прямую по описанному выше закону решения уравнения (1.2) равномерно ограничены.

Условию устойчивости можно придать иную форму. Заметим прежде всего, что, продолжив уравнение (1.2) указанным способом на прямую $-\infty < s < \infty$, мы пришли к уравнению с периодическими (период $2h$) коэффициентами. Коэффициенты эти, вообще говоря, разрывны в точках вида $h' = kh$ (k - целое). В этих точках выполняются условия сопряжения

$$n(h'+0) = n(h'-0), \quad \frac{d}{ds} n(h'+0) - \frac{1}{r_2} n(h'+0) = \frac{d}{ds} n(h'-0) + \frac{1}{r_2} n(h'-0),$$

$$h' = kh, \quad k - \text{нечетное}, \quad (4.5)$$

$$n(h'+0) = n(h'-0), \quad \frac{d}{ds} n(h'+0) + \frac{1}{r_1} n(h'+0) = \frac{d}{ds} n(h'-0) - \frac{1}{r_1} n(h'-0),$$

$$h' = kh, \quad k - \text{четное}. \quad (4.6)$$

Пусть $n_1(s)$, $n_2(s)$ - фундаментальная система решений

уравнения (1.2), тогда в силу $2h$ -периодичности решения рассматриваемого уравнения функции $n_1(s+2h)$, $n_2(s+2h)$ тоже удовлетворяют этому уравнению, поэтому

$$\begin{pmatrix} n_1(s+2h) \\ n_2(s+2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Следуя терминологии теории уравнений с периодическими коэффициентами, матрицу A будем называть матрицей монодромии. Изложим коротко классические результаты, связанные с этим понятием, так как это важно для дальнейшего. Оказывается, матрица A унимодулярна, т.е. ее определитель равен единице. В самом деле, на отрезке $0 \leq s < h$

$$\frac{1}{c_0(s)} W(n_1, n_2) = \frac{n_1(s)n_2'(s) - n_1'(s)n_2(s)}{c_0(s)} = \text{const}.$$

Из условий сопряжения (4.5), (4.6) в точках $s = kh$ нетрудно заключить, что эта константа одна и та же для всех отрезков $kh \leq s < (k+1)h$, поэтому

$$\frac{1}{c_0(s)} W(n_1(s), n_2(s)) = \frac{1}{c_0(s+2h)} W(n_1(s+2h), n_2(s+2h)).$$

Пользуясь равенством (4.7) и $2h$ -периодичностью $c_0(s)$, получаем искомое соотношение

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

Вернемся к условию устойчивости. Равномерная ограниченность любого решения уравнения (1.2) эквивалентна равномерной ограниченности $n_1(s)$ и $n_2(s)$ ($-\infty < s < \infty$), т.е. существованию такой не зависящей от m константы, что при $0 \leq s < 2h$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$|n_1(s+2hm)|^2 + |n_2(s+2hm)|^2 \leq \text{const}.$$

В силу (4.7) это эквивалентно тому, что равномерно по m огра-

ничен нормы \ast) матриц A^m . Мы пришли к следующему критерию устойчивости: экстремальный диаметр области устойчив тогда и только тогда, когда при некоторой не зависящей от m константы const имеет место неравенство

$$\|A^m\| \leq \text{const}, \quad -\infty < m < \infty, \quad m - \text{целое}. \quad (4.8)$$

Легко доказывается, что условие (4.8) эквивалентно следующему: унимодулярная матрица подобна диагональной матрице с компонентами, равными по модулю единице. Точнее, существует неособая матрица C такая, что

$$A = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Перейдем от фундаментальной системы решений n_1, n_2 к (f_1, f_2) по формуле

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(s+2h) \\ f_2(s+2h) \end{pmatrix} &= CA \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. $f_1(s+2h) = \lambda_1 f_1(s),$

$$f_2(s+2h) = \lambda_2 f_2(s), \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Решения $f_j(s), j=1,2$, называются решениями Флоке. Нетрудно показать, что решения Флоке можно всегда выбрать так, чтобы име-

\ast) Норму матрицы A^m мы понимаем обычным образом как

$$\max_{\|x\|=1} \|A^m x\|, \quad \|x\| - \text{длина вектора:}$$

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

ли место равенства (ср. с (3.7))

$$W(\operatorname{Re} f_j, \operatorname{Im} f_j) = \frac{(-1)^j}{2}, \quad f_2 = \bar{f}_1. \quad (4.9)$$

Может оказаться, что при этом придется изменить нумерацию мультипликаторов λ_1 и λ_2 . В дальнейшем индекс у решения Флоке f_1 мы будем опускать. Соответствующий f мультипликатор обозначим $\lambda = e^{i\varphi}$:

$$f(s+2h) = e^{i\varphi} f(s). \quad (4.10)$$

Если $\varphi \neq \pi$, m — целое (это эквивалентно тому, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$), то нормировка (4.9) определяет f с точностью до произвольного постоянного множителя, равного по модулю единице. Пользуясь уравнением луча в первом приближении, условиями сопряжения и законом продолжения $c_0(s, \pi)$, $0 \leq s \leq h$, на всю ось, получаем, что $f_2(2h-s)$ является решением Флоке с мультипликатором $e^{i\varphi}$, поэтому существует μ ($|\mu|=1$) такое, что $f(s) = \mu f_2(2h-s)$, откуда и из (4.9) следует

$$f(2h-s) = \mu \bar{f}(s) \quad (|\mu|=1, e^{i\varphi} \neq e^{-i\varphi}). \quad (4.11)$$

§ 5. Квазимоды типа прыгающего мячика в первом приближении

Рассмотрим задачу об отражении в окрестности точки D волны, идущей вдоль S в случае краевого условия $u|_S = 0$. Пусть падающая волна имеет вид

$$u_{\text{пад}} \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sqrt{c_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} V_j(s, \nu) \omega^{-j/2}, \quad \tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad 0 \leq s \leq h. \quad (5.1)$$

Отраженную волну, идущую от D в сторону C , будем искать формально в том же виде, однако будем считать, что для отраженной волны

$$u_{\text{отр}} \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sqrt{c_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} V_j(s, \nu) \omega^{-j/2}, \quad (5.2)$$

$$\tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad h \leq s \leq 2h, \quad c_0(s) = c_0(2h-s). \quad (5.3)$$

Таким образом, точки на отраженной волне характеризуем значениями s , такими же, как точки луча первого приближения, отразившегося от Σ в окрестности точки D . Заметим, что, как следует из (5.1) и (5.3), $d\tau_0/ds > 0$, т.е. распространение как падающей, так и отраженной волн направлено в сторону возрастания s . Для падающей волны это направление от C к D , для отраженной - от D к C . Пользуясь системой координат (s, n) , которую мы рассматривали в связи с лучом падающей волны (луч S в этой координатной системе - отрезок $n=0$, $0 \leq s \leq h$), задаем уравнение границы в виде

$$s = h + \Phi(n) = h + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots, \quad b_2 = 1/2r_2.$$

В системе координат, введенной в связи с отраженной волной (луч S определяется отрезком: $n=0$, $h \leq s \leq 2h$), уравнение границы имеет вид

$$2h - s = h + \Phi(n) \sim h + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots,$$

так как точки (s, n) для первой координатной системы и (s', n) для второй геометрически тождественны, если $s' = 2h - s$.

Потребуем, чтобы наложение волн (5.1) и (5.2) в первом приближении удовлетворяло краевому условию $u|_S = 0$:

$$e^{+iv^2/2r_2} V_0(h-0, v) + e^{-iv^2/2r_2} V_0(h+0, v) = 0. \quad (5.4)$$

Пусть теперь волна, отразившись от Σ в окрестности точки C , идет в направлении точки D и отражается от Σ уже в окрестности точки D . Будем считать, что на отраженной волне $2h \leq s \leq 3h$. Требуя аналогично предыдущему, чтобы наложение падающей и отраженной волн в первом приближении удовлетворяло краевому условию $u|_S = 0$, получаем

$$e^{-i/2r_2 \cdot v^2} V_0(2h-0, v) + e^{i/2r_2 \cdot v^2} V_0(2h+0, v) = 0. \quad (5.5)$$

Считая, что условие (5.5) однозначно определяет функцию $V_0(s, v)$, $2h \leq s \leq 3h$, удовлетворяющую уравнению (3.2), отразим соответствующую волну от Σ в окрестности точки D и т.п. Таким образом, получаем продолжение решения уравнения (3.2), первоначально определенного при $(0 \leq s \leq h, -\infty < v < \infty)$,

на всю плоскость ($-\infty < s < \infty$, $-\infty < v < \infty$), причем при $s = mh$ (m - целое) выполняются условия сопряжения, аналогичные (5.5), (5.4). Описанный выше процесс продолжения $V_0(s, v)$ мы распространяем и на отрицательные s . Допустим, что продолженная указанным способом функция $V_0(s, v)$ удовлетворяет условию

$$V_0(s+2h, v) = e^{i\alpha} V_0(s, v). \quad (5.6)$$

Задача о нахождении функции $V_0(s, v)$ будет тогда аналогична задаче отыскания решений Флоке обыкновенного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

О п р е д е л е н и е . Будем говорить, что функция

$$e^{i\omega\tau_0(s)} \sqrt{c_0(s)} V_0(s, v) \quad (5.7)$$

является квазимодой типа прыгающего мячика в первом приближении, если она периодична с периодом $2h$.

Таким образом, выражение (5.7) представляет собой волну, которая распространяется от C к D , отражается от Σ в окрестности D и, отражаясь далее от Σ в окрестности C , „переходит сама в себя“. Функция (5.7) является наложением двух волн: падающей и отраженной, и ее можно было бы записать в виде двух слагаемых (при соответствующей записи важно иметь в виду, что точки (s, n) и $(2h-s, n)$ геометрически идентичны). Требование $2h$ -периодичности в силу соотношения (5.6) - это условие на ω (см. (5.7)). Формулы (5.6) и (5.7) и условие периодичности эквивалентны равенству

$$\omega_0 = \omega_p^0 = \frac{1}{2} \left[\int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} [2\pi\rho - \alpha], \quad \rho \gg 1 \quad - \text{целое}$$

(ср. с формулой (2.3) гл.3). Задача о нахождении квазимоды в первом приближении сводится к решению „задачи Флоке“ (3.2), (5.4), (5.5), (5.6). Оказывается, развитый ранее аппарат (см. § 1-4) позволяет легко найти решение этой задачи.

Нетрудно проверить, что функция

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{f}} e^{\frac{i}{2c_0} \cdot \frac{f'}{f} v^2}, \quad (5.8)$$

где f — решение Флоке, рассмотренное в конце § 4, удовлетворяет всем требованиям (3.2), (5.4)–(5.6). Удовлетворение уравнению (3.2) следует из рассмотрений § 2, соотношения (5.4)–(5.6) вытекают из формул (4.1)–(4.4) и (4.10), которым удовлетворяет решение Флоке f . Из (4.10) следует, что $1/\sqrt{F}$ при увеличении \mathcal{L} на $2h$ приобретает множитель $e^{-i\varphi/2}$, поэтому

$$\alpha = -\varphi/2$$

(см. (5.6)). Так же, как и в § 3, другие решения задачи о квази модах в первом приближении мы получим, применяя оператор Λ^* к решению (5.8). Функции

$$V_0^q = \Lambda^{*q} V_0^0, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

удовлетворяют как уравнению (3.2), так и краевым условиям (5.4)–(5.5). Первое утверждение следует из рассмотрений § 3. Некоторую трудность представляет доказательство выполнения краевых условий. Для доказательства воспользуемся методом индукции. При $q=0$ краевые условия выполняются. Пусть они выполняются для V_0^0, \dots, V_0^{q-1} . Докажем, что тогда V_0^q тоже удовлетворяет краевым условиям. Заметим, прежде всего, что при $s=h$ в силу условий сопряжения (4.1), (4.2) и нормировки (4.9)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i}{2c_0} \cdot \frac{f'(h-0)}{f(h-0)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2c_0} \cdot \frac{f'(h+0)}{f(h+0)} \right).$$

Далее, решения $V^q(h-0, \nu)$ и $V^q(h+0, \nu)$ имеют вид

$$V^q(h \pm 0, \nu) = Q_q^\pm(\nu) e^{\frac{i}{2c_0} \cdot \frac{f'(h \pm 0)}{f(h \pm 0)} \nu^2},$$

где полиномы $Q_q^\pm(\nu)$ ортогональны с одним и тем же весом $\exp\left(-\frac{\nu^2}{2c_0|f|^2}\right)$, поэтому $V^q(h+0, \nu)$ и $V^q(h-0, \nu)$ могут различаться лишь постоянным множителем. Для $V_0^0, V_0^1, \dots, V_0^{q-1}$ этот множитель равен -1 в силу индукционного предположения. В случае V_0^q достаточно показать, что коэффициент при ν^q у $Q_q(h+0, \nu)$ и $Q_q(h-0, \nu)$ отличается лишь знаком. Доказатель-

ство завершается непосредственным подсчетом и выполнением условий сопряжения для $f(s)$ при $s = h$.

Рассмотрим коротко некоторые следствия приведенных нами построений.

Из формулы (4.11) следует, что при $\Phi = \pm \pi$ волна, идущая от D к C , получается из волны, идущей от C к D , с помощью операции комплексного сопряжения и умножения на постоянный множитель, равный по модулю единице.

Из явного вида оператора Λ^* и формул (5.8), (5.9) следует, что для решения V_0^g задачи Флоке (3.2), (5.4)–(5.6)

$$\alpha = -(g + 1/2) \Phi,$$

а для соответствующей частоты ω_{pg}^0 имеет место формула

$$\omega_{pg}^0 = \frac{1}{2} \left[\int_0^h \frac{ds}{c_0(s)} \right]^{-1} \left[2\pi p + \left(g + \frac{1}{2} \right) \Phi \right]. \quad (5.10)$$

В заключение приведем результаты, к которым приводит расчет по этой схеме в случае $c = 1$.

Элементы матрицы монодромии A (см. § 4) имеют вид

$$a_{11} = \frac{1}{r_1 r_2} \left[(h - r_1)(h - r_2) + h(h - 2r_2) \right],$$

$$a_{12} = \frac{h}{r_1 r_2} (2h - r_1 - r_2),$$

$$a_{21} = \frac{1}{r_1 r_2} \left[(h - r_1)(h - 2r_2) + (h - r_2)(h - 2r_1) \right],$$

$$a_{22} = \frac{1}{r_1 r_2} \left[(h - r_1)(h - r_2) + h(h - 2r_1) \right].$$

Условие устойчивости эквивалентно либо выполнению одной из двух систем неравенств

$$h < r_1 + r_2, \quad h > r_1, \quad h > r_2,$$

$$h < r_1 + r_2, \quad h < r_1, \quad h < r_2,$$

либо мультипликаторы $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, тогда устойчивость будет иметь место при

$$r_1 = r_2 = h.$$

Для собственной частоты получаем формулу, хорошо известную в теории открытых резонаторов:

$$\omega_{pq}^0 = \frac{\pi p}{h} + \frac{q+1/2}{h} \arccos \Lambda \sqrt{\left(1 - \frac{h}{r_1}\right) \left(1 - \frac{h}{r_2}\right)},$$

$$\Lambda = \text{sign}(r_1 + r_2 - 2h).$$

§ 6. Построение высших приближений

Задачу об отражении волн, сосредоточенных вблизи луча, можно рассматривать не только в первом приближении, но и во всех приближениях. Точно так же, как это удастся сделать в первом приближении, волну, заданную рядом (5.1), можно последовательно, отражая от Σ в окрестностях точек C и D , продолжить во всех приближениях на все S , $-\infty < s < +\infty$. Потребовав (во всех приближениях) $2h$ -периодичности выражения

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sqrt{c_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_j(s, v)}{\omega^{j/2}}, \quad (6.1)$$

получим квазимоду типа прыгающего мячика. Частота ω , когда такая периодичность возможна, будет играть роль собственной частоты. Такая квазимода, два раза отразившись от Σ , перелетит после второго отражения в себя.

Оказывается, построение квазимод во всех приближениях удастся провести без осложнений лишь в том случае, когда отношение Φ/π иррационально. Нетрудно понять причину этого. Построение высших приближений можно рассматривать как "возмущение" решения в первом приближении. Если Φ/π рационально, т.е. $\Phi/\pi = 2m_1/n_1$, где m_1/n_1 - несократимая дробь, то используя терминологию квантовой механики, можно сказать, что собственные частоты первого приближения многократно вырождены, а именно, в рассматриваемом случае

$$\omega_{pq} = \omega_{p-m_1, q+n_1} = \omega_{p-2m_1, q+2n_1} = \dots,$$

однако соответствующие собственные колебания в первом приближении u_{pq} , $u_{p-m_1, q+n_1}$, \dots различны. В случае вырожденности соб-

ственных частот первого приближения метод возмущений сталкивается с трудностями и сильно усложняется. Так дело обстоит и здесь. Мы рассмотрим только случай иррационального отношения Φ/π . Случай рационального отношения Φ/π для высших приближений рассматривался в [16]. Будем искать собственную частоту в виде формального разложения

$$\omega = \omega_0 + \frac{\delta_1}{\omega_0^{1/2}} + \frac{\delta_2}{\omega_0^1} + \frac{\delta_3}{\omega_0^{3/2}} + \dots, \quad (6.2)$$

где $\omega_0 = \omega_{\rho_2}^0 = \left[2 \int_0^h \frac{\alpha s}{c_0(s)} \right]^{1/2} \left(2\pi\rho + \left(q + \frac{1}{2} \right) \Phi \right)$, (δ_j - искомые числа, см.

§ 2 гл.3). Подставляя (6.1), (6.2) в уравнение (2.1) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях $\omega_0^{-1/2}$, получаем рекуррентную систему уравнений пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 V_0 &= 0, \\ \hat{L}_0 V_1 + \hat{L}_1 V_0 &= 0, \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь

$$\hat{L}_0 = L_0, \quad \hat{L}_1 = L_1 + \frac{2\delta_1}{c_0(s)}, \quad \hat{L}_2 = L_2 + \frac{2\delta_2}{c_0(s)}, \dots, \quad (6.4)$$

$$\hat{L}_j = L_j + \frac{2\delta_j}{c_0(s)} + \dots, \quad j \geq 3. \quad (6.5)$$

Операторы L_j здесь те же, что и в § 2. Переменная v , входящая в выражение L_j , равна $\omega_0^{1/2} \pi = v$, многочлены в (6.5) заменены выражения, зависящие от δ_k , $k < j$.

Краевые условия в окрестности C и D приводят к условиям сопряжения для $V_j(s, v)$:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{iv^2}{2\pi}} V_j(2h-0, v) + e^{\frac{iv^2}{2\pi}} V_j(2h+0, v) + \\ + L_1^1 V_{j-1} + L_2^1 V_{j-2} + \dots + L_j^1 V_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$L_\mu^1 V(s, v) = F_\mu^1(v) V(2h-0, v) + G_\mu^1(v) V(2h+0, v), \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} e^{iv^2/2\pi} V_j(h-0, v) + e^{-iv^2/2\pi} V_j(h+0, v) + \\ + L_1^2 V_{j-1} + L_2^2 V_{j-2} + \dots + L_j^2 V_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$L_{\mu}^2 V(s, \nu) = F_{\mu}^2(\nu) V(\hbar - 0, \nu) + G_{\mu}^2(\nu) V(\hbar + 0, \nu) . \quad (6.9)$$

Здесь $F_{\mu}^j(\nu)$ и $G_{\mu}^j(\nu)$, $j=1,2$, $\mu=1,2,\dots$, - некоторые полиномы. Дальнейшие отражения волны (6.1) приводят к периодически повторяющимся с периодом $2\hbar$ условиям сопряжения. Будем теперь последовательно искать решения системы, требуя $2\hbar$ -периодичности по s функций $e^{i\omega\tau_0(s)} V_j(s, \nu)$. „Первое приближение“ V_0 найдено, и произведение $e^{i\omega\tau_0(s)} V_0(s, \nu)$ $2\hbar$ -периодично. Перейдем к отысканию $V_1(s, \nu)$. В уравнении (6.3) для V_1 : $L_0 V_1 = -\hat{L}_1 V_0$, правая часть имеет вид

$$E(\nu, s) e^{\frac{i}{2c_0} \cdot \frac{f'}{f} \nu^2} = -\hat{L}_1 V_0 , \quad (6.10)$$

где $E(\nu, s)$ - полином по ν с коэффициентами, зависящими от s . Выражение (6.10) представимо в виде линейной комбинации коэффициентов, зависящих от s и функций $V_0^q(s, \nu)$ (см. § 5):

$$-\hat{L}_1 V_0 = \sum_{q \geq 0} B_q^{(1)}(s) V_0^q(s, \nu) . \quad (6.11)$$

В силу того, что функции $e^{i\omega\tau_0(s)} \hat{L}_1 V_0$, $e^{i\omega\tau_0(s)} V_0^q(s, \nu)$ $2\hbar$ -периодичны, коэффициенты в (6.11) удовлетворяют аналогу условия флорке

$$B_q^1(s+2\hbar) = B_q^1(s) e^{(q-q_0)\varphi i} , \quad (6.12)$$

где q_0 - целое число, входящее в определение

$$\omega_0 = \left(2 \int_0^{\hbar} \frac{ds}{c_0(s)} \right)^{-1} \left(2\pi\rho + \left(q_0 + \frac{1}{2} \right) \Phi \right) \quad (6.13)$$

(см. (5.10)).

Искомую функцию V_1 будем искать в виде линейной комбинации функций $V_0^q(s, \nu)$:

$$V_1 = \sum_{q \geq 0} A_q^1(s) V_0^q(s, \nu) . \quad (6.14)$$

Как и в § 3, мы приходим к уравнениям

$$\frac{2i}{c_0(s)} \cdot \frac{dA_q^1}{ds} = B_q^1(s) . \quad (6.15)$$

Периодичность $e^{i\omega_0 T_0(s)} V_1$ будет иметь место, если A_q^1 подчинить условиям, аналогичным (6.12):

$$A_q^1(s+2h) = A_q^1(s) e^{(q-q_0)\varphi i} . \quad (6.16)$$

Обратимся к условиям сопряжения в точках $s=mh$ (m - целое). Выражения V_j^q можно представить в виде полинома, умноженного на экспоненту вида

$$\exp \left[\frac{i}{2c_0} \left(\pm \frac{1}{r_j} + \frac{f'(nh-0)}{f(nh-0)} \right) v^2 \right] .$$

Разложим этот полином по полиномам $Q_q(v)$ (см. § 3). В силу того, что V_0^q удовлетворяют условиям сопряжения (6.6)-(6.9) для $j=0$, а $V_j^q = 0$, $j>0$, из условий сопряжения (6.6)-(6.9) однозначно найдутся скачки

$$A_q^1(mh-0) - A_q^1(mh+0) = C_{qm} . \quad (6.17)$$

Эти скачки получаются, если приравнять нулю коэффициенты при полиномах $Q_q(v)$. Таким образом, для нахождения $A_q^1(s)$ из (6.14) мы получили задачу (6.15)-(6.17). Функции A_q^1 можно считать заданными на всей оси. Задача нахождения решения уравнения (6.15) в классе функций, удовлетворяющих условию (6.16) и условиям сопряжения ^{*)} (6.17), аналогична неоднородной задаче Штурма - Лиувилля. Для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы соответствующая сопряженная однородная задача имела только нулевое решение. Последнее будет иметь место, если только $e^{(q-q_0)\varphi i} \neq 1$ (см. (6.16)). В силу иррациональности отношения φ/π это выполнено всегда, за исключением случая равенства $q=q_0$. В этом случае необходимые условия разрешимости мы получим, умножив (6.15) на $c_0(s)$ и проинтегрировав обе части равенства вдоль интервала изменения S длины $2h$.

Левая часть найдется однозначно, так как скачки A_q^1 в

^{*)} Из построений следует, что величины скачков C_{qm} в формуле (6.17) и соотношение (6.16) согласованы.

точках $s = m\hbar$ заданы. Правая часть - сумма известной функции и $2\delta_1 / c_0$ (см. формулы (6.4)). Из условия разрешимости задачи (6.15)-(6.17) при $q = q_0$ искомый коэффициент δ_1 однозначно определяется. Если условие разрешимости для A'_{q_0} выполнено, то решение задачи (6.15)-(6.17) найдется (в квадратурах).

Последующие функции V_2, V_3, \dots и коэффициенты $\delta_2, \delta_3, \dots$ находятся аналогично.

ДИФРАКЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН НА ГЛАДКОМ ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ

Пусть на гладкое выпуклое тело Ω (рис.6) падает волна $u_{\text{пад}}$, заданная своим лучевым разложением (см.(I.4) гл.I)

$$u_{\text{пад}} \sim e^{i\omega\tau_{\text{пад}}(M)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^{\text{пад}}(M)}{(-i\omega)^j}, \quad M = M(x, y). \quad (0.1)$$

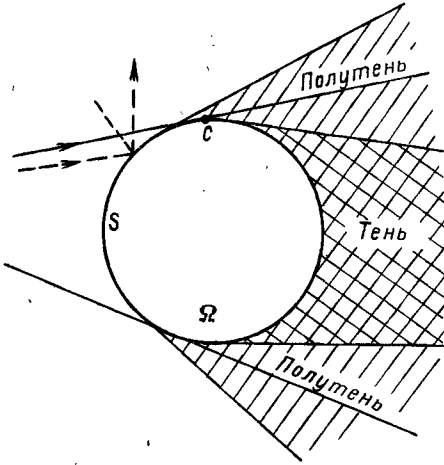


Рис.6.

Задача заключается в нахождении отраженной волны $u_{\text{отр}}$, которая с точностью до членов любого заранее заданного порядка малости по ω^{-1} удовлетворяла бы уравнению Гельмгольца с переменной скоростью и в сумме с падающей волной удовлетворяла бы краевому условию Дирихле

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}|_S = 0,$$

где S - выпуклая кривая с отличной от нуля кривизной, ограничивающая область Ω . В освещенной области вы-

ражение для $u_{\text{отр}}$ построить нетрудно с помощью лучевого метода (см. гл.I). Гораздо более сложной задачей является продолжение $u_{\text{отр}}$ в полутень и зону тени. Этой задаче посвящено много работ, краткий обзор которых можно найти в библиографи-

ческом комментарии. Нам представляется, что наиболее естественным математическим аппаратом при рассмотрении сформулированной задачи является аппарат разложений пограничного слоя. Именно эту математическую технику мы применим для построения волнового поля в окрестности точки C — точки касания луча падающей волны и кривой S (см. рис.6). Методика пограничного слоя берет начало в основополагающих работах В.А.Фока (см. [1]). Полученное выражение можно продолжить как в зону тени, так и в окрестность предельного луча (отделяющего зону тени от освещенной области).

Излагая решение задачи, мы сначала рассмотрим принципиальные вопросы получения разложений, а формулы, представляющие в первом приближении волновое поле, выпишем в конце главы.

§ 1. Метод параболического уравнения

Мы опять будем исходить из уравнения Гельмгольца для переменной скорости, записанного в координатах s, n :

$$\left(\Delta + \frac{v^2}{c^2(s,n)}\right)u = \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] + \frac{\omega^2}{c^2(s,n)}u = 0, \quad (1.1)$$

где ρ — радиус кривизны кривой S , $\rho = \rho(s) > 0$. Будем считать, что в точке $C(0,0)$ эйконал падающей волны $\tau_{пад}$ равен нулю, а c_{∞} — значение скорости $c(s,n)$.

Тогда, поскольку $\nabla \tau_{пад}$ касается S в точке C ,

$$\tau_{пад} = \frac{S}{c_{\infty}} + O(S^2 + n^2) = \tau_0(s) + O(S^2 + n^2), \quad \tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s,0)}. \quad (1.2)$$

В окрестности точки C эйконал отраженной волны близок к эйконалу падающей (это очевидно из геометро-оптических соображений), поэтому естественно положить вблизи C , что для $u = u_{пад} + u_{отр}$ фазовый множитель равен $\exp(i\omega\tau_0(s))$ (см. гл.2-4, где фазовый множитель вблизи S имеет такое же выражение). Введем новую функцию $V = u e^{-i\omega\tau_0(s)}$ — множитель ослабления; подставляя $u = V e^{i\omega\tau_0(s)}$ в уравнение (1.1), нетрудно получить уравнение для V :

$$\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \left(\frac{2i\omega}{c(s,0)} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1} + \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-1}\right) \frac{\partial V}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial n} + \omega^2 \left[\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \frac{1}{c^2(s,n)} - \frac{1}{1+n/\rho} \cdot \frac{1}{c^2(s,0)} \right] V + i\omega V \frac{\partial}{\partial s} \left[c(s,0) \left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \right]^{-1} = 0.$$

Естественно считать, что функция V при больших ω будет осциллировать, однако медленнее, чем фазовый множитель $e^{i\omega\tau_0(s)}$. Предположим, что производные функции V удовлетворяют соотношениям:

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right| \gg \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right| \gg V, \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right| \gg \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \gg |V|.$$

Выделим главные члены в уравнении (1.3), считая s и n малыми (мы рассматриваем малую окрестность точки C):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{2i\omega}{c_{00}} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \omega^2 \frac{2n}{c_{00}^2 \rho_0} V + \dots = 0,$$

здесь $\rho_0(s)$ — эффективный радиус кривизны в точке $C(0,0)$

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} \frac{c_{10}}{c_{00}} \Big|_{s=n=0}, \quad c_{00} = c(0,0), \quad c_{10} = \frac{\partial}{\partial n} c(s,n) \Big|_{n=0, s=0}.$$

Мы считаем, что $\rho_0 > 0$ (касание луча падающей волны и кривой S имеет первый порядок). Важно отметить (и это центральный момент при выводе параболического уравнения), что слагаемое $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ мало по сравнению со слагаемым $\frac{2i\omega}{c_0(s,0)} \frac{\partial V}{\partial s}$. В самом деле: предполагается, что введением фазового множителя учтена «главная» осцилляция u , а дифференцирование по s и n по порядку величины эквивалентно умножению на ω^α , $\alpha < 1$. Таким образом, записанное с точностью до главных членов уравнение для V сводится к следующему:

$$\frac{2i\omega}{c_{00}} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{2\omega^2 n}{c_{00}^2 \rho_0} V + \dots = 0 \quad (1.4)$$

Имея целью упростить главные члены в уравнении и свести к минимуму число переменных от s и n , перейдем к σ и ν :

$$\sigma = \frac{\omega^{1/3} s}{\sqrt{2c_{00} \rho_0^2}}, \quad \nu = \sqrt[3]{\frac{2}{c_{00}^2 \rho_0}} \omega^{2/3} n. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) превратится теперь в уравнение

$$i \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + \nu V + \dots = 0, \quad (1.6)$$

Если отбросить поправочные члены, то для V получится параболическое уравнение Фока - Леонтовича. Мы поступим сейчас несколько иначе. Эвристические рассуждения, которые привели нас к замене переменных (1.5) и уравнению (1.6), наводят на мысль искать решение уравнения (1.3) в виде

$$V \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_j(\sigma, \nu)}{\omega^{j/3}} \quad (1.7)$$

(σ, ν имеют вид (1.5)). В уравнении (1.3) все коэффициенты разложим по степеням s и n и заменим затем s и n на σ и ν в соответствии с формулами (1.5). Уравнение для V примет вид

$$\omega^{4/3} L_0 V + \omega L_1 V + \omega^{2/3} L_2 V + \dots = 0, \quad (1.8)$$

где

$$L_0 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + \nu V + i \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (1.9)$$

а $L_j, j \geq 1$, - дифференциальные операторы по ν и σ не выше второго порядка, коэффициенты которых - полиномы по ν и σ .

Подставляя (1.7) в (1.8) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях $\omega^{-1/3}$, получаем для V_j рекуррентную последовательность уравнений

$$L_0 V_0 = 0, \quad L_0 V_1 + L_1 V_0 = 0, \dots \quad (1.10)$$

Из краевого условия (0.2) $u|_s = 0$ следует, что $V|_s = 0$, или

$$V_0|_{\nu=0} = 0, \quad V_1|_{\nu=0} = 0, \dots \quad (1.11)$$

Волновое поле u было представлено суммой $u_{\text{наг}} + u_{\text{отр}}$. В соответствии с этим разбиением функцию ослабления также запишем в виде суммы $V = V_{\text{наг}} + V_{\text{отр}}$.

Найдем в координатах σ, ν асимптотическое представление для $V_{\text{наг}} = e^{-i\omega\tau_0} u_{\text{наг}}$. Обратимся к равенству (1.2).

Прежде всего получим разложение по степеням s и n для $\tau_{\text{наг}}$. Принимая во внимание равенство $\tau_{\text{наг}} = \tau_0(s) + O(s^2 + n^2)$, запишем искомое разложение в виде

$$\tau_{\text{наг}} = \tau_0(s) + a_{20}s^2 + a_{11}sn + a_{02}n^2 + a_{30}s^3 + a_{21}s^2n + \dots$$

Коэффициенты a_{ik} найдем из уравнения эйконала для $\tau_{\text{наг}}$, записанного в координатах s, n :

$$(\nabla \tau_{\text{наг}})^2 = \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^{-2} \left(\frac{\partial \tau_{\text{наг}}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_{\text{наг}}}{\partial n}\right)^2 = \frac{1}{c^2(s, n)}.$$

После несложных вычислений получаем

$$a_{20} = 0, \quad a_{11} = \frac{1}{c_{00}\rho_0}, \quad a_{30} = -\frac{1}{6\rho_0^2 c_{00}}.$$

Разлагая коэффициенты $u_j(M)$ лучевого разложения (0.1) в ряды по степеням s и n и переходя затем по формулам (1.5) к переменным σ и ν , получаем для $V_{\text{наг}}$ вблизи точки C следующее разложение:

$$V_{\text{наг}} = e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)} \sum_{j=0}^{\infty} E_j(\sigma, \nu) \omega^{-j/3} = \sum_{j=0}^{\infty} V_j^{\text{наг}} \omega^{-j/3}. \quad (1.12)$$

$$\text{Здесь } V_0^{\text{наг}} = u_0^{\text{наг}}(C) e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)}, \quad V_j^{\text{наг}} = E_j(\sigma, \nu) e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)}, \quad (1.13)$$

а $E_j(\sigma, \nu)$ — полиномы по σ и ν . Из того, что лучевое разложение (0.1) удовлетворяет (формально) уравнению Гельмгольца для переменной скорости, следует, что выражение (1.12), умноженное на $e^{i\omega\tau_0(s)}$, также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, а функции $V_j^{\text{наг}}$ — рекуррентной системе уравнений (1.10).

Перейдем к построению $V_{\text{отр}} = u_{\text{отр}} e^{-i\omega\tau_0(s)}$. Положим

$$V_{\text{отр}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} V_j^{\text{отр}} \omega^{-j/3}. \quad (1.14)$$

Очевидно, что функции $V_j^{\text{отр}}$ должны удовлетворять рекуррентной системе уравнений (1.10). Краевые условия (1.11) приводят к равенствам

$$V_j^{\text{наг}} + V_j^{\text{отр}} \Big|_{\nu=0} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Рекуррентная система уравнений (1.10), переписанная для $V_j^{\text{отр}}$, и равенства (1.15) еще не определяют однозначно $V_j^{\text{отр}}$.

Остающийся произвол в функциях V_j^{omp} позволяет удовлетворить еще одному условию, в некотором смысле аналогичному известному принципу предельного поглощения. Это условие обеспечит "смыкание" в освещенной области функции $e^{i\omega\tau_0(\sigma)} V_{omp}$ с тем выражением, которое дает для отраженной волны лучевой метод.

Сформулировать непосредственно это дополнительное условие для V_{omp} затруднительно. Гораздо удобнее формулировать это условие и находить функции V_j^{omp} , если представить их, а также функции V_j^{nag} интегралами Фурье:

$$V_j^{nag} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_j^{nag}(\zeta, \nu) e^{i\zeta\sigma} d\zeta, \quad (1.16)$$

$$V_j^{omp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_j^{omp}(\zeta, \nu) e^{i\zeta\sigma} d\zeta. \quad (1.17)$$

Выясним прежде всего, какую форму примет рекуррентная система (1.10), если ее пересчитать для функций \tilde{V}_j^{nag} и \tilde{V}_j^{omp} . Очевидно, что дифференцирование по σ V_j^{nag} (или V_j^{omp}) эквивалентно умножению \tilde{V}_j^{nag} (или \tilde{V}_j^{omp}) на $i\zeta$. Умножение V_j^{nag} (или V_j^{omp}) на σ эквивалентно применению к \tilde{V}_j^{nag} (или \tilde{V}_j^{omp}) дифференциального оператора $i\partial/\partial\zeta$, поэтому рекуррентная система уравнений для \tilde{V}_j^{nag} (или \tilde{V}_j^{omp}) имеет вид

$$\tilde{L}_0 \tilde{V}_0 = 0, \quad \tilde{L}_0 \tilde{V}_1 + \tilde{L}_1 \tilde{V}_0 = 0, \dots \quad (1.18)$$

$$\text{Здесь } \tilde{L}_0 \tilde{V} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \tilde{V}, \quad (1.19)$$

а \tilde{L}_j , $j \geq 1$ - дифференциальные операторы по ν и ζ , коэффициенты которых - полиномы от ζ и ν .

Краевые условия (1.15) приводят к равенствам

$$\tilde{V}_j^{omp} \Big|_{\nu=0} = -\tilde{V}_j^{nag} \Big|_{\nu=0}, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

Уравнение (1.19) $\tilde{L}_0 \tilde{V}_0 = 0$ - это уравнение Эйри. При построении \tilde{V}_0^{omp} в качестве решения уравнения Эйри возьмем

$$\tilde{V}_0^{omp} = B_0 w_1(\zeta - \nu), \quad (1.21)$$

где B_0 - постоянная и $w_1(z)$ - функция Эйри. Мы выбрали функцию

w_1 потому, что из всех функций Эйри только эта функция удовлетворяет в некотором смысле принципу предельного поглощения, а именно, при $|\omega| \gg 1$ и $\text{arg} \omega = \varepsilon > 0$ она убывает с роотом n . Такое поведение функции $w_1(\zeta - \nu)$ вытекает из асимптотической формулы

$$w_1(\zeta - \nu) \sim \frac{1}{\sqrt{\nu - \zeta}} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{2i}{3}(\nu - \zeta)^{3/2}}, \quad |\nu - \zeta| \rightarrow +\infty, \quad |\text{arg}(\nu - \zeta)| < \frac{2\pi}{3}$$

и равенств (I.5). Краевое условие (I.20) при $j=0$ позволяет определить постоянную в формуле (I.21). Тем самым завершается однозначное построение функции \tilde{V}_0^{omp} .

Переходим к определению \tilde{V}_1^{omp} . Заметим, что правая часть (I.18) может быть записана в виде

$$-\tilde{L}_1 \tilde{V}_0^{omp} = B_1(\nu, \zeta) \cdot w_1(\zeta - \nu) + Q_1(\nu, \zeta) w_1'(\zeta - \nu),$$

где $B_1(\nu, \zeta)$ и $Q_1(\nu, \zeta)$ - полиномы по ν .

Функцию \tilde{V}_1^{omp} с точностью до решения однородного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов в виде линейной комбинации $w_1(\zeta - \nu)$ и $w_1'(\zeta - \nu)$ с полиномиальными по ν коэффициентами. Решение однородного уравнения опять возьмем в виде $B_1 w_1(\zeta - \nu)$, причем постоянная B_1 однозначно определяется из (I.20) при $j=1$.

Точно так же и все прочие \tilde{V}_j^{omp} однозначно находятся из уравнений (I.18) для \tilde{V}_j^{omp} , краевого условия (I.20) и условий на бесконечности при $\nu \rightarrow +\infty$, которое можно сформулировать, например, как требование, чтобы \tilde{V}_j^{omp} имело вид

$$(\text{полином по } \nu) w_1(\zeta - \nu) + (\text{полином по } \nu) w_1'(\zeta - \nu),$$

или $\tilde{V}_j \xrightarrow{\text{Im} \nu > 0} 0$. Таким образом, нахождение \tilde{V}_j^{omp} сводится к построению последовательности решений краевых задач, аналогичных задачам Штурма - Лиувилля на полубесконечном промежутке, причем краевые условия задаются при $\nu=0$ и при $\nu \rightarrow +\infty$ (см. гл.3).

Определим, наконец, постоянную B_0 в формуле (I.21) и покажем, как находятся аналогичные постоянные при построении \tilde{V}_j^{omp} , $j \geq 1$. Для определения постоянной B_0 из равенств

(1.20) необходимо прежде всего найти \tilde{V}_0^{nag} . К построению \tilde{V}_0^{nag} мы и переходим.

Заметим, что имеет место формула \ast)

$$e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} \nu(\zeta - \nu) d\zeta, \quad (1.22)$$

где
$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\sigma^3}{3} + \sigma t\right) d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma t - i\sigma^3/3} d\sigma,$$

$\nu(t)$ — функция Эйри, имеющая при $t \rightarrow +\infty$ асимптотику $\sim \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-2/3 t^{3/2}}$. Из формул (1.13), (1.16), (1.22) следует, что

$$\tilde{V}_0^{nag} = -\frac{u_0(0,0)}{\sqrt{\pi}} \nu(\zeta - \nu). \quad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в краевое условие (1.20), получаем

$$B_0 = -\frac{u_0(C)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\nu(\zeta)}{w_1(\zeta)},$$

и, следовательно,

$$\tilde{V}_0^{cmp} = -\frac{u_0(C)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\nu(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu).$$

Для определения \tilde{V}_j^{nag} , $j \geq 1$, основное значение имеет интегральное представление

$$\sigma^m e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)} = \frac{i^m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} \frac{d^m}{d\zeta^m} \nu(\zeta - \nu) d\zeta, \quad (1.24)$$

которое получается дифференцированием (1.22). Используя уравнение Эйри $\nu''(t) = t\nu(t)$, равенство (1.24) можно переписать в виде

$$\sigma^m e^{i(\sigma\nu - \sigma^3/3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} [R_1(\zeta, \nu) \nu(\zeta - \nu) + R_2(\zeta, \nu) \nu'(\zeta - \nu)] d\zeta,$$

где $R_1(\zeta, \nu)$ и $R_2(\zeta, \nu)$ — полиномы. Из этой формулы вытекает, что \tilde{V}_j^{nag} имеют вид полиномов по ζ и ν , умноженных на $\nu(\zeta - \nu)$ и $\nu'(\zeta - \nu)$. Подставляя найденные \tilde{V}_j^{nag} в краевые условия

\ast) В силу теоремы об обращении интеграла Фурье формула (1.22) эквивалентна равенству

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \nu(\zeta - \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma\nu + \sigma^3/3)} e^{-i\sigma\zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(\nu - \zeta)\sigma + \sigma^3/3]} d\sigma,$$

которое определяет интегральное представление функции $\nu(\zeta - \nu)$

(1.20), определяем недостающие постоянные, входящие в выражения \tilde{V}_j^{omp} , $j \geq 1$, и на этом завершается определение V_j^{omp} и построение ряда (1.14).

§ 2. Аналитический характер функций \tilde{V}_j и V_j

Наши построения до сих пор были формальными. Даже сам вопрос о смысле интегралов (1.16), (1.17), представляющих V_j , нуждается в уточнении: при $\zeta \rightarrow -\infty$, $\text{Im} \zeta = 0$ подынтегральные выражения растут, но не быстрее полиномов.

Аналитическое выражение функций \tilde{V}_j^{nag} , как следует из построений § 1, имеет вид

$$\tilde{V}_j^{nag} = P_{1j}^1(v, \zeta) v(\zeta - v) + P_{2j}^1(v, \zeta) v'(\zeta - v), \quad (2.1)$$

где P_{lj}^1 - полиномы по v и ζ . Выражение для \tilde{V}_j^{omp} получается в результате решения рекуррентной системы уравнений (1.18) при краевых условиях (1.20) и условии на бесконечности

$$\tilde{V}_j^{omp} \xrightarrow{|v| \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{arg } v = \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

Представим \tilde{V}_j^{nag} в виде суммы ($v = (w_1 - w_2)/2i$):

$$\tilde{V}_j^{nag} = (P_{1j}^1 w_1 + P_{2j}^1 w_1') \frac{1}{2i} + \left(-\frac{1}{2i}\right) (P_{1j}^1 w_2 + P_{2j}^1 w_2') = \tilde{V}_{1j}^{nag} + \tilde{V}_{2j}^{nag}. \quad (2.3)$$

Выражение для \tilde{V}_j^{omp} разобьется, соответственно, на сумму $\tilde{V}_{1j}^{omp} + \tilde{V}_{2j}^{omp}$, а краевые условия переписутся так:

$$\tilde{V}_{kj}^{omp} + \tilde{V}_{kj}^{nag} \Big|_{v=0} = 0 \quad (k=1, 2). \quad (2.4)$$

Краевые условия (2.4), условия на бесконечности (2.2) и рекуррентная система уравнений (1.18) однозначно определяют \tilde{V}_{kj}^{omp} . Важно отметить, что функции \tilde{V}_{kj}^{nag} (2.3) удовлетворяют тем же уравнениям (1.18), тем же условиям на бесконечности и краевым условиям, что и \tilde{V}_{1j}^{omp} , поэтому

$$-\tilde{V}_{1j}^{nag} = \tilde{V}_{1j}^{omp} = \left(-\frac{1}{2i}\right) (P_{1j}^1(v, \zeta) w_1(\zeta - v) + P_{2j}^1(v, \zeta) w_1'(\zeta - v)). \quad (2.5)$$

Анализируя краевые задачи для \tilde{V}_j^{omp} и \tilde{V}_{2j}^{omp} , нетрудно по индукции доказать формулы

$$\tilde{V}_{2j}^{omp} = \left(\rho_{1j}^2 \frac{w_2(\xi)}{w_1(\xi)} + \rho_{2j}^2 \frac{w_2'(\xi)}{w_1'(\xi)} \right) w_1(\xi-v) + \left(\rho_{3j}^2 \frac{w_2(\xi)}{w_1(\xi)} + \rho_{4j}^2 \frac{w_2'(\xi)}{w_1'(\xi)} \right) w_1'(\xi-v), \quad (2.6)$$

$$\tilde{V}_j^{omp} = (-2i) \left[\left(\rho_{1j}^2 \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} + \rho_{2j}^2 \frac{v'(\xi)}{w_1'(\xi)} \right) w_1(\xi-v) + \left(\rho_{3j}^2 \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} + \rho_{4j}^2 \frac{v'(\xi)}{w_1'(\xi)} \right) w_1'(\xi-v) \right], \quad (2.7)$$

где ρ_{kj}^2 , $k=1,2,3,4$, — полиномы от v , ξ , $w_1'(\xi)/w_1(\xi)$.
 Функции (2.5), (2.6), (2.7) быстро убывают вдоль полупрямых

$$L_1(+\infty \exp \frac{4\pi i}{3}, 0), \quad L_2(+\infty \exp \frac{2\pi i}{3}, 0), \quad L_3(0, +\infty)$$

соответственно при $\xi \rightarrow \infty$.

Контур интегрирования для \tilde{V}_{kj}^{omp} следует взять в виде изображенного на рис.7, $k=1,2$, причем выражения $\tilde{V}_{kj}^{omp} e^{i\sigma\xi}$ интегрируются вдоль полупрямых L_k , а \tilde{V}_j^{omp} — вдоль L_3 .

Решение задачи дифракции построено нами лишь в малой окрестности точки C . Из этой окрестности решение можно продолжить как в зону глубокой тени, так и в окрестность предельного луча. Окрестность точки C играет роль как бы

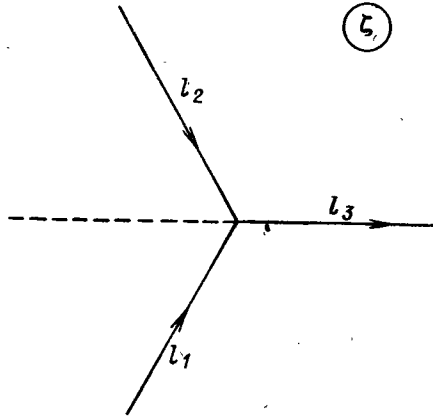


Рис.7.

зародыша волн довольно несхожей природы. Здесь зарождаются и волны соскальзывания, бегущие от точки C в область тени, и волновое поле, имеющее характер волны Фридендера — Келлера (см. гл.3, § 4), и волна френелевого типа в освещенной части полутени и полутеневая волна в затененной окрестности полутени. К довольно сложному выводу выражений для всех этих волн

мы и переходим.

§ 3. Пограничный слой в зоне глубокой тени

Пусть точка наблюдения находится в зоне тени, причем

$$\begin{aligned} 0 < D_1 \omega^{\varepsilon_1} < \sigma < D_2 \omega^{\varepsilon_2}, & \quad 0 \leq \nu \leq D_3 \omega^{\varepsilon_3}, & \quad (3.1) \\ 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1/12, & \quad 0 < \varepsilon_3 < 2\varepsilon_2 \end{aligned}$$

(D_i , ε_i - константы, не зависящие от ω). Функции $V_j = V_j^{\text{наг}} + V_j^{\text{отр}}$ представляются интегралами, подынтегральные выражения которых имеют особенности только в нулях функции $w_1(\zeta)$, стоящей в знаменателе. Приподнимая контур $-\infty < \zeta < +\infty$ над вещественной осью, заменим его на $-\infty < \text{Re } \zeta < +\infty$, $\text{Im } \zeta = \text{const} > 0$. Если const достаточно велика, то ниже его будет находиться несколько нулей функции $w_1(\zeta)$. Выражение для V_j представится в виде

$$V_j = 2\pi i \sum_{\substack{\zeta = \xi_\rho \\ 0 < \text{Im } \xi_\rho < D}} \text{Res } \tilde{V}_j e^{i\sigma\zeta} + \int_{\text{Im } \zeta = D} e^{i\sigma\zeta} \tilde{V}_j d\zeta, \quad (3.2)$$

$$w_1(\xi_\rho) = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, \quad D = \text{const} > 0.$$

При выполнении условий (3.1) нетрудно показать, что интеграл, входящий в выражение (3.2), будет иметь высший порядок малости при $\omega \rightarrow \infty$ по сравнению с суммой вычетов. Убывание интеграла при $\omega \rightarrow +\infty$ определяется множителем $\left| \exp i\sigma e^{i\frac{\pi}{3}} D \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^{-1} \right|$, а убывание вычетов - экспоненциальными множителями $\exp i\sigma \xi_\rho$, $\text{arg } \xi_\rho = \pi/3$, $0 < \text{Im } \xi_\rho < D$. В силу того, что выражение

$$e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} V_j \omega^{-j/3} \quad (3.3)$$

является формальным решением уравнения (1.1), оно же будет формальным решением в области (3.1), если вместо V_j подставить сумму вычетов $\sum_{\substack{\zeta = \xi_\rho \\ 0 < \text{Im } \xi_\rho < D}} \text{Res } \tilde{V}_j e^{i\sigma\zeta}$. Каждый вычет убывает

по-разному при $\omega \rightarrow \infty$; порядок убывания их зависит от множе-

лей $\exp i\sigma\xi_p$. Отсюда следует, что формальными решениями уравнения (1.1) будут все разложения, полученные из (3.2), (3.3):

$$2\pi i e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{\xi=\xi_p} (\tilde{V}_j e^{i\sigma\xi}) \omega^{-j/3}. \quad (3.4)$$

Выражению (3.4) можно придать вид

$$e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} [F_{1j}(\sigma, \nu) \omega_1(\xi_p - \nu) + F_{2j}(\sigma, \nu) \omega_1'(\xi_p - \nu)] e^{i\sigma\xi_p} \omega^{-j/3}, \quad (3.5)$$

где F_{1j} и F_{2j} — полиномы по σ и ν . Попытаемся «склеить» формальное решение (3.5) с волной соскальзывания (см. гл.3, § 3, формулы (3.10)–(3.11)). Схема наших рассуждений здесь та же, что и в других задачах, где возникает задача «склеивания» разложений разного типа. В промежуточной области (3.1) оба решения представляются разложениями одного и того же вида. Для того чтобы они совпали, как следует из соответствующего варианта леммы единственности, необходимо и достаточно, чтобы совпали некоторые коэффициенты этих разложений. Совпадение остальных коэффициентов получается автоматически. Формальные решения в промежуточной области удовлетворяют той же рекуррентной системе уравнений пограничного слоя (1.10). В рассматриваемом здесь случае роль промежуточных формальных решений играет разложение вида (3.5). Заметим, что формальное решение (3.5) обращается в нуль на S , так как (3.4) или (3.5) представляет собой интеграл по замкнутому контуру от формального решения, тоже равного нулю на контуре.

Для рассматриваемого здесь типа формальных решений имеет место лемма единственности.

Формальные решения вида (3.5), обращаемые в нуль на контуре S , определяются однозначно, если задать свободные члены $F_{1j}(0,0)$, $j=0,1,2,\dots$, полиномов F_{1j} .

Доказательство. В силу того, что формальное решение (3.5) удовлетворяет системе рекуррентных соотношений (1.10), для доказательства леммы достаточно показать, что из соотношений

$$L_0 V = L_0 [(F^1(\nu, \sigma) \omega_1(\xi_p - \nu) + F^2(\nu, \sigma) \omega_1'(\xi_p - \nu)) e^{i\sigma\xi_p}] = 0, \quad (3.6)$$

$$V|_{v=0} = 0 \quad (3.7)$$

(где F^1 и F^2 - полиномы по v и σ) следует, что $F^2(v, \sigma) \equiv 0$, $F^1(v, \sigma) \equiv \text{const}$. Соотношение (3.7) эквивалентно равенствам

$$i \frac{\partial F^1}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 F^1}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial F^2}{\partial v} (\xi_p - v) + F^2 = 0, \quad (3.8)$$

$$-2 \frac{\partial F^1}{\partial v} + i \frac{\partial F^2}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^2} = 0, \quad F^2|_{v=0} = 0. \quad (3.9)$$

Считая, что

$$F^1 = \sum_{j=0}^M F^{1j}(v) \sigma^j, \quad F^2 = \sum_{j=0}^M F^{2j}(v) \sigma^j, \quad (3.10)$$

легко получаем утверждение леммы, приравнявая нулю коэффициенты в уравнениях (3.8) и (3.9) при σ^M и σ^{M-1} (если $M \geq 1$). Соответствующие выкладки мы опускаем по причине их элементарности.

Рассмотрим теперь волну соскальзывания (см. гл.3, § 3)

$$e^{i\omega\tau_0(s) + i\xi_p \omega \int_0^s (2c_0 \rho^2)^{-1/2} ds} \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_j(v, s) \omega_1'(\xi_p - v) + Q_j(v, s) \omega_1'(\xi_p - v)) \omega^{-j/3} \quad (3.11)$$

Раскладывая функции ρ_j и Q_j и $\int_0^s \frac{ds}{c_0^{1/2} \rho^{2/3}}$ по степеням s и вводя затем переменную σ (см. (1.5)), приходим после некоторых преобразований к решению вида (3.6). Потребуем, чтобы это решение совпадало с разложением (3.5). Как следует из леммы единственности, для этого достаточно совпадения свободных членов у полиномов, стоящих коэффициентами при $\omega_1'(\xi_p - v)$. Эти свободные члены равны значениям $A_j(s)$ (см. § 1 гл.3) при $s=0$. Таким образом, потребовав асимптотического совпадения в области (3.1) разложений (3.5) и (3.11), мы однозначно нашли начальные данные для уравнений переноса, которым удовлетворяют функции $A_j(s)$. Это однозначно определяет волны соскальзывания, а следовательно, и соответствующее продолжение этих волн из пограничного слоя в лучевую зону, где имеет место разложение Фридлиндера-Келлера (см. § 4 гл.3).

§ 4. Продолжение решения из окрестности точки C
в промежуточную область

Рассмотрим сначала продолжение формулы для падающей волны в промежуточную область

$$0 < D_1 \omega^{\varepsilon_1} < \sigma < D_2 \omega^{\varepsilon_2}, \quad 0 < D_3 \omega^{\varepsilon_3} < \nu < D_4 \omega^{\varepsilon_4}, \quad |\sigma - \sqrt{\nu}| < D_5 \omega^{\varepsilon_5}, \quad (4.1)$$

$$0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1/12, \quad 0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_4 < 1/6, \quad \varepsilon_5 < 1/2 \varepsilon_3.$$

В этой области будем склеивать разложение, полученное в § 1, с некоторым формальным решением, определенным в окрестности предельного луча, отделяющего область света от зоны тени. Укажем сначала на играющее важную роль при проведении этой склейки выражение для падающей волны. Обратимся к выражению (2.1).

Заменим сначала функции v и v' на $\frac{w_1 - w_2}{2i}$ и $\frac{w_1' - w_2'}{2i}$, затем

вычеркнем w_2 и w_2' . Функции $w_1(\zeta - v)$ и $w_1'(\zeta - v)$ заменим на их асимптотику при $v - \zeta \rightarrow +\infty$:

$$w_1(\zeta - v) \sim e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}(v-\zeta)^{3/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{v-\zeta}} + \dots \right),$$

$$w_1'(\zeta - v) \sim e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}(v-\zeta)^{3/2}} (\sqrt{v-\zeta} + \dots).$$

Ряды $(1/\sqrt[4]{v-\zeta} + \dots)$ и $(\sqrt{v-\zeta} + \dots)$ переразложим по возрастающим степеням ζ/v , заменим экспоненту $\text{Exp} i\frac{2}{3}(v-\zeta)^{3/2}$ выражением

$$e^{2/3 i (v-\zeta)^{3/2}} \sim e^{2/3 i v^{3/2} - \sqrt{v}\zeta + \zeta^2 i / 4\sqrt{v}} \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{v}} \right)^3 + \dots \right).$$

Здесь $1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{v}} \right)^3 + \dots$ - разложение по степеням \sqrt{v} экспоненты

$$e^{i \left[\frac{2}{3} (v-\zeta)^{3/2} - \frac{2}{3} v^{3/2} + \sqrt{v}\zeta - \frac{\zeta^2}{4\sqrt{v}} \right]}.$$

После всех этих преобразований вместо выражений (1.16), (2.1) для $u_{\text{пад}}$ придем к формуле

$$u^{\text{наг}} \sim e^{i\omega\tau_{\text{наг}}(\sigma)} + \frac{\pi i}{4} \frac{u_0(C)}{\sqrt{\nu}} \int_L e^{i(\sigma-\nu)\zeta} \cdot e^{\frac{\zeta^2}{4\nu}} L(1+\dots) d\zeta. \quad (4.2)$$

Здесь $(1+\dots)$ - ряд по степеням $\nu^{-1/2}$ и $\omega^{-1/3}$. Интеграл (4.2) берется по прямой $(-\infty e^{i\beta}, +\infty e^{i\beta})$ ($0 < \beta < \pi/2$). Выражение (4.2) следует понимать как ряд из интегралов: надо формально поменять суммирование и интегрирование. Заметим, что эти интегралы нетрудно вычислить в явном виде: они легко сводятся к сумме гамма-функций целого и полуполого аргументов.

Укажем путь, который приводит к формуле (4.2). Выражение для падающей волны быстро убывает при $\zeta \rightarrow +\infty$ (см. (2.1)). Контур на рис. 7 мы деформируем так, чтобы горизонтальная часть контура лежала на прямой

$$\text{Im } \zeta = D_\epsilon \omega^\epsilon, \quad 1/24 < \epsilon < 1/12. \quad (4.3)$$

Заменяя формально ω_j , ω_j' вдоль полупрямых l_j , ($j=1,2$) на их асимптотику ($\nu - \zeta \rightarrow +\infty$), получаем для подынтегральных выражений формулы, содержащие экспоненты, равные для l_1 и l_2 соответственно

$$e^{i\sigma\zeta + 2/3 i (\nu - \zeta)^{3/2}}, \quad (4.4)$$

$$e^{i\sigma\zeta - 2/3 i (\nu - \zeta)^{3/2}}. \quad (4.5)$$

Разлагая эти выражения в ряды по степеням ζ , считая $|\zeta| \ll \nu$, получаем вместо (4.4), (4.5)

$$e^{2/3 i \nu^{3/2}} e^{i[(\sigma - \sqrt{\nu})\zeta + 1/4 \cdot \zeta^2/\sqrt{\nu} + 1/24 \cdot (\zeta/\sqrt{\nu})^3 + \dots]}, \quad (4.6)$$

$$e^{-2/3 i \nu^{3/2}} e^{i[(\sigma + \sqrt{\nu})\zeta - 1/4 \cdot \zeta^2/\sqrt{\nu} + \dots]}. \quad (4.7)$$

Разложим экспоненты

$$\exp\left[\frac{i}{24} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\nu}}\right)^3 + \dots\right], \quad \exp\left(-\frac{i}{4} \cdot \frac{\zeta^2}{\sqrt{\nu}} + \dots\right) \quad (4.8)$$

в ряды по степеням аргумента. Функции (4.6), (4.7) заменятся рядами по обратным степеням ν , умноженными соответственно на

$$e^{2/3 \nu^{3/2} z + (\sigma - \sqrt{\nu}) \zeta z + i/4 \cdot \zeta^2 \sqrt{\nu}}, \quad (4.9)$$

$$e^{-2/3 \nu^{3/2} z + (\sigma + \sqrt{\nu}) \zeta z}. \quad (4.10)$$

Проведем полупрямую L_1 (см. рис.7) через точку

$$\zeta_{\text{смещ}} = -2\sqrt{\nu}(\sigma - \sqrt{\nu})$$

(где обращается в нуль производная по ζ от фазовой функции экспоненты (4.9)) в том же направлении, что и раньше, до пересечения с прямой (4.3). Полупрямую L_3 направим от этой точки пересечения вдоль прямой (4.3), а L_2 проведем симметрично L_1 относительно L_3 . Как экспонента (4.5), так и первоначальные подынтегральные выражения § 2 малы на полупрямой L_2 , а экспонента (4.9) на L_1 при $|\zeta| \gg \sqrt[4]{\nu}$ экспоненциально мала. Кроме того, первоначальное подынтегральное выражение (см. § 1, 2) мало на L_3 , поэтому с точностью до экспоненциально малых величин подынтегральное выражение для падающей волны равно интегралу от только что полученного после разложения экспонент (4.4), (4.5) (см. (4.8)–(4.10)) выражения вдоль части L_1 от пересечения с L_2 , L_3 до того участка, где $\sqrt[4]{\nu} \ll \zeta \ll \sqrt{\nu}$. Мы можем заменить интегрирование по отрезку указанного вида интегрированием по полупрямой L_1 , а полупрямую L_1 – интегрированием по всей прямой, содержащей L_1 . Все это внесет лишь экспоненциально малую погрешность.

Закончим на этом рассмотрение формул для падающей волны в промежуточной области и перейдем к преобразованию выражения для отраженной волны там, где $\sqrt{\nu} - \sigma \geq 0$. Этим неравенством с точностью до главных членов определяется освещенная часть промежуточной области. Обратимся к нахождению V_j^{omp} . Продолжение в этом случае будет разное на разных полупрямых. На полупрямой L_3 в подынтегральном выражении для V_j^{omp} $w_1(\zeta - \nu)$ и $w_1'(\zeta - \nu)$ заменяются на соответствующую асимптотику. Затем во внеэкспоненциальных членах проводится еще раз переразложение уже по степеням $1/\sqrt{\nu}$. В экспоненте $\exp\left[\frac{2}{3} i(\nu - \zeta)^{3/2} + i\sigma\zeta\right]$

также проводится переразложение по степеням $1/\sqrt{\nu}$, и она заменится выражением

$$\begin{aligned} \exp i \left[\sigma \zeta + \frac{2}{3} (\nu - \zeta)^{3/2} \right] &= \exp \left[\frac{2}{3} \nu^{3/2} i + i(\sigma - \sqrt{\nu}) \zeta + \frac{\zeta^2}{4\sqrt{\nu}} i + \dots \right] = \\ &= \exp \left[i \frac{2}{3} \nu^{3/2} + (\sigma - \sqrt{\nu}) \zeta i \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\zeta^2 i}{4\sqrt{\nu}} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\zeta^2 i}{4\sqrt{\nu}} + \dots \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Степенные ряды располагаются по степеням $1/\sqrt{\nu}$. На полупрямой L_2 $w_1(\zeta - \nu)$ и $w_1'(\zeta - \nu)$ таким же образом заменяются асимптотическими разложениями, однако исходными выражениями для этих преобразований будут формулы для V_{2j}^{omp} , $j=0,1,2,\dots$ (см. (2.6)). На полупрямой L_1 подынтегральное выражение лишь знаком отличается от подынтегрального выражения интеграла, представляющего падающую волну. Продолжение подынтегрального выражения мы уже рассматривали. Таким образом, интеграл по L_1 сводится к сумме интегралов вида

$$\int_{\Gamma} e^{i \zeta^2 / 4\sqrt{\nu} + (\sigma - \sqrt{\nu}) \zeta i} \zeta^k d\zeta, \quad k=0,1,2,\dots,$$

которые нетрудно выразить через интегралы Френеля и экспоненты.

В затемненной части промежуточной области (4.1), т.е. при $\sigma - \sqrt{\nu} \gg 0$, удобно пользоваться тем представлением для волнового поля, которое получается сложением выражения для падающей и отраженной волн. В результате интеграл по полупрямой L_1 сокращается (см. § 2) и добавляется интеграл по продолжению L_1 от того же выражения, которое мы получили, рассматривая падающую волну.

§ 5. Аналитическое представление падающего волнового поля в окрестности предельного луча

Наша цель продолжить выражения § 4 на такую окрестность предельного луча, где малость расстояния от S уже не предполагается. Для этой цели надо построить формальные решения уравнения $(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)})u = 0$, в которые бы переходили разложения

§ 4. К таким построениям мы и перейдем. В этом параграфе будет получено соответствующее выражение для падающей волны.

Введем удобные для рассмотрения окрестности предельного луча координаты τ , α — лучевые координаты, соответствующие лучам соскальзывания. Пусть α характеризует точку на \mathcal{S} , τ — точку на луче, касающемся \mathcal{S} в точке α . Предположим, что в точках \mathcal{S} $\tau = \alpha$ (см. гл.2 и 3, § 4). В точке \mathcal{C} пусть $\tau = \alpha = 0$.

Рассмотрим сначала выражение для падающей волны. Для ее эйконала имеет место формула

$$\tau^{nag}(\tau, \alpha) = \tau - \Psi(\tau)\alpha^2 + O(\alpha^3). \quad (5.1)$$

Член с первой степенью α отсутствует, так как фронт падающей волны $\tau^{nag} = \tau_0 = const$ и фронт $\tau = \tau_0 = const$ волны соскальзывания касаются на предельном луче. Для $\Psi(\tau)$ легко получается выражение

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} (K_1 - K_2) \frac{J^2}{c_0(\tau)}, \quad (5.2)$$

где $J = J(\tau) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{x}(\alpha, \tau)) \right|_{\alpha=0}$ — расходимость лучей волн соскальзывания вдоль предельного луча (см. гл.1), $K_1 - K_2$ — разность кривизн соответственно фронтов волны соскальзывания и падающей волны.

Отметим, что функция $\Psi(\tau)$ положительна по крайней мере на некотором участке предельного луча, что важно для последующих преобразований, так как вблизи \mathcal{S} , очевидно, $K_1 - K_2 > 0$.

$$\text{Введем новую переменную } \gamma = \omega^{1/3} \alpha. \quad (5.3)$$

Учитывая (5.1), (5.3), выражение для лучевого ряда падающей волны можно записать в виде

$$u_{nag} \sim e^{i\omega\tau - i\omega^{1/3}\gamma^2\Psi(\tau) + \Psi_1(\tau)\gamma^3 + \dots} \left(u_0^{nag}(\tau, \alpha) + \frac{u_1^{nag}(\tau, \alpha)}{(-i\omega)} + \dots \right).$$

Считая γ малой величиной, мы можем заменить $\exp(\Psi_1(\tau)\gamma^3 + \dots)$ рядом по степеням показателя экспоненты, $u_j(\tau, \alpha)$ тоже можно разложить по степеням α , заменяя затем α на γ по формуле (5.3). В результате такого перераспределения выражение для u_{nag} примет вид

$$u_{nag} \sim e^{i\omega\tau - i\omega^{1/3}\gamma^2\Psi(\tau)} \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl}(\tau) \gamma^k \omega^{-l/3}, \quad |\gamma| \ll 1. \quad (5.4)$$

Каждый член разложения (5.4) заменим некоторым интегральным представлением, исходя из интеграла

$$e^{-i\omega^{1/3}\gamma^2\psi(\tau)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{2\sqrt{\pi}\omega^{1/6}\sqrt{\psi(\tau)}} \int_L e^{i(\gamma\zeta + \zeta^2/4\omega^{1/3}\psi(\tau))} d\zeta. \quad (5.5)$$

В равенстве (5.5) контур L есть прямая $(-\infty e^{\pi i/4}, \infty e^{\pi i/4})$. Чтобы получить интегральное представление для $\gamma^k \exp(-i\omega^{1/3}\gamma^2\psi(\tau))$ в (5.4), надо продифференцировать равенство (5.5) k раз по γ . Должным образом подобранная линейная комбинация полученных интегралов даст выражение для функции (5.4). При этом получится равенство вида

$$\gamma^k e^{-i\omega^{1/3}\gamma^2\psi(\tau)} = \int_L \left(b_k^k \frac{\zeta^k}{\omega^{k/3+1/6}} + b_{k-2}^k \frac{\zeta^{k-2}}{\omega^{k-1/3+1/6}} + \dots \right) \times \\ \times e^{i(\gamma\zeta + \zeta^2/4\omega^{1/3}\psi(\tau))} d\zeta. \quad (5.6)$$

В скобках под интегралом стоит полином, младший член которого по ζ имеет вид

$$b_0^{2k}(\tau) \frac{1}{\omega^{k/3+1/6}} \quad \text{или} \quad b_1^{2k+1}(\tau) \frac{\zeta}{\omega^{k+1/3+1/6}}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Разложение (5.4) с учетом формул (5.5), (5.6) примет теперь вид

$$u_{n\text{ag}} \sim \omega^{-1/6} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W_j^{\text{nag}}(\gamma, \tau)}{\omega^{j/3}} \cdot e^{i\omega\tau}, \quad (5.7)$$

$$W_j^{\text{nag}}(\gamma, \tau) = \int_{L=(-\infty e^{i\pi/4}, +\infty e^{i\pi/4})} e^{i(\gamma\zeta + \frac{\zeta^2}{4\omega^{1/3}\psi(\tau)})} Q_j^{\text{nag}}(\zeta) d\zeta, \quad \gamma = \omega^{1/3} \alpha, \quad (5.8)$$

Q_j^{nag} - полином по ζ степени не выше j с коэффициентами, зависящими от τ .

§ 6. Рекуррентная система уравнений для окрестности предельного луча

В дальнейшем, так же как и в малой окрестности точки C , важную роль будет играть аналитическая техника, связанная с

интегралами Фурье.

Основное уравнение $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)}\right) u = 0$ мы будем рассматривать в координатах τ, α :

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)}\right) u \equiv \frac{1}{c(\alpha, \tau) J(\alpha, \tau)} \left[\frac{\partial J(\alpha, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial (c(\alpha, \tau) \frac{\partial u}{\partial \alpha})}{\partial \alpha} \right] + \frac{\omega^2}{c^2(\alpha, \tau)} u = 0. \quad (6.1)$$

Подставим в (6.1) вместо u выражение

$$u = e^{i\omega\tau} W(\tau, \alpha, \omega) \quad (6.2)$$

и разложим все коэффициенты уравнения для W по степени α .
Заменяем далее α и γ по формуле (5.3) и будем считать, что

$$W \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W_j(\tau, \gamma)}{\omega^{j/3}}. \quad (6.3)$$

Получим для W_j рекуррентную систему уравнений

$$L_0 W_0 = 0, \quad L_0 W_1 + L_1 W_0 = 0, \dots, \quad (6.4)$$

$$\text{где } L_0 = \frac{2}{c_0^2(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{J_0(\tau) c_0(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{J_0(\tau)}{c_0(\tau)} \right), \quad c_0(\tau) = c(\tau, \alpha) \Big|_{\alpha=0}, \quad (6.5)$$

L_j — дифференциальные операторы по τ и γ порядка не выше второго, коэффициенты которых — функции τ и γ . Важно заметить, что эти функции — полиномы по γ .

Будем искать функции W_j в виде интегралов

$$W_j(\gamma, \tau) = \int_{L'_j} e^{i\gamma\zeta} \tilde{W}_j(\zeta, \tau) d\zeta, \quad (6.6)$$

L'_j — некоторый контур, причем дифференцирование W_j по γ эквивалентно умножению \tilde{W}_j на $i\zeta$, а умножение W_j на γ эквивалентно применению оператора $i \partial / \partial \zeta$ к \tilde{W}_j . Последнее эквивалентно тому, что при естественном в такой ситуации интегрировании по частям $(\gamma e^{i\gamma\zeta} d\zeta = \frac{1}{i} \frac{d}{d\zeta} e^{i\gamma\zeta})$ внеинтегральные члены

сокращаются. Последнее нуждается в пояснении. Контур L'_j — один из контуров L_i (см. рис. 7). Сокращение внеинтегральных членов на бесконечности — следствие быстрого убывания подынтегрального выражения и его производных при $\zeta \rightarrow \infty$. Сокращение внеинтегральных членов в точке пересечения L_i следует из того, что решение представится суммой интегралов, аналогичных

(6.6), и сокращение происходит за счет суммирования внеинтегральных членов, возникающих при интегрировании по частям каждого из рассматриваемых интегралов. Для того чтобы выражения (6.2), (6.6) были формальным решением уравнения (6.1), достаточно, чтобы функции \tilde{W}_j удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\tilde{L}_0 \tilde{W}_0 = 0, \quad \tilde{L}_0 \tilde{W}_1 + \tilde{L}_1 \tilde{W}_0 = 0, \dots, \quad (6.7)$$

$$\text{где } \tilde{L}_0 \tilde{W}_0 = \frac{2}{c_0(\tau)} \cdot \frac{d\tilde{W}_0}{d\tau} + \frac{c_0}{J} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{J}{c_0} \right) \tilde{W}_0, \quad (6.8)$$

а \tilde{L}_j — дифференциальные операторы по τ и ζ , с коэффициентами, зависящими от τ и ζ (по ζ они являются полиномами не выше второй степени). При $\tau \rightarrow 0$ коэффициенты операторов \tilde{L}_j имеют сингулярности, растущие с ростом j за счет $J_0(\tau) \sim \tau^{-1}$.

Опуская простые выкладки, имеющие много общего с выкладками второй главы, можно получить при $\tau \rightarrow 0$

$$\tilde{W}_j = \frac{a_j^j}{\tau^{j+1/2}} + \frac{a_{j-1}^j}{\tau^{j-1/2}} + \dots \quad (6.9)$$

Коэффициенты a_j^j — полиномы от $\ln \tau$ с зависящими от ζ коэффициентами:

$$a_j^j = a_{j_0}^j(\zeta) + a_{j_1}^j \ln \tau + \dots$$

Из рекуррентной системы уравнений (6.7) коэффициенты $a_{j_0}^j(\zeta)$ не определяются; если же их задать, то функции \tilde{W}_j определяются однозначно. Задание коэффициентов $a_{j_0}^j(\zeta)$, $j=0, 1, \dots$, играет роль задания начальных данных для системы уравнений (6.5). При том выборе начальных данных, который обеспечивает склеивание рассматриваемых здесь выражений для волнового поля с выражениями в окрестности точки C логарифмические члены, как и в рассматриваемых ранее задачах (гл. 2 и 3), отсутствуют.

Другой вариант рекуррентных уравнений мы получим, если будем искать W_j в виде интегралов

$$W_j = \int_{i''} e^{i(\nu\zeta + \frac{\zeta^2}{4\omega\sqrt{1+\nu^2}})} \tilde{W}_j d\zeta, \quad (6.10)$$

где $\Psi(\tau)$ — положительная функция, введенная в § 5, а \mathcal{L}'' , как будет следовать из дальнейшего (см. § 7), — либо контур \mathcal{L}_1 , либо контур \mathcal{L}'_1 . Для \tilde{W}_j получается рекуррентная система уравнений

$$K_0 \tilde{W}_0 = 0, \quad K_0 \tilde{W}_1 + K_1 \tilde{W}_0 = 0, \quad \dots, \quad (6.11)$$

как и раньше $K_0 = L_0 = \tilde{L}_0 \cdot 1/c_0$, (6.12)

K_j — дифференциальные операторы со свойствами, аналогичными свойствам L_j . Для решений \tilde{W}_j системы (6.11) получаются те же результаты, что и результаты, относящиеся к W_j .

§ 7. Распространение формул промежуточной области в окрестность предельного луча

Вернемся к рассмотрению § 4.

Пусть сначала точка (τ, α) находится в освещенной части полутени, т.е. $\gamma < 0$ и выполнены неравенства (4.1). Заметим прежде всего, что в этом случае речь пойдет лишь о продолжении выражения для отраженной волны: падающую волну мы будем считать заданной своим лучевым разложением во всей интересующей нас области. Разложения § 4 для отраженной волны мы продолжим по следующему плану: выражения, которые получаются в результате интегрирования по полупрямым \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_3 , мы преобразуем в формальные решения, рассмотренные в начале § 6, а выражение, интегрирующееся по \mathcal{L}_1 , распространяется с помощью формул § 5 и конца § 6.

Полупрямые \mathcal{L}_j здесь те же, что и в § 2 (см. рис.7). Рассмотрим сначала формальное решение начала § 6 (см.(6.2),(6.3))

$$u \sim e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W_j(\tau, \gamma)}{\omega^{j/s+\delta}}, \quad (7.1)$$

где W_j строятся в соответствии с формулами (6.4)–(6.8), постоянная δ подлежит определению. Считая, что точка (τ, α) лежит в освещенной части $\gamma < 0$ области (4.1), преобразуем выражение (7.1) к виду, аналогичному тому, который имели выражения, рассмотренные в § 4.

В области (4.1) вместо τ и α удобно ввести переменные

ν и σ . Воспользуемся формулами (6.9) и разложениями

$$\tau^{1/2-j} = (\tau - \alpha + \alpha)^{1/2-j} = \sum_{s=0}^{\infty} (\tau - \alpha)^{1/2-j-s} \alpha^s C_{1/2-j}^s, \quad (7.2)$$

$C_{1/2-j}^s$ - биномиальные коэффициенты,

$$\tau - \alpha = \sqrt{\frac{2\rho_0}{C_{00}^2}} \sqrt{n} + C_1 n + C_2 n^{3/2} + \dots, \quad (7.3)$$

$\rho_0 = \rho|_{s=0}$, ρ - эффективный радиус кривизны в точке s ,

$$\tau = \tau_0(s) + \frac{2}{3} \nu^{3/2} \omega^{-1} + \omega^{-4/3} f_1(\sigma, \sqrt{\nu}) + \omega^{-5/3} f_2(\sigma, \sqrt{\nu}) + \dots, \quad (7.4)$$

$$\omega^{1/3} \alpha = \gamma = (\sigma - \sqrt{\nu}) \frac{\rho_0^{2/3} 2^{1/3}}{C_{00}^{2/3}} + \omega^{-1/3} g_1(\sigma, \sqrt{\nu}) + \omega^{-2/3} g_2(\sigma, \sqrt{\nu}) + \dots \quad (7.5)$$

Формулы, аналогичные (7.3)-(7.5), можно найти в гл.2, f_i и g_i - полиномы своих аргументов.

В соответствии с формулой (7.5) сделаем в интегралах, представляющих W_j , пропорциональную замену переменных

$$\frac{\rho_0^{2/3} \sqrt{2}}{C_{00}^{2/3}} \xi = \xi';$$

используя соотношения (6.9), (7.2)-(7.5), после ряда преобразований придадим формальному решению (7.1) вид

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(\sigma, \nu)}{\omega^{j/3 + \delta - 1/6}} + \dots, \quad (7.6)$$

(многоточием заменены члены, содержащие $\ln \omega$, $\ln^2 \omega$ и т.д. если они имеются).

В знаменателе степень $\omega^{-1/6}$ появилась за счет того, что

$$\tilde{W}_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sim \frac{1}{\sqrt{\tau - \alpha}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\omega^{-1/6} \nu^{1/4}}.$$

Для совпадения разложений (7.6) и разложений, стоящих под интегралами по l_2 и l_3 § 4, положим $\delta = 1/6$ и интегрированием по частям освободимся от множителей вида σ^k , $k > 0$ - целое, в формулах для V_j . Мы получим

$$u \sim e^{i\omega\tau_0(s) + 2/3 \nu^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{l'} e^{i(\sigma - \sqrt{\nu})\xi} \tilde{U}_j(l, \nu) \omega^{-j/3} d\xi.$$

Здесь \tilde{U}_j - ряды

$$\tilde{U}_j \sim \sum_{k=-M_j}^{\infty} \left(\frac{C_{kj}(\xi)}{\nu^{1/4+k/2}} + \dots \right) \quad (7.7)$$

Мингстсчием заменены логарифмические члены, если они имеются.

Пользуясь тем, что выражения

$$e^{2/3\nu^{3/2}\xi + i(\sigma - \sqrt{\nu})\xi} \tilde{U}_j(\xi, \nu)$$

удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (1.10), нетрудно показать, что \tilde{U}_j находятся, причем однозначно, если задать в (7.7) коэффициенты при $\nu^{-1/4}$ (см. лемму единственности гл.2).

Приравняем в \tilde{U}_j коэффициент при $\nu^{-1/4}$ тому значению, которое имеет соответствующий коэффициент в разложениях § 4.

Этим однозначно определяются коэффициенты C_{kj} , $k \neq 0$. В силу того, что разложения § 4 не содержат логарифмов, их не будет и в формуле (7.7), а следовательно, и в формулах § 6. Задание коэффициентов при $\nu^{-1/4}$ в разложениях (7.7) однозначно определяет коэффициент при $\tau^{-1/2}$ в разложениях § 6. Тем самым в разложениях (6.2)-(6.9) начала § 6 находятся все члены.

Рассмотрим теперь вопрос о выражениях, связанных с полупрямой L_1 . Сделаем в разложениях (6.10)-(6.12) замену переменных (7.5) и перейдем в области (4.1) к координатам σ , ν . В отношении представлений

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{i\omega\tau_0} \int_{L_1} e^{2/3 i \nu^{3/2} + i(\sigma - \sqrt{\nu})\xi + \xi^{2/4} \sqrt{\nu}} \frac{\tilde{U}_j(\xi, \nu)}{\omega^{j/3+\delta}} d\xi$$

можно повторить то, что было сказано о разложениях, связанных с полупрямыми L_2 и L_3 .

Важно отметить, что разложение (5.7)-(5.8) и разложение § 4 для падающей волны представляют одну и ту же волну. Отсюда следует, что, переходя в формулах (5.7), (5.8) к координатам σ , ν в области (4.1), мы получим то же разложение, которое имеет место для падающей волны § 4. Таким образом, продолжением выражения § 4, связанного с интегрированием вдоль

полупрямой L_1 , является разложение (5.7), взятое, однако, с противоположным знаком, причем интегралы (5.8) следует брать не по прямой L , а по полупрямой L_1 . Мы приходим, таким образом, к ряду из интегралов Френелева типа.

По поводу интеграла вдоль L_1 следует сделать одно замечание. Здесь нет необходимости полагать γ малой величиной, что было важно для построений § 5. Можно считать $\gamma = O(1)$ и даже $\gamma = O(\omega^\varepsilon)$, $\varepsilon < 1/12$. В самом деле в освещенной области $\gamma < 0$ экспонента в интеграле вдоль L_1 убывает при $\zeta^2 \rightarrow \infty$, $\pi < \arg \zeta < 3\pi/2$, не только за счет $\exp \frac{\zeta^2}{4\omega^{1/3}\Psi(\tau)}$, но и за счет $\exp i\gamma\zeta$. В силу того, что полиномы Q_j имеют степень по ζ не выше чем j , имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\omega^{j/3}} \int_{L_1} e^{i(\gamma\zeta + \frac{\zeta^2}{4\omega^{1/3}\Psi(\tau)})} Q_j^{n\alpha\beta}(\zeta) d\zeta \right| = \\ & \leq \frac{1}{\omega^{j/3}} \int_{L_1} \left| e^{i\gamma\zeta + \frac{\zeta^2}{4\omega^{1/3}\Psi(\tau)}} Q_j^{n\alpha\beta}(\zeta) \right| d\zeta \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{\omega^{j/3}} \int_{L_1} \left(1 + |\zeta|^j \right) \left| e^{\frac{\zeta^2}{4\omega^{1/3}\Psi(\tau)}} \right| d\zeta = O(\omega^{-j/6+1/6}). \quad (7.8) \end{aligned}$$

Последнее неравенство получено без предположения о малости γ .

Другое замечание связано с выбором $\Psi(\tau)$. Оказывается, функция $\Psi(\tau)$ однозначно определяется требованиями: выражение (5.7) является формальным решением (1.1), точнее, \widetilde{W}_j удовлетворяют рекуррентной системе уравнений (6.11), выражения \widetilde{W}_0 и \widetilde{W}_1 в координатах σ и ν имеют при $\nu^{-1/4}$ те же коэффициенты, что и соответствующие разложения § 4, а выражение для \widetilde{W}_1 является полиномом 1-го порядка по ζ (при произвольном выборе $\Psi(\tau)$ \widetilde{W}_1 , вообще говоря, — полином 2-го порядка по ζ). Требованием того, чтобы старшая степень полиномов Q_j не превосходила j , обеспечивается выполнение соотношения (7.8). При $Q_j \sim \zeta^2$ порядок величины первых двух членов формального разложения совпадает. Аналогичные трудности есть при $j > 1$.

Метод продолжения решений из затененной части (4.1) в затененную окрестность предельного луча осуществляется теми

же приемами.

Следует при этом отметить, что в затененной части окрестности предельного луча целесообразно объединять выражения для падающей волны (заданной разложением (5.7)–(5.8), рассмотренным в § 5) и для отраженной волны. В области, где $0 \leq \gamma = O(1)$, это приводит к представлению $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ в виде суммы интегралов по L_2 , L_3 и L'_1 , где L'_1 – полупрямая, дополняющая L_1 до полной прямой. Такое представление неудобно в промежуточной области между зоной полутени и зоной глубокой тени, где имеет место разложение Фридлиндера–Келлера. В этой промежуточной области, где $0 < \text{const} \leq \gamma \leq \text{const} \omega^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ε достаточно мало, полупрямую L_3 повернем до совпадения с L'_1 , а подынтегральное выражение возьмем таким же, как в интеграле по L_2 . Такой интеграл по контуру $L_2 + L'_1$, охватывающему линию корней $\text{arg} \zeta = \pi/3$ функции $u_1(\zeta)$ в положительном направлении, и будет искомым интегральным представлением u .

Поясним, почему только что указанный выбор подынтегрального выражения будет согласован с формулами для u в промежуточной зоне (4.1). Подынтегральное выражение в интеграле по L_2 , как следует из рассмотрений § 2 и 4, есть продолжение подынтегрального выражения для суммы падающей и отраженной волн, следовательно, это же выражение может быть подынтегральным при интегрировании вдоль L'_1 . Заметим, что при $\gamma = O(\omega^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, мы получим для $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ разложение, все слагаемые в котором экспоненциально малы. Это нетрудно доказать, приподнимаем контур интегрирования над вещественной осью. Заменяя интеграл на сумму вычетов, мы получим выражения, переходящие в разложения Фридлиндера – Келлера.

§ 8. Формулы для волнового поля в тени и полутени

Подводя итог нашим рассмотрениям, выпишем формулы для волнового поля в первом приближении:

1) для окрестности точки C (область, где зарождаются все волны рассматриваемой задачи)

$$u \approx \frac{e^{i\omega\tau_0(s)} u_0(C)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\tau} \left(v(\xi - v_0) - \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} w_1(\xi - v_0) \right) d\xi,$$

$$\tau_0(s) = \int_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad v_0 = \omega^{2/3} n \sqrt[3]{\frac{2}{c_0^2 \rho_0}}, \quad \sigma = \frac{\omega^{1/3} s}{\sqrt[3]{2 c_0 \rho_0^2}};$$

2) для окрестности границы (зона глубокой тени)

$$u_x \sim e^{i\omega\tau_0(s)} (-2i\sqrt{\pi}) u_0(C) \sqrt[6]{\frac{c_0}{\rho}} \cdot \frac{\rho_0}{c_{00}} \cdot \frac{1}{[w_1'(\xi_x)]^2} \times$$

$$\times e^{i\omega^{1/3} \xi_x \int_0^s \frac{ds}{\sqrt[3]{2c_0 \rho^2}}} w_1(\xi_x - v), \quad v = \omega^{2/3} n \sqrt[3]{\frac{2}{c_0^2 \rho}},$$

через ξ_x обозначены последовательные корни функции Эйри $w_1(t)$;

3) для зоны глубокой тени на некотором удалении от \mathcal{S}

$$(n \geq C\omega^{-2/3+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0)$$

$$u_x \sim u_0(C) \sqrt{\frac{c(\tau, \alpha)}{J(\tau, \alpha)}} \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} \frac{1}{[w_1'(\xi_x)]^2} \left(\frac{\rho_0 c_0^2 \cdot 2^7}{c_{00} \rho^2 \omega} \right)^{1/6} \times$$

$$\times e^{i\omega\tau + i\omega^{1/3} \xi_x \int_0^\alpha \frac{c_0^{2/3}}{2^{1/3} \rho^{2/3}} d\alpha}. \quad (8.1)$$

Заметим, что на \mathcal{S}

$$\xi_x \int_0^\alpha \frac{\sqrt[3]{c_0^2}}{\sqrt[3]{2\rho^2}} d\alpha = \xi_x \int_0^s \frac{ds}{\sqrt[3]{2c_0 \rho^2}}.$$

Кажущаяся несогласованность последней формулы с формулой (7.12) гл.12 [8] объясняется разной нормировкой функции \mathcal{J} - геометрической расходимости волны, связанной с лучами соскальзывания $\alpha = \text{const}$;

4) для освещенной части полутени на некотором расстоянии от \mathcal{S} .

В этом случае объединять в едином выражении падающую и отраженную волны нецелесообразно. Падающая волна задана лучевым разложением. Для отраженной волны выражение в первом при-

ближении будет интегралом по контуру, указанному на рис.7.

Вычисления показывают, что

$$u_{\text{отр}} \sim \sum_{l=1}^3 u^{(l)}, \quad (8.2)$$

$$\text{где } u^{(1)} = u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \cdot \frac{e^{3\pi i/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_{L_1} e^{i\gamma' \zeta} e^{i\phi(\tau)\zeta^2 \omega^{1/3}} e^{i\omega\tau} d\zeta, \quad (8.3)$$

$$\Phi(\tau) = \left(\frac{C_{00}}{4\rho_0} \right)^{4/3} \frac{1}{\Psi(\tau)} \quad (\text{см. § 5}), \quad (8.4)$$

$$u^{(2)} = u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{-\pi i/4}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_{L_2} e^{i\gamma' \zeta} \frac{u_2(\zeta)}{u_1(\zeta)} e^{i\omega\tau} d\zeta, \quad (8.5)$$

$$u^{(3)} = u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{5\pi i/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_{L_3} e^{i\gamma' \zeta} \frac{v(\zeta)}{u_1(\zeta)} e^{i\omega\tau} d\zeta. \quad (8.6)$$

Заметим, что здесь в отличие от рассмотрений § 5-7 вместо $\exp i\gamma\zeta$ введена экспонента $\exp i\gamma'\zeta$, где γ' - безразмерная величина, пропорциональная γ :

$$\gamma' = \gamma \frac{C_{00}^{2/3}}{\sqrt{2\rho_0^{2/3}}} = \omega^{1/3} \alpha \frac{C_{00}}{\sqrt{2\rho_0^{2/3}}}.$$

Введение этой величины несколько упрощает выражение для $u^{(2)}$.

Существование интегрального представления (8.2) вытекает из рассмотрений § 4-7. Отметим, что $\Phi(\tau) > 0$ и имеет вид (5.2). Последнее для нас сейчас не очень важно, важен лишь сам факт существования $\Phi(\tau) > 0$.

Перепишем еще раз выражения для $u^{(i)}$, заменив в $u^{(2)}$ переменную интегрирования ζ на $\xi e^{2\pi i/3}$ и выразив $u^{(1)}$ через интеграл Френеля:

$$u^{(1)} = u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{3\pi i/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega^{1/6}}{\sqrt{\Phi(\tau)}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\frac{\gamma' \omega^{1/6}}{2\sqrt{\Phi(\tau)}}} e^{i\tau^2} d\xi \cdot e^{-\frac{i\gamma'^2 \omega^{1/3}}{4\Phi(\tau)}} e^{i\omega\tau} = u_0(C) \sqrt{\frac{C_0(\tau) J_{\text{наг}}(0)}{J_{\text{наг}}(\tau) C_{00}}} e^{i\omega\tau} \left(e^{-i\xi^2 - f(\xi)} \right), \quad (8.7)$$

$$\text{где } f(\xi) = e^{-i\xi^2 - i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{-i\xi^2 - i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{ix^2} dx,$$

$$\xi = -\alpha_u \sqrt{\frac{\omega J_{\text{ray}}(0) J_u(\tau)}{2 J_{\text{ray}}(\tau) C_{00}}}.$$

Здесь мы ввели центральное поле лучей с центром в точке C , причем лучи характеризуются углом α_u (в радианах), который они составляют с лучом, отделяющим область света от зоны тени. В освещенной области $\alpha_u > 0$, $J_u(\tau)$ - геометрическая расходимость, соответствующая центральному полю лучей, функция $f(\xi)$ введена В.А.Фоком и легко выражается через интегралы Френеля $C(s)$ и $S(s)$:

$$C(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi}{2} \tau^2 d\tau, \quad S(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi}{2} \tau^2 d\tau; \quad (8.8)$$

$$u^{(2)} = u_0(C) \left(\frac{2 C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{\frac{\pi i}{4} \omega}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_0^{\infty} e^{\frac{4\pi i}{\omega} i \tau} \frac{v(\zeta)}{u_2(\zeta)} d\zeta e^{i\omega\tau}, \quad (8.9)$$

$$u^{(3)} = u_0(C) \left(\frac{2 C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_0^{\infty} e^{i\tau^2} \frac{v(\zeta)}{u_1(\zeta)} d\zeta e^{i\omega\tau}. \quad (8.10)$$

Заметим, что при $\gamma' = 0(1)$ и $(\alpha_u = 0(\omega^{1/3}))$ из формул (8.2)-(8.10) функция $u^{(1)}$ определяется как величина порядка $0(1)$, в то время как функции $u^{(i)}$ ($i=2,3$) порядка $0(\omega^{-1/6})$. Функцию $u^{(1)}$ можно назвать френелевой частью волнового поля. Важно отметить, что френелева часть волнового поля $u^{(1)}$ не зависит от радиуса кривизны S в точке C . Она также не изменилась бы, если бы мы рассматривали краевое условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0$ или импедансное условие $\frac{\partial u}{\partial n} + ikgu \Big|_S = 0$. Сумма $u^{(2)} + u^{(3)}$ описывает фон (здесь мы следуем терминологии В.А.Фока), на котором главную роль играет френелева часть.

Формулы (8.2)-(8.10) представляют собой аналог формул В.А.Фока [1].

В затененной части полутени целесообразно объединить па-

дающую и отраженную волны (см. § 7). В первом приближении при положительных $\gamma' = O(1)$ мы получим

$$u = u^{(1)'} + u^{(2)} + u^{(3)}.$$

Здесь $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$ имеют то же выражение, что и раньше (см. (8.8), (8.9)), а

$$\begin{aligned} u^{(1)'} &= u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0} \right)^{1/6} \frac{e^{\pi i/4}}{2\sqrt{\pi} \Phi(\tau)} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_{\frac{\gamma_0^{1/6}}{2\sqrt{\Phi(\tau)}}}^{+\infty} e^{is^2} ds e^{-\frac{\gamma'^2 \omega^{1/3}}{4\Phi(\tau)}} = \\ &= u_0(C) \sqrt{\frac{C_0(\tau) J_{\text{наг}}(0)}{J_{\text{наг}}(\tau) C_{00}}} f(\xi) e^{i\omega\tau}, \\ \xi &= -\alpha_u \sqrt{\frac{\omega J_{\text{наг}}(0)}{2 J_{\text{наг}}(\tau)} \cdot \frac{J_u(\tau)}{C_{00}}}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой области, где $\gamma' = O(1)$, или $\alpha_u = O(\omega^{-1/3})$, главную роль в выражении для u играет френелева часть $u^{(1)'}$, не зависящая от краевых условий и геометрических характеристик S , а сумма $u^{(2)} + u^{(3)}$ опять играет роль фона.

При возрастании γ' в зоне, переходной от затененной части полутени к глубокой тени, асимптотическое представление для u дает интеграл (см. конец § 7)

$$u \sim u_0(C) \left(\frac{2C_{00}}{\rho_0 \omega} \right)^{1/6} \frac{e^{3\pi i/4}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C_0(\tau)}{J_0(\tau)}} \int_{i_2 + i_1'} e^{i\gamma' \tau \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)}} d\zeta e^{i\omega\tau}. \quad (8.11)$$

При $\gamma' \rightarrow +\infty$ интеграл (8.11) можно заменить суммой вычетов. Выражение для вычета в точке $\xi_\rho, \rho=1, 2, \dots, w_1(\xi_\rho) = 0$ переходит в выражение (8.1) для лучевого разложения Фридлиндера - Келлера, соответствующее этому корню функции Эйри.

ЗАДАЧА О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ КОЛЕБАНИЙ

Здесь будет рассмотрена задача о точечном источнике колебаний в неоднородной среде. В отличие от предыдущих глав, рассмотрение будет вестись для трехмерного случая. Это связано отчасти с тем, что мы не хотим создавать у читателя впечатления, что методика пограничного слоя применима лишь к плоским задачам. Кроме того, трехмерный вариант задачи о точечном источнике колебаний несколько проще плоского варианта.

§ 1. Лучевой метод в случае центрального поля лучей

Если источник колебаний помещен в точку $O(0,0,0)$ — начало координат, то естественно предположить, что излучаемая им волна будет соответствовать центральному полю лучей, исходящих из $(0,0,0)$, и соответствующее лучевое разложение будет иметь вид

$$u \sim e^{i\omega\tau(M)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(M)}{(-i\omega)^{j+\lambda}} . \quad (1.1)$$

Здесь $M = M(x, y, z)$ — точка наблюдения,

$$\tau(M) = \int_0^M \frac{ds}{c(M)} \quad (1.2)$$

— эйконал (интеграл вычисляется по всевозможным лучам, выходящим из O), λ — постоянная, подлежащая определению, $u_j(M)$ удовлетворяют обычным уравнениям переноса лучевого метода.

Вблизи начала координат $u_j(M)$ и эйконал $\tau(M)$ теряют регулярность, и частные суммы лучевого разложения (как и в случае окрестности каустики, см. гл. 2) перестают давать малую невязку при подстановке в уравнение

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)} \right) u = 0 , \quad (1.3)$$

описывающее волновой процесс. Под решением задачи о точечном источнике колебаний мы будем понимать нахождение совпадающих в некоторой промежуточной области лучевого разложения вида (1.1) и формального решения уравнения

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(M)} \right) u = -\delta(x, y, z), \quad (1.4)$$

определенного в окрестности начала координат.

Основная "блок-схема" рассуждений такая же, как и в гл.2: сначала изучается поле лучей и эйконал, соответствующий рассматриваемой задаче, результаты этих рассмотрений дают возможность построить разложение выражения для волнового поля в промежуточной области и определить характерный масштаб для разложения пограничного слоя в окрестности $O(0,0,0)$. Построив локальные разложения в окрестности O , мы "склеиваем" их с лучевыми разложениями в промежуточной области, пользуясь соответствующим вариантом леммы единственности. Лучевое разложение в результате такого "склеивания" определится однозначно.

Приступая к реализации этой программы, прежде всего обратимся к каноническим уравнениям поля лучей (см. § 1 гл.2):

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.5)$$

$$H = 1/2 \left(c^2(M) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 1 \right),$$

где x_i ($i=1, 2, 3$) - декартовы координаты, $\tau = \int_0^M \frac{ds}{c}$ - значение эйконала вдоль луча.

В силу того, что поле лучей у нас центральное, следует задавать начальные данные для системы (1.5) в виде

$$x_i|_{\tau=0} = 0, \quad p_i|_{\tau=0} = p_i^0 \quad (i=1, 2, 3; c^2(0,0,0) \sum_{i=1}^3 (p_i^0)^2 = 1). \quad (1.6)$$

Изучение задачи Коши (1.5), (1.6) дает возможность выяснить аналитический характер $\tau(M)$ вблизи O . Функции

x_i, p_i , удовлетворяющие уравнениям (1.5) и начальным данным (1.6), гладко зависят от своих аргументов

$$x_i = x_i(\tau, p_i^0), \quad p_i = p_i(\tau, p_i^0). \quad (1.7)$$

Заметим, что при любом $\beta = \text{const} > 0$ функции

$$x_i \left(\beta\tau, \frac{1}{\beta} p_i^\circ \right), \quad \beta p_i \left(\beta\tau, \frac{1}{\beta} p_i^\circ \right) \quad (1.8)$$

решают ту же задачу Коши (1.5), (1.6), что и функции (1.7). В силу единственности решения задачи Коши (1.5), (1.6), (1.8) при любом $\beta > 0$

$$x_i \left(\beta\tau, \frac{1}{\beta} p_i^\circ \right) = x_i(\tau, p_i^\circ), \quad p_i \left(\tau, p_i^\circ \right) = \beta p_i \left(\beta\tau, \frac{1}{\beta} p_i^\circ \right). \quad (1.9)$$

Полагая в (1.9) $\beta = 1/\tau$, приходим к заключению, что

$$x_i = x_i(\tau p_i^\circ), \quad p_i = \frac{1}{\tau} p_i(\tau p_i^\circ),$$

аргумент "1" в правых частях (1.9) мы опускаем.

Таким образом, для выяснения аналитического характера функций x_i , p_i при $\tau \rightarrow 0$ достаточно исследовать, как они зависят от p_i° .

Пользуясь уравнениями (1.5) и начальными данными (1.6), получаем

$$x_i \Big|_{\tau=0} = 0, \quad p_i \Big|_{\tau=0} = p_i^\circ, \quad \frac{dx_i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = c^2(0)p_i^\circ, \quad \frac{dp_i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial c^2(0)}{\partial x_i} \sum_{i=1}^3 (p_i^\circ)^2. \quad (1.10)$$

По индукции легко доказывается, что при любом целом $\gamma > 0$

$$\frac{d^\gamma x_i}{d\tau^\gamma} \Big|_{\tau=0} = P_\gamma^{(i)}(p_j^\circ), \quad \frac{d^\gamma p_i}{d\tau^\gamma} \Big|_{\tau=0} = Q_{\gamma+1}^{(i)}(p_j^\circ), \quad (1.11)$$

где P_γ и $Q_{\gamma+1}$ - однородные полиномы от p_i° степеней γ и $\gamma+1$ соответственно. Обозначая

$$\tau p_i^\circ = y_i, \quad i=1, 2, 3, \quad (1.12)$$

и разлагая x_i по степеням τ , получаем

$$\begin{aligned} x_i(\tau p_i^\circ) &= x_i(y_j) \sim \\ &\sim x_i \Big|_{\tau=0} + \frac{dx_i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} \tau^2 + \dots = \\ &= P_1^{(i)}(y_i) + \frac{1}{2!} P_2^{(i)}(y_i) + \frac{1}{3!} P_3^{(i)}(y_i) + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, x_i - гладкие в окрестности начала координат функции y_i , причем, как следует из равенства (см. (1.10)-(1.13),

$$x_i \sim \rho_1^{(i)}(y_i) + \dots = c^2(0,0,0) y_i + \dots, \quad (1.14)$$

определитель

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = c^6(0,0,0) > 0.$$

Соотношения (1.9), (1.13), (1.14) показывают, что в окрестности точки $O(0,0,0)$ параметры y_i можно принять за криволинейные координаты. Аналогичные координаты играют важную роль в римановой геометрии, где они называются римановыми нормальными координатами.

Всякая гладкая функция y_i после соответствующей замены переменных оказывается, очевидно, гладкой функцией x_i . Из соотношений (1.6) и (1.12) следует

$$\tau^2 = c^2(0,0,0) \sum_{i=1}^3 y_i^2, \quad (1.15)$$

поэтому τ^2 - гладкая функция x_i , причем из (1.14) и (1.15) следует, что

$$\tau^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{r^2}{c^2(0,0,0)} + \dots, \quad (1.16)$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Многоточием в (1.16) заменены члены порядка выше двух. Изучая более детально полиномы ρ_γ и Q_γ , можно получить более сильный результат - гладкость отношения τ/r в окрестности начала координат. Этот результат нам не понадобится.

Обратимся к уравнениям переноса лучевого метода (см. гл. I):

$$\frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_0}{d\tau} + u_0 \Delta\tau = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_s}{d\tau} + u_s \Delta\tau = \Delta u_{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Первое из уравнений (1.17) эквивалентно тому, что вдоль каждого луча

$$u_0 \sqrt{J/c} = \text{const} \quad (1.18)$$

Из соотношения

$$cJ = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\tau, \alpha, \beta)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} \cdot \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(\tau, \alpha, \beta)}, \quad (1.19)$$

пользуясь формулами (1.12), (1.19) и

$$\rho_i^0 = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{c(0,0,0)} s_0^i(\alpha, \beta) \quad (i=1,2,3)$$

(s_0^i — составляющие единичного вектора касательной в точке $(0,0,0)$ к лучу, выходящему из этой точки, α и β — параметры, характеризующие этот единичный вектор (см. гл. I)), получаем

$$cJ = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} \tau^2 \hat{\Psi}(\alpha, \beta), \quad (1.20)$$

где $\hat{\Psi}(\alpha, \beta)$ — гладкая, отличная от нуля функция своих аргументов.

Из соотношений (1.18)–(1.20) следует

$$u_0 = \Psi_0(\alpha, \beta) W, \quad W = \frac{c}{\sqrt{\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}}} = \frac{\Phi(y_i)}{\tau}, \quad (1.21)$$

Φ — гладкая, отличная от нуля функция своих аргументов.

Рекуррентные соотношения лучевого метода дают

$$u_s(M) = \Phi_s(\alpha, \beta) W + W \int^F (1/W)(c^2/2) \Delta u_{s-1} d\tau. \quad (1.22)$$

Оператор Лапласа здесь удобно рассматривать в переменных y_i .

Заметим, что с ростом номера s растет сингулярность u_s .

Если $u_{s-1} = O(\tau^{-\gamma})$, $\gamma \geq 1$, то, вообще говоря,

$\Delta u_{s-1} = O(\tau^{-\gamma-2})$, операция умножения на $c^2/2W$, интегрирование и умножение на W снимают одну сингулярность, и мы получаем, что $u_s = O(\tau^{-\gamma-1})$. Интегралы от сингулярных выражений, входящие в равенства (1.22), (1.21), мы понимаем элементарно: если при $\tau \rightarrow 0$ асимптотическое разложение F имеет вид

$$F \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau^j \alpha^j, \quad (1.23)$$

$$\text{где } \alpha^j = \alpha_0^j + \alpha_1^j \ln \tau + \dots \quad (1.24)$$

- полиномы по $\ln \tau$, то

$$\int_{\tau}^{\tau} F d\tau = - \int_{\tau}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-2} \tau^j \alpha^j d\tau + \int_{\tau}^{\tau} \tau^{-1} \alpha^{-1} d\tau + \\ + \int_0^{\tau} (F - \sum_{j=-\infty}^{-1} \tau^j \alpha^j) d\tau.$$

Анализируя разложение лучевого метода, нетрудно убедиться, что у функций u_s могут быть сингулярности только вида (1.23), (1.24), где коэффициенты α_i^j - функции от α и β , т.е. однородные функции нулевой степени координат y_i .

§ 2. Разложение в промежуточной области

В силу того, что при переходе от u_{s-1} к u_s сингулярность увеличивается, вообще говоря, на единицу, имеем

$$u_j = 0 \left(\frac{1}{\tau^{j+1}} \right). \quad (2.1)$$

Для того чтобы члены лучевого ряда убывали, нужно, чтобы

$$\tau \geq C_1 \omega^{-1+\varepsilon_1}, \quad C_1 = \text{const} > 0 \quad (2.2)$$

(здесь $\varepsilon_1 > 0$ произвольно). Условие (2.2), или, что то же,

$$r \geq C_2 \omega^{-1+\varepsilon_1}, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}, \quad (2.3)$$

определяет область, где имеет смысл пользоваться разложением лучевого метода. Таким образом, область, где $r \sim \omega^{-1}$, по-видимому, и будет областью пограничного слоя. Естественно ожидать, что в области пограничного слоя рассмотрение удобно вести в соответствующим образом растянутых переменных, которыми могут быть ωx_i или ωy_i . Остановимся на первом варианте, т.е. на растянутых декартовых координатах. Во всех разложениях,

рассмотренных до сих пор, в промежуточной области и в области пограничного слоя удобными оказывались одни и те же координаты (см. гл.2, § 3; гл.3, § 5; гл.5, § 1). Естественно поэтому и здесь сделать попытку перейти в промежуточной области к координатам $X_i = \omega x_i$. Лучевое разложение преобразуем, считая

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega\tau} &= e^{i\omega\sqrt{\tau^2}} \sim e^{i\omega\sqrt{r^2/c^2(0,0,0)+A_3+A_4+\dots}} \sim \\
 &\sim e^{i\omega r/c(0)} e^{i\omega r/c(0) \left(\sqrt{1+A_3/r^2 c^2(0)+A_4/r^2 c^2(0)+\dots} - 1 \right)} \sim \\
 &\sim e^{iR/c(0)} \left(1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{A_3(X_j) c^2(0)}{R \omega} + \dots \right).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $c(0) = c(0,0,0)$; A_3, A_4, \dots - однородные полиномы степеней 3, 4, ... соответственно,

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}. \tag{2.5}$$

Разложение (2.4) имеет смысл, лишь если

$$R \leq C_3 \omega^{\varepsilon_2}, \quad C_3 = \text{const}, \quad 0 \leq \varepsilon_2 < 1/2,$$

что вместе с ограничением (2.3) дает

$$C_2 \omega^{\varepsilon_1} \leq R \leq C_3 \omega^{\varepsilon_2}, \quad C_i = \text{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 < 1/2. \tag{2.6}$$

Неравенства (2.6) и определяют промежуточную область. Лучевое разложение в области (2.6) преобразуется в следующее:

$$u \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j(X)}{\omega^{j+\lambda-1}} + \ln \omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j'(X)}{\omega^{j+\lambda-1}} + \dots \tag{2.7}$$

Здесь $U_j(X)$ - разложения вида

$$U_j(X) \sim \sum_{k=-M_j}^{\infty} \frac{b_{kj}}{R^k} e^{iR/c(0)}, \tag{2.8}$$

$$\text{где } b_{kj} = b_{kj}^0 + b_{kj}^1 \ln R + \dots \tag{2.9}$$

- полином по $\ln R$, коэффициенты которого b_{kj}^l - однородные функции нулевой степени координат X_i . Как следует из построения разложения (2.7), членов, содержащих $\ln \omega$, $\ln^2 \omega$ и

т.д., не будет, если нет логарифмических членов в ряде (2.8), т.е. если все полиномы b_{kj} в (2.9) сводятся к своему свободному члену.

Выражение (2.7) при выполнении неравенств (2.6) является формальным решением уравнения (1.4), т.е. в силу (2.6) решением однородного уравнения (1.3) (там, где рассматривается это уравнение, δ -функция равна нулю).

Разлагая $1/c^2$ в ряд Маклорена в окрестности нуля, получаем

$$\frac{1}{c^2} \sim \frac{1}{c^2(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\chi_1, \chi_2, \chi_3), \quad (2.10)$$

B_j - однородный полином степени j .

Рекуррентная система уравнений для U_j имеет стандартный вид

$$L_0 U_0 = 0, \quad L_0 U_1 + L_1 U_0 = 0, \dots, \quad (2.11)$$

где $L_0 = \left(\Delta + \frac{1}{c^2(0)} \right)$. Операторы L_j - это операторы умножения на $B_j(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$. Как и в ранее рассмотренных случаях, здесь тоже важную роль играет лемма единственности: рекуррентная система уравнений не определяет коэффициентов b_{kj} . Если их задать, то U_j определяются однозначно. Доказательство аналогично доказательству других лемм единственности. Достаточно рассмотреть однородное уравнение. Выделив в однородном уравнении множитель $e^{iR/c(0)}$ для коэффициентов разложения (2.7), (2.8), получим

$$2 \nabla R \cdot \nabla V + \Delta R \cdot V = 0, \quad (2.12)$$

$$U = e^{iR/c(0)} V, \quad \left(\Delta + \frac{1}{c^2(0)} \right) U \sim 0.$$

Подставляя в (2.12) вместо V разложение вида (2.7)-(2.9)

$$\sum_{k=-M}^{\infty} \frac{b_k}{R^k}, \quad b_k = b_k^0 + b_k^1 \ln R + \dots \quad (2.13)$$

и пользуясь тем, что

$$\nabla R \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}, \quad \Delta R = \frac{2}{R}, \quad (2.14)$$

нетрудно прийти к выводу, что каждое слагаемое b_k / R^k разложения (2.13) должно удовлетворять уравнению (2.12). В силу (2.14) равенство (2.12) — обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль полупрямой, выходящей из начала. Общее решение этого уравнения, очевидно, const / R , поэтому все $b_k = 0$, если $k \neq 1$, а при $k=1$ имеем $b_k = b_1 = b_1^0$. Это и доказывает лемму.

С другой стороны, задание коэффициентов b_1^0 , очевидно, однозначно определяет дифракционные коэффициенты $\Psi_s(\alpha, \beta)$ (см. (1.22)), т.е. однозначно определяет лучевое разложение (1.1).

§ 3. Разложения в окрестности начала координат

Рассмотрим теперь в тех же координатах X_i решение уравнения (1.4):

$$(L_0 + \omega^{-1}L_1 + \omega^{-2}L_2 + \dots)\mu = \omega\delta(X_1, X_2, X_3). \quad (3.1)$$

Мы воспользовались тем, что трехмерная δ -функция — однородная функция степени -3 . Здесь L_j — те же операторы, что и в формулах (2.1).

Искомую функцию μ естественно искать в виде разложения

$$\mu = \omega V_0 + V_1 + \frac{V_2}{\omega} + \frac{V_3}{\omega^2} + \dots \quad (3.2)$$

Для V_j получается рекуррентная система из (3.1)

$$\begin{aligned} L_0 V_0 &= -\delta(X_1, X_2, X_3), \\ L_0 V_1 + L_1 V_0 &= 0, \\ L_0 V_2 + L_1 V_1 + L_2 V_0 &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Наша цель сейчас найти функции V_j , которые удовлетворяют рекуррентной системе уравнений (3.3), а в промежуточной области переходят в разложения U_j (см. § 2). В силу того, что разложения U_j содержат множитель $e^{iR/c(0)}$, такой же множитель должны содержать асимптотические разложения V_j при $R \rightarrow \infty$. Если это выполнено, то

$$V_j \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{Im} \omega > 0 \quad (3.4)$$

(принцип предельного поглощения). Мы будем предполагать, что (3.4) имеет место. Это однозначно определит все V_j и даст возможность в промежуточной области склеить разложение (3.2) и лучевое разложение (1.1).

Приступим к решению рекуррентной системы (3.3). Первое уравнение

$$L_0 V_0 = \left(\Delta + \frac{1}{c^2(0)} \right) V_0 = -\delta(X_1, X_2, X_3)$$

при условии (3.4) однозначно дает

$$V_0 = \frac{1}{4\pi R} e^{iR/c(0)}.$$

Следующее уравнение системы (3.3) запишется так:

$$\left(\Delta + \frac{1}{c^2(0)} \right) V_1 = -\frac{B_1(X_1, X_2, X_3)}{4\pi R} e^{iR/c(0)}.$$

Будем искать V_1 в виде

$$V_1 = e^{iR/c(0)} \Phi_1,$$

где Φ_1 - новая искомая функция. Мы получим

$$\frac{2i}{c(0)} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} + \frac{1}{R} \Phi_1 + \Delta \Phi_1 \right) = -\frac{B_1(X_1, X_2, X_3)}{4\pi R}.$$

Представим функцию Φ_1 в виде суммы

$$\Phi_1 = \Phi_{1j} + \Phi_{10},$$

где Φ_{1j} - однородная функция j -й степени.

Приравнявая слева и справа однородные функции одинаковых степеней, получаем

$$\frac{2i}{c(0)} \left(\frac{\partial \Phi_{1j}}{\partial R} + \frac{1}{R} \Phi_{1j} \right) = -\frac{B_1(X_1, X_2, X_3)}{4\pi R}, \quad (3.5)$$

$$\frac{2i}{c(0)} \left(\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial R} + \frac{1}{R} \Phi_{10} \right) + \Delta \Phi_{10} = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) - обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль полупрямой, выходящей из начала. Решая его, получаем

$$\Phi_{11} = \frac{i c(0) B_1(x_1, x_2, x_3)}{16 \pi} .$$

Вспоминая, что $B_1(x_1, x_2, x_3)$ - однородный полином 1-й степени, из (3.6) находим $\Phi_{10} = 0$, так как $\Delta \Phi_{11} = 0$. Перейдем к уравнению для V_2 . Искомую функцию V_2 будем искать в виде

$$V_2 = e^{i \cdot R/c(0)} \Phi_2 ,$$

где $\Phi_2 = \Phi_{23} + \Phi_{22} + \Phi_{21} + \Phi_{20}$

(Φ_{2j} - однородная функция степени j). Аналогично получаем

$$\Phi_{23} = \Lambda_2^{23} R, \quad \Phi_{22} = \Lambda_2^{22}, \quad \Phi_{21} = \Lambda_0^{21} R, \quad \Phi_{20} = \Lambda_0^{20},$$

где Λ_j^{ab} - однородные полиномы степени j .

В общем случае для V_j по индукции нетрудно оправдать общие формулы

$$V_j = e^{i \cdot R/c(0)} \Phi_j .$$

Аналитический вид Φ_j при четном и нечетном j несколько разный: 1) при j четном

$$\Phi_j = \Lambda_{2j-2}^{j2j-1} R + \Lambda_{2j-2}^{j2j-2} + \Lambda_{2j-4}^{j2j-3} R + \dots + \Lambda_0^{j0} ;$$

2) при j нечетном

$$\Phi_j = \Lambda_{2j-1}^{j2j-1} + \Lambda_{2j-3}^{j2j-2} R + \Lambda_{2j-3}^{j2j-3} + \dots + \Lambda_1^{j1} ;$$

где Λ_a^{ab} - однородный полином от X_1, X_2, X_3 степени a .

Из полученных разложений следует, что при $R \rightarrow \infty$

$$\Phi_j = O(R^{2j-1}), \quad (3.7)$$

поэтому члены разложения (3.7) еще убывают, если

$$R \leq C \omega^\varepsilon, \quad \varepsilon < 1/2, \quad C = \text{const},$$

т.е. разложение (3.2) имеет смысл рассматривать в промежуточной области. "Склеивая" разложения V_j и U_j при $R \rightarrow +\infty$, мы легко убеждаемся в том, что коэффициент $\lambda = 0$ (см. (1.1)) и что у V_j , $j > 0$, коэффициенты при $1/R$, т.е. b_1^0 (см. лемму единственности), обращаются в нуль. Разложения типа (2.7), соответствующие V_j ($j > 0$), вообще не содержат отрицательных степеней R . Полагая в разложениях для U_j

$$b_{10}^0 = 1/4\pi, \quad b_{ij}^0 = 0,$$

мы получаем совпадение разложений в промежуточной зоне у V_j и U_j . Как и в аналогичных ситуациях, разложения V_j не содержат логарифмов, следовательно, их нет и в разложениях U_j . Из наших рассмотрений следует простое правило построения рекуррентных соотношений лучевого метода. Напомним: при правильном выборе коэффициентов b_{ij}^0 разложения U_j не содержат отрицательных степеней R . Отрицательные степени R в разложении U_j появляются только за счет сингулярностей u_s , причем наличие сингулярности типа $1/r^m$, $s > m > 0$, в разложении u_s дает слагаемое типа $1/R^m$ в разложении U_{j-m+1} и только там. Если хотя бы один из коэффициентов u_s , $s > 0$, имел бы сингулярность, то это привело бы к слагаемому с отрицательной степенью R в каком-либо из разложений U_j . Так как U_j , $j > 0$, не содержит отрицательных степеней R , то и u_s не имеют сингулярностей. Поэтому, построив u_0 , остальные u_s надо строить по формулам (см. гл. I)

$$u_s = \sqrt{\frac{c}{J}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{J}{c}} \frac{c^2}{2} \Delta u_{s-1} d\tau.$$

Сингулярностей в подынтегральном выражении не будет. Их сокращение следует из предыдущих рассуждений.

Приведем в заключение, опуская элементарные выкладки, выражение для нулевого приближения к u . Пусть параметры α и β , характеризующие луч, связаны с координатами единичного вектора касательной \mathbf{s}_0 в точке $(0, 0, 0)$ луча формулами

$s_0^1 = \cos \alpha \sin \beta$, $s_0^2 = \sin \alpha \sin \beta$, $s_0^3 = \cos \beta$, $0 \leq \beta < \pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, т.е. α и β — сферические координаты конца вектора \mathbf{s}_0 на единичной сфере. Тогда

$$u_0 = \Psi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{c}{J}},$$

$$\Psi_0(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\sin \beta}}{4\pi \sqrt{c(0)}}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

К главе 1. Здесь приводятся результаты, считающиеся теперь классическими. Изложение соответствует [8, гл.1], где отражена также и история вопроса.

К главе 2. Задача о каустике давно и подробно исследовалась разными методами, см. [35; 8, гл.2], где излагается "равномерный" вариант представления поля в окрестности каустики, восходящий к работам Ю.А.Кравцова, Ю.В.Газаряна и Д.Людвига. Исходные положения наших рассуждений (они полностью соответствуют статье В.М.Бабича, С.А.Егорова [17]) те же, что и работы Дж.Келлера, Р.Бачела [3]. Центральной дополнительной идеей здесь оказалась лемма единственности, позволившая в принципе склеить лучевые решения с разложениями пограничного слоя во всех приближениях.

К главе 3. Метод исследования волн шепчущей галереи и волн соскальзывания с помощью серии рекуррентных задач Штурма-Лиувилля аналогичен приемам, примененным Н.Я.Кирпичниковой [18] при математическом описании упругих поверхностных волн. Близкую методику применяли также Е.Цаудерер [19] и Дж.Келлер, Д.Ахлувалия [36]. Другим способом волны соскальзывания и волны шепчущей галереи рассматриваются в монографии [8] и в работе Р.Смита [20]. В случае $c = \cos \alpha$ И.А.Молотков [21] получил недавно ряд результатов о продолжении волн соскальзывания за пределы пограничного слоя.

К главе 4. Все результаты известны (см. [8, гл.4,5,7,9 и примечания к ним]). В настоящей главе на простой задаче иллюстрируется методика, которая позволяет рассмотреть также и трехмерный кольцевой резонатор, и некоторые другие задачи (см. [8, гл.8 и 9]).

К главе 5. Метод рассмотрения окрестности точки C ведет свое начало от классических работ В.А.Фока и М.А.Леонтовича [1], [2], хотя наше изложение и сильно отличается от прие-

мов, использованных в этих работах. Как предложенный вариант исследования волнового поля вблизи C , так и последующее распространение полученных формул в тень и полутень принадлежит В.М.Бабичу. Рассмотрение окрестности C излагалось в курсе лекций петергофской школы по теории дифракции [22]. Исследование остальных областей печатается впервые. Близкие по идее рассмотрения были ранее опубликованы В.Р.Брауном [34]. Равномерный вариант формул гл.5 можно получить также, используя методику Д.Людвига (см. [8, гл.12 и примечания к ней]).

В отличие от методики настоящей книги, методика Д.Людвига на случай других краевых условий распространяется нетривиально [23]. Ограничиваясь первым приближением, можно получить те же формулы способом, предложенным В.С.Буслаевым [24]. На преваляющую роль „френелевой“ части дифракционного поля в полутени и независимость этой части от краевых условий впервые на примере другой задачи было указано В.А. Фоком [1]. В.Б.Филиппов еще до написания гл.5, в задаче с точечным источником и $c = \text{const}$, получил формулы, во многом аналогичные нашим, см. § 8 (частное сообщение). Филиппов исходил из упоминавшейся здесь методики Д.Людвига. Разным аналогам задач, рассмотренным в гл.5, посвящено много работ ([25], [26], а также [8, примечания гл. 10 и 12]).

К главе 6. Исходные идеи и основной результат (см. конец главы) здесь те же, что и в статье [27]. Однако отсутствие рассмотрений, связанных с леммой единственности, привело авторов работы [27] к неоправданно сложным построениям и даже к неточностям (логарифмические члены в плоском варианте задачи). Задача о точечном источнике хорошо решается равномерной методикой [28]. Локальный вариант задачи о точечном источнике, излагаемый здесь, принадлежит В.М.Бабичу и А.П.Киселеву. Методика гл.6 такова, что без принципиальных изменений переносится на случай уравнений теории упругости, где решить задачу о точечном источнике с помощью равномерных разложений не удастся. Задача о точечном источнике колебаний вызывала интерес многих авторов [29], [30].

Приложения методики пограничного слоя к задачам дифрак-

ции, разумеется, не исчерпывается темами, затронутыми в книге. Тесно связаны с методикой пограничного слоя интересная работа В.С.Буслаева [31], где рассматривается задача о точечном источнике колебаний на выпуклом теле, и серия работ американских авторов, посвященных задачам с острыми кромками, см. [32] и указанную там литературу.

В заключение добавим, что методика пограничного слоя показала, что между асимптотическими методами в теории дифракции и асимптотическими методами в других областях математической физики гораздо больше общих черт, чем думалось раньше. Особенно интересны в этой связи казались бы далекие от задач дифракции монография [33] и статья [4], уже упоминавшаяся нами в предисловии.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

1. Ф о к В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., 1970. 517 с.
2. Л е о н т о в и ч М.А., Ф о к В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.-Журн.эксперим. и теор.физ., 1946, 16, № 7, с.557-573.
3. В и с н а л R.N., К е л л е р J.V. Boundary layer problems in diffraction theory. - "Comm.Pure Appl. Math.", 1960, vol.13, No.1, p.85-114.
4. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.-"Успехи мат.наук", 1957, т.12, вып.5, № 77, с.3-122.
5. Р а ш е в с к и й П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967. 664 с.
6. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики. т.4, М., 1958. 812 с.
7. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики. т.2, М., 1965. 655 с.
8. Б а б и ч В.М., Б у л д ы р е в В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1970. 456 с.
9. L u d w i g D. Uniform asymptotic expansions at a caustic.- "Comm.Pure Appl.Math.", 1966, vol.19, No.2, p.215-250.
10. К р а в ц о в Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. - Изв.вузов. Радиофизика, 1964, т.7, № 4, с 664-673.

11. Б а б и ч В.М. Аналитическое продолжение в комплексную область решений волнового уравнения и каустики. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1961, № 5, с.145-153.
12. А р н о л ь д В.И. Моды и квазимоды. - Функциональный анализ, 1972, т.6, № 3, с.12-21.
13. К е л л е р J.B. I. Diffraction by a convex cylinder. - In: Trans. IRE Ant. and Prop., 1956, vol.4, No.3, p.312-321.
14. L e w i s R.M., B l e i s t e i n N., L u d w i g D. Uniform asymptotic theory of creeping waves. - "Comm. Pure Appl. Math.", 1967, vol.20, No.2, p.295-328.
15. F r i e d l a n d e r F.G., K e l l e r J.B. Asymptotic expansions of solutions of $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ - "Comm. Pure Appl. Math.", 1955, vol.8, No.3, p.378-394.
16. Л а з у т к и н В.Ф. Спектральное вырождение и "малые знаменатели" в асимптотике собственных функций типа "прыгающего мячика". - Вестн. Ленингр. ун-та, 1969, № 7, вып.2, с.23-34.
17. Б а б и ч В.М., Е г о р о в С.А. Решение задачи о каустике с помощью методики локальных разложений. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 1973, т.13, с.4-14.
18. К и р п и ч н и к о в а Н.Я. О распространении некоторого класса приповерхностных волн для неоднородного упругого тела. - Вестн. Ленингр. ун-та, 1969, № 13, вып.3, с.153-156.
19. Z a u d e r e r E. Boundary layer and uniform asymptotic expansions for diffraction problems. - Siam. J. Appl. Math., 1970, vol.19, No.3, p.575-600.
20. S m i t h R. Asymptotic solutions for high-frequency trapped wave propagations. - Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1970, vol.268, No.1189, p.286-324.

21. М о л о т к о в И.А. Продолжение поля точечного источника на любые расстояния от объекта в зоне тени.-В кн.: Проблемы мат.физики. 1973, вып.6, с.51-60.
22. Б а б и ч В.М., Б у л д ы р е в В.С., М о л о т к о в И.А. Пять лекций по асимптотическим методам в задачах дифракции и распространения волн. Л., 1972. 75 с.
23. Б а б и ч В.М. Методика Д.Людвига и методика пограничного слоя в задаче дифракции на гладком теле.-В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л., 1972, т.27, с.17-32.
24. Б у с л а е в В.С. О формулах коротковолновой асимптотики в задаче дифракции на выпуклых телах. - Вестн.Ленингр.ун-та, 1962, № 13, вып.3, с.5-21.
25. И в а н о в В.И. Равномерная асимптотика волнового поля при отражении плоской волны от выпуклого цилиндра.-Журн.вычисл.мат. и мат.физ., 1970, т.1, № 1, с.169-176.
26. Л е о н т ь е в Е.А. Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на выпуклом теле.- Изв.вузов. Радиофизика. 1971, т.14, № 10, с.1574-1596.
27. A v i l a G.S.S, K e l l e r J.V. The high-frequency asymptotic field a point source in an inhomogeneous medium.-"Comm.Pure Appl. Math.", 1963, vol.16, No.4, p.363-382.
28. Б а б и ч В.М. О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде.-Журн.вычисл.мат. и мат.физ., 1965, т.5, № 5, с.949-951.
29. К у ч е р е н к о В.В. Некоторые свойства коротковолновой асимптотики фундаментального решения уравнения $[\Delta + k^2 n^2(x)]u=0$.-В кн.: Труды Моск.ин-та электронного машиностроения, 1972, т.25, с.32-55.

30. Steele C.R. An asymptotic fundamental solution of the reduced wave equation on a surface. - "Quart. Appl. Math.", 1972, vol. 29, No. 4, p. 509-524.
31. Буслев В.С. Теория потенциала и геометрическая оптика. - В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л., 1971, т. 22, с. 175-180.
32. Chinnaswamy A.V., Kanwal R.P. Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen by the method of boundary layers. - Siam. J. Appl. Math., 1972, vol. 23, No. 3, p. 339-355.
33. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., 1972. 274 с.
34. Brown W.P., Jr. On the asymptotic behavior of electromagnetic fields scattered from convex cylinders near grazing incidence. - J. Math. Analysis and Appl., 1966, vol. 15, No. 2, p. 355-385.
35. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965. 549 с.
36. Keller J. B. . Ahluwalia D. S. Uniform asymptotic solution of eigenvalue problems for convex plane domains. - Siam. J. Appl. Math., 1973, vol. 25, № 4, p. 583-591.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Г л а в а 1. Лучевой метод	5
§ 1. Исходные формулы лучевого метода в скалярном случае	5
§ 2. Уравнение эйконала, лучи, волновые фронты	6
§ 3. Лучевые координаты.	10
§ 4. Основные рекуррентные формулы лучевого метода.	14
§ 5. Отражение волны, заданной лучевым разложением.	16
Г л а в а 2. Задача с каустики	19
§ 1. Лучевое разложение в окрестности каустики	19
§ 2. Аналитический характер эйконала приходящей и уходящей волн вблизи каустики	21
§ 3. Лучевые ряды в координатах s, n и s, ν	23
§ 4. Волновое поле в пограничном слое, окружающем каустику.	26
§ 5. Основные формулы.	29
Г л а в а 3. Волны шепчущей галереи и волны соскальзывания	31
§ 1. Волны шепчущей галереи.	31
§ 2. Квазимоды типа шепчущей галереи	40
§ 3. Волны соскальзывания.	44
§ 4. Решение Фридлиндера - Келлера	46
§ 5. "Сшивающие" волны соскальзывания и волны Фридлиндера - Келлера	50
Г л а в а 4. Колебания, сосредоточенные в окрестности лучей	53
§ 1. Лучи в первом приближении	53
§ 2. Вывод уравнения пограничного слоя	54

§ 3. Решение рекуррентной системы уравнений для V_j	56
§ 4. Об устойчивости экстремального диаметра области.	59
§ 5. Квазимоды типа прыгающего мячика в первом приближении.	64
§ 6. Построение высших приближений.	69
Г л а в а 5. Дифракция коротких волн на гладком выпуклом теле	74
§ 1. Метод параболического уравнения.	75
§ 2. Аналитический характер функций \tilde{V}_j и V_j	82
§ 3. Пограничный слой в зоне глубокой тени.	84
§ 4. Продолжение решения из окрестности точки C в промежуточную область.	87
§ 5. Аналитическое представление падающего волнового поля в окрестность предельного луча	90
§ 6. Рекуррентная система уравнений для окрестности предельного луча	92
§ 7. Распространение формул промежуточной области в окрестность предельного луча.	95
§ 8. Формулы для волнового поля в тени и в полутени	99
Г л а в а 6. Задача о точечном источнике колебаний.	104
§ 1. Лучевой метод в случае центрального поля лучей.	104
§ 2. Разложение в промежуточной области	109
§ 3. Разложения в окрестности начала координат.	112
Библиографический комментарий.	116
Литературный указатель	119

Василий Михайлович Бабич
Наталья Яковлевна Кирпичникова

Метод пограничного слоя в задачах дифракции

Редактор Г.И.Чередниченко
Технический редактор Л.П.Топорина
Корректор М.Х.Липкина

М - 03711 . Подписано к печати 25 УП 1974 г. Формат бумаги
60 x 90 1/16. Бумага № 3. Печ. л. 7,75. Уч.-изд.л. 5,67.
Бум. л. 3,88. Тираж 2600 экз. Заказ № 682 Цена 57 коп.

Издательство ЛГУ им. А.А.Жданова
199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9

**Тульская типография "Союзполиграфпрома" при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, поли-
графии и книжной торговли. г.Тула, пр. Ленина, 109.**