

1938

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# **RADIATION GAS DYNAMICS**

*by*

*SHIH-I PAI*

*Research Professor*

*Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics  
University of Maryland, College Park, Maryland, U. S. A*

**1966**

**SPRINGER VERLAG**

**WIEN·NEW YORK**

---

БАЙ ШИ-И \_\_\_\_\_

*Динамика  
излучающего  
газа*

Перевод с английского

канд. физ.-мат. наук В. А. СМИРНОВА  
и канд. техн. наук Б. А. ХРУСТАЛЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»    МОСКВА 1968

В книге впервые систематически изложены основы новой области науки — радиационной газодинамики, — интенсивно развивающейся в последние годы.

Написанная простым и доступным языком с глубоким освещением теории и широким охватом практических задач, книга вызовет несомненный интерес как научных работников и инженеров, занимающихся вопросами радиационной газодинамики, переноса излучения, гиперзвуковой аэродинамики, так и аспирантов и студентов, начинающих изучение этих вопросов.

*Редакция литературы по новой технике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В последние годы в связи с исследованиями космического пространства, ядерного взрыва и управляемых термоядерных реакций резко возрос интерес к вопросам динамики и теплообмена при течении излучающего газа. Развитие теории переноса излучения и создание новой области газодинамики — гиперзвуковой газодинамики — привели к синтезу этих двух научных направлений при главенствующей роли газодинамики. Однако излучение оказывает настолько существенное влияние на течение газа и теплообмен, что динамику излучающего газа можно рассматривать как новую область газодинамики. В теории теплопередачи перенос излучения в движущихся средах наряду с переносом тепла конвекцией и теплопроводностью также рассматривают как новый вид теплообмена, который в литературе называют сложным теплообменом. В реальных условиях гиперзвукового движения тел и других высокотемпературных течений теплообмен обычно еще более осложняется наличием химических реакций и массообмена.

Рассмотренные в настоящей книге проблемы имеют широкую область приложения. Они важны в физике атмосферы Земли и других планет для определения строения атмосфер и распределения в них температуры. Радиационные эффекты имеют большое значение применительно к проблемам гиперзвукового полета и возвращения космических кораблей. Ядерная техника и энергетика также в ряде случаев имеют дело с переносом энергии излучением одновременно с другими видами переноса. Например, при ядерных реакциях поле излучения оказывает большое влияние на развитие процесса. Сложный теплообмен имеет место при течении высокотемпературных излучающих газов в каналах МГД-генераторов, а также в высокотемпературных камерах сгорания энергетических агрегатов.

Таким образом, темой книги является новая область исследований. Все более возрастающий интерес к этой теме вызвал в последнее пятилетие значительное увеличение публикаций главным образом в виде статей и научных докладов, освещающих лишь отдельные аспекты данной проблемы. Среди них

можно отметить несколько обзорных работ [36, 41, 56, 76] (см. список дополнительной литературы в конце книги), а также книгу [15].

Книга проф. Бай Ши-и «Динамика излучающего газа» является одной из первых монографий в этой области исследования и представляет безусловный интерес для широкого круга читателей. Бай Ши-и известен советским читателям по ряду серьезных работ в области газодинамики, магнитогидродинамики, турбулентного движения жидкостей и газов, из которых некоторые переведены на русский язык [6—8].

В настоящей книге автор прежде всего излагает основные закономерности теплообмена излучением и рассматривает основные интегро-дифференциальные уравнения радиационной газодинамики, учитывающие влияние излучения на тепловой поток, объемную плотность энергии и давление. Решение этих интегро-дифференциальных уравнений в достаточно общем виде представляет собой задачу, непреодолимую даже при использовании современных электронно-вычислительных машин. Поэтому в книге особое внимание уделено известным удачным приближениям. Автор стремится достаточно простыми средствами и на конкретных упрощенных задачах продемонстрировать методы и решения, вскрывающие физические особенности проблемы. С целью упрощения интегральные радиационные члены в системе уравнений заменяются более простыми выражениями. Такой подход пригоден для выяснения качественного влияния излучения на газодинамику и другие виды переноса энергии. Однако в настоящее время уже известен ряд работ советских и зарубежных авторов с рассмотрением более сложных задач. Некоторые из этих задач можно найти в дополнительной литературе.

При формулировке граничных условий задач радиационной газодинамики встречаются большие трудности. К достоинствам книги следует отнести подробное исследование условий взаимодействия излучения с твердыми поверхностями на границах течения.

В ряде глав автор проводит анализ параметров подобия течений излучающего газа, исследует распространение ударных волн и слабых возмущений, перенос тепла совместно излучением, конвекцией и теплопроводностью. Эти главы составляют основное содержание книги.

В заключительных главах изложена кинетическая теория излучающего газа, в которой излучение рассматривается как релятивистский фотонный газ и используются уравнения Больцмана для обычного и фотонного газов. Приведены также основные сведения о радиационных свойствах воздуха и водорода.

Ценность настоящей книги состоит в том, что в ней впервые систематически и довольно широко изложены все вопросы, связанные с влиянием переноса энергии излучением в движущихся поглощающих и излучающих средах на температурные и динамические характеристики течения.

Книга Бай Ши-и бесспорно будет полезна как для специалистов, так и для лиц, начинающих заниматься исследованием динамики излучающего газа и сложного теплообмена.

При переводе на русский язык названий методов, величин и характеристик мы стремились придерживаться принятой в Советском Союзе терминологии, иногда не совпадающей с дословным переводом терминов. Кроме того, мы старались устранить замеченные нами неточности в изложении, снабдив текст примечаниями.

Главы 1—4, 7 и 9 переведены Б. А. Хрусталевым, гл. 5, 6, 8, 10, 11 — В. А. Смирновым.

*Б. А. Хрусталев, В. А. Смирнов*





## ПРЕДИСЛОВИЕ

При не слишком высокой температуре и не слишком низкой плотности газа перенос тепла излучением обычно пренебрежимо мал по сравнению с переносом тепла проводимостью и конвекцией. Однако при гиперзвуковых скоростях полета в космосе, в частности при возвращении космического корабля на Землю, и при ядерной реакции, как, например, во взрывной волне ядерной бомбы или при мирном использовании контролируемой термоядерной реакции, температура газа может быть очень высокой, а плотность газа очень низкой. В результате тепловое излучение становится очень важным видом переноса тепла. Полный анализ таких высокотемпературных полей течений должен быть основан на одновременном изучении газодинамических полей и полей излучения. Поэтому в последние несколько лет предприняты значительные усилия для изучения проблем взаимодействия между газодинамическим полем и полем излучения и предложено название для этой новой области гидромеханики — радиационная газодинамика, или динамика излучающего газа.

Несмотря на то что перенос излучения длительное время исследовался астрофизиками, к широкому исследованию взаимодействия между полем излучения и газодинамическим полем приступили только с недавних пор. Поскольку сведения по газодинамике и переносу излучения обычно излагаются в разных источниках, желательно иметь книгу, которая могла бы познакомить читателя с основами переноса излучения и газодинамики и их взаимодействия, которая была бы очень полезной для научных работников и инженеров, интересующихся проблемами высокотемпературного течения и не знакомых с обеими темами. Автор надеется, что в этой книге читатель найдет основные сведения в этой новой области знания, которые будут полезными для дальнейшего исследования.

После введения в радиационную газодинамику автор рассматривает основы переноса излучения в гл. 2—4 и газодинамики в гл. 5—6, обращая особое внимание на связь между радиационными и газодинамическими параметрами. В гл. 7 обсуждаются важнейшие параметры радиационной газодинамики.

В гл. 8 и 9 рассматриваются проблемы течения радиационной газодинамики с точки зрения сплошной среды, особое внимание уделяется волновому движению, ударным волнам и теплообмену. В гл. 10 описывается кинетическая теория излучающего газа. Поскольку фотонный газ движется со скоростью света, необходимо учитывать также и релятивистские эффекты. В книге кратко рассматриваются основные положения релятивистской механики. В гл. 10 также изложены некоторые проблемы разреженного излучающего газа, в частности свободно-молекулярного течения. Заключительная гл. 11 посвящена свойствам излучения высокотемпературных газов, при этом особое внимание уделяется коэффициентам поглощения воздуха и водорода при высокой температуре.

Большая часть материалов этой книги была прочитана автором на семинаре по динамике плазмы в 1962/63 учебном году в Институте гидродинамики и прикладной математики Университета шт. Мэриленд.

*Бай Ши-и*

Колледж-Парк, Мэриленд, США  
Январь 1966 г.

## *Введение*

### 1. ДИНАМИКА ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Динамику потока сжимаемой жидкости следует изучать одновременно с проблемой теплопередачи. Существуют три основных вида теплопередачи:

1. Перенос тепла конвекцией в движущейся жидкости.
2. Перенос тепла теплопроводностью в твердых или жидких телах.
3. Перенос тепла излучением, который не связан с материальными носителями.

В общем случае все три вида теплопередачи существуют одновременно. Если температура не слишком велика и плотность жидкости не слишком мала, то теплообмен излучением обычно пренебрежимо мал по сравнению с теплообменом теплопроводностью или конвекцией. Следовательно, в обычной газодинамике эффекты теплового излучения всегда пренебрежимо малы. В наш космический век мы сталкиваемся с большим количеством процессов при сверхзвуковом полете, при ядерных и термоядерных реакциях, в охлаждаемых газом ядерных реакторах, в силовых установках для космических исследовательских целей, при которых температура очень велика, а плотность довольно мала. В результате тепловое излучение становится важнейшим видом переноса тепла. Полный анализ поля высокотемпературного потока должен быть основан на одновременном изучении как газодинамического поля, так и поля теплового излучения. Для этой новой ветви механики жидкости мы используем термины «динамика излучающего газа» или «радиационная газодинамика» [7, 11, 19].

Излучение в высокотемпературных газах исследовалось физиками с давних пор. В начале настоящего столетия Планк разработал строгую теорию излучения [12]. Цель автора настоящей книги — не обсуждение физики излучения, а изучение влияния теплового излучения на поле потока высокотемпературных газов, т. е. перенос тепла излучением. Процесс переноса тепла излучением широко изучался астрофизиками [2, 3, 5, 15 17], так как спектральное распределение излучения звезд, планет и т. д. является основой для экспериментальной проверки

астрофизических анализов. Однако в большинстве астрофизических задач переноса излучения взаимодействие между газодинамическим полем и полем излучения пренебрежимо мало. Следовательно, мы можем предположить, что распределение температуры не зависит от переноса тепла излучением, и изучать перенос излучения при известном ее распределении. Эта методика неточна, если тепловой поток излучения того же порядка, что и тепловые потоки за счет конвекции и теплопроводности. С другой стороны, если тепловой поток излучения мал, мы можем определить тепловое излучение по распределению температуры в поле течения без учета влияния излучения. Так как многие из основных положений переноса тепла излучением незнакомы большинству инженеров и научных работников, работающих в области аэродинамики, мы обсудим их в гл. 2—4.

Современная тенденция аэродинамики связана с исследованием областей высоких скоростей и высоких температур, а также низкой плотности и больших высот [1, 6]. Один из обширных обзоров современного состояния знаний в области аэродинамики был сделан профессором Теодором фон Карманом в 1961 г. [18]. Еще в 1961 г. во многих практических задачах гиперзвукового полета влияние теплового излучения было несущественным. Для межконтинентальных ракетных систем максимальное значение количества тепла за счет излучения составляет только 1/10 от количества тепла за счет аэродинамического нагрева. Следовательно, взаимодействие между аэродинамическим полем и полем излучения несущественно. Как мы увидим дальше, при больших скоростях возвращения космических аппаратов, таких, как аппараты для исследования Марса [8], взаимодействием аэродинамического поля и излучения пренебрегать нельзя. Основная цель этой книги — обсудить влияние теплового излучения на высокотемпературный поток газа.

## 2. ДЕЙСТВИЕ ТЕПЛОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Имеются три различных воздействия теплового излучения на поле потока высокотемпературного газа, а именно:

1. Давление излучения.
2. Плотность энергии излучения.
3. Поток излучения.

Точные выражения для этих характеристик излучения очень сложны и будут выведены в следующих главах. Чтобы оценить относительную роль теплообмена излучением и конвекцией, рассмотрим достаточно непрозрачную жидкость, так что излучение близко к равновесному. При этом условии характеристики излучения будут следующими:

**1. Давление излучения** (см. гл. 2, разд. 4). Единственная составляющая напряжения излучения, отличная от нуля, — это давление излучения  $p_R$ , которое может быть представлено так:

$$p_R = \frac{1}{3} a_R T^4, \quad (1.1)$$

где  $T$  — температура газа, °К и  $a_R$  — постоянная Стефана — Больцмана, равная  $7,67 \cdot 10^{-15}$  эрг/см<sup>3</sup> · град<sup>4</sup>. Чтобы получить полное давление в каждой точке поля потока, это давление излучения должно быть добавлено к давлению газа.

**2. Плотность энергии излучения** (см. гл. 2, разд. 3). Объемная плотность энергии излучения единицы массы жидкости равна

$$E_R/\rho = a_R T^4/\rho, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости. Мы можем добавить  $E_R/\rho$  к внутренней энергии  $U_m = C_v T$  жидкости, где  $C_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме жидкости.

Чтобы оценить относительную величину плотности энергии излучения по сравнению с внутренней энергией, рассчитаем эти величины для воздуха на высоте 72 км.

Плотность воздуха  $\rho$  за прямым скачком уплотнения на этой высоте в гиперзвуковом потоке составляет около  $1,23 \cdot 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup>, т. е.  $10^{-3}$  от плотности на уровне моря. Примем  $C_v = 7 \cdot 10^6$  эрг · г/град; эта величина характерна для двухатомных газов, подобных воздуху. Значения плотности энергии излучения и внутренней энергии при различных температурах приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения плотности энергии излучения и внутренней энергии для воздуха

$T, \text{ }^\circ\text{K}$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$E_R/\rho, \text{ эрг} \cdot \text{г}$	$6 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^{11}$	$6 \cdot 10^{15}$
$C_v T, \text{ эрг} \cdot \text{г}$	$7 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^{12}$

Оценку, сделанную в табл. 1, можно назвать астрофизической. Согласно этой оценке, если две величины различаются на один или на два порядка, то нельзя пренебрегать одной из них по отношению к другой. Только когда разность между ними составляет несколько порядков по величине, меньшей из них пренебрегают. Из табл. 1 можно видеть, что, когда температура меньше  $10^4$  °К, плотность энергии излучения пре-

небрежимо мала по сравнению с внутренней энергией при заданной плотности жидкости, в то время как при высоких температурах плотность энергии излучения может быть того же порядка величины или даже больше, чем обычная внутренняя энергия газа. С увеличением плотности жидкости температура, выше которой становится существенной энергия излучения, также возрастает. Легко показать, что всякий раз, когда плотностью энергии излучения пренебрегать нельзя, давление излучения также будет существенным. Для большинства насущных проблем динамики потока, таких, как проблема возвращения из космоса, характерны условия, при которых максимум температуры имеет порядок  $10^4$  °К и плотность газа выше  $1,23 \cdot 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup>. Следовательно, давление излучения и плотность энергии излучения пока еще пренебрежимо малы. Однако при анализе проблемы динамики потока в случае более высоких температур, таких, как, например, при исследовании термоядерных реакций, когда температура  $10^6$  °К является относительно низкой температурой, и в случаях более низкой плотности, как в дальнем космосе, необходимо учитывать давление излучения и плотность энергии излучения.

**3. Поток излучения.** Для условий равновесного излучения поток излучения определяется формулой (см. гл. 2, разд. 2)

$$q_R = \frac{c}{4} \frac{E_R}{\rho} = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad (1.3)$$

где  $c$  — скорость света, которая равна  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек в вакууме. Коэффициент  $\sigma = ca_R/4 = 5,75 \cdot 10^{-5}$  эрг/см<sup>2</sup> · сек · град<sup>4</sup> также известен как постоянная Стефана — Больцмана, используемая часто в литературе по теплообмену излучением. Величину  $q_R$  следовало бы сравнить с конвективным тепловым потоком  $q_v$ , т. е.

$$q_v = UC_v T, \quad (1.4)$$

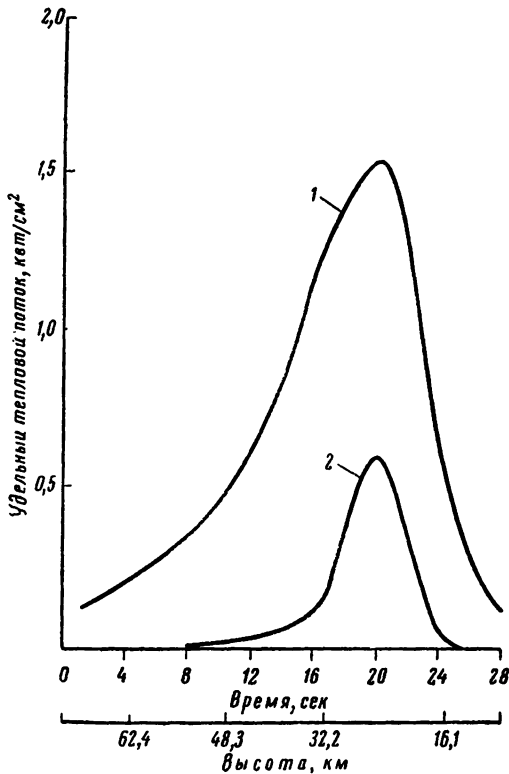
где  $U$  — скорость потока. Для условий, приведенных в табл. 1, при средней скорости потока  $U = 10^4$  м/сек (средняя скорость спутника) получим величины, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение теплового потока излучения с конвективным тепловым потоком

$T, \text{ }^\circ\text{K}$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$q_R, \text{ эрг} \cdot \text{см}/\text{г} \cdot \text{сек}$	$4,5 \cdot 10^{13}$	$4,5 \cdot 10^{17}$	$4,5 \cdot 10^{21}$	$4,5 \cdot 10^{25}$
$q_v, \text{ эрг} \cdot \text{см}/\text{г} \cdot \text{сек}$	$7 \cdot 10^{15}$	$7 \cdot 10^{16}$	$7 \cdot 10^{17}$	$7 \cdot 10^{18}$

Из табл. 2 видим, что при температуре  $T=10^4$  °К теплообмен излучением приблизительно того же порядка величины, что и



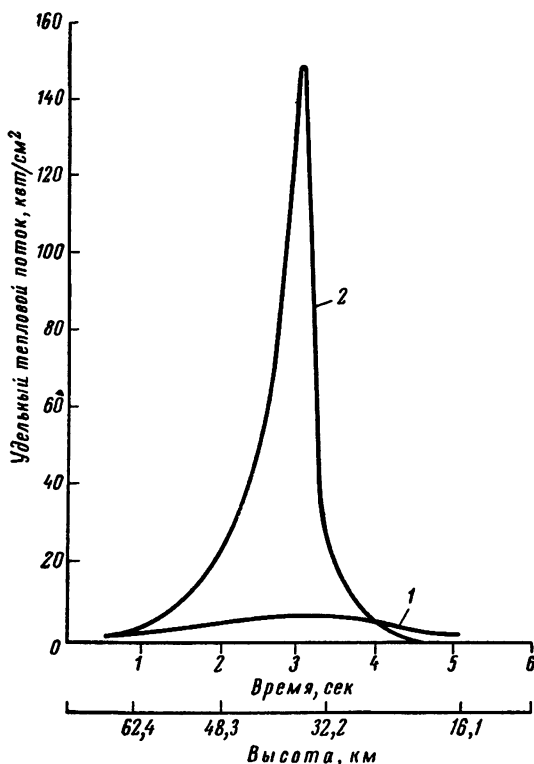
Фиг. 1.1. Сравнение аэродинамического нагрева и нагрева излучением во время возвращения на Землю межконтинентальной баллистической ракеты (фиг. 5 работы [8]).

$R_b = 0,3048$  м,  $W/C_D A = 400$ . 1 — аэродинамический нагрев; 2 — нагрев излучением.

теплообмен конвекцией. Следовательно, при анализе задач динамики потока в этих условиях необходимо учитывать теплообмен излучением, даже если давление излучения и плотность энергии излучения пока еще пренебрежимо малы.

В большинстве практических задач средняя длина свободного пробега излучения [см. уравнение (5.12)] достаточно велика, и мы имеем случай так называемого теплового излучения оптически тонкой среды. Формулы потока энергии излучения

и давления излучения для случаев оптически тонких сред отличаются от формул (1.1) и (1.3) (см. гл. 2). Вообще эти формулы могут быть выражены в виде интегралов, которые будут выведены в гл. 2. Для случая оптически очень тонкой среды



Фиг. 1.2. Сравнение нагрева излучением и аэродинамического нагрева во время возвращения на Землю аппарата для полета на Марс (фиг. 6 работы [8]).

$R_b = 0,3048$  м,  $W/C_D A = 50$ . 1 — аэродинамический нагрев; 2 — нагрев излучением.

также может быть получена простая формула. Около точки торможения тепловой поток излучением описывается следующей формулой [8] (см. гл. 9):

$$q_R = I \frac{R_b \rho_\infty}{2\rho_0}, \quad (1.5)$$



где  $I$  — интегральная интенсивность излучения,  $R_b$  — радиус носовой части затупленного тела, который пропорционален расстоянию отхода ударной волны. В точке торможения  $\rho_\infty$  и  $\rho_0$  — соответственно плотность газа до и за прямым скачком уплотнения.

Интенсивность  $I$  вычислена по методам статистической механики для термодинамического равновесия и является функцией температуры торможения и плотности. В работе [8] сравниваются аэродинамический нагрев и нагрев излучением, вычисленный по формуле (1.5) для межконтинентальных ракет и космических аппаратов для полета на Марс. Результаты этого сравнения представлены на фиг. 1.1. и 1.2. Они показывают, что в случае межконтинентальных ракет уже нельзя пренебрегать нагревом излучением по сравнению с аэродинамическим нагревом, а в случае космического аппарата для полета на Марс нагрев излучением значительно больше аэродинамического нагрева.

Обе приведенные выше оценки дают только порядок величины теплового излучения и не являются точными в связи с тем, что не принято во внимание взаимодействие между полем излучения и полем потока. Всякий раз, когда влияние излучения не пренебрежимо мало, для получения точных результатов необходимо учитывать взаимодействие между полем излучения и полем потока [7, 9—11, 13, 14, 16]. Основная цель этой книги — исследовать явления взаимодействия между полем излучения и полем потока.

### 3. НЕКОТОРЫЕ ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Тепловое излучение — значительно более сложное явление, чем теплопроводность или конвективный теплообмен. Конвективный теплообмен зависит от поля скоростей жидкости, а теплопроводность — по существу от распределения температуры в среде. Тепловое излучение находится в очень сложной зависимости от температуры среды. Имеются случаи, когда теплообмен излучением, по-видимому, не зависит от температуры среды, через которую он происходит. Например, мы можем сконцентрировать солнечные лучи в фокусе, пропуская их через собирающую линзу изо льда с постоянной температурой  $0^\circ\text{C}$ , и воспламенить легко воспламеняющееся вещество.

Теплообмен излучением — это вид переноса тепла фотонами или волнами. Возникновение и исчезновение фотонов или лучей зависят от взаимодействия между энергией и веществом газа, которое должно быть изучено с микроскопической точки зрения

квантовой механикой. По существу нет разницы между тепловыми, электромагнитными и световыми волнами. Следовательно, мы можем изучать излучение тепла, рассматривая излучение электромагнитной энергии атомами газов, решая уравнение Максвелла для электромагнитных полей. Хотя такое изучение очень полезно для понимания основ явлений излучения, оно слишком детально для использования в задачах динамики потока. Для задач динамики потока, имеющих практическое значение, представляет интерес макроскопическая точка зрения. Другими словами, нас интересуют не тонкости природы волновой картины излучения в потоке жидкости, а суммарное воздействие теплового излучения на основные переменные потока, такие, как температура, скорость и т. д. Один из способов описания теплового излучения с макроскопической точки зрения состоит в представлении теплового излучения тепловыми лучами согласно концепции геометрической оптики [7, 11]. Каждый луч распространяется в определенном направлении. В однородной изотропной среде лучи распространяются во всех направлениях по прямым линиям с одинаковой скоростью, равной скорости света. Чтобы полностью определить состояние излучения, должна быть известна интенсивность лучей во всех направлениях, бесконечных по числу, которые проходят через рассматриваемую точку. Результирующий эффект обусловлен суммарным воздействием всех лучей. Как мы увидим в гл. 2, общее выражение для члена, учитывающего перенос тепла излучением, обычно имеет вид сложного интеграла. В макроскопической трактовке появление и исчезновение лучей можно выразить через коэффициент излучения и коэффициент ослабления, или поглощения, которые зависят от состояния газа. Коэффициенты испускания и ослабления аналогичны коэффициентам вязкости и теплопроводности в обычной газодинамике. Одна из задач этой книги состоит в описании поля излучения с использованием указанных коэффициентов и решении этих уравнений с учетом других уравнений газодинамики.

Коэффициент излучения и коэффициент поглощения должны быть определены из микроскопической трактовки квантовой механики. В задачу автора не входит подробное описание этих трактовок. Однако в гл. 9 будет приведен краткий обзор наиболее существенных особенностей, а также основных результатов для высокотемпературных газов [4]. Такой теоретический расчет очень сложен и связан с множеством допущений по важнейшим процессам взаимодействия энергии и вещества газа. Коэффициенты испускания и поглощения излучения могут быть определены экспериментально. Много полезной информации об испускании и поглощении излучения можно получить из экспе-

риментов с высокотемпературными газами. Мы обсудим также некоторые из этих результатов в гл. 11.

Кроме теплового излучения, имеется большое количество явлений излучения, таких, как флюоресценция, фосфоресценция и т. д. Однако мы будем рассматривать только тепловое излучение, для которого коэффициент испускания зависит, не считая частоты  $\nu$  и природы среды, только от температуры  $T$  среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Allen R. A., Rose P. H., Camm J. C., Non-equilibrium Radiation at Super-satellite Re-entry Velocities, IAS paper 63-77, Institute of Aero Sci., 1963.
2. Aller L. H., Astrophysics, The Atmospheres of the Sun and Stars, 2nd ed., Ronald Press Co., N. Y., 1963.
3. Амбарцумян В. А., Теоретическая астрофизика, ГОНТИ, 1939.
4. Armstrong B. H., Sokoloff H., Nicholls R. W., Holland H. D., Meyerott R. E., Radiative Properties of High Temperature Air, *Jour. Quan. Spect. Radi. Transfer*, Vol. 1, Pergamon Press, 1960, pp. 143—162.
5. Chandrasekhar S., Stellar Structures, Dover Publications, Inc., N. Y., 1957.
6. Fay J. A., Moffatt W. C., Probststein R. F., An Analytical Study of Meteor Entry, *AIAA Journal* 2, 5, 845—854 (1964); имеется русский перевод: Фэй Дж., Моффэтт У., Пробстстин Р., Аналитическое изучение входа метеоров в атмосферу, *Ракетная техника и космонавтика*, № 5, стр. 79, 1964.
7. Goulard R., Fundamental Equations of Radiation Gas Dynamics, Rep. A and ES 62-4, School of Aero. and Eng. Sci., Purdue Univ., 1962.
8. Kivel B., Radiation from Hot Air and its Effect on Stagnation Point Heating, *Jour. Aero. Sci.*, 28, 2, 96—102 (Feb. 1961).
9. Magee J. L., Hirschefelder J. D., Thermal Radiation Phenomena, Chap. III of Blast Wave, Los Alamos Lab., Rep. LA-2000, 1958.
10. Maghreblian R. V., Thermal Radiation in Gaseous Fission Reactors for Propulsion, Techn. Rep. № 32-139, Jet Propulsion Lab., 1961.
11. Pai S. I., Thermal Radiation Effects on Hypersonic Flow Field, Proc. of Non-linear prob. in Eng., Academic Press, 1964, pp. 163—183.
12. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, Inc., N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеоретиздат, 1935.
13. Pomranitz J., The Influence of the Absorption of Radiation in Shock Tube Phenomena, NAVORD Rep. 6136, USNOL, 1958.
14. Rose P. H., Teare J. D., On Chemical Effects and Radiation in Hypersonic Aerodynamics, AMP 72, AVCO, Res. Lab., 1962.
15. Rosseland S., Theoretical Astrophysics, Oxford Press, 1936.
16. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Tech. Inf. Series R 63 SD 46, Space

- Sci. Lab. G. E., 1963; *Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer*, Pergamon Press, 1964, pp. 319—354.
17. Unsold A., *Physik der Sternatmosphären*, Springer Verlag, Berlin, 1938; имеется русский перевод более позднего издания: Унзольд А., *Физика звездных атмосфер*, ИЛ, М., 1949.
18. Von Kármán T., *From Low Speed Aerodynamics to Astronautics*, Pergamon Press, N. Y., 1963.
19. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.

## Основные законы переноса излучения

### 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ [2, 3]

Мы будем рассматривать явления теплового излучения с микроскопической точки зрения. Следовательно, линейные размеры в поле потока больше по сравнению с длиной волны излучения и масштаб времени больше по сравнению с периодом всех частот, содержащихся в излучении. По аналогии с теорией газодинамики настоящая теория теплового излучения подобна микроскопическому подходу теории сплошных сред в противоположность микроскопическому подходу кинетической теории газа. Не вдаваясь в дальнейшие подробности обсуждения основ теории теплового излучения, мы изложим законы переноса тепла излучением в следующих главах. Для тех читателей, которые пожела-ли бы узнать подробнее о масштабных ограничениях длины и времени в настоящей теории, можно рекомендовать классическую книгу Планка [8] по теории теплового излучения.

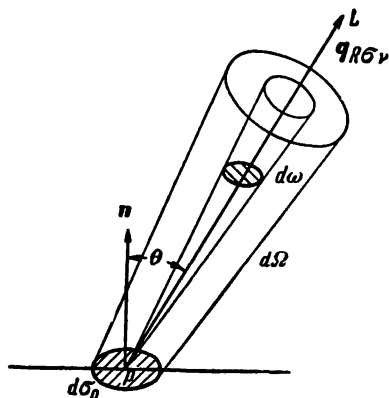
Тепловые лучи можно характеризовать спектральной интенсивностью излучения  $I_\nu$ . Пусть  $d\sigma_0$  — произвольно ориентированная малая площадка,  $P$  — точка на этой площадке и  $\mathbf{n}$  — нормаль к площадке в точке  $P$ . В заданный момент времени тепловые лучи будут пересекать эту элементарную площадку во всех направлениях. Выберем направление, вдоль которого проведем линию  $L$ , составляющую угол  $\theta$  с нормалью  $\mathbf{n}$ . Примем  $L$  за ось элементарного конуса телесного угла  $d\omega$  (фиг. 2.1). Из каждой точки поверхности  $d\sigma_0$  построим конусы с осями, параллельными линии  $L$ , и телесным углом при вершине  $d\omega$ .

Эти конусы образуют усеченный полубесконечный конус  $d\Omega$ , у которого площадь поперечного сечения, перпендикулярного  $L$  в точке  $P$ , равна  $d\sigma_0 \cos \theta$ . Пусть  $dE_\nu$  — полное количество энергии, проходящее через площадку  $d\sigma_0$  внутри конуса  $d\Omega$  за время  $dt$  в интервале частот между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ . Спектральная интенсивность излучения или просто интенсивность определяется следующим образом:

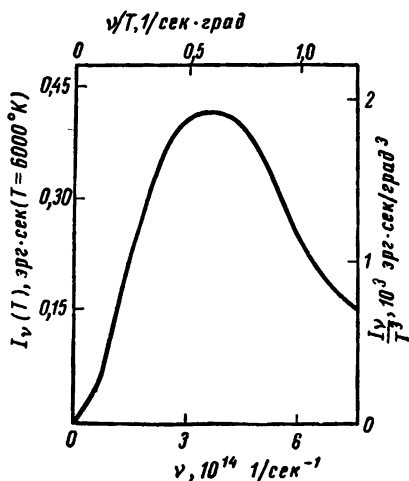
$$I_\nu = \lim_{d\sigma_0, d\omega, dt, d\nu \rightarrow 0} \left( \frac{dE_\nu}{d\sigma_0 \cos \theta d\omega dt d\nu} \right). \quad (2.1)$$

Этот предел в общем случае является функцией положения точки  $P$ , направления  $L$ , времени  $t$  и частоты  $\nu$ . Одной из основных целей изучения переноса излучения является нахож-

дение спектральной интенсивности  $I_\nu$  для данной физической проблемы. Если  $I_\nu$  не зависит от направления  $L$ , поле излучения называют изотропным. Если же  $I_\nu$  не зависит ни от положения



Фиг. 2.1. Тепловые лучи в поле излучения.



Фиг. 2.2. Спектральная интенсивность излучения черного тела.

точки, ни от направления  $L$ , поле излучения называют однородным и изотропным.

Если мы знаем интенсивность  $I_\nu$ , то количество энергии, проходящее через площадку  $d\sigma_0$  в направлении  $L$  в пределах элементарного телесного угла  $d\omega$  в интервале частот ( $\nu$  и  $\nu+d\nu$ ) за интервал времени  $dt$ , будет равно

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta d\sigma_0 d\omega d\nu dt. \quad (2.2)$$

Если мы определим интегральную интенсивность  $I$  как

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad (2.3)$$

то общее количество энергии, излучаемой во всем спектре, будет равно

$$dE = \int_0^\infty \frac{dE_\nu}{d\nu} d\nu = I \cos \theta d\sigma_0 d\omega dt. \quad (2.4)$$

Как мы увидим в гл. 4, идеальным излучателем является черное тело. Спектральная интенсивность излучения черного

тела является функцией только температуры [см. уравнение (4.22)]. На фиг. 2.2 приведена спектральная интенсивность излучения черного тела в зависимости от частоты при температуре  $6000^\circ \text{K}$ . Мы обсудим более подробно эту кривую в гл. 4. Здесь отметим лишь некоторые существенные моменты. Спектральная интенсивность излучения стремится к нулю как при значительном увеличении, так и при уменьшении частоты. Максимум находится в области промежуточных частот. Основным источником энергии излучения на Земле является Солнце [4, 5]. Солнечный спектр по измерениям на Земле с учетом рассеяния и поглощения излучения верхними слоями земной атмосферы очень близок к спектральной кривой черного тела при  $6000^\circ \text{K}$  в широком диапазоне частот или длин волн. Следовательно, изучение излучения черного тела может иметь большой практический интерес. Больше того, как мы покажем в гл. 5, излучение черного тела является хорошей аппроксимацией для оптически толстой среды в предположении локального термодинамического равновесия.

## 2. ПОТОК ИЗЛУЧЕНИЯ [6, 7]<sup>1</sup>

Результирующий поток излучения через  $d\sigma_0$  на единицу площади в единицу времени в направлении  $L$  есть общее количество энергии, излучаемой по всему спектру во всех направлениях, т. е.

$$q_{R0} = \int \frac{dE}{d\sigma_0 dt} = \int I \cos \theta d\omega. \quad (2.5)$$

Направление  $L$  однозначно определяется угловыми координатами  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) и азимутальным углом  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Элементарный телесный угол  $d\omega$ , ограниченный пределами  $(\theta + d\theta)$  и  $(\varphi + d\varphi)$ , будет равен

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.6)$$

Следовательно, уравнение (2.5) принимает вид

$$q_{R0}(\theta, \varphi, r, t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu(\theta, \varphi, r, t) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi d\nu. \quad (2.7)$$

Поток излучения — это вектор, величину которого определяют три компоненты вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно:

$$q_{Rx} = \int I l d\omega, \quad q_{Ry} = \int I m d\omega, \quad q_{Rz} = \int I n d\omega, \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>) Согласно принятой у нас терминологии эта величина называется поверхностной плотностью потока излучения. — *Прим. перев.*

где  $l$ ,  $m$  и  $n$  — направляющие косинусы линии луча  $L$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

В векторной форме результирующий поток излучения записывается следующим образом:

$$\mathbf{q}_R = i q_{Rx} + j q_{Ry} + k q_{Rz}, \quad (2.9)$$

где  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — единичные векторы вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Энергия, излучаемая единицей объема  $dx dy dz$  в точке  $P$ , будет равна

$$Q_R = \nabla \cdot \mathbf{q}_R = \frac{\partial q_{Rx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y} + \frac{\partial q_{Rz}}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Член  $Q_R$  нужно добавить в уравнение энергии газодинамики, если перенос тепла излучением не пренебрежимо мал. Этот член подобен члену, учитывающему перенос тепла теплопроводностью в газодинамике  $Q_c$ . Когда средняя длина свободного пробега молекул среды велика,  $Q_c$  должен быть выражен в интегральной форме; когда она мала,  $Q_c$  может быть выражен через коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и градиент температуры, т. е.  $Q_c = \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$ . Подобно этому для конечного значения средней длины свободного пробега излучения [см. уравнение (5.12)] параметры, характеризующие теплообмен излучением,  $Q_R$  или  $\mathbf{q}_R$  должны быть выражены в интегральной форме, как показано в уравнении (2.8), в то время как при малых значениях средней длины пробега излучения  $Q_R$  можно выразить через коэффициент диффузии излучения  $D_R$  и градиент температуры [9], т. е.  $Q_R = \nabla \cdot (D_R \nabla E_R)$ , где  $E_R$  — объемная плотность энергии излучения, определяемая уравнением (1.2).

В большинстве инженерных, а также астрофизических задач мы рассматриваем перенос излучения относительно плоской поверхности (фиг. 2.3). Удобно разбить результирующий поток излучения  $q_{R\sigma}^-$  на две части: одна часть  $q_{R\sigma}^+$  представляет составляющую в направлении нормального единичного вектора  $\mathbf{n}$ , а другая часть  $q_{R\sigma}^-$  — составляющую в противоположном направлении, т. е.

$$q_{R\sigma}^+ = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta, \varphi, r, t) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dv, \quad (2.7a)$$

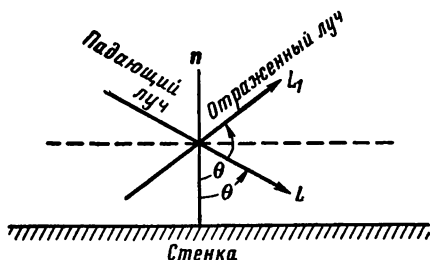
$$q_{R\sigma}^- = - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi I_\nu(\theta, \varphi, r, t) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dv, \quad (2.7b)$$

и результирующий поток излучения будет

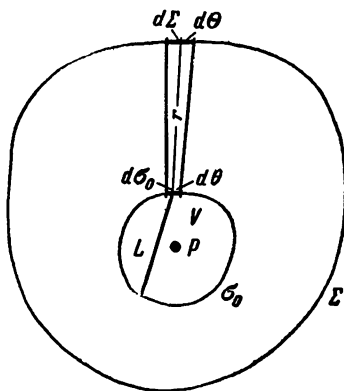
$$q_{R\sigma} = q_{R\sigma}^+ - q_{R\sigma}^-. \quad (2.7b)$$



Обычно принимают, что нормаль  $n$  направлена к стенке (фиг. 2.3). Следовательно, поток  $q_{R\sigma}^+$  связан с лучами, напра-



Фиг. 2.3. Падающий и отраженный лучи около плоской стенки.



Фиг. 2.4. Энергия излучения в элементарном объеме среды, ограниченном поверхностью  $\sigma_0$  около точки  $P$ .

вленными к стенке, в то время как поток  $q_{R\sigma}^-$  связан с лучами, направленными от стенки. Результирующий тепловой поток — поток, направленный к стенке.

### 3. ОБЪЕМНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ $U_\nu$

Объемная спектральная плотность энергии излучения  $U_\nu$  — это энергия излучения на единицу объема в заданном интервале частот, которая переносится в окрестности рассматриваемой точки. На фиг. 2.4 мы рассматриваем бесконечно малый объем с площадью поверхности  $\sigma_0$  вокруг некоторой точки  $P$ . Мы считаем, что поверхность  $\sigma_0$  всюду выпуклая. Поверхность  $\sigma_0$  окружена другой выпуклой поверхностью с площадью  $\Sigma$ . Как  $\sigma_0$ , так и  $\Sigma$  считаем малыми, так что в первом приближении спектральная интенсивность  $I_\nu$  в объеме, ограниченном поверхностью  $\Sigma$ , постоянна. Энергия излучения, поступающая в объем, окруженный  $\sigma_0$ , должна проходить через некоторый элемент поверхности  $\Sigma$ . Допустим, что луч, проходящий через  $d\Sigma$  на поверхности  $\Sigma$ , будет проходить через  $d\sigma_0$  на поверхности  $\sigma_0$ . Согласно уравнению (2.2), энергия, проходящая через  $d\Sigma$ , будет равна

$$dE_\nu = I_\nu \cos \Theta d\omega' d\nu dt d\Sigma, \quad (2.11)$$

где  $\Theta$  — угол между нормалью к площадке  $d\Sigma$  и лучом  $r$ . Элементарный телесный угол  $d\omega'$  равен  $d\sigma_0 \cos \theta / r^2$ , где  $\theta$  — угол между нормалью к  $d\sigma_0$  и  $r$ , а элементарное время  $dt$  нужно рассматривать как время, за которое луч проходит через объем, ограниченный поверхностью  $\sigma_0$ , т. е.  $dt = L/c$ . Тогда уравнение (2.11) принимает вид

$$dE_\nu = I_\nu d\nu (d\sigma_0 \cos \theta L) \left( \frac{d\Sigma \cos \Theta}{r^2} \right) \frac{1}{c} = \frac{1}{c} I_\nu d\nu dV d\omega, \quad (2.12)$$

где  $V$  — объем, ограниченный поверхностью  $\sigma_0$ , и  $d\omega = d\Sigma \cos \Theta / r^2$ . Теперь мы можем определить объемную спектральную плотность энергии  $U_\nu$  следующим образом:

$$V U_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\nu dV d\omega = \frac{V}{c} \int I_\nu d\omega d\nu$$

или

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega. \quad (2.13)$$

Объемная плотность энергии излучения для всего спектра будет равна

$$E_R = \int_0^\infty U_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int I d\omega. \quad (2.14)$$

Таким образом,  $E_R$  представляет собой энергию излучения на единицу объема, связанного с точкой  $P$ . Она подобна внутренней энергии газа. Следовательно,  $E_R$  должна рассматриваться как часть полной энергии газа в рассматриваемой точке в уравнении баланса энергии газового потока.

#### 4. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

Квант энергии  $h\nu$  связан с количеством движения  $h\nu/c$ . Рассмотрим поверхность, нормалью которой служит направление оси  $x$ . Через эту поверхность проходит тепловой луч с направляющими косинусами  $l$ ,  $m$  и  $n$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Суммарная интенсивность луча будет  $I$ . Скорость изменения количества движения, связанного с энергией излучения, будет тогда

$$M_0 = \frac{1}{c} I l d\omega. \quad (2.15)$$

Нормальная компонента количества движения  $M_0$ , передаваемого через поверхность, есть нормальное напряжение на поверхности  $d\sigma_0$  в направлении  $x$ , т. е.

$$d\tau_{Rxx} = - \frac{1}{c} I l d\omega l. \quad (2.16)$$

Суммарное нормальное напряжение излучения в направлении  $x$  в точке  $P$  есть сумма элементарных напряжений по полной сфере, т. е.

$$\tau_{Rxx} = -\frac{1}{c} \int I l^2 d\omega. \quad (2.17)$$

Аналогично тензор напряжений излучения имеет  $ij$ -ю компоненту

$$\tau_{Rij} = -\frac{1}{c} \int I n_i n_j d\omega, \quad (2.18)$$

где  $n_i$  — направляющий косинус теплового луча относительно  $i$ -й оси.

Мы можем определить давление излучения  $\bar{p}_R$  в следующем виде:

$$\bar{p}_R = -\frac{1}{3} (\tau_{Rxx} + \tau_{Ryy} + \tau_{Rzz}) = \frac{1}{3c} \int I d\omega = \frac{1}{3} E_R. \quad (2.19)$$

Для изотропного излучения имеем

$$p_R = -\tau_{Rxx} = -\tau_{Ryy} = -\tau_{Rzz} = \frac{1}{3} E_R, \quad (2.20)$$

$\tau_{Rij} = 0$ , если  $i \neq j$ .

Как давление излучения  $p_R$ , так и объемная плотность энергии излучения  $E_R$  пропорциональны  $1/c$ . Следовательно, они имеют одинаковый порядок величины и в обычной газодинамике, как правило, малы, за исключением случая крайне высокой температуры. Если тензор напряжений излучения не пренебрежимо мал, мы должны добавить его в уравнение движения газа.

Объемная сила, обусловленная напряжением излучения  $\tau_{Rij}$ , является дивергенцией тензора напряжений излучения. Следовательно,  $i$ -я компонента объемной силы излучения будет равна

$$F_{Ri} = \frac{\partial \tau_{Rij}}{\partial x_j}. \quad (2.21)$$

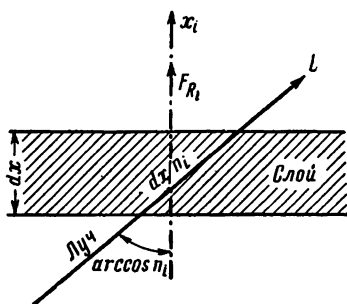
Здесь использована условная форма записи суммы.

В литературе используется частное выражение для объемных сил  $F_{Ri}$  [1, 10]

$$F_{Ri} = \frac{1}{c} \int \int_{\omega} k'_v \rho I_v(\theta, \varphi, r, t) n_i d\omega dv, \quad (2.22)$$

где  $k'_v$  — массовый коэффициент поглощения, характерный для индуцированного излучения, о котором пойдет речь в гл. 3, и  $n_i$  — направляющий косинус луча относительно  $i$ -й оси.

Уравнение (2.22) можно получить, рассматривая тонкий плоский слой толщиной  $dx$  (фиг. 2.5). Количество энергии излучения,



Фиг. 2.5. Прохождение луча через слой среды.

поглощаемой этим слоем в направлении  $L$  [см. гл. 3, уравнение (3.1)], равно

$$dE_a = I_\nu n_i \rho k'_\nu \frac{dx}{n_i} d\omega d\nu. \quad (2.23)$$

Сила по нормали к единичной поверхности слоя определяется выражением

$$d\tau_{Ri} = \int_\nu \int_\omega dE_a n_i / c = \frac{dx}{c} \int_\nu \int_\omega k'_\nu \rho I_\nu n_i d\omega d\nu = \frac{dx_i}{c} F_{Ri}, \quad (2.24)$$

а на единицу объема будет действовать сила

$$F_{Ri} = \frac{d\tau_{Ri}}{dx} = \frac{1}{c} \int_\nu \int_\omega \rho k'_\nu I_\nu n_i d\omega d\nu. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) является частным случаем более общего уравнения (2.21). Мы будем использовать уравнение (2.21) в уравнениях движения (см. гл. 5, разд. 4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Aller L. H. *Astrophysics, The Atmospheres of the Sun and Stars*, Ronald Press Co., N. Y., 1963.
2. Амбарцумян В. А., *Теоретическая астрофизика*, ГОНТИ, 1939.
3. Chandrasekhar S., *Stellar Structures*, Dover Publications, Inc. N. Y., 1957.
4. Godske C. L., Bergeron T., Bjercknes J., Bundgaard R. C., *Dynamic Meteorology and Weather Forecasting*, American Meteorological Society and Carnegie Institution of Washington, 1957.

5. Johnson J. C., Physical Meteorology, Wiley, N. Y., 1954.
6. Kourganoff V., Methods in Transfer Problems, Oxford Clarendon Press, 1952.
7. Pai S. I., Some Considerations on Radiation Magnetogasdynamics, Proc. Non-linear Problem, Univ. of Wisconsin Press, 1963, pp. 47—67.
8. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, Inc., N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеоретиздат, 1935.
9. Rosseland S., Theoretical Astrophysics, Oxford Clarendon Press, 1936.
10. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.

## Уравнение переноса излучения

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Все величины, характеризующие перенос излучения и рассмотренные в гл. 2, выражены через спектральную интенсивность излучения  $I_\nu$ . Поэтому мы должны найти зависимость для определения спектральной интенсивности излучения. Спектральная интенсивность является результатом взаимодействия между излучением и веществом, которое следовало бы изучить с микроскопической точки зрения с помощью квантовой механики. Однако для практических задач течения потока основной интерес представляет макроскопическая точка зрения. Точные результаты микроскопического анализа могут быть осреднены с помощью некоторых коэффициентов, представляющих средние значения физических свойств рассматриваемой среды. В задачах переноса излучения физические свойства среды могут быть выражены в виде спектрального коэффициента поглощения  $k_\nu$  и спектрального коэффициента излучения  $j_\nu$ . В макроскопическом анализе мы принимаем, что эти коэффициенты являются известными функциями состояния среды [5, 7, 9]. Точное выражение для этих функций можно получить или из микроскопического анализа, или из эксперимента. Мы рассмотрим определение этих коэффициентов в гл. 11. В этой главе мы предположим, что среда является гомогенной, так что свойства поглощения и излучения изменяются в среде непрерывно. Особое внимание будет уделено случаю поля излучения в негомогенной среде. Например, когда твердое тело находится в газообразной среде, свойства излучения изменяются скачкообразно на поверхности тела от свойств газа до свойств тела. Граничные задачи будут рассмотрены в гл. 6.

### 2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ [1, 2]

На фиг. 3.1 рассматривается луч со спектральной интенсивностью  $I_\nu$ , пронизывающий элементарный объем гомогенной среды плотностью  $\rho$ . Интенсивность этого луча на небольшом расстоянии  $ds$  от точки входа становится равной  $I_\nu + dI_\nu$ . Изменение спектральной интенсивности излучения  $dI_\nu$  может быть

выражено через спектральный коэффициент поглощения  $k_\nu$  с помощью следующей формулы:

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) можно проинтегрировать от начальной точки  $s=s_0$  и  $I_\nu=I_\nu(s_0)$ , т. е.

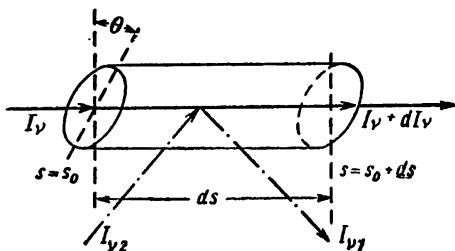
$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s \rho k_\nu ds\right) = I_\nu(s_0) \exp(-\tau_\nu), \quad (3.2)$$

где

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \rho k_\nu ds \quad (3.3)$$

— оптическая глубина слоя.

Оптическая глубина слоя  $\tau_\nu$ , иногда называемая оптической толщиной<sup>1)</sup> слоя, является безразмерной длиной, которая ха-



Ф и г. 3.1. Лучи в среде.

актеризует поглощение излучения в среде. Для заданной физической глубины ( $s-s_0$ ) оптическая глубина  $\tau_\nu$  может быть больше или меньше, чем физическая длина, в зависимости от величины  $k_{\nu\rho}$ . Часто вводят длину среднего свободного пробега излучения  $L_{R\nu}$ , такую, что

$$L_{R\nu} = \frac{1}{k_{\nu\rho}}. \quad (3.4)$$

Средняя длина свободного пробега излучения подобна средней длине пробега в кинетической теории газов. Средняя длина свободного пробега излучения представляет собой среднее расстояние между столкновениями фотонов и молекул, в то время

<sup>1)</sup> В отечественной литературе чаще употребляют термин оптическая толщина слоя. — *Прим. перев.*

как обычная средняя длина свободного пробега представляет собой среднее расстояние между столкновениями молекул. Как средняя длина свободного пробега излучения  $L_{R\nu}$ , так и оптическая глубина  $\tau_\nu$  являются функциями частоты излучения  $\nu$  и переменных состояния, таких, как температура и плотность среды. Иногда удобно взять среднюю величину  $L_{R\nu}$  по всему диапазону частот. Мы рассмотрим эти средние величины позже, поскольку они зависят от того, является ли среда оптически толстой или оптически тонкой. Когда длина  $L_{R\nu}$  мала по сравнению с физическим размером, среду называют оптически толстой, с другой стороны, когда  $L_{R\nu}$  велика по сравнению с физическим размером, среду называют оптически тонкой.

Для черного тела спектральная интенсивность излучения, или показатель излучения<sup>1)</sup>, зависит только от температуры  $T$  и частоты  $\nu$ , или от длины волны  $\lambda = c/\nu$  (см. фиг. 2.2, а также гл. 4). Для всех других сред спектральная интенсивность излучения, или показатель излучения, зависит не только от температуры и частоты, но также и от свойств среды, т. е. от ее коэффициента поглощения  $k_\nu$ . Так как  $k_\nu$  является функцией как температуры, так и частоты, то невозможно провести единую кривую спектральной интенсивности излучения какой-либо реальной среды для всех температур (ср. гл. 4, разд. 4), как это имело место в случае излучения черного тела. Однако излучение черного тела имеет максимум интенсивности при данной температуре  $T$ . На фиг. 3.2 показаны несколько типичных случаев, характерных для реальной среды. Для тел с сильным коротковолновым поглощением спектральная интенсивность излучения близка к спектральной интенсивности излучения черного тела при коротких длинах волн, в то время как для тел с сильным длинноволновым поглощением спектральная интенсивность излучения ближе к спектральной интенсивности излучения черного тела при больших длинах волн [3, 4].

Коэффициент поглощения  $k_\nu$  состоит из двух слагаемых: одно является истинным коэффициентом поглощения  $k_{\nu t}$ , отражающим тот факт, что энергия излучения с частотой  $\nu$  преобразована в другие виды энергии или излучение другой частоты; а другое слагаемое является коэффициентом рассеяния  $k_{\nu s}$ , отражающим тот факт, что энергия, потерянная падающим лучом, будет появляться вновь как рассеянное излучение в другом направлении, как, например, луч  $I_{\nu 1}$  на фиг. 3.1. Следовательно, в общем случае мы можем написать

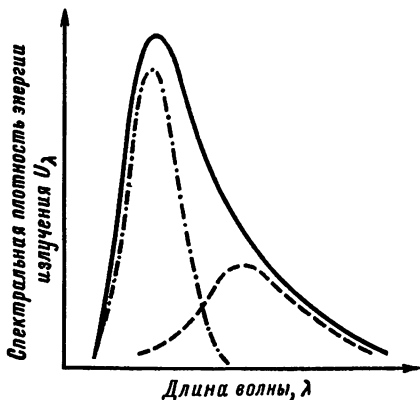
$$k_\nu = k_{\nu t} + k_{\nu s}. \quad (3.5)$$

<sup>1)</sup> Термин «показатель излучения» в отечественной литературе не используется. — *Прим. перев.*



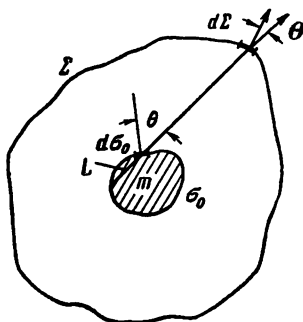
Так как  $k_{\nu t}$  и  $k_{\nu s}$  зависят от различных физических явлений, мы рассмотрим их раздельно<sup>1)</sup>.

**Истинный коэффициент поглощения  $k_{\nu t}$ .** Истинный коэффициент поглощения характеризует поглощение фотонов



Фиг. 3.2. Спектральная плотность энергии излучения  $U_\lambda$  для трех различных сред с различными коэффициентами поглощения при заданной температуре.

— черное тело; - - - тело с сильным коротковолновым поглощением; - · - · - тело с сильным длинноволновым поглощением.



Фиг. 3.3. Поглощение энергии излучения.

атомами и молекулами, находящимися в поле излучения. Истинный коэффициент поглощения можно выразить через коэффициент Эйнштейна  $B_{mn}$ , который представляет собой вероятность  $p_a$  нахождения атома в состоянии  $m$  при воздействии на него излучения с частотой  $\nu_{mn}$  и поглощении кванта энергии  $h\nu_{mn}$  за время  $dt$ , т. е.

$$p_a = B_{mn} dt \int I_{\nu_{mn}} d\omega. \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь небольшой элемент среды с массой  $m$ , объемом  $V$  и численной плотностью атомов или молекул  $N_m$  в состоянии  $m$ . Полная энергия, поглощаемая этим элементом среды при воздействии излучения с частотой  $\nu_{nm}$ , будет

$$E_a = N_m V B_{mn} h \nu_{nm} d\nu dt \int I_{\nu_{nm}} d\omega. \quad (3.7)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе для этих коэффициентов приняты следующие названия:  $k_\nu$  — коэффициент ослабления,  $k_{\nu t}$  — коэффициент поглощения,  $k_{\nu s}$  — коэффициент рассеяния. — Прим. перев.

Энергия  $E_a$  в уравнении (3.7) может быть также выражена через коэффициент поглощения. Мы можем считать, что излучение, поглощаемое элементом, распространяется от небольшой замкнутой поверхности  $\Sigma$ . Энергия излучения  $dE_\nu$  от элемента поверхности  $\Sigma$  к элементарной площадке  $d\sigma_0$  на поверхности рассматриваемого элемента (фиг. 3.3) равна

$$dE_\nu = I_\nu \cos \Theta d\tau \frac{\cos \theta d\Sigma}{r^2} d\nu dt. \quad (3.8)$$

Часть энергии излучения, выражаемой уравнением (3.8), поглощается элементом  $m$

$$dE_a = (dE_\nu) k_{\nu t} \rho L = I_\nu k_{\nu t} d\omega dm d\nu dt, \quad (3.9)$$

где  $dm = \rho L \cos \theta d\sigma_0$  — элемент массы рассматриваемой среды и  $L$  — расстояние в массе  $m$ , которое пересекает луч.

Полная энергия, поглощенная  $m$ , получается интегрированием выражения (3.9). Так как мы выбрали очень маленький элемент, то мы можем принять плотность и спектральную интенсивность постоянными. В результате интегрирование уравнения (3.9) дает

$$E_a = k_{\nu t} \rho V d\nu dt \int I_\nu nm d\omega. \quad (3.10)$$

Сравнивая уравнения (3.7) и (3.10), мы получаем истинный коэффициент поглощения для начального состояния  $m$

$$k_{\nu t m} = \frac{N_m}{\rho} B_{mn} h\nu, \quad (3.11)$$

здесь мы приняли  $\nu = \nu_{nm}$ . Полный коэффициент поглощения данной среды, состоящей из молекул в различных начальных состояниях  $m$ , находят суммированием  $k_{\nu t m}$  по всем начальным состояниям  $m$

$$k_{\nu t} = \sum_m k_{\nu t m}, \quad (3.12)$$

где разность энергетического уровня в конечном состоянии  $n$  после поглощения энергии излучения и энергетического уровня в начальном состоянии  $m$  будет

$$E_n - E_m = h\nu. \quad (3.13)$$

В литературе часто используют произведение истинного коэффициента поглощения  $k_{\nu t}$  и плотности среды  $\rho$  и называют его линейным коэффициентом поглощения, так как  $(1/\rho k_\nu)$  имеет размерность длины [см. уравнение (3.4)], т. е.

$$K_{\nu t} = \rho k_{\nu t} = \sum_m N_m \sigma_m, \quad (3.14)$$

где величина

$$\sigma_m = B_{mn} h\nu \quad (3.15)$$

известна как сечение поглощения фотонов с частотой  $\nu$  молекулами в состоянии  $m$ . Мы можем определить сечение поглощения  $\sigma_m$  из микроскопической теории или на основании экспериментальных данных, как это можно будет видеть в гл. 11.

Для макроскопического анализа мы можем принять, что линейный коэффициент поглощения  $K_\nu$  является известной функцией частоты  $\nu$  и состояния среды, т. е.

$$K_\nu = K_\nu(\nu, T, \rho). \quad (3.16)$$

**Коэффициент рассеяния  $k_{vs}$ .** Если мы примем, что среда, рассматриваемая в радиационной газодинамике, является гомогенной средой, в которой плотность плавно изменяется от точки к точке, то явления рассеяния не будет. Однако в реальной среде встречаются небольшие оптические неоднородности. Например, в атмосфере имеются маленькие частички дыма и пыли. Если размеры этих оптических неоднородностей того же порядка, что и длина волны излучения, то происходит рассеяние излучения. Если рассматривать процессы переноса излучения в атмосфере, то рассеяние играет существенную роль при объяснении многих важных явлений, таких, как голубой цвет неба, изменение цвета удаленных объектов, радарное эхо от урагана, поляризация света неба и т. д. При существующем состоянии радиационной газодинамики явления рассеяния могут рассматриваться как явления второго порядка, так как мы имеем дело главным образом с гомогенными средами. В следующих главах мы будем пренебрегать явлением рассеяния, за исключением особо оговоренных случаев. Имея в виду дальнейшее развитие радиационной газодинамики, мы все же кратко рассмотрим в этой главе явление рассеяния излучения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В этом разделе автором допущена неточность в написании уравнений (3.17) — (3.20), (3.22), а также выражений (3.27) и (3.38) в последующем изложении, в связи с чем ниже приводится более точное изложение указанного текста.

Энергия излучения, рассеиваемая элементом массы, заключенной в объеме с площадью поперечного сечения  $d\sigma_0$  и длиной в направлении луча  $ds$ , за время  $dt$  будет равна

$$dE_s = k_{vs} \rho ds I_\nu \cos \theta d\sigma_0 d\nu d\omega dt = k_{vs} I_\nu dm d\nu d\omega dt \quad (3.17)$$

для всех направлений.

Полное поглощение энергии излучения тогда будет

$$dE_{ab} = dE_a + dE_s = (k_{\nu t} + k_{vs}) I_\nu ds \rho \cos \theta d\sigma_0 d\nu d\omega dt. \quad (3.18)$$

Иногда желательно знать угловое распределение рассеянного излучения, которое можно выразить с помощью фазовой функции  $p(\cos \theta)$ , такой, что

Энергия излучения, рассеиваемая элементом массы, заключенной в объеме с площадью поперечного сечения  $d\sigma_0$  и длиной  $ds$  в направлении луча, за время  $dt$  будет равна

$$dE_s = k_{vs} \rho ds I_v \cos \theta d\sigma_0 dv d\omega = k_{vs} dm dv d\omega \quad (3.17)$$

для всех направлений.

Полное поглощение энергии излучения тогда будет

$$dE_{ab} = dE_a + dE_s = (k_{vt} + k_{vs}) ds p \cos \theta d\sigma_0 dv d\omega dt. \quad (3.18)$$

Иногда желательно знать угловое распределение рассеянного излучения, которое можно выразить с помощью фазовой функции  $p(\cos \Theta)$ , такой, что выражение

$$dE_{ab} p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = k_{vs} I_v p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} dm dv d\omega \quad (3.19)$$

дает энергию излучения, рассеиваемую в элементарном телесном угле  $d\omega'$  в направлении под углом  $\Theta$  к падающему на элементарную массу  $dm$  лучу. Чтобы уравнение (3.19) согласовывалось с (3.18), мы должны нормализовать фазовую функцию,

выражение

$$\frac{dE_{ab}}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \theta) d\omega' = k_{vs} I_v dm dv d\omega dt \quad (3.19)$$

определяет энергию излучения, рассеиваемую в элементарном телесном угле  $d\omega'$  в направлении под углом  $\theta$  к падающему на элементарную массу  $dm$  лучу, просуммированную по телесному углу  $\omega'$  по всему пространству  $4\pi$ . Чтобы уравнение (3.19) согласовывалось с (3.18), мы должны нормализовать фазовую функцию так, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \theta) d\omega' = \frac{k_{vs}}{k_v} = \omega_0, \quad (3.20)$$

где  $\omega_0$  представляет собой часть потерь энергии, обусловленную рассеянием и называемую альбедо углового рассеяния. В случае идеального рассеяния мы имеем  $\omega_0 = 1$ . В общем случае  $(1 - \omega_0)$  представляет собой часть потерь энергии за счет истинного поглощения.

Для изотропного рассеяния имеем

$$p(\cos \theta) = \omega_0. \quad (3.21)$$

Хорошо известно выражение Рэлея для фазовой функции

$$\frac{k_v}{k_{vs}} p(\cos \theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.22)$$

Дальнейшее изложение не содержит неточностей, за исключением выражений (3.27) и (3.38), в которых должна содержаться фазовая функция,

так что

$$p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = \frac{k_{vs}}{k_v} = \omega_0, \quad (3.20)$$

где  $\omega_0$  представляет собой часть потерь энергии, обусловленную рассеянием и называемую альбедо углового рассеяния. В случае идеального рассеяния мы имеем  $\omega_0=1$ . В общем случае  $(1 - \omega_0)$  представляет собой часть потерь энергии за счет истинного поглощения.

Для изотропного рассеяния имеем

$$p(\cos \Theta) = \omega_0. \quad (3.21)$$

Хорошо известно выражение Рэлея для фазовой функции

$$p(\cos \Theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \Theta). \quad (3.22)$$

нормализованная не к альбедо  $\omega_0$  [см. уравнение (3.20)], а к единице

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \gamma(\cos \theta) d\omega' = 1.$$

Функцию  $\gamma$  называют индикатрисой рассеяния, она связана с фазовой функцией соотношением

$$\gamma(\cos \theta) = \frac{k_v}{k_{vs}} p(\cos \theta).$$

В частности, уравнение (3.22) выражает индикатрису рассеяния Рэлея.

Если же в уравнениях (3.27) и (3.38) оставить фазовую функцию  $p(\cos \theta)$ , то в более точной записи эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} J_{vs} &= k_{vs} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k_v}{k_{vs}} p(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_v(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= k_v \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_v(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' \quad (3.27) \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial s} &= \rho k_{vt} (J_{vt} - I_v) + \\ + \rho k_{vs} &\left[ -I_v + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k_v}{k_{vs}} p(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_v(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' \right] \quad (3.38) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial s} &= \rho k_{vt} (J_{vt} - I_v) + \\ + \rho k_{vs} &\left[ -I_v + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \gamma(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_v(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' \right]. \end{aligned}$$

*Прим. перев.*

В общем случае мы можем разложить фазовую функцию в ряд по полиномам Лежандра  $p_n$ , так что

$$p(\cos \Theta) = \sum_n \bar{\omega}_n p_n(\cos \Theta), \quad (3.23)$$

где  $\bar{\omega}_n$  — постоянные.

Для точного описания рассеяния важно знать состояние поляризации поля излучения. Другими словами, кроме интенсивности излучения, мы должны определить степень поляризации, плоскость поляризации и эллиптичность поляризации излучения.

Так как мы будем пренебрегать явлениями рассеяния в большинстве наших задач, мы не будем подробно обсуждать поляризацию излучения. Для тех читателей, которые интересуются этой темой, рекомендуем специальные работы по переносу излучения [2, 7]. В первом приближении для радиационной газодинамики явления рассеяния могут быть выражены через коэффициент рассеяния  $k_{vs}$  и фазовую функцию  $p(\cos \Theta)$ .

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ИЗЛУЧЕНИЯ $j_\nu$

Энергия излучения  $dE_e$ , испускаемая средой, может быть выражена через спектральный коэффициент излучения в виде следующей зависимости:

$$dE_e = j_\nu dm d\omega dt d\nu, \quad (3.24)$$

где  $dE_e$  — энергия излучения, испускаемая средой с массой  $dm$  в телесном угле  $d\omega$  за время  $dt$  в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ . Коэффициент излучения  $j_\nu$  является функцией частоты, а также параметров состояния среды. В общем случае испускание излучения неравномерно по всем направлениям, даже если элемент массы изотропный. Как мы увидим позже, только в случае изотропной среды в изотропном поле излучения испускание излучения будет равномерно во всех направлениях.

Коэффициент излучения  $j_\nu$  также состоит из двух слагаемых: одно обусловлено генерированием фотонов в среде, а второе — вкладом фотонов, рассеиваемых со всех других направлений в направлении рассматриваемого луча. Например, луч  $I_{\nu 2}$  на фиг. 3.1 представляет это явление.

**Испускание фотонов.** Испускание излучения имеет место, когда атом переходит от более высокого энергетического состояния  $n$  к более низкому состоянию  $m$  и испускает квант энергии  $h\nu_{nm}$ , т. е.

$$E_n - E_m = h\nu_{nm} = h\nu,$$

где  $E_n$  и  $E_m$  — соответственно энергетические уровни состояний  $n$  и  $m$ , а  $h$  — постоянная Планка, равная  $6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг/сек. Реальный процесс испускания следует рассчитывать методами квантовой механики. Однако для макроскопической трактовки испускание излучения может быть выражено с помощью коэффициентов Эйнштейна, которые характеризуют два различных типа испускания излучения: один известен как коэффициент спонтанного излучения  $A_{nm}$ , другой — как коэффициент индуцированного излучения  $B_{nm}$ .

При отсутствии внешнего поля излучения вероятность того, что атом, находящийся в возбужденном состоянии  $n$ , испустит квант энергии  $h\nu_{nm}$  в элементарном телесном угле  $d\omega$  за интервал времени  $dt$ , записывается через коэффициент Эйнштейна в следующем виде:

$$A_{nm} d\omega dt.$$

Это спонтанное излучение, которое равномерно по всем направлениям.

Вероятность испускания кванта  $h\nu_{nm}$  возрастает, если на атом, находящийся в состоянии  $n$ , действует поле излучения с частотой  $\nu_{nm}$ . Вероятность этого индуцированного испускания пропорциональна интенсивности излучения и выражается зависимостью

$$B_{nm} I_{\nu_{nm}} d\omega dt.$$

Полное испускание энергии отдельным атомом, находящимся в состоянии  $n$ , в единицу времени в телесном угле  $d\omega$  определяется следующим образом:

$$h\nu_{nm} (A_{nm} + B_{nm} I_{\nu_{nm}}) d\omega.$$

Теперь, если численная плотность атомов, находящихся в состоянии  $n$ , равна  $N_n$ , то полная энергия, испускаемая в телесном угле  $d\omega$  в единицу времени, будет равна

$$d\omega N_n h\nu_{nm} (A_{nm} + B_{nm} I_{\nu_{nm}}) = \rho j_{\nu_{nm}} d\omega. \quad (3.25)$$

Следовательно, выражение для коэффициента излучения  $j_{\nu}$  через коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  будет иметь следующий вид:

$$j_{\nu} = \frac{N_n}{\rho} h\nu (A_{nm} + B_{nm} I_{\nu}) = j_{\nu c}. \quad (3.26)$$

Здесь мы записываем  $\nu$  вместо  $\nu_{nm}$  без потери общности. Уравнение (3.26) дает коэффициент излучения, обусловленный испусканием фотонов, т. е.  $j_{\nu c}$ .

**Рассеяние.** Рассеяние в направлении  $(\theta, \varphi)$  энергии излучения, падающего в направлении  $(\theta', \varphi')$ , выразится из уравнения (3.17) в виде соотношения

$$k_{\nu s} dm dv d\omega p(\theta, \varphi, \theta', \varphi') I_{\nu}(\theta', \varphi') \frac{\sin \theta' d\theta' d\varphi'}{4\pi}.$$

Интегрирование приведенного выражения по всем направлениям  $(\theta', \varphi')$  дает коэффициент излучения, обусловленный рассеянием, в виде

$$j_{\nu s} = k_{\nu s} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_{\nu}(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (3.27)$$

Для рассеивающей атмосферы

$$j_{\nu} = j_{\nu s}. \quad (3.28)$$

В общем случае мы имеем составляющие излучения как за счет рассеяния, так и за счет испускания, и полный спектральный коэффициент излучения тогда будет

$$j_{\nu} = j_{\nu s} + j_{\nu e}. \quad (3.29)$$

#### 4. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ [6]

Теперь мы переходим к выводу уравнения, которое описывает изменение спектральной интенсивности излучения в функции коэффициента поглощения  $k_{\nu}$  и коэффициента излучения  $j_{\nu}$ . Это уравнение известно как уравнение переноса излучения, которое по существу является законом сохранения энергии излучения.

Рассмотрим луч интенсивностью  $I_{\nu}$ , проходящий через элементарный цилиндр с площадью основания  $d\sigma_0$  и длиной  $ds$ , содержащий среду плотностью  $\rho$ . Мы принимаем, что этот луч направлен по нормали к поверхности ( $\cos \theta = 1$ ). Энергия излучения, входящая через нижнее основание цилиндра, равна

$$dE_i = I_{\nu} d\omega d\sigma_0 dt dv.$$

Энергия излучения, выходящая через верхнее основание цилиндра, где интенсивность излучения равна  $I_{\nu} + dI_{\nu}$ , определяется следующим образом:

$$dE_o = (I_{\nu} + dI_{\nu}) d\omega d\sigma_0 dt dv.$$

Часть энергии излучения поглощается средой цилиндра, и эта поглощенная энергия определяется выражением

$$dE_a = -k_{\nu} I_{\nu} \rho ds d\omega d\sigma_0 dt dv.$$



Некоторая часть энергии излучения может испускаться средой цилиндра, и эта испускаемая энергия равна

$$dE_e = j_v \rho d\sigma_0 ds d\omega dt dv.$$

Некоторая часть энергии излучения всегда остается в цилиндре. Из-за наличия указанных выше четырех процессов энергия излучения в цилиндре в общем случае изменяется во времени.

Полное изменение энергии излучения за интервал времени  $dt$  равно

$$dE_t = \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} dt ds d\sigma_0 d\omega dv.$$

Согласно закону сохранения энергии, имеем

$$dE_0 - dE_t = dE_e + dE_a - dE_t \quad (3.30)$$

или

$$\frac{\partial I_v}{\partial s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \rho(j_v - k_v I_v). \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) является уравнением переноса излучения, которое можно записать также в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + l \frac{\partial I_v}{\partial x} + m \frac{\partial I_v}{\partial y} + n \frac{\partial I_v}{\partial z} = \rho k_v (J_v - I_v), \quad (3.32)$$

где

$$J_v = j_v / k_v \quad (3.33)$$

— функция источника излучения, а  $l$ ,  $m$  и  $n$  — направляющие косинусы относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Одной из основных задач переноса излучения является определение функции источника  $J_v$ , которая зависит от происходящих радиационных процессов.

Если рассеяние пренебрежимо мало, как это имеет место в большинстве задач радиационной газодинамики, уравнение переноса излучения (3.31) можно выразить через коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  и  $B_{mn}$  следующим образом:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial s} = N_n A_{nm} h\nu - N_m B_{mn} h\nu \left(1 - \frac{N_n B_{nm}}{N_m B_{mn}}\right) I_v \quad (3.34)$$

или

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial s} = \rho k_v \left(1 - \frac{N_n B_{mn}}{N_m B_{nm}}\right) \left[ \frac{A_{nm}}{B_{mn} \left(\frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} - 1\right)} - I_v \right]. \quad (3.35)$$

Мы можем определить приведенный коэффициент поглощения  $k'_{v,r}$ , который учитывает индуцированное испускание в среде.

в следующем виде:

$$k'_{\nu t} = k_{\nu t} \left( 1 - \frac{N_n B_{nm}}{N_m B_{mn}} \right). \quad (3.36)$$

Как мы покажем в гл. 4, при термодинамическом равновесии отношение коэффициентов Эйнштейна, содержащееся в уравнении (3.35), будет равно

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}, \quad \frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} = \exp(h\nu/kT), \quad (3.37)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,379 \cdot 10^{-16}$  эрг/град.

В том случае, когда имеют место как рассеяние и испускание, так и истинное поглощение, уравнение (3.32) может быть записано следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = & \rho k_{\nu t} (J_{\nu t} - I_\nu) + \\ & + \rho k_{\nu s} \left[ -I_\nu + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta', \varphi', \theta, \varphi) I_\nu(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В общем случае уравнение переноса излучения (3.38) является интегро-дифференциальным уравнением. Когда рассеяние пренебрежимо мало, оно приводится к дифференциальному уравнению. Член  $J_{\nu t}$  является функцией источника излучения, т. е.  $J_{\nu t} = j_{\nu t}/k_{\nu t}$ .

## 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Во всех задачах с течением потока в радиационной газодинамике мы не рассматриваем высокочастотных явлений. Следовательно, масштаб времени  $t$  значительно больше, чем  $L/c$ , где  $L$  — характерный размер поля течения. Так как расстояния  $s$  вдоль рассматриваемого луча должно быть того же порядка величины, как и  $L$ , то мы можем пренебречь нестационарным членом  $(1/c) (\partial I_\nu / \partial t)$  по сравнению с членом пространственного изменения интенсивности  $\partial I_\nu / \partial s$ . В радиационной газодинамике мы будем всегда использовать эту аппроксимацию; в результате уравнение переноса излучения (3.32) принимает вид

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \rho k_\nu (J_\nu - I_\nu). \quad (3.39)$$

Уравнение (3.39) является полным дифференциальным уравнением первого порядка относительно переменной  $s$ . Формаль-

ное решение уравнения (3.39) для граничных условий  $s=s_0$  и  $I_v=I_v(s_0)$  описывается следующим образом:

$$I_v(s) = I_v(s_0) \exp[-\tau_v(s, s_0)] + \int_{s_0}^s J_v(s') \exp[-\tau_v(s, s')] \rho k_v ds', \quad (3.40)$$

где  $\tau_v$  определяется уравнением (3.3), т. е.

$$\tau_v(s, s_0) = \int_{s_0}^s \rho k_v ds' \quad \text{и} \quad \tau_v(s, s') = \int_{s'}^s \rho k_v ds'. \quad (3.41)$$

Мы можем использовать интегральное выражение (3.40) вместо дифференциального уравнения (3.39) в анализе задач радиационной газодинамики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S., Stellar Structure, Dover Publications, Inc., N. Y., 1957.
2. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Dover Publications, N. Y., 1960; имеется русский перевод: Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. Godske C. L., Bergeron T., Bjerknes J., Bundgaard R. C., Dynamic Meteorology and Weather Forecasting, American Meteorology Society and Carnegie Institution of Washington, 1957.
4. Johnson J. C., Physical Meteorology, Wiley, N. Y., 1954.
5. Kourganoff V., Basic Methods in Transfer Problems, Oxford Univ. Press, 1952.
6. Pai S. I., Some Considerations of Radiation Magnetogasdynamics, Proc. Non-linear Problem, Univ. of Wisconsin Press, 1963, pp. 47—67.
7. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, Inc., N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеоретиздат, 1935.
8. Viskanta R., Grosh R. J., Heat Transfer in a Thermal Radiation Absorbing and Scattering Medium, Purdue Univ. M. E. Dept. Report.
9. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.

## *Равновесное излучение*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Простейшим случаем теплового излучения является равновесное излучение, при котором температура среды должна быть постоянной во всей среде. При термодинамическом равновесии существует определенное соотношение между коэффициентом поглощения и коэффициентом излучения. Мы рассмотрим законы равновесного излучения в разд. 2—4. Когда в поле течения газа имеется поле излучения, термодинамические соотношения изменяются в соответствии с относительной величиной давления излучения и давления газа. Мы обсудим эти соотношения в разд. 4 и 5. Для случая полного термодинамического равновесия температура всей области должна быть постоянной. В поле течения газа температура обычно различна в различных точках. Следовательно, в обычных условиях мы не будем иметь термодинамического равновесия. Однако поскольку в простой задаче гидродинамики мы обычно можем определить температуру в каждой точке поля течения, то с хорошим приближением можно принять, что равновесие излучения достигается локально в соответствии с локальной температурой. Другими словами, мы можем принять, что испускание излучения соответствует локальной температуре, как если бы были достигнуты условия термодинамического равновесия. Конечно, мы не можем принять, что поглощенное излучение также соответствует локальной температуре, поскольку излучение, которое поглощается, поступает из других точек поля течения, имеющих температуру, отличающуюся от локальной температуры. Мы рассмотрим локальное термодинамическое равновесие в разд. 7.

### 2. ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ КИРХГОФА

В 1859 г. Кирхгоф вывел теорему о том, что при термодинамическом равновесии отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения тела зависит только от температуры тела и не зависит от его природы. Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим адиабатически замкнутую систему, находящуюся в условиях термодинамического равновесия. Сначала рассмотрим

точку внутри замкнутой полости вдали от оболочки. Так как поле излучения находится в равновесии, то интенсивность  $I_\nu$  не должна зависеть от положения точки, направления и времени. Из уравнения (3.31) следует

$$I_\nu = j_\nu/k_\nu. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является законом излучения Кирхгофа, который утверждает, что при термодинамическом равновесии спектральная интенсивность при некоторой частоте  $\nu$  равна отношению соответствующего коэффициента излучения к коэффициенту поглощения.

Теперь рассмотрим точку в замкнутой полости вблизи стенки оболочки. При условии равновесного излучения в этой точке не происходит результирующий обмен энергией, следовательно, поток излучения от стенки должен быть равен потоку, идущему в противоположном направлении. В результате состояние излучения на поверхности замкнутой полости должно быть таким же, как и внутри, и, следовательно, уравнение (4.1) справедливо также и на стенке.

Интенсивность  $I_\nu$  не зависит от природы среды. Эту теорему можно доказать по следующей схеме Кирхгофа и Чандрасекара [3]. Рассмотрим бесконечно малый цилиндрический объем с массой  $dm = \rho ds d\sigma_0$ , где  $\rho$  — плотность массы,  $ds$  — длина цилиндра и  $d\sigma_0$  — площадь его основания. Эта масса помещена внутри полого сферического отражателя, и вся система находится внутри адиабатической оболочки. Оболочка вакуумирована, так что внутри нее не происходит поглощения излучения, за исключением поглощения малой массой и внутренними стенками оболочки. В сферическом отражателе имеются два маленьких отверстия с телесным углом  $\omega$ . Вся система находится в термодинамическом равновесии, следовательно, энергия излучения, испускаемого массой через эти два отверстия, равна

$$E_e = j_\nu \omega d\sigma_0 ds d\nu dt. \quad (4.2)$$

Эта масса будет поглощать энергию излучения, которая испускается поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  (фиг. 4.1). Пусть спектральные интенсивности излучения на  $S_1$  и  $S_2$  будут соответственно  $B_{\nu 1}$  и  $B_{\nu 2}$ . Полная поглощенная энергия излучения тогда будет

$$E_a = k_\nu \rho (B_{\nu 1} + B_{\nu 2}) \omega d\sigma_0 ds d\nu dt. \quad (4.2a)$$

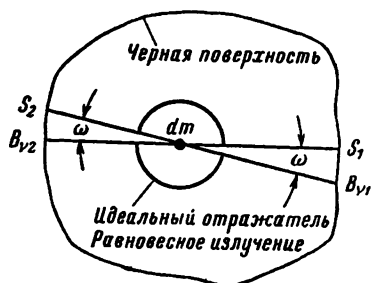
При равновесном излучении  $E_e = E_a$ . Следовательно, мы имеем

$$k_\nu (B_{\nu 1} + B_{\nu 2}) = 2j_\nu. \quad (4.3)$$

Так как уравнение (4.3) остается справедливым, если мы деформируем поверхность оболочки, то интенсивность излучения от поверхности не должна зависеть от направления луча. В результате имеем

$$B_{\nu 1} = B_{\nu 2} = B_{\nu}. \quad (4.4)$$

Если мы заменим материал массы, уравнение (4.3) останется справедливым при сохранении в системе условия термодинамического равновесия. Следовательно, функция  $B_{\nu}$  должна быть



Фиг. 4.1. Поглощение и испускание излучения в равновесных условиях

независимой от природы массы и является функцией только температуры. В результате мы получаем закон излучения Кирхгофа.

При термодинамическом равновесии

$$I_{\nu} = B_{\nu}(T) = j_{\nu}/k_{\nu}. \quad (4.5)$$

Мы используем символ  $B_{\nu}$ , так как такая поверхность обычно является черной. Следовательно, закон излучения Кирхгофа справедлив при термодинамическом равновесии, спектральная интенсивность излучения является функцией только температуры, не зависит от природы среды и равна или отношению коэффициента излучения к коэффициенту поглощения, или спектральной интенсивности излучения черной поверхности.

Из уравнения (4.5) мы видим, что если  $k_{\nu} = 0$  и  $I_{\nu} \neq \infty$ , то  $j_{\nu} = 0$ . Таким образом, среда не испускает излучения с частотой  $\nu$ , которое она не поглощает в условиях термодинамического равновесия. Поэтому в среде, которая прозрачна для излучения определенной частоты, может существовать термодинамическое равновесие при любой конечной интенсивности излучения этой частоты. Кирхгоф определил черное тело как тело, которое поглощает все падающие лучи. При термодинамическом равновесии черное тело также испускает излучение всех частот. Соглас-

но закону Кирхгофа, излучение черного тела является максимально возможным. Излучение всех других тел должно быть меньше, чем излучение черного тела [4, 5]. Хорошие поглотители являются также хорошими излучателями [6]. Нагретая среда излучает более интенсивно при частотах, при которых коэффициент поглощения велик, чем при частотах, при которых коэффициент поглощения мал (см. фиг. 3.2). Конечно, эти выводы справедливы только для условий теплового равновесия.

### 3. ЗАКОН СМЕЩЕНИЯ ВИНА

Нашей следующей задачей является определение функции  $B_\nu$  в зависимости от частоты  $\nu$  и температуры  $T$ . Функция  $B_\nu$  была найдена Планком в 1900 г. с помощью квантовомеханической теории и известна как функция излучения Планка. Однако, не зная точного выражения функции излучения Планка  $B_\nu$ , мы уже знаем некоторые общие свойства этой функции, в частности ее интегральные свойства, такие, как плотность энергии излучения, определяемая уравнением (2.13).

В 1893 г. Вин теоретически вывел закон смещения, согласно которому плотность энергии  $U_\nu$  определяется следующим уравнением:

$$U_\nu = \nu^3 F(\nu/T), \quad (4.6)$$

где  $F(\nu/T)$  зависит только от  $(\nu/T)$ . Закон смещения Вина может быть выведен из рассмотрения излучения как термодинамической машины, которая может совершать работу за счет давления излучения. Вследствие эффекта Доплера движение машины приводит к изменению частоты и затем к изменению плотности энергии излучения [2]. Этот закон был подтвержден экспериментально посредством измерения максимума интенсивности излучения от раскаленного тела, поддерживаемого при постоянной температуре.

Для условия равновесного излучения интенсивность излучения не зависит от направления, и уравнение (2.13) дает

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu. \quad (4.7)$$

Следовательно, плотность энергии  $U_\nu$  и спектральная интенсивность излучения имеют одинаковое спектральное распределение. В большинстве экспериментальных данных мы определяем плотность энергии  $U_\lambda$  в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ . Соотношение между  $U_\lambda$  и  $U_\nu$  имеет вид

$$U_\lambda d\lambda = U_\nu d\nu. \quad (4.8)$$

Так как излучение распространяется со скоростью света  $c$ , то имеем

$$c = \nu\lambda = \text{Скорость света} \quad (4.9)$$

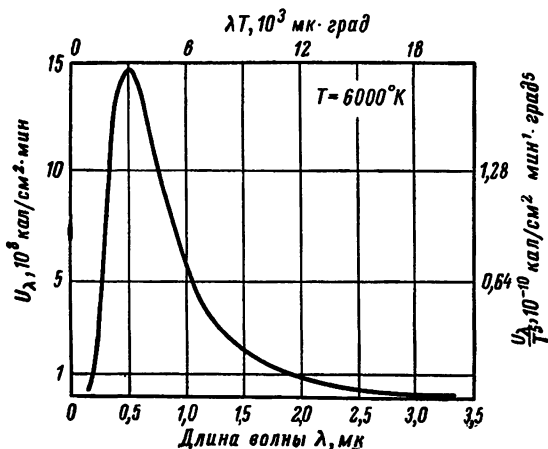
Из уравнений (4.8) и (4.9) получаем<sup>1)</sup>

$$U_\lambda = U_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = U_\nu \frac{\nu}{\lambda} = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right). \quad (4.10)$$

На фиг. 4.2 приведен график зависимости  $U_\lambda$  от  $\lambda$  при температуре  $T=6000^\circ\text{К}$ . Так как уравнение (4.10) можно записать в виде

$$\frac{U_\lambda}{T^5} = G\left(\frac{c}{\lambda T}\right), \quad (4.11)$$

то единственная кривая фиг. 4.2 применима ко всем температурам, если вдоль ординаты откладывать  $(U_\lambda/T^5)$ , а вдоль абсциссы  $\lambda T$ . Точный вид функций  $F(c/\lambda T)$  или  $G(c/\lambda T)$  можно получить с помощью  $B_\nu$  (см. следующий раздел).



Фиг. 4.2. Спектральная плотность энергии излучения  $U_\lambda$  черного тела.

Причины, по которым уравнение (4.6) или (4.10) называется законом смещения, следующие.

<sup>1)</sup> Это выражение автора неточно: из уравнений (4.8), (4.9) и (4.6) следует

$$U_\lambda = \nu^3 F \frac{\nu}{T} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c^3}{\lambda^3} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right) = -\frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Прим. перев.



Спектральная интенсивность излучения и плотность энергии стремятся к нулю как при очень больших, так и при очень малых частотах. Имеется максимум плотности энергии при данной температуре. Этот максимум плотности энергии  $U_\lambda$  находится при значении длины волны  $\lambda$ , удовлетворяющей зависимости

$$\frac{dU_\lambda}{d\lambda} = \frac{c^4}{\lambda^5} \left[ -\frac{5}{\lambda} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) - \frac{c}{\lambda^2 T} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \right] = 0 \quad (4.12)$$

или

$$\frac{c}{\lambda T} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + 5F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0,$$

где  $F'(x) = dF/dx$ .

Так как уравнение (4.12) имеет только одну переменную ( $c/\lambda T$ ), то максимум плотности энергии должен существовать при постоянной величине ( $c/\lambda T$ ), т. е.

$$\lambda_m T = \text{const} = 0,290 \text{ см} \cdot \text{град}. \quad (4.13)$$

Эта постоянная определена по точной формуле для  $F(c/\lambda T)$ , как мы увидим в следующем разделе. Из уравнения (4.13) следует, что длина волны  $\lambda_m$ , при которой имеет место максимум плотности энергии излучения, уменьшается с возрастанием температуры. Другими словами, положение максимума плотности энергии смещается при изменениях температуры.

#### 4. ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА [7]

Функция  $F(\nu/T)$  должна быть определена с микроскопической точки зрения. Рассмотрим испускание и поглощение кванта энергии. Поскольку имеется большое число квантов, мы должны использовать статистическую механику. Классическая теория статистической механики не позволяет вывести правильное выражение для  $F(\nu/T)$ . Только Планку, который в 1900 г. использовал квантовую теорию статистической механики, удалось получить правильное выражение для  $F(\nu/T)$ .

Так как функция  $F(\nu/T)$  не должна зависеть от особенностей механизма излучателя, Планк рассмотрел излучение линейного гармонического осциллятора при выводе этой функции. Пусть  $\varepsilon$  — средняя величина энергии осциллятора, колеблющегося с частотой  $\nu$  достаточно долгое время. Энергия, излучаемая осциллятором в единицу времени, равна

$$\delta\varepsilon = \frac{2e^2}{3mc^3} (2\pi\nu)^2 \bar{\varepsilon}, \quad (4.14)$$

где  $e$  — абсолютный электрический заряд и  $m$  — масса. Работа, совершаемая с осциллятором полем излучения с объемной

плотностью энергии  $U_\nu$  в единицу времени, равна

$$\delta W = \frac{\pi e^2}{3m} U_\nu. \quad (4.15)$$

В условиях равновесия  $\delta \varepsilon = \delta W$ ; следовательно,

$$U_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon}. \quad (4.16)$$

Наша задача теперь сводится к нахождению средней энергии  $\bar{\varepsilon}$ . Из кинетической теории газов относительная вероятность пребывания осциллятора с энергией  $\varepsilon$  в состоянии термодинамического равновесия, согласно закону Больцмана [1], равна  $\exp(-\varepsilon/kT)$ . В классической механике энергия  $\varepsilon$  изменяется непрерывно. Следовательно, средняя энергия будет равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon \exp(-\varepsilon/kT) d\varepsilon}{\int_0^\infty \exp(-\varepsilon/kT) d\varepsilon} = \frac{d}{d(1/kT)} \lg \int_0^\infty \exp(-\varepsilon/kT) d\varepsilon = kT. \quad (4.17)$$

Подставляя уравнение (4.17) в (4.16), получаем закон излучения Рэлея — Джинса:

$$U_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (4.18)$$

Этот закон согласуется с законом смещения Вина и хорошо согласуется с экспериментальными результатами для низких частот. Так как плотность энергии возрастает пропорционально  $\nu^2$ , то полная объемная плотность энергии  $E_R$  будет стремиться к бесконечности [уравнение (2.14)]. Мы обычно называем этот факт ультрафиолетовой катастрофой. Он подтверждает, что этот закон излучения несправедлив для очень высоких частот.

Планк вывел понятие о дискретном конечном кванте энергии  $\varepsilon_0$ , таком, что энергия  $\varepsilon$  должна быть суммой величин  $\varepsilon_0$ . Тогда средняя энергия может быть представлена как

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(-n\varepsilon_0/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_0/kT)} = \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT) - 1}. \quad (4.19)$$

Подставляя уравнение (4.19) в уравнение (4.16), получаем закон излучения Планка

$$U_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT) - 1}. \quad (4.20)$$

Чтобы согласовать эту формулу с хорошо известным законом смещения Вина, мы должны принять

$$\epsilon_0 = h\nu, \quad (4.21)$$

где  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг · сек — постоянная Планка.

При термодинамическом равновесии спектральная интенсивность излучения одинакова по всем направлениям, и мы имеем  $U_\nu = 4\pi B_\nu/c$ . Тогда закон излучения Планка принимает следующий вид:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (4.22)$$

Из уравнения (3.35) мы имеем следующее выражение для  $B_\nu$ , записанное через коэффициенты Эйнштейна

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{\left(\frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} - 1\right)}. \quad (4.23)$$

Следовательно,

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}, \quad \frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} = \exp(h\nu/kT). \quad (4.24)$$

Если мы примем, что численная концентрация атомов соответствует распределению Больцмана, т. е.

$$N_i = \text{const} \times g_i \exp(-E_i/kT), \quad (4.25)$$

то уравнение (4.24) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{c^2}{2h\nu^3} g_n A_{nm} = g_n B_{nm} = g_m B_{mn}, \quad (4.26)$$

где  $g_i$  является вырождением состояния  $i$  с энергией  $E_i$  и  $h\nu = E_n - E_m$ . Интегрирование уравнения (4.22) по частоте дает

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (4.27)$$

где  $\sigma$  известна как постоянная Стефана — Больцмана для потока излучения, т. е.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,68 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4}. \quad (4.28)$$

Постоянная Стефана — Больцмана отнесена к полусферическому потоку излучения, т. е.  $q_{R\sigma}^+$  или  $q_{R\sigma}^-$ . Например, уравнение

(2.7а) при условии равновесия излучения дает

$$q_{R\sigma}^+ = \int_0^{\infty} B_\nu d\nu \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \right) = \sigma T^4 = q_{R\sigma}^- \quad (4.29)$$

Конечно, полный результирующий поток излучения  $q_{R\sigma}$  в условиях равновесия излучения равен нулю.

В условиях равновесия излучения полная объемная плотность энергии излучения для всего спектра определяется из уравнения (2.14) следующим образом:

$$E_R = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} B_\nu d\nu \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \right) = \frac{4}{c} \sigma T^4 = a_R T^4. \quad (4.30)$$

Постоянная  $a_R$  также известна как постоянная Стефана — Больцмана, которая относится к объемной плотности энергии излучения и давлению излучения и которая равна

$$a_R = \frac{4}{c} \sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7,67 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}. \quad (4.31)$$

Интересно отметить, что при низких частотах закон излучения Планка согласуется с классическим законом излучения Рэлея — Джинса. Когда  $h\nu/kT \ll 1$ , мы можем разложить формулу, выражающую закон излучения Планка, в ряд по степеням  $h\nu/kT$  в следующем виде:

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{[1 + (h\nu/kT) + \dots] - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT + \dots \quad (4.32)$$

Если мы возьмем первый член уравнения (4.32), то получим закон Рэлея — Джинса. Однако для коротких волн,  $h\nu/kT \gg 1$ , асимптотическая величина в случае применения закона Планка сильно отличается от асимптотической величины в случае применения закона Рэлея — Джинса. Для коротких волн будет справедлив закон

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp(-h\nu/kT). \quad (4.33)$$

Следовательно, ультрафиолетовая катастрофа не произойдет, так как плотность энергии стремится к нулю, когда  $\nu$  стремится к бесконечности или  $\lambda$  стремится к нулю (см. фиг. 4.2).

Для данной температуры плотность энергии имеет максимум и частота, или длина волны  $\lambda$ , в этой максимальной точке удо-

влетворяет следующей зависимости:

$$\frac{kT}{h\nu_{\max}} = \frac{kT}{hc} \lambda_{\max} = 0,2015. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) подтверждено экспериментально.

## 5. ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ СТЕФАНА — БОЛЬЦМАНА

Прежде чем был известен закон Планка, Стефан и Больцман вывели закон излучения на основании чисто термодинамического подхода. Они рассмотрели замкнутый объем, который не содержит вещество и имеет только энергию излучения. Излучение находится в условиях термодинамического равновесия. Согласно первому закону термодинамики,

$$\begin{aligned} dQ &= T dS = dE + p_R dV = E_R dV + V \frac{dE_R}{dT} dT + \frac{1}{3} E_R dV = \\ &= V \frac{dE_R}{dT} dT + \frac{4}{3} E_R dV = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right) dV + T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) dT, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где  $E = E_R V$  — полная энергия объема и  $S$  — энтропия. Уравнение (4.35) дает

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4E_R}{3T}, \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{dE_R}{dT}. \quad (4.36)$$

Из уравнения (4.36), имея в виду, что  $\partial^2 S / \partial V \partial T = \partial^2 S / \partial T \partial V$ , находим

$$\frac{dE_R}{dT} = 4 \frac{E_R}{T}$$

или

$$E_R = a_R T^4, \quad (4.37)$$

где уравнение (4.37) известно как закон излучения Стефана — Больцмана. Постоянную  $a_R$  нельзя определить из термодинамики. Она должна быть определена экспериментально или по точной теории из закона Планка. В самом деле, мы уже приводили это соотношение, вытекающее из закона Планка [уравнение (4.30)].

Закон излучения Стефана — Больцмана может быть также выведен из закона смещения Вина, а именно

$$E_R = \int_0^{\infty} \nu^3 F(\nu/T) d\nu = T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = a_R T^4. \quad (4.38)$$

## 6. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ВЕЩЕСТВО И ИЗЛУЧЕНИЕ [3]

Прежде чем изучать взаимодействие поля излучения и поля течения, полезно рассмотреть некоторые простые термодинамические зависимости при взаимодействии вещества и излучения в условиях полного термодинамического равновесия.

Мы рассмотрим замкнутое пространство, в котором содержится идеальный газ и тепловое излучение в условиях термодинамического равновесия. Внутренняя энергия и давление состоят из двух слагаемых: одно обусловлено газом и второе — тепловым излучением. Следовательно, внутренняя энергия на единицу массы равна

$$E = E_R/\rho + C_v T, \quad (4.39)$$

где  $\rho$  — плотность,  $E_R$  определяется уравнением (4.37) и представляет собой энергию излучения на единицу объема и  $C_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Мы принимаем, что  $C_v$  постоянна для идеального газа.

Полное давление определяется как

$$p = p_R + p_g = \frac{1}{3} E_R + \rho R T, \quad (4.40)$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Для адиабатического потока,  $dQ = 0$ , первый закон термодинамики дает

$$dE + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right) d\rho + p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (4.41)$$

Подставляя выражения для  $E$  и  $p$  из уравнений (4.39) и (4.40) в уравнение (4.41), найдем следующие зависимости между  $p$ ,  $T$  и  $\rho$ :

$$\frac{dp}{p} - \Gamma_1 \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T} = 0, \quad (4.43)$$

$$\frac{dT}{T} - (\Gamma_3 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad (4.44)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= b + \frac{(4 - 3b)^2 (\gamma - 1)}{b + 12(\gamma - 1)(1 - b)}, \\ \Gamma_2 &= \frac{(4 - 3b) \Gamma_1}{3(1 - b) \Gamma_1 + b}, \\ \Gamma_3 &= 1 + \frac{\Gamma_1 - b}{4 - 3b}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$b = p_g/p$  — отношение давления газа к полному давлению,

Когда давление излучения пренебрежимо мало,  $b=1$  и  $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=\gamma=C_p/C_v$  — отношение удельных теплоемкостей газа.

Когда давление газа пренебрежимо мало, мы имеем  $b=0$  и

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3.$$

При промежуточных значениях  $b$  величины  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  не равны. Когда преобладает действие излучения, термодинамические зависимости (4.42) — (4.44) аналогичны зависимостям для идеального газа с  $\gamma=4/3$ . Однако при промежуточных значениях  $b$  термодинамические зависимости отличаются от зависимостей для идеального газа, поскольку три величины  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  не равны.

Теплоемкость при постоянном объеме в случае идеального газа и наличия излучения равна

$$C_{vR} = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{dV=0} = \frac{C_v}{b} [b + 12(\gamma - 1)(1 - b)]. \quad (4.46)$$

Теплоемкость при постоянном давлении  $p$  равна

$$C_{pR} = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{dp=0} = \frac{C_v \Gamma_1}{b^2} [b + 12(\gamma - 1)(1 - b)]. \quad (4.47)$$

Следовательно,

$$C_{pR}/C_{vR} = \Gamma_1/b. \quad (4.48)$$

## 7. ЛОКАЛЬНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В газодинамике температура газа обычно не постоянна во всем поле течения, но в каждой точке этого поля мы можем определить локальную температуру  $T$ , чтобы описать свойства газа в этой точке. В результате хорошим приближением для большинства задач радиационной газодинамики является допущение, что газ находится в локальном термодинамическом равновесии, при котором спонтанное испускание излучения зависит только от локальной температуры  $T$ . Однако индуцированное испускание излучения и поглощение излучения зависят от интенсивности излучения, которое в общем случае отличается от излучения черного тела.

Мы можем найти выражение для уравнения переноса излучения в случае локального термодинамического равновесия следующим способом.

Подставляя выражение для коэффициента поглощения  $k_{\nu t}$  из уравнения (3.11) в уравнение переноса излучения (3.35), получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial I_{\nu}}{\partial s} = \rho k'_{\nu t} + (B_{\nu} - I_{\nu}), \quad (4.49)$$

где

$$k'_{\nu t} = k_{\nu t} [1 - \exp(-h\nu/kT)] \quad (4.50)$$

— приведенный коэффициент поглощения.

Приведение коэффициента связано с индуцированным испусканием излучения.

Мы будем использовать уравнение (4.50) в большинстве задач течения газа, за исключением особо оговоренных случаев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Aller L. H., *Astrophysics, The Atmosphere of the Sun and Stars*, Ronald Press Co., 2nd ed., N. Y., 1963.
2. Born M., *Atomic Physics*, Hafner Publishing Co., Inc., N. Y., 1946.
3. Chandrasekhar S., *Stellar Structure*, Dover Publications, Inc., 1957.
4. Godske C. L., Bergeron T., Bjerknes J., Bundgaard R. C., *Dynamics Meteorology and Weather Forecasting*, American Meteorological Society and Carnegie Institution of Washington, 1957.
5. Johnson J. C., *Physical Meteorology*, Wiley, 1954.
6. Jakob M., *Heat Transfer*, vol. 1, Wiley, N. Y., 1955.
7. Планк М., *The Theory of Heat Radiation*, Dover Publications, Inc., N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., *Теория теплового излучения*, Гостехтеоретиздат, 1935.



## Основные уравнения радиационной газодинамики

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В радиационной газодинамике изучается взаимодействие между газодинамическим полем и полем излучения. В самом общем рассмотрении следовало бы исследовать функции распределения смеси частиц различных типов, причем фотоны могут рассматриваться как частицы особого типа. При выводе уравнений для этих функций распределения должен быть принят во внимание релятивистский характер фотонов. Такой анализ будет выполнен в гл. 10. В этом общем случае можно исследовать как динамику разреженного газа, так и динамику сплошной среды с учетом влияния поля излучения. Чтобы выяснить некоторые существенные особенности влияния излучения, в этой и следующих четырех главах мы будем исследовать только тот случай, когда газ может рассматриваться как сплошная среда. В этом случае газодинамическими переменными являются давление  $p$ , плотность  $\rho$ , температура  $T$  и три компоненты скорости. В динамике излучающего газа к этим газодинамическим переменным следует добавить спектральную интенсивность излучения  $I_\nu$ . Таким образом, необходимо найти семь основных уравнений для этих семи неизвестных. Эти основные уравнения следующие:

1. Уравнение состояния, которое связывает давление, плотность и температуру газа (разд. 2).

2. Уравнение неразрывности, которое выражает закон сохранения массы среды (разд. 3).

3. Уравнения движения (в общем случае три), которые выражают закон сохранения количества движения. В динамике излучающего газа в эти уравнения следует включить напряженность излучения (разд. 4).

4. Уравнение энергии, выражающее закон сохранения энергии (разд. 5).

5. Уравнение переноса излучения, которое определяет спектральную интенсивность излучения (разд. 6).

Следует отметить, что приведенный выше анализ легко обобщить в газодинамическую теорию многокомпонентной смеси. В этой теории шесть газодинамических уравнений для каждой

компоненты смеси должны заменить газодинамические уравнения для смеси в целом.

В разд. 7 будут сделаны некоторые общие замечания об основных уравнениях динамики излучающего газа. Поскольку до сих пор в литературе не рассматривались подробно члены основных уравнений, учитывающие влияние излучения (радиационные члены), мы рассмотрим их в разд. 8—10. Случай малой средней длины свободного пробега излучения будет рассмотрен в разд. 8, а случай конечной длины свободного пробега излучения — в разд. 9. Радиационные члены в общем случае представляют собой сложные интегралы, которые очень трудно исследовать. Поэтому, чтобы выяснить существенные особенности влияния излучения, в литературе использовались некоторые приближения. Одним из таких приближений является приближение серого газа (разд. 9), а другим — одномерное приближение (разд. 10). В одномерном исследовании радиационные члены могут быть выражены через экспоненциальные интегралы, которые будут рассмотрены в разд. 11.

## 2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Существование функциональной зависимости между давлением  $p$ , плотностью  $\rho$  и температурой  $T$  газа

$$p = f(\rho, T) \quad (5.1)$$

является эмпирическим фактом. Для газа при очень высокой температуре хорошим приближением является уравнение состояния совершенного газа. Таким образом, уравнение (5.1) может быть записано в виде

$$p = \rho RT, \quad (5.2)$$

где  $R$  — газовая постоянная ( $R = k/m$ ,  $k = 1,379 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана и  $m$  — средняя масса частицы газа).

## 3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Условие сохранения массы газа записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = \beta \approx 0, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{q} = iu + jv + kw$  — вектор скорости и  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — его компоненты по осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — единичные векторы координатных осей;  $\nabla = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z)$ ; через  $\beta$  обозначено изменение массы, обусловленное излучением

энергии, которое пренебрежимо мало в обычных газодинамических задачах. Мы будем пренебрегать величиной  $\beta$ .

#### 4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Условие сохранения количества движения записывается в виде

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_R + \mathbf{F}, \quad (5.4)$$

где  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{q} \cdot \nabla$ . Тензор вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau}_s$  имеет  $ij$ -ю компоненту

$$\tau_s^{ij} = \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{q}) \delta^{ij}; \quad (5.5)$$

$$\delta^{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \delta^{ij} = 1 \text{ при } i = j;$$

$\mu$  — коэффициент вязкости.

Тензор напряжений излучения  $\boldsymbol{\tau}_R$  имеет  $ij$ -ю компоненту, определяемую уравнением (2.18). Таким образом, уравнение (5.4) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение.

Массовая сила  $\mathbf{F}$  может состоять из электромагнитной силы  $\mathbf{F}_e$  и гравитационной силы  $\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести. Электромагнитная сила может быть записана в виде

$$\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (5.6)$$

где  $\rho_e$  — плотность избыточного электрического заряда;  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;  $\mathbf{J}$  — плотность электрического тока;  $\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H}$  — магнитная индукция ( $\mu_e$  — магнитная проницаемость и  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля). При очень высоких температурах газ будет ионизован. В ионизованном газе электромагнитное поле будет порождать электромагнитную силу. Эти вопросы будут обсуждены подробнее в гл. 8.

#### 5. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Условие сохранения энергии записывается в виде

$$\rho \frac{D\bar{e}_m}{Dt} = \nabla \cdot (p\mathbf{q}) + \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_s) + \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_R) + \\ + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot \mathbf{q}_R + Q, \quad (5.7)$$

где  $\bar{e}_m = U_m + 1/2 q^2 + \varphi + E_R/\rho$  — полная энергия единицы массы газа;  $U_m$  — внутренняя энергия единицы массы газа;  $1/2 q^2$  — кинетическая энергия единицы массы газа;  $\varphi$  — потенциальная

энергия единицы массы газа и  $E_R$  — плотность энергии излучения на единицу объема, которая определяется уравнением (2.14).

Член в левой части уравнения (5.7) выражает скорость изменения полной энергии в единице объема газа. Первый член в правой части уравнения (5.7) характеризует работу, совершаемую давлением газа; второй — диссипацию энергии за счет вязких напряжений; третий — диссипацию энергии за счет напряжений излучения; четвертый член выражает энергию, передаваемую теплопроводностью ( $\kappa$  — коэффициент теплопроводности); пятый — перенос тепла излучением, который определяется уравнениями (2.8) и (2.10). Последний член определяет энергию, вносимую электромагнитным полем, химическими реакциями и другими источниками тепла. Энергия, вносимая электромагнитным полем, может быть представлена в виде

$$Q_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (5.8)$$

Поскольку члены  $\tau_R$  и  $\mathbf{q}_R$  имеют интегральную форму, то и уравнение (5.7) в общем случае представляет собой интегродифференциальное уравнение.

## 6. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Спектральная интенсивность излучения определяется уравнением переноса излучения (3.31), а именно

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \rho j_\nu - \rho k_\nu I_\nu. \quad (5.9)$$

Коэффициент излучения в общем случае определяется уравнением (3.29), которое учитывает излучение рассеяния и излучение, связанное с образованием фотонов. Излучение, связанное с образованием фотонов, состоит в свою очередь из спонтанного и индуцированного излучений. Коэффициент поглощения  $k_\nu$ , определяемый уравнением (3.5), состоит из истинного коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния.

В большинстве задач радиационной газодинамики рассеянием излучения можно пренебречь. Следует рассматривать только истинный коэффициент поглощения и истинный коэффициент излучения. Определение этих истинных коэффициентов излучения и поглощения зависит от радиационных процессов в атомах газовых молекул. Эти процессы могут меняться от случая к случаю, особенно когда излучение происходит в неравновесном состоянии. Никаких общих утверждений сделать нельзя. Однако для большинства газодинамических задач, в которых можно определить местную температуру, хорошим при-

ближением является условие локального термодинамического равновесия (гл. 4, разд. 7). В случае локального термодинамического равновесия при пренебрежимо малом рассеянии уравнение (5.9) принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial s} = \rho k'_v (B_v - I_v). \quad (5.10)$$

В большинстве задач газодинамики не рассматриваются явления, протекающие с чрезмерно большой частотой. Поэтому вследствие того, что скорость света — очень большая величина, нестационарный член  $(1/c) (\partial I_v / \partial t)$  уравнения пренебрежимо мал по сравнению с членами, определяющими пространственные изменения. Таким образом, уравнение (5.10) сводится к следующему:

$$l \frac{\partial I_v}{\partial x} + \frac{m \partial I_v}{\partial y} + n \frac{\partial I_v}{\partial z} = \rho k'_v (B_v - I_v). \quad (5.11)$$

В радиационной газодинамике коэффициент поглощения  $k'_v$  может рассматриваться как известная функция температуры и плотности газа.

## 7. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ОСНОВНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Из семи уравнений (5.2), (5.3), (5.4), (5.7) и (5.11) при заданных начальных и граничных условиях требуется определить семь переменных  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $I_v$ . Эта система уравнений значительно сложнее соответствующих уравнений обычной газодинамики, где не учитывается влияние излучения. Поскольку не удастся получить общее решение основных уравнений обычной газодинамики, то тем более это невозможно в случае уравнений радиационной газодинамики. Чтобы выяснить существенные особенности влияния излучения, необходимо прибегнуть к разумным приближениям и представить основные уравнения в упрощенной форме, доступной для исследования. Некоторые приближенные способы исследования, которые будут подробно обсуждены в следующих главах в связи с рассмотрением различных задач газодинамики, перечислены ниже.

1. Можно использовать все хорошо известные приближения обычной газодинамики. Например, можно рассмотреть:

а) *Течение невязкой и нетеплопроводной жидкости.* Вне пограничного слоя, или переходной области, можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью, если число Рейнольдса течения велико. В этом случае можно добавить радиационные члены к уравнению невязкой нетеплопроводной жидкости.

б) *Течение в пограничном слое.* В области пограничного слоя можно применить хорошо известные приближения пограничного слоя Прандтля.

2. Можно сделать некоторые приближения относительно уравнения переноса излучения. Из уравнения (5.11) следует, что размерность  $\rho k'_\nu$  обратна размерности длины. Следовательно, можно определить среднюю длину свободного пробега излучения  $L_{R\nu}$  в виде

$$L_{R\nu} = \frac{1}{\rho k'_\nu}. \quad (5.12)$$

Эта средняя длина свободного пробега излучения представляет собой среднюю длину, которую проходит фотон прежде, чем он будет поглощен молекулой газа. До некоторой степени она подобна средней длине свободного пробега в кинетической теории газов, которая равна среднему расстоянию, проходимому молекулами между соударениями. Когда величина средней длины свободного пробега излучения мала, газ называется оптически толстым. В случае оптически толстого газа выражения для радиационных членов сводятся к очень простым формам, которые будут рассмотрены в разд. 8. Когда средняя длина свободного пробега излучения велика, газ называется оптически тонким. Для оптически очень тонкого газа радиационные члены также могут быть представлены в простых формах, которые будут рассмотрены в разд. 9.

В промежуточных случаях приходится использовать интегральные выражения для радиационных членов. Однако во многих газодинамических задачах могут быть применены следующие два приближения:

а) *Одномерное приближение.* Во многих газодинамических задачах изменение зависимых переменных в каком-либо одном направлении оказывается намного большим, чем их изменение в других направлениях. Тогда спектральную интенсивность  $I_\nu$  можно рассматривать как функцию только одной этой координаты. При таком предположении интегральное выражение радиационных членов упрощается, как это будет показано в разд. 9.

б) *Приближение серого газа.* Коэффициент поглощения  $k'_\nu$  в общем случае является функцией частоты  $\nu$ . Если коэффициент поглощения  $k'_\nu$  не зависит от частоты, то газ называется серым. Приближение серого газа состоит в том, что коэффициент поглощения предполагается независящим от частоты. Иными словами, для коэффициента поглощения берется независящее от частоты среднее значение истинного коэффициента

поглощения. Приближение серого газа будет рассмотрено также в разд. 9.

Приведенные выше уравнения радиационной газодинамики можно обобщить в основные уравнения радиационной магнитной газодинамики. Для этого дополнительно потребуется лишь ввести в рассмотрение электромагнитные переменные  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $\rho_e$ . Необходимо также добавить электромагнитные уравнения, а именно уравнения Максвелла для электромагнитного поля, а также закон сохранения электрического заряда. Очевидно, здесь могут быть применены хорошо известные магнитогазодинамические приближения. Что касается электромагнитных уравнений, то радиационные члены не оказывают на них влияния. Эти уравнения будут приведены в гл. 8.

## 8. СЛУЧАЙ МАЛОЙ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ИЗЛУЧЕНИЯ

На фиг. 5.1 приведены величины средней длины свободного пробега излучения для воздуха при различных температурах и плотностях. При температуре около  $10\,000^\circ\text{K}$  и плотности  $10\rho_0$  средняя длина свободного пробега излучения имеет порядок нескольких миллиметров, что намного меньше характерного размера поля течения в практических задачах. В случае малой средней длины свободного пробега излучения можно выразить решение уравнения (5.11) для спектральной интенсивности  $I_\nu$  в виде разложения по степеням  $L_{R\nu}$ . Тогда решение уравнения (5.11) будет иметь вид

$$I_\nu = B_\nu - L_{R\nu} \left( l \frac{\partial B_\nu}{\partial x} + m \frac{\partial B_\nu}{\partial y} + n \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right) + O(L_{R\nu}^2). \quad (5.13)$$

В случае оптически толстой среды можно использовать первые два члена разложения (5.13), оценивая соответствующие радиационные члены следующим образом:

а) *Плотность энергии излучения.* Согласно уравнению (2.13),

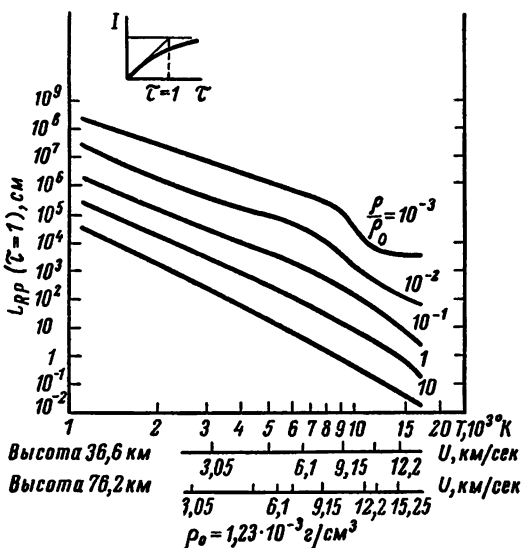
$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu, \quad (5.14)$$

и из уравнения (5.14) следует

$$E_R = \int_0^\infty U_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = a_R T^4, \quad (5.15)$$

где  $a_R = 7,67 \cdot 10^{-15}$  эрг/см<sup>3</sup>·град<sup>4</sup> — постоянная Стефана — Больцмана. Уравнение (5.15) было использовано для оценки плотности энергии излучения в табл. 1 гл. 1.

б) *Напряжения излучения.* Когда члены второго и высших порядков в уравнении (5.13) отброшены, из уравнения (2.18)



Фиг. 5.1. Средняя длина свободного пробега излучения  $L_{RP} = 1/(\rho K_p)$  в воздухе (фиг. 3 из работы [3]). Значение коэффициента излучения заимствовано из работы [5].

можно получить следующие выражения для напряжений излучения:

$$-\tau_{Rxx} = -\tau_{Ryy} = -\tau_{Rzz} = p_R = \frac{1}{3} a_R T^4, \quad (5.16)$$

$$\tau_R^{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

В случае оптически толстой среды имеет место только давление излучения  $p_R$ .

в) *Тепловой поток излучения.* Из уравнений (2.8) получаем

$$q_{Rx} = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty L_{Rv} \frac{\partial B_v}{\partial x} dv = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial x} \int_0^\infty L_{Rv} \frac{\partial B_v}{\partial T} dv =$$

$$= \frac{4\pi}{3K_{R\rho}} \frac{\partial B}{\partial x} = D_R \frac{\partial E_R}{\partial x} \quad (5.17)$$



и подобные же выражения для  $q_{Ry}$  и  $q_{Rz}$ . Величина  $K_R$  называется средним коэффициентом поглощения по Росселанду и определяется соотношением

$$\frac{1}{K_R} \int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{1}{k'_{\nu}} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T} d\nu. \quad (5.18)$$

Средняя длина свободного пробега излучения определяется через этот коэффициент поглощения следующим образом:

$$L_R = \frac{1}{\rho K_R}. \quad (5.19)$$

Наконец, коэффициент диффузии излучения по Росселанду будет

$$D_R = \frac{L_R c}{3} = \frac{c}{3K_R \rho}. \quad (5.20)$$

Тогда поток излучения может быть представлен в виде

$$\mathbf{q}_R = -D_R \nabla E_R = -\kappa_R \nabla T, \quad (5.21)$$

где  $\kappa_R$  — эффективный коэффициент теплопроводности, обусловленный излучением

$$\kappa_R = 4D_R a_R T^3. \quad (5.22)$$

Интересно отметить, что все радиационные члены уравнений (5.15), (5.16) и (5.21) сведены к простым выражениям взамен интегральных форм в общем случае. Для случая оптически толстой среды основные уравнения радиационной газодинамики становятся уравнениями в частных производных вместо интегродифференциальных уравнений в общем случае. Эти основные уравнения для случая оптически толстой среды имеют вид

$$p = \rho R T, \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0, \quad (5.23b)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = -\nabla \cdot (p + p_R) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}, \quad (5.23b)$$

$$\rho \frac{De_m}{Dt} = -\nabla \cdot [\mathbf{q}(p + p_R)] + \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \nabla \cdot [(\kappa + \kappa_R) \nabla T] + Q, \quad (5.23г)$$

где величины  $p_R$ ,  $E_R$  и  $\kappa_R$  определяются уравнениями (5.16), (5.15) и (5.22) соответственно.

### 9. СЛУЧАЙ КОНЕЧНОЙ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ИЗЛУЧЕНИЯ

Если средняя длина свободного пробега излучения  $L_{R\nu}$  имеет конечное значение, то следует сохранить большее число членов в разложении (5.13) по  $L_{R\nu}$ . Но поскольку неясен вопрос о сходимости таких рядов для больших  $L_{R\nu}$  и трудно определить, сколько следует сохранить членов в разложении (5.13), мы вынуждены отказаться от решения (5.13) в виде ряда и попытаемся получить точное решение уравнения переноса излучения с граничными условиями. Уравнение (5.11) можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной в виде расстояния  $s$  вдоль луча, где

$$ds = l dx + m dy + n dz. \quad (5.24)$$

Мы определим оптическую толщину между двумя точками  $s$  и  $s_1$  вдоль луча следующим образом:

$$\tau_\nu(s, s_1) = \int_{s_1}^s k'_\nu \rho ds', \quad (5.25)$$

где  $s'$  — переменная интегрирования для координаты  $s$ . В результате интегрирования уравнения (5.11) получим

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp[-\tau_\nu(s, s_0)] + \int_{s_0}^s B_\nu(s_1) \{\exp[-\tau_\nu(s, s_1)]\} \rho k'_\nu ds_1, \quad (5.26)$$

где  $s_0$  — некоторая начальная точка на луче, в которой известна спектральная интенсивность  $I_\nu(s_0)$ . Определение  $I_\nu(s_0)$  в общем случае зависит от граничного условия рассматриваемой задачи (см. гл. 6). Если предположить, что  $s_0 = -\infty$ , то спектральная интенсивность, выраженная первым членом, обратится в нуль, поскольку все излучение будет поглощено средой. Уравнение (5.26) примет вид

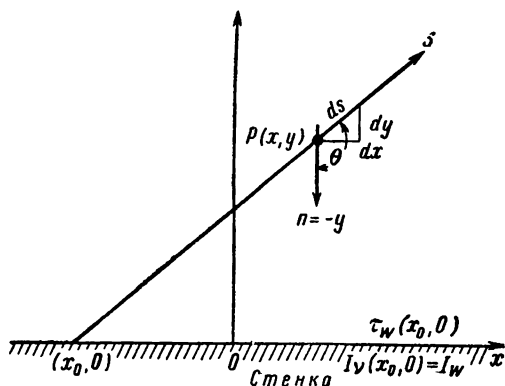
$$I_\nu(s) = \int_{-\infty}^s B_\nu(s') \{\exp[-\tau_\nu(s, s')]\} \rho k'_\nu ds'. \quad (5.27)$$

После того как из уравнений (5.26) и (5.27) будут получены выражения для спектральной интенсивности  $I_\nu$ , можно подставить их в интегральные выражения для потока излучения, напряжений излучения и плотности энергии излучения, т. е. в уравнения (2.8) и т. д. Оценка уравнений (2.8) и т. д. зависит от конфигурации поля течения. В качестве иллюстрации такой

оценки рассмотрим двумерное поле излучения над плоской пластиной, как показано на фиг. 5.2. Пусть  $s$  будет расстояние, измеряемое вдоль луча. Тогда приращение  $ds$  определяется в виде

$$ds = \sin \theta dx - \cos \theta dy, \quad (5.28)$$

где  $\theta$  — угол между лучом  $s$  и отрицательным направлением



Фиг. 5.2. Двумерное поле излучения над плоской стенкой.

оси  $y$ , которая направлена нормально к стенке. Вдоль каждого луча  $\theta = \text{const}$ . Следовательно, для двумерной задачи

$$ds = -\sec \theta dy = -m dy, \quad (5.29)$$

где  $m = \sec \theta$ . Таким образом, в нашей задаче мы можем рассматривать спектральную интенсивность  $I_v$  как функцию  $y$  и  $\theta$  вместо координат  $x$  и  $y$ . Уравнение переноса излучения (5.11) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial I_v}{\partial \tau_v} = I_v - B_v, \quad (5.30)$$

где оптическая толщина  $\tau_v$  определена соотношением

$$d\tau_v = \rho k'_v dy, \quad (5.31)$$

$$\tau_v = \int_0^y \rho k'_v dy. \quad (5.31a)$$

Общее решение уравнения (5.30) [ср. (5.26)] можно записать в виде

$$I_v(\tau_v, \theta) = \left\{ I_{v0}(\tau_v^*, \theta) - \int_{\tau_v^*}^{\tau_v} m B_v(t, \theta) \exp(-mt) dt \right\} \exp(m\tau_v), \quad (5.32)$$

где  $\tau_v^*$  — любое произвольное значение  $\tau_v$ , которое должно быть определено граничным условием, и  $I_{v0}(\tau_v^*, \theta)$  — произвольная функция от  $\theta$ , которая появляется при интегрировании уравнения (5.30) и также должна быть определена граничным условием. Чтобы определить значения  $\tau_v^*$  и  $I_{v0}(\tau_v^*, \theta)$  в нашей задаче (фиг. 5.2), удобно разделить лучи на две группы. Одна группа лучей направлена к стенке, другая — от стенки.

Для лучей, направленных к стенке,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  и  $1 \leq m \leq \infty$ , и поскольку спектральная интенсивность на бесконечности не влияет на значение при  $(\tau_v, \theta)$ , то уравнение (5.32) примет вид

$$I_v(\tau_v, \theta) = \int_{\tau_v}^{\infty} B_v(t, \theta) \exp[-m(t - \tau_v)] m dt, \quad (5.33)$$

где  $\tau_v$  — оптическая толщина в точке поля течения, в которой оцениваются радиационные члены, и  $t$  — переменная интегрирования для оптической толщины.

Для лучей, направленных от стенки,  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  и  $-\infty \leq m \leq -1$ , и поскольку можно полагать, что спектральная интенсивность на стенке ( $\tau_v = 0$ ) — известная функция  $I_{v0}(0, \theta)$ , которая определяется граничным условием для лучей (см. гл. 6), то уравнение (5.32) примет следующий вид:

$$I_v(\tau_v, \theta) = I_{v0}(0, \theta) \exp(m\tau_v) - \int_0^{\tau_v} B_v(t, \theta) \exp[-m(t - \tau_v)] m dt. \quad (5.34)$$

Подставляя выражения (5.33) и (5.34) в выражения (2.8) и т. д., получим в окончательном виде радиационные члены, используемые в наших основных уравнениях. Здесь мы рассматриваем только двумерную задачу и все переменные не зависят от азимутального угла  $\varphi$ . Следовательно, можно легко выполнить интегрирование радиационных членов по  $\varphi$ . Напри-

мер, тепловой поток в направлении оси  $y$  будет

$$\begin{aligned}
 q_{Ry} &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} I_{\nu} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\nu = \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} B_{\nu}(t, \theta) \exp[-m(t - \tau_{\nu})] \, dt \sin \theta \, d\theta + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[ I_{\nu 0}(0, \theta) \cos \theta \exp(m\tau_{\nu}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^{\tau_{\nu}} B_{\nu}(t, \theta) \exp[-m(t - \tau_{\nu})] \, dt \right] \sin \theta \, d\theta \right\} \, d\nu. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Следует заметить, что в общем случае не только  $I_{\nu 0}(0, \theta)$  и  $B_{\nu}(t, \theta)$  являются функциями от  $\theta$ , но и оптические толщины  $\tau_{\nu}$  и  $t$  также являются функциями от  $\theta$ , поскольку как  $k'_{\nu}$  так и  $\rho$  зависят от  $\theta$ . В общем случае выражение (5.35) нельзя больше упростить.

Уравнение (5.35) можно упростить при некоторых приближениях. Часто используются следующие два приближения:

**1. Приближение серого газа.** Если коэффициент поглощения газа не зависит от частоты, то газ называется серым. В приближении серого газа можно использовать некоторое среднее значение коэффициента поглощения в рассматриваемом интервале частот, так что в выражениях для спектральной интенсивности (5.33) и (5.34) можно считать, что оптическая толщина  $\tau_{\nu}$  не зависит от частоты  $\nu$ . Далее можно также предположить, что стенка является серой поверхностью, так что излучательная и отражательная способность стенки не зависит от частоты  $\nu$ . (Об излучательной и отражательной способности поверхностей см. в гл. 6.) Если принять приближение серого газа, то можно немедленно выполнить интегрирование уравнения (5.35) или подобных радиационных членов по частоте  $\nu$ . Для определения среднего значения длины свободного пробега излучения в приближении серого газа можно использовать среднюю длину свободного пробега излучения  $L_{RP}$  Планка, а именно

$$\frac{1}{L_{RP}} = \rho K_P = \frac{\int_0^{\infty} \rho k'_{\nu} B_{\nu} \, d\nu}{\int_0^{\infty} B_{\nu} \, d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \rho k'_{\nu} B_{\nu} \, d\nu}{B(T)}, \quad (5.36)$$

где  $B(T) = (\sigma/\pi)T^4$  определяется уравнением (4.27). Здесь  $K_p$  — средний коэффициент поглощения излучения по Планку. С помощью уравнения (5.36) в предположении, что  $\tau_\nu = \tau$  и  $t$  не зависят от частоты  $\nu$ , можно выполнить интегрирование уравнения (5.35) по  $\nu$  и получить в приближении серого газа поток излучения в направлении оси  $y$  в виде (см. уравнение (4.27))

$$q_{Ry} = 2 \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_{\tau}^{\infty} \sigma T^4(t, \theta) \exp[-m(t-\tau)] dt \sin \theta d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[ B_0(0, \theta) \cos \theta \exp(m\tau) - \int_0^{\tau} \sigma T^4(t, \theta) \exp[-m(t-\tau)] dt \right] \sin \theta d\theta \right\}, \quad (5.37)$$

$$\text{где } B_0(0, \theta) = \pi \int_0^{\infty} I_{\nu 0}(0, \theta) d\nu, \quad \tau = \int_0^y \rho K_p dy.$$

Следует отметить, что значение средней длины свободного пробега излучения на фиг. 5.1 по существу основано на среднем значении Планка. Поскольку в общем случае двумерной задачи температура  $T(\tau, \theta)$  есть функция как оптической толщины  $\tau$  или  $y$ , так и угловой координаты  $\theta$ , то дальнейшее упрощение уравнения (5.37) невозможно.

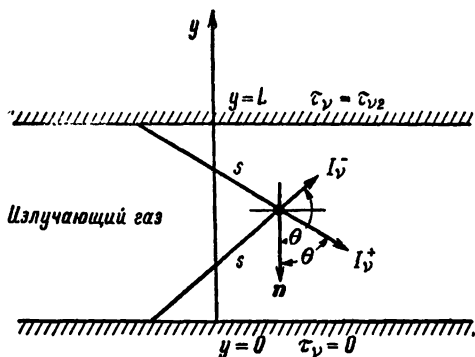
**2. Одномерное приближение.** Уравнение (5.37) можно еще более упростить, если температура  $T$  в поле течения существенно одномерна, т. е. ее изменение в направлении оси  $y$  значительно больше, чем в направлении оси  $x$ . В этих условиях можно предположить, что температура является функцией только  $y$  или  $\tau$  и не зависит от  $\theta$ . При таком приближении в результате интегрирования по  $\theta$  в уравнениях (5.35) и (5.37) будут получены выражения, содержащие экспоненциальные интегралы

$$\varepsilon_n(t) = \int_1^{\infty} m^{-n} \exp(-mt) dm = \int_0^1 z^{n-2} \exp(-t/z) dz, \quad (5.38)$$

где  $m=1/z$ . Одномерное приближение является единственным случаем, который достаточно широко исследовался в динамике излучающего газа и в астрофизических проблемах. В связи с этим мы рассмотрим его подробно в следующем разделе.

## 10. ОДНОМЕРНЫЙ ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

Чтобы охватить различные случаи одномерной задачи, рассмотрим перенос излучения между двумя параллельными пластинами (фиг. 5.3). Будем считать, что спектральная интенсивность излучения черного тела является функцией только  $y$



Фиг. 5.3. Перенос излучения между двумя параллельными пластинами.

или  $\tau_v$  и не зависит от угла  $\theta$ . Мы разделим спектральную интенсивность на две составляющие: направленную вверх, для которой угол  $\theta$  имеет значение от  $\pi/2$  до  $\pi$ , обозначим через  $I_v^-$  и направленную вниз, для которой угол  $\theta$  имеет значение от 0 до  $\pi/2$ , обозначим через  $I_v^+$ . Координаты пластин  $y=0$  и  $y=L$ . Их оптические толщины  $\tau_v=0$  и  $\tau_v=\tau_{v2}$ . Из общего выражения спектральной интенсивности излучения (5.32) получим следующие выражения для  $I_v^+$  и  $I_v^-$ :

$$I_v^+ = \int_{\tau_v}^{\tau_{v2}} B_v(t) \exp[-m(t - \tau_v)] m dt + I_v^+(\tau_{v2}) \exp[m(\tau_v - \tau_{v2})], \quad (5.39a)$$

$$I_v^- = - \int_0^{\tau_v} B_v(t) \exp[-m(t - \tau_v)] m dt + I_v^-(0) \exp(m\tau_v), \quad (5.39b)$$

где  $I_v^+(\tau_{v2})$  — спектральная интенсивность на верхней стенке и  $I_v^-(0)$  — спектральная интенсивность на нижней стенке. Поток излучения через поверхность  $d\sigma_0$ , параллельную пластине в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu+dv$ , определяется как

$$q_{R\nu} = \int I_\nu \cos \theta d\omega = q_{R\nu}^+ - q_{R\nu}^-, \quad (5.40)$$

где результирующий поток  $q_{R\nu}$  разделен на две составляющие, соответствующие  $I_{\nu}^{+}$  и  $I_{\nu}^{-}$ , так что

$$q_{R\nu}^{+} = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_{\nu}^{+} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu 2}} B_{\nu}(t) \varepsilon_2(t - \tau_{\nu}) dt + \\ + 2\pi I_{\nu}^{+}(\tau_{\nu 2}) \varepsilon_3(\tau_{\nu 2} - \tau_{\nu}), \quad (5.41)$$

$$q_{R\nu}^{-} = -2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_{\nu}^{-} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^{\tau_{\nu}} B_{\nu}(t) \varepsilon_2(\tau_{\nu} - t) dt + \\ + 2\pi I_{\nu}^{-}(0) \varepsilon_3(\tau_{\nu}). \quad (5.42)$$

Полный поток излучения получается интегрированием спектрального потока излучения  $q_{R\nu}$  по всем частотам, т. е.

$$q_R = \int_0^{\infty} q_{R\nu} d\nu = \int_0^{\infty} (q_{R\nu}^{+} - q_{R\nu}^{-}) d\nu = \\ = 2\pi \int_0^{\infty} \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu 2}} B_{\nu}(t) \varepsilon_2(t - \tau_{\nu}) dt d\nu + \\ + 2 \int_0^{\infty} q_{R\nu}^{+}(\tau_{\nu 2}) \varepsilon_3(\tau_{\nu 2} - \tau_{\nu}) d\nu - 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\tau_{\nu}} B_{\nu}(t) \varepsilon_2(\tau_{\nu} - t) dt d\nu - \\ - 2 \int_0^{\infty} q_{R\nu}^{-}(0) \varepsilon_3(\tau_{\nu}) d\nu. \quad (5.43)$$

где

$$q_{R\nu}^{+}(\tau_{\nu 2}) = \pi I_{\nu}^{+}(\tau_{\nu 2}), \quad q_{R\nu}^{-}(0) = \pi I_{\nu}^{-}(0). \quad (5.44)$$

Обе величины  $q_{R\nu}^{+}(\tau_{\nu 2})$  и  $q_{R\nu}^{-}(0)$  зависят от граничных условий на стенках, которые будут рассмотрены в гл. 6.

Уравнение (5.43) можно упростить лишь при дальнейших предположениях. Один вариант упрощения уравнения (5.43) состоит в применении приближения серого газа, в соответствии с которым оптическая толщина  $\tau_{\nu}$  не зависит от частоты  $\nu$ , а именно  $\tau_{\nu} = \tau$  и  $\tau_{\nu 2} = \tau_2$ . В приближении серого газа экспоненциальные интегралы  $\varepsilon_n(t)$  не зависят от частоты  $\nu$ , следовательно, мы можем выполнить интегрирование по  $\nu$  в уравне-



нии (5.43) и получить следующее выражение:

$$q_R = 2\pi \int_{\tau}^{\tau_2} B(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} B(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt + \\ + 2q_R(\tau_2) \varepsilon_3(\tau_2 - \tau) - 2q_R(0) \varepsilon_3(\tau), \quad (5.45)$$

где  $q_R(\tau_2)$  и  $q_R(0)$  — интегралы от значений  $q_{R\nu}^+(\tau_{v2})$  и  $q_{R\nu}^-(0)$  по всем частотам. Функция  $B(t)$  определяется уравнением (4.27).

В уравнении энергии (5.7) необходимо иметь выражение дивергенции потока излучения. В рассматриваемом случае для несерого газа, согласно (5.43), это выражение будет следующим:

$$\frac{\partial q_R}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{\nu}}{\partial y} \frac{\partial q_R}{\partial \tau_{\nu}} = \int_0^{\infty} \frac{2}{L_{R\nu}} \left\{ \left[ \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{v2}} \pi B_{\nu}(t) \varepsilon_1(t - \tau_{\nu}) dt - \pi B_{\nu}(\tau_{\nu}) \right] + \right. \\ \left. + q_{R\nu}^+(\tau_{v2}) \varepsilon_2(\tau_{v2} - \tau_{\nu}) + q_{R\nu}^-(0) \varepsilon_2(\tau_{\nu}) + \right. \\ \left. + \left[ \int_0^{\tau_{\nu}} \pi B_{\nu}(t) \varepsilon_1(\tau_{\nu} - t) dt - \pi B_{\nu}(\tau_{\nu}) \right] \right\} d\nu. \quad (5.46)$$

Вообще спектральный поток излучения на стенках  $q_{R\nu}^+(\tau_{v2})$  и  $q_{R\nu}^-(0)$  может быть функцией частоты  $\nu$ . Для серой поверхности как  $q_{R\nu}^+(\tau_{v2})$ , так и  $q_{R\nu}^-(0)$  не зависят от частоты  $\nu$ . Условия на поверхности будут рассмотрены в гл. 6.

Для серого газа уравнение (5.46) примет вид

$$\frac{\partial q_R}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial q_R}{\partial \tau} = \frac{ca_R}{L_{RP}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} T^4(t) \varepsilon_1(|t - \tau|) dt - T^4(\tau) \right\} + \\ + [2q_R(\tau_2) \varepsilon_2(\tau_2 - \tau) + 2q_R(0) \varepsilon_2(\tau)] \frac{1}{L_{RP}}, \quad (5.47)$$

где  $q_R(\tau_2)$  и  $q_R(0)$  — интегральные значения  $q_{R\nu}^+(\tau_{v2})$  и  $q_{R\nu}^-(0)$  по частоте  $\nu$ .

Если рассматривается только одна пластина, то соответствующее выражение для потока излучения будет получено, если принять  $\tau_{v2}$  или  $\tau_2$  равными бесконечности, а члены  $q_{R\nu}^+(\tau_{v2})$  или  $q_R(\tau_2)$  — равными нулю.

При конечном значении средней длины свободного пробега излучения радиационные члены представляют собой интегральные выражения. В некоторых инженерных задачах эти интегралы можно упростить благодаря дальнейшим приближениям.

о которых пойдет речь несколько позже в гл. 6, 8 и 9. Если средняя длина свободного пробега излучения очень велика, то для потока энергии излучения можно получить некоторые очень простые выражения, как будет показано в разд. 6 гл. 6.

### 11. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При оценке выражений (5.43)—(5.47) необходимо знать свойства экспоненциального интеграла (5.38)

$$\varepsilon_n(t) = \int_1^{\infty} m^{-n} \exp(-mt) dm = \int_0^1 z^{n-2} \exp(-t/z) dz, \quad (5.38)$$

где  $m = 1/z = \sec \theta$ .

Мы будем иметь дело только с положительными целыми значениями  $n$ . Приведенные ниже соотношения экспоненциальных интегралов полезны в радиационной газодинамике.

**1. Значение экспоненциального интеграла при  $t = 0$ .** За исключением функции  $\varepsilon_1(0)$ , для всех остальных справедливо следующее соотношение:

$$\varepsilon_n(0) = \int_1^{\infty} m^{-n} dm = \frac{1}{n-1} \quad (5.48a)$$

при  $n=2, 3, 4$  и т. д. Но

$$\varepsilon_1(0) = +\infty. \quad (5.48b)$$

#### 2. Производная от $\varepsilon_n(t)$ по $t$ .

$$\varepsilon'_n(t) = \frac{d}{dt} [\varepsilon_n(t)] = -\varepsilon_{n-1}(t) \quad (5.49a)$$

при  $n=2, 3, 4$  и т. д. и

$$\varepsilon'_1(t) = -[\exp(-t)]/t. \quad (5.49b)$$

#### 3. Рекуррентная формула. Из уравнения (5.38) получаем

$$n\varepsilon_{n+1}(t) = - \int_1^{\infty} \exp(-xt) \frac{d}{dx} (x^{-n}) dx. \quad (5.50)$$

Интегрируя уравнение (5.50) по частям, найдем

$$n\varepsilon_{n+1}(t) = \exp(-t) - t\varepsilon_n(t) \quad (5.51)$$

при  $n \geq 1$ .

При помощи рекуррентной формулы (5.51) все экспоненциальные интегралы с положительными целыми значениями  $n$

могут быть выражены через первый экспоненциальный интеграл  $\varepsilon_1(t)$ .

#### 4. Первый экспоненциальный интеграл.

$$\varepsilon_1(t) = \int_1^{\infty} \exp(-mt) \frac{dm}{m} = \int_t^{\infty} \exp(-m) \frac{dm}{m}. \quad (5.38a)$$

Он табулирован, например, в таблицах функций [4]. В книге [4] применено обозначение  $E_i(t)$ . Между  $E_i(t)$  и  $\varepsilon_1(t)$  существует следующее соотношение:

$$\varepsilon_1(t) = -E_i(-t) \quad (t > 0), \quad (5.52)$$

где

$$E_i(t) = \int_{-\infty}^t \exp x \left( \frac{dx}{x} \right) \quad (-\infty < t < \infty). \quad (5.53)$$

В формуле (5.53) для  $t > 0$  интеграл берется в смысле главного значения Коши, т. е.

$$E_i(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{\delta}^{\infty} e^x \frac{dx}{x} + \int_{-\infty}^{-\delta} e^x \frac{dx}{x} \right) \quad (t > 0). \quad (5.54)$$

На фиг. 5.4 графически изображен первый экспоненциальный интеграл. При  $t = -0,3725$   $\varepsilon_1(t) = 0$ .

Для всех действительных значений  $t$  справедливо разложение

$$\varepsilon_1(t) = -\gamma_0 - \ln |t| + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n \cdot n!}, \quad (5.55)$$

где  $\gamma_0 = 0,5772156\dots$  — постоянная Эйлера. Это разложение полезно, конечно, только для малых значений  $t$ .

**5. Разложение экспоненциального интеграла в степенной ряд по  $t$ .** Из уравнения (5.50) следует выражение

$$(n-1)! \varepsilon_n(t) = (-t)^{n-1} \varepsilon_1(t) + e^{-t} \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-2)! (-t)^s. \quad (5.56)$$

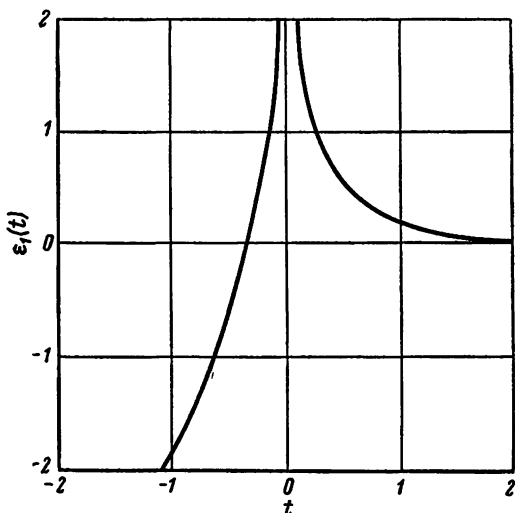
Подставляя (5.55) в выражение (5.56), получим

$$\varepsilon_2(t) = 1 + t(\gamma_0 - 1 + \ln t) - \frac{t^2}{2!1} + \frac{t^3}{3!2} - \frac{t^4}{4!3} + \dots, \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_3(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} t^2 \left( -\gamma_0 + \frac{3}{2} - \ln t \right) + \frac{t^3}{3!1} - \frac{t^4}{4!2} + \dots \quad (5.58)$$

Выражения (5.57) и (5.58) очень полезны при малых значениях  $t$ . В задачах радиационной газодинамики малые

значения  $t$  соответствуют случаю оптически тонкой среды. Приближенно можно представить экспоненциальные интегралы несколькими первыми членами степенного ряда по  $t$ . Мы используем это приближение при исследовании случая оптически тонкой среды.



Фиг. 5.4. Первый экспоненциальный интеграл  $\varepsilon_1(t)$ .

**6. Выражение для экспоненциального интеграла при больших значениях  $t$ .** При больших значениях  $t$  примем  $x = -1 + m$  и запишем уравнение (5.38) в виде

$$\begin{aligned} e^t \varepsilon_n(t) &= \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{(1+x)^n} dx = -\frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^n} \frac{de^{-tx}}{dx} dx = \\ &= \frac{1}{t} - \frac{n}{t} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} dx}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{n}{t} + \frac{n(n+1)}{t^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

При очень больших значениях  $t$

$$\varepsilon_n(t) = e^{-t}/t$$

для всех значений  $n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S., An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover Publications, N. Y., 1957.
2. Goulard R., Fundamental Equations of Radiation Gasdynamics, Purdue Univ. School of Aero. and Eng. Sci., Rep. A and ES 62-4, 1962.
3. Goulard R., Goulard M., One Dimensional Energy Transfer in Radiant Media, *Intern. Journ. Heat and Mass Transfer*, 1, 81—91 (1960).
4. Jahnke E., Emde E., Tables of Functions, Dover Publications, N. Y., 1945; имеется русский перевод с немецкого: Янке Е., Эмде Е., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. Kivel V., Bailey K., Tables of Radiation from High Temperature Air, AVCO Research Lab. Research Rep. 21, 1957.
6. Kourganoff V., Basic Methods in Transfer Problems, Oxford Press, 1952.
7. Pai S. I., Some Considerations of Radiation Magnetogasdynamics, Proc. Non-Linear Problem, Univ. of Wisconsin Press, 1963, pp. 47—67.
8. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеоретиздат, 1935.
9. Rosseland S., Theoretical Astrophysics, Oxford Press, 1936.
10. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Techn. Inform. Series R 63 D 46, Space Sciences Lab. General Electric Co., Phil. Pa, 1963; Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer, Pergamon Press, 1964, pp. 319—354.
11. Tellep D. M., Edwards D. K., Radiant Energy Transfer in Gaseous Flows, Techn. Rep., Lockheed Missile and Space Div. LMSD-288139, 1960.
12. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.

## *Граничные условия радиационной газодинамики*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В каждой частной задаче радиационной газодинамики имеются определенные начальные и граничные условия. Мы должны найти решения основных уравнений радиационной газодинамики, которые удовлетворяли бы этим условиям. Под начальными условиями мы подразумеваем распределения скорости и параметров состояния газа, а также спектральную интенсивность излучения в определенный начальный момент времени  $t=0$ . В радиационной газодинамике мы обычно не задаем начальные условия в виде пространственных распределений, а только требуем, чтобы начальные условия были совместимы с граничными условиями при  $t=0$  и с основными уравнениями. Таким образом, необходимо исследовать лишь граничные условия. В случае динамической системы с конечным числом степеней свободы движение определяется начальным положением и скоростью. Для непрерывной среды, которая имеет бесконечное множество степеней свободы, движение определяется не только начальными, но и граничными условиями, такими, например, как требования, налагаемые на скорость на границе рассматриваемой области во все время движения  $t \geq 0$ .

В динамике излучающего газа следует рассматривать граничные условия как для газодинамического поля, так и для поля излучения. Граничные условия газодинамического поля хорошо известны, и мы лишь вкратце обсудим их в разд. 2. Граничные условия поля излучения известны в меньшей степени, и мы рассмотрим их подробнее. Во многих задачах переноса излучения, например в астрофизике, влияние границ обычно пренебрежимо мало и бывает достаточно простых приближений для учета их влияния. Однако в радиационной газодинамике граничный эффект очень существен и его следует учитывать весьма тщательно. Мы рассмотрим такие граничные условия в разд. 3—5. В разд. 6 мы применим результаты разд. 5 к случаю переноса излучения между параллельными пластинами, а в разд. 7 — к излучающему слою газа с постоянной температурой. Последний случай часто используется во многих инженерных задачах для оптически тонкого газа. Наконец, в

обычной газодинамике, если средняя длина свободного пробега не мала, возникают условия скольжения скорости и скачка температуры на границе. Подобная же ситуация наблюдается и в радиационной газодинамике, когда средняя длина свободного пробега излучения не мала. Этот случай будет рассмотрен в разд. 8.

## 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ [9]

Граничные условия газодинамического поля зависят от средней длины свободного пробега частиц газа. Когда средняя длина свободного пробега пренебрежимо мала, газ можно рассматривать как сплошную среду. В этом случае граничные условия прилипания являются хорошим приближением. При этом на поверхности, отделяющей тело от жидкости или одну жидкость от другой, компоненты скорости, напряжения и температура не имеют разрыва. В большинстве задач, обсуждаемых в этой книге, будет рассматриваться случай сплошной среды и использоваться граничные условия прилипания.

Когда средняя длина свободного пробега частиц газа не мала, даже если газ еще может рассматриваться как сплошная среда, то на его границах будет проявляться эффект скольжения. Скорость и температура газа у стенки могут отличаться от скорости и температуры самой стенки. Следовательно, на границе будут иметь место скольжение скорости и скачок температуры. Эти явления известны в динамике разреженного газа как течения со скольжением. Они кратко будут рассмотрены в гл. 10. Интересно отметить, что существует тесная аналогия между процессом переноса излучения и процессом молекулярного переноса, который определяет граничные условия газодинамики. В разд. 8 этой главы мы покажем, что температурный скачок возникает тогда, когда средняя длина свободного пробега излучения не пренебрежимо мала.

Когда средняя длина свободного пробега в газе больше характерного размера поля течения, газ уже не может рассматриваться как сплошная среда. В этом случае имеет место свободномолекулярное течение. Граничные условия при этом зависят от степени гладкости поверхности. Когда свободная молекула ударяется о стенку, она может отразиться зеркально или диффузно. В общем случае часть молекул будет отражаться диффузно, а часть зеркально. Этот случай будет рассмотрен в гл. 10. И в том случае, когда средняя длина свободного пробега излучения велика, опять-таки существует аналогия между процессом переноса излучения и процессом молекулярного переноса. Эти вопросы будут рассмотрены в разд. 3 и 5.

Даже если условия прилипания на границе справедливы для газодинамического поля, когда газ рассматривается как сплошная среда и когда средняя длина свободного пробега газа очень мала, они могут не выполняться при определенных условиях, в частности в поле течения далеко от границы или в переходной области при очень больших числах Рейнольдса. При этих условиях, когда влияние вязкости мало, мы можем считать газ невязким. В поле течения невязкой среды возможны поверхности разрыва. Условие прилипания должно быть ослаблено. Могут встретиться два типа поверхностей разрыва: ударная волна и вихревая поверхность. При переходе через ударную волну происходит разрыв нормальной составляющей скорости, а ее тангенциальная составляющая сохраняется непрерывной. С другой стороны, при переходе через вихревую поверхность происходит разрыв касательной составляющей скорости, а ее нормальная составляющая остается непрерывной. Эти условия будут подробно рассмотрены при исследовании частных задач.

### 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Граничное условие поля излучения зависит от величины средней длины свободного пробега излучения. Когда средняя длина свободного пробега излучения очень мала, т. е. среда является оптически толстой, то все радиационные члены могут быть выражены в зависимости от температуры в предположении локального термодинамического равновесия (см. гл. 5, разд. 8). В этих условиях нет нужды в точном граничном условии для спектральной интенсивности излучения и требуется только граничное условие для температуры. Следовательно, в этом случае достаточны только газодинамические граничные условия.

Когда средняя длина свободного пробега излучения мала, но не пренебрежимо мала, оказывается, что основные уравнения радиационной газодинамики, полученные в гл. 5, разд. 8, достаточны для описания поля течения вдали от границы, но на границе не будет удовлетворяться условие непрерывности температуры. Следовательно, по аналогии с течением скольжения в динамике разреженного газа в этом случае возникает скачок температуры. Этот случай будет подробно рассмотрен в разд. 8 этой главы.

Когда средняя длина свободного пробега излучения не мала, следует рассматривать взаимодействие излучения с границей раздела двух сред. Когда луч сталкивается с поверхностью, часть энергии излучения может проникнуть во вторую среду, а часть ее может отразиться. Таким образом, падающий луч может разделиться на проходящий и отраженный лучи. Однако



радиационная газодинамика представляет собой макроскопическое исследование явления. Мы не изучаем каждый луч в отдельности, а рассматриваем статистически большое количество лучей. Мы должны использовать статистическое среднее для рассмотрения действительных условий на поверхности в инженерных задачах. В практическом случае можно классифицировать поверхности как «оптически гладкие» и «оптически шероховатые». Для оптически гладкой поверхности взаимодействие излучения с поверхностью подчиняется хорошо известным законам Френеля, которые будут обсуждены в разд. 4.

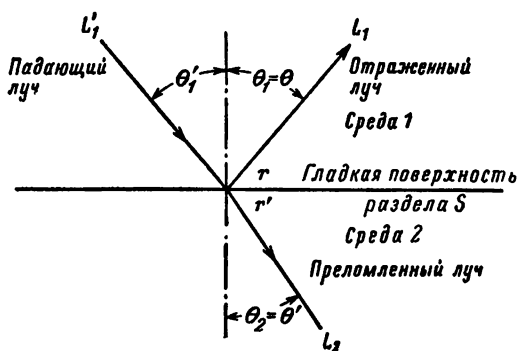
Большинство поверхностей в инженерных задачах не являются оптически гладкими. В случае оптически шероховатой поверхности для описания свойств поверхности используются феноменологические коэффициенты. Граничные условия на таких оптически шероховатых поверхностях будут рассмотрены в разд. 5.

#### 4. ГЛАДКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Рассмотрим оптически гладкую поверхность, разделяющую две среды, которые имеют показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$ , причем

$$n_i = c/q_i, \quad (6.1)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме и  $q_i$  — скорость света в  $i$ -й среде (фиг. 6.1). Когда луч  $L_1'$  из среды 1 попадает на граничную поверхность, он разделяется на два луча: отраженный луч



Фиг. 6.1. Отражение и преломление луча на гладкой поверхности.

$L_1$  и проходящий луч  $L_2$ . Связь между углами  $\theta_1'$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  этих лучей показана на фиг. 6.1 и определяется хорошо известными

законами Френеля в виде

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad (6.2)$$

и

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.3)$$

Пусть  $r$  — коэффициент отражения поверхности  $S$ , который определяет долю энергии излучения, отраженную поверхностью. Тогда  $(1 - r)$  — доля энергии излучения, проходящая во вторую среду. В общем случае коэффициент отражения  $r$  зависит от угла падения луча  $\theta$ . Мы можем обозначить через  $r'$  коэффициент отражения луча, идущего из среды 2 и падающего на поверхность  $S$ . Рассмотрим баланс энергии излучения на элементарной площадке  $d\sigma_0$  поверхности  $S$ . Энергия излучения падающего луча  $L'_1$  равна

$$E_v = I_v \cos \theta d\sigma_0 dt dv d\omega, \quad (6.4)$$

а отраженная поверхностью энергия луча  $L_1$

$$E_{vr} = r I_v \cos \theta d\sigma_0 dt dv d\omega, \quad (6.5)$$

где элементарный телесный угол  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Энергия, прошедшая из среды 2 в среду 1, определяется следующим образом:

$$E'_v = (1 - r') I'_v \cos \theta' d\sigma_0 dt dv d\omega', \quad (6.6)$$

где  $d\omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi$ . В соответствии с законом преломления  $\varphi = \varphi'$ . Следовательно, соотношение  $E_v = E_{vr} + E'_v$  дает

$$I_v \cos \theta d\omega (1 - r) = (1 - r') I'_v \cos \theta' d\omega'. \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.3) получим

$$\cos \theta d\omega = \cos \theta' d\omega' (q^2/q'^2). \quad (6.8)$$

Подставляя уравнение (6.8) в уравнение (6.7), находим

$$\frac{I_v q^2}{I'_v q'^2} = \frac{1 - r'}{1 - r}. \quad (6.9)$$

В общем случае коэффициент отражения зависит от угла падения. В частном случае, если  $r=0$ , то  $r'=0$ . Это значит, что левая часть уравнения (6.9) должна быть равна единице и мы получаем общие соотношения

$$r = r' \quad (6.10)$$

и

$$q^2 I_v = q'^2 I'_v. \quad (6.11)$$

Коэффициент отражения граничной поверхности один и тот же на обеих ее сторонах. Условие термодинамического равновесия имеет вид

$$q^2 I_{\nu} = c^2 B_{\nu}. \quad (6.12)$$

Выражение в правой части этого равенства не зависит от среды. Следовательно, то же утверждение справедливо и для левой части равенства. Из уравнения (6.12) следует, что в условиях термодинамического равновесия справедлива следующая формула для спектральной интенсивности излучения  $I_{\nu}$ :

$$I_{\nu} = n^2 B_{\nu}. \quad (6.13)$$

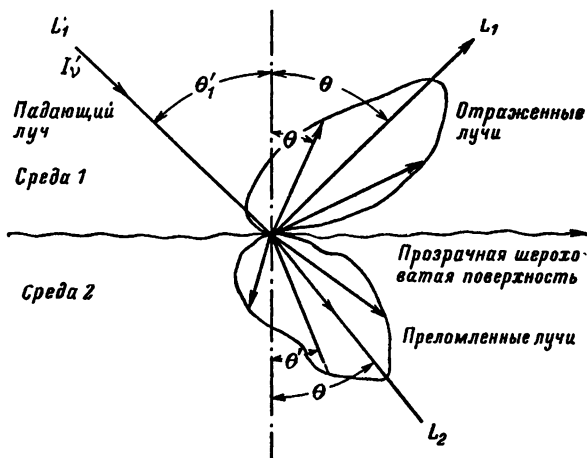
В предшествующем изложении неявно предполагалось, что для газа  $n=1$  и  $I_{\nu}=B_{\nu}$  [ср. уравнение (5.11)]. Для среды с показателем преломления  $n$  уравнение переноса излучения при условии местного термодинамического равновесия принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\rho k'_{\nu}} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial s} = n^2 B_{\nu} - I_{\nu}. \quad (6.14)$$

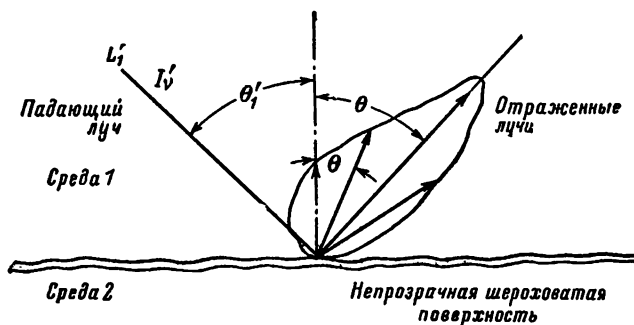
## 5. ШЕРОХОВАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Для гладкой поверхности требовалось только установить связь между лучами света на границе в соответствии с законами Френеля. Однако большинство поверхностей раздела между средами не являются оптически гладкими. С макроскопической точки зрения это означает, что падающий луч не будет преломляться и отражаться только вдоль двух направлений, а произойдет распределение этих лучей по многим направлениям, как показано на фиг. 6.2. Чтобы описать такое поведение лучей, приходится вводить функции распределения и учитывать определенные свойства поверхности. Схема прозрачной шероховатой поверхности представлена на фиг. 6.2. Другой, весьма часто встречающийся в инженерных задачах случай граничной поверхности — это непрозрачная шероховатая поверхность, которая поглощает всю падающую на нее энергию излучения в тонком поверхностном слое толщиной в несколько молекул. Схема такой непрозрачной поверхности показана на фиг. 6.3. Мы подробно рассмотрим свойства такой непрозрачной шероховатой поверхности и в конце этого раздела кратко изложим результаты для прозрачной шероховатой поверхности.

Чтобы выяснить подробную картину поля излучения над непрозрачной поверхностью, нужно знать ее поглощательную, отражательную и излучательную способности по направлению. С другой стороны, для решения многих задач радиационной



Фиг. 6.2. Отражение и преломление луча на прозрачной шероховатой поверхности.



Фиг. 6.3. Отражение луча на непрозрачной шероховатой поверхности.

газодинамики достаточно знать полный коэффициент поглощения, коэффициент отражения и коэффициент излучения поверхности. Определения этих коэффициентов следующие.

### Поглощательная и отражательная способности по направлению

Для падающего луча света  $L'_1$  со спектральной интенсивностью  $I'_v$  энергия излучения, поглощаемая поверхностью, мо-

жет быть выражена через поглощательную способность по направлению  $a_{\theta', \nu}$ , которая в общем случае является функцией  $\theta'$  и  $\nu$ . Поглощенная энергия излучения равна

$$dE_{\nu, a} = a_{\theta', \nu} I'_{\nu} \cos \theta' d\omega' d\sigma_0 d\nu dt. \quad (6.15)$$

Отраженная поверхностью энергия может быть выражена через отражательную способность по направлению  $r_{\theta', \nu}$ , которая также является функцией  $\theta'$  и  $\nu$ . Отраженная энергия излучения равна

$$dE_{\nu, r} = r_{\theta', \nu} I'_{\nu} \cos \theta' d\omega' d\sigma_0 d\nu dt. \quad (6.16)$$

Для непрозрачной поверхности сумма поглощенной и отраженной энергий излучения должна быть равна падающей энергии  $I'_{\nu} \cos \theta' d\omega' d\sigma_0 d\nu dt$ .

Тогда

$$r_{\theta', \nu} + a_{\theta', \nu} = 1. \quad (6.17)$$

Отражательная способность по направлению  $r_{\theta', \nu}$  определяет полное количество энергии излучения, отраженной поверхностью, при падении на нее луча под углом  $\theta'$ . Но эта величина не дает возможности судить о том, как распределяется отраженная энергия по углам отражения  $\theta$ . Это угловое распределение отраженной энергии для данной поверхности должно быть определено экспериментально. Не зная действительных условий на поверхности, мы можем рассмотреть только два предельно простых случая:

**1. Зеркальное отражение, при котором  $\theta = -\theta'$ .** В этом случае для отраженных лучей справедливы законы классической оптики для гладкой поверхности, следовательно,

$$I_{\nu s} = r_{\theta', \nu s} I'_{\nu}, \quad (6.18)$$

где индекс  $s$  относится к зеркальному отражению.

**2. Диффузное отражение, при котором отраженная энергия распределяется равномерно по всем направлениям угла отражения  $\theta$ .** Пусть  $I_{\nu d}$  — интенсивность отраженной лучистой энергии, обусловленная падающим лучом спектральной интенсивности  $I'_{\nu}$ . Полная отраженная энергия может быть записана в виде

$$dE_{\nu r} = r_{\theta', \nu d} I'_{\nu} \cos \theta' d\omega' d\sigma_0 d\nu dt = \pi I_{\nu d} d\omega' d\sigma_0 d\nu dt$$

или

$$I_{\nu d} = r_{\theta', \nu d} I'_{\nu} \frac{\cos \theta'}{\pi}, \quad (6.19)$$

где  $r_{\theta', \nu d}$  — отражательная способность по направлению при диффузном отражении.

В действительных условиях картина отражения заметно отличается от обеих этих идеальных схем. По экспериментальным результатам можно определить истинную функцию распределения отражения  $p_{\theta-\theta', \nu}$ , аналогичную фазовой функции рассеяния (гл. 3, разд. 2), так, что

$$p_{\theta-\theta', \nu} = r_{\theta-\theta', \nu} / r_{\theta', \nu}, \quad (6.20)$$

где величина  $r_{\theta-\theta', \nu}$  известна как коэффициент отражения и определяет собой энергию, отраженную поверхностью при падении на нее лучей под углом  $\theta'$  и отражении лучей под углом  $\theta$ . Этот коэффициент определяется формулой

$$r_{\theta-\theta', \nu} = \frac{I_{\nu, \theta-\theta'}}{I'_{\nu}} \frac{\pi}{\cos \theta'}, \quad (6.21)$$

где  $I_{\nu, \theta-\theta'}$  — спектральная интенсивность отраженного луча в направлении  $\theta$  при угле падения  $\theta'$ . Истинное распределение отражения  $p_{\theta-\theta', \nu}$  должно быть нормализовано по соотношению

$$\int_{2\pi} p_{\theta-\theta', \nu} \cos \theta \frac{d\omega}{\pi} = 1. \quad (6.22)$$

Если известно истинное распределение отражения, то можно вычислить полусферический коэффициент отражения  $r_{\nu}$ , обычно известный как коэффициент отражения поверхности

$$r_{\nu} = \frac{\int_{2\pi} \cos \theta d\omega \int_{2\pi} r_{\theta', \nu} I'_{\nu} p_{\theta-\theta', \nu} \frac{\cos \theta' d\omega'}{\pi}}{\int_{2\pi} I'_{\nu} \cos \theta' d\omega'}. \quad (6.23)$$

В радиационной газодинамике этот коэффициент отражения  $r_{\nu}$  используется в граничных условиях. Аналогично можно определить полусферический коэффициент поглощения  $a_{\nu}$ , обычно известный как коэффициент поглощения поверхности. Из уравнения (6.17) получаем

$$a_{\nu} + r_{\nu} = 1, \quad (6.24)$$

где оба коэффициента  $a_{\nu}$  и  $r_{\nu}$  являются в общем случае функциями частоты.

Приведенное выше рассмотрение нетрудно обобщить на случай прозрачной шероховатой поверхности, если ввести полусферический коэффициент пропускания  $tr_{\nu}$ , обычно известный как коэффициент прозрачности поверхности. Тогда уравнение (6.24)

должно быть заменено следующим <sup>1)</sup>:

$$a_{\nu} + r_{\nu} + tr_{\nu} = 1. \quad (6.25)$$

Для непрозрачной поверхности  $tr_{\nu} = 0$ .

### Излучательная способность и эффективное излучение по направлению

Как было показано в гл. 4, поглощение излучения тесно связано с его испусканием. То же справедливо для явлений на поверхности. Энергия, излучаемая с поверхности в направлении  $\theta$ , состоит из истинного излучения и из энергии, обусловленной отражением. Действительно испускаемая энергия излучения может быть выражена в зависимости от излучательной способности по направлению  $e_{\theta\nu}$  в виде

$$dE_{\nu e} = e_{\theta\nu} B_{\nu} \cos \theta d\omega d\sigma_0 d\nu dt = I_{\nu e} \cos \theta d\omega d\sigma_0 d\nu dt, \quad (6.26)$$

где  $B_{\nu}$  — спектральная интенсивность излучения черной поверхности, которая является максимально возможной величиной спектральной интенсивности при локальном термодинамическом равновесии, и  $I_{\nu e}$  — спектральная интенсивность истинного излучения. Уравнение (6.26) дает

$$I_{\nu e} = e_{\theta\nu} B_{\nu}. \quad (6.27)$$

Излучательная способность по направлению  $e_{\theta\nu}$  меньше или равна единице и в общем случае является функцией как угла  $\theta$ , так и частоты  $\nu$ . Как теория, так и эксперимент показывают, что для диэлектрических поверхностей излучательная способность по направлению велика и почти не зависит от  $\theta$ , а для металлических поверхностей она мала и сильно зависит от угла  $\theta$ .

Если поверхность находится в термодинамическом равновесии со средой, то энергия излучения, поглощенная из луча  $L$ , будет равна

$$dE_{\nu a} = a_{\theta\nu} B_{\nu} \cos \theta d\omega d\sigma_0 d\nu dt. \quad (6.28)$$

В условиях равновесия энергия, определяемая уравнением (6.28), должна быть равна энергии, определяемой уравнением (6.26). Следовательно, мы получаем

$$a_{\theta\nu} = e_{\theta\nu}. \quad (6.29)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе приняты следующие наименования указанных величин:  $a_{\nu}$  — спектральная полусферическая поглощательная способность поверхности,  $e_{\nu}$  — спектральная полусферическая степень черноты поверхности,  $r_{\nu}$  — спектральная полусферическая отражательная способность,  $tr_{\nu}$  — спектральная полусферическая пропускательная способность поверхности. — Прим. перев.

Уравнение (6.29) представляет собой закон Кирхгофа для твердой поверхности [ср. уравнение (4.5)], который сохраняет силу, даже когда среда не находится в равновесии с поверхностью тела.

Подобно тому как получено выражение (6.23), мы можем определить полусферический коэффициент излучения  $e_v$ , обычно известный как коэффициент излучения поверхности. Из уравнения (6.29) получаем

$$e_v = a_v. \quad (6.30)$$

Полная энергия излучения, испускаемая единицей площади в единицу времени в единичном интервале частот, известна как эффективное излучение  $R_a$ , которое определяется в виде

$$R_a = \int_{2\pi} I_{\theta\nu T} \cos \theta \, d\omega, \quad (6.31)$$

где  $I_{\theta\nu T}$  — спектральная интенсивность излучения в направлении  $\theta$ , обусловленная полным излучением, и состоит из двух составляющих, соответствующих истинному излучению  $I_{\theta\nu e}$  и отраженному излучению  $I_{\theta\nu r}$ , т. е.

$$I_{\theta\nu T} = I_{\theta\nu e} + I_{\theta\nu r} = e_{\theta\nu} B_\nu + \int_{2\pi} r_{\theta'\nu} I'_{\nu} p_{\theta-\theta',\nu} \frac{\cos \theta' \, d\omega'}{\pi}. \quad (6.32)$$

Итак, в радиационной газодинамике при определении граничных условий для спектральной интенсивности излучения нужно знать три общих коэффициента шероховатой поверхности, а именно:

- 1) полусферический коэффициент поглощения  $a_v$ , обычно называемый коэффициентом поглощения поверхности, который равен полусферическому коэффициенту излучения  $e_v$ , или коэффициенту излучения поверхности;
- 2) полусферический коэффициент отражения  $r_v$ , или коэффициент отражения поверхности;
- 3) полусферический коэффициент прозрачности  $tr_v$ , или коэффициент прозрачности поверхности.

Эти три коэффициента связаны уравнением (6.25). Но величина каждого из этих коэффициентов зависит от свойств поверхности и должна определяться экспериментально.

Имеется несколько случаев, которые представляют общий интерес, а именно:

**1. Шероховатая непрозрачная поверхность.** Для такой поверхности коэффициент прозрачности  $tr_v$  всегда равен нулю и

$$a_v + r_v = 1. \quad (6.33)$$



**2. Серая поверхность.** Для такой поверхности все три коэффициента  $a_\nu$ ,  $r_\nu$  и  $tr_\nu$  не зависят от частоты  $\nu$ .

**3. Черная поверхность.** Для такой поверхности как коэффициент отражения, так и коэффициент прозрачности равны нулю и, следовательно,

$$a_\nu = e_\nu = 1. \quad (6.34)$$

Спектральная интенсивность поверхностей такого типа при условии термодинамического равновесия определяется в виде

$$I_\nu(\omega) = n^2 B_\nu(T_w), \quad (6.35)$$

где  $T_w$  — температура поверхности или стенки. Поскольку в большинстве инженерных задач показатель преломления  $n$  очень близок к единице, то можно принять  $n=1$ , и тогда спектральная интенсивность излучения черной стенки будет равна

$$I_\nu(\omega) = B_\nu(T_w). \quad (6.35a)$$

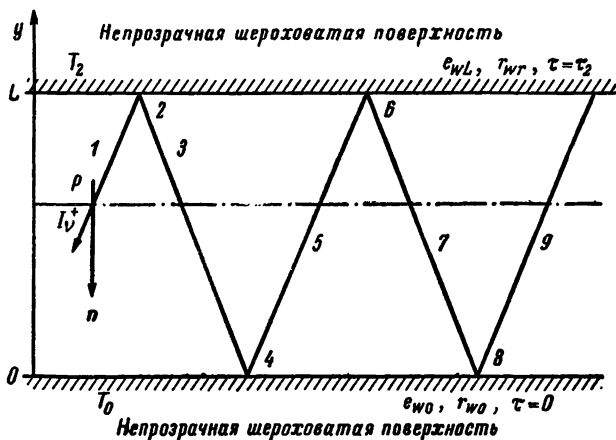
Для нечерной, но непрозрачной поверхности спектральная интенсивность на стенке при термодинамическом равновесии и  $n=1$  будет равна

$$I_\nu(\omega) = e_\nu B_\nu(T_w) = (1 - r_\nu) B_\nu(T_w). \quad (6.36)$$

Уравнения (6.35) и (6.36) будут использованы позже для решения различных задач радиационной газодинамики.

## 6. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕПРОЗРАЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ [5]

Теперь мы пересмотрим задачу, рассмотренную в гл. 5, разд. 10, а именно задачу о переносе излучения между двумя параллельными пластинами. При этом мы более подробно рассмотрим граничные значения  $I_\nu^-(0)$  и  $I_\nu^+(\tau_2)$ . Предположим, что здесь справедливо приближение серого газа. Поверхности являются непрозрачными и шероховатыми, и их оптические свойства определяются двумя коэффициентами  $e_w$  и  $r_w$ , которые предполагаются независимыми от частоты  $\nu$ . Следовательно, поверхности также серые. Эти коэффициенты удовлетворяют уравнениям (6.24) и (6.30). Коэффициенты излучения верхней и нижней стенок обозначены соответственно  $e_{wL}$  и  $e_{w0}$  и соответствующие коэффициенты отражения  $r_{wL}$  и  $r_{w0}$ . Сначала мы рассмотрим лучи, идущие от верхней стенки к точке  $P$ , т. е.  $I_\nu^+(\tau_2)$ , которая определяется уравнением (5.39a) (фиг. 6.4). Спектральная интенсивность  $I_\nu^+(\tau_2)$  — это совокупный эффект многих явлений излучения, а именно: а) излучения пластины в точке 2, б) отражения луча 3, в) отражения луча, испускаемого в точке 4,



Фиг. 6.4. Граничные условия переноса излучения между двумя параллельными непрозрачными шероховатыми серыми поверхностями.

г) двойного отражения луча 5 и т. д. Если мы учтем затухание различных лучей, то полный поток излучения, определяемый уравнением (5.43), в данном случае будет

$$\begin{aligned}
 q_R = q_R^+ - q_R^- = & 2\pi \int_{\tau}^{\tau_2} B(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} B(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt + \\
 & + \frac{2}{1 - 4r_{wL}r_{w0}\varepsilon_3^2(\tau_2)} \left\{ e_{wL}B(\tau_2)\varepsilon_3(\tau_2 - \tau) - e_{w0}B(0)\varepsilon_3(\tau) + \right. \\
 & + e_{w0}B(0)\varepsilon_3(\tau_2)2r_{wL}\varepsilon_3(\tau_2 - \tau) - e_{wL}B(\tau_2)\varepsilon_3(\tau_2)2r_{w0}\varepsilon_3(\tau) + \\
 & + 2\pi r_{wL}\varepsilon_3(\tau_2 - \tau) \int_0^{\tau_2} B(t)\varepsilon_2(t - \tau_2) dt - 2\pi r_{w0}\varepsilon_3(\tau) \int_0^{\tau_2} B(t)\varepsilon_2(t) dt + \\
 & + 4\pi r_{w0}r_{wL}\varepsilon_3(\tau_2)\varepsilon_3(\tau_2 - \tau) \int_0^{\tau_2} B(t)\varepsilon_2(t) dt - \\
 & \left. - 4\pi r_{w0}r_{wL}\varepsilon_3(\tau_2)\varepsilon_3(\tau) \int_0^{\tau_2} B(t)\varepsilon_2(t - \tau_2) dt \right\}. \quad (6.37)^1
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $B(0) = \pi \int_0^{\infty} I_V^-(0) dv$ ,  $B(\tau_2) = \pi \int_0^{\infty} I_V^+(\tau_2) dv$  и при локальном равновесии стенок со средой эти величины равны соответственно  $\sigma T_0^4$  и  $\sigma T_2^4$ .

Прим. перев.

Уравнение (6.37) является общим выражением для серой нерассеивающей среды. В отдельных случаях это уравнение можно упростить. Некоторые из этих упрощенных случаев перечислены ниже.

**1. Слой с очень большой оптической толщиной.** Если расстояние между двумя пластинами очень велико, то  $\tau_2 \rightarrow \infty$ . Поскольку обе величины  $\varepsilon_2(t)$  и  $\varepsilon_3(t)$  стремятся к нулю при  $t$ , стремящемся к бесконечности, то можно пренебречь всеми членами уравнения (6.37), за исключением первых двух. В этом случае

$$q_R = 2\pi \int_{\tau}^{\infty} B(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} B(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt. \quad (6.38)$$

Это выражение часто используется при изучении звездных фотосфер или взрывных волн, когда граничными эффектами можно пренебречь.

**2. Прозрачная среда между двумя серыми параллельными пластинами.** Для оптически тонкого газа оптическая толщина очень мала, т. е.  $\tau \rightarrow 0$ . Тогда можно использовать следующее приближение:

$$\varepsilon_3(\tau) = \varepsilon_3(0) = \frac{1}{2}. \quad (6.39)$$

К тому же в случае непрозрачной поверхности  $e_w = 1 - r_w$ . Теперь всеми интегральными членами в уравнении (6.37) можно пренебречь, поскольку  $\tau \approx \tau_2 \approx 0$ , и мы получаем

$$q_R = \sigma (T_2^4 - T_0^4) \frac{1}{(1/e_{w0}) + (1/e_{wL}) - 1}. \quad (6.40)$$

Это выражение используется в динамике разреженного газа (см. гл. 10).

**3. Поглощающая среда между двумя черными пластинами, имеющими одинаковую температуру  $T_w$ .** Для черной поверхности  $r_w = 0$  и  $e_w = 1$ . Подставляя эти значения коэффициентов в уравнение (6.37), получим

$$q_R = 2\pi \int_{\tau}^{\tau_2} B(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} B(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt + \\ + 2B(\tau_2) \varepsilon_3(\tau_2 - \tau) - 2B(0) \varepsilon_3(\tau). \quad (6.41)$$

Для оптически тонкого газа  $\tau \ll 1$ , тогда  $\varepsilon_2 \approx 1$  и  $\varepsilon_3(t) = 1/2 - t$ . Уравнение (6.41) сводится к следующему:

$$q_R = 2 \int_y^L \sigma T^4 \rho k'_v dy - 2 \int_0^y \sigma T^4 \rho k'_v dy + \\ + \sigma (T_2^4 - T_0^4) - 2\sigma T_2^4 \rho k'_v (L - y) + 2\sigma T_0^4 \rho k'_v y. \quad (6.42)$$

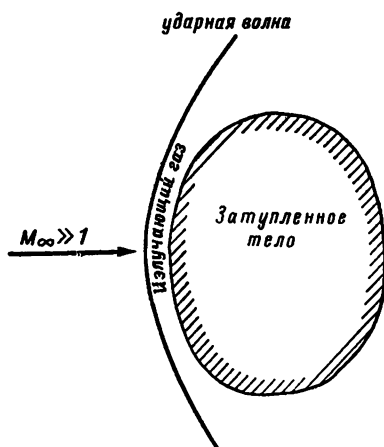
На нижней стенке ( $y=0$ ,  $\tau=0$ ) уравнение (6.42) принимает вид (при  $T_2 = T_0 = T_w$ )

$$q_{Rw} = 2 \int_0^L \sigma T^4 \rho k'_v dy - 2\sigma T_w^4 \rho k'_v L. \quad (6.43)$$

Первый член правой части характеризует испускание излучения в газе, а второй член — испускание излучения от стенки. Результирующий поток излучения к стенке определяется разностью этих двух потоков излучения.

## 7. ИЗЛУЧЕНИЕ СЛОЯ ГАЗА, ИМЕЮЩЕГО ПОСТОЯННУЮ ТЕМПЕРАТУРУ [5]

Для многих инженерных задач важно иметь возможность быстро оценивать энергию излучения с тем, чтобы решить,



Фиг. 6.5. Тепловое излучение за отошедшей ударной волной перед затупленным телом.

является ли радиационный эффект столь существенным, что возникает необходимость в применении радиационной газодинамики к исследованию течения. Например, при гиперзвуковых

скоростях температура газа за отошедшей ударной волной перед затупленным телом (фиг. 6.5) очень высока и энергией излучения пренебрегать нельзя. Для приближенной оценки энергии излучения можно сделать следующие предположения:

а) сжатый слой можно заменить имеющим постоянную температуру слоем газа толщиной  $L$ ;

б) отошедшую ударную волну можно рассматривать как прозрачную поверхность, у которой  $r_{wL}=0$  и  $e_{wL}=0$ ;

в) тело можно рассматривать как черную поверхность ( $r_{w0}=0$ ) с низкой температурой, так что  $B(0)=0$ .

Поток излучения от сжатого слоя в набегающий поток определяется уравнением (6.37)

$$q_R = 2\pi \int_0^{\tau_2} B(t) \varepsilon_2(t) dt = \sigma T^4 [1 - 2\varepsilon_3(\tau_2)]. \quad (6.44)^1$$

Если далее предположить, что газ оптически тонкий, так что  $\varepsilon_3(t) = 1/2 - t$ , то уравнение (6.44) примет вид

$$q_R = 2\rho k'_v L \sigma T^4 = e_g \sigma T^4, \quad (6.45)$$

где

$$e_g = 2\rho k'_v L \quad (6.46)$$

— коэффициент излучения газового слоя. Таким образом, коэффициент излучения газа может быть выражен через коэффициент поглощения. Например, значения  $e_g/L$  табулированы для воздуха [7].

Следует заметить, что в предположении серого газа мы в действительности используем некоторый средний коэффициент поглощения среды по всему спектру частот. В случае оптически толстого газа, как это было показано в гл. 5, разд. 8, подходящим средним значением является средний коэффициент поглощения Росселанда. В случае оптически тонкого газа, как было показано в гл. 5, разд. 9, таким подходящим средним значением является средний коэффициент поглощения Планка (5.36). Когда какой-либо частный случай описывается как случай оптически толстого или оптически тонкого газа, мы сравниваем физическую длину со средней длиной свободного пробега излучения. Иными словами, оптическая толщина  $\tau$  определяет в каждом случае, является ли среда оптически толстой или оптически тонкой. Значение среднего коэффициента поглощения или соответствующей средней длины свободного пробега излу-

<sup>1)</sup> Из (5.49а) следует  $\int_0^{\tau} \varepsilon_{n-1}(t) dt = \varepsilon_n(0) - \varepsilon_n(\tau)$ . — *Прим. перев.*

чения  $L_R$  или  $L_P$  само по себе недостаточно для установления оптических свойств среды. Действительно, для данного газа при данной температуре и плотности средний коэффициент поглощения по Планку обычно оказывается больше среднего коэффициента поглощения по Росселанду. Например, для высокотемпературного воздуха Скала предложил следующее соотношение  $K_P = 8,3 K_R$ . Мы рассмотрим изменение этих двух средних коэффициентов поглощения в гл. 7 и 9.

### 8. СКОЛЬЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНОМ ЗНАЧЕНИИ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ИЗЛУЧЕНИЯ

При конечном значении средней длины свободного пробега излучения мы должны решить уравнение переноса излучения с граничными условиями, рассмотренными в разд. 3—6, и затем систему интегро-дифференциальных уравнений радиационной газодинамики. Очень трудно получить решение этой нелинейной интегро-дифференциальной системы уравнений. В случае малого, но конечного значения средней длины свободного пробега излучения целесообразно использовать систему дифференциальных уравнений, подобную полученной в гл. 5, разд. 8 для случая очень малой средней длины свободного пробега излучения. Там мы полагали, что средняя длина свободного пробега излучения столь мала, что нет необходимости рассматривать граничные условия для лучей. Однако если средняя длина свободного пробега излучения не слишком мала, то следует рассматривать как основные уравнения, так и граничные условия, и этот случай называется скольжением излучения.

Пересмотрим результаты разд. 10, гл. 5, полагая, что верхняя стенка удалена на бесконечность, а нижняя представляет собой непрозрачную поверхность с коэффициентом излучения  $e_w$  и коэффициентом отражения  $r_w$ . Будем также полагать, что газ серый. Тогда уравнение (6.37) примет вид

$$q_R = 2\pi \int_{\tau}^{\infty} B(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} B(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt - \\ - 2e_w B(0) \varepsilon_3(\tau) - 4\pi r_w \varepsilon_3(\tau) \int_0^{\infty} B(t) \varepsilon_2(t) dt. \quad (6.47)$$

Среднюю длину свободного пробега излучения будем считать малой, но пренебрежимо малой. Экспоненциальный интеграл  $\varepsilon_2(t - \tau)$  пренебрежимо мал всюду, за исключением окрестности  $t \approx \tau$ . Вследствие этого радиационную функцию  $B(t)$  в уравнении (6.47) можно выразить в виде ряда Тейлора по степеням

$(t - \tau)$  в окрестности точки  $t = \tau$ . Вначале рассмотрим точку среды, расположенную далеко от стенки, так что  $\varepsilon_3(\tau) = 0$ . Уравнение (6.47) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} q_R &= 2\pi \int_0^\infty \left[ B(\tau) + \frac{(t - \tau)}{1!} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(t - \tau)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right)_\tau + \dots \right] \varepsilon_2(t - \tau) d(t - \tau) - \\ &- 2\pi \int_0^\infty \left[ B(\tau) - \frac{(\tau - t)}{1!} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_\tau + \frac{(\tau - t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right)_\tau - \dots \right] \varepsilon_2(\tau - t) d(\tau - t) = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \left[ p \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_\tau + \frac{p^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 B}{\partial t^3} \right)_\tau + \dots \right] \varepsilon_2(p) dp. \quad (6.48) \end{aligned}$$

Далее, при использовании хорошо известного соотношения

$$\frac{1}{m!} \int_0^\infty p^m \varepsilon_n(p) dp = \frac{1}{m+n} \quad (6.49)$$

уравнение (6.48) принимает вид

$$q_R = \frac{4}{3} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_\tau + O \left[ \left( \frac{\partial^3 B}{\partial t^3} \right)_\tau \right] = \frac{16}{3} \sigma T^3 L_R \frac{\partial T}{\partial y} + O \left[ \left( \frac{\partial^3 B}{\partial t^3} \right)_\tau \right], \quad (6.50)$$

где  $L_R$  есть средняя длина свободного пробега Росселанда, определяемая уравнением (5.19). Если второй член уравнения (6.50) пренебрежимо мал по сравнению с первым членом, то мы получим тот же результат, что и в разд. 8 гл. 5 для случая очень малой длины свободного пробега излучения.

Теперь рассмотрим поток излучения на стенке ( $y \approx \tau \approx 0$ ), т. е.

$$\begin{aligned} q_R(0) &= 2\pi e_w \left[ \int_0^\infty B(t) \varepsilon_2(t) dt - B(0) \right] = \\ &= \frac{8}{3} e_w \sigma T^3 L_R \frac{\partial T}{\partial y} + O \left[ \left( \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right) \right]. \quad (6.51) \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что стенка серая, так что  $e_w$  не зависит от частоты  $\nu$ . На стенке происходит скачок потока излучения, поскольку коэффициент  $\frac{8}{3}$  заменяется коэффициентом  $\frac{16}{3}$ , если  $e_w = 1$ . Поскольку этот скачок потока излучения пропорционален  $L_R$ , то им можно пренебречь, если средняя длина свободного пробега излучения пренебрежимо мала. Следовательно, условие прилипания приближенно удовлетворяется, когда средняя длина свободного пробега излучения очень мала. С другой стороны, если значение  $L_R$  непренебрежимо мало, следует

учитывать этот скачок потока излучения, полагая, что на поверхности происходит температурный скачок. Пусть  $T_0$  — температура газа у поверхности стенки ( $y=0$ ) и  $T_w$  — температура стенки. Для инженерных задач можно определить коэффициент теплоотдачи излучением  $h_R$  из следующего соотношения:

$$h_R(T_0 - T_w) = (e_w - 2) \frac{8}{3} \sigma T_0^3 L_R \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_0. \quad (6.52)$$

Этот коэффициент  $h_R$  аналогичен коэффициенту теплоотдачи в обычных задачах теплопередачи и зависит от условий на поверхности. Значение  $h_R$  должно определяться экспериментально. Когда  $L_R$  стремится к нулю,  $T_0$  стремится к  $T_w$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Wolf E., Principle of Optics, Pergamon Press, N. Y.
2. Chandrasekhar S., An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover Publications, N. Y., 1957.
3. Garden R., Calculation of Temperature Distribution in Glass Plates Undergoing Heat Treatment, *J. Am. Ceramic Soc.*, 41, 6, 200 (1958).
4. Goulard R., Fundamental Equations of Radiation Gasdynamics, Purdue Univ. School of Aero. and Eng. Scien., Rep. A and ES 62-4, 1962.
5. Goulard R., Goulard M., One Dimensional Energy Transfer in Radiant Media, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1, 81 (1960).
6. Johnson J. C., Physical Meteorology, Wiley, N. Y., 1954.
7. Kivel B., Bailey K., Tables of Radiation from High Temperature Air, AVCO Res. Lab. Research Rep. 21, 1957.
8. Kourganoff V., Basic Methods in Transfer Problem, Oxford Univ. Press, 1952.
9. Pai S. I., Introduction of the Theory of Compressible Flow, Van Nostrand, 1959; имеется русский перевод: Бай Ш и - и, Введение в теорию течения сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1961.
10. Pai S. I., Some Consideration of Radiation Magnetogasdynamics, Proc. Non-linear Problem, Univ. of Wisc. Press, 1963, p. 47.
11. Penner S. S., Quantitative Molecular Spectroscopy and Gas Emissivities, Addison Wesley, 1960.
12. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеориздат, 1935.
13. Probstein R. F., Radiation Slip., MIT Fluid Mechanics Lab. Dept. of Mech. Eng., Rep. № 63-2, 1963.
14. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Techn. Inf. Series R 630 SD 46, Space Sci. Lab. General Electric Co., Phil. Pa., 1963; Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer, Pergamon Press, 1964, pp. 319—354.
15. Tellep D. M., Edwards D. K., Radiant Energy Transfer in Gaseous Flows, Techn. Rep. Lockheed Missile and Space Div. LMSD-288139, 1960.
16. Rosseland S., Theoretical Astrophysics, Oxford Univ. Press, 1936.



## *Параметры подобия радиационной газодинамики*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В общем случае основные уравнения динамики излучающего газа являются системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Крайне трудно решить эти уравнения при заданных граничных условиях. Даже в простом случае оптически толстой среды эти интегро-дифференциальные уравнения сводятся к системе нелинейных дифференциальных уравнений (см. гл. 5, разд. 8); основные уравнения все же остаются более сложными, чем уравнения Навье — Стокса для сжимаемой неизлучающей жидкости. Нет общего метода отыскания решения таких нелинейных уравнений. Чтобы выделить существенные особенности задач движения потока в радиационной газодинамике, желательно найти основные параметры, которые характеризуют эти задачи.

Эти параметры, представленные в безразмерной форме, известны как параметры подобия, так как они определяют относительное влияние различных сил и переносов в поле течения. По этим параметрам можно судить, как отличается поток с излучением от потока без излучения. Таким образом, мы можем разделить поле течения излучающего газа на различные области и попытаться применить подходящие аппроксимации в этих областях, чтобы решить практически важные проблемы течения. Параметры подобия также полезны для корреляции экспериментальных результатов. В экспериментальных исследованиях часто случается, что испытываемая модель отличается по размерам от действительного тела, а испытываемая жидкость находится в термодинамическом состоянии, отличающемся от состояния действительной жидкости, или испытываемая жидкость отличается от жидкости, имеющейся в реальных условиях. Если мы хотим сравнить результаты испытаний с реальными условиями, мы должны знать соотношение между условиями испытания и реальными условиями. Это соотношение зависит в основном от нескольких важных для данной задачи параметров. Если мы знаем эти параметры, то легко скорректируем экспериментальные результаты.

Имеются два метода нахождения этих важнейших параметров: один известен как инспекционный анализ <sup>1)</sup>, а другой — как анализ размерностей, в частности хорошо известна  $\pi$ -теорема анализа размерностей. В разд. 2 мы кратко рассмотрим анализ размерностей и  $\pi$ -теорему, а в разд. 3 будет рассмотрена безразмерная форма основных уравнений излучающего газа с точки зрения инспекционного анализа. В последних двух разделах будут приведены важнейшие параметры радиационной газодинамики и обсуждены многие параметры приближения, основанные на оценке величины этих параметров.

## 2. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И $\pi$ -ТЕОРЕМА

Каждая физическая величина имеет некоторую размерность. Но имеется лишь несколько основных размерностей, через которые могут быть выражены размерности всех других физических величин. В радиационной газодинамике имеются четыре основные размерности: длина  $L$ , время  $t$ , масса  $m$  и температура  $T$ . Размерности всех других физических величин радиационной газодинамики можно выразить через эти четыре основные размерности.

Рассмотрим несколько примеров:

1) Скорость  $U$ . Размерность скорости

$$U = \text{Скорость} = \text{Длина/Время} = L/t. \quad (7.1)$$

2) Ускорение  $a_c$ . Размерность ускорения

$$a_c = \text{Ускорение} = \text{Скорость/Время} = L/t^2. \quad (7.2)$$

3) Сила  $F$ . Размерность силы

$$F = \text{Масса} \times \text{Ускорение} = mL/t^2. \quad (7.3)$$

4) Давление  $p$ . Размерность давления

$$p = \text{Давление} = \text{Сила/Площадь} = (mL/t^2)/L^2 = m/(Lt^2). \quad (7.4)$$

5) Постоянная Стефана — Больцмана  $a_R$  [см. уравнение (5.15)]. Размерность  $a_R$  можно определить с помощью следующего соотношения:

$$a_R = \text{Давление}/T^4 = m/(Lt^2T^4). \quad (7.5)$$

---

<sup>1)</sup> В отечественной литературе первый метод называют анализом уравнений или теорией подобия, второй — анализом размерностей или теорией размерностей. — *Прим. перев.*

6) Коэффициент диффузии излучения по Росселанду  $D_R$  [см. уравнение (5.20)]. Размерность  $D_R$  будет

$$D_R = \text{Длина} \times \text{Скорость} = L^2/t. \quad (7.6)$$

Основным принципом анализа размерностей является однородность размерностей во всех уравнениях физической задачи. Другими словами, размерность всех членов в некотором уравнении должна быть одинаковой. Основная теорема, на которой основано применение анализа размерностей для нахождения безразмерных величин, характеризующих динамическое подобие полей потока, известна как  $\pi$ -теорема Виши и Бэкингема [2]. Мы не будем обсуждать математические основы этой известной теоремы, а сформулируем теорему и приведем некоторые примеры ее применения.

$\pi$ -Теорема может быть сформулирована следующим образом.

Если имеются  $n$  величин  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , которые играют важную роль в некоторой физической задаче, и имеются  $m$  независимых основных единиц в этой системе, то полное уравнение для этой задачи может быть записано в виде функции

$$\varphi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad (7.7)$$

и конечное решение задачи — в виде функции

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0, \quad (7.8)$$

где безразмерные параметры  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$  образованы из этих величин  $Q$ . Будет всего  $n - m$  независимых безразмерных параметров, обозначенных через  $\pi$ , но выбор этих безразмерных параметров произволен. Уравнение (7.8) может быть записано и так:

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}). \quad (7.9)$$

Необходимо заметить, что сведения о природе этой функции  $f(X)$  или  $F(X)$ , естественно, могут быть получены только из экспериментов или из действительной теории рассматриваемого физического явления.

Доказательство этой теоремы можно найти в учебнике по анализу размерностей [2]. Мы исследуем простую задачу радиационной газодинамики, чтобы иллюстрировать применение  $\pi$ -теоремы. Рассмотрим поле течения за отошедшей ударной волной, в котором явления излучения играют существенную роль, а вязкость и теплопроводность пренебрежимо малы.

Основными физическими величинами в этой задаче являются следующие десять величин:

$Q_1 = L$  — длина тела в потоке;

$Q_2 = U$  — скорость в поле течения;

$Q_3 = \rho$  — плотность газа в поле течения;

$Q_4 = T$  — температура газа в поле течения;

$Q_5 = p$  — давление газа в поле течения;

$Q_6 = R$  — газовая постоянная, которая описывает свойства газа;

$Q_7 = t$  — масштаб времени поля течения;

$Q_8 = L_R = 1/(\rho K_R)$  — средняя длина свободного пробега излучения, которая характеризует теплообмен излучением;

$Q_9 = c$  — скорость света, которая является скоростью фотонов;

$Q_{10} = a_R$  — постоянная Стефана — Больцмана, которая характеризует напряжение излучения или плотность энергии излучения.

Поскольку имеются десять величин  $Q$  и четыре основные единицы, мы можем образовать шесть безразмерных параметров  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$  и  $\pi_6$ . Возьмем первые четыре величины  $Q$ , т. е.  $L, U, \rho$  и  $T$ , в качестве основных единиц. Теперь мы можем определить безразмерные параметры путем рассмотрения размерности одной из величин от  $Q_5$  до  $Q_{10}$  совместно с размерностями величин от  $Q_1$  до  $Q_4$ . Для примера рассмотрим  $a_R$ . Мы получим следующие соотношения размерностей:

	$L$	$t$	$m$	$T$
$L$	1	0	0	0
$U$	1	-1	0	0
$\rho$	-3	0	1	0
$T$	0	0	0	1
$a_R$	-1	-2	1	-4

Образуем безразмерный параметр из этих пяти величин  $Q$ , т. е.

$$\pi_1 = a_R L^{b_1} U^{b_2} \rho^{b_3} T^{b_4}, \quad (7.10)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  и  $b_4$  — постоянные, которые должны иметь такие значения, чтобы параметр  $\pi_1$  остался безразмерным, т. е.

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 + b_2 - 3b_3, \\ 2 &= -b_2, \\ -1 &= b_3, \\ 4 &= b_4. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Следовательно, получим  $b_1=0$ ,  $b_2=-2$ ,  $b_3=-1$  и  $b_4=4$ . Параметр  $\pi_1$  можно тогда записать следующим образом:

$$\pi_1 = \frac{\frac{1}{3} a_R T^4}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{\text{Давление излучения}}{\text{Динамическое давление}}. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) дает отношение давления излучения ( $\frac{1}{3} a_R T^4$ ) к динамическому давлению газа ( $\frac{1}{2} \rho U^2$ ). Числовые коэффициенты  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{2}$  использованы специально для обозначения физического содержания давления излучения и динамического давления.

Подобно этому могут быть легко получены следующие безразмерные параметры:

1) Для давления  $p$

$$\pi_2 = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2}{p} = \frac{\text{Динамическое давление}}{\text{Давление газа}}. \quad (7.13)$$

2) Для газовой постоянной  $R$

$$\pi_3 = \frac{\rho R T}{p} \text{ — фактор сжимаемости.} \quad (7.14)$$

Этот параметр относится к уравнению состояния газа. Для идеального газа он равен единице. Для реального газа он может отличаться от единицы.

3) Для времени  $t$

$$\pi_4 = \frac{tU}{L} = R_t. \quad (7.15)$$

Параметр  $R_t$  характеризует нестационарность поля течения.

4) Для средней длины свободного пробега излучения  $L_R$

$$\pi_5 = L_R/L = K_r. \quad (7.16)$$

Этот параметр тесно связан с оптической толщиной.

5) Для скорости света  $c$

$$\pi_6 = U/c = R_r. \quad (7.17)$$

Этот параметр  $R_r$  известен как релятивистский параметр.

В настоящей задаче имеются только шесть независимых параметров. Однако мы можем образовать другие безразмерные параметры путем различных комбинаций этих параметров.

Например, комбинируя уравнения (7.12) и (7.13), получим

$$R_p = \pi_1/\pi_2 = \frac{\frac{1}{3} a_R T^2}{p} = \frac{\text{Давление излучения}}{\text{Давление газа}} = \text{Число давления излучения.} \quad (7.18)$$

О значении этих параметров см. разд. 4.

### 3. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Безразмерные параметры можно также получить из основных уравнений динамики излучающего газа путем преобразования уравнений к безразмерному виду. Мы вводим следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i/L, \quad \nabla^* = L\nabla, \quad t^* = t/t_0, \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{q}/U, \\ \rho^* &= \rho/\rho_0, \quad p^* = p/(\rho_0 U^2), \quad T^* = T/T_0, \\ \tau_s^* &= \tau_s/(\mu_0 UL), \quad \tau_R^* = \tau_R/(a_R T_0^4), \\ \kappa^* &= \kappa/\kappa_0, \quad C_p^* = C_p/C_{p0}, \quad L_{Rv}^* = L_{Rv}/L_{R0}, \\ q_R^* &= q_R/(\kappa_0 T_0/L), \quad \bar{e}_m^* = \bar{e}_m/U^2, \\ I_v^* &= I_v/I_{v0}, \quad B_v^* = B_v/I_{v0}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где индекс \* обозначает безразмерные величины, а индекс 0 относится к некоторым характерным величинам;  $U$  и  $L$  — соответственно скорость и длина поля течения.

Подставляя выражения (7.19) в основные уравнения радиационной газодинамики, рассмотренные в гл. 5, разд. 2—6, получаем следующие безразмерные уравнения:

1) Уравнение состояния (5.2)

$$\gamma M_0^2 p^* = \rho^* T^*. \quad (7.20)$$

2) Уравнение неразрывности (5.3)

$$\frac{1}{R_t} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{q}^*) = 0. \quad (7.21)$$

3) Уравнение движения (5.4)

$$\rho^* \left[ \frac{1}{R_t} \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{q}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{q}^* \right] = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \cdot \tau_s^*) + \frac{3R_p}{\gamma M_0^2} (\nabla^* \cdot \tau_R^*), \quad (7.22)$$

где мы пренебрегли для простоты объемной силой  $F$ .

## 4) Уравнение энергии (5.7)

$$\rho^* \left( \frac{D\bar{e}_m^*}{Dt^*} \right) = -\nabla^* \cdot (p^* \mathbf{q}^*) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^* \cdot (\mathbf{q}^* \cdot \tau_s^*) + \frac{3R_p}{\gamma M_0^2} \nabla^* \cdot (\mathbf{q}^* \cdot \tau_R^*) + \\ + \frac{1}{\text{Pr Re} (\gamma - 1) M_0^2} [\nabla^* \cdot (\kappa^* \nabla^* T^*) + \nabla^* \cdot \mathbf{q}_R^*], \quad (7.23)$$

где мы пренебрегли для простоты энергией источников.

## 5) Уравнение переноса излучения (5.10)

$$\frac{R_r}{R_t} \frac{\partial I_v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial I_v^*}{\partial s^*} = \frac{1}{L_{Rv}^*} (B_v^* - I_v^*). \quad (7.24)$$

Из безразмерных уравнений (7.20) — (7.24) мы получаем следующие безразмерные параметры:

1) Отношение удельных теплоемкостей  $\gamma$ 

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\text{Удельная теплоемкость при постоянном давлении}}{\text{Удельная теплоемкость при постоянном объеме}}. \quad (7.25)$$

2) Временной параметр  $R_t$ <sup>1)</sup>

$$R_t = \frac{U t_0}{L}. \quad (7.26)$$

3) Число Маха  $M_0$ 

$$M_0 = \frac{U}{(\gamma R T_0)^{1/2}}. \quad (7.27)$$

4) Число Рейнольдса  $\text{Re}$ 

$$\text{Re} = \frac{UL\rho_0}{\mu_0} = \frac{UL}{\nu_g}, \quad (7.28)$$

где  $\nu_g = \mu_0/\rho_0$  — коэффициент кинематической вязкости.

5) Число Прандтля  $\text{Pr}$ 

$$\text{Pr} = \frac{C_{p0} t_0}{\kappa_0}. \quad (7.29)$$

6) Число давления излучения  $R_p$ 

$$R_p = \frac{a_R T_0^4}{3p_0} = \frac{\text{Давление излучения}}{\text{Давление газа}}. \quad (7.30)$$

## 7) Релятивистский параметр

$$R_r = U/c. \quad (7.31)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе чаще употребляется название «критерий гомохронности». — *Прим. перев.*

8) Радиационное число Кнудсена

$$L_R^* = L_R/L = K_r. \quad (7.32)$$

Сравнивая уравнения (7.12) — (7.18) с уравнениями (7.25) — (7.32), мы видим, что многие безразмерные параметры совпадают. Таким образом, имеются два пути нахождения этих безразмерных параметров, т. е. анализ размерностей (разд. 2) и анализ уравнений (разд. 3). Следует отметить, что эти безразмерные параметры не единственные. Всегда можно скомбинировать несколько безразмерных параметров в новые, как показано в разд. 4.

#### 4. ВАЖНЕЙШИЕ ПАРАМЕТРЫ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Каждый из безразмерных параметров имеет свое значение и представляет вид динамического или кинематического подобия, при котором отношение двух физических величин, таких, как силы, остается постоянным при постоянной величине этого безразмерного параметра. Интересно установить физический смысл этих параметров. При анализе проблем течения в радиационной газодинамике в различных диапазонах значений этих параметров могут быть сделаны соответствующие аппроксимации, как мы это покажем в разд. 5.

Безразмерные параметры радиационной газодинамики можно разделить на две группы: одна группа состоит из параметров обычной газодинамики и другая группа — из параметров, которые по существу обусловлены эффектами излучения. Мы исследуем эти параметры в соответствии с делением на следующие группы.

##### А. Безразмерные параметры обычной газодинамики

Наиболее важными безразмерными параметрами обычной газодинамики являются следующие:

1. Временной параметр  $R_t$ .

$$R_t = \frac{Ut_0}{L}. \quad (7.26)$$

Этот параметр характеризует масштаб времени в задаче течения по отношению к скорости течения и размеру поля течения. Величину  $L/U$  можно рассматривать как характерное время поля течения. В задаче установившегося течения величина  $R_t$  равна бесконечности, так что нестационарный член  $\partial Q/\partial t$  равен нулю. Однако для конвективных членов величина



$R_i$  должна быть принята равной единице. В общем случае мы можем принять, что величина  $R_i$  в обычной газодинамике имеет порядок единицы. Только в случае высокочастотных явлений, таких, как явление флаттера или высокочастотное волновое движение, величина  $R_i$  может быть очень маленькой.

**2. Отношение удельных теплоемкостей  $\gamma$ .** Этот параметр, определяемый уравнением (7.25), является мерой относительной сложности молекул газа, так как удельная теплоемкость газа тесно связана со строением его молекул. Точное выражение удельной теплоемкости через переменные состояния газа может быть получено на основе статистической механики. Однако упрощенную формулу для  $\gamma$  можно вывести с помощью упрощенной кинетической теории газов.

Если через  $n_1$  обозначить число степеней свободы молекулы газа, то

$$\gamma = \frac{n_1 + 2}{n_1}. \quad (7.33)$$

Для одноатомных газов  $n_1 = 3$  и  $\gamma = 5/3$ , а для двухатомных газов только с поступательной и вращательной энергиями  $n_1 = 5$  и  $\gamma = 7/5$ .

### 3. Число Маха $M$ .

$$M = \frac{U}{a} = \frac{\text{Скорость потока}}{\text{Скорость звука}}, \quad (7.27a)$$

где скорость звука  $a = (\gamma RT)^{1/2}$ . Начиная с этого момента, для простоты мы опускаем индекс 0. Без индекса 0 мы можем также рассматривать значение локальной величины переменной вместо характерной ее величины. Во многих случаях интересно оценить разницу величин безразмерного параметра, основанного на локальных значениях переменных, и безразмерного параметра, основанного на характерных значениях переменных. Число Маха является мерой сжимаемости газа, обусловленной высокой скоростью течения. Легко показать, что отношение изменения плотности газа к изменению скорости в первом приближении пропорционально квадрату числа Маха потока. Следовательно, при очень малых значениях числа Маха изменение плотности, т. е. эффект сжимаемости, обусловленное изменением скорости потока, пренебрежимо мало и газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При больших числах Маха эффект сжимаемости имеет важное значение. При  $M < 1$  поток называют дозвуковым, а при  $M > 1$  — сверхзвуковым. Поле течения дозвукового потока сильно отличается от поля течения сверхзвукового потока. Например, ударные волны

образуются только в сверхзвуковом поле течения при установившемся режиме течения, но никогда не существуют в дозвуковом поле течения. Когда число Маха  $M$  имеет порядок единицы, то поток называют трансзвуковым; когда число Маха  $M$  значительно больше единицы, поток будет гиперзвуковым. Многие закономерности для поля течения в области трансзвукового и гиперзвукового потоков отличаются от закономерностей для обычных дозвуковых и сверхзвуковых потоков. Следовательно, число Маха является одним из важнейших параметров газодинамики, а также и радиационной газодинамики. Вследствие изменения локального числа Маха в поле течения поток может быть дозвуковым в одной части поля течения и сверхзвуковым в другой его части с трансзвуковым полем течения между ними. Например, если мы рассматриваем тело в однородном потоке, соответствующее число Маха может быть определено через переменные однородного потока, т. е.  $M_0 = U/a_0$ . Величина  $M_0$  может быть больше или меньше единицы. Для данной величины  $M_0$  локальное число Маха  $M = q/a$  может существенно отличаться от  $M_0$ .

Как будет показано в гл. 8, скорость звука в газе увеличивается благодаря влиянию теплового излучения. При наличии излучения мы имеем эффективную скорость звука и соответствующее эффективное число Маха, которое определяется отношением скорости потока к эффективной скорости звука, полученной с учетом влияния излучения.

#### 4. Число Рейнольдса $Re$ .

$$Re = \frac{UL\rho}{\mu} = \frac{UL}{\nu_g} = \frac{\text{Инерционная сила}}{\text{Сила вязкости}}. \quad (7.28a)$$

Это число является важнейшим параметром динамики вязкой жидкости и представляет собой отношение силы инерции к силе вязкости. Когда число Рейнольдса мало, преобладают силы вязкости, и влияние вязкости имеет важное значение для всего поля течения. Когда число Рейнольдса велико, преобладают силы инерции, и влияние вязкости имеет важное значение только в узкой области вблизи границы твердого тела или другой ограниченной области, которая известна как область пограничного слоя, или область перехода. За пределами переходной области, или области пограничного слоя, поток можно рассматривать как невязкий. Если число Рейнольдса крайне велико, то течение становится турбулентным.

#### 5. Число Прандтля $Pr$ .

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\kappa} = \frac{\nu_g}{(\kappa/C_p \rho)} = \frac{\text{Кинематическая вязкость}}{\text{Температуропроводность}}. \quad (7.29a)$$

Величина коэффициента кинематической вязкости  $\nu_g = \mu/\rho$  характеризует влияние вязкости газа или жидкости. При сохранении неизменными других переменных чем меньше величина кинематической вязкости, тем уже область, в которой будет проявляться влияние вязкости. Эта область известна как пограничный слой поля скоростей, когда кинематическая вязкость очень мала. Толщина пограничного слоя поля скоростей ламинарного потока пропорциональна корню квадратному из кинематической вязкости  $\sqrt{\nu_g}$ . Таким образом, коэффициент кинематической вязкости  $\nu_g$  отражает процесс диффузии количества движения вследствие эффекта вязкости. Величина  $\kappa/C_{p\rho}$  отражает диффузию тепла вследствие теплопроводности. Чем меньше величина теплопроводности  $\kappa/C_{p\rho}$ , тем уже область, в которой перенос тепла определяется теплопроводностью и которая известна как тепловой пограничный слой, когда коэффициент теплопроводности  $\kappa/C_{p\rho}$  очень мал. Таким образом, толщина теплового пограничного слоя пропорциональна корню квадратному из теплопроводности  $(\kappa/C_{p\rho})^{1/2}$ . Число Прандтля  $Pr$  характеризует относительную важность теплопроводности и вязкости жидкости. В качестве первого приближения число Прандтля равно квадрату отношения толщины гидродинамического слоя к толщине теплового пограничного слоя. Число Прандтля зависит только от физических свойств жидкости и не зависит от условий течения, таких, как скорость и размеры поля течения.

В радиационной газодинамике теплопроводность газа зависит как от теплопроводности, так и от теплового излучения. В некоторых случаях, которые мы рассмотрим в гл. 9, можно определить эффективную теплопроводность, которая включает эффекты теплопроводности и теплового излучения. Мы можем в этом случае определить эффективное число Прандтля. Очевидно, что тепловое излучение будет увеличивать эффективную теплопроводность и снижать эффективное число Прандтля. В результате влияние теплового излучения приведет к возрастанию толщины теплового пограничного слоя. Мы обсудим этот результат более подробно в гл. 9.

## 6. Число Шмидта $Sc$ .

$$Sc = \frac{\nu_g}{\mathfrak{D}}, \quad (7.34)$$

где  $\mathfrak{D}$  — коэффициент диффузии жидкости. Во многих задачах газодинамики при высокой температуре мы должны рассматривать газ как смесь различных компонентов. Явления диффузии между этими компонентами очень важны для анализа поля течения смеси газов. Эти явления диффузии можно характери-

зовать различными коэффициентами диффузии различных компонентов смеси или соответствующими числами Шмидта этих компонентов.

**7. Число Нуссельта  $Nu$ .** Это безразмерное число отличается от представленных выше безразмерных параметров тем, что оно является безразмерной формой выражения теплообмена единицы площади поверхности в единицу времени. Следовательно, оно выражает результирующий эффект поля течения вместо частного, выражаемого другими параметрами.

Пусть  $q_c(x)$  — количество тепла, передаваемого через единицу площади поверхности в единицу времени. Мы можем определить коэффициент теплоотдачи  $h_c(x)$ , который иногда называют пленочным коэффициентом, следующим образом:

$$h_c(x) = \frac{q_c(x)}{T_w - T_{wi}}, \quad (7.35)$$

где как  $q_c(x)$ , так и  $h_c(x)$  являются в общем случае функциями положения точки  $x$  вдоль поверхности;  $T_w$  — температура поверхности или стенки твердого тела и  $T_{wi}$  — температура поверхности твердого тела при отсутствии теплоотдачи. Некоторые авторы используют характерную температуру  $T_f$  потока, например температуру набегающего потока, вместо  $T_{wi}$  в уравнении (7.35). Число Нуссельта определяется зависимостью

$$Nu = \frac{h_c(x) L}{\kappa}. \quad (7.36)$$

Его можно рассматривать как отношение полного теплового потока к тепловому потоку проводимостью на стенке. В радиационной газодинамике удельный тепловой поток  $q_c(x)$  зависит как от теплопроводности, так и от теплового излучения. Но число Нуссельта можно использовать как выражение для полного переноса тепла.

## **Б. Безразмерные параметры радиационной газодинамики**

Имеется несколько параметров, которые связаны в основном с эффектами теплового излучения и которые приведены ниже.

### **8. Релятивистский параметр $R_r$ .**

$$R_r = \frac{U}{c} = \frac{\text{Скорость потока}}{\text{Скорость света}}. \quad (7.17)$$

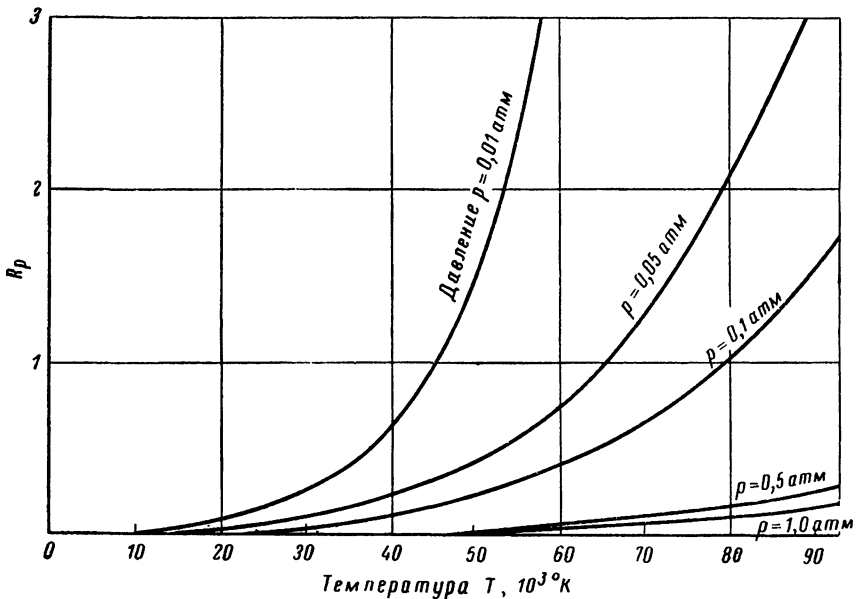
Для обычных частиц газа релятивистский параметр обычно очень мал. Следовательно, релятивистские эффекты при течении частиц газа пренебрежимо малы. Однако эффект теплового излучения связан с движением фотонов, которые движутся

со скоростью света  $c$ . В результате релятивистский параметр играет важную роль в переносе тепла излучением.

### 9. Радиационное число Кнудсена $K_r$ <sup>1)</sup>.

$$K_r = L_R^* = \frac{L_R}{L} = \frac{\text{Средняя длина свободного пробега излучения}}{\text{Характерная длина}}. \quad (7.16a)$$

Это число характеризует расстояние, пройденное фотонами, прежде чем они поглотятся молекулами газа. Когда радиационное число Кнудсена очень мало, мы говорим, что среда оптически толстая. Когда радиационное число Кнудсена очень велико, мы говорим, что среда оптически тонкая.



Фиг. 7.1. Зависимость числа давления излучения  $R_p$  от температуры  $T$  и давления  $p$ .

### 10. Число давления излучения $R_p$ .

$$R_p = \frac{a_R T^4}{3p} = \frac{\text{Давление излучения}}{\text{Давление газа}}. \quad (7.18a)$$

Это число в обычной газодинамике, как правило, очень мало. Следовательно, в обычной газодинамике эффекты излу-

<sup>1)</sup> В отечественной литературе используется обратная величина числа Кнудсена, называемая критерием Бугера. — Прим. перев.

чения пренебрежимо малы. Однако при очень высокой температуре и низком давлении это число будет большим. Когда величиной  $R_p$  нельзя пренебречь, мы должны рассматривать влияние давления излучения и объемной плотности энергии излучения. Даже когда  $R_p$  мало, тепловой поток излучения может не быть пренебрежимо малым, как это будет показано в следующем разделе.

На фиг. 7.1 приведены величины  $R_p$  при различных давлениях и температуре. Обычно  $R_p$  очень мало, за исключением очень высоких температур — свыше  $40\,000^\circ\text{K}$  — и очень низких давлений.

## 5. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПАРАМЕТРАХ

Приведенные десять безразмерных параметров являются наиболее важными в радиационной газодинамике. Из различных комбинаций этих десяти параметров можно получить другие важные параметры. Эти новые параметры могут быть более подходящими для частных задач, чем описанные в последнем разделе. Некоторые из этих новых параметров приведены ниже:

### 1. Число Пекле $Pe$ .

$$Pe = \frac{UL}{(\kappa/C_p\rho)} = Pr Re. \quad (7.37)$$

Число Пекле играет ту же роль в тепловом пограничном слое, что и число Рейнольдса в гидродинамическом пограничном слое. В уравнении (7.23) число Пекле содержат члены уравнения, учитывающие перенос тепла, в то время как число Рейнольдса содержат члены уравнения, учитывающие перенос количества движения.

### 2. Число Стантона $St$ .

$$St = \frac{h(x)}{UC_p\rho} = \frac{Nu}{Pe}. \quad (7.38)$$

Число Стантона — это другой способ выражения теплового потока, который можно рассматривать как отношение полного теплового потока к типично конвективному тепловому потоку.

### 3. Число Кнудсена $K_f$ .

$$K_f = \frac{\text{Средняя длина свободного пробега частиц газа}}{\text{Характерная длина}} = \frac{L_f}{L} = 1,255 \sqrt{\gamma} \frac{M}{Re}, \quad (7.39)$$

где средняя длина свободного пробега частиц газа  $L_f$  может быть принята следующей:

$$L_f = 1,255 \sqrt{\gamma} \frac{v_g}{a}. \quad (7.40)$$

В большинстве газодинамических задач, рассмотренных в этой книге, мы считаем, что число Кнудсена очень мало, так что газ можно считать непрерывной средой. Если же число Кнудсена не мало, то нужно принимать во внимание дискретность газа. При больших числах Кнудсена мы имеем течение со скольжением, свободномолекулярное течение и другие переходные течения. Мы рассмотрим некоторые из этих течений в гл. 10. Уравнение (7.39) для числа Кнудсена подобно уравнению (7.16а) для радиационного числа Кнудсена. Имеется аналогия между газодинамическими членами и радиационными членами, соответствующими значениям этих двух чисел Кнудсена. При малых значениях числа Кнудсена члены, характеризующие перенос излучения, так же как и члены, характеризующие газодинамический перенос, например вязкость и теплопроводность, могут быть выражены через градиенты некоторых локальных переменных. Если числа Кнудсена велики, то как радиационные, так и газодинамические члены должны быть выражены в интегральной или в другой сложной форме, например в форме некоторых типов дифференциальных уравнений. Мы обсудим их в следующих главах.

#### 4. Число потока излучения $R_F$ <sup>1)</sup>.

$$R_F = \frac{\text{Тепловой поток излучения}}{\text{Тепловой поток за счет проводимости}}. \quad (7.41)$$

Так как точное выражение теплового потока излучения зависит от радиационного числа Кнудсена, то выражение для числа потока излучения также зависит от этого числа. В случае оптически толстой среды, т. е. при малой величине радиационного числа Кнудсена  $K_r$ , тепловой поток излучения определяется уравнением (5.21). Соответствующее число потока излучения может быть записано в следующем виде:

$$R_{F1} = \frac{\kappa_R}{\kappa} = \frac{4D_R a_R T^3}{\kappa} = 4 \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \text{Pr Re } L_R^* R_p / R_r. \quad (7.42)$$

В случае оптически тонкого газа тепловой поток излучения определяется уравнением (5.37) или (6.45). Соответствующее число потока излучения тогда будет

$$R_{F2} = \frac{c a_R T^4 L^2}{L_R \kappa T} = 3 \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \text{Pr Re } R_p / (L_R^* R_r). \quad (7.43)$$

Основная разница между  $R_{F1}$  и  $R_{F2}$  связана с радиационным числом Кнудсена  $L_R^*$ . При очень маленькой средней длине

<sup>1)</sup> В отечественной литературе этот безразмерный параметр иногда называют критерием Старка. — *Прим. перев.*

свободного пробега излучения,  $L_R^* \ll 1$ , число потока излучения  $R_{F1}$  пропорционально радиационному числу Кнудсена  $L_R^*$ , в то время как при больших значениях радиационного числа Кнудсена,  $L_R^* \gg 1$ , число потока излучения  $R_{F2}$  обратно пропорционально  $L_R^*$ . Следовательно, при очень больших  $L_R^*$  и при очень малых  $L_R^*$  тепловой поток излучения стремится к нулю.

Мы можем также определить число потока излучения как отношение теплового потока излучения к конвективному тепловому потоку<sup>1)</sup>, т. е.

$$R'_F = \frac{\text{Тепловой поток излучения}}{\text{Конвективный тепловой поток}} = R_F \frac{T}{C_{p\rho UTL}} = \frac{R_F}{\text{Pr Re}}. \quad (7.44)$$

Сравнивая уравнение (7.44) с уравнениями (7.42) и (7.43), мы получим для случая оптически толстой среды

$$R'_{F1} = \frac{\kappa_R T}{C_{p\rho UTL}} = 4 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) L_R^* R_p / R_r \quad (7.45)$$

и для случая оптически тонкой среды

$$R'_{F2} = \frac{ca_R T^4 L^2}{L_R C_{p\rho UTL}} = 3 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) R_p / (L_R^* R_r). \quad (7.46)$$

Интересно заметить, что все числа потоков излучения прямо пропорциональны числу давления излучения  $R_p$  и обратно пропорциональны релятивистскому параметру  $R_r$ . Обычно как  $R_p$ , так и  $R_r$  малы. Следовательно, число потока излучения может не быть малым. Практически во многих инженерных задачах, как это видно из табл. 1 и 2 гл. 1, число давления излучения  $R_p$  так мало, что давление излучения и объемная плотность энергии излучения пренебрежимо малы, но число потока излучения не мало и, следовательно, в основных уравнениях газодинамики необходимо учитывать тепловой поток излучения.

В числе потока излучения лишь средняя длина свободного пробега излучения  $L_R$  или средний коэффициент поглощения  $\rho \kappa_R = 1/L_R$  — единственное новое физическое свойство среды, которое определяет перенос тепла излучением. Это свойство выражает новое диффузионное явление в среде в дополнение к диффузии количества движения за счет вязкости и диффузии тепла за счет проводимости.

Как мы увидим позже, много новых и интересных явлений можно ввести с помощью диффузии излучения. Величина средней длины свободного пробега излучения  $L_R$  должна быть

<sup>1)</sup> В отечественной литературе величину, обратную этому безразмерному параметру, называют критерием Больцмана. — *Прим. перев.*



определена либо экспериментально, либо с помощью микроскопической трактовки, которая будет обсуждаться в гл. 11.

В общем случае средняя длина свободного пробега излучения  $L_{R\nu}$  зависит от частоты  $\nu$  и переменных состояния, таких, как температура  $T$  и плотность  $\rho$ . В инженерных задачах целесообразно использовать некоторые простые выражения для средней длины свободного пробега излучения, осредненной по всему спектру частот. Широко используются следующие упрощения:

1) Для переменной по частоте средней длины свободного пробега излучения используют осредненные по всему спектру величины. Наиболее известны два осредненных значения средней длины свободного пробега излучения:

а. Средний коэффициент поглощения по Росселанду  $K_R$ , определяемый следующей зависимостью:

$$K_R = \frac{1}{\rho L_R} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{1}{k'_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (7.47)$$

Как видно из уравнения (5.18), эта средняя величина соответствует случаю оптически толстого слоя.

б. Средний коэффициент поглощения по Планку  $K_P$

$$K_P = \frac{1}{\rho L_{RP}} = \frac{\int_0^{\infty} k'_\nu B_\nu d\nu}{B(T)}. \quad (7.48)$$

Как видно из уравнения (5.36), эта средняя величина соответствует случаю оптически тонкого слоя или промежуточному случаю, когда радиационные члены уравнений описываются интегральным выражением.

Следует отметить, что средняя длина свободного пробега излучения сама по себе не определяет, является ли среда оптически толстой или оптически тонкой. Мы должны сравнить среднюю длину свободного пробега излучения с соответствующей длиной  $L$ , которая характеризует исследуемое поле течения, чтобы судить о том, можно ли считать среду оптически тонкой или оптически толстой. Другими словами, оптическая толщина, определяемая уравнением (3.3) или подобным ему выражением, характеризует оптические свойства среды. В действительности для данного состояния среды средняя длина свободного пробега излучения по Планку  $L_{RP}$  обычно меньше, чем

средняя длина свободного пробега излучения по Росселанду  $L_R$ . Скала и Сэмпсон [5] рекомендовали формулу  $L_R = 8,3 L_{RP}$  в качестве первого приближения для высокотемпературного воздуха вплоть до температуры  $20\,000^\circ\text{К}$ .

2) После того как мы приняли осредненное значение средней длины свободного пробега излучения по всему спектру, нам нужно найти некоторые простые формулы, учитывающие изменение средней длины свободного пробега излучения в зависимости от температуры и плотности или давления. Так как коэффициент поглощения возрастает с увеличением плотности, средняя длина свободного пробега излучения уменьшается с возрастанием плотности (см. гл. 11, фиг. 11.12 или 11.14). Гораздо сложнее изменение средней длины свободного пробега излучения с изменением температуры. При низкой температуре, скажем  $T < 10\,000^\circ\text{К}$ , средняя длина свободного пробега излучения уменьшается с возрастанием температуры; при высокой температуре, скажем  $T > 100\,000^\circ\text{К}$ , средняя длина свободного пробега возрастает с ростом температуры; в области промежуточных температур имеется минимум, зависящий от плотности и от свойств среды. Если диапазон изменения температуры в поле течения не слишком велик, то хорошей аппроксимацией изменения осредненной величины средней длины свободного пробега излучения в зависимости от изменения переменных состояния может служить степенной закон, т. е.

$$\frac{L_R}{L_{R0}} = \frac{L_{RP}}{L_{RP0}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{m_1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{m_2}, \quad (7.49)$$

где индекс 0 обозначает величины при некоторых характерных условиях. Показатели  $m_1$  и  $m_2$  должны быть выбраны таким образом, чтобы формула (7.49) давала наилучшее соответствие с экспериментальными данными, характеризующими поглощательные свойства в рассматриваемом диапазоне температур. Величина  $m_2$  заключена между 1 и 2, в то время как величина  $m_1$  может быть положительной в диапазоне низких температур и отрицательной в диапазоне высоких температур. Для воздуха в диапазоне температур от  $7000$  до  $12\,000^\circ\text{К}$  можно использовать следующие значения (см. фиг. 5.1):

$$m_1 = 4,4, \quad m_2 = 1, \quad \rho_0 = 1,23 \text{ г/см}^3, \quad T_0 = 10\,000^\circ\text{К}, \\ L_{RP0} = 0,5 \text{ м.}$$

Для более высоких температур в окрестности  $20\,000^\circ\text{К}$   $m_1 = 2,5$  и  $m_2 = 1$  дают лучшие результаты. При очень высокой температуре в некоторых астрофизических задачах нужно использовать  $m_1 = -7/2$  и  $m_2 = 2$ .

Если мы рассматриваем широкий диапазон изменения температуры, включающий минимальную величину средней длины свободного пробега излучения, то можно использовать следующую формулу:

$$\frac{L_{RP0}}{L_{RP}} = \frac{L_{R0}}{L_R} = \frac{L_{RP10}}{L_{RP1}} + \frac{L_{RP20}}{L_{RP2}}, \quad (7.50)$$

где  $L_{RP1}$  — средняя длина свободного пробега излучения, определяемая степенным законом (7.49), который дает хорошие результаты для области низкой температуры, где показатель  $m_1$  положителен, а  $L_{RP2}$  — соответствующая величина для области высокой температуры, где показатель  $m_1$  отрицателен.

Некоторые авторы выражают осредненное значение средней длины свободного пробега излучения в виде функции от температуры и давления. Например, Скала и Сэмпсон [5] предлагают следующие формулы для средней длины свободного пробега излучения по Росселанду для воздуха:

а) для линейного представления

$$\rho K_R = \frac{1}{L_R} = 4,86 \cdot 10^{-7} p^{1,31} \exp(4,56 \cdot 10^{-4} T), \quad (7.51)$$

б) для квадратичного представления

$$\rho K_R = \frac{1}{L_R} = 4,52 \cdot 10^{-7} p^{1,31} \exp(5,18 \cdot 10^{-4} T - 7,13 \cdot 10^{-9} T^2), \quad (7.52)$$

где средняя длина свободного пробега излучения  $L_R$  выражена в сантиметрах, давление  $p$  — в атмосферах и температура  $T$  — в градусах Кельвина. Уравнение (7.51) соответствует уравнению (7.49) с  $m_1=4,4$ , в то время как уравнение (7.52) соответствует уравнению (7.50).

Все перечисленные важнейшие параметры играют неодинаковую роль в конкретной задаче. В некоторых задачах мы можем не учитывать некоторые из этих параметров. Например, в области за пределами пограничного слоя влияние числа Рейнольдса пренебрежимо мало. В условиях, приведенных в табл. 1 и 2 гл. 1, при температуре порядка  $10\,000^\circ\text{K}$  число давления излучения  $R_p$  пренебрежимо мало, в то время как число потока излучения имеет порядок единицы или выше. В этих условиях напряжение излучения и плотность энергии излучения пренебрежимо малы, чего нельзя сказать о тепловом потоке излучения.

В различных областях изменения величин этих параметров можно упростить основные уравнения радиационной газодинамики, как это будет сделано в следующих двух главах.

Итак, мы рассмотрели по существу параметры для случаев, когда важны только эффекты излучения и обычные газодинамические эффекты. В условиях очень высокой температуры могут иметь существенное значение и некоторые другие физические явления в задачах течения. Например, при очень высокой температуре газ будет ионизован. В этом случае важную роль в поле течения будут играть электромагнитные поля. Кроме параметров, рассмотренных выше, мы должны также рассмотреть параметры, обусловленные электромагнитными переменными, такими, как напряженность электрического поля, напряженность магнитного поля и электропроводность. Мы рассмотрим некоторые из этих параметров в следующих двух главах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Armstrong B. H., Sokoloff J., Nicholls R. W., Holland D. H., Meyeroff R. E., Radiative Properties of High Temperature Air, *Journ. Qual. Spec. Rad. Transfer*, vol. 1, Pergamon Press Ltd., 1961, p. 143.
2. Bridgeman P. W., Dimensional Analysis, Yale Univ. Press, 2-nd. ed., 1931.
3. Goulard R., Similarity Parameters in Radiation Gasdynamics, Purdue Univ. School of Aero and Eng. Sci., Report A and ES 62-8, 1962.
4. Kivel B., Bailey K., Tables of Radiation from High Temperature Air, AVCO Research Report 21, Dec. 1957.
5. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Techn. Inf. Ser R 63-SD 46, Space Sci. Lab. General Electric Co., Phil. Pa., 1963.
6. Traugott S. C., Shock Structure in a Radiating Heat Conducting and Viscous Gas, Res. Report RR 57, Martin Co., Baltimore, Md., 1964.
7. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.

## *Волны и ударные волны в радиационной газодинамике*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы рассмотреть влияние теплового излучения на поле течения, изучим движение волн бесконечно малой амплитуды в излучающем газе. Изучение такого волнового движения позволяет выяснить многие существенные особенности динамики излучающего газа. В разд. 2 мы рассмотрим движение волн бесконечно малой амплитуды в оптически толстой среде при очень высоких температурах, когда газ находится в состоянии плазмы. Волновое движение будет исследовано с учетом влияния как теплового излучения, так и электромагнитных сил. В разд. 3 будет рассмотрено волновое движение излучающего газа с конечной длиной свободного пробега излучения. Этот случай не столь хорошо исследован, как случай оптически толстой среды. Однако мы обсудим некоторые существенные особенности и этого общего случая.

Поскольку эффекты излучения имеют наибольшее значение при очень высоких скоростях течения, когда обычно образуются ударные волны, явление ударных волн — одно из важнейших в радиационной газодинамике. В следующих четырех разделах рассматриваются ударные волны в излучающем газе. Прежде всего будут обобщены применительно к радиационной газодинамике хорошо известные соотношения Ренкина — Гюгонио. Затем будет исследовано влияние теплового излучения на структуру ударной волны. Наконец, мы рассмотрим течение за ударными волнами в излучающем газе.

### 2. ВОЛНА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим газ при очень высокой температуре, который ионизован и излучает. Предположим, что газ является достаточно непрозрачным, так что излучение «заперто» в нем и находится в равновесии с плазмой. При этом оказываются справедливыми основные уравнения радиационной газодинамики для случая малой длины свободного пробега излучения (разд. 8 гл. 5). Поскольку газ ионизован, следует учитывать действие электромагнитных сил. Эти электромагнитные силы определяются электромагнитными полями, которые описываются

уравнениями Максвелла. В дополнение к газодинамическим переменным  $\mathbf{q}$ ,  $\rho$ ,  $\rho$  и  $T$  появляются также электромагнитные переменные: напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , плотность электрического тока  $\mathbf{J}$  и избыточный электрический заряд  $\rho_e$ . Эти электромагнитные переменные связаны следующими уравнениями [9].

Уравнения Максвелла для электромагнитных полей

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mu_e \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (8.2)$$

где  $\mu_e$  — магнитная проницаемость и  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

Обобщенный закон Ома

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{q}, \quad (8.3)$$

где  $\sigma_e$  — электропроводность газа и  $\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H}$  — магнитная индукция.

Уравнение сохранения электрического заряда имеет вид

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (8.4)$$

С учетом электромагнитных переменных видоизменяются уравнения (5.23) радиационной газодинамики.

1) В уравнении (5.23в) появляется электромагнитная сила

$$\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (8.5)$$

2) В уравнении (5.23г) появляется поток  $Q$  электромагнитной энергии

$$Q = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.6)$$

Теперь предположим, что первоначально плазма находится в состоянии покоя с давлением  $p_0$ , температурой  $T_0$  и плотностью  $\rho_0$  и что она подвергается воздействию внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = iH_x + jH_y + k0$ , где  $i$ ,  $j$  и  $k$  — единичные векторы в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Составляющие магнитного поля  $H_x$  и  $H_y$  постоянны. Электрический ток отсутствует так же, как и избыточный электрический заряд и внешнее электрическое поле. На плазму накладываются малые возмущения, так что результирующее возмущенное движение опи-

сывается следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}
 u &= u(x, t), \quad v = v(x, t), \quad w = w(x, t), \\
 p &= p_0 + p'(x, t), \quad T = T_0 + T'(x, t), \\
 \rho &= \rho_0 + \rho'(x, t), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t), \\
 \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(x, t), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(x, t), \\
 \rho_e &= \rho_e(x, t),
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — соответственно  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компоненты возмущенной скорости;  $p'$ ,  $\rho'$  и  $T'$  — соответственно возмущенные давление, плотность и температура и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $\rho_e$  — соответственно возмущенные напряженность электрического поля, напряженность магнитного поля, плотность электрического тока и избыточный электрический заряд. Мы предполагаем, что все возмущенные величины малы, так что членами второго и высших порядков этих величин можно пренебречь. Для простоты предположим далее, что возмущенные величины являются функциями только одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ . Таким образом, будем рассматривать только распространение волн в направлении оси  $x$ .

Подставляя выражения (8.7) в основные уравнения радиационной магнитогазодинамики, т. е. в уравнения (5.23) и (8.1) — (8.6), и пренебрегая членами высших порядков возмущенных величин, получим следующие линейные уравнения волнового движения в радиационной магнитогазодинамике:

1) Уравнения Максвелла для электромагнитных полей (8.1) и (8.2)

$$\frac{\partial \mu_e h_x}{\partial t} = 0, \tag{8.8a}$$

$$\frac{\partial \mu_e h_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{8.8б}$$

$$\frac{\partial \mu_e h_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{8.8в}$$

$$J_x + \frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial t} = 0, \tag{8.8г}$$

$$J_y + \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial t} = -\frac{\partial h_z}{\partial x}, \tag{8.8д}$$

$$J_z + \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial t} = \frac{\partial h_y}{\partial x}, \tag{8.8е}$$

где индексы  $x$ ,  $y$  и  $z$  относятся к соответствующим компонентам вектора.

2) Обобщенный закон Ома (8.3)

$$J_x = \sigma_e (E_x - \mu_e \omega H_y), \quad (8.8\text{ж})$$

$$J_y = \sigma_e (E_y + \mu_e \omega H_x), \quad (8.8\text{з})$$

$$J_z = \sigma_e [E_z + \mu_e (u H_y - v H_x)]. \quad (8.8\text{и})$$

3) Уравнение сохранения электрического заряда (8.4)

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0. \quad (8.8\text{к})$$

4) Уравнение состояния (5.23а)

$$\frac{p'}{\rho_0} = \frac{p'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}. \quad (8.8\text{л})$$

5) Уравнение неразрывности (5.23б)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8.8\text{м})$$

6) Уравнения движения (5.23в) с учетом (8.5)

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + 4RR_p \rho_0 \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_e J_z H_y, \quad (8.8\text{н})$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu_e J_z H_x, \quad (8.8\text{о})$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_e (J_x H_y - J_y H_x), \quad (8.8\text{п})$$

где  $R_p$  — число давления излучения, определяемое по параметрам в невозмущенном состоянии, т. е.  $R_p = a_R T_0^3 / 3R\rho_0$ . Коэффициент вязкости  $\mu$  соответствует температуре  $T_0$ .

7) Уравнение энергии (5.23г) с учетом (8.6)

$$C_p^* \rho_0 \frac{\partial T'}{\partial t} - 4RR_p T_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + K^* \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}, \quad (8.8\text{р})$$

где

$$C_p^* = C_p + 12RR_p \quad (8.9)$$

— эффективная удельная теплоемкость при постоянном давлении с учетом влияния излучения,

$$K^* = \kappa + 12RR_p \rho_0 D_R = \kappa + \kappa_R \quad (8.10)$$

— эффективный коэффициент теплопроводности с учетом влияния излучения. Второй член левой части уравнения (8.8р) обусловлен изменением плотности энергии излучения на единицу массы  $E_R/\rho$  и работой давления излучения.



Исследуя линеаризованные уравнения (8.8), замечаем, что величина  $h_x$  не зависит от всех других величин и определяется уравнением (8.8а). Поскольку дивергенция  $\mathbf{h}$  равна нулю,  $h_x$  должна быть постоянной величиной и может быть принята равной нулю.

Остальные возмущенные параметры можно разделить на две группы. Одна группа содержит переменные  $\omega$ ,  $h_z$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  и  $\rho_e$ , которые описываются уравнениями (8.8в)—(8.8д), (8.8ж), (8.8з), (8.8к) и (8.8п). Эта группа переменных характеризует поперечную волну, поскольку она относится к компоненте скорости  $\omega$  и компоненте магнитного поля  $h_z$ , которые перпендикулярны внешнему магнитному полю  $\mathbf{H}_0$ .

Вторая группа состоит из переменных  $u$ ,  $v$ ,  $\rho'$ ,  $T'$ ,  $\rho' h_y$ ,  $J_z$  и  $E_z$ , которые описываются остальными уравнениями (8.8). Эта группа переменных характеризует продольные волны, частным случаем которых являются обычные звуковые волны.

Рассмотрим периодические решения, в которых все возмущенные параметры пропорциональны величине

$$\exp [i(\omega t - \lambda x)] = \exp [-i\lambda(x - Vt)], \quad (8.11)$$

где  $\omega$  — данная угловая частота;  $\lambda$  — волновое число, равное  $2\pi/(\text{длина волны})$ ;  $V$  — скорость распространения волны и  $i = \sqrt{-1}$ . Подставляя эти переменные в уравнения (8.8), получим определяющее уравнение для каждой группы перечисленных выше переменных. Собственные значения этих определяющих уравнений соответствуют различным видам распространения волн в плазме.

### Поперечные волны

Определяющее уравнение для поперечных волн дает следующее соотношение:

$$\left(i\omega - \nu_H \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left[ \left(i\omega + \nu_g \lambda^2\right) \left(i\omega + \nu_H \lambda^2 - \nu_H \frac{\omega^2}{c^2}\right) + V_x^2 \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \right] - \frac{\omega^2}{c^2} V_y^2 \left(i\omega + \nu_H \lambda^2 - \nu_H \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0, \quad (8.12)$$

где

$$V_x = H_x (\mu_e / \rho_0)^{1/2} \text{ — } x\text{-компонента волны Альфвена,}$$

$$V_y = H_y (\mu_e / \rho_0)^{1/2} \text{ — } y\text{-компонента волны Альфвена.} \quad (8.13)$$

$$\nu_g = \mu / \rho_0, \quad \nu_H = 1 / \mu_e \sigma_e \text{ — магнитная вязкость.}$$

Уравнение (8.12) не содержит параметров излучения. Следовательно, поперечные волны не зависят от поля излучения

и представляют собой регулярные поперечные волны магнитной гидродинамики, которые не зависят от свойств сжимаемости плазмы. Поскольку уравнение (8.12) есть квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$ , то существуют два различных вида поперечных волн. Эти поперечные волны возникают в результате взаимодействия электромагнитной волны и волны в вязкой среде при воздействии внешнего магнитного поля. Эти две основные волны можно получить, если устранить внешнее магнитное поле, т. е. принять  $V_x = V_y = 0$ . Тогда из уравнения (8.12) получаем следующие два корня:

а) Затухающая электромагнитная волна в проводящей среде

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\omega}{v_H}. \quad (8.14)$$

В непроводящей среде,  $v_H = \infty$ , эта волна распространяется со скоростью света  $c$ , не затухая.

б) Затухающая волна в вязкой жидкости

$$\lambda_2^2 = -i \frac{\omega}{v_g}. \quad (8.15)$$

Эти две основные волны, (8.14) и (8.15), объединены действием магнитного поля  $H_0$ . Для идеальной плазмы при  $v_g = 0$  и  $v_H = 0$ , т. е. для невязкой и с бесконечной электропроводностью жидкости, из уравнения (8.12) следует

$$V = \frac{\omega}{\lambda} = V_x \left( 1 + \frac{V_x^2 + V_y^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (8.16)$$

Это уравнение описывает модифицированную волну Альфвена. Для магнитогазодинамических волн  $(V_x^2 + V_y^2) \ll c^2$ , и уравнение (8.16) принимает вид

$$V = \frac{\omega}{\lambda} = V_x. \quad (8.17)$$

Это хорошо известная волна Альфвена. Из (8.17) следует, что в невязкой с бесконечной электропроводностью жидкости плотностью  $\rho_0$  возмущение распространяется как волна в направлении  $H_x$  со скоростью  $V_x$ .

Интересно отметить, что первая скобка в уравнении (8.12) дает частное значение  $\omega$ , а именно

$$\omega = i \frac{c^2}{v_H} = i \frac{\sigma_e}{\epsilon}, \quad (8.18)$$

которое соответствует хорошо известной затухающей электромагнитной волне в обычной электродинамике.

### Продольные волны

Запишем дисперсионное соотношение для продольных волн в общем виде

$$\begin{aligned} & \left[ K^* \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{4}{3} i\omega \frac{\nu_g}{\rho_0} \right) \lambda^4 - \left\{ \frac{\omega^2 K^*}{\rho_0} + \frac{4}{3} \frac{\nu_g \omega^2}{T_0 (\gamma - 1)} (1 + 12(\gamma - 1) R_p) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\omega (C_p + 20RR_p + 16RR_p^2) \right\} \lambda^2 - \frac{i\omega^3}{T_0 (\gamma - 1)} (1 + 12(\gamma - 1) R_p) \right] \times \\ & \quad \times \left[ \left( \lambda^2 \nu_H + i\omega - \nu_H \frac{\omega^2}{c^2} \right) (i\omega + \nu_g \lambda^2) + V_x^2 \left( \lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] - \\ & \quad - \left( \lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) (i\omega + \nu_g \lambda^2) \left[ \frac{\omega^2}{T_0 (\gamma - 1)} (1 + 12(\gamma - 1) R_p) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{i\omega K^* \lambda^2}{\rho_0} \right] V_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Уравнение (8.19) является квадратным уравнением относительно  $\lambda^2$ . Таким образом, имеются четыре различных вида продольных волн. Эти волны являются модифицированными тепловыми и магнитогазодинамическими волнами.

Тепловая волна зависит от значения эффективного коэффициента теплопроводности  $K^*$ . При  $K^* \rightarrow 0$  тепловые волны исчезают. Даже в нетеплопроводной и невязкой жидкости перенос тепла излучением вызывает появление тепловых волн в среде, подобно тому как теплопроводность порождает тепловые волны в обычной неизлучающей жидкости.

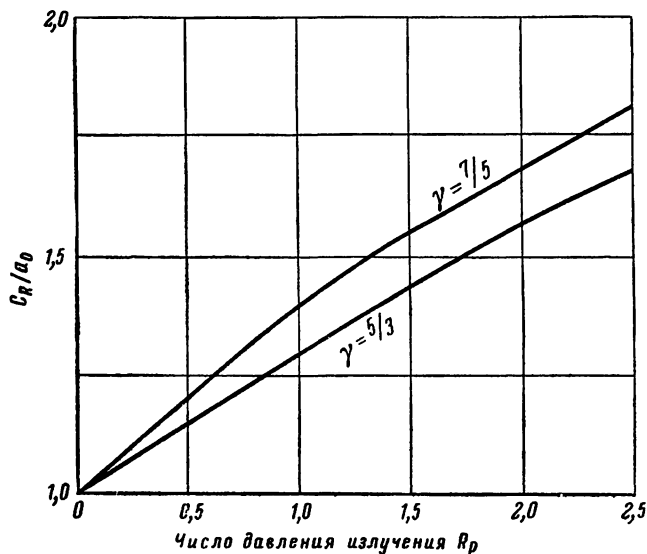
Несмотря на то что уравнение (8.19) достаточно сложно, смысл различных его членов очевиден. Первая квадратная скобка характеризует звуковые волны в вязкой, теплопроводной и излучающей жидкости. При отсутствии поперечного магнитного поля, при  $V_y = 0$ , эти звуковые волны не будут зависеть от электромагнитных переменных. Следовательно, первая квадратная скобка определяет обычные звуковые волны в вязкой, теплопроводной и излучающей среде. Поскольку эта скобка содержит квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$ , то будут два вида звуковых волн: один соответствует обычной звуковой волне и другой — тепловой волне. Имеются два типа влияния излучения на эти звуковые волны: один обусловлен давлением излучения и плотностью энергии излучения, а другой — тепловым потоком излучения.

Рассмотрим сначала давление излучения и плотность энергии излучения, которые характеризуются числом давления излучения  $R_p$ . Для невязкой и нетеплопроводной жидкости без теплового потока излучения, т. е. при  $\nu_g = 0$  и  $K^* = 0$ , выражение в первой квадратной скобке уравнения (8.19), равное

нулю, дает звуковую волну в излучающем газе со скоростью распространения  $C_R$ , определяемой соотношением

$$C_R^2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2} = a_0^2 \frac{1 + 20 \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) R_p + 16 \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 R_p^2}{1 + 12(\gamma - 1) R_p}, \quad (8.20)$$

где  $a_0 = (\gamma R T_0)^{1/2}$  — обычная скорость звука без учета излучения и  $C_R$  — скорость звука в излучающем газе, которая включает



Фиг. 8.1. Скорость звука в излучающем газе как функция числа давления излучения  $R_p$ .

влияние как давления излучения, так и плотности энергии излучения. При данной температуре  $T_0$  скорость звука в излучающем газе возрастает вместе с числом давления излучения  $R_p$  (фиг. 8.1). При очень больших значениях  $R_p$  величина  $C_R$  увеличивается как корень квадратный из  $R_p$ . Это тот же вид зависимости, что и для обычной скорости звука.

Если тепловой поток излучения отличен от нуля, то величина  $K^*$  также будет отлична от нуля. С величиной  $K^*$  связаны два вида влияния на звуковые волны: один сказывается в затухании рассмотренных выше звуковых волн и в изменении их скорости, а другой — в появлении тепловой волны. Чтобы показать влияние теплового потока излучения, рассмотрим излучающий невязкий и нетеплопроводный газ с малым тепловым

потоком излучения, так что  $K^*$  — очень малая величина. Тогда первая скобка уравнения (8.19)

$$\frac{K^*}{\rho_0} \lambda^4 - \left\{ \frac{\omega^2 K^*}{\rho_0} - i\omega(C_p + 20RR_p + 16RR_p^2) \right\} \lambda^2 - \frac{i\omega^3}{T_0(\gamma-1)} [1 + 12(\gamma-1)R_p] = 0 \quad (8.21)$$

в качестве первого приближения дает следующие два вида волн:

а) звуковая волна в излучающем газе

$$\lambda_1 = \pm \frac{\omega}{C_R} [1 - i\omega f(R_p) D_R], \quad (8.22)$$

б) тепловая волна в излучающем газе

$$\lambda_2 = \pm \frac{\omega}{C_R} \left[ \frac{g(R_p)}{\omega D_R} \right]^{1/2} (-1 + i),$$

где

$$f(R_p) = \left( \frac{\gamma}{a_0^2} - \frac{1}{C_R^2} \right) \frac{a_0^2 6(\gamma-1) R_p}{C_R^2 \gamma [1 + 12(\gamma-1) R_p]} \quad (8.23)$$

и

$$g(R_p) = \frac{C_R^4 \gamma [1 + 12(\gamma-1) R_p]}{24 a_0^4 (\gamma-1) R_p}.$$

Очевидно, что первый вид  $\lambda_1$ , определяемый уравнением (8.22), представляет собой звуковую волну в излучающем газе, скорость распространения которой  $C_R$  определяется уравнением (8.20). Тепловой поток излучения вызывает появление демпфирующего члена в уравнении звуковой волны, на что указывает мнимая часть  $\lambda_1$ . Второй вид  $\lambda_2$ , определяемый уравнением (8.23), — это тепловая волна, распространяющаяся со скоростью

$$V_2 = \frac{\omega}{\lambda_{2R}} = C_R \left( \frac{\omega D_R}{g} \right)^{1/2}. \quad (8.24)$$

В случае малого теплового потока излучения величина  $V_2$  очень мала.

Скорость  $V_2$  пропорциональна  $C_R$  и корню квадратному из  $\omega$ . Это затухающая тепловая волна с коэффициентом затухания, определяемым мнимой частью  $\lambda_2$ . Коэффициент затухания обратно пропорционален корню квадратному из  $D_R$ . При  $D_R \rightarrow 0$  затухание звуковой волны, обусловленное тепловым потоком излучения, стремится к нулю, в то время как затухание тепловой волны бесконечно возрастает, так что тепловая волна

исчезает. С другой стороны, при большом значении  $D_R$  звуковая волна будет быстро затухать, а затухание тепловой волны будет незначительным.

При уменьшении числа давления излучения  $R_p$  скорость звука в излучающем газе  $C_R$  стремится к значению обычной скорости звука  $a_0$  и затухание звуковых волн стремится к нулю. Итак, при  $R_p \rightarrow 0$  скорость звука излучающего газа стремится к обычной скорости звука, затухание тепловой волны становится бесконечным и она исчезает. При  $R_p \rightarrow \infty$  затухание звуковой волны стремится к нулю, поскольку  $f(R_p)$  стремится к нулю. Звуковая волна будет незатухающей при очень больших значениях  $R_p$ . При  $R_p \rightarrow \infty$  затухание тепловой волны бесконечно возрастает и тепловая волна вновь исчезает.

Другой интересный результат состоит в том, что затухание звуковой волны пропорционально квадрату частоты  $\omega$ , в то время как затухание тепловой волны пропорционально корню квадратному из  $\omega$ . Благодаря этому при очень большой частоте звуковые волны будут затухать быстрее, чем тепловые.

Вторая квадратная скобка уравнения (8.19) при отсутствии поперечного магнитного поля, т. е. при  $V_y = 0$ , характеризует поперечную волну, определяемую уравнением (8.12), и ее частота будет отлична от определяемой уравнением (8.18). Последний член уравнения (8.19) характеризует влияние поперечного магнитного поля на продольную волну. Когда  $V_y$  отлично от нуля, имеются четыре вида волн: одна модифицированная тепловая волна и три модифицированные магнитогазодинамические волны. Модифицированная тепловая волна существенно зависит от эффективного коэффициента теплопроводности  $K^*$ . При  $K^* = 0$  тепловой волны не будет и имеются только три магнитогазодинамические волны. Сначала мы исследуем продольные волны в идеальной плазме, т. е. в невязком, нетеплопроводном, не переносящем излучения и бесконечно электропроводном газе при  $K^* = \nu_g = \nu_H = 0$ . Уравнение (8.19) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda^2 (C_p + 20RR_p + 16RR_p^2) - \frac{\omega^2}{T_0(\gamma-1)} (1 + 12(\gamma-1)R_p) \right] \times \\ & \quad \times \left[ \left( \lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) V_x^2 - \omega^2 \right] - \\ & \quad - \left( \lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) V_y^2 \frac{\omega^2}{T_0(\gamma-1)} [1 + 12(\gamma-1)R_p] = 0. \quad (8.25) \end{aligned}$$

Уравнение (8.25) является квадратным уравнением относительно  $\lambda^2$ . Следовательно, оно дает два вида продольных волн в идеальной плазме. Когда эффективный коэффициент теплопроводности  $K^*$  равен нулю, тепловая волна исчезает. С другой

стороны, при нулевом значении вязкости и магнитной диффузии пропадает другой вид продольной волны, который обусловлен взаимодействием тепловых факторов и поперечной волны.

Два корня уравнения (8.25) определяют так называемую быструю и медленную волны в электромагнитодинамике излучающего газа, которые возникают в результате взаимодействия звуковой волны с волной Альфвена. При отсутствии поперечного магнитного поля, т. е.  $V_y=0$ , уравнение (8.25) имеет следующие два корня:

$$V_1^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} = C_R^2, \quad (8.26a)$$

$$V_2^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} = V_x^2 \left( 1 + \frac{V_x^2}{c^2} \right)^{-1}. \quad (8.26b)$$

Первый корень (8.26a) соответствует звуковой волне в излучающем газе, а второй корень — модифицированной волне Альфвена. Если  $V_y$  отлично от нуля, то будут получены также два корня, которые определяются следующим уравнением:

$$\left( C_R^2 - \frac{\omega^2}{\lambda^2} \right) \left[ V_x^2 - \frac{\omega^2}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{V_x^2}{c^2} \right) \right] - \frac{\omega^2}{\lambda^2} V_y^2 \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 \lambda^2} \right) = 0. \quad (8.27)$$

Уравнение (8.27) имеет ту же форму, что и соотношение для быстрой и медленной волн в магнитогазодинамике, за исключением лишь того, что обычная скорость звука  $a_0$  заменена в нем скоростью звука в излучающем газе  $C_R$ . В магнитогазодинамике обе величины  $V_x$  и  $V_y$  пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света  $c$ . Пусть корни уравнения (8.27) будут равны

$$V_{\text{быстр}} = \frac{\omega}{\lambda_1}, \quad V_{\text{медл}} = \frac{\omega}{\lambda_2}.$$

Тогда имеют место неравенства

$$V_{\text{медл}} \leq C_R \leq V_{\text{быстр}}, \quad (8.28a)$$

$$V_{\text{медл}} \leq V_x \leq V_{\text{быстр}}. \quad (8.28b)$$

В идеальной плазме влияние излучения на продольную волну ограничено значением скорости звука в плазме. Соотношение между скоростью звука в излучающем газе  $C_R$  и скоростями  $V_x$  и  $V_y$  волны Альфвена то же, что и между обычной скоростью звука и скоростью волны Альфвена при отсутствии эффектов излучения.

Если хотя бы один из коэффициентов переноса отличен от нуля, т. е.  $\nu_g \neq 0$ ,  $\nu_H \neq 0$  или  $K^* \neq 0$ , то это вызовет затухание быстрых и медленных волн, а также появление новой затухающей

волны, которая будет модифицированной тепловой волной, если  $K^*$  отлично от нуля, и продольно-поперечной вязкой или электромагнитной волной, если  $v_g$ , или  $v_H$ , или обе эти величины отличны от нуля. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, рассмотрим теперь простой случай  $v_g=0$ ,  $v_H=0$ ,  $K^* \neq 0$ , но мало. Тогда демпфирующие члены уравнений волн, так же как и скорости их распространения, зависят от угла  $\theta$  между плоским внешним магнитным полем и направлением распространения волны. Если  $\theta=0$ , т. е.  $V_y=0$  и  $V_x \neq 0$ , то не будет взаимодействия газодинамической волны в излучающем газе (8.21) с электромагнитными волнами. Из уравнения (8.19) следует, что газодинамические волны в излучающем газе (8.21) и магнитогазодинамическая поперечная волна (8.12) не связаны друг с другом. Если угол  $\theta$  отличен от нуля, то будут иметь место три затухающие волны, которые возникают в результате взаимодействия тепловой волны, быстрой и медленной волн. Особенно интересно для нас рассмотреть взаимодействие тепловой волны и магнитогазодинамической волны. Чтобы выявить существенные особенности этого взаимодействия, рассмотрим случай  $\theta=90^\circ$ , т. е.  $V_y \neq 0$  и  $V_x=0$ . В этом случае медленная волна исчезает и остается только быстрая волна. Уравнение (8.19) опять сводится к квадратному уравнению, которое дает два вида волн, которые возникают в результате взаимодействия тепловой волны с быстрой магнитогазодинамической волной. Если предположить, что величина  $K^*$  или  $D_R$  мала, так что второй и более высокими их степенями можно пренебречь, то два корня  $\lambda$  будут равны

$$\lambda_1 = \pm \frac{\omega}{C_R} \frac{A_2}{A_3} \left[ 1 - i\omega \frac{A_2^2}{A_3^2} f(R_p) D_R \right], \quad (8.29a)$$

$$\lambda_2 = \pm \frac{\omega}{C_R} \frac{A_3}{A_1} [g(R_p)/D_R]^{1/2} (-1 + i), \quad (8.29b)$$

где

$$A_1^2 = i + \frac{\gamma V_y^2}{a_0^2}, \quad A_2^2 = 1 + \frac{V_y^2}{c^2}, \quad A_3^2 = 1 + \frac{V_y^2}{C_R^2}$$

и функции  $f(R_p)$  и  $g(R_p)$  определены уравнениями (8.23).

Когда  $V_y=0$ , то уравнения (8.29a) и (8.29b) сводятся соответственно к уравнениям (8.22) и (8.23). Следовательно, корень  $\lambda_1$  представляет модифицированную затухающую быструю магнитогазодинамическую волну, а корень  $\lambda_2$  — модифицированную тепловую волну.

Влияние магнитного поля сказывается в увеличении скорости звука в излучающем газе (8.22) в  $A_3/A_2$  раз и уменьше-



нии коэффициента затухания в  $(A_2/A_3)^3$  раз. Результирующая скорость распространения та же, что и определяемая уравнением (8.27) при  $V_x=0$ , т. е.

$$V_{\text{быстр}} = \frac{\omega}{\lambda_{1R}} (C_R^2 + V_y^2)^{1/2} \left(1 + \frac{V_y^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (8.30)$$

Изменение демпфирующих членов в зависимости от  $\omega$  и  $D_R$  при  $V_y=0$  или  $V_y \neq 0$  одинаково. Когда  $D_R$  стремится к нулю, тепловая волна исчезает и остается только быстрая магнитогазодинамическая волна.

Влияние магнитного поля на тепловую волну сказывается в изменении скорости ее распространения в  $A_1/A_3$  раз и демпфирующего члена — в  $A_3/A_1$  раз. Интересно отметить, что множитель  $A_1$  содержит изотермическую скорость звука вместо адиабатической скорости звука, а именно  $a_T = a_0/\gamma$ .

При увеличении  $V_y$  от нуля до бесконечности скорость распространения модифицированной быстрой волны монотонно изменяется от величины  $C_{R2}$  скорости звука в излучающем газе до скорости света  $c$ , а коэффициент затухания изменяется соответственно от  $(\omega^2/C_R) f(R_p) D_R$  до  $(\omega^2/c)(C_R^2/c^2) f(R_p) D_R$ . Подобным же образом для тепловой волны скорость распространения меняется от  $C_R[\omega D_R/g(R_p)]^{1/2}$  до  $(C_R^2/a_T)[\omega D_R/g(R_p)]^{1/2}$ , а коэффициент затухания меняется от  $(1/C_R)[\omega g(R_p)/D_R]^{1/2}$  до  $(a_T/C_R^2)[\omega g(R_p)/D_R]^{1/2}$ .

### 3. ВОЛНА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ ПРИ КОНЕЧНОМ ЗНАЧЕНИИ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ИЗЛУЧЕНИЯ

Для излучающего газа с конечным значением средней длины свободного пробега излучения следует применять общие уравнения радиационной газодинамики, рассмотренные в разд. 2—6 гл. 5, и вывести дисперсионные соотношения, подобные уравнениям (8.12) и (8.19), взамен уравнений (5.23). Такие дисперсионные соотношения не рассматривались в столь общем виде, как в предыдущем разделе, с учетом электромагнитных эффектов. Однако для случая отсутствия электромагнитного поля они были исследованы В. А. Прокофьевым [12] подобно тому, как это было сделано нами применительно к уравнению (8.21).

Исследование Прокофьева [12] является более общим, чем наше уравнение (8.21), по следующим причинам:

1) он рассмотрел общее уравнение состояния (5.1) с внутренней энергией  $U_m$  как функцией  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ ;

2) он предполагал наличие двух коэффициентов вязкости  $\mu_1$  и  $\mu$ , в то время как мы считали, что  $\mu_1 = -\frac{2}{3} \mu$ ;

3) он рассматривал спектральную интенсивность излучения и коэффициент поглощения излучения в функции частоты  $\nu = \omega/2\pi$ , в то время как в нашем исследовании было использовано среднее значение по Росселанду. Таким образом, наиболее важной новой для нас особенностью исследования Прокофьева является то, что дисперсионное соотношение существенно зависит от частоты волн.

Прокофьев нашел следующее дисперсионное соотношение вместо уравнения (8.21):

$$[\gamma + (1 + i\gamma X) m^2] [(i + ZX^{(0)}) m + 6i\beta R_p X^{(1)} - \theta m^3] + im^2(\gamma - 1 + b_1)(m - 12R_p X^{(2)}/h_2) = 0, \quad (8.31)$$

где  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей и  $R_p$  — отношение давления излучения к давлению газа в невозмущенном потоке. Связь остальных обозначений с нашими прежними обозначениями следующая:

$$\begin{aligned} m &= i\lambda a_0/\omega, & h_2 &= (\partial \ln p / \partial \ln T)_0, \\ X &= (\mu_1 + 2\mu)_0 \omega / \gamma p_0 h_1, & h_3 &= (\partial U_m / \partial \rho)_0, \\ \theta &= \kappa_0 T_0 \omega / \gamma p_0 h_1 h_4, & h_4 &= C_{v0} T_0, \\ Z &= 12\beta R_p c / a_0, & \beta &= p_0 / \rho_0 h_4, \\ h_1 &= (\partial \ln p / \partial \ln \rho)_0, & b_1 &= 4(h_2/h_1) R_p, \end{aligned} \quad (8.32)$$

где индекс 0 относится к значениям в невозмущенном состоянии.

Зависящие от частоты члены  $X^{(0)}$ ,  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$  определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} X^{(0)} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu &= \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} w_\nu \left(1 - \frac{1}{2q_\nu} \ln \frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right) d\nu, \\ X^{(1)} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu &= \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} w_\nu \ln \frac{1+q_\nu}{1-q_\nu} d\nu, \\ X^{(2)} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu &= \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{w_\nu}{q_\nu} \left(1 - \frac{1}{2q_\nu} \ln \frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right) d\nu, \end{aligned} \quad (8.33)$$

где

$$q_\nu = \frac{m}{w_\nu + i(a_0/c)}, \quad w_\nu = \rho k'_{\nu 0} a_0 / \omega.$$

Таким образом, уравнение (8.31) представляет собой очень сложное уравнение относительно  $m$ . Однако при отсутствии радиационных эффектов, т. е. когда члены (8.33) исчезают, уравнение (8.31) сводится к квадратному уравнению относительно  $m^2$ , классическими результатами решения которого являются тепловая волна и звуковая волна. Решить дисперсионное уравнение (8.31) очень трудно. Прокофьев не попытался ни точно решить его, ни дать аналитическую теорию его решения. Он подробно рассмотрел некоторые предельные случаи для двух главных видов волн, а именно для звуковой волны в излучающем газе [см. уравнение (8.22)] и для тепловой волны в излучающем газе [см. уравнение (8.23)] в различных диапазонах частот. Он сделал следующие выводы.

Безразмерные параметры:  $X$  — обратная величина обобщенного числа Рейнольдса,  $\theta$  — обратная величина обобщенного числа Пекле,  $Z$  — обобщенное число потока излучения,  $R_p$  и  $a_0/c$  — малые величины в широком диапазоне частот для жидкостей и газов при нормальных условиях и не слишком высоких температурах. Например, для воздуха при  $0^\circ\text{C}$  и давлении 760 мм рт. ст.

$$\begin{aligned} X &= 1,60 \cdot 10^{-10} \omega, & \theta &= 2,26 \cdot 10^{-10} \omega, \\ Z &= 6,07 \cdot 10^{-6}, & R_p &= 1,38 \cdot 10^{-12}, \\ a_0/c &= 1,105 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

При малых значениях этих параметров волны с малой амплитудой будут почти адиабатическими звуковыми волнами. Коэффициент затухания представляет собой монотонно возрастающую функцию частоты и определяется переносом излучения при низких частотах, вязкостью, теплопроводностью и переносом излучения при средних частотах и только вязкостью и теплопроводностью при очень высоких частотах. Последнее обусловлено тем, что при высоких частотах относительная роль переноса излучения сводится к нулю (перенос излучения возрастает с частотой, стремясь асимптотически к не зависящему от частоты значению). Коэффициент затухания на длину волны, обусловленный переносом тепла излучением, имеет только один максимум при средних частотах и монотонно стремится к нулю как при очень высоких, так и при очень низких частотах.

При высоких температурах ( $Z$  порядка 1) и малых значениях  $X$  и  $\theta$  скорость звуковой волны близка к адиабатическому значению  $a_0$  для очень высоких и низких частот и приближается, но не достигает изотермического значения  $a_T$  при средних частотах.

При очень высоких температурах  $Z$  может быть велико, в то время как  $X$ ,  $\theta$ ,  $R_p$  и  $a_0/c$  еще малы. В этом случае скорость распространения монотонно уменьшается от адиабатического значения при низких частотах до изотермического значения при средних частотах. Переход от одной скорости к другой происходит в области, где  $Z/\rho K_R = O(1)$ ; здесь  $K_R$  — среднее значение коэффициента поглощения по Росселанду [уравнение (5.18)]. При более высоких частотах, вплоть до предела  $Z/\rho K_{p1} = O(1)$ , где  $K_{p1}$  — модифицированное среднее значение коэффициента поглощения Планка, т. е. [ср. с уравнением (5.36)]

$$K_{p1} \int_0^{\infty} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \int_0^{\infty} k'_\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu, \quad (8.35)$$

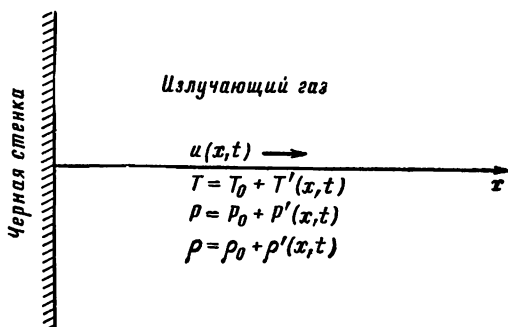
скорость звука принимает изотермическое значение. Этот предел характеризует переход от изотермической скорости звука опять к адиабатическому значению при еще больших частотах. При очень высоких частотах скорость распространения волн вновь принимает адиабатическое значение, если  $X$  и  $\theta$  остаются малыми. Как мы видели в предыдущем разделе, при больших значениях  $X$  и  $\theta$ , которые соответствуют большим значениям  $\mu$  и  $K^*$ , скорость распространения обоих видов волн будет значительно отличаться от адиабатического значения  $a_0$ .

Если величины  $Z$  и  $R_p$  не малы, в то время как  $X$  и  $\theta$  по-прежнему малы, то адиабатическая скорость звука  $a_0$  заменяется скоростью звука в излучающем газе  $C_R$ . Другими словами, изменение скорости распространения волн то же, что и при больших значениях  $Z$ , но малых значениях  $R_p$ . Коэффициент затухания на длину волны, обусловленный тепловым излучением, имеет два максимума и один минимум при больших значениях  $Z$ , т. е. имеются две антирезонансные системы и одна резонансная, которые могут быть описаны в зависимости от соответствующих времен релаксации. Фазовая скорость волн становится больше, чем скорость звука в излучающем газе, если  $X$  и  $\theta$  велики.

Поскольку явление зависимости скорости распространения звуковой и тепловой волн в излучающем газе от частоты представляет чрезвычайно большой интерес, мы подробно рассмотрим этот случай в простейших предположениях [1].

Рассмотрим случай невязкого, нетеплопроводного, но излучающего совершенного газа. Предположим, что давление излучения и плотность энергии излучения малы, а тепловой поток излучения не мал. Другими словами, рассмотрим случай очень малого значения числа давления излучения и конечного значе-

ния теплового потока излучения или конечной эффективной теплопроводности с учетом излучения. При вычислении теплового потока излучения будем предполагать, что рассеяние излучения пренебрежимо мало и что выполняется условие местного термодинамического равновесия. Согласно нашим предыдущим результатам, в этом случае будут существовать две



Фиг. 8.2. Полубесконечная область, занятая излучающим газом.

различные волны, а именно звуковая и тепловая волны. Исследуем изменение этих волн с частотой. Рассмотрим полупространство, занятое излучающим газом, ограниченное с одной стороны бесконечной плоской черной стенкой. Расстояние по перпендикуляру к стенке обозначим через  $x$  (фиг. 8.2). Первоначально газ находится в состоянии покоя и имеет постоянные параметры: температуру  $T_0$ , давление  $p_0$  и плотность  $\rho_0$ . Начальная температура стенки также равна  $T_0$ . Мы можем вызвать малые возмущения в излучающем газе, перемещая стенку при постоянной температуре, или меняя температуру неподвижной стенки, или одновременно тем и другим способом. Для возмущенного течения можно написать

$$\begin{aligned} u &= u'(x, t), \quad T = T_0 + T'(x, t), \quad p = p_0 + p'(x, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho'(x, t). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Подставляя соотношения (8.36) в уравнения (5.3), (5.4) и (5.7) для невязкой, нетеплопроводной и излучающей среды без объемных сил и с пренебрежимо малым числом давления излучения, мы получим следующие линеаризованные уравнения, отбросив члены второго и высшего порядков по величинам

возмущений:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (8.36a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (8.36б)$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} = Q'_R, \quad (8.36в)$$

где  $Q'_R$  — возмущенная величина члена  $\nabla \cdot \mathbf{q}_R$ , учитывающего перенос тепла излучением. Выражение для  $Q'_R$  может быть выведено из анализа одномерного переноса излучения, приведенного в разд. 10 гл. 5. При этом  $y$  заменяется на  $x$  и одна из плоскостей ( $y=L$ ) удаляется на бесконечность. Для черной стенки ( $x=0$ ) нелинейное выражение дивергенции потока излучения в нашей задаче имеет вид [см. уравнение (5.46)]

$$Q_R = \frac{\partial q_R}{\partial x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial q_{R\nu}}{\partial x} d\nu \quad (8.37a)$$

и

$$\frac{\partial q_{R\nu}}{\partial x} = \frac{2\pi}{L_{R\nu}} \left[ B_\nu(T_w) \varepsilon_2(\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t_\nu) \varepsilon_1(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu + \right. \\ \left. + \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu(t_\nu) \varepsilon_1(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - 2B_\nu(T) \right], \quad (8.37б)$$

где  $T_w$  — температура стенки, которая может отличаться от начальной температуры  $T_0$ , и  $L_{R\nu} = 1/\rho k'_\nu$  — средняя длина свободного пробега излучения при частоте  $\nu$ . Функция Планка  $B_\nu(T)$  определяется по уравнению (4.22). Определим среднюю длину свободного пробега излучения Планка и среднюю оптическую толщину следующим образом:

$$L_{RP} = \frac{\int_0^{\infty} B_\nu(T) d\nu}{\int_0^{\infty} B_\nu(T) (1/L_{R\nu}) d\nu} \quad (8.38)$$

и

$$\tau = \int_{x_w(t)}^x (1/L_{RP}) dx. \quad (8.39)$$

Чтобы найти возмущенную величину  $Q'_R$  из уравнения (8.37а), Болдуин [1] использовал следующее соотношение, позволяющее выполнить интегрирование по  $\nu$ :

$$d\tau_\nu = \frac{L_{RP}}{L_{R\nu}} d\tau \quad (8.40)$$

или

$$\tau_\nu = \tau_\nu(\tau, t) = \int_0^\tau \frac{L_{RP}}{L_{R\nu}} d\bar{\tau}. \quad (8.41)$$

Если разложить функцию Планка  $B_\nu(T)$  в степенной ряд по  $T'$  и т. д., использовать соотношение (8.40) и пренебречь членами высшего порядка, то окончательно получим

$$Q'_R = 8\sigma T_0^3 \frac{1}{L_{R0}} \left[ F(\tau) \{T'_w - T'_{\tau=0}\} - \int_0^\tau F(\tau - \bar{\tau}) \frac{\partial T'(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} d\bar{\tau} + \right. \\ \left. + \int_\tau^\infty F(\bar{\tau} - \tau) \frac{\partial T'(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right], \quad (8.42)$$

где

$$F(\tau, T_0) = \frac{\pi}{4\sigma T_0^3} \int_0^\infty \frac{L_{R0}}{L_{R\nu0}} \frac{dB_\nu(T_0)}{dT_0} \varepsilon_2\left(\frac{L_{R0}}{L_{R\nu0}} \tau\right) d\nu. \quad (8.43)$$

Здесь индекс 0 относится к параметрам в невозмущенном состоянии и  $L_{R0} = L_{RP0}$ . Для серого газа  $F(\tau) = \varepsilon_2(\tau)$ . Из определения (8.41) мы имеем соотношение между оптической толщиной и координатой  $x$  для членов низшего порядка

$$\tau = \frac{1}{L_{R0}} [x - x_w(t)], \quad (8.44)$$

где  $x_w(t)$  — координата стенки, которая может быть функцией времени  $t$ . С помощью уравнения (8.44) можно получить приближение первого порядка для величины  $Q'_R$  в уравнении (8.42) в зависимости от  $x$  и  $t$

$$Q'_R = 8\sigma T_0^3 \frac{1}{L_{R0}} \left[ F\left(\frac{x}{L_{R0}}\right) \{T'_w(t) - T'(t, 0)\} - \right. \\ \left. - \int_0^x F\left(\frac{x-\bar{x}}{L_{R0}}\right) \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \int_x^\infty F\left(\frac{\bar{x}-x}{L_{R0}}\right) \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right]. \quad (8.45)$$

Из уравнения (8.36б) определим потенциал  $\phi$  в виде

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (8.46)$$

Тогда из остальных уравнений (8.36) получим два уравнения для  $\varphi$  и  $T'$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{\gamma - 1}{\rho_0} Q'_R, \quad (8.47a)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad (8.47b)$$

где  $Q'_R$  определяется уравнением (8.45) и  $a_0 = (\gamma R T_0)^{1/2}$  — изэнтропическая скорость звука.

Мы можем исключить  $T'$  из уравнений (8.47) и получить дифференциальное уравнение по  $\varphi$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\ & = \frac{8(\gamma - 1)\sigma T_0^3}{R L_{R0} \rho_0} \left\{ -F\left(\frac{x}{L_{R0}}\right) \left[ R \frac{dT'_w}{dt} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{x=0} \right] - \right. \\ & \quad - \int_0^x F\left(\frac{x-\bar{x}}{L_{R0}}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) d\bar{x} + \\ & \quad \left. + \int_x^\infty F\left(\frac{\bar{x}-x}{L_{R0}}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) d\bar{x} \right\}. \quad (8.48) \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (8.48) следующие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, 0) = u_w(t) \text{ — скорость стенки (заданная функция } t);$$

$$T'_w(t) = T_w(t) - T_0 \text{ — заданная функция } t; \quad (8.49)$$

$\varphi(t, \infty)$  — конечная величина для всех значений времени  $t$ .

Для данных функций  $u_w(t)$  и  $T'_w(t)$  мы можем решить уравнение (8.48) относительно  $\varphi$ . Болдуин получил решения для двух случаев: для случая колеблющегося поршня, так что обе функции  $u_w(t)$  и  $T'_w(t)$  являются синусоидальными функциями от времени с круговой частотой  $\omega = 2\pi\nu$  и произвольной фазой, и для случая импульсного движения стенки, так что обе функции  $u_w(t)$  и  $T'_w(t)$  представляют собой ступенчатые функции по  $t$ .

Чтобы получить решение в замкнутом виде, необходимо сделать некоторые предположения о функции  $F(z)$ . Для серого газа  $F(z) = \varepsilon_2(z)$ . Следовательно, функцию  $F(z)$  можно приближенно представить в виде экспоненциальной функции. Для общего случая Болдуин предполагает, что

$$F(z) = m_1 \exp(m_2 z), \quad (8.50)$$



где константы  $m_1$  и  $m_2$  выбраны таким образом, что приближение является точным в росселандовом пределе оптически толстой среды и близко к выражению (8.43). Болдуин нашел, что  $m_2$  удовлетворяет соотношению

$$m_2 \int_0^\infty \frac{(dB_\nu/dT_0) L_{R0}}{\frac{4}{\pi} T_0^3 \sigma L_{R\nu 0}} d\nu - 4 \int_0^\infty \frac{dB_\nu/dT}{\frac{4}{\pi} \sigma T_0^3 \left(1 + \frac{L_{R\nu 0}}{L_{R0}} m_2\right)} d\nu = 0. \quad (8.51)$$

Значение  $m_2$  можно найти из уравнения (8.51) численным методом. Для серого газа  $m_2 - [4/(1+m_2)] = 0$  или  $m_2 = 1,562$ . После того как получено значение  $m_2$ , значение  $m_1$  определяется из соотношения

$$m_1 = \frac{m_2^2}{3} \int_0^\infty \frac{L_{R0}}{L_{R\nu 0}} \frac{dB_\nu/dT_0}{\frac{4}{\pi} \sigma T_0^3} d\nu. \quad (8.52)$$

Для серого газа  $m_1 = m_2^2/3$ .

С учетом приближения (8.50) решение для стенки, колеблющейся с частотой  $\omega$ , имеет вид

$$u(t, x) = \frac{a_0}{\gamma} \text{Real} \left\{ \left[ c_1 C_1 \exp\left(\frac{c_1 \omega x}{a_0}\right) + c_2 C_2 \exp\left(\frac{c_2 \omega x}{a_0}\right) \right] \exp(i\omega t) \right\}, \quad (8.53)$$

где комплексные величины  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{Real} \{ (c_1 C_1 + c_2 C_2) \exp(i\omega t) \} = \frac{\gamma}{a_0} u_w(t), \quad (8.54a)$$

$$\text{Real} \left\{ -i \left[ \left(1 + \frac{c_1^2}{\gamma}\right) \left(\frac{\beta}{\beta + c_1}\right) C_1 + \left(1 + \frac{c_2^2}{\gamma}\right) \left(\frac{\beta}{\beta + c_2}\right) C_2 \right] \exp(i\omega t) \right\} = \frac{T'_w(t)}{T_0}, \quad (8.54б)$$

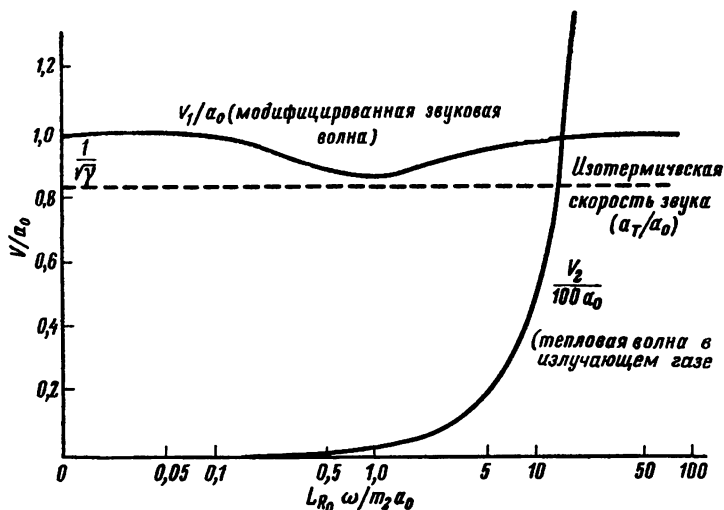
$$\left. \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\} = - \left[ \frac{-1(1 - \beta^2 - iK\beta) \mp \sqrt{(1 - \beta^2 - iK\beta)^2 + 4\beta^2(1 - iK\beta/\gamma)}}{2(1 - iK\beta/\gamma)} \right]^{1/2}, \quad (8.54в)$$

$$\beta = \frac{m_2 a_0}{L_{R0}}, \quad K = \frac{16(\gamma - 1) T_0^3}{R_{\rho_0} a_0} \frac{m_1}{m_2}, \quad (8.54г)$$

где Real обозначает действительную часть комплексной функции.

Для данных синусоидальных функций  $u_w(t)$  и  $T'_w(t)$ , которые обе пропорциональны  $\exp(i\omega t)$ , можно вычислить комплексные величины  $c_1$ ,  $a_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Уравнение (8.53) соответ-

ствует тогда двум бегущим затухающим синусоидальным волнам. Одна соответствует звуковой волне, другая — тепловой волне. На фиг. 8.3 приведены скорости этих двух волн в функции частоты при  $\gamma = 7/5$  и  $K = 4$  ( $K$  — число потока излучения).



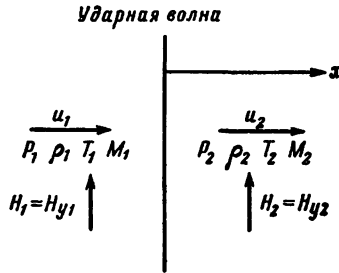
Фиг. 8.3. Скорости распространения волн в излучающем газе в зависимости от частоты колебаний.

Скорость распространения первой волны равна изэнтропической скорости звука как в области низких, так и в области высоких частот. При промежуточных частотах скорость распространения приближается к изотермической скорости звука  $a_T = a_0/\sqrt{\gamma}$ . Это звуковая волна в излучающем газе. Скорость распространения второй волны увеличивается с частотой. Это тепловая волна в излучающем газе. Интересно сравнить эти результаты с результатами для случая оптически толстой среды, т. е. с уравнениями (8.22) и (8.23). В первом приближении эти результаты согласуются. Скорость распространения звуковой волны близка к изэнтропической скорости звука, а скорость распространения тепловой волны увеличивается с частотой.

#### 4. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОЙ СРЕДЕ

Хорошо известно, что волны конечной амплитуды могут превратиться в ударные волны. При переходе через ударную волну скорость и параметры состояния претерпевают большие

изменения. Поскольку ударные волны имеют важное значение при изучении течений с большими скоростями, где тепловое излучение также существенно, то интересно установить, каковы эффекты теплового излучения в ударных волнах. Прежде всего



Фиг. 8.4. Прямая ударная волна при воздействии поперечного магнитного поля.

рассмотрим прямую ударную волну в ионизованном и излучающем газе. Выберем такую систему координат, чтобы ударная волна была стационарна (фиг. 8.4). В этой системе направление течения газа параллельно оси  $x$  и только  $x$ -компонента скорости  $u$  не равна нулю. Предположим, что магнитное поле плоское и его напряженность  $\mathbf{H}$  перпендикулярна скорости течения и имеет только  $y$ -компоненту  $H = H_y$ , отличную от нуля. Как скорость, так и напряженность магнитного поля однородны перед ударной волной и далеко за ней, а в переходной области ударной волны все переменные  $u$ ,  $H$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  претерпевают большие изменения. Переходная область очень узка и во многих задачах течения ее можно рассматривать в первом приближении как поверхность разрыва. Основные уравнения, которые описывают поле течения с ударной волной, показанной на фиг. 8.4, следующие:

$$\rho u = \text{const} = m, \quad (8.55a)$$

$$mu + p_t + \mu_e \frac{1}{2} H^2 - \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = \text{const} = mC_1, \quad (8.55б)$$

$$mh_R + up_t - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} - K^* \frac{dT}{dx} + E\mu_e H = \text{const} = mC_2, \quad (8.55в)$$

$$uH - \nu_H \frac{dH}{dx} = \text{const} = E. \quad (8.55г)$$

Здесь мы предполагаем, что газ является оптически толстым, так что эти уравнения выведены из уравнений (5.23) и (8.1) — (8.6) при обычных предположениях магнитогазодинамики об

отсутствии разделения заряда. Полное давление  $p_t$  равно сумме давления газа  $p$  и давления излучения  $p_R$ ;  $H$  —  $y$ -компонента магнитного поля;  $h_R = 1/2 u^2 + C_v T + E_R/\rho$ ;  $C_v$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $K^*$  — эффективный коэффициент теплопроводности с учетом излучения [см. уравнение (8.10)]. Остальные обозначения общепринятые.

Мы рассмотрим переходную область ударной волны в следующем разделе. Здесь мы рассмотрим только соотношения Ренкина — Гюгионо между двумя однородными состояниями, разделенными переходной областью ударной волны. Для этих однородных состояний, очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dH}{dx} = \frac{dT}{dx} = 0. \quad (8.56)$$

Подставляя соотношения (8.56) в уравнения (8.55), получим обобщенные соотношения Ренкина — Гюгионо в магнитодинамике излучающего газа. Прежде чем записать эти соотношения, введем следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{u}{u_1}, \quad T^* = \frac{RT}{u_1^2},$$

$$h = \frac{H}{(2mu_1/\mu_e)^{1/2}}, \quad P = T_1^* = 1/\gamma M_1^2, \quad M_1 = \frac{u_1}{a_1}, \quad a_1 = (\gamma RT_1)^{1/2},$$

$$Q = a_R u_1^6 / R^4 \rho_1 \quad (8.57)$$

и

$$R_p = p_R/p = \frac{1}{3} Q \xi T^{*3} - \quad (8.58)$$

число давления излучения. Здесь  $M$  — число Маха и индекс 1 относится к значениям в однородном состоянии перед ударной волной.

Подставляя соотношения (8.56) и (8.57) в уравнения (8.55), получим следующие обобщенные соотношения Ренкина — Гюгионо в безразмерной форме:

$$h \xi = h_1, \quad (8.59a)$$

$$\xi^2 + T^* + \frac{1}{3} Q \xi T^{*4} - \left(1 + P + h_1^2 - h^2 + \frac{1}{3} Q P^4\right) \xi = 0, \quad (8.59b)$$

$$\frac{T^*}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \xi^2 + (1 + P + h_1^2 - h^2) \xi + Q \xi T^{*4} +$$

$$+ \frac{1}{3} Q P^4 (\xi - 4) - \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma P}{\gamma - 1} + 2(h_1^2 - h_1 h)\right] = 0. \quad (8.59b)$$

Если эффектами излучения можно пренебречь, то члены, содержащие величину  $Q$ , могут быть отброшены и уравнения (8.59) сводятся тогда к обычным уравнениям магнитогидродинамики.

Если исключить  $h$  из уравнений (8.59) и ввести число давления излучения  $R_p$  как параметр, то

$$\xi^2 + (1 + R_p)T^* - \left[1 + P + h_1^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) + R_{p1}P\right] \xi = 0, \quad (8.60a)$$

$$-\frac{1}{2} \xi^2 + \left(\frac{1}{\gamma-1} + 3R_p\right)T^* + \left[1 + P + h_1^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) + R_{p1}P\right] \xi - \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma P}{\gamma-1} + 2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) h_1^2 + 4R_{p1}P\right] = 0. \quad (8.60б)$$

Очевидно, что величины  $R_p$  и  $R_{p1}$  должны рассматриваться здесь как параметры, учитывающие влияние излучения на ударную волну.

Если исключить  $T^*$  из уравнений (8.60), то получим

$$\begin{aligned} (\xi - 1) \left\{ \xi^2 - (7R_p + r^2)^{-1} \left[ (8R_p + r^2 + 1)(h_1^2 + fR_{p1}P + fP) + \right. \right. \\ \left. \left. + R_{p1} + 1 \right] \xi - (7R_p + r^2)^{-1} (4R_p + r^2 - 3) h_1^2 \right\} = \\ = (\xi - 1)(\xi - \xi_2)(\xi + \xi_3) = 0, \quad (8.61) \\ r^2 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1), \end{aligned}$$

где

$$f = f(R_p) = [\xi - g(R_p)]/(\xi - 1),$$

а

$$g(R_p) = \frac{(R_p + 1)(8R_{p1} + r^2 + 1)}{(R_{p1} + 1)(8R_p + r^2 + 1)}.$$

Уравнение (8.61) имеет три корня. Отрицательный корень  $-\xi_3$  не имеет физического смысла, поскольку  $\xi$  — это скорость в поле течения, которая имеет положительное значение. Корень, равный единице, характеризует скорость начального течения, т. е. относится к случаю отсутствия ударной волны. Единственным представляющим интерес решением является корень  $\xi_2$ , который характеризует скорость газа за прямой ударной волной. Формальное выражение для  $\xi_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(P_e + h_1^2)}{\gamma_e + 1} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(P_e + h_1^2)}{\gamma_e + 1} \right]^2 + 8 \frac{2 - \gamma_e}{\gamma_e + 1} h_1^2 \right\}^{1/2}, \quad (8.62) \end{aligned}$$

где

$$\gamma_e = \frac{4(\gamma - 1)R_{p2} + \gamma}{3(\gamma - 1)R_{p2} + 1} \quad (8.63)$$

— эффективная величина отношения удельных теплоемкостей в радиационной газодинамике,

$$P_e = (R_{p1} + 1)f(R_{p2})P \quad (8.64)$$

— эффективное значение числа  $P$  в радиационной газодинамике. Здесь индекс 2 относится к параметрам в однородном состоянии за ударной волной<sup>1)</sup>. Значение  $\gamma_e$  равно  $\gamma$  при  $R_{p2}=0$ , т. е. при отсутствии эффекта излучения, и  $\gamma_e=4/3$  при  $R_{p2}=\infty$ , т. е. при очень сильном эффекте излучения.

Поскольку обе величины  $\gamma_e$  и  $P_e$  являются функциями  $R_{p2}$ , а  $R_{p2}$  зависит от  $\xi_2$ , то мы должны найти значение  $\xi_2$  для данных начальных условий  $P$ ,  $h_1$  и  $R_{p1}$  методом последовательных приближений, что будет рассмотрено ниже. Функция  $g(R_{p2})$  зависит от  $\gamma$ ,  $R_{p1}$  и  $R_{p2}$ . Когда разность между  $R_{p1}$  и  $R_{p2}$  мала, величина  $g(R_{p2})$  приближенно равна единице и, следовательно,  $f(R_{p2})$  также приближенно равна единице. Функция  $g(R_{p2})$  уменьшается при увеличении  $R_{p2}$ . Предельное значение  $g(R_{p2})$  при очень больших значениях  $R_{p2}$  постоянно и равно

$$g_0 = \frac{[8R_{p1} + r^2 + 1]}{[8(R_{p1} + 1)]} \quad (8.65)$$

для данных значений  $\gamma$  и  $R_{p1}$ . В общем случае  $g_0$  не очень отличается от единицы.

Представляет интерес найти значение  $\xi_2$  для некоторых предельных случаев:

**1. Случай низкой температуры.** Если температура газа как перед фронтом ударной волны, так и за ним не слишком высока, то  $R_{p1} \approx R_{p2} \approx 0$ . Следовательно,  $\gamma_e = \gamma$  и  $P_e = P$ . Уравнение (8.62) в этом случае принимает вид соотношения на прямом скачке, известного в обычной магнитогазодинамике.

**2. Слабая ударная волна в высокотемпературном газе.** Если начальная температура газа очень высока, то величиной  $R_{p1}$  пренебрегать нельзя. Если, кроме того, интенсивность ударной волны мала, то  $R_{p2}$  будет приблизительно равно  $R_{p1}$ . Следовательно, в уравнении (8.62) можно принять  $\gamma_e \approx \gamma_{e1}$  и  $P_e \approx P_{e1}$ . Влияние излучения на однородное состояние за слабой ударной волной в этом случае заключается в следующем:

а. Значение  $\gamma$  заменяется эффективным значением  $\gamma_{e1}$ , а именно

$$\gamma_{e1} = \frac{4(\gamma - 1)R_{p1} + \gamma}{3(\gamma - 1)R_{p1} + 1}. \quad (8.66)$$

<sup>1)</sup> В предыдущих формулах этого параграфа те же параметры записаны без числового индекса. — *Прим. перев.*

б. Значение  $P$  заменяется эффективным значением  $P_{e1}$ , т. е. давление газа заменяется полным давлением, представляющим собой сумму давления газа и давления излучения.

Если магнитное поле отсутствует и интенсивность ударной волны бесконечно мала, то

$$u_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \gamma_{e1} (R_{p1} + 1) = \gamma_{e1} \frac{P_1 + P_{R1}}{\rho_1} = C_R^2. \quad (8.67)$$

Формула (8.67) представляет собой другой способ определения скорости звука в излучающем газе  $C_R$ , который практически идентичен представленному уравнением (8.20).

**3. Очень сильная ударная волна в холодном газе.** В этом случае  $R_{p1} \ll 1$  и  $R_{p2} \gg 1$ . Следовательно, если  $\gamma = 5/3$ , то  $\gamma_e = 4/3$  и  $P_e = 9/16 P$ . Уравнение (8.62) принимает вид

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{7} + \frac{8}{7} \left( \frac{9P}{16} + h_1^2 \right) \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{7} + \frac{8}{7} \left( \frac{9P}{16} + h_1^2 \right) \right]^2 + \frac{16}{7} h_1^2 \right\}^{1/2}. \quad (8.68)$$

При отсутствии магнитного поля  $h_1 = 0$  и уравнение (8.68) сводится к следующему:

$$\xi_2 = \frac{1}{7} + \frac{9P}{14} = \frac{1}{7} + \frac{27}{70M_1^2}. \quad (8.68a)$$

В случае очень сильных ударных волн (число Маха  $M_1 \gg 1$ ) предельное значение  $\xi_2$  равно  $1/7$  при всех значениях  $\gamma$  (фиг. 8.5).

**4. Ударная волна в очень горячей плазме.** В этом случае  $R_{p1} \gg 1$ . Для простоты рассмотрим случай, когда магнитное поле отсутствует, т. е.  $h_1 = 0$ . Эти рассуждения легко можно обобщить и на случай наличия магнитного поля. Формальное решение для  $\xi_2$  записывается следующим образом:

$$\xi_2 = \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e P_e}{\gamma_e + 1}. \quad (8.69)$$

В предельном случае  $R_{p1} \gg 1$  уравнение (8.69) принимает вид

$$\xi_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{6M_{e1}^2}. \quad (8.69a)^1$$

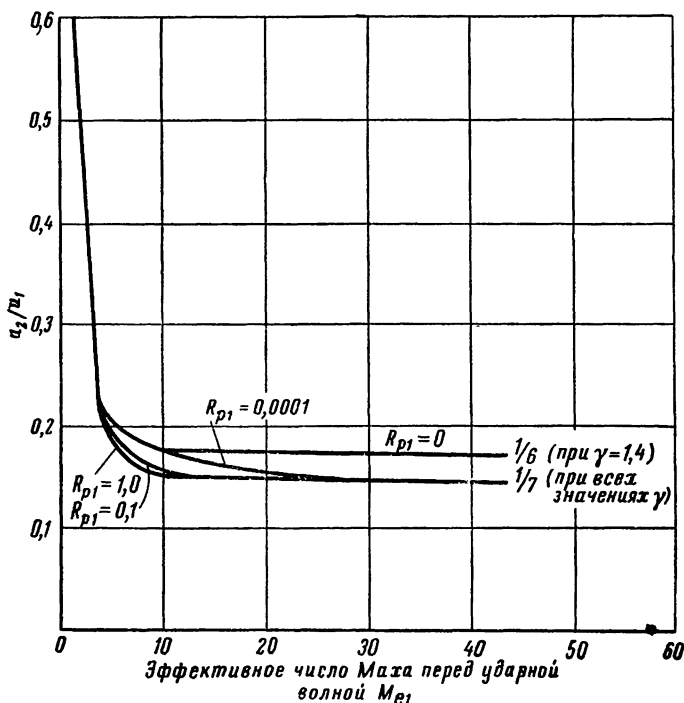
<sup>1)</sup> Используя формулы (8.64), (8.65), определение  $f(R_{p1})$  в (8.61) и значение  $\gamma_e = 4/3$ , получим при  $R_{p1} \gg 1$   $\xi_2 = \frac{1}{7} + \frac{8}{7} \frac{R_{p1}}{\gamma M_1^2}$ , что в числовых множителях отличается от (8.69a) — (8.70a). — *Прим. перев.*

где  $M_{e1}$  — эффективное число Маха перед ударной волной, определяемое уравнением

$$M_{e1}^2 = \frac{\gamma [1 + 12(\gamma - 1) M_1^2 R_{p1}]}{\gamma + 20(\gamma - 1) R_{p1} + 16(\gamma - 1) R_{p1}^2}. \quad (8.70)$$

При  $R_{p1} \gg 1$  получаем

$$M_{e1}^2 = \frac{3\gamma M_1^2}{4R_{p1}}. \quad (8.70a)$$



Фиг. 8.5. Отношение скоростей  $u_2/u_1$  на прямой ударной волне в идеальном газе без учета излучения и с учетом излучения.

Уравнение (8.69a) можно записать с помощью выражения (8.58) в следующем виде:

$$T^{*4} + A^{-1}T^* - A^{-1}B = 0, \quad (8.71)$$

где

$$A^{-1} = P^3 / (R_{p1} \xi) > 0$$

и

$$B = [(R_{p1} + 1)P + 1] \xi - \xi^2 > 0.$$

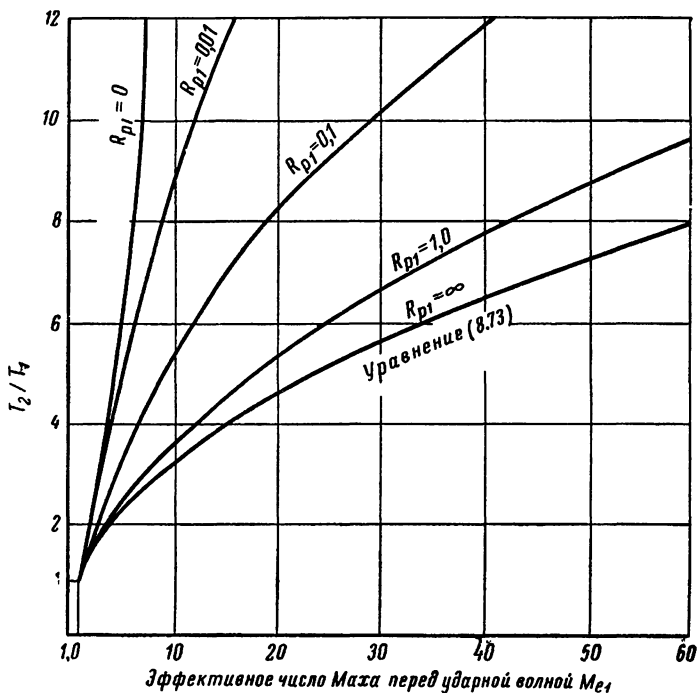


При  $R_{p1} \gg 1$   $A^{-1}T^* \ll T^{*4}$ . Следовательно,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T^*}{P} \approx \frac{(A^{-1}B)^{1/4}}{P} \approx \left[ 1 + \frac{8}{7}(M_{e1}^2 - 1) \right]^{1/4}. \quad (8.72)$$

При очень больших значениях  $M_{e1}$  уравнение (8.72) сводится к следующему:

$$T_2/T_1 = 1,033M_{e1}^{1/2}. \quad (8.72a)$$



Ф и г. 8.6. Отношение температур  $T_2/T_1$  на прямой ударной волне в идеальном газе без учета излучения и с учетом излучения.

Хорошо известно, что при отсутствии эффектов излучения отношение температур на ударной волне при больших значениях числа Маха ударной волны  $M_1$  пропорционально  $M_1^2$ . Из соотношения (8.72a) видно, что при наличии эффектов излучения при очень больших значениях числа Маха ударной волны отношение температур на ударной волне пропорционально только корню квадратному из эффективного числа Маха  $M_{e1}$ .

Для конечных значений  $R_{p1}$  (небольших по сравнению с единицей), но при условии, что все еще выполняется неравен-

ство  $A^{-1}T^* \ll T^{*4}$ ,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T^*}{P} = \frac{(A^{-1}B)^{1/4}}{P} \approx \left\{ \frac{R_{p1} + 1}{R_{p1}} + \frac{6(M_{e1}^2 - 1) [\gamma + 20(\gamma - 1)R_{p1} + 16(\gamma - 1)R_{p1}^2]}{7R_{p1} [1 + 12(\gamma - 1)R_{p1}]} \right\}^{1/4}. \quad (8.73)$$

Найдено, что уравнение (8.73) дает очень точные результаты при условии, что  $R_{p1} \gg 1$ .

Достаточно точные значения отношения температур  $T_2/T_1$  можно получить методом последовательных приближений. Результаты показаны на фиг. 8.6.

### 5. СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОЙ СРЕДЕ

Уравнения (8.59) определяют связь однородных состояний перед ударной волной и за ней. В действительности имеется переходная область, в которой параметры течения постепенно изменяются от значений перед ударной волной до значений за ней. Эта переходная область обычно тонкая, и во многих задачах ее можно рассматривать как поверхность разрыва. Интересно выяснить, каково основное влияние излучения на параметры течения в этой переходной области и как оно воздействует на толщину переходной области. Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо решить систему дифференциальных уравнений (8.55) с начальными и конечными условиями, определяемыми уравнениями (8.59). Общее решение уравнений (8.55) пока не получено. Однако на основании данных о структуре ударной волны в обычной газодинамике можно сделать некоторые общие выводы. Мы рассмотрим только случай, когда отсутствует магнитное поле. Запишем уравнения (8.55б) и (8.55в) в безразмерной форме

$$\frac{4}{3} \frac{\mu}{m} \xi \frac{d\xi}{dx} = T^* - T_\infty^*(\xi, R_p), \quad (8.74a)$$

$$\frac{K^*}{mC_p} \frac{dT^*}{dx} = T^* - T_0^*(\xi, R_p), \quad (8.74б)$$

где

$$T_\infty^* = -\xi^2 - \frac{1}{3} Q\xi T^{*4} + \left(1 + P + \frac{1}{3} QP^4\right) \xi, \quad (8.75a)$$

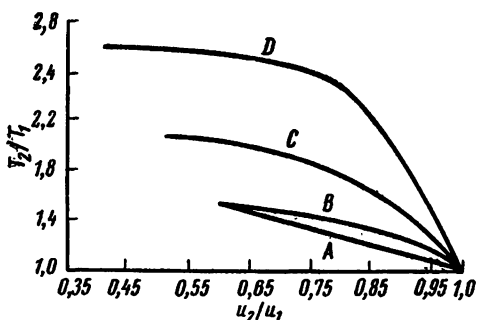
$$T_0^* = -(\gamma - 1) \left[ -\frac{1}{2} \xi^2 + (1 + P) \xi + Q\xi T^{*4} + \frac{1}{3} QP^4(\gamma - 4) - \frac{1}{2} - \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \right]. \quad (8.75б)$$

Исключая  $x$  из уравнения (8.74), получим

$$\frac{dT^*}{d\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)} = \frac{4}{3} \frac{Pr_R}{\gamma} \frac{T^* - T_0^*}{T^* - T_\infty^*}, \quad (8.76)$$

где  $Pr_R = \mu C_p / K^*$  — эффективное число Прандтля с учетом излучения.

Уравнение (8.76) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для  $T^*$  в зависимости от  $\xi$ . Независимо от того, является ли эффективное число Прандтля  $Pr_R$  постоянным или переменным, если  $0 < Pr_R < \infty$ , то уравнение (8.76) имеет особенность, когда числитель и знаменатель правой части уравнения (8.76) одновременно обращаются в нуль. Условия  $T^* = T_0^*$  и  $T^* = T_\infty^*$  приводят к соотношениям Ренкина — Гюгио на



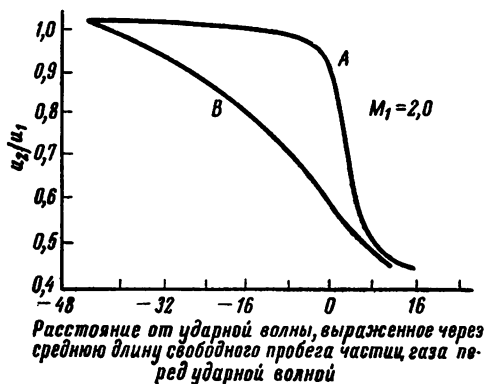
Фиг. 8.7. Изменение температуры со скоростью в переходной области ударной волны.

А —  $M = 1,5$  без учета излучения; В —  $M = 1,5$  с учетом излучения; С —  $M_1 = 2,0$  с учетом излучения; D —  $M_1 = 2,5$  с учетом излучения (фиг. 1 из работы [16]).

ударной волне в радиационной газодинамике (8.61) при  $h_1 = 0$ . Следовательно, два однородных состояния, определяемых уравнением (8.61), являются двумя особыми точками уравнения (8.76). Для нас представляют интерес интегральные кривые уравнения (8.76) в плоскости  $(\xi, T^*)$ , связывающие два однородных состояния  $\xi = 1$  и  $\xi = \xi_2$ . Поскольку при  $T^* = T_0^*$   $dT^*/d(1/2\xi^2) = 0$  и при  $T^* = T_\infty^*$   $dT^*/d(1/2\xi^2) = \infty$ , то интегральная кривая должна лежать между двумя кривыми  $T^* = T_0^*$  и  $T^* = T_\infty^*$  в плоскости  $(\xi, T^*)$ . В общем случае путем численного или графического интегрирования уравнения (8.76) получим

$$T^* = T^*(\xi). \quad (8.77)$$

Общий случай с конечным значением  $R_{p1}$  не был рассчитан. Гесс и Сен рассчитали случай, когда  $R_{p1}=0$ , но тепловой поток излучения имеет конечное значение. Результаты представлены на фиг. 8.7 и 8.8. Основной результат состоит в том, что эффекты излучения расширяют переходную область ударной волны. В случае конечного значения  $R_p$ , как следует из фиг. 8.5 и 8.6, отношение скоростей на ударной волне изменяется мало, а отношение температур на ударной волне уменьшается с увеличением  $R_{p1}$ . Это также приводит к увеличению толщины переходной области.



Фиг. 8.8. Распределение скоростей в переходной области ударной волны.

*A* — без учета излучения; *B* — с учетом излучения (фиг. 2 из работы [16]).

После того как найдена зависимость  $T^* = T^*(\xi)$ , можно получить выражение для  $x$ -координаты в переходной области простой квадратурой, а именно

$$\frac{\rho_1 u_1}{\mu_1} x = \frac{4}{3} \int \frac{\mu/\mu_1}{T^* - T_\infty^*} d\left(\frac{1}{2} \xi^2\right). \quad (8.78)$$

## 6. УДАРНАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ С КОНЕЧНОЙ СРЕДНЕЙ ДЛИНОЙ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ИЗЛУЧЕНИЯ

В двух последних разделах мы рассматривали только случай очень малого значения средней длины свободного пробега излучения, так что все радиационные члены могли быть представлены как простые функции температуры и некоторого среднего коэффициента поглощения, не зависящего от частоты. В случае конечного значения средней длины свободного пробега излучения все радиационные члены должны быть выра-

жены через интегральные формы, как было показано в разд. 2—6 гл. 5. Общего исследования до сих пор еще нет. Исследован единственный случай серого газа с пренебрежимо малым значением числа давления излучения, но с конечным значением числа теплового потока излучения. Основные уравнения для переходной области ударной волны следующие [см. уравнения (8.55)]:

$$\rho u = \text{const} = m, \quad (8.79a)$$

$$-\frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + p + mu = \text{const} = mC_1, \quad (8.79б)$$

$$-\kappa \frac{dT}{dx} - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} + m \left( \frac{1}{2} u^2 + C_p T \right) - q_R = \text{const} = mC_2, \quad (8.79в)$$

где  $q_R$  — тепловой поток излучения, определяемый уравнением (5.35) или для серого газа уравнением (8.80):

$$\begin{aligned} \frac{dq_R}{dx} &= \frac{ca_R}{2L_R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T^4(t) \varepsilon_1(|t - \tau|) dt - 2T^4(\tau) \right\} = \\ &= \frac{2ca_R}{L_R} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} T^3(t) \varepsilon_2(t - \tau) \frac{dT}{dt} dt - \int_{-\infty}^{\tau} T^3(t) \varepsilon_2(\tau - t) \frac{dT}{dt} dt \right\}, \quad (8.80) \end{aligned}$$

где  $\tau = \int_0^x (1/L_R) dx$  — оптическая толщина и  $L_R$  — средняя

длина свободного пробега излучения. В уравнении (8.80) мы предполагаем, что перенос тепла излучением на бесконечности не влияет на значение переноса тепла излучением при конечном значении  $x$ . Мы должны решить одновременно уравнения (8.79) и (8.80) или их эквивалентные выражения с граничными условиями, двумя однородными состояниями  $(u_1, T_1)$  и  $(u_2, T_2)$ , определяемыми соотношениями Ренкина — Гюгонно. Переходная область простирается от  $x = -\infty$ , где  $u = u_1$  и  $T = T_1$ , до  $x = +\infty$ , где  $u = u_2$  и  $T = T_2$ .

Основной особенностью настоящей задачи является введение нового диффузионного свойства переноса, а именно средней длины свободного пробега излучения  $L_R$  в дополнение к вязкости и теплопроводности в задаче о структуре ударной волны обычной газодинамики, где основную роль играет средняя длина свободного пробега между столкновениями частиц газа  $L_f$ . Поскольку отношение величин  $L_R$  и  $L_f$  может меняться в широких пределах, то будут иметь место новые явления, особенно когда  $L_R$  много больше  $L_f$ . Задача очень похожа на задачу о структуре ударной волны в химически реагирующей среде, где существенны явления релаксации и где может быть

введена длина релаксации  $L_r$ , характеризующая расстояние, на котором достигается химическое равновесие в переходной области ударной волны. Если  $L_r$  много больше  $L_f$ , то значительная часть переходной области, которая обычно рассматривается как невязкая и нетеплопроводная зона течения, определяется новым диффузионным свойством, обусловленным только химической реакцией. Если в химически реагирующем газе полностью пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то мы прежде всего получим ударную волну с разрывом температуры и скорости, как если бы это был химически не реагирующий газ. Кинетическая температура непосредственно за этим разрывом будет выше, чем конечная равновесная температура. Далее существует длинная переходная область, так называемая хвостовая область, в которой температура уменьшается от этого завышенного значения до конечного равновесного значения, как в невязком и нетеплопроводном газе. Такая ударная волна обычно называется частично диспергированной ударной волной. Если ударная волна довольно слабая, то из условий Ренкина — Гюгонио можно получить непрерывное решение для структуры ударной волны, пренебрегая вязкостью и теплопроводностью и учитывая только релаксационные явления. Это решение соответствует полностью диспергированной ударной волне.

Подобная же ситуация получается и для структуры ударной волны в излучающем газе. Если рассмотреть только эффект переноса тепла излучением, т. е. уравнения (8.79) и (8.80), то основной новой характеристикой в задаче о структуре ударной волны будет средняя длина свободного пробега излучения  $L_R$ . Если  $L_R$  много больше, чем  $L_f$ , то должна существовать некоторая зона переходной области, в которой поле течения будет определяться в основном величиной  $L_R$ . Следовательно, должно иметь место явление, подобное частично диспергированной и полностью диспергированной ударной волне в химически реагирующей среде. Однако в структуре ударной волны в химически реагирующем газе химическая реакция важна только за ударной волной и, следовательно, переходная область включает только заднюю хвостовую область. С другой стороны, явления переноса излучения могут быть существенны как перед, так и за основной переходной областью, и можно ожидать, что как перед, так и за этой основной областью будут существовать хвостовые области невязкого и нетеплопроводного газа. В случае частично диспергированной ударной волны передняя и задняя хвостовые области невязкого и нетеплопроводного газа могут разделяться поверхностью разрыва, т. е. идеальной ударной волной. В случае полностью диспергированной ударной волны передняя и задняя хвостовые области

невязкого и нетеплопроводного газа сопрягаются без разрыва. В области поверхности разрыва следует учитывать эффекты вязкости и теплопроводности и тогда поверхность разрыва заменится в действительности узкой переходной областью. В реальном воздухе  $L_R$  обычно много больше  $L_f$ , поэтому решение для структуры диспергированной ударной волны в излучающем газе справедливо в широком диапазоне условий. Сначала мы рассмотрим это решение.

**1. Диспергированная ударная волна в излучающем газе.** В этом случае мы пренебрегаем вязкими и теплопроводными членами в уравнениях (8.79) и решаем полученные уравнения с выражением для  $q_R$ , определяемым уравнением (8.80). Поскольку уравнения (8.79) в совокупности с выражением (8.80) представляют собой интегро-дифференциальные уравнения, то их решение очень затруднительно. Желательно преобразовать эти уравнения в систему, содержащую только дифференциальные уравнения.

Кларке [3] решил эту задачу с помощью следующего приближения:

$$e_2(t) = \frac{m_2^2}{3} \exp(-m_2 t), \quad (8.81)$$

где  $m_2 = 1,562$ . Это приближение обсуждалось в разд. 3. Из уравнений (8.79) — (8.81) можно получить единственное дифференциальное уравнение относительно  $u$  в зависимости от оптической толщины  $\tau$  в следующем виде:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left[ \left( u - \frac{a^2}{u} \right) \frac{du}{d\tau} \right] + \frac{2m_2^2}{3} \frac{8(\gamma-1)\sigma}{mR} \frac{d}{d\tau} \left[ T^3 \left( u - \frac{a_T^2}{u} \right) \frac{du}{d\tau} \right] - m_2^2 \left( u - \frac{a^2}{u} \right) \frac{du}{d\tau} = 0, \quad (8.82)$$

где

$$a_T = (RT)^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} \text{ — изотермическая скорость звука,} \quad (8.83)$$

и

$$T = (C_1 - u)u \quad (8.84)$$

$$\sigma = \frac{1}{4} c a_R.$$

Если проинтегрировать уравнение (8.82) по  $\tau$  и подставить условия, соответствующие однородному состоянию, то получим следующее уравнение:

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} F(v) + C(1-v)^3 v^3 (2v-1) \frac{dv}{d\tau} + m_2^2 F(v) = 0, \quad (8.85)$$

где

$$v = \frac{u}{C_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{u}{u_1 + u_2}, \quad (8.86)$$

$$F(v) = (v_1 - v)(v - v_2) \quad (8.87)$$

и

$$C = \frac{32m_2^2(\gamma - 1)C_1^6}{3m(\gamma + 1)R^4}. \quad (8.88)$$

Поскольку  $u_1$  и  $u_2$ , а затем  $v_1$  и  $v_2$  определяются соотношением Ренкина — Гюгонио для идеального газа с постоянным значением  $\gamma$ , то значение  $v$  будет заключено в пределах от 1 до  $(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  и будет равно  $1/2$  при  $u = a_T$  и  $\gamma/(\gamma + 1) = v^*$  при  $u = a = 1/2(u_1 + u_2)$ .

Теперь, если обозначить

$$z = \frac{dv}{d\tau}, \quad (8.89)$$

то уравнение (8.85) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$-\frac{dz}{dv} = \frac{2z^2 + C(v - v^*)^3(2v - 1)z + m_2^2(v_1 - v)(v - v_2)}{2(v - v^*)z}. \quad (8.90)$$

Уравнение (8.90) подобно уравнению (8.76), определяющему структуру ударной волны. Уравнение (8.90) также имеет две особые точки, соответствующие двум однородным состояниям, т. е.  $z=0$ ,  $v=v_1$  и  $z=0$ ,  $v=v_2$ . Кларке [3] исследовал эти особые точки. Нам желательно также найти интегральную кривую, соединяющую эти особые точки. В общем случае эта интегральная кривая определяется численным интегрированием. Чтобы выявить некоторые существенные особенности, рассмотрим предельный случай.

Прежде всего введем новую переменную  $y$

$$y = \tau/C. \quad (8.91)$$

Тогда уравнение (8.85) примет вид

$$-\varepsilon \frac{d^2F(v)}{dy^2} + (v - v^*)^3(2v - 1) \frac{dv}{dy} + m_2^2 F(v) = 0, \quad (8.92)$$

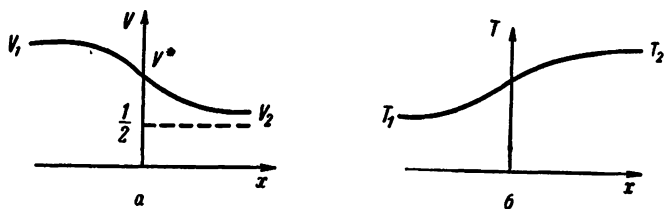
где  $\varepsilon = C^{-2}$ . В предельном случае  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированном значении  $y$  уравнение (8.92) имеет следующий вид:

$$\frac{(v - v^*)^3(2v - 1)}{(v_1 - v)(v - v_2)} \frac{dv}{dy} = -m_2^2. \quad (8.93)$$

Из уравнения (8.93) следует, что уравнение (8.92) имеет непрерывное решение с конечной производной  $dv/dy$  всюду от  $v=v_1$  до  $v=v_2$  при условии, что  $v > 1/2$ . На фиг. 8.9 представлены схемы непрерывного решения. Несмотря на то, что мы предположили  $\mu = \kappa = 0$ , как скорость, так и температура меняются непрерывно от значений состояния 1 до значений со-



стояния 2. Однако если  $v_2 \leq 1/2$ , то скорость вначале плавно уменьшается от величины  $v = v_1$  до величины  $v = v_c > v_2$ , при которой производная  $dv/dy$  принимает значение, равное бесконечности. Следовательно, в этом случае нельзя получить непрерывное решение. Физически это означает, что за этой критической точкой, где  $dv/dy = \infty$ , следовало бы принимать во внимание вязкость и теплопроводность. Обычно в переходной области ударной волны в радиационной газодинамике скорость сначала



Фиг. 8.9. Решение для случая полностью диспергированной ударной волны в излучающем газе.

*a* — распределение скоростей; *b* — распределение температур.

плавно уменьшается до некоторого критического значения, если интенсивность ударной волны велика. По достижении этого критического значения происходит резкий скачок скорости, в



Фиг. 8.10. Решение для случая частично диспергированной ударной волны в излучающем газе.

*a* — распределение скоростей; *b* — распределение температур.

результате которого она достигает значений, близких к  $v_2$  или  $u_2$ , и затем постепенно уменьшается до конечного значения однородного состояния  $u_2$  (фиг. 8.10).

Диспергированная ударная волна в излучающем газе впервые была исследована Прокофьевым [13] в 1952 г. Он нашел

полностью диспергированную ударную волну, но не заметил возможности существования частично диспергированной ударной волны. В 1957 г. Зельдович [21] указал на существование частично диспергированной волны в излучающем газе и привел достаточное условие появления непрерывного профиля в модели Прокофьева, а именно условие, что число Маха ударной волны должно удовлетворять неравенству

$$M_1^2 > M_y^2 = 2(\gamma - 1)/[\gamma(2 - \gamma)] \quad (8.94)$$

( $M_y^2 \ll 4,20$  при  $\gamma \leq 5/3$ ) или требованию, чтобы температура в набегающем потоке была достаточно низка. В США Кларке [3] независимо исследовал задачу Прокофьева в 1962 г. и получил те же результаты. Кларке не обнаружил частично диспергированной ударной волны с поверхностью разрыва в переходной области из-за того, что он допустил ошибку при «сшивании» решений для передней и задней хвостовых областей. Задача Кларке была вновь исследована Хислетом и Болдуином [5], которые определили приближенную границу между полностью и частично диспергированной ударными волнами в излучающем газе и нашли как непрерывный, так и разрывной профили ударных волн в различных режимах. Хислет и Болдуин обнаружили, что: а) в случае слабой ударной волны и сильного излучения справедливо непрерывное решение, т. е. имеет место полностью диспергированная ударная волна, и б) в случае сильной ударной волны и слабого излучения имеет место частично диспергированная ударная волна, в которой интенсивность разрыва зависит от полной интенсивности ударной волны и от интенсивности переноса тепла излучением.

**2. Диспергированная ударная волна в излучающем газе при наличии поперечного магнитного поля.** Митчнер и Винокур [7] рассмотрели ту же задачу, но при наличии и отсутствии поперечного магнитного поля. Вообще, если рассматривать влияние электромагнитного поля на структуру ударной волны, то следует ввести новое диффузионное свойство среды, а именно ее электропроводность. Это свойство обычно оказывает влияние на эффект сглаживания в переходной области. Однако Митчнер и Винокур не всесторонне изучили влияние электропроводности, поскольку они рассматривали только случай бесконечной электропроводности. В их исследовании было использовано дифференциальное приближение для члена, учитывающего перенос излучением, такое, как уравнение (8.81). Их приближение состоит в замене интегральной формы теплового потока излучения (8.80) следующей системой дифференциальных урав-

нений:

$$\frac{dq_R}{d\tau} = c(a_R T^4 - E_R), \quad (8.95a)$$

$$E_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a_R T^4(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt, \quad (8.95б)$$

$$\frac{dp_R}{d\tau} = -\frac{1}{c} q_R, \quad (8.95в)$$

$$p_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a_R T^4(t) \varepsilon_3(|\tau - t|) dt, \quad (8.95г)$$

$$p_R = \frac{1}{3} E_R. \quad (8.95д)$$

Уравнение (8.95д) известно как приближение Милна — Эддингтона, выполняющееся точно в условиях термодинамического равновесия.

Для случая отсутствия магнитного поля Митчнер и Винокур точнее определили пределы существования полностью диспергированной ударной волны. Влияние увеличения напряженности магнитного поля состоит в ослаблении роли излучения как сглаживающего фактора.

**3. Вязкое решение, определяющее структуру ударной волны в излучающем газе.** Вблизи поверхности разрыва следует рассмотреть влияние вязкости и теплопроводности. Эта проблема была исследована Троготтом [17]. Интегральное выражение для теплового потока излучения (8.80) он заменил следующим уравнением:

$$\frac{d^2 q_R}{d\tau^2} - 3q_R + 16\sigma T^3 \frac{dT}{d\tau} = 0. \quad (8.96)$$

Интересно отметить, что в случае оптически толстой среды первый член уравнения (8.96) пренебрежимо мал и мы получаем диффузионный предел Росселанда. В случае оптически тонкой среды второй член уравнения (8.96) может быть отброшен и получается обычное выражение для случая оптически тонкой среды.

Троггт нашел решения уравнений (8.79) и (8.96) с помощью соотношений Ренкина — Гюгонно при различных условиях. В его результатах содержатся как полностью диспергированная, так и частично диспергированная ударные волны. Когда в рассмотрение включаются вязкость и теплопроводность, то поверхность разрыва, получающаяся при исследовании невязкой среды, заменяется узкой переходной областью. При наличии сильного

переноса излучения толщина переходной области увеличивается и распределение температуры в переходной области стремится к изотермическому. Однако в некоторых случаях температура за ударной волной резко возрастает. Изменение средней длины свободного пробега излучения с температурой оказывает, как показал Троггт, большое влияние на распределение температуры в переходной области ударной волны. Например, если при одном и том же числе Маха ударной волны использовать уравнение (7.49) с положительным  $m_1$ , то превышение температуры исчезает, в то время как при использовании выражения (7.50) получается большое превышение температуры.

Скала и Сэмпсон исследовали структуру ударной волны с учетом излучения и химических реакций для двух предельных случаев: для оптически толстой среды с использованием выражения Росселанда (5.21) и оптически тонкой среды с использованием выражения, подобного (6.43) или (6.45). В случае оптически толстой среды результат подобен полученному Сенон и Гессом при малых числах Маха и влияние излучения сказывается здесь в увеличении толщины ударной волны. Скачка температуры при переходе через ударную волну не происходит. Основное влияние излучения проявляется в передней хвостовой области ударной волны. Скала и Сэмпсон рассчитали три случая чисел Маха ударной волны 12,5; 25 и 50 и нашли, что в этом диапазоне чисел Маха скорость увеличения толщины ударной волны вследствие излучения уменьшается при увеличении числа Маха. При  $M_1=50$  излучение оказывает очень слабое влияние на толщину ударной волны.

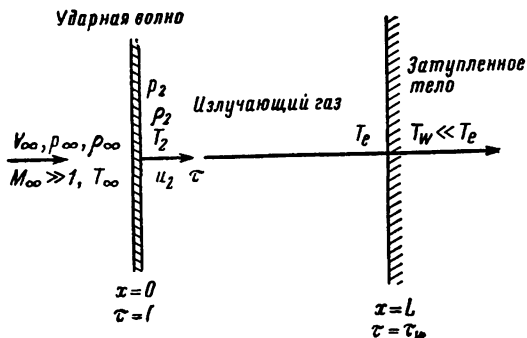
В случае оптически тонкой среды Скала и Сэмпсон также обнаружили превышение температуры в переходной области и нашли, что основное влияние излучения сказывается в хвостовой части ударной области. Если учесть влияние равновесной диссоциации, то химическая энергия, требуемая для диссоциации, действует в направлении уменьшения температуры в переходной области ударной волны. Следовательно, при одинаковых числах Маха ударной волны излучение оказывает большее влияние в недиссоциирующем газе по сравнению с диссоциирующим.

## 7. ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ ЗА УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

В последних двух разделах мы рассматривали поле течения только в изолированной ударной волне. В реальных условиях следует рассматривать ударную волну, связанную с некоторыми телами. Поскольку тепловое излучение воздействует как на напряжения, так и на энергию в поле течения, поле течения в излучающем газе будет сильно отличаться от поля течения в неиз-

лучающем газе. Однако в настоящее время в практически наиболее важных задачах течений давление излучения обычно пренебрежимо мало, а перенос тепла излучением существен. Поэтому представляет интерес исследовать изменение поля течения под влиянием только переноса тепла излучением. В этом разделе мы рассмотрим случай очень больших значений числа Рейнольдса, и поэтому вне пограничного слоя или тонкой переходной области ударной волны газ будем считать невязким и нетеплопроводным. Мы рассмотрим два типичных случая: поле течения за головной ударной волной перед затупленным телом и поле течения за косой ударной волной.

**1. Поле невязкого течения за отошедшей ударной волной перед затупленным телом.** Рассмотрим случай гиперзвукового обтекания затупленного тела. В окрестности критической точки



Фиг. 8.11. Идеализированная схема излучающей области за ударной волной при гиперзвуковой скорости обтекания.

течение можно идеализировать одномерной моделью, показанной на фиг. 8.11. Поверхность тела можно заменить плоской стенкой. Отошедшая прямая ударная волна отстоит от стенки на расстоянии  $L$ . Перед ударной волной имеется равномерный гиперзвуковой поток с  $M_\infty \gg 1$ . Предположим, что толщина ударной волны настолько мала, что ее можно заменить поверхностью разрыва. Параметры состояния  $T_2, \rho_2, \rho_2$  и скорость  $u_2$  непосредственно за ударной волной можно определить по их значениям в набегающем потоке с помощью соотношений Ренкина — Гюгонио. Вследствие очень высокой скорости набегающего потока температура в области за ударной волной и перед телом будет высока, так что необходимо принять во внимание перенос тепла излучением в этой области. За исключением области пограничного

слоя около тела, вязкостью и теплопроводностью можно пренебречь, и для описания течения при значениях  $\mu = \kappa = 0$  в этой области излучающего газа за ударной волной, т. е. при  $0 \leq x \leq L$ , где значения  $x=0$  и  $\tau=0$  соответствуют ударной волне и  $x=L$ ,  $\tau=\tau_w$  соответствуют поверхности стенки, можно использовать уравнение (8.79) при  $\mu = \kappa = 0$ . Теперь мы должны найти выражение для теплового потока излучения  $q_R$  в области сжатого слоя. В невозмущенном потоке температура низка, так что тепловым излучением в нем можно пренебречь. Фронт ударной волны можно рассматривать как прозрачную поверхность и, следовательно, коэффициент поглощения и коэффициент отражения на ударной волне равны нулю. Поверхность тела предполагается черной, а температура стенки  $T_w$  много меньше, чем температура газа  $T_2$ . Следовательно, излучением поверхности тела можно также пренебречь. В результате требуется рассмотреть тепловое излучение только в сжатом слое  $0 \leq x \leq L$ . Далее предположим, что газ является серым. Тепловой поток излучения  $q_B$  определяется уравнением (5.45) при значениях  $q_R(0) = q_R(\tau_w) = 0$ ,  $\tau_2 = \tau_w$ , т. е.

$$q_R(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_w} 2\sigma T^4 \varepsilon_2(t - \tau) dt - \int_0^{\tau} 2\sigma T^4 \varepsilon_2(\tau - t) dt, \quad (8.97)$$

$$\frac{dq_R(\tau)}{d\tau} = -4\sigma T^4 + \int_0^{\tau_w} 2\sigma T^4 \varepsilon_1(|t - \tau|) dt. \quad (8.98)$$

Применительно к ударной волне, движущейся с гиперзвуковой скоростью относительно невозмущенного воздуха,  $M_\infty \gg 1$ , можно использовать следующие приближения:

$$а) h_2 \gg \frac{1}{2} u_2^2,$$

где  $h$  — энтальпия газа.

$$б) -\frac{1}{p} \frac{dp}{dx} \approx \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \ll \frac{1}{L}.$$

Важное следствие приближения «б» состоит в том, что течение за прямой гиперзвуковой ударной волной в основном является течением с постоянным давлением.

При этих приближениях из уравнения (8.79) при  $\mu = \kappa = 0$  и уравнения (8.98) получаем основное соотношение для распределения температуры в сжатом слое

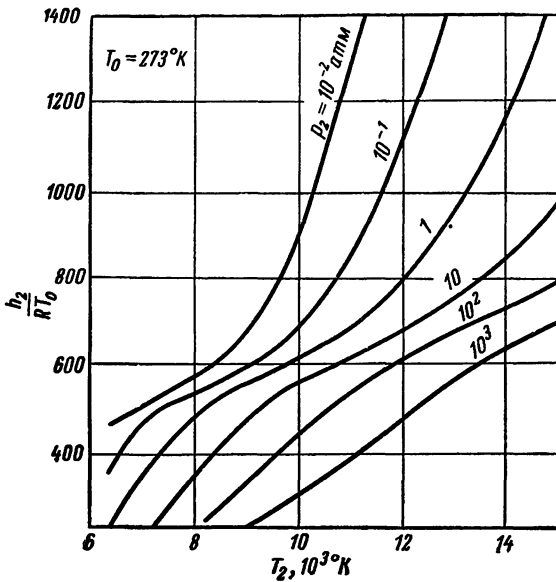
$$-\rho_\infty u_\infty dh = \left[ 4\sigma T^4 - \int_0^{\tau_w} 2\sigma T^4 \varepsilon_1(|t - \tau|) dt \right] d\tau. \quad (8.99)$$

Чепмен и Иосикава решили уравнение (8.99) для гиперзвуковой ударной волны, распространяющейся в воздухе. В случае высокотемпературного воздуха следует учитывать влияние диссоциации и релаксации. Удельная теплоемкость при постоянном давлении — переменная величина. Можно считать, что непосредственно за ударной волной воздух находится в равновесных условиях. Следовательно, имеется определенное соотношение между энтальпией, температурой и давлением. На фиг. 8.12 представлена энтальпия воздуха как функция температуры  $T_2$  при различных давлениях  $p_2$ . Давление  $p_2$  и плотность  $\rho_2$  непосредственно за ударной волной являются функциями скорости набегающего потока и высоты, как показано на фиг. 8.13. Температура  $T_2$  и плотность  $\rho_2$  непосредственно за ударной волной являются функциями скорости набегающего потока и высоты, как показано на фиг. 8.14. Подходящим средним значением для коэффициента поглощения излучения в выражениях (8.98) и (8.99) можно считать средний коэффициент поглощения Планка, который является функцией температуры и давления воздуха, как это можно видеть из фиг. 8.15. Используя данные, приведенные на фиг. 8.12—8.15, Чепмен и Иосикава вычислили распределение температуры в сжатом слое при  $T_2 = 15\,000^\circ\text{K}$  и  $p_2 = 10\text{ атм.}$  Результаты представлены на фиг. 8.16. В случае оптически тонкой среды, а именно при  $\tau_w = 0,2$ , температура  $T$  падает почти линейно от значения  $T_2$  до значения температуры газа на стенке  $T_e$ . Последняя может отличаться от температуры стенки или от температуры тела. С другой стороны, в случае оптически толстой среды  $\tau_w = \infty$  температура на большей части сжатого слоя постоянна, как показано на фиг. 8.16.

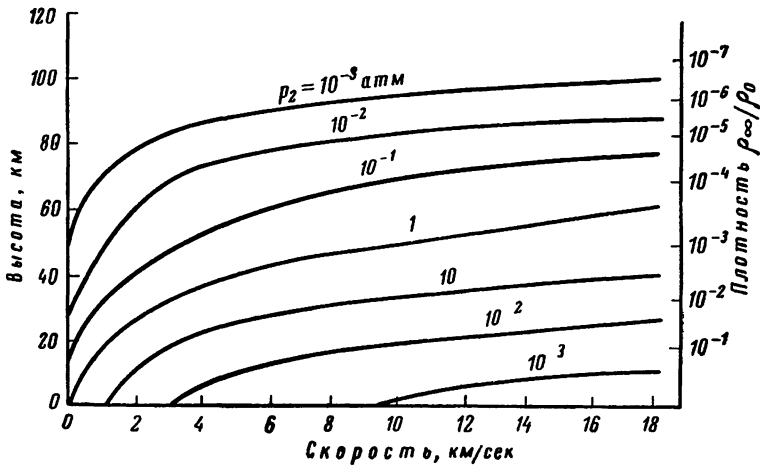
Чепмен и Иосикава указали, что в рассматриваемой задаче имеются три характерные длины. Одна из них — это расстояние  $L$  отхода ударной волны. Вторая — длина затухания излучения  $L_d$ , которая определяется соотношением

$$L_d = \frac{\rho_\infty u_\infty^2 h_2 L_R}{4\sigma T_2^4} = \frac{1}{2} \frac{\rho_\infty u_\infty^3 L_R}{4\sigma T_2^4} \quad (8.100)$$

и представляет собой длину, на которой теряется вся энергия излучения постоянной интенсивности в области за прямой ударной волной. Третья длина — это средняя длина свободного пробега излучения  $L_R$ , которая характеризует поглощение излучения. В случае высокой плотности  $L_d \gg L_R$ , так что поглощение преобладает над затуханием излучения, а в случае низкой плотности  $L_d \ll L_R$ , так что затухание излучения преобладает над поглощением. Отношения расстояния отхода ударной волны от

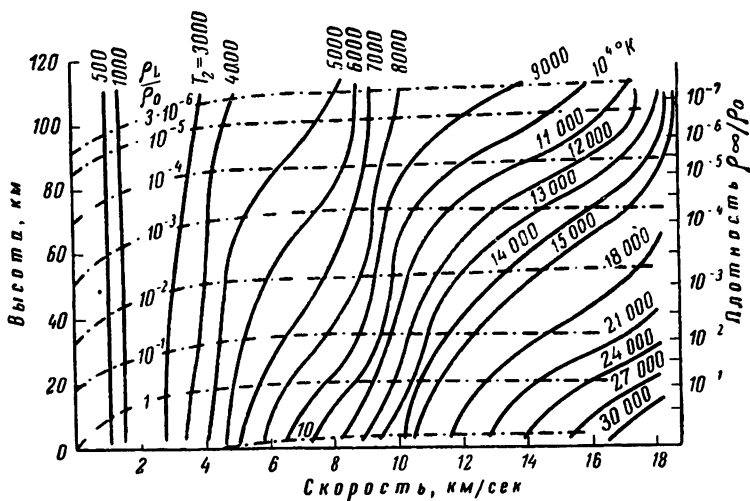


Фиг. 8.12. Энтальпия воздуха при постоянном давлении (фиг. 2 из работы [20]).

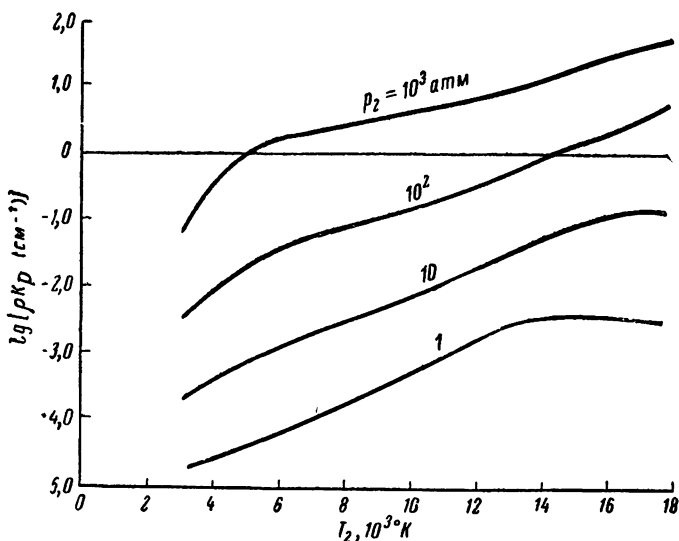


Фиг. 8.13. Давление за прямой ударной волной (фиг. 5 из работы [20]).  
 $\rho_0$  — плотность при стандартных условиях на уровне моря.





Фиг. 8.14. Температура и плотность за прямой ударной волной в стандартной атмосфере (фиг. 6 из работы [20]).



Фиг. 8.15. Средний коэффициент поглощения по Планку  $\rho K_p$  для воздуха (фиг. 7 из работы [20]).

стенки к  $L_R$  и  $L_d$  являются общими характеристиками излучающего газа. Чепмен и Иосикава нашли, что если

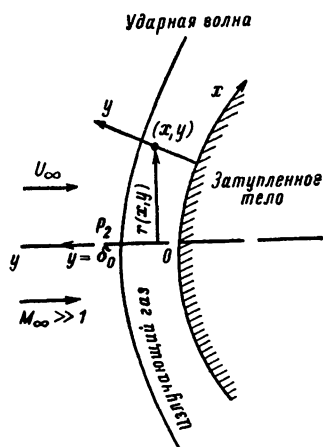
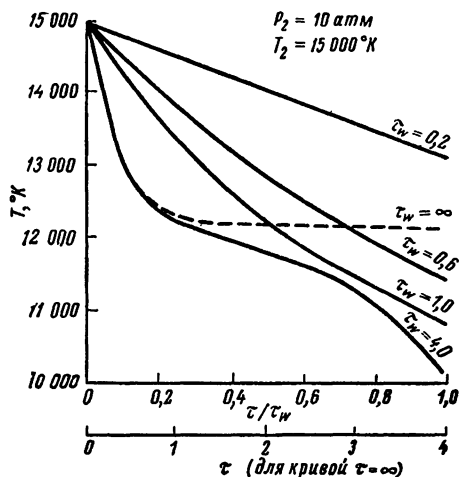
$$L \leq \frac{L_c}{10}, \quad (8.101a)$$

то тепловой поток излучения будет таким, как в изотермическом газе (см. гл. 9), и если

$$L \geq \frac{L_c}{10}, \quad (8.101b)$$

то тепловой поток излучения будет таким, как при излучении черного тела, когда  $L_c$  — меньшая из величин  $L_d$  и  $L_R$ .

Приведенный выше упрощенный анализ можно уточнить, если принять во внимание влияние кривизны тела и линий тока.



Фиг. 8.16. Распределение температуры в функции оптической толщины (фиг. 11 из работы [20]).

Фиг. 8.17. Отходящая ударная волна перед затупленным телом в гиперзвуковом потоке.

Поскольку в гиперзвуковом течении, которое нас интересует, сжатый слой тонок, а радиус кривизны тела велик, то удобнее использовать криволинейную систему координат, в которой координатой  $x$  является поверхность тела, а система ортогональных к ней линий определяет  $y$ -координату, как показано на фиг. 8.17. В этой криволинейной системе координат течение в сжатом слое будет описываться следующей системой уравнений:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r^{\delta} \rho u}{\partial x} + \frac{\partial K^* r^{\delta} \rho v}{\partial y} = 0, \quad (8.102a)$$

где  $K^* = 1 + K_y$  — кривизна тела;  $\delta = 0$  для плоского течения и  $\delta = 1$  для осесимметричного течения;  $r$  — расстояние от оси симметрии;

б) уравнение движения в направлении  $x$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + K^* \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + K^* \rho u v = - \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (8.102б)$$

в) уравнение движения в направлении  $y$

$$\rho \frac{u}{K^*} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho u^2 = - \frac{dp}{dy}; \quad (8.102в)$$

г) уравнение энергии

$$\rho \frac{u}{K^*} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} + Q_R = 0, \quad (8.102г)$$

где  $h$  — энтальпия газа.

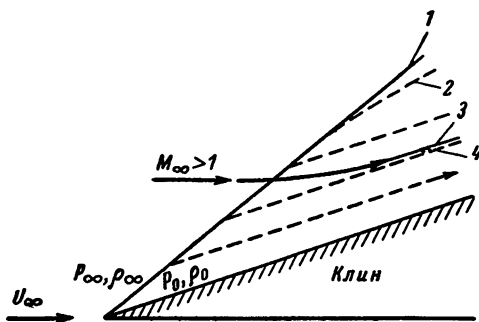
Уравнения (8.102) должны быть решены с учетом граничных условий на фронте ударной волны и на поверхности тела  $y=0$ . Вследствие сложной геометрической конфигурации интегральное выражение для  $Q_R$  становится очень сложным в реальных случаях и до сих пор оно еще не исследовано. Исследованы только некоторые простые приближения. Одним таким приближением является одномерная модель, показанная на фиг. 8.11, в которой кривизна тела предполагается равной нулю и все переменные считаются функциями только  $y$ , когда речь идет об оценке члена  $Q_R$ , учитывающего перенос тепла излучением [4, 20]. Другое упрощающее предположение связано с использованием следующего выражения для  $Q_R$ , справедливого в случае оптически тонкой среды:

$$Q_R = 4\pi r K_p B. \quad (8.103)$$

В статье [19] задача с выражением (8.103) была решена интегральным методом для сферы при скоростях полета 900—18 000 м/сек на высотах 58 и 61 км. Результаты были сопоставлены с результатами решения без учета переноса тепла излучением. Было найдено, что форма ударной волны и распределение давления по поверхности почти совпадают вплоть до звуковой линии. Разница в профилях скорости незначительна, но имеются существенные различия в профилях статической и полной энтальпии.

**2. Поле течения за косыми ударными волнами.** Мы рассмотрим двумерное стационарное поле течения с косыми ударными

волнами, например обтекание клина или тела с оживальной поверхностью. Для упрощения задачи рассмотрим клин в сверхзвуковом потоке совершенного газа (фиг. 8.18). При отсутствии эффектов излучения образуется прямолинейная ударная волна



Фиг. 8.18. Обтекание излучающим газом клина с присоединенной ударной волной.

1 — прямолинейная ударная волна при отсутствии излучения; 2 — криволинейная ударная волна при наличии излучения; 3 — линия тока при наличии излучения; 4 — прямолинейные линии тока при отсутствии излучения.

$y_s = x_s \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона ударной волны и индекс  $s$  относится к значениям на ее фронте. Течение будет однородным как перед фронтом (индекс 1), так и за ним (индекс 2). Если мы выберем системы координат перед ударной волной и за ней таким образом, что  $y$ -компонента скорости газа будет равна нулю при отсутствии излучения, то уравнения радиационной газодинамики с учетом возмущений первого порядка примут следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (8.104a)$$

$$\rho_0 U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8.104б)$$

$$\rho_0 U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8.104в)$$

$$\rho_0 U_0 \frac{dU_m}{dx} + p_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Q_R = 0, \quad (8.104г)$$

где индекс 0 относится к значениям в однородном потоке без излучения, а переменные без индекса представляют собой возмущенные параметры. Внутренняя энергия возмущенного движения  $U_m = C_v T$ , а член, учитывающий перенос тепла излучением в возмущенном движении  $Q_R$ , равен  $\nabla \cdot \mathbf{q}_R$ . Точное выра-

жение для  $Q_R$  зависит от свойств излучения газа, как будет показано позже.

Чтобы найти решение уравнений (8.104), нужны граничные условия на фронте ударной волны и на поверхности клина. На поверхности клина нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (8.105)$$

На фронте ударной волны выполняются определенные соотношения между параметрами  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $p_s$  и т. д. возмущенного течения и углом  $\alpha$  возмущенной ударной волны, которые получаются при подстановке возмущенных значений параметров в соотношения Ренкина — Гюгионо. В общем виде эти соотношения могут быть получены в следующей форме:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_s v_s + A, & \frac{p_s}{p_0} &= B_s v_s + B, \\ \frac{\rho_s}{\rho} &= C_s v_s + C, & \frac{u_s}{U_0} &= D_s v_s + D, \end{aligned} \quad (8.106)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  зависят от влияния излучения перед ударной волной. В большинстве случаев влияние излучения перед ударной волной пренебрежимо мало и тогда величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  равны нулю. Множители  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $D_s$  зависят от свойств газа. Для совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей  $\gamma$

$$A_s = \left( \frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1 \right)^{-1} \left( 1 + \frac{D_s}{\operatorname{tg} \alpha_0} \right), \quad (8.107a)$$

$$D_s = \frac{\left( \frac{1}{U_0} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right) (1 + M^2 \gamma \sin^2 \alpha_0) \right] \operatorname{ctg} \alpha_0}{1 + \frac{1}{2} M^2 (\gamma - 1) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 \right) (1 + M^2 \gamma \sin^2 \alpha_0)}, \quad (8.107b)$$

$$B_s = -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho_0 U_0}{P_0} \right) \sin^2 \alpha_0 \left[ D_s \left( \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \operatorname{ctg} \alpha_0 \right) + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} - 1 \right], \quad (8.107b)$$

$$C_s = \frac{1}{U_0} \left( 1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right) \operatorname{ctg} \alpha_0 + \left[ \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \operatorname{cosec}^2 \alpha_0 - \left( 1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right) D_s \right] \frac{1}{U_0}. \quad (8.107g)$$

Решения уравнений (8.104) должны удовлетворять соотношениям (8.107) на фронте ударной волны. Уравнения (8.104) можно свести к одному уравнению. Например, для переменного  $v$  получим

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho_0 C_p T_0} \frac{\partial Q_R}{\partial y}, \quad (8.108)$$

где  $M$  — число Маха невозмущенного потока. Поскольку  $Q_R$  зависит от свойств невозмущенного потока и может рассматриваться как известная функция от  $x$  и  $y$ , то уравнение (8.108) представляет собой неоднородное волновое уравнение, если  $M > 1$ , и уравнение Пуассона, если  $M < 1$ . В работе [8] получены решения уравнения (8.108) для нескольких общих случаев. Чтобы проиллюстрировать влияние излучения, рассмотрим случай прозрачного газа, так что величина  $Q_R$  постоянна и, согласно уравнению (8.103), равна

$$Q_R = Q_{R0} = 4\rho_0 K_p \sigma T_0^4. \quad (8.109)$$

Теперь введем новые переменные

$$u^* = u - Q_{R0}^* (\operatorname{tg} \alpha_0) y - f_1(y), \quad (8.110a)$$

$$v^* = v + Q_{R0}^* (y - x \operatorname{tg} \alpha_0), \quad (8.110b)$$

где  $Q_{R0}^* = Q_{R0}/(\rho_0 C_p T_0)$  и  $f_1(y)$  — произвольная функция только  $y$ . Переменные  $u^*$  и  $v^*$  удовлетворяют следующим соотношениям для потенциала  $\varphi$ :

$$u^* = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v^* = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8.111)$$

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.112)$$

Если число Маха невозмущенного потока за ударной волной больше единицы, то

$$\varphi = \varphi_1(x + \beta y) + \varphi_2(x - \beta y), \quad (8.113)$$

где  $\beta^2 = M^2 - 1$  и  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные функции, которые определяются граничными условиями (8.105) и (8.106). Легко показать, что из уравнений (8.105), (8.106), (8.111) и (8.113) получаются следующие результаты:

$$\frac{v}{U_0} = \frac{Q_{R0}^* y}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0}, \quad \frac{p}{\rho_0 U_0^2} = - \frac{x Q_{R0}^* B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0},$$

$$\frac{u}{U_0} = \frac{x Q_{R0}^* B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{y Q_{R0}^* (B_s^* + D_s^*)}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0},$$

$$\frac{T}{T_0} = - \frac{Q_{R0}^* [M^2 (\gamma - 1) B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0 + 1] x}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0} + \quad (8.114)$$

$$+ \frac{Q_{R0}^* \{1 + [\beta^2 B_s^* - M^2 (\gamma - 1) (B_s^* + D_s^*)] \operatorname{tg} \alpha_0\} y}{\operatorname{tg} \alpha_0 (1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0)},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = - \frac{Q_{R0}^* (B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0 - 1) x}{1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0} -$$

$$- \frac{Q_{R0}^* \{1 + \beta^2 B_s^* - M^2 (\gamma - 1) (B_s^* + D_s^*) \operatorname{tg} \alpha_0\} y}{\operatorname{tg} \alpha_0 (1 + \beta^2 B_s^* \operatorname{tg} \alpha_0)},$$

где

$$B_s^* = B_s (\rho_0 / \rho_0 U_0) \text{ и } D_s^* = D_s U_0.$$

Жигулев и др. [22] приводят следующий пример.

Для клина с полууглом  $35^\circ$ , движущегося со скоростью  $M_\infty = 60$  на высоте  $60 \text{ км}$  ( $\rho_\infty = 3,49 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3$ ), известны следующие параметры:  $\alpha_0 = 7^\circ$ ;  $\rho_0 = 0,4 \text{ атм}$ ;  $\rho_0 = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$ ;  $T_0 = 12200^\circ \text{ К}$ ;  $\gamma = 1,4$ ;  $u_0^2 = 1,57 \cdot 10^{12} \text{ см}^2/\text{сек}^2$ ;  $Q_{R0} = 6,4 \times 10^9 \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}$ ;  $Q_{R0}^* L = 11,4\%$ ;  $\rho_0 K_P L = 0,15$ ;  $L = 1 \text{ м}$ , где  $L$  — характерная длина клина, равная одному метру. При этих данных уравнения (8.114) принимают следующий вид:

$$\frac{v}{U_0} = -0,075 \frac{y}{L}, \quad \frac{u}{U_0} = -0,002 \frac{x}{L} + 0,12 \frac{y}{L},$$

$$\frac{P}{\rho_0 U_0^2} = -0,002 \frac{x}{L}, \quad \frac{T}{T_0} = -0,121 \frac{x}{L} + 1,27 \frac{y}{L},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0,07 \frac{x}{L} - 1,27 \frac{y}{L}.$$

При  $x = 1\alpha/\alpha_0 = 6,5\%$  и на ударной волне линии тока имеют наклон  $\theta = -0,01 (x/L)$ . Исходя из этого, можно сделать вывод, что тепловое излучение оказывает влияние на поле течения при гиперзвуковом обтекании тела. В общем случае как температура, так и давление на поверхности тела уменьшаются с увеличением плотности. До сих пор мало исследовано поле течения, в котором температура столь высока, что приходится учитывать влияние давления излучения и плотности энергии излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Baldwin B. S., Jr., The Propagation of Plane Acoustic Waves in a Radiating Gas, NASA TR R-138, 1962.
2. Bethe H. A., Fuchs K., Hirschfelder J. O., Magee J. L., Peierls R. E., von Neumann J., Blast Wave, Chapter 3, Thermal

- Radiation Phenomena, Los Alamos Scientific Lab. Report LA-2000, March, 1958.
3. Clarke J. F., Radiation-Resisted Shock Waves, *Phys. of Fluids*, 5, 11, 1347 (Nov. 1962).
  4. Goulard R., Preliminary Estimates of Radiative Transfer Effects on Detached Shock Layers, *AIAA Journal*, 2, 3, 494 (March 1964); имеется русский перевод: Гулард, Предварительное исследование влияния излучения на сжатый слой за отошедшей ударной волной, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3 стр. 105 (1964).
  5. Heaslet M. A., Baldwin B. S., Predictions of the Structure of Radiation-Resisted Shock Waves, *Phys. Fluids*, 6, 6, 781 (June 1963).
  6. Marshak R. L., Effect of Radiation on Shock Wave Structure, *Phys. Fluids*, 1, 1, 24 (Jan. 1958).
  7. Mitchner M., Vinokur V., Radiation Smoothing of Shocks with and without a Magnetic Field, *Phys. Fluids*, 6, 12, 1682 (Dec. 1963).
  8. Olfe D. B., Radiation Perturbed Flow Fields of Normal and Oblique Shock Waves, AIAA Preprint № 64-69, Jan. 1964.
  9. Pai S. I., Speth A. I., The Wave Motions of Small Amplitude in Radiation-Electro-Magneto-Gasdynamics, Proc. 6th Midwest Conference on Fluid Mech. Univ. of Texas Press, 1959, pp. 446—466.
  10. Pai S. I., Speth A. I., Shock Waves in Radiation Magneto-Gasdynamics, *Phys. Fluids*, 4, 10, 1232 (Oct. 1961).
  11. Pomerantz J., The Influence of the Absorption of Radiation in Shock Tube Phenomena, U. S. Naval Ordnance Lab. Navord Report 6136, 1958.
  12. Прокофьев В. А., Распространение вынужденных плоских волн сжатия малой амплитуды в вязком газе с учетом собственного радиационного поля, *Изв. АН СССР, Механика и машиностроение*, № 2, стр. 17—33, 1960.
  13. Прокофьев В. А., К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном движении одноатомного газа, *Ученые записки МГУ, 172, Механика*, стр. 79—124, 1954.
  14. Sachs R. G., Some Properties of Very Intense Shock Waves, *Phys. Rev.*, 69, 9—10, 514 (May 1946).
  15. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Techn. Inf. Ser. R 63 SD 46, Space Sci. Lab. General Electric Co, Phil Pa., March 1963; Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer, Pergamon Press, 1964, pp. 319—354.
  16. Sen H. K., Guess A. W., Radiation Effects in Shock Wave Structure, *Phys. Rev.*, 108, 3, 560 (Nov. 1957).
  17. Traugott S. C., Shock Structure in a Radiating, Heat-Conducting and Viscous Gas, Martin Co. Research. Report RR 57, May 1964.
  18. Vincenti W. G., Baldwin B. S., Jr., Effects of Thermal Radiation on the Propagation of Plane Acoustic Waves, *Journ. Fluid Mech.*, 12, pt. 3, 449 (March 1962).
  19. Wilson K. H., Hoshizaki H., Inviscid, Non-Adiabatic Flow about Blunt Bodies, AIAA Preprint 64—70, Jan. 1964.
  20. Yoshikawa K. K., Chapman D. R., Radiative Heat Transfer and Absorption Behind a Hypersonic Normal Shock Wave, NASA TN D-1424, Sept. 1962.
  21. Зельдович Я. Б., Ударные волны большой амплитуды в воздухе, *ЖЭТФ*, 32, вып. 5, стр. 1126, 1957.
  22. Жигулев В. Н., Ромишевский Г. А., Вертушкин В. К., О роли радиации в современных проблемах газодинамики, *Инженерный журнал*, № 1, стр. 60, 1961.



## *Теплообмен в радиационной газодинамике*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Важность теплообмена излучением в инженерных задачах отмечалась давно, например при теплообмене в промышленных печах. Теплообмен излучением изучался Кирхгофом более 100 лет назад. В этих давних исследованиях теплообмен излучением рассматривался отдельно без взаимодействия с теплопроводностью и конвекцией. Существенной особенностью инженерной задачи переноса излучения, отличающей ее от астрофизической задачи, является внутреннее отражение, обусловленное наличием стенок. Задача может оказаться очень сложной вследствие сложности геометрии системы. Имеет смысл дать краткий обзор общих методов, использованных в анализе инженерной задачи излучения, который был бы полезен при изучении радиационной газодинамики. В разд. 2 мы рассматриваем теплообмен излучением в непоглощающей среде, а в разд. 3 — теплообмен излучением в поглощающей среде. Стоит отметить, что этот анализ важен для определения теплообмена космических кораблей, так как в дальнем космосе теплопроводность и конвекция пренебрежимо малы по сравнению с излучением.

В радиационной газодинамике мы должны учитывать совместное действие теплового излучения, теплопроводности и конвекции. Мы рассмотрим сначала совместное действие теплопроводности и теплового излучения в поглощающей среде между двумя параллельными пластинами в разд. 4. Одним из наиболее важных приложений таких комплексных задач является тепловой баланс в атмосфере Земли или других планет, который будет рассмотрен в разд. 5. В разд. 6 мы исследуем более общие случаи течения между двумя параллельными пластинами в радиационной магнитогазодинамике. Мы исследуем не только взаимодействие между конвекцией, теплопроводностью и тепловым излучением, но также и влияние электромагнитных полей на результирующий поток, так как такие задачи могут возникнуть при гиперзвуковом полете, в ядерных реакторах, реакциях деления и синтеза ядер, где температура среды может быть столь высока, что газ будет ионизован, и электромагнитные поля будут играть важную роль.

Так как основные уравнения радиационной газодинамики являются нелинейными дифференциальными уравнениями, то очень трудно решать задачи течения в общем случае. Многие приближения, используемые в обычной газодинамике, могут быть использованы и в радиационной газодинамике. Одним таким приближением является приближение пограничного слоя, которое полезно в случае больших чисел Рейнольдса. Так как в гиперзвуковом потоке числа Рейнольдса очень велики, то можно использовать приближение пограничного слоя для решения задачи теплообмена. В разд. 7 мы рассмотрим течение в пограничном слое в задачах радиационной газодинамики. Одной из наиболее интересных насущных задач является радиационный теплообмен в точке торможения управляемых кораблей, входящих в земную атмосферу со сверхорбитальной скоростью. Мы рассмотрим эту задачу в разд. 8.

В заключение в разд. 9 будут рассмотрены некоторые другие задачи теплообмена излучением.

## 2. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

В дальнем космосе атмосфера практически отсутствует и перенос тепла осуществляется только излучением. Ввиду отсутствия среды в дальнем космосе, через который проходят лучи, излучение не поглощается. Мы должны рассмотреть взаимодействие лучей с поверхностью тела. Следовательно, анализ теплообмена излучением в дальнем космосе точно такой же, как и для непоглощающей среды, в которой пренебрежимо малы как теплопроводность, так и конвекция.

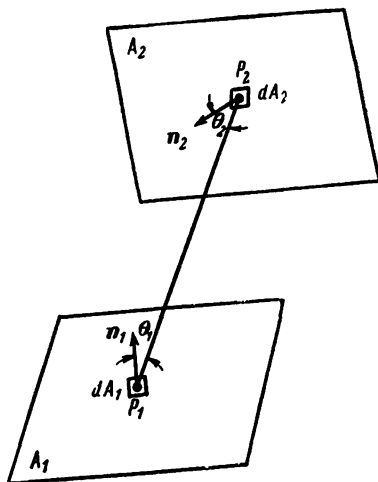
Мы рассмотрим две диффузно излучающие поверхности  $A_1$  и  $A_2$  и определим теплообмен излучением между ними. Пусть  $dA_1$  и  $dA_2$  — элементарные площадки на этих поверхностях в точках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно (фиг. 9.1). Расстояние между  $P_1$  и  $P_2$  равно  $r$ . Предположим, что обе поверхности являются серыми излучателями с постоянными излучательной и отражательной способностями. Предположим далее, что температура каждой поверхности постоянна, так что плотность потока излучения поверхности постоянна. Например, плотность потока излучения черного тела определяется как [см. уравнения (4.29) и (6.40)]

$$E_b = \sigma T^4, \quad (9.1)$$

а плотность потока эффективного излучения поверхности — как

$$R_a = e_w E + r_w G, \quad (9.2)$$

где  $e_w$  — коэффициент излучения поверхности (6.30);  $r_w$  — коэффициент отражения поверхности (6.23);  $E$  — плотность потока излучения черного тела при температуре поверхности и  $G$  — плотность потока, падающего на поверхность излучения.



Фиг. 9.1. Теплообмен излучением между двумя диффузными поверхностями.

Энергия излучения, испускаемая элементом  $dA_1$  и падающая на поверхность  $dA_2$ , будет равна

$$dE_{12} = \frac{R_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 = R_1 dF_{12}. \quad (9.3)$$

Подобное выражение можно получить для энергии излучения, испускаемой элементом  $dA_2$  и падающей на  $dA_1$ , т. е.  $dE_{21} = R_2 dF_{12}$ . Интегрирование по двум поверхностям дает полную энергию излучения, передаваемую от одной поверхности к другой, в виде следующего выражения:

$$E_{12} = R_1 A_1 F_{12}, \quad (9.4)$$

где

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \int_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (9.5)$$

и величина  $F_{ij}$  известна как угловой коэффициент поверхности  $A_i$  по отношению к  $A_j$ . Иногда ее называют геометрическим коэффициентом или конфигурационным коэффициентом. Суще-

ствуют три метода расчета уравнения (9.4). Они известны как метод многократных отражений<sup>1)</sup>, метод сетки<sup>2)</sup> и расчетный метод. Рассмотрим вкратце эти три метода.

**1. Метод многократных отражений.** Это старейший метод, впервые использованный Кирхгофом в 1899 г. Этот метод основан на непосредственном подсчете всех отраженных лучей. Мы уже использовали его в гл. 6, разд. 6. В настоящем случае  $\tau=0$  и полный поток излучения на единицу площади от бесконечной пластины 1 к параллельной бесконечной пластине 2 будет равен (см. фиг. 6.4)

$$q_{R12} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{w1} e_{w2} r_{w1}^n r_{w2}^n \sigma T_1^4 = \frac{\sigma T_1^4}{\frac{1}{e_{w1}} + \frac{1}{e_{w2}} - 1}. \quad (9.6)$$

Таким образом, результирующий поток излучения определяется просто разностью ( $q_{R12} - q_{R21}$ ), как это следует из уравнения (6.40).

Для сложной геометрии выражение  $A_1 F_{12}$  усложняется. В книге [8] Якоб приводит ряд примеров для величины  $A_1 F_{12}$ .

**2. Метод сетки.** Результирующий тепловой поток излучения некоторой непрозрачной поверхности  $i$  определяется следующим образом:

$$q_{R_{\text{net}, i}} = J_i - G_i = \frac{e_{wi}}{r_{wi}} (E_i - J_i). \quad (9.7)^3$$

Согласно методу сетки, мы можем разделить всю излучающую систему на  $n$  элементов и каждый элемент можно рассматривать как узел сетки. Аналогия радиационной сетки с электрической сеткой очевидна. В частности, по закону Кирхгофа мы имеем

$$\sum_{i=1}^n q_{R_{\text{net}, i}} = 0. \quad (9.8)$$

<sup>1)</sup> Более близок к дословному переводу термин «метод счета лучей», однако в отечественной литературе употребляется название «метод многократных отражений». — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> «Метод сетки» известен у нас как «метод лучистого сальдо», предложенный советским ученым Г. Л. Поляком в 1935 г. Здесь мы оставляем название «метод сетки», так как автор несколько шире трактует этот метод, проводя аналогию с электрическими схемами. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> В уравнении (9.7) символом  $J$  обозначено эффективное излучение, обозначаемое в других уравнениях [см. (9.2), (9.9) и т. д.] символом  $R$ . — *Прим. перев.*

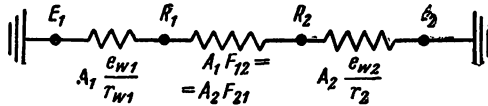
Применим метод сетки к случаю двух бесконечных параллельных стенок, который описывается уравнением (9.6) (см. фиг. 6.4):

$$q_{R_{\text{net}}, 1} = -q_{R_{\text{net}}, 2} = R_1 - G_1 = R_1 - R_2 = \\ = E_{b1} - \left(\frac{1}{\epsilon_{w1}}\right) q_{R_{\text{net}}, 1} - B_{b2} - \left(\frac{1}{\epsilon_{w2}} - 1\right) q_{R_{\text{net}}, 2} \quad (9.9)^1$$

или

$$q_{R_{\text{net}}, 1} = (E_{b1} - E_{b2}) / \left(\frac{1}{\epsilon_{w1}} + \frac{1}{\epsilon_{w2}} - 1\right). \quad (9.9a)$$

Выражение (9.9a) в точности соответствует выражению, полученному по методу многократных отражений [см. уравнение



Фиг. 9.2. Схема электрической цепи, моделирующей теплообмен излучением между двумя поверхностями  $A_1$  и  $A_2$ .

(9.6)]. Следует отметить, что падающее излучение  $G_1$  равно эффективному излучению  $R_2$ .

Так как метод сетки для переноса излучения идентичен методу сетки для электрической цепи, то мы можем использовать хорошо известные методы решения электрических сетей. Например, на фиг. 9.2 приведена схема цепи для задачи, описываемой уравнением (9.9). Для решения задачи в усложненной системе можно использовать матричный метод [17].

**3. Расчетный метод, или метод интегрального уравнения.** Интенсивность падающего излучения в точке  $P_2$  на поверхности  $A_2$  (фиг. 9.1), обусловленная плотностью потока эффективного излучения площадки  $dA_1$  в точке  $P_1$ , согласно уравнению (9.3), может быть записана в виде

$$dG_{21} = dE_{12} = R_1 K(P_1, P_2) dA_1, \quad (9.10)$$

где  $K(P_1, P_2)$  известен как формфактор и есть не что иное, как подынтегральное выражение уравнения (9.5). Плотность потока

<sup>1)</sup> Уравнение (9.9) правильно следовало бы писать так:

$$q_{R_{\text{net}}, 1} = -q_{R_{\text{net}}, 2} = R_1 - G_1 = R_1 - R_2 = \\ = E_{b1} - \left(\frac{1}{\epsilon_{w1}} - 1\right) q_{R_{\text{net}}, 1} - E_{b2} + \left(\frac{1}{\epsilon_{w2}} - 1\right) q_{R_{\text{net}}, 2}. \quad \text{— Прим. перев.}$$

падающего излучения в точке  $P_2$  получается интегрированием уравнения (9.10) по всей поверхности  $A_1$ . Из уравнений (9.2) и (9.10) получаем плотность потока эффективного излучения в некоторой точке  $P$  на поверхности  $A_2$  в следующем виде:

$$R(P) = e_{w_2}(P) E_2(P) + \int_{A_1} R(P_1) K(P_1, P) dA_1. \quad (9.11)$$

Результирующий тепловой поток излучения в точке  $P$  с учетом уравнения (9.7) тогда будет

$$q_{R_{\text{net}}}(P) = e_w(P) E(P) + \int_{A_1} R(P_1) K(P_1, P) dA_1. \quad (9.12)^1$$

Следовательно, мы должны решить интегральное уравнение (9.12). Так как большинство задач радиационной газодинамики решается методом интегрального уравнения, то мы рассмотрим этот метод в дальнейшем более подробно. Некоторые общие методы будут рассмотрены в разд. 4.

### 3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Если мы рассмотрим теплообмен излучением в поглощающей среде, в которой пренебрежимо малы теплопроводность и конвективный перенос тепла, то обнаружим единственное отличие от результатов последнего раздела, заключающееся в том, что при прохождении луча через среду спектральная интенсивность излучения уменьшается согласно уравнению (3.1). Если пренебречь рассеянием и испусканием излучения в среде и принять, что линейный коэффициент поглощения  $\rho k_v = K = \text{const}$ , то спектральная интенсивность излучения в точке  $P_2$  будет

$$I_v(P_2) = I_v(P_1) \exp(-Kr). \quad (9.13)$$

Энергия падающего на  $dA_2$  излучения, обусловленная испусканием лучей от  $dA_1$ , равна

$$dE_{12} = \frac{R_1 \exp(-Kr) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2. \quad (9.14)$$

Уравнение (9.14) отличается от уравнения (9.3) только множителем  $\exp(-Kr)$ . Если  $K$  — постоянная, то мы можем ввести

<sup>1)</sup> В уравнении (9.12) пропущен множитель перед интегралом. Его следовало бы записать следующим образом:

$$q_{R_{\text{net}}}(P) = e_{w_2}(P) E(P) + \frac{e_{w_2}}{r_{w_2}} \int_{A_1} R(P_1) K(P_1, P) dA_1. \text{ — Прим. перев.}$$

пропускательную способность  $T_{12}$ , так что

$$E_{12} = T_{12} A_1 F_{12} R_1, \quad (9.15)$$

где

$$T_{12} = \frac{1}{A_1 F_{12}} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\exp(-Kr) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2. \quad (9.16)$$

Уравнение (9.15) аналогично по форме уравнению (9.4), за исключением множителя  $T_{12}$ . Можно использовать те же методы, которые рассматривались в последнем разделе, для решения задач с поглощающей средой по уравнению (9.15). Если величина  $K$  не постоянная, то необходимо использовать более сложный метод, так как в общем случае  $K$  является функцией температуры, а распределение температуры зависит от теплообмена излучением.

#### 4. ТЕПЛОБМЕН ОДНОВРЕМЕННО ПРОВОДИМОСТЬЮ И ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Для упрощения задачи рассмотрим систему, состоящую из двух диффузных нечерных бесконечных изотермических и параллельных пластин, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Пространство между пластинами заполнено средой, поглощающей и испускающей тепловое излучение. В среде отсутствует течение. Следовательно, мы должны рассмотреть только уравнение энергии (5.7). В связи с тем что отсутствует источник энергии и все переменные являются функциями только расстояния по нормали к пластинам, т. е. только  $y$ , уравнение энергии (5.7) принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right) = - \frac{d}{dy} (q_{Ry}) \quad (9.17)$$

[где  $q_{Ry}$  — составляющая теплового потока излучения в направлении  $y$ , определяемая уравнением (5.43)] в предположении, что излучение находится в состоянии локального термодинамического равновесия и рассеяние пренебрежимо мало. Уравнение (9.17) является интегро-дифференциальным уравнением. Так как коэффициент теплопроводности  $\kappa$  в общем случае зависит от температуры, а линейный коэффициент поглощения  $\rho k'_v$  или средняя длина свободного пробега излучения  $L_R = 1/(\rho k'_v)$  зависят от температуры и плотности, а также частоты  $\nu$ , то уравнение (9.17) в высшей степени нелинейное. Решить такое уравнение очень сложно. Чтобы выявить некоторые существенные особенности этой задачи, мы, следуя работе [26], допустим, что как коэффициент теплопроводности, так и средняя длина свободного

пробега излучения постоянны. Тогда можно использовать уравнение (5.46) для  $dq_{Ry}/dy$ . При этих допущениях уравнение (9.17) в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{1}{R_{F0}} \frac{d^2 T^*}{d\tau^2} = T^{*4} - \frac{1}{2} \left\{ R_a^*(\tau_2) \varepsilon_2 (\tau_2 - \tau) + R_a^*(0) \varepsilon_2 (\tau) + \int_0^\tau T^{*4}(t) \varepsilon_1 (|t - \tau|) dt \right\}, \quad (9.18)$$

где  $R_{F0} = 4\sigma T_0^3 L_R / \kappa$  — число потока излучения [см. уравнение (7.42)];  $T^* = T/T_0$ ;  $T_0$  — характерная температура;  $R_a^* = R_a / \sigma T_0^4$ ;  $\tau = y/L_R$  — оптическая толщина координаты  $y$ . На нижней пластине  $y=0$ ,  $\tau=0$ , а на верхней пластине  $y=L$ ,  $\tau=\tau_2=L/L_R$ . Следовательно,  $1/\tau_2$  можно рассматривать как радиационное число Кнудсена для данной задачи [см. уравнение (7.16a)]. Граничные условия в этой задаче следующие:

$$T^*(\tau) = T^*(0) = 1 \quad \text{при } y=0 \text{ или } \tau=0,$$

$$T^*(\tau) = T^*(\tau_2) = T_w^* = \text{const} = \frac{T_2}{T_0} \quad \text{при } y=L \text{ или } \tau=\tau_2, \quad (9.19)$$

где в качестве характерной температуры принята температура на нижней стенке. Обе стенки поддерживаются при постоянных, но различных температурах.

Даже при сделанных упрощениях уравнение (9.18) остается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Для решения этого уравнения с граничными условиями (9.19) нет простых математических методов, позволяющих получить решение в явном виде. Мы должны решать его приближенными методами либо методом итераций. Некоторые из этих методов будут кратко рассмотрены ниже.

**1. Линеаризация зависимой переменной.** Если разность температур двух пластин мала, то можно предположить, что температурное поле только слегка отклоняется от температуры стенок или от некоторой средней постоянной температуры. В этих условиях имеем

$$T^4 = T_a^4 \left[ 1 + \left( \frac{T - T_a}{T_a} \right)^4 \right] = 4T(\tau) T_a^3 - 3T_a^4 + O \left[ \left( \frac{T - T_a}{T_a} \right)^2 \right]. \quad (9.20)$$

Если подставить уравнение (9.20) в уравнение (9.18) и пренебречь членами второго и более высокого порядка относительно  $(T - T_a)/T_a$ , где  $T_a$  — средняя температура, то мы получим линейное интегральное уравнение, которое можно легко решить.



**2. Итерационный метод решения дифференциального уравнения.** Если число потока излучения  $R_{F0}$  мало, то уравнение (9.18) можно записать в виде

$$\frac{d^2 T^*}{d\tau^2} = R_{F0} G(T^*, \tau). \quad (9.21)$$

В первом приближении можно пренебречь членом в правой части уравнения. Тогда получим

$$\frac{d^2 T^*}{d\tau^2} = 0. \quad (9.22)$$

Решая уравнение (9.22) при граничных условиях (9.19), находим

$$T^*(\tau) = T^*(0) + \frac{\tau}{\tau_2} [T^*(\tau_2) - T^*(0)]. \quad (9.23)$$

Подставим уравнение (9.23) в правую часть уравнения (9.21). В результате получим

$$\frac{d^2 T^*}{d\tau^2} = R_{F0} G(\tau). \quad (9.24)$$

Теперь можно решить уравнение (9.24) при граничных условиях (9.19). Так как  $G(T^*, \tau) = G(\tau)$  в общем случае очень сложная функция  $\tau$ , то мы должны использовать численное интегрирование. Если обозначить решение уравнения (9.24) через  $T_1^*(\tau)$ , то, подставляя  $T_1^*(\tau)$  в выражение  $G(T^*, \tau)$  уравнения (9.21), получим новое выражение для  $T^*$  во втором приближении, которое записывается в тех же обозначениях, что и уравнение (9.24). Процесс можно повторять до получения желаемой точности.

**3. Итерационный метод решения интегрального уравнения.** Проинтегрируем сначала уравнение (9.21) дважды по переменной  $\tau$  от 0 до  $\tau$ . В результате этого интегрирования получаем нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода в следующем виде:

$$T^*(\tau) = R_{F0} F_0(\tau) + R_{F0} \int_0^{\tau} F(t) dt, \quad (9.25)$$

где

$$F_0 = C_1 + C_2 \tau - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} dt_2 \int_0^{t_2} [R^*(\tau_2) \varepsilon_2(\tau_2 - t) + R^*(0) \varepsilon_2(t)] dt \quad (9.26)$$

и

$$F(t) = \int_0^t \left[ T^{*4}(t_1) - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} T^{*4}(t_0) \varepsilon_1(|t_0 - t_1|) dt_0 \right] dt_1. \quad (9.27)$$

Уравнение (9.25) можно решить методом последовательных приближений. Сначала выберем какое-то распределение  $T_1^*(t)$  и подставим это распределение в функцию  $F(t)$  уравнения (9.25). Можно найти  $T^*(\tau) = T_2^*(\tau)$  из уравнения (9.25) и граничных условий (9.19), которые определяют произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ . Процесс повторяют, подставляя  $T_2^*(t)$  в выражение  $F(t)$ , до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

Приведенные выше три метода используются для решения точного уравнения (9.18). Однако в некоторых случаях уравнение (9.18) можно упростить, прежде чем приступить к его решению. Полученное в результате упрощений уравнение решается значительно легче, чем первоначальное. Некоторые из этих упрощений следующие:

**1. Аппроксимация Росселанда.** Для случая оптически толстой среды, как мы показали в гл. 5, разд. 8, теплообмен излучением может быть выражен через градиент температуры и эффективный коэффициент теплопроводности с учетом излучения (5.22). В этих условиях уравнение (9.17) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left( K^* \frac{dT}{dy} \right) = 0, \quad (9.28)$$

где

$$K^* = \kappa + \kappa_R = \kappa(T) + 4D_R a_R T^3. \quad (9.29)$$

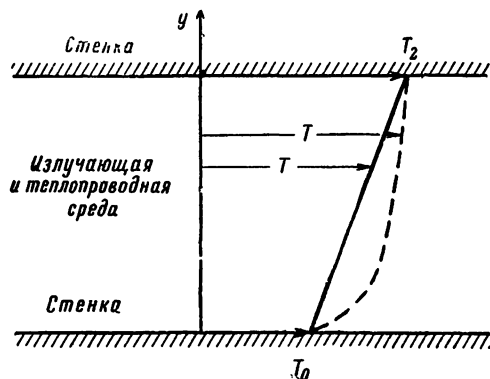
Решение уравнения (9.28) с граничными условиями (9.19) имеет вид

$$\frac{y}{L} = \frac{\int_{T_0}^T K^* dT}{\int_{T_0}^{T_w} K^* dT}. \quad (9.30)$$

В общем случае  $K^*$  можно рассматривать как известную функцию температуры  $T$ . Если мы примем  $\kappa$  и  $D_R$  постоянными, то из уравнения (9.30) следует

$$\frac{y}{L} = \frac{\kappa(T - T_0) + D_R a_R (T^4 - T_0^4)}{\kappa(T_2 - T_0) + D_R a_R (T_2^4 - T_0^4)}. \quad (9.30a)$$

Уравнение (9.30а) свидетельствует о том, что если теплообмен излучением незначителен, то распределение температуры будет линейным, а если пренебрежимо мала теплопроводность, то  $y = A_1 T^4 - A_2$ , так что на большей части зазора между пластинами температура будет ближе к более высокой температуре  $T_2$  в отличие от линейного распределения (фиг. 9.3).



Фиг. 9.3. Распределение температуры между двумя параллельными пластинами при наличии и при отсутствии излучения.

— при отсутствии излучения; --- при наличии излучения.

В общем случае профиль температуры будет находиться между этими двумя предельными кривыми.

**2. Случай оптически тонкой среды.** В случае оптически тонкой среды оптическая толщина мала. Мы можем использовать несколько первых членов разложения в степенной ряд по  $t$  (5.56) экспоненциального интеграла и существенно упростить интегро-дифференциальное уравнение (9.18). Мы обсудим этот метод в следующем разделе. В случае оптически очень тонкой среды тепловой поток излучением будет постоянным, как это следует из уравнения (6.40). Тогда  $dq_R/dy = 0$ . Если коэффициент теплопроводности  $\kappa$  постоянный, то мы снова получаем линейный профиль температуры.

**3. Аппроксимация Милна—Эддингтона.** В одномерной задаче теплообмена излучением можно получить точные результаты, приняв некоторую простую форму для интегральной интенсивности излучения  $I$  [уравнение (2.3)]. Мы вводим следующие

средние величины:

$$J_0 = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega, \quad H_0 = \frac{1}{4\pi} \int I \cos \theta d\omega, \quad (9.31)$$

$$K_0 = \frac{1}{4\pi} \int I \cos^2 \theta d\omega.$$

Для серого газа, находящегося в локальном термодинамическом равновесии, интегрирование уравнения переноса излучения (5.30) дает

$$\frac{dH_0}{dy} = \frac{1}{L_R} (B - J_0), \quad (9.32)$$

$$\frac{dK_0}{dy} = -\frac{H_0}{L_R}. \quad (9.33)$$

Аппроксимация Милна — Эддингтона заключается в принятии приближенного выражения  $K_0 \approx J_0/3$ .

Тогда

$$\frac{d^2 J_0}{dy^2} = -\frac{3}{L_R} \frac{dH_0}{dy} = \frac{3}{L_R^2} (J_0 - B). \quad (9.34)$$

Уравнение энергии (9.17) при постоянном коэффициенте теплопроводности записывается в виде

$$\kappa \frac{d^2 T}{dy^2} = 4\pi \frac{dH_0}{dy} \quad (9.35a)$$

и

$$\frac{d^2 H_0}{dy^2} = \frac{1}{L_R} \left( \frac{3H_0}{L_R} + \frac{4}{\pi} \sigma T^3 \frac{dT}{dy} \right). \quad (9.35b)$$

Так как уравнения (9.35) остаются нелинейными, их можно решить только численным интегрированием. Уравнение (9.35b) по существу то же, что и уравнение (8.96).

**4. Экспоненциальная аппроксимация.** Часто интегро-экспоненциальную функцию заменяют экспоненциальной вида (8.81). При такой аппроксимации уравнение (9.18) можно свести к дифференциальному уравнению.

Некоторые числовые примеры даны Вискантом и Грошем [26]. Так как выражение для  $F(t)$  в уравнении (9.27) в работе [26] неправильное, то их результаты здесь приведены не будут. Однако качественно основное влияние излучения состоит в том, что распределение температуры становится более равномерным в основной части поля течения, как показано на фиг. 9.3. Количественно оптическая толщина является характерным параметром при теплообмене излучением, и соответствующим безразмерным параметром будет число потока излучения  $R_{F0}$ , определяемое уравнением (9.18).

## 5. ПРОЦЕССЫ ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

Одно из наиболее важных приложений теплообмена при одновременном действии теплопроводности и излучения связано с определением распределения температуры в атмосфере Земли или других планет. Солнце — основной источник энергии, влияющий на температуру атмосферы, которая определяется поглощением излучения от Солнца и испусканием излучения Земли в космическое пространство, а также теплопроводностью и конвекцией в атмосфере и теплопроводностью и отражением поверхности Земли. Подробное рассмотрение вопроса очень сложно, для этой цели можно рекомендовать специальные монографии [3, 9, 22]. Мы здесь рассмотрим вкратце только общий принцип составления теплового баланса в атмосфере и общее распределение температуры в атмосфере Земли. Задача очень трудная из-за сильного изменения состава атмосферы по высоте. Пожалуй, имеет смысл дать краткое описание атмосферы Земли, прежде чем мы приступим к обсуждению процессов излучения и теплового баланса в атмосфере.

Земная атмосфера состоит из различного типа газов, ионов и электронов. Состав ее изменяется по высоте, а также зависит от времени и места. Однако с достаточной точностью можно разделить земную атмосферу на различные области, в которых сохраняются различные законы изменения температуры или давления по высоте. Имеются две основные области: одна известна как гомосфера, которая расположена приблизительно ниже 85 км и в которой состав земной атмосферы остается почти неизменным, и другая известна как гетеросфера, которая расположена выше 85 км и в которой состав атмосферы сильно изменяется с высотой. В обычной метеорологии широко изучена только гомосфера [3, 9]. Однако для космического полета становится важной гетеросфера [22]. Каждую из этих двух основных областей мы можем далее разделить на несколько зон в соответствии с изменением температуры по высоте:

**1. Гомосфера**, в которой имеются три подобласти: тропосфера, стратосфера и мезосфера.

*а. Тропосфера.* На малой высоте, от уровня моря до высоты около 10 км, состав воздуха приблизительно постоянен и температура уменьшается с высотой. Эта зона известна как тропосфера. Градиент температуры в тропосфере почти постоянный, даже если его величина меняется с изменением места и времени. Сухой атмосферный воздух на уровне моря состоит из 78,03% молекулярного азота  $N_2$ , 20,99% молекулярного кислорода  $O_2$ , 0,93% аргона Ar, 0,030% двуокиси углерода  $CO_2$  и 0,01% молекулярного водорода  $H_2$  по объему и незначительного количества

неона Ne, гелия He, криптона Kr и ксенона Xe. В большинстве задач газодинамики физические свойства воздуха вычислены исходя из следующего принятого состава воздуха на уровне моря: 78,12%  $N_2$ , 20,95%  $O_2$  и 0,93% Ar по объему. Для малых высот принята стандартная атмосфера, чтобы облегчить сравнение данных испытаний в различных атмосферных условиях. Стандартная атмосфера для тропосферы основана на следующих допущениях:

- а) воздух является совершенным газом с газовой постоянной, равной  $R=29,27 \text{ кГм/кг} \cdot \text{град}$ ;
- б) давление воздуха на уровне моря  $P_0=760 \text{ мм рт. ст.}$ ;
- в) температура воздуха на уровне моря  $T_0=15^\circ \text{C}$ ;
- г) в тропосфере градиент температуры имеет постоянную величину, равную  $-6,5 \text{ град/км}$ ;
- д) верхняя граница тропосферы расположена на высоте, где температура достигает  $T_s = -55^\circ \text{C}$ .

Очень важной составляющей в атмосфере тропосферы является водяной пар, особенно когда речь идет о поглощении длинноволнового излучения, исходящего от земной поверхности. Что же касается других физических свойств, то водяной пар оказывает на них слабое влияние при расчете поля течения в обычной газодинамике. Таким образом, в обычной газодинамике водяной пар в атмосфере обычно не рассматривается, но при изучении процессов излучения и баланса тепла в тропосфере он выполняет роль наиболее важной составляющей.

На границе тропосферы имеется область, называемая тропопаузой. Это узкая область между тропосферой и стратосферой. Высота тропопаузы сильно зависит от географической широты. Она может быть меньше 10 км в полярных областях и выше 15 км в экваториальном поясе.

**б. Стратосфера.** Стратосфера занимает область от тропопаузы до высоты около 50 км. В этой области температура не уменьшается с высотой. Сначала она остается постоянной, а затем возрастает с высотой. В старом определении стандартной атмосферы мы принимали, что в стратосфере температура остается постоянной. Но по современным данным температура в стратосфере возрастает с высотой до максимума порядка  $270^\circ \text{K}$ . Следовательно, можно разделить стратосферу на две зоны. В нижней зоне температура атмосферы сохраняется постоянной до уровня А и в верхней зоне температура возрастает с увеличением высоты до стратопаузы, которую также называют уровнем В.

**в. Мезосфера.** Эта область расположена выше стратопаузы до высоты около 85 км. В ней температура снова уменьшается с ростом высоты. Минимум температуры в этой области состав-

ляет величину порядка  $150^{\circ}\text{K}$ . На верхней границе мезосферы находится область, которую называют мезопаузой. В мезосфере очень важное значение имеет фотохимическое воздействие, т. е. солнечное излучение вызывает химические реакции в атмосфере.

**2. Гетеросфера.** Здесь состав воздуха сильно изменяется по высоте и имеют важное значение диссоциация и ионизация воздуха. Наука, которая изучает верхнюю часть гетеросферы, называется *аэрономия*. Гетеросферу можно разделить на следующие зоны: термосферу, ионосферу, метасферу, протосферу и экзосферу.

*а. Термосфера и ионосфера.* Выше мезосферы температура воздуха снова возрастает с увеличением высоты до максимальной величины порядка  $1500 \div 2000^{\circ}\text{K}$ . Эта область известна как термосфера, в ней важное значение имеют процессы диссоциации и ионизации воздуха и состав воздуха больше не постоянен. На нижней границе термосферы высотой около  $100\text{ км}$  происходит диссоциация кислорода. Следовательно, мы не можем предполагать, что состав воздуха постоянен. На высоте около  $500\text{ км}$  большая часть молекулярного кислорода диссоциирована, и мы можем принять, что основными составляющими воздуха являются молекулярный азот и атомарный кислород. На больших высотах, кроме диссоциации молекулярного и рекомбинации атомарного кислорода, происходит много других химических реакций. Например, атомарный кислород может воссоединиться до молекулярного кислорода в форме озона. Молекулярный азот может диссоциировать в атомарный азот. Атомарный кислород и атомарный азот могут образовывать окись азота. Водяные пары в воздухе могут диссоциировать на атомарный кислород и гидроксил (ОН). Двоокись углерода может диссоциировать на атомарный углерод и окись углерода; кроме того, возможны многие другие химические реакции.

От мезопаузы и выше также происходит ионизация воздуха. Даже ниже мезопаузы на высоте около  $80\text{ км}$  в атмосфере имеются свободные электроны. Этот слой атмосферы известен как *D-слой* с концентрацией свободных электронов от  $10^2$  до  $10^4\text{ электрон/см}^3$ . С возрастанием высоты концентрация электронов увеличивается до максимального значения порядка  $10^5\text{ электрон/см}^3$ . Этот слой, известный как *E-слой*, расположен на высоте около  $120\text{ км}$ . После небольшого спада концентрации электронов до некоторой высоты плотность электронов вновь возрастает с высотой до еще большего максимума, равного  $10^6\text{ электрон/см}^3$ . Эта зона известна как *F-слой*, который находится на высоте около  $300\text{ км}$ . С дальнейшим увеличением вы-

соты концентрация электронов уменьшается. Область, в которой имеется значительное количество свободных электронов, называется ионосферой. В ионосфере существенную роль играют процессы диффузии, а также фотохимические и фотоэлектрические воздействия. Термосфера простирается до нескольких сот километров выше  $F$ -слоя ионосферы до тех пор, пока температура атмосферы не достигнет максимального значения  $1500 \div 2000^\circ \text{K}$ .

*б. Экзосфера (метасфера и протосфера).* Температура атмосферы выше термосферы остается почти постоянной на значительной высоте. Эта изотермическая область была названа экзосферой, потому что, как полагают, в этой области больше не применимы законы газовой кинетики. В этой области частицы испытывают мало столкновений, и если они движутся вверх, то могут выйти из гравитационного поля Земли. В этой области мы уже не можем рассматривать воздух как непрерывную среду и должны учитывать дискретный характер частиц воздуха. Следовательно, мы должны использовать газодинамику разреженных газов для изучения течения этих частиц, в частности анализ свободномолекулярного течения, которому будет посвящена соответствующая глава. В этой области излучение является очень важным видом переноса тепла.

В нижних частях экзосферы воздух находится главным образом в ионизованном состоянии. При изучении динамики процессов в атмосфере мы должны рассматривать свободномолекулярное течение нейтральных частиц с учетом гравитационных сил как основных объемных сил. Эту область называют метасферой. В верхней части экзосферы частицы газа атмосферы почти полностью ионизованы и протонов здесь больше, чем нейтральных атомов водорода. Эта область называется протосферой. В протосфере следует учитывать как гравитационные, так и электромагнитные силы при изучении динамики процессов в атмосфере. В экзосфере мы должны найти функцию молекулярного распределения для различных частиц и затем определить средние статистические значения различных свойств атмосферы.

Благодаря различным законам изменения температуры с высотой в различных областях атмосферы относительное значение излучения, теплопроводности и конвекции в этих областях различно. Сначала рассмотрим температуру поверхности Земли. Температура земной поверхности, осредненная по всем зонам и по всем широтам, остается почти постоянной. Следовательно, можно предположить, что Земля находится в состоянии теплового равновесия при средних условиях, т. е. средняя энергия поглощенного эффективного солнечного излучения равна средней энергии эффективного земного излучения в космическое

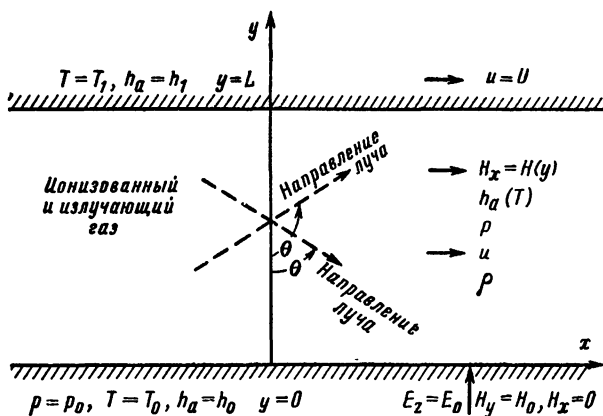


пространство. По наблюдениям на земной поверхности, солнечное излучение с длинами волн, меньшими  $0,29 \text{ мк}$ , полностью поглощается атмосферой. Поэтому в метеорологии солнечное излучение обычно относят к коротковолновому излучению, когда учитывают его в тепловом балансе атмосферы  $E_{Rs}(z)$ , где  $z$  — высота. Этот коротковолновый поток излучения состоит из прямого солнечного света плюс рассеянный и многократно отраженный свет от воздуха, облаков и Земли. Излучение, испускаемое Землей в космическое пространство, обычно относят в метеорологии к длинноволновому излучению. Решающим фактором в поглощении длинноволнового излучения  $E_{RL}(z)$  в атмосфере является водяной пар. При определении распределения температуры в атмосфере мы должны рассматривать баланс энергии между разностью  $E_{Rs}$  и  $E_{RL}$  и другими членами, учитывающими теплопроводность, конвективный перенос тепла и химические реакции. Например, у поверхности Земли в дополнение к радиационным членам нужно учитывать теплопроводность в почве, теплопроводность в атмосфере и скрытую теплоту фазовых превращений воды. Такие расчеты подробно изложены в учебниках по метеорологии [3, 9], и мы их здесь не рассматриваем. В верхних слоях атмосферы задача усложняется из-за большого числа химических реакций, а также ионизации. Многие из этих задач еще не решены [22].

## 6. ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ В РАДИАЦИОННОЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИКЕ

Исследуем общий случай совместного действия тепловой конвекции, теплопроводности и теплового излучения. Рассмотрим простую задачу, которая вполне позволит продемонстрировать взаимодействие теплового излучения и других газодинамических эффектов. Пусть между двумя параллельными пластинами протекает ионизованный газ. Одна из пластинок находится в покое, а другая равномерно движется со скоростью  $U$  (фиг. 9.4). Имеется постоянный градиент давления в направлении течения, т. е. в направлении  $x$ . В направлении, перпендикулярном пластинам, приложено внешнее магнитное поле  $H_y = H_0 = \text{const}$ . Температуры двух пластин поддерживаются постоянными по величине  $T_0$  и  $T_1$  соответственно.  $x$ -Компонента магнитного поля принята равной нулю на нижней пластине и конечной величине или нулю на верхней пластине в зависимости от приложенного внешнего электрического поля  $E_z = E_0 = \text{const}$  в направлении, перпендикулярном обеим пластинам и направлению течения. Ионизованный газ предполагается

вязким, теплопроводным, теплоизлучающим и электропроводным. Течение предполагается стационарным и ламинарным. Далее мы предполагаем, что все переменные являются функциями только  $y$ , т. е. расстояния, перпендикулярного пластинам.



Фиг. 9.4. Течение Куэтта в радиационной магнетогидродинамике.

Основные уравнения этой задачи будут следующие:

а) Уравнение состояния [см. уравнение (5.2)]

$$p = \rho RT. \quad (9.36)$$

б) Уравнение движения [см. уравнение (5.4)].

Уравнение движения в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) + B_y \frac{dH_x}{dy} = \frac{d}{dx} (p + p_R), \quad (9.37)$$

причем только составляющая скорости  $u$  по оси  $x$  отличается от нуля и является функцией только  $y$ .  $B_y = \mu_e H_0$  — постоянная внешняя магнитная индукция. Наша задача аппроксимирует поле течения вдали от входа в двумерный канал. Для несжимаемой жидкости эта аппроксимация справедлива даже в том случае, когда градиент давления в направлении оси  $x$  постоянен, т. е.  $dp/dx = p_x = \text{const}$ . Однако она несправедлива для случая сжимаемой жидкости, поскольку, если давление является функцией  $x$ , то температура, плотность, а также скорость будут также функциями  $x$ . Следовательно, мы уже не сможем предположить, что  $u$  — функция только  $y$ . Для сжимаемой жидкости с  $u = u(y)$   $dp/dx$  должен быть равен нулю. Далее, если  $dp/dx \neq 0$ , то  $dT/dx$  также не будет равен нулю. В результате  $dp_R/dx = (dT/dx)(dp_R/dT) \neq 0$ . Мы рассмотрим два частных случая урав-

нения (9.37). Один из этих случаев,  $u=u(y)$  и  $d(p+p_R)/dx=0$ , называют плоским течением Куэтта и другой случай,  $u=u(y)$  и  $d(p+p_R)/dx \neq 0$  (но может быть аппроксимирован простым выражением, как это мы покажем позже), называют плоским течением Пуазейля.

Запишем уравнение движения в проекции на ось  $y$

$$p + p_R + \frac{1}{2} \mu_e H_x^2 = \text{const.} \quad (9.38)$$

Предположим, что для члена теплового излучения справедлива одномерная модель гл. 5, разд. 10. Следовательно, давление излучения  $p_R$  определяется только отличной от нуля компонентой напряжения излучения, которая связана с спектральной интенсивностью излучения  $I_\nu$  следующим интегралом:

$$p_R = \frac{2\pi}{3c} \int_0^\infty d\nu \int_0^\pi I_\nu(\theta, y) \sin \theta d\theta, \quad (9.39)$$

где  $\theta$  — угол между направлением луча и отрицательным направлением оси  $y$ , как показано на фиг. 9.4, и  $c$  — скорость света.

в) Уравнение магнитного поля в проекции на ось  $x$  [см. уравнения (8.1) и (8.3)]

$$H_y \frac{du}{dy} + \frac{d}{dy} \left( \nu_H \frac{dH_x}{dy} \right) = 0. \quad (9.40)$$

Здесь использована обычная аппроксимация, принятая в магнитогазодинамике, согласно которой члены, содержащие избыточный электрический заряд  $\rho_e$ , пренебрежимо малы.

г) Уравнение энергии [см. уравнение (5.7)]

$$\begin{aligned} \rho u \left[ \frac{dC_p T}{dx} + \frac{d(E_R/\rho)}{dx} \right] + \frac{dq_{Rx}}{dx} = \\ = \frac{d}{dy} \left( u \mu \frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{dq_{Ry}}{dy}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

В случае плоского течения Куэтта все члены, стоящие в левой части уравнения (9.41), равны нулю, так как они не зависят от  $x$ . В случае плоского течения Пуазейля, строго говоря, они не равны нулю. Но на большом расстоянии от входа в канал эти члены очень малы. В некоторых случаях ими можно пренебречь или аппроксимировать простейшими выражениями, как это будет показано ниже. Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  в настоящем случае — постоянная величина и имеет только  $z$ -компоненту, т. е.  $E_z = E_{z0}$ . Плотность электрического

тока  $\mathbf{J}$  также имеет только  $z$ -компоненту, т. е.

$$J_z = -\frac{dH_x}{dy}. \quad (9.42)$$

Поток излучения  $q_{Hy}$  определяется уравнением (5.43).

### Плоское течение Куэтта в радиационной магнитогазодинамике [19]

В этом случае мы принимаем, что  $dp/dx = dp_R/dx = dT/dx = 0$ . Следовательно, можно проинтегрировать уравнение (9.37) по  $y$  и получить следующее безразмерное уравнение:

$$\mu \frac{du}{dy} + \text{Re } R_H H_x = \left( \frac{du}{dy} \right)_0 = \text{const}, \quad (9.43a)$$

где скорость  $u$  выражена через постоянную скорость верхней стенки  $U$ , расстояние  $y$  — через зазор между пластинами  $L$ , напряженность магнитного поля — через  $y$ -компоненту напряженности внешнего однородного магнитного поля  $H_0$ . Все другие величины в уравнении (9.43) будут выражены через соответствующие величины на нижней стенке. Например, коэффициент вязкости выражается через  $\mu_0$ , где индекс 0 относится к величине на нижней стенке  $y=0$ .

$\text{Re} = LU\rho_0/\mu_0$  — число Рейнольдса течения Куэтта,

$R_H = (\mu_e H_0^2)/(\rho_0 U^2) = \frac{\text{Магнитное давление}}{\text{Динамическое давление}}$  — число магнитного давления.

Уравнение (9.38) в безразмерной форме имеет вид

$$p + R_{p0} p_R + \frac{1}{2} \gamma M^2 R_H H_x^2 = 1 + R_{p0}, \quad (9.43b)$$

где давление излучения выражено через  $p_{R0} = \frac{1}{3} a_R T_0^4$ ;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  $R_{p0} = \left( \frac{1}{3} a_R T_0^4 \right) / p_0$  — число давления излучения на нижней стенке;  $M = U/a_0 = U/(\gamma R T_0)^{1/2}$  — число Маха, а  $a_0$  — скорость звука у нижней стенки.

Уравнение (9.40) в безразмерной форме после интегрирования по  $y$  имеет следующий вид:

$$\frac{dH_x}{dy} = R_\sigma (-u + R_E), \quad (9.43в)$$

где

$R_\sigma = \frac{UL}{\nu_H}$  — магнитное число Рейнольдса

и

$R_E = \frac{E_0}{B_0 U}$  — число электрического поля.

В настоящей задаче число электрического поля можно рассматривать как параметр, который имеет существенное влияние как на распределение скорости, так и на распределение температуры в поле течения.

Члены, стоящие в левой части уравнения энергии (9.41), равны нулю, поскольку они все не зависят от  $x$ . Так как  $E$  постоянна, мы можем проинтегрировать уравнение (9.41) по  $y$  с помощью уравнения (9.42). Получим результирующее безразмерное уравнение энергии в виде

$$\frac{1}{(\gamma-1)Pr} \frac{dT}{dy} + M^2 \mu \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + Re R_E R_H M^2 H_x + R_{\rho 0} R_F Re q_R(T) = \text{const} = b, \quad (9.43r)$$

где

$$Pr = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\kappa_0} \text{ — число Прандтля газа.}$$

Поток излучения  $q_R(T)$  определяется в общем случае сложным интегралом, зависящим от свойств газа, а также от свойств пластин. Рассмотрим два частных случая:

1. Случай оптически толстой среды.

Число потока излучения равно

$$R_F = R_{F1} = \frac{cL_R}{UL} \text{ — число потока излучения при малых значениях } L_R/L$$

и

$$q_R(T) = q_{R1}(T) = \frac{4}{\gamma} T^3 \frac{dT}{dy}. \quad (9.44a)$$

2. Случай оптически тонкой среды; пластины черные.

В этом случае интегро-экспоненциальные функции можно заменить первыми членами разложения в ряд по степеням оптической плотности, которая является малой величиной [см. уравнение (5.56)]. Следовательно, получим

$$R_F = R_{F2} = \frac{cL}{UL_R} \text{ — число потока излучения при больших значениях } L_R/L,$$

где  $L_R$  — осредненная по Планку средняя длина свободного пробега излучения. Интересно отметить, что при малых значениях  $L_R/L$  поток излучения прямо пропорционален  $L_R/L$ , в то время как при больших значениях  $L_R/L$  поток излучения обратно пропорционален  $L_R/L$ .

Поток излучения тогда будет

$$q_R(T) = \frac{3}{2\gamma} \left\{ (T_1^4 + 1)\tau_a + \int_{\tau_a}^{\tau_{a2}} T^4(t) dt - \int_0^{\tau_a} T^4(t) dt \right\}, \quad (9.44б)$$

где

$$\tau_a = \tau(L_R/L) \quad \text{и} \quad \tau = \int_0^{y^*} \rho k'_v dy$$

— оптическая толщина и  $y^*$  — безразмерная координата  $y$ .

Наконец, уравнение состояния (9.36) в безразмерной форме принимает вид

$$p = \rho T. \quad (9.43д)$$

Основные уравнения (9.43) решаются при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad T = 1, \quad H_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = 1, \quad T = T_1, \quad H_x \text{ имеет конечное значение при} \quad y = 1. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Итак, мы имеем три дифференциальных уравнения первого порядка (9.43а), (9.43в) и (9.43г) и, кроме того, две произвольные постоянные в уравнениях (9.43а) и (9.43г). Следовательно, нужно пять граничных условий (9.45). Система уравнений (9.43) в высшей степени нелинейная, так как свойства газа, такие, как  $\mu$ ,  $\kappa$  и т. д., зависят от температуры  $T$ . Чтобы выявить некоторые основные особенности настоящей задачи, мы рассмотрим простой случай, когда свойства жидкости постоянные, так что  $\mu = 1$ ,  $\kappa = 1$  и  $\tau_a = y$ . Теперь мы можем разделить переменные на две группы: одна содержит  $u$  и  $H_x$ , которые определяются уравнениями (9.43а) и (9.43в), а вторая содержит  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , которые определяются уравнениями (9.43б), (9.43г) и (9.43д).

Из уравнений (9.43а) и (9.43в) получаем распределение  $u$  и  $H_x$  в следующем виде:

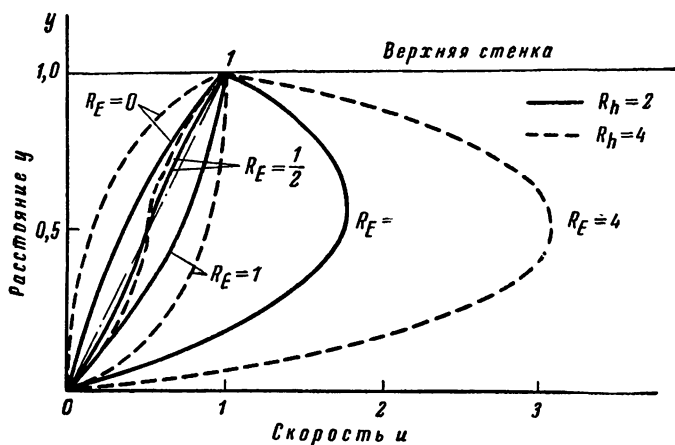
$$u = \frac{1 + R_E (\text{ch } R_h - 1)}{\text{sh } R_h} \text{sh } R_h y - R_E (\text{ch } R_h y - 1) \quad (9.46)$$

и

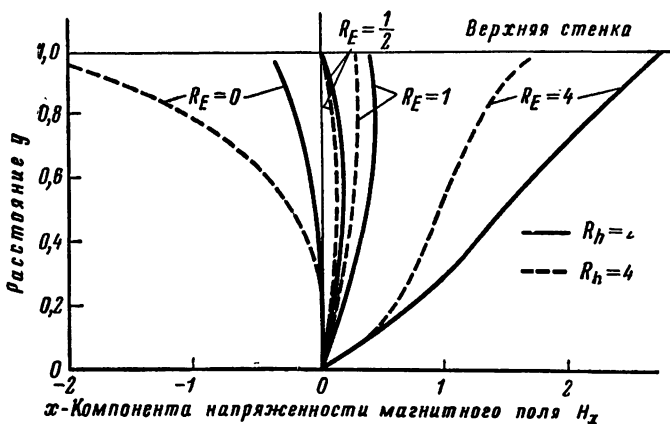
$$H_x = \frac{R_E}{R_h} \text{sh } R_h y - \frac{1 + R_E (\text{ch } R_h - 1)}{R_h \text{sh } R_h} (\text{ch } R_h y - 1), \quad (9.47)$$

где  $R_h = (R_G R_H \text{Re})^{1/2}$  — число Гартмана.

На фиг. 9.5 приведены некоторые типичные распределения скорости  $u$ , а на фиг. 9.6 — некоторые типичные распределения напряженности магнитного поля  $H_x$ . Интересно отметить, что распределения скорости и напряженности магнитного поля



Ф и г. 9.5. Распределения скорости плоского течения Куэтта в магнитогазо-  
динамике.



Ф и г. 9.6. Распределения  $x$ -компоненты напряженности магнитного поля  
плоского течения Куэтта в магнитогазо-  
динамике.

в сильной степени зависят от числа электрического поля  $R_E$ , а также от числа Гартмана  $R_h$ . Только когда  $R_E = 1/2$ ,  $H_x$  будет равна нулю при  $y = 1$ . Этот случай соответствует изолированным пластинам.

После того как получены  $u$  и  $H_x$ , по уравнению (9.43г) можно определить распределение температуры. В общем случае уравнение (9.43г) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение с интегральным выражением для члена с потоком излучения. Мы рассчитаем только два предельных случая, которые описываются выражениями (9.44).

В случае оптически толстой среды [выражение (9.44а)] уравнение (9.43г) становится дифференциальным уравнением. Это дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями (9.45) дает следующее выражение для температуры:

$$A [T^4 - 1 - y(T_1^4 - 1)] + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) \text{Pr}} [T - 1 - y(T_1 - 1)] = \\ = \gamma M^2 (R_E/R_\sigma) R_h^2 \left[ y \int_0^1 H_x dy - \int_0^y H_x dy \right] + \frac{1}{2} \gamma M^2 (y - u^2), \quad (9.48)$$

где  $A = R_{p0} R_F R_E$ . На фиг. 9.7 приведены типичные распределения температуры, рассчитанные по уравнению (9.48) с учетом влияния и без учета влияния излучения.

В случае оптически тонкой среды [выражение (9.44б)] уравнение (9.43г) дает следующее соотношение:

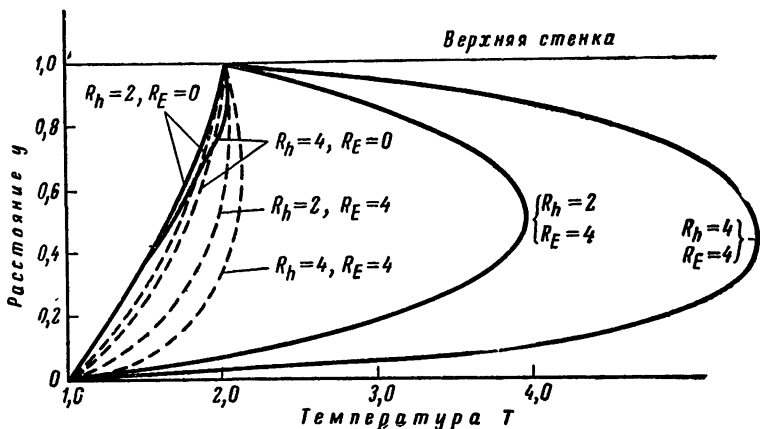
$$\frac{3}{2} A \left\{ \frac{1}{2} (T_1^4 + 1) (y^2 - y) + \int_0^y I_R dy - y \int_0^1 I_R dy \right\} + \\ + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) \text{Pr}} [T - 1 - y(T_1 - 1)] = \\ = \gamma M^2 (R_E/R_\sigma) R_h^2 \left[ y \int_0^1 H_x dy - \int_0^y H_x dy \right] + \frac{1}{2} \gamma M^2 (y - u^2), \quad (9.49)$$

где

$$I_R = \int_y^1 T^4(y) dy - \int_0^y T^4(y) dy. \quad (9.50)$$

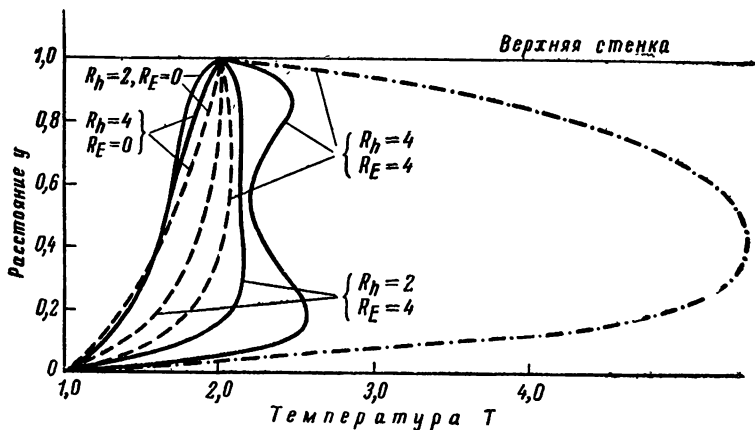
На фиг. 9.8 приведены некоторые типичные распределения температуры для случая оптически тонкой среды. Из фиг. 9.7 и 9.8 видно, что излучение оказывает существенное влияние на распределение температуры. При отсутствии излучения, т. е. при  $A = 0$ , температура в поле течения может быть чрезмерно высокой в случае больших значений чисел  $R_F$  и  $R_h$ . При нали-





Фиг. 9.7. Распределения температуры плоского течения Куэтта в радиационной магнитогазодинамике для случая оптически толстой среды ( $M = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $R_G = 1$ ).

—  $A=0$ , при отсутствии излучения; ---  $A=1$ , при наличии излучения.



Фиг. 9.8. Распределения температуры плоского течения Куэтта в радиационной магнитогазодинамике для случая оптически тонкой среды ( $M = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $R_G = 1$ ).

---  $A=0$ , при отсутствии излучения; ---  $A=1$ , оптически толстая среда; —  $A=1$ , оптически тонкая среда.

чий излучения максимальное значение температуры всегда значительно снижается. В случае оптически толстой среды температура всегда ниже, чем в соответствующем случае оптически тонкой среды. Наблюдается тенденция к сохранению постоянного значения температуры на протяжении большей части поля течения вблизи стороны одной из двух пластин, имеющей более высокую температуру, и к спаду температуры около другой пластины, имеющей более низкую температуру, за счет теплопроводности. Теплопроводность отражает по существу эффект пограничного слоя, так как мы рассматриваем случай числа Прандтля порядка единицы и очень большого числа Рейнольдса. Вблизи стенок имеется большой градиент температуры. В одном из случаев оптически тонкой среды из-за большого влияния электромагнитных полей образуются два пограничных слоя (около каждой из стенок).

### Плоское течение Пуазейля в радиационной магнитогазодинамике

В случае плоского течения Пуазейля мы принимаем, что обе пластины находятся в покое и в направлении оси  $x$  имеется постоянный градиент давления. Строго говоря, в этом случае все переменные  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $u$  и  $H_x$  являются функциями как  $x$ , так и  $y$ , и в эту задачу могут также войти и некоторые другие переменные, такие, как  $v$  и  $H_y$ . Для такой сложной задачи еще не разработано общее решение. Чтобы выявить существенные особенности этой задачи, будем следовать работе [29]. Предположим, что жидкость имеет постоянные свойства, что величины  $\rho_R$ ,  $E_R$  и  $dq_{Rx}/dx$  пренебрежимо малы и что для полностью развитого течения на расстоянии, достаточно удаленном от входа в канал, осевой градиент температуры  $\partial T/\partial x$  можно заменить следующим выражением:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left( \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \frac{dT_m}{dx}, \quad (9.51)$$

где средняя температура в поперечном сечении канала  $T_m$  определяется следующей зависимостью:

$$T_m = \left( \int_0^L Tu \, dy \right) / \left( \int_0^L u \, dy \right). \quad (9.52)$$

Если  $q_t$  — полный поток тепла в сечении, достаточно удаленном от входа и выхода из канала, то баланс тепла в объеме длиной  $dx$  записывается в виде

$$\rho C_p L u_m dT_m = 2q_t dx, \quad (9.53)$$

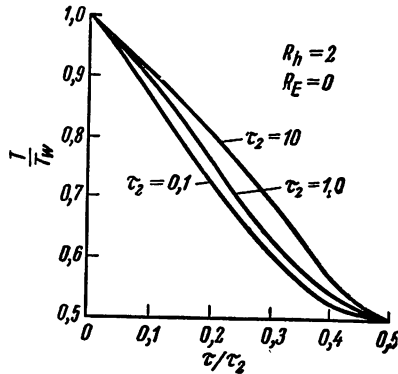
где

$$q_t = -\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 - q_{Ry(y=0)} = \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)_L + q_{Ry(y=L)}$$

Наконец, уравнение (9.41) принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right) + \frac{dq_{Ry}}{dy} = \frac{2q_t}{L} \left( \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \left( \frac{u}{u_m} \right) - \frac{d}{dy} \left( u \mu \frac{du}{dy} \right) - E \cdot J. \quad (9.54)$$

Теперь уравнение (9.54) является полным дифференциальным уравнением относительно только переменной  $y$ . В работе [29]



Фиг. 9.9. Распределения температуры плоского течения Пуазейля в радиационной магнитогазодинамике в функции оптической толщины.  $e_w = 1,0$ ,  $R_F = 4\sigma L_R T_w^3 / \kappa = 10$  (фиг. 2 из работы [29]).

приведены некоторые числовые примеры для случая постоянных свойств жидкости в пренебрежении вязкой диссипацией, а также джоулевым нагревом. Кроме того, основное течение рассматривается в предположении, что напряженность внешнего электрического поля равна нулю  $R_E = 0$ . Некоторые типичные кривые распределения температуры представлены на фиг. 9.9.

## 7. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПОТОКА В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Во многих практически важных задачах конфигурация объекта исследования более сложная, чем конфигурация, рассмотренная в разд. 6, и мы должны рассматривать температуру и другие переменные потока по крайней мере как функции двух пространственных переменных. Но в большинстве этих задач

число Рейнольдса, а также число Пекле имеют большие значения, и мы можем использовать в основных уравнениях приближение пограничного слоя. В этом разделе мы рассмотрим течения в двумерном пограничном слое в радиационной газодинамике (пограничный слой на плоской пластине, смешение ламинарной струи, след и пограничный слой около тонкого тела и т. д.). Примем за ось  $x$  направление основного течения и за ось  $y$  направление толщины пограничного слоя, и соответствующие составляющие скорости в  $x$ - и  $y$ -направлениях будут  $u$  и  $v$ . Следовательно,  $u$  значительно больше, чем  $v$ , и градиент в направлении  $y$  значительно больше, чем градиент в направлении  $x$ . Основные уравнения течения в пограничном слое в радиационной газодинамике будут следующие:

а) Уравнение состояния

$$p = \rho R T. \quad (9.55a)$$

б) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (9.55б)$$

в) Уравнения движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial (p + p_R)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{du}{dy} \right), \quad (9.55в)$$

$$p + p_R = F(x), \quad (9.55г)$$

где давление излучения определяется интегралом

$$p_R = \frac{2\pi}{3c} \int_0^\infty d\nu \int_0^\pi I_\nu(\theta, x, y) \sin \theta d\theta, \quad (9.55д)$$

здесь  $\theta$  — угол между направлением луча и отрицательным направлением оси  $y$ . Следует отметить, что в общем случае напряжение излучения является тензорной величиной [см. уравнение (2.18)]. Однако, исходя из концепции теории сплошного течения в пограничном слое, напряжение излучения можно рассматривать как сумму давления излучения  $p_R$  [определяемого уравнением (2.19)] и тензора напряжения «вязкости» излучения [определяемого как разность уравнений (2.18) и (2.19)]. Применяя приближение пограничного слоя к напряжению излучения, мы получаем радиационные члены уравнений (9.55в) и (9.55г), так как касательное вязкое напряжение излучения близко к нулю в настоящей задаче.

В приближении пограничного слоя функция  $F(x)$  — известная функция только  $x$ .  $F(x)$  является суммой давления газа  $p$  и давления излучения  $p_R$  за пределами пограничного слоя. На-

пример, в случае равномерного невозмущенного потока с постоянной температурой  $F(x)$  — величина постоянная.

г) Уравнение энергии

$$\rho u \frac{\partial h_R}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y} + \\ + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p_R}{p} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (9.55e)$$

где

$$h_R = C_p T + E_R / \rho \quad (9.55ж)$$

— эффективная энтальпия с учетом эффекта излучения.

Результирующий поток излучения в направлении  $y$  в настоящем случае будет

$$q_{Ry} = 2\pi \int_0^\infty dv \int_0^\pi I_v(\theta, x, y) \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (9.55з)$$

д) Уравнение переноса излучения

$$\cos \theta \frac{\partial I_v}{\partial y} = \rho k'_v (I_v - B_v). \quad (9.55и)$$

Здесь мы принимаем одномерное приближение, предполагая, что спектральная интенсивность излучения  $I_v$  зависит в основном от  $y$ , а ее зависимость от  $x$  можно пренебречь. Это допущение является хорошей аппроксимацией для многих практических задач. С другой стороны, если мы рассмотрим уравнение двумерного переноса излучения, то получим эффект растекания тепла навстречу потоку, обусловленного переносом излучения, так как последний должен рассчитываться интегрированием по всему пространству. Одномерная задача совершенно аналогична полным уравнениям Навье—Стокса в приближении пограничного слоя. В уравнениях Навье—Стокса также имеет место влияние растекания тепла навстречу потоку. Пока еще очень мало сделано для решения задачи двумерного переноса излучения. В этом разделе мы ограничимся только одномерной моделью, за исключением случая очень малой средней длины свободного пробега излучения.

Мы будем решать уравнения (9.55) для различных граничных условий. Но прежде чем приступить к решению уравнений (9.55), интересно рассмотреть некоторые преобразования этих уравнений. Из уравнения (9.55б) можно определить функцию тока  $\psi$ , такую, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v. \quad (9.56)$$

Если использовать  $x$  и  $\psi$  в качестве независимых переменных вместо  $x$  и  $y$ , то уравнение (9.55б) будет автоматически удовлетворяться.

Если мы используем переменные  $x$  и  $\psi$ , то основные уравнения можно значительно упростить, в частности для случая  $F(x) = \text{const}$ . Тогда уравнение (9.55в) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho u \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \right). \quad (9.57)$$

Уравнение (9.57) имеет точно такую же форму, что и соответствующее уравнение обычной газодинамики. Единственное отличие состоит в том, что плотность больше не подчиняется обратно пропорциональной зависимости от температуры  $T$ , как это имеет место в обычной газодинамике, где давление газа постоянно, а плотность является функцией температуры  $T$ , определяемой уравнениями (9.55а) и (9.55г).

Уравнение энергии (9.55е) принимает вид

$$\begin{aligned} (C_p + 4RR_p) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4}{\rho} (1 + R_p) \frac{\partial p_R}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial \psi} + \mu \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \nu \frac{\partial p_R}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (9.58)$$

где  $R_p$  — локальное значение числа давления излучения.

Уравнение (9.58) значительно отличается от соответствующего уравнения обычной газодинамики, несмотря на то что уравнение (9.58) все еще остается модифицированным обобщенным уравнением переноса тепла. В общем случае  $p_R$  является функцией как  $\rho$ , так и  $T$ , и мы не можем объединить два члена в левой части уравнения (9.58) в один. Однако это можно сделать в частных случаях очень малой средней длины свободного пробега излучения.

Так как плотность можно выразить через температуру  $T$ , то нам необходимо решить только два интегро-дифференциальных уравнения (9.57) и (9.58) относительно  $u$  и  $T$  при начальных условиях

$$u = u_0(\psi) \quad \text{и} \quad T = T_0(\psi) \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (9.59)$$

Рассмотрим следующие два частных случая этих уравнений.

### Задача смешения ламинарной струи

Рассмотрим задачу смешения двумерной свободной струи, которая может представлять собой струю, истекающую из сопла в окружающую среду, или смешение двух однородных потоков, или след потока за двумерным телом. Удобно рассмотреть от-

дельно случай очень малой средней длины свободного пробега излучения и случай конечной средней длины свободного пробега излучения.

**1. Случай очень малой средней длины свободного пробега излучения.** С помощью результатов гл. 5, разд. 8, полученных для радиационных членов, уравнение (9.58) приводится к виду

$$C_{pR} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( K^* \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \mu \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \nu \frac{\partial p_R}{\partial \psi}, \quad (9.58a)$$

где

$$C_{pR} = C_p + 20RR_p + 16RR_p^2 \quad (9.60a)$$

— эффективная удельная теплоемкость с учетом излучения,

$$K^* = \kappa + \kappa_R = \kappa + 4a_R D_R T^3 \quad (9.60b)$$

— эффективный коэффициент теплопроводности с учетом излучения.

Последний член в правой части уравнения (9.58a)  $\nu (\partial p_R / \partial \psi)$  обычно пренебрежимо мал, особенно в экстремальных случаях очень большого и очень малого значений числа давления излучения  $R_p$ . Основное влияние теплового излучения состоит в увеличении удельной теплоемкости, согласно уравнению (9.60a), и увеличении коэффициента теплопроводности, согласно уравнению (9.60b). Поскольку  $C_{pR}$  зависит только от  $R_p$ , а  $K^*$  зависит как от  $R_p$ , так и от других факторов, например  $c/U$ , то имеется много практических случаев, когда возрастание удельной теплоемкости пренебрежимо мало, в то время как возрастание коэффициента теплопроводности существенно. Основное влияние теплового излучения сказывается тогда в уменьшении эффективного числа Прандтля

$$\text{Pr}_e = \frac{C_{pR} \mu}{K^*}. \quad (9.61)$$

Так как число Прандтля представляет собой квадрат отношения ширины профиля скорости к ширине температурного профиля, то влияние излучения будет способствовать расширению области смешения тепловой струи. Например, мы рассматриваем случай очень горячей струи в однородном потоке  $U$ . Так как температура всего поля течения очень высокая, то вязкая диссипация и работа, совершаемая силой давления, будут пренебрежимо малы. Тогда уравнение (9.58a) принимает вид

$$C_{pR} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( K^* \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right). \quad (9.58b)$$

Уравнение (9.58b) имеет точно такую же форму, что и уравнение (9.57). Если мы дальше примем, что отклонения

скорости  $u$  от однородной скорости  $U$  и температуры  $T$  от однородной температуры окружающего потока  $T_0$  малы во всем поле течения, то получим линеаризованные решения уравнений (9.57) и (9.58б) при следующих граничных условиях:  $x=0$ ,

$$\left. \begin{aligned} u &= U + u' \\ T &= T_0 + T' \end{aligned} \right\} \text{ при } 1 \geq y \geq -1,$$

$$\left. \begin{aligned} u &= U \\ T &= T_0 \end{aligned} \right\} \text{ при } y > 1 \text{ и } y < -1,$$

$$u' \ll U \text{ и } T' \ll T_0 \quad (9.62)$$

в виде

$$u = U + \frac{1}{2} u' \left[ \theta \left( \frac{1+y}{2\alpha x^{1/2}} \right) + \theta \left( \frac{1-y}{2\alpha x^{1/2}} \right) \right], \quad (9.63a)$$

$$T = T_0 + \frac{1}{2} T' \left[ \theta \left( \frac{1+y}{2\alpha_1 x^{1/2}} \right) + \theta \left( \frac{1-y}{2\alpha_1 x^{1/2}} \right) \right], \quad (9.63б)$$

где

$$\theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-z^2) dz, \quad (9.64)$$

$$\alpha^2 = \mu_0 / \rho_0 U = \text{Pr}_{e0} \alpha_1^2 \quad (9.65)$$

и  $\rho_0$ ,  $\mu_0$  и  $\text{Pr}_{e0}$  — значения  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\text{Pr}_e$  при  $T=T_0$  соответственно. Уравнение (9.63) показывает, что тепловое излучение приводит к расширению области теплового смешения струи  $T$  благодаря увеличению эффективного коэффициента теплопроводности.

**2. Случай конечной средней длины свободного пробега излучения.** В этом случае мы должны использовать интегральные выражения для членов, учитывающих тепловое излучение. Чтобы выявить некоторые основные эффекты теплового излучения, используем одномерную аппроксимацию для этих радиационных членов, как это было сделано в гл. 5, разд. 10. Так как нет твердой границы, то приходится брать граничные условия на плюс и минус бесконечности. Плотность энергии излучения и давление излучения в области смешения струи определяются следующими интегралами:

$$E_R = 3p_R = \frac{2\pi}{c} \left\{ - \int_0^\infty d\nu \int_{-\infty}^\tau B_\nu(t, \nu) \varepsilon_1(\tau - t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty d\nu \int_\tau^\infty B_\nu(t, \nu) \varepsilon_1(t - \tau) dt \right\}. \quad (9.66)$$



Выражение для теплового потока излучения в направлении оси  $y$  имеет вид

$$q_{Ry} = 2\pi \left\{ - \int_0^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\tau} B_v(t, v) \varepsilon_2(\tau - t) dt + \int_0^{\infty} dv \int_{\tau}^{\infty} B_v(t, v) \varepsilon_2(t - \tau) dt \right\}. \quad (9.67)$$

В общем случае оптическая толщина  $\tau$  является функцией частоты  $v$ , т. е.

$$\tau = \int_0^y \rho k'_v dy. \quad (9.68)$$

Уравнения (9.66) и (9.67) нельзя упростить, до тех пор пока не будет известна явная зависимость между  $\tau$  и  $v$ . Однако если газ можно приближенно считать серым, так что коэффициент поглощения практически не зависит от  $v$ , то вполне допустимо предположение, что  $\tau$  не зависит от  $v$ . Тогда уравнения (9.66) и (9.67) приводятся соответственно к следующему виду:

$$E_R = 3p_R = \frac{1}{2} a_R \left\{ - \int_{-\infty}^{\tau} T^4(t) \varepsilon_1(\tau - t) dt + \int_{\tau}^{\infty} T^4(t) \varepsilon_1(t - \tau) dt \right\}, \quad (9.66a)$$

$$q_{Ry} = \frac{1}{2} ca_R \left\{ - \int_{-\infty}^{\tau} T^4(t) \varepsilon_2(\tau - t) dt + \int_{\tau}^{\infty} T^4(t) \varepsilon_2(t - \tau) dt \right\}. \quad (9.67a)$$

Тогда член, учитывающий перенос тепла излучением в уравнении энергии для серого газа, записывается следующим образом:

$$Q_R = \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y} = \left( \frac{c}{L_R} \right) \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{R0}(t) \varepsilon_1(|t - \tau|) dt - E_{R0}(\tau) \right], \quad (9.69)$$

где  $E_{R0} = a_R T^4$  и  $L_R = 1/K_P$  — средняя длина свободного пробега излучения, определенная через средний коэффициент поглощения по Планку  $K_P$  [уравнение (5.36)]. Очевидно, что при больших значениях  $L_R$  тепловой поток излучения обратно пропорционален  $L_R$  и мы должны использовать средний коэффициент поглощения по Планку вместо среднего коэффициента поглощения по Росселанду. Чтобы проиллюстрировать физический смысл приведенной выше интегральной формулы, рассмотрим случай,

когда число давления излучения очень мало, но число потока излучения имеет конечное значение, так что давлением излучения и плотностью энергии излучения можно пренебречь. Тогда уравнение энергии (9.58) для серого газа принимает вид

$$\frac{\partial h_a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa \rho u}{C_p} \frac{\partial h_a}{\partial \psi} \right) + \rho u \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{c}{\rho u L_R} \right) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{R0}(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt - E_{R0}(\tau) \right\}, \quad (9.70)$$

где  $h_a = C_p T$  — энтальпия газа.

Из уравнения (9.70) можно оценить общее влияние излучения, не проводя численного интегрирования, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(|t - \tau|) dt = 2, \quad (9.71)$$

а последний член уравнения (9.70) можно записать в виде

$$\left( \frac{c}{\rho u L_R} \right) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{R0}(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt - E_{R0}(\tau) \right\} = \left( \frac{c}{\rho u L_R} \right) (\bar{E}_{R0} - E_{R0}), \quad (9.72)$$

где  $\bar{E}_{R0}$  — средняя величина  $E_{R0}$  в каждом сечении  $x$  при  $-\infty < y < \infty$

$$2\bar{E}_{R0} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{R0}(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt. \quad (9.73)$$

Следовательно, вблизи оси струи, где температура высока,  $E_{R0}$  больше  $\bar{E}_{R0}$  и радиационный член (9.72) отрицателен. В результате температура и энтальпия при наличии излучения уменьшаются быстрее в направлении  $x$ , чем при отсутствии излучения. С другой стороны, вдали от оси струи, где температура низка,  $E_{R0}$  меньше  $\bar{E}_{R0}$  и радиационный член (9.72) положителен. В результате при наличии излучения получаем более медленное уменьшение температуры или энтальпии по направлению  $x$ , чем при отсутствии излучения. Таким образом, мы приходим к выводу, что эффекты излучения способствуют снижению максимальной температуры в области смешения и увеличению распространения области теплового смешения.

### Ламинарный пограничный слой на плоской пластине

Теперь мы рассмотрим обтекание плоской пластины одномерным потоком излучающего газа. Основные уравнения (9.55) применимы также и в этом случае. Поскольку в направлении  $x$  полное давление не меняется, т. е.  $F(x) = \text{const}$ , то можно также использовать для настоящей задачи уравнения (9.57) и (9.58). Единственное отличие настоящей задачи от задачи смешения струи состоит в граничных условиях. Дополнительно к начальным условиям (9.59) мы должны рассмотреть граничные условия на поверхности пластины, т. е.

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = u_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Следовательно, мы решаем уравнения (9.57) и (9.58) с граничными условиями (9.74).

Получены решения задачи только для случаев пренебрежимо малого значения числа давления излучения. В этих условиях уравнение (9.58) принимает вид

$$C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \mu r u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \mu r u \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial \psi}. \quad (9.58\text{в})$$

Если сделать допущение, что  $\mu r = \text{const}$ , то распределение скорости в зависимости от  $x$  и  $\psi$  будет точно таким, как и при отсутствии излучения, а также таким, как и для несжимаемой жидкости. Это решение является одним из автомодельных решений уравнения пограничного слоя, хорошо известным решением Блазиуса. Решение Блазиуса можно получить следующим способом.

Вначале мы вводим преобразования подобия

$$s_1 = \rho_\infty u_\infty \mu_\infty x, \quad (9.75\text{а})$$

$$\eta = \frac{\rho_\infty \mu_\infty}{\sqrt{s_1}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy, \quad (9.75\text{б})$$

$$\psi = \sqrt{s_1} f(\eta), \quad (9.75\text{в})$$

$$T^*(x, \eta) = T/T_\infty. \quad (9.75\text{г})$$

Уравнение движения (9.55в), записанное через переменные (9.75), имеет следующий вид:

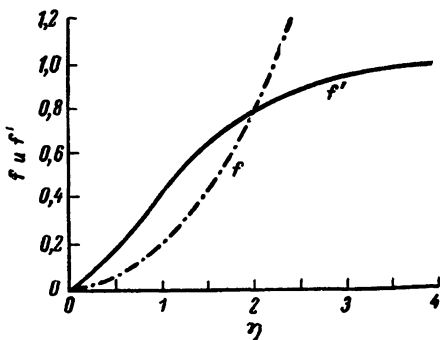
$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \quad (9.76)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной  $\eta$ . Граничные условия суть:

$$\begin{aligned} f' = f = 0 & \text{ при } \eta = 0, \\ f' \rightarrow 1 & \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Уравнение (9.76) является уравнением Блазиуса. Зависимости функций  $f(\eta)$  и  $f'(\eta)$  от  $\eta$  показаны на фиг. 9.10.

Без учета эффекта излучения уравнение энергии (9.58в) также имеет автомодельное решение, т. е.  $T^* = T^*(\eta)$ . Однако



Фиг. 9.10. Решение Блазиуса для функции тока  $f$  и распределения скорости  $f'$  в пограничном слое на плоской пластине.

при учете эффекта излучения мы не получим автомодельного решения для  $T^*$ . Следовательно, необходимо, во-первых, принять, что  $T^*$  зависит как от  $x$ , так и от  $\eta$ , и затем определить, существует ли автомодельное решение  $T^*(\eta)$  или нет. Уравнение энергии (9.58в) выражается через переменные  $x$  и  $\eta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - s_1 \text{Pr} f' \frac{\partial T^*}{\partial s_1} + (\text{Pr} - 1) \frac{u_\infty^2}{C_p T_\infty} (f''^2 + f' f''') = \\ = - \frac{\text{Pr} L s_1}{\rho C_p T_\infty u_\infty} \left( \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9.78)$$

Поскольку в уравнении (9.78) имеются члены с переменной  $s_1$ , автомодельное решение получить нельзя, за исключением случая оптически толстой среды. Без учета эффекта излучения можно предположить, что существует автомодельное решение и тогда  $\partial T^* / \partial s_1$  и  $\partial q_{Ry} / \partial y$  стремятся к нулю. Уравнение (9.78) становится полным дифференциальным уравнением относительно единственной переменной  $\eta$ . При наличии радиационного

члена, за исключением случая оптически толстой среды, когда член, учитывающий теплообмен излучением, является функцией только  $\eta$ , члены, зависящие от  $x$ , в уравнении (9.78) не будут стремиться к нулю. Следовательно, мы не получим подобного решения. Чтобы получить распределение температуры, уравнение (9.78) можно проинтегрировать численно. После того как будет получено распределение температуры, можно рассчитать теплоотдачу к стенке, т. е. тепловой поток за счет теплопроводности

$$q_c = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (9.79a)$$

и тепловой поток излучения

$$q_R = 2\pi \int_0^{\infty} B(t) \varepsilon_2(t) dt. \quad (9.79b)$$

Численные расчеты были проведены для следующих двух предельных случаев:

**1. Случай оптически толстой среды.** В этом случае член уравнения, характеризующий перенос тепла излучением, определяется следующим образом:

$$\frac{\partial q_R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( 4a_R D_R T^3 \frac{\partial T}{\partial y} \right); \quad (9.80)$$

выражая его через переменную подобия  $\eta$ , получим

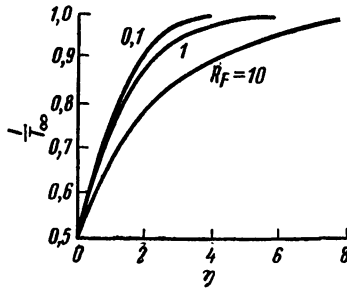
$$\frac{\partial q_R}{\partial y} = \frac{\rho u_{\infty}}{\sqrt{s_1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 4a_R D_R T^3 \frac{\rho u_{\infty}}{\sqrt{s_1}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right). \quad (9.80a)$$

Подставляя уравнение (9.80a) в уравнение (9.78), видим, что член, характеризующий перенос тепла излучением, не зависит от  $x$  или  $s_1$  и, следовательно, существует автомодельное решение. Уравнение (9.78) совместно с выражением (9.80a) было проинтегрировано Вискантом и Грошем в работе [27], в которой они пренебрегли вязкой диссипацией. На фиг. 9.11 приведено несколько типичных распределений температуры для случая оптически толстой среды при различных значениях числа потока излучения.

**2. Случай оптически тонкой среды.** Когда средняя длина свободного пробега очень велика, член, учитывающий перенос тепла излучением, принимает вид

$$\frac{\partial q_R}{\partial y} = -4\rho K_p \sigma T^4. \quad (9.81)$$

В этом случае мы не получим автомодельного решения для температуры, поскольку переменная  $s_1$  сохраняется в выражении члена  $\partial q_R / \partial y$ . Кох и Де-Сильва [13] проинтегрировали уравнение (9.78) численно, с использованием выражения (9.81) для радиационного члена. Они провели расчеты для числа Маха невозмущенного потока  $M_\infty = 40$  и высоты до 30 500 м и нашли, что в этих условиях эффект излучения пренебрежимо мал. Максимальная температура на уровне моря в их расчетах составляла около  $5800^\circ \text{K}$  и в других, рассмотренных ими случаях

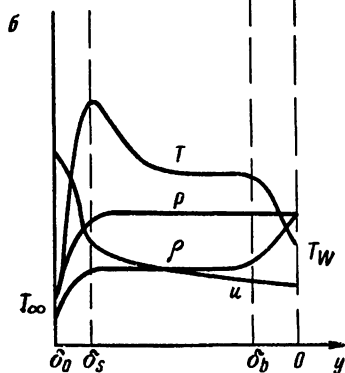
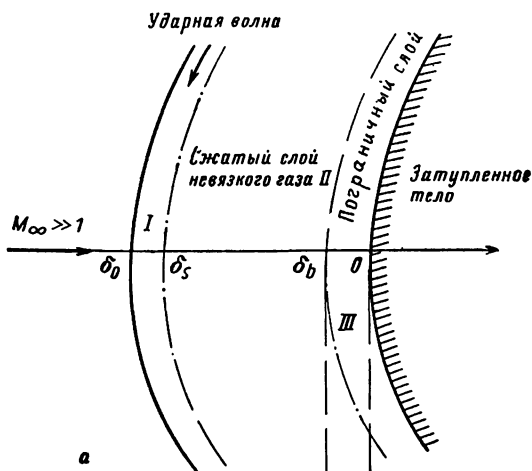


Фиг. 9.11. Распределение температуры в пограничном слое на плоской пластине при различных значениях числа потока излучения  $R_F = 4\sigma L_R T^3/\mu$  для случая оптически толстой среды (фиг. 3б из работы [27]).

средняя температура была много меньше, чем  $10\,000^\circ \text{K}$ . Чтобы эффект излучения был существенным, температура невозмущенного потока должна бы иметь порядок  $20\,000^\circ \text{K}$  или выше при нормальных условиях на уровне моря (см. разд. 8).

## 8. ТЕПЛОБМЕН В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Одной из наиболее интересных задач теплообмена излучением в аэрокосмической технике является теплообмен во время возвращения в земную атмосферу со скоростью, большей второй космической. За фронтом прямой ударной волны перед летательным аппаратом образуется высокотемпературная зона. Чтобы выявить характерные особенности этой задачи, рассмотрим затупленное тело (двумерное или осесимметричное) в гиперзвуковом потоке, как показано на фиг. 9.12. Обычно поле течения можно разделить на три различные области. Область I — это зона ударной волны. В этой зоне происходит большое изменение скорости и параметров состояния на очень коротком расстоянии. Если плотность газа не слишком мала,



Фиг. 9.12. Поле течения в окрестности точки торможения затупленного тела (не в масштабе).

а — области течения; б — изменения скорости и параметров состояния.

длина зоны  $I$  составляет только несколько средних длин свободного пробега. Мы рассмотрели поле течения в этой зоне в гл. 8, разд. 5 и 6. Основное влияние теплообмена излучением заключается в расширении этой зоны. Если напряжение излучения и плотность энергии излучения не пренебрежимо малы, распределение температуры в радиационной газодинамике сильно отличается от распределения температуры в обычной газодинамике. Мы считаем, что во всех случаях в этой зоне существует скачок температуры. Во многих практических задачах можно предположить, что эта зона настолько тонка, что ее можно заменить поверхностью разрыва. Соотношения между параметрами поля течения за ударной волной и перед ней являются соотношениями Ренкина — Гюгонно (см. гл. 8, разд. 4). В работе [23] Скала и Сэмпсон приводят некоторые числовые данные о структуре ударной волны для двух предельных случаев при пренебрежимо малом значении числа давления излучения и конечном значении числа потока излучения. Один из них — это случай оптически толстой среды, в котором используется выражение Росселанда для теплового потока излучения, уравнение (5.17), и в котором влияние излучения распространяется вверх по потоку, и другой случай оптически тонкой среды, в котором используются средний коэффициент поглощения по Планку и уравнение (6.45) и в котором влияние излучения распространяется главным образом вниз по потоку.

Область  $II$  можно назвать зоной невязкого сжатого слоя ударной волны. Эта зона исследовалась многими авторами как для случая отсутствия влияния излучения, так и для случая пренебрежимо малого значения числа давления излучения при конечном значении числа потока излучения. Отличительная особенность этой зоны состоит в том, что в ней можно пренебречь вязким напряжением, а также теплопроводностью. Мы уже рассматривали поле течения в этой зоне для частных случаев (гл. 8, разд. 6 и 7). В этом разделе мы рассмотрим эту зону несколько подробнее.

Область  $III$  — это зона пограничного слоя в окрестности точки торможения. В этой зоне совершенно нельзя пренебрегать вязкими касательными напряжениями и теплопроводностью. Однако эта область обычно довольно тонкая в направлении  $y$ , так что можно использовать приближение пограничного слоя. Мы подробно рассмотрим эту область ниже.

Толщина зоны пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса поля течения. Так как число Рейнольдса пропорционально плотности газа, то на очень большой высоте, где плотность воздуха очень мала, число Рейнольдса может быть очень малым. В результате толщина пограничного слоя будет настоль-



ко большой, что пограничный слой и сжатый слой ударной волны сольются в один слой, который можно назвать вязким слоем ударной волны. Мы также рассмотрим и этот случай.

### Невязкий сжатый слой

Общее решение для невязкого поля течения за отошедшей ударной волной очень сложное, поскольку, прежде чем получить решение, необходимо рассмотреть неизэнтропическое течение, в котором неизвестно изменение энтропии. Обычно решение получают численным интегрированием основного уравнения. Однако в случае гиперзвукового течения, когда число Маха невозмущенного потока  $M_\infty$  значительно больше единицы, можно сделать некоторое приближение, в результате которого основные уравнения будут существенно упрощены. Рассмотрим гиперзвуковой поток в окрестности точки торможения. Благодаря гиперзвуковой скорости течения плотность жидкости за ударной волной приблизительно постоянна. Следовательно, невязкое течение в сжатом слое можно рассматривать как течение с постоянной плотностью. В случае течения с постоянной плотностью, если число давления излучения пренебрежимо мало, компоненты скорости  $u_i$  и давление  $p$  не зависят от температуры. Можно рассчитать распределение скорости и давления независимо от температуры. После того как определены скорость и давление, можно рассчитать распределение температуры по уравнению энергии. Поскольку нас интересует теплообмен, мы не будем задерживаться на вычислении скорости и давления в невязком сжатом слое, которое дается в работах [14] и [21], и рассмотрим только распределение температуры. Используемая координатная система (фиг. 9.13) представляет собой систему ортогональных криволинейных координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , в которой  $x$  измеряется параллельно поверхности тела с локальным значением кривизны поверхности

$$K(x) = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{R_b}. \quad (9.82a)$$

Координата  $y$  направлена по нормали к поверхности тела, в то время как  $z$  перпендикулярна к  $x$  и  $y$ . Следовательно,  $r(x, y)$  — расстояние от произвольной точки  $P(x, y)$  по нормали к оси симметрии, которая параллельна невозмущенному потоку. Из условий симметрии предположим, что все переменные не зависят от координаты  $z$ . Ограничимся рассмотрением затупленного тела с большим радиусом кривизны  $R_b$  и поля течения в окрестности точки торможения 0. Интересующее нас поле течения расположено между  $y=0$  и  $y=\delta$ , где  $\delta$  — расстояние отхода

ударной волны, измеренное по оси  $y$ . В точке торможения  $0$   $\delta = \delta_0$ . Будем считать, что  $\delta \ll R_b$  и  $yK \ll 1$ . Для какой-либо физической величины  $Q$  можно принять

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| \gg |KQ| \approx \left| \frac{Q}{R_b} \right|. \quad (9.82б)$$

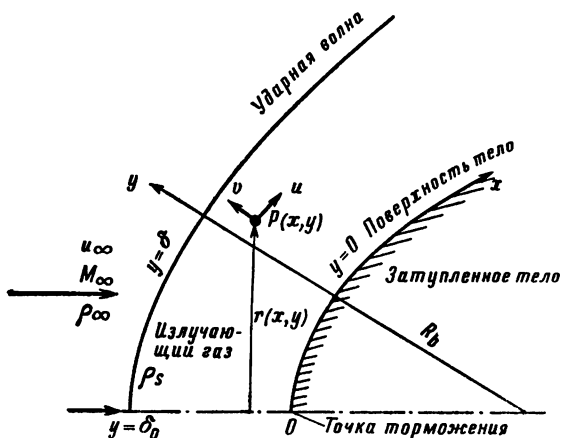
Кроме того, предположим, что

$$\frac{\partial K}{\partial x} \approx \frac{1}{R_b}. \quad (9.82в)$$

В окрестности точки торможения  $0$  можно принять

$$r \approx x, \quad \frac{\partial r}{\partial x} \approx 1, \quad \frac{\partial r}{\partial y} \approx 0. \quad (9.82г)$$

С учетом приближений (9.82) уравнение энергии для вязкого нетеплопроводного излучающего газа с пренебрежимо



Фиг. 9.13. Вязкий сжатый слой в окрестности точки торможения затупленного тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком.

малым значением числа давления излучения в координатах  $x - y$  фиг. 9.13. будет иметь вид

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{1}{x^a} \frac{\partial x^a q_{Rx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y}, \quad (9.83)$$

где  $h_0 = h_a + 1/2(u^2 + v^2)$  — энтальпия торможения;  $a=0$  для двумерного течения и  $a=1$  для осесимметричного течения. В общем случае мы должны рассматривать теплообмен излучением как по оси  $x$ , так и по оси  $y$ , согласно уравнению (9.83). Однако этот общий случай еще не изучен. В окрестности точки тормо-

жения при  $x \rightarrow 0$ , по-видимому, теплообмен излучением по оси  $x$  значительно слабее, чем по оси  $y$ , т. е.  $(1/x^a)(\partial x^a q_{Rx}/\partial x) \ll \ll (\partial q_{Ry}/\partial y)$ . Исходя из этого, в большинстве приведенных в литературе анализов членом  $(1/x^a)(\partial x^a q_{Rx}/\partial x)$  пренебрегают. Мы также пренебрежем этим членом.

В окрестности точки торможения составляющие скорости можно выразить через функцию тока  $\psi$ , такую, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -x^a u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -x^a v. \quad (9.84)$$

Здесь используется приближение постоянной плотности. Функция тока в окрестности точки торможения при гиперзвуковом течении была получена в следующем виде [14, 21]:

$$\psi = x^{1+a} f(y), \quad (9.85)$$

где функция  $f(y)$  записывается следующим образом:

*Для двумерного случая*

$$f(y) = A_0 \exp(A_2 y) + A_1 \exp(-A_2 y), \quad (9.86)$$

где

$$A_0 = -A_1 = k_p u_\infty \sqrt{k_p(2 - k_p)} / [2(1 - k_p)]$$

и

$$A_2 = -(1 - k_p) / (k_p R_s),$$

$k_p = \rho_\infty / \rho_s$  — отношение плотностей на ударной волне,  $R_s$  — радиус кривизны тела в точке торможения. Расстояние отхода ударной волны равно

$$\delta_0 = [(1 - k_p R_s) / (1 - k_p)] \operatorname{arcsh} [(1 - k_p) / \sqrt{k_p(2 - k_p)}]. \quad (9.87)$$

*Для осесимметричного случая*

$$f(y) = C_1 y + C_2 y^2, \quad (9.88)$$

где

$$C_1 = -\sqrt{1 - (1 - k_p)^2} (u_\infty / R_s),$$

$$C_2 = \left[ \frac{1}{2} (1 - k_p)^2 \right] [k_p u_\infty / (k_p R_s)^2], \quad (9.89)$$

$$\delta_0 = \{ [-1 + \sqrt{1 - (1 - k_p)^2}] / (1 - k_p)^2 \} k_p R_s.$$

Если подставить выражение для составляющих скорости, согласно уравнению (9.85), в уравнение (9.83) и пренебречь членами более высокого порядка, приняв  $x=0$ , то получим уравнение энергии, которое является функцией только  $y$ :

$$\frac{dq_{Ry}}{dy} + (1+a)f \frac{dh_a}{dy} = -\rho(1+a)^3 f^2 \frac{df}{dy}, \quad (9.90)$$

где  $h_a$  — энтальпия газа. В общем случае уравнение (9.90) — интегро-дифференциальное уравнение, так как  $q_{Ry}$  имеет интегральную форму. Общее решение этого интегро-дифференциального уравнения получить очень трудно. Обычно приходится делать дальнейшие упрощения. Рассмотрим несколько следующих упрощенных случаев:

**1. Случай оптически толстой среды.** В этом случае можно использовать для выражения теплового потока излучения коэффициент теплопроводности  $\kappa_R$  по Росселанду. Так как  $\kappa_R$  и удельная теплоемкость при постоянном давлении  $C_p = dh_a/dT$  являются функциями температуры, то уравнение (9.90) можно записать в следующей форме:

$$\frac{d^2T}{dy^2} + A(T, y) \frac{dT}{dy} = -B(T, y), \quad (9.91)$$

где

$$A(T, y) = \frac{1}{\kappa_R} \frac{d\kappa_R}{dy} + (1+a)f \frac{dh_a}{dT},$$

$$B(T, y) = \frac{\rho(1+a)^3 f^2}{\kappa_R} \frac{df}{dy}.$$

Квазилинейное дифференциальное уравнение (9.91) можно решить методом последовательных приближений. В качестве первого приближения можно принять  $T = T_0(y)$ . Подставляя  $T_0(y)$  в выражения  $A(T, y) = A(y)$  и  $B(T, y) = B(y)$  уравнения (9.91), получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, т. е.

$$\frac{d^2T}{dy^2} + A(y) \frac{dT}{dy} = -B(y). \quad (9.91a)$$

Уравнение (9.91a) — хорошо известное уравнение Польгаузена. Граничные условия имеют вид

$$T = T_w \text{ при } y=0 \left( \text{или } \frac{dT}{dy} = 0 \text{ для случая изолированного тела} \right), \quad (9.92)$$

$T = T_s$  — температура непосредственно за ударной волной при  $y = \delta_0$ .

Решение уравнения (9.91a) можно записать в виде

$$T(y) - T_s = (T_w - T_e) T_1(y) + T_2(y), \quad (9.93)$$

где  $T_1(y)$  — решение однородного уравнения и  $T_2(y)$  — частное решение неоднородного уравнения;  $T_e$  — температура изолированного тела, которая будет определена позже.

Тогда получим

$$T_1'' + A(y) T_1' = 0, \quad (9.94)$$

где штрих означает дифференцирование по  $y$ ; граничные условия для  $T_1$ :  $y=0, T_1=1$  и  $y=\delta_0, T_1=0$ ;

$$T_2'' + A(y) T_2' = -B(y); \quad (9.95)$$

граничные условия для  $T_2$ :  $y=0, T_2'=0$  и  $y=\delta_0, T_2=0$ .

Так как оба уравнения (9.94) и (9.95) — обычные дифференциальные уравнения первого порядка относительно  $T'$ , их всегда можно проинтегрировать. Однако в связи с тем, что  $A(y)$  и  $B(y)$  — сложные функции от  $y$ , лучше интегрировать эти уравнения численно. После того как будет получено первое приближение  $T(y)$ , можно пересчитать  $A(y)$  и  $B(y)$  и получить затем второе приближение  $T(y)$ . Процесс можно повторять до тех пор, пока не будет получена желаемая точность.

Численное решение нельзя выполнить для любого частного случая. В работе [30] Иосикава и Чепмен сделали дальнейшее упрощение, пренебрегая членами, учитывающими кинетическую энергию, т. е. принимая  $B(y)=0$ . Их решение приведено на фиг. 8.16 для случая  $\tau_w = \infty$ . Оно показывает, что температура падает от  $T_s$  до постоянной величины. На основной части вязкого сжатого слоя температура будет постоянной. Эта предельная температура  $T_L$  может отличаться от температуры стенки  $T_w$ . Температура  $T_L$  будет понижаться до величины  $T_w$  в зоне пограничного слоя в окрестности точки торможения. Следовательно,  $T_L$  можно рассматривать как температуру невозмущенного потока в анализе пограничного слоя.

**2. Случай оптически тонкой среды.** В этом случае оптическая толщина очень мала, и поэтому зона ударной волны может рассматриваться как прозрачная поверхность. Член уравнения энергии, характеризующий перенос тепла излучением, становится равным

$$\frac{dq_{Ry}}{dy} = \frac{2}{L_R} (-2\sigma T^4 + e_w T_w^4), \quad (9.96)$$

где  $L_R = 1/\rho K_p$  — средняя длина свободного пробега излучения по Планку. Если температура стенки мала, то имеем просто

$$\frac{dq_{Ry}}{dy} = -\frac{4\sigma T^4}{L_R} = -E(\rho, T). \quad (9.96a)$$

Так как средняя длина свободного пробега излучения по Планку  $L_R$  является функцией плотности и температуры, функция  $E$  будет также зависеть от плотности и температуры.

В качестве первого приближения можно использовать степенной закон, т. е.

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{m_1} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{m_2}. \quad (9.97)$$

Для воздуха при температуре порядка  $10\,000^\circ\text{K}$   $m_1=8,4$  и  $m_2=1,0$ .

Другая формула для  $E$  имеет вид

$$E = \alpha \exp(\beta h_a), \quad (9.98)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  зависят только от плотности. Для течения с постоянной плотностью они постоянны. Уравнение энергии (9.90) принимает вид

$$\frac{dh_a}{dy} = \frac{E(h_a)}{(1+a)\rho f} - (1+a)^2 ff'. \quad (9.99)$$

Полное дифференциальное уравнение первого порядка (9.99) можно легко проинтегрировать. При  $y=0$  и  $f=0$  имеется особая точка. Эта особенность просто связана с использованием упрощенного выражения (9.96а), в котором пренебрегли температурой стенки. Так как около стенки имеется пограничный слой, то температура стенки  $T_w$  не равна истинной температуре стенки, а является температурой внешней границы пограничного слоя  $T_L$ , которую можно найти путем интегрирования уравнения энергии с радиационным членом, определяемым уравнением (9.96).

Если мы пренебрежем членом, учитывающим кинетическую энергию в уравнении (9.99), т. е. членом  $ff'$ , то будет иметь место логарифмическая особенность при  $y=0$ , о которой говорится в работе [11].

**3. Случай конечной средней длины свободного пробега излучения.** В этом случае мы должны использовать интегральное выражение для члена, учитывающего теплообмен излучением, и уравнение энергии (9.99) принимает вид

$$(1+a)\rho f \frac{dh_a}{dy} = \frac{2\sigma}{L_R} \left\{ 2T^4 - \int_0^{\tau_w} T^4(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt - e_w T_w^4 \varepsilon_2(\tau) - \right. \\ \left. - 2r_w \varepsilon_2(\tau) \int_0^{\tau_w} T^4(t) \varepsilon_2(t) dt \right\} - \rho(1+a)^3 f^2 f', \quad (9.100)$$

где  $e_w$  и  $r_w$  — коэффициент излучения и коэффициент отражения поверхности тела соответственно.

Нужно отметить, что при решении уравнения (9.100) особенность в точке торможения можно исключить, так как с физической точки зрения нельзя ожидать, что  $dh_a/dy = \infty$ . Следовательно, если запишем

$$R(\tau) = 2T^1 - \int_0^{\tau_w} T^4(t) \varepsilon_1(|\tau - t|) dt - e_w T_w^4 \varepsilon_2(\tau) - \\ - 2r_w \varepsilon_2(\tau) \int_0^{\tau_w} T^4(t) \varepsilon_2(t) dt, \quad (9.101)$$

где  $\tau_w$  — оптическая толщина, соответствующая расстоянию отхода ударной волны, то

$$R(0) = 0. \quad (9.102)$$

Уравнение (9.102) дает температуру стенки  $T_w = T(0) = T_L$  для невязкого сжатого слоя, которая является температурой внешней границы пограничного слоя.

При  $y=0$  имеем

$$\frac{R(0)}{f} = \frac{R'(0)}{f'(0)}. \quad (9.103)$$

На фиг. 8.16 представлены результаты при различных  $\tau_w$  для случая, когда кинетическая энергия пренебрежимо мала, а стенки черные.

### Пограничный слой в окрестности точки торможения

Рассмотрим случай, когда число давления излучения пренебрежимо мало. В пограничном слое мы должны учитывать диффузию, химические реакции, а также тепловое излучение. Основные уравнения осесимметричного течения около тела с радиусом кривизны  $r_0(x)$ , большим по сравнению с толщиной пограничного слоя, следующие:

а) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u r_0) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r_0) = 0. \quad (9.104a)$$

б) Уравнение движения в направлении  $x$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (9.104b)$$

в) Уравнение диффузии или сохранения массы  $i$ -го компонента смеси газов, т. е. воздуха,

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \sum_j D_{ij} \frac{\partial c_j}{\partial y} + \frac{D_{iT}}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \dot{W}_i, \quad (9.104в)$$

где  $c_i$  — массовая концентрация  $i$ -го компонента;  $D_{ij}$  — коэффициент диффузии между  $i$ -м и  $j$ -м компонентами;  $D_{iT}$  — коэффициент термодиффузии  $i$ -го компонента и  $\dot{W}_i$  — скорость образования  $i$ -го компонента смеси.

г) Уравнение энергии смеси

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial q_{Ry}}{\partial y} - \sum_i \dot{W}_i h_i - \sum_i C_{pi} m_i \frac{\partial T}{\partial y} \left\{ \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{m^2} \rho D_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial y} - \frac{D_{iT}}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \quad (9.104г)$$

где  $C_{pi}$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении  $i$ -го компонента и  $C_p = \sum_i c_i C_{pi}$  — замороженная удельная теплоемкость газовой смеси при постоянном давлении;  $m_i$  — молекулярный вес  $i$ -го компонента и  $m$  — средний молекулярный вес газовой смеси;  $X_i$  — мольная доля  $i$ -го компонента;  $h_i$  — статическая энтальпия  $i$ -го компонента, включающая химическую энтальпию, и  $q_{Ry}$  — тепловой поток излучения в направлении  $y$ .

Граничные условия для уравнений (9.104) следующие:

$$\begin{aligned} v = v_w, \quad u = 0, \quad T = T_w, \quad c_i = c_{iw} \quad \text{при } y = 0, \\ u = u_e, \quad T = T_e, \quad c_i = c_{ie} \quad \text{при } y = \infty, \end{aligned} \quad (9.105)$$

где  $v_w$  — нормальная составляющая скорости на стенке. Если в газовую смесь вдувается некоторый инородный газ, то  $v_w \neq 0$ . В противном случае  $v_w$  обычно берется равной нулю. Массовая концентрация  $c_{iw}$  на стенке зависит от условий на поверхности. Мы предполагаем, что на внешней границе пограничного слоя  $y = \infty$  поток находится в равновесных условиях, следовательно, массовая концентрация  $c_i$  будет равна ее равновесному значению  $c_{ie}$ . Температура должна быть определена из решения для невязкого сжатого слоя, т. е.  $T_e = T_L$ . Так как мы рассматриваем только решение в окрестности точки торможения, то  $x$ -составляющая скорости на внешней границе пограничного слоя будет  $u_e = bx$ , где  $b$  — постоянная.



Для течения в окрестности точки торможения мы используем преобразования

$$\eta = \frac{\rho_e u_e}{\sqrt{2} \xi} \int_0^y r_0 \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad \xi = \int_0^x \rho_w \mu_w u_e r_0^2 dx. \quad (9.106)$$

Уравнения (9.104), записанные через  $\xi$  и  $\eta$ , образуют систему трех нелинейных обычных дифференциальных уравнений, за исключением выражения для  $q_{Ry}$ , т. е.

$$(Cf'')' + ff'' + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right) = 0, \quad (9.107a)$$

$$\frac{C}{Pr} \left( Lec'_i + Le_T \frac{T^{*'}}{T^*} \right)' + fc'_i + \frac{\dot{W}_i}{2\phi b} = 0, \quad (9.107б)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{C_p C}{Pr} T^{*'} \right]' + \frac{1}{2\phi T_e b} \left( \frac{dq_{Ry}}{dy} \right) + C_p f T^{*'} - \\ & - \frac{\sum_i \dot{W}_i h_i}{2\phi T_e b} + \frac{C}{Pr} \sum_i \left[ C_{pi} \left( Lec'_i + Le_T \frac{T^{*'}}{T^*} \right) \right] T^{*'} = 0, \end{aligned} \quad (9.107в)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\eta$  и

$$C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad Pr = \frac{C_p \mu}{\chi},$$

$$T^* = \frac{T}{T_e}, \quad Le = \frac{C_p D_{ij}}{\chi}, \quad Le_T = \frac{C_p D_{iT}}{\chi}.$$

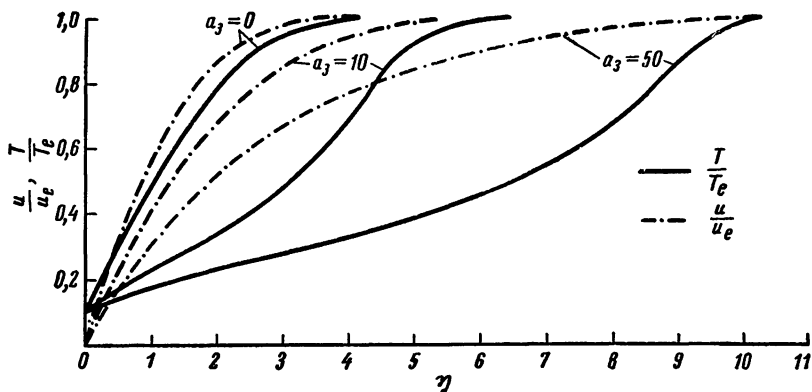
Мы должны интегрировать уравнение (9.107) численно. На фиг. 9.14 показаны типичные профили скорости и температуры для случая оптически толстой среды, когда используется выражение Росселанда для теплообмена излучением при различных значениях числа потока излучения [см. уравнение (7.42)]

$$a_3 = \left( \frac{16T^3}{3\chi K_{R^0}} \right)_{\max} = R_{F1}. \quad (9.108a)$$

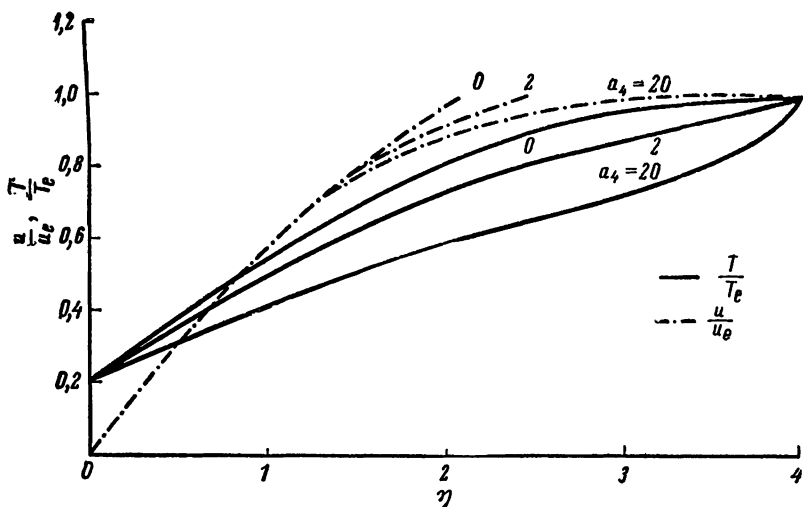
На фиг. 9.15 приведены некоторые типичные профили скорости и температуры для случая оптически тонкой среды, полученные с использованием выражения (9.90a) для потока излучения, при различных значениях числа потока излучения [см. уравнение (7.43)]

$$a_4 = \frac{\sqrt{2} (K_{p^0})_T \sigma T_e^{2.5} R_b}{\rho_e \sqrt{\bar{R}_e}} = R_{F2}, \quad (9.108б)$$

где  $R_b$  — радиус носовой части тела и  $\bar{R}_e$  — газовая постоянная для воздуха при  $y = \infty$ .



Фиг. 9.14. Распределение скорости и температуры в пограничном слое в окрестности точки торможения затупленного тела при наличии и при отсутствии теплового излучения. Случай оптически толстой среды (фиг. 13 из работы [22]);  $a_3 = 16\sigma T^3 L_{R1}/3\kappa = R_{F1}$ .



Фиг. 9.15. Распределение скорости и температуры в пограничном слое в окрестности точки торможения затупленного тела при наличии и при отсутствии теплового излучения. Случай оптически тонкой среды (фиг. 17 из работы [22]);  $a_4 = \sqrt{2}(K_p \rho) T_e \sigma T_e^{2.5} R_b / \rho_e \sqrt{R_e}$ .

В работе [6] Хоу исследовал влияние вдува поглощающего излучение газа на поле потока падающего излучения, профили энтальпии и теплоотдачу к поверхности корабля. Было принято, что энергия, излучаемая холодным вдуваемым газом, пренебрежимо мала по сравнению с поглощаемой энергией. Основные уравнения (9.107) были проинтегрированы для двух различных скоростей вдува, т. е.  $v_w$ . Было обнаружено, что уменьшение теплового потока сопровождается возрастанием конвективного теплового потока. В случае черной поверхности полный тепловой поток снижается при вдуве поглощающего газа, в то время как в случае полностью отражающей поверхности полный тепловой поток возрастает.

### Вязкий сжатый слой

Настоящий случай является комбинацией невязкого сжатого слоя и пограничного слоя. Воспользуемся системой координат, показанной на фиг. 9.13. Упростим уравнения Навье — Стокса, приняв малым расстояние отхода ударной волны, т. е.  $\delta_0/R_b \ll 1$ . Если предположить также, что  $x$  имеет порядок величины  $\delta_0$ , т. е. рассматривать область в окрестности точки торможения, то основные уравнения вязкого сжатого слоя будут следующими:

$$\frac{\partial \rho u r^a}{\partial x} + \frac{\partial H \rho v r^a}{\partial y} = 0, \quad (9.109a)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + H \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (9.109б)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + H \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\rho u^2}{R} = - H \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (9.109в)$$

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + H \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = H \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_i D_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) +$$

$$+ H \rho K_{p\sigma} \left[ \int_0^{\tau_w} 2T^4(t) \varepsilon_1(|t - \tau|) dt - 4T^4 + 2T_w^4 \varepsilon_2(\tau) \right], \quad (9.109г)$$

где

$$r(x, y) = Hx, \quad H = 1 + (y/R), \quad h_0 = h_a + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$$h_a = \sum_i c_i h_i, \quad h_i(T) = \int_0^T C_{pi} dT + h_i^0,$$

$$\tau = \int_0^y \rho K_p dy,$$

где  $h_i^0$  — энергия, выделяемая при химической реакции. Граничные условия для уравнений (9.109) имеют вид

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = v_w, \quad h_a = h_w \quad \text{при } y = 0, \\ u &= u_s = U_\infty x/R, \quad v = v_s = -k_p U_\infty \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2}\right) \quad \text{при } y = \delta, \\ p &= p_s = \rho_\infty U_\infty^2 \left(1 - k_p\right) \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right), \\ h_0 &= h_{0s} = \frac{1}{2} U_\infty^2, \\ k_p &= \rho_\infty / \rho_s. \end{aligned} \quad (9.110)$$

В общем случае  $y$ -составляющая скорости  $v$  должна иметь тот же порядок по величине, что и  $x$ -составляющая скорости  $u$ . Но в окрестности точки торможения при гиперзвуковой скорости течения  $y$ -составляющая скорости  $v$  меньше  $x$ -составляющей скорости  $u$  и в качестве первого приближения можно использовать в уравнении (9.109в) приближение пограничного слоя  $\partial p / \partial y = 0$ . Это приближение использовано в работе [7], из которой заимствован следующий числовой пример. Для радиационных членов мы принимаем, что тело имеет черную поверхность, а ударная волна является прозрачной поверхностью.

В работе [7] также изучено влияние вдува инородного газа через поверхность тела. Массовая концентрация инородного газа  $c_f$  описывается уравнением диффузии

$$\rho u \frac{\partial c_f}{\partial x} + H \rho v \frac{\partial c_f}{\partial y} = H \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_f \frac{\partial c_f}{\partial y} \right), \quad (9.111)$$

где  $D_f$  — коэффициент диффузии инородного газа в воздухе. Граничные условия для массовой концентрации инородного газа  $c_f$  имеют вид

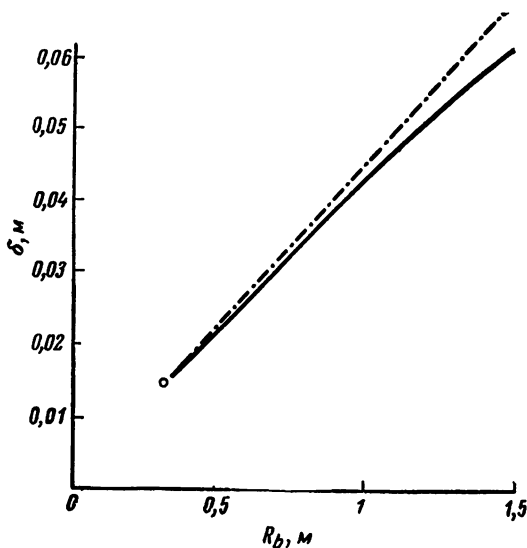
$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial c_f}{\partial y} \right)_w &= - \frac{v_w}{D_{fw}} (1 - c_{fw}) \quad \text{при } y = 0, \\ c_f &= 0 \quad \text{при } y = \delta. \end{aligned} \quad (9.112)$$

В общем случае инородный газ воздействует на термодинамические, излучательные свойства и свойства переноса смеси. Так как количество инородного газа мало и его влияние на термодинамические свойства и свойства переноса неопределенно, то мы, следуя работе [7], пренебрежем его влиянием на термодинамические свойства и свойства переноса смеси и рассмотрим его влияние только на излучательные свойства. Влияние инородного газа на средний коэффициент поглощения по

Планку можно представить в виде следующей зависимости:

$$K_p = (1 - c_f) K_{p(\text{воздух})} + c_f K_{pf} = K_{p(\text{воздух})} [1 + c_f (\alpha - 1)]. \quad (9.113)$$

Средний коэффициент поглощения по Планку для воздуха — известная функция температуры и давления [см. уравнения



Ф и г. 9.16. Расстояние отхода ударной волны  $\delta$  в зависимости от радиуса носовой части тела  $R_b$  (фиг. 17 из работы [7]).

© данные работы [7] без учета влияния излучения; — зависимость, полученная в работе [7] с учетом влияния излучения,  $U = 15\,240$  м/сек,  $p_s = 1$  атм; - - - зависимость, приведенная в работе [5] [уравнение (104)].

(7.49) и (7.51), а также фиг. 8.14]. Величина  $\alpha$  определяет влияние инородного газа. Хоу и Виегас [7] решили уравнения (9.109) и (9.111) для различных случаев с помощью метода численного интегрирования на высокоскоростной вычислительной машине IBM 7090. Некоторые из их основных результатов приводятся ниже:

**1. Расстояние отхода ударной волны.** Приближенная формула Хейза для расстояния отхода ударной волны имеет вид

$$\delta = \frac{R_b k_p}{1 + \sqrt{2k_p}}. \quad (9.114)$$

На фиг. 9.16 сравниваются расстояния отхода ударной волны с учетом и без учета влияния излучения.

**2. Теплообмен.** Полный тепловой поток  $q_T$  состоит из конвективного теплового потока  $q_c$  и теплового потока излучения  $q_R$ , т. е.

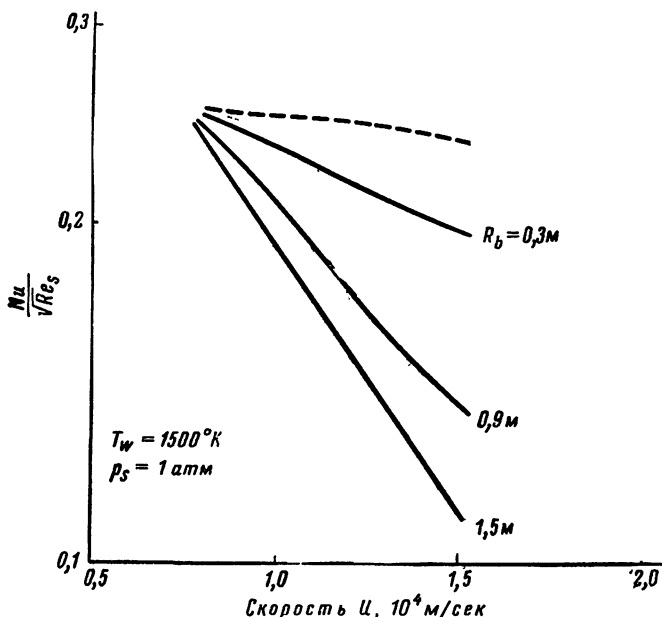
$$q_T = q_c + q_R = - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w + q_{Rw}, \quad (9.115)$$

где  $q_{Rw}$  определяется интегралом (6.41) при  $\tau=0$ . Конвективный тепловой поток можно выразить через число Нуссельта  $Nu$

$$Nu = \frac{q_c x C_{pw}}{\kappa_w (h_{0s} - h_w)} \quad (9.116)$$

и число Рейнольдса  $Re_s = \rho_w u_s x / \mu_w$ .

Конвективный тепловой поток существенно снижается из-за влияния излучения. Так как теплообмен излучением для случая



Фиг. 9.17. Влияние радиуса носовой части тела на теплообмен в оптически тонкой среде (фиг. 11 из работы [7]).

— без взаимодействия теплообмена излучением и конвекцией.

оптически тонкой среды зависит от радиуса носовой части тела, то чем больше радиус затупленной части, тем больше влияние излучения. Влияние радиуса носовой части тела на теплообмен излучением показано на фиг. 9.17. Упрощенный анализ тепло-

обмена излучением в предположении, что ударная волна представляет собой изоэнергетический прозрачный слой газа (см. фиг. 1.1 и 1.2, а также работу [12]), дает значительно завышенную величину теплового потока излучения, чем более точный анализ, в котором учтено взаимодействие между излучением и другой газодинамической переменной.

Влияние вдува газа из стенки приводит к ослаблению конвективного теплообмена и усилению теплообмена излучением. Но уменьшение конвективного теплового потока обычно значительно больше, чем увеличение теплового потока излучения. Вдув инородного газа с сильным поглощением излучения эффективнее вдува воздуха. Пример, приведенный в работе [7], показывает, что вдув инородного газа, который в 50 раз эффективнее воздуха в качестве излучателя энергии, повышает тепловой поток излучения только на 14%, в то время как снижение конвективного теплового потока составляет около 45% по сравнению с теплообменом без вдува. Полный тепловой поток понижается примерно на 14%.

В результате взаимодействия теплообмена излучением и конвекцией полный тепловой поток будет снижаться по сравнению со случаем теплообмена без взаимодействия.

## 9. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Так как радиационная газодинамика включает в себя все задачи газодинамики, можно пересмотреть все задачи теплообмена обычной газодинамики с учетом эффекта излучения. Мы не будем проводить такое полное исследование. Однако в этом разделе мы рассмотрим два случая, которые отличаются от того, что было изучено до сих пор. Один из них — это случай, когда нельзя пренебречь рассеянием, и другой случай — задача нестационарного течения.

**1. Рассеивающая среда.** До сих пор в анализе задач течения мы пренебрегали рассеянием излучения и предполагали, что испускание и поглощение являются истинными значениями испускания и поглощения среды. В результате мы использовали уравнение (5.10) для переноса излучения. Если принять во внимание эффекты рассеяния, а также истинное испускание и поглощение, то необходимо использовать уравнение (3.38), в котором коэффициент излучения и коэффициент поглощения определяются соответственно уравнениями (3.29) и (3.5). Теперь уравнение переноса излучения становится интегро-дифференциальным уравнением. Задачи газодинамики, учитывающие

эффект рассеяния, очень мало изучены. В работе [28] рассматривается тепловое излучение в поглощающей и рассеивающей среде. Исследован, однако, только серый газ, поскольку имеется мало сведений об изменении коэффициента рассеяния в зависимости от частоты. Висканта и Грош установили, что влияние изотропного рассеяния сказывается в увеличении оптической толщины среды и, следовательно, ослаблении теплообмена излучением между пластинами. Так как наши знания о теплообмене излучением без рассеяния довольно скудные и мы мало знаем о коэффициенте рассеяния, то, по мнению автора, следует временно отложить изучение задач газодинамики с учетом эффектов рассеяния до тех пор, пока не будут накоплены знания об эффектах теплового излучения без рассеяния и данные о коэффициенте рассеяния.

**2. Задача нестационарного течения.** Нестационарное течение с учетом эффектов теплового излучения исследовано очень мало, за исключением волнового движения с малой амплитудой. При волновом движении с малой амплитудой мы обычно принимаем, что перенос излучения соответствует условиям локального термодинамического равновесия. В нестационарных задачах может не достигаться локальное термодинамическое равновесие. Мы кратко рассмотрим условия отсутствия локального термодинамического равновесия в гл. 11. Даже при допущении локального термодинамического равновесия влияние нестационарных эффектов на теплообмен излучением может быть существенным, в частности в задаче возвращения из космоса. Мы должны исследовать эти эффекты в ближайшем будущем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein T. H., Radiant Heat Transfer to Absorbing Gases Enclosed Between Parallel Flat Plates with Flow and Conduction, NASA TRR-154, 1963.
2. Georgiev S., Teare J. D., Allen R. A., Hypervelocity Radiative Heat Transfer, AVCO Everett Research Lab., Research Note 264, Aug. 1961.
3. Godske C. L., Bergeron T., Bjerknes J., Bundgaard R. C., Dynamic Meteorology and Weather Forecasting, American Meteorology Society and Carnegie Institution of Washington, 1957.
4. Goulard R., Preliminary Estimate of Radiative Transfer Effects on Detached Shock Layers. AIAA Journ., 2, 3, 494—502 (1964); имеется русский перевод: Гулард Р., Предварительное исследование влияния излучения на сжатый слой за отошедшей ударной волной, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3, стр. 105 (1964).
5. Hayes W. D., Probstein R. F., Hypersonic Flow Theory, Academic Press, N. Y., 1959; имеется русский перевод: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.



6. Howe J. T., Shielding of Partially Reflecting Stagnation Surfaces against Radiation by Transpiration of an Absorbing Gas, NASA TR R-95, 1961.
7. Howe J. T., Viegas J. R., Solutions of the Ionized Radiating Shock Layer Including Reabsorption and Foreign Species Effects and Stagnation Region Heat Transfer, NASA TR R-159, 1963.
8. Jakob M., Heat Transfer, Vols. I and II, Wiley, 1949 and 1957.
9. Johnson J. C., Physical Meteorology, Wiley, N. Y., 1954.
10. Kennet H., Radiation-Convection Interaction around a Sphere in Hypersonic Flow, ARS Journ., 32, p. 1616 (1962); имеется русский перевод: Кеннет Г., Теплообмен с учетом излучения и конвекции около сферы в гиперзвуковом потоке, *Ракетная техника*, № 10, стр. 139 (1962).
11. Kennet H., Strack S. L., Stagnation Point Radiative Transfer, ARS Journ., 31, p. 370 (1961); имеется русский перевод: Кеннет Г., Стрэк С., Теплоотдача излучением в критической точке, *Ракетная техника*, № 3, стр. 113 (1961).
12. Kivel B., Radiation from Hot Air and its Effect on Stagnation Point Heating, *Journ. Aero. Sci.*, 28, 2, 96 (1961).
13. Koh J. C. Y., DeSilva C. N., Interaction between Radiation and Convection in the Hypersonic Boundary Layer on a Flat Plate, ARS Report 2205-61, Oct. 1961.
14. Li T. Y., Geiger R. E., Stagnation Point in a Blunt Body in Hypersonic Flow, *Journ. Aero. Sci.*, 24, 1, 25 (Jan. 1957).
15. Müller H. G., Energiegleichgewicht und Winde in der Hohen Atmosphäre, Paper № 64-549 ICAS 4th Congress, Aug. 1964; Report № 6, Inst. f. Phys. der Atm. DVL., München, Germany, 1964.
16. Немчинов И. В., Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением, *ПМТФ*, № 1, стр. 36, 1960.
17. Oppenheim A. K., The Engineering Radiation Problem—an Example of the Interaction between Engineering and Mathematics, *ZAMM*, Bd. 36, Heft 3/4, p. 81 (1956).
18. Pai S. I., Laminar Jet Mixing in Radiation Gasdynamics, *Phys. Fluids*, 6, 10, 1440 (1963).
19. Pai S. I., Plane Couette Flow in Radiation Gasdynamics, Proc. 6th Intern. Symp. in Ionization Pehn. of Gases, Paris, France, July 1963, p. 431—436.
20. Pai S. I., Viscous Flow Theory. I—Laminar Flow, D. Van Nostrand. Inc., N. J., 1956.
21. Pai S. I., Kornowski E. T., Stagnation Point Flow of Magnetized Blunt Body in Hypersonic Flow, Engineering Magnetohydrodynamics, Columbia Univ. Press, 1962, p. 97.
22. Ratcliffe J. A. (ed.) Physics of the Upper Atmosphere, Academic Press, N. Y., 1962.
23. Scala S. M., Sampson D. H., Heat Transfer in Hypersonic Flow with Radiation and Chemical Reaction, Techn. Inf. Ser. R 63 SD 46, Space Sci. Lab. General Electric Co., Phil. Pa., March 1963; Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer, Pergamon Press, 1964, p. 319.
24. Sforza P. M., Radiating Laminar Boundary Layer of a Grey Gas over a Flat Plate, PIBAL Report № 812, Poly. Techn. Inst. of Brooklyn 1963.

25. Tellep D. M., Edwards D. K., Radiant Energy Transfer in Gaseous Flows, Techn. Report LMSD-288139, vol. I, Part I, № 2, Lockheed Missiles and Space Div., 1960.
26. Viskanta R., Grosh R. J., Heat Transfer by Simultaneous Conduction and Radiation in an Absorbing Medium, *Journ. Heat Transf.*, 84, Ser. C, № 1, 63 (Feb. 1962); имеется русский перевод: Висканта Р., Грош Р., Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающей среде, *Труды Американского общества инженеров-механиков*, серия C, № 1, стр. 79 (1962).
27. Viskanta R., Grosh R. J., Boundary Layer in Thermal Radiation Absorbing and Emitting Media, *Intern. Journ. Heat and Mass Transf.*, 5, pp. 795—806 (Sept. 1962).
28. Viskanta R., Grosh R. J., Heat Transfer in a Thermal Radiation Absorbing and Scattering Medium, Purdue Univ. Report, 1960.
29. Viskanta R., Effect of Transverse Magnetic Field on Heat Transfer to an Electrically Conducting and Thermal Radiating Fluid Flowing in a Parallel Plate Channel, *ZAMP*, 14, № 4, 353 (1963).
30. Yoshikawa K. K., Chapman D. R., Radiative Heat Transfer and Absorption behind a Hypersonic Normal Shock Wave, NASA TN D-1424, 1962.
31. Yoshikawa K. K., Wick B. H., Radiative Heat Transfer During Atmosphere Entry at Parabolic Velocity, NASA TN D-1074.

## *Кинетическая теория излучающих газов*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При обсуждении вопросов динамики излучающего газа в предыдущих главах мы неявно предполагали, что средняя длина свободного пробега частиц газа мала, так что при исследовании задач течений газ можно рассматривать как непрерывную среду. Во многих случаях, особенно в задачах, связанных с условиями межпланетного пространства, средняя длина свободного пробега частиц газа не мала и следует принимать во внимание дискретные свойства газа. Для исследования задач течений разреженных газов необходимо использовать кинетическую теорию. В кинетической теории излучающего газа следует исходить из корпускулярных представлений об излучении взамен волновых представлений, о которых шла речь в гл. 2. Иными словами, излучение нужно рассматривать как поток фотонов. При этом предполагается, что газ состоит из смеси различных типов частиц, а именно материальных частиц и фотонов. Обычно невозможно исследовать в подробностях движение всех частиц в газовом потоке из-за огромного их количества. Приходится использовать статистическое осреднение их движения. В такой кинетической теории можно использовать молекулярные функции распределения для каждой составляющей смеси газа. В наиболее развитой кинетической теории газов рассматривается одна функция распределения частиц [2, 3, 5, 8] для описания микроскопического поведения системы. Мы дадим краткую характеристику некоторых существенных особенностей этой функции в разд. 2.

Для обычных материальных частиц газа релятивистские эффекты пренебрежимо малы, поскольку скорость частиц газа пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света. Однако для фотонов, движущихся со скоростью света, релятивистскими эффектами пренебрегать нельзя. Следовательно, кинетическая теория фотонов должна основываться на релятивистской механике жидкости. В разд. 3 мы рассмотрим некоторые существенные вопросы релятивистской механики жидкости. Основное уравнение для молекулярной функции распределения известно как уравнение Больцмана. Обычное уравнение Больцмана

в классической механике, которое может быть использовано для материальных частиц, будет рассмотрено в разд. 4, а релятивистское уравнение Больцмана для фотонов — в разд. 5. Мы покажем, что из релятивистского уравнения Больцмана следует уравнение переноса излучения (3.31), как этого и следовало ожидать.

Из-за многих физических и математических трудностей в настоящее время невозможно исследовать какие-либо практические задачи с помощью уравнения Больцмана даже без учета эффектов излучения. Однако с двух точек зрения уравнение Больцмана оказывается важным при изучении газодинамики. Во-первых, основные уравнения газодинамики, такие, как приведенные в гл. 5, могут быть выведены из уравнения Больцмана. Благодаря этому появляются некоторые основания для оценки справедливости основных уравнений газодинамики в макроскопическом описании исходя из анализа уравнения Больцмана. В разд. 6 мы установим связь между основными уравнениями газодинамики, включая эффекты излучения, и уравнением Больцмана. Во-вторых, с помощью уравнения Больцмана можно получить ценную информацию о коэффициентах переноса, таких, как коэффициент вязкости, теплопроводности и т. п. Вопрос о том, каково влияние излучения на эти коэффициенты переноса, будет обсужден в разд. 7 и 8 преимущественно для случая локального термодинамического равновесия. Общие положения динамики излучающего разреженного газа приведены в разд. 9. Простейшим типом течения разреженного газа является свободномолекулярное течение. В разд. 10 свободномолекулярное течение рассматривается с учетом эффектов теплового излучения.

## 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ СКОРОСТЬ И МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Газ состоит из большого числа частиц, которые называются молекулами. Термин «молекула» в общем смысле включает понятие обычных молекул, атомов, ионов и электронов, а также фотонов. Таким образом, молекулы газа могут быть одного вида или нескольких видов. Число молекул в газе обычно намного превосходит число видов молекул газа. Например, при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $1 \text{ атм}$  в  $1 \text{ см}^3$  газа содержится около  $2,69 \cdot 10^{19}$  материальных молекул всего лишь нескольких видов. Для описания движения каждого вида молекул можно использовать молекулярную функцию распределения  $F$ . В этом разделе мы рассмотрим только молекулярную функцию распределения материальных частиц, так что релятивистские эф-

факты здесь не учитываются. Тогда масса молекул каждого вида имеет определенное значение. Молекулярная функция распределения  $F_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_s, t)$  материальных частиц  $s$ -го вида представляет собой математическое ожидание числа молекул  $s$ -го вида в единице объема в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  в диапазоне количества движения молекул от  $\mathbf{p}_s$  до  $\mathbf{p}_s + d\mathbf{p}_s$ , а именно

$$dn_s = F_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_s, t) d\mathbf{p}_s. \quad (10.1)$$

Среднее число молекул  $s$ -го вида в единице объема в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  равно

$$n_s = \int F_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_s, t) d\mathbf{p}_s. \quad (10.2)$$

Если релятивистские эффекты несущественны, то масса частицы  $s$ -го вида постоянна, т. е. величина  $m_s$  и вектор количества движения  $\mathbf{p}_s = m_s \mathbf{q}_s$  в уравнениях (10.1) и (10.2) могут быть заменены вектором молекулярной скорости  $\mathbf{q}_s$ . Однако мы будем рассматривать также и случаи, когда релятивистские эффекты существенны, и в связи с этим будем использовать вектор количества движения  $\mathbf{p}_s$  в молекулярных функциях распределения взамен вектора скорости молекул  $\mathbf{q}_s$ , как это часто делается в учебниках по кинетической теории газов [3].  $d\mathbf{p}_s$  в интеграле (10.2) обозначает  $dp_{s1} dp_{s2} dp_{s3}$ , где  $p_{si}$  —  $i$ -я компонента вектора  $\mathbf{p}_s$ .

Среднее значение какой-либо физической величины  $Q$ , характеризующей молекулы  $s$ -го вида, определяется интегралом

$$\bar{Q} = \frac{1}{n_s} \int Q F_s d\mathbf{p}_s. \quad (10.3)$$

Например, среднее значение составляющей скорости потока в направлении оси  $x$  для  $s$ -го вида частиц будет равно

$$\bar{u}_s = \frac{1}{n_s m_s} \int \int \int p_{s1} F_s dp_{s1} dp_{s2} dp_{s3}, \quad (10.4)$$

где индекс 1 относится к оси  $x$ , т. е.  $p_{s1} = p_{sx}$ .

Подобными же выражениями можно определить другие макроскопические величины, такие, как давление, температура и т. д., что будет сделано в разд. 6. Исходя из этих определений, можно вывести основные уравнения макроскопических расмотрений.

### 3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Если скорость частиц жидкости, среди которых фотоны рассматриваются как вид частиц, соизмерима со скоростью света, то при исследовании движения жидкости должны учитываться

релятивистские эффекты. Кратко рассмотрим релятивистский анализ уравнений движения жидкости. Ясно, что эти уравнения сведутся к обычным уравнениям газодинамики, когда скорость жидкости  $q$  много меньше скорости света  $c$ , т. е.

$$R_c = \frac{q^2}{c^2} \ll 1. \quad (10.5)$$

Здесь мы определяем релятивистский параметр  $R_c$  как квадрат параметра  $R_r$  [уравнение (7.17)].

Мы выведем уравнения релятивистской механики жидкостей, основываясь на специальной теории относительности. Основные постулаты теории относительности следующие:

1) невозможно измерить или обнаружить неускоренное поступательное движение системы в пустоте;

2) скорость света в пустоте одна и та же для всех наблюдателей независимо от относительной скорости источника света и наблюдателя.

Эти два постулата определяют релятивистские понятия пространства и времени. В классической механике рассматривается только трехмерное пространство. Положение точки в пространстве может быть представлено вектором  $\mathbf{r}$ , который имеет три пространственные компоненты  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . Время рассматривается как скалярная величина. Однако в теории относительности для описания физических величин требуется рассмотрение четырехмерного пространства. Координаты  $x_\alpha$  каждой системы имеют четыре компоненты, т. е.  $\alpha=1, 2, 3, 4$ . Три первые компоненты представляют собой обычные пространственные координаты, а четвертая  $x_4=ct$ , где  $t$  — время. Таким образом, в теории относительности время рассматривается как четвертое измерение. Пусть две декартовы системы координат  $(x, y, z, t)$  и  $(x', y', z', t')$  движутся с относительной скоростью  $V$  в направлении оси  $x$ . Если в момент  $t=0$  начала обеих систем совпадают, то, согласно Лоренцу, между координатами в этих двух системах существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, & y' &= y, & z' &= z, \\ t' &= \frac{t - xV/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Уравнения (10.6) известны как преобразование Лоренца. Из уравнений (10.6) получается инвариант Лоренца для элементарной длины в четырехмерном пространстве

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2. \quad (10.7)$$

В классической механике член  $V^2/c^2$  пренебрежимо мал и преобразование Лоренца (10.6) сводится к преобразованию Галилея для неизменного времени.

В релятивистской механике мы рассматриваем четырехмерное пространство и все векторы имеют четыре компоненты. Следует обобщить все определения для векторов в трехмерном пространстве классической механики на случай четырехмерного пространства в релятивистской механике. Хотелось бы знать, в частности, каков смысл четвертой компоненты вектора в терминах классической механики. Прежде чем рассмотреть некоторые важные четырехмерные векторы релятивистской механики, обсудим кратко общие свойства четырехмерных векторов. В дальнейшем мы будем использовать греческие буквы  $\alpha, \beta$  и т. д. для обозначения компонент векторов в четырехмерном пространстве, т. е.  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , и латинские буквы  $i, j$  и т. д. для обозначения обычных компонент векторов в трехмерном пространстве, т. е.  $i = 1, 2, 3$ .

Преобразование Лоренца (10.6) представляет собой частный случай общего линейного преобразования

$$x'_\alpha = A_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (10.8)$$

где использовано общепринятое обозначение суммирования, а именно

$$x'_\alpha = A_{\alpha\beta} x_\beta = A_{\alpha 1} x_1 + A_{\alpha 2} x_2 + A_{\alpha 3} x_3 + A_{\alpha 4} x_4, \quad (10.8a)$$

$x_\beta$  — координата по оси  $\beta$  прямоугольной системы координат. Если единичный вектор оси  $\beta$  обозначить  $i_\beta$ , то четырехмерный вектор  $x$ , определяющий положение, выражается следующим образом:

$$x = i_\beta x_\beta. \quad (10.9)$$

Поскольку система координат предполагается ортогональной, то скалярное произведение двух единичных векторов дает

$$i_\alpha \cdot i_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (10.10)$$

где  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , когда  $\alpha \neq \beta$ , и  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ , когда  $\alpha = \beta$ .

Уравнение (10.8) устанавливает соотношение между координатами данного вектора  $x$  ( $x'_\alpha$  и  $x_\alpha$ ) в четырехмерном пространстве в системах координат  $X'$  и  $X$ . Теперь мы легко можем найти матрицу  $A_{\alpha\beta}$ , исходя из определения этих компонент, а именно

$$x'_\alpha = i'_\alpha \cdot x = i'_\alpha \cdot (i_\beta x_\beta) = A_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (10.11)$$

где

$$A_{\alpha\beta} = i'_\alpha \cdot i_\beta. \quad (10.12)$$

Сравнивая уравнение (10.11) с преобразованием Лоренца (10.6), получим

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

и

$$A = \begin{array}{cccc} \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} & 0 & 0 & \frac{iV/c}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iV/c}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} & 0 & 0 & \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \end{array} \quad (10.12a)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Поскольку модуль вектора  $x$  инвариантен по отношению к вращению системы координат, то мы немедленно получим уравнение (10.7) в следующей форме:

$$-ds^2 = x_\alpha x_\alpha = x'_\alpha x'_\alpha, \quad (10.7a)$$

где  $ds$  — элемент длины в четырехмерном пространстве.

Соотношение (10.8) применимо к любому четырехмерному вектору при вращении системы координат, т. е.

$$q'_\alpha = A_{\alpha\beta} q_\beta, \quad q_\beta = A_{\beta\alpha} q'_\alpha. \quad (10.8b)$$

Теперь желательно было бы выяснить, что представляют собой компоненты вектора скорости в четырехмерном пространстве. В трехмерном пространстве составляющая скорости  $q_i$  определена как  $q_i = dx_i/dt$ . Поскольку  $dt$  не является инвариантом в теории относительности, мы должны определить вектор скорости несколько иначе, чем в классической механике. Вектор скорости в четырехмерном пространстве определяется через инвариантный элемент  $ds$

$$q_\alpha = dx_\alpha/ds. \quad (10.13)$$

Из уравнений (10.7) и (10.7a) получим

$$ds = c dt \left( 1 - \frac{dx_i dx_i}{c^2 dt^2} \right)^{1/2} = c dt (1 - q^2/c^2)^{1/2}, \quad (10.14)$$

где  $q^2 = q_i q_i$ . Из уравнений (10.13) и (10.14) следует, что вектор скорости в четырехмерном пространстве представляет собой безразмерную величину с компонентами

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{u}{cb_v}, & q_2 &= \frac{v}{cb_v}, & q_3 &= \frac{w}{cb_v} \\ q_4 &= \frac{i}{b_v}, \end{aligned} \quad (10.15)$$



где  $b_v^2 = 1 - (u^2 + v^2 + w^2)/c^2$  и  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты скорости в обычном смысле классической механики. Подобным же образом ускорение частицы в четырехмерном пространстве определяется как  $dq_\alpha/ds$ .

Уравнение неразрывности как условие сохранения числа частиц жидкости можно выразить через вектор потока частиц  $n_\alpha$ , который имеет четыре компоненты, связанные с компонентами вектора скорости  $q_\alpha$  соотношением

$$n_\alpha = Nq_\alpha, \quad (10.16)$$

где  $N$  — скалярная величина, определяющая концентрацию частиц в единице объема. Уравнение неразрывности тогда будет

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (Nq_\alpha) = 0. \quad (10.17)$$

Если релятивистскими эффектами можно пренебречь, т. е.  $b_v = 1$  и  $m = \text{const}$ , то уравнение (10.17) сводится к обычному уравнению неразрывности гидромеханики (5.3).

Одна из основных особенностей релятивистской механики состоит в том, что масса частицы не остается постоянной, а увеличивается со скоростью частицы  $q$  в соответствии с формулой Эйнштейна

$$m = \frac{m_0}{(1 - q^2/c^2)^{1/2}}, \quad (10.18)$$

где  $m_0$  — масса покоя частицы и  $m$  — ее масса, когда она движется со скоростью  $q$ . Скорость  $q$  представляет собой скорость в трехмерном пространстве, т. е.  $q^2 = q_i q_i = u^2 + v^2 + w^2$ . Следует заметить, что вектор скорости в четырехмерном пространстве  $q_\alpha$  есть не что иное, как единичный вектор, т. е.

$$q_\alpha^2 = q_\alpha q_\alpha = \frac{dx_\alpha dx_\alpha}{ds^2} = -1. \quad (10.19)$$

Второй закон Ньютона в трехмерном пространстве записывается в виде

$$F_i = d(mq_i)/dt = dp_i/dt, \quad (10.20)$$

где  $F_i$  —  $i$ -я компонента силы, действующей на частицу массой  $m$ , имеющей скорость  $q_i$  и количество движения  $p_i = mq_i$ . В классической механике  $R_c \ll 1$  и масса  $m$  может считаться постоянной. Следовательно, можно написать

$$F_i = m \frac{dq_i}{dt}. \quad (10.20a)$$

Однако в релятивистской механике масса не остается постоянной. Следовательно, удобнее использовать вектор количества

движения  $p_i$  вместо вектора скорости  $q_i$ . В четырехмерном пространстве вектор количества движения  $p_\alpha$  определяется следующим выражением:

$$p_\alpha = m_0 c^2 q_\alpha. \quad (10.21)$$

Теперь, если мы используем определение  $p_i = m q_i$  для количества движения в трехмерном пространстве обычной классической механики, то первые три компоненты четырехмерного вектора  $\mathbf{p}$  будут просто  $c p_i$ , в то время как четвертая его компонента будет  $p_4 = i m c^2 = i E$ , где  $E$  есть энергия частицы, движущейся со скоростью  $q$ . Вследствие этого четырехмерный вектор количества движения иногда называется вектором количества движения и энергии. Мы будем использовать четырехмерный вектор количества движения при релятивистском описании движения частиц, например при определении молекулярной функции распределения в разд. 5.

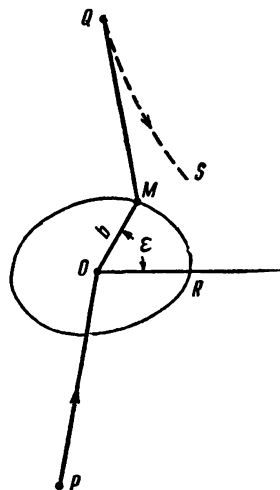
#### 4. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Основная цель кинетической теории газов состоит в нахождении функции распределения, которая удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению, известному как уравнение Больцмана. В этом разделе мы рассмотрим только молекулярную функцию распределения для материальных частиц в рамках классической механики Ньютона. В следующем разделе будет рассмотрена молекулярная функция распределения фотонов с использованием релятивистской механики. Молекулярная функция распределения  $s$ -го вида молекул в газовой смеси  $F_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_s, t)$  удовлетворяет следующему уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \frac{p_s^i}{m_s} \frac{\partial F_s}{\partial x^i} + \varphi_s^i \frac{\partial F_s}{\partial p_s^i} = \left( \frac{\delta F_s}{\delta t} \right)_c, \quad (10.22)$$

где  $m_s$  — масса частицы  $s$ -го вида;  $p_s^i$  —  $i$ -я компонента количества движения частиц  $s$ -го вида;  $x^i$  —  $i$ -я компонента пространственной координаты вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего положение частицы  $s$ -го вида;  $\varphi_s^i$  —  $i$ -я компонента силы, действующей на частицу  $s$ -го вида в промежутке между столкновениями. Здесь использован обычный символ суммирования. Таким образом, члены в левой части уравнения (10.22) определяют изменение  $F_s$  за время от момента  $t$  до момента  $t+dt$ . Член в правой части характеризует увеличение или уменьшение числа частиц в единицу времени, обусловленное столкновениями (интеграл столкновений). Точная форма члена  $(\delta F_s / \delta t)_c$  зависит от кинетической модели, используемой в кинетической теории. Для

обычного газа можно считать, что существенны лишь парные столкновения. Иными словами, следует рассматривать столкновения только между двумя типичными частицами. На фиг. 10.1 представлена частица  $P$ , связанная с функцией распределения  $F$ , и другая частица  $Q$ , связанная с функцией распределения  $F'$ . При отсутствии взаимодействия частица  $P$  движется в направлении  $PO$ , а частица  $Q$  — в направлении  $QM$ . Вследствие взаимодействия действительный путь частицы  $Q$  искривляется ( $QS$ ). Проведем плоскость  $ROM$  через точку  $O$  перпендикулярно к  $QM$ . Расстояние  $OM$  известно как параметр столкновения  $b$ , который представляет собой расстояние наибольшего сближения частиц  $P$  и  $Q$  при отсутствии их взаимодействия. Угол между  $OM$  и  $OR$  обозначен через  $\epsilon$ . Если имеется только один вид частиц в газе, то интеграл парных столкновений определяется следующим образом:



Фиг. 10.1. Двойные столкновения между частицами газа.

$$\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_c = \int \int \int (\bar{F}\bar{F}' - FF') g_0 b d b d \epsilon d \mathbf{q}', \quad (10.23)$$

где черта над буквой относится к функциям распределения после столкновения и  $g_0$  — абсолютная величина начальной относительной скорости двух частиц, т. е.

$$g_0^2 = (q_x - q'_x)^2 + (q_y - q'_y)^2 + (q_z - q'_z)^2, \quad (10.24)$$

и индексы  $x, y, z$  относятся к соответствующим компонентам векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$ . Интеграл должен быть взят для всех значений  $b$  от 0 до  $\infty$ , для всех углов  $\epsilon$  от 0 до  $2\pi$  и для всех значений  $q'_x, q'_y, q'_z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Вывод уравнения (10.23) можно найти в любом учебнике по кинетической теории газов [3].

Для газовой смеси, состоящей из  $N_0$  видов молекул, интеграл столкновений равен сумме интегралов столкновений всех  $N_0$  видов молекул, а именно

$$\left(\frac{\delta F_s}{\delta t}\right)_c = \sum_{r=1}^{N_0} \int \int \int (\bar{F}_s \bar{F}_r - F_s F_r) g_0 b d b d \epsilon d \mathbf{q}_r. \quad (10.25)$$

Для заряженных частиц могут быть важны дальние взаимодействия. Это требует учета очень малых углов рассеяния

и, следовательно, большого числа актов передачи малого количества движения. Интеграл столкновений в этом случае известен как интеграл столкновений Фоккера — Планка <sup>1)</sup>.

Решить уравнение Больцмана (10.22) в общем случае очень трудно, поскольку оно нелинейно. Однако найдено одно из точных решений уравнений Больцмана, известное как функция распределения Максвелла, представляющая однородное установившееся состояние газа. Это распределение широко используется в различных задачах течений, в частности в задачах свободно-молекулярного течения.

Для простоты мы выведем функцию распределения Максвелла при следующих предположениях:

- 1) газ состоит из частиц одного вида;
- 2) массовая сила  $\varphi_s^i$  отсутствует;
- 3) состояние газа однородное.

При этих условиях следует рассмотреть одну молекулярную функцию распределения  $F$ , которая независима от пространственных координат, т. е.  $F = F(\mathbf{q}_m, t)$ . Ниже мы будем использовать обозначение  $\mathbf{q}_m$  для вектора молекулярной скорости, в то время как  $\mathbf{q}$  будет обозначать вектор средней скорости течения.

Уравнение Больцмана (10.22) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi \int \int (\bar{F}\bar{F}' - FF') g_0 b db d\mathbf{q}'_m \quad (10.26)$$

при условии, что частица сферически симметрична и проведено интегрирование по  $\varepsilon$ .

Теперь определим  $H$ -функцию, такую, что

$$H = \int F \ln F d\mathbf{q}_m. \quad (10.27)$$

Из уравнений (10.26) и (10.27) получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2} \pi \int \int \int \ln \left( \frac{\bar{F}\bar{F}'}{FF'} \right) (\bar{F}\bar{F}' - FF') g_0 b db d\mathbf{q}_m d\mathbf{q}'_m. \quad (10.28)$$

Из уравнения (10.28) следует

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0, \quad (10.29)$$

поскольку знаки  $\ln(\bar{F}\bar{F}'/FF')$  и  $(\bar{F}\bar{F}' - FF')$  всегда совпадают. Уравнение (10.29) известно как  $H$ -теорема Больцмана.  $H$ -функция связана с энтропией газа.

Для установившегося состояния  $\partial H/\partial t = 0$  подинтегральное выражение в уравнении (10.28) должно быть равно нулю и мы

<sup>1)</sup> Обычно его называют интегралом столкновений Эйнштейна — Фоккера (реже Эйнштейна — Фоккера — Планка или Фоккера — Планка). — *Прим. ред.*

получим

$$\bar{F}\bar{F}' = FF' \quad (10.30)$$

и

$$\ln \bar{F} + \ln \bar{F}' = \ln F + \ln F'. \quad (10.31)$$

Поскольку функция распределения  $F$  является теперь функцией только  $\mathbf{q}_m$ , можно показать, что для удовлетворения соотношению (10.31), которое известно как аддитивный инвариант, функция  $F$  должна иметь вид

$$\ln F = a_1 m + m \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q}_m + \frac{1}{2} m a_3 q_m^2, \quad (10.32)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — параметры, не зависящие от  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{q}_m$  и  $t$ . Уравнение (10.32) можно записать в следующем виде:

$$F = a_0 \exp[-b_0(\mathbf{q}_m - \mathbf{q})^2], \quad (10.33)$$

где  $a_0$  и  $b_0$  — константы и  $\mathbf{q}$  — среднее значение  $\mathbf{q}_m$ . Постоянные  $a_0$  и  $b_0$  могут быть выражены через температуру газа  $T$  и массу молекулы  $m$  (см. разд. 6) следующим образом:

$$F = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{q}_m - \mathbf{q})^2}{2kT} \right] = F_0(N, \mathbf{q}, T), \quad (10.34)$$

где  $N$  — концентрация частиц в газе и  $k$  — постоянная Больцмана, которая равна  $1,379 \cdot 10^{-16}$  эрг/град. Уравнение (10.34) хорошо известно как функция распределения Максвелла, соответствующая однородному установившемуся состоянию газа со средней скоростью течения  $\mathbf{q}$ , абсолютной температурой  $T$  и концентрацией частиц  $N$ .

При решении уравнения Больцмана (10.22) часто используется метод малых возмущений [3], в котором принимается

$$F = F_0(1 + \psi_f), \quad (10.35)$$

где  $F_0$  — функция распределения Максвелла для местной скорости течения  $\mathbf{q}$  и местной температуры  $T$ . Абсолютная величина  $\psi_f$  много меньше единицы. Мы можем определить хаотическую скорость  $\mathbf{c}_a$  с компонентой  $c_i$  в виде

$$c_i = q_{mi} - q_i. \quad (10.36)$$

Функцию распределения Максвелла  $F_0$  можно рассматривать как функцию  $\mathbf{c}_a$ . Число молекул в единице объема, имеющих модуль скорости в диапазоне от  $c_a$  до  $c_a + dc_a$ , тогда будет

$$dn_c = N \left( \frac{1}{\pi c_m^2} \right) \exp \left( -\frac{c_a^2}{c_m^2} \right) dc_a c_a^2 4\pi, \quad (10.37)$$

где

$$c_m = (2kT/m)^{1/2} \quad (10.38)$$

— наиболее вероятная скорость, поскольку при  $c_a = c_m$  величина  $dn_c/dc_a$  максимальна.

Функция распределения Максвелла может быть записана в следующем виде:

$$F_0 = \frac{N}{(\sqrt{\pi}c_m)^3} \exp\left(-\frac{c_a^2}{c_m^2}\right). \quad (10.34a)$$

Среднее значение хаотической скорости молекул определяется следующим образом:

$$\bar{c}_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{c_a}{c_m}\right)^3 \exp[-(c_a^2/c_m^2)] d(c_a/c_m) c_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_m. \quad (10.39)$$

Если газ находится в состоянии покоя, то  $\bar{c}_a$  представляет собой среднюю скорость молекул. Поскольку скорость звука в газе при температуре  $T$  равна  $a = (\gamma kT/m)^{1/2}$ , то средняя скорость молекул газа того же порядка величины, что и скорость звука.

Другой важной величиной в кинетической теории газов является средняя длина свободного пробега, которая представляет собой среднее расстояние, проходимое молекулами между столкновениями. Рассмотрим покоящийся газ, находящийся в равновесных условиях максвелловского распределения. Один из двух членов в уравнении (10.23) соответствует молекулам, имеющим скорость  $c'_a$ , которые после столкновения приобретают скорость  $c_a$ . Другой член соответствует молекулам, которые имели скорость  $c_a$ , а после столкновения получили скорость, отличную от  $c_a$ . В равновесных условиях эти два члена равны. Следовательно, мы можем рассматривать только один из этих двух членов для определения среднего по столкновениям. Тогда число столкновений между молекулами, имеющими скорость в диапазоне от  $c_a$  до  $c_a + dc_a$ , и молекулами со скоростями в диапазоне от  $c_1$  до  $c_1 + dc_1$  в единице объема и в единицу времени будет равно

$$2\pi g_0 F_0(c_a) F_0(c_1) S_0 dc_a dc_1, \quad (10.40)$$

где

$$S_0 = 2\pi \int b db \quad (10.41)$$

— сечение столкновения.

Интегрирование выражения (10.40) по всем скоростям дает удвоенное полное число столкновений в единице объема в единицу времени, поскольку каждое столкновение учитывается два-

жды: один раз как столкновение  $c$ -молекулы с  $c_1$ -молекулой и другой раз как столкновение  $c_1$ -молекулы с  $c$ -молекулой. Но поскольку каждое столкновение является результатом двух свободных пробегов, то интегрирование дает полное число свободных пробегов в единице объема в единицу времени, т. е.

$$2\pi \int_0^{\infty} \int g_0 F_0(c_a) F_0(c_1) dc_a dc_1 S_0 = \sqrt{2} N^2 S_0 \bar{c}_a = N \bar{c}_a / L_f. \quad (10.42)$$

Так как полный путь, пройденный всеми молекулами в единице объема в единицу времени, равен  $N \bar{c}_a$ , то по определению мы получаем следующее выражение для средней длины свободного пробега  $L_f$ :

$$L_f = \frac{N \bar{c}_a}{\sqrt{2} N^2 S_0 \bar{c}_a} = \frac{1}{\sqrt{2} N S_0}. \quad (10.43)$$

Средняя длина свободного пробега может быть выражена в зависимости от коэффициента кинематической вязкости, как будет показано ниже [см. уравнение (10.125а)].

Мы легко сможем распространить приведенные выше определения молекулярной скорости, наиболее вероятной скорости и средней длины свободного пробега для каждого вида частиц газа на случай смеси газов.

Прежде чем приступить к рассмотрению связи молекулярной функции распределения с макроскопическими переменными, такими, как температура, давление и т. п., рассмотрим кратко уравнение Больцмана для фотонов.

## 5. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ФОТОНОВ

Мы будем описывать тепловое излучение, как если бы оно представляло собой одну из составляющих газовой смеси и состояло бы из точечных частиц — фотонов. Каждая из этих частиц в любой момент времени  $t$  характеризуется вектором  $\mathbf{r}$ , определяющим ее положение, и вектором  $\mathbf{p}$  количества движения. Зависимость количества движения фотона от соответствующей частоты  $\nu$  спектральной интенсивности  $I_\nu$  и ее направления имеет вид

$$p_i = \frac{h\nu}{c} L_i, \quad (10.44)$$

где величина количества движения фотона есть просто  $|\mathbf{p}| = h\nu/c$ .

Если обозначить функцию распределения фотонов через  $F_R$ , то число фотонов в единице объема в точке  $\mathbf{r}$  в диапазоне

значений количества движения от  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$  в момент  $t$  будет равно

$$dn_p = F_R(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (10.45)$$

где  $d\mathbf{p}$  относится к трехмерному пространству, т. е. к  $p_i$ .

Соотношение между функцией распределения фотонов  $F_R$  и спектральной интенсивностью излучения  $I_\nu$  имеет вид

$$I_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} F_R. \quad (10.46)$$

Буквой  $c$  в этом разделе обозначена скорость света.

Для описания движения фотонов следует использовать релятивистскую механику. Для четырехмерного вектора количества движения фотона  $p_\alpha$  характерны следующие соотношения:

$$p_\alpha p_\alpha = 0, \quad p_4 = i|\mathbf{p}| = ih\nu/c. \quad (10.47)$$

Уравнение, описывающее функцию  $F_R$ , можно получить из уравнения переноса излучения (3.32) в виде

$$p_\alpha \frac{\partial F_R}{\partial x_\alpha} = \frac{|\mathbf{p}|}{c} \left( \frac{\delta F_R}{\delta t} \right)_c, \quad (10.48)$$

где

$$\frac{|\mathbf{p}|}{c} \left( \frac{\delta F_R}{\delta t} \right)_c = \frac{c}{h^3 \nu^2} (j_\nu - k_\nu I_\nu) \quad (10.49)$$

— четырехмерный инвариант. Очевидно, что  $(\delta F_R / \delta t)_c$  определяет временную вариацию  $F_R$ , соответствующую столкновениям фотонов с материальными частицами, т. е. обусловленную процессами испускания и поглощения излучения.

Согласно Сингу [12], уравнение (10.48) при помощи уравнения (10.49) можно записать в виде

$$p_\alpha \frac{\partial F_R}{\partial x_\alpha} = E - A F_R, \quad (10.50)$$

где

$$E = \frac{c}{h^3 \nu^2} j_\nu, \quad A = \frac{h\nu}{c} k_\nu. \quad (10.51)$$

Обе величины  $E$  и  $A$  представляют собой четырехмерные инварианты. Их можно рассматривать как функции  $t$ ,  $x_i$  и  $p_i$ . Следует заметить, что уравнение (10.48) является релятивистским уравнением Больцмана для фотонного газа с нулевой массой покоя при отсутствии массовых сил  $\varphi'_s = 0$ .



## 6. УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ

Как мы уже упоминали, одним из наиболее интересных результатов, следующих из уравнений Больцмана, является вывод из него основных уравнений газодинамики для макроскопического движения. Первое, что мы должны сделать, это исследовать соотношения между функцией распределения  $F_s$ , вектором молекулярной скорости  $\mathbf{q}_{ms}$  с составляющими  $q_{msi}$  и макроскопическими переменными, такими, как скорость течения  $u_i$ , плотность  $\rho$  или концентрация частиц  $N$ , давление  $p$ , температура газа  $T$ , а также с другими физическими величинами, такими, как вязкие напряжения, тепловые потоки и т. п. В этом разделе мы рассмотрим сначала случай только материальных частиц, так что будет использовано трехмерное пространство.

По определению (10.3) имеются следующие соотношения между переменными, применяемыми в макроскопическом описании, и функцией молекулярного распределения  $F_s$ :

1) Концентрация молекул газа  $s$ -го вида равна

$$n_s = \int F_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_s, t) d\mathbf{p}_s. \quad (10.52a)$$

Тогда плотность составляющей смеси газа, состоящей из молекулы  $s$ -го вида, запишется как

$$\rho_s = m_s n_s. \quad (10.52б)$$

Концентрация молекул смеси из  $N_0$  составляющих будет равна

$$N = \sum_{s=1}^{N_0} n_s \quad (10.52в)$$

и плотность смеси в целом

$$\rho = \sum_{s=1}^{N_0} \rho_s = mN, \quad (10.52г)$$

где  $m$  — среднее значение массы частиц в смеси.

2) Скорость течения  $s$ -й составляющей смеси, согласно уравнению (10.4), равна

$$u_{st} = \frac{1}{n_s m_s} \int p_{st} F_s d\mathbf{p}_s. \quad (10.53)$$

Скорость течения смеси в целом определяется соотношением

$$u_i = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{N_0} \rho_s u_{st} = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{N_0} m_s n_s u_{st}, \quad (10.54)$$

а скорость диффузии  $s$ -й составляющей смеси — разностью

$$w_{si} = u_{si} - u_i. \quad (10.55)$$

Очевидно, что должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{s=1}^{N_0} \rho_s w_{si} = 0. \quad (10.56)$$

3) Давление, тензор напряжений, температура, тепловой поток и т. п. выражаются через средние значения некоторых степеней компонент хаотических скоростей частиц. Для смеси газов возможны два способа определения компонент хаотической скорости частиц и макроскопических параметров состояния, тензора напряжений и т. п. Соответственно этому две компоненты хаотической скорости обозначим через  $c_{si}$  и  $c_{si}^*$  и определим их следующим образом:

$$q_{msi} = u_i + c_{si} = u_{si} + c_{si}^*. \quad (10.57)$$

Когда скорость диффузии мала, мы обычно определяем давление, температуру и т. п. через средние значения степеней  $c_{si}$ , в то время как при больших скоростях диффузии следует определять эти макроскопические величины через средние значения степеней  $c_{si}^*$ . Когда массы молекул различных видов одного и того же порядка величины, скорость диффузии обычно мала. С другой стороны, когда разность масс различных видов молекул велика, как, например, в случае электронов и обычных атомов или молекул, тогда скорость диффузии более легких частиц будет большой. Поскольку форма определения обеих величин  $c_{si}$  и  $c_{si}^*$  одна и та же, мы рассмотрим только случай  $c_{si}$ .

Тензор давлений определяется в виде

$$p_{sij} = m_s \int c_{si} c_{sj} F_s d\mathbf{p}_s. \quad (10.58)$$

Тогда парциальное давление  $s$ -й составляющей смеси будет равно

$$p_s^* = \frac{1}{3} (p_{s11} + p_{s22} + p_{s33}) = \frac{m_s}{3} \overline{c_{si} c_{si}} = \frac{m_s}{3} \overline{c_s^2}. \quad (10.59)$$

Тензор вязких напряжений  $\tau_s$   $s$ -й составляющей смеси равен

$$\tau_{sij} = -p_{sij} + \delta_{ij} p_s^*, \quad (10.60)$$

где  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ .

Кинетическая температура  $T_s$   $s$ -й составляющей определяется выражением

$$T_s = \frac{m_s}{3kn_s} \overline{c_s^2} = \frac{m_s}{3k} \int (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) F_s d\mathbf{p}_s. \quad (10.61)$$

Сравнивая уравнения (10.526), (10.59) и (10.61), получим уравнение состояния совершенного газа

$$p_s^* = kn_s T_s. \quad (10.62)$$

Полное давление смеси равно

$$p = \sum_{s=1}^{N_0} p_s^*. \quad (10.63)$$

Температура смеси в целом определяется формулой

$$T = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N_0} n_s T_s. \quad (10.64)$$

Из уравнений (10.62)—(10.64) получим уравнение состояния смеси совершенных газов в следующем виде:

$$p = kNT. \quad (10.65)$$

Момент третьего порядка скорости определяется в виде

$$S_{sijk} = m_s n_s \overline{c_{si} c_{sj} c_{sk}}. \quad (10.66)$$

Поток тепла, обусловленный теплопроводностью и диффузией, тогда будет

$$Q_{csi} = S_{sijj} = S_{s111} + S_{s122} + S_{s133} = q_{si}^* + \frac{5}{2} p_s^* w_{si}. \quad (10.67)$$

Член  $q_{si}^*$  характеризует тепловой поток за счет теплопроводности. Если газ состоит только из одного вида частиц, то  $w_{si} = 0$  и уравнение (10.67) определяет тепловой поток за счет теплопроводности.

С помощью определений макроскопических переменных в уравнениях (10.52)—(10.67) мы можем вывести уравнения сохранения обычной газодинамики из уравнения Больцмана, определяя моменты уравнения Больцмана. Пусть  $Q_s^n$  — степенная функция  $c_{si}$ . Определим  $n$ -й момент уравнения Больцмана путем умножения этого уравнения на  $Q_s^n$  и последующего интегрирования полученного выражения по всему пространству  $d\mathbf{p}_s$  количества движения.

**1. Уравнение неразрывности.** Чтобы получить момент нулевого порядка, умножим уравнение (10.22) на  $Q_s^0 = m_s$  и проинтегрируем результирующее выражение по  $\mathbf{p}_s$ . Тогда получим

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s u_{si}}{\partial x_i} = \int m_s \left( \frac{\delta F_s}{\delta t} \right)_c d\mathbf{p}_s = \Delta(m_s n_s) = \beta_s. \quad (10.68)$$

Член  $\beta_s$  определяет интенсивность источника массы в единице объема  $s$ -й составляющей, роль которого может выполнять химическая реакция или ионизационный процесс. Чтобы оценить интегралы столкновений, мы должны предположить определенную модель для кинетической картины, которая позволила бы вычислить интеграл столкновений  $\Delta$ . Для усложненных физических явлений оценка интеграла столкновений затруднительна. Однако, поскольку форма уравнения (10.68) та же, что и форма уравнения, полученного в макроскопическом приближении, оно не вызывает никаких сомнений и мы можем постулировать некоторые соотношения между интегралом столкновений и другими физическими величинами, такими, как температура  $T_s$ , плотность  $n_s$  и т. п.

Если просуммировать все  $N_0$  уравнений неразрывности (10.68), мы получим уравнения неразрывности для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{N_0} \rho_s = \beta \approx 0, \quad (10.69)$$

где  $\beta$  — скорость превращения массы в энергию в ядерных реакциях. В большинстве задач динамики жидкостей этой величиной можно пренебречь. Таким образом, можно принять  $\beta=0$  и уравнение (10.69) примет вид обычного уравнения неразрывности, используемого в механике жидкостей [см. уравнение (5.3)].

Уравнение (10.68) можно записать в следующем виде:

$$\rho \left( \frac{\partial k_s}{\partial t} + u_i \frac{\partial k_s}{\partial x_i} \right) = - \left( \frac{\partial k_s \rho w_{si}}{\partial x_i} \right) + \beta_s, \quad (10.70)$$

где  $k_s$  — массовая доля  $s$ -й составляющей, т. е.  $k_s = \rho_s / \rho$ .

Уравнение (10.70) превращается в хорошо известное уравнение диффузии, если в нем выразить скорость диффузии  $w_{si}$  через коэффициенты диффузии и градиенты парциальных давлений и других физических величин [2, 6]. Конечно, имеет смысл использовать коэффициент диффузии, когда скорость диффузии мала. Если скорость диффузии не мала по сравнению со скоростью течения или со скоростью звука, то для более точного определения скорости диффузии вместо приближенного выра-

жения через коэффициенты диффузии следует использовать уравнение движения  $s$ -й составляющей. Это относится в особенности к ионизованному газу, в котором содержится большое количество электронов.

**2. Уравнения движения.** Чтобы получить момент первого порядка, нужно умножить уравнение (10.22) на  $Q_s^1 = m_s c_{si}$  и проинтегрировать результирующее уравнение по  $p_s$ . Мы получим уравнение движения  $s$ -й составляющей смеси

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{Du_i}{Dt} + \frac{D}{Dt} (\rho_s w_{si}) + \rho_s w_{si} \varepsilon_0 + \rho_s w_{sk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{sik}) - \rho_s G_i = \\ = \int m_s c_{si} \left( \frac{\delta F_s}{\delta t} \right)_c d\mathbf{p}_s = \Delta_{sli}, \quad (10.71) \end{aligned}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Член  $-\rho_s G_i$  определяет объемную силу, включая силу тяготения, электромагнитную силу и т. п., как было показано в выражении для члена  $\varphi_{si}$  уравнения (10.22). Интеграл столкновений  $\Delta_{sli}$  определяет  $i$ -ю компоненту изменения количества движения, обусловленную столкновениями молекул различных составляющих смеси. Этот член очень сложен, особенно в случае разреженного газа. Тогда он содержит члены, учитывающие перенос тепла и разность скоростей [2, 6]. Если газ неразрезанный, то в первом приближении имеем

$$\Delta_{sli} = - \sum_t K_{st} (w_{st} - w_{ti}), \quad (10.72)$$

где величина  $K_{st}$  известна как коэффициент трения между составляющими  $s$  и  $t$ . Суммирование производится по всем составляющим.

Если просуммировать все уравнения движения (10.71) для всех составляющих смеси, то получим уравнение движения для смеси в целом

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} - \rho G_i = \sum \Delta_{sli} = 0, \quad (10.73)$$

где  $p_{ik} = \sum_s p_{sik}$  и  $\rho G_i = \sum_s \rho_s G_i$  и сумма  $\Delta_{sli}$  равна нулю вследствие сохранения количества движения смеси в целом. Уравнение (10.73) представляет собой уравнение движения обычной газодинамики [см. уравнение (5.4)].

Уравнение (10.71) с помощью уравнения (10.73) можно записать в виде

$$\left[ \frac{D}{Dt} (\rho_s w_{si}) + \rho_s w_{si} \varepsilon_0 + \rho_s w_{sk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \tau_{silk}}{\partial x_k} - \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial \tau_{ilk}}{\partial x_k} \right] + \\ + \left( \frac{\partial p_s^*}{\partial x_i} - \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - (\rho_s - \rho) G_i = \Delta_{s1i}. \quad (10.74)$$

Уравнение (10.74) представляет собой уравнение для скорости диффузии  $w_{si}$ . Если скорость диффузии мала, то члены в квадратной скобке пренебрежимо малы, и мы получаем обычное выражение для скорости диффузии в зависимости от градиента давления и объемных сил. Например, для смеси двух газов, если пренебречь термодиффузией, так что может быть использовано уравнение (10.72) для  $\Delta_{s1i}$ , получим

$$w_{si} = \frac{1}{K_{st}} \frac{\rho_t}{\rho} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial p_s^*}{\partial x} \right). \quad (10.75)$$

Таким образом, в первом приближении скорость диффузии может быть выражена через градиенты парциальных давлений. Коэффициент трения  $K_{st}$  обратно пропорционален коэффициенту диффузии  $D_{st}$ . Обычно мы предполагаем далее, что полное давление смеси  $p$  так же, как и температура каждой ее составляющей  $T_s$ , постоянно, в результате получаем, что скорость диффузии пропорциональна градиенту концентрации составляющих.

**3. Уравнение внутренней энергии.** Умножим уравнение (10.22) на  $Q_s^{20} = \frac{1}{2} m_s c_s^2$  и проинтегрируем полученное уравнение по  $p_s$ . В результате получим

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_s^* \right) + \frac{5}{2} p_s^* \varepsilon_0 - \frac{1}{2} (\tau_{sij}) \varepsilon_{ij} + \frac{\partial q_{csi}}{\partial x_i} + \\ + \rho_s \frac{Du_i}{Dt} w_{si} - G_i \rho_s w_{si} = \Delta_{s20}, \quad (10.76)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon_0.$$

Уравнение (10.76) — это уравнение внутренней энергии  $s$ -й составляющей. Член  $\Delta_{s20}$  включает члены, обусловленные разностью температур  $T_s - T_t$ , поскольку в общем случае кинетически температуры различных составляющих смеси могут отличаться. За исключением случая, когда массы различных составляющих существенно различны, разность температур составляющих смеси обычно мала. Можно использовать предположение  $T_s = T$  для всех составляющих и в анализе задач течений

отбросить уравнение энергии (10.76). Однако в случае ионизованного газа температура электронов может значительно отличаться от температуры других составляющих и следует использовать уравнение энергии электронов в дополнение к уравнению энергии смеси в целом. Это существенно, если требуются достаточно точные результаты, особенно если плотность смеси низка. Уравнение энергии смеси в целом можно получить суммированием всех  $N_0$  уравнений (10.76)

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{3}{2} p \right) + \frac{5}{2} p - \frac{1}{2} \tau_{vij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial q_{ci}}{\partial x_i} = 0. \quad (10.77)$$

**4. Уравнение вязких напряжений и уравнение теплового потока.** Если умножим уравнение (10.22) на  $Q_s^2 = m_s c_{si} c_{sj}$  и проинтегрируем полученное выражение по  $\mathbf{p}_s$ , то получим дифференциальное уравнение для тензора вязких напряжений  $p_{sij}$ . Подобным же образом, если умножим уравнение (10.22) на  $Q_s^{30} = \frac{1}{2} m_s c_s^2 c_{si}$  и проинтегрируем полученное выражение по  $\mathbf{p}_s$ , то получим дифференциальное уравнение для теплового потока, обусловленного теплопроводностью,  $q_{sci}$ . Следовательно, в общем случае как тензор вязких напряжений, так и тепловой поток, обусловленный теплопроводностью, описываются сложными дифференциальными уравнениями, особенно в случае разреженного газа. Основные уравнения динамики разреженного газа очень сложны. Однако, если средняя длина свободного пробега частиц газа мала, можно получить некоторые простые соотношения между тензором вязких напряжений, градиентом скорости и коэффициентом вязкости [2, 3, 5, 6] из дифференциального уравнения для тензора вязких напряжений по той же схеме, которая была использована при выводе соотношения (10.75) для коэффициента диффузии. Иными словами, мы можем получить хорошо известные уравнения Навье — Стокса как первое приближение дифференциального уравнения для тензора вязких напряжений, а именно

$$\tau_{vij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu_1 \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (10.78)$$

где  $\mu$  и  $\mu_1$  — соответственно обычный коэффициент вязкости и второй коэффициент вязкости, являющиеся функциями температуры и состава смеси.

Подобным же образом из дифференциального уравнения для теплового потока [2, 6] можно получить закон теплопроводности Фурье, а именно

$$q_{ci} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (10.79)$$

При выводе уравнения внутренней энергии (10.76) мы предполагали, что частицы представляют собой одноатомные молекулы и их внутренняя энергия определяется соотношением  $U_{ms} = 3/2 kT/m_s$ . Благодаря этому уравнение содержит простое выражение  $3p_s^*/2$ . Для более сложных молекул это простое выражение внутренней энергии следует заменить более точным, включающим все другие виды внутренней энергии, такие, как вращательная энергия, колебательная энергия и т. п. Однако общий вид уравнения энергии сохраняется прежним. Это демонстрирует современный подход к исследованию задач динамики жидкостей для высокотемпературных газовых смесей, в котором используются как микроскопические, так и макроскопические методы. С помощью микроскопических исследований мы подтверждаем правильность формы основных уравнений. Например, термодиффузия [3] была обнаружена путем микроскопических исследований. Макроскопические методы позволяют исследовать очень сложные физические явления благодаря тому, что в них используются упрощенные выражения для интегралов столкновений, вид которых подсказывается экспериментальными результатами, даже если достаточно аккуратный вывод этих выражений на основе кинетической теории довольно затруднителен.

## 7. НАПРЯЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Основные уравнения динамики излучающего газа выводятся из релятивистского уравнения Больцмана таким же образом, как это было сделано для материальных частиц. Однако поскольку рассматривается только случай, когда скорости материальных частиц пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света и к материальным частицам приложима классическая механика, то релятивистская механика должна использоваться только применительно к фотонам. Другими словами, мы должны определить макроскопические величины, исходя из функции распределения для фотонов  $F_R$  в четырехмерном пространстве. Мы определим тензор напряжений  $p_{R\alpha\beta}$  в четырехмерном пространстве следующим образом:

$$p_{R\alpha\beta} = c \int F_R \frac{p_\alpha p_\beta}{|\mathbf{p}|} d\mathbf{p}, \quad (10.80)$$

где интегрирование ведется по всему трехмерному пространству количества движения, т. е. для  $p_i$ , меняющегося от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этом определении  $F_R$  достаточно быстро приближается к нулю, когда  $|\mathbf{p}|$  приближается к бесконечности. Более того, всякий раз, как  $\alpha$  или  $\beta$  равно 4,  $p_4 = i|\mathbf{p}| = ih\nu/c$ . Легко показать, что тензор напряжений  $p_{R\alpha\beta}$  — симметричный четырехмерный тен-



зор. Поскольку длина вектора количества движения  $p_\alpha$  равна 0, то

$$p_{R44} = p_{Rii} \quad (10.81)$$

В трехмерном пространстве компоненты четырехмерного тензора  $p_{R\alpha\beta}$  имеют вид

$$p_{Rij} = -\frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu n_i n_j d\omega \quad (10.82)$$

—  $ij$ -й компонент тензора напряжений излучения [см. уравнение (2.18)],

$$q_{Ri} = cp_{Ri4} = \int_0^\infty d\nu \int I_\nu n_i d\omega \quad (10.83)$$

— тепловой поток излучения [см. уравнение (2.8)],

$$p_{R44} = E_R = p_{Rii} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu d\omega \quad (10.84)$$

— плотность энергии излучения [см. уравнение (2.14)].

Представляет интерес найти выражение для компонентов тензора напряжений излучения, когда массовая скорость газа равна нулю. Если мы введем для этого случая дополнительный индекс 0 и примем, что массовая скорость  $u_i$  пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света  $c$ , то мы получим в первом приближении

$$p_{Ri j0} = p_{Rij} - \frac{1}{c^2} (q_{Ri} u_j + q_{Rj} u_i), \quad (10.85a)$$

$$q_{Ri0} = q_{Ri} - p_{Rij} u_j - E_R u_i, \quad (10.85b)$$

$$E_{R0} = E_R - \frac{2}{c^2} q_{Ri} u_i \quad (10.85b)$$

и

$$p_{Rij} = p_{Ri j0} + \frac{1}{c^2} (q_{Ri0} u_j + q_{Rj0} u_i), \quad (10.86a)$$

$$q_{Ri} = q_{Ri0} + p_{Ri j0} u_j + E_{R0} u_i, \quad (10.86b)$$

$$E_R = E_{R0} + \frac{2}{c^2} q_{Ri0} u_i. \quad (10.86b)$$

Обычно в уравнениях (10.85) и (10.86) можно пренебречь членами с множителем  $1/c^2$ . Однако при этом нельзя пренебречь конвективным переносом плотности энергии излучения  $E_R u_i$  и работой, совершаемой тензором напряжений излучения  $p_{Ri j0} u_j$ .

Теперь запишем интегралы столкновений с применением следующих обозначений:

$$M_{Ri} = \int \left( \frac{\delta F_R}{\delta t} \right)_c p_i d\mathbf{p} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int (j_\nu - k_\nu I_\nu) n_i d\omega, \quad (10.87)$$

$$N_R = \int \left( \frac{\delta F_R}{\delta t} \right)_c c |\mathbf{p}| d\mathbf{p} = \int_0^\infty d\nu \int (j_\nu - k_\nu I_\nu) d\omega. \quad (10.88)$$

Далее, если из уравнения (10.48) исключить интегралы столкновений  $(\delta F_R/\delta t)_c$ , то уравнения (10.87) и (10.88) примут вид

$$M_{Ri} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_{Ri\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{Rij}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial q_{Ri}}{\partial t}, \quad (10.87a)$$

$$N_R = c \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_{Ri\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (q_{Ri}) + \frac{\partial E_R}{\partial t}. \quad (10.88a)$$

Теперь мы можем вывести основные уравнения радиационной газодинамики из уравнения Больцмана. Для простоты предположим, что газ представляет собой смесь материальных частиц одного вида и фотонов. Поскольку изменение массы при образовании фотонов пренебрежимо мало и в газе отсутствуют источники массы, то уравнением неразрывности радиационной газодинамики будет уравнение (10.69). Следует отметить, что хаотическая скорость  $c_i$  тесно связана с количеством движения  $\mathbf{p}$  в рамках механики Галилея, в которой массовая скорость составляющих газа исчезает, а именно

$$p_{sm0t} = p_{smi} - m_s u_{si}. \quad (10.89)$$

Умножим теперь уравнение Больцмана (10.22) на компоненту количества движения  $p_{smi}$  и проинтегрируем полученное уравнение в трехмерном пространстве количества движения  $d\mathbf{p}$ . В результате получим [см. уравнение (10.71)]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s u_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{sik}) = M_{si} + \int F_s \varphi_{si} d\mathbf{p}, \quad (10.90)$$

где

$$P_{sik} = p_{sik} + \rho_s u_{si} u_{sk}, \quad p_{sik} = P_{s0ik},$$

$$M_{si} = \int \left( \frac{\delta F_s}{\delta t} \right)_c p_{smi} d\mathbf{p}, \quad (10.91)$$

$$\varphi_{si} = m_s G_i + e_s E_i + \frac{e_s}{m_s} (\mathbf{p} \times \mathbf{B})_i.$$

Здесь  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция.

Умножая уравнение Больцмана для фотонов на  $p_i$  и интегрируя результат, получаем уравнение (10.87а). Суммируя уравнения (10.87а) и (10.90), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k + P_{sik} + P_{R0ik}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(q_{R0i}) + \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_k}(q_{R0i} u_k + q_{R0k} u_i) = \rho G_i + \rho_e E_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Это уравнение представляет собой уравнение движения смеси газа и фотонов, т. е. уравнение движения радиационной газодинамики. Уравнение (10.92) становится уравнением (5.4), если пренебречь членами с множителем  $1/c^2$  и иметь в виду, что  $P_{R0ik} = \tau_{Rik}$ ,  $\rho_{0ik} = -\tau_{ik} + \rho \delta_{ik}$ ,  $M_{si} + M_{Ri} = 0$ .

Подобным же образом можно сложить уравнение внутренней энергии (10.76) с уравнением энергии излучения (10.88а), используя соотношение

$$N_s + N_R = \varepsilon_0, \quad (10.93)$$

где

$$N_s = \int \left( \frac{\delta F_s}{\delta t} \right)_c \left( \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}|^2}{m_s} + \chi_s \right) d\mathbf{p}$$

и  $\varepsilon_0$  — энергия, высвобождаемая в единицу времени в единице объема вследствие химических и ядерных реакций, и  $\chi_s$  — энергия ионизации  $s$ -й составляющей. В результате мы получаем уравнение энергии радиационной газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( U_m + E_R + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \left( U_m + E_{R0} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_l \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ (P_{0lk} + P_{R0lk}) u_k + q_{cl} + q_{R0l} \right] = \varepsilon_0 + \rho G_i u_i + J_i E_i, \end{aligned} \quad (10.94)$$

где члены с множителем  $1/c^2$  отброшены. Уравнение (10.94) становится уравнением (5.7), если обозначить  $Q = \varepsilon_0 + J_i E_i$ .

Мы упоминали, что  $P_{R0ik}$  равен тензору напряжений излучения  $\tau_{Rik}$ , определяемому уравнением (2.18). Интересно рассмотреть компоненты четырехмерного тензора  $P_R^{\alpha\beta}$ . Рассмотрим материальные частицы, имеющие скорость  $v^\alpha$ , соизмеримую со скоростью света  $c$ . Обозначим через  $v^\alpha$  четырехмерный вектор скорости газа

$$v^\alpha = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} (u_i, c), \quad v^\alpha v_\alpha = c^2. \quad (10.95)$$

Следуя Эккерт [11], введем следующие обозначения:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} v^\alpha v^\beta - g^{\alpha\beta}, \quad (10.96a)$$

$$\mathfrak{P}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu} P_{R\lambda\mu}, \quad (10.96b)$$

$$\mathfrak{F}^\alpha = -S^{\alpha\lambda} v^\mu P_{R\lambda\mu}, \quad (10.96b)$$

$$V = \frac{1}{c^2} v^\lambda v^\mu P_{R\lambda\mu}. \quad (10.96г)$$

В результате четырехмерный тензор  $P_R^{\alpha\beta}$  принимает вид

$$P_R^{\alpha\beta} = \mathfrak{P}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} (\mathfrak{F}^\alpha v^\beta + \mathfrak{F}^\beta v^\alpha + V v^\alpha v^\beta). \quad (10.97)$$

Как  $S^{\alpha\beta}$ , так и  $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}$  симметричны, так что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} v_\beta &= 0, & \mathfrak{P}^{\alpha\beta} v_\beta &= 0, & \mathfrak{F}^\alpha v_\alpha &= 0, \\ g_{\alpha\beta} \mathfrak{P}^{\alpha\beta} &= -V, & P_R^{\alpha\beta} v_\beta &= \mathfrak{F}^\alpha + V v^\alpha. \end{aligned} \quad (10.98)$$

Единичный вектор  $g_{\alpha\beta}$  определяется следующим образом:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (10.99)$$

Из соотношений ортогональности между  $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}$  и  $v^\alpha$  получим

$$\mathfrak{P}^{i4} = \frac{1}{c} \mathfrak{P}^{ij} u^j, \quad \mathfrak{P}^{44} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{P}^{ij} u^i u^j. \quad (10.100)$$

Подобным же образом из соотношений ортогональности между  $\mathfrak{F}^\alpha$  и  $v^\alpha$  получим

$$\mathfrak{F}^4 = \frac{1}{c} \mathfrak{F}^i u^i. \quad (10.101)$$

В результате уравнение (10.98) принимает следующий вид

$$V = \left( \delta^{ij} - \frac{1}{c^2} u^i u^j \right) \mathfrak{P}^{ij}. \quad (10.102)$$

В рамках механики Галилея для частного случая имеем

$$u_0^i = 0, \quad v_0 = 0, \quad 0, \quad 0, \quad c,$$

и тогда

$$\mathfrak{P}_0^{ij} = P_{R0}^{ij}, \quad \mathfrak{F}_0^i = q_{R0}^i, \quad V_0 = E_{R0}, \quad \mathfrak{P}_0^{44} = 0, \quad \mathfrak{F}_0^4 = 0. \quad (10.103)$$

Уравнения (10.103) определяют соотношения, которые мы используем для фотонов.

## 8. ЛОКАЛЬНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Как отмечалось в разд. 7 гл. 4, для большинства задач течения хорошим приближением к действительным условиям является предположение о локальном термодинамическом равновесии. Рассмотрим гипотезу локального термодинамического равновесия с релятивистской точки зрения [11]. Как уже говорилось в разд. 7 гл. 4, коэффициент испускания в системе  $G_0$  при локальном термодинамическом равновесии имеет вид

$$J_{\nu_0}^0 = \exp(-h\nu_0/kT_0) k_{\nu_0}^0 I_{\nu_0}^0 + [1 - \exp(-h\nu_0/kT_0)] k_{\nu_0}^0 B_{\nu_0}(T_0), \quad (10.104)$$

где  $T_0$  — температура газа, определяемая в системе  $G_0$ . Мы можем рассматривать ее как четырехмерный инвариант и записать в виде  $T = T_0$ . Индекс 0 (нижний или верхний) относится к значениям в системе  $G_0$ . Если ввести величины  $E$ ,  $A$  и  $F_R$ , определяемые уравнениями (10.46) и (10.51), в уравнение (10.104), то оно примет вид

$$E_0 = A_0 F_{R0} \exp(-c|p_0|/kT_0) + [1 - \exp(-c|p_0|/kT_0)] A_0 g_{R0}, \quad (10.105)$$

где

$$g_{R0} = \frac{2}{h^3} [\exp(c|p_0|/kT_0) - 1]^{-1}. \quad (10.106)$$

Здесь  $g_{R0}$  — функция распределения фотонов, соответствующая неподвижному черному телу в системе  $G_0$ . В любой системе  $G$  гипотеза локального термодинамического равновесия дает следующее соотношение:

$$E = A F_R \exp(-p^a v_a / kT) + [1 - \exp(-p^a v_a / kT)] A g_R, \quad (10.107)$$

где

$$g_R = \frac{2}{h^3} [\exp(p^a v_a / kT) - 1]^{-1}. \quad (10.108)$$

Здесь  $g_R$  — функция распределения фотонного газа, соответствующая черному телу, движущемуся со скоростью  $v$  относительно системы  $G$ .

При локальном термодинамическом равновесии уравнение радиационного переноса для фотонов (10.50) имеет окончательный вид

$$p^a \frac{\partial F_R}{\partial x^a} = \frac{1}{c} (p^a v_a) K (g_R - F_R), \quad (10.109)$$

где

$$K = \frac{c}{p^a v_a} A [1 - \exp(-p^b v_b / kT)]. \quad (10.110)$$

Здесь  $K$  — просто приведенный коэффициент поглощения  $k'_v$  [см. уравнение (4.50)], т. е. в системе  $G_0$

$$K = k_{v_0}^0 [1 - \exp(-h\nu_0/kT_0)] = k_{v_0}^{\prime 0}. \quad (10.111)$$

Для условий локального термодинамического равновесия можно вывести тензор напряжений излучения  $p_R$  для случая малой средней длины свободного пробега излучения или большого значения  $K$  так же, как мы делали это в разд. 8 гл. 5. Из уравнения (10.109) в первом приближении получим

$$F_R = g_R - \frac{c}{p^a v_a} \frac{1}{K} p^\beta \frac{\partial q_R}{\partial x^\beta}, \quad (10.112)$$

где  $g_R$  — функция от  $x^\beta$ , поскольку как  $T$ , так и  $v^a$  в общем случае являются функциями  $x^\beta$ .

Если мы подставим выражение (10.112) в тензор напряжений излучения  $p_R^{\alpha\beta}$ , т. е. в уравнение (10.80), то мы получим четырехмерный тензор напряжений для условий локального термодинамического равновесия. Связанные с этим вычисления довольно громоздки. Мы вычислим только  $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}$ ,  $\mathfrak{S}^a$  и  $V$  в системе  $G_0$ . Имеем

$$v_0^i = v_{0i} = 0, \quad v_0^4 = v_{04} = c. \quad (10.113)$$

И далее (см. [12])

$$\mathfrak{P}_0^{ij} = \frac{1}{3} a_R T_0^4 \delta^{ij} - \frac{4a_R T_0^4}{15K_R c} \left( \frac{\partial v_0^k}{\partial x_0^k} \delta^{ij} + \frac{\partial v_0^i}{\partial x_0^j} + \frac{\partial v_0^j}{\partial x_0^i} + 5 \frac{c}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x_0^4} \delta^{ij} \right), \quad (10.114)$$

$$\mathfrak{S}_0^i = - \frac{4a_R T_0^4}{3K_R} \left( \frac{\partial u_0^i}{\partial x_0^4} + \frac{c}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x_0^i} \right), \quad (10.115)$$

$$V_0 = \mathfrak{P}_0^{ii} = a_R T_0^4 - \frac{4a_R T_0^4}{3K_R c} \left( \frac{\partial v_0^i}{\partial x_0^i} + 3 \frac{c}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x_0^4} \right). \quad (10.116)$$

Здесь  $K_R$  — средний коэффициент поглощения по Росселанду (5.18), который будет рассматриваться как четырехмерный инвариант.

Из уравнений (10.97) и (10.114)–(10.116) следуют выражения для напряжений излучения  $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}$ , потока излучения  $\mathfrak{S}^a$  и

энергии излучения  $V$  в рамках любой системы  $G$ :

$$\mathfrak{P}^{\alpha\beta} = p_R \left( \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} - g^{\alpha\beta} \right) + \mu_R \left[ \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\lambda} g^{\alpha\beta} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\beta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\lambda} g^{\alpha\lambda} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (v^\alpha v^\beta v^\lambda) - 5 \frac{v^\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} \left( \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} - g^{\alpha\beta} \right) \right], \quad (10.117)$$

$$\mathfrak{S}^\alpha = -5\mu_R \left[ v^\lambda \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\lambda} + \frac{c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} \left( \frac{v^\alpha v^\lambda}{c^2} - g^{\alpha\lambda} \right) \right], \quad (10.118)$$

$$V = 3p_R - 5\mu_R \left( \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\lambda} + 3 \frac{v^\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} \right), \quad (10.119)$$

где

$$p_R = \frac{1}{3} a_R T^4 \quad (10.120a)$$

— давление излучения,

$$\mu_R = \frac{4a_R T^4}{15K_R c} \quad (10.120b)$$

— коэффициент радиационной вязкости.

Тогда выражение для тензора напряжений излучения  $p_R^{\alpha\beta}$  запишется в виде

$$p_R^{\alpha\beta} = p_R \left( 4 \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} - g^{\alpha\beta} \right) + \mu_R \left[ \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\lambda} g^{\alpha\beta} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\lambda} g^{\alpha\lambda} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\lambda} g^{\alpha\lambda} - \right. \\ \left. - \frac{6}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (v^\alpha v^\beta v^\lambda) + \frac{5}{T} \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} \left( v^\lambda g^{\alpha\beta} + v^\alpha g^{\lambda\beta} + v^\beta g^{\alpha\lambda} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6}{c^2} v^\alpha v^\beta v^\lambda \right) \right]. \quad (10.121)$$

Полученные выше результаты, такие, как уравнение (10.121), с релятивистской точки зрения правильны. В обычной радиационной газодинамике скорость течения  $u$  всегда много меньше скорости света  $c$  и для любой макроскопической величины  $Q$  модуль  $\partial Q / \partial x^4$  много меньше модуля  $\partial Q / \partial x^i$ . Если пренебречь членами высших порядков, то из уравнения (10.103) следует

$$p_{R0}^{ij} = \mathfrak{P}^{ij}, \quad q_{R0}^i = \mathfrak{S}^i, \quad E_{R0} = V. \quad (10.122)$$

В случае малой средней длины свободного пробега излучения имеем

$$p_{R0}^{ij} = p_R \delta^{ij} - \mu_R \left( \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \delta^{ij} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right), \quad (10.123a)$$

$$q_{R0}^i = -5\mu_R \left( \frac{c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x^i} + v_\alpha \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right). \quad (10.123b)$$

$$E_{R0} = p_{R0}'' = 3p_R - 5\mu_R \frac{\partial v^a}{\partial x^a}. \quad (10.123в)$$

Уравнения (10.123) сводятся к соотношениям, полученным в разд. 8 гл. 5, где мы пренебрегали членами порядка  $u^2/c^2$ .

### 9. ДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Из результатов разд. 4—8 следует, что имеется аналогия между тензором напряжений в обычной газодинамике и тензором напряжений в динамике излучающего газа. В общем случае оба эти тензора напряжений должны выражаться как интегралы от компонентов количества движений. Однако в предельных случаях эти интегралы можно существенно упростить. Параметрами, характеризующими условия течения, являются средняя длина свободного пробега молекул газа, определяемая уравнением (10.43), и средняя длина свободного пробега излучения, которая обратно пропорциональна массовому коэффициенту поглощения  $K$  [см. уравнения (10.110) или (5.12)]. Имеется возможность выделить различные режимы течения в зависимости от значений этих средних длин свободных пробегов.

Для определения степени разреженности в радиационной газодинамике можно использовать следующие безразмерные параметры:

$$K_f = \frac{L_f}{L} \quad (10.124а)$$

число Кнудсена в газодинамике,

$$K_r = \frac{L_R}{L} \quad (10.124б)$$

— радиационное число Кнудсена.

Здесь  $L_f$  — средняя длина свободного пробега молекул газа (10.43), которая может быть выражена в зависимости от коэффициента кинематической вязкости  $\nu_g$

$$\nu_g = \frac{1}{2} L_f \bar{c}_a. \quad (10.125а)$$

Из уравнений (10.38) и (10.39) получим

$$\bar{c}_a = (8/\pi\gamma)^{1/2} a. \quad (10.125б)$$

Уравнение (10.124а) принимает вид

$$K_f = 1,255 \sqrt{\gamma} M/Re, \quad (10.126)$$



где  $M = U/a$  — число Маха поля течения;  $U$  — типичная скорость поля течения;  $Re = UL/\nu_g$  — число Рейнольдса поля течения и  $L$  — характеристическая длина поля течения.

Средняя длина свободного пробега излучения  $L_R$  определяется уравнением (5.12). В общем случае  $L_R$  зависит от частоты излучения. Однако при определении радиационного числа Кнудсена  $K_r$  можно использовать некоторое среднее значение средней длины свободного пробега излучения. Обычно если средняя длина свободного пробега излучения мала по сравнению с  $L$ , то используется среднее значение Росселанда (5.18). Если же средняя длина свободного пробега излучения велика по сравнению с  $L$ , то обычно используется среднее значение Планка (5.36). Следует отметить, что радиационное число Кнудсена обратно пропорционально оптической толщине. При малых значениях радиационного числа Кнудсена газ является оптически толстым, а при больших — оптически тонким.

Когда число Кнудсена  $K_f$  пренебрежимо мало, жидкость может рассматриваться как непрерывная среда и тензор напряжений может быть выражен через соотношения Навье — Стокса в зависимости от коэффициента вязкости. Когда число Кнудсена  $K_f$  не пренебрежимо мало, тензор напряжений должен быть выражен с помощью более сложных соотношений, чем соотношения Навье — Стокса. В предельном случае необходимо учитывать дискретный характер частиц газа.

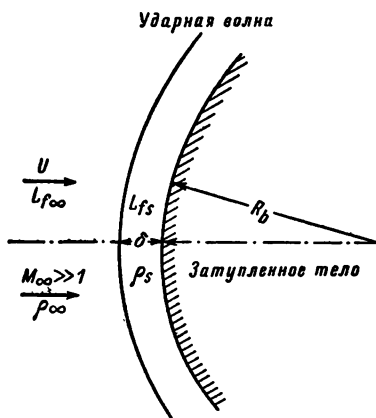
Выбор характеристической длины  $L$  зависит от рассматриваемой задачи. Так, при изучении сил, действующих на обтекаемое потоком газа тело, и потока тепла к телу в качестве  $L$  можно выбрать типичный размер тела. Когда задача состоит в определении поверхностного трения и передачи тепла через пограничный слой, в качестве размера  $L$  можно использовать толщину пограничного слоя. Когда исследуется область перехода через ударную волну, то в качестве  $L$  можно выбрать толщину ударной волны. Таким образом, из-за различных возможностей выбора характеристической длины  $L$  решение вопроса о том, будет ли рассматриваемое течение течением разреженного газа или сплошной среды, зависит от рассматриваемой задачи. После того как выбрано значение  $L$ , величина числа Кнудсена  $K_f$  характеризует имеющуюся степень разреженности.

Течение разреженного газа можно разделить на следующие области в соответствии с величиной числа Кнудсена. Поскольку число Кнудсена является функцией числа Маха  $M$  и числа Рейнольдса  $Re$ , то удобно разделить поле течения по различным режимам в зависимости от значений чисел Маха и

Рейнольдса [10]:

<i>Режим</i>	<i>Диапазон изменения чисел <math>M</math> и <math>Re</math></i>	
Свободномолекулярное течение	$M/Re \geq 3$	
Область переходного течения	$M/ke \leq 3$ и $M/\sqrt{Re} \geq 0,1$	(10.127)
Течение со скольжением	$0,1 \geq M/\sqrt{Re} \geq 0,01$	
Течение сплошной среды	$M/\sqrt{Re} \leq 0,01$	

Когда число Кнудсена велико по сравнению с единицей, имеет место режим свободномолекулярного течения, в котором частицы газа должны рассматриваться как свободные частицы, не испытывающие влияния других частиц. Когда число Кнудсена очень мало, имеет место режим течения сплошной среды, для которого уравнения Навье—Стокса дают хорошее описание действительного поля течения. Промежуточные режимы (переходный и режим течения разреженного газа со скольжением) довольно сложны. Можно ожидать, что с увеличением числа Кнудсена режим течения будет постепенно изменяться от режима течения сплошной среды до режима свободномолекулярного течения. Деление промежуточных режимов на несколько типов обычно довольно произвольно. Наиболее общее деление представлено соотношениями (10.127). В режиме течения со скольжением жидкость еще ведет себя как непрерывная среда и еще справедливы соотношения Навье—Стокса для вязких напряжений и градиентов скорости, однако на границе с твердым телом происходит скольжение скорости и скачок температуры, обусловленные эффектами разреженного газа. В режиме переходного течения его характер определяется в основном дискретным характером газа. В общем случае соотношения между тензором вязких напряжений и другими макроскопическими переменными, а также выражения



Фиг. 10.2. Течение в окрестности критической точки затупленного тела при гиперзвуковом обтекании.

для теплового потока имеют вид сложных соотношений, которые иногда являются дифференциальными уравнениями. Уровень современных знаний в области этого переходного течения весьма ограничен.

В наш космический век изучение обтекания тел, летящих с гиперзвуковыми скоростями в разреженном газе, имеет очень важное значение. Поэтому желательно подробно изучить поле течения разреженного газа. Следуя Пробстину [9], мы усовершенствуем деление течения разреженного газа на режимы и с тем, чтобы дать конкретный пример, рассмотрим окрестность критической точки осесимметричного затупленного тела радиуса  $R_b$ , летящего с гиперзвуковой скоростью. В этой задаче существова также и тепловой эффект излучения, о чем уже говорилось в разд. 8 гл. 9. Мы рассмотрим отошедшую ударную волну перед затупленным телом, как показано на фиг. 10.2. Средняя длина свободного пробега молекул газа за ударной волной  $L_{fs}$  много меньше, чем средняя длина свободного пробега  $L_{f\infty}$  в набегающем потоке. Для гиперзвукового течения при очень высоких температурах можно сделать следующие приближения:

$$\frac{L_{fs}}{L_{f\infty}} \approx \frac{\delta}{R_b} \approx k_p \approx \frac{\rho_\infty}{\rho_s} \ll 1, \quad (10.128)$$

где  $\delta$  — расстояние отхода ударной волны. Отношение плотностей  $k_p$  при переходе через гиперзвуковую ударную волну имеет порядок от 0,1 до 0,07 или меньше. Основное условие сплошности течения может быть представлено в виде

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} \ll 1. \quad (10.129a)$$

Даже если течение может рассматриваться как течение сплошной среды, так что для вязких напряжений могут быть использованы соотношения Навье — Стокса, то и тогда действительное решение задачи может отличаться от классических результатов, соответствующих значению  $K_f$  числа Кнудсена. Можно ввести следующие подразделения:

**1. Режим вихревого взаимодействия.** В этом режиме

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} \ll k_p. \quad (10.129б)$$

Это по существу классический случай газодинамики. Толщина ударной волны мала. Сразу же за ударной волной течение может рассматриваться как невязкое и завихренное. К поверхности тела прилегает очень тонкий пограничный слой. Этот случай был обсужден в разд. 8 гл. 9.

**2. Режим вязкого слоя.** В этом режиме

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} \ll \sqrt{k_p}. \quad (10.129в)$$

Число Рейнольдса в этом случае меньше, чем в случае 1. Толщина ударной волны еще мала, но течение непосредственно за ударной волной должно рассматриваться с учетом вязкости и теплопроводности. Этот случай был обсужден в п. 3 разд. 8 гл. 9.

### 3. Режим частично смыкающихся слоев.

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} \ll 1. \quad (10.129г)$$

Число Рейнольдса в этом случае меньше, чем в случае 2. Ударная волна теперь не является тонкой. Действительно, в этом случае нельзя отделить область перехода через ударную волну от вязкой области за ударной волной.

Когда число Кнудсена  $K_f$  не пренебрежимо мало, в поле течения также можно выделить три различных режима. Подробный анализ этих режимов должен основываться на кинетической теории газов.

### 4. Режим полностью сомкнувшихся слоев.

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} \approx 1. \quad (10.129д)$$

В этом режиме ударная волна не является более поверхностью разрыва. Строгое исследование этого режима требует применения кинетической теории газов.

### 5. Режим переходного слоя.

$$K_f = \frac{L_{fs}}{\delta} > 1. \quad (10.129е)$$

В этом случае становится существенным дискретный характер распределения частиц в поле течения.

**6. Режим однократных столкновений.** В этом режиме местное число Кнудсена велико, но не настолько, чтобы возник режим свободномолекулярного течения. В этом исследовании необходимо принимать во внимание столкновение между молекулами набегающего потока и отраженными молекулами.

Наконец, когда число Кнудсена  $K_{fs}$  много больше единицы, столкновениями между молекулами можно пренебречь, и мы переходим в область свободномолекулярного течения.

Следует отметить, что тепловой поток за счет теплопроводности тесно связан с вязкими напряжениями и обе эти величины обусловлены движением молекул. Следовательно, тепловой по-

ток за счет теплопроводности изменяется аналогично вязким напряжениям с изменением числа Кнудсена в различных режимах, рассмотренных выше.

Что касается напряжений излучения и теплового потока излучения, то мы можем выделить три режима, соответствующих различным значениям радиационного числа Кнудсена:

**1. Случай большой оптической толщины.** Когда радиационное число Кнудсена  $K_r$  мало, т. е.

$$K_r = \frac{L_R}{L} \ll 1, \quad (10.130a)$$

то как напряжения излучения, так и тепловой поток излучения могут быть выражены в зависимости от макроскопических переменных, таких, как градиент температуры и т. д., подобно тому как выражались соответствующие величины переменных параметров течения [см. уравнения (5.15), (5.16) и (5.21)]. Во многих задачах число давления излучения мало и можно рассматривать только тепловой поток излучения путем увеличения соответствующего значения коэффициента теплопроводности [см. уравнение (8.10)].

**2. Промежуточный случай.** Когда радиационное число Кнудсена  $K_r$  имеет порядок единицы,

$$K_r = \frac{L_R}{L} \approx 1, \quad (10.130б)$$

то следует использовать интегральные выражения для напряжений излучения и потока тепла (см. разд 9. гл. 9).

**3. Случай оптически тонкой среды.** Когда радиационное число Кнудсена  $K_r$  велико, т. е.

$$K_r = \frac{L_R}{L} \gg 1, \quad (10.130в)$$

можно использовать некоторые очень простые выражения для напряжений излучения и теплового потока излучения, как в уравнении (6.35) и в подобных ему выражениях.

Можно также выполнить некоторое более подробное деление на режимы. Например, когда радиационное число Кнудсена предельно мало, для теплового потока излучения, так же как и для потока тепла за счет теплопроводности, имеет место условие отсутствия скольжения. Если радиационное число Кнудсена мало, но не пренебрежимо мало, то в члене, выражаю-

шем тепловой поток излучения, может появиться температурный скачок, такой же, как в случае течения скольжения динамики разреженного газа (см. разд. 8 гл. 6).

## 10. СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим теперь в некоторых подробностях режим свободномолекулярного течения в радиационной газодинамике. В сильно разреженном газе перенос тепла теплопроводностью и конвекцией мал по сравнению с переносом тепла излучением. Следовательно, тепловое излучение становится определяющим фактором в задаче переноса тепла. Поскольку тепловое излучение существенно, оно будет оказывать значительное влияние на температуру поверхности тела. В свою очередь температура поверхности оказывает значительное влияние на свободномолекулярное течение. В результате тепловое излучение заметно изменит свободномолекулярное течение и уже нельзя будет пренебречь взаимодействием между параметрами потока и тепловым излучением.

В свободномолекулярном течении молекулы сталкиваются между собой значительно реже, чем с поверхностью тела. Благодаря этому можно полностью пренебречь столкновениями молекул и рассматривать только их взаимодействие с поверхностью тела. Таким образом, в свободномолекулярном течении можно разделить молекулы газа на две группы: 1) падающий поток, в котором скорость течения и температура газа известны и молекулярной функцией распределения является максвелловская функция распределения (10.34), соответствующая известной скорости потока и температуре; 2) отраженный поток, который состоит из отраженных от поверхности тела молекул. Молекулярная функция распределения для отраженного потока может быть определена теоретически или экспериментально по известным условиям в набегающем потоке и по свойствам поверхности. Такое определение довольно затруднительно. Однако для инженерных задач достаточно знать коэффициент термической аккомодации  $\alpha_0$  и два коэффициента отражения  $\sigma_f$  и  $\sigma'_f$ , которые определяются следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{dE_l - dE_r}{dE_l - dE_w}, \quad (10.131a)$$

$$\sigma_f = \frac{\tau_l - \tau_r}{\tau_l - \tau_w} \quad (\tau_w = 0), \quad (10.131б)$$

$$\sigma'_f = \frac{p_l - p_r}{p_l - p_w}. \quad (10.131в)$$

Индексы  $i$ ,  $r$  и  $w$  относятся к параметрам падающего потока, отраженного потока и к поверхности тела соответственно. Тепловой поток обозначен через  $dE$ , количество движения в направлении, касательном к поверхности, через  $\tau$ , а количество движения по нормали к поверхности — через  $\rho$ . Значения коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\sigma_f$  и  $\sigma'_f$  зависят от свойств поверхности, так же как и от свойств газа, и отражают в себе некоторые общие осредненные феноменологические свойства. Значение  $\alpha_0$  заключено между 0,87 и 0,97, а значение  $\sigma_f$  может меняться от 0,79 до единицы. Сведений о значениях коэффициента  $\sigma'_f$  в настоящее время не имеется.

Представляют интерес два частных случая: случай полного зеркального отражения и случай только диффузного отражения. Отражение называется зеркальным, если молекулы после столкновения с поверхностью сохраняют тангенциальную составляющую скорости и меняют нормальную составляющую скорости на обратную направленную. Отражение называется диффузным, если молекулы покидают поверхность с максвелловским распределением скорости, не всегда находясь в температурном равновесии с ней. В случае полностью зеркального отражения с потерями энергии, равными нулю,  $\alpha_0 = \sigma_f = \sigma'_f = 0$ , в то время как в случае полностью диффузного отражения, когда молекулы газа покидают поверхность, придя в температурное равновесие с ней,  $\alpha_0 = \sigma_f = \sigma'_f = 1$ . В действительности, значения коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\sigma_f$  и  $\sigma'_f$  заключены между 0 и 1.

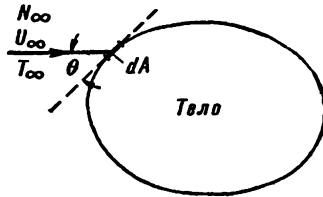
Если значения коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\sigma_f$  и  $\sigma'_f$  известны, то можно рассчитать теплообмен и силы, действующие на тело, исходя из условий в набегающем потоке и на поверхности тела. При расчете теплообмена коэффициент аккомодации  $\alpha_0$  может быть различным для различных видов энергии. Например, столкновения с поверхностью будут оказывать меньшее влияние на колебательную энергию, чем на поступательную и вращательную энергию. Однако в первом приближении можно считать, что  $\alpha_0$  имеет одно и то же значение для всех видов внутренней энергии.

Поскольку значения коэффициентов отражения недостаточно известны, мы рассмотрим ниже только технические поверхности, от которых молекулы отражаются диффузно, но коэффициент аккомодации поверхности постоянен и имеет значение, равное или не равное единице. Пусть однородный набегающий поток, имеющий скорость  $U_\infty$  и температуру  $T_\infty$ , обтекает выпуклое тело, причем многократное отражение отсутствует. Рассмотрим элементарную площадку  $dA$  на теле (фиг. 10.3). Будем считать, что в процессе отражения молекулы не исчезают и не

образуются. Число молекул падающего потока, пересекающих единицу площади элемента  $dA$  в единицу времени, равно

$$N_i = \frac{N_\infty c_{m\infty}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \exp(-S^2 \cos^2 \theta) + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} = N_\infty c_{m\infty} Z, \quad (10.132)$$

где  $\theta$  — местный угол атаки; индекс  $\infty$  относится к значениям в набегающем потоке;  $c_m$  — наиболее вероятная скорость, определяемая уравнением (10.38), и величина  $S = U_\infty/c_m$  обычно называется отношением скоростей. Параметр  $Z$ , определяемый



Фиг. 10.3. Тело в свободномолекулярном потоке.

уравнением (10.132), есть не что иное, как безразмерное число потока. Потоки энергии падающего потока молекул состоят из двух слагаемых: одно представляет собой энергию  $E_i$  поступательного движения молекул и другое  $E_j$  обусловлено внутренними степенями свободы. Эти потоки энергии определяются следующими выражениями:

$$E_i = \frac{1}{2} m N_\infty c_{m\infty}^3 \left\{ \left( \frac{2+S^2}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp(-S^2 \sin^2 \theta) + \left( \frac{5+2S^2}{4} \right) S \sin \theta [1 + \operatorname{erf}(\sin \theta)] \right\} = \frac{1}{2} m c_{m\infty}^2 N_i \epsilon, \quad (10.133)$$

$$E_j = \frac{1}{2} j k T_\infty N_i. \quad (10.134)$$

Здесь  $j$  — число внутренних степеней свободы, которые принимают участие в энергетическом обмене с поверхностью,  $k$  — постоянная Больцмана и  $\epsilon$  — безразмерный поток энергии поступательного движения одной молекулы. На фиг. 10.4 и 10.5 представлены изменения безразмерного числа потока  $Z$  и безразмерного потока энергии поступательного движения молекулы  $\epsilon$ .

Поток энергии отраженных молекул может быть выражен в зависимости от коэффициента аккомодации при помощи уравнения (10.131a). Поскольку мы рассматриваем поток энергии



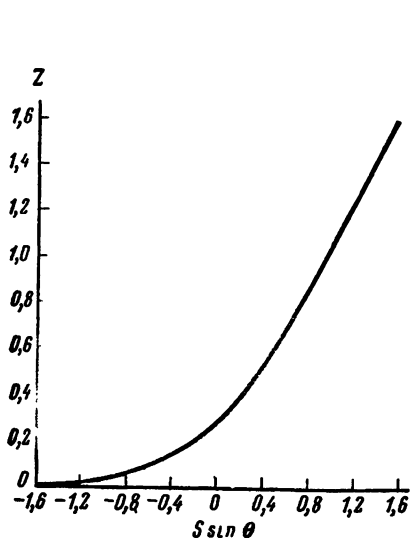
на единицу площади, то выражения (10.133) и (10.134) в действительности представляют собой величину  $dE$ , входящую в уравнения (10.131)

$$E_w = \left(2 + \frac{1}{2} j\right) k T_w N_i.$$

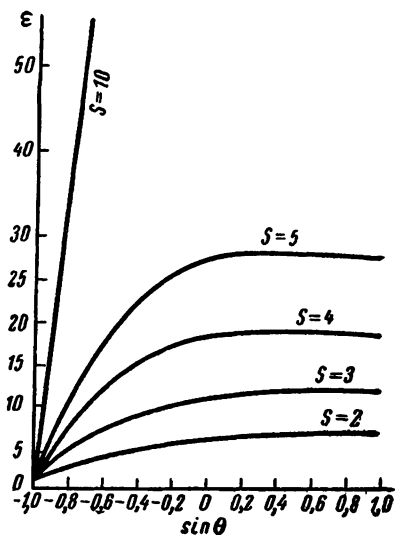
Тогда поток отраженной энергии будет

$$\frac{E_r}{E_i} = 1 - \alpha \left[ 1 - \frac{4+j}{2+j} \left( \frac{T_w}{T_\infty} \right) \right]. \quad (10.135)$$

Теперь мы можем исследовать перенос тепла в свободно-молекулярном потоке с учетом радиационных эффектов. Для



Фиг. 10.4. Безразмерное число  $Z$  в зависимости от составляющей относительной скорости, перпендикулярной к поверхности тела (фиг. 1 из работы [1]).



Фиг. 10.5. Безразмерный поток энергии поступательного движения молекулы  $\epsilon$  в зависимости от угла падения  $\theta$  (фиг. 2 из работы [1]).

сильно разреженного газа можно пренебречь поглощением и испусканием теплового излучения молекулами газа. Следовательно, остается рассмотреть только испускательную способность поверхности тела. Далее, для определения температуры поверхности очень важна теплопроводность твердого тела. Мы рассмотрим следующие три случая:

**1. Изолированные поверхности.** Распределение температуры по поверхности теплоизолированного тела зависит только от местных потоков тепла. Баланс потоков энергии записывается следующим образом:

$$E_t + E_j = E_r + e_w \sigma T_n^4 \quad (10.136)$$

и в безразмерной форме принимает вид

$$\eta_n^4 + \eta_n = H_n, \quad (10.136a)$$

где

$$\eta_n = \left[ \frac{2e_w}{(4+j) \alpha k N_\infty c_{m\infty} Z} \right]^{1/3} T_n \quad (10.136б)$$

и

$$H_n = \left( \frac{2\varepsilon + j}{4+j} \right) \eta_\infty = \left( \frac{2\varepsilon + j}{4+j} \right) \left[ \frac{2e_w}{(4+j) \alpha k N_\infty c_{m\infty} Z} \right]^{1/3} T_\infty. \quad (10.136в)$$

Здесь  $T_n$  — температура изолированной поверхности,  $e_w$  — коэффициент излучения поверхности и  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана для потока излучения. Так как величина  $H_n$  известна для любой конкретной задачи, то уравнение (10.136a) определяет температуру поверхности  $T_n$ . Для больших значений отношения скоростей  $S$  ( $S \gg 1$ ) получаем

$$\eta_n = H_n^{1/4} \quad (10.137)$$

и

$$T_n = \left[ \frac{(2\varepsilon + j) \alpha N_\infty k^{3/2} T_\infty^{3/2} Z}{\sqrt{2m} e_w \sigma} \right]^{1/2}. \quad (10.137a)$$

**2. Идеально теплопроводная поверхность.** Для такой поверхности следует рассматривать баланс энергии для всего тела, т. е.

$$\int \int (E_t + E_j) dA = \int \int E_r dA + \int \int e_w \sigma T_c^4 dA. \quad (10.138)$$

В безразмерном виде уравнение (10.138) записывается следующим образом:

$$\eta_c^4 + \eta_c = H_c, \quad (10.138a)$$

где

$$\eta_c = \left[ \frac{2e_w \sigma \int \int dA}{(4+j) \alpha k N_\infty c_{m\infty} \int \int Z dA} \right]^{1/3} T_c \quad (10.138б)$$

и

$$H_c = \left[ \frac{\int \int (2\varepsilon + j) Z dA}{(4+j) \int \int Z dA} \right] \left[ \frac{2e_w \sigma \int \int dA}{(4+j) \alpha k N_\infty c_{m\infty} \int \int Z dA} \right]^{1/3} T_\infty. \quad (10.138в)$$

Здесь  $T_c$  — температура идеально проводящего тела. Поскольку уравнения (10.138) содержат следующие отношения интегралов:

$$N_a = \frac{\int \int Z dA}{\int dA} \quad (10.139)$$

и

$$F_a = \frac{\int \int (2\varepsilon + j) Z dA}{(4 + j) \int \int Z dA}, \quad (10.140)$$

то результаты решения уравнения (10.138a) существенно зависят от геометрии рассматриваемого тела. Абарбенел [1] вычислил величины  $N$  и  $F$  для различных простых конфигураций.

Для плоской пластины, расположенной под углом атаки  $\theta$ , или для симметричного двойного клина с полууглом  $\theta$

$$N_a = \frac{\exp(-h_0^2) + \sqrt{\pi} h_0 \operatorname{erf} h_0}{2\sqrt{\pi}},$$

$$F_a(4 + j) = 2S^2 + 5 + j - [1 + \sqrt{\pi} h_0 \exp(h_0^2) \operatorname{erf} h_0]^{-2}, \quad (10.141)$$

где  $h_0 = S \sin \theta$  и  $\operatorname{erf}$  — интеграл вероятности.

Для сферы

$$N_a = \frac{2 \exp(-S^2) + \sqrt{\pi} (S^{-1} + 2S) \operatorname{erf} S}{8\sqrt{\pi}}, \quad (10.142a)$$

$$(4 + j)F_a = 2S^2 + 5 + j - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} S\right) \times$$

$$\times [S \exp(-S^2) + \sqrt{\pi} (1 + 2S^2) \operatorname{erf} S]^{-1}. \quad (10.142b)$$

**3. Тело с конечной теплопроводностью.** Для тела с конечной теплопроводностью нужно решить задачу теплопроводности внутри тела с граничными условиями, определяемыми балансом потоков тепла на поверхности тела. Основным уравнением теплопроводности для стационарного состояния является уравнение Лапласа для температуры  $T$  тела, а именно

$$\nabla^2 T = 0. \quad (10.143a)$$

Уравнение (10.143a) должно быть решено при удовлетворении следующего условия на внешней поверхности тела:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} + e_w \sigma T^4 + E_r = E_t + E_j, \quad (10.143b)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности тела и  $n$  — направление внешней нормали к поверхности тела.

В безразмерной форме уравнения (10.143) имеют следующий вид:

$$\nabla^2 \eta = 0, \quad (10.144a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n^*} + \eta^4 + X\eta = H \quad (\text{на внешней поверхности}), \quad (10.144b)$$

где

$$n^* = \frac{n}{L}, \quad X = \frac{1}{2}(4 + j) \frac{\alpha k L N_i}{\kappa},$$

$$H = \left( \frac{e_w \sigma L^4}{4\kappa} \right)^{1/3} \frac{1}{2} (2\varepsilon + j) k N_i T,$$

$$\eta = (e_w \sigma L \kappa)^{1/3} T.$$

Во многих практически важных случаях членом  $X\eta$  в уравнении (10.144b) можно пренебречь. Некоторые простые конфигурации, такие, как плоская пластина, сплошная сфера и тонкая сферическая оболочка, были изучены Абарбенелом [1]. Например, для проводящей плоской пластины малой толщины, имеющей по существу линейное распределение температуры, уравнение (10.144b) приближенно записывается в виде

$$\eta_1^4 + \eta_1 - \eta_2 = H_1, \quad (10.145a)$$

$$\eta_2^4 + \eta_2 - \eta_1 = H_2. \quad (10.145b)$$

Температуры  $\eta_1$  и  $\eta_2$  или  $T_1$  и  $T_2$  поверхностей пластин легко определяются из уравнений (10.145).

До сих пор мы предполагали, что в набегающем потоке нет источников излучения. При межпланетных полетах возможны источники излучения в набегающем потоке, такие, как излучение Солнца. Это излучение легко можно учесть, добавив к члену  $E_r$  поток солнечной энергии на элементарную площадку в виде

$$E_s = e_w J_s \cos \theta_s, \quad (10.146)$$

где  $J_s$  — локальная солнечная постоянная,  $e_w$  — коэффициент поглощения поверхности, который равен ее коэффициенту излучения, и  $\theta_s$  — угол между направлением солнечных лучей и нормалью к элементу поверхности  $dA$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Abarbanel S., Radiative Heat Transfer in Free Molecule Flow, *Journ. Aero. Sci.*, 28, 4, 299 (1961).
2. Burgers J. M., The Bridge between Particle Mechanics and Continuum Mechanics, Proc. of Plasma Dynamics, F. Clauser, ed., Addison Wesley Pub., 1960, pp. 119—186.

3. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ. Press, 1939; имеется русский перевод: Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, М., 1960.
4. Hartnett J. P., A Survey of Thermal Accommodation Coefficients, Proc. of 2-nd International Symp. on Rarefied Gasdynamics, Academic Press, N. Y., 1960.
5. Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B., Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley, N. Y., 1954; имеется русский перевод: Гиршфельдер Дж., Кертисс К., Берд Р., Молекулярная теория жидкостей и газов, ИЛ, М., 1961.
6. Pai S. I., Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Springer Verlag, Vienna and Prentice Hall Inc., N. J., 1962; имеется русский перевод: Бай Ши-и, Магнитная газодинамика и динамика плазмы, изд-во «Мир», М., 1964.
7. Patterson G. N., Molecular Flow of Gases, Wiley, N. Y., 1956; имеется русский перевод: Паттерсон Г., Молекулярное течение газов, Физматгиз, М., 1960.
8. Patterson G. N., A State of Art Survey of Some Aspects of the Mechanics of Rarefied Gases and Plasma, *UTIAS Review* № 18, Institute of Aerospace Studies, Univ. of Toronto, March 1964.
9. Probstein R. F., Continuum Theory and Rarefied Hypersonic Aerodynamics, Rarefied Gas Dynamics, Pergamon Press, 1960, p. 416.
10. Schaaf S. A., Chambre P. L., Flow of Rarefied Gases, Sec. H. of Fundamental of Gas Dynamics, vol. III, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Princeton Univ. Press, 1958; имеется русский перевод: Шаф С. А., Шамбре П. Л., Течение разреженных газов, Основы газовой динамики под ред. Эммонса Г., ИЛ, М., 1963.
11. Simons R., The Conservation Equations of a Classical Plasma in Presence of Radiation, A and ES Rept 62-1, Purdue Univ., 1962.
12. Synge J. L., The Relativistic Gas, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1957.

## *Свойства излучения высокотемпературных газов*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных характеристик газов в наших предыдущих рассмотрении задач радиационной газодинамики был коэффициент поглощения газа. При макроскопическом исследовании задач радиационной газодинамики коэффициент поглощения предполагается известной функцией параметров состояния: плотности и температуры газа, а также состава газовой смеси. Чтобы определить коэффициент поглощения, нужно обратиться к микроскопическим рассмотрением или экспериментальным методам. Коэффициент поглощения представляет собой осредненный результат действия сложных физических процессов в атомах газов, обусловленных взаимодействием вещества и энергии. Поскольку эти процессы протекают в атомах, то для получения достаточно точных результатов нужно использовать квантовую теорию. Однако классическая теория поглощения и испускания излучения позволяет получить качественно правильные результаты и притом достаточно просто. В соответствии с этим в разд. 2 мы прежде всего обсудим результаты, которые можно получить с помощью классической теории.

Тепловое излучение представляет собой одну из форм электромагнитного излучения. Действительно, видимый свет, тепловое излучение, радиоволны, рентгеновские лучи и т. д. являются электромагнитными волнами. Единственное, что отличает их, — это длина волны. Следовательно, путем исследования излучения электромагнитной энергии мы определим все существенные особенности поглощения и испускания теплового излучения. В разд. 2 мы рассмотрим случай классической модели атома с тем, чтобы объяснить поглощение электромагнитного излучения. Далее в разд. 3 мы кратко обсудим квантовую теорию излучения. Поскольку квантовая теория излучения (см. книгу Гейтлера [11]) очень сложный предмет, то мы сможем указать только некоторые наиболее важные результаты теории излучения. Для читателей, которые пожелают получить более подробные результаты, можно рекомендовать работу [11].

В разд. 4 мы опишем некоторые важные результаты спектроскопии высокотемпературных газов, которые полезны для

изучения коэффициентов поглощения теплового излучения. Поскольку наиболее важной средой в радиационной газодинамике является воздух, то в разд. 5 и 7 мы рассмотрим поглощение и испускание излучения в высокотемпературном воздухе. Также будет рассмотрен и другой важный газ — водород. Особый интерес для нас представляет изменение коэффициента поглощения в зависимости от параметров состояния и его средние по всему диапазону частот значения, такие как среднее значение по Планку и по Росселанду (разд. 7). О коэффициенте рассеяния говорится в разд. 6.

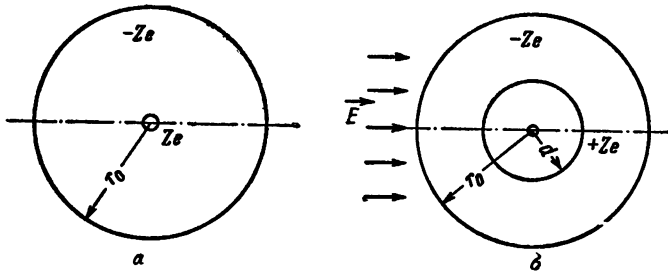
Процессы, обуславливающие излучение газов, очень сложны. Обычно интересующие нас газы, например воздух, представляют собой смесь многих компонентов, каждый из которых состоит из сложных молекул. Кроме того, газ может быть загрязненным с точки зрения его радиационных свойств. Физические процессы, обуславливающие поглощение и испускание излучения газа, различны в различных температурных диапазонах. Таким образом, полный теоретический анализ высокотемпературного газа или газовой смеси очень сложен. Многие полезные сведения о коэффициенте поглощения высокотемпературного газа можно получить из эксперимента. Некоторые экспериментальные методы и результаты будут рассмотрены в разд. 8.

В предыдущих главах в большинстве случаев мы рассматривали только условия локального термодинамического равновесия. Теоретическое определение коэффициента поглощения высокотемпературного газа обычно основано на предположении условия равновесия. В реальных задачах течений тепловое излучение может происходить при отсутствии локального термодинамического равновесия. Изучение неравновесного излучения в газовой динамике находится еще в начальной стадии. В разд. 9 мы очень кратко рассмотрим некоторые существенные моменты неравновесного излучения.

## 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИСПУСКАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

При определении поглощения и испускания излучения в среде необходимо знать структуру молекул среды, поскольку поглощение и испускание энергии излучения связано с движением систем зарядов в среде. Для простоты рассмотрим случай одноатомного газа. По классической теории атом состоит из централизованного ядра с зарядом  $Ze$ , окруженного электронной атмосферой с зарядом  $-Ze$ , где  $e$  — абсолютный электрический заряд электрона и  $Z$  — атомный номер. Атмосфера электронов предполагается заключенной в сфере радиуса  $r_0$  (фиг. 11.1, а).

При отсутствии внешнего электрического поля центр заряда электронной атмосферы совпадает с ядром. В присутствии внешнего электрического поля центр заряда электронного облака будет смещен на расстояние  $d$  (фиг. 11.1, б). Следовательно,



Фиг. 11.1. Атом как электрический диполь.

можно сказать, что внешнее электрическое поле индуцирует в атоме диполь с моментом

$$M_0 = Zed = \alpha_e E. \quad (11.1)$$

Поскольку сила, вызывающая смещение, пропорциональна напряженности внешнего электрического поля  $E$  и дипольный момент также пропорционален  $E$ , то множитель пропорциональности  $\alpha_e$  известен как электронная поляризуемость атома.  $\alpha_e = 4\pi\epsilon_0 r_0^3$  и  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная в вакууме.

Теперь, если мы предположим, что внешнее электрическое поле, т. е. поле падающих волн излучения, меняется во времени, то центр заряда будет следовать этим колебаниям и атом будет поглощать энергию. Рассмотрим простой случай, когда электрическое поле падающего излучения имеет только одну составляющую в направлении оси  $z$  и меняется во времени синусоидально, т. е.

$$E = i_z E_{z0} \exp(i\omega t). \quad (11.2)$$

Здесь  $E_{z0}$  — постоянная,  $\omega = 2\pi\nu$  и  $\nu$  — частота волны. Предположим, что движение электрона может быть представлено как простой осциллятор с демфирующей силой, пропорциональной его скорости, и с восстанавливающей силой, пропорциональной его расстоянию от положения равновесия. Уравнение движения электрона под влиянием внешнего электрического поля напряженностью  $E$  тогда будет

$$z'' + \gamma_a z' + \omega_0^2 z = \frac{eE_{z0}}{m} \exp(i\omega t) = \frac{eE}{m}, \quad (11.3)$$



где  $m$  — масса электрона;  $g = m\gamma_a$  — постоянный коэффициент демпфирующей силы и  $K_a = m\omega_0^2$  — постоянный коэффициент восстанавливающей силы. Собственная частота осциллятора  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ . Расстояние  $z$  измеряется от положения равновесия, где  $\mathbf{E} = 0$ . Мы должны рассмотреть частное решение уравнения (11.3) для  $z$ , поскольку дополнительное решение<sup>1)</sup> определяет переходные эффекты, связанные с началом действия излучения на атом. Частное решение имеет вид

$$z = \frac{\frac{e}{4\pi^2 m} E_{z0} \exp(2\pi i \nu t)}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\gamma_a \frac{\nu}{2\pi}}. \quad (11.4)$$

Расстояние  $z$  есть дипольное расстояние  $d$ , показанное на фиг. 11.1, б.

Для более точного анализа поглощения в газе взамен напряженности внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$  в уравнении движения (11.3) следует использовать местное электрическое поле  $\mathbf{E}'(t)$ . Соотношение между местным электрическим полем  $\mathbf{E}'$  и внешним электрическим полем  $\mathbf{E}$  определяется уравнением Клаузиуса — Мосотти — Лоренца [21]

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, \quad (11.5)^2$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации, который равен

$$\mathbf{P} = Ne\mathbf{z}. \quad (11.6)$$

Здесь мы предполагаем, что в единице объема газа содержится  $N$  осцилляторов, каждый из которых имеет дипольный момент  $e\mathbf{z}$ . Подставляя выражения (11.5) и (11.6) в уравнение (11.3), получаем дифференциальное уравнение для вектора поляризации  $\mathbf{P}$  в следующем виде:

$$P'' + \gamma_a P' + \omega_e^2 P = \frac{Ne^2}{m} E = \frac{Ne^2}{m} E_{z0} \exp(i\omega t), \quad (11.7)$$

где

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0}. \quad (11.8)$$

За исключением разницы в некоторых константах, уравнение (11.7) идентично уравнению (11.3). Следовательно, установив-

<sup>1)</sup> Имеется в виду общее решение однородного уравнения, соответствующего данному уравнению. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> По поводу правомерности применения соотношения (11.5) для плазмы см. книгу [12а], стр. 40—44. — *Прим. перев.*

шее решение для  $P$  будет

$$P = \frac{Ne^2}{4\pi^2 m} E_{z0} \exp(2\pi i \nu t) \cdot \frac{1}{v_e^2 - \nu^2 + i\gamma_a \frac{\nu}{2\pi}}. \quad (11.9)$$

Если имеется больше чем один тип осцилляторов, то вектор поляризации будет равен сумме векторов поляризации каждого осциллятора. Чтобы проиллюстрировать основные положения, рассмотрим здесь только один тип осциллятора (см. работу [21]).

Диэлектрическая постоянная среды, или проницаемость среды, определяется следующим образом:

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{E\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{v_e^2 - \nu^2 + i\nu \frac{\gamma_a}{2\pi}}. \quad (11.10)$$

Полный показатель преломления может быть представлен в виде

$$n - i\kappa_a = \sqrt{\varepsilon} = 1 + \frac{Ne^2}{8\pi^2 m\varepsilon_0} \frac{1}{v_e^2 - \nu^2 + i\nu \frac{\gamma_a}{2\pi}} + \text{Члены высшего порядка.} \quad (11.11)$$

Если пренебречь членами высшего порядка, то получим

$$n = 1 + \frac{Ne^2 (v_e^2 - \nu^2)}{8\pi^2 m\varepsilon_0 \left[ (v_e^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \left( \frac{\gamma_a}{2\pi} \right)^2 \right]} \quad (11.12)$$

— обычный показатель преломления,

$$\kappa_a = \frac{Ne^2 \nu (\gamma_a/2\pi)}{8\pi^2 m\varepsilon_0 \left[ (v_e^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \left( \frac{\gamma_a}{2\pi} \right)^2 \right]} \quad (11.13)$$

— поглощательная способность.

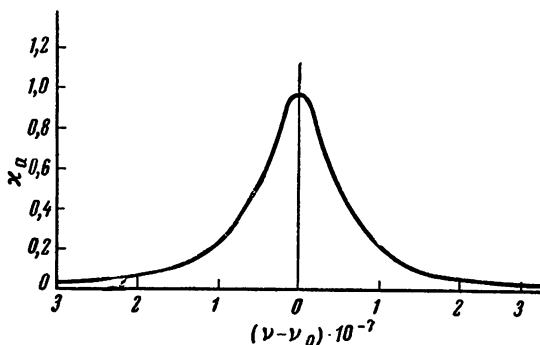
Для многих практических задач эффективная резонансная частота  $\omega_e$  очень близка к собственной частоте  $\omega_0$ . Если рассматривается диапазон частот  $\nu$ , близких к резонансной частоте  $\nu_0$ , то будут иметь место следующие приближенные формулы для показателя преломления  $n$  и для поглощательной способности  $\kappa_a$ :

$$n = 1 + \frac{Ne^2 (\nu_0 - \nu)}{16\pi^2 m\varepsilon_0 \nu \left[ (\nu_0 - \nu)^2 + \left( \frac{\gamma_a}{2\pi} \right)^2 \right]}, \quad (11.14)$$

$$\kappa_a = \frac{Ne^2 (\gamma_a/2\pi)}{32\pi^2 m\varepsilon_0 \nu \left[ (\nu_0 - \nu)^2 + \left( \frac{\gamma_a}{2\pi} \right)^2 \right]}. \quad (11.15)$$

Уравнение (11.14) свидетельствует о том, что величина  $(n - 1)$  меняет знак при  $\nu = \nu_0$ , в то время как из уравнения (11.15) следует, что величина  $\kappa_a$  достигает максимума при  $\nu = \nu_0$ . Изменение поглощательной способности с частотой показано на фиг. 11.2.

Особый интерес для нас представляет соотношение между поглощательной способностью  $\kappa_a$  и спектральным коэффициентом



Фиг. 11.2. Изменение поглощательной способности  $\kappa_a$  с частотой.

том поглощения излучения  $k_\nu$ . Как известно, напряженность электрического поля  $E$  перпендикулярна направлению распространения волн. Пусть направление распространения излучения совпадает с направлением  $x$ . Фазовая скорость волны излучения  $v$  определяется формулой

$$v = \frac{c}{n - i\kappa_a}. \quad (11.16)$$

Тогда  $z$ -компонента электрического поля, движущегося в положительном направлении  $x$ , будет

$$E = E_{z0} \exp \left[ 2\pi i \nu \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (11.17)$$

Спектральная интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля. Следовательно,

$$I = I_0 \exp(-4\pi\kappa_a \nu x/c) = I_0 \exp(-k_\nu \rho x). \quad (11.18)$$

Здесь мы предполагаем, что спектральный коэффициент поглощения очень слабо изменяется в зависимости от  $x$  и уравнение (11.18) по существу соответствует уравнению (3.2). Из уравнения (11.18) непосредственно получаем выражение для коэффициента поглощения излучения в зависимости от частоты  $\nu$  и

других свойств атомов в виде

$$\rho k_{\nu} = \frac{4\pi k_a \nu}{c} = \frac{N e^2 (\gamma_a / 2\pi)}{8\pi m \epsilon_0 c \left[ (\nu_0 - \nu)^2 + \left( \frac{\gamma_a}{4\pi} \right)^2 \right]}. \quad (11.19)$$

Интересно отметить, что более точная формула квантовой теории имеет тот же вид, что и уравнение (11.19). Различие состоит лишь в том, что числовая концентрация  $N$  заменяется на  $Nf$ , где  $f$  — так называемая интенсивность осциллятора, и коэффициент затухания  $\gamma_a$  заменяется величиной, имеющей другой смысл.

Несмотря на то что классическая теория дает качественно правильную формулу для коэффициента поглощения, она имеет много существенных недостатков. Классическая теория не объясняет существования различных собственных частот в атоме и не предсказывает правильную ширину спектральных линий. Чтобы получить правильные результаты для коэффициента поглощения, необходимо использовать квантовую теорию.

Дополнительное решение уравнения (11.3) определяет испускание излучения свободным атомом. Это решение может быть записано в виде

$$z = z_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_a t\right) \cos(\omega'' t), \quad (11.20)$$

где

$$\omega''^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma_a\right)^2. \quad (11.21)$$

Интенсивность излучения экспоненциально уменьшается со временем

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\gamma_a t). \quad (11.22)$$

Если амплитуду осциллятора выразить интегралом Фурье, то из уравнения (11.20) получим

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (11.23)$$

где

$$a(\omega) = \frac{z_0}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\frac{1}{2} \gamma_a}{\left(\frac{1}{2} \gamma_a\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\frac{1}{2} \gamma_a}{\left(\frac{1}{2} \gamma_a\right)^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right],$$

$$b(\omega) = \frac{z_0}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\omega - \omega_0}{\left(\frac{1}{2} \gamma_a\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\omega + \omega_0}{\left(\frac{1}{2} \gamma_a\right)^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Тогда интенсивность излучения  $I$  будет

$$\begin{aligned}
 I &= C [a^2(\omega) + b^2(\omega)] = \\
 &= \frac{C}{4} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\gamma_a\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\gamma_a\right)^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\left[\left(\frac{1}{2}\gamma_a\right)^2 + (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)\right]}{\left[\left(\frac{1}{2}\gamma_a\right)^2 + (\omega + \omega_0)^2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\gamma_a\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2\right]} \right\}, \quad (11.24)
 \end{aligned}$$

где  $C$  — постоянный множитель.

Вблизи резонансной частоты  $\omega_0$  существенным является только первый член правой части уравнения (11.24), так что

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\gamma_a}\right)^2}. \quad (11.25)$$

Если  $\omega - \omega_0 = \pm 1/2\gamma_a$ , то  $I/I_0 = 1/2$ . Таким образом, величина  $\gamma_a$  характеризует полуширину спектральной линии.

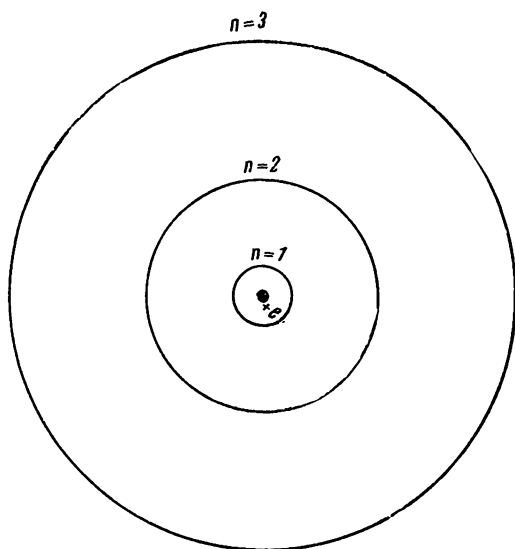
### 3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ [11]

Основой точной теории излучения должна быть квантовая механика. Планк положил начало квантовой теории теплового излучения. Мы не собираемся давать обзор квантовой механики и предполагаем, что читатель уже знаком с ее основными принципами. Здесь мы обсудим только те моменты квантовой теории, которые важны при оценке коэффициентов поглощения и испускания теплового излучения.

Излучение возникает в результате взаимодействия электромагнитного поля с электронами молекул. Поэтому прежде чем постулировать достаточно надежную теорию излучения, мы должны иметь довольно точное описание структуры молекул.

Атом или одноатомная молекула состоит из тяжелого ядра с положительным зарядом, вокруг которого вращаются электроны. Для нейтрального газа избыточный электрический заряд равен нулю. Положительный заряд ядра равен и противоположен по знаку полному отрицательному заряду окружающих его электронов. Молекула состоит из нескольких тяжелых ядер, которые являются ядрами атомов или ионов, образующих молекулы, и электронов, вращающихся вокруг этих ядер. Для атомов или одноатомных молекул кинетическая энергия вращательного движения частиц пренебрежимо мала. С другой

стороны, для молекул, состоящих из нескольких атомов, кинетическая энергия вращательного движения имеет тот же порядок величины, что и энергия поступательного движения. В условиях равновесия энергия, приходящаяся на каждую степень свободы,



Ф и г. 11.3. Орбиты электрона вокруг ядра атома водорода.

равна  $\frac{1}{2}kT$  независимо от того, обусловлена она поступательным движением или вращением. Здесь  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — температура.

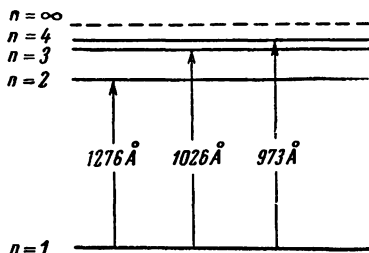
Для молекул относительное движение ядер, т. е. колебательная форма внутренней энергии, также может быть того же порядка величины, что и энергия поступательного движения. Эта колебательная энергия важна при температурах выше  $2000^\circ \text{K}$ .

Определенное количество энергии связано с каждым электроном, вращающимся вокруг ядра. Чтобы яснее представить себе эту энергию, рассмотрим простейший случай: атом водорода Бора, который состоит из малого тяжелого ядра и одного электрона, движущегося по круговой орбите вокруг ядра. Ядро имеет массу, приблизительно равную массе атома водорода, и положительный электрический заряд, равный по величине заряду электрона. Согласно квантовой теории атома, радиусы  $a$  орбит электрона ограничены некоторым числом возможных устойчи-

вых положений, которые определяются формулой

$$a = a_1 \frac{n^2}{Z} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2}. \quad (11.26)$$

Здесь  $a_1$  — боровский радиус;  $Ze$  — положительный электрический заряд ядра и  $n$  — первый квантовый номер, который может быть любым положительным целым числом, т. е. 1, 2, 3... Каждому целому числу  $n$  соответствуют возможная орбита (фиг. 11.3)



Фиг. 11.4. Уровни энергии и наиболее важные линии спектра водорода.

и уровень энергии  $E_n$ , связанный с этой орбитой, который определяется формулой

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{Z^2 e^4 m 4\pi^2}{2n^2 h^2}, \quad (11.27)$$

где  $e$  — абсолютный заряд электрона и  $m$  — его масса. Шкала энергии (фиг. 11.4) нормализована таким образом, что ее нуль соответствует  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, величина  $-E_n$  представляет собой работу, необходимую для перемещения электрона из положения  $n$  в состояние покоя на бесконечности, и эта величина представляет собой энергию ионизации из положения  $n$ . Обычно электрон находится в основном состоянии, которое соответствует значению  $n=1$ , и радиус этого основного состояния, известный как боровский радиус, равен  $a_1 = h^2 / (4\pi^2 m e^2) = 0,528 \text{ \AA}$ . Энергия  $-E_1$  есть энергия ионизации из основного состояния, которая обычно выражается в электронвольтах и называется потенциалом ионизации. Если атом получает большее количество энергии, чем потенциал ионизации из основного состояния, то один из его электронов выйдет из области влияния ядра и атом станет ионом. Обычно электрон находится в основном состоянии. Если же электрон оказывается в ином состоянии, то говорят, что атом находится в возбужденном состоянии. Для перехода из состояния  $E_n$  в другое состояние  $E_m$  поглощаемая или излучаемая энергия определяется формулой

$$E_n - E_m = h\nu, \quad (11.28)$$

где  $h$  — постоянная Планка и  $\nu$  — частота испускаемого фотона.

Атом водорода представляет собой простейший тип атома, у которого ядром является единственная заряженная частица, называемая протоном. У других тяжелых атомов ядро состоит из нескольких протонов, их число равно атомному номеру  $Z$ , который соответствует приблизительно половине атомного веса. Недостающий атомный вес восполняется электрически нейтральными частицами, называемыми нейтронами, имеющими ту же массу, что и протон. Так, например, гелий, атомный номер которого равен 2 и атомный вес равен 4, имеет два протона и два нейтрона в ядре. В изотопах элемента число протонов неизменно для всех изотопов этого элемента, а число нейтронов различно, так что разные изотопы имеют различные массы. У данного элемента обычно имеется  $Z$  электронов, вращающихся вокруг его ядра. Каждый из электронов находится в своем индивидуальном состоянии, которое характеризуется различными квантовыми числами. Никакие два электрона в атоме не могут иметь одинаковых значений всех пяти квантовых чисел. В нормальном состоянии электроны находятся на различных уровнях, соответствующих главному квантовому числу  $n$ . При  $n=1$  оболочка называется  $K$ -оболочкой, на которой могут существовать не более чем два электрона. Электроны в атоме водорода и электроны в атоме гелия обычно находятся на  $K$ -оболочке. При  $n=2$  оболочка называется  $L$ -оболочкой; она может иметь до 8 электронов. Элементы, у которых электроны целиком заполняют оболочку, называются инертными элементами. Если внешняя оболочка имеет меньшее количество электронов, чем нужно для ее заполнения, то элемент является химически активным. Следовательно, водород представляет собой химически активный элемент, в то время как гелий — инертный газ. Если электрон атома не находится на низшем уровне, то атом возбужден. Если один из электронов уходит со своей орбиты на бесконечность, то атом становится однократно заряженным, т. е. ионизованным. Если более чем один электрон покидает атом, то атом становится многократно заряженным.

Когда два или большее число атомов образуют молекулу, то возникает связывающая сила между их ядрами и при образовании молекулы может выделиться некоторая энергия (химическая энергия). С другой стороны, если молекула получает некоторое количество энергии, то атомы в ней могут отделиться друг от друга, так что они не будут образовывать единую частицу. Такой процесс называется диссоциацией. Для течений высокотемпературного газа очень важны процессы диссоциации и рекомбинации. Основная особенность квантовой теории поглощения и испускания излучения атомами состоит в том, что электроны в атоме могут существовать только на определенных энер-



гетических уровнях. Следовательно, испускание энергии происходит только в том случае, когда электрон переходит с высшего уровня на низший в соответствии с уравнением (11.28). Таким образом, набор возможных частот светового излучения является дискретным и характеризует тип атома. Подобным же образом происходит поглощение энергии, когда электрон переходит с низшего уровня на высший также в соответствии с уравнением (11.28). Если передаваемая энергия превосходит энергию ионизации, то электрон может переходить из связанного состояния в свободное. Такой процесс фотоионизации называется связанно-свободным переходом. В случае свободного электрона энергия может поглощаться или испускаться непрерывно, как в случае классической теории. Этот случай называется свободно-свободным переходом.

Поскольку при определении коэффициента поглощения газа мы рассматриваем большое количество атомов и молекул в различных состояниях, то необходимо использовать статистический подход. Другими словами, следует определять вероятность различных переходов. Наиболее успешный путь исследования состоит в применении коэффициентов вероятности Эйнштейна (см. разд. 2 гл. 3). Эти коэффициенты Эйнштейна следующие:

1. Коэффициент спонтанного излучения  $A_{nm}$  есть вероятность того, что атом, находящийся в возбужденном состоянии  $n$ , испускает квант энергии  $h\nu_{nm}$  при отсутствии внешнего поля излучения в направлении распространения волны в элементарном телесном угле  $d\omega$  за интервал времени  $dt$ .

2. Коэффициент поглощений  $B_{mn}$  есть вероятность того, что атом, находящийся в состоянии  $m$  и подвергающийся воздействию излучения частотой  $\nu_{mn}$ , поглощает квант  $h\nu_{mn}$  за время  $dt$ .

3. Коэффициент индуцированного излучения  $B_{nm}$  есть вероятность испускания кванта  $h\nu_{nm}$ , вызванного воздействием внешнего поля излучения частотой  $\nu_{nm}$ .

Следует заметить, что эти коэффициенты Эйнштейна представляют собой атомные константы, которые можно определить экспериментально или теоретически методами квантовой механики. Между этими коэффициентами имеются определенные соотношения. Рассмотрим случай теплового равновесия. При этих условиях относительная заселенность атомами двух уровней  $n$  и  $m$  определяется формулой Больцмана

$$N_n g_m = N_m g_n \exp(-h\nu_{nm}/kT), \quad (11.29)$$

где  $N$  — числовая концентрация атомов;  $g$  — статистический вес уровня и индексы  $n$  и  $m$  относятся соответственно к состояниям

$n$  и  $m$ . В условиях теплового равновесия изменение спектральной интенсивности равно нулю, и из уравнения (3.34) получаем

$$N_n(A_{nm} + B_{nm}I_\nu) = N_m B_{mn} I_\nu. \quad (11.30)$$

Для простоты здесь записано  $\nu$  вместо  $\nu_{nm}$ . Спектральная интенсивность в условиях теплового равновесия есть не что иное, как функция излучения Планка  $B_\nu$ , определяемая уравнением (4.22). Следовательно, уравнение (11.30) принимает вид

$$g_n A_{nm} = g_m \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{mn} \left\{ \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - (g_n B_{nm}/g_m B_{mn})}{\exp(h\nu/kT) - 1} \right\}. \quad (11.31)$$

Поскольку коэффициенты Эйнштейна являются атомными константами и не зависят от температуры, то из уравнения (11.31) мы должны получить следующие соотношения:

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn} = g_n A_{nm} \frac{c^2}{2h\nu_{nm}^3}. \quad (11.32)$$

Если один из коэффициентов Эйнштейна известен, то остальные коэффициенты можно определить из соотношений (11.32). Попытка получить выражение для коэффициента поглощения с помощью квантовой теории приводит к формулам, подобным полученным выше по классической теории. При этом оказывается, что коэффициент поглощения Эйнштейна  $B_{mn}$  можно выразить в зависимости от силы осциллятора  $f_{mn}$ , которая обычно называется  $f$ -значением, т. е.  $f_{mn} = f$ ,

$$B_{mn} = \frac{\pi e^2}{h\nu m c} f_{mn}. \quad (11.33)$$

Для простых атомов  $f$ -значение легко вычислить с помощью квантовой механики. Однако для сложных молекул вычисление  $f$ -значения очень сложно и можно получить только приближенные результаты. Таким образом, одна из текущих задач исследования высокотемпературного газа состоит в экспериментальном определении  $gf$ -значений для газа.

Если  $f$ -значение известно, то коэффициент поглощения по квантовой теории выражается формулой, подобной формуле (11.19), с заменой числовой концентрации  $N$  значением  $Nf$  и коэффициента затухания  $\gamma_a$  новой константой  $\Gamma$ , а именно

$$\rho k_\nu = \frac{Nf e^2 \Gamma}{4\pi m \epsilon_0 c \left[ 4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{1}{2} \Gamma\right)^2 \right]}. \quad (11.34)$$

#### 4. СПЕКТРОСКОПИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ГАЗА

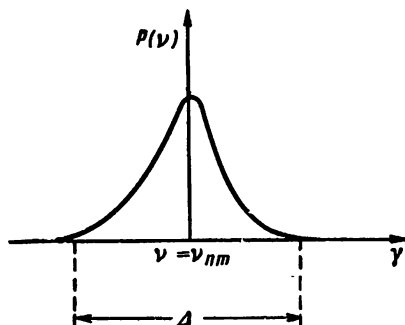
При связанно-связанных переходах каждый тип атома будет испускать свет с различными определенными частотами. Это



Фиг. 11.5. Разрешенная по времени спектрограмма видимого света, испускаемого газом у торцевой стенки ударной трубы.

излучение с характерными длинами волн можно сфотографировать на обычную пленку [6]. Одна из таких фотографий показана на фиг. 11.5. Линии, видимые на снимке, обычно называются спектральными линиями вещества. Спектральные линии зависят от состава смеси газа и температуры. Для данного состава и температуры положение спектральных линий зависит от

атомных констант. Одно из наиболее интересных спектроскопических исследований состоит в определении атомных констант, таких, как  $gf$ -значения, интенсивности линий и т. п., исходя из спектральных диаграмм газа известного состава и температуры.



Фиг. 11.6. Функция формы  $P(\nu)$  спектральной линии при  $\nu = \nu_{nm}$ .

Хотя мы употребляем термин «спектральные линии», на самом деле они не являются линиями в строгом смысле, т. е. линиями без ширины. На самом деле линии имеют форму, как схематически показано на фиг. 11.6. Имеется много физических процессов, которые обуславливают распределение энергии в спектральной линии. Мы не будем обсуждать их здесь [6, 22]. Однако мы можем использовать эмпирически функцию формы  $P(\nu)$ , чтобы учесть ширину линии. Эта функция формы удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} P(\nu) d\nu = 1. \quad (11.35)$$

В уравнении (3.34) мы пренебрегли эффектом уширения линии; если рассмотреть этот эффект с помощью функции формы  $P(\nu)$ , то уравнение (3.34) принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial I_{\nu}}{\partial s} = h\nu P(\nu) [N_n A_{nm} - I_{\nu} (N_m B_{mn} - N_n B_{nm})]. \quad (11.36)$$

Из уравнения (11.36) следует, что коэффициент поглощения  $k_{\nu}$  равен

$$\rho k_{\nu} = N_m B_{mn} h\nu P(\nu). \quad (11.37)$$

Таким образом, спектральный коэффициент поглощения  $k_{\nu}$  зависит от функции формы, т. е. от уширения линии. Следова-

тельно, изучение параметров уширения линии очень важно при изучении радиационных свойств среды.

Эмпирически функция формы  $P(\nu)$  может быть выражена либо функцией Гаусса

$$P(\nu) = \exp[-k_1(\nu - \nu_0)^2], \quad (11.38)$$

либо функцией Агнеси

$$P(\nu) = \frac{k_1}{k_1 + (\nu - \nu_0)^2}, \quad (11.39)$$

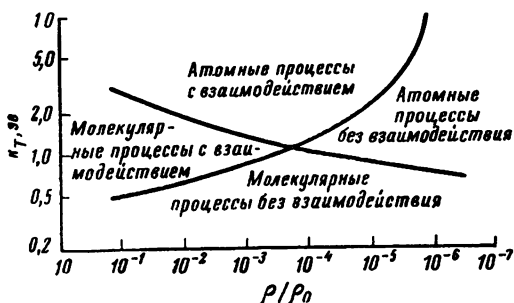
где  $k_1$  — константа.

Для подробного ознакомления с проблемами, связанными с уширением линии, следовало бы обратиться к специальным исследованиям [6, 22].

## 5. КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ГАЗОВ

Прежде чем заняться вычислениями, связанными с какой-либо из задач радиационной газодинамики, мы должны знать коэффициент поглощения газа как функцию частоты  $\nu$ , температуры  $T$  и плотности  $\rho$  газа. Наиболее важной средой, представляющей практический интерес, является воздух. Для определения коэффициента поглощения воздуха было проведено большое количество исследований. Поглощение излучения в земной атмосфере подробно исследовалось метеорологами, поскольку тепловое излучение выполняет роль одного из наиболее важных факторов в процессах передачи тепла в атмосфере. Важность изменения поглощения или испускания излучения с частотой осознавалась с давних пор. В метеорологии появилась необходимость отдельного исследования коротковолнового излучения от горячего тела, подобного Солнцу, и длинноволнового излучения от холодных тел, подобных Земле и газам, образующим атмосферу [8]. Диапазон температур воздуха, рассматриваемый в метеорологических целях, довольно мал, и поглощение воздуха при низких температурах, скажем ниже  $1000^\circ \text{K}$ , хорошо исследовано. Однако в радиационной газодинамике, для которой основной интерес представляют течения газа с очень высокими температурами, возникающие при возвращении космических аппаратов на Землю, в задачах излучения ядерного взрыва и т. п., рассматриваемый диапазон температур газа очень велик и простирается от температуры атмосферного воздуха до высоких температур в несколько миллионов градусов. В таком большом диапазоне температур имеют место процессы химического реагирования и ионизации и состав воздуха заметно изменяется. Вследствие этого задача определения поглощения в воздухе становится очень сложной. Важные процессы, которые определяют

коэффициент поглощения воздуха, меняются с температурой. При низких температурах воздух состоит в основном из молекул азота и кислорода. Следовательно, при этих температурах коэффициент поглощения воздуха определяется молекулярными переходами. При очень высоких температурах молекулы диссоциируют на атомы и возможна ионизация. Следовательно, при этих температурах поглощение излучения в основном определяется процессами перехода в атомах и ионах и свободными



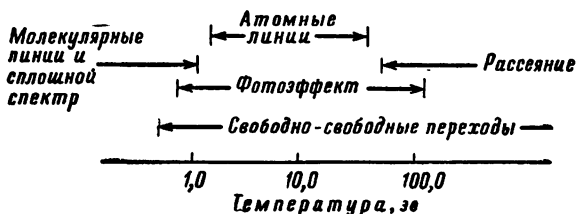
Фиг. 11.7. Важнейшие радиационные процессы в различных по температуре и плотности областях (фиг. 1 из работы [2]).

электронами. Естественно разделить диапазон температур на несколько областей и в каждой из них рассмотреть только наиболее существенные процессы. Такое деление носит чисто эмпирический характер. Например, Мэйджи и Гиршфельдер [16] разделили диапазон температур на четыре области, в то время как Армстронг и др. [2] — на две области.

Другое важное обстоятельство состоит в том, что при высокой температуре и плотности газа, особенно в случае сильно ионизованного газа, поглощение может обуславливаться возбуждением коллективного вида, т. е. с участием многих частиц одновременно. До сих пор нет полного теоретического расчета коэффициентов поглощения воздуха с учетом этих взаимодействий. Однако в большинстве практически важных в настоящее время случаев коллективные взаимодействия несущественны и поглощение излучения в газе обусловлено в основном взаимодействием индивидуальных частиц с фотонами. Таким образом, большая часть расчетов (см., например, [2, 12]) основана на рассмотрении элементарного взаимодействия изолированной газовой частицы с фотонами. На фиг. 11.7 показаны результаты эмпирического деления на области по температуре и плотности, в которых существенны либо атомные, либо молекулярные процессы, либо коллективные взаимодействия частиц. На фиг. 11.8

указаны основные процессы излучения в различных температурных диапазонах.

Если предположить, что взаимодействие между частицами несущественно, то из уравнений (11.19) или (11.34) следует, что коэффициент поглощения пропорционален числовой концентрации  $N_m$ . Остальные факторы, помимо  $N_m$ , влияющие на величину коэффициента поглощения, можно назвать сечением поглощения фотона с частотой  $\nu$  [см. уравнение (11.37)]. Для воздуха частицы следовало бы различать не только по состояниям



Фиг. 11.8. Важнейшие радиационные процессы в различных температурных диапазонах (фиг. 2 из работы [2]).

атома  $m$ , но также и по типу частиц, таких, как  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $N$ ,  $O$ , ионы, электроны и т. д. Если обозначить тип частиц индексом  $s$ , то сечение поглощения будет зависеть от типа  $s$  так же, как и от начального состояния  $m$  и конечного состояния  $n$ . Полный коэффициент поглощения воздуха определяется суммой, обусловленной поглощением всех частиц. Символически коэффициент поглощения воздуха можно написать в следующем виде:

$$\rho k_\nu = \sum_{s, m, n} N_{sm} \sigma_{smn}(\nu), \quad (11.40)$$

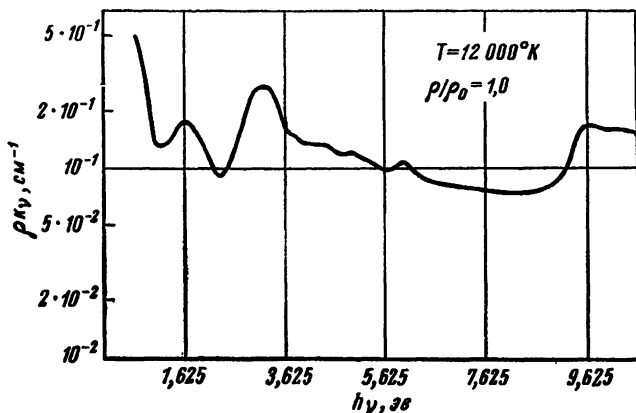
где  $N_{sm}$  — числовая концентрация частиц типа  $s$  в состоянии  $m$  и  $\sigma_{smn}$  — сечение перехода частицы типа  $s$  из начального состояния  $m$  к конечному состоянию  $n$ . Суммирование охватывает все типы частиц в воздухе и все возможные их начальные и конечные состояния.

Концентрация  $N_{sm}$  может быть выражена в зависимости от парциальной концентрации  $N_s$  частиц типа  $s$  или полной концентрации воздуха  $N$  следующим образом:

$$N_{sm} = N_s P_{sm} = N P_s P_{sm}, \quad (11.41)$$

где  $P_{sm}$  — вероятность того, что частица типа  $s$  находится в состоянии  $m$ , и  $P_s$  — вероятность того, что частица воздуха, выбранная наугад, окажется частицей типа  $s$ .

Для данной температуры и плотности мы можем вычислить вероятности  $P_s$  и  $P_{sm}$  по методам статистической механики, не рассматривая поле излучения. Сечение поглощения  $\sigma_{smn}$  следует вычислять по квантовой теории излучения, не прибегая к понятию числовой концентрации. Такие расчеты довольно сложны, и мы не будем их выполнять. Для подробного ознакомления с расчетом можно рекомендовать работы [2, 12]. Было бы интересно



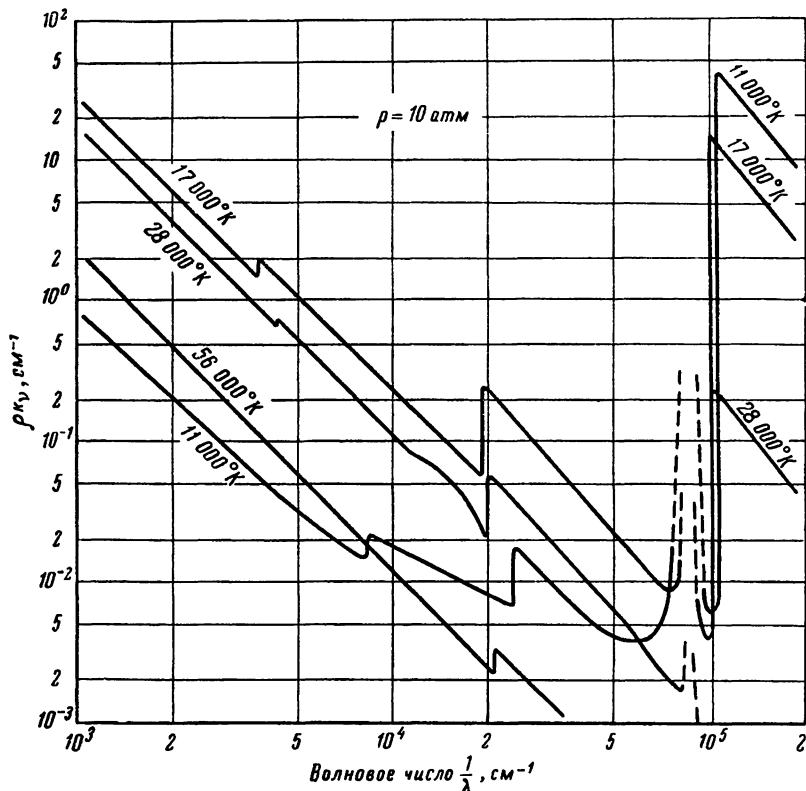
Фиг. 11.9. Коэффициент поглощения воздуха в зависимости от энергии фотонов (фиг. 4 из работы [2]).

выявить наиболее существенные процессы в различных температурных диапазонах без рассмотрения зависимости этих эффектов от плотности (фиг. 11.8). В настоящее время мы располагаем надежными экспериментальными данными для температур ниже одного электронвольта (эв) и надежными теоретическими расчетами для температур выше 500 эв. Для промежуточного диапазона температур нужны дополнительные исследования. Поскольку в этом промежуточном температурном диапазоне теоретические расчеты чрезвычайно трудны, то особый интерес приобретают экспериментальные исследования по определению коэффициента поглощения. На фиг. 11.9 представлен типичный случай зависимости величины коэффициента поглощения воздуха от энергии фотона, т. е. от его частоты  $\nu$ .

При очень высоких температурах самым важным газом в радиационной газодинамике становится водород. Действительно, на очень больших высотах атмосфера Земли состоит главным образом из водорода и в процессах ядерного синтеза водород является основной средой. Понятие газообразный водород включает смесь  $\text{H}_2$ ,  $\text{H}$ ,  $\text{H}^+$ ,  $\text{H}^-$ , электронов и различных квантовых со-



стояний атомов Н. Коэффициент поглощения и тепловые свойства водорода были вычислены в работе [13] для диапазона давлений от 1 до 1000 атм и диапазона температур от 1700 до 11 000° К.



Фиг. 11.10. Линейный коэффициент поглощения газобразного водорода как функция волнового числа при давлении 10 атм (фиг. 4 из работы [13]).

11 000° К. Линейный коэффициент поглощения газобразного водорода табулирован для 33 значений волнового числа от 1000 до 400 000  $\text{см}^{-1}$ . Некоторые типичные зависимости линейного коэффициента поглощения газобразного водорода от волнового числа показаны на фиг. 11.10 для давления 10 атм.

## 6. КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Несмотря на то что явлением рассеяния можно пренебречь при предварительном изучении эффектов теплового излучения во многих задачах радиационной газодинамики, рассеяние

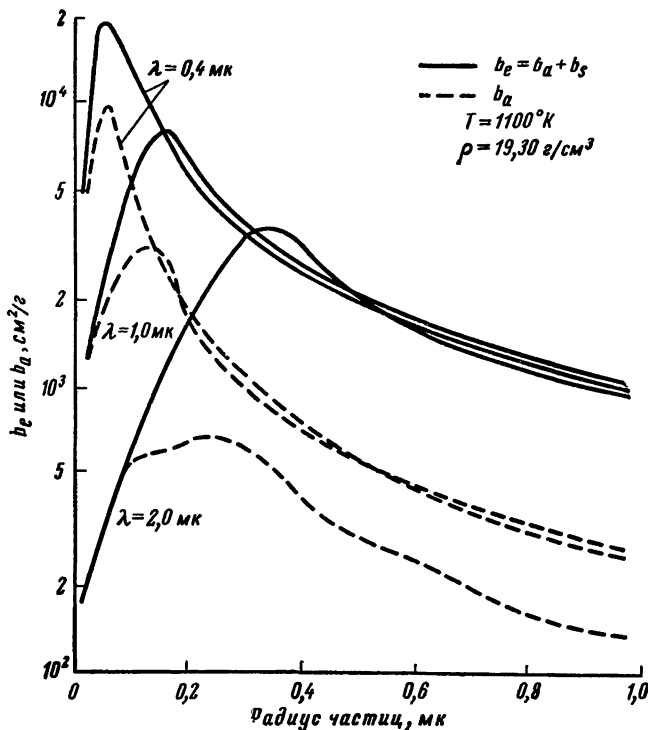
является одним из самых важных явлений в процессах излучения. Во многих физических явлениях, включающих процессы излучения, таких, например, как явления физической метеорологии и астрофизические явления, рассеяние должно рассматриваться во всех подробностях. Однако здесь мы не будем обсуждать эти случаи и предлагаем вниманию читателя специальные исследования по этим вопросам [1, 4, 8]. В этом разделе мы рассмотрим влияние рассеяния в задачах течений радиационной газодинамики.

Прежде всего установим некоторую терминологию, касающуюся коэффициента рассеяния. В гл. 3 мы использовали коэффициент поглощения  $k_v$ , представляющий собой сумму истинного коэффициента поглощения  $k_{v,t}$  и коэффициента рассеяния  $k_{v,s}$  [см. уравнение (3.5)]. В некоторых работах [13] коэффициент поглощения  $k_v$  называется коэффициентом ослабления, а истинный коэффициент поглощения  $k_{v,t}$  — просто коэффициентом поглощения. Название коэффициента рассеяния  $k_{v,s}$  там сохранено. Мы подчеркнули эти различия в названиях с тем, чтобы не возникло какой-либо путаницы в терминах. В этом разделе мы рассмотрим только коэффициент рассеяния  $k_{v,s}$ .

Рассеяние имеет место, когда размеры оптических препятствий имеют тот же порядок, что и длина волны излучения, и может быть вызвано как молекулами газа, так и малыми жидкими или твердыми частицами, содержащимися в газе. До сих пор мы рассматривали случаи, когда содержание посторонних частиц в газовой среде пренебрежимо мало и когда рассеяние молекулами газа рассматривается как часть истинного коэффициента поглощения (см. фиг. 11.8). При этом мы можем пренебречь явлениями рассеяния в нашем исследовании задач течений излучающих газов. Если посторонними частицами в газобразной среде пренебречь нельзя, то следует рассматривать как истинный коэффициент поглощения, так и коэффициент рассеяния, обусловленный этими посторонними частицами.

Одним из наиболее важных случаев, когда рассеянием пренебрегать нельзя, является процесс излучения в атмосфере. Из метеорологических исследований [8] хорошо известна важная роль рассеяния излучения Солнца каплями воды и частицами пыли в атмосфере. Например, при ясном небе и при высоком положении Солнца основная часть коротковолнового излучения, около 85%, поступает непосредственно от Солнца, а остальная часть обусловлена рассеянием. С другой стороны, когда Солнце находится на высоте  $10^\circ$  над горизонтом и при наличии тумана и дыма в воздухе, доля коротковолнового излучения, поступающего непосредственно от Солнца, может быть меньше, чем рассеянное излучение.

В разд. 5 мы рассматривали только сухой воздух. В атмосфере Земли пары воды имеют решающее значение при определении как истинного коэффициента поглощения атмосферы, так и коэффициента рассеяния воздуха. Пары воды имеют широкую



Фиг. 11.11. Влияние радиуса сферических вольфрамовых частиц на параметры ослабления и поглощения (фиг. 4 из работы [14]).

полосу поглощения вблизи инфракрасной области, которая проявляется при любом излучении Солнца в нижней части атмосферы. Таким образом, поглощение парами воды солнечного излучения больше, чем поглощение всеми другими атмосферными газами. Из-за капель воды и частиц пыли, размеры которых велики по сравнению с длиной волны излучения, возникает диффузное отражение. Это сильно влияет на рассеяние. Диффузное отражение от верхней части облаков является наибольшим источником потерь полной энергии излучения, поступающей в земную атмосферу.

Явление рассеяния имеет также инженерные приложения. Мельчайшие твердые частицы могут использоваться как «присадка» для управления процессом переноса излучения в газовых ядерных ракетных двигателях. В газовой ядерной ракете энергия, выделившаяся в результате ядерной реакции, передается путем теплового излучения в окружающее рабочее тело, которым обычно является водород. Рабочее тело должно быть достаточно непрозрачным, чтобы поглотить энергию в камере сгорания и предотвратить повреждение стенок, которое может быть вызвано чрезмерно большим тепловым потоком излучения. Однако водород при температуре ниже  $6000^\circ \text{K}$  и высоком давлении порядка  $1000 \text{ атм}$  прозрачен для теплового излучения. Следовательно, желательно увеличить непрозрачность водорода, вводя в него малые частицы твердого или жидкого вещества с высокой температурой плавления и кипения. В работах [14, 17] осуществлены как теоретические, так и экспериментальные исследования поглотительных и рассеивающих характеристик малых частиц в водороде. Вещество «присадки» должно обладать следующими свойствами: не реагировать с высокотемпературным водородом, иметь высокую температуру плавления или кипения и высокую непрозрачность на единицу массы. Было найдено, что этим требованиям удовлетворяют вольфрам, рений и тантал. На фиг. 11.11 показаны типичные кривые изменения параметров ослабления и поглощения излучения сферическими вольфрамовыми частицами. Обозначения на фигуре имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} b_a &= \sigma_a / \rho V \text{ — параметр поглощения,} \\ b_e &= \sigma_s / \rho V \text{ — параметр ослабления,} \\ b_s &= b_e - b_a \text{ — параметр рассеяния.} \end{aligned} \quad (11.42)$$

Здесь  $\rho$  — массовая плотность и  $V$  — объем сферической частицы радиуса  $R$ ;  $\sigma_a$  — сечение поглощения и  $\sigma_s$  — сечение экстинкции.

## 7. СРЕДНИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ ВОЗДУХА И ВОДОРОДА ПО ПЛАНКУ И РОССЕЛАНДУ

Из фиг. 11.9 следует, что коэффициент поглощения  $k_\nu$  является сложной функцией частоты  $\nu$ . Для точных вычислений следовало бы использовать именно такую функциональную форму зависимости коэффициента поглощения  $k_\nu$  от частоты  $\nu$  при оценке радиационных интегралов. Однако во многих задачах течений излучающего газа, таких, как рассматриваемые в предыдущих главах, оказывается возможным решить основные урав-

нения радиационной газодинамики лишь приближенно. Следовательно, в основных уравнениях достаточно использовать некоторое среднее по всему диапазону частот значение коэффициента поглощения. Особый интерес представляют следующие два определения среднего коэффициента поглощения. Это, во-первых, средний коэффициент поглощения по Планку, который очень полезен в случае оптически толстой среды и определяется уравнением (5.18), а именно

$$K_P = \frac{\int_0^{\infty} k'_v B_v dv}{\int_0^{\infty} B_v dv} = \frac{\pi \int_0^{\infty} k'_v B_v dv}{\sigma T^4}, \quad (11.43)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана, отнесенная к потоку излучения, определяемому уравнением (4.28). Вторым является средний коэффициент поглощения по Росселанду, который очень полезен в случае оптически толстой среды и определяется уравнением (5.18), а именно

$$K_R = \left( \int_0^{\infty} \frac{\partial B_v}{\partial T} dv \right) \left/ \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{k'_v} \frac{\partial B_v}{\partial T} dv \right) \right. . \quad (11.44)$$

Здесь  $B_v$  — функция излучения Планка, определяемая уравнением (4.22), и  $k'_v$  — приведенный коэффициент поглощения, определяемый уравнением (4.50).

Если известна точная зависимость коэффициента поглощения от частоты  $\nu$ , то можно непосредственно вычислить как среднее значение  $K_P$  по Планку, так и среднее значение  $K_R$  по Росселанду. На фиг. 11.12 и 11.13 приведены эти средние значения в функции температуры и плотности воздуха [2]. На основании данных этих фигур можно сделать следующие общие выводы:

1. Хотя общая форма зависимостей этих двух средних коэффициентов поглощения от температуры и плотности неодинакова, имеется некоторое количественное сходство между этими двумя средними значениями.

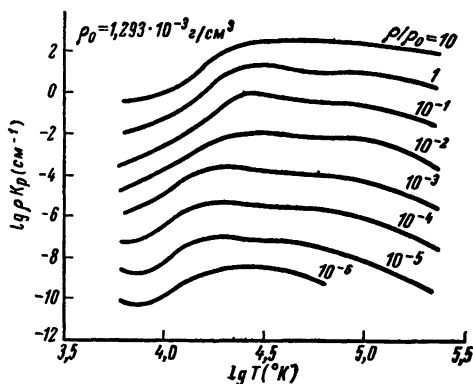
2. Оба средних коэффициента поглощения возрастают приблизительно линейно с плотностью газа.

3. При низких температурах оба средних коэффициента поглощения увеличиваются с температурой. В промежуточном температурном диапазоне они почти не зависят от температуры и при высоких температурах коэффициенты уменьшаются с увеличением температуры.

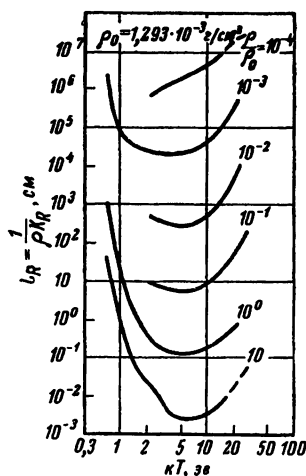
Для инженерных задач рекомендуется использовать некоторые простые формулы для средних значений коэффициента поглощения среды. Подобно тому как это делается для коэффициента вязкости, предполагается, что при исследовании практических задач подходящим будет степенной закон для среднего значения коэффициента поглощения или для среднего значения длины свободного пробега излучения, который обратно пропорционален среднему массовому коэффициенту поглощения. В литературе использовался следующий степенной закон:

$$\frac{L_R}{L_{R0}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{m_1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{m_2}, \quad (11.45)$$

где  $L_R = 1/(\rho K_R)$  или  $1/(\rho K_R)$  — соответствующее среднее значение средней длины свободного пробега излучения. Индекс 0 относится к значениям в некотором начальном состоянии и  $m_1$  и  $m_2$  — действительные числа, положительные или отрицательные,



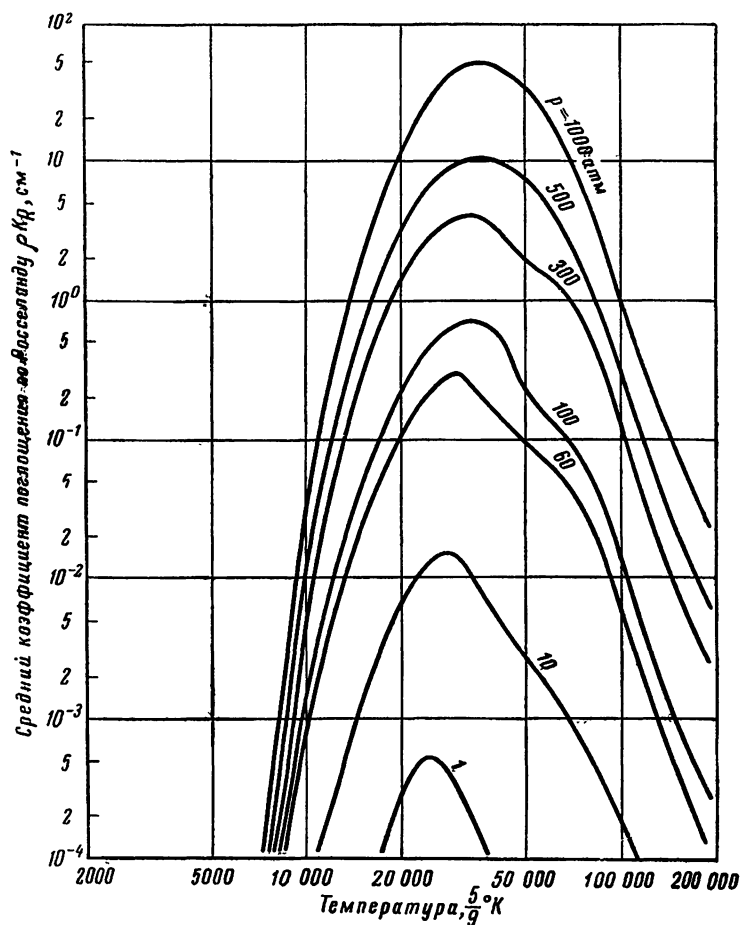
Фиг. 11.12. Средний коэффициент поглощения по Планку для воздуха (фиг. 11 из работы [2]).



Фиг. 11.13. Средняя длина свободного пробега излучения воздуха по Росселанду  $L_R = 1/(\rho K_R)$  (фиг. 12 из работы [2]).

не обязательно целые, выбранные таким образом, чтобы обеспечить наилучшее совпадение с данными по прозрачности (фиг. 11.12 и 11.13). Строго говоря, мы должны бы иметь различные значения показателей  $m_1$  и  $m_2$  для среднего значения по Планку и среднего значения по Росселанду. Из фиг. 11.12 и 11.13

с очевидностью следует, что формула (11.45) непригодна по всем диапазонам температур. Следовательно, значения  $m_1$  и  $m_2$



Фиг. 11.14. Средний коэффициент поглощения водорода по Росселанду (фиг. 6 из работы [13]).

меняются с температурой. Однако для данного температурного диапазона мы используем совокупность двух постоянных значений  $m_1$  и  $m_2$  при исследовании задач течений излучающего газа. Например, для воздуха в диапазоне температур от 7000° до 12 000° К могут быть использованы следующие значения  $m_1$

и  $m_2$  для среднего значения по Планку:

$$m_1 = 4,4, \quad m_2 = 1,0$$

при  $\rho_0 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ,  $T_0 = 10\,000^\circ \text{ К}$  и  $L_{R0} = 50 \text{ см}$ . В большинстве случаев может быть использовано значение  $m_2 = 1$  для средних значений как по Планку, так и по Росселанду, в то время как значение  $m_1$  заметно меняется с температурой. Для получения хорошего приближения в окрестности температуры  $20\,000^\circ \text{ К}$  значение  $m_1$  должно быть около 2,5. Значение  $m_1$  уменьшается с увеличением температуры. При очень высоких температурах  $m_1$  может принять отрицательное значение.

В задачах с широким диапазоном температур следует использовать лучшие приближения для коэффициента поглощения, чем приближение, определяемое уравнением (11.45). Мы уже рассматривали такие приближения в разд. 5 гл. 7. Например, уравнения (7.50) и (7.52) дают лучшие приближения.

На фиг. 11.14 приведены значения среднего коэффициента поглощения по Росселанду для водорода. Общий характер изменения этого среднего коэффициента поглощения в зависимости от температуры и плотности таков же, как и для воздуха. Следовательно, изменение среднего значения средней длины свободного пробега излучения с температурой и плотностью для водорода можно описать формулой, подобной уравнению (11.45), если выбрать подходящие значения величин  $m_1$ ,  $L_{R0}$  и т. п.

## 8. НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРОЗРАЧНОСТИ ГАЗОВ

Экспериментальное исследование переноса излучения в газах проводилось физиками в течение длительного времени, и в литературе опубликовано значительное количество данных по этому вопросу. Однако большая часть данных лабораторных исследований относится к диапазону низких температур, скажем ниже  $10\,000^\circ \text{ К}$  или 1 эв. При этом в качестве источника света используется электрическая дуга или пламя. Надежные экспериментальные данные о свойствах переноса излучения в газах при температурах, больших  $10\,000^\circ \text{ К}$ , еще недостаточны. Однако использование ударных труб в качестве источника излучения значительно обогатило имеющуюся информацию о радиационных свойствах газа при высоких температурах. Недавно [22] были получены ценные данные, касающиеся вероятности переходов и коэффициента уширения линий. Например, на фиг. 11.5 приведена разрешенная по времени спектрограмма видимого света, испускаемого вблизи задней торцевой стенки рабочей части



ударной трубы. Для пробного газа, содержащего 0,3% метана ( $\text{CH}_4$ ) в 0,2%-ной атмосфере неона, между оранжево-красными линиями неона (вверху) и  $H_\beta$ -линией серии Бальмера при 4861 Å (внизу) видны линии нейтрального углерода. Время возрастает слева направо, и экспозиция пленки начинается через 120 мксек после установления излучения за отраженной ударной волной. Можно заметить явление Штарка уширения линии  $H_\beta$ , обусловленное ионизацией и свободными заряженными частицами в этом газе. Температура газа здесь равна приблизительно одному электронвольту (11 606° K), а число Маха падающей ударной волны составляет  $7,4 \pm 0,1$ . Последующие отражения ударной волны между задней торцовой стенкой и поверхностью раздела между разгоняющим газом и разгоняемым газом сопровождаются возрастанием температуры, степени ионизации и интенсивности линий. Свечение затухает при смешении с более холодным расширяющимся разгоняющим газом. Соответствующим образом калиброванные подобные спектрограммы в сочетании с другими данными позволяют измерить  $f$ -значения или интенсивность линий для многих типов атомов и молекул. Также можно получить данные для условий, которые подобны условиям течения в реактивных двигателях и плазменных струях, а также условиям обтекания аппаратов, входящих в атмосферу.

В большинстве спектроскопических исследований температура горячего газа может быть определена достаточно точно, если газ является оптически тонким и если достаточно точно установлена вероятность перехода. Такое определение температуры без возмущения среды очень полезно для диагностических исследований плазмы в физике и астрофизике. Однако если точное значение вероятности перехода неизвестно, то при определении температуры возможны серьезные ошибки. Другой метод, известный как метод «обратной температуры», используется во многих экспериментальных работах для определения температуры. Этот метод безотносителен к предварительным сведениям, касающимся вероятности перехода или оптической толщины газа. Как обычный спектроскопический метод исследования в ударных трубах, так и метод обратной температуры были разработаны в Институте динамики жидкостей и прикладной математики при Университете шт. Мэриленд Уилкерсоном и Чертисом. Мы не будем обсуждать эти результаты, которые в большей степени касаются физики излучения, чем радиационной газодинамики. Для читателей, интересующихся техникой и результатами этих экспериментов, можно рекомендовать работу [22].

## 9. НЕРАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Во всех предыдущих главах рассматривался только случай локального термодинамического равновесия, поскольку этот случай является хорошей аппроксимацией для многих практических задач, таких, как задача стационарного течения, в которых может быть определена местная температура. Кроме того, в этом случае может быть выполнен достаточно надежный теоретический анализ. Вследствие ограниченности наших знаний в области радиационной газодинамики целесообразно было подробно исследовать случай локального термодинамического равновесия с тем, чтобы глубже понять влияние теплового излучения на течение газа.

В настоящее время в радиационной газодинамике мало исследовано поле неравновесного излучения. Следует ожидать, что в ближайшем будущем случай неравновесного излучения будет исследован достаточно полно. В работе [7] выполнено некоторое предварительное исследование поля неравновесного излучения, в котором диапазон частот разделен на три области, и для каждой из них найдена функция источника. Полученные уравнения были использованы для предсказания эффектов в ударной трубе. Поскольку окончательные результаты оказались неправильными, то мы не будем обсуждать здесь это исследование.

Другой путь исследования поля неравновесного излучения состоит в применении метода подобия, используемого при изучении неравновесных течений в химически реагирующей среде. Случай локального термодинамического равновесия подобен случаю равновесного течения в диссоциирующем газе, т. е. случаю, когда степень диссоциации соответствует местной кинетической температуре газа. В неравновесном течении можно определить температуру диссоциации, или колебательную температуру, которая отличается от кинетической температуры и определяет степень энергии диссоциации, или колебательной энергии. Таким же образом, в случае неравновесного теплового излучения можно определить температуру излучения  $T_R$ , которая отличается от местной кинетической температуры [10] и которая определяет значение коэффициента поглощения  $k'_\nu$  и функцию излучения Планка  $B_\nu$ . С увеличением времени температура излучения стремится в пределе к местной кинетической температуре. Уравнение, связывающее температуру излучения  $T_R$  и местную кинетическую температуру  $T$ , следовало бы вывести, рассматривая процесс радиационных взаимодействий, подобно тому, как выводится соответствующее уравнение химической реакции. Возможно, что в этом исследовании потребуются ввести некоторое время релаксации процесса переноса излучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aller L. H., *Astrophysics, The Atmospheres of the Sun and Stars*, 2-nd ed., The Roland Press Co., N. Y., 1963.
2. Armstrong B. H., Sokoloff J., Nicholls R. W., Holland D. H., Meyerott R. E., *Radiative Properties of High Temperature Air*, *Journ. Quant. Spect. Rad. Transf.*, Vol. 1, Pergamon Press, 1961, p. 143.
3. Борн М., *Atomic Physics*, Hafner Publishing Co., 1946; имеется русский перевод: Борн М., *Атомная физика*, изд-во «Мир», М., 1965, 2-е изд., 1967.
4. Chandrasekhar S., *Radiative Transfer*, Dover Publ., N. Y., 1960; имеется русский перевод: Чандрасекар С., *Перенос лучистой энергии*, ИЛ, М., 1953.
5. Chapin C., Jr., *Physics of Hydrogen Radiation*, Report A and ES 62-12, School of Aero. and Eng. Sci, Purdue Univ., 1962.
6. Condon E. U., Shortley G. H., *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, 1953.
7. Farrari G., Clarke J. H., *Photoionization Upstream of a Strong Shock Wave*, Report CM-1020, Div. of Eng., Brown Univ., 1963.
8. Godske C. L., Bergeron T., Berknes J., Bundgaard R. C., *Dynamic Meteorology and Weather Forecasting*, American Meteorological Soc. and Carnegie Institution of Washington, 1957.
9. Goulard R., *Fundamental Equations of Radiation Gasdynamics*, Report A and ES 62-4, School of Aero. and Eng. Sci., Purdue Univ., 1962.
10. Hanson C. F., *A Radiation Model for Non-Equilibrium Molecular Gases*, *AIAA Journ.*, 2, 4, 611 (1964); имеется русский перевод: Хансон К., *Модель излучения молекулярных газов в неравновесном состоянии*, *Ракетная техника и космонавтика*, № 4, стр. 27, 1964.
11. Heitler W., *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford Univ. Press, 3-rd ed., 1954; имеется русский перевод: Гайтлер В., *Квантовая теория излучения*, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1940 (1-е издание), ИЛ, М., 1956 (2-е издание).
12. Kivel B., Bailey K., *Tables of Radiation from High Temperature Air*, Res. Report 21, AVCO Res. Lab., 1957.
13. Krascella N. L., *Tables of the Composition, Opacity and Thermodynamics Properties of Hydrogen at High Temperature*, NASA SP-3005, 1963.
14. Krascella N. L., *Theoretical Investigation of the Absorption and Scattering Characteristics of Small Particles*, United Aircraft Corp. Res. Lab. Report C-910092-1, Sept. 1964
15. Lighthill M. J., *Dynamics of a Dissociating Gas*, p. 2 *Quasiequilibrium Transfer Theory*, *Journ. Fluid Mech.*, 8, 2, 161 (1960); имеется русский перевод: Лайтхилл М., *Динамика диссоциирующего газа*, ч. 2, *Механика*, вып. 2, 1962.
16. Magee J. L., Hirschfelder J. O., *Thermal Radiation Phenomena*, Chap. 3 of Report on Blast Wave, Report LA-2000, Los Alamos Sci. Lab., 1947.
17. Marteney P. J., *Experimental Investigation of the Opacity of Small Particles*, United Aircraft Corp. Res. Lab. Report C-910092-2, Sept. 1964.

18. Mensel D. H., Selected Papers on Physical Processes in Ionized Plasma, Dover Publications Co., 1962.
19. Pai S. I., Thermal Radiation Effects in Hypersonic Flow Field, Proc. on Non-Linear Engineering Problems, Academic Press, 1964, p. 163.
20. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publication, Inc., N. Y., 1959; имеется русский перевод с немецкого: Планк М., Теория теплового излучения, Гостехтеоретиздат, 1935.
21. Hippel A. R., Dielectrics and Waves, Wiley, N. Y., 1954.
22. Wilkerson T. D., The Use of the Shock Tube as a Spectroscopic Source with the Application to the Measurement of the  $gf$ -value for Lines of Neutral and Singly Ionized Chromium, Ph. D. Thesis, Univ. of Michigan, 1961; Techn. Report AFOSR 1151, Univ. of Michigan, 1961.

## Основные обозначения

Поскольку радиационная газодинамика представляет собой сочетание переноса излучения с газодинамикой, то многие широко принятые в газодинамике обозначения могут иметь совершенно иной смысл в книгах по переносу излучения. Например, буква  $a$  обычно употребляется в газодинамике для обозначения скорости звука, в задачах переноса излучения — для обозначения постоянной Стефана — Больцмана. Мы старались по возможности сохранить установившиеся обозначения как в газодинамике, так и в переносе излучения. Чтобы избежать недоразумений, мы снабжали в некоторых случаях обозначения соответствующим индексом. Например, мы используем букву  $a$  для обозначения скорости звука и  $a_R$  — для постоянной Стефана — Больцмана. Ниже приведены основные обозначения, встречающиеся более чем в одном разделе. Менее важные обозначения, которые встречаются только в одном разделе, здесь не приведены, но пояснены в тексте.

$a$  — скорость звука;

$A$  — площадь;

$a_R = 7,67 \cdot 10^{-15}$  эрг/см<sup>3</sup>·град<sup>4</sup> — постоянная Стефана — Больцмана (4.31)<sup>1)</sup> для объемной плотности энергии излучения;

$a_\nu$  — полусферический коэффициент поглощения (6.24);

$a_{\theta, \nu}$  — поглощательная способность по направлению (6.15);

$A_{nm}$  — коэффициент спонтанного излучения Эйнштейна (3.25);

$b$  — параметр столкновения (10.23);

$B(T)$  (или  $B$ ) =  $\frac{\sigma}{\pi} T^4$  — интегральная функция излучения Планка (4.27);

$\mathbf{B}(B_x, B_y, B_z) = \mu_e \mathbf{H}$  — магнитная индукция;

$B_\nu$  — функция излучения Планка (4.22);

<sup>1)</sup> В скобках указано уравнение, определяющее данную величину. — Прим. ред.

- $B_{mn}$  — коэффициент поглощения Эйнштейна (3.6);  
 $B_{nm}$  — коэффициент индуцированного излучения Эйнштейна (3.25);  
 $c$  — скорость света;  
 $c_a (c_i \text{ и т. д.})$  — скорость хаотического движения (10.36);  
 $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  
 $C_p^*$  — эффективная удельная теплоемкость при постоянном давлении (8.9);  
 $C_{pR}$  — эффективная удельная теплоемкость при постоянном давлении с учетом излучения (9.60а);  
 $C_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме;  
 $D_R$  — коэффициент диффузии излучения по Росселанду (5.20);  
 $e$  — абсолютный электрический заряд электрона;  
 $E (E_a, E_e \text{ и т. п.})$  — энергия;  
 $E$  — напряженность электрического поля;  
 $\bar{e}_m = U_m + \frac{1}{2} q^2 + \varphi + E_R/\rho$  — полная энергия газа на единицу массы;  
 $E_R$  — плотность энергии излучения (2.14);  
 $e_w$  — коэффициент излучения стенки;  
 $f(\eta)$  (или  $\tilde{f}$ ) — функция тока в автомодельном решении (9.75в);  
 $\tilde{f}_{mn}$  (или  $\tilde{f}$ ) — сила осциллятора (11.33);  
 $\mathbf{F}(F)$  — вектор объемной силы;  
 $\mathbf{F}_e$  — вектор электромагнитной силы;  
 $\mathbf{F}_g$  — неэлектромагнитная сила;  
 $\mathbf{F}_R (F_{Ri})$  — объемная сила излучения (2.21);  
 $F_R$  — функция распределения фотонов;  
 $F_s (F_r \text{ или } F)$  — молекулярная функция распределения (10.1);  
 $\mathbf{g}$  (или  $g$ ) — ускорение силы тяжести;  
 $g_n$  (или  $g$ ) — статистический вес;  
 $h = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ эрг/сек}$  — постоянная Планка;

- $\mathbf{h}(h_x, h_y, h_z)$  — возмущение напряженности магнитного поля;  
 $H$  —  $H$ -функция Больцмана (10.27);  
 $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  
 $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица;  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  
 $I$  — интегральная интенсивность излучения (2.3);  
 $I_\nu$  — спектральная интенсивность излучения (2.1);  
 $\mathbf{J}(J_x, J_y, J_z)$  — плотность электрического тока;  
 $j_\nu$  — полный коэффициент излучения (3.29);  
 $J_\nu$  — функция источника излучения (3.33);  
 $k = 1,379 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана;  
 $K_p$  — средний коэффициент поглощения по Планку (5.36);  
 $K_r = L_R/L$  — радиационное число Кнудсена;  
 $K_R$  — средний коэффициент поглощения по Росселанду (5.18);  
 $k_s = \rho_s/\rho$  — массовая доля  $s$ -й составляющей смеси;  
 $k_\nu(k_{\nu t}, k_{\nu s})$  — коэффициент поглощения (3.1);  
 $k'_\nu$  — приведенный коэффициент поглощения (4.50);  
 $l, m, n$  — направляющие косинусы;  
 $L$  — характерная длина;  
 $L_R(L_{R\nu})$  — средняя длина свободного пробега излучения или среднее значение по Росселанду средней длины свободного пробега излучения;  
 $L_{RP}$  — среднее значение по Планку средней длины свободного пробега излучения;  
 $m$  — масса;  
 $M$  — число Маха;  
 $n$  — коэффициент преломления;  
 $\mathbf{n}(n_i, n_j)$  — единичная нормаль и ее компоненты;  
 $N$  — числовая концентрация;  
 $p$  ( $P$  или  $p^*$ ) — давление;  
 $p_g$  — давление газа;

- $p_R$  — давление излучения (2.19);  
 $Pr$  — число Прандтля (7.29);  
 $\mathbf{p}_s$  — вектор количества движения (10.1);  
 $\mathbf{q}(q_i, q)$  — вектор скорости течения;  
 $\mathbf{q}_R(q_{Ri})$  и т. п.) — поток излучения (2.9);  
 $r$  — радиальное расстояние или просто расстояние между двумя точками;  
 $R$  — газовая постоянная (5.2);  
 $r_w(r, r_v$  и т. п.) — коэффициент отражения стенки;  
 $R_b$  — радиус носовой части тела;  
 $Re = UL\rho/\mu$  — число Рейнольдса;  
 $R_E$  — число электрического поля (9.43в);  
 $R_F$  — число радиационного потока излучения (7.41);  
 $R_h$  — число Гартмана (9.47);  
 $R_p$  — число давления излучения (7.18);  
 $R_r$  — релятивистский параметр (7.17);  
 $R_t$  — параметр времени (7.15);  
 $R_\sigma$  — магнитное число Рейнольдса (9.43в);  
 $s$  — расстояние вдоль луча света;  
 $S$  — энтропия;  
 $t$  — время;  
 $T$  — температура;  
 $u, v, w$  —  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -компоненты вектора скорости  $\mathbf{q}$  соответственно;  
 $U$  — характерная скорость;  
 $U_m$  — внутренняя энергия;  
 $U_v$  — спектральная плотность энергии излучения (2.13);  
 $U_\lambda$  — плотность энергии излучения по длине волны (4.8);  
 $V$  — объем;  
 $V_x$  — скорость волны Альфвена вдоль оси  $x$  (8.13);  
 $V_y$  — скорость волны Альфвена вдоль оси  $y$  (8.13);  
 $w_s$  — диффузионная скорость  $s$ -й составляющей смеси;  
 $x, y, z$  — декартовы координаты;  
 $\alpha$  — угол наклона ударной волны;



- $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей (7.25);  
 $\varepsilon_n$  — экспоненциальные интегралы (5.38);  
 $\theta$  — угол;  
 $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  
 $\kappa_R$  — эффективный коэффициент теплопроводности, обусловленный излучением (5.22);  
 $\lambda$  — длина волны (4.9);  
 $\mu$  — коэффициент вязкости;  
 $\mu_e$  — магнитная проницаемость;  
 $\nu (\nu_{mn})$  — частота;  
 $\nu_g$  — коэффициент кинематической вязкости;  
 $\nu_H$  — магнитное рассеяние;  
 $\rho$  — плотность;  
 $\rho_e$  — избыточный электрический заряд;  
 $\sigma = 5,68 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4$  — постоянная Стефана — Больцмана для потока излучения (4.28);  
 $\sigma_e$  — электропроводность;  
 $\sigma_m$  — сечение поглощения (3.15);  
 $\sigma_0$  — элемент площади (2.1);  
 $\tau (\tau_\nu)$  — оптическая толщина [(3.3) и др.];  
 $\tau_R (\tau_{Rij})$  — тензор напряжений излучения (2.18);  
 $\tau_s (\tau_{stj})$  — тензор вязких напряжений (5.5);  
 $\psi$  — функция тока;  
 $\omega$  — телесный угол;  
 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор-градиент.

Значение большей части индексов пояснено в тексте, однако следующие индексы имеют общее значение:

Индексы  $i$  или  $j$  у вектора относятся к его  $i$ -й или  $j$ -й компоненте.

Индексы  $x$ ,  $y$  или  $z$  также относятся к соответствующим компонентам вектора.

## Дополнительная литература

1. Адрианов В. Н., Шорин С. Н., Исследование процесса сложного теплообмена в камере сгорания, сб. «Конвективный и лучистый теплообмен», Изд-во АН СССР, 1960.
2. Адрианов В. Н., Лучистый теплообмен в плоском слое движущейся среды, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965.
3. Адрианов В. Н., Радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный теплообмен потока среды со стенками канала, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965.
4. Адрианов В. Н., Хрусталева Б. А., Колченогова И. П., Радиационно-конвективный теплообмен высокотемпературного газового потока в канале, сб. «Теплообмен в элементах энергетических установок», изд-во «Наука», 1966.
5. Андреев Г. Н., К учету радиационного потока в ламинарном пограничном слое, *Изв. АН СССР, ОТН*, сер. «Механика и машиностроение», № 6 (1960).
6. Бай Ши-и, Введение в теорию течения сжимаемой жидкости, ИЛ, 1961.
7. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, ИЛ, 1962.
8. Бай Ши-и, Магнитная газодинамика и динамика плазмы, изд-во «Мир», 1964.
9. Ветлуцкий В. Н., Онуфриев А. Т., Охлаждение излучением газа, текущего в плоском канале, *ПМТФ*, № 6 (1962).
10. Висканта Р., Взаимодействие между теплоотдачей, теплопроводностью, конвекцией и излучением в излучающей жидкости, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 4 (1963).
11. Висканта Р., Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающих и рассеивающих средах, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 1 (1965).
12. Галанова З. С., Ламинарный пограничный слой с учетом излучения, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965.
- 12а. Гинзбург В. Л., Распространения электромагнитных волн в плазме, изд-во «Наука», М., 1967.
13. Гинзбург И. П., Галанова З. С., Решение задач ламинарного пограничного слоя с учетом излучения и поглощения среды, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, Минск, 1961.
14. Замураев В. П., Ламинарный пограничный слой в излучающем газе около плоской пластины, *ПМТФ*, № 3 (1964).
15. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. 2, изд-во «Наука», 1966.
16. Ирвин Т. Ф., Штейн Р. П., Симон Г. А., Влияние излучения на конвекцию в плоском канале, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965.

17. Кешок Е. Г., Зигель К., Комбинированный лучисто-конвективный теплообмен при течении в несимметрично нагреваемом канале между параллельными пластинами, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 3 (1964).
18. Конаков П. К., Кумсков В. Т., Сидоров Ю. П., Сидоров В. С., О решении задачи сложного теплообмена в движущейся серой среде с малой оптической плотностью на базе уравнений пограничного слоя, сб. МИИТа «Исследование теплообмена в энергетических установках и в установках для получения полупроводниковых материалов», вып. 189, изд-во «Высшая школа», 1965.
19. Конаков П. К., Кумсков В. Т., Сидоров Ю. П., Сидоров В. С., Сложный теплообмен и гидравлическое сопротивление в движущейся серой среде с большой оптической плотностью, сб. МИИТа «Исследование теплообмена в энергетических установках и в установках для получения полупроводниковых материалов», вып. 189, изд-во «Высшая школа», 1965.
20. Кох Ж. С., Де-Сильва С. Н., Взаимодействие между излучением и конвекцией в пограничном слое плоской пластины при гиперзвуковых скоростях, *Вопросы ракетной техники*, № 5 (1962).
21. Курбацкий А. Ф., Онуфриев А. Т., Об охлаждении излучением газа, обтекающего плоскую пластинку, *ПМТФ*, № 3 (1964).
22. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Рубцов Н. А., К оценке роли излучения при расчете теплообмена в турбулентном пограничном слое, *ПМТФ*, № 4 (1963).
23. Лейн А. Т., Эдварс Д. К., Совместное излучение, теплопроводность и конвекция в спектрально селективном, эмиттирующем и рассеивающем пористом покрытии, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 2 (1966).
24. Лунев В. В., Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа, *ПМТФ*, № 2 (1960).
25. Лунев В. В., Мурзинов И. Н., Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела, *ПМТФ*, № 2 (1961).
26. Лунев В. В., Румынский А. Н., Взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком, обусловленное лучистым теплообменом, *ПМТФ*, № 6 (1961).
27. Немчинов И. В., Фонарев А. С., Течение Куэтта с учетом переноса тепла излучением, *ПМТФ*, № 3 (1960).
28. Нерем Р. М., Стикфорд Г. Н., Лучистый и конвективный нагрев при входе в атмосферу со сверхзвуковыми скоростями, *Ракетная техника и космонавтика*, № 6 (1964).
29. Оливер С. С., Макфадден Р. В., Взаимодействие излучения и конвекции в ламинарном пограничном слое, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 2 (1966).
30. Онуфриев А. Т., Приближенное рассмотрение задачи об обтекании излучающим газом пластинки конечной длины, *ПМТФ*, № 5 (1962).
31. Перльмуттер М., Зигель К., Теплопередача в нагреваемой трубе при совместном действии вынужденной конвекции и излучения, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 4, 36 (1962).
32. Румынский А. Н., Пограничный слой в излучающих и поглощающих средах, *Изв. АН СССР, ОТН*, сер. «Механика и машиностроение», № 2 (1960).

33. Румынский А. Н., Теплообмен в лобовой точке, омываемой излучающей средой, *Изв. АН СССР, ОТН, сер. «Механика и машиностроение»,* № 1 (1961).
34. Сесс Р. Д., Температура адiabатической стенки в потоке излучающего и поглощающего газа, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.,* сер. «Теплопередача», № 2 (1964).
35. Сесс Р. Д., Влияние излучения на теплообмен в пограничном слое непрозрачного газа, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.,* сер. «Теплопередача», № 4 (1964).
36. Сесс Р. Д., Теплообмен при совместном действии теплового излучения и теплопроводности или конвекции, сб. «Современные проблемы теплообмена», изд-во «Энергия», 1966.
37. Сидоров Э. А., Лучисто-кондуктивный теплообмен в плоском слое поглощающей среды, Труды IV конференции молодых ученых ЭНИИ, Изд-во АН СССР, 1957.
38. Сидоров Э. А., Лучисто-кондуктивный теплообмен в поглощающей среде, сб. «Вопросы теплообмена», ЭНИИ, Изд-во АН СССР, 1959.
39. Сидоров Э. А., О взаимодействии конвекции и излучения в поглощающей среде, *Изв. АН СССР, ОТН, сер. «Механика и машиностроение»,* № 4 (1959).
40. Смирнов М. Т., О передаче тепла газами одновременно радиацией и соприкосновением, *Изв. ВТИ, № 3 (46) (1929).*
41. Филимонов С. С., Хрусталеv Б. А., О расчете сложного теплообмена (обзор). Исследования теплообмена, гидродинамики и теплофизических свойств веществ, изд-во «Наука», 1968.
42. Филиппов Л. П., Влияние излучения и поглощения среды на процесс теплопередачи, *Вестн. МГУ, сер. «Физика», № 2 (1954).*
43. Чау Р. Р., Влияние теплового излучения на структуру тонкой ударной волны, *Ракетная техника и космонавтика, № 5 (1965).*
44. Группер М. I., Aerodynamic and Radiant Heat Input to Space Vehicles which Re-entry at Satellite and Escape Velocity, *J. Am. Rocket Soc., 31 (1961).*
45. Cess R. D., The Interaction of Thermal Radiation in Boundary Layer Heat Transfer, Proc. 3th Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Aug. 7—12, 1966, v. V.
46. Chen I. C., Laminar Heat Transfer in Tube with Nonlinear Radiant Heat-Flux Boundary Condition, *Int. J. Heat a. Mass Transfer, 9 (1966).*
47. Dussau B. I., Irvine T. F., Laminar Heat Transfer in a Round Tube with Radiating Heat Flux at the Outer Wall, Proc. 3th Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Aug. 7—12, 1966, v. V.
48. Einstein T. H., Radiant Heat Transfer to Absorbing Gases Enclosed in a Circular Pipe with Conduction, Gas Flow and Internal Heat Generation, NASA TR R-156, 1963.
49. Genzel L., Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvergängen, *Zs. f. Physik, Bd. 135, Ht. 2 (1953).*
50. Gille J., Goody R., Convection in a Radiating Gas, *J. Fluid Mech., 20, part 1 (1964).*
51. Goulard R., Goulard M., One-Dimensional Energy Transfer in Radiant Media, *Int. J. Heat a. Mass Transfer, 1 (1960).*
52. Goulard R., The Coupling of Radiation and Convection in Detached Shock Layers, *J. Quant. Spectrosc. Radiant Transfer, № 1 (1962).*

53. Goulard R., The Transition from Black Body to Rosseland Formulations in Optically Thick Flows, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **6**, № 10 (1963).
54. Greif R., Energy Transfer by Radiation and Convection with Variable Gas Properties, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **7**, № 8 (1964).
55. Hausen H., Binder J. A., Vereinfachte berechnung der Wärmeübertragung durch Strahlung von Einen Gas an eine Wand, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, № 5 (1962).
56. Hottel H. C., Some Recent Problems in Radiative Transport. A Lecture Presented at the International Heat Transfer Conference, Boulder, Colorado, Aug. 28—Sept. 1, 1961.
57. Howe J. T., Radiation Shielding of the Stagnation Region of an Opaque Gas, NASA TN D-329, 1960.
58. Howe J. T., Radiation Emission Effects of the Equilibrium Boundary Layer in the Stagnation Region of an Opaque Gas, NASA TN D-1031, 1961.
59. Irvine T. F., The Influence of Radiation on Convection in Noncircular Ducts, *Trans. ASME*, Paper № 58-A-155, 1958.
60. Kadanoff L. P., Radiative Transport within an Oblating Body, *Trans. ASME*, C. (Heat Transfer), **83** (1961); имеется русский перевод: Каданов, Распространение лучистой энергии внутри аблирующего тела, *Труды Амер. об-ва инж.-мех.*, сер. «Теплопередача», № 2 (1961).
61. Kellet B. S., The Steady Flow of Heat through Hot Glass, *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, № 5 (1952).
62. Kennett H., Radiation-Convection Interaction around a Sphere in Hypersonic Flow, *J. Am. Rocket Soc.*, **32** (1962).
63. Lick W., Transient Energy Transfer by Conduction and Radiation, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **8** (1965).
64. Mori J., Kurosaki J., Heat Transfer by Radiation and Other Transport Mechanism (1st Rep. Couette Flow with Simultaneous Radiation and Conduction), *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, **31**, 230, 1501 (1965).
65. Murgai M. P., Radiative Transfer Effects in Natural Convection above Fires, *J. Fluid. Mech.*, № 12 (1962).
66. Murgai M. P., Varma R. K., Radiative Transfer Effects in Natural Convection above Fires—Transparent Approximation, Ambient Atmosphere Non-Isothermal, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **8**, № 5 (1965).
67. Nichols L. D., Temperature Profile in the Entrance Region of an Annular Passage Considering the Effects of Turbulent Convection and Radiation, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **8**, № 4 (1965).
68. Novotny J. L., Taitel J., Hartnett J. P., Equilibrium Temperatures of Mass Transfer Cooled Walls in High-Speed Flow of an Absorbing-Emitting Gas, Proc. 3th Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Aug. 7—12, 1966, v. V, Am. Inst. Chem. Eng.
69. Pai S. I., Tsao C. K., A Uniform Flow of a Radiating Gas over a Flat Plate, Proc. 3th Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Aug. 7—12, 1966, v. V, Am. Inst. Chem. Eng.
70. Poltz H., Die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten II, Der Strahlungsanteil der Effektiven Wärmeleitfähigkeit, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, **8**, № 4 (1965).
71. Strack S. L., Radiant Heat Transfer around Re-entry Bodies, *J. Am. Rocket Soc.*, **32** (1962).

72. Townsend A. A., The Effects of Radiative Transfer on Transfer of Turbulent Flow of a Stratified Fluid., *J. Fluid Mech.*, № 4 (1958).
73. Van der Held E. F. M., The Contribution of Radiation to the Conduction of Heat, Applied Scientific Research, Sect. A, v. 3, 1952; v. 4, 1953.
74. Viskanta R., Grosh R. J., Effect of Surface Emissivity on Heat Transfer by Simultaneous Conduction and Radiation, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, № 5 (1962).
75. Viskanta R., Heat Transfer in Radiating Fluid with Slug-Flow in a Parallel-Plate Channel, *Appl. Scient., Res.* 13, № 4/5, 1964.
76. Viskanta R., Grosh R. J., Recent Advances in Radiant Heat Transfer, *Appl. Mech. Rev.*, 17, № 2 (1964).
77. Viskanta R., Merriam R. L., Shielding of Surfaces in Couette Flow against Radiation by Transpiration of an Absorbing-Emitting Gas, *Int. J. Heat a. Mass Transfer*, 10, № 5 (1967).
78. Wang L. S., Tien C. L., Study of the Interaction between Radiation and Conduction by a Differential Method, Proc. 3th Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Aug. 7—12, 1966, v. 5.

## Указатель авторов

- Абарбенел* (Abarbanel S.) 267, 268  
*Аллен* (Allen R. A.) 19, 224  
*Аллер* (Aller L. H.) 19, 28, 56, 299  
*Амбарцумян В. А.* 19, 26  
*Армстронг* (Armstrong B. H.) 19, 116, 299
- Бай Ши-и* (Pai S. I.) 19, 28, 43, 77, 96, 168, 225, 300  
*Бангаард* (Bungaard R. C.) 28, 43, 56, 224, 299  
*Бергерон* (Bergeron T.) 28, 43, 56, 224, 299  
*Берд* (Bird R. B.) 269  
*Берджерс* (Burgers T. M.) 268  
*Бет* (Bethe H. A.) 168  
*Болдуин мл.* (Baldwin B. S., Jr.) 136, 154, 167, 168  
*Борн* (Born M.) 56, 96, 299  
*Бриджмен* (Bridgeman P. W.) 116  
*Бэйли* (Bailey K.) 77, 96, 116, 299  
*Бьеркнес* (Bjerknes J.) 28, 43, 56, 224
- Вертушкин В. К.* 20, 28, 43, 47, 77, 116, 168  
*Виегас* (Viegas J. R.) 225  
*Винокур* (Vinokur V.) 154, 168  
*Винсенти* (Vincenti W. G.) 168  
*Висканта* (Viskanta R.) 43, 224, 226  
*Вольф* (Wolf E.) 96
- Гайтлер* (Heitler W.) 299  
*Гарден* (Garden R.) 96  
*Гейгер* (Geiger R. E.) 225  
*Георгиев* (Georgiev S.) 224  
*Гесс* (Guess A. W.) 156, 168  
*Гиршфельдер* (Hirschfelder J. D.) 19, 167, 269, 299  
*Годске* (Godske C. L.) 28, 43, 56, 224, 299  
*Грош* (Grosh R. J.) 43, 224, 226  
*Гулард* (Goulard M.) 19, 77, 96, 116, 168, 224, 299  
*Гулард* (Goulard R.) 77

- Де-Сильва* (DeSilva C. N.) 206, 225  
*Джонсон* (Johnson J. C.) 28, 43, 56, 96, 225
- Жигулев В. Н.* 20, 28, 43, 77, 116, 168
- Зельдович Я. Б.* 154, 168
- Иосикава* (Yoshikawa K. K.) 159, 168, 226
- Камм* (Camm J. C.) 19  
*Карман* (von Kármán Th.) 12, 20  
*Каулинг* (Cawling T. G.) 269  
*Кеннет* (Kennet H.) 225  
*Кертисс* (Curtiss C. F.) 269  
*Кивель* (Kivel B.) 19, 77, 96, 116, 225, 299  
*Кларке* (Clarke J. F.) 151, 154, 168  
*Кларке* (Clarke J. H.) 299  
*Кондон* (Condon E. U.) 299  
*Корновский* (Kornowski E. T.) 225  
*Кох* (Koh J. C. I.) 206, 225  
*Краселла* (Krascella N. L.) 299  
*Курганов* (Kourganoff V.) 28, 43, 77, 96
- Лайтхилл* (Lighthill M. J.) 299  
*Ли* (Li T. Y.) 225
- Магрэблиан* (Maghreblian R. V.) 19  
*Мартини* (Marteney P. J.) 299  
*Маршак* (Marshak R. L.) 168  
*Мейеротт* (Meyerott R. E.) 19, 116, 299  
*Менсель* (Mensel D. H.) 299  
*Митчнер* (Mitchner M.) 154, 168  
*Моффет* (Moffat W. C.) 19  
*Мэйджи* (Magee J. L.) 19, 167, 299  
*Мюллер* (Müller H. G.) 225
- Нейман* (von Neumann J.) 167  
*Немчинов И. В.* 225  
*Никольс* (Nicholls R. W.) 19, 116, 299
- Олфе* (Olfe D. B.) 168  
*Оппенгейм* (Oppenheim A. K.) 225



- Пайерлс* (Peierls R. E.) 167  
*Пеннер* (Penner S. S.) 96  
*Планк* (Planck M.) 11, 19, 28, 43, 56, 77, 96, 300  
*Померанц* (Pomerantz J.) 19, 168  
*Пробстин* (Probstein R. F.) 19, 96, 224, 269  
*Прокофьев В. А.* 130, 154, 168  
*Пэттерсон* (Patterson G. N.) 269
- Ромишевский Г. А.* 20, 28, 43, 77, 116, 168  
*Росселанд* (Rosseland S.) 19, 28, 77, 96  
*Роуз* (Rose P. H.) 19  
*Рэтклифф* (Ratcliffe J. A.) 225
- Сах* (Sachs R. G.) 168  
*Сен* (Sen H. K.) 156, 168  
*Симонс* (Simons R.) 225  
*Синг* (Synge J. L.) 269  
*Скала* (Scala S. M.) 19, 77, 96, 116, 156, 168, 225  
*Соколов* (Sokoloff H.) 19, 116, 299  
*Спет* (Speth A. I.) 168  
*Стрэк* (Strack S. L.) 225  
*Сфорца* (Sforza P. M.) 225  
*Сэмпсон* (Sampson D. H.) 19, 77, 96, 116, 156, 168, 225
- Теллеп* (Tellep D. M.) 77, 96, 226  
*Тир* (Teare J. D.) 19, 224  
*Траготт* (Traugott S.) 155, 156, 168
- Уик* (Wick B. H.) 226  
*Уилкерсон* (Wilkerson T. D.) 300  
*Уилсон* (Wilson K. H.) 168  
*Унзольд* (Unsold A.) 20
- Фаррари* (Farrari G.) 299  
*Фукс* (Fuchs K.) 167  
*Фэй* (Fay J. A.) 19
- Хансон* (Hanson H. C.) 299  
*Хартнетт* (Hartnett J. P.) 269  
*Хейз* (Hayes W.) 224  
*Хиппель* (von Hippel A. R.) 300  
*Хислет* (Heaslet M. A.) 154  
*Холланд* (Holland H. D.) 19, 116, 299  
*Хоу* (Howe J. T.) 225

- Хошизаки* (Hoshizaki H.) 168
- Чандрасекар* (Chandrasekhar S.) 19, 28, 43, 45, 56, 76, 96, 299  
*Чепмен* (Chapman S.) 159, 168, 226
- Шааф* (Schaaf S. A.) 269  
*Шамбре* (Chambre P. L.) 269  
*Шапэн м.л.* (Chapin C., Jr.) 299  
*Шортли* (Shortley G. H.) 299
- Эдвардс* (Edwards D. K.) 77, 96, 226  
*Эйнштейн* (Einstein T. H.) 224  
*Эмде* (Emde E.) 77
- Якоб* (Jakob M.) 56, 172, 225  
*Янке* (Jahnke E.) 77

## Предметный указатель

- Автомодельное решение 204  
Агнези функция 285  
Аддитивный инвариант 237  
Адиабатические изменения 54  
Аккомодации термической коэффициент 262  
Альбеда 37  
Альфвена волна 122  
Аппарат для полета на Марс 17  
Атмосфера 181  
Атомная структура 277  
Атомный номер 271
- Блазиуса решение 203  
Больцмана закон 50  
— постоянная 2, 58  
— распределение 281  
— *H*-теорема 236  
— уравнение для материальных частиц 234  
— — для фотонов 239  
Бора радиус 279  
Быстрая волна 127
- Вдв инородного газа 220  
Вина закон смещения 47  
Вихревого взаимодействия режим 259  
Внутренняя энергия 12, 246  
Водорода атом 278  
Водяной пар 182  
Возвращение космического аппарата на Землю 15, 16, 206  
Волна в вязкой среде 122  
— малой амплитуды 117, 129  
Волны 17  
Временной параметр 104  
Вырождение состояния 51  
Высокотемпературный газ 270, 283  
Вязкий слой 259  
Вязкое напряжение 59  
— решение, определяющее структуру ударной волны 155
- Вязкости коэффициент 59, 247  
— радиационной коэффициент 255
- Газа давление 54, 242  
Газовая постоянная 58  
Галилея преобразования 231  
Гартмана число 190  
Гаусса функция 285  
Геометрический коэффициент 171  
Гетеросфера 183  
Гиперзвуковой поток 206  
Гладкая поверхность 81  
Гомосфера 181  
Градиент температуры 182  
Граничные условия 79, 80
- Давление 98, 242  
— излучения 12, 13, 27, 64, 187  
Динамика излучающего газа 11, 57, 97  
— разреженного излучающего газа 256  
Дипольный момент 272  
Диспергированная ударная волна в излучающем газе 150, 154  
Дисперсионное соотношение 123  
Диффузии излучения коэффициент 24, 65, 99  
— скорость 242, 244  
— уравнение 216, 244  
Диффузное отражение 85  
Диэлектрическая постоянная 274  
— проницаемость 118  
Длина волны 32, 47  
— затухания излучения 159  
— релаксации 149
- Затупленное тело 157, 162, 206, 207  
Затухания коэффициент 276  
Зеркальное отражение 85

- Идеально теплопроводная поверхность 268  
 Излучение 11  
 — по направлению эффективное 87, 170  
 Излучательная способность 87  
 Излучением перенос тепла 11, 21, 24, 170  
 Излучения индуцированного коэффициент 39  
 — коэффициент 18, 38, 89  
 — перенос 21, 30  
 — спонтанного коэффициент 39  
 Изолированная поверхность 266  
 Изотропное рассеяние 37  
 Индуцированное излучение 281  
 Инспекционный анализ 98  
 Интегральная интенсивность излучения 17, 22  
 Интегрального уравнения метод 173  
 Ионосфера 183  
 Истинный коэффициент поглощения 33  
 Итерационные методы 177
- Квант 26, 50  
 Квантовая теория излучения 277  
 Кинематическая вязкость 106  
 Кинетическая теория излучающих газов 227  
 Кирхгофа закон излучения 44  
 — — в методе сетки 172  
 — — для твердой поверхности 88  
 Классическая теория излучения 271  
 Клаузиуса — Мосотти — Лоренца уравнение 273  
 Кнудсена число 110, 256  
 — радиационное число 109, 256  
 Конвекция 11  
 Конечная средняя длина свободного пробега излучения 66, 129, 148, 200  
 Косая ударная волна 163  
 Коэффициент вязкости см. также Вязкости коэффициент  
 — диффузии излучения см. также Диффузии излучения коэффициент  
 — затухания см. также Затухания коэффициент  
 — излучения см. также Излучения коэффициент  
 — индуцированного излучения см. Излучения индуцированного коэффициент  
 — ослабления 18  
 — отражения 86, 88, 262
- Коэффициент поверхности угловой 171  
 — поглощения 18, 30, 284  
 — — линейный 27, 34, 174, 288, 289  
 — — приведенный 41, 56  
 — пропускания 87  
 — радиационной вязкости см. Вязкости радиационной коэффициент  
 — спонтанного излучения см. Излучения спонтанного коэффициент  
 Куэтта течение 188
- Ламинарной струи смещение 198  
 Лежандра полином 38  
 Линеаризация 176  
 Линейный коэффициент поглощения см. Коэффициент поглощения линейный  
 Локальное термодинамическое равновесие 55, 253  
 Лоренца инвариант 230  
 — преобразование 230
- Магнитная вязкость 121  
 — проницаемость 118  
 Магнитное давления число 188  
 Магнитное число Рейнольдса 188  
 Магнитогазодинамика радиационная 185  
 Максвелла распределение 237  
 — уравнения для электромагнитных полей 118  
 Малая средняя длина свободного пробега излучения 63, 199  
 Маха число 105  
 Медленная волна 127  
 Межконтинентальные ракеты 17  
 Мезопауза 183  
 Мезосфера 182  
 Метасфера 184  
 Метод малых возмущений 237  
 — многократных отражений 172  
 — сетки 172  
 Милна — Эддингтона приближение 155  
 Молекулярного распределения функции 228  
 Молекулярная скорость 228
- Напряжение излучения 13, 26, 64, 248  
 Начальные условия 78  
 Невязкого течения поле 157  
 Непоглощающая среда 170  
 Нестационарное течение 224

- Неравновесное излучение 298  
 Нуссельта число 108, 222  
 Ньютона второй закон 233
- Область переходного течения 258  
 Обтекание клина 164  
 Одноатомный газ 277  
 Однократных столкновений режим 260  
 Одномерное приближение 70  
 Ома обобщенный закон 118, 120  
 Оптическая глубина 31  
 — толщина 31  
 Оптически тонкая среда 91, 179, 213, 261  
 — толстая среда 62, 117, 138, 146, 212, 261  
 — шероховатая поверхность 83  
 Основные уравнения радиационной газодинамики 57  
 Относительности теория 230  
 Отношение удельных теплоемкостей 103, 105, 141  
 Отошедшая ударная волна 162  
 Отражательная способность по направлению 85  
 Отражения коэффициент см. Коэффициент отражения
- Параллельные пластины 71, 89, 179, 185  
 Парные столкновения 235  
 Пекле число 110  
 Первый закон термодинамики 54  
 Перенос излучения 21, 30  
 — тепла излучением см. Излучением перенос тепла  
 Переноса излучения уравнение 40, 42, 60, 103  
 Переходный слой 260  
 Планка закон излучения 49  
 — постоянная 51  
 — средний коэффициент поглощения 70, 113, 161, 221, 292  
 Пленочный коэффициент 108  
 Плоское течение Куэтта 188  
 — течение Пуазейля 194  
 Плотность 160, 161  
 — энергии излучения 12, 25, 63, 248  
 Поглощательная способность 274, 275  
 — — по направлению 85  
 Поглощающая среда 174  
 Поглощение 271  
 Поглощения коэффициент см. Коэффициент поглощения
- Пограничного слоя толщина 107  
 Пограничный слой 195, 203, 208, 215  
 Подобия параметры 97  
 Показатель преломления 81, 274  
 Полностью диспергированная ударная волна 150, 153  
 — сомкнувшиеся слои 260  
 Полуширина спектральной линии 277  
 Поляризации вектор 273  
 Поляризация 35, 38  
 Поперечная волна 121  
 Поток излучения 12, 14, 23, 64, 69, 115, 201  
 Прандтля число 103, 106, 199  
 Приведенный коэффициент поглощения см. Коэффициент поглощения приведенный  
 Продольные волны 123  
 Проницаемость 274  
 Пропускания коэффициент см. Коэффициент пропускания  
 Пропускательная способность 175  
 Протосфера 184  
 Процессы излучения в атмосфере 181
- Равновесное излучение 44  
 Радиационная газодинамика см. Динамика излучающего газа  
 Радиационное число Кнудсена 104, 109  
 Радиус носовой части тела 17, 221  
 Размерностей анализ 98  
 Распределение отражения 86  
 Рассеивающая среда 223  
 Рассеяние 40  
 Рассеяния коэффициент 35  
 Расстояние отхода ударной волны 221  
 Резонансная частота 277  
 Рейнольдса число 103, 106  
 Релятивистская механика 229  
 Релятивистский параметр 230  
 Ренкина — Гюгонио соотношения 140  
 Росселанда аппроксимация 178  
 — средний коэффициент поглощения 65, 292  
 Рэлея — Джинса закон излучения 50  
 Рэлея фазовая функция 37
- Свободномолекулярное течение 258, 262  
 Свойства излучения высокотемпературного газа 270  
 Серая поверхность 89

- Серый газ 62, 69  
 Сечение поглощения 35, 287  
 — столкновения 232  
 Сжатый слой 158, 208  
 — — вязкий 219  
 — — невязкий 209  
 Сжимаемости фактор 101  
 Сила излучения объемная 27  
 — осциллятора 282  
 Скольжение излучения 94  
 Скорость 98  
 — звука 124  
 — звука в излучающем газе 124  
 — наиболее вероятная 23  
 — потока 229, 241  
 — света 48  
 — хаотического движения 237  
 Солнечный спектр 23  
 Солнца излучение 268  
 Состояния уравнение 58  
 Сохранения уравнения 241  
 Сохранение электрического заряда 118  
 Спектральная интенсивность излучения 21  
 Спектроскопия 283  
 Сплошной среды течение 258  
 Спонтанное излучение 39, 281  
 Среднее значение физической величины 229  
 Средняя длина свободного пробега 110, 239  
 — — — — излучения 16, 62, 115  
 — — — — скорость молекул 238  
 Стандартная атмосфера 182  
 Стантона число 110  
 Статистический вес 282  
 Статопауза 182  
 Стефана — Больцмана закон излучения 53  
 — — постоянная 13, 52, 301  
 — — — для потока энергии излучения 51, 305  
 Стратосфера 182  
 Структура молекулы 277
- Температура 177  
 — излучающего газа 297  
 Температуропроводность 106  
 Тензор напряжений 26, 242  
 Тепловая волна 123  
 — — в излучающем газе 125  
 Тепловое излучение 17  
 Тепловой баланс в атмосфере 184  
 — поток излучения см. Поток излучения
- Теплообмен 169  
 — одновременно излучением и проводимостью 175  
 Теплопроводность 11, 175  
 — обусловленная излучением 65  
 Термосфера 183  
 Течение со скольжением 258  
 Торможения точка 206  
 Трения коэффициент 246  
 Тропауза 182  
 Тропосфера 181
- Угловой коэффициент поверхности см. Коэффициент поверхности угловой  
 Ударная волна 117, 138, 156, 206  
 Ударной волны структура 146, 148, 206  
 Удельная теплоемкость 55  
 Ультрафиолетовая катастрофа 50  
 Уравнение вязких напряжений 247  
 — движения 57, 59, 102, 245  
 — неразрывности 57, 58, 102, 244  
 — переноса излучения см. Переноса излучения уравнение  
 — состояния 58, 102  
 — теплового потока 247  
 — энергии 59, 103, 246  
 Условия прилипания на границе 80
- Фазовая функция 36  
 Флюоресценция 19  
 Фоккера — Планка интеграл столкновений 236  
 Формфактор 173  
 Фосфоресценция 19  
 Фотоны 17, 239  
 Френеля законы 82  
 Функция источника излучения 41  
 — тока 197, 203
- Хвостовые области невязкого газа 150
- Частично диспергированная ударная волна 150, 153  
 — смыкающиеся слои 260  
 Частота 22  
 Черная поверхность 46, 89  
 Черное тело 23, 32, 46, 170  
 Четырехмерное пространство 230  
 Число давления излучения 102, 109, 198

- Число потока излучения 111  
 Числовая концентрация молекул 229, 241  
 Шероховатая поверхность 83, 89  
 Шмидта число 107  
 Эйлера постоянная 75  
 Эйнштейна коэффициенты 33, 39, 282  
 — формула 233  
 Экзосфера 184  
 Экспериментальные исследования непрозрачности газов 296  
 Экспоненциальная аппроксимация 180  
 Экспоненциальные интегралы 70, 74  
 Электрическое поле 59, 118  
 Электрического поля число 188  
 — тока плотность 119, 187  
 Электромагнитная сила 118  
 Электромагнитное излучение 270  
 — поле 118  
 Электромагнитной энергии поток 118  
 Электромагнитные волны 122, 270  
 Электропроводность 118  
 Энергии уровень 279  
 Энергия излучения 22  
 Энтальпия воздуха 158  
 Энтропия 53  
 Эффективная удельная теплоемкость 120  
 Эффективное излучение по направлению см. Излучение по направлению эффективное  
 — число Прандтля 199  
 Эффективной теплопроводности коэффициент 65  
*D*-слой 183  
*E*-слой 183  
*F*-слой 183  
*gf*-значение 282  
*H*-функция 236  
*л*-теорема 98

## Оглавление

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	9
<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>11</b>
1. Динамика излучающего газа . . . . .	11
2. Действие теплового излучения . . . . .	12
3. Некоторые явления теплового излучения . . . . .	17
<b>Глава 2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ . . . . .</b>	<b>21</b>
1. Спектральная интенсивность излучения . . . . .	21
2. Поток излучения . . . . .	23
3. Объемная спектральная плотность энергии излучения $U_{\nu}$ . . . . .	25
4. Тензор напряжений излучения . . . . .	26
<b>Глава 3. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ . . . . .</b>	<b>30</b>
1. Введение . . . . .	30
2. Спектральный коэффициент поглощения . . . . .	30
3. Спектральный коэффициент излучения $j_{\nu}$ . . . . .	38
4. Уравнение переноса излучения . . . . .	40
5. Решение уравнения переноса излучения . . . . .	42
<b>Глава 4. РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>44</b>
1. Введение . . . . .	44
2. Закон излучения Кирхгофа . . . . .	44
3. Закон смещения Вина . . . . .	47
4. Закон излучения Планка . . . . .	49
5. Закон излучения Стефана — Больцмана . . . . .	53



- |   |    |
|---|----|
| 6. Адиабатические изменения в замкнутом пространстве, содержащем вещество и излучение . . . . . | 54 |
| 7. Локальное термодинамическое равновесие . . . . .   | 55 |

**Глава 5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ . . . . . 57**

- |   |    |
|---|----|
| 1. Введение . . . . .   | 57 |
| 2. Уравнение состояния . . . . .  | 58 |
| 3. Уравнение неразрывности . . . . .                                    | 58 |
| 4. Уравнение движения . . . . .   | 59 |
| 5. Уравнение энергии . . . . .  | 59 |
| 6. Уравнение переноса излучения . . . . .                               | 60 |
| 7. Общие замечания к основным уравнениям . . . . .                      | 61 |
| 8. Случай малой средней длины свободного пробега излучения . . . . .    | 63 |
| 9. Случай конечной средней длины свободного пробега излучения . . . . . | 66 |
| 10. Одномерный перенос излучения . . . . .                              | 71 |
| 11. Экспоненциальные интегралы . . . . .                                | 74 |

**Глава 6. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ . . . . . 78**

- |  |    |
|--|----|
| 1. Введение . . . . .  | 78 |
| 2. Граничные условия газодинамического поля . . . . .  | 79 |
| 3. Граничные условия поля излучения . . . . .  | 80 |
| 4. Гладкая поверхность . . . . .   | 81 |
| 5. Шероховатая поверхность . . . . .   | 83 |
| 6. Перенос излучения между двумя непрозрачными параллельными пластинами . . . . .                  | 89 |
| 7. Излучение слоя газа, имеющего постоянную температуру . . . . .                                  | 92 |
| 8. Скольжение излучения при конечном значении средней длины свободного пробега излучения . . . . . | 94 |

**Глава 7. ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ . . . . . 97**

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Введение . . . . .   | 97  |
| 2. Анализ размерностей и $\pi$ -теорема . . . . .                     | 98  |
| 3. Безразмерные уравнения радиационной газодинамики . . . . .         | 102 |
| 4. Важнейшие параметры радиационной газодинамики . . . . .            | 104 |
| 5. Некоторые дальнейшие замечания о безразмерных параметрах . . . . . | 110 |

<b>Глава 8. ВОЛНЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ . . . . .</b>	<b>117</b>
1. Введение . . . . .	117
2. Волна малой амплитуды в оптически толстой среде . . . . .	117
3. Волна малой амплитуды в излучающем газе при конечном значении средней длины свободного пробега излучения . . . . .	129
4. Ударные волны в оптически толстой среде . . . . .	138
5. Структура ударной волны в оптически толстой среде . . . . .	146
6. Ударная волна в среде с конечной средней длиной свободного пробега излучения . . . . .	148
7. Поле течения за ударными волнами . . . . .	156
<b>Глава 9. ТЕПЛООБМЕН В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ . . . . .</b>	<b>169</b>
1. Введение . . . . .	169
2. Теплообмен излучением в непоглощающей среде . . . . .	170
3. Теплообмен излучением в поглощающей среде . . . . .	174
4. Теплообмен одновременно проводимостью и излучением в поглощающей среде . . . . .	175
5. Процессы излучения в атмосфере . . . . .	181
6. Течение между двумя параллельными пластинами в радиационной магнитогазодинамике . . . . .	185
7. Пограничный слой потока в радиационной газодинамике . . . . .	195
8. Теплообмен в точке торможения в радиационной газодинамике . . . . .	206
9. Различные задачи теплообмена в радиационной газодинамике . . . . .	223
<b>Глава 10. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧАЮЩИХ ГАЗОВ . . . . .</b>	<b>227</b>
1. Введение . . . . .	227
2. Молекулярная скорость и молекулярные функции распределения . . . . .	228
3. Релятивистская механика . . . . .	229
4. Уравнение Больцмана для материальных частиц . . . . .	234
5. Уравнение Больцмана для фотонов . . . . .	239
6. Уравнения сохранения . . . . .	241
7. Напряжения излучения и плотность энергии излучения . . . . .	248
8. Локальное термодинамическое равновесие . . . . .	253
9. Динамика разреженного излучающего газа . . . . .	256
10. Свободномолекулярное течение . . . . .	262
<b>Глава 11. СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ГАЗОВ . . . . .</b>	<b>270</b>
1. Введение . . . . .	270
2. Классическая теория поглощения и испускания излучения . . . . .	271

3. Квантовая теория излучения [11] . . . . .	277
4. Спектроскопия высокотемпературного газа . . . . .	283
5. Коэффициент поглощения высокотемпературных газов . . . . .	285
6. Коэффициент рассеяния излучения . . . . .	289
7. Средние коэффициенты поглощения воздуха и водорода по Планку и Росселанду . . . . .	292
8. Некоторые экспериментальные исследования непрозрачности газов . . . . .	296
9. Неравновесное излучение . . . . .	298
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ . . . . .	301
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА . . . . .	306
УКАЗАТЕЛЬ АВТОРОВ . . . . .	311
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	315

*Бай Ши-и*

**ДИНАМИКА  
ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА**

Редактор *О. Н. Прядкина*

Художник *Ф. Л. Лейн*

Художественный редактор *Н. А. Фильчагина*

Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Сдано в производство 10/X 1967 г.

Подписано к печати 7/III 1968 г.

Бумага тип. № 2 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> = 10,13 бум. л.

20,25 печ. л.

Уч.-изд. л. 18,04. Изд. № 20/4384

Цена 1 р. 42 к. Зак. 911

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома

Комитета по печати

при Совете Министров СССР

Измайловский проспект, 29.