

В.Н. БАЙЕР, В.М. КАТКОВ, В.С. ФАДИН

# ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1973

Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. **Излучение релятивистских электронов.** М., Атомиздат, 1973, с. 376.

Книга посвящена систематизированному изложению теории тормозного излучения и рождения пар при прохождении энергичной частицы через внешнее поле или при столкновении заряженных частиц высокой энергии с учетом поляризационных и спиновых эффектов. Выделены особенности электромагнитных процессов при высоких энергиях, существенно упрощающие их изучение. Книга является первой монографией, детально освещающей эту область электромагнитных явлений.

Таблиц 4. Рисунков 59. Библиографии 126.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена систематизированному изложению теории тормозного излучения и рождения пар при прохождении энергичной частицы через внешнее поле или при столкновении заряженных частиц высокой энергии, причем значительное внимание уделено обсуждению поляризационных и спиновых явлений. Рассмотренный круг вопросов находит все более широкое приложение по мере роста энергии ускорителей и расширения экспериментальных исследований электромагнитных явлений, в частности в ускорителях со встречными пучками, а также в астрофизике.

Авторы стремились последовательно выделить особенности электромагнитных процессов при высоких энергиях, существенно упрощающие их изучение. Тормозное излучение и рождение пар во внешнем поле рассмотрены в рамках операторного квазиклассического метода, позволяющего с единой точки зрения описывать процессы в любом поле. Процесс тормозного излучения частиц большой энергии во внешнем поле проанализирован сначала в классической теории, многие черты которой сохраняются и в квантовой теории. Наряду с этим рассмотрен ряд специфических вопросов: радиационная поляризация, движение спина во внешнем поле, воздействие излучения на движение частиц в поле, влияние среды (многократного рассеяния, поляризации среды, поглощения фотона в среде) на изучаемые процессы, радиационные эффекты во внешнем поле. Кроме общих методов рассмотрения процессов при столкновении частиц (приближение классических токов, метод инвариантного интегрирования, метод эквивалентных фотонов) проведен детальный анализ процессов однократного и двойного тормозного излучения, а также процессов фото- и электророждения. При выполнении вычислений (весьма трудоемких) мы старались обратить внимание на все нетривиальные методические моменты. Для полноты и удобства пользования книгой в ней приведены необходимые сведения из квантовой электродинамики.

Значительная часть книги основана на работах авторов и излагается в монографической литературе впервые, в то же время авторы стремились учесть все новейшие результаты в этой области.

Мы благодарны В. М. Страховенко за большую помощь при составлении § 13, 14. Авторы весьма признательны акад. Г. И. Будкеру за внимание и поддержку.

Эта книга — результат коллективного труда, и содержание ее обсуждалось всеми авторами. Непосредственное разделение труда было таким: § 1—4, 5.1—5.7, 9—19 и Приложения Б, В, Д, Е, Ж написаны В. Н. Байером и В. М. Катковым; § 5.8—5.15, 6—8, 20—27 и Приложения А, Г написаны В. Н. Байером и В. С. Фадиным.

А в т о р ы

### НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Четырехмерные векторные и тензорные индексы обозначаются греческими буквами  $\mu, \nu \dots$ , пробегающими значения 0, 1, 2, 3. Представление 4-вектора дается в виде  $a^\mu = (a^0 \mathbf{a})$ . Трехмерные векторные и тензорные индексы обозначаются латинскими буквами, скалярное произведение 3-векторов обозначается  $\mathbf{ab}$ , векторное  $[\mathbf{ab}]$ . Принята метрика  $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ , т. е.  $a^\mu b_\mu \equiv \mathbf{ab} = a^0 b^0 - \mathbf{ab}$ , например,  $kx = k^0 t - \mathbf{kx}$ ,  $a^\mu$  — контравариантный вектор,  $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$  — ковариантный вектор.

Операция дифференцирования  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial_t, \nabla)$ , оператор  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ .

Коммутатор обозначается  $[a, b] \equiv ab - ba$ , антикоммутатор  $\{a, b\} \equiv ab + ba$ .

Везде, где не оговорено особо, принята система единиц  $\hbar = c = 1$ , однако в ряде мест, где было необходимо подчеркнуть переход от квантовых величин к классическим, сохранена постоянная Планка  $\hbar$  и, наконец, иногда (в скобках) величины приведены в системе СГСЭ. Используется хевсайдова система единиц, в которой  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137,036$ , закон Кулона  $F = e^2/4\pi r^2$ , энергия электромагнитного поля  $U = (E^2 + H^2)/2$ . Связь с гауссовой (г) системой единиц, обычно используемой в классической электродинамике, следующая:  $(e^2/4\pi)_{\text{хев}} = (e^2)_{\text{г}}$ ,  $(H, E)_{\text{хев}} = (H/\sqrt{4\pi}, E/\sqrt{4\pi})_{\text{г}}$ .

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

1.1. Основные уравнения. Классическая теория излучения\* основана на уравнениях Максвелла для электромагнитного поля. В ковариантной записи эти уравнения имеют вид:

$$\varepsilon_{\sigma\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) = 0; \quad \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = -j^\mu(x). \quad (1.1)$$

Компоненты определяемого этими уравнениями антисимметричного тензора электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}(x)$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) выражаются через компоненты электрического поля  $E_k$  и магнитного поля  $H_k$  следующим образом:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

а компонентами вектора плотности тока  $j^\mu(x)$  являются плотность заряда  $\rho$  и 3-вектор тока  $\mathbf{j}$ :  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ .

Для описания электромагнитного поля удобно ввести вектор-потенциал поля  $A^\mu(x) = (\varphi, \mathbf{A})$ , через который выражается тензор поля  $F^{\mu\nu}$ :

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (1.3)$$

Тогда первое из уравнений (1.1) (первая пара уравнений Максвелла) удовлетворяется тождественно, а второе уравнение (вторая пара уравнений Максвелла) приобретает вид

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = j^\mu(x). \quad (1.4)$$

Введение потенциала (1.3) неоднозначно, так как тензор электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}(x)$  не меняется при калибровочном преобразовании  $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$ , где  $\Lambda(x)$  — произвольная скалярная функция. Это обстоятельство позволяет вы-

\* Имеется большое число книг, посвященных классической электродинамике [54, 57, 65, 84, 95].

брать удобное для решения данного круга задач представление потенциала. В частности, в задачах излучения оказывается удобным наложить на потенциалы условия

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0, \quad (1.5)$$

для чего достаточно выбрать скалярную функцию  $\Lambda(x)$ , удовлетворяющую уравнению  $\partial^\mu \partial_\mu \Lambda(x) = -\partial_\mu A^\mu(x)$ .

Условие (1.5) называют *условием Лоренца*, а соответствующий выбор потенциала — *потенциалом в лоренцевой калибровке*. Следует отметить, что и после наложения условия (1.5) выбор потенциала остается неоднозначным, однако функция  $\Lambda(x)$  должна удовлетворять теперь *волновому уравнению* (уравнению д'Аламбера)

$$\partial^\mu \partial_\mu \Lambda(x) = 0. \quad (1.6)$$

В дальнейшем будем выбирать потенциал  $A^\mu$  в лоренцевой калибровке (1.5). Тогда уравнение (1.4) переходит в *неоднородное волновое уравнение*

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu(x) \equiv \square A^\mu(x) = j^\mu(x). \quad (1.7)$$

Для описания электромагнитных волн [электромагнитное поле в вакууме, когда  $j^\mu(x) = 0$ ] часто используют тот факт, что потенциал поля  $A^\mu(x)$  и функция калибровочного преобразования  $\Lambda(x)$  удовлетворяют однородному волновому уравнению. Тогда в фиксированной лоренцевой системе всегда можно выбрать калибровочную функцию так, чтобы скалярная компонента потенциала  $\phi = 0$ . При этом условие Лоренца (1.5) переходит в нековариантное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x) = 0. \quad (1.8)$$

Такую калибровку потенциала называют *кулоновской* или *поперечной*, и она, очевидно, представляет частный случай лоренцевой.

1.2. За п а з д ы в а ю щ и е п о т е н ц и а л ы. Перейдем к решению уравнений (1.7) для потенциала. Решение граничных задач для неоднородного волнового уравнения, в частности задач излучения, где граничные условия ставятся, как правило, при  $t \rightarrow \pm \infty$ , весьма удобно проводить с помощью *метода функций Грина*. Фундаментальную роль в этом методе играет функция Грина  $D(x - x')$ , которая для неограниченного пространства удовлетворяет уравнению

$$\square_x D(x - x') = \delta(x - x'). \quad (1.9)$$

Решение его определено с точностью до произвольного решения однородного волнового уравнения, подбирая которое, можно удовлетво-

рительным граничным условиям. Если известна функция Грина, то решение уравнения (1.7) выражается интегралом:

$$A^\mu(x) = \int D(x-x') j^\mu(x') d^4 x' + A_0^\mu(x), \quad (1.10)$$

где  $A_0^\mu(x)$  — решение однородного волнового уравнения. В этом можно убедиться, подставляя (1.10) в (1.7) с учетом (1.9).

Существенным моментом в нахождении функций Грина является выбор граничных условий, для определения которых можно воспользоваться следующими соображениями. Решение уравнения (1.8) рассмотрим как волну, которая вызывается точечным источником в точке  $x = x'$ , действующим мгновенно в момент времени  $t = t'$ . Такой источник порождает сферическую волну, распространяющуюся со скоростью света. Исходя из этой картины, потребуем, чтобы:

1) функция Грина

$$D(x-x') = 0 \text{ при } t < t'; \quad (1.11)$$

2)  $D(x-x')$  представляло сферическую волну при  $t > t'$ . Решение уравнения (1.9) найдем с применением преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} D(x) &= [1/(2\pi)^4] \int \tilde{D}(k) \exp(i kx) d^4 k; \\ \delta(x) &= [1/(2\pi)^4] \int \exp(i kx) d^4 k. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя это значение в уравнение (1.9), получаем  $\tilde{D}(k) = -1/k^2$ , так что функция Грина

$$D(x) = [-1/(2\pi)^4] \int [\exp(i kx)/k^2] d^4 k. \quad (1.13)$$

Последнее выражение является формальным решением уравнения (1.9). Однако при выполнении интегрирования по  $k$  сталкиваемся с особенностью подынтегрального выражения при  $\omega^2 = k^2$ , так что решение (1.13) имеет смысл только в случае, если заданы правила обращения с этой особенностью. Интеграл по  $\omega \equiv k_0$  можно представить в виде интеграла Коши в комплексной плоскости  $\omega$  (рис. 1). Для этого необходимо, чтобы при  $x_0 \equiv t < 0$  контур замыкался в верхнюю полуплоскость, а при  $x_0 \equiv t > 0$  — в нижнюю, так как в этих случаях вклад интеграла по полуокружности радиуса  $R \rightarrow \infty$  экспоненциально стремится к нулю. Значение интеграла определяется тем, как пройдет контур интегрирования относительно полюсов в точках  $\omega = \pm k$ . Для того чтобы выполнялось условие (1.11), необходимо, чтобы контур интегрирования проходил несколько выше вещественной оси (см. рис. 1). Это же получается, если контур интегрирования проходит по веществен-

ной оси, но полюса смещаются на бесконечно малую величину  $\varepsilon > 0$  в нижнюю полуплоскость  $\omega \rightarrow \omega + i\varepsilon$ , так что

$$D_{ret}(x) = [-1/(2\pi)^4] \int d^3 k \int_C d\omega \exp(ikx)/[(\omega + i\varepsilon)^2 - k^2]. \quad (1.14)$$

Очевидно, что при  $t < 0$   $D_{ret}(x) = 0$  (1.11), а при  $t > 0$ , взяв вычеты в полюсах интеграла по  $\omega$ , получим запаздывающую функцию Грина\*

$$D_{ret}(\mathbf{r}, t) = [-1/(2\pi)^3] \int d^3 k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \sin kt/k = \\ = (-1/\pi r) \int dk \sin kt \sin kr = (1/4\pi r) \delta(r-t) = \delta(x^2) \vartheta(x_0)/2\pi. \quad (1.15)$$

Здесь  $k = |\mathbf{k}|$ ;  $r = |\mathbf{r}|$ .

Запаздывающая функция Грина представляет собой бесконечно узкую сферическую расходящуюся волну (ср. условие 2), т. е. отлична от нуля только на световом конусе, направленном в будущее. Подставляя это выражение в (1.10), получаем следующее выражение для запаздывающих потенциалов:

$$A_{ret}^\mu(x) = \\ = (1/4\pi) \int d^4 x_0 \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + t_0 - t) \times \\ \times j^\mu(\mathbf{r}_0, t_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + A_0^\mu(x). \quad (1.16)$$

Эта формула отражает причинную связь событий: наблюдаемый в точке  $x(\mathbf{r}, t)$  потенциал  $A_{ret}^\mu(x)$  вызывается возмущением, происшедшим ранее в точке  $\mathbf{r}_0$  во время  $t_0$ , причем времена  $t$  и  $t_0$  различаются на время, необходимое для распространения сигнала из точки  $\mathbf{r}_0$  в точку  $\mathbf{r}$ :

$t_0 = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ . Входящее в (1.16) поле  $A_0^\mu(x)$  есть падающее на систему поле, которое не создается током  $j^\mu(x)$ . Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что ток «включается» в момент времени  $t = t_g$  ( $j(x_0) = 0$  при  $t_0 < t_g$ ). Тогда при  $t < t_g$  интеграл в (1.16) обращается в нуль, так что  $A^\mu(x) = A_0^\mu(x)$  при  $t < t_g$ .

1.3. Поле точечного заряда. В этом случае выражение для тока источника в ковариантной записи имеет вид

$$j^\mu(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (dx^\mu/d\tau) \delta^4(x - x_0(\tau)), \quad (1.17a)$$

где  $x_0^\mu(\tau)$  — координаты частицы, зависящие от собственного времени  $\tau$ ;  $dx^\mu/d\tau = u^\mu$  — 4-скорость частицы,  $u^\mu = p^\mu/m$ ,  $u^\mu = (\varepsilon/m, \varepsilon\mathbf{v}/m)$ ,  $u^\mu u_\mu = 1$ ;  $\varepsilon$  — энергия частицы;  $m$  — ее масса.

\* Функция  $\vartheta$  определена так:  $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$



Выполняя интегрирование по собственному времени, получаем

$$j^\mu(x) = eu^\mu(m/\varepsilon) \delta^3[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)], \quad (1.176)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$  — траектория частицы. Подставляя это выражение в (1.16) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{r}_0$ , находим выражение для запаздывающих потенциалов точечной частицы (падающее поле  $A_\mu^\mu(x)$  опущено):

$$\begin{aligned} A_{ret}^\mu(x) &= e \int d\tau (dx_0/d\tau) D(x - x_0(\tau)) = \\ &= (e/2\pi) \int d\tau (dx_0^\mu/d\tau) \delta(|x - x_0(\tau)|^2) \vartheta(x - x_0(\tau)) = \\ &= (e/4\pi) \int [u^\mu(t_0) m/\varepsilon] \{ \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| + t_0 - t) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| \} dt_0. \end{aligned} \quad (1.18a)$$

Взяв интеграл по  $t_0^*$ , получаем потенциалы поля произвольно движущейся точечной частицы:

$$\begin{aligned} A_{ret}^\mu(x) &= (e/4\pi) \{ m u^\mu(t_0) / \varepsilon [R(t_0) - \mathbf{v}(t_0) \mathbf{R}(t_0)] \} = \\ &= (e/4\pi) [u^\mu(\tau_0) / R_\mu(\tau_0) u^\mu(\tau_0)], \end{aligned} \quad (1.18б)$$

где  $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)$ ;  $R = |\mathbf{R}|$ ;  $R^\mu = (t - t_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ;  $R^\mu R_\mu = 0$ ;  $\mathbf{v}$  — скорость частицы, величины берутся в момент времени

$$t_0 = t - R(t_0), \quad (1.19)$$

которому соответствует собственное время  $\tau_0$  на мировой линии частицы (рис. 2).

Переходя к трехмерным обозначениям, получаем

$$\varphi_{ret} = e/4\pi (R - \mathbf{vR})_{t_0}; \quad A_{ret} = (e/4\pi) [\mathbf{v}/(R - \mathbf{vR})_{t_0}]. \quad (1.20)$$

Потенциалы поля в форме (1.20) называются *потенциалами Лиенара—Вихерта*.

Для вычисления напряженностей поля воспользуемся формулами (1.3), (1.2), которые в трехмерной записи имеют вид

$$\mathbf{E} = -\partial A_{ret} / \partial t - \text{grad } \varphi_{ret}; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_{ret}. \quad (1.21)$$

Дифференцирование здесь ведется по координатам  $(\mathbf{r}, t)$  точки наблюдения. В то же время все величины в правой части формул зависят от времени  $t_0$  и только с учетом соотношения (1.19) выража-

---

\* Воспользуемся формулой  $\int \delta[\varphi(t)] dt = \sum_s \frac{1}{|\varphi'(t_s)|}$ , где  $t_s$  — корни функции  $\varphi$ :  $\varphi(t_s) = 0$ . Входящая в аргумент  $\delta(\varphi)$  функция имеет единственный корень, соответствующий точке пересечения мировой линии частицы со световым конусом с вершиной в точке наблюдения. Так как скорость частицы  $v < c$ , то пересечение может произойти в одной точке (см. рис. 2).

ются через  $(r, t)$ . Конкретное вычисление проведем для напряженности электрического поля:

$$E = (-e/4\pi) \{ [(\partial v(t_0)/\partial t_0)/s - v(t_0)(\partial s/\partial t_0)/s^2] (\partial t_0/\partial t) - \text{grad } s/s^2 \},$$

где  $s = R - vR$ . Для вычисления входящего сюда  $\text{grad } s$  следует учесть, что  $s$  зависит от  $\mathbf{r}$  как явно, так и через связь с  $t_0$ . Тогда

$$\text{grad } s = \mathbf{R}/R - \mathbf{v} + (\partial s/\partial t_0) \text{grad } t_0.$$

Величины  $\partial t_0/\partial t$ ,  $\text{grad } t_0$  можно вычислить с помощью прямого применения операций дифференцирования к равенству (1.19):

$$\begin{aligned} \partial R/\partial t &= (\partial R/\partial t_0) (\partial t_0/\partial t) = \\ &= [-\mathbf{Rv}(t_0)/R] (\partial t_0/\partial t) = 1 - \partial t_0/\partial t; \\ -\text{grad } t_0 &= \text{grad } R = \mathbf{R}/R + \\ &+ \text{grad } t_0 \cdot \partial R/\partial t_0 = \mathbf{R}/R - \\ &- \text{grad } t_0 \cdot \mathbf{Rv}(t_0)/R, \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\partial t_0/\partial t = R/s; \quad \text{grad } t_0 = -\mathbf{R}/s. \quad (1.22)$$

Подставляя найденные значения в формулу для напряженности электрического поля, получаем

$$E = (e/4\pi) \{ [(1 - v^2)/(R - \mathbf{Rv})^3] (\mathbf{R} - \mathbf{Rv}) + [\mathbf{R} [(\mathbf{R} - \mathbf{vR}) \dot{\mathbf{v}}]/(R - \mathbf{Rv})^3] \}. \quad (1.23)$$

Вычисление напряженности магнитного поля проводится аналогично:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{RE}]/R, \quad (1.24)$$

Ковариантную запись для напряженностей электрического и магнитного полей можно получить, если выполнить операцию дифференцирования в формуле (1.3), подставив туда ковариантное выражение для потенциалов Лиенара—Вихерта (1.18), с учетом условия  $R_\mu R^\mu = 0$ . Она имеет вид\*

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= (e/4\pi) \{ [R^\mu \omega^\nu - R^\nu \omega^\mu]/(Ru)^2 + \\ &+ [(R\omega) - 1] [R^\nu u^\mu - R^\mu u^\nu]/(Ru)^3 \}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $\omega^\mu = du^\mu/d\tau$  — 4-ускорение;  $(Ru) \equiv R_\mu u^\mu$ . Трехмерная запись этого выражения дает (1.23) и (1.24).

\* Формулу (1.25) можно получить также дифференцированием представления потенциала в форме (1.186), из которого, проведя дифференцирование и интегрирование по частям, легко получить

$$\partial^\nu A^\mu = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{(Ru)} \cdot \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{R^\nu u^\mu}{(Ru)} \right].$$

Найденное выражение для электрического поля (1.23) состоит из суммы двух членов различного характера. Первый член зависит от скорости (но не от ускорения) и на больших от источника расстояниях убывает как  $1/R^2$ . Следует учесть, что при постоянной скорости движения частицы величина

$$R_0 = R(t_0) - \mathbf{v}(t_0) R(t_0) = R - \mathbf{v}(t - t_0)$$

есть расстояние от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения. Тогда имеем

$$R - \mathbf{v}R = \sqrt{R_0^2 - [\mathbf{R}_0 \mathbf{v}]^2} = R_0 \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \vartheta},$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{v}$ . Заметим, что поле равномерно движущегося заряда, получаемое лоренцевым пересчетом электростатического поля покоящегося заряда, имеет вид

$$E = eR_0(1 - v^2)/R_0^3(1 - v^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}. \quad (1.26)$$

Сопоставляя это выражение с первым членом (1.23), видим, что он соответствует полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом.

Второй член в (1.23) зависит от ускорения и на больших расстояниях убывает как  $1/R$ . Кроме того, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны радиус-вектору  $\mathbf{R}$ . Поэтому это поле имеет характер сферической электромагнитной волны.

1.4. Излучение электромагнитных волн. Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в ограниченной области, и поле заряда на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы. В этом случае можно выбрать начало координат внутри системы и провести разложение входящих величин по степеням  $r_0/r$ :

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx r [1 - (\mathbf{n} \mathbf{r}_0(t_0))/r], \quad (1.27)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ;  $r = |\mathbf{r}|$ . Для потенциалов Лиенара—Вихерта (1.18) на больших расстояниях от частицы имеем

$$A_{ret}^\mu = e u^\mu m / 4\pi r \epsilon [1 - \mathbf{v}(t_0) \mathbf{n}] = e r^\mu / 4\pi r (\epsilon - \mathbf{p} \mathbf{n}), \quad (1.28)$$

где  $t_0$  определяется из равенства [ср. (1.19)]

$$t_0 - \mathbf{n} \mathbf{r}_0(t_0) = t - r. \quad (1.29)$$

Здесь в знаменателе (1.28) пренебрегли членом  $\mathbf{n} \mathbf{r}_0/r$ , поскольку выделяем старшие по  $1/r$  члены, в то же время такое пренебрежение нельзя сделать в (1.29), поскольку именно член  $\mathbf{n} \mathbf{r}_0$  содержит информацию о движении частицы [ $\mathbf{r}_0(t_0)$  — траектория частицы].

Поля на больших расстояниях от частицы, где следует сохранять только медленно убывающие члены  $\sim 1/r$ , имеют вид [см. (1.23) и (1.24)]

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi r} \cdot \frac{1}{(1-nv)^3} [n[(n-v)\dot{\mathbf{v}}]]; \quad \mathbf{H} = [n\mathbf{E}], \quad (1.30)$$

причем величины в правой части берутся в момент времени  $t_0$ , определяемый (1.29). Эти поля удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{EH} = n\mathbf{E} = n\mathbf{H} = 0; \\ [\mathbf{EH}] = E^2 n = \mathbf{H}^2 n, \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

т. е.  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  образуют правую тройку ортогональных векторов, что характерно для плоской электромагнитной волны, распространяющейся на больших по сравнению с размерами системы и длиной излучаемых волн расстояниях (в так называемой *волновой зоне излучения*), небольшие участки расходящейся сферической волны можно рассматривать как плоскую волну. Поскольку  $\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]$  и  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , то ясно, что в волновой зоне для описания электромагнитного поля достаточно знать только вектор-потенциал  $\mathbf{A}(r, t)$ .

Интенсивность излучения  $dI$  в элементе телесного угла  $d\Omega$  определяется как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент шаровой поверхности  $dS = r^2 d\Omega$  с центром в начале координат, и выражается через вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}] = E^2 \mathbf{n}$ :

$$dI = E^2 r^2 d\Omega. \quad (1.32)$$

Если же нас интересует полное излучение за все время движения заряда, то необходимо проинтегрировать интенсивность по времени. При этом надо учесть, что величины в правой части зависят от времени  $t_0$ . Учитывая, что [ср. (1.22) или (1.29)]

$$dt = (\partial t / \partial t_0) dt_0 = (1 - nv) dt_0, \quad (1.33)$$

получаем для энергии, излучаемой частицей в единицу «времени частицы»\* (в момент излучения)  $t_0$ :

$$\frac{d\varepsilon(\mathbf{n})}{dt_0} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{(1-nv)^5} \{2(\mathbf{wv})(\mathbf{wn})(1-nv) + \omega^2(1-nv)^2 - (1-v^2)(\mathbf{nw})^2\} d\Omega, \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{v}}$ .

\* Физический смысл дополнительного множителя  $(1 - nv)$  следующий: поле, излучаемое электроном за время  $dt_0$ , расположено между двумя сферическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r - dt_0$ , центры которых совпадают с положениями электрона в моменты  $t_0$  и  $t_0 + dt_0$ . Чтобы найти излученную за время  $dt_0$  энергию, необходимо вычислить энергию электромагнитного поля в шаровом слое между указанными поверхностями. Элемент объема шарового слоя  $dV = r^2 d\Omega dl$ , где  $dl = (1 - nv) dt_0$ , т. е. множитель  $(1 - nv)$  учитывает деформацию слоя вследствие движения частицы (учет эффекта Допплера).

Интегрирование этого выражения по углам удобно провести в тензорном виде с использованием инвариантности по отношению к трехмерным вращениям [см. Приложение Б (Б.9), (Б.10)]:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{n_i n_k}{(1-nv)^5} d\Omega &= \frac{4\pi}{3(1-v^2)^4} [(\delta_{ik}(1-v^2) + 6v_i v_k); \\ \int \frac{n_i}{(1-nv)^4} d\Omega &= \frac{16\pi}{3(1-v^2)^3} v_i; \int \frac{d\Omega}{(1-nv)^3} = \frac{4\pi}{3(1-v^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Подставляя эти интегралы в (1.34), имеем для интенсивности излучения в единицу времени частицы

$$d\varepsilon/dt_0 = \frac{2}{3} [e^2/4\pi(1-v^2)^3] [(v\mathbf{w})^2 + (1-v^2)\omega^2]. \quad (1.36)$$

Это выражение можно записать в ковариантной форме \*:

$$d\varepsilon/dt_0 = -\frac{2}{3} (e^2/4\pi) \cdot (du^\mu(\tau_0)/d\tau_0)^2 \quad (1.37)$$

или

$$dP^\mu/d\tau = -\frac{2}{3} (e^2/4\pi) (du^\nu/d\tau)^2 u^\mu.$$

Выражение (1.36), записанное через компоненты электрического и магнитного полей, имеет вид

$$d\varepsilon/dt_0 = \frac{2}{3} [e^4/4\pi m^2(1-v^2)] \{(\mathbf{E} + [v\mathbf{H}])^2 - (\mathbf{E}v)^2\}, \quad (1.38)$$

или в ковариантной форме

$$d\varepsilon/dt_0 = [-2e^4/3(4\pi)m^2] (F_{\mu\nu} u^\nu)^2$$

или

$$dP^\mu/d\tau = -\frac{2}{3} (e^4/4\pi m^2) (F_{\mu\nu} u^\nu)^2 u^\mu. \quad (1.39)$$

Рассмотрим излучение в частных случаях.

1. Скорость и ускорение частицы параллельны. Тогда из (1.30) следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{e}{4\pi r} \cdot \frac{1}{(1-nv)^3} [\mathbf{w}n]. \quad (1.40)$$

Учитывая (1.31)—(1.33), имеем для энергии, излучаемой частицей в единицу времени:

$$\frac{d\varepsilon(\mathbf{n})}{dt_0} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{\omega^2 \sin^2 \vartheta}{(1-v \cos \vartheta)^5} d\Omega, \quad (1.41)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ . Интенсивность излучения (как и энергия, излучаемая в единицу времени) симметрична относительно на-

\*  $dP^\mu$  — излученный 4-импульс.

правления движения  $\mathbf{v}(\mathbf{w})$  и обращается в нуль при  $\vartheta = 0, \pi$ . Энергия излучения в единицу времени

$$\frac{d\epsilon}{dt_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{\omega^2}{(1-v^2)^3}. \quad (1.42)$$

Примером такого движения является движение в электрическом поле ( $\mathbf{H} = 0$ ), если  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$ . Тогда

$$\frac{d\epsilon}{dt_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{4\pi} \cdot \frac{E^2}{m^2}. \quad (1.43)$$

2. Скорость и ускорение перпендикулярны. Тогда из (1.34) следует, что

$$\frac{d\epsilon}{dt_0} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{\omega^2}{(1-v \cos \vartheta)^5} \left[ (1-v \cos \vartheta)^2 - (1-v^2) \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi \right] d\Omega, \quad (1.44)$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол между вектором  $\mathbf{n}$  и плоскостью  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ . Интенсивность излучения, как и энергия, излучаемая в единицу времени, симметрична относительно плоскости  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  и обращается в нуль в двух направлениях этой плоскости при угле  $\vartheta = \arccos v$ . В данном случае энергия, излучаемая в единицу времени

$$\frac{d\epsilon}{dt_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{\omega^2}{(1-v^2)^2}. \quad (1.45)$$

Примером такого движения является движение в магнитном поле при  $\mathbf{E} = 0$ . Если  $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$ , то

$$\frac{d\epsilon}{dt_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{4\pi} \cdot \frac{v^2 H^2}{m^2 (1-v^2)}. \quad (1.46)$$

1.5. Спектральное разложение поля излучения. Поля, создаваемые движущимися зарядами, можно разложить на *монохроматические волны*. С этой целью поля представляются в виде интегралов Фурье (в случае периодического движения — в виде рядов Фурье). Для векторного потенциала такое разложение запишем в виде

$$A_{ret}^\mu(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{ret}^\mu(t, \mathbf{r}) \exp[i\omega t] dt. \quad (1.47)$$

Подставляя это представление в выражение для  $A_{ret}^\mu(r, t)$  (1.16), получаем

$$A_{ret}^\mu(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|+t_0-t)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|] j^\mu(\mathbf{r}_0, t_0) \exp[i\omega t] \times \\ \times d^4 x_0 dt = \frac{1}{4\pi} \int [j^\mu(\mathbf{r}_0, t_0)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|] \exp[i\omega(t_0+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)] d^4 x_0. \quad (1.48)$$

Для точечной частицы с учетом (1.17) имеем

$$A_{ret}^{\mu}(\omega, r) = (e/4\pi) \int [mu^{\mu}(t)/\varepsilon(t) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|] \exp\{i\omega[t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|]\} dt. \quad (1.49)$$

Рассматривая поле на больших расстояниях и оставляя главные члены разложения по  $1/r$  [см. (1.27)], получаем выражение для фурье-компонент потенциала в виде интеграла по траектории частицы  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ :

$$A_{ret}^{\mu}(\omega, r) = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int \frac{mu^{\mu}(t)}{\varepsilon(t)} \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt, \quad (1.50)$$

или в трехмерной записи

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{ret}(\omega, r) &= \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt; \\ \Phi_{ret}(\omega, r) &= \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega$  — волновой вектор. Учитывая, что [ср. с (1.30)]

$$\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]; \quad \mathbf{E} = [[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}], \quad (1.52)$$

получаем фурье-компоненты полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= i[\mathbf{k}\mathbf{A}(\omega)] = \frac{i\omega e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)] \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt = \\ &= \frac{i\omega e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} [\mathbf{n}d\mathbf{r}_0]; \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= [\mathbf{H}(\omega)\mathbf{n}] = \frac{i\omega e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int [\mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})] \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt = \\ &= \frac{i\omega e}{4\pi} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int (\mathbf{v} - \mathbf{n}) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt. \end{aligned} \quad (1.54)$$

В последнем равенстве член с  $\mathbf{n}\mathbf{v}$  был проинтегрирован по частям с учетом того, что

$$[1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t)] \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} = \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{d}{dt} \exp\{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\}.$$

Для периодического движения поле разлагается в ряд Фурье. Компоненты Фурье полей для частоты  $\omega = m\omega_0 = 2\pi m/T$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_m &= \frac{ie}{4\pi} \cdot \frac{2\pi m}{T^2} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int_{-T/2}^{T/2} [n\mathbf{v}(t)] \exp\{i m\omega_0 [t - nr_0(t)]\} dt; \\ \mathbf{E}_m &= \frac{ie}{4\pi} \cdot \frac{2\pi m}{T^2} \cdot \frac{\exp[i\omega r]}{r} \int_{-T/2}^{T/2} (\mathbf{v} - \mathbf{n}) \exp\{i m\omega_0 [t - nr_0(t)]\} dt. \end{aligned} \right\} (1.55)$$

Большой интерес представляет спектральное распределение интенсивности излучения. Пусть дано поле, разложенное в интеграл Фурье. Такое разложение встречается при рассмотрении излучения, сопровождающего столкновение заряженных частиц или прохождение заряженных частиц через внешние поля. Наиболее интересно знать полное количество энергии, излученной за все время процесса. Если  $d\epsilon(\mathbf{n}, \omega)$  — энергия, излученная в элемент телесного угла  $d\Omega$  в виде волн с частотами  $\omega, \omega + d\omega$  за все время процесса, то аналог формулы (1.32) имеет вид\*

$$d\epsilon(\mathbf{n}, \omega) = \frac{2}{2\pi} |\mathbf{E}(\omega)|^2 d\omega d\Omega r^2 = \frac{2}{2\pi} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \frac{d^3 k}{\omega^2} r^2. \quad (1.56)$$

В случае же периодического движения заряженных частиц, когда поле излучения разлагается в ряд Фурье [см. (1.55)], интенсивность излучения\*\* в элемент телесного угла  $d\Omega$  с частотой  $\omega = m\omega_0$  есть

$$dI_m = 2 |\mathbf{E}_m|^2 r^2 d\Omega. \quad (1.57)$$

\* Воспользуемся здесь тем, что для  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \exp[-i\omega t] dt$  имеет место

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 d\omega.$$

\*\* Учтем, что при разложении в ряд Фурье  $f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \exp[i m\omega_0 t]$ ,

$$f_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp[i m\omega_0 t] dt,$$

причем

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_m|^2 = 2 \sum_{m=1}^{\infty} |f_m|^2.$$



Подставляя в (1.56) явное выражение для компоненты Фурье  $\mathbf{E}(\omega)$  (1.54), находим

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \iint [\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{n}] [\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{n}] \cdot \exp\{i[\omega(t_1 - t_2) - \mathbf{k}[\mathbf{r}_0(t_1) - \mathbf{r}_0(t_2)]]\} \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} dt_1 dt_2, \quad (1.58)$$

причем здесь  $\mathbf{r}_0(t_1)$ ,  $\mathbf{r}_0(t_2)$  — положения частицы на траектории в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Интегрируя члены с  $\mathbf{v}(t_1) \mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}(t_2) \mathbf{n}$  по частям, получаем для спектрального распределения энергии излучения

$$\begin{aligned} d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) &= \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \iint [\mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2) - 1] \exp\{i[\omega(t_1 - t_2) - \mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\} \times \\ &\times \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} dt_1 dt_2 = \frac{e^2}{4\pi} \left| \int \frac{m\mathbf{u}^\mu(t)}{\varepsilon(t)} \exp[ikx(t)] dt \right|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где  $kx(t) = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)$ .

Подставляя в (1.57) явный вид разложения поля в случае периодического движения (1.55), имеем для интенсивности излучения  $m$  гармоники

$$\begin{aligned} dI_m &= \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{2\pi m^2}{T^4} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 [\mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2) - 1] \times \\ &\times \exp\{i[m\omega_0(t_1 - t_2) - \mathbf{k}[\mathbf{r}_0(t_1) - \mathbf{r}_0(t_2)]]\} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.60)$$

При получении этой формулы были по частям проинтегрированы члены вида  $\mathbf{v}(t_1) \mathbf{n}$ .

1.6. Поляризационные свойства излучения. Поскольку электромагнитное поле описывается векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , перпендикулярными направлению распространения  $\mathbf{n}$ , то наряду со спектральным составом свойства излучения определяются направлениями этих векторов (обычно для определенности выбирается вектор  $\mathbf{E}$ ). Эта важная характеристика электромагнитных волн называется *поляризацией*.

Для описания поляризационных свойств излучения можно спроектировать фурье-компоненту электрического поля на два взаимно ортогональных единичных (вообще говоря, комплексных) вектора  $\mathbf{e}_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ), которые находятся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны  $\mathbf{n}$ . Тогда для спектрального распределения энергии излучения с определенной поляризацией получаем [см. (1.58)]

$$\begin{aligned} d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \lambda) &= \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \left| \int \mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}(t) \exp[-ikx(t)] dt \right|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Наряду с таким способом описания поляризации, применимым для определения поляризационных свойств монохроматических волн, поляризацию можно описывать с помощью двухрядной поляризационной матрицы  $J_{ik} = E_i(\omega) E_k^*(\omega)$ , естественно содержащей информацию о направлении вектора поля  $E$ . Такой подход удобен не только потому, что он не связан с определенным выбором ортов  $e_\lambda$ , но и потому, что он допускает обобщение на случай *частичной поляризации*.

Рассмотрим свойства поляризационной матрицы для монохроматической волны. Всякую двухрядную матрицу можно разложить по полной системе двухрядных матриц. В качестве такой системы можно выбрать единичную матрицу  $I$  ( $I_{ik} = \delta_{ik}$ ) и три эрмитовые матрицы  $\tau_i$  со следом, равным нулю (матрицы Паули):

$$\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Тогда

$$I_{ik} = E_i(\omega) E_k^*(\omega) = I\rho_{ik},$$

$$\rho_{ik} = [\delta_{ik} + \sum_{n=1}^3 \xi_n (\tau_n)_{ik}] / 2 = (1 + \xi\tau)_{ik} / 2. \quad (1.63)$$

Поскольку матрица  $I_{ik}$ , по определению, является эрмитовой  $I_{ik} = I_{ki}^*$ , а значит, и  $\rho_{ik} = \rho_{ki}^*$ , то введенные выше параметры  $\xi_n$  являются вещественными. Так как из явного вида (1.63)  $\det(I_{ik}) = 0$ , то отсюда

$$\det \rho = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} = (1 - \xi^2) / 4 = 0, \quad (1.64)$$

где  $\xi^2$  — формальная запись  $\xi^2 = \sum_{n=1}^3 \xi_n^2$ . В формуле (1.63) явно выделен множитель  $I = \text{Sp}(I_{ik}) = \sum_{i=1}^2 I_{ii} = EE^*$ , определяющий плотность потока энергии в волне и не имеющий прямого отношения к поляризационным свойствам.

Таким образом, поляризационные свойства монохроматической плоской (распространяющейся вдоль направления  $n$ ) волны, которая, по определению, полностью поляризована, можно описывать с помощью трех вещественных параметров  $\xi_n$ , называемых *параметрами Стокса* и удовлетворяющих условию  $\xi^2 = \sum_{n=1}^3 \xi_n^2 = 1$ . Вы-

ясним физический смысл этих параметров. Пусть волна распространяется вдоль оси  $x_3$ . Волна поляризована по кругу, если компоненты электрического вектора волны удовлетворяют условию  $E_{02} = \pm iE_{01}$ ,

что соответствует ортам  $e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \pm ie_2)$ , причем знаки « $\pm$ » соответствуют правой (левой) поляризации. В этом случае (1.63) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} (I_{ik}) &= |E_1|^2 \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}; \\ \rho &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I \pm \tau_2), \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

т. е. при круговой (правовинтовой и левовинтовой) поляризации параметры Стокса  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ ;  $\xi_2 = \pm 1$ .

При линейной поляризации вдоль оси  $x_1$  (по  $e_1$ ) или  $x_2$  (по  $e_2$ ) из (1.63) имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I + \tau_3) \text{ для поляризации вдоль } x_1; \\ \rho &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I - \tau_3) \text{ для поляризации вдоль } x_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

В этом случае  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = \pm 1$  (знак «+» или «-» соответствует поляризации вдоль оси  $x_1$  или  $x_2$ ).

Рассмотрим, наконец, линейную поляризацию волны под углом  $\pi/4$  к направлению  $e_1$  (оси  $x_1$ ). Тогда орты направлены вдоль векторов  $e_{s_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \pm e_2)$  и

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I \pm \tau_1), \quad (1.67)$$

т. е. при волне, линейно поляризованной под углом  $\pi/4$  к оси  $x_1$ , параметры Стокса  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ ,  $\xi_1 = \pm 1$  (знак «+» соответствует поляризации вдоль оси, угол которой с вектором  $e_1$  равен  $\pi/4$ , знак «-» — поляризации вдоль оси, угол которой с вектором  $e_2$  равен  $\pi/4$ ). При линейной поляризации под некоторым углом  $\varphi$  к оси  $x_1$  имеем

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & 1 - \cos 2\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I + \tau_3 \cos 2\varphi + \tau_1 \sin 2\varphi), \quad (1.68)$$

причем  $\xi_1 = \sin 2\varphi$ ;  $\xi_3 = \cos 2\varphi$ ;  $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$ , т. е. при вращении в плоскости, перпендикулярной вектору  $n$ , параметры  $\xi_1$  и  $\xi_3$  меняются, но  $\xi_1^2 + \xi_3^2$  остается постоянной. Циркуляционная поляризация  $\xi_2$  при таких вращениях не меняется. Величины  $\xi_1^2 + \xi_3^2$  и  $\xi_2$  характеризуют степень линейной и круговой поляризации излучения и как объективные характеристики остаются по-

стоянными не только при указанных преобразованиях, но и при произвольных преобразованиях Лоренца.

Если волна не является монохроматической, то измеряются некоторые средние значения тензора  $\overline{I}_{ik}$ . Поляризационная матрица записывается в том же виде (1.63):

$$I_{ik} = \overline{|E|^2} \rho_{ik}; \quad \rho = (I + \xi \tau) / 2. \quad (1.69)$$

Только теперь  $I_{ik}$  не есть произведение компонент векторов, так что условие  $\det(I_{ik}) = 0$ , вообще говоря, не выполняется, но тогда не выполняется и (1.64). Если волна не поляризована, то в ней направление в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{n}$  (оси  $x_3$ ), эквивалентны, т. е.

$$\rho_{ik} = \delta_{ik} / 2; \quad \det \rho = 1/4. \quad (1.70)$$

В общем случае произвольной поляризации  $\det \rho$  имеет величину между крайними значениями: 0 (1.64) — полностью поляризованная волна и 1/4 (1.70) — неполяризованная волна. Отсюда [см. (1.64)] ясно, что  $0 \leq \xi^2 \leq 1$ . В случае произвольной поляризации матрицу (1.69) часто представляют в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ (1 - |\xi|) + |\xi| \left( 1 + \frac{1}{|\xi|} \xi \tau \right) \right], \quad (1.71)$$

где первый член описывает неполяризованную часть волны (1.71) [см. (1.70)], а второй — полностью поляризованную часть волны. Очевидно, что степень поляризации характеризует  $|\xi| = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ .

Если известна поляризационная матрица, то характеризующий поляризацию «вектор» есть

$$\xi = \text{Sp } \rho \tau. \quad (1.72)$$

В этом легко убедиться, если учесть, что  $\text{Sp } \tau = 0$ ,  $\text{Sp } \tau_i \tau_j = 2\delta_{ij}$ .

Перейдем теперь к описанию спектральных свойств излучения. В соответствии со сказанным выше и результатами предыдущего раздела поляризационные свойства излучения полностью определяются матрицей [см. (1.54), (1.58), (1.69)]:

$$d\epsilon_{ik}(n, \omega) = (e^2/4\pi) \int dt_1 \int dt_2 (v(t_1) - n)_i \times \\ \times (v(t_2) - n)_k \exp[ik(x_1 - x_2)] (d^3 k / (2\pi)^2). \quad (1.73)$$

Вместо непосредственного использования квадратичных комбинаций вида  $E_i E_k^*$ , как в (1.63) и (1.69), мы перешли в этой формуле к прямому использованию энергий излучения (интенсивностей), которые естественно содержат квадратичные комбинации полей. Этот способ адекватный, поскольку именно изменение интенсивности обычно используется для наблюдения поляризационных явлений.

Поляризационную матрицу  $d\epsilon_{ik}(n, \omega)$  можно представить в стандартном виде:

$$d\epsilon_{ik}(n, \omega) = \frac{d\epsilon(n, \omega)}{2} (I + \xi\tau)_{ik}, \quad (1.74)$$

где параметры  $\xi_n$  определяют поляризацию излучения. Если для введенного в (1.61) вектора  $e$  составить матрицу [аналог (1.63)]  $e_i^* e_k = \frac{1}{2} (I + \eta\tau)_{ki}$ ,  $|\eta| = 1$ , то выражение (1.61) можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\epsilon(n, \omega, \eta) &= d\epsilon_{ik} e_i^* e_k = d\epsilon(n, \omega) \text{Sp} [(I + \xi\tau)(I + \eta\tau)]/4 = \\ &= d\epsilon(n, \omega) (1 + \eta\xi)/2 = \\ &= d\epsilon(n, \omega) [1 - |\xi| + |\xi|(1 + \cos 2\varphi)]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Это выражение можно интерпретировать как проектирование излучения с поляризационными параметрами  $\xi$  на оси, соответствующие полностью поляризованному излучению с параметрами  $\eta$ . Введенный в (1.75) угол  $\varphi$  есть угол в плоскости, перпендикулярной вектору  $n$  между векторами поляризации, соответствующими параметрам  $\xi_1, \xi_3$  и  $\eta_1, \eta_3$ . Если излучение полностью поляризовано  $|\xi| = 1$ , то для  $\eta = \xi$  имеем

$$d\epsilon(n, \omega, \xi) = d\epsilon(n, \omega). \quad (1.76)$$

В любом другом случае энергия излучения  $d\epsilon(n, \omega, \eta)$  меньше полной энергии излучения  $d\epsilon(n, \omega)$ .

## § 2. ИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

2.1. Особенности излучения в ультрарелятивистской области. Излучение ультрарелятивистских частиц ( $\gamma \gg 1$ ,  $\gamma = \epsilon/m$ ) обладает замечательной особенностью, состоящей в том, что влияние продольной компоненты внешней силы (по отношению к направлению движения частицы) пренебрежимо мало по сравнению с ролью перпендикулярной (поперечной) компоненты.

Действительно, сила в релятивистской механике

$$F = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \left[ \dot{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})}{1-v^2} \right]. \quad (2.1)$$

Отсюда для продольной (по отношению к скорости) компоненты ускорения имеем

$$\dot{v}_{\parallel} = (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})/v = F_{\parallel}/m\gamma^3, \quad (2.2a)$$

а для поперечной компоненты

$$\dot{v}_{\perp} = F_{\perp}/(m\gamma). \quad (2.26)$$

Из этих формул следует, что продольная сила ускоряет в  $\gamma^2$  раз слабее, чем поперечная. Подставляя эти выражения соответственно в (1.42) и (1.45), видим, что при одинаковом порядке величины продольной и поперечной компонент силы излучение, вызванное продольной составляющей, пренебрежимо мало (порядка  $1/\gamma^2$ ) по сравнению с излучением, вызванным поперечной составляющей силы. При этих условиях можно пренебречь продольной составляющей силы (а следовательно, и продольным ускорением) и приближенно считать, что интенсивность излучения полностью определяется только поперечной силой (поперечным ускорением)\*. В этом приближении  $(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (v^2) = 0$ , т. е.  $v^2$  сохраняется. Таким свойством обладает движение по окружности, причем  $\dot{v}_{\perp} = v^2/R \approx \approx 1/R$  ( $R$  — радиус окружности, в ультрарелятивистском случае  $v^2 = 1 - 1/\gamma^2 \approx 1$ ). Иными словами, излучение заряженной частицы при произвольном плоском ультрарелятивистском движении приближенно совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности с мгновенным радиусом кривизны  $R = 1/\dot{v}_{\perp}$ . Для поперечной составляющей силы

$$\begin{aligned} F_{\perp}^2 &= (d\mathbf{p}/dt)^2 - (1/v^2) (\mathbf{v}d\mathbf{p}/dt)^2 = (d\mathbf{p}/dt)^2 - (1/v^2) (d\varepsilon/dt)^2 = \\ &= -(1/\gamma^2) (d\mathbf{p}_{\mu}/d\tau)^2 [1 + 0(1/\gamma^2)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда в ультрарелятивистском пределе следует, что

$$(1/m^2) (F_{\perp}^2 \gamma^2) = (\dot{v}_{\perp} \gamma^2)^2 = -(1/m^2) (d\mathbf{p}_{\mu}/d\tau)^2 = \text{inv} \quad (2.4)$$

есть инвариант преобразований Лоренца. Это обстоятельство оказывается весьма важным при рассмотрении излучения ультрарелятивистских частиц.

Угловое распределение энергии, излучаемой частицей в единицу времени  $t_0$ , следует из формулы (1.34). С учетом сделанных приближений

$$\frac{d\varepsilon(n)}{dt_0} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{(1-nv)^5} \left[ \dot{v}_{\perp}^2 (1-nv)^2 - \frac{1}{\gamma^2} (n\dot{v}_{\perp})^2 \right] d\Omega. \quad (2.5)$$

В этом выражении в знаменателях обоих членов содержатся высокие степени величины  $1 - nv = 1 - v \cos \vartheta$ . Эта величина принимает минимальное значение при  $\vartheta = 0$ , когда она равна  $1 - v = = (1 - v^2)/(1 + v) \approx 1/2\gamma^2$ . Малость знаменателя приводит к резкому росту выражения (2.5). Поэтому для выделения главных по

\* Случай, когда сила  $\mathbf{F}$  направлена почти по скорости, так что  $F_{\parallel} \sim F_{\perp}\gamma$ , требует отдельного рассмотрения. Излучение в этом случае того же порядка, что и при продольном ускорении.

$1/\gamma$  членов в энергии излучения можно провести разложение

$$1 - nv = 1 - v \cos \vartheta \approx \frac{1}{2} (1/\gamma^2 + \vartheta^2) + 0(1/\gamma^4). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), приходим к заключению, что угловое распределение излучения ультрарелятивистской частицы представляет узкий, иглообразный конус с углом раствора  $\vartheta \sim 1/\gamma$  с осью, направленной вдоль вектора мгновенной скорости частицы. По этой причине, чтобы найти главные по  $1/\gamma$  характеристики излучения, всегда можно проводить разложение (2.6) и оставлять главные члены разложения.

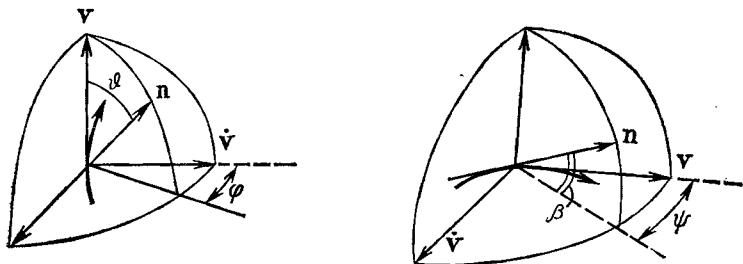


Рис. 3. Системы отсчета углов при рассмотрении угловых характеристик излучения, углы  $\beta$ ,  $\psi$  удобны для описания излучения быстрых частиц.

Для детального рассмотрения углового распределения излучения удобно ввести систему отсчета углов, несколько отличную от принятой в разделе 1.4. А именно, введем  $\beta$  — угол между плоскостью  $(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$  и вектором  $\mathbf{n}$  и  $\psi$  — угол между проекцией вектора  $\mathbf{n}$  на плоскость  $(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$  и вектором  $\mathbf{v}$  (рис. 3). Входящие скалярные комбинации имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{nv} &= v \cos \beta \cdot \cos \psi; \\ \mathbf{n\dot{v}}_{\perp} &= \dot{v}_{\perp} \cos \beta \cdot \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Такая система отсчета углов удобна потому, что основной вклад в излучение дают малые ( $\sim 1/\gamma$ ) углы  $\beta$  и  $\psi$  в соответствии с тем, что угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$  порядка  $1/\gamma$ , в то же время при использовании углов  $\vartheta$  и  $\varphi$   $\vartheta \sim 1/\gamma$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Подставляя (2.7) в (2.5) и учитывая, что  $\beta, \psi \sim 1/\gamma \ll 1$ , получаем для углового распределения излучаемой энергии\*

$$\frac{d\varepsilon(\mathbf{n})}{dt_0} = \frac{e^2 \dot{v}_{\perp}^2}{2\pi^2(\mu^2 + \psi^2)^5} [(\mu^2 - \psi^2)^2 + 4\beta^2 \psi^2] d\beta d\psi, \quad (2.8)$$

где  $\mu^2 = 1/\gamma^2 + \beta^2$ . Часто представляет интерес распределение,

\* Напомним, что здесь рассматривается случай, когда продольная и поперечная компоненты силы имеют один порядок величины.

проинтегрированное по азимутальному углу  $\psi$ . Выполняя это интегрирование, имеем\* (рис. 4)

$$\frac{d\varepsilon(\beta)}{dt_0} = \frac{e^2}{64\pi} \cdot \frac{\dot{v}_\perp^2}{\mu^7} [7\mu^2 + 5\beta^2] d\beta = \frac{e^2}{64\pi} \cdot \frac{\dot{v}_\perp^2}{\mu^7} [12\beta^2 + 7/\gamma^2] d\beta. \quad (2.9)$$

Наконец, проинтегрировав по углу  $\beta$ , получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt_0} = \frac{e^2}{6\pi} \dot{v}_\perp^2 \gamma^4. \quad (2.10)$$

Эта формула совпадает с (1.45). Полная интенсивность излучения (2.10) инвариантна при преобразованиях Лоренца [см. (1.39)].

2.2. Поляризация излучения в ультрарелятивистской области.

Очевидно, что просуммированная по всем частотам энергия излучения может иметь только линейную поляризацию, которая характеризует среднее направление вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ . Для описания поляризации (см. раздел 1.6) разложим вектор электрического поля (1.30) по двум взаимно ортогональным единичным векторам:

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{s} + E_2 [\mathbf{ns}], \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{s} = \mathbf{w}/w$ ,  $\mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{v}}$ . Такой выбор системы ортов удобен для использования принятой системы отсчетов углов (см. рис. 3). Строго говоря, вектор  $\mathbf{E}$  не ортогонален вектору  $\mathbf{n}$ , однако эта неточность порядка  $1/\gamma$ , так что разложение (2.11) можно использовать для вычисления главных членов (с точностью  $1/\gamma$ ).

Разлагая вектор  $\mathbf{E}$  [см. (1.30)] по векторам  $\mathbf{s}$ ,  $[\mathbf{ns}]$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{e\omega}{4\pi r (1 - \mathbf{nv})^3} [(\mathbf{ns})^2 - (1 - \mathbf{nv})]; \\ E_2 &= \frac{e\omega}{4\pi r (1 - \mathbf{nv})^3} (\mathbf{n} [\mathbf{vs}]) (\mathbf{ns}). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

\* При интегрировании по углам  $\psi$ ,  $\beta$  основной вклад дают  $\psi$ ,  $\beta \sim 1/\gamma$ ; ввиду быстрой сходимости интегралов для вычисления главных членов разложения по  $1/\gamma$  можно устремить верхний предел интегрирования к бесконечности. Дальнейшее вычисление элементарно, если воспользоваться формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2s} dx}{(a^2 + x^2)^v} = (1/a^{2v-2s-1}) \frac{\Gamma(s+1/2) \Gamma(v-s-1/2)}{\Gamma(v)}.$$



Подставляя (2.12) в (1.63) и (1.73) и выражая входящие в них комбинации через углы  $\beta$ ,  $\psi$  (2.7), получаем общее представление поляризационной матрицы для излучения ультрарелятивистских частиц:

$$\frac{d\epsilon_{ik}(n)}{dt_0} = \frac{e^2 \omega^2 d\psi d\beta}{2\pi^2 (\mu^2 + \psi^2)^5} \begin{pmatrix} (\mu^2 - \psi^2)^2 & 2\psi\beta(\psi^2 - \mu^2) \\ 2\psi\beta(\psi^2 - \mu^2) & 4\psi^2 \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Естественно, что

$$\text{Sp}(d\epsilon_{ik}(n)/dt_0) = d\epsilon(n)/dt_0 \quad (2.14)$$

есть полная энергия, излучаемая в единицу времени. Определяемые с помощью (1.72) и (2.13) параметры Стокса будут следующие:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 0; \quad \xi_1 = \frac{4\psi\beta[\psi^2 - \mu^2]}{[\psi^2 - \mu^2]^2 + 4\psi^2 \beta^2}; \\ \xi_3 &= \frac{[\psi^2 - \mu^2]^2 - 4\psi^2 \beta^2}{[\psi^2 - \mu^2]^2 + 4\psi^2 \beta^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Видно, что круговая поляризация отсутствует, это очевидно было и ранее. Из (2.15) следует, что  $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$ , т. е. излучение ультрарелятивистской частицы является полностью линейно поляризованным под углом  $\varphi$  к оси  $s$ , причем угол  $\varphi$  находится из соотношения

$$\text{tg } \varphi = 2\psi\beta/(\psi^2 - \mu^2). \quad (2.16)$$

Проинтегрировав поляризационную матрицу плотности (2.13) по азимутальному углу  $\psi$ , получим поляризационные свойства излучения в зависимости от полярного угла излучения  $\beta$  по отношению к плоскости  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ . Это интегрирование выполняется так же, как в формуле (2.9), причем недиагональные члены выпадают вследствие нечетности подынтегральной функции

$$\frac{d\epsilon_{ik}(\beta)}{dt_0} = \frac{e^2}{64\pi} \cdot \frac{\omega^2}{\mu^7} \begin{pmatrix} 7\mu^2 & 0 \\ 0 & 5\beta^2 \end{pmatrix} d\beta, \quad (2.17)$$

отсюда для параметров Стокса имеем

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = (7 + 2\beta^2 \gamma^2)/(7 + 12\beta^2 \gamma^2). \quad (2.18)$$

Таким образом, излучение полностью линейно поляризовано вдоль направления ускорения  $\mathbf{w}$  при  $\beta = 0$  и частично поляризовано вдоль этого направления, если  $\beta \neq 0$ , причем при  $\beta \gg 1/\gamma$

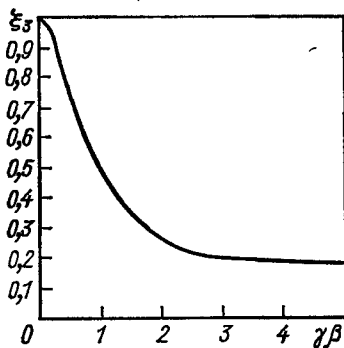


Рис. 5. Зависимость степени линейной поляризации излучения вдоль направления ускорения от полярного угла.

степень поляризации стремится к  $1/8$  (рис. 5). Наконец, выполняя интегрирование по полярному углу  $\beta$ , получаем

$$\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt_0} = \frac{e^2 \omega^2 \gamma^4}{6\pi} \begin{bmatrix} 7/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

и для параметров Стокса

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = 3/4. \quad (2.20)$$

Итак, излучение ультрарелятивистских частиц в целом (независимо от взаимоотношения между направлением излучения  $\mathbf{n}$  и кинематическими характеристиками частицы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ) частично поляризовано вдоль направления ускорения  $\mathbf{w}$ , причем степень поляризации  $\xi_3 = 3/4$ .

### § 3. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

3.1. Характерные случаи излучения. В предыдущем параграфе было показано, что ультрарелятивистская частица излучает в основном вперед, в узкий конус с осью, направленной вдоль скорости частицы  $\mathbf{v}$  и углом раствора  $\theta \sim 1/\gamma$ . В соответствии с этим для нахождения спектрального разложения излучения ультрарелятивистской частицы оказывается существенным взаимоотношение между полным углом отклонения частицы во внешнем\* поле и углом  $1/\gamma$ . Задачи излучения разбиваются на два характерных случая.

1. Полный угол отклонения частицы в поле велик по сравнению с  $1/\gamma$ . Тогда в данном направлении  $\mathbf{n}$  частица излучает с небольшого участка траектории, на котором направление скорости частицы меняется на угол  $\sim 1/\gamma$ . Этот участок траектории будем называть *длиной формирования излучения (длиной когерентности)*. При этом предположим, что можно пренебречь изменением внешнего поля, действующего на частицу, на длине излучения, т. е. что

$$|\dot{\mathbf{F}}| \Delta t / F \ll 1, \quad (3.1)$$

где  $\dot{\mathbf{F}}$  — изменение внешнего поля на траектории;  $\Delta t$  — время поворота на угол  $1/\gamma$ . Введя мгновенный радиус кривизны  $R$ , имеем  $\Delta t \approx v \Delta t \approx R/\gamma$ . Тогда критерий (3.1) можно записать в виде

$$n/\gamma \ll 1, \quad (3.2)$$

где введена безразмерная характеристика неоднородности внешнего поля  $n = |\dot{\mathbf{F}}| R/F \sim |\nabla F| R/F$ . При выполнении этого условия можно получить универсальные выражения, справедливые для лю-

\* Ниже под внешним полем понимается электромагнитное поле, создаваемое внешними источниками, в котором движется излучающая заряженная частица.

бого поля. Все характеристики излучения зависят только от мгновенных значений  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$ , поскольку эти величины почти не меняются на длине излучения. Такое положение имеет место, например, в магнитотормозном излучении.

II. Полный угол отклонения частицы во внешнем поле меньше или порядка характерного угла излучения. Тогда все излучение частиц проходит в узкий конус с углом раствора  $\sim 1/\gamma$  и определяются почти всей траекторией частицы. В этом случае также можно получить ряд общих характеристик излучения, хотя здесь излучение более чувствительно к специфике внешнего поля. Такая ситуация имеет место, например, в случае тормозного излучения в кулоновском поле.

3.2. Качественная картина излучения в случае I. Излучение происходит с небольшого участка траектории, на котором скорость частицы поворачивается на угол  $\sim 1/\gamma$ . Разность фаз волн, испущенных частицей в направлении  $\mathbf{n}$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\Delta\varphi = \omega \{t_2 - t_1 - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)]\}. \quad (3.3)$$

Как только разность фаз становится порядка единицы, излучение из разных точек становится некогерентным, и происходит срыв излучения. Учтем теперь, что излучение происходит с небольшого участка траектории, на котором  $\Delta v \approx v/\gamma \approx 1/\gamma$ , и проведем разложение входящих в (3.2) величин по разности времен  $t_2 - t_1 = \tau$ . Тогда имеем

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}(t_1) + \dot{\mathbf{r}}(t_1)\tau + \ddot{\mathbf{r}}(t_1)\tau^2/2! + \dddot{\mathbf{r}}(t_1)\tau^3/3! + \dots;$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\approx \omega\tau [1 - \mathbf{n}\mathbf{v} - \mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{n}\ddot{\mathbf{v}}\tau^2/6] \approx \\ &\approx \omega\tau [1 - \mathbf{n}\mathbf{v} - \mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}\tau/2 + \dot{\mathbf{v}}^2\tau^2/6]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При получении последнего равенства воспользовались тем, что силу, действующую на частицу, можно считать поперечной, т. е.  $(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) = 0$ . Тогда с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$

$$(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{v}}) = -\dot{\mathbf{v}}^2. \quad (3.5)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (3.4), имеет порядок величины  $1/\gamma^2$ . Действительно: а) величина  $1 - \mathbf{n}\mathbf{v} \sim 1 - v \approx 1/2\gamma^2$ ; б) как уже отмечалось, излучение происходит с небольшого участка траектории, на котором изменение скорости

$$|\Delta\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{v}}|\tau \sim 1/\gamma; \quad \tau \sim 1/|\dot{\mathbf{v}}|\gamma; \quad (3.6)$$

в) с точностью до членов порядка  $1/\gamma^2$  имеем  $(\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}) = 0$ , но тогда  $(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) \sim |\dot{\mathbf{v}}|/\gamma$ , так как вектор  $\mathbf{n}$  направлен почти по вектору скорости  $\mathbf{v}$ . Таким образом, разность фаз

$$\Delta\varphi \sim \omega/|\dot{\mathbf{v}}|\gamma^3. \quad (3.7)$$

Условие срыва излучения  $\Delta\varphi \sim 1$  определяет границу частот, которые могут изучаться при данном движении (характеризуемом скоростью  $\mathbf{v}$  и ускорением  $\dot{\mathbf{v}}$ ). Из (3.7) граничная частота

$$\omega \sim \omega_c = |\dot{\mathbf{v}}|\gamma^3. \quad (3.8)$$

Для более высоких частот разность фаз становится порядка единицы внутри конуса излучения, так что в нем есть волны с данной частотой, идущие в противофазе. Интерференция таких волн приводит к гашению излучения и в итоге к падению интенсивности излучения при частотах  $\omega \gg \omega_c$ . Спектральные разложения энергии поля излучения содержат интегралы вида  $\exp(i\Delta\varphi) dt$ , при больших частотах подынтегральная функция быстро осциллирует, а это означает взаимное гашение волн. Поскольку интегралы такого типа экспоненциально малы, отсюда следует, что интенсивность излучения при  $\omega < \omega_c$  падает экспоненциально. Для частот  $\omega < \omega_c$  разность фаз  $\Delta\varphi$  мала и экспоненциальный член  $\exp(i\Delta\varphi)$  можно заменить на единицу; таким образом, поведение излучения определяется предэкспоненциальным множителем. Если этот множитель растет с увеличением частоты, то максимум распределения интенсивности излучения по частотам лежит при  $\omega \sim \omega_c$ . Следовательно, при больших энергиях частицы в основном излучают высокие гармоники по сравнению с характерными частотами движения, которые задаются величиной  $|\dot{\mathbf{v}}|$  (например, для кругового движения  $|\dot{\mathbf{v}}| \approx 1/R \approx \omega_0$  — частота обращения).

Соотношение (3.8) получается также из следующих простых соображений. Вклад в излучение в заданном направлении дает участок траектории, определенный формулой (3.6). Отсюда характерные излучаемые частоты в системе отсчета, связанной с частицей, суть  $\omega_r \sim 1/\tau \sim |\dot{\mathbf{v}}|\gamma$ . В лабораторной системе вследствие эффекта Допплера (частица движется на наблюдателя) принимается частота в  $\gamma^2$  раз больше. Иными словами, длительность излучения в  $L$ -системе [см. (1.33)]

$$\Delta t = (dt/d\tau) \tau = (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) \tau \sim \tau/\gamma^2; \quad \omega \sim 1/\Delta t \sim |\dot{\mathbf{v}}|\gamma^3. \quad (3.9)$$

Таким образом, картина излучения в данном направлении при произвольном движении ультрарелятивистской частицы представляет собой краткий импульс (или краткую вспышку) излучения (последовательность таких вспышек при периодическом движении) длительностью  $\Delta t$  (рис. 6) с набором частот вплоть до  $\omega \sim |\dot{\mathbf{v}}|\gamma^3$ . Ввиду малости времени формирования импульса можно говорить о мгновенных характеристиках излучения с частотой  $\omega$  в направле-

нии  $\mathbf{n}$ . Эти характеристики при выполнении условий (3.1) и (3.2) являются универсальными и определяются только частотой и ускорением частицы  $\dot{\mathbf{v}}$ .

3.3. Спектральное распределение и поляризационные свойства излучения в случае I. Будем здесь исходить из спектрального разложения

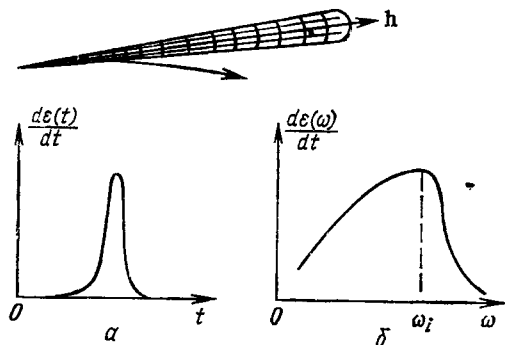


Рис. 6. Временные (а) и частотные (б) характеристики излучения ультррелятивистской частицы.

(1.73). Для дальнейшего рассмотрения задачи излучения в случае I оказывается удобным ввести переменные:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= (t_1 + t_2)/2; & \tau &= t_2 - t_1; \\ t_1 &= t_0 - \tau/2; & t_2 &= t_0 + \tau/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Как уже говорилось выше, время излучения в данном направлении много меньше, чем времена, характеризующие движение частицы. Имея это в виду, можно разложить кинематические характеристики частицы по степеням  $\tau$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v} - \dot{\mathbf{v}}\tau/2 + \ddot{\mathbf{v}}\tau^2/8; \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\tau/2 + \ddot{\mathbf{v}}\tau^2/8; \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= \dot{\mathbf{v}}\tau + \ddot{\mathbf{v}}\tau^3/24. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$  и т. д.

Подставляя это разложение в формулу (1.73), получаем для интенсивности излучения ультррелятивистской частицы (энергии, излучаемой в единицу времени частицы) с учетом поляризационных свойств излучения следующее выражение:

$$\begin{aligned} dI_{ik}(\mathbf{n}, \omega) &\equiv d\epsilon_{ik}(\mathbf{n}, \omega)/dt_0 = (e^2/4\pi) \int (\mathbf{v} - \mathbf{n} - \dot{\mathbf{v}}\tau/2 + \ddot{\mathbf{v}}\tau^2/8)_i \times \\ &\times (\mathbf{v} - \mathbf{n} + \dot{\mathbf{v}}\tau/2 + \ddot{\mathbf{v}}\tau^2/8)_k \exp[-i\omega\tau(1 - \mathbf{n}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^2\tau^2/24)] \times \\ &\times d\tau d^3k/(2\pi)^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где мы перешли к переменным  $\tau$ ,  $t_0$  и при преобразовании показателя экспоненты воспользовались формулой (3.5). Отметим, что хотя разложение (3.11) справедливо в узком интервале относительно момента времени  $t_0$ , интеграл по  $\tau$  (3.12) можно распространить на бесконечный интервал, поскольку область больших  $\tau$  дает пренебрежимо малый вклад ввиду быстрых осцилляций подынтегральной функции. Для того чтобы выписать поляризационную матрицу в явном виде, введем, как и в предыдущем параграфе [см. (2.7)], углы  $\beta$  и  $\psi$  (см. рис. 3), тогда (3.12) приобретает вид

$$dI_{ik}(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) \cdot (d^3k/(2\pi)^2) \int_{-\infty}^{\infty} L_{ik}^c \exp[-i\omega\tau(\mu^2 + \psi^2 + \omega^2\tau^2/12)/2] d\tau, \quad (3.13)$$

где  $\omega = |\mathbf{w}|$ , матрица

$$(L^c) = \begin{pmatrix} \psi^2 - \omega^2\tau^2/4 & \beta(\psi + \omega\tau/2) \\ \beta(\psi - \omega\tau/2) & \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Для просуммированной по поляризациям интенсивности излучения получаем [ср. формулы (1.58) и (1.59)]

$$dI(\mathbf{n}, \omega) = \text{Sp}(dI_{ik}) = (e^2/4\pi) \cdot (d^3k/(2\pi)^2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} [2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) - 1/\gamma^2 - \omega^2\tau^2/4] \exp[-i\omega\tau(1 - \mathbf{n}\mathbf{v} + \omega^2\tau^2/24)] d\tau. \quad (3.15)$$

Наконец, проинтегрировав по частям член с  $1 - \mathbf{n}\mathbf{v}$  [аналогично переходу от формулы (1.58) к формуле (1.59)], или, что то же самое, подставив разложения (3.11) в формулу (1.59), имеем для интенсивности излучения\*

$$dI(\mathbf{n}, \omega) = -(e^2/4\pi) (d^3k/(2\pi)^2) \int_{-\infty}^{\infty} (1/\gamma^2 + \omega^2\tau^2/2) \times \\ \times \exp\{-i\omega\tau[(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) + \omega^2\tau^2/24]\} d\tau = -(e^2/4\pi) (d^3k/(2\pi)^2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} (1/\gamma^2 + \omega^2\tau^2/2) \exp[-i\omega\tau(\mu^2 + \psi^2 + \omega^2\tau^2/12)/2] d\tau. \quad (3.16)$$

\* Из формулы (3.16) снова можно получить оценки (3.6) и (3.9). Действительно, основной вклад в интеграл дает область изменения  $\tau$ , где подынтегральное выражение не осциллирует, т. е. когда  $\omega^2\tau^2 \sim (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) \sim 1/\gamma^2$ , откуда  $\omega \sim \gamma^2/\tau \sim |\dot{\mathbf{v}}| \gamma^3$ .

Входящие в формулы (3.13)—(3.16) интегралы по  $\tau$  берутся с помощью следующих соотношений (см. [52], с. 412, 984):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(bx + ax^3) dx = 2/3 \sqrt{b/a} K_{1/3}((2/3 \sqrt{3}) (b^{3/2}/a^{1/2}));$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin(bx + ax^3) dx = (2/3 \sqrt{3}) (b/a) K_{2/3}((2/3 \sqrt{3}) (b^{3/2}/a^{1/2})); \quad (3.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(bx + ax^3) dx = -(b/3a) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(bx + ax^3) dx.$$

Здесь  $K_\nu(\xi)$  — функция Бесселя мнимого аргумента (функция Макдональда).

Интегрируя (3.15) и (3.16) по  $\tau$ , получаем для просуммированной по поляризации интенсивности излучения

$$dI(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) (d^3 k / (2\pi)^2) 4 \sqrt{2/3} (\sqrt{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/\omega}) [4(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}) - 1/\gamma^2] K_{1/3}(\xi) = (e^2/4\pi) (d^3 k / \sqrt{3} \pi^2) (\sqrt{\mu^2 + \psi^2}/\omega) \times \\ \times [2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2] K_{1/3}(\xi), \quad (3.18)$$

$$\text{где } \xi = (4 \sqrt{2/3}) (\omega/\omega) (1 - \mathbf{n}\mathbf{v})^{3/2} = (2/3) (\omega/\omega) (\psi^2 + \mu^2)^{3/2}. \quad (3.19)$$

Интегрируя поляризационную матрицу (3.13) и (3.14), находим

$$dI_{ik}(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) (d^3 k / (2\pi)^2) 4 \sqrt{2/3} (\sqrt{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/\omega}) \times \\ \times \begin{pmatrix} [(ns)^2 + 2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})] K_{1/3}(\xi) & (\mathbf{n}[\mathbf{v}\mathbf{s}]) [(ns) K_{1/3}(\xi) - \\ & - i\sqrt{2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})} K_{2/3}(\xi)] \\ (\mathbf{n}[\mathbf{v}\mathbf{s}]) [(ns) K_{1/3}(\xi) + \\ + i\sqrt{2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})} K_{2/3}(\xi)] & (\mathbf{n}[\mathbf{v}\mathbf{s}])^2 K_{1/3}(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

где  $s = \mathbf{w}/\omega$ . Учитывая, что с нашей точностью [см. (2.7)]

$$1 - \mathbf{n}\mathbf{v} = (\psi^2 + \mu^2)/2; \quad \mu^2 = \beta^2 + 1/\gamma^2; \quad (\mathbf{n}[\mathbf{v}\mathbf{s}]) = \beta; \quad (ns) = \psi, \quad (3.21)$$

имеем представление поляризационной матрицы через углы

$$dI_{ik}(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) (d^3 k / \sqrt{3} \pi^2) (\sqrt{\mu^2 + \psi^2}/\omega) \times \\ \times \begin{pmatrix} (2\psi^2 + \mu^2) K_{1/3}(\xi) & \beta [\psi K_{1/3}(\xi) - i\sqrt{\mu^2 + \psi^2} K_{2/3}(\xi)] \\ \beta [\psi K_{1/3}(\xi) + i\sqrt{\mu^2 + \psi^2} K_{2/3}(\xi)] & \beta^2 K_{1/3}(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Естественно, что  $dI(\mathbf{n}, \omega) = \text{Sp}(dI_{ik}(\mathbf{n}, \omega))$ . Выражение (3.18) описывает дифференциальное по всем углам спектральное распределение интенсивности излучения. Иными словами, задаются мгновенные свойства излучения в момент времени  $t_0$ , для которого вектор

скорости, являющийся одним из реперов системы отсчета углов,  $v(t_0)$ . Аргумент  $K_\nu(\xi)$  в формулах (3.18)—(3.22) в конусе излучения, т. е. когда  $1 - \beta v \sim 1/\gamma^2$ , имеет порядок

$$\xi \sim \omega/\omega\gamma^3 = \omega/\omega_c. \quad (3.23)$$

Учтем теперь, что разложение функций  $K_\nu(z)$  при больших и малых значениях аргумента (см. [52], с. 975, 977)

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi/2z} \exp(-z), \quad z \gg 1; \quad K_\nu(z) = [\Gamma(\nu)/2] (2/z)^\nu, \quad z \ll 1. \quad (3.24)$$

Итак, при  $\xi \ll 1$ , т. е. при малых частотах  $\omega \ll \omega_c$  при фиксированных углах внутри конуса излучения, когда  $\psi^2 + \mu^2 \sim (1/\gamma^2)[(\psi^2 + \mu^2)_{\text{мин}} - 1/\gamma^2]$ , спектральное распределение интенсивности излучения имеет вид

$$dI(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) (d\omega d\beta d\psi/2\pi^2) (\Gamma(1/3) \omega^{5/3}/3^{1/6} \omega^{2/3}) [2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2]. \quad (3.25)$$

Как функция излучаемой частоты это выражение растет пропорционально  $\omega^{5/3}$ . При  $\xi \gg 1$ , т. е. при больших частотах  $\omega \gg \omega_c$  внутри конуса излучения  $(\psi^2 + \mu^2) \sim 1/\gamma^2$  или при больших углах излучения:

$$dI(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) (d\omega d\beta d\psi/2\pi^2) (\sqrt{\pi} \omega^{3/2}/\sqrt{\omega} (\mu^2 + \psi^2)^{1/4}) \times \\ \times [2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2] \exp[-(2\omega/3\omega) (\mu^2 + \psi^2)^{3/2}]. \quad (3.26)$$

В этой области интенсивность экспоненциально падает, что, как уже отмечалось, связано с взаимным гашением волн, излучаемых в противофазе. Для поляризационной матрицы (3.22) параметры Стокса, определяемые по формуле (1.72), следующие:

$$\xi_1 = 2\psi\beta/[2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2]; \quad \xi_3 = (2\psi^2 + 1/\gamma^2)/[2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2]; \\ \xi_2 = 2\beta(\psi^2 + \mu^2) K_{2/3}(\xi)/\{[2(\psi^2 + \mu^2) - 1/\gamma^2] K_{1/3}(\xi)\}. \quad (3.27)$$

Таким образом, излучение в данном направлении является, вообще говоря, частично поляризованным. При  $\beta = 0$  [излучение в направлении  $\mathbf{n}$ , лежащем в плоскости  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , см. рис. 3] параметры  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_3 = 1$ , т. е. излучение полностью линейно поляризовано вдоль направления ускорения.

Следует, однако, иметь в виду, что в данном направлении наблюдается излучение, испускаемое не в одной точке, а с участка траектории, на котором частица поворачивается на угол  $\sim 1/\gamma$  (см. рис. 6). Для того чтобы найти соответствующие характеристики, представляющие особый интерес при наблюдении излучения ультрарелятивистских частиц, необходимо просуммировать излучение по всем углам поворота, т. е. проинтегрировать выраже-



ния (3.18) и (3.22) по углу  $\psi$ . Ввиду быстрого затухания функций при больших углах  $\psi$  интегрирование по  $\psi$ , как и интегрирование по относительному времени  $\tau$ , можно распространить на бесконечный интервал. Оказывается, что вычисление существенно упрощается, если интегрировать не выражения (3.18) и (3.22), а провести одновременно интегрирование по  $\tau$  и  $\psi$  в формулах (3.13) и (3.16).

Найдем спектральное распределение интенсивности излучения (3.16), просуммированное по поляризациям

$$dI(\beta, \omega) = \int_{\psi} dI(n, \omega) = -(e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega d\beta / (2\pi)^2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (1/\gamma^2 + \omega^2 \tau^2/2) \exp\{-i\omega\tau(\mu^2 + \psi^2 + \omega^2 \tau^2/12)/2\}. \quad (3.28)$$

Для выполнения интегрирования введем следующие переменные:

$$\left. \begin{aligned} \omega\tau &= \delta(x+y); \quad \psi = \delta(x-y)/2; \quad |\partial(\tau, \psi)/\partial(x, y)| = \delta^2/\omega; \\ \delta &= (2\omega/\omega)^{1/3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

тогда

$$dI(\beta, \omega) = -(e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega d\beta / (2\pi)^2) (\delta^2/\omega) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy [1/\gamma^2 + \delta^2(x+y)^2/2] \exp\{-i[\mu^2(x+y)/\delta^2 + \\ + (x^3 + y^3)/3]\}. \quad (3.30)$$

Этот интеграл легко берется с помощью формул (3.17):

$$dI(\beta, \omega) = (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega d\beta / 3\pi^2) (\mu^2/\omega) [\beta^2 K_{1/3}^2(\eta) + \mu^2 K_{2/3}^2(\eta)] = \\ = (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega d\beta / 3\pi^2) (\mu^2/\omega) [\mu^2 (K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)) - K_{1/3}^2(\eta)/\gamma^2], \quad (3.31)$$

где

$$\eta = \omega\mu^3/3\omega. \quad (3.32)$$

Рассмотрим свойства спектрального распределения излучения (3.31) внутри конуса излучения ( $\mu^2 \sim 1/\gamma^2$ ) аргумент  $K$ -функций

$$\eta \sim \omega/\omega\gamma^3 = \omega/\omega_c, \quad (3.33)$$

как и в (3.23). Тогда, используя формулы (3.24), можно получить асимптотические представления (3.31) при  $\eta \ll 1$  и  $\eta \gg 1$ . В области малых частот ( $\eta \ll 1$ )

$$dI(\beta, \omega) = (e^2/4\pi) (d\omega d\beta / 3\pi^2) (9/2)^{2/3} \Gamma^2(2/3) \omega^{2/3} \omega^{1/3}. \quad (3.34)$$

При больших частотах внутри конуса излучения ( $\omega \gg \omega_c$ ) или при больших углах излучения ( $\eta \gg 1$ )

$$dI(\beta, \omega) = (e^2/4\pi) (d\omega d\beta / 2\pi) \omega [\mu + \beta^2/\mu] \exp[-2\omega\mu^3/3\omega]. \quad (3.35)$$

Как следует из (3.31)—(3.35), максимум функции  $dI(\beta, \omega)/d\beta d\omega$  достигается при  $\eta \sim 1$ . Рассмотрим излучение под разными углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Из (3.32) следует, что с ростом частоты величина  $\eta \sim 1$

достигается тем раньше, чем больше угол излучения. Иными словами, чем больше угол  $\beta$ , тем излучение «краснее» (рис. 7).

Поляризационная матрица, проинтегрированная по углу  $\psi$ , вычисляется так же, как выражение (3.31). Проведем в (3.13) и (3.14) замену (3.29), тогда матрица  $L^c$  (3.14) будет

$$L^c = \begin{pmatrix} -\delta^2 xy & -\beta \delta y \\ \beta \delta x & \beta^2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

и поляризационная матрица

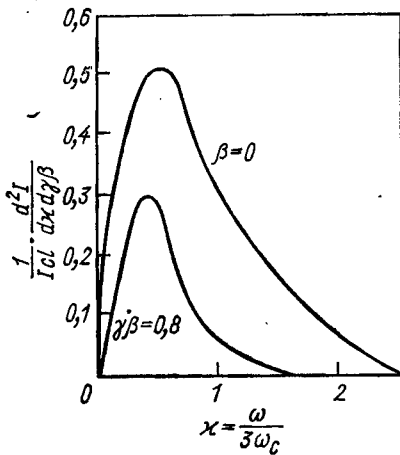
$$dI_{ik}(\beta, \omega) = (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega d\beta/3\pi^2) (\mu^2/\omega) \times \\ \times \begin{pmatrix} \mu^2 K_{2/3}^2(\eta) & -i\beta\mu K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) \\ i\beta\mu K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) & \beta^2 K_{1/3}^2(\eta) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Очевидно,  $dI(\beta, \omega) = \text{Sp}(dI_{ik}(\beta, \omega))$ . Параметры Стокса для поляризационной матрицы (3.37) следующие:

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = 2\beta\mu K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / (\beta^2 K_{1/3}^2(\eta) + \mu^2 K_{2/3}^2(\eta)); \quad \xi_3 = \\ = [\mu^2 K_{2/3}^2(\eta) - \beta^2 K_{1/3}^2(\eta)] / [\mu^2 K_{2/3}^2(\eta) + \beta^2 K_{1/3}^2(\eta)]. \quad (3.38)$$

Излучение полностью поляризовано, поскольку  $\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$  (см. раздел 1.6). Поляризация в общем случае является эллиптической, причем поскольку  $\xi_3 > 0$ , то большая полуось эллипса направлена вдоль направления ускорения. При  $\beta = 0$  [вектор  $\mathbf{n}$  лежит в плоскости  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ]  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = 1$ , т. е. излучение полностью линейно поляризовано вдоль направления ускорения [см. (3.27)]. Выполнение условия  $\mu^2 K_{2/3}^2 - \beta^2 K_{1/3}^2 = 0$  невозможно, так что поляризация не может стремиться к круговой.

Рис. 7. Зависимость спектрального распределения интенсивности излучения от частоты при разных углах излучения. Чем больше угол, тем «краснее» излучение в максимуме.



Важной характеристикой процесса излучения является спектральное распределение интенсивности излучения, проинтегрированное по

всем углам излучения. Соответствующее вычисление удобно провести, интегрируя одновременно по  $\psi$  и  $\beta$  выражения (3.18) и (3.22). Проведем в (3.18) замену переменных  $u = \psi\gamma$ ,  $v = \beta\gamma$ , тогда

$$dI(\omega) = \int_{\Omega} dI(n, \omega) = (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega / \sqrt{3} \pi^2 |\mathbf{w}| \gamma^5) \int du \int dv \times \\ \times (1 + u^2 + v^2)^{1/2} [1 + 2(u^2 + v^2)] K_{1/3}(x(1 + u^2 + v^2)^{3/2}), \quad (3.39)$$

где

$$\kappa = 2\omega/3 \omega \gamma^3 = 2\omega/3\omega_c. \quad (3.40)$$

Видно, что интеграл (3.39) рационально вычислять в полярных координатах:  $r^2 = u^2 + v^2$ ,  $\varphi = \text{arctg}(v/u)$ :

$$\begin{aligned} dI(\omega) &= (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega/\sqrt{3} \pi^2 \omega \gamma^5) \int_0^\infty dr^2/2 \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1+r^2} (1+2r^2) \times \\ &\quad \times K_{1/3} \kappa (1+r^2)^{3/2} = \\ &= (e^2/4\pi) (2\omega^2 d\omega/3 \sqrt{3} \pi \omega \gamma^5) \int_1^\infty ds (2s^{2/3}-1) K_{1/3}(\kappa s). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Воспользовавшись соотношением для  $K$ -функций (см. [52], с. 964)

$$\frac{d}{ds} [s^{2/3} K_{2/3}(\kappa s)] = -\kappa s^{2/3} K_{1/3}(\kappa s), \quad (3.42)$$

получим следующее выражение для спектрального распределения интенсивности излучения:

$$dI(\omega) = (e^2/4\pi) (\omega d\omega/\sqrt{3} \pi \gamma^2) \left[ 2K_{2/3}(\kappa) - \int_\kappa^\infty d\xi K_{1/3}(\xi) \right]. \quad (3.43)$$

Принимая во внимание, что (см. [52], с. 984)

$$2 d/dz K_{2/3}(z) + K_{1/3}(z) = -K_{5/3}(z), \quad (3.44)$$

окончательно имеем

$$\begin{aligned} dI(\omega) &= (e^2/4\pi) (\omega d\omega/\sqrt{3} \pi \gamma^2) \int_\kappa^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi = \\ &= (e^2/4\pi) (3/4\pi) \omega^2 \gamma^4 d\kappa \int_\kappa^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Спектральное распределение интенсивности излучения ведет себя по-разному в зависимости от взаимоотношения между излучаемой частотой  $\omega$  и частотой  $\omega_c$ . При малых частотах ( $\omega \ll \omega_c$ )

$$dI(\omega)/d\omega = (e^2/4\pi) (3^{1/6} \Gamma(2/3)/\pi) \omega^{2/3} \omega^{1/3} \quad (3.46)$$

и при больших частотах ( $\omega \gg \omega_c$ )

$$dI(\omega)/d\omega = (e^2/8\pi) \sqrt{\omega\omega/\pi\gamma^3} \exp[-2\omega/3\omega\gamma^3], \quad (3.47)$$

так что качественное поведение спектральных распределений (3.25), (3.26), (3.34), (3.35) и (3.46), (3.47) имеет одинаковый характер.

Поскольку  $dI(\omega)/d\omega$  падает и при малых, и при больших частотах, то  $dI(\omega)/d\omega$  имеет максимум при  $\omega \sim \omega_c$ . Именно в этой области сосредоточена основная часть излучения\*. Явный вид входящей в формулу (3.45) комбинации  $(3\sqrt{3}\pi/4\pi) \int_{\kappa}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi$  приведен на рис. 8.

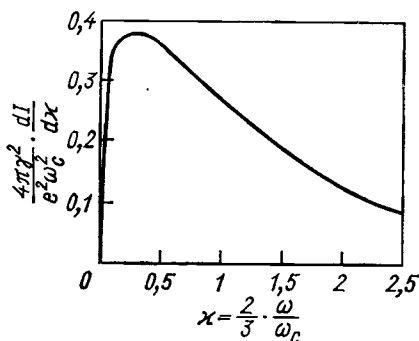


Рис. 8. Зависимость спектрального распределения интенсивности от частоты  $(\chi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{\omega_c})$ .

Если проинтегрируем (3.45) по частоте, воспользовавшись формулами

$$\int_0^{\infty} \kappa d\kappa \int_{\kappa}^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\xi} \kappa d\kappa = \int_0^{\infty} f(\xi) (\xi^2/2) d\xi \quad (3.48)$$

и (см. [52], с. 698)

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} K_{\nu}(x) dx = 2^{\mu-1}$$

$$\Gamma((1+\mu+\nu)/2)\Gamma((1+\mu-\nu)/2), \quad (3.49)$$

то придем к формуле (2.10)

$$I = \int dI(\omega) = e^2 \omega^2 \gamma^4 / 6\pi.$$

Проинтегрированная по всем углам поляризационная матрица вычисляется аналогично (3.41), исходя из (3.22):

$$\begin{aligned} dI_{ik}(\omega) &= (e^2/4\pi) (\omega^2 d\omega / \sqrt{3} \pi^2 \omega \gamma^5) \int_0^{\infty} dr^2/2 \int_0^{2\pi} d\varphi (1+r^2)^{1/2} \times \\ &\times K_{1/3}(\chi (1+r^2)^{3/2}) \begin{pmatrix} 1+r^2+r^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix} = \\ &= (e^2/4\pi) (2\omega^2 d\omega / 3 \sqrt{3} \pi \omega \gamma^5) \int_1^{\infty} ds K_{1/3}(\chi s) \begin{pmatrix} 3s^{2/3}-1 & 0 \\ 0 & s^{2/3}-1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

\* Сравнивая формулы (3.25), (3.34) и (3.46), видим, что основной вклад в излучение в случае  $\omega \ll \omega_c$  дают углы  $\beta \sim \psi \sim (\omega_c/\omega)^{1/3} (1/\gamma)$ , так что время формирования импульса (длина когерентности)  $\Delta t \sim (R/\gamma) (\omega_c/\omega)^{1/3}$ . Тогда условие (3.1) приводит к более жесткому ограничению, чем (3.2), на неоднородность поля:  $n \ll \gamma (\omega/\omega_c)^{1/3}$ . Только при выполнении последнего критерия справедливы формулы (3.34) и (3.46).

Недиагональные члены выпали вследствие нечетности подынтегральной функции; ясно, что  $dI(\omega) = \text{Sp} [dI_{ih}(\omega)]$ . Воспользовавшись (3.42) и (3.44), получим

$$\begin{aligned}
 dI_{ih}(\omega) &= (e^2/4\pi)(\omega d\omega/2\sqrt{3}\pi\gamma^2) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 3K_{2/3}(\chi) - \int_{\chi}^{\infty} K_{1/3}(\xi) d\xi & 0 \\ 0 & K_{2/3}(\chi) - \int_{\chi}^{\infty} K_{1/3}(\xi) d\xi \end{pmatrix} = \\
 &= (e^2/4\pi)(\omega d\omega/2\sqrt{3}\pi\gamma^2) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \int_{\chi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi + K_{2/3}(\chi) & 0 \\ 0 & \int_{\chi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi - K_{2/3}(\chi) \end{pmatrix}. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Параметры Стокса в этом случае

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = K_{2/3}(\chi) / \int_{\chi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi. \quad (3.52)$$

Таким образом, после интегрирования по полярному углу круговая поляризация выпадает, так что излучение в целом частично линейно поляризовано вдоль направления ускорения. Воспользовавшись формулами (3.24), имеем, что при малых частотах ( $\omega \ll \omega_c$ ) степень линейной поляризации  $\xi_3 \rightarrow 1/2$ , а при больших частотах ( $\omega \gg \omega_c$ )  $\xi_3 \rightarrow 1$ . Общая картина зависимости степени поляризации от частоты приведена на рис. 9. Проведя в (3.51) с помощью формул (3.48), (3.49) интегрирование по частоте, находим формулы (2.19) и (2.20).

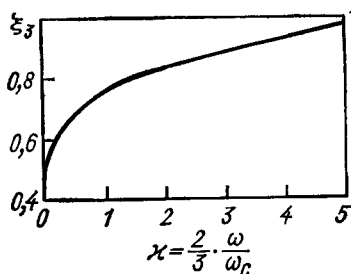


Рис. 9. Зависимость степени линейной поляризации излучения от частоты.

3.4. Примеры излучения в случае I. а. *Магнитотормозное излучение* ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$ ). Это один из наиболее важных и часто встречающихся в приложениях случаев излучения. Как известно, электрон в постоянном и однородном магнитном поле движется по окружности радиуса  $R$  с частотой  $\omega_0$ :

$$R = p/eH = mv\gamma/eH; \quad \omega_0 = v/R = eH/\varepsilon; \quad \mathbf{w} = (e/\varepsilon) [\mathbf{vH}], \quad (3.53)$$

где  $\mathbf{w}$  — ускорение;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля. В ультрарелятивистском пределе

$$\omega \equiv |\mathbf{w}| = \omega_0 = 1/R = eH/\varepsilon + O(1/\gamma^2). \quad (3.54)$$

Угловое распределение интенсивности излучения дается формулой (1.44), а полная интенсивность излучения — формулами (1.45) и (1.46). Поскольку электрон совершает периодическое движение с частотой  $\omega_0 = 2\pi/T$ , то он излучает набор частот, кратных  $\omega_0$ :  $\omega = n\omega_0$ . Интенсивность  $n$  гармоники излучения вычисляется согласно формуле (1.60). В этом случае (см. рис. 3) угол  $\psi = \omega_0 t$ , так что [ср. (2.7)];

$$\left. \begin{aligned} n\mathbf{r}_0(t) &= (v/\omega_0) \cos \beta \sin \omega_0 t; \\ \mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2) &= v^2 \cos \omega_0(t_1 - t_2) = \\ &= v^2 [\cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 + \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2]. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Подставляя эти соотношения в (1.60) и используя стандартные интегральные представления функции Бесселя  $J_n$  (см. [52], с. 968):

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-T/2}^{T/2} \exp\{i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} dt = \\ &= (1/\omega_0) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[in(\varphi - v \cos \beta \sin \varphi)] d\varphi = (2\pi/\omega_0) J_n(nv \cos \beta); \\ &\int_{-T/2}^{T/2} \exp\{i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} \sin \omega_0 t dt = (2\pi i/\omega_0) J'_n(nv \cos \beta); \\ &\int_{-T/2}^{T/2} \exp\{i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]\} \cos \omega_0 t dt = (2\pi/\omega_0 v \cos \beta) J_n(nv \cos \beta), \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

имеем для интенсивности излучения  $n$  гармоники формулу, полученную Шоттом еще в 1912 г.:

$$dI_n = (e^2/4\pi) \cdot (e^2 H^2 n^2 / 2\pi \epsilon^2) [\text{tg}^2 \beta J_n^2(nv \cos \beta) + v^2 J_n'^2(nv \cos \beta)]. \quad (3.57)$$

Эту формулу можно использовать непосредственно при малых энергиях ( $\gamma \sim 1$ ), когда излучаются низшие гармоники. Положение существенно меняется в области высоких энергий ( $\gamma \gg 1$ ). Как было показано выше, в случае I в ультрарелятивистском пределе всегда излучаются очень высокие гармоники\*  $\omega \approx \omega_0 \gamma^3$ , так что спектр излучения состоит из очень большого числа линий, частоты которых велики по сравнению с расстоянием между соседними линиями  $\omega_0$ . Иными словами, спектр излучения имеет *квазинепрерывный характер*. Для нахождения формул, которые описывают излучение частицы, движущейся по окружности, в ультрарелятивистском пределе можно исходить из (3.57), взяв асимптотические представления функций Бесселя при больших значениях индекса и аргумента. Следует, однако, иметь в виду, что излучение в данном направлении происходит с небольшого участка окружности и не зависит от харак-

\* На эту особенность магнитотормозного излучения частиц высокой энергии впервые указали Л. А. Арцимович и И. Я. Померанчук [2].

тера движения на остальной части траектории. Поэтому сам факт движения по окружности становится несущественным. Отсюда следует, что в указанной процедуре нет необходимости, поскольку в разделе 3.3 были получены универсальные формулы, определяющие излучение в рассматриваемой ситуации\*. Таким образом, в ультрарелятивистском пределе магнитотормозное излучение, включая все спектральные и поляризационные характеристики, описывается формулами (3.10)—(3.52), куда в качестве ускорения надо поставить (3.54). Очевидно, что эти формулы, в отличие от (3.57), справедливы и при движении в неоднородном магнитном поле, если его можно считать постоянным на длине формирования импульса излучения [условия (3.1) и (3.2)], причем свойства излучения определяются магнитным полем на данном участке траектории\*\*.

б. *Магнитотормозное излучение* ( $v\mathbf{H}$ )  $\neq 0$ . В случае, когда частица имеет продольную по отношению к направлению магнитного поля  $\mathbf{H}$  компоненту скорости  $v_{\parallel} = v \sin \theta$ , она движется в однородном и постоянном магнитном поле по винтовой линии. Излучение описывается формулами раздела 3.3, куда в качестве ускорения надо подставить

$$\begin{aligned} \omega_{\theta} &= (e/\epsilon) [v\mathbf{H}]; \quad \omega_{\theta} = (e/\epsilon) vH \cos \theta = \\ &= (e/\epsilon) v_{\perp} H = (e/\epsilon) vH_{\perp}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

поскольку не делалось предположения об угле между скоростью и внешним полем. Необходимо только, чтобы выполнялось условие  $\pi/2 - \theta \gg 1/\gamma$ , так как если частица движется под углом  $\sim 1/\gamma$  к полю (почти вдоль него), то энергия поперечного движения будет порядка массы частицы, и по этой причине излучение частицы теряет особенности, свойственные излучению ультрарелятивистских частиц. При винтовом движении вектор скорости частицы  $\mathbf{v}$  описывает конус с углом при вершине  $\pi - 2\theta$ , излучение сконцентрировано вблизи этого конуса, а не сосредоточено в плоскости, как при вращении электрона по окружности. Наличие продольной компоненты скорости, на которую не действует внешняя сила, приводит к дополнительному эффекту Допплера, связанному с переносным движением, так что для неподвижного наблюдения частота сдвигается:

$$\omega_{v\parallel} = \omega_0 / (1 - v_{\parallel} \sin \theta) \approx \omega_0 / \cos^2 \theta. \quad (3.59)$$

Для выяснения специфики излучения при движении по винтовой линии рассмотрим два варианта. В первом из них фиксирована перпендикулярная к полю составляющая импульса  $p_{\perp}$ , т. е. рассма-

\* Заметим, что мы аппроксимировали участки траектории дугами окружности с мгновенным радиусом кривизны  $R = 1/\omega$ .

\*\* Спектральное распределение интенсивности излучения электронов большой энергии в магнитном поле было рассмотрено в работах [58, 104].

тривается излучение в разных инерциальных системах, получающихся одна из другой преобразованием Лоренца вдоль направления магнитного поля (поле при этом не меняется). Заметим, что полная интенсивность излучения  $d\varepsilon/dt_0$  (2.10) является инвариантом преобразований Лоренца [это очевидно из (1.37) и (1.39)]. При вычислении спектрального распределения интенсивности излучения (3.45) следует учесть, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sqrt{\varepsilon^2 - p_{\parallel}^2} = \varepsilon \sqrt{1 - v_{\parallel}^2} = \varepsilon \cos \theta; \\ |\omega_0| &= (eH/\varepsilon_0) \cos^2 \theta = \omega_0 \cos^2 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

где  $\varepsilon_0$ ,  $\omega_0$  — энергия и ускорение в системе ( $v_{\parallel} = 0$ ). Тогда получаем для характерной частоты

$$(\omega_c)_\theta = (1/\cos \theta) (\omega_c)_0, \quad (3.61)$$

т. е. максимум спектрального распределения сдвигается в коротковолновую область. В соответствии с этим меняется и поляризация излучения (3.52). Аналогично проводится анализ и для дифференциальных характеристик излучения, включая поляризацию, где необходимо наряду с преобразованием энергии учесть преобразование углов, отсчет которых в каждой конкретной системе связан с плоскостью ( $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ).

Во втором варианте частицы с одинаковой энергией попадают в магнитное поле со скоростью, направленной под разными углами к нему ( $\pi/2 - \theta$ ). В этом случае характерная частота излучения

$$(\omega_c)_\theta = \omega_0 \gamma^3 = \omega_0 \gamma^3 \cos \theta = (\omega_c)_0 \cos \theta, \quad (3.62)$$

т. е. чем меньше угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ , тем больше максимум излучения сдвигается в длинноволновую область. Полная интенсивность излучения также падает с ростом угла:

$$d\varepsilon_\theta/dt = (e^2/6\pi) \omega_0^2 \gamma^4 = (e^2/6\pi) \omega_0^2 \gamma^4 \cos^2 \theta. \quad (3.63)$$

в. *Движение частицы под углом к электрическому полю (поперечный импульс  $p_{\perp}$ :  $p_{\perp}^2 \gg m^2$ )*. Частица, вошедшая в электрическое поле под углом к нему, движется по кривой, заворачивающей в сторону поля, причем угол между скоростью и полем  $\pi/2 - \theta$  зависит от времени:

$$\cos \theta(t) = p_{\perp}/p(t) = p_{\perp}/\sqrt{p_{\perp}^2 + (p_{\parallel}^0 + eEt)^2} \approx p_{\perp}/m\gamma(t), \quad (3.64)$$

где

$$\gamma(t) = \sqrt{[p^2(t) + m^2]/m^2}. \quad (3.65)$$

Заметим, что условие  $\pi/2 - \theta \gg 1/\gamma(t)$  выполняется всегда, если  $p_{\perp} \gg m$  (поскольку пропорционально росту энергии сужается характерный угол излучения), а именно, это необходимо для применения формул, полученных в разделе 3.3. В соответствии со сказан-



ным выше (см. раздел 2.1) излучение определяется поперечной составляющей ускорения  $|E_{\perp}| = E \cos \theta(t)$ , так что в формулы раздела 3.3 необходимо подставить

$$\omega(t) = e |E_{\perp}| / m\gamma(t) = eE \cos \theta(t) / m\gamma(t) = eE\rho_{\perp} / m^2 \gamma^2(t). \quad (3.66)$$

Излучение в этом случае характеризуется следующими особенностями: 1) оно сосредоточено в узком конусе вокруг направления скорости, причем угол раствора конуса непрерывно сужается ( $\sim 1/\gamma(t)$ ); 2) характерная частота излучения непрерывно растет:

$$\omega_c(t) = \omega(t) \gamma^3(t) = (eE\rho_{\perp} / m^2) \gamma(t) = eE\rho_{\perp}^2 / m^3 \cos \theta(t), \quad (3.67)$$

так что максимум спектрального распределения сдвигается в коротковолновую область. Формула (3.67) имеет такой же вид, как (3.61). Это связано с тем, что обе они могут быть получены с помощью релятивистского преобразования частоты за счет движения вдоль поля; 3) полная излучаемая в единицу времени энергия не зависит от времени, что очевидно, если подставить (3.66) в (2.10). Этот результат вытекает также из следующих соображений. Интенсивность излучения инвариантна относительно преобразований Лоренца [см. (1.37)], а в каждый момент времени можно выбрать преобразование Лоренца вдоль поля, чтобы продольная скорость равнялась нулю. Поскольку интенсивность излучения при этом не изменится, то излучение в любой момент времени совпадет с излучением частицы, движущейся с заданным импульсом поперек поля.

г. *Излучение ультрарелятивистской частицы в скрещенных полях  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ,  $E^2 = H^2$ .* Задача об излучении частицы при движении во взаимно перпендикулярных электрическом  $\mathbf{E}$  и магнитном  $\mathbf{H}$  полях, если они не одинаковы по величине, соответствующим преобразованием Лоренца сводится к задаче об излучении в чисто электрическом или чисто магнитном поле [ $E^2 - H^2$ ,  $(\mathbf{E}\mathbf{H})$  суть инварианты преобразования Лоренца]. Эти случаи были обсуждены выше. Поэтому интересно еще рассмотреть случай так называемых скрещенных полей [ $(\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0$ ,  $E^2 - H^2 = 0$ ].

Если выбрать для определенности, что напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  направлена по оси  $z$ , а электрического поля  $\mathbf{E}$  — по оси  $y$ , то при движении в скрещенном поле интегралами движения являются (см. [65, 84])

$$p_z = \text{const}; \quad \varepsilon - p_x = \text{const}. \quad (3.68)$$

Подставляя выбранную конфигурацию полей в (1.38), получаем, что

$$d\varepsilon/dt_0 = (e^2/6\pi) (eE/m^2)^2 (\varepsilon - p_x)^2; \quad (3.69)$$

таким образом, полная интенсивность излучения не меняется во времени [и, естественно, есть лоренц-инвариант (1.39)]. Отметим, что если частица входит в скрещенные поля с импульсом, направленным по оси  $x$  (перпендикулярно обоим полям), то при  $p_x^2 \gg m^2$

имеем  $\varepsilon - p_x \approx m/\gamma$ , т. е. излучение падает с ростом энергии частицы.

При выполнении условия  $\varepsilon - p_x \gg m/\gamma$  излучение ультрарелятивистских частиц в скрещенных полях определяется формулами, найденными в разделе 3.3, куда в качестве ускорения следует подставить

$$\omega = (eE/m^2 \gamma^2) (\varepsilon - p_x) \quad (3.70)$$

[ср. (2.4) и (3.69)]. Характерная частота излучения  $\omega_c = \omega \gamma^3$  увеличивается с ростом энергии как  $\gamma$ , так что максимум спектрального распределения интенсивности излучения непрерывно смещается в коротковолновую область. Угол раствора конуса излучения соответственно сужается.

3.5. Траектория частицы во внешнем поле в приближении малых углов. Перейдем к рассмотрению излучения ультрарелятивистских частиц в случае, когда полный угол отклонения частицы в поле в данном направлении определяется всей траекторией частицы. Для решения этой задачи необходимо знать движение частицы в потенциале  $V(r)$  ( $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ ),

так что на больших расстояниях частица является свободной. Траектория ультрарелятивистских частиц находится значительно проще вследствие того, что основной вклад в ускорение частицы дает поперечная составляющая силы. Тогда зависимость импульса от времени во внешнем поле  $V(r)$  в первом приближении по переданному импульсу (в нулевом приближении берется прямолинейная траектория)

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}_1 + \int_{-\infty}^t (\partial V(r)/\partial \rho^2) 2\rho dt, \quad (3.71)$$

где  $\rho$  — прицельный параметр;  $r = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$ . С этой же точностью отклонение траектории частицы от прямолинейной в поле  $V(r)$  имеет вид

$$\mathbf{x}_q(t) = - \int_0^t \mathbf{q}(t) dt/\varepsilon = \int_0^t dt'/\varepsilon \int_0^{t'} (\partial V/\partial \rho^2) 2\rho dt'' + t \text{ const}, \quad (3.72)$$

где полагаем, что  $\mathbf{x}_q(0) = 0$ . Заменяя порядок интегрирования

$$\int_0^t dx \int_0^x dy F(y) = \int_0^t dy \int_y^t dx F(y) = \int_0^t dy (t-y) F(y), \quad (3.73)$$

выражение (3.72) приводим к следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q(t) &= (1/\varepsilon) \int_0^t dy (t-y) (\partial V(\sqrt{\rho^2 + v^2 y^2}/\partial \rho^2) 2\rho = \\ &= (2\rho/\varepsilon) \left[ t \int_0^t (\partial V/\partial \rho^2) dy - V(r)/2 \right] + t \text{ const}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Кроме передачи импульса  $q(t)$  и отклонения частицы  $x_q(t)$  в дальнейшем будем интересоваться также величиной  $kx(t)$ , которую с учетом (3.74) представим в виде

$$kx(t) = c_1 t + c_2 (\epsilon/2\rho^2) \rho x_q(t) + kx_0, \quad (3.75)$$

где  $kx_0$  — константа. Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  можно определить из условий при  $t \rightarrow \pm \infty$ . При  $t \rightarrow -\infty$  частица двигалась со скоростью  $v_1$ , так что  $(kx) \rightarrow (kv_1)t$ , где мы ввели  $v^\mu = p^\mu/\epsilon = (1, v)$ ,  $v^\mu v_\mu = m^2/\epsilon^2 = 1/\gamma^2$ . Подставляя это в (3.75), имеем

$$kv_1 = c_1 - c_2 \int_0^\infty (\partial V/\partial \rho^2) dy = c_1 - c_2 d. \quad (3.76)$$

При  $t \rightarrow \infty$  частица движется со скоростью  $v_f = v(t \rightarrow \infty)$ , т. е.  $kx = kv_f t$ , тогда

$$kv_f = c_1 + c_2 d. \quad (3.77)$$

Таким образом,

$$kx = (kv_1 + kv_f) t/2 + (kv_f - kv_1) g(t)/2 + kx_0, \quad (3.78)$$

где

$$g(t) = (\epsilon/2\rho^2 d) \rho x_q(t) = \\ = \left[ \int_0^\infty \frac{\partial V(\sqrt{\rho^2 + v^2 y^2})}{\partial \rho^2} dy \right]^{-1} \left[ t \int_0^t \frac{\partial V(\sqrt{\rho^2 + v^2 y^2})}{\partial \rho^2} dy - \frac{V(r)}{2} \right]. \quad (3.79)$$

Следует заметить, что в ультрарелятивистском пределе, когда  $v^2 = 1$  (с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$ ),  $g(t)$  не зависит от динамических переменных частицы, а определяется только видом потенциала  $V(r)$  и прицельным параметром  $\rho$ . Для кулоновского поля легко найти

$$g(t) = \sqrt{\rho^2 + t^2}. \quad (3.80)$$

3.6. Спектральное и угловое распределение энергии излучения в случае II. Для описания излучения будем исходить из спектрального распределения энергии (1.61). Показатель экспоненты в интервале (1.61) в области, где движение частицы можно рассматривать как прямолинейное, т. е. вне области поворота частицы, имеет вид  $kx(t) = \omega(1 - \mathbf{nv})t \sim \sim \omega t/2\gamma^2$ , так что основной вклад в интеграл дает интервал времени  $t \leq 2\gamma^2/\omega$  (при больших значениях времени  $t$  подынтегральная функция быстро осциллирует, и они дают пренебрежимо малый вклад). В случае II следует различать две характерные области угла откло-

нения частицы  $\theta$ : 1)  $\theta \lesssim 1/\gamma$  и 2)  $\theta \ll 1/\gamma$ . Для кулоновского поля угол отклонения

$$\theta \approx \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt/p \approx Ze^2/4\pi r_e. \quad (3.81)$$

В области 1

$$\rho \gtrsim Ze^2/4\pi m. \quad (3.82)$$

При энергиях и частотах, удовлетворяющих условию

$$2\gamma^2/\omega \gg \rho \gtrsim Ze^2/4\pi m, \quad (3.83)$$

длина излучения  $ct \gg \rho$ , т. е. длина излучения значительно превышает размеры области, где происходит поворот частицы; следовательно, излучение происходит на участке траектории, на котором движение можно рассматривать как прямолинейное. Для полей, убывающих с расстоянием быстрее, чем кулоновское поле, размеры области поворота еще меньше, поэтому это условие тем более выполняется. В такой ситуации интегрирование в (1.61) можно проводить по траектории в виде угла, т. е.

$$\left. \begin{aligned} t < 0 \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(-\infty); \quad kx(t) = kv_1 t + \text{const}; \\ t > 0 \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}(+\infty); \quad kx(t) = kv_2 t + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

Выполняя интегрирование в (1.61) при этих условиях, имеем

$$\begin{aligned} d\epsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) &= (e^2/4\pi)(d^3 k/(2\pi)^2) \left| \int_{-\infty}^0 \mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_1 \exp[ikv_1 t] dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_2 \exp[ikv_2 t] dt \right|^2 = (e^2/4\pi)(d^3 k/(2\pi)^2) \times \\ &\times |\mathbf{e}_\lambda \mathbf{p}_1/kp_1 - \mathbf{e}_\lambda \mathbf{p}_2/kp_2|^2. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Удобно представить это выражение в явно поперечном виде. Тогда

$$d\epsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi)(d^3 k/(2\pi)^2) |\mathbf{e}_\lambda ((\mathbf{p}_1 - n\mathbf{e})/kp_1 - (\mathbf{p}_2 - n\mathbf{e})/kp_2)|^2, \quad (3.86)$$

причем  $\mathbf{e}_\lambda \mathbf{n} = 0$ . При замене  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{k}$  выражение (3.86) обращается в нуль.

В области 2 частица почти не отклоняется во внешнем поле, в то время как угол излучения, естественно, всегда имеет порядок  $1/\gamma$ , так что угол между импульсами в начальном и конечном состояниях  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  много меньше угла между направлением излучения и  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ :

$$kp_1 \approx kp_2 \approx \epsilon\omega(1 - n\mathbf{v}) \sim \epsilon\omega/(2\gamma^2) = \omega m^2/(2\epsilon). \quad (3.87)$$

Скорость частицы согласно (3.71)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1 + (1/\varepsilon) \int_{-\infty}^t (\partial V(r)/\partial \rho^2) 2\rho dt. \quad (3.88)$$

Подставляя (3.87) и (3.88) в (1.61), получаем в области 2:

$$\begin{aligned} d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) &= (e^2/4\pi) (d^3 k / [(2\pi)^2 \varepsilon^2]) | \mathbf{e}_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp [ikv_1 t'] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t'} (\partial V/\partial \rho^2) 2\rho dt \Big|^2 = (e^2/4\pi) (d^3 k / [(2\pi)^2 (kp_1)^2]) | \mathbf{e}_\lambda \rho/\rho|^2 |(\partial/\partial \rho) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ikv_1 t] V(r) dt|^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Введем теперь характерный угол, соответствующий границе применимости области 1 [см. (3.81) и (3.83)]:

$$\rho_c = 2\gamma^2/\omega; \theta_c = Ze^2/4\pi\rho_c \varepsilon = Ze^2 \omega/8\pi m\gamma^3. \quad (3.90)$$

Естественно, что формулы (3.85) и (3.86) применимы при  $\theta \gg \theta_c$ . С другой стороны, формула (3.89) справедлива при  $\theta \ll 1/\gamma$ . В области

$$1/\gamma \gg \theta \gg \theta_c, \quad (3.91)$$

вообще говоря, можно пользоваться обеими формулами. Нетрудно видеть, что они в области (3.91) переходят в

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi) (d^3 k / (2\pi)^2) [1/(kp_1)^2] | \mathbf{e}_\lambda \mathbf{q} |^2, \quad (3.92)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$  — передача импульса. Действительно, если угол отклонения  $\theta$  удовлетворяет условию (3.91), то он значительно меньше угла излучения, так что в (3.85) можно вынести знаменатель. С другой стороны, величина

$$\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ikv_1 t] \frac{\partial V}{\partial \rho} dt = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial \rho} dt \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ikv_1 t] \frac{\partial V}{\partial \rho} dt \rightarrow 1 \quad (3.93)$$

при выполнении условия (3.91), поскольку в этой области можно заменить экспоненциальный множитель на единицу. Тогда из (3.89) немедленно следует (3.92). Поскольку формулы (3.85), (3.86) и (3.89) имеют область перекрытия, в которой они переходят в (3.92),

то можно написать единое выражение, справедливое во всей области углов отклонения частицы  $0 \leq \theta \leq 1/\gamma$ :

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi)(d^3k/(2\pi)^2) |e_\lambda [\mathbf{p}_1/k\rho_1 - \mathbf{p}_2/k\rho_2]|^2 \Phi, \quad (3.94)$$

где

$$\Phi = \left| \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial \rho} dt \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i \sqrt{(kv_1)(kv_2)} t] \frac{\partial V}{\partial \rho} dt \right|^2. \quad (3.95)$$

Здесь мы симметризовали величину  $\Phi$  по параметрам  $v_1$  и  $v_2$ , воспользовавшись тем обстоятельством, что при  $kv_1 \neq kv_2$   $\Phi = 1$ , а в области, где  $\Phi \neq 1$  ( $\theta \leq \theta_c$ ),  $kv_1 \approx kv_2$ . В областях 1 и 2 формула (3.94) переходит соответственно в (3.85) и (3.89).

Рассмотрим отдельно кулоновский потенциал ввиду его особой важности. В этом случае интегрирование по  $t$  в (1.61) можно провести непосредственно, без разбиения на области 1 и 2.

Для вычисления входящего в выражение (1.61) интеграла по времени учтем, что в кулоновском потенциале из (3.71) (для притяжения) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{q}(t)/\varepsilon = \mathbf{v}_1 + (\xi/2) \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\rho} dt / (\rho^2 + t^2)^{3/2} = \\ &= \mathbf{v}_1 - (1/2\varepsilon) \mathbf{q} (1 + t/\sqrt{\rho^2 + t^2}) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 + [(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/2] (t/\sqrt{\rho^2 + t^2}), \end{aligned} \quad (3.96)$$

где  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{q}/\varepsilon$ :  $\mathbf{q} = (-\boldsymbol{\rho}/\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial \rho} dt$ . Здесь и в дальнейшем используется обозначение

$$\xi = Ze^2/4\pi. \quad (3.97)$$

Таким образом, [ср. (3.78) и (3.80)]:

$$kx(t) = (kv_1 + kv_2)t/2 + (kv_2 - kv_1)\sqrt{\rho^2 + t^2}/2. \quad (3.98)$$

Интеграл (1.61) с таким значением показателя экспоненты и скорости вычисляется в явном виде, это удобно сделать, воспользовавшись заменой переменных:

$$\text{sh}(\eta - \eta_0) = t/\rho; \quad \text{th} \eta_0 = (kv_2 - kv_1)/(kv_2 + kv_1), \quad (3.99)$$

тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp [ikx(t)] dt &= (1/\sqrt{(kv_1)(kv_2)}) \cdot (\rho/2) \int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathbf{v}_2(kv_1) - \\ &- \mathbf{v}_1(kv_2)] \text{sh} \eta + [\mathbf{v}_2(kv_1) + \mathbf{v}_1(kv_2)] \text{ch} \eta\} \exp [i\rho \sqrt{(kv_1)(kv_2)} \text{sh} \eta] d\eta. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Учитывая, что (см. [51] с. 433)

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} \eta \exp [ia \operatorname{sh} \eta] d\eta &= 2\pi\delta(a): \\ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sh} \eta \exp [ia \operatorname{sh} \eta] d\eta &= 2iK_1(a), \quad (a \neq 0), \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

находим для энергии излучения ультрарелятивистской частицы в кулоновском поле

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi) (d^3k/(2\pi)^2) |\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{v}_1/kv_1 - \mathbf{v}_2/kv_2)|^2 a^2 K_1^2(a), \quad (3.101)$$

где  $a = \rho \sqrt{(kv_1)(kv_2)}$ . При  $a \ll 1$   $aK_1(a) \rightarrow 1$ , и формула (3.102)

совпадает с (3.85). Причина этого очевидна:

$$\rho \ll 1/\sqrt{(kv_1)(kv_2)} \sim 2\gamma^2/\omega$$

в согласии с (3.83), так что мы действительно находимся в области 1. При  $a \gg 1$  условие (3.83) нарушается, и мы переходим в область 2, где  $kv_1 \approx kv_2$ . Результат интегрирования (3.89) для кулоновского потенциала совпадает с получаемым из (3.102) при  $kv_1 \approx kv_2$ . Таким образом, мы провели прямое вычисление энергии излучения в кулоновском поле; естественно, что формула (3.102) следует также непосредственно из формулы (3.94), если в формулу (3.95) подставить кулоновский потенциал.

**3.7. Энергетическое сечение излучения.** В задаче излучения частиц при движении в потенциале  $V(r)$ , таком, что  $V(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , основной интерес представляет энергия излучения, просуммированная по всем прицельным параметрам. При этом удобно ввести характеристику, которую мы будем называть *энергетическим сечением* и обозначать

$$d\Sigma(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}, \rho) d^2\rho. \quad (3.103)$$

Поскольку в классической теории существует определенная связь между переданным импульсом  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$  (углом отклонения частицы) и прицельным параметром, выражение (3.103) можно представить в виде

$$d\Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{e}) = d\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{q}) d\sigma(\mathbf{q}), \quad (3.104)$$

где

$$d\sigma(\mathbf{q}) = d^2\rho(\mathbf{q}) \quad (3.105)$$

есть сечение рассеяния частицы на потенциале  $V(r)$ .

Все полученные в разделе 3.6 формулы применены при углах отклонения частицы  $\theta \lesssim 1/\gamma$ . Для широкого класса потенциалов

(куда входит, например, кулоновский потенциал;  $V(r) = a/r^n$  и т. д.) этот интервал углов дает основной вклад в энергетическое сечение излучения, поскольку при  $\theta \gg 1/\gamma$  падает сечение рассеяния. Тогда для определения старшего (по  $1/\gamma$ ) вклада в энергетическое сечение излучения можно пользоваться найденными выше формулами.

В дальнейшем будем для определенности рассматривать энергетическое сечение излучения в кулоновском потенциале. В этом случае (для притяжения) [ср. (3.71) и (3.96)]

$$q = -2\xi\rho/\rho^2; \quad \rho = -2\xi q/q^2, \quad (3.106)$$

где использовано обозначение  $\xi$  (3.97).

Тогда для сечения рассеяния частицы имеем

$$d\sigma(q) = d^2\rho(q) = |\partial^2\rho/\partial^2q| d^2q = |\partial\rho^2/\partial q^2| d^2q = 4\xi^2 d^2q/q^4. \quad (3.107)$$

Подставляя (3.102) и (3.107) в (3.104), имеем для дифференциального энергетического сечения излучения в кулоновском поле

$$d\Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi^3) (\xi^2/q^4) d^3k d^2q (\mathbf{e}\mathbf{p}_1/kp_1 - \mathbf{e}\mathbf{p}_2/kp_2)^2 \Phi_{cl}(y), \quad (3.108)$$

где

$$\Phi_{cl}(y) = 4\xi^2 y K_1^2(2\xi\sqrt{y}). \quad (3.109)$$

Здесь введена характерная переменная

$$y = (kv_1)(kv_2)/q^2, \quad (3.110)$$

которую будем широко использовать при описании процесса излучения в кулоновском поле, в том числе и в квантовой теории.

Специфическая особенность излучения ультрарелятивистской частицы в кулоновском поле (как и для всего случая II) заключается в малости углов отклонения частицы и излучения, вследствие чего задача оказывается по существу двумерной, причем выделенной оказывается плоскость, перпендикулярная внешнему направлению (для определенности выберем плоскость, перпендикулярную направлению излучения  $\mathbf{n}$ ). Для выполнения интегрирования сечения (3.108) по угловым переменным проведем замену переменных. Введем  $tu$ ,  $tv$  — проекции импульсов соответственно  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  на выделенную плоскость;  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ ;  $\varphi_1$  — угол между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{u}$  (рис. 10), тогда

$$\left. \begin{aligned} (kp_1) &= \omega t^2 \zeta / 2\varepsilon; & (kp_2) &= \omega t^2 \eta / 2\varepsilon; \\ \zeta &= 1 + \gamma^2 \vartheta_1^2 = 1 + u^2; & \eta &= 1 + \gamma^2 \vartheta_2^2 = 1 + v^2; \\ \mathbf{e}\mathbf{p}_1 &= tu \cos \varphi_1; & \mathbf{e}\mathbf{p}_2 &= tv \cos(\varphi + \varphi_1); \\ q_{\perp}^2 &= (m\mathbf{u} - m\mathbf{v})^2 = m^2(u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi); \\ q_{\parallel}^2 &= [\mathbf{n}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)]^2 = m^2(u - v)^2(u + v)^2 / 4\gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$



Учитывая определение (3.110), имеем также

$$q^2/m^2 = \delta^2 \zeta \eta / y, \quad \delta = \omega m / 2\varepsilon^2. \quad (3.112)$$

Принимая во внимание, что  $(q_{\perp}^2)_{\min} = m^2(u-v)^2$ , получаем

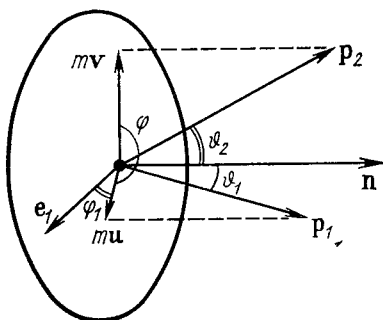
$$q_{\parallel}^2 / q_{\perp}^2 \leq (u+v)^2 / 4\gamma^2. \quad (3.113)$$

Поскольку величина переменных  $u$  и  $v$  не превышает единицы ( $\vartheta_1 = u/\gamma \sim 1/\gamma$ ), то в классической задаче излучения всегда можно пренебречь продольной компонентой передачи импульса  $q_{\parallel}$  по сравнению с поперечной компонентой  $q_{\perp}$ , т. е. считать, что  $q^2 = q_{\perp}^2$ . В качестве окончательного набора переменных выберем  $\zeta, \eta, y, \varphi_1$ .

Преобразование дифференциала угловых переменных к новым переменным можно провести с помощью методики, описанной в приложении E, в результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} d^3 k d^2 q &= \omega^2 d\omega d\Omega_1 \varepsilon^2 d\Omega_2; \\ d\Omega_1 d\Omega_2 &= (\delta^2 \zeta \eta / 2\gamma^4 S y^2) d\eta d\zeta dy d\varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

Рис. 10. Переменные для описания излучения частицы в случае II.



где

$$S = [2\lambda\zeta\eta(\zeta + \eta - 2) - (\lambda\zeta\eta)^2 - (\zeta - \eta)^2]^{1/2}; \quad \lambda = \delta^2/y. \quad (3.115)$$

Область интегрирования по  $\eta$  и  $\zeta$  определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\min} = \zeta_{\min} = 1; \quad \zeta_{\max}, \eta_{\max} &\sim \gamma^2; \\ S^2 = 2\lambda\zeta\eta(\zeta + \eta - 2) - (\lambda\zeta\eta)^2 - (\zeta - \eta)^2 &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

а область интегрирования по  $y = m^2 \delta^2 \zeta \eta / q^2$  следует из (3.116) и того, что  $q_{\min}^2 = 0$ ,  $q_{\max}^2 = 4\varepsilon^2 (p_2 = -p_1)$ ,

$$y_{\min} = \delta^2; \quad y_{\max} \rightarrow \infty, \quad (3.117)$$

причем мы здесь учли, что при  $q = q_{\max}$  имеем  $p_2 = -p_1$  и, следовательно,  $kp_2 = 2\omega\varepsilon$ . Преобразуя выражение (3.108) в соответствие с формулами (3.111) и (3.114), получаем энергетическое сечение излучения в кулоновском поле:

$$\begin{aligned} d\Sigma_{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{e}) &= Z^2 (e^2/4\pi)^3 (1/m^2 \pi^2) d\omega d\varphi_1 (d\zeta/\zeta) \cdot (d\eta/\eta) \cdot (dy/y) \times \\ &\times \{ [1 - (\zeta - \eta)^2/\zeta^2 \eta^2 \lambda] (1 + \cos 2\varphi_1) / S - S \cos 2\varphi_1 / [2\eta^2(\zeta - 1)\lambda] \} \Phi_{cl}(y). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Следует иметь в виду, что формула (3.118) представляет сечение излучения с определенной поляризацией  $e_\lambda$ . В соответствии с формулой (1.75) энергетическое сечение излучения, просуммированно по поляризациям излученной волны, имеет вид

$$d \sum_V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_\lambda d \sum_V(\mathbf{k}, \mathbf{q}, e_\lambda) = \\ = 2Z^2 (e^2/4\pi)^3 (1/m^2 \pi^2) d\omega d\varphi_1 (d\xi d\eta dy / S \xi \eta y) [1 - (\xi - \eta)^2 / \xi^2 \eta^2 \lambda] \Phi_{cl}(y). \quad (3.119)$$

3.8. Интегральное энергетическое сечение, поляризационные свойства излучения в кулоновском поле. Часто представляет интерес энергетическое сечение излучения, проинтегрированное по углам, характеризующим движение частицы после столкновения. Поскольку  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}$ , то это означает интегрирование по передаче импульса ( $\int d^2 q$ ), что соответствует интегрированию по прицельному параметру ( $\int d^2 \rho$ ). На языке введенных выше переменных интегрирование необходимо провести по  $\eta$  и  $y$ . Пределы интегрирования по  $\eta$  в соответствии с (3.116) определяются корнями уравнения  $S = 0$ , поскольку эти корни  $\eta_{1,2}$  вещественны и  $\eta_{1,2} > 1$ . Входящие интегралы вида

$$I_n = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta / (\eta^n S) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta / (\eta^n [a + b\eta + c\eta^2]^{1/2}) \quad (3.120)$$

удобно вычислить с помощью перехода в комплексную плоскость  $\eta$ , где интегрирование ведется по контуру вокруг точек ветвления  $\eta_1, \eta_2$ :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \pi \sqrt{-a} = \pi / \xi; \quad I_2 = -(\pi/2a) (b \sqrt{-a}) = \\ &= (\pi/\xi^2) [1 + \lambda(\xi - 2)]; \\ I_3 &= (\pi/8a^2 \sqrt{-a}) (3b^2 - 4ac) = \\ &= \pi [(1 - \lambda\xi)^2 + 6\lambda(1 - \lambda)(\xi - 1)] / \xi^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

Подставляя эти интегралы в (3.118), получаем для энергетического сечения излучения

$$d \sum_V(\mathbf{k}, \mathbf{y}, e) = Z^2 (e^2/4\pi)^3 (d\omega dy d\xi d\varphi_1 / m^2 y \xi^2 \pi) \times \\ \times \{1 - [2(\xi - 1) + \lambda(\xi^2 - 6\xi + 6)] / \xi^2 - 2 \cos 2\varphi_1 (\xi - 1)(1 - 3\lambda) / \xi^2\} \Phi_{cl}(y). \quad (3.122)$$

Чтобы выполнить интегрирование по  $y$  [ $\lambda = \delta^2/y$ , формула (3.115)], необходимо вычислить интегралы

$$G_n = \int_{\delta^2}^{\infty} (dy/y^n) \Phi_{cl}(y), \quad n = 1, 2. \quad (3.123)$$

Если учесть, что при  $4\xi^2 y \ll 1$   $\Phi_{cl}(y) \rightarrow 1$  [см. (3.109)] и при больших  $y$  ( $4\xi^2 y \gg 1$ )  $\Phi_{cl}(y)$  падает экспоненциально, то ясно, что основной вклад в интеграл  $G_2$  дает область  $y \sim \delta^2$  вблизи нижнего предела интегрирования. Поэтому при вычислении интеграла  $G_2$  можно положить  $\Phi_{cl}(y) = 1$  (интеграл по области  $y \sim 1$  содержит дополнительный малый множитель  $\delta^2$ , такими членами  $\sim 1/\gamma^2$  мы пренебрегаем). С учетом этого

$$G_2 = 1/\delta^2. \quad (3.124)$$

Принимая во внимание, что (см. [52], с. 648)

$$\int z K_1^2(z) dz = z^2 [K_1^2(z) - K_0(z) K_2(z)]/2, \quad (3.125)$$

получаем (при  $\xi\delta \ll 1$ )

$$G_1 = 2(\ln(1/\xi\delta e^C) - 1/2), \quad (3.126)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $e^C = 1,781 \dots$  Подставляя (3.124) и (3.126) в (3.122), имеем для энергетического сечения излучения, проинтегрированного по углам вылета частицы после столкновения:

$$d \sum_{\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{e}) = Z^2 (e^2/4\pi)^3 (d\omega/m^2) (d\varphi_1/\pi) (d\xi/\xi^2) \times \\ \times \{G_1 - 1 - [2(\xi - 1)/\xi^2] (1 + \cos 2\varphi_1) (G_1 - 3)\} \quad (3.127)$$

и для просуммированного по поляризациям излучения энергетического сечения излучения [см. (3.119)]:

$$d \sum_{\gamma}(\mathbf{k}) = 2Z^2 (e^2/4\pi)^3 (d\omega/m^2) (d\varphi_1/\pi) (d\xi/\xi^2) [G_1 - 1 - \\ - 2(\xi - 1)(G_1 - 3)/\xi^2]. \quad (3.128)$$

Сечение (3.127) полностью определяет характеристики электромагнитного излучения при кулоновском соударении (частоту, угол излучения и поляризацию). Обсудим теперь поляризационные свойства излучения. Перепишем (3.127) в виде

$$d \sum_{\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{e}) = d \sum_{\gamma}(\mathbf{k}) (1 - |\xi| \cos 2\varphi_1)/2, \quad (3.129)$$

где

$$|\xi| = 2(\xi - 1)(G_1 - 3)/[(G_1 - 1)\xi^2 - 2(\xi - 1)(G_1 - 3)]. \quad (3.130)$$

Заметим, что была спроектирована фурье-компонента электрического поля излученной волны на вектор  $\mathbf{e}_{\lambda}$  [ср. (1.54) и (1.61)]. Таким образом, сечение (3.127) определяет один из элементов поляризационной матрицы, чтобы получить остальные компоненты [см. (1.61) и (1.63)], необходимо взять еще проекцию на вектор  $\mathbf{e}_{\lambda} \perp \mathbf{e}_{\lambda}$ . Однако в этом фактически нет необходимости, поскольку фурье-компонента поля излучения [см. (3.100) и (3.101)] чисто мнимая, так что круговая поляризация отсутствует, а для опреде-

ления параметров линейной поляризации вполне достаточно формулы (3.129). Действительно, если вектор  $\mathbf{e}_\lambda$  направлен параллельно преимущественному направлению фурье-компоненты электрического поля, то сечение максимально, а если вектор перпендикулярен этому направлению, то сечение минимально. Степень поляризации определяется разностью этих сечений, а направление — направлением вектора  $\mathbf{e}_\lambda$ , при котором сечение максимально. Отсюда следует, что излучение при кулоновском соударении является линейно

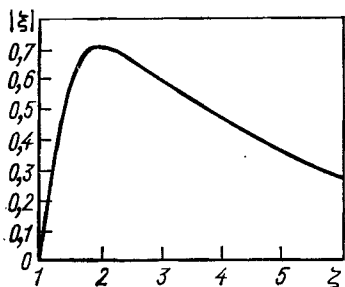


Рис. 11. Зависимость степени линейной поляризации от угла излучения в случае II,  $\zeta = 1 + \gamma^2 \theta_1^2$ ,  $G_1 = 13$ .

распространяется вдоль направления движения падающей частицы  $\mathbf{p}_1$ ,  $|\xi| \rightarrow 0$ , когда  $\zeta \gg 1$  (большие углы отклонения), и достигает максимума при  $\zeta = 2$  ( $\theta_1 = 1/\gamma$ ), причем значение степени поляризации в максимуме

$$|\xi|_{\zeta=2} = (G_1 - 3)/(G_1 + 1) \approx 1 - 4/G_1 \quad (3.132)$$

близко к единице (рис. 11).

Выполняя элементарное интегрирование по  $\zeta$  (верхний предел  $\zeta_{\max} \sim \gamma^2$  ввиду сходимости интегралов при больших  $\zeta$  можно заменить на  $\zeta_{\max} \rightarrow \infty$ , при этом отбрасываются члены  $\sim 1/\gamma^2$ , которыми систематически пренебрегаем), находим

$$d \sum_{\nu} (\omega, \mathbf{e}) = Z^2 (e^2/4\pi)^3 (d\omega/m^2) (d\varphi_1/\pi) [G_1 - 1 - (G_1 - 3)(1 + \cos 2\varphi_1)/3]. \quad (3.133)$$

Поляризация излучения в целом (проинтегрированного по всем углам излучения) определяется параметрами Стокса

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = -(1 - 3/G_1)/2. \quad (3.134)$$

Таким образом, излучение в целом при кулоновском соударении существенно поляризовано.

Суммируя по поляризациям излучения и интегрируя по определяющему поляризацию углу  $\varphi_1$ , получаем полное энергетическое сечение излучения с частотой  $\omega$  при кулоновском соударении:

$$d \sum_{\gamma} (\omega) = (8Z^2/3) (e^2/4\pi)^3 (d\omega/m^2) G_1 = \\ = 16Z^2 (e^2/4\pi)^3 (d\omega/m^2) [\ln(8\pi\epsilon^2/Ze^2 \omega me^2) - 1/2]/3. \quad (3.135)$$

3.9. Излучение малых частот. Рассмотрим излучение при столкновении электромагнитной волны с частотой  $\omega$ , которая много меньше всех характерных частот движения частицы. Тогда излучение формируется на расстояниях, значительно превышающих область взаимодействия частицы с внешним полем (область, где происходит поворот частицы) и, следовательно, не зависит от конкретного механизма взаимодействия и определяется только величиной переданного импульса. Это означает, что в пределе  $\omega \rightarrow 0$  соотношение  $2\gamma^2/\omega \gg \rho$  выполняется всегда. Следовательно, можно использовать представление траектории в виде угла (3.84), т. е. для энергии излучения справедлива формула (3.85):

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi) (d^3 k/4\pi^2) |\mathbf{e}\mathbf{p}_1/(k p_1) - \mathbf{e}\mathbf{p}_2/(k p_2)|^2 = \\ = (d^3 k/\omega^2 \pi) r^2 |\mathbf{e}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)|^2, \quad (3.136)$$

где  $\mathbf{A}_{1,2}$  — потенциал Лиенара—Вихерта частицы до и после соударения.

Если воспользоваться тем, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  образуют ортонормированную тройку векторов, для которых выполняется условие полноты

$$\sum_{\lambda=1}^2 e_i^\lambda e_k^\lambda + n_i n_k = \delta_{ik}, \quad (3.137)$$

то после суммирования по поляризациям выражение (3.136) получаем

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \sum_{\lambda} d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}_\lambda) = (e^2/4\pi) (d^3 k/(2\pi)^2) \{\mathbf{n} [\mathbf{p}_1/(k p_1) - \mathbf{p}_2/(k p_2)]\}^2 = \\ = (d^3 k/\omega^2 \pi) r^2 [\mathbf{n}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)]^2. \quad (3.138)$$

Это же выражение немедленно получается, если подставить выражение для магнитного поля (1.52) в следующий интеграл:

$$\mathbf{H}_\omega = \int \mathbf{H}(t) \exp[i\omega t] dt, \quad (3.139)$$

при  $\omega \rightarrow 0$

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t) dt = [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{n}], \quad (3.140)$$

и подставить  $\mathbf{H}_\omega$  в (1.56).

Учитывая, что

$$[\mathbf{n}(p_1/(kp_1) - p_2/(kp_2))]^2 = (p_1/(kp_1) - p_2/(kp_2))^2 - (1/\omega)^2 [(\omega\varepsilon - kp_1)/(kp_1) - (\omega\varepsilon - kp_2)/(kp_2)]^2 = -(p_{1\mu}/(kp_1) - p_{2\mu}/(kp_2))^2, \quad (3.141)$$

имеем

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = -(e^2/4\pi) [d^3 k/(4\pi^2)] [p_{1\mu}/(kp_1) - p_{2\mu}/(kp_2)]^2. \quad (3.142)$$

Из записи выражения (3.138) в форме

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = (e^2/4\pi) [d\omega d\Omega/(2\pi)^2] [(n v_1)/(1 - n v_1) - [n v_2]/(1 - n v_2)]^2 \quad (3.143)$$

видно, что коэффициент при  $d\omega$  не содержит частоты. Иными словами,  $d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega)/d\omega \rightarrow \text{const}$  при  $\omega \rightarrow 0$ , т. е. спектральное распределение излученной энергии при  $\omega \rightarrow 0$  не зависит от частоты и стремится к постоянному пределу.

Заметим еще, что был рассмотрен случай прохождения частицы через поле. Поскольку выражение (3.136) не зависит от механизма взаимодействия, то оно в записи через потенциалы Лиенара—Вихерта сохраняет свой вид и при столкновении частиц (только теперь в качестве  $\mathbf{A}$  необходимо взять сумму потенциалов Лиенара—Вихерта всех сталкивающихся зарядов), тогда получаем

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega, \mathbf{e}) = (e^2/4\pi) [d^3 k/(2\pi)^2] \sum_n (\mathbf{e} p_{1n}/kp_{1n} - \mathbf{e} p_{2n}/kp_{2n})^2. \quad (3.144)$$

#### § 4. РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

4.1. Воздействие излучаемого поля на заряд. Ускоренное движение заряженной частицы во внешнем поле всегда сопровождается излучением. Это излучение уносит энергию и импульс частицы и поэтому влияет на последующее движение частицы, так что само движение в какой-то мере определяется характером возникающего излучения. Указанное обратное действие излучения на заряд называется *реакцией излучения* или *торможением излучением*.

Проблема воздействия излучения на движение заряда тесно связана с самодействием, т. е. с действием поля заряда на сам заряд. Рассмотрим поле заряда в точке, где он находится. Запаздывающий тензор электромагнитного поля (1.25) представим в виде

$$F_{ret}^{\mu\nu} = (F_{ret}^{\mu\nu} + F_{adv}^{\mu\nu})/2 + (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu})/2, \quad (4.1)$$

где  $F_{adv}^{\mu\nu}$  — опережающий тензор электромагнитного поля. Этот тензор находится из опережающих потенциалов, для получения которых в формулу (1.10) необходимо подставить  $D(x - x') = D_{adv}(x - x')$ , тогда

$$D_{adv}(\mathbf{r}, t) = \delta(x^2) \vartheta(-x_0)/2\pi = (1/4\pi |\mathbf{r}|) \delta(|\mathbf{r}| + t). \quad (4.2)$$

Опережающая функция Грина (4.2) представляет собой бесконечно узкую сферическую сходящуюся волну, т. е. она отлична от нуля только на световом конусе, направленном в прошлое. Выражение для опережающих потенциалов имеет вид [ср. (1.14)—(1.16)]

$$A_{adv}^{\mu}(x) = A_{adv,0}^{\mu}(x) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| + t - t_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} j^{\mu}(\mathbf{r}_0, t_0) d^4 x_0. \quad (4.3)$$

Опережающий тензор электромагнитного поля проще всего получить, если воспользоваться способом, приведенным в сноске к стр. 10. Тогда

$$\begin{aligned} F_{adv}^{\mu\nu} &= \partial^{\mu} A_{adv}^{\nu}(x) - \partial^{\nu} A_{adv}^{\mu}(x) = -(e/4\pi) (1/Ru) (d/dt) [(R^{\mu} u^{\nu} - \\ &- R^{\nu} u^{\mu})/Ru] = -(e/4\pi) \{ (R^{\mu} \omega^{\nu} - R^{\nu} \omega^{\mu})/(Ru)^2 + \\ &+ (R\omega - 1) (R^{\nu} u^{\mu} - R^{\mu} u^{\nu})/(Ru)^3 \}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где выражение в правой части берется в запаздывающей точке

$$t - t_0 = -R; \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (4.5)$$

Приступим к вычислению полуразности запаздывающего и опережающего потенциалов в (4.1). Ясно, что, не нарушая общности, можно положить  $t_0 = 0$ . Тогда, сравнивая (4.4), (4.5) и (1.19), (1.25), получаем, что  $F_{ret}^{\mu\nu}(R) = -F_{adv}^{\mu\nu}(-R)$ . Для того чтобы вычислить  $1/2 (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu})$  в точке нахождения частицы [ $x^{\mu} = x_0^{\mu}(\tau_0)$ , ср. (1.18)], удобно воспользоваться представлением запаздывающих и опережающих потенциалов до вычисления производных по  $\tau$  [см. (4.4) и сноску на стр. 10], положив для простоты  $\tau_0 = 0$  и разложив все величины по степеням  $\tau - \tau_0 = \tau \rightarrow 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} Ru &= Ru|_{\tau=0} + \tau d(Ru)/d\tau|_{\tau=0} + (\tau^2/2) (d^2(Ru)/d\tau^2)|_{\tau=0} + \dots = \\ &= \tau + 0(\tau^3); \\ L^{\mu\nu}(\tau) &\equiv R^{\nu} u^{\mu} - R^{\mu} u^{\nu} = L^{\mu\nu}(0) + \frac{dL^{\mu\nu}(0)}{d\tau} \tau + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{d^2 L^{\mu\nu}(0)}{d\tau^2} + \\ &+ \frac{\tau^3}{6} \cdot \frac{d^3 L^{\mu\nu}(0)}{d\tau^3} + \dots = \frac{\tau^2}{2} (u^{\nu} \omega^{\mu} - u^{\mu} \omega^{\nu}) + \\ &+ \frac{\tau^3}{3} \left( u^{\nu} \frac{d\omega^{\mu}}{d\tau} - u^{\mu} \frac{d\omega^{\nu}}{d\tau} \right) + 0(\tau^4), \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

поскольку

$$\left. \begin{aligned} Ru|_{\tau=0} &= 0 (R=0); \quad d^2(Ru)/d\tau^2|_{\tau=0} = \omega^{\mu} u_{\mu} + R^{\mu} d\omega_{\mu}/d\tau = 0; \\ L^{\mu\nu}(0) &= 0; \quad dL^{\mu\nu}(0)/d\tau = R^{\nu} \omega^{\mu} - R^{\mu} \omega^{\nu} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Значения отличных от нуля производных содержатся в формуле (4.6). Учитывая, это при принятых условиях [ср. (4.4) и (1.25)]

$F_{ret}^{\mu\nu}(\tau) = -F_{adv}^{\mu\nu}(-\tau)$ , подставляя полученные разложения в  $1/2 \times (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu})$  и проводя необходимые вычисления, имеем

$$F_{rad}^{\mu\nu} \equiv (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu})/2 = (e/6\pi) \left( \frac{dw^\mu}{d\tau} u^\nu - \frac{dw^\nu}{d\tau} u^\mu \right). \quad (4.8)$$

При вычислении этого выражения были сохранены в разложениях (4.6) только члены, не обращающиеся в нуль при  $\tau \rightarrow 0$ .

Члены в правой части (4.1) имеют разный физический смысл. Полусумма запаздывающего и опережающего полей расходится в точке, где находится заряд, она связана с электромагнитной энергией частицы, движущейся во внешнем поле. Попытки решить проблему собственной электромагнитной энергии в классической электродинамике носят крайне искусственный характер. Поэтому не будем здесь рассматривать первый член в (4.1) (напомним, что движение частицы и ее масса считаются заданными). Полуразность запаздывающего и опережающего полей (4.8) конечна во всей области. Сейчас мы увидим, что именно она связана с потерей энергии за счет излучения. Заметим, что разбиение (4.1), предложенное Дираком [55], является, очевидно, релятивистски инвариантным, причем первый член меняет знак при отражении времени, а второй не меняет. Для учета реакции излучения в уравнение движения частицы наряду с внешним полем  $F^{\mu\nu}$  включим также поле самого заряда в точке, где он находится (в виде  $F_{rad}^{\mu\nu}$ ), тогда

$$\begin{aligned} mdu^\mu/d\tau &= e(F^{\mu\nu} + F_{rad}^{\mu\nu})u_\nu = eF^{\mu\nu}u_\nu + (2/3)(e^2/4\pi)(dw^\mu/d\tau - \\ &- u^\mu u_\nu dw^\nu/d\tau) = eF^{\mu\nu}u_\nu + (2/3)(e^2/4\pi)(dw^\mu/d\tau + u^\mu w^\nu w_\nu) = \\ &= F_{ex}^\mu + g^\mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выражение для 4-силы реакции излучения  $g^\mu$  можно переписать в другом виде, если выразить производные через тензор действующего на частицу внешнего поля, учитывая малость силы реакции излучения по сравнению с внешней силой (только в этом случае применим весь подход, так как излучение рассматривалось при заданном движении):

$$\begin{aligned} g^\mu &= (2/3)(e^2/4\pi) [(e/m)(\partial F^{\mu\nu}/\partial x_\lambda)u_\nu u_\lambda + (e^2/m^2)F^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}u^\lambda + \\ &+ (e^2/m^2)u^\mu F^{\nu\lambda}u_\lambda F_{\nu\rho}u^\rho]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Интеграл от 4-силы  $g^\mu$ , взятый по мировой линии заряда, пролетающего в данном внешнем поле, совпадает (с обратным знаком) с полным излученным зарядом 4-импульсом  $\Delta p^\mu$  [см. (1.39)]. В этом можно убедиться так: первый член в  $g^\mu$  [в форме (4.9)] при интегри-



ровании обращается в нуль, поскольку предполагается, что на бесконечности частица не имеет ускорения ( $du^\mu/d\tau|_{-\infty}^\infty = 0$ ), второй член дает

$$-\int g^\mu d\tau = -(2/3)(e^2/4\pi) \int (du^\nu/d\tau)(du_\nu/d\tau) u^\mu d\tau, \quad (4.11)$$

что совпадает\* с (1.37). Таким образом, сила  $g^\mu$  действительно учитывает воздействие излучения на заряд. В нерелятивистском пределе среднее значение работы силы  $\mathbf{f}[g^\mu = g^\mu(\mathbf{f} \mathbf{v} \gamma, \mathbf{f} \gamma)]$  совпадает с интенсивностью дипольного излучения\*\*.

Следует иметь в виду, что сила реакции излучения [а следовательно, и уравнение (4.9)] имеет ограниченную область применимости. Сначала было рассмотрено излучение при заданном движении, а затем была введена сила, учитывающая потерю энергии при излучении. Это возможно только в том случае, когда сила реакции излучения значительно меньше силы, действующей со стороны внешнего поля. Рассмотрим теперь смысл такого условия. Сравнение компонент одного 4-вектора силы  $F_{ex}^\mu$  и компонент другого ( $g^\mu$ ) не является ковариантной операцией. Поэтому обычно проводят сравнение векторов силы в системе покоя частицы, в которой должно быть  $|\mathbf{g}|_{\text{сп}} \ll |F_{ex}|_{\text{сп}}$ . Так как  $F^\mu u_\mu = 0$ ,  $F_0 = \mathbf{F}u_0 = \mathbf{F}v$ , имеем в системе покоя  $F_0 = 0$ , и тогда условие применимости запишем в виде

$$|\sqrt{-g^\mu g_\mu}| \ll \sqrt{-F_{ex}^\mu F_{ex\mu}}. \quad (4.12)$$

Ввиду инвариантности квадрата 4-вектора сравнение можно проводить в любой системе. Подставляя в (4.12) явный вид входящих величин, имеем

$$(e^2/4\pi m) \sqrt{\omega^4 - (d\omega/d\tau)^2} \ll \sqrt{-\omega^2}. \quad (4.13)$$

Отсюда в нерелятивистском приближении получаем  $e^2\omega/4\pi m \ll 1$ , где  $\omega$  — частота изменения внешнего поля, т. е. оно должно слабо меняться на длине порядка классического радиуса частицы (классический радиус электрона  $r_0 = e^2/(4\pi mc^2) = 2,818 \cdot 10^{-13}$  см). Заметим, что на существенно больших расстояниях  $\sim \hbar/m$  ( $\lambda_e = \hbar/m_e c = 3,861 \cdot 10^{-11}$  см) начинают проявляться квантовые эффекты.

Другое условие, следующее из (4.13), имеет вид

$$H \ll 4\pi m^2/e^3, \quad (4.14)$$

\* Детальный анализ проблемы реакции излучения, в частности попытка придать физический смысл появлению опережающих потенциалов в формуле Дирака, был проведен в работе [97].

\*\* Введем силу  $\mathbf{f}$  такую, что  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} v dt = -(e^2/6\pi) \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} dt$ . Интегрируя правую часть по частям при  $(\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}})|_{t_1}^{t_2} = 0$ , имеем  $\mathbf{f} = (e^2/6\pi) \ddot{\mathbf{v}}$ . Это же вытекает из (4.9) при  $v \ll 1$ .

т. е. внешнее поле должно быть мало по сравнению с граничным полем классической электродинамики (полем электрона на классическом радиусе):

$$E_{cl} = H_{cl} = 4\pi m^2 c^4 / e^3 = e / 4\pi r_0^3, \quad (4.15)$$

Рассмотрим теперь этот критерий в ультрарелятивистском пределе. Следует иметь в виду, что [см. (2.2)]

$$\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} / |\dot{\mathbf{v}}_{\perp}| = F_{\parallel} / (F_{\perp} \gamma^2). \quad (4.16)$$

поэтому если действующая сила удовлетворяет критерию\*

$$F_{\parallel} / \gamma F_{\perp} \ll 1, \quad (4.17)$$

то комбинации  $\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} / |\dot{\mathbf{v}}_{\perp}|$  весьма мала ( $\sim 1/\gamma^2$ ). В этом случае порядок величин ( $\gamma \gg 1$ ) в (4.13) следующий:  $(d\omega/dt)^2 \sim \gamma^6$ ,  $\omega^4 \sim \gamma^8$ , так что членом с производной можно пренебречь. Тогда неравенство (4.13) можно переписать в виде

$$(e^2/4\pi m) \sqrt{-\omega^2} \ll 1; (e^3/4\pi m^2) \sqrt{-(F^{\mu\nu} u_{\nu})^2} \ll 1. \quad (4.18)$$

Если  $F$  — величина электрического или магнитного внешнего поля, то (4.18) удобно представить так:

$$e^3 F \gamma / (4\pi m^2) \ll 1; \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}. \quad (4.19)$$

Это же неравенство следует из (4.14), если учесть, что в последнее входит поле в системе покоя, порядок величины которого  $\gamma F$ .

Отметим, что условие, при котором квантовые эффекты\*\* малы, в ковариантной записи имеет следующий вид:

$$(e\hbar/m^2) \sqrt{-(F^{\mu\nu} u_{\nu})^2} \ll 1. \quad (4.20)$$

Сравнение критериев (4.18) и (4.20) показывает, что квантовые эффекты появляются при полях, в  $\alpha$  ( $e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$ ) раза меньше, чем поля, нарушающие неравенства (4.18).

Приведем еще выражение для 3-вектора силы реакции излучения (4.10) в ультрарелятивистском пределе:

$$\mathbf{f}_{UR} = -(2/3) (e^4/4\pi m^2) \gamma^2 \mathbf{v} [(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{H}])^2 - (\mathbf{v}\mathbf{E})^2] = \mathbf{v} (2/3) (e^2/4\pi) \omega_{\mu}^2. \quad (4.21)$$

Сравнивая с формулой (1.38), получаем

$$\mathbf{f}_{UR} = -\mathbf{v} d\varepsilon/dt_0. \quad (4.22)$$

Следовательно, в этом случае сила  $\mathbf{f}_{UR}$ : а) является продольной (относительно  $\mathbf{v}$ ) и направлена против скорости, т. е. является силой торможения; б) пропорциональна квадрату энергии частицы

\* Противный случай  $F_{\perp} \lesssim F_{\parallel}/\gamma$  по существу является нерелятивистским, поскольку при пересчете таких полей в систему покоя они существенно не меняются.

\*\* Детальный анализ квантовых эффектов будет проведен ниже (см. раздел 5.3).

$\gamma^2$ ; в) равна по величине интенсивности излучения частицы в заданном внешнем поле\*. Отношение силы реакции излучения (4.21) к внешней силе имеет порядок  $e^3\gamma^2 F/(4\pi m^2)$ .

Приведенное отношение может быть существенно больше единицы и при выполнении неравенства (4.19). Это ни в коей мере не противоречит критерию (4.18), поскольку сила реакции излучения (4.21) является продольной [см. (4.17)]. Тем самым возможна ситуация, при которой потеря энергии ультрарелятивистской частицей во внешнем поле определяется в основном силой реакции излучения. Ниже рассмотрим важный случай, в котором существенна реакция излучения.

4.2. Радиационное затухание колебаний в ускорителях. В циклических ускорителях элементарные частицы движутся в неоднородном магнитном поле, которое удерживает (фокусирует) частицы вблизи некоторой (равновесной) траектории. При движении в таком поле частицы совершают малые вертикальные  $z$ , радиальные  $\rho$  (бетатронные) и фазовые  $X$  (синхротронные) колебания, каждые из которых можно рассматривать как колебания в соответствующей ( $z, \rho, X$ ) потенциальной яме. При высоких энергиях  $\gamma \gg 1$  существенное влияние на движение легких частиц (электронов) в циклических ускорителях оказывает их излучение в магнитном поле. Рассмотрим это влияние, полагая частицы ультрарелятивистскими ( $\gamma \gg 1$ ) и оставляя только главные члены разложения по  $1/\gamma$ . С этой точностью, как отмечалось в разделе 4.1, можно воспользоваться силой реакции излучения в форме (4.21) и (4.22), так что сила торможения направлена против скорости. Излучение электрона, совершающего малые колебания, уносит полный импульс, а ускоряющая система ускорителя возобновляет только продольный (касательный к равновесной траектории) импульс. В результате бетатронные колебания затухают. Следует также учесть, что радиальная и фазовая потенциальные ямы зависят от энергии, так что потеря энергии вследствие излучения и последующее ее возобновление также могут привести к затуханию (или возбуждению)  $\rho$ - и  $X$ -колебаний.

При конкретном рассмотрении воздействия излучения на колебания предположим для простоты, что колебания ( $z, \rho, X$ ) в отсутствие излучения независимы и полная энергия электрона в среднем не меняется. Поскольку энергия каждого из колебательных движений однозначно связана с его амплитудой, в данной задаче удобно воспользоваться гамильтоновым формализмом. Гамильтониан каждого из колебательных движений запишем в виде\*\* [23]

$$\mathcal{H}_j = p_j^2/2\varepsilon + U_j(q_j) = T_j + U_j. \quad (4.23)$$

\* Работу силы реакции излучения следует сравнить с потерей энергии на длине когерентности (см. раздел 3.1), с которой уходит независимый импульс электромагнитного излучения. В старшем по  $1/\gamma$  приближении длина когерентности ( $\sim 1/\gamma$ ) стремится к нулю. По этой причине (4.22) является локальным.

\*\* Такое представление справедливо только для малых колебаний.

С учетом сказанного выше имеем [см. (4.21) и (4.9)]

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rad} &\equiv d\varepsilon/dt|_{rad} = (2/3)(e^2/4\pi)\omega^2 = -I, \\ \dot{p}_{jrad} &\equiv dp_j/dt|_{rad} = (2/3)(e^2/4\pi)\omega^2 v_j = -Iv_j;\end{aligned}\quad (4.24)$$

причем

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{in} + \dot{\varepsilon}_{rad}; \quad \dot{p}_j = \dot{p}_{jrad} + \dot{p}_{jin} = \dot{p}_{jrad}(1 - \delta_{jX}). \quad (4.25)$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что возобновляется только продольный импульс электромагнитного поля. Гамильтониан  $\mathcal{H}_j$  является в отсутствие излучения и ускоряющего поля интегралом движения, так что изменение его во времени:

$$\begin{aligned}d\mathcal{H}_j/dt &= (p_j/\varepsilon)(dp_j/dt) + (dU_j/dq_j)(dq_j/d\varepsilon)\dot{\varepsilon} = \\ &= -2T_j(I/\varepsilon)(1 - \delta_{jX}) + (dU_j/dq_j)(dq_j/d\varepsilon)\dot{\varepsilon},\end{aligned}\quad (4.26)$$

где использованы формулы (4.24) и (4.25). Учитывая, что  $\dot{\varepsilon} \approx \approx (d\dot{\varepsilon}/dq_j)q_j$ , поскольку на равновесной траектории движение стационарно,  $\varepsilon_{q=0} = 0$ , и проводя усреднение по времени с учетом

$$I/\varepsilon \ll \omega_j, \quad (4.27)$$

где  $\omega_j$  — частота  $j$ -колебаний, и используя теорему вириала

$$\overline{\frac{dU_j}{dq_j}q_j} = \overline{2T_j}, \quad (4.28)$$

получаем

$$\frac{d\mathcal{H}_j}{dt} = \left[ \frac{dq_j}{d\varepsilon} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial q_j} - \frac{I}{\varepsilon}(1 - \delta_{jX}) \right] \overline{2T_j}(\mathcal{H}_j). \quad (4.29)$$

Это выражение справедливо для произвольного потенциала, т. е. произвольного неоднородного фокусирующего поля (при условии независимости колебаний).

Для осцилляторных потенциалов  $2\overline{T_j} = \varepsilon_j$ . Подставляя это соотношение в (4.29) и используя то, что  $\rho = r - R$ ;  $X = R - R_0$ , причем  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты частицы;  $R$  — мгновенный радиус кривизны;  $R_0$  — радиус равновесной траектории, и что для вертикальных колебаний  $z$  потенциальная яма не зависит от энергии, имеем из (4.29)

$$\left. \begin{aligned}d\varepsilon_\rho/dt &= [-(dR/d\varepsilon)(\partial\dot{\varepsilon}/\partial r) - I/\varepsilon] \varepsilon_\rho; \\ d\varepsilon_X/dt &= (dR/d\varepsilon) [\partial\dot{\varepsilon}/\partial r + (\partial\dot{\varepsilon}/\partial\varepsilon)(d\varepsilon/dR)] \varepsilon_X; \\ d\varepsilon_z/dt &= -I\varepsilon_z/\varepsilon.\end{aligned}\right\} \quad (4.30)$$

Здесь учтено, что  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}[r, \varepsilon(R)]$ . Все уравнения (4.30) имеют вид

$$d\varepsilon/dt = -\Gamma_j \varepsilon_j, \quad (4.31)$$

где величины  $\Gamma_j$  не зависят от  $\varepsilon_j$ , поэтому

$$\varepsilon_j(t) = \varepsilon_j(0) \exp \left[ - \int \Gamma_j dt \right]. \quad (4.32)$$

Парциальные энергии  $\varepsilon_j$  пропорциональны квадратам амплитуды  $a_j$  соответствующих колебаний, итак, из (4.32) следует, что

$$a_j^2(t) = a_j^2(0) \exp \left[ - \int \Gamma_j dt \right]. \quad (4.33)$$

Величины  $\Gamma_j$  называются *декрементами* (при  $\Gamma_j > 0$ ) или *инкрементами* (при  $\Gamma_j < 0$ ) соответствующих колебаний.

Учитывая, что  $d\varepsilon/d\varepsilon = d\varepsilon_{rad}/d\varepsilon = -dI/d\varepsilon$ , получаем из (4.31) следующее выражение для суммы декрементов:

$$\Gamma_\rho + \Gamma_x + \Gamma_z = I(2 + \partial \ln I / \partial \ln \varepsilon) / \varepsilon. \quad (4.34)$$

Таким образом, сумма декрементов колебаний не зависит от конкретных свойств системы, а определяется только соотношением между интенсивностью излучения и энергией.

Вычислим декременты в случае слабо неоднородного азимутально-симметричного магнитного поля с показателем неоднородности  $n$ :

$$H = H_0(R_0/r)^n; \quad n = -\partial \ln H(r) / \partial \ln r. \quad (4.35)$$

Учитывая, что  $eH(R)/\varepsilon = \omega = 1/R$ , получаем (следует иметь в виду, что рассматриваются малые колебания  $(r - R_0)/R_0 \ll 1$ , следовательно вычисляется величина вблизи равновесной траектории):

$$d\varepsilon/dR = eH(R) [1 + d \ln H(R)/dR] = eH(1 - n) \approx \varepsilon_0(1 - n)/R_0. \quad (4.36)$$

Имеем также

$$\dot{\varepsilon} = I_0 R_0/r - I(r, \varepsilon(R)), \quad (4.37)$$

где [см. (1.47) и (2.10)]

$$I(r, \varepsilon) = (2/3)(e^2/4\pi) \dot{v}^2 \gamma^4 = (2/3)(e^4/4\pi)(H^2 \varepsilon^2/m^4);$$

$I_0$  — интенсивность излучения на равновесной траектории. Отсюда следует

$$\partial \dot{\varepsilon} / \partial r \approx I_0(-1 + 2n)/R_0; \quad \partial \dot{\varepsilon} / \partial \varepsilon \approx -2I_0/\varepsilon_0. \quad (4.38)$$

Подставляя найденные величины в формулы для инкрементов (4.30), получаем для  $\Gamma_j$ :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\rho &= \left[ (dR/d\varepsilon) (\partial \dot{\varepsilon} / \partial r) + I_0/\varepsilon_0 \right] = [n/(1-n)] (I_0/\varepsilon_0); \\ \Gamma_x &= (-dR/d\varepsilon) \left[ \partial \dot{\varepsilon} / \partial r + (\partial \dot{\varepsilon} / \partial \varepsilon) (\partial \varepsilon / \partial R) \right] = \\ &= [(3-4n)/(1-n)] (I_0/\varepsilon_0); \\ \Gamma_z &= I_0/\varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 5. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

5.1. Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле. Волновые уравнения для свободных частиц отображают свойства, связанные с общими требованиями пространственно-временной симметрии для частиц с данным спином. Физические же процессы в той или иной форме связаны с взаимодействием частиц. В некоторых случаях взаимодействие можно ввести с помощью понятия внешнего электромагнитного поля, посредством которого аппроксимируется воздействие на данную частицу со стороны другой частицы или совокупности других частиц. Понятием внешнего поля можно, как правило, пользоваться до тех пор, пока движение заданной частицы не влияет на состояние частиц, являющихся источниками электромагнитного поля, так что внешнее поле является неизменным и классическим (неквантованным).

Волновое уравнение для электрона в заданном внешнем поле можно получить, как в классической электродинамике и в нерелятивистской квантовой механике, с помощью операции «удлинения» производной

$$p_\mu \rightarrow P_\mu = p_\mu - eA_\mu; \quad p_\mu = i\partial_\mu, \quad (5.1)$$

где  $P_\mu$  — кинематический импульс;  $A_\mu(x)$  — вектор-потенциал внешнего поля, так что уравнение Дирака во внешнем поле имеет вид

$$(\gamma^\mu P_\mu - m)\psi(x) = [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi(x) = D_A\psi = 0, \quad (5.2)$$

а гамильтониан приобретает вид

$$H^F = \gamma^0 \gamma (-i\nabla - e\mathbf{A}) + \gamma^0 m + e\varphi. \quad (5.3)$$

При калибровочном преобразовании  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$  необходимо одновременно произвести калибровочное фазовое преобразование  $\psi(x) \rightarrow \exp[-ie\chi(x)]\psi(x)$ . Вид выражения для плотности тока не меняется, т. е. в присутствии электромагнитного поля

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (5.4)$$

где  $\psi(x)$  — решение уравнения (5.2). Уравнение (5.2) содержит заряд частицы  $e$  со своим знаком ( $e < 0$  для электронов). Уравнение для позитронов отличается знаком заряда.

От уравнения первого порядка можно перейти к уравнению второго порядка, применяя к (5.2) оператор  $(P_\mu \gamma^\mu + m)$ :

$$[P_\mu P^\mu - m^2 - e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/2] \psi(x) = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение Клейна—Гордона во внешнем поле также находится с помощью операции удлинения производной (5.1):

$$(P^\mu P_\mu - m^2) \varphi(x) = 0. \quad (5.6)$$

Дополнительный член в (5.5)  $e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/2$  связан с наличием у электронов спина. В трехмерной записи

$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\sigma^{0k} F_{0k} + \sigma^{ik} F_{ik}) = 2(-\mathbf{\Sigma H} + i\boldsymbol{\alpha E}). \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.5), имеем

$$[P_\mu P^\mu - m^2 + e\mathbf{\Sigma H} - ie\boldsymbol{\alpha E}] \psi(x) = 0. \quad (5.8)$$

Для постоянных (не зависящих от времени) внешних полей можно перейти к стационарным волновым уравнениям, решение которых принадлежит к дискретному  $|\varepsilon| < m$  и к непрерывному спектру  $|\varepsilon| > m$ . Если связь во внешнем поле не слишком сильная, так что энергия связанных состояний не доходит до  $\varepsilon = 0$ , то, как и при описании свободных частиц, можно провести разбиение волновой функции на части с положительной ( $\varepsilon > 0$ ) и отрицательной частотами ( $\varepsilon < 0$ ). Схема вторичного квантования строится, как для свободных частиц, заменой плоских волн на нормированные решения в данном внешнем поле:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_m \{ a_m \psi_m^{(+)} \exp[-i\varepsilon_m^{(+)} t] + b_m^+ \psi_m^{(-)} \exp[i\varepsilon_m^{(-)} t] \}; \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_m \{ a_m^+ \bar{\psi}_m^{(+)} \exp[i\varepsilon_m^{(+)} t] + b_m \bar{\psi}_m^{(-)} \exp[-i\varepsilon_m^{(-)} t] \}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где знаки «+» и «-» относятся соответственно к положительным и отрицательным частотам,  $a_m^+$  ( $b_m^+$ ) и  $a_m$  ( $b_m$ ) — операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии с квантовыми числами  $m$ .

Описанный подход применим до тех пор, пока в задаче несущественно рождение электрон-позитронных пар внешним полем. В противном случае рассмотрение следует вести в полном (многочастичном) аспекте квантовой электродинамики.

5.2. Спиновые операторы во внешнем поле. В Приложении А приведены поляризационные операторы для свободных частиц со спином  $1/2$  (операторы, коммутирующие с уравнением Дирака и имеющие собственные значения  $\pm 1$ ). Рассмотрим

еще одну форму записи поляризаационного оператора, особенно удобную при рассмотрении задач во внешнем поле. Введем [100]

$$T^\mu = \gamma^5 (m\gamma^\mu - p^\mu)/m, \quad (5.10)$$

где  $*p^\mu = (H^0, \mathbf{p}) = (i\hbar\partial_t - i\hbar\nabla)$ . Как легко убедиться, этот оператор коммутирует с гамильтонианом одночастичного уравнения Дирака:

$$[T^\mu, H^0] = 0, \quad (5.11)$$

здесь  $H^0 = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + m)$ . Отметим, что операторы определены на классе функций, удовлетворяющих уравнению Дирака. Поэтому, сворачивая  $T^\mu$  с 4-вектором спина  $s^\mu$ , имеем

$$-T^\mu s_\mu \psi_{1,2}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = S^\mu s_\mu \psi_{1,2}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = \pm \psi_{1,2}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}), \quad (5.12)$$

т. е. скалярное произведение  $(-T^\mu s_\mu)$  имеет такие же собственные значения, как и векторный оператор спина  $(S^\mu s_\mu)$ . Оператор  $T^\mu$  обладает следующими свойствами:

$$T^\mu T_\mu = -3; \quad T^\mu p_\mu = 0, \quad (5.13)$$

которые следуют прямо из определения (5.10). Учитывая (5.12) и (5.13), легко убедиться, что

$$\psi_{1,2}^\dagger(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) T_\mu \psi_{1,2}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = \pm s_\mu. \quad (5.14)$$

Кроме того, с учетом  $\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}$  имеем

$$\mathbf{T} = -\gamma^5 \mathbf{p}/m + \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma}; \quad T^0 = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}/m. \quad (5.15)$$

Последние выражения позволяют дать следующую физическую интерпретацию оператора  $T^\mu$ . Если  $\mathbf{O}$  [см. Приложение А, (А.12)] есть поляризаационный оператор (для движущейся частицы), среднее значение которого дает вектор спина  $\boldsymbol{\xi}$  в системе покоя, то  $T^\mu$  — поляризаационный оператор (для движущейся частицы), его среднее значение есть вектор  $s^\mu$ , получающийся при преобразовании Лоренца вектора  $\boldsymbol{\xi}$  из системы покоя. В этом смысле оператор  $T^\mu$  является ковариантным обобщением 3-вектора поляризации  $\mathbf{O}$ .

Ковариантный оператор поляризации  $T^\mu$  во внешнем поле получается из (5.10) с помощью операции «удлинения» производной (5.1):

$$T^\mu = \gamma^5 (\gamma^\mu m - P^\mu)/m. \quad (5.16)$$

причем  $P_\mu = p_\mu - eA_\mu$ ;  $P_0 = H^F - eA_0$ . В трехмерной записи

$$\mathbf{T} = \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} - \gamma^5 \mathbf{P}/m; \quad T^0 = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}/m. \quad (5.17)$$

\* В разделах 5.2, 5.3 и 5.5 использована система единиц  $c=1$ .



Оператор  $T^\mu$  во внешнем поле обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} T^\mu T_\mu &= -3 - e\hbar (\Sigma \mathbf{H} - i\alpha \mathbf{E}); \\ T^\mu P_\mu &= e\hbar \gamma^5 (\Sigma \mathbf{H} - i\alpha \mathbf{E})/m. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Учитывая, что

$$dT^\mu/dt = \partial T^\mu/\partial t + (1/i\hbar) [T^\mu, H^F]; \quad \partial T^\mu/\partial t = (1/m) \gamma^5 e (\partial A^\mu/\partial t), \quad (5.19)$$

воспользовавшись (5.3), нетрудно получить

$$dT^\mu/dt = -e\gamma^5 \gamma^0 \gamma_\nu F^{\mu\nu}/m, \quad (5.20)$$

или в трехмерной записи

$$dT/dt = e([\Sigma \mathbf{H}] - \gamma^5 \mathbf{E})/m; \quad dT^0/dt = e(\Sigma \mathbf{E})/m. \quad (5.21)$$

Отсюда следует, что во внешнем электромагнитном поле в общем случае поляризационный оператор не является интегралом движения. Однако в некоторых частных случаях существуют поляризационные интегралы движения. Это:

а)  $\mathbf{E} = 0$ , тогда очевидно, что  $T^0 = \text{const}$ . Из (5.17) видно, что  $T^0$  характеризует поляризацию на направление движения;

б)  $\mathbf{E} = 0$ ;  $\mathbf{H}/|\mathbf{H}| = \text{const}$ , тогда  $T^0 = \text{const}$ ;  $\mathbf{T}\mathbf{H}/|\mathbf{H}| = \text{const}$ , последняя величина характеризует поляризацию по направлению поля;

в)  $\mathbf{H} = 0$ ,  $\mathbf{E}$  в некотором фиксированном направлении обращается в нуль ( $\mathbf{E} \mathbf{n}_e = 0$ ), тогда  $\mathbf{T} \mathbf{n}_e = \text{const}$ .

При выборе поляризационных состояний частицы в магнитном поле часто оказываются полезными собственные состояния оператора  $\mathbf{O}$ , или оператора, отличающегося от него на слагаемое, пропорциональное уравнение Дирака:

$$\mathbf{O} = \gamma^0 \Sigma - \gamma^5 \mathbf{p}/\varepsilon - \gamma^0 (\Sigma \mathbf{p}) \mathbf{p}/[\varepsilon(\varepsilon + m)]. \quad (5.22)$$

Проводя здесь «удлинение» производных (в магнитном поле только  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P}$ ), получим

$$\mathbf{O} = \gamma^0 \Sigma - \gamma^5 \mathbf{P}/\varepsilon - \gamma^0 (\Sigma \mathbf{P}) \mathbf{P}/[\varepsilon(\varepsilon + m)]. \quad (5.23)$$

Из приведенного выше анализа следует, что для магнитного поля, направленного по оси  $Z$ , интегралами движения являются  $\mathbf{O}_z$  и  $\mathbf{OP}$ . Поляризационные состояния, определяемые оператором  $\mathbf{O}_z$ , при переходе в систему покоя соответствуют спину электрона, по и против направления магнитного поля, а поляризационные состояния, определяемые оператором  $\mathbf{OP}$ , соответствуют спину электрона, по и против направления движения.

5.3. Анализ квантовых эффектов при движении частиц в магнитном поле. При движении заряженных частиц в магнитном поле основные закономерности являются общими для частиц с любым спином. Наличие у электро-

на спина дает добавку  $e\hbar Hc$  в квадрат энергии [см. (5.8)] (относительная величина ее  $\hbar\omega_0/\varepsilon$ , где  $\omega_0 = eH/\varepsilon = (eHc/\varepsilon) = v_l/R$  — ларморова частота;  $v_l$  — компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю;  $R$  — радиус кривизны в магнитном поле) и при высокой энергии с указанной точностью ( $\hbar\omega_0/\varepsilon$ ) не сказывается на движении частицы. Заметим, что анализ динамических переменных с гамильтонианом Дирака даже для случая свободного движения требует искусственных манипуляций с  $\alpha$ -матрицами для устранения «дрожания» (Zitterbewegung). Поэтому для анализа свойств квантованного движения частицы во внешнем магнитном поле будем рассматривать наиболее простой случай скалярной частицы, гамильтониан которой получается из классического выражения переходом от величин к операторам:

$$\mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}, \quad (5.24)$$

где  $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}$ . Оператор скорости имеет вид

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (1/i\hbar) [\mathbf{r}, \mathcal{H}]. \quad (5.25)$$

Воспользовавшись тождеством

$$[\mathbf{r}, \mathcal{H}^2] = \{[\mathbf{r}, \mathcal{H}], \mathcal{H}\}, \quad (5.26)$$

получим операторное уравнение для  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} + [\mathcal{H}, \mathbf{v}] \mathcal{H}^{-1}/2 = \mathbf{P} \mathcal{H}^{-1}. \quad (5.27)$$

Поскольку входящий коммутатор пропорционален постоянной Планка  $\hbar$ , это уравнение удобно для проведения итераций по степеням  $\hbar$ . Решая его, имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{P} \mathcal{H}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{[\mathcal{H}, [\mathcal{H} \dots [\mathcal{H}, \mathbf{P}] \dots 1]]}_n \mathcal{H}^{-n-1}/2^n. \quad (5.28)$$

Компоненты оператора  $P_m$  удовлетворяют соотношениям

$$[P_m, P_n] = ie\hbar \varepsilon_{mnk} H_k \quad (5.29)$$

и

$$[\mathbf{P}^2, P_n] = [\sum P_m^2, P_n] = ie\hbar \varepsilon_{mnk} 2H_k P_m, \quad (5.30)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ .

Исходя из тождества (5.26), можно получить уравнение

$$2\mathbf{b} + [\mathcal{H}, \mathbf{b}] \mathcal{H}^{-1} = \mathbf{c} \mathcal{H}^{-1}, \quad (5.31)$$

где  $\mathbf{b} = [\mathcal{H}, \mathbf{P}]$ ;  $\mathbf{c} = [\mathcal{H}^2, \mathbf{P}]$ .

Это уравнение решается аналогично уравнению (5.27):

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} \mathcal{H}^{-1}/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\mathcal{H}, [\mathcal{H} \dots [\mathcal{H}, \mathbf{c}] \dots]] \mathcal{H}^{-n-1}/2^{n+1}. \quad (5.32)$$

Коммутатор  $\mathbf{c}$  вычисляется из (5.30):

$$\mathbf{c} = 2ie\hbar [\mathbf{HP}]. \quad (5.33)$$

Подставляя это выражение в (5.32), получаем уравнение, содержащее только коммутатор  $\mathbf{b}$ . Это уравнение может решаться с помощью метода последовательных приближений, с точностью до членов  $\sim \hbar^3$  решение уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \equiv [\mathcal{H}, \mathbf{P}] = & ie\hbar [\mathbf{HP}] \mathcal{H}^{-1} - (ie\hbar)^2 [\mathbf{H}(\mathbf{HP}) - \mathbf{H}^2\mathbf{P}] \mathcal{H}^{-3}/2 - \\ & - (ie\hbar)^3 \mathbf{H}^2 [\mathbf{HP}] \mathcal{H}^{-5}/2 + \dots + \\ & + e(i\hbar)^2 [\{\partial\mathbf{H}/\partial x_m, P_m\} \mathbf{P}] \mathcal{H}^{-3}/4 + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

Это выражение содержит два типа членов, один из которых зависит от напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ , а второй — от неоднородности этого поля. Разложение для обоих типов членов идет по степеням  $e\hbar H/\mathcal{H}^2$ , т. е. по степеням

$$e\hbar \langle H \mathcal{H}^{-2} \rangle = H/(H_0 \gamma^2) = \hbar \omega_0/\varepsilon, \quad (5.35)$$

где

$$H_0 = m^2/e\hbar (= m^2 c^3/e\hbar) = 1,24 \cdot 10^{13} \text{ абс. хев. ед.} = 4,41 \cdot 10^{13} \text{ э} \quad (5.36)$$

— критическое магнитное поле (для электрона).

Найдем теперь коммутатор компонент скорости в низшем по  $\hbar$  порядке. Из (5.28) имеем

$$[v_\omega, v_n] = \{[\mathbf{P}_m, \mathbf{P}_n] - P_m \mathcal{H}^{-1} [\mathcal{H}, P_n] + P_n \mathcal{H}^{-1} [\mathcal{H}, P_m]\} \mathcal{H}^{-2}. \quad (5.37)$$

Воспользовавшись формулами (5.29) и (5.34), получаем в низшем по  $\hbar$  порядке

$$[v_\omega, v_n] = ie\hbar [\mathbf{H}(1 - v^2) + \mathbf{v}(\mathbf{vH})]/\mathcal{H}^2, \quad (5.38)$$

так что соотношение неопределенности для компонент скорости

$$\Delta v_i \Delta v_n \sim e\hbar H/\varepsilon^2 = H/(H_0 \gamma^2) = \hbar \omega_0/\varepsilon. \quad (5.39)$$

Заметим, что с той же точностью

$$[r_m, v_n] = i\hbar [\delta_{mn} - v_m v_n]/\mathcal{H}. \quad (5.40)$$

Из приведенного выше рассмотрения следует, что определяющая величину квантовых эффектов некоммутативность динамических переменных частицы, движущейся в произвольном магнитном поле, имеет порядок  $H/(H_0 \gamma^2) = \hbar \omega_0/\varepsilon$  (в общем случае ряда по степеням

( $\hbar\omega_0/\varepsilon$ ). Отсюда вытекает, что с ростом энергии величина квантовых эффектов уменьшается, т. е. движение частицы становится все более «классическим». Это важное обстоятельство будет систематически использоваться в теории излучения.

5.4. Инвариантные характеристики движения частицы во внешнем поле. Как было показано выше, движение частиц высокой энергии во внешних полях является квазиклассическим, и по этой причине состояние частицы в поле можно характеризовать 4-импульсом  $p_\mu$ .

Инвариантные характеристики процессов, просуммированные по спиновым состояниям частицы, могут зависеть лишь от инвариантов, которые можно построить из 4-вектора  $p_\mu$  и постоянного 4-тензора внешнего поля  $F^{\mu\nu}$  (поскольку речь идет об электромагнитных взаимодействиях, то входит комбинация  $eF^{\mu\nu}$ ). Можно построить три безразмерных инварианта

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= -e^2 (F^{\mu\nu} p_\nu)^2 / m^6 = (1/H_0^2 m^2) [(\mathbf{pH}) + p_0 \mathbf{E}]^2 - (\mathbf{pE})^2; \\ f^2 &= (e^2/2m^4) (F^{\mu\nu})^2 = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)/H_0^2; \quad g^2 = -e^2 \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} F^{\lambda\mu} \times \\ &\quad \times F^{\alpha\beta} / 2m^2 = \mathbf{EH}/H_0^2; \end{aligned} \right\} (5.41)$$

где  $H_0$  задается формулой (5.36). Для скрещенного внешнего поля  $f = g = 0$  (это определение скрещенного электромагнитного поля), для магнитного поля  $f = H/H_0$ ,  $g = 0$ . Если рассматривается движение ультрарелятивистской частицы ( $p_0 \gg m$ ), причем вектор  $\mathbf{p}$  составляет с полями  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  углы  $\nu \gg m/p_0$ , то  $\chi^2 \gg f^2$ ,  $g^2$  (другими словами, для ультрарелятивистской частицы почти для всех направлений любое постоянное поле выглядит как скрещенное). Если, кроме того, поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  много меньше критического [ $H_0 = E_0 = m^2 c^3 / (e\hbar)$ ], то  $|f|$ ,  $|g| \ll 1$ . Тогда инвариантная характеристика процесса  $W$  может быть разложена:

$$W(\chi, f, g) = W_0(\chi, 0, 0) + fW_1(\chi, 0, 0) + gW_2(\chi, 0, 0) + \dots, \quad (5.42)$$

где  $W_0(\chi)$  описывает процесс в скрещенном внешнем поле. В этом смысле характеристика процесса в скрещенном внешнем поле описывает процесс в любом постоянном поле\*. Это утверждение перестает быть справедливым, если имеется зависимость от других параметров (например, спиновые явления).

В неоднородных внешних (в 4-мерном смысле) полях можно построить дополнительные инварианты, содержащие члены вида  $\partial F^{\alpha\beta} / \partial x^\mu$  (члены типа  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta F^{\gamma\delta}$  выпадают вследствие уравнений Максвелла). Однако если за характерное время процесса (или на характерных длинах процесса) величины  $F^{\mu\nu}$  и  $p^\mu$  меняются слабо, то инвариантные характеристики будут по-прежнему

\* Это связано с тем, что для ультрарелятивистского электрона, угол импульса которого  $p$  с полями  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  будет  $\phi \gg 1/\gamma$ , любое постоянное внешнее поле в системе покоя выглядит как скрещенное.

зависеть от (5.41), где  $F^{\mu\nu}$ ,  $p^\mu$  — локальные значения соответствующих величин. Тогда приведенные выше соображения остаются справедливыми и для неоднородных внешних полей.

Приведем несколько форм записи параметра  $\chi$  в магнитном поле:

$$\chi = (H/H_0) (p_\perp/mc) = (\hbar/mc^2) (|\dot{\mathbf{v}}|/c) \gamma^2 = (\hbar\omega_0/\varepsilon) \gamma^3 (v_i/c). \quad (5.43)$$

5.5. Движение спина в магнитном поле. Формула (5.20) определяет уравнение движения для 4-вектора поляризации. Однако часто представляют интерес уравнения движения для среднего значения 4-вектора поляризации в квазиклассическом приближении.

Переход к квазиклассическому приближению осуществляется с помощью подстановки в уравнение (5.5) волновой функции в виде

$$\psi = u \exp [iS/\hbar], \quad (5.44)$$

где  $S$  — скаляр;  $u$  — медленно меняющийся спинор. Разлагая  $S = S_0 + (\hbar/i) S_1 + \dots$ , получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\partial_\mu S_0 + eA_\mu)^2 - m^2 &= 0; \\ [2(\partial_\mu S_0)(\partial^\mu S_1) + \partial_\mu \partial^\mu S_0 + 2e(A^\mu \partial_\mu S_1) + e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/2] u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Первое из них — классическое уравнение Гамильтона—Якоби, не зависящее, естественно, от спиновых переменных (пропорциональных  $\hbar$ ). Второе уравнение в квазиклассическом приближении является уравнением для квантовых поправок, оно зависит от спиновых переменных. Иными словами, влияние спина на движение того же порядка, что и квантовые поправки к движению ( $\sim \hbar$ ).

В такой ситуации приобретает смысл задача о поведении спина электрона (например, среднего значения 4-вектора поляризации) при заданном квазиклассическом движении, т. е. тогда, когда частица локализована так, что ее волновая функция представляет собой квазиклассический пакет [100]. Для этого должны выполняться следующие условия: 1) волновая функция мала повсюду, кроме небольшой области, которую можно понимать как положение классической частицы; 2) волновой функции соответствует достаточно узкое распределение по импульсам, т. е. можно считать, что

$$P_\mu \psi(x, t) = \langle P_\mu \rangle \psi(x, t). \quad (5.46)$$

где  $\langle P_\mu \rangle$  — классическое значение 4-импульса, меняющееся на классической орбите, но факторизуемое из интегралов по волновой функции. Это условие налагает требование на размеры волнового пакета. Если размеры пакета  $a$ , то должно быть

$$\langle \mathbf{P} \rangle^2 \gg \hbar^2/a^2; \quad (5.47)$$

3) поля и потенциалы являются плавными, причем их изменением на длинах порядка размеров пакета можно пренебречь. При выпол-

нении этого условия можно считать, что на частицу действует поле в точке, где она находится; 4) напряженности поля  $E$  и  $H$  малы по сравнению с напряженностью критического поля (5.36)\*.

$$E \ll E_0; \quad H \ll H_0. \quad (5.48)$$

В противном случае член  $e\hbar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2 \gtrsim m^2$ , и им нельзя пренебрегать при переходе от уравнения (5.5) к первому уравнению (5.45). Дело в том, что при  $E \sim E_0$  ( $H \sim H_0$ ) коэффициент  $\hbar$  при члене  $e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$  сокращается с множителем  $\hbar$ , входящим в критическое поле, так что спин влияет на движение уже в нулевом по  $\hbar$  порядке. Иными словами, при полях порядка критических попадаем в существенно квантовую область. При выполнении условия (5.48) из уравнения (5.45) следует

$$\langle P_\mu \rangle \langle P^\mu \rangle = m^2. \quad (5.49)$$

Исходя из этого, можно ввести классические характеристики

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{P} \rangle / \varepsilon; \quad \varepsilon = \langle P_0 \rangle = m \sqrt{1 - v^2} = m\gamma. \quad (5.50)$$

Для перехода к квазиклассическим уравнениям движения следует иметь в виду, что для любого эрмитова оператора  $Q$

$$\begin{aligned} \int \psi^+ Q (H^F - e\varphi) \psi d^3x + \int [Q (H^F - e\varphi) \psi]^+ \psi d^3x = \\ = 2 \langle H^F - e\varphi \rangle \int \psi^+ Q \psi d^3x = 2 \langle P_0 \rangle \int \psi^+ Q \psi d^3x, \end{aligned} \quad (5.51)$$

где  $H^F$  дается формулой (5.3). Это выражение можно записать в виде

$$\langle \{Q, H^F - e\varphi\} \rangle = \langle \{Q, P_0\} \rangle = 2 \langle P_0 \rangle \langle Q \rangle, \quad (5.52)$$

Отсюда немедленно следует

$$\langle \boldsymbol{\alpha} \rangle = \mathbf{v}; \quad \langle \beta \rangle = m/\varepsilon, \quad (5.53)$$

так что гейзенберговские уравнения движения для операторов

$$d\mathbf{P}/dt = e(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\alpha}\mathbf{H}]); \quad d\mathbf{x}/dt = \boldsymbol{\alpha} \quad (5.54)$$

после усреднения (5.53) переходят в классические уравнения движения.

---

\* Напомним, что напряженность критического магнитного поля  $H_0 = 4,41 \cdot 10^{13}$  э, а критического электрического поля  $E_0 = 1,32 \cdot 10^{10}$  в/см (в гауссовой системе единиц).

Рассмотрим теперь уравнения движения для спина. Воспользовавшись соотношениями коммутации  $\gamma$ -матриц, нетрудно получить

$$\{\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu, H^F - e\varphi\} = 2mT^\mu. \quad (5.55)$$

где  $T^\mu$  — ковариантный оператор поляризации во внешнем поле (5.16) и (5.17). Подставив это выражение в формулу усреднения (5.52), найдем

$$\langle \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \rangle = \frac{m}{\varepsilon} \langle T^\mu \rangle. \quad (5.56)$$

Проведя усреднение уравнения (5.20) и воспользовавшись (5.56), имеем уравнение движения для среднего квазиклассического оператора поляризации

$$d \langle T^\mu \rangle / d\tau = (e/m) F^{\mu\nu} \langle T_\nu \rangle, \quad (5.57)$$

где мы перешли к дифференцированию по собственному времени  $dt = \gamma d\tau$ . Здесь введено  $\langle T^\mu \rangle$  как среднее по одночастичным состояниям. Однако, поскольку в уравнении (5.57)  $\langle T^\mu \rangle$  входит линейно в каждый член, можно провести усреднение по некогерентной смеси состояний и рассматривать  $\langle T^\mu \rangle$  как среднюю поляризацию пучка частиц. Теперь воспользуемся формулой (5.14), положив

$$\langle T^\mu \rangle = s^\mu. \quad (5.58)$$

Из представления оператора поляризации (5.17) имеем в системе покоя частицы

$$\langle T^0 \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{T} \rangle = \langle \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \rangle = \boldsymbol{\xi}. \quad (5.59)$$

Среднее значение  $\langle T^\mu \rangle = s^\mu$  обладает свойствами 4-вектора поляризации. Действительно, из (5.57) и классических уравнений движения [ср. (5.54)] следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle T^\mu \rangle \langle T_\mu \rangle &= 0; \quad s^\mu s_\mu = -\xi^2 (= \text{const}); \\ \frac{d}{d\tau} \langle T^\mu \rangle u_\mu &= 0; \quad s^\mu u_\mu = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

причем  $s^\mu$  в произвольной системе выражается через  $\boldsymbol{\xi}$  с помощью формул (A.13) (см. приложение А). Уравнение (5.57), записанное в ковариантной форме, можно переписать в виде

$$ds/dt = e(\mathbf{E}(s\mathbf{v}) + [s\mathbf{H}])/\varepsilon; \quad ds_0/dt = e(\mathbf{E}s)/\varepsilon. \quad (5.61)$$

Обычно оказывается удобным использовать уравнение для изменения вектора  $\boldsymbol{\xi}$ , среднего значения поляризационного оператора  $\mathbf{O}$

частицы (5.22). Чтобы получить его, необходимо подставить в (5.61) представление (А.13) и использовать классические уравнения движения. В результате

$$d\boldsymbol{\xi}/dt = (e/\varepsilon) [\boldsymbol{\xi}\mathbf{H}] + [e/(\varepsilon + m)] [\boldsymbol{\xi} [\mathbf{E}\mathbf{v}]] = (e/\varepsilon) [\boldsymbol{\xi}\mathbf{H}_E], \quad (5.62)$$

где  $\mathbf{H}_E$  — эффективное поле, действующее на вектор спина  $\boldsymbol{\xi}$ :

$$\mathbf{H}_E = \mathbf{H} + [1/(1 + 1/\gamma)] [\mathbf{E}\mathbf{v}]. \quad (5.63)$$

Вследствие взаимодействия частицы приобретают дополнительный (аномальный) магнитный момент  $\Delta\boldsymbol{\mu} = (g - 2) e\hbar/(2m)$  (согласно уравнению Дирака  $g = 2$ ). Для того чтобы найти уравнение движения спина с учетом аномального магнитного момента, можно добавить соответствующий член в уравнение Дирака, а затем осуществить переход к квазиклассическому приближению\* [100]. В результате получаем уравнение движения для классического вектора спина (КВС):

$$ds^\mu/d\tau = (e/m) \{gF^{\mu\nu} s_\nu/2 + u^\mu (g/2 - 1) F^{\lambda\nu} s_\lambda u_\nu\}. \quad (5.64)$$

Это же уравнение можно найти как прямое обобщение классического уравнения движения магнитного момента в магнитном поле  $\dot{\mathbf{J}} = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}]$  [31]. Из уравнения (5.64) следует, что второй член, зависящий от аномальной части магнитного момента, имеет структуру, отличную от первого, в частности при высоких энергиях ( $u \sim \gamma$ ) второй член становится доминирующим. Переход к уравнению для вектора  $\boldsymbol{\xi}$  производится так же, как и в (5.62). В результате простых, но довольно громоздких вычислений получаем трехмерную форму уравнения КВС:

$$d\boldsymbol{\xi}/dt = [\boldsymbol{\xi}\mathbf{F}]; \quad \mathbf{F} = (e/\varepsilon) [\mathbf{H}_E + (g/2 - 1) \mathbf{H}_R], \quad (5.65)$$

где  $\mathbf{H}_E$  дается (5.63) и

$$\mathbf{H}_R = (\varepsilon/m) \{\mathbf{H} - \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{H})/(1 + 1/\gamma) + [\mathbf{E}\mathbf{v}]\}. \quad (5.66)$$

Заметим, что  $\mathbf{H}_R$  — напряженность магнитного поля в системе покоя электрона (если в лабораторной системе поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ). Обсудим правую часть уравнения КВС в форме (5.65). На магнитный момент частицы действует магнитное поле  $\mathbf{H}_R$  в системе покоя частицы. Следует, однако, иметь в виду, что приращение вектора спина  $\Delta\boldsymbol{\xi} = (d\boldsymbol{\xi}/dt)\Delta t$  состоит из двух частей, одна из которых обязана вращению в поле  $\mathbf{H}_R$ , а вторая является кинематической и связана с «поворотом» вектора спина  $\boldsymbol{\xi}$  в системе покоя из-за того, что движение электрона во внешнем поле является ускоренным, так что

\* В § 14 будет дан прямой вывод соответствующего уравнения с учетом квантовых поправок. Обширная библиография работ, посвященных переходу от уравнения Дирака к ковариантному уравнению движения магнитного момента, содержится в статье [94].



системы покоя в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  различны и повернуты одна относительно другой [26]:

$$(\Delta \xi)_{kin} = [\gamma/(1 + 1/\gamma)] [\xi [v \nabla v]]. \quad (5.67)$$

Полное изменение вектора  $\xi$  в соответствии со сказанным выше

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (e/\varepsilon) (g/2) [\xi \mathbf{H}_R] + [\gamma/(1 + 1/\gamma)] [\xi [v \dot{v}]] = \\ &= (e/\varepsilon) [\xi \{(g/2 - 1) \mathbf{H}_R + \mathbf{H}_R + [\gamma^2/(\gamma + 1)] (\mathbf{v} \mathbf{E}) + \\ &+ [\mathbf{v} [v \mathbf{H}]]\}] = (e/\varepsilon) [\xi \{(g/2 - 1) \mathbf{H}_R + \mathbf{H}_E\}] = [\xi \mathbf{F}]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Отсюда видно, что фактически поле  $\mathbf{H}_R$  воздействует только на аномальную часть магнитного момента, в то время как эффективное поле  $\mathbf{H}_E$ , которое можно считать действующим на «врожденный» магнитный момент спиновой частицы, оказывается при больших энергиях ( $\gamma \gg 1$ ) сильно ослабленным по сравнению с  $\mathbf{H}_R$ . Именно поэтому, хотя аномальный магнитный момент электрона весьма мал  $(g/2 - 1) = \alpha/2\pi + \dots$ , члены с ним весьма существенны, поскольку содержат дополнительную степень  $\gamma$ .

5.6. Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем,  $S$ -матрица. Введенное выше понятие внешнего поля является простейшей формой описания взаимодействия, пригодной в случае, когда состояние источников электромагнитного поля не меняется в процессе взаимодействия. (Внешнее поле является классическим.) В общем же случае, рассматриваемом в квантовой электродинамике, как электроны, так и фотоны описываются квантованными полями. При этом часто используется *представление взаимодействия*, в котором операторы удовлетворяют свободным уравнениям движения, а эволюция вектора состояния во времени определяется только взаимодействием. Эта эволюция задается  $U$ -матрицей:

$$\Psi_I(t) = U(t, t_0) \Psi_I(t_0), \quad (5.69)$$

причем [3, 31]

$$U(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t d^4x \mathcal{H}_I(x) \right\}, \quad (5.70)$$

где  $\mathcal{H}_I(x)$  — плотность гамильтониана взаимодействия;  $T$  — символ хронологического произведения, упорядочивающий операторы таким образом, чтобы временные аргументы их убывали слева направо. Формальная запись типа (5.70) всегда определена как разложение экспоненты в степенной ряд по степеням гамильтониана взаимодействия.

За взаимодействием элементарных частиц, происходящим в чрезвычайно короткое время и на малых расстояниях, можно наблюдать например, с помощью реакций рассеяния на очень больших рас-

стояниях и за большие времена. Поэтому, как правило, нельзя проследить за деталями взаимодействия, следующими из знания матрицы  $U(t, t_0)$ , и можно определить результат взаимодействия соответственно постановке задачи рассеяния в квантовой механике  $t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$ . В соответствии с этим фундаментальное значение имеет  $S$ -матрица:

$$S = U(+\infty, -\infty), \quad (5.71)$$

определяемая формулой

$$S = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right\}. \quad (5.72)$$

Оператор  $S$  является релятивистским инвариантом. Это следует из того, что  $H_I(x)$  — релятивистский инвариант, например в спиновой электродинамике

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(x) &= -\mathcal{L}_I(x) = \\ &= j^\mu(x) A_\mu(x); \quad j^\mu(x) = e/2 [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)], \end{aligned} \quad (5.73)$$

где операторы  $\psi(x)$ ,  $A_\mu(x)$  — решения свободных уравнений движения. Интегрирование в (5.72) инвариантно, поскольку операторы полей коммутируют (антикоммутируют) при пространственно-подобных интервалах (см. приложение А).

Следует отметить, что унитарность оператора  $S$ , необходимая для сохранения вероятности (нормировки), обеспечивается в данном случае эрмитовостью гамильтониана взаимодействия.

Знание  $U$ -матрицы позволяет определить вероятность перехода из состояния  $\Psi_i$  в состояние  $\Psi_f$ . В самом деле, разложим состояние, получившееся в результате взаимодействия по полной системе функций (в конечном состоянии):

$$U(t, t_0) \Psi_i = \sum_f c_f \Psi_f, \quad (5.74)$$

очевидно, что коэффициенты разложения  $c_f = (\Psi_f U(t, t_0) \Psi_i)$ , причем  $|c_f|^2$  — вероятность найти систему в состоянии  $\Psi_f$ , т. е. вероятность перехода из состояния  $\Psi_i$  в состояние  $\Psi_f$ :

$$W_{fi} = |\Psi_f U(t, t_0) \Psi_i|^2. \quad (5.75)$$

При  $t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$  вероятность перехода из состояния  $\Psi_i$  в состояние  $\Psi_f$  будет

$$W_{fi} = |S_{fi}|^2; \quad S_{fi} = (\Psi_f S \Psi_i). \quad (5.76)$$

**5.7. Диаграммная техника.** В оператор (5.72) входят величины  $\psi(x)$ ,  $A(x)$  и т. д., содержащие операторы рождения и уничтожения. Для вычисления матричных элементов перехода (5.76) берется элемент разложения  $S$ -матрицы в степенной ряд между конечным и начальным векторами состояния. Вычисление проводится следующим образом: операторы уничтожения из  $S$ -матрицы выносятся с использованием соотношений коммутации направо вплоть до образования членов, содержащих  $a_r(p) \Psi_0$  ( $a_r(p)$ —

оператор уничтожения;  $\Psi_0$  — вектор состояния вакуума) и т. д., которые обращаются в нуль. Последовательно выполняя эту операцию, можно исключить все операторы рождения и уничтожения. Для такого вычисления желательно иметь  $S$ -матрицу, записанную в форме *нормального произведения\**, когда операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. Однако в исходное выражение (5.72) естественно входят члены вида  $aa^+$ , когда частица как бы рождается, а затем уничтожается «внутри  $S$ -матрицы». Такие частицы называются *виртуальными*. Существует методика, позволяющая выделить все виртуальные процессы в явном виде, т. е. методика преобразования *хронологического произведения в сумму нормальных произведений*. Существует одно и только одно нормальное произведение, матричный элемент которого для перехода между некоторыми заданными состояниями отличен от нуля. Таким образом, разложение  $S$ -матрицы на сумму нормальных произведений эквивалентно перечислению всех матричных элементов  $S$ -матрицы в представлении, диагональном по числам заполнения свободных частиц. Отдельные члены разложения на сумму нормальных произведений весьма удобно представить графически в виде диаграмм Фейнмана, на которых частицы и фотоны изображаются линиями, а взаимодействие происходит в вершинах. Общие правила *диаграммной техники в импульсном пространстве* для спинорной электродинамики следующие.

1. Чтобы рассмотреть определенный физический процесс (т. е. при заданных внешних фермионных и фотонных линиях) в данном порядке теории возмущений по константе связи  $e$ , необходимо написать все диаграммы с данным числом вершин с учетом симметрии (антисимметризации) для тождественных частиц.

2. Матричный элемент процесса есть сумма матричных элементов диаграмм, причем каждой диаграмме сопоставляется матричный элемент\*\* согласно правилам, приведенным в табл. 1.

3. Вдоль каждой непрерывной последовательности фермионных линий (линии данного фермиона) стрелки имеют неизменное направление, а расположение биспинорных индексов (биспиноры и  $\gamma$ -матрицы) вдоль них соответствует записи матриц слева направо при движении по линии против стрелок. Замкнутой фермионной петле отвечает след произведения расположенных вдоль нее матриц.

4. Численный множитель матричного элемента представляется в виде

$$A = P e^n (i)^\alpha (2\pi)^\beta (-1)^\delta, \quad (5.77)$$

где  $P$  — знак перестановки линий фермионов (общий знак диаграммы в этом случае не определен, это обстоятельство не сказывается

\* Нормальное произведение операторов  $A_1, \dots, A_k$  обозначается  $N(A_1, \dots, A_k)$  употребляется также термин « $N$ -упорядочение».

\*\* Определение входящих величин см. в Приложении А.

Компонента диаграммы	Множитель в матричном элементе
Вершина	$\gamma^\mu \delta(p' - p - k)$
Внутренняя фермионная линия (фермионный пропагатор)	$S_F(p) = -1/(\hat{p} - m + i\epsilon) = -(\hat{p} + m)/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$
Внутренняя фотонная линия (фотонный пропагатор)	$D_{F\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu}/(k^2 + i\epsilon)$
Внешняя фотонная линия	$e_\mu^*/\sqrt{2\omega_k}$ для выходящего фотона $e_\mu/\sqrt{2\omega_k}$ для входящего фотона
Внешняя фермионная линия	$\sqrt{m/\epsilon_p} u_s(p)$ для входящего электрона с импульсом $+p$
	$\sqrt{m/\epsilon_p} \bar{u}_s(p)$ для выходящего электрона с импульсом $\not{p}$
	$\sqrt{m/\epsilon_p} \bar{v}_s(p)$ для входящего позитрона с импульсом $+p$
	$\sqrt{m/\epsilon_p} v(p)$ для выходящего позитрона с импульсом $+p$

на физических результатах);  $n$  — число вершин;

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n + P_i + F_i; & \delta &= n + F_i + f; \\ \beta &= 4n - 4P_i - 4F_i - 3F_e/2 - 3P_e/2; \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

$F_i$  — число внутренних фермионных линий;  $F_e$  — число внешних фермионных линий;  $P_i$  — число внутренних фотонных линий;  $P_e$  — число внешних фотонных линий;  $f$  — число замкнутых фермионных петель.

5. Если в процессе, представленном диаграммой, в конечном состоянии имеется  $n$  тождественных частиц (фотонов, электронов, позитронов), то в матричном элементе появляется дополнительный множитель  $1/n!$ . Выделим этот множитель отдельно, поскольку он часто не выписывается, но при рассмотрении простейших двух-частичных процессов результат интегрирования по конечным состояниям делится на  $(\int \bar{2})^2 = 2$ . (Конечное состояние, в котором имеются тождественные частицы, обладает дополнительными свойствами симметрии, например для двух частиц в  $C$ -системе распределение конечных частиц симметрично относительно плоскости  $\vartheta = \pi/2$  ( $\vartheta$  — угол между импульсами начальных и конечных частиц), поэтому тот же результат дает интегрирование по  $\vartheta$  до  $\pi/2$ ). Если частиц в общем случае  $n$ , то после интегрирования по конечным состояниям результат следует разделить на  $n!$ , это эквивалентно множителю  $1/\sqrt{n!}$  в матричном элементе. Следует иметь в виду, что, вводя множитель  $1/\sqrt{n!}$ , мы допускаем все возможные области изменения кинематических параметров (например, углов). Это необходимо учитывать в дифференциальных сечениях\*.

6. Должно быть проведено интегрирование по импульсам всех внутренних линий. Часть этих интегрирований является тривиальной операцией, так как интегрируются  $\delta$ -функции, стоящие в вершинах, что фиксирует импульсы внутренних линий. Если число этих линий на единицу меньше, чем число вершин, то все интегрирования являются тривиальными. В результате появляется  $\delta$ -функция, выражающая закон сохранения энергии-импульса в процессе  $\delta(P_i - P_f)$  ( $P_i$  — начальный, а  $P_f$  — конечный 4-импульс), а импульсы внутренних линий следует выписывать с учетом закона сохранения 4-импульса. Такая ситуация имеет место всегда для «древовидных» диаграмм (диаграмм, на которых внутренние линии не образуют замкнутых контуров), которые определяют данный процесс в низшем возможном порядке теории возмущений.

7. Приведенные выше правила годятся и для описания электромагнитных взаимодействий мюона (или, в более общей постановке, в квантовой электродинамике с двумя заряженными частицами), только биспиноры и пропагатор для мюона входят с его массой.

\* Фактически при рассмотрении дифференциальных сечений множитель  $1/n!$  часто опускают, но зато допускают область изменения параметров с учетом симметрии состояния.

Мюонная линия нигде не переходит в электронную, поскольку нет вершин вида  $\mu \rightarrow e$ ;  $\mu \rightarrow e + \gamma$  и т. д., а есть только  $\mu \rightarrow \mu + \gamma$  или  $\mu^+ + \mu^- \rightarrow \gamma$ , как и для электрона.

8. Любую из фермионных внешних линий можно рассматривать (без изменения направления стрелки) как частицу в начальном или античастицу в конечном состоянии либо как частицу в конечном или античастицу в начальном состоянии, а фотонную линию можно рассматривать как поглощение и излучение фотона. Переход от одних физических процессов к другим осуществляется с помощью правила подстановки, выражая собой *кросс-инвариантность амплитуд в квантовой электродинамике*.

9. При составлении матричного элемента можно не рассматривать петли с нечетным числом вершин (теорема Фарри). Это связано с тем, что зарядовая четность системы из  $m$  фотонов равна  $(-1)^m$ , а зарядовая четность в электромагнитных процессах сохраняется.

Соответственно формулируются правила и в электродинамике частиц со спинами 0 и 1 (вектоны), приведенные в табл. 2.

Бозонные линии образуют непрерывную последовательность, направление стрелок на которой не меняется. Античастицы, как и в случае спинорных частиц, движутся против направления стрелки с противоположным импульсом. Численный множитель матричного элемента можно представить в виде

$$A_B = \exp(n+2d) i^{\alpha_B} (2\pi)^{\beta_B} (-1)^{\delta_B} 2^{d-b}, \quad (5.79)$$

где  $n$  — число вершин;  $d$  — число двойных вершин;  $b$  — число пар двойных вершин, в которых оба фотона одной двойной вершины замкнуты на два фотона другой двойной вершины, т. е.  $b$  — число фотонных петель, образованных двойными вершинами;

$$\beta_B = 4d + 4n - 4P_i - 4B_i - 3B_e/2 - 3P_e/2, \quad (5.80)$$

здесь  $P_i$ ,  $P_e$  — число фотонных линий (внутренних и внешних);  $B_i$ ,  $B_e$  — число бозонных линий, внутренних и внешних:

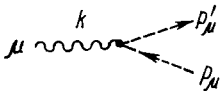
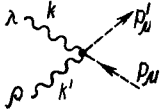

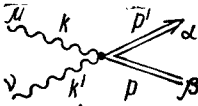

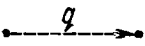
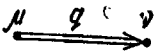
$$\alpha_B = n + d + P_i + B_i; \quad \delta_B = n + B_i. \quad (5.81)$$

Если в процессе участвуют одновременно частицы с разными спинами, то следует пользоваться соответствующей комбинацией выведенных здесь правил диаграммной техники.

5.8. Общие выражения для сечений и вероятностей. Вероятности перехода определяются элементами  $S$ -матрицы  $S_{fi}$  (5.76), которые обычно представляются в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (5.82)$$

где выделена  $\delta$ -функция, выражающая закон сохранения энергии импульса. В недиагональных элементах, т. е. когда конечное состояние отлично от начального, остается только второй член. Обычно

Компонента диаграммы	Множитель в матричном элементе	
Вершина (бозоны со спином 0)		$(p_\mu \mp p'_\mu) \delta(p' - p - k)$
Двойная вершина (бозоны со спином 0)		$g^{\lambda\rho} \delta(p' - p - k - k')$
Одinarная вершина (вектоны)		$-[(p_\mu + p'_\mu) g_{\alpha\beta} - p'_\alpha g_{\mu\beta} - p_\beta g_{\mu\alpha}] \delta(p' - p - k)$
Двойная вершина (вектоны)		$-[g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} / 2 - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} / 2] \delta(p' - p - k - k')$
Внутренняя фотонная линия		$D_{F\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu} / (k^2 + i\epsilon)$
Внутренняя бозонная линия (бозонный пропагатор, спин 0)		$\Delta_F(q) = 1 / (q^2 - \mu^2 + i\epsilon)$
Внутренняя линия векторной частицы (векторный пропагатор)		$\Delta_{F\mu\nu}(q) = \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / \mu^2}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}$

Компонента диаграммы	Множитель в матричном элементе	
Внешняя фотонная линия		$1/\sqrt{2\omega_k} \begin{cases} e_{\mu}^* & \text{для выходящего фотона} \\ e_{\mu} & \text{для входящего фотона} \end{cases}$
Внешняя бозонная линия (спин 0)		$1/\sqrt{2\varepsilon_q} \text{ для внешних бозонных линий}$
Внешняя линия векторной частицы		$1/\sqrt{2\varepsilon_q} \begin{cases} e_{\alpha}^* & \text{для выходящего вектона} \\ e_{\alpha} & \text{для входящего вектона} \end{cases}$

$T_{fi}$  называются *амплитудами рассеяния*. При возведении  $S_{fi}$  по модулю в квадрат появляется квадрат  $\delta$ -функции, который следует понимать следующим образом:

$$[\delta(P_f - P_i)]^2 = [1/(2\pi)^4] \int d^4x \exp[i(P_f - P_i)x] \times \\ \times \delta(P_f - P_i) = \delta(P_f - P_i) [1/(2\pi)^4] \int d^4x = \delta(P_f - P_i) VT/(2\pi)^4. \quad (5.83)$$

Если нас интересует вероятность перехода в единице объема в единицу времени, то при  $f \neq i$  имеем

$$\omega_{fi} = |S_{fi}|^2 / VT = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2. \quad (5.84)$$

Прежде чем перейти от этой записи к конкретным случаям, заметим, что выписанные выше правила диаграммной техники имеют дело с определенным выбором нормировки входящих величин (5.77)–(5.81), в частности, все операторы содержат множитель  $1/(2\pi)^{3/2}$ , т. е. нормированы на объем  $1/(2\pi)^3$ :

$$S_{fi} = (2\pi)^{3g/2} M_{fi} \delta(P_f - P_i). \quad (5.85)$$

Здесь  $g$  — число частиц в начальном состоянии;  $M_{fi}$  находится по приведенным выше правилам.



Таким образом, выражение для вероятности в единице объема в единицу времени будет следующим:

$$w_{ji} = (2\pi)^{3g-4} |M_{ji}|^2 \delta(P_f - P_i). \quad (5.86)$$

В принятой нормировке плотность конечных состояний

$$\rho_f = \prod_i d^3 p_i. \quad (5.87)$$

Учитывая, что полная вероятность перехода есть вероятность перехода в определенное состояние, умноженная на (5.87), получаем

$$dW_g = (2\pi)^{3g-4} |M_{ji}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i d^3 p_i. \quad (5.88)$$

Наиболее важны случаи, когда в начальном состоянии имеется одна частица (распад) и две частицы (столкновение). В первом случае *вероятность распада*

$$dW = (1/2\pi) |M_{ji}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i d^3 p_i. \quad (5.89)$$

В случае столкновения частиц ( $g = 2$ ) интересующей нас величиной будет *сечение процесса*

$$d\sigma = dW/J = [(2\pi)^2/J] |M_{ji}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i dp_i, \quad (5.90)$$

где  $J$  — поток падающих частиц. Выражение для потока, пригодное для во всех системах (если скорости направлены вдоль одной прямой):

$$J = I/\varepsilon_1 \varepsilon_2; \quad I^2 = (p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2, \quad (5.91)$$

где  $p_1, p_2; m_1, m_2$  — 4-импульсы и массы сталкивающихся частиц. В  $L$ -системе ( $p_1 = 0$ )

$$J = |\mathbf{p}_2|/\varepsilon_2 = v_2. \quad (5.92)$$

В  $C$ -системе сталкивающихся частиц ( $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ )

$$J = |\mathbf{p}|(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2) = v_1 + v_2. \quad (5.93)$$

Тем самым окончательное выражение для сечения

$$d\sigma = (2\pi)^2 [\varepsilon_1 \varepsilon_2 / \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}] |M_{ji}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i d^3 p_i. \quad (5.94)$$

Следует иметь в виду, что все операторы бозонов («внешние линии») имеют нормировочный множитель  $1/\sqrt{2\varepsilon_q}$  и операторы фермионов —  $\sqrt{2m/2\varepsilon_q}$ . Кроме того, при выполнении операций с биспинорами мы переходим к матрицам плотности, приведенным в Приложении А [см. (А.15)], которые содержат множитель  $1/2m$ . Вынося все эти множители, а также множители  $1/(2\pi)^{3/2}$  (для входящих

и выходящих частиц), мы оставляем релятивистски инвариантный квадрат матричного элемента  $\tilde{M}_{fi}$  (в который входят комбинации векторов задачи\*):

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\tilde{M}_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i [d^3 p_i / 2\varepsilon_{p_i} (2\pi)^3]. \quad (5.95)$$

Это выражение для сечений является явно релятивистски инвариантным. Матричные элементы  $M_{fi}$  и  $\tilde{M}_{fi}$  связаны следующим образом:

$$M_{fi} = \tilde{M}_{fi} \prod_{n=1}^N [1/\sqrt{2\varepsilon_n} (2\pi)^{3/2}], \quad (5.96)$$

где  $N$  — число частиц, участвующих в реакции.

В  $\tilde{M}_{fi}$ , очевидно, все бозонные операторы не содержат  $1/\sqrt{2\varepsilon}$ , а биспиноры  $\bar{u}$  нормированы на  $\sqrt{2m}$ :  $\bar{u}u = 2m^{**}$ .

Аналогичное представление вероятности

$$dW = (2\pi)^{-4} (1/2\varepsilon_1) |\tilde{M}_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) \prod_i \{d^3 p_i / [2\varepsilon_{p_i} (2\pi)^3]\}. \quad (5.97)$$

Интеграл от этого выражения есть обратное время жизни распадающейся частицы, которое при переходе из системы в систему пересчитывается в соответствии с релятивистскими преобразованиями.

5.9. Сечение для реакций с поляризованными частицами. Рассмотрим здесь несколько примеров вычисления сечений для поляризованных частиц. Пусть в начальном и конечном состояниях имеется по одному электрону, тогда

$$M_{fi} = \bar{u}(p_2) O u(p_1), \quad (5.98)$$

где  $O$  — некоторая матрица. Сечение процесса содержит  $|M_{fi}|^2$ :

$$M_{fi}^* = (\bar{u}(p_2) O u(p_1))^* = u^+(p_1) O^+ \gamma^0 u(p_2) = \bar{u}(p_1) \bar{O} u(p_2), \quad (5.99)$$

где\*\*\*

$$\bar{O} = \gamma^0 O^+ \gamma^0. \quad (5.100)$$

\* В спинорной электродинамике это следы, содержащие 4-вектора  $\hat{s}_i(\hat{p}_i)$ , и пропагаторы, также содержащие 4-вектора.

\*\* Такая нормировка принята в книге [31]. В ней используется гауссова (а не хевисайдова, как здесь) система единиц, в которой  $e^2/\hbar c = \alpha$ . Поскольку в каждую вершину входит одна фотонная линия, то для перехода к гауссовой системе единиц от хевисайдовой необходимо каждой внешней фотонной линии приписать дополнительный множитель  $\sqrt{4\pi}$  и каждому фотонному пропагатору дополнительный множитель  $4\pi$ .

\*\*\* Легко видеть, что  $\gamma^\mu = \gamma^\mu$ ,  $\gamma^\mu \gamma^\lambda \dots \gamma^\alpha = \gamma^\alpha \dots \gamma^\lambda \gamma^\mu$ ,  $\bar{\gamma}^5 = -\gamma^5$ ,  $\gamma^5 \gamma^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu$ .

В случае, когда электрон находится в смешанном (частично поляризованном) состоянии, то, переходя к матрице плотности, получим

$$|M_{fi}|^2 = \bar{u}_\alpha(p_2) O_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \bar{u}_\gamma(p_1) \bar{O}_{\gamma\delta} u_\delta(p_2) = \text{Sp} [\rho_+(p_2) O \rho_+(p_1) \bar{O}]. \quad (5.101)$$

Если начальный и конечный электроны не поляризованы, то необходимо усреднить по поляризациям начальных частиц и просуммировать по поляризациям конечных:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{пол}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{m + \hat{p}_1}{2m} O \frac{m + \hat{p}_2}{2m} \bar{O} \right]. \quad (5.102)$$

Когда в процессе рождается электрон-позитронная пара с импульсами  $p_2$  и  $p_1$ , то

$$M_{fi} = \bar{u}(p_2) O v(p_1); \quad (5.103)$$

$$|M_{fi}|^2 = - \text{Sp} [\rho_+(p_2) O \rho_-(p_1) \bar{O}]. \quad (5.104)$$

Если электрон и позитрон не поляризованы, то необходимо просуммировать по поляризациям частиц в конечном состоянии:

$$\sum_{\text{пол}} |M_{fi}|^2 = - \text{Sp} \left[ \frac{m + \hat{p}_2}{2m} O \frac{m - \hat{p}_1}{2m} \bar{O} \right]. \quad (5.105)$$

Матрица плотности в начальном состоянии определяет поляризационные свойства сталкивающихся частиц, т. е. зависит от того, как оно было «приготовлено». Матрица плотности в конечном состоянии «выбирает» некоторое конечное состояние с определенной поляризацией. Иными словами, находится вероятность того, что конечный электрон будет иметь поляризацию  $\xi_2$ . Такой отбор производится детектором поляризации, так что матрица плотности в конечном состоянии  $\rho_+(p_2)$  задается свойствами детектора поляризации [подобная ситуация уже была рассмотрена — см. (1.75)]. Наряду с такой постановкой вопроса интересно знать поляризационное состояние электрона, в которое он приводится самим процессом взаимодействия. Если  $\rho_+^f$  — матрица плотности этого состояния, то вероятность детектирования электрона в состоянии  $\rho_+(p_2)$  пропорциональна проекции  $\rho_+^f$  на  $\rho_+(p_2)$ , т. е. пропорциональна  $\text{Sp} \rho_+^f \rho_+(p_2)$ . Этой же величине пропорционально соответствующее сечение, т. е.  $|M_{fi}|^2$ .

Часто оказывается полезным для описания поляризационных свойств электронов при рассеянии пользоваться двухкомпонентным формализмом, поскольку поляризационные свойства определяются двухкомпонентными спинорами  $\varphi(\xi)$  [см. (A.8)], которые

зависят от направления вектора  $\zeta$ . Матричный элемент (5.98) в двухкомпонентной записи имеет вид

$$M_{ji} = \bar{u}(p_2) O u(p_1) = \varphi^+(\zeta_2) G \varphi(\zeta_1), \quad (5.106)$$

где  $\varphi(\zeta_2)$  [ $\varphi(\zeta_1)$ ] зависят от поляризации конечных (начальных) частиц,  $G$  —  $2 \times 2$ -матрица, выражающаяся через вектора задачи. Проекционный оператор на состояние с проекцией  $+1$  на ось  $\zeta$  будет следующим:

$$\varphi(\zeta) \varphi^+(\zeta) = (1 + \sigma \zeta) / 2. \quad (5.107)$$

Смешанные состояния представляются поляризационной матрицей плотности

$$\rho(\zeta) = \sum_n \omega^n \varphi(\zeta_n) \varphi^+(\zeta_n) = (1 + \sigma \zeta) / 2, \quad (5.108)$$

где  $\omega^n$  — относительный вес состояния с поляризацией  $\zeta_n$ ,  $\sum \omega^n = 1$ ; но теперь уже  $0 \leq |\zeta| \leq 1$ . Учитывая, что произвольную  $2 \times 2$ -матрицу можно разложить по матрицам Паули и единичной матрице, представим

$$G = A + i\sigma \mathbf{B}. \quad (5.109)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |M_{ji}|^2 &= \varphi^+(\zeta_2) G \varphi(\zeta_1) \varphi^+(\zeta_1) G^+ \varphi(\zeta_2) = \\ &= \text{Sp} \left[ \frac{1 + \sigma \zeta_1}{2} (A^* - i\sigma \mathbf{B}^*) \frac{1 + \sigma \zeta_2}{2} (A + i\sigma \mathbf{B}) \right]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Эта формула полностью эквивалентна выражению (5.101), но определена через  $2 \times 2$ -матрицы. Вычислив след матрицы, получим

$$\begin{aligned} |M_{ji}|^2 &= \{ |A|^2 (1 + \zeta_1 \zeta_2) + |\mathbf{B}|^2 (1 - \zeta_1 \zeta_2) + \\ &+ (\zeta_1 \mathbf{B}^*) (\zeta_2 \mathbf{B}) + (\zeta_2 \mathbf{B}^*) (\zeta_1 \mathbf{B}) + [\zeta_2 \zeta_1] (A \mathbf{B}^* + A^* \mathbf{B}) + \\ &+ i (\zeta_1 + \zeta_2) (A^* \mathbf{B} - A \mathbf{B}^*) + i (\zeta_2 - \zeta_1) [\mathbf{B} \mathbf{B}^*] \} / 2, \end{aligned} \quad (5.111)$$

Отметим, что если коэффициенты  $A$  и  $\mathbf{B}$  вещественны, то выпадают все члены, содержащие вектора поляризации линейно. Отсюда для вещественных коэффициентов  $A$  и  $\mathbf{B}$  сразу следует, что если начальные электроны были не поляризованы, то конечные также не поляризованы, так как сечение не зависит от ориентации поляризации детектора [см. обсуждение после формулы (5.105)].

Интерес представляют переходы без переворота спина ( $\zeta_2 = \zeta_1 = \zeta$ ):

$$|M_{ji}|^2 = |A|^2 + (\zeta \mathbf{B}) (\zeta \mathbf{B}^*) + i \zeta (A^* \mathbf{B} - A \mathbf{B}^*) \quad (5.112)$$

и переходы с переворотом спина ( $\zeta_1 = -\zeta_2 = \zeta$ )

$$|M_{ji}|^2 = \mathbf{B} \mathbf{B}^* - (\zeta \mathbf{B}) (\zeta \mathbf{B}^*) - i \zeta [\mathbf{B} \mathbf{B}^*]. \quad (5.113)$$

Отметим, что переходы с переворотом спина зависят только от  $\mathbf{B}$ . Матрица плотности конечного состояния в двухкомпонентной форме [см. рассуждения после (5.105)]

$$\rho^f = G\rho(\xi_1)G^+/\text{Sp}(G\rho(\xi_1)G^+). \quad (5.114)$$

Учитывая, что  $\xi = \text{Sp}(\rho\sigma)$ , находим поляризацию, приобретенную в результате взаимодействия:

$$\xi^f = \text{Sp}(G\rho(\xi_1)G^+\sigma)/\text{Sp}(G\rho(\xi_1)G^+). \quad (5.115)$$

Поляризацию  $\xi^f$  можно найти также из (5.111) с помощью следующих соображений. Представим

$$|\tilde{M}_{fi}|^2 = a + b\xi_2. \quad (5.116)$$

С другой стороны,  $|\tilde{M}_{fi}|^2 \propto \text{Sp}(\rho(\xi_2)\rho(\xi^f))$ , и ввиду релятивистской инвариантности этой величины ее можно вычислить в любой системе отсчета. Взяв систему покоя конечного электрона, находим

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &\propto \text{Sp}(\rho(\xi_2)\rho(\xi^f)) = \\ &= \text{Sp}[(1 + \sigma\xi_2)(1 + \sigma\xi^f)]/4 = (1 + \xi_2\xi^f)/2. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Сравнивая с (5.116), находим

$$\xi^f = b/a. \quad (5.118)$$

К этому же результату можно прийти из (5.115). Действительно, в знаменатель входят члены из (5.111), не содержащие  $\xi_2$ , т. е.  $a$ , а в числитель — члены пропорциональные  $\xi_2$ , т. е.  $b$ .

Перейдем теперь к обсуждению поляризационных состояний фотонов. В квадрат матричного элемента поляризации каждого из фотонов входят в виде комбинации  $e_\mu(k, \lambda)$   $e_\nu^*(k, \lambda)$ . Элементы матрицы плотности  $\rho_{ik} = e_i e_k^*$  ( $\rho_{ik} = \rho_{ki}^*$ ) зависят от трех вещественных параметров, в качестве которых выбираются параметры Стокса (1.69), тогда

$$\rho = (1 + \xi\tau)/2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (5.119)$$

Эта матрица плотности по виду совпадает с (5.108), поэтому сохраняют силу полученные выше результаты (5.116)—(5.118). Следует отличать поляризацию конечного фотона, выделяемую детектором  $\xi_2$ , от поляризации конечного фотона как такового  $\xi^f$ , причем

$$|M_{fi}|^2 = a + b\xi_2 \quad (5.120)$$

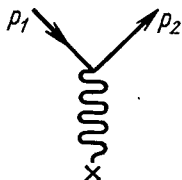
и

$$\xi^f = b/a. \quad (5.121)$$

5.10. Диаграммная техника во внешнем электромагнитном поле. Во многих случаях представляет интерес взаимодействие заряженных частиц в присутствии внешнего электромагнитного (классического) поля. Это взаимодействие можно учесть, добавив к оператору  $A_\mu(x)$  в гамильтониане [см. (5.72)] потенциал внешнего поля  $A_\mu^e$ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + A_\mu^e(x). \quad (5.122)$$

Тогда на диаграммах Фейнмана появятся дополнительные линии, изображающие внешнее поле (рис. 12). В матричных элементах этим линиям будет соответствовать множитель



$$A_\mu^e(q) = [1/(2\pi)^4] \int \exp[iqx] A_\mu^e(x) d^4x, \quad (5.123)$$

Рис. 12. Диаграмма рассеяния на внешнем поле в первом борновском приближении.

а в вершине диаграммы рис. 12 в случае спиновой частицы будет стоять обычный множитель  $\gamma^\mu \delta(p_2 - p_1 - q)$ . Линия, изображающая внешнее поле, является «внутренней», так что по импульсам всех таких линий должно быть проведено интегрирование. Все остальные правила такие же, как в разделе 5.7.

В наиболее важном для приложений случае, когда потенциал  $A_\mu^e(x)$  от времени не зависит, имеем

$$A_\mu^e(q) = [1/(2\pi)^3] \int A_\mu(x) \exp[-iqx] d^3x (1/2\pi) \times \int \exp[iq_0 x_0] dx_0 = a_\mu(q) \delta(q_0), \quad (5.124)$$

так что в вершине взаимодействия с внешним полем сохраняется энергия частиц. Примером такого потенциала является потенциал кулоновского поля ядра\*

$$A = 0; \quad A_0(r) = Z|e|/4\pi r. \quad (5.125)$$

Подставляя в (5.124), получаем

$$a(q) = 0; \quad a_0(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{Z|e|}{4\pi} \int \frac{\exp[-iqx]}{|x|} d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{Z|e|}{q^2}. \quad (5.126)$$

Приведем несколько примеров матричных элементов.

а. Упругое рассеяние электрона в кулоновском поле (это простейший процесс, идущий уже в первом приближении теории воз-

\* Ясно, что поле заряженной частицы можно считать кулоновским до тех пор, пока она остается в процессах неподвижной, т. е.  $|q|/M \ll 1$ , где  $M$  — масса частицы, при формальном переходе к кулоновскому полю  $M \rightarrow \infty$ .

мущений — первое борновское приближение) изображается одной диаграммой (см. рис. 12):

$$S_e^E = [iZe^2/(2\pi)^2 q^2] \sqrt{m^2/(\varepsilon_1 \varepsilon_2)} \bar{u}(p_2) \gamma^0 u(p_1) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (5.127)$$

где  $q = p_1 - p_2$ .

б. Тормозное излучение при рассеянии электронов в кулоновском поле изображается в нижнем порядке теории возмущений двумя диаграммами (рис. 13, а):

$$S_{\gamma e}^E = [iZe^3/(2\pi)^{7/2} q^2] \sqrt{m^2/(2\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2)} \bar{u}(p_2) \{ \hat{e}^* [(\hat{p}_2 + \hat{k} + m)/(2kp_2)] \gamma^0 +$$

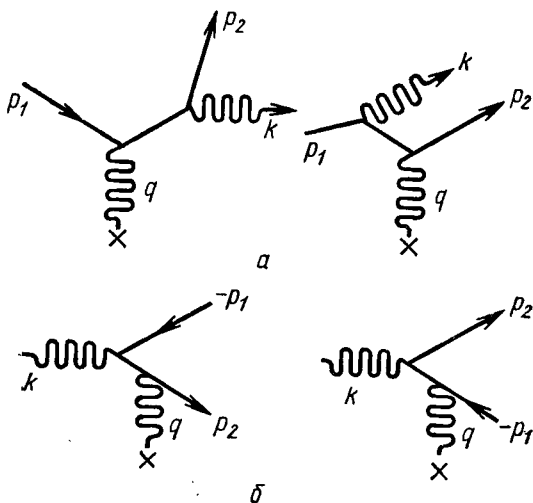


Рис. 13. Диаграмма тормозного излучения (а) и рождение пар (б) во внешнем поле (первое борновское приближение).

$$+ \gamma^0 [(\hat{p}_1 - \hat{k} + m)/(-2kp_1)] \hat{e}^* \} u(p_1) \delta(p_1 - p_2 - k - q) = \\ = M_{\gamma} \delta(p_1 - p_2 - k - q). \quad (5.128)$$

в. Рождение электрон-позитронной пары фотоном в кулоновском поле также изображается двумя диаграммами (см. рис. 13, б):

$$S_{e^+e^-}^E = [iZe^3/(2\pi)^{7/2} q^2] \sqrt{m^2/(2\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2)} \bar{u}(p_2) \times \\ \times \{ \hat{e} [(\hat{p}_2 - \hat{k} + m)/(-2kp_2)] \gamma^0 + \gamma^0 [(-\hat{p}_1 + \hat{k} + m)/(2kp_1)] \hat{e} \} \times \\ \times v(p_1) \delta(k - p_1 - p_2 - q). \quad (5.129)$$

Этот матричный элемент можно получить из матричного элемента тормозного излучения с помощью правила подстановки:

$$k \rightarrow -k; \quad p_1 \rightarrow -p_1; \quad e \rightarrow e^*; \quad u(p_1) \rightarrow v(p_1). \quad (5.130)$$

Обсудим теперь форму записи вероятностей и сечений для процессов во внешнем поле. Элементы матрицы  $S$  можно представить в виде [ср. (5.127)]

$$S_{fi} = (2\pi)^{3g/2} M_{fi} \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i). \quad (5.131)$$

Рассуждая так же, как в разделе 5.8, находим, что вероятность процесса, отнесенная к единице времени, имеет вид

$$\omega_{fj} = (2\pi)^{3g-1} |M_{fi}|^2 \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i), \quad (5.132)$$

а вместо формулы (5.88) имеем

$$dW_g = (2\pi)^{3g-1} |M_{fi}|^2 \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i) \prod_f d^3p_f, \quad (5.133)$$

где  $g$  — как и раньше, число частиц в начальном состоянии. В случае процесса рассеяния во внешнем поле имеем  $g = 1$  и, разделив на поток, равный скорости налетающей частицы  $v$  [см. (5.92)], получаем выражение для сечения процессов во внешнем поле:

$$d\sigma = (2\pi)^2 |M_{fi}|^2 \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i) \prod_f d^3p_f / v. \quad (5.134)$$

5.11. Рассеяние заряженной частицы во внешнем поле. Подставляя (5.127) в (5.134) и суммируя (усредняя) по спидам конечного (начального) электрона [см. (5.102)], получаем сечение рассеяния электрона в кулоновском поле (формула Мотта):

$$d\sigma_e = [Z^2 \alpha^2 / (4e^2 v^4 \sin^4 \vartheta / 2)] (1 - v^2 \sin^2 \vartheta / 2) d\Omega_2, \quad (5.135)$$

где  $\vartheta = \widehat{p_1 p_2}$  — угол между  $p_1$  и  $p_2$ . Здесь было проведено интегрирование по энергии с учетом, что  $d^3p_2 = p_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2 d\Omega_2$ . Сечение рассеяния скалярной частицы в кулоновском поле, которое получается, если заменить в (5.127) ток спинорной частицы на ток скалярной  $m u_2 \gamma^0 u_1 / \varepsilon_1 \rightarrow (p_1 + p_2)^0 / 2\varepsilon_1$ , совпадает с резерфордским сечением

$$d\sigma_s = Z^2 \alpha^2 / (4e^2 v^4 \sin^4 \vartheta / 2) d\Omega_2. \quad (5.136)$$

Отметим, что сечение рассеяния в кулоновском поле можно получить из сечения электромагнитного рассеяния частицы на частице, если масса рассеивателя  $M \rightarrow \infty$ . Результат не зависит от спина рассеивателя.

В задачах рассеяния часто приходится иметь дело с экранированным кулоновским потенциалом, т. е. таким, который на малых расстояниях совпадает с кулоновским, а на больших расстояниях стремится к нулю. Такая ситуация возникает, например, при учете



электронных оболочек атома. Простейшую модель экранирования можно ввести, модифицировав потенциал (5.125):

$$A(r) = 0; \quad A_0(r) = Z|e| \exp[-r/a]/4\pi r, \quad (5.137)$$

где  $a$  — радиус экранирования, который обычно выбирают в виде

$$a = a_0 Z^{-1/3}; \quad a_0 = 1/m\alpha; \quad (5.138)$$

$a_0$  — боровский радиус в водороде. Подставив (5.137) в (5.126), получим

$$a_0(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{Z|e|}{q^2 + a^{-2}}. \quad (5.139)$$

Сечение рассеяния электрона на экранированном кулоновском потенциале вычисляется так же, как (5.135), следует только заменить  $q^2 \rightarrow q^2 + a^{-2}$ :

$$d\sigma_e^{sc} = \{Z^2\alpha^2/[4\varepsilon^2 v^4 (\sin^2 \vartheta/2 + \lambda^2)^2]\} (1 - v^2 \sin^2 \vartheta/2) d\Omega_2, \quad (5.140)$$

де  $\lambda = amZ^{1/3}/2p$ . При интегрировании сечения (5.136) по углам полное сечение рассеяния расходится, что связано с недостаточно быстрым убыванием кулоновского потенциала при  $r \rightarrow \infty$ . В экранированном потенциале (5.137) полное сечение, очевидно, конечно.

В случае малых углов рассеяния, которые наиболее существенны при больших энергиях, сечения (5.135) и (5.136) можно записать в виде

$$d\sigma = 4Z^2\alpha^2 d\Omega_2/(\varepsilon^2 v^4 \vartheta^4). \quad (5.141)$$

При проведении приближенных вычислений в случае больших энергий можно учесть эффекты экранирования, а также размер ядра, используя сечение (5.141) и считая, однако, углы рассеяния  $\vartheta$  ограниченными снизу углом  $\vartheta_1 = 2\lambda$  [см. (5.140)], что обусловлено экранированием заряда ядра электронами, а сверху углом

$$\vartheta_2 = 1/(pR), \quad (5.142)$$

где  $R$  — радиус ядра, который можно взять в виде

$$R = 0,5\alpha Z^{1/3}/m, \quad (5.143)$$

тогда

$$\vartheta_2 = 2m/(\alpha Z^{1/3}p). \quad (5.144)$$

Заметим, что приведенные соображения справедливы при  $\vartheta_{1,2} \ll 1$ . Это условие всегда выполняется при достаточно больших энергиях.

**5.12. Многократное рассеяние заряженной частицы.** Заряженная частица, проходя через слой вещества,

претерпевает ряд столкновений. Представляет интерес вероятность того, что в результате последовательных столкновений частица выйдет из вещества с некоторым боковым смещением и под некоторым углом отклонения. Сначала вычислим средний квадрат угла отклонения при прохождении единицы длины вещества с плотностью атомов в единице объема  $n$ . Учитывая, что акты рассеяния независимы и рассеяние происходит на малые углы, имеем для среднего угла отклонения на единицу длины

$$d\overline{\vartheta_s^2}/dx = \theta^2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \vartheta^2 d\omega(\vartheta) = n \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \vartheta^2 d\sigma(\vartheta), \quad (5.145)$$

где  $d\omega(\vartheta) = nd\sigma(\vartheta)$ —вероятность рассеяния на угол  $\vartheta$  на единице длины. Подставляя сюда сечение (5.141) в случае больших энергий  $v \approx 1$ ,  $\varepsilon \approx p$ , находим

$$d\overline{\vartheta_s^2}/dx = \theta^2 = 16\pi n (Z^2 \alpha^2 / \varepsilon^2) \ln(190 Z^{-1/3}). \quad (5.146)$$

В приближении, когда можно считать, что энергия частицы при прохождении вещества на глубину  $l$  не меняется, имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\vartheta_s^2} &= \varepsilon_s^2 l / (\varepsilon^2 L); & \varepsilon_s^2 &= 4\pi m^2 / \alpha; \\ L^{-1} &= 4\alpha n (Z\alpha/m)^2 \ln(190 Z^{-1/3}). \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

Наряду со средним углом отклонения часто необходимо знать также пространственное и угловое распределения частиц после прохождения слоя вещества толщиной  $x$ . Для простоты при решении указанной задачи\* будем рассматривать отклонения на малые углы. Возьмем декартову систему координат с началом в точке падения; пусть ось  $x$  совпадает с направлением падающих частиц. Рассмотрим проекцию на плоскость  $(x, y)$ . Пусть  $P(x, y, \vartheta_y) dy d\vartheta_y$  есть число частиц\*\* на глубине  $x$ , имеющих боковое смещение в интервале  $(y, y+dy)$  и движущихся под углом  $(\vartheta_y, \vartheta_y+d\vartheta_y)$  к оси  $x$ . Проходя через слой  $dx$ , некоторые из этих частиц рассеиваются и выходят из интервала  $d\vartheta_y$ , а некоторые частицы, находящиеся вне интервала, попадут в результате рассеяния в интервале  $(\vartheta_y, \vartheta_y+d\vartheta_y)$ . Учитывая эти два обстоятельства, получаем для изменения числа частиц

$$dy d\vartheta_y dx \int [P(x, y, \vartheta_y + \vartheta'_y) - P(x, y, \vartheta'_y)] d\omega(\vartheta'), \quad (5.148)$$

где  $d\omega(\vartheta) = nd\sigma(\vartheta)$ ;  $\vartheta = \sqrt{\vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$ . Пространственное распределение частиц меняется за счет того, что в слое  $dx$  частицы, дви-

\* Детально этот вопрос обсуждается в обзоре [93].

\*\* В силу симметрии задачи такая же функция  $P$  описывает пространственное и угловое распределения в плоскости  $(x, z)$ .

гаясь под углом  $\vartheta_y$ , приобретают боковое смещение  $dy = \vartheta_y dx$ . Таким образом, на глубине  $x+dx$  боковое смещение  $y$  имеют те частицы, которые на глубине  $x$  имели боковое смещение  $y - \vartheta_y dx$ . Поэтому в результате прохождения слоя  $dx$  происходит следующее изменение числа частиц в интервале  $(y, y + dy)$ :

$$\begin{aligned} P(x, y - dy, \vartheta_y) dy d\vartheta_y - P(x, y, \vartheta_y) dy d\vartheta_y = \\ = -\vartheta_y dx (\partial P / \partial y) dy d\vartheta_y. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Складывая эффекты рассеяния и смещения, находим для  $P(x, y, \vartheta_y)$  следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \partial P / \partial x = -\vartheta_y \partial P / \partial y + \int [P(x, y, \vartheta_y + \vartheta'_y) - \\ - P(x, y, \vartheta'_y)] dw(\vartheta'). \end{aligned} \quad (5.150)$$

Принимая во внимание, что  $dw(\vartheta')$  описывает вероятность рассеяния на малые углы  $\vartheta'$ , можно разложить  $P$  в ряд по  $\vartheta'_y$  и учесть только два первых члена разложения. Используя также, что

$$\int \vartheta_y dw(\vartheta) = 0; \quad \int \vartheta_y^2 dw(\vartheta) = \int \vartheta^2 dw(\vartheta) / 2 = \theta^2 / 2, \quad (5.151)$$

имеем из (5.150) следующее дифференциальное уравнение (уравнение Фоккера—Планка):

$$\partial P / \partial x = -\vartheta_y \partial P / \partial y + (\theta^2 / 4) \partial^2 P / \partial \vartheta_y^2. \quad (5.152)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} P(x, y, \vartheta_y) = [2 \sqrt{3} / (\pi \theta^2 x^2)] \exp \{ (-4 / \theta^2) (\vartheta_y^2 / x - \\ - 3y\vartheta_y / x^2 + 3y^2 / x^3) \}. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Проинтегрировав функцию распределения  $P$  по  $y$ , находим функцию  $Q(x, \vartheta_y)$ , представляющую угловое распределение безотносительно к боковому смещению:

$$Q(x, \vartheta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y, \vartheta_y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\theta \sqrt{x}} \exp[-\vartheta_y^2 / \theta^2 x]. \quad (5.154)$$

Аналогично, интегрируя функцию  $P$  по  $\vartheta_y$ , имеем распределение в пространстве независимо от углов:

$$\begin{aligned} S(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y, \vartheta_y) d\vartheta_y = \\ = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\theta \sqrt{x^3}} \exp[-3y^2 / \theta^2 x^3]. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Нетрудно убедиться, что все полученные распределения нормированы:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y, \vartheta_y) d\vartheta_y dy &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, \vartheta_y) d\vartheta_y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) dy = 1. \end{aligned} \quad (5.156)$$

В пределе  $x \rightarrow 0$   $Q = 0$  для всех  $\vartheta_y$ , кроме  $\vartheta_y = 0$ ,  $S = 0$  для всех  $y$ , кроме  $y = 0$ . С учетом условия нормировки (5.156) ясно, что имеем представление  $\delta$ -функций:

$$Q(0, \vartheta_y) = \delta(\vartheta_y); \quad S(0, y) = \delta(y). \quad (5.157)$$

Таким образом, решение (5.153) соответствует частице, падающей на рассеиватель в точке  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

5.13. Представление Фарри. Во многих случаях теория возмущений по внешнему электромагнитному полю неприменима (например, при движении в магнитном поле, кулоновском поле при больших  $Z\alpha$ ; при рассмотрении связанных состояний и т. д.), поэтому следует использовать подход, отличный от приведенного в разделе 5.10. Представление, в котором внешнее поле учитывается точно, называется представлением Фарри, в нем  $U$ -матрица имеет вид

$$U_F(t_2, t_1) = T \exp \left[ -i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H}_{FI}(x) d^4 x \right], \quad (5.158)$$

где

$$\mathcal{H}_{FI} = e [\bar{\Psi}_F \gamma^\mu, \Psi_F] A_{F\mu}/2, \quad (5.159)$$

а  $\Psi_F(x)$  является решением уравнения Дирака во внешнем поле.

Оператор  $U_F(t_2, t_1)$  можно снова анализировать на языке диаграмм Фейнмана, только теперь в качестве фермионного пропагатора следует взять (см. раздел 5.7)

$$\begin{aligned} G_F(x_2, x_1) &= i [\Psi_{F0}, T(\Psi_F(x_2) \Psi_F(x_1) \Psi_{F0})] = \\ &= \begin{cases} i \sum_n \psi_n^{(+)}(x_2) \bar{\psi}_n^{(+)}(x_1), & t_2 > t_1; \\ -i \sum_n \psi_n^{(-)}(x_2) \bar{\psi}_n^{(-)}(x_1), & t_2 < t_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.160)$$

где  $\Psi_{F0}$  — «вакуум» в данном внешнем поле; здесь использовано разложение решения уравнения Дирака во внешнем поле (5.9). Так, определенная  $G_F(x_2, x_1)$  есть функция Грина электрона в данном внешнем поле, она больше не является функцией разности координат (как в случае свободных частиц).

Поскольку формально все выражения в представлении Фарри совпадают с выражениями для свободных частиц, то диаграммная техника (в координатном пространстве) полностью переносится в представление Фарри [только следует заменить пропагатор фермиона  $S_F(x_2 - x_1) \rightarrow G_F(x_2, x_1)$ ].

В качестве примера приведем матричные элементы излучения фотона электроном (в отличие от случая свободных частиц этот процесс идет уже в первом порядке по  $e$ ) и рождения электрон-позитронной пары фотоном во внешнем поле. Каждый из процессов

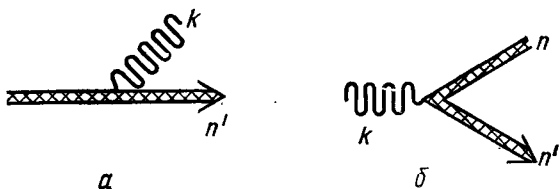


Рис. 14. Диаграммы излучения фотона (а) и рождение пары (б) во внешнем поле (представление Фарри).

представляется одной диаграммой (рис. 14), где двойной линией обозначен электрон во внешнем поле.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме рис. 14, а имеет вид

$$M_{n'n} = \{i e / [(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}]\} \int d^4x \bar{\psi}_n^{(-)}(x) \hat{e}^* \exp(i kx) \psi_n^{(-)}(x), \quad (5.161)$$

а матричный элемент для рождения пары частиц получается из этого выражения заменой  $k \rightarrow -k$ ,  $e \rightarrow e^*$ ,  $\psi_n^{(-)} \rightarrow \psi_n^{(+)}$ .

Вероятность излучения фотона в соответствии с правилами диаграммной техники (см. раздел 5.8)

$$d\omega_{\Psi} = |M_{n'n}|^2 d^3k. \quad (5.162)$$

**5.14. Радиационные эффекты в  $e^2$ -порядке.** При анализе  $S$ -матрицы в  $e^2$ -порядке теории возмущений наряду с диаграммами, описывающими физические процессы, появляются диаграммы собственной энергии и поляризация вакуума (рис. 15 и 16). Они входят в качестве блоков в диаграммы любого процесса при учете высших порядков теории возмущений. Вклады таких диаграмм, содержащие нетривиальное интегрирование по импульсу виртуальных частиц, расходятся при больших значениях импульса. Последнее обстоятельство является органической трудностью теории, которая устраняется с помощью формальной процедуры, называемой перенормировкой. Рассмотрим ее на примере диаграммы собственной энергии (см. рис. 15) в  $e^2$ -порядке, которой сопостав-

ляется элемент  $S$ -матрицы между одночастичными состояниями:

$$\left. \begin{aligned} S^{(2)} &= -i(2\pi) \delta_{p' \rightarrow p}(p' - p)(m/\epsilon) \bar{u}(p) \Sigma_2(p) u(p); \\ \Sigma_2(p) &= [-i e^2/(2\pi)^4] \int d^4 k D_{F\mu\nu}(k) \gamma^\mu S_F(p-k) \gamma^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (5.163)$$

Величину  $\Sigma_2(p)$  обычно называют *массовым оператором* (при любых  $p$ ). Входящий в (5.163) интеграл логарифмически расходится при

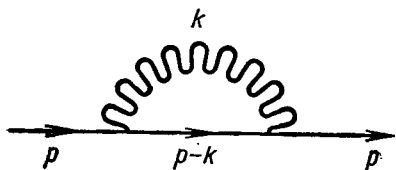


Рис. 15. Диаграмма собственной энергии в  $e^2$ -порядке.

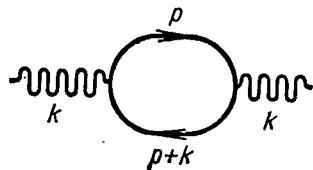


Рис. 16. Диаграмма поляризации вакуума в  $e^2$ -порядке.

больших  $k$ . Для понимания физической ситуации учтем, что в представлении взаимодействия эволюция рассматриваемого одночастичного состояния во времени описывается с помощью  $U$ -матрицы [см. (5.70)]. В результате взаимодействия с квантованным электромагнитным полем энергия состояния меняется. Приращение энергии  $\Delta\epsilon$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} & (\Psi(t_0), U(t, t_0) \Psi(t_0)) / (\Psi(t_0), \Psi(t_0)) = \\ & = \left( \Psi(t_0), T \exp \left[ -i \int_{t_0}^t H_I(t) dt \right] \Psi(t_0) \right) / \left( \Psi(t_0), \Psi(t_0) \right) = \\ & = \exp[-i \Delta\epsilon(t - t_0)], \end{aligned} \quad (5.164)$$

где

$$H_I(t) = \int d^3 x \mathcal{H}_I(x).$$

Разлагая входящие экспоненциальные выражения, получаем

$$\begin{aligned} & \Delta\epsilon(t - t_0) = \\ & = i \left( \Psi(t_0), T \left[ -i \int_{t_0}^t H_I(t) dt \right]^2 \Psi(t_0) \right) / \left( \Psi(t_0), \Psi(t_0) \right). \end{aligned} \quad (5.165)$$

При большей величине разности  $t - t_0$  в правой части этой формулы можно перейти к  $S$ -матрице, тогда, сравнивая с (5.163), получаем

$$\Delta\epsilon = m \bar{u}(p) \Sigma_2(p) u(p) / \epsilon. \quad (5.166)$$

У свободной частицы изменение энергии (при неизменном импульсе) обусловлено приращением массы:

$$\Delta \varepsilon = m \Delta m / \varepsilon. \quad (5.167)$$

Следовательно, диаграмма собственной энергии приводит к изменению массы частицы (вследствие взаимодействия с полем излучения), так что масса  $m$  физической частицы, для которой взаимодействие не может быть выключено, не совпадает с массой электрона  $m_0$ , входившей в свободное уравнение Дирака. Процедура перенормировки состоит в том, что во всех выражениях мы переходим от  $m_0$  к  $m$ . Формально эта операция сводится к тому, что из  $\Sigma_2(p)$  вычитается бесконечная величина  $\Sigma_2(\hat{p} = m) + d\Sigma_2/d\hat{p}|_{\hat{p}=m}(\hat{p} - m)$ , после чего оставшееся выражение не содержит расходимостей при больших  $k$ . Указанное вычитание соответствует изменению массы и нормировки волновой функции частицы. Аналогичное вычитание производится и во вкладе диаграммы поляризации вакуума, которая приводит к изменению эффективного заряда.

Таким образом, в результате взаимодействия с полем излучения масса свободного электрона  $m_0$  и его заряд  $e_0$  меняются, причем добавки содержат расходящиеся выражения. Проводя ряд манипуляций с этими расходимостями, можно показать [3, 36], что заряд и массу можно переопределить (перенормировать) с учетом взаимодействия, т. е. перейти к наблюдаемому заряду и массе таким образом, что теория становится свободной от расходимостей.

Рассмотрим еще диаграмму поляризации вакуума (см. рис. 16). Соответствующий матричный элемент (поляризационный оператор) имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = [i e^2 / (2\pi)^4] \text{Sp} \int \gamma_\mu S_F(p) \gamma_\nu S_F(p+k) d^4 p. \quad (5.168)$$

Из соображений релятивистской инвариантности имеем наиболее общий вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) \Pi_1(k^2) + (k_\mu k_\nu / k^2) \Pi_2(k^2). \quad (5.169)$$

Вследствие калибровочной инвариантности физический смысл имеет только поперечная часть тензора  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ . Свертывая  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$  с поперечным тензором  $g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu$ , имеем

$$\Pi_1(k^2) = (1/3 k^2) (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi^{\mu\nu(2)}(k). \quad (5.170)$$

Величина  $\Pi_1(k^2)$  расходится, для получения конечных результатов из нее необходимо вычесть  $\Pi_1(0) + k^2 \Pi'_1(0)$ .

Рассмотрим взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем с учетом поляризации вакуума в  $e^2$ -порядке (рис. 17):

$$A_\mu^e(k) - A_\nu^e(k) D^{\nu\lambda}(k) \Pi_{\lambda\mu}^{(2)}(k). \quad (5.171)$$

Второй член в этом выражении можно рассматривать как изменение внешнего поля вследствие поляризации вакуума:

$$\delta A_\mu^e(k) = \Pi_1(k^2) A_\mu^2(k) / k^2. \quad (5.172)$$

Учитывая, что потенциал внешнего поля удовлетворяет уравнению

$$\square A_\mu^e = J_\mu^e, \quad (5.173)$$

этот результат можно интерпретировать так же, как изменение внешнего тока:

$$\delta J_\mu^e = \Pi_1(k^2) J_\mu^e(k) / k^2; \quad (5.174)$$

явный вид  $\Pi_1(k^2)$  будет найден в следующем разделе.

5.15. Соотношение унитарности. Матрица рассеяния  $S$  (5.72) является унитарной  $SS^+ = S^+S = I$  или

$$\sum_n S_{fn} S_{ni}^+ = \delta_{fi}. \quad (5.175)$$

Переходя к инвариантной амплитуде  $T$  [см. (5.82) и (5.96)], имеем

$$T_{fi} - T_{ii}^+ = i(2\pi)^4 \sum_n \delta(P_n - P_i) T_{fn} T_{ni}^+. \quad (5.176)$$

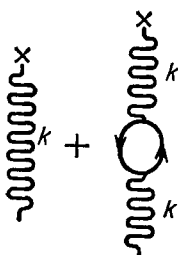


Рис. 17. Взаимодействие с внешним полем с учетом поляризации вакуума.

Суммирование по  $n$  здесь включает суммирование по всем промежуточным состояниям, переходы в которые разрешены при фиксированных квантовых числах состояний  $i$  и  $f$  [интегрирование по импульсам  $p$  и суммирование по спинам (поляризациям)  $s$ ].

В явном виде

$$\sum_n = \sum_m \prod_{k=1}^m \int \{d^3 p_k / [2\varepsilon_k (2\pi)^3]\} \sum_{s_k}, \quad (5.177)$$

где  $m$  — число частиц в промежуточном состоянии. Положив  $f = i$ , имеем

$$\begin{aligned} T_{ii} - T_{ii}^+ &= 2i \operatorname{Im} T_{ii} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta(P_n - P_i) |T_{in}|^2 = \\ &= i(2\pi)^4 \sum_m \prod_k \int \{d^3 p_k / [2\varepsilon_k (2\pi)^3]\} \sum_{s_k} \delta(P_n - P_i) |T_{in}|^2. \end{aligned} \quad (5.178)$$

Если в начальном состоянии было две частицы с импульсами  $p_1, p_2$ , то, сравнивая с (5.82), (5.85), (5.95), видим, что

$$\operatorname{Im} T_{ii} = 2 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \sigma, \quad (5.179)$$

где  $\sigma = \sum_m \sigma_m$  — полное сечение процесса. Утверждение (5.179) называется *оптической теоремой*, а входящая в него  $T_{ii}$  — ам-



плитудой рассеяния вперед. Приведенные результаты являются точными. В квантовой электродинамике, где возможно разложение по степеням константы связи  $e$ , можно брать амплитуду, а следовательно, и приведенные соотношения с точностью до членов определенного порядка по  $e$ . Рассмотрим амплитуду  $T_{if}$  в  $e^m$ -порядке. Тогда, если низший возможный порядок произведения  $T_{in}T_{nf}$  (при любых допустимых  $n$ ) есть  $e^{m_1}$ , то из (5.176) следует, что при  $m < m_1$  выполняется соотношение

$$T_{fi} = T_{fi}^{\dagger}. \quad (5.180)$$

Отсюда вытекает, что амплитуда рассеяния вперед  $T_{ii}$  при этих условиях является вещественной. Соотношение (5.180) выполняется в низшем порядке теории возмущений для амплитуд процессов рассеяния электрона на электроне и позитроне, рассеяния фотона на электроне, двухквантовой аннигиляции, тормозного излучения, фоторождения пары\*. Заметим, что для процесса рассеяния света на свете низший порядок амплитуды упругого процесса будет  $e^4$ , в то время как амплитуда процесса превращения двух фотонов в электрон-позитронную пару имеет порядок  $e^2$ . Поэтому если суммарная энергия фотонов в  $\mathcal{C}$ -системе  $\omega_1 + \omega_2 > 2m$ , то для амплитуды рассеяния света на свете соотношения (5.180) не выполняется даже в низшем порядке теории возмущений, а для  $\omega_1 + \omega_2 < 2m$  выполняется вплоть до величин порядка  $e^7$ .

Формула (5.178) позволяет найти мнимые части амплитуд рассеяния вперед по полным сечениям процессов в соответствующем порядке. Например, амплитуда рассеяния вперед света в кулоновском поле в низшем по  $e$  порядке ( $e^6$ ) выражается через полное сечение фоторождения пары в кулоновском поле.

Соотношение унитарности можно получить и для процессов во внешнем поле. Рассмотрим не зависящие от времени внешнее поле со стационарным вакуумом (например, магнитное). Элемент  $S$ -матрицы запишем в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) T_{fi}. \quad (5.181)$$

Тогда соотношение унитарности

$$T_{fi} - T_{fi}^{\dagger} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta(\epsilon_i - \epsilon_n) T_{fn} T_{ni}^{\dagger}. \quad (5.182)$$

Рассмотрим, например, амплитуду перехода электрона в электрон с тем же импульсом и спином в  $e^2$ -порядке по взаимодействию с квантованным электромагнитным полем. В этом случае [ср. (5.163)]

$$T_{ii} = -m \bar{u} \Sigma_2^e u / e, \quad (5.183)$$

\* Соотношение (5.180) выполняется всегда для амплитуд, соответствующих древовидным диаграммам.

где  $\Sigma_2^e$  — массовый оператор во внешнем поле. Из соотношения унитарности (5.182) имеем [ср. (5.166) и (5.167)]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} T_{ii} &= -2(m/\varepsilon) \operatorname{Im} \bar{u} \Sigma_2^e u = -2 \operatorname{Im} \Delta \varepsilon = \\ &= -2(m/\varepsilon) \operatorname{Im} \Delta m = 2\pi \sum_n \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_j) |T_{in}|^2 = W_e, \end{aligned} \quad (5.184)$$

где  $W_e$  — полная вероятность излучения во внешнем поле в единицу времени. Точно так же, если рассматривать переход фотона в фотон во внешнем поле в  $e^2$ -порядке при  $\omega > 2m$ , получим, что фотон приобретает массу, мнимая часть которой определяется так же, как в (5.184):

$$\operatorname{Im} k^2 = -\omega^2 \operatorname{Im} n_F^2 = -\omega W_\gamma, \quad (5.185)$$

где  $W_\gamma$  — полная вероятность рождения пар фотоном в поле в единицу времени,  $n_F$  «показатель преломления», характеризующий внешнее электромагнитное поле  $F_{\mu\nu}$ ,  $k^2 = \omega^2 - k^2 = \omega^2 (1 - n_F^2)$ .

Соотношение унитарности (5.178), найденное для физических значений импульса, можно обобщить на нефизические значения импульса, например рассматривать фотон с импульсом  $k^2 \neq 0$ . Тогда при  $k^2 > 4m^2$  становится возможным процесс превращения фотона в пару частиц. Из соотношения унитарности для рассеяния фотона вперед имеем для мнимой части амплитуды [ср. (5.169)]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \Pi_{\mu\nu}(k^2) &= 2(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) \operatorname{Im} \Pi_1(k^2) = \\ &= -e^2 (2\pi)^4 \int \{d^3 p_1/[2\varepsilon_1(2\pi)^3]\} \{d^3 p_2/[2\varepsilon_2(2\pi)^3]\} \times \\ &\quad \times \operatorname{Sp}[(\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu (m - \hat{p}_2) \gamma_\nu] \delta(k - p_1 - p_2) = \\ &= -(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) (2\alpha/3) (k^2 + 2m^2) [(k^2 - 4m^2)/k^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Инвариантная амплитуда является аналитической функцией вида  $f(z^*) = f^*(z)$  в комплексной плоскости  $z$  с теми особенностями, которые определяются условием унитарности. Для  $\Pi_1(k^2)$  в отсутствие внешнего поля видим, что особенность (появление у  $\Pi_1(k^2)$  мнимой части на действительной оси  $k^2$ ) возникает при  $k^2 > 4m^2$ , т. е. функция  $\Pi_1(k^2)$  определена в комплексной плоскости  $k^2$  с разрезом  $4m^2 \leq k^2 < \infty$ . Скачок на разрезе\* дается формулой (5.186). Запишем для  $\Pi_1(k^2)$  соотношение Коши по контуру, изображенному на рис. 18. Тогда получим дисперсионное соотношение

$$\Pi_1(k^2) = (1/\pi) \int_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} \Pi_1(k'^2) dk'^2 / (k'^2 - k^2), \quad (5.187)$$

где предполагается, что  $\Pi_1(k^2)$  убывает на бесконечности достаточно быстро, следовательно, интеграл по контуру  $C_R$  вклада не дает. Если  $\Pi_1(k^2)$  недостаточно быстро убывает на бесконечности, то соотношение Коши следует брать для функции вида  $\frac{1}{k^2} \Pi_1(k^2)$  или

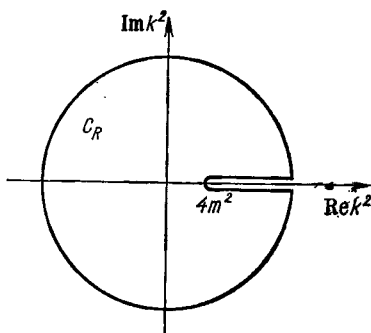
\* Формула (5.186) определяет мнимую часть на верхнем берегу разреза.

убывающей еще более быстро при  $k^2 \rightarrow \infty$ . Эта операция эквивалентна вычитанию  $\Pi_1(k^2) \rightarrow \Pi_1(k^2) - \Pi_1(0)$  и т. д. При подстановке (5.186) в (5.187) видно, что  $\Pi_1(k^2)$  убывает на бесконечности недостаточно быстро, т. е. необходимо провести два вычитания, тогда имеем

$$\begin{aligned} \Pi_1(k^2) - \Pi_1(0) - \Pi_1'(0) k^2 = \Pi_1^R(k^2) = (k^4/\pi) \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} \Pi_1(k'^2) \times \\ \times dk'^2 / [k'^4 (k'^2 - k^2)] = -(\alpha/3\pi) \{5/3 + 1/t - [(2t + \\ + 1)/2t] \sqrt{(1-t)/t} \{ \text{arctg} [(2t-1)/2\sqrt{t(1-t)}] + \\ + \pi/2 \} \} = (\alpha/\pi) [1/9 - (1 - \theta \text{ctg } \theta) (2k^2 + 4m^2)/3k^2], \end{aligned} \quad (5.188)$$

где  $t = k^2/4m^2 = \sin^2 \theta$ . Точно так же находятся дисперсионные соотношения и в случае процессов во внешнем поле.

Рис. 18. Контур интегрирования в соотношении Коши для  $\Pi_1(k^2)$ .



Существование дисперсионных соотношений следует из весьма общих предположений теории (см., например, [35, 36]).

## § 6. ИЗЛУЧЕНИЕ МЯГКИХ ФСТОНОВ

6.1. Излучение мягкого фотона при рассеянии в кулоновском поле. Процесс излучения фотона при рассеянии электрона в кулоновском поле в низшем приближении теории возмущений представляется двумя диаграммами (см. рис. 13, а). Матричный элемент, соответствующий им, дается (5.128). При  $k \rightarrow 0$  матричный элемент  $M_\nu$  расходится. Выделим в нем сингулярные члены, воспользовавшись уравнениями [см. Приложение А, (А.5)],  $\hat{p}u(p) = tu(p)$ ,  $\bar{u}(p)\hat{p} = \bar{u}(p)t$  и соотношением  $\hat{e}\hat{k} = -\hat{k}\hat{e}$ :

$$\begin{aligned} M_\nu = \{i Z e^3 / [(2\pi)^{7/2} \mathbf{q}^2] \sqrt{m^2 / (\epsilon_1 \epsilon_2)} (1 / i 2\omega) \bar{u}(p_2) \times \\ \times \{ [e p_2 / (k p_2) - e p_1 / (k p_1)] \gamma_0 + \\ + \frac{1}{2} [\hat{e}\hat{k} \gamma_0 / (k p_2) + \gamma_0 \hat{k}\hat{e} / (k p_1)] \} u(p_1), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}$ . Оставляя в формуле (6.1) только сигнулярные члены при  $k \rightarrow 0$ , получим

$$M_{\nu}^s = M_0 [i e^{\mu} j_{\mu}(k) / \sqrt{2\omega}], \quad (6.2)$$

где  $M_0$  — матричный элемент упругого рассеяния (без излучения фотона), вычисленный в борновском приближении;

$$j_{\mu}(k) = [i e / (2\pi)^{3/2}] [p_{1\mu} / (k p_1) - p_{2\mu} / (k p_2)]. \quad (6.3)$$

Таким образом, при малых  $k$  сечение излучения фотона можно представить в виде

$$d\sigma_{\nu} = d\sigma_0 dW(k); \quad dW(k) = (e_{\mu}^{\lambda} j^{\mu}) (e_{\mu}^{\lambda} j^{\mu})^* d^3 k / 2\omega, \quad (6.4)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение упругого (без излучения фотонов) рассеяния. Очевидно, матричный элемент (6.2) является калибровочно инвариантным, так что при суммировании по поляризациям можно воспользоваться формулой (А.18) [см. Приложение А]. В результате получаем для излучения фотонов с произвольной поляризацией

$$dW(k) = -j^{\mu}(k) j_{\mu}^*(k) d^3 k / 2\omega. \quad (6.5)$$

Величина  $dW(k)$  — вероятность излучения фотона в процессе, характеризуемом сечением  $d\sigma_0$  (6.4). Эта вероятность представляет собой не что иное, как отношение энергии излученного классического электромагнитного поля в случае малой частоты (3.142) к этой частоте. Такой результат совершенно естествен, так как стремление энергии фотона  $\omega$  к 0 в некотором смысле эквивалентно стремлению постоянной Планка  $\hbar$  к 0.

6.2. Излучение мягких фотонов в квантовой электродинамике. Формула (6.4), выражающая сечение процесса с излучением в области малых частот через сечение упругого (безрадиационного) процесса, может быть без труда обобщена на случай произвольных процессов с любым числом фотонов. Для этого воспользуемся выражением для  $S$ -матрицы (5.72) и (5.73), записав его в форме

$$S = T_{\psi} T_A \exp \left[ -i \int j_{\mu}(x) A^{\mu}(x) d^4 x \right], \quad (6.6)$$

где  $T_{\psi}$ ,  $T_A$  — операторы хронологического произведения соответственно для операторов частиц и для операторов электромагнитного поля; электрический заряд  $e$  включен здесь в  $j^{\mu}(x)$ . Заметим, что под знаком  $T_{\psi}$  с оператором  $j^{\mu}(x)$  можно обращаться, как с  $c$ -числом.

В дальнейшем удобно воспользоваться операторным соотношением [см. Приложение В, (В.9)]

$$e^A e^B = \exp \{ [A, B] / 2 \} \exp (A+B), \quad (6.7)$$

где  $A$  и  $B$  — операторы; коммутатор  $[A, B]$  —  $c$ -число. Очевидным обобщением (6.7) является соотношение

$$e^{A_1} e^{A_2} \dots e^{A_n} = \exp \left[ \sum_{i=1}^n A_i \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i < j} [A_i, A_j] \right\}. \quad (6.8)$$

Из определения  $T_A$ -оператора следует, что

$$\begin{aligned} & T_A \exp \left[ -i \int j_\mu(x) A^\mu(x) d^4 x \right] = \\ & = \dots \exp \left\{ -i \int_t^{t+\Delta t} dt \int d^3 x j_\mu(x) A^\mu(x) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \int_{t-\Delta t}^t dt \int d^3 x j_\mu(x) A^\mu(x) \right\} \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Теперь можно применить к полученному произведению экспоненциальных множителей формулу (6.8), учитывая, что коммутатор операторов электромагнитного поля есть  $c$ -число. В результате имеем [во всех этих операциях не будем затрагивать операторы тока  $j^\mu(x)$ ]:

$$\begin{aligned} S &= T_\psi T_A \exp \left[ -i \int j_\mu(x) A^\mu(x) d^4 x \right] = \\ &= T_\psi \exp \left[ -i \int d^4 x j^\mu(x) A_\mu(x) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y j^\mu(x) j^\nu(y) \vartheta(x_0 - y_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times [A_\mu(x), A_\nu(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Первый из операторов в коммутаторе во втором множителе в правой части в соответствии с (6.7)—(6.9) должен зависеть от более позднего времени. Разбивая оператор  $A^\mu(x)$  на положительно и отрицательно частотные части  $A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)$ , причем  $A_\mu^+(x)$  — оператор уничтожения,  $A_\mu^-(x)$  — оператор рождения фотона, и применяя снова соотношение (6.7), получаем

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -i \int d^4 x j^\mu(x) [A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)] \right\} = \\ &= \exp \left[ -i \int d^4 x j^\mu(x) A_\mu^{(-)}(x) \right] \exp \left[ -i \int d^4 x j^\mu(x) A_\mu^{(+)}(x) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y j^\mu(x) j^\nu(y) [A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Первые два множителя являются  $N$ -упорядоченными, поскольку операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения. Подставляя (6.11) в (6.10) и учитывая, что

$$[A_{\mu}^{(-)}(x), A_{\nu}^{(+)}(y)] = \delta(x_0 - y_0) [A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -g_{\mu\nu} i D_F(x - y), \quad (6.12)$$

находим следующее представление  $S$ -матрицы:

$$S = T_{\Psi} \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j^{\mu}(x) D_{\mu\nu}^F(x-y) j^{\nu}(y) \right] \times \right. \\ \left. \times N \exp \left[ -i \int d^4x j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) \right] \right\}. \quad (6.13)$$

Это выражение является точным и может использоваться наряду с (6.6) и (5.72). Но особенно удобно такое представление  $S$ -матрицы в случае, когда токи являются  $c$ -числами (не операторами), что имеет место при заданном движении зарядов, тогда оператор  $T_{\Psi}$  можно опустить, и проделанные выше операции позволяют найти разложение  $S$ -матрицы в виде  $T$ -произведения на сумму нормальных произведений в замкнутом виде.

Заметим теперь, что для безрадиационного процесса остается только первый сомножитель в формуле (6.13). Если ограничимся рассмотрением излучения фотонов с малыми частотами, то их излучение практически не сказывается на движении излучающих частиц. Таким образом, движение частиц можно считать заданным, и оно определяется первым сомножителем в (6.13), т. е. можно считать заданным ток во втором множителе. Перейдем в интеграле в показателе экспоненты этого множителя в импульсное пространство. Разлагая  $A_{\mu}(x)$  по операторам рождения  $c_{\lambda}^{+}(k)$  и уничтожения  $c_{\lambda}(k)$ , получаем

$$-i \int d^4x j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) = -i \int (d^3k / \sqrt{2\omega}) \sum_{\lambda} e_{\mu}^{\lambda}(k) [c_{\lambda}(k) j^{\mu}(k) + c_{\lambda}^{+}(k) j^{\mu*}(k)], \quad (6.14)$$

где заданный «классический» ток

$$j_{\mu}(k) = [1/(2\pi)^{3/2}] \int j_{\mu}(x) \exp[-ikx] d^4x; \quad j_{\mu}(-k) = j_{\mu}^{*}(k). \quad (6.15)$$

Найдем теперь  $j^{\mu}(k)$  для рассеяния одной заряженной частицы. Как уже отмечалось, при излучении фотонов малых частот можно брать траекторию в виде «угла». (3.84). Пусть будет начальный импульс частицы  $\mathbf{p}_1$ , конечный импульс  $\mathbf{p}_2$ , тогда

$$j_{\mu}(x) = e [(p_{1\mu}/\varepsilon) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t) \vartheta(-t) + (p_{2\mu}/\varepsilon) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_2 t) \vartheta(t)]. \quad (6.16)$$

Вводя представление  $\vartheta$ -функции

$$\vartheta(t) = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau; \quad \vartheta(-t) = \int_{-\infty}^0 \delta(t-\tau) d\tau; \quad (6.17)$$

имеем

$$j_{\mu}(x) = e \left[ v_{1\mu} \int_{-\infty}^0 \delta^4(x-v_1\tau) d\tau + v_{2\mu} \int_0^{\infty} \delta^4(x-v_2\tau) d\tau \right], \quad (6.18)$$

где под  $v_{\mu}$  понимается  $v_{\mu} = (1, \mathbf{v})$ . Вычисляя входящий интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \delta^4(x-v_2\tau) d\tau &= [1/(2\pi)^4] \int d^4k \exp[ikx] \int_0^{\infty} \exp[-ikv_2\tau] d\tau = \\ &= [1/(2\pi)^4] \int d^4k [\exp(ikx)] / (ikv_2), \end{aligned} \quad (6.19)$$

находим в результате выражение для тока

$$\begin{aligned} j_{\mu}(x) &= [1/(2\pi)^{5/2}] \int d^4k \exp[ikx] j_{\mu}(k); \quad j_{\mu}(k) = \\ &= [ie/(2\pi)^{3/2}] (p_{1\mu}/kp_1 - p_{2\mu}/kp_2). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Фурье-компонента тока  $j_{\mu}(k)$  совпадает с «током» (6.3). Обобщение на случай, когда в начальном состоянии имеется  $n_1$  частиц с зарядами  $Z_{1i}$ , а в конечном состоянии имеется  $n_2$  частиц с зарядами  $Z_{2i}$ , очевидно:

$$j^{\mu}(k) = [ie/(2\pi)^{3/2}] \left[ \sum_{i=1}^{n_1} Z_{1i} p_{1i}^{\mu} / (kp_{1i}) - \sum_{j=1}^{n_2} Z_{2j} p_{2j}^{\mu} / (kp_{2j}) \right]. \quad (6.21)$$

Этот ток является сохраняющимся ( $\Sigma Z_{1i} = \Sigma Z_{2i}$ ). Матричный элемент  $N$ -произведения в (6.13) с учетом (6.14) между состоянием с  $n$  фотонами и фотонным вакуумом [ср. (6.2)] будет следующим:

$$\begin{aligned} (\Psi(k_1, \lambda_1; \dots; k_n, \lambda_n) N \exp[-i] \int d^4x j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) \Psi_0) = \\ = [i^n / \sqrt{n!}] \prod_{i=1}^n (1/\sqrt{2\omega_i}) j^{\mu}(k_i) e_{\mu}^{\lambda_i}(k_i). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Следовательно, согласно (6.13) сечение любого процесса с излучением  $n$  мягких фотонов можно представить в виде

$$d\sigma = d\sigma_0 (1/n!) \prod_{i=1}^n dW(k_i), \quad (6.23)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение процесса без излучения фотонов;  $dW(k)$  дается формулами (6.4), (6.5) и (6.21).

Последний результат можно также найти с помощью диаграммной техники. Для этого необходимо учесть, что диаграммы с излучением фотона получаются из диаграмм упругого (безрадиационного) процесса с помощью всех возможных присоединений фотонной линии к линиям заряженных частиц. Тогда будут возникать дополнительные пропагаторы типа

$$1/(p^2 - m^2 \pm 2kp). \quad (6.24)$$

Ясно, что полюсные члены вида  $1/(kp)$  дает только присоединение фотонной линии к внешним линиям заряженных частиц ( $p^2 = m^2$ ), а для внутренних линий  $p^2 \neq m^2$  и при  $k \rightarrow 0$  членом  $kp$  можно пренебречь. Качественно это связано с тем, что, как уже отмечалось в разделе 3.6, длинноволновое излучение формируется на больших расстояниях, т. е. за длительные времена. Отсюда следует, что для излучения одного фотона

$$M = M_0 i e^{\alpha} j_{\mu}(k) / \sqrt{2\omega}, \quad (6.25)$$

где  $j_{\mu}(k)$  определяется (6.21). Для излучения  $n$  фотонов необходимо присоединить к каждой внешней линии заряженной частицы фотонные линии всеми возможными способами и воспользоваться тождеством

$$\begin{aligned} \sum_{\text{перест}} \frac{1}{(k_{m_1} p)} \cdot \frac{1}{(k_{m_1} + k_{m_2}) p} \cdots \frac{1}{(k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n}) p} = \\ = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(k_i p)}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

после чего немедленно приходим к (6.22) и (6.23).

**6.3. Общие свойства процесса излучения мягких фотонов. Инфракрасная расходимость.** Проведем интегрирование вероятности излучения фотона при рассеянии электрона (6.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dW^c &= - \int_{\Omega} (d^3 k / 2\omega) j^{\mu}(k) j_{\mu}^*(k) = \\ &= [\alpha / (2\pi)^2] (d\omega / \omega) \int \omega^2 d\Omega [2p_1 p_2 / (kp_1)(kp_2) - \\ &\quad - m^2 / (kp_1)^2 - m^2 / (kp_2)^2]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Для вычисления этого интеграла учтем, что интеграл общего вида

$$\int (d^3 k / 2\omega) \left[ \prod_{i=1}^n (kp_i) / \prod_{j=1}^{n+2} (kq_j) \right] \delta(k^{\mathcal{P}} - a), \quad (6.28)$$

где  $\mathcal{P}$  — произвольный 4-вектор;  $a$  — константа, очевидно является инвариантным. Выполняя интегрирование по  $\omega$ , получаем

$$(1/2a) \int d\Omega \prod_{i=1}^n (\epsilon_{p_i} - p_i \mathbf{n}) / \prod_{j=1}^{n+2} (\epsilon_{q_j} - q_j \mathbf{n}).$$



Последний интеграл того же типа, что (6.27), следовательно, интеграл по углам в (6.27) можно вычислить в произвольной системе отсчета. Наиболее удобно это сделать в системе, где одна из частиц покоится:

$$\left. \begin{aligned} \int \omega^2 d\Omega m^2 / (kp_2)^2 &= \int \omega^2 d\Omega m^2 / (kp_1)^2 = \int \omega^2 d\Omega m^2 / (\omega^2 m^2) = 4\pi; \\ \int \omega^2 d\Omega / [(kp_1)(kp_2)] &= \int \omega^2 d\Omega / [m\omega\omega(\varepsilon_2 - |\mathbf{p}_2| \cos \vartheta)] = \\ &= \frac{2\pi}{m|\mathbf{p}_2|} \ln \frac{\varepsilon_2 + |\mathbf{p}_2|}{\varepsilon_2 - |\mathbf{p}_2|} = \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{(\rho_1 \rho_2)^2 - \rho_1^2 \rho_2^2}} \ln \frac{(\rho_1 \rho_2 + \sqrt{(\rho_1 \rho_2)^2 - \rho_1^2 \rho_2^2})}{\sqrt{\rho_1^2 \rho_2^2}}, \end{aligned} \right\} (6.29)$$

где мы учли, что при переходе из системы покоя частицы 1 в произвольную систему  $m|\mathbf{p}_2| = \sqrt{(\rho_1 \rho_2)^2 - \rho_1^2 \rho_2^2}$ ;  $\varepsilon_2 m = (\rho_1 \rho_2)$ ;  $\rho_1^2 = \rho_2^2 = m^2$ .

Таким образом,

$$\int_{\Omega} dW^c(k) = dI^c(\omega, x) = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \left[ \frac{2x^2 + 1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 1 \right] = \\ = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \Phi(x^2), \quad (6.30)$$

где  $4m^2 x^2 = -(\rho_1 - \rho_2)^2 = 4|\mathbf{p}^2| \sin^2 \vartheta/2$ ;  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  [поскольку мы пренебрегаем влиянием излучения на электрон, то энергия электрона не меняется:  $\rho_1(\varepsilon, \mathbf{p}_1)$ ,  $\rho_2(\varepsilon, \mathbf{p}_2)$ ,  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ ]. Универсальная функция  $\Phi(x^2)$  определяет зависимость вероятности от передачи импульса, она встречается во всех задачах об излучении мягких фотонов. При угле рассеяния  $\vartheta \neq 0$ , т. е.  $\Phi(x^2) \neq 0$ , интеграл по  $\omega$  в (6.30) расходится на нижнем пределе. Эта расходимость, получившая название «инфракрасная катастрофа» вызвана неприменимостью разложения теории возмущений по константе связи  $e$  в области малых частот фотонов, где параметром разложения является в действительности величина  $(\alpha/\pi) \ln(\varepsilon/\omega) \Phi(x^2)$ . В самом деле, из (6.30) имеем, что вероятность излучения фотона с энергией, большей  $\omega$ , имеет порядок  $(\alpha/\pi) \ln(\varepsilon/\omega) \Phi(x^2)$ ; аналогично для двух фотонов  $[(\alpha/\pi) \ln(\varepsilon/\omega) \Phi(x^2)]^2$  и т. д. Неадекватность аппарата теории возмущений связана с тем, что в области малых частот *важно не число излученных фотонов, а полная уносимая ими энергия*, поскольку при экспериментальном исследовании процес-

\* Первый анализ проблемы инфракрасной расходимости и излучения мягких фотонов был проведен в работе [34], а рассмотрение инфракрасной расходимости в рамках диаграммной техники в работе [108]. Наконец, общий анализ проблемы (с использованием разных подходов) был опубликован [1961 г. [6, 59, 107]. Излучение классическими токами рассмотрено в работе [48].

са взаимодействия энергия конечных частиц известна с некоторым разбросом  $\Delta\varepsilon$ , внутри которого нельзя разделить упругие процессы от неупругих независимо от того, какие фотоны при этом излучены. При достаточно малых частотах можно пользоваться классической формулой (3.142) для энергии излучения  $d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega)$ . Обозначая,  $\int d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \varepsilon(\omega) d\omega$ , имеем, что среднее число фотонов в единичном интервале частоты есть  $\varepsilon(\omega)/\hbar\omega$ , но при  $\omega \rightarrow 0$   $\varepsilon(\omega) \rightarrow \text{const}$  и, следовательно,  $\varepsilon(\omega)/\hbar\omega \rightarrow \infty$ . Таким образом, в процессе рассеяния на ненулевой угол всегда излучается бесконечное число фотонов с нулевой частотой. Иными словами, при ускорении, которое испытывает заряженная частица при рассеянии, она всегда излучает, так что вероятность упругого (без излучения фотона) рассеяния на ненулевой угол всегда равна нулю. Нетрудно убедиться, что  $d\sigma_0$ , вычисленное в первом порядке теории возмущений как сечение упругого рассеяния, представляет собой сечение процесса с испусканием любого числа мягких квантов. Действительно, поскольку мягкие фотоны испускаются статистически независимо, вероятность излучения  $n$  фотонов в интервале частот  $\omega_2 \div \omega_1$  дается формулой Пуассона:

$$w(n) = (\bar{n}^n/n!) e^{-\bar{n}}, \quad (6.31)$$

где  $\bar{n}$  — среднее число излучаемых фотонов:

$$\bar{n} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varepsilon(\omega) d\omega/\hbar\omega. \quad (6.32)$$

Сечение процесса рассеяния с испусканием  $n$  фотонов представляется в виде

$$d\sigma = d\sigma_0 w(n), \quad (6.33)$$

так как при  $\omega_1 \rightarrow 0$ ,  $\bar{n} \rightarrow \infty$  сечение рассеяния с испусканием любого конечного числа бесконечно мягких квантов есть нуль. В то же время, поскольку  $\sum w(n) = 1$ ,  $d\sigma_0$  — сечение процесса рассеяния, сопровождаемого излучением любого числа мягких квантов.

В дальнейшем всегда будем предполагать применимость теории возмущений, т. е. не будем рассматривать область очень мягких квантов. Область применимости формул типа (6.23) ограничена также требованием отсутствия влияния излучения на движение частиц, для чего необходимо, чтобы энергия фотона была много меньше энергии излучающей его частицы. Кроме того, изменение передачи импульса, вызванное излучением, должно быть мало по сравнению с величиной этой передачи.

**6.4. Тормозное излучение мягких фотонов.** Рассмотрим несколько примеров получения из (6.23) интегральных характеристик процесса, таких, например, как спектр излучения для ультрарелятивистских частиц [7]. Начнем с излу-

ния при кулоновском рассеянии. После интегрирования по углам вылета фотона (6.30) имеем

$$d\sigma_1^c = d\sigma_0^c dI^c(\omega, x). \quad (6.34)$$

В предельных случаях больших и малых передач импульса

$$\left. \begin{aligned} dI^c(\omega, x) &= (8\alpha/3\pi) x^2 (d\omega/\omega); & x \ll 1; \\ dI^c(\omega, x) &= (2\alpha/\pi) [\ln 4x^2 - 1] (d\omega/\omega); & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Чтобы вычислить спектр излученных фотонов, необходимо проинтегрировать сечение  $d\sigma_1^c = d\sigma_0^c dI^c(\omega, x)$  по углам вылета электрона [или, что то же самое, по передачам импульса  $x^2 = -(1/4m^2)(p_1 - p_2)^2 = |\mathbf{p}|^2 \sin^2(\theta/2)/m^2$ ].

Сечение упругого рассеяния  $d\sigma_0^c$  в переменных  $x$  имеет вид [ср. (5.135)]

$$d\sigma_0^c = \pi Z^2 r_0^2 (1 - m^2 x^2/\varepsilon^2) dx^2/x^4. \quad (6.36)$$

Таким образом, сечение  $d\sigma_1^c$  при  $x^2 \ll 1$  ведет себя как  $dx^2/x^2$ , а при  $x^2 \gg 1$  — как  $dx^2 \ln x^2/x^4$ . Отсюда следует, что основной (логарифмический) вклад в сечение дает область  $x^2 \ll 1$ . Для выполнения интегрирования по  $x$  необходим нижний предел интегрирования по  $x^2$ . Для упругого рассеяния  $x_{\text{мин}}^2 = 0$ . Однако здесь необходимо учитывать, что рассматривается процесс с излучением фотона, следовательно, в знаменателе выражения для сечения излучения стоит степень передачи 4-импульса  $q = p_1 - p_2 - k$ , причем  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \omega$ . Таким образом,

$$q^2 = -q^2 = -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2. \quad (6.37)$$

Эта величина принимает минимальное значение, когда все векторы коллинеарны, так что

$$4m^2 x_{\text{мин}}^2 = (|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{k}|)^2 = \omega^2 m^4/4\varepsilon^4. \quad (6.38)$$

Верхний же предел с логарифмической точностью, когда сохраняются лишь члены, содержащие большие по сравнению с единицей логарифмы\*, можно положить равным единице (область  $x^2 \gg 1$  вклада не дает, поскольку сечение в ней быстро убывает). Выполняя в (6.34) интегрирование по  $x$  [см. (6.35) и (6.36)], получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_1^c &= \int_{x_{\text{мин}}^2}^{x_{\text{макс}}^2} d\sigma_0^c dI^c(\omega, x) = \frac{8\alpha r_0^2 Z^2 \pi}{3\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \int_{x_{\text{мин}}^2}^1 dx^2/x^2 = \\ &= (16/3)Z^2 \alpha r_0^2 (d\omega/\omega) \ln(4\varepsilon^2/m\omega). \end{aligned} \quad (6.39)$$

\* Большой точности рассматриваемый способ вычисления спектра излученных фотонов дать здесь не может из-за сильной расходимости упругого сечения при  $x^2 \rightarrow 0$ .

Обсудим этот результат. Заметим прежде всего, что  $x^2 \ll 1$  соответствует весьма малым углам рассеяния электрона ( $x = 1$ ,  $\vartheta = 2m/\epsilon$ ;  $x \ll 1$ ,  $\vartheta \ll 2m/\epsilon = 2/\gamma$ ), следовательно, основной вклад дали члены, наиболее сингулярные по  $1/\vartheta$  ( $\sim 1/\vartheta^4$ ), в то время как члены  $\sim 1/\vartheta^2$  ( $1/x^2$ ) в  $d\sigma_0^e$  уже не могут дать вклад требуемого порядка (к такому типу относятся члены с  $\sin^2 \vartheta$  в числителе). Логарифмическая точность, которую имеет результат, связана не только с определением пределов интегрирования с точностью до коэффициентов  $\sim 1$ , но и с тем, что при  $x \sim x_{\text{мин}}$  нельзя пользоваться выражением с классическими токами, поскольку изменение величины передачи импульса, вызванное излучением, порядка величины передачи без излучения.

Подобным образом можно рассмотреть излучение при рассеянии электрона на электроне и позитроне. В этом случае

$$d\sigma_1^e = d\sigma_0^e dW_e(k), \quad (6.40)$$

где  $d\sigma_0^e$  — сечение упругого рассеяния;

$$dW_e(k) = (\alpha/2\pi^2) [p_{1\mu}/(kp_1) + p_{2\mu}/(kp_2) - p_{3\mu}/(kp_3) - p_{4\mu}/(kp_4)] d^3k/2\omega; \quad (6.41)$$

$p_1, p_2$  — входящие импульсы;  $p_3, p_4$  — выходящие импульсы. Выполняя интегрирование по углам вылета фотона, получаем [воспользовавшись (6.29)]

$$\begin{aligned} dI_e(\omega, \vartheta) = \int_{\Omega} dW_e(k) = \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} & \left[ \frac{2x^2 + 1}{x\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \right. \\ & + \frac{2y^2 + 1}{y\sqrt{1+y^2}} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - \\ & \left. - \frac{2z^2 - 1}{z\sqrt{z^2 - 1}} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) - 1 \right], \quad (6.42) \end{aligned}$$

где  $4m^2 x^2 = -(\rho_1 - \rho_3)^2$ ;  $4m^2 y^2 = -(\rho_1 - \rho_4)^2$ ;  $4m^2 z^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2$ .

Рассмотрим процесс излучения в  $\mathcal{L}$ -системе, в которой до столкновения одна из частиц покоилась  $p_2 = 0$ . С точностью до членов  $\sim m/\epsilon$  ( $\epsilon$  — энергия в  $\mathcal{L}$ -системе) сечение рассеяния электрона на электроне

$$d\sigma_0^e = \frac{r_0^2 \pi dx^2}{2l z^4} \left\{ \frac{y^4 + z^4}{2x^4} + \frac{z^4 + x^4}{2y^4} + \frac{z^4}{x^2 y^2} \right\}, \quad (6.43)$$

причем  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ . Ввиду симметрии этого сечения и  $dI_e(\omega, \vartheta)$  (6.42) относительно перестановки  $x, y$  область  $x \rightarrow 0$  дает вклад, одинаковый с областью  $y \rightarrow 0$  (эта область связана с вкладом обменной диаграммы).

Следует иметь в виду, что при  $x^2 \rightarrow 0$   $y^2 = z^2 + 0$  ( $m/\epsilon$ ), а при  $y^2 \rightarrow 0$   $x^2 = z^2 + 0$  ( $m/\epsilon$ ). Отсюда вытекает, что интерференционный член диаграммы рассеяния и обменной диаграммы  $1/(x^2 y^2)$  вклада не дает, поскольку  $z^2 \sim \epsilon/m$ . Поэтому с принятой точностью вклад в спектр дают только члены  $1/x^4$  и  $1/y^4$  в (6.43). В соответствии со сказанным члены в (6.42), содержащие  $(y, z)$  при  $x \rightarrow 0$  и  $(x, z)$  при  $y \rightarrow 0$ , взаимно компенсируются. Тогда сечение излучения при электрон-электронном соударении с заданной передачей импульса можно записать в виде

$$d\sigma_1^e = \left\{ \frac{r_0^2 \pi dx^2}{2x^4} \cdot \frac{4\alpha}{\pi} \Phi(x^2) + \frac{r_0^2 \pi dy^2}{2y^4} \cdot \frac{4\alpha}{\pi} \Phi(y^2) \right\} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (6.44)$$

При вычислении спектра излучения оба члена в сечении (6.44) дают одинаковый вклад, поэтому можно оставить только первый член, опустив перед ним множитель  $1/2$ . В  $\mathcal{L}$ -системе передача импульса зависит от того, какая из частиц излучает: быстрая (налетающая) или частица отдачи. Если излучает налетающая частица, то\*

$$4m^2 x_{\text{мин}}^2 = -(p_1 - p_3 - k)_{\text{мин}}^2 = \omega^2 m^4 / 4\epsilon^4. \quad (6.45)$$

Если излучает частица отдачи, то

$$4m^2 x_{\text{мин}}^2 = -(p_2 - p_4 - k)_{\text{мин}}^2 = \omega^2 m^2 / 2\epsilon^2. \quad (6.46)$$

Теперь следует учесть, что вклад в выражение (6.44) дают члены

$$[p_1/(p_1 k) - p_3/(p_3 k)]^2 \quad \text{и} \quad [p_2/(p_2 k) - p_4/(p_4 k)]^2.$$

Первый из этих членов определяет излучение быстрой частицы, так что предел интегрирования по  $x^2$  определяется (6.45), а второй член — излучение частицы отдачи, следовательно, в качестве  $x_{\text{мин}}^2$  следует взять (6.46). Верхний предел, как и прежде, можно положить равным единице. Итак, с учетом (6.35) имеем для излучения быстрой частицы

$$d\sigma_1^{e(1)} = \frac{8r_0^2 \alpha}{3} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \int_{x_{\text{мин}}^2}^1 dx^2/x^2 = (16/3) r_0^2 \alpha (d\omega/\omega) \ln(4\epsilon^2/m\omega) \quad (6.47)$$

и для излучения частицы отдачи

$$d\sigma_1^{e(2)} = \frac{8r_0^2 \alpha}{3} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \int_{x_{\text{мин}}^2}^1 dx^2/x^2 = (16/3) r_0^2 \alpha (d\omega/\omega) \ln(2\epsilon/\omega). \quad (6.48)$$

\* Минимум передачи достигается при  $p_{3,4}$ ,  $k$ , направленных по  $p_1$ . Из законов сохранения можно найти  $\epsilon_{3,4}$ .

Полный спектр излучения фотонов в  $\mathcal{L}$ -системе

$$d\sigma_1^e = d\sigma_1^{e(1)} + d\sigma_1^{e(2)}. \quad (6.49)$$

Полученный результат в равной степени описывает излучение при электрон-позитронном столкновении, поскольку вклад диаграмм аннигиляционного типа пренебрежимо ( $\sim m/\epsilon$ ) мал при высоких энергиях. Отметим, что быстрый электрон излучает так же, как при рассеянии на ядре (6.39). Этот результат легко понять, поскольку основной вклад в излучение дают столь малые передачи импульса, что движение электрона-мишени несущественно. Видно, что сечения излучения мягких фотонов быстрой частицей и частицей отдачи различаются только на множитель в аргументе логарифма.

В  $\mathcal{C}$ -системе обе частицы излучают одинаково (каждая в направлении своего движения). Минимальная передача

$$\begin{aligned} 4m^2 x_{\text{мин}}^2 &= -(\rho_1 - \rho_3 - k)^2 \Big|_{\text{мин}} = -(\rho_2 - \rho_4 - k)^2 \Big|_{\text{мин}} = \\ &= m^6 \omega^2 / 16\epsilon^6, \end{aligned} \quad (6.50)$$

где  $\epsilon$  — энергия электрона в  $\mathcal{C}$ -системе. Из (6.44) получаем спектр в  $\mathcal{C}$ -системе.

$$\begin{aligned} d\sigma_1^e &= \frac{16\alpha r_0^2}{3} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \int_{x_{\text{мин}}^2}^1 dx^2/x^2 = \\ &= 32\alpha r_0^2 (d\omega/\omega) \ln(8\epsilon^3/m^2 \omega)/3. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Обсудим еще угловое распределение излученных фотонов. Ультрарелятивистские частицы излучают вперед в угол  $\sim 1/\gamma$  относительно направления движения. Поскольку углы отклонения частиц  $\lesssim 1/\gamma$ , то во всех рассмотренных случаях излучение сосредоточено в конусах  $\sim 1/\gamma$  относительно направления движения частиц. Исключение составляет излучение частицы отдачи. При передаче импульса  $x^2 \sim 1$  энергия частицы отдачи  $\epsilon_4 \sim m$ , следовательно, угловое распределение излучения этой частицы почти изотропно (рис. 19).

Изложенный метод можно использовать для вычисления интегральных сечений процессов с излучением большого числа фотонов. Интегрирование по углам вылета каждого из фотонов может быть проведено независимо, так что

$$d\sigma_n = d\sigma_0 (1/n!) \prod_{i=1}^n dI(\omega_i, x). \quad (6.52)$$

Особый интерес представляет сечение *двойного тормозного излучения* — излучения двух фотонов при столкновении частиц. Рассмотрим этот процесс в  $\mathcal{C}$ -системе. Отметим прежде всего, что основной вклад дают малые передачи  $x^2 \sim 1$  ( $y^2 \sim 1$ ). На основании

аргументов, изложенных после формул (6.43) и (6.44), можно не рассматривать вклад обменных диаграмм (области  $y^2 \rightarrow 0$ ) и опустить в (6.43) множитель  $1/2!$ , причем отброшенные члены имеют порядок  $m^2/\varepsilon^2$ . Таким образом, приходим к сечению

$$d\sigma_2^e = \pi r_0^2 \frac{dx^2}{x^4} \cdot \frac{1}{2!} \left[ \frac{4\alpha}{\pi} \Phi(x^2) \right]^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{d\omega_2}{\omega_2}, \quad (6.53)$$

где  $\Phi(x^2)$  дается формулой (6.30). При  $x^2 \rightarrow 0$   $d\sigma_2^e/dx^2$  не содержит сингулярности, поэтому в отличие от случая однократного тормозного излучения поведение при  $x^2 \rightarrow 0$  не существенно и можно с высокой степенью точности положить  $x_{\text{мин}}^2 = 0$ . Следовательно: 1) сечение  $d\sigma_2^e$  не содержит больших логарифмов, которые входят в сечение однократного тормозного излучения; 2) величина  $d\sigma_2^e$  может быть найдена со степенной точностью (отброшенные члены  $\sim m^2/\varepsilon^2$ ); 3) основной вклад в  $d\sigma_2^e$  дают передачи импульса  $x^2 \sim 1$ , значит, при вычислении спектра двойного тормозного излучения необходимо интегрировать точное выражение (6.53). При  $x^2 \gg 1$  сечение

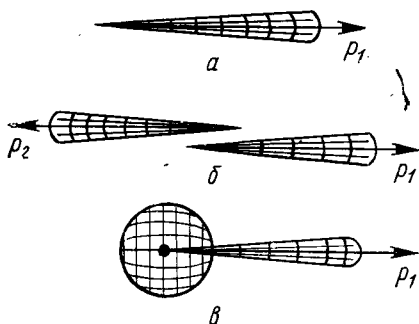


Рис. 19. Угловое распределение однократного тормозного излучения в кулоновском поле (а); при электрон-электронном (позитронном) соударении в Ц-системе (б), в Л-системе (в).

ведет себя как  $\frac{dx^2}{x^4} \ln^2 x^2$ , поэтому верхний предел  $x^2 \sim \varepsilon^2/m^2$  ввиду сходимости интеграла можно с точностью до членов  $\sim m^2/\varepsilon^2$  положить  $x_{\text{макс}}^2 \rightarrow \infty$ . Входящий интеграл является, таким образом, константой:

$$v(2) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} \Phi^2(x^2) = \int_0^\infty \frac{dy \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh}^3 y} \left[ \frac{2 \operatorname{sh}^2 y + 1}{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y} y - 1 \right]^2, \quad (6.54)$$

где сделана замена  $x = \operatorname{sh} y$ . Последний интеграл вычисляется непосредственно ([52], с. 140, 362). Следует только иметь в виду, что отдельные члены в (6.54) квадратично расходятся при  $y \rightarrow 0$ ; таким образом, интегрирование следует вести от некоторой малой величины  $\delta$ , а затем в полном выражении перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ . В итоге

$$d\sigma_2^e = \pi r_0^2 \left( \frac{4\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{d\omega_2}{\omega_2} v(2) = \frac{16\alpha^2 r_0^2}{\pi} \cdot \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{d\omega_2}{\omega_2} \left[ \frac{5}{4} + \frac{7}{8} \zeta(3) \right], \quad (6.55)$$

где  $\zeta(3)$  — дзета-функция Римана;  $7\zeta(3)/8 = 1,052$ .

Выражение (6.55) в равной степени описывает двойное тормозное излучение при электрон-электронном и электрон-позитронном соударениях, поскольку оно определяется только диаграммой рассеяния, вклад которой не зависит от знака заряда.

Аналогичным способом можно получить сечение излучения большего числа фотонов. Из проведенного выше анализа, очевидно, следует, что качественные особенности сечения такие же, как для  $n = 2$  (отсутствие больших логарифмов, степенная точность  $\sim m^2/\epsilon^2$ , возможность перейти к пределам  $x_{\min}^2 = 0$ ,  $x_{\max}^2 \rightarrow \infty$ ). Сечение излучения  $n$  фотонов

$$d\sigma_n^e = 2\pi r_0^2 (4\alpha/\pi)^n \frac{\nu(n)}{n!} \cdot \frac{d\omega_1}{\omega_1} \dots \frac{d\omega_n}{\omega_n}, \quad (6.56)$$

где постоянная  $\nu(n)$  дается выражением

$$\begin{aligned} \nu(n) &= \int (dx/x^3) \Phi^n(x^2) = \\ &= \int_0^\infty [dy \operatorname{ch} y \operatorname{sh}^{-3} y [y(2\operatorname{sh}^2 y + 1)/(\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y) - 1]^n]. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Величина  $\nu(n)$  вычисляется так же, как  $\nu(2)$  (6.54), в частности,

$$\nu(3) = 3 [8\zeta_3(3) - 1]/5. \quad (6.58)$$

Следует учитывать, что вклад в сечение дают члены  $(p_1/(p_1 k) - p_3/(p_3 k))^2$  и  $(p_2/(p_2 k) - p_4/(p_4 k))^2$ , первый из которых связан с излучением вдоль импульса первой частицы, второй — вдоль второй частицы. Простой комбинаторный подсчет дает, что сечение излучения  $m$  фотонов вдоль первой частицы и  $n - m$  — вдоль второй —  $\sigma_n^e(m, n - m)$  будет следующим:

$$d\sigma_n^e(m, n - m) = C_m^n d\sigma_n^e/2^n. \quad (6.59)$$

Для двойного тормозного излучения сечение в случае, когда фотоны летят в противоположные стороны,  $d\sigma_2^e(1, 1) = d\sigma_2^e/2$ , а когда фотоны летят в одну сторону  $d\sigma_2^e(2, 0) = d\sigma_2^e(0, 2) = d\sigma_2^e/4$ .

Перейдем теперь к поляризации мягких фотонов. В случае однократного тормозного излучения в кулоновском поле рассмотрение этого вопроса можно провести аналогично проведенному в разделе 3.7. Можно исходить непосредственно из формулы (3.122), разделив на  $\omega$  и опустив множитель  $\Phi_{cl}(y)$  и все члены с  $\lambda$  (последние дают нелогарифмические вклады, которыми пренебрегаем). При интегрировании по  $y$  необходимо обрезать нижний предел (вместо  $q_{\min}^2 = 0$  взять  $q_{\min}^2 = \omega^2 m^4/4\epsilon^4 = m^2 \delta_0^2$ ), тогда  $y_{\max} = 1$  ( $y_{\min} = \delta_0^2$ ). Эти соотношения следует сравнить с (3.117). После выполнения интегрирования по  $y$ , которое совместно с интегрированием по  $\eta$  есть интегрирование по углам вылета конечного электрона, получаем сечение излучения мягких фотонов, дифференциальное по углам



и частоте фотона:

$$d\sigma_1^c(\lambda) = \frac{Z^2 r_0^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2} d\varphi_1 \ln(1/\delta_0^2) \left[ 1 - \frac{2(\xi-1)}{\xi^2} (1 + \cos 2\varphi_1) \right]. \quad (6.60)$$

Это сечение перепишем в виде [ср. (3.129)]

$$d\sigma_1^c(\lambda) = (d\sigma_1^c/2) (1 - |\xi| \cos 2\varphi_1), \quad (6.61)$$

где

$$|\xi| = 2(\xi-1)/[\xi^2 - 2(\xi-1)], \quad (6.62)$$

Повторяя рассуждения, приведенные после формулы (3.130), приходим к утверждению, что мягкие фотоны, излучаемые при кулоновском соударении, обладают линейной поляризацией в направлении, перпендикулярном плоскости излучения (плоскости, проходящей через  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{k}$ ). Если в качестве орта  $\mathbf{e}_1$  выбрать проекцию  $\mathbf{p}_1$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{k}$ , то

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = -|\xi|. \quad (6.63)$$

Зависимость степени поляризации от полярного угла вылета фотона близка к приведенной на рис. 11. После интегрирования по полярному углу вылета фотона ( $\xi$ ) получаем

$$d\sigma_1^c(\lambda) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Z^2 r_0^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\omega} d\varphi_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \cos 2\varphi_1 \right) \ln \frac{2e^2}{m\omega}, \quad (6.64)$$

так что параметры Стокса излучения

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = -1/2. \quad (6.65)$$

Следовательно, мягкие фотоны обладают заметной линейной поляризацией. Проинтегрировав (6.64) по углу  $\varphi_1$  и просуммировав по поляризациям (множитель 2), приходим к (6.39).

Аналогично может быть рассмотрена и поляризация излучения при столкновениях частиц:

## § 7. МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

7.1. Однофотонный обмен. Квадраты матричных элементов процессов, для которых диаграммы Фейнмана содержат внутренние фотонные линии, представляют собой свертки тензоров, сопоставляемых блокам, соединенным фотонными линиями. При вычислении полных сечений часто оказывается очень удобным проводить интегрирование по конечным состояниям до сворачивания тензоров друг с другом, т. е. интегрировать отдельные блоки в тензорном виде, используя свойства инвариантности теорий (в квантовой электродинамике это релятивистская, калибровочная,  $P$ - и  $T$ -инвариантность).

Интегрирование выражений в тензорном виде удобно в двух отношениях: 1) упрощается вычисление входящих следов матриц

(для спинорных частиц), так как вычислять приходится не полный тензор, а только некоторые его свертки, причем лишь с теми векторами, которые уже в нем содержатся; 2) упрощается вычисление интегралов, поскольку дело сводится к интегрированию скалярных выражений, зависящих только от тех векторов, которые входят в интегрируемый тензор. Свойство релятивистской инвариантности позволяет выполнять интегрирование в наиболее удобной системе.

Рассмотрим квадрат матричного элемента для диаграммы, приведенной на рис. 20, где все частицы с импульсами  $p_k$  конечные.

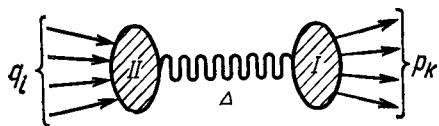


Рис. 20. Диаграмма однофотонного перехода.

Среди частиц с импульсами  $q_i$  могут быть начальные и конечные, причем если какая-либо частица конечная, то ее импульс следует взять с обратным знаком (имеет место закон сохранения  $\sum_k p_k = \sum_i q_i$ ). Диаграммы такого

типа описывают, например, превращение пары частиц в пару частиц другого вида в низшем приближении теории возмущений (блок  $I$  рис. 20 является составной частью диаграмм многих процессов). Вклад в сечение этой диаграммы, просуммированный по поляризациям частиц  $p_k$  и проинтегрированный по их импульсам, можно представить в виде

$$d\sigma = T_{\mu\nu}(q_i) \int F^{\mu\nu}(p_k) \prod_k [d^3 p_k / (2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}] \delta(\sum q_i - \sum p_k), \quad (7.1)$$

где тензор  $T_{\mu\nu}(q_i)$  соответствует блоку  $II$  диаграммы, он может зависеть от поляризаций частиц  $q_i$ ; тензор  $F^{\mu\nu}(p_k)$  представляет блок  $I$ ;  $1/\Delta^4$  от фотонного пропагатора включено в  $F^{\mu\nu}(p_k)$ . Отметим, что в (7.1) явно выписаны нормировочные множители внешних линий  $p_k$ . Перепишем (7.1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= T_{\mu\nu}(q_i) \int [d^4 \Delta / (2\pi)^3] \delta(\sum q_i - \Delta) f^{\mu\nu}(\Delta); \\ f^{\mu\nu}(\Delta) &= (2\pi)^3 \int F^{\mu\nu}(p_k) \prod_k [d^3 p_k / (2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}] \delta(\Delta - \sum p_k). \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Поскольку  $F^{\mu\nu}(p_k)$  есть 4-тензор и интегрирование по  $d^3 p / 2\varepsilon = d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0)$  является релятивистски инвариантной операцией, то  $f^{\mu\nu}(\Delta)$  представляет собой 4-тензор, зависящий только от 4-вектора  $\Delta_\mu$ , так как по всем векторам  $p_k$  проведено интегрирование. Наиболее общий вид тензора второго ранга, зависящего от одного 4-вектора, следующий:

$$f^{\mu\nu}(\Delta) = a_1(\Delta^2) g^{\mu\nu} + a_2(\Delta^2) \Delta^\mu \Delta^\nu. \quad (7.3)$$

Из калибровочной инвариантности (или сохранения тока)

$$f^{\mu\nu}(\Delta) \Delta_\mu = f^{\mu\nu}(\Delta) \Delta_\nu = 0, \quad (7.4)$$

так что при  $\Delta^2 \neq 0$  имеем  $a_2 = -a_1/\Delta^2 \equiv f(\Delta^2)/\Delta^2$ . Следовательно, с учетом калибровочной инвариантности имеем

$$f^{\mu\nu}(\Delta) = -(g^{\mu\nu} - \Delta^\mu \Delta^\nu / \Delta^2) f(\Delta^2). \quad (7.5)$$

Для вычисления  $f(\Delta^2)$  достаточно свернуть  $f^{\mu\nu}$  с  $g_{\mu\nu}$ :

$$f(\Delta^2) = [-(2\pi)^3/3] \int g_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(p_k) \prod_k [d^3 p_k / (2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}] \delta(\Delta - \sum p_k). \quad (7.6)$$

Используя калибровочную инвариантность  $T_{\mu\nu}(q_k)$  ( $T_{\mu\nu} \Delta^\mu = T_{\mu\nu} \Delta^\nu = 0$ ), получаем для вклада в сечение процесса (7.2)

$$d\sigma = - \int g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(q_i) (d^4 \Delta / (2\pi)^3) \delta(\sum q_i - \Delta) f(\Delta^2). \quad (7.7)$$

Найдем теперь  $f(\Delta^2)$  в нескольких простейших случаях. Очевидно, что если  $f(\Delta^2) = f_0(\Delta^2) = \vartheta(\Delta_0) \delta(\Delta^2)$ , то  $d\sigma$  (7.7) является сечением излучения фотона. В этом случае сама фотонная линия оказывается внешней:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p_k) &\rightarrow \sum_\lambda e_\mu^\lambda e_\nu^{*\lambda} \rightarrow -g_{\mu\nu} \\ f^{\mu\nu}(\Delta) &= (2\pi)^3 (-g^{\mu\nu}) \int \delta(\Delta - k) d^3 k / (2\pi)^3 2\omega = \\ &= -g^{\mu\nu} \delta(\Delta^2) \vartheta(\Delta_0). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Если блок  $I$  диаграммы описывает рождение пары с импульсами  $p_1, p_2$ , то

$$F_{\mu\nu}^{(0)} = (e^2/\Delta^4) (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu \quad (7.9)$$

при рождении пары скалярных частиц и

$$F_{\mu\nu}^{(1/2)} = (e^2/\Delta^4) \text{Sp} [(\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\nu] \quad (7.10)$$

для рождения пары фермионов со спином  $1/2$ . Величину  $f(\Delta^2)$  можно вычислить согласно формуле (7.6). Это интегрирование весьма просто проводится в системе, где  $\Delta = 0$ , так как  $g_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  зависит только от квадратов масс и  $p_1 p_2 = (\Delta^2 - p_1^2 - p_2^2)/2$  ( $\Delta = p_1 + p_2$ ). Тогда, интегрирование сводится к вычислению

интеграла по фазовому объему

$$\int \frac{d^3 p_1}{2\varepsilon_1} \int \frac{d^3 p_2}{2\varepsilon_2} \delta(\Delta - p_1 - p_2) = \int \frac{d\Omega p_1^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left| \frac{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{dp_1} \right|^{-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Delta^2 - 4m^2}{\Delta^2}} \quad (7.11)$$

поскольку в  $Ц$ -системе конечных частиц ( $p_1 + p_2 = \Delta = 0$ )  $\varepsilon = \sqrt{\Delta^2/2}$ ,  $p = \sqrt{\Delta^2 - 4m^2}/2$ . С учетом этого для рождения пары скалярных частиц

$$f_2^{(0)}(\Delta^2) = \frac{\alpha}{12\pi} \cdot \frac{1}{\Delta^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4m^2}{\Delta^2} \right)^{3/2} \quad (7.12)$$

и для рождения пары фермионов\*:

$$f_2^{(1/2)}(\Delta^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{2m^2 + \Delta^2}{\Delta^4} \sqrt{\frac{\Delta^2 - 4m^2}{\Delta^2}} \quad (7.13)$$

В § 5 было показано, что сумма квадратов матричных элементов диаграмм, на которых фотон превращается в пару частиц, определяет мнимую часть поляризационного оператора в  $e^2$ -порядке теории возмущений. Учитывая это, формулу (7.7) можно переписать в виде

$$d\sigma = \int T_{\mu\nu}(q_i) \delta(\sum q_i - \Delta) \frac{\text{Im} \Pi_{\mu\nu}(\Delta)}{\Delta^4} \cdot \frac{d^4 \Delta}{\pi (2\pi)^3} \quad (7.14)$$

Вычислим  $f(\Delta^2)$  еще в случае, когда блок  $I$  описывает превращение виртуального фотона в пару частиц и фотон, причем этот фотон, в свою очередь, превращается «в любое возможное состояние». Диаграммы этого процесса приведены на рис. 21, где введен «блок излучения» (а) для спинорных частиц, в случае скалярных частиц к нему надо добавить диаграмму (б).

Используя полученные выше результаты для блока  $I$  (см. рис. 20), имеем [см. (7.7) и (7.6)]

$$f_4^{(S)}(\Delta^2) = \frac{1}{3\Delta^4} \int d^4 \Delta_1 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2} \delta(\Delta - p_1 - p_2 - \Delta_1) \times$$

$$\times f(\Delta_1^2) M^{(S)} = \frac{\pi}{3\Delta^6} \int d\Delta_1^2 d\Delta_2^2 \sqrt{D} f(\Delta_1^2) g^{(S)}(\Delta_1^2, \Delta_2^2, \Delta^2), \quad (7.15)$$

где  $M^{(S)}$  — свертки комптоновского тензора для частиц со спином  $S$ , когда оба фотона имеют массу, с  $g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$ ,  $D = (\Delta\Delta_1)^2 - \Delta^2\Delta_1^2$ . Комптоновский тензор для канала рассеяния приведен ни-

\* Вычисление  $g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{(1/2)}$  заметно упрощается, если сначала свернуть тензор  $F_{\mu\nu}^{(1/2)}$  с  $g^{\mu\nu}$ , а затем вычислять след.

же [см. (7.34)—(7.36)], для рассматриваемого случая он получается заменой  $p_1 \rightarrow -p_1$  и изменением знака в случае спинорных частиц, а свертки для канала рассеяния даны формулами (7.38)—(7.39), причем  $M^{(S)} = (-1)^{2S} e^4 A_1^{(S)}(p_1 \rightarrow -p_1)$ . В формуле (7.15)

$$g^{(S)} = \left. \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2} M^{(S)} \delta(\Delta_2 - p_1 - p_2); \right\} \quad (7.16)$$

$$\Delta_2 = \Delta - \Delta_1.$$

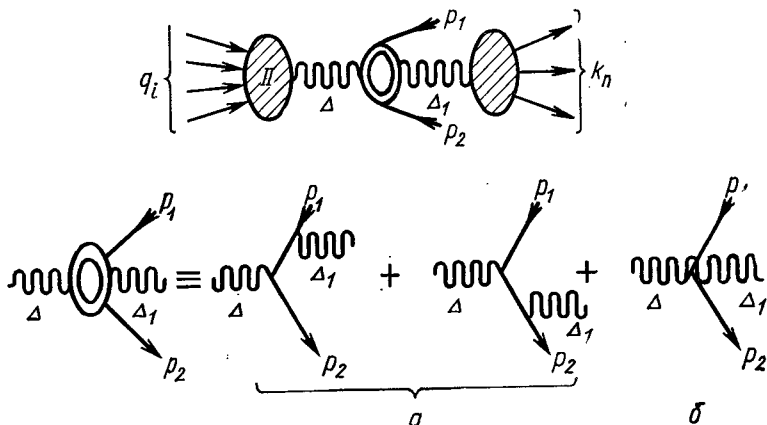


Рис. 21. Диаграмма однофотонного перехода с образованием пары и виртуального фотона, выраженная через «блок излучения» (везде вместо  $p_1$  должно быть  $-p_1$ ).

Интегрирование просто проводится в системе, где  $\Delta_2 = 0$  (см. Приложение Г). Явный вид функций  $g^{(S)}$  следующий:

$$g^{(0)} = \left[ \frac{2\alpha^2}{(2\pi)^3} \right] \beta_2 \left[ 4 + \frac{(\Delta^2 - 4m^2)(\Delta_1^2 - 4m^2)}{(\eta^2 - \kappa^2)} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\eta\kappa} \right) \ln \left[ \frac{\eta + \kappa}{\eta - \kappa} \right] \{ \Delta_2^2 (\Delta\Delta_1) + 2(2m^2 - \Delta^2/2 - \Delta_2^2/2) \times \right. \\ \left. \times (2m^2 - \Delta_1^2/2 - \Delta_2^2/2) \} \right]; \quad (7.17)$$

$$g^{(1/2)} = \left[ -\frac{16\alpha^2}{(2\pi)^3} \right] \beta_2 \left\{ 1 + \frac{(2m^2 + \Delta^2)(\Delta_1^2 + 2m^2)}{(\eta^2 - \kappa^2)} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\eta\kappa} \right) \ln \left[ \frac{\eta + \kappa}{(\eta - \kappa)} \right] \left[ 2m^2(\Delta\Delta_1 + m^2) - (\Delta\Delta_1)^2 - \frac{\Delta_2^2}{2}(\Delta^2 + \Delta_1^2) \right] \right\}, \quad (7.18)$$

где

$$\beta_2 = \sqrt{(\Delta_2^2 - 4m^2)/\Delta_2^2}; \quad \eta = \Delta\Delta_1; \quad D = (\Delta\Delta_1)^2 - \Delta^2 \Delta_1^2 = \\ = (\Delta_1 \Delta_2)^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2; \quad \kappa = \beta_2 \sqrt{D}.$$

В формуле (7.15) мы перешли от дифференциала  $d^4 \Delta_1$  (в системе, где  $\Delta = 0$ ) к  $d^4 \Delta_1 = d\Delta_1^2 d\Delta_2^2 d \cos \vartheta d\varphi \sqrt{D}/4\Delta^2$  (см. Приложение Г). Интегрирование по углам является тривиальным, область изменения переменных  $\Delta_1^2, \Delta_2^2$  определяется неравенствами  $\Delta_2^2 \geq 4m^2, (\sum m_i)^2 \leq \Delta_1^2, \Delta_2^2 \geq (\sqrt{\Delta_1^2} + \sqrt{\Delta_2^2})^2$ , где  $m_i$  — массы частиц, в которые переходит фотон  $\Delta_1$ .

Выше вычислялись сечения, просуммированные по всем состояниям частиц  $p_k$ . Ясно, что процедура инвариантного интегрирования тензоров остается такой же, если необходимо получить сечение, дифференциальное по какой-либо инвариантной характеристике, например  $p_1 p_2$ . В этом случае достаточно заменить  $F^{\mu\nu}(p_k) \rightarrow \int F^{\mu\nu}(p_k) \delta(t - p_1 p_2) dt$  и не проводить интегрирования по  $t$ .

7.2. О д н о ф о т о н н ы й о б м е н (с л у ч а й ф и к с и р о в а н н о г о и м п у л ь с а). Обратимся теперь к случаю, когда импульс одной из частиц  $p_k$  для определенности  $p_1$  фиксирован (либо это начальная частица, либо мы хотим получить дифференциальное по  $p_1$  сечение). В этом случае суммирование ведется по всем состояниям частиц блока  $I$  (см. рис. 20), кроме частицы с импульсом  $p_1$  (для определенности начальной), для которой проводится усреднение по поляризациям. Вклад в сечение рассматриваемой диаграммы можно записать в виде [см. (7.2)]

$$d\sigma = \int (d^4 \Delta / \Delta^4) \Gamma_{\mu\nu}(q_i, p_1) \delta(\sum q_i - \Delta) \times \\ \times \int \mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k) \delta(p_1 + \Delta - \sum p_k) \prod_{k=2}^n d^3 p_k / [(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}]. \quad (7.19)$$

Здесь явно выделен пропагатор фотона ( $1/\Delta^4$ ), зависимость тензора блока  $II$  от  $p_1$  содержится только в потоке ( $p_1$  — начальная частица), множитель от усреднения по поляризациям  $p_1$  включен в  $\Gamma_{\mu\nu}(q_i, p_1)$ . После интегрирования по импульсам конечных частиц в (7.19) получается тензор, зависящий только от  $p_1$  и  $\Delta$ :

$$I^{\mu\nu}(p_1, \Delta) = \int \mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k) \delta(p_1 + \Delta - \sum p_k) \prod_{k=2}^n d^3 p_k / [(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}]. \quad (7.20)$$

Наиболее общий вид тензора  $I^{\mu\nu}(p_1, \Delta)$ , следующий из релятивистской и  $P$ -инвариантности:

$$I^{\mu\nu}(p_1, \Delta) = c_1 p_1^\mu \Delta^\nu + c_3 p_1^\nu \Delta^\mu + c_2 \Delta^\mu \Delta^\nu + c_4 p_1^\mu p_1^\nu + c_5 g^{\mu\nu}. \quad (7.21)$$

Условие калибровочной инвариантности

$$I^{\mu\nu} \Delta_\mu = I^{\mu\nu} \Delta_\nu = 0 \quad (7.22)$$

налагает следующие связи на коэффициенты;

$$\left. \begin{aligned} c_1 \Delta^2 + c_4 (p_1 \Delta) &= 0; & c_2 \Delta^2 + c_3 (p_1 \Delta) + c_5 &= 0; \\ c_1 (p_1 \Delta) + c_2 \Delta^2 + c_5 &= 0; & c_3 \Delta^2 + c_4 (p_1 \Delta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Откуда находим:

$$c_3 = c_1; \quad c_4 = -c_1 \Delta^2 / p_1 \Delta; \quad c_5 = -[c_2 \Delta^2 + c_1 (p_1 \Delta)]. \quad (7.24)$$

В результате тензор (7.21) приобретает вид

$$I^{\mu\nu}(p_1, \Delta) = c_1 (\Delta^2, p_1 \Delta) [p_1^\mu \Delta^\nu + p_1^\nu \Delta^\mu - p_1 \Delta g^{\mu\nu} - (\Delta^2 / p_1 \Delta) p_1^\mu p_1^\nu] + c_2 (\Delta^2, p_1 \Delta) (\Delta^\mu \Delta^\nu - g^{\mu\nu} \Delta^2). \quad (7.25)$$

Для того чтобы найти функции  $c_1$  и  $c_2$ , достаточно свернуть (7.20) с  $g^{\mu\nu}$  и  $p_1^\mu p_1^\nu$  и решить полученные уравнения. В итоге имеем:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 \Delta}{[(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2]^2} \{I_1 [(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2] + 3\Delta^2 I_2\}; \\ c_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 \Delta}{[(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2]^2} \{I_1 (p_1^2 / (p_1 \Delta)) [(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2] + \\ &\quad + I_2 (\Delta^2 p_1^2 / (p_1 \Delta) + 2p_1 \Delta)\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &\equiv I_1(\Delta^2, p_1 \Delta) = g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = \\ &= \int g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k) \delta(p_1 + \Delta - \sum_{k=2}^n p_k) \prod_{k=2}^n d^3 p_k / [(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}]; \\ I_2 &\equiv I_2(\Delta^2, p_1 \Delta) = p_{1\mu} p_{1\nu} I^{\mu\nu} = \\ &= \int p_{1\mu} p_{1\nu} \mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k) \delta(p_1 + \Delta - \sum_{k=2}^n p_k) \prod_{k=2}^n d^3 p_k / [(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Заметим, что при  $\Delta^2 = 0$   $\mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k)$  описывает процесс столкновения фотона с частицей с импульсом  $p_1$ . Поэтому тензор  $I^{\mu\nu}$  при  $\Delta^2 = 0$  имеет физический смысл: свертка  $I^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$  пропорциональна сечению фотонного процесса, усредненного по поляризациям фотона и частицы  $p_1$  и просуммированного по всем состояниям конечных частиц  $p_k$  ( $k = 2 \dots$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{ph} &= \frac{(2\pi)^4}{8(p_1 \Delta)} \cdot \frac{(-g^{\mu\nu} J_{\mu\nu})}{2S_1 + 1} \Big|_{\Delta^2=0} = \frac{(2\pi)^4}{4} \cdot \frac{c_1(0, p_1 \Delta)}{2S_1 + 1} = \\ &= -\frac{(2\pi)^4}{8(p_1 \Delta)} \cdot \frac{I_1}{2S_1 + 1} \Big|_{\Delta^2=0}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Используя выражения (7.25)–(7.27) для  $I^{\mu\nu}$  и свойства калибровочной инвариантности  $\Gamma_{\mu\nu}$  ( $\Gamma_{\mu\nu} \Delta^\nu = \Gamma_{\mu\nu} \Delta^\mu = 0$ ), формулу (7.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int \frac{d^4 \Delta}{\Delta^4} \delta(\sum q_i - \Delta) \left[ -c_1 \left( \frac{\Delta^2}{p_1 \Delta} \Gamma_2 + (p_1 \Delta) \Gamma_1 \right) - c_2 \Delta^2 \Gamma_1 \right] = \\ &= \int \frac{d^4 \Delta}{\Delta^4} \delta(\sum q_i - \Delta) \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 \Delta}{[(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2]^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ I_1 \left[ \frac{\Delta^2}{\rho_1 \Delta} \Gamma_2 + \frac{(\rho_1 \Delta)^2 - \rho_1^2 \Delta^2}{\rho_1 \Delta} \Gamma_1 \right] [(\rho_1 \Delta)^2 - \rho_1^2 \Delta^2] + \right. \\ \left. + I_2 \left[ \frac{3\Delta^4}{\rho_1 \Delta} \Gamma_2 + \frac{\Delta^2 [(\rho_1 \Delta)^2 - \rho_1^2 \Delta^2]}{\rho_1 \Delta} \Gamma_1 \right] \right\}, \quad (7.29)$$

где

$$\Gamma_1 = g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}; \quad \Gamma_2 = \rho_{1\mu} \rho_{1\nu} \Gamma^{\mu\nu}. \quad (7.30)$$

Найдем теперь функции  $I_1$  и  $I_2$  в простейших случаях. Если блок  $I$  описывает поглощение фотона  $\Delta$  частицей  $p_1$ , то

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{(0)} = J_{\mu\nu}^{(0)}(p_1, p_2) = e^2 (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu; \\ \mathcal{L}_{\mu\nu}^{(1/2)} = J_{\mu\nu}^{(1/2)*}(p_1, p_2) = e^2 \text{Sp} [(\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\nu] = \\ = 2 [J_{\mu\nu}^{(0)}(p_1, p_2) + e^2 (g_{\mu\nu} \Delta^2 - \Delta_\mu \Delta_\nu)], \quad (7.31)$$

где  $\Delta = -p_1 + p_2$  соответственно для скалярных и спинорных частиц [см. (7.9) и (7.10)]. В этом случае в (7.27) интегрирование ведется по  $d^3 p_2$ , в результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} I_1^{(0)} &= e^2 (4m^2 - \Delta^2) \frac{\delta[(\rho_1 + \Delta)^2 - m^2]}{(2\pi)^3} \vartheta(p_{10} + \Delta_0); \\ I_2^{(0)} &= e^2 \frac{(4m^2 - \Delta^2)^2}{4} \cdot \frac{\delta[(\rho_1 + \Delta)^2 - m^2]}{(2\pi)^3} \vartheta(p_{10} + \Delta_0); \\ I_1^{(1/2)} &= 4e^2 (2m^2 + \Delta^2) \frac{\delta[(\rho_1 + \Delta)^2 - m^2]}{(2\pi)^3} \vartheta(p_{10} + \Delta_0); \\ I_2^{(1/2)} &= 2e^2 m^2 (4m^2 - \Delta^2) \frac{\delta[(\rho_1 + \Delta)^2 - m^2]}{(2\pi)^3} \vartheta(p_{10} + \Delta_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Если блок  $I$  описывает рассеяние виртуального фотона на частице (виртуальный комптон-эффект) с последующим превращением виртуального фотона «во все возможные состояния» (см. рис. 21, где следует положить  $p_1 \rightarrow -p_1$ ), то блок превращения виртуального фотона можно взять из полученных выше результатов (см. рис. 20), представив  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  в виде

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{(S)} = K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)} F^{\rho\sigma}(k_n), \quad (7.33)$$

где  $k_n$  — импульсы частиц, в которые переходит виртуальный фотон (см. рис. 21);  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)}$  — тензор виртуального комптон-эффек-



та (оба фотона имеют массу) для скалярных (0) и спинорных (1/2) частиц:

$$K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0)}(p_1, p_2, \Delta, \Delta_1) = e^4 \left[ \frac{(2p_1 + \Delta)_\mu (2p_2 + \Delta_1)_\rho}{(p_1 + \Delta)^2 - m^2} + \right. \\ \left. + \frac{(2p_2 - \Delta)_\mu (2p_1 - \Delta_1)_\rho}{(p_1 - \Delta_1)^2 - m^2} - 2g_{\mu\rho} \right] \left[ \frac{(2p_1 + \Delta)_\nu (2p_2 + \Delta_1)_\sigma}{(p_1 + \Delta)^2 - m^2} + \right. \\ \left. + \frac{(2p_2 - \Delta)_\nu (2p_1 - \Delta_1)_\sigma}{(p_1 - \Delta_1)^2 - m^2} - 2g_{\nu\sigma} \right]; \quad m^2 = p_1^2; \quad (7.34)$$

$$K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_1, p_2, \Delta, \Delta_1) = e^4 \text{Sp} [(\hat{p}_2 + m) L_{\mu\rho} (\hat{p}_1 + m) \bar{L}_{\nu\sigma}]; \quad \left. \vphantom{K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}} \right\} \quad m^2 = p_1^2, \quad (7.35)$$

где

$$L^{\mu\rho} = \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{\Delta}_1 + m}{(p_1 - \Delta_1)^2 - m^2} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\hat{p}_1 + \hat{\Delta} + m}{(p_1 + \Delta)^2 - m^2} \gamma^\mu;$$

$$\bar{L}^{\mu\rho} = \gamma^0 L^{+\mu\rho} \gamma^0;$$

$$\Delta_1 = p_1 + \Delta - p_2 = \Sigma k_n. \quad (7.36)$$

Подставляя представление (7.33) в (7.20) и проводя суммирование по конечным состояниям частиц  $k_n$  с помощью формул (7.2), (7.5) и (7.6), получаем

$$I_{\mu\nu}^{(S)} = \int -g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)} f(\Delta_1^2) \delta(p_1 + \Delta - p_2 - \Delta_1) \frac{d^3 p_2 d^4 \Delta_1}{(2\pi)^6 2\varepsilon_{p_2}}. \quad (7.37)$$

Тензор  $I_{\mu\nu}$  выражается через величины  $I_1, I_2$  согласно формулам (7.25)–(7.27). Найдем теперь  $I_1, I_2$  для рассматриваемого случая. При сворачивании  $g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)}$  с  $g^{\mu\nu}, p_1^\mu p_1^\nu$ , получаем функции, зависящие от  $\Delta^2, \Delta_1^2, (p_1 + \Delta)^2 = \omega^2, (p_1 - \Delta_1)^2 = q^2$  (остальные скалярные произведения выражаются через эти инварианты с помощью закона сохранения  $p_1 + \Delta = \Delta_1 + p_2$ ):

$$\left. \begin{aligned} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)} &= e^4 A_1^{(S)}; \\ g^{\rho\sigma} p_1^\mu p_1^\nu K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)} &= e^4 A_2^{(S)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1^{(0)} &= \frac{1}{(\omega^2 - m^2)^2} [(2\omega^2 - \Delta_1^2 + 2m^2)(2\omega^2 - \Delta^2 + 2m^2)] - \\
 &\quad - \frac{2}{(\omega^2 - m^2)} [5\omega^2 + q^2 - 2\Delta^2 - 2\Delta_1^2 + 2m^2] + 8 + \\
 &\quad + \text{члены } (\omega^2 \leftrightarrow q^2) + \frac{1}{(\omega^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \times \\
 &\quad \times 2(\omega^2 + q^2 + 2m^2 - 2\Delta^2 - \Delta_1^2)(\omega^2 + q^2 + 2m^2 - 2\Delta_1^2 - \Delta^2); \\
 A_2^{(0)} &= \frac{1}{4(\omega^2 - m^2)^2} (2\omega^2 - \Delta_1^2 + 2m^2)(\omega^2 + 3m^2 - \Delta^2)^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{(\omega^2 - m^2)} (\omega^2 + 3m^2 - \Delta^2)(2\omega^2 + q^2 - 2\Delta^2 - \Delta_1^2 + m^2) + \\
 &\quad + 4m^2 + \frac{1}{4(q^2 - m^2)^2} (2q^2 - \Delta_1^2 + 2m^2) \times \\
 &\quad \times (2q^2 + \omega^2 - 2\Delta_1^2 - \Delta^2 + m^2)^2 - \frac{1}{q^2 - m^2} \times \\
 &\quad \times (q^2 + 3m^2 - \Delta_1^2)(2q^2 + \omega^2 - 2\Delta_1^2 - \Delta^2 + m^2) + \\
 &\quad + \frac{1}{2(\omega^2 - m^2)(q^2 - m^2)} (\omega^2 + q^2 + 2m^2 - 2\Delta^2 - \Delta_1^2) \times \\
 &\quad \times (\omega^2 + 3m^2 - \Delta^2)(\omega^2 + 2q^2 + m^2 - 2\Delta_1^2 - \Delta^2); \\
 A_1^{(1/2)} &= \frac{8}{(\omega^2 - m^2)^2} [-q^2\omega^2 + \Delta^2\Delta_1^2 + m^2(3\omega^2 + q^2 + 2\Delta^2 + 2\Delta_1^2 + \\
 &\quad + m^2)] + \text{члены } (q^2 \leftrightarrow \omega^2) + \frac{16}{(q^2 - m^2)(\omega^2 - m^2)} \times \\
 &\quad \times \{(\omega^2 + q^2)(\Delta^2 + \Delta_1^2) - (\Delta^2 + \Delta_1^2)^2 + \\
 &\quad + m^2[\omega^2 + q^2 + 2(m^2 - \Delta^2 - \Delta_1^2)]\}; \\
 A_2^{(1/2)} &= \frac{4m^2}{(\omega^2 - m^2)^2} \{q^2(\omega^2 - m^2) - \Delta^2\Delta_1^2 + \\
 &\quad + m^2(3\omega^2 + 4\Delta_1^2 - 2\Delta^2 + 5m^2)\} + \frac{4}{(q^2 - m^2)^2} \times \\
 &\quad \times \{-(q^2 - m^2)^2(\omega^2 - 3\Delta_1^2 - \Delta^2 + q^2 - 2m^2) + \\
 &\quad + (q^2 - m^2)[2\Delta_1^2(\omega^2 - \Delta^2) - 3\Delta_1^4 + m^2(\omega^2 - 2\Delta^2 + 8m^2)] - \\
 &\quad - \Delta_1^4(\omega^2 - \Delta^2 - \Delta_1^2) + m^2\Delta_1^2(\Delta^2 - \Delta_1^2) + \\
 &\quad + m^4(5\omega^2 - 5\Delta_1^2 + 5m^2 - 3\Delta^2)\} + \frac{8m^2}{(q^2 - m^2)(\omega^2 - m^2)} \times \\
 &\quad \times \{ (q^2 - m^2)(\omega^2 + 3\Delta_1^2 - \Delta^2 - q^2 + 4m^2) - 2\omega^2\Delta^2 + \\
 &\quad + \omega^4 + \Delta^4 - 2\Delta_1^4 + m^2(2\omega^2 - 4\Delta^2 + 5m^2) \}.
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

Выражения для  $A_{1,2}^{(0)}$  находятся непосредственно, при вычислении  $A_{1,2}^{(1/2)}$  следует сначала выполнить операцию свертки и упростить получающееся выражение, используя свойства  $\gamma$ -матриц, а затем

вычислять след. Подставляя (7.38) в (7.27), имеем

$$I_{1,2}^{(S)} = -e^4 \int A_{1,2}^{(S)} f(\Delta_1^2) \delta(p_1 + \Delta - p_2 - \Delta_1) d^3 p_2 d^4 \Delta_1 / [(2\pi)^6 2\varepsilon_{p_2}]. \quad (7.40)$$

Преобразуем теперь дифференциал  $d^3 p_2 / 2\varepsilon_{p_2}$  к инвариантным переменным. В системе, где  $\mathbf{p}_1 + \Delta = \mathbf{p}_2 + \Delta_1 = 0$ , интегрирование по азимутальному углу дает  $2\pi$ . В этой системе легко определяются все кинематические характеристики:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= (\omega^2 + m^2 - \Delta_1^2) / 2\omega; \quad \cos \vartheta = \\ &= (\Delta^2 + m^2 - 2\varepsilon_2 \Delta_0 - q^2) / 2 |\mathbf{p}_2| |\Delta|; \\ \Delta_0 &= (\omega^2 + \Delta^2 - m^2) / 2\omega; \quad |\Delta| = (1/2\omega) \sqrt{(\omega^2 - \Delta^2 - m^2)^2 - 4m^2 \Delta^2}; \\ \mathbf{p}_2 &\equiv |\mathbf{p}_2| = (1/2\omega) \sqrt{(\omega^2 - m^2 - \Delta_1^2)^2 - 4m^2 \Delta_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . С учетом полученных соотношений искомого преобразование просто провести следующим образом:

$$\begin{aligned} d^3 p_2 / 2\varepsilon_2 &= 2\pi \int (p_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2 d \cos \vartheta / 2\varepsilon_2) \delta(\Delta_1^2 - \omega^2 - 2\varepsilon_2 \omega - m^2) \times \\ &\times d\Delta_1^2 \delta(q^2 - m^2 - \Delta^2 + 2\varepsilon_2 \Delta_0 + 2|\mathbf{p}_2| |\Delta| \cos \vartheta) dq^2 = \\ &= \frac{\pi p_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_2 d\Delta_1^2 dq^2}{2\omega 2p_2 |\Delta|} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d\Delta_1^2 dq^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Delta^2 - m^2)^2 - 4m^2 \Delta^2}}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Принимая во внимание (7.42), можно переписать (7.40) в виде

$$\frac{dI_{1,2}^{(S)}}{dq^2 d\Delta_1^2} = -\frac{\alpha^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{A_{1,2}^{(S)} f(\Delta_1^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \Delta^2 - m^2)^2 - 4m^2 \Delta^2}}. \quad (7.43)$$

Пределы изменения переменной  $q^2$  при фиксированном  $\Delta_1^2$  просто определяются в системе, где  $\Delta + \mathbf{p}_1 = 0$ , в которой угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  может принимать любые значения, тогда из (7.41) следует:

$$q_{\text{мин}}^2 \leq q^2 \leq q_{\text{макс}}^2 = m^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_2 \Delta_0 \pm 2|\mathbf{p}_2| |\Delta|. \quad (7.44)$$

Все входящие сюда величины приведены в (7.41). Для определения пределов изменения  $\Delta_1^2$  учтем, что  $\Delta_1^2 = (\sum k_n)^2$ , поскольку  $k_{n_i} k_{n_j} \geq m_i m_j$ , то минимальное значение

$$\Delta_1^2_{\text{мин}} = (\sum m_n)^2. \quad (7.45)$$

Максимальное значение определяется из условия, что в системе  $\mathbf{p}_1 + \Delta = 0$  и  $\mathbf{p}_2^2 = \Delta_1^2 \geq 0$ , тогда из (7.41) следует:

$$\Delta_1^2_{\text{макс}} = (\omega - m)^2. \quad (7.46)$$

При выполнении интегрирования по  $q^2$  в (7.43), где  $A_{1,2}^{(S)}$

даются формулами (7.39), встречаются интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int dq^2 &= a/\omega^2; \quad \int q^2 dq^2 = \frac{a}{\omega^2} \cdot \frac{1}{2\omega^2} [-\omega^4 + (\Delta^2 + \Delta_1^2) \times \\ &\quad \times (\omega^2 - m^2) + 2m^2\omega^2 + \Delta_1^2 \Delta^2 + m^4]; \\ \int dq^2/(q^2 - m^2) &= \ln |(q_{\text{макс}}^2 - m^2)/(q_{\text{мин}}^2 - m^2)|; \\ \int dq^2/(q^2 - m^2)^2 &= a/[m^2(\omega^2 - m^2)^2 - \Delta^2 \Delta_1^2(\omega^2 + 3m^2 - \Delta^2 - \Delta_1^2)]. \end{aligned} \right\} (7.47)$$

Здесь

$$a = \sqrt{(\omega^2 - m^2 - \Delta^2)^2 - 4m^2 \Delta^2} \sqrt{(\omega^2 - m^2 - \Delta_1^2)^2 - 4m^2 \Delta_1^2}, \quad (7.48)$$

$q_{\text{макс}}^2$   
 $q_{\text{мин}}^2$  дается (7.44).

Как уже отмечалось [см. (7.28)], при  $\Delta^2 = 0$   $I_1^{(S)}$  определяет физическую величину, характеризующую взаимодействие фотона с заряженной частицей. Если  $f(\Delta_1^2) = \delta(\Delta_1^2) \vartheta(\Delta_{10})$ , то этой величиной является интегральное сечение комптон-эффекта. Из (7.43), куда следует подставить (7.39) и использовать (7.47), получаем при  $f(\Delta_1^2) = \delta(\Delta_1^2) \vartheta(\Delta_{10})$ ,  $\Delta^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} I_1^{(0)}|_{\Delta^2=0} &= [-8\rho_1 \Delta / (2\pi)^4] \{ (2\pi\alpha^2/m^2) [1/x^2 + \\ &+ (1 + 2x + 2x^2)/x^2(1 + 2x) - (1 + x) \ln(1 + 2x)/x^3] \} = \\ &= -[8\rho_1 \Delta / (2\pi)^4] \sigma_t^{(0)}; \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(1/2)}|_{\Delta^2=0} &= [-16\rho_1 \Delta / (2\pi)^4] \cdot [2\pi\alpha^2/m^2] \{ [(1 + x)/x^3] \times \\ &\times [2x(1 + x)/(1 + 2x) - \ln(1 + 2x)] + \ln(1 + 2x)/2x - \\ &- (1 + 3x)/(1 + 2x)^2 \} = [-16\rho_1 \Delta / (2\pi)^4] \sigma_t^{(1/2)}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

где  $x = p_1 \Delta / m^2$ ;  $\sigma_t^{(S)}$  — интегральные сечения комптон-эффекта на скалярной и спинорной частицах. Выражения (7.39), (7.43) и (7.47) для  $I_1$ ,  $I_2$  можно использовать при вычислении различных сечений, таких, как тормозное излучение, рождение пар фотоном на частице, рождение пар при столкновении.

Рассмотрим еще случай, когда начальная частица в блоке  $I$  фотон, так что блок  $I$  описывает превращение пары фотонов, один из которых реальный (импульс  $\Delta_1$ ,  $\Delta_1^2 = 0$ ), а другой виртуальный с импульсом  $\Delta$ , в пару частиц с импульсами  $p_1$ ,  $p_2$ . Сечение по-прежнему дается формулами (7.29), (7.30), (7.26) и (7.27) с заменой  $p_1 \rightarrow \Delta_1$ , и в качестве  $\mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k)$  следует подставить

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{(S)}(p_k) = (-1)^{2S+1} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)}(-p_1, p_2, \Delta, -\Delta_1) g^{\rho\sigma}, \quad (7.51)$$

где комптоновский тензор  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(S)}$  определяется (7.34) и (7.35), в которых следует заменить  $\Delta_1 \rightarrow -\Delta_1$ ,  $p_1 \rightarrow -p_1$ . При вычислении  $I_{1,2}$  согласно формуле (7.27) опять удобно использовать си-

стему  $\Delta + \Delta_1 = 0$ , причем интегрирование (с учетом  $\delta$ -функции) сводится к интегрированию по полярному углу, выполняя которое, получаем:

$$\left. \begin{aligned} I_1^{(0)} &= [-\alpha^2/(2\pi)^3] [8/(\Delta_1 \Delta)^2] \beta_0 \times \\ &\times \{[(\Delta^2 - 4m^2)/4] [(\omega^2 - 2m^2) L_1 - \omega^2] + (\Delta \Delta_1)^2\}; \\ I_2^{(0)} &= [-\alpha^2/(2\pi)^3] 2\beta_0 [3\omega^2 - L_1 (\omega^2 + 2m^2)]; \end{aligned} \right\} (7.52)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1^{(1/2)} &= [\alpha^2/(2\pi)^3] [8/(\Delta_1 \Delta)^2] \beta_0 \times \\ &\times \{ \omega^2 (\Delta^2 + 2m^2) + 2 (\Delta_1 \Delta)^2 - L_1 [\omega^2 (\Delta^2 + 2m^2) + \\ &+ 2 (\Delta_1 \Delta)^2 - 4m^4 - 2m^2 \Delta^2] \}; \\ I_2^{(1/2)} &= [\alpha^2/(2\pi)^3] 8 \beta_0 (\omega^2 - 2m^2 L_1), \end{aligned} \right\} (7.53)$$

где

$$L_1 = (1/\beta_0) \ln[(1 + \beta_0)/(1 - \beta_0)]; \quad \beta_0 = \sqrt{(\omega^2 - 4m^2)/\omega^2};$$

$$\omega^2 = (\Delta + \Delta_1)^2 = \Delta^2 + 2\Delta\Delta_1. \quad (7.54)$$

При  $\Delta^2 = 0$  получаем

$$I_1^{(S)} |_{\Delta^2=0} = [-16\Delta\Delta_1/(2\pi)^4] \sigma_f^{(S)}. \quad (7.55)$$

Здесь  $\sigma_f^{(S)}$  — полное сечение превращения пары фотонов в пару частиц со спином  $S$  и массой  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(0)} &= [\pi\alpha^2/2\omega^2] \{ \sqrt{1 - m^2/\omega^2} (1 + m^2/\omega^2) - \\ &- (m^2/\omega^2) (2 - m^2/\omega^2) \ln(\omega/m + \sqrt{\omega^2/m^2 - 1}) \}; \\ \sigma^{(1/2)} &= [\pi\alpha^2/\omega^2] \{ (2 + 2m^2/\omega^2 - m^4/\omega^4) \times \\ &\times \ln(\omega/m + \sqrt{\omega^2/m^2 - 1}) - \sqrt{1 - m^2/\omega^2} (1 + m^2/\omega^2) \}, \end{aligned} \right\} (7.56)$$

где  $\omega^2 = (\Delta\Delta_1)/2 = \omega^2/4$ . Выражения (7.52) и (7.53) можно использовать при вычислении сечений рождения пар фотоном и сечений тормозного излучения (в последнем случае  $\Delta_1$  — конечный импульс, следовательно, необходимо заменить  $\Delta_1 \rightarrow -\Delta_1$ , причем полученные формулы представляют сечения, дифференциальные по  $\Delta_1$ ).

7.3. Д в у х ф о т о н н ы й о б м е н. Перейдем теперь к более сложному случаю двух промежуточных фотонов (рис. 22), где все частицы  $p_k$  — конечные. Вклад этой диаграммы в сечение, просуммированный по состояниям частиц  $p_k$ , можно записать в виде

$$d\sigma = T^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(q_i) B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2) (1/\Lambda_1^4 \Lambda_2^4). \quad (7.57)$$

где

$$B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \int M_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(\rho_k, \Lambda_1, \Lambda_2) \times \\ \times \delta(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Sigma\rho_k) \prod_k d^3\rho_k / (2\pi)^3 2\varepsilon_{\rho_k}. \quad (7.58)$$

Здесь  $M_{\rho\sigma\rho'\sigma'}$  — тензор, описывающий блок  $A$  диаграммы и удовлетворяющий условиям калибровочной инвариантности:

$$M_{\rho\sigma\rho'\sigma'} \Lambda_1^\sigma = M_{\rho\sigma\rho'\sigma'} \Lambda_1^{\sigma'} = \\ = M_{\rho\sigma\rho'\sigma'} \Lambda_2^\rho = M_{\rho\sigma\rho'\sigma'} \Lambda_2^{\rho'} = 0; \quad (7.59)$$

$\Lambda_1, \Lambda_2$  — импульсы фотонных линий. Общее выражение для  $B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}$ , выписанное с учетом релятивистской и  $P$ -инвариантностей, содержит 43 члена, каждый из которых состоит из коэффициента, умноженного на тензор, построенный из векторов задачи. Условия калибровочной инвариантности накладывают 33 связи на коэффициенты [ср. (7.23)], с учетом которых все коэффициенты выражаются через 10; требование

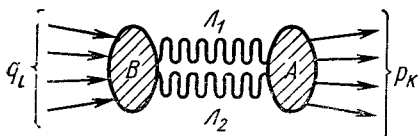


Рис. 22. Диаграмма двухфотонного перехода.

$T$ -инвариантности сводит число независимых коэффициентов к 8. Можно, однако, записать общий вид калибровочно-инвариантного тензора, не решая соответствующих уравнений для коэффициентов, если сразу использовать калибровочно-инвариантные комбинации (см., например, [125]).

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} D &= (\Lambda_1 \Lambda_2)^2 - \Lambda_1^2 \Lambda_2^2; & \Delta^2 &= (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2; \\ K_1^\mu &= \frac{\Lambda_1^\mu (\Lambda_1 \Lambda_2) - \Lambda_2^\mu \Lambda_1^2}{\sqrt{D}}; & K_2^\mu &= \frac{\Lambda_2^\mu (\Lambda_1 \Lambda_2) - \Lambda_1^\mu \Lambda_2^2}{\sqrt{D}}; \\ R^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + [\Lambda_2^2 \Lambda_1^\mu \Lambda_1^\nu + \Lambda_1^2 \Lambda_2^\mu \Lambda_2^\nu - (\Lambda_1 \Lambda_2) (\Lambda_1^\mu \Lambda_2^\nu + \Lambda_2^\mu \Lambda_1^\nu)] / D. \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

Легко видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 K_2 &= \Lambda_2 K_1 = \sqrt{D}; & K_1 K_2 &= \Lambda_1 \Lambda_2; & K_{1,2}^2 &= -\Lambda_{1,2}^2; \\ \Lambda_1 K_1 &= \Lambda_2 K_2 = 0; & R_{\mu\nu} \Lambda_{1,2}^\mu &= R_{\mu\nu} \Lambda_{1,2}^\nu = 0; \\ R_{\mu\nu} R^{\nu\sigma} &= R_{\mu}^\sigma; & R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 2; \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Используя (7.60), (7.61), можно построить 8 калибровочно-инвариантных взаимно ортогональных тензоров:

$$\left. \begin{aligned} S_1^{\rho\rho'\sigma'\sigma'} &= R^{\rho\rho'} R^{\sigma\sigma'}; & S_2^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= R^{\rho\sigma} R^{\rho'\sigma'} - R^{\rho\sigma'} R^{\rho'\sigma}; \\ S_3^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= [R^{\rho\sigma} R^{\rho'\sigma'} + R^{\rho\sigma'} R^{\rho'\sigma} - R^{\rho\rho'} R^{\sigma\sigma'}]/2; \\ S_4^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= \Delta^2 K_2^\rho K_2^{\rho'} R^{\sigma\sigma'}/D; & S_5^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= \Delta^2 K_1^\sigma K_1^{\sigma'} R^{\rho\rho'}/D; \\ S_6^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= \Delta^2 [R^{\rho\sigma} K_2^{\rho'} K_1^{\sigma'} + R^{\rho'\sigma'} K_2^\rho K_1^\sigma]/D; \\ S_7^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= \Delta^2 [R^{\rho\sigma'} K_2^{\rho'} K_1^\sigma + R^{\rho'\sigma} K_2^\rho K_1^{\sigma'}]/D; \\ S_8^{\rho\sigma\rho'\sigma'} &= \Delta^4 K_2^\rho K_2^{\rho'} K_1^\sigma K_1^{\sigma'}/D^2 \end{aligned} \right\} (7.62)$$

по которым разлагается тензор  $B^{\rho\sigma\rho'\sigma'}$

$$B^{\rho\sigma\rho'\sigma'} = \sum_{i=1}^8 B_i S_i^{\rho\sigma\rho'\sigma'}, \quad (7.63)$$

причем очевидно, что

$$B_i = \frac{B_{\rho\sigma\rho'\sigma'} S_i^{\rho\sigma\rho'\sigma'}}{S_{i\rho\sigma\rho'\sigma'} S_i^{\rho\sigma\rho'\sigma'}}. \quad (7.64)$$

Формулы (7.60)—(7.64) решают задачу о нахождении тензора  $B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}$ . При  $\Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = 0$  тензор  $B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}$  пропорционален сечению процесса  $\gamma + \gamma \rightarrow \Sigma p_k$ . Усредняя по поляризациям фотонов, получаем

$$d\sigma_{\gamma\gamma} = (2\pi)^4 B_1/4 (\Lambda_1 \Lambda_2). \quad (7.65)$$

Тензор  $B_{\rho\sigma\rho'\sigma'}$  можно использовать при вычислении сечений многих процессов.

В случае, когда блок  $A$  (см. рис. 22) представляет собой превращение двух фотонов в пару частиц со спином  $1/2$ ,  $M_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_k, \Lambda_1, \Lambda_2) = -K_{\rho\rho'\sigma\sigma'}^{(1/2)}(-p_1, p_2, \Lambda_2, -\Lambda_1)$  [см. (7.35)], интегрирование по конечным состояниям родившейся пары дает [15] (см. также [126]):

$$B_i = (\alpha^2/2\pi^3) \beta b_i, \quad (7.66)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\Delta^2 - 4m^2}{\Delta^2}}; \quad b_1 = -1 - \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{g} - \frac{\Delta^2 (m^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)}{D} - \frac{3\Delta^4 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{4D^2} + \frac{L}{4(\Lambda_1 \Lambda_2)} \left[ \frac{3\Delta^4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^4}{2D^2} + \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{D} \times \right. \\ \left. \times (\Delta^2 + 2\Lambda_1^2 + 2\Lambda_2^2 + 4m^2) + \Delta^4 + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)^2 + 4m^2 (\Delta^2 - 2m^2) \right];$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -1 - \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{g} + \frac{2\Delta^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)}{D} + (\Lambda_1 \Lambda_2) \left( 1 - \frac{\Delta^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)}{D} \right) L; \\
b_3 &= -\frac{3\Delta^4 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{4D^2} - \frac{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)^2 + 2m^2 \Delta^2}{2D} + \\
&+ \frac{L}{(\Lambda_1 \Lambda_2)} \left[ \frac{3\Delta^4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^4}{8D^2} + \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 (2m^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)}{2D} + \right. \\
&\quad \left. + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + 2m^2 (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 - m^2) \right]; \\
b_4 &= -1 - \frac{3\Delta^2 \Lambda_1^2}{2D} - \frac{\Delta^2 \Lambda_1^4}{g} + \frac{L}{2\Delta^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)} \times \\
&\times \left[ \frac{3\Delta^4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^2}{2D} + \Delta^2 \Lambda_1^2 (\Delta^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + 4m^2 (\Lambda_1 \Lambda_2) \times \right. \\
&\times (\Lambda_1^2 + (\Lambda_1 \Lambda_2)) + 2m^2 \Lambda_1^2 (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) \left. \right]; \quad b_5 = b_4 (\Lambda_1^2 \leftrightarrow \Lambda_2^2); \\
b_{6,7} &= -2 + \frac{3\Delta^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)}{2D} \pm \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{g} + \frac{L}{4(\Lambda_1 \Lambda_2)} \times \\
&\times \left[ -2(\Lambda_1 \Lambda_2) (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + 2m^2) \pm 2\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - \frac{3\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)}{D} \right]; \\
b_8 &= -2 - \frac{\Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2}{g} + \frac{L}{2(\Lambda_1 \Lambda_2)} (2(\Lambda_1 \Lambda_2)^2 + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2);
\end{aligned} \tag{7.67}$$

здесь

$$g = \Delta^2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + 4m^2 D; \quad L = \frac{1}{\beta \sqrt{D}} \ln \frac{(\Lambda_1 \Lambda_2) + \beta \sqrt{D}}{(\Lambda_1 \Lambda_2) - \beta \sqrt{D}}. \tag{7.68}$$

## § 8. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОТОНОВ

8.1. Полусное приближение для однофотонного обмена (ковариантный подход). Рассмотрим процесс изображенный на диаграмме рис. 23, а,  $p_1, q_1$  — импульсы сталкивающихся частиц;  $p_2 \dots p_n$  — импульсы образующихся частиц. При относительной скорости начальных частиц, близкой к скорости света, т. е. при выполнении условия

$$(p_1 q_1)^2 \gg p_1^2 q_1^2 \tag{8.1}$$

можно связать сечение этого процесса с сечением фотопроцесса\* (рис. 23, б), т. е. с реакцией, проходящей при столкновении фотона с импульсом  $\Delta$  с частицей  $p_1$ .

\* Основная идея метода была высказана Ферми, сам метод был разработан Вейцекером [38] и Вильямсом [39]. В ковариантной формулировке метод обсуждался в работах [4, 51, 53, 86].



Вклад в сечение диаграммы рис. 23, а, усредненный по поляризациям начальных частиц и просуммированный по поляризациям конечных, а также проинтегрированный по импульсам частиц

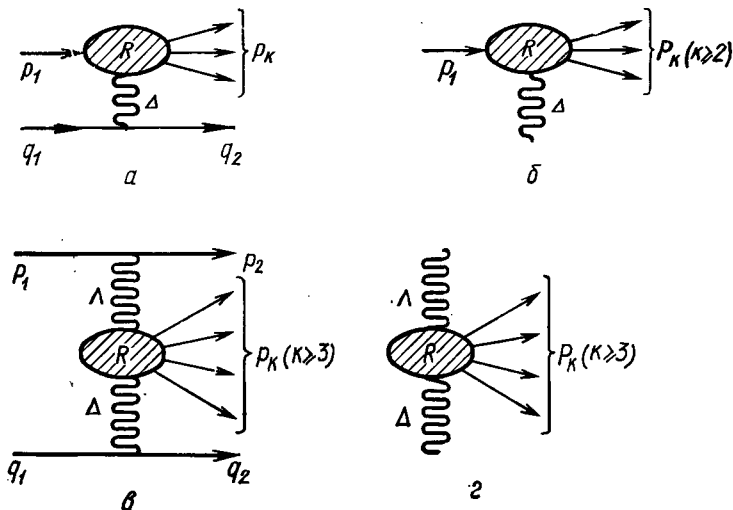


Рис. 23. Диаграмма однофотонного обмена, описываемая методом эквивалентных фотонов (а), и соответствующая диаграмма фотопроцесса (б), диаграмма, описываемая двойным методом эквивалентных фотонов (в) и связанная с ней диаграмма фотопроцесса (г).

$p_k$  ( $k \geq 2$ ), как было показано в предыдущем параграфе, можно представить в виде [ср. (7.29)]:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 e^2}{4(2S_{p_1} + 1) \sqrt{(p_1 q_1)^2 - p_1^2 q_1^2}} \times \int \frac{d^4 \Delta}{\Delta^4} \delta(q_1 - q_2 - \Delta) \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{q_2}} A, \quad (8.2)$$

где

$$A = \frac{J_1 \Delta^2}{(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2} \{2\nu^2 - 2\nu(p_1 \Delta) - p_1^2(2q_1^2 - \Delta^2/2) + 2S_{q_1} [(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2] + 2q_1^2(p_1 \Delta^2)/\Delta^2\} + \frac{J_2 \Delta^4}{[(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2]^2} \times \{6\nu(\nu - (p_1 \Delta)) + (p_1 \Delta)^2 - p_1^2(2q_1^2 - \Delta^2/2) + 2q_1^2(p_1 \Delta^2)/\Delta^2\}. \quad (8.3)$$

Здесь  $\nu = p_1 q_1$ ,  $S_{p_1}$ ,  $S_{q_1}$  — спины (0 или 1/2) начальных частиц;  $I_{1,2}$  определены формулами (7.27), причем тензор  $\mathcal{L}^{\mu\nu}$  нормиро-

ван так, что выполняется (7.28); использован явный вид тензора  $\Gamma^{\mu\nu}$ :

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{(2\pi)^4}{4(2S_{p_1} + 1)(2S_{q_1} + 1)} \cdot \frac{J^{\mu\nu}(q_1, q_2)}{\sqrt{v^2 - p_1^2 q_1^2}} \cdot \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{q_2}}, \quad (8.4)$$

где  $J^{\mu\nu}$  — токовый тензор (7.31).

Перейдем в (8.2) к ковариантным переменным  $s_1 = (p_1 + \Delta)^2 = p_1^2 + 2p_1\Delta + \Delta^2$  и  $\Delta^2$ . Эта операция и определение области изменения  $s_1$  и  $\Delta^2$  содержатся в Приложении Г. Выполняя тривиальное интегрирование по азимутальному углу вектора  $q_1$ , получаем

$$d^3 q_2 / 2\varepsilon_{q_2} = \pi ds_1 d\Delta^2 / 4 \sqrt{v^2 - p_1^2 q_1^2}, \quad (8.5)$$

причем

$$(\sqrt{s} - \sqrt{q_1^2})^2 \geq s_1 \geq M^2; \quad |\Delta^2|_{\text{макс}} \geq |\Delta^2| \geq |\Delta^2|_{\text{мин}};$$

$$|\Delta^2|_{\text{макс}} = \{2(v^2 - p_1^2 q_1^2) - (s_1 - p_1^2)(v - q_1^2) \pm [(2(v^2 - p_1^2 q_1^2) - (s - p_1^2)(v - q_1^2))^2 - q_1^2 s (s_1 - p_1^2)^2]^{1/2}\} / s, \quad (8.6)$$

где  $M^2 = (\sum_{k>2} m_k)^2$ ;  $s = (p_1 + q_1)^2$ . Мы будем считать, что  $M^2 \geq p_1^2$  (иначе частица  $p_1$  нестабильна). Из (8.6) следует, что процесс, изображенный на рис. 23, а, возможен лишь при  $v \geq v_{th}$ :

$$v_{th} = [M^2 - p_1^2 + 2\sqrt{q_1^2} M] / 2. \quad (8.7)$$

В дальнейшем не будем касаться пороговой области, а ограничимся случаем

$$(2v - M^2 + p_1^2)^2 \gg q_1^2 M^2. \quad (8.8)$$

Рассмотрим сечение  $d\sigma/ds_1 d\Delta^2$  в области изменения  $s_1$ , определяемой неравенством:

$$(2v - s_1 + p_1^2)^2 \gg q_1^2 s_1, \quad (8.9)$$

[ср. (8.8)], напомним, что  $s_1 \geq M^2$ . Из (8.6) и (8.9) следует, что в этом случае

$$|\Delta^2|_{\text{макс}} = 4v(v - \eta) / s; \quad |\Delta^2|_{\text{мин}} = q_1^2 \eta^2 / (v - \eta)v; \quad (8.10)$$

$$|\Delta^2|_{\text{макс}} \gg |\Delta^2|_{\text{мин}},$$

где  $s_1 - p_1^2 = 2\eta$ . При значениях  $|\Delta^2|$ , удовлетворяющих условию

$$|\Delta^2| \ll \kappa^2; \quad \kappa^2 = \min\{\eta^2/s_1, |\Delta^2|_{\text{макс}}\}, \quad (8.11)$$

$(p_1 \Delta)^2 - p_1^2 \Delta^2 \approx \eta^2$  и выражение для  $A$  (8.3) существенно упрощается:

$$A = \frac{2I_1 \Delta^2}{\eta^2} [v(v-\eta) + S_{q1} \eta^2 + q_1^2 \eta^2 / \Delta^2] + \frac{I_2 \Delta^4}{\eta^4} [6v(v-\eta) + \eta^2 + 2q_1^2 \eta^2 / \Delta^2]. \quad (8.12)$$

Рассмотрим теперь соотношение между величинами  $I_1$  и  $I_2$ . Из вывода их [см. (7.27)] ясно, что они конечны при  $\Delta^2 = 0$ . Кроме того, они зависят от  $s_1$ ,  $\Delta^2$ , но не от  $v$ . Поэтому можно считать, что  $I_2 \lesssim I_1 s_1$  (отношение  $I_2/I_1$  имеет размерность квадрата массы, а  $s_1$  — наибольший квадрат массы, имеющийся в нашем распоряжении). Тогда в области, определяемой неравенствами (8.9)—(8.11), членом с  $I_2$  в (8.12) можно пренебречь.

Мы не учли, однако, то обстоятельство, что в коэффициенте перед  $I_1$  в (8.12) при значениях  $|\Delta^2|$ , близких к  $|\Delta^2|_{\text{мин}}$ , имеет место сокращение между первым и последним членами. Поэтому сделанные пренебрежения справедливы лишь при исключении области, близкой к  $|\Delta^2|_{\text{мин}}$ , а именно при выполнении условия

$$|\Delta^2| - |\Delta^2|_{\text{мин}} \gg |\Delta^2|_{\text{мин}} q_1^2 s_1 / 4(v-\eta)^2. \quad (8.13)$$

При выполнении неравенства (8.9) исключаемая область очень узкая и не дает вклада в интегральное по  $\Delta^2$  сечение.

При условиях (8.9), (8.11), (8.13) сечение (8.2) можно записать в виде

$$d\sigma = (\alpha/\pi) [d\Delta^2 d\eta / (-\Delta^2 \eta)] [1 - \eta/v + S_{q1} \eta^2/v^2 + q_1^2 \eta^2/(v^2 \Delta^2)] \times \times \{ -(2\pi)^4 I_1 / [8\eta (2S_{p1} + 1)] \}. \quad (8.14)$$

При  $\Delta^2 = 0$  выражение в фигурных скобках равно сечению фотопроцесса [см. рис. 23, б и (7.28)]. Если зависимостью  $I_1$  от  $\Delta^2$  пренебречь, что можно сделать при  $|\Delta^2| \ll m_{ef}^2$ , где масса  $m_{ef}$  зависит от характера процесса, то формула (8.14) приобретает вид

$$d\sigma = (\alpha/\pi) [d\Delta^2 d\eta / (-\Delta^2 \eta)] [1 - \eta/v + S_{q1} \eta^2/v^2 + + q_1^2 \eta^2/(v^2 \Delta^2)] \sigma_\gamma(\eta), \quad (8.15)$$

где  $\sigma_\gamma(\eta)$  — сечение фотопроцесса. Отметим, что формула (8.14) имеет более широкую область применимости, чем (8.15).

Мы рассматривали сечение  $d\sigma/d\Delta^2 d\eta$ . Перейдем теперь к интегральному сечению. Здесь важным является вопрос о поведении функций  $I_{1,2}$  при  $\Delta^2 \neq 0$ . Предположим, что они не растут с ростом  $|\Delta^2|$ . Тогда интегрируя (8.14), можно получить главный логарифмический вклад в сечение. Здесь следует различать следующие

варианты. Если  $m_{ef}^2 \gtrsim \kappa^2$ , то можно воспользоваться непосредственно (8.15):

$$d\sigma = (\alpha/\pi) (d\eta/\eta) \ln (|\Delta^2|_{ef}/|\Delta^2|_{\min}) (1 - \eta/v + S_{q_1} \eta^2/v^2) \sigma_\nu(\eta), \quad (8.16)$$

где  $|\Delta^2|_{ef} = \kappa^2$ . Если  $m_{ef}^2 \ll \kappa^2$ , а в области  $|\Delta^2| \gtrsim m_{ef}^2$  функция  $I_1$  падает так быстро, что интеграл по этой области не дает большого логарифма, то получим снова (8.16), где надо полагать  $|\Delta^2|_{ef} = m_{ef}^2$ . Если же область  $|\Delta^2| \gtrsim m_{ef}^2$  дает в сечении большие логарифмы, то сечение  $d\sigma$  не выражается через  $\sigma_\nu(\eta)$  и необходимо знать конкретный вид  $I_1$ .

Проинтегрировав (8.16) по  $\eta$ , получим логарифмически главный вклад в полное сечение, если основной вклад в интеграл по  $\eta$  дает область, удовлетворяющая (8.9).

Сечение в форме (8.16) составляет основной результат *метода эквивалентных фотонов*, название которого обусловлено тем, что электромагнитное поле быстро движущейся частицы близко по своим свойствам к полю световой волны. Обычно принято рассматривать случай, когда  $\eta/v \ll 1$ , хотя метод [в форме (8.16)] справедлив и при  $\eta/v \sim 1$ .

В качестве примера рассмотрим случай, когда блок  $R$  на рис. 23, а описывает рождение пары частиц с массой  $m$  и спинами 0 или  $1/2$  двумя фотонами, один из которых реальный ( $p_1^2 = 0$ ), а второй — виртуальный ( $\Delta^2 < 0$ ). Здесь ситуация достаточно проста: поскольку  $I_1$  зависит только от  $s_1$ ,  $\Delta^2$  и  $m^2$  ( $s_1 \geq 4m^2$ ), то зависимость  $I_1$  от  $\Delta^2$  можно пренебречь во всяком случае до  $\Delta^2 \ll m^2$ . В этом можно убедиться и непосредственно, так как функции  $I_{1,2}$  для рассматриваемого случая приведены выше (7.52), (7.53), где следует положить  $\Delta_1 \rightarrow p_1$ ,  $\omega^2 \rightarrow 2\eta$ . Из этих формул следует, что на самом деле зависимость  $I_1$  от  $\Delta^2$  можно пренебречь при  $|\Delta^2| \ll \eta$ , т. е.  $m_{ef}^2 = \eta$ , так что  $m_{ef}^2 \geq \kappa^2$  (для этого случая  $\kappa^2 = \min(\eta, 4v \times (v - \eta)/(2v + q_1^2))$ ). Поэтому дифференциальное по  $\eta$  сечение дается (8.16), причем  $|\Delta^2|_{ef} = \kappa^2$ , а  $\sigma_\nu(\eta)$  определено формулой (7.56). Рассмотрим теперь различные соотношения между массами — случаи  $q_1^2 \gtrsim m^2$  и  $q_1^2 \ll m^2$ . В первом случае условие (8.8) означает, что при  $v \gg m^2$  верхний предел по  $\eta$  (8.6) значительно превышает нижний, а так как  $\sigma_\nu(\eta) \sim 1/\eta$ , то в интегральное сечение основной вклад дает область  $\eta \sim 2m^2$ , в которой неравенство (8.9) выполняется. В этом случае в (8.16) можно пренебречь членами  $\eta/v$ ,  $(\eta/v)^2$  и интеграл по  $\eta$  брать в пределах  $2m^2 \leq \eta < \infty$ . В результате получим независимо от спина  $S_{q_1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(1/2)} &= (14\alpha^3/9m^2) \ln(v^2/q_1^2 m^2); \\ \sigma^{(0)} &= (2\alpha^3/9m^2) \ln(v^2/q_1^2 m^2), \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

индекс в сечении  $\sigma^{(S_f)}$  обозначает спин частиц пары. В случае  $q_1^2 \ll m^2$  ситуация существенно меняется. Выполнение неравенства (8.8) отнюдь не означает, что  $v \gg m^2$ . Более того, допускается, что  $v - 2m^2 \ll m^2$ , т. е. пороговая (в масштабе  $m^2$ ) область [в ма-

сштабе массы  $q_1^2$  эта область лежит, естественно, далеко от порога, так как  $(v - 2m^2)^2 \gg q_1^2 m^2$ . В этой области  $\eta - 2m^2 \ll 2m^2$ , поскольку  $(\sqrt{2v + q_1^2} - \sqrt{q_1^2})^2 \geq 2\eta \geq 4m^2$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\gamma^{(0)} &= [\pi\alpha^2/\eta] \sqrt{(\eta - 2m^2)/\eta}; & \sigma_\gamma^{(1/2)} &= 2\sigma_\gamma^{(0)}; \\ \kappa^2 &= 2(v - \eta). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Основной вклад в полное сечение дает область  $v - \eta \sim v - 2m^2$ , в которой неравенство (8.9) выполняется. Проводя, с учетом сказанного выше, интегрирование в (8.16), получаем в рассматриваемой области:

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= (2\alpha^3/15m^2) [(v/2m^2 - 1)^{5/2} + 5S_{q_1} (v/2m^2 - 1)^{3/2}/2] \times \\ &\times \ln [(v - 2m^2)^2/(q_1^2 m^2)]; & \sigma^{(1/2)} &= 2\sigma^{(0)}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

В отличие от (8.17) этот результат существенно зависит от спина  $s_{q_1}$ .

В области же  $v \gg m^2$  результат естественно совпадает с (8.17). Промежуточная область  $v$  также может быть рассмотрена, однако результат для нее получается более громоздкий, и мы не будем на этом останавливаться.

Обратимся теперь к важному частному случаю процесса рис. 23, а, изображенному на рис. 23, в. В этом случае сечение (8.15) можно подвергнуть дальнейшим преобразованиям с тем, чтобы сечение процесса рис. 23, в выразить через сечение фотопроцесса  $\sigma_{\gamma\gamma}$  рис. 23, г. С этой целью можно сечение  $\sigma_\gamma$  в (8.15) выразить по аналогии с самой формулой (8.15) через  $\sigma_{\gamma\gamma}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= (\alpha/\pi)^2 [1 - \eta/v + S_{q_1} \eta^2/v^2 + q_1^2 \eta^2/(v^2 \Delta^2)] \times \\ &\times [1 - \chi/\eta + S_{p_1} \chi^2/\eta^2 + p_1^2 \chi^2/(2\eta^2 \Delta^2)] \frac{d\Delta^2}{-\Delta^2} \times \\ &\times \frac{d\Lambda^2}{-\Lambda^2} \cdot \frac{d\eta}{\eta} \cdot \frac{d\chi}{\chi} \sigma_{\gamma\gamma}(\chi), \end{aligned} \quad (8.20)$$

где  $\chi = (\Delta + \Lambda)^2/2 \approx (\Delta\Lambda)$ . Область применимости этой формулы ограничена неравенствами (8.8), (8.9), (8.11), (8.13) и аналогичными им:

$$\left. \begin{aligned} (2\eta - M'^2)^2 &\gg p_1^2 M'^2; & (\eta - \chi)^2 &\gg p_1^2 \chi; \\ |\Lambda|^2 &\ll \chi'^2; & \chi'^2 &= \min(\chi, |\Lambda^2|_{\max}); \\ |\Lambda^2| - |\Lambda^2|_{\min} &\gg |\Lambda^2|_{\min} p_1^2 \chi/(\eta - \chi)^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M' &= \sum_{k>3} m_k; & |\Lambda^2|_{\min} &= p_1^2 \chi^2/[\eta(\eta - \chi)]; \\ & & |\Lambda^2|_{\max} &= 4\eta(\eta - \chi)/(p_1^2 + 2\eta). \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Проводя в (8.20) интегрирование по  $\Delta^2$ ,  $\Lambda^2$ , получаем аналог формулы (8.16):

$$d\sigma = (\alpha/\pi)^2 (1 - \eta/v + S_{q_1} \eta^2/v^2) (1 - \chi/\eta + S_{p_1} \chi^2/\eta^2) \times \\ \times \frac{d\eta}{\eta} \cdot \frac{d\chi}{\chi} \cdot \ln [|\Delta^2|_{ef}/|\Delta^2|_{\min}] \ln [|\Lambda^2|_{ef}/|\Lambda^2|_{\min}] \sigma_{\gamma\gamma}(\chi). \quad (8.23)$$

8.2. Полюсное приближение для однофотонного обмена (нековариантный подход). Можно дать и другой вывод соотношения, связывающего сечение процесса рис. 23, а с сечением фотопроцесса рис. 23, б. Сечение процесса, изображенного на рис. 23, а, дается формулами (7.19), (8.4). Рассмотрим систему, где частица  $q_1$  является ультрарелятивистской [например, в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ , если такая существует:  $p_1^2 \neq 0$ ]. В силу калибровочной инвариантности тензора  $\mathcal{L}^{\mu\nu}$  к токовому тензору  $J^{\mu\nu}$  можно добавлять члены, пропорциональные  $\Delta^\mu$ ,  $\Delta^\nu$ , при этом выражение (7.19) не меняется. Воспользовавшись этим, приведем токовый тензор (8.4) к виду

$$J^{\mu\nu}(q_1, q_2)/(2S_{q_1} + 1) \rightarrow e^2 [4Q^\mu Q^\nu + 2S_{q_1} \Delta^2 q^{\mu\nu}], \quad (8.24)$$

где величина  $Q^\mu = q_1^\mu - (q_{10}/\Delta_0) \Delta^\mu$  имеет следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= 0; \quad Q_{\parallel} = |\mathbf{q}_1| - (q_{10}/\Delta_0) \Delta_{\parallel} = \\ &= \frac{q_{10}^2 \Delta_{\perp}^2 - q_1^2 \Delta_0 (2q_{10} - \Delta_0)}{\Delta_0 [|\mathbf{q}_1| (q_{10} - \Delta_0) + q_{10} \sqrt{(q_{10} - \Delta_0)^2 - q_1^2 - \Delta_{\perp}^2}]}; \\ Q_{\perp} &= (-q_{10}/\Delta_0) \Delta_{\perp}; \quad \Delta_{\parallel} = \frac{\Delta_0 (2q_{10} - \Delta_0) + \Delta_{\perp}^2}{|\mathbf{q}_1| + \sqrt{(q_{10} - \Delta_0)^2 - q_1^2 - \Delta_{\perp}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Здесь  $Q_{\parallel} = Q_z$ ;  $\mathbf{Q}_{\perp} (Q_x, Q_y)$  — компоненты вектора  $\mathbf{Q}$ , параллельные и перпендикулярные вектору  $\mathbf{q}_1$ . В области

$$\left. \begin{aligned} |q_{10} - \Delta_0|^2 &\gg q_1^2, \Delta_{\perp}^2; \\ |\Delta_{\perp}| &\gg \frac{q_1^2 \Delta_0}{q_{10} (q_{10} - \Delta_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} |\Delta^2| &\approx [\Delta_{\perp}^2 + (q_1^2/q_{10}^2) \Delta_0^2] [q_{10}/(q_{10} - \Delta_0)]; \\ \Delta_{\parallel} &\approx \Delta_0 + \Delta_{\perp}^2/2q_{10}; \quad |\mathbf{Q}_{\perp}| \gg Q_{\parallel}. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Обратимся теперь к тензору  $\mathcal{L}^{\mu\nu}$ . Определим

$$dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_{\parallel}, \Delta_{\perp}) = \{(2\pi)^4/[4(2S_{p_1} + 1)(p_1\Delta)]\} \times \\ \times \mathcal{L}^{\mu\nu}(p_k) \delta\left(p_1 + \Delta - \sum_{k \geq 2} p_k\right) \prod_{k \geq 2} \frac{d^3 p_k}{2\varepsilon_{p_k} (2\pi)^3}, \quad (8.28)$$

так что

$$d\sigma_p^p = e^\mu e^{\nu*} dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_0, 0) \quad (8.29)$$

является дифференциальным сечением фотопроцесса для поляризованных фотонов ( $e_\lambda^\mu$ ) с импульсом, направленным по оси  $z$ . Физические векторы поляризации имеют только поперечные компоненты (по  $x, y$ ). Из калибровочной инвариантности следует, что  $dT_{00} = dT_{zz}$ , поэтому сечение фотопроцесса, усредненное по поляризациям фотона, есть

$$d\sigma_\nu = -g^{\mu\nu} dT_{\mu\nu}/2 = \delta^{ik} dT_{ik}/2, \quad (i, k = x, y). \quad (8.30)$$

Из (7.19), (8.4), (8.25), (8.28) получаем, что в области значений  $\Delta_\perp$  и  $\Delta_0$ , где можно пренебречь продольной компонентой  $Q_\mu$  в свертке  $J^{\mu\nu}$  в форме (8.24) с  $dT_{\mu\nu}$  и положить  $dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_\parallel, \Delta_\perp) = dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_0, 0)$ , сечение процесса, изображенного на рис. 23, *a*, представляется в виде

$$d\sigma = [\alpha q_{10}/\pi (q_{10} - \Delta_0)] [\Delta_{\perp i} \Delta_{\perp k} - (S_{q1} \Delta_0^2 / 2q_{10}^2) \Delta^2 \delta_{ik}] \times \\ \times dT_{ik}(\Delta_0, \Delta_0, 0) [d\Delta_0 d\Delta_\perp / (\pi \Delta_0 \Delta^4)], \quad (8.31)$$

где мы учли, что  $\sqrt{v^2 - p_1^2 q_1^2} \approx v \approx q_{10} [p_{10} + |\mathbf{p}_1|]$

$$\left. \begin{aligned} d^3 q_2 / \varepsilon_{q_2} &= d\Delta_\parallel d\Delta_\perp / (q_{10} - \Delta_0); \\ \Delta_\parallel &\approx \Delta_0 + \Delta_\perp^2 / 2q_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

Формула (8.31) выражает дифференциальное сечение процесса на рис. 23, *a* через дифференциальное сечение фотопроцесса с поляризованными фотонами.

Вопрос об области применимости (8.31) является далеко не тривиальным и зависит от характера процесса. Рассмотрим этот вопрос в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ . Из  $\delta$ -функции в (8.28) следует, что для выполнения условия  $dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_\parallel, \Delta_\perp) \approx dT_{\mu\nu}(\Delta_0, \Delta_0, 0)$ , нужно, чтобы  $(\Delta_\parallel - \Delta_0) \ll \Delta_0$ ,  $\Delta_\perp^2 \ll \Delta_0^2$ ,  $|\Delta^2| \ll [p_1^2 + 2(p_1 \Delta)]$ , что можно представить как  $|\Delta^2| \ll \Delta_0^2$ ,  $|\Delta^2| \ll \sqrt{p_1^2} \Delta_0$  или

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\perp^2 &\ll [(q_{10} - \Delta_0) \Delta_0^2] / q_{10}; \quad \Delta_\perp^2 \ll \sqrt{p_1^2} \Delta_0 \left( \frac{q_{10} - \Delta_0}{q_{10}} \right), \\ q_1^2 (\sqrt{p_1^2} + \Delta_0) &\ll \sqrt{p_1^2} q_{10} (q_{10} - \Delta_0). \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Для того, чтобы можно было пренебречь продольной компонентой  $Q^\mu$  в свертке  $Q^\mu Q^\nu dT_{\mu\nu}$ , необходимо знать соотношение между продольными и поперечными компонентами  $dT_{\mu\nu}$ . Выше, при ковариантном выводе, мы предполагали, что  $I_2 \lesssim I_1 S_1$ ; это соответствует

$p_1^2 T_{00} \lesssim s_1 T_{\perp\perp}$ . При этом условии для того, чтобы можно было пренебречь  $Q_{\parallel}$ , необходимо

$$\Delta_{\perp}^2 \gg \frac{q_1^4 \Delta_0^2 (p_1^2 + 2\sqrt{p_1^2 \Delta_0})}{q_{10}^2 (q_{10} - \Delta_0)^2 p_1^2}, \quad (8.34)$$

$$\Delta_{\perp}^2 \ll \frac{(q_{10} - \Delta_0)^2 p_1^2}{p_1^2 + 2\sqrt{p_1^2 \Delta_0}}; \quad (8.35)$$

Еще раз отметим здесь, что область применимости формулы (8.31) зависит от характера процесса; поэтому следует определять ее для каждого конкретного случая, не полагаясь на полученные из общих соображений (и при некоторых предположениях) критерии (8.33) — (8.35).

Проведя в (8.31) интегрирование по азимутальному углу вектора  $\Delta_{\perp}$ , получим с учетом (8.27), (8.30):

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{(q_{10} - \Delta_0)}{q_{10}} \left[ \Delta_{\perp}^2 + S_{q1} \frac{\Delta_0^2 \left( \Delta_{\perp}^2 + \frac{q_1^2}{q_{10}^2} \Delta_0^2 \right)}{q_{10} (q_{10} - \Delta_0)} \right] \times \\ \times \frac{d\Delta_0}{\Delta_0} \cdot \frac{d\Delta_{\perp}^2}{\left( \Delta_{\perp}^2 + \frac{q_1^2}{q_{10}^2} \Delta_0^2 \right)^2} d\sigma_{\gamma}. \quad (8.36)$$

Легко показать соответствие этой формулы полученной выше (8.14). Сечение (8.36) можно представить в форме

$$d\sigma = n(\Delta_{\perp}^2, \Delta_0) d\Delta_{\perp}^2 d\Delta_0 d\sigma_{\gamma}. \quad (8.37)$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что электромагнитное поле заряженной ультрарелятивистской частицы является поперечным и поэтому может быть представлено в виде совокупности «квазифотонов» с энергией  $\Delta_0$ . Число этих фотонов на интервал энергии есть

$$n(\Delta_0) d\Delta_0 = \left( \int n(\Delta_{\perp}^2, \Delta_0) d\Delta_{\perp}^2 \right) d\Delta_0. \quad (8.38)$$

Аналогично может быть рассмотрен и процесс, изображенный на рис. 23, в, где следует рассмотреть свертку  $J_{\mu\nu} J_{\rho\sigma} dM^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Проведя в системе, где частицы  $q_1$ ,  $p_1$ , ультрарелятивистские, преобразования (8.24) токовых тензоров и далее пренебрегая продольными компонентами  $Q_{\mu}$ , получаем:

$$d\sigma = (\alpha/\pi)^2 \{q_{10} p_{10} / [(q_{10} - \Delta_0)(p_{10} - \Lambda_0)] \times \\ \times [\Delta_{\perp i} \Delta_{\perp k} - (S_{q1} \Delta_0^2 / 2q_{10}^2) \Delta^2 \delta_{ik}] [\Lambda_{\perp i} \Lambda_{\perp m} - (S_{p1} \Lambda_0^2 / 2p_{10}^2) \Lambda^2 \delta_{lm}] \times \\ \times dM^{iklm} \cdot \frac{d\Delta_0 d\Delta_{\perp} d\Lambda_0 d\Lambda_{\perp}}{\pi^2 \Delta_0 \Lambda_0 \Delta^4 \Lambda^4},$$

где

$$d\sigma_{\gamma\gamma} = \delta_{ik} \delta_{lm} dM^{iklm} / 4.$$



КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
В МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

§ 9. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
ЧАСТИЦ БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИИ

9.1. Типы квантовых эффектов в задаче излучения. В квантовой теории, описывающей частицы, которые находятся во внешнем электромагнитном поле, расчет эффектов взаимодействия частиц с полем излучения без применения теории возмущений по внешнему полю проводится обычно в представлении Фарри, которое строится по образцу теории для свободных частиц с использованием решений соответствующих волновых уравнений (Дирака, Клейна—Гордона и др.) в данном поле (см. раздел 5.13). В частности,  $S$ -матрица в спинорной электродинамике (5.72) и (5.73) имеет в представлении Фарри вид (5.158)

$$S = T \exp \left[ - (i e / \hbar) \int d^4 x \bar{\Psi}_F(x) \gamma^\mu \Psi_F(x) A_\mu(x) \right], \quad (9.1)$$

где  $\Psi_F(x)$  — оператор электрон-позитронного поля в заданном внешнем поле\* [см., например, (5.9)]. Разложение  $T$  произведения на сумму нормальных произведений формулируется так же, как для свободных частиц, но свертка фермионных операторов будет теперь функцией Грина в заданном поле\*\*. Следует иметь в виду, что решение волновых уравнений известно только для некоторых специфических полей (кулоновское поле, постоянное и однородное магнитное поле, поле плоской электромагнитной волны, постоянные скрещенные электрическое и магнитное поля). Но даже для приведенных полей использование решений волновых уравнений для вычисления характеристик излучения — достаточно сложная в математическом отношении задача. В случае частиц высокой энергии ( $\gamma \gg 1$ ) самым существенным однако является то, что все результаты получаются с помощью асимптотических приближений найденных функций, а это соответствует переходу к квазиклассическому приближению.

Из сказанного следует, что более последовательным подходом к задаче об излучении частицы высокой энергии во внешнем электромагнитном поле будет формализм, использующий квазиклассиче-

\* В § 9 и 10 использована система единиц  $c = 1$ .

\*\* См. обсуждение в разделе 5.13.

ское приближение с самого начала. Такой подход был предложен авторами [16, 17, 21], в его основе лежит тот факт, что имеется два типа квантовых эффектов при излучении частицы высокой энергии во внешнем поле. Первый из них связан с квантованием самого движения частицы в этом поле. Связанная с ним некоммутативность динамических переменных частицы была детально рассмотрена в разделе 5.3, где показано на примере движения в произвольном магнитном поле, что она имеет порядок  $\hbar\omega_0/\varepsilon = H/(H_0\gamma^2)$  (в общем случае ряд по  $\hbar\omega_0/\varepsilon$ ), так что с ростом энергии движение становится все более классическим.

Перепишем параметр разложения в виде  $\hbar\omega_0/\varepsilon = \hbar/(\varepsilon\rho)$ , где  $\rho$  — характерный размер задачи;  $\hbar/(\varepsilon\rho) = \lambda_k/(\rho\gamma)$ ,  $\lambda_k = \hbar/m$  — комптоновская длина волны. Учитывая, что  $\varepsilon\rho \sim \hbar l$  есть момент количества движения частицы, получаем

$$\hbar\omega_0/\varepsilon = \hbar/(\varepsilon\rho) = \lambda_k/(\rho\gamma) = 1/l. \quad (9.2)$$

В магнитном поле, где  $\rho$  — радиус кривизны, который обычно является макроскопической величиной, это отношение очень мало (при  $\varepsilon = 100 \text{ Мэв}$  и напряженности магнитного поля  $H = 10^4 \text{ э}$   $\hbar\omega_0/\varepsilon \sim 10^{-14}$ ). При тормозном излучении на кулоновском центре, где  $\rho$  — прицельный параметр, основной вклад в излучение дает  $\rho > \lambda_k$  [ср. (3.82)], тогда имеем  $l \gtrsim \gamma$ .

Второй тип квантовых эффектов связан с отдачей частицы при излучении и имеет порядок  $\hbar\omega/\varepsilon$ , где  $\hbar\omega$  — частота излученного фотона. При излучении в магнитном поле энергия излученного фотона зависит от значения параметра  $\chi$  [см. (5.41)]. При  $\chi \ll 1$  отдача, а следовательно, и величина квантовых эффектов, мала, причем характерные частоты излучения  $\omega \sim \omega_0\gamma^3$  [как в классической теории (3.8)]. При  $\chi \gtrsim 1$  энергия излученного фотона  $\hbar\omega \sim \varepsilon$ , эта область является существенно квантовой. Таким образом, при больших энергиях ( $\gamma \gg 1$ ) квантовые эффекты первого типа ничтожно малы по сравнению с эффектами излучения, так что ими можно пренебречь. Если в теории имеются квантовые эффекты двух типов, одним из которых сразу пренебрегаем, то для этого особенно удобна операторная формулировка квантовой механики. Действительно, необходимо пренебречь некоммутативностью операторов динамических переменных частицы между собой (величина  $\hbar\omega_0/\varepsilon$ ) и учитывать только коммутаторы их с оператором  $\exp(-ikr)$ , связанным с полем излученного фотона (величины  $\sim \hbar\omega/\varepsilon$ ).

Поскольку существенны большие орбитальные моменты, то можно пренебречь членами типа взаимодействия спин—поле [для частиц со спином  $1/2$  это члены  $e\hbar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$  [ср. (5.5)], относительный вклад которых в энергию  $s\hbar\omega_0/\varepsilon$  ( $s$  — величина спина), т. е. для частиц с низшими спинами того же порядка, что квантовые эффекты первого типа (9.2)]. В итоге оказывается возможным провести единым образом рассмотрение для частиц с любым спином, а вычисление всех спиновых эффектов, которые определяются структу-

рой тока, по форме совпадает с расчетом для свободных частиц. При таком подходе не требуется знания явного вида решений волновых уравнений, а конкретные вычисления с определенного этапа становятся сходными с классическими.

9.2. Вероятность излучения в стационарном внешнем поле. Матричный элемент излучения фотона заряженной частицей во внешнем поле в первом порядке теории возмущения по взаимодействию с полем излучения следует из разложения  $S$ -матрицы вида (9.1) и может быть для частиц с любым спином представлен в форме [ср. (5.161)]:

$$U_{fi} = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\hbar\omega}} \int dt \int d^3r F_{is}^{\dagger}(\mathbf{r}) \times \\ \times \exp[i\mathbf{e}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar] (e^* \cdot \mathbf{j}) \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] \exp(-i\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar) F_{is}(\mathbf{r}), \quad (9.3)$$

где  $F_{is}(\mathbf{r})$  — решение волнового уравнения\* в данном поле с энергией  $\epsilon_i$  и спиновым состоянием  $s$ ;  $\mathbf{e}_\mu$  — вектор поляризации фотона;  $\mathbf{j}_\mu$  — вектор тока.

Для интересующих нас состояний с большими орбитальными моментами  $l$  можно приближенно представить:

$$\exp(-i\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar) F_{is}(\mathbf{r}) = \Psi_s(\mathbf{P}) \exp[-i\mathcal{H}t/\hbar] |i\rangle, \quad (9.4)$$

где  $\Psi_s(\mathbf{P})$  — операторная форма волновой функции частицы в спиновом состоянии  $s$  во внешнем поле. Эта форма получается из свободных волновых функций заменой переменных на операторы:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{P}$ ,  $\epsilon \rightarrow \mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}$ . Вектор состояния  $|i\rangle$  определяет состояние частицы в поле (за исключением спиновых). В формуле (9.4) пренебрегаем членами взаимодействия типа спин — поле. Проиллюстрируем формулу (9.4) на примере уравнения Дирака во внешнем поле (5.2). Если в «квадрированном» уравнении Дирака (5.5), (5.8) отбросить члены взаимодействия типа спин — поле ( $e\hbar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$ ), то это уравнение переходит в уравнение Клейна—Гордона в том же поле (5.6), так что выражение

$$\Psi(x) = c(\gamma^\mu P_\mu + m)\Phi(x), \quad (9.5)$$

где  $\Phi(x)$  — решение уравнения Клейна—Гордона;  $c$  — нормировочная константа, автоматически удовлетворяет уравнению Дирака в поле. Сравнивая с формулой (А.7), убеждаемся, что (9.5) имеет ту же матричную структуру, что и решение свободного уравнения, причем величины  $p$ ,  $\epsilon$  заменены на операторы. Итак, в координатном представлении  $|i\rangle$  есть решение уравнения Клейна—Гордона в данном поле.

\* Заметим, что в отличие от случая свободных частиц, где матричный элемент первого порядка обращается в нуль, поскольку не может выполняться закон сохранения энергии-импульса, здесь часть импульса отдачи берет на себя поле вследствие чего  $U_{fi} \neq 0$ .

Подставляя (9.4) в (9.3) и учитывая, что шредингеровские операторы, стоящие между экспоненциальными множителями  $\exp \pm (i, \mathcal{H}t/\hbar)$ , переходят в зависящие явно от времени гейзенберговские операторы динамических переменных частицы в данном поле, получаем следующее выражение для матричного элемента (9.3):

$$U_{fi} = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\hbar\omega}} \left\langle f \left| \int dt \exp(i\omega t) M(t) \right| i \right\rangle, \quad (9.6)$$

где

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \Psi_s^+(P) \{(e^*j), \exp[-ikr(t)]\} \Psi_s(P) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}; \quad (9.7)$$

$P(t)$ ,  $j(t)$ ,  $r(t)$  — гейзенберговские операторы импульса, тока и координаты частицы соответственно, скобки  $\{ \}$  означают симметризованное произведение операторов (половина антикоммутора). Например, для частицы со спином 0 ( $s$ ) имеем\*

$$M_s = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \{(e^*P), \exp[-ikr]\} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}. \quad (9.8)$$

Для частицы со спином 1/2 ( $e$ )

$$M_e = \sqrt{m/\mathcal{H}} \bar{u}_s(P) \hat{e}^* \exp(-ikr) u_s(P) \sqrt{m/\mathcal{H}}, \quad (9.9)$$

где для канонического набора  $\gamma$ -матриц\*\* [см. (A.7), (A.3) Приложения A]

$$u(P) = \sqrt{\frac{\mathcal{H} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi[\xi(t)] \\ \frac{1}{\mathcal{H} + m} \sigma P \varphi[\xi(t)] \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

$\varphi[\xi(t)]$  — двухкомпонентный спинор [см. (A.8), (A.9) Приложения A], описывающий спиновые состояния частицы в момент времени  $t$  [в квазиклассическом пределе эволюция вектора  $\xi$  во времени определяется уравнением (5.62)].

Для частицы со спином 1 ( $v$ ) имеем\*\*\*

$$M_v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} (e_i^v)_\mu \{(e^* P g^{\mu\nu} - e^{*\mu} P^\nu - e^{*\nu} P^\mu), \exp[-ikr]\} (e_i^v)_\nu \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \quad (9.11)$$

где  $e_f^v$ ,  $e_i^v$  — вектора поляризации начальной и конечной векторных частиц. Аналогично выписываются выражения и для частиц с высшими спинами.

\* См. правило диаграммной техники для однофотонной вершины для скалярных частиц.

\*\* Для частиц со спином 0, 1/2 удобно пользоваться кулоновской калибровкой электромагнитного поля.

\*\*\* Ср. правило диаграммной техники для однофотонной вершины для векторных частиц.

Будем интересоваться вероятностью перехода с излучением фотона, просуммированной по конечным состояниям частицы. Выполняя такое суммирование\* с использованием условия полноты\*\* векторов состояния  $\sum_f |f\rangle \langle f| = 1$ , получаем для вероятности перехода с излучением фотона:

$$d\omega = \frac{e^2}{4\pi\hbar} \cdot \frac{d^3k}{(2\pi)^2 \omega} \left\langle i \left| \int dt_1 \int dt_2 \exp [i\omega(t_1 - t_2)] M^+(t_2) M(t_1) \right| i \right\rangle. \quad (9.12)$$

Умножая это выражение на энергию излученного фотона, получаем дифференциальное выражение для излученной энергии:

$$d\varepsilon(\omega) = \hbar\omega d\omega. \quad (9.13)$$

Для дальнейшего вычисления необходимо провести ряд действий с операторами, входящими в формулу (9.12). Вынесем оператор  $\exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)]$  в  $M(t_1)$  налево, а оператор  $\exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_2)]$  в  $M^+(t_2)$  — направо, для чего воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} f(\mathbf{P}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) &= \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) f(\mathbf{P} - \hbar\mathbf{k}); \\ \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) f(\mathbf{P}) &= f(\mathbf{P} - \hbar\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (9.14)$$

которое является следствием того, что  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  — оператор сдвига в импульсном пространстве, в чем можно убедиться, используя перестановочные соотношения  $[r_m, p_n] = i\hbar\delta_{mn}$  и разлагая  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{P})$  в ряд Тейлора. Изменение функции  $f(\mathbf{P})$  в (9.14) при коммутации с  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  («полюс» излученного фотона) соответствует учету отдачи при излучении. После того как будет проведена эта операция, в каждом из матричных элементов остаются только коммутирующие [с точностью до членов  $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon(1/l)$ ] операторы, и дальнейшая задача сведется к рассмотрению возникающей комбинации  $\exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_2)] \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)]$ .

Гейзенберговские операторы  $\mathbf{r}(t_2)$  и  $\mathbf{r}(t_1)$ , взятые в разные моменты времени, не коммутируют между собой, эта некоммутативность существенна, так что для нахождения указанной комбинации нельзя ограничиться разложением по низшим коммутаторам. Вычисление операторных экспоненциальных выражений принято называть «распутыванием». Одним из основных положений описываемого подхода является распутывание операторного выражения

\* Заметим, что можно фиксировать, если необходимо, любое из квантовых чисел конечной частицы, используя операторы проектирования.

\*\* В координатном представлении:  $\langle f | \dots | i \rangle = \int d^3x \Phi_f^+(x) \dots \Phi_i(x);$   
 $\sum_f \Phi_f(x) \Phi_f^+(x') = \delta(x - x').$

$\exp [i\mathbf{k}\mathbf{r} (t_2)] \exp [-i\mathbf{k}\mathbf{r} (t_1)]$ . Представим это выражение в виде

$$\begin{aligned} \exp (i\mathbf{k}\mathbf{r}_2) \exp (-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) &= \exp [i\mathcal{H}\tau/\hbar] \exp (i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \times \\ &\times \exp [-i\mathcal{H}\tau/\hbar] \exp (-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1), \end{aligned} \quad (9.15)$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ ; здесь и в дальнейшем индексы 1, 2 означают зависимость от соответствующих времен. Это представление является следствием того, что  $\exp \{i\mathcal{H}\tau/\hbar\}$  — оператор сдвига по времени. Учитывая соотношение (9.14),<sup>†</sup> имеем

$$\begin{aligned} \exp (i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \exp (-i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1)\tau/\hbar) \exp (-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) &= \\ = \exp [-i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \hbar\mathbf{k})\tau/\hbar]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Подставляя это выражение в (9.15) и вводя обозначение

$$L_e(\tau) = \exp(-i\omega\tau) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_2) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) = \exp(-ikx_2) \exp(ikx_1), \quad (9.17)$$

где  $kx_1 = \omega t_1 - \mathbf{k}\mathbf{r}_1$ , получаем

$$L_e(\tau) = \exp\{i(\mathcal{H} - \hbar\omega)\tau/\hbar\} \exp\{-i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \hbar\mathbf{k})\tau/\hbar\}. \quad (9.18)$$

Для проведения распутывания в комбинации (9.15), очевидно, достаточно вычислить  $L_e(\tau)$ . Чтобы получить явное выражение для  $L_e(\tau)$ , необходимо продифференцировать (9.18) по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} dL_e/d\tau &= (i/\hbar) \exp\{i(\mathcal{H} - \hbar\omega)\tau/\hbar\} [\mathcal{H} - \hbar\omega - \mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \\ &- \hbar\mathbf{k})] \exp[-i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \hbar\mathbf{k})\tau/\hbar] = i[\mathcal{H} - \hbar\omega - \mathcal{H}(\mathbf{P}_2 - \\ &- \hbar\mathbf{k})] L_e(\tau)/\hbar, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где мы снова воспользовались тем, что  $\exp\{i\mathcal{H}\tau/\hbar\}$  — оператор сдвига по времени. Учтем, что

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}_2 - \hbar\mathbf{k}) = \sqrt{(\mathbf{P}_2 - \hbar\mathbf{k})^2 + m^2} = \sqrt{(\mathcal{H} - \hbar\omega)^2 + 2\hbar k P_2 - \hbar^2 k^2}, \quad (9.20)$$

здесь  $kP_2 = \mathcal{H}\omega - \mathbf{P}_2 \mathbf{k}$ ;  $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$ .

Для реальных фотонов  $k^2 = 0$ , кроме того, согласно (5.28)

$$kP_2 = \mathcal{H}\omega (1 - \mathbf{n}\mathbf{P}_2/\mathcal{H}) = \mathcal{H}\omega [1 - n v_2 + O(\hbar\omega_0/\varepsilon)], \quad (9.21)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$  — единичный вектор в направлении распространения фотона. Уравнение (9.19) по виду аналогично уравнению для  $S$ -матрицы [операторы при  $L_e(\tau)$  в правой части не коммутируют между собой в разные моменты времени]. Поэтому формальное решение

уравнения (9.19) имеет вид (5.70)

$$L_e(\tau) = T \exp \left[ (i/\hbar) \int_0^\tau (\mathcal{H} - \hbar\omega - \sqrt{(\mathbf{P}(t_1 + \tau') - \hbar\mathbf{k})^2 + m^2}) d\tau' \right], \quad (9.22)$$

где  $T$  — оператор хронологического произведения\* с учетом, что  $L(0) = 1$ . Представление (9.20) и решение (9.22) являются точными; выражение (9.21) справедливо с точностью до членов  $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon$  (это точность принятого приближения). Однако в дальнейшем явно необходимо учитывать особенности излучения ультрарелятивистских частиц, т. е., как и в гл. I, проводить разложение по параметру  $1/\gamma$ . В классической теории частица излучает в угол  $\sim 1/\gamma$ , тогда  $1 - \mathbf{nv} \sim 1/\gamma^2$ . В квантовой теории средние значения операторов типа  $\langle 1 - \mathbf{nv} \rangle \sim 1/\gamma^2$ ; в этом смысле можно считать, что оператор  $1 - \mathbf{nv}$  имеет малость  $1/\gamma^2$ . С учетом этого обстоятельства можно провести разложение

$$\mathcal{H}(P - \hbar\mathbf{k}) = (\mathcal{H} - \hbar\omega) \left[ 1 + \hbar k P_2 / (\mathcal{H} - \hbar\omega)^2 - \hbar^2 k^2 / 2 (\mathcal{H} - \hbar\omega)^2 + \dots \right]. \quad (9.23)$$

Очевидно, что это разложение справедливо, если среднее значение  $\langle 1 - \hbar\omega/\mathcal{H} \rangle \sim 1$ , т. е. фотон не уносит всю энергию начальной частицы, так что конечная частица является ультрарелятивистской. Подставляя разложение (9.23) в решение в форме (9.22), видим, что главные члены в показателе экспоненты взаимно компенсируются; таким образом, для реальных фотонов ( $k^2 = 0$ )

$$L_e(\tau) = T \exp \left\{ \left( -i/\hbar \right) \int_0^\tau \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H} - \hbar\omega} \hbar k v (t_1 + \tau') d\tau' \right\}, \quad (9.24)$$

где  $kv = \omega(1 - \mathbf{nv})$ . Под интегралом в показателе экспоненты стоит величина  $\sim 1/\gamma^2$ , при вычислении с такой точностью можно пренебречь некоммутативностью оператора скорости в разные моменты времени и опустить знак  $T$  произведения, тогда

$$L_e(\tau) = \exp \{ [ -i\mathcal{H}/(\mathcal{H} - \hbar\omega) ] (kx_2 - kx_1) \}. \quad (9.25a)$$

В случае, когда фотоны не являются реальными, имеем из (9.23)

$$L_e(\tau) = \exp \{ [ -i\mathcal{H}/(\mathcal{H} - \hbar\omega) ] (kx_2 - kx_1) + i\hbar k^2 \tau / 2 (\mathcal{H} - \hbar\omega) \}. \quad (9.26)$$

Проделанный вывод выражения для  $L_e(\tau)$  не основывался на каких-либо свойствах внешнего поля, было использовано только то, что ультрарелятивистская частица излучает в конус с углом  $\sim 1/\gamma$ . Поэтому полученный результат справедлив для излучения

\* Заметим, что для свободных частиц символ  $T$  можно опустить, так как операторы импульса, взятые в разные моменты времени, коммутируют между собой.

частиц большой энергии в произвольном внешнем поле, причем изменение величин при коммутации (9.14) соответствует учету изменения энергии и импульса частиц (отдача) при излучении\*.

Таким образом, в результате проведения операции распутывания имеем (9.17) и (9.25):

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_2) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) &= \exp(-ikx_2) \exp(ikx_1) = \\ &= \exp\{[-i\mathcal{H}/(\mathcal{H} - \hbar\omega)](kx_2 - kx_1)\}. \end{aligned} \quad (9.25b)$$

Ввиду компенсации главных членов в показателе экспоненты (9.26) комбинация  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_2) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)$  коммутирует с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$  со всеми операторами, входящими в  $M_2^+ M_1$ . Тем самым все операторы в выражении (9.12) оказываются коммутирующими [с точностью до членов более высокого порядка по  $\hbar\omega_0/\varepsilon$  и  $1/\gamma^2$ ], и поэтому после проведения операции распутывания все они, стоящие в обкладках начального состояния (средние в состоянии с большими квантовыми числами), могут быть заменены на соответствующие классические значения ( $c$ -числа).

С учетом этого выражения для вероятности перехода (9.12) можно записать в виде

$$d\omega = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3k}{\omega} \int dt_1 \int dt_2 R_2^* R_1 \exp\{-i\varepsilon(kx_2 - kx_1)/(\varepsilon - \hbar\omega)\}, \quad (9.27)$$

где

$$R(t) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon'\varepsilon}} \Psi_s^+ (p'(t)) [e^{*j}(p'(t)) + e^{*j}(p(t))] \Psi_s(p(t)); \quad (9.28)$$

$\varepsilon$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\varepsilon' = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$ ;  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$  — уже не операторы, а  $c$ -числа.

При операции распутывания совершенно не затрагиваются содержащиеся в функции  $R(t)$  спиновые характеристики частиц. Это связано с тем, что в нашем приближении пренебрегается влиянием на движение частицы взаимодействия спина с внешним полем [члены  $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon (1/l)$ ]. Описывающая же спиновые состояния функция  $R(t)$  имеет форму матричного элемента перехода для свободных частиц с учетом закона сохранения импульса. Это позволяет единым образом рассматривать задачи для любого спина, так что формулы (9.27) и (9.28) применимы для частиц с произвольным спином, в частности для описания всех типов поляризационных и спиновых явлений.

Следовательно, все особенности излучения во внешнем поле в (9.28) состоят в следующем: 1) в показателе экспоненты появляется множитель  $\varepsilon/(\varepsilon - \hbar\omega)$  (учет отдачи, универсальный для всех внешних полей); 2) специфика поля проявляется в (9.28) в том, что  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ ,  $kx = kx(t)$ , причем эволюция импульса и координаты во времени берутся в данном поле.

\* Ввиду важности этой задачи в Приложении Д приведена операция распутывания для магнитного и кулоновского полей.



Выражение для квазиклассического матричного элемента  $R(t) \exp \{i \epsilon k x(t) / (\epsilon - \hbar \omega)\}$  (9.27) существенно проще, чем получающееся при непосредственным интегрировании точных решений волнового уравнения в (9.1), а то, что это выражение зависит от времени через  $p(t)$  и  $x(t)$ , в определенном смысле аналогично классической теории [см. (1.59)], поскольку описывает излучение в терминах траектории. Поэтому в данном подходе, так же как в классической теории излучения (см. гл. I), оказывается существенным взаимоотношение между полным углом отклонения частицы во внешнем поле и углом  $1/\gamma$  (см. раздел 3.1). Вследствие этого отдельно рассмотрим два характерных случая: 1) полный угол отклонения велик по сравнению с  $1/\gamma$  (случай движения в макроскопическом внешнем поле, например в магнитном) и 2) полный угол отклонения частицы в поле  $< 1/\gamma$  (случай движения в микроскопическом внешнем поле, например кулоновском).

9.3. Излучение в нестационарных состояниях. Рассмотрим теперь процесс излучения в произвольном внешнем поле, когда  $\mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2} + e\phi$ , энергия зависит от времени и состояние является нестационарным. Решение уравнения

$$i\hbar \partial_t \Psi = \mathcal{H} \Psi \quad (9.29)$$

запишем в операторной форме:

$$\Psi(t) = T \exp \left\{ (-i/\hbar) \int_0^t \mathcal{H} dt \right\} \Psi_1(0). \quad (9.30)$$

Перейдем от операторов в шредингеровском представлении к гейзенберговским операторам:

$$A(t) = \left\{ T \exp \left[ (i/\hbar) \int_0^t \mathcal{H} dt \right] \right\} A_0 \left\{ T \exp \left[ (-i/\hbar) \int_0^t \mathcal{H} dt \right] \right\}. \quad (9.31)$$

Матричный элемент излучения в произвольном внешнем электромагнитном поле  $F_{\mu\nu}$  с учетом сказанного выше совпадает по форме с матричным элементом в стационарном случае (9.3), (9.6) и (9.7), если понимать под операторами  $p, r$  соответствующие гейзенберговские операторы в смысле (9.31).

Обратимся к операции распутывания. Основное выражение (9.15) теперь запишется в виде

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{k}r_2) \exp(-i\mathbf{k}r_1) &= \left[ T \exp \left[ i/\hbar \int_0^\tau \mathcal{H}(\tau) d\tau \right] \right] \times \\ &\times \exp(i\mathbf{k}r_1) \left[ T \exp \left[ -i\hbar \int_0^\tau \mathcal{H}(\tau) d\tau \right] \right] \exp[-i\mathbf{k}r_1], \end{aligned} \quad (9.32)$$

где  $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}(\mathbf{P}_1)$ . Основной вклад в матричный элемент излучения дают малые времена, определяемые условием  $|\Delta v| \sim 1/\gamma$ , так что

можно провести разложение по степеням  $\tau$  вида

$$\int_0^{\tau} \mathcal{H} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{d^n \mathcal{H}}{d\tau^n} \Big|_{\tau=0} \frac{\tau^n}{n!} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \mathcal{H}}{d\tau^n} \Big|_0 \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (9.33)$$

Если угол между вектором импульса  $\mathbf{p}$  и силой Лоренца  $\mathbf{F}$   $\vartheta_{pF} \gg 1/\gamma$ , то условие  $|\Delta \mathbf{v}| \lesssim 1/\gamma$  приводит к  $\Delta v \ll 1/\gamma^2$  (при  $\vartheta_{pF} \sim 1$   $\Delta v \sim 1/\gamma^3$ ) и ряд (9.33) является рядом по степеням  $1/\gamma$ ; с этой точностью при проведении операции распутывания можно ограничиться первым членом разложения в (9.33):

$$\int_0^{\tau} \mathcal{H}(\tau) d\tau = \mathcal{H}(0) \tau (1 + O(1/\gamma)), \quad (9.34)$$

после чего дальнейшее рассмотрение [см. (9.16)] идентично проведенному для стационарного случая.

Когда угол отклонения частицы в поле  $\ll 1/\gamma$ , излучение существенно зависит от деталей структуры внешнего поля. Задача излучения в квантовой области при выполнении условия квазиклассичности и  $\Omega \gg \gamma \omega_0$  ( $\Omega$  — характерная частота изменения поля) решается с помощью методики, развитой в § 9. Так как характерная частота излучения  $\omega \sim \Omega \gamma^2$ , квантовые эффекты излучения определяются параметром  $\hbar \Omega \gamma^2 / \varepsilon$ . При вычислении характеристик излучения может непосредственно использоваться формула (9.27). Этот круг вопросов рассмотрен в работе [124].

Наконец, отметим, что развиваемый подход применим, когда частица после излучения является ультрарелятивистской [см. (9.21) и (9.23)]. Ниже покажем, что это условие всегда выполняется, если поля удовлетворяют условию

$$H/H_0 \ll 1. \quad (9.35)$$

## § 10. МАГНИТОТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

10.1. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е в е р о я т н о с т ь и и н т е н с и в н о с т ь д л я э л е к т р о н а. В этом параграфе будет рассмотрено излучение ультрарелятивистских частиц в случае 1 при тех же предположениях [выполнение неравенств (3.1) и (3.2)], при которых рассматривались соответствующая классическая задача (постоянство поля на длине когерентности).

В случае 1 в квантовой теории, так же как и в классической, излучение происходит с небольшого участка траектории, на котором частица поворачивается на угол  $\sim 1/\gamma$ , поэтому снова введем переменные (3.10):

$$t = (t_1 + t_2)/2; \quad \tau = t_2 - t_1; \quad t_1 = t - \tau/2; \quad t_2 = t + \tau/2. \quad (10.1)$$

При этом дифференциал  $\int dt_1 \int dt_2 = \int dt \int d\tau$ . Интегрирование по  $t$  можно рассматривать как интегрирование характеристики излу-

ния в единицу времени. Тогда для вероятности излучения в единицу времени (9.27) имеем

$$dW \equiv dw/dt = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3k}{\omega} \int d\tau R^*(t + \tau/2) R(t - \tau/2) \times \\ \times \exp \{ -i(\varepsilon/\varepsilon_f) [kx(t + \tau/2) - kx(t - \tau/2)] \}, \quad (10.2)$$

где  $\varepsilon_f = \varepsilon - \hbar\omega$ . Перейдем к вычислению этого общего выражения для частиц с определенным спином.

Для частиц со спином  $1/2$  согласно (9.9) имеем (напомним, что используется кулоновская калибровка)

$$R_e = \sqrt{m/\varepsilon'} u_s^+(\mathbf{p}') \mathbf{e}^* \boldsymbol{\alpha} u_s(\mathbf{p}) \sqrt{m/\varepsilon} = \\ = \varphi_s^+ Q \varphi_s = \varphi_s^+ (A + i\sigma \mathbf{B}) \varphi_s, \quad (10.3)$$

где мы перешли к двухкомпонентным спинорам, воспользовавшись явным видом  $u(\mathbf{p})$  [см. (9.10)], причем

$$A = \sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon' + m)/\varepsilon\varepsilon'} \mathbf{e}^* \mathbf{p} [1/(\varepsilon + m) + 1/(\varepsilon' + m)]/2;$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon' + m)/\varepsilon\varepsilon'} \{ [e^* \mathbf{p}]/(\varepsilon + m) - [e^* \mathbf{p}']/(\varepsilon' + m) \}/2. \quad (10.4)$$

Если воспользоваться уравнением движения спина (5.65)\*, то легко убедиться, что  $\boldsymbol{\xi}(t)$  с точностью до членов  $\sim 1/\gamma$  прецессирует с той же частотой, что и скорость. Характерное время излучения имеет порядок, как и в классической электродинамике:  $\tau \sim 1/\omega\gamma = 1/\omega_0\gamma$ . Таким образом,

$$\varphi[\boldsymbol{\xi}(t + \tau/2)] = \varphi[\boldsymbol{\xi}(t)] + (\partial\varphi/\partial\xi_i) \dot{\xi}_i \tau/2 + \dots = \\ = \varphi[\boldsymbol{\xi}(t)] + O(1/\gamma), \quad (10.5)$$

поскольку в соответствии со сказанным выше  $|\dot{\boldsymbol{\xi}}| \tau \sim |\dot{\mathbf{v}}| \tau \sim 1/\gamma$ . Учитывая этот результат, получаем из (10.3):

$$R_e^*(t + \tau/2) R_e(t - \tau/2) = R_2^* R_1 = \\ = \frac{1}{4} \text{Sp} [(1 + \zeta_i \boldsymbol{\sigma})(A_2^* - i\sigma \mathbf{B}_2)(1 + \zeta_f \boldsymbol{\sigma})(A_1 + i\sigma \mathbf{B}_1)], \quad (10.6)$$

где  $(1 + \zeta\boldsymbol{\sigma})/2$  — двухкомпонентная поляризационная матрица плотности. Это выражение можно использовать для вычисления любых характеристик излучения, в том числе поляризационных и спиновых, при излучении электрона во внешнем поле.

Начнем с рассмотрения интенсивности и вероятности излучения, просуммированных по поляризациям фотона и конечного электрона

\* Обратим внимание, что следует пользоваться именно уравнением (9.123), а не уравнением с учетом аномального магнитного момента, поскольку последний для электронов является высшей поправкой по  $\alpha$  и его следует учитывать только при решении задачи в  $\alpha^2$ -порядке.

и усредненных по поляризациям начального электрона. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} R_{2e}^* R_{1e} = A_2^* A_1 + \mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1, \quad (10.7)$$

и после суммирования по поляризациям фотона

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} A_2^* A_1 &= 1/4 (1 + \varepsilon/\varepsilon_f)^2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 - 1); \\ \sum_{\lambda} \mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1 &= 1/4 (\hbar\omega/\varepsilon_f)^2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 - 1 + 2/\gamma^2). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Здесь пренебрегалось членами более высокого порядка по  $1/\gamma$ , а также использовалось то, что входящие выражения типа  $\mathbf{nv}_1$ ,  $\mathbf{nv}_2$  можно представить в виде

$$\mathbf{nv}_2 \exp(-i\varepsilon kx_2/\varepsilon_f) = \left( \frac{i\varepsilon_f}{\omega\varepsilon} \cdot \frac{d}{dt_2} + 1 \right) \exp(-i\varepsilon kx_2/\varepsilon_f), \quad (10.9)$$

причем член с производной в правой части (10.9) при интегрировании по времени (в бесконечных пределах) обращается в нуль [ср. (1.54)]. Проводя разложение входящих в (10.2) членов, получаем [ср. (3.11)]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t \pm \tau/2) &= \mathbf{v}(t) \pm \mathbf{w}\tau/2 + \dot{\mathbf{w}}\tau^2/8 + \dots; \\ \mathbf{r}(t \pm \tau/2) &= \mathbf{r}(t) \pm \mathbf{v}\tau/2 + \mathbf{w}\tau^2/8 \pm \dot{\mathbf{w}}\tau^3/48 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

а также учитывая, что  $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = 0(1/\gamma^2)$ ,  $\mathbf{nv} = -\dot{\mathbf{v}}^2 + 0(1/\gamma)$  [см. (3.5)], имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 &= 1 - 1/\gamma^2 - \omega^2\tau^2/2; \\ kx_2 - kx_1 &= \omega\tau - \mathbf{kr}_2 + \mathbf{kr}_1 = \omega\tau (1 - \mathbf{nv} + \omega^2\tau^2/24). \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Подставляя (10.7), (10.8) и (10.11) в (10.2), получаем

$$\begin{aligned} dW_e &= -\frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [(1+u)/\gamma^2 + (1+u+u^2/2)\omega^2\tau^2/2] \times \\ &\quad \times \exp\{-i(u\varepsilon\tau/\hbar)(1 - \mathbf{nv} + \omega^2\tau^2/24)\}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где  $u = \hbar\omega/\varepsilon_f = \hbar\omega/(\varepsilon - \hbar\omega)$ . При  $\hbar \rightarrow 0$  эта формула переходит в  $dI(\mathbf{n}, \omega)/\hbar\omega$  (3.16). Взяв интеграл по  $\tau$  с помощью (3.17), находим

$$\begin{aligned} dW_e(\mathbf{k}) &= \frac{\alpha}{\pi^2} \cdot \frac{d^3k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \mathbf{nv}}}{\omega} \times \\ &\quad \times \{- (1+u)/\gamma^2 + 2(1 - \mathbf{nv}) [1 + (1+u)^2] \} K_{1/3}(\xi), \end{aligned} \quad (10.13)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{u\varepsilon}{w\hbar} (1 - \mathbf{nv})^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{\chi} [2\gamma^2 (1 - \mathbf{nv})]^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{\chi} [\gamma^2 (\psi^2 + \mu^2)]^{3/2}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  имеем  $dI(\mathbf{n}, \omega)/\hbar\omega$  в (3.18) и (3.19).

Как и в классической электродинамике, интерес представляет вероятность излучения, проинтегрированная по азимутальному углу. Введем переменные такие же, как и в главе I [см. формулу (2.7), рис. 3]. Так же, как и в классической теории, оказывается удобным одновременно проводить интегрирование по  $\psi$  и  $\tau$ , причем первое тоже распространим на бесконечный интервал, поскольку основной вклад дает область  $\psi \sim 1/\gamma$ . Введем переменные  $x, y$  [см. (3.29)]:

$$\psi = \delta(x - y)/2; \quad \omega\tau = \delta(x + y); \quad \delta = (2\hbar\omega/u\varepsilon)^{1/3}. \quad (10.15)$$

В этих переменных (10.12) принимает вид

$$\begin{aligned} dW_e(\beta, \omega) &= [-\alpha/(2\pi)^2](\delta^2/w)\omega d\omega d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \times \\ &\times [(1+u)/\gamma^2 + \delta^2(1+u+u^2/2)(x+y)^2/2] \times \\ &\times \exp\{-i[\mu^2(x+y)/\delta^2 + (x^3+y^3)/3]\}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Воспользовавшись интегралами (3.17), получим

$$\begin{aligned} dW_e &= \frac{\alpha}{3\pi^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2 w} \cdot \frac{u\mu^2}{(1+u)^3} \{\mu^2(1+u+ \\ &+ u^2/2)[K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)] - (1+u)K_{1/3}^2(\eta)/\gamma^2\} du d\beta, \end{aligned} \quad (10.17)$$

где

$$\eta = u\varepsilon\mu^3/3\hbar\omega = u(\gamma\mu)^3/3\chi; \quad \mu^2 = \beta^2 + 1/\gamma^2. \quad (10.18)$$

Выражения для интенсивности излучения (энергии, излучаемой частицей в единицу времени) следуют из приведенных формул [см. (9.13)]:

$$dI \equiv d\varepsilon/dt = \hbar\omega d\omega/dt = \hbar\omega dW = \varepsilon u dW/(1+u). \quad (10.19)$$

Из формулы (10.13) имеем следующие выражения для дифференциального распределения интенсивности излучения электронов во внешнем поле:

$$\begin{aligned} dI_e(\mathbf{k}) &= \frac{e^2}{4\pi^3} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{1-\mathbf{nv}}}{w} d^3k [2(1-\mathbf{nv}) \times \\ &\times [1 + (1+u)^2] - (1+u)/\gamma^2] K_{1/3}(\xi), \end{aligned} \quad (10.20)$$

а из формулы (10.17) — распределение интенсивности излучения по полярному углу  $\beta$  и энергии излученного фотона  $\hbar\omega = \epsilon u/(1+u)$ :

$$dI_e(\beta, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon^3}{3\pi^2 \hbar^3 \omega} \cdot \frac{u^2}{(1+u)^4} \mu^2 \times \\ \times \left\{ \mu^2 \left( 1 + u + \frac{u^2}{2} \right) [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)] - (1+u) K_{1/3}^2(\eta)/\gamma^2 \right\} du d\beta. \quad (10.21)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  эти выражения переходят в соответствующие классические распределения (3.18) и (3.31).

Для получения спектрального распределения вероятности удобно воспользоваться выражением (10.13) и угловыми характеристиками излучения,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  (см. рис. 3). Интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$  выполняется тривиально, поскольку подынтегральное выражение от  $\varphi$  не зависит. Для интегрирования по  $\vartheta$  перейдем к переменной

$$z = [2\gamma^2(1 - \nu v)]^{3/2}. \quad (10.22)$$

Нижний предел интегрирования по  $z$  есть  $z(0) = [2\gamma^2(1 - v)^{3/2}] = 1 + 0(1/\gamma^2)$ , а верхний предел —  $z(\pi) = 8\gamma^3(1 + 0(1/\gamma^2))$ ; ввиду того, что при больших  $z$  подынтегральное выражение экспоненциально падает, можно заменить верхний предел  $z(\pi)$  бесконечностью. Таким образом, с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$  получаем

$$dW_e(u) = \frac{2\alpha m^2}{3\sqrt{3}\pi\hbar\epsilon} \cdot \frac{u du}{(1+u)^3} \int_1^\infty dz \times \\ \times \{z^{2/3} [1 + (1+u)^2] - (1+u)\} K_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi} z\right). \quad (10.23)$$

Используя формулу (3.42), преобразуем это выражение к виду

$$dW_e(u) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi\hbar\epsilon} \cdot \frac{du}{(1+u)^3} \left\{ [1 + (1+u)^2] \times \right. \\ \left. \times K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) - (1+u) \int_{2u/3\chi}^\infty dy K_{1/3}(y) \right\}. \quad (10.24)$$

Еще одну форму записи спектрального распределения вероятности будем иметь из (10.24), если воспользуемся рекуррентным соотношением (3.44):

$$dW_e = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi\hbar\epsilon} \cdot \frac{du}{(1+u)^2} \times \\ \times \left\{ \int_{2u/3\chi}^\infty dy K_{5/3}(y) + \frac{u^2}{1+u} K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) \right\}. \quad (10.25)$$

Воспользовавшись формулой (10.19), напомним соответствующие формулы для спектрального распределения интенсивности излучения:

$$dI_e(u) = \frac{e^2 m^2}{4\pi^2 \sqrt{3} \hbar^2} \cdot \frac{u du}{(1+u)^4} \left\{ [1 + (1+u)^2] K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) - (1+u) \int_{2u/3\chi}^{\infty} dy K_{1/3}(y) \right\} \quad (10.26)$$

и

$$dI_e(u) = \frac{e^2 m^2}{4\pi^2 \sqrt{3} \hbar^2} \cdot \frac{u du}{(1+u)^3} \times \left\{ \int_{2u/3\chi}^{\infty} dy K_{5/3}(y) + \frac{u^2}{1+u} K_{2/3} \left( \frac{2u}{3\chi} \right) \right\}. \quad (10.27)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  эти формулы переходят соответственно в (3.43) и (3.45).

Прежде чем перейти к интегральным характеристикам процесса излучения, проведем анализ полученных выражений. Картина излучения зависит от соотношения между величинами  $u = \hbar\omega/\varepsilon - \hbar\omega$  и  $\chi$ . При  $u \ll \chi$  имеем [ср. (3.24)]

$$dI_e(u) = \frac{e^2}{4\pi^2} \cdot \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\hbar^2} \cdot \frac{\chi^{2/3} m^2 u^{1/3} du}{(1+u)^4} [1 + (1+u)^2]; \quad (10.28)$$

при  $u \gg \chi$  согласно (3.24) получаем

$$dI_e(u) = \frac{e^2 m^2}{8\pi \hbar^2} \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \cdot \frac{u^{1/2} du}{(1+u)^4} (1+u+u^2) e^{-2u/3\chi}. \quad (10.29)$$

В области  $\chi \ll 1$  [или см. (5.43),  $\hbar\omega_0\gamma^3 \ll \varepsilon$ ] во всей существенной области  $u \ll 1$  (или  $\hbar\omega \ll \varepsilon$ ), причем  $u/\chi = \omega/\omega_c$  [см. (3.40)], переход к этой области совпадает с переходом  $\hbar \rightarrow 0$  ( $u \rightarrow \hbar\omega/\varepsilon$ ,  $1+u \rightarrow 1$ ), тогда формулы (10.28) и (10.29) переходят в (3.46) и (3.47). Следовательно, при  $\chi \ll 1$  картина излучения такая же, как в классической электродинамике (с малыми квантовыми поправками), причем в существенной области ( $u \sim \chi$ ) энергия фотонов много меньше энергии излучаемой частицы. По мере роста энергии значение величины  $\hbar\omega\gamma^3$ , растущей как  $\gamma^2$ , достигает значения энергии  $\varepsilon$  (это область  $\chi = \hbar\omega\gamma^3/\varepsilon \gtrsim 1$ ), тогда качественная картина процесса излучения перестраивается и становится совершенно отличной от классической. При  $\chi \sim 1$  в существенной области  $u \sim \chi \sim 1$ ,  $\hbar\omega \sim \varepsilon$ . Несколько отличная ситуация имеет место при  $\chi \gg 1$ ,

как это видно из (10.28), при  $u \gg 1$   $dI_e(u) \sim du/u^{5/3}$  и в интеграл по  $u$  основной вклад дает  $u \sim 1$ . Таким образом, при любых  $\chi \geq 1$  энергия излучаемого фотона  $\hbar\omega \sim \varepsilon$  (но и  $\varepsilon - \hbar\omega \sim \varepsilon$ ), т. е. энергия конечного электрона также порядка энергии начального\*. Частица в этой ситуации теряет энергию квантами с энергией порядка энергии  $\varepsilon$ , но не так, чтобы в одном акте потерять большую часть энергии. Очевидно, что область  $\chi \geq 1$  является квантовой. Картина зависимости  $dI_e(u)$  от  $u$  при разных  $\chi$  приведена на рис. 24.

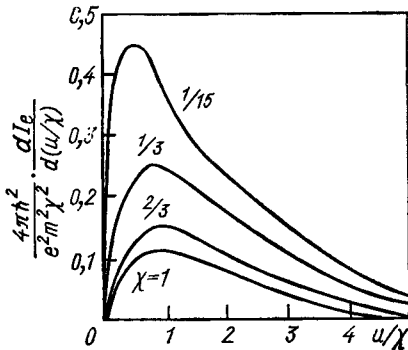


Рис. 24. Зависимость спектрального распределения интенсивности от частоты (10.26) при разных  $\chi$ .

Перейдем к угловому распределению излучения (10.21). При  $\eta \ll 1$  имеем [ср. (3.24)]

$$dI_e(\beta, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{3^{1/3} \Gamma^2(2/3)}{2^{2/3} \pi^2} (\varepsilon/\hbar)^{5/3} \times \\ \times \frac{u^{2/3} d\beta du}{(1+u)^4} \omega^{1/3} (1 + u + u^2/2), \quad (10.30)$$

при  $\eta \gg 1$

$$dI_e(\beta, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \frac{u du d\beta}{2\pi(1+u)^4} \cdot \frac{1}{\mu} [2\mu^2(1+u+u^2/2) - (1+u)/\gamma^2] \exp[-2u(\gamma\mu)^{3/3}\chi]. \quad (10.31)$$

Основной вклад дает область  $\eta \sim 1$ . При  $\chi \ll 1$  ( $u/\chi \sim \omega/\omega_c$ ) имеем  $\mu\gamma \sim 1$  ( $\beta \sim 1/\gamma$ ), эта ситуация совпадает с классической и формулы (10.30) и (10.31) переходят в (3.34) и (3.35). Такое же угловое распределение сохраняется при  $\chi \sim 1$ , но при  $\chi \gg 1$  в существенной области  $u \sim 1$ , т. е.  $\mu\gamma \sim \chi^{1/3}$ . Это означает, что угловое распределение расширяется  $\beta \sim \chi^{1/3}/\gamma$ . Тот же вид, как это следует из (10.20), имеет угловое распределение по азимутальному углу  $\psi$ : при  $\chi \gg 1$   $\psi \sim \chi^{1/3}/\gamma$  (рис. 25).

10.2. Интегральные характеристики процесса излучения электрона. Преобразуем формулу (10.25) к виду, удобному для интегрирования по  $u$ . Для этого вос-

\* При  $\chi \gg 1$ , если  $u \sim \chi \gg 1$  (при больших  $u$  излучение экспоненциально подавлено), то  $\hbar\omega \gg \varepsilon - \hbar\omega = \varepsilon_f$ , т. е.  $\varepsilon/\varepsilon_f \sim \gamma H/H_0$  и  $\varepsilon_f \sim H_0 m/H$ . Когда  $H/H_0 \ll 1$ , то конечная частица является ультрарелятивистской, и можно определенно утверждать, что полученные результаты применимы для всего спектра. Если же это условие не выполняется, то конец спектра не описывается приведенными формулами и, следовательно, применяемый здесь метод перестает быть замкнутым.



пользуемся очевидной формулой [ср. (3.48)]

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \int_{x/\xi}^{\infty} \varphi(y) dy = \int_0^{\infty} \varphi(y) dy \int_0^{\xi y} f(x) dx, \quad (10.32)$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u)^2} \int_{u/\xi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{\xi y}{1+\xi y} K_{5/3}(y) dy, \quad (10.33)$$

где  $\xi = 3\chi/2$ . Используя формулу (см. [52], с. 984)

$$z \frac{d}{dz} K_{2/3}(z) - \frac{2}{3} K_{2/3}(z) = -z K_{5/3}(z), \quad (10.34)$$

преобразуем интеграл (10.33) к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} [\xi y / (1 + \xi y)] K_{5/3}(y) dy = \\ & = \int_0^{\infty} [\xi(5 + 2\xi y) / 3(1 + \xi y)^2] K_{2/3}(y) dy = \\ & = \int_0^{\infty} [(5 + 2u) / 3(1 + u)^2] K_{2/3}(u/\xi) du. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Подставляя в (10.25), имеем окончательное выражение для полной вероятности процесса излучения:

$$W_e = [\alpha m^2 / (3 \sqrt{3} \pi \hbar \epsilon)] \int_0^{\infty} [(5u^2 + 7u + 5) / (1 + u)^3] K_{2/3}(2u/3\chi) du. \quad (10.36)$$

Для вычисления этого интеграла удобно воспользоваться представлением (см. [52], с. 671)

$$1/(1+u)^m = (1/2\pi i) \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} [\Gamma(-s) \Gamma(m+s) / \Gamma(m)] u^s ds, \quad (10.37)$$

где  $1 - m < \lambda < 0$ , после чего интегралы легко вычисляются с помощью формулы (3.49):

$$W_e = \frac{\alpha m^2}{3 \sqrt{3} \pi \hbar \epsilon 2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{\Gamma(-s) \Gamma(3+s)}{\Gamma(3)} ds \times$$

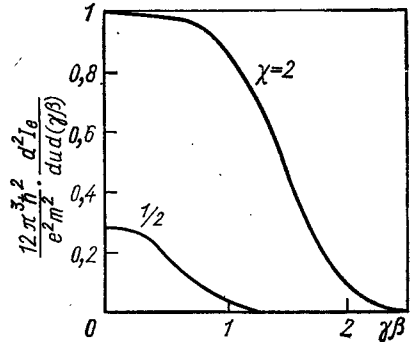


Рис. 25. Зависимость углового распределения от угла (10.21) при разных  $\chi$ .

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{\infty} (5u^2 + 7u + 5) K_{2/3}(2u/3\chi) u^s du = \frac{\alpha}{3\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{m^2}{\hbar\varepsilon} \times \\
& \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(3+s)}{\Gamma(3)} \cdot \frac{(3\chi)^{s+1}}{4} \{5\Gamma(s/2 + \\
& + 5/6)\Gamma(s/2 + 1/6) + 7(3\chi)\Gamma[(s+1)/2 + 5/6]\Gamma[(s+1)/2 + 1/6] + \\
& + 5(3\chi)^2\Gamma[(s+2)/2 + 5/6]\Gamma[(s+2)/2 + 1/6]\} = \\
& = \frac{\alpha m^2 \chi}{8\sqrt{3}\pi\hbar\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} (3\chi)^s (3s^2 + 3s + 10) \times \\
& \times \Gamma(-s)\Gamma(s+1)\Gamma(s/2 + 1/6)\Gamma(s/2 + 5/6) ds. \quad (10.38)
\end{aligned}$$

При получении последнего выражения была проведена замена переменных во втором и третьем членах в фигурных скобках  $s+1 \rightarrow s$ ,  $s+2 \rightarrow s$  соответственно.

При  $\chi \ll 1$ , замыкая контур интегрирования направо, имеем симпатический ряд по степеням  $\chi$ :

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{\alpha m^2 \chi}{8\sqrt{3}\pi\hbar\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-3\chi)^n (3n^2 + 3n + 10) \Gamma(n/2 + 1/6) \times \\
& \times \Gamma(n/2 + 5/6) = \frac{5\alpha}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{m^2 \chi}{\hbar\varepsilon} (1 - 8\chi/5\sqrt{3} + 7\chi^2/2 + \dots). \quad (10.39)
\end{aligned}$$

При  $\chi \gg 1$  контур интегрирования следует замкнуть налево, тогда особенности  $\Gamma$ -функций будут лежать при  $s < 0$ , и будем получать ряды по обратным степеням  $\chi$ :

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{\alpha m^2 \chi}{2\sqrt{3}\hbar\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{4(18n^2 - 3n + 14)}{9n! \Gamma(n + 1/3)} (3\chi)^{-2n-1/3} + \right. \\
& + \frac{4(18n^2 + 21n + 20)}{9n! \Gamma(n + 5/3)} (3\chi)^{-2n-5/3} - \\
& \left. - \frac{(3n^2 + 3n + 10)(3\chi)^{-n-1}}{[2 + (-1)^n] \Gamma(n/2 + 2/3) \Gamma(n/2 + 4/3)} \right\} = \\
& = \frac{14\Gamma(2/3)\alpha m^2}{27\hbar\varepsilon} (3\chi)^{2/3} \left[ 1 - \frac{45}{28\Gamma(2/3)} (3\chi)^{-2/3} + \right. \\
& \left. + \frac{15\Gamma(1/3)}{7\Gamma(2/3)} (3\chi)^{-4/3} - \frac{216\sqrt{3}}{35\Gamma(2/3)} 3\chi^{-5/3} + \dots \right]. \quad (10.40)
\end{aligned}$$

Наряду с приведенными выше интегральными представлениями для полной вероятности процесса излучения в единицу времени и ее асимптотическими разложениями удастся получить также зам-

кнутые выражения для  $W_e$ . Представим (10.36) в виде

$$W_e = [\alpha m^2 \xi / (3 \sqrt{3} \pi \hbar \varepsilon)] \int_0^\infty [3 \xi^2 x^2 / (1 + \xi x)^3 - 3 \xi x / (1 + \xi x)^2 + 5 / (1 + \xi x)] \times \\ \times K_{2/3}(x) dx = [\alpha m^2 \xi / (3 \sqrt{3} \pi \hbar \varepsilon)] [3 \xi^2 d^2 / 2 d \xi^2 + \\ + 3 \xi d / d \xi + 5] F(\xi), \quad (10.41)$$

где

$$F(\xi) = \int_0^\infty [K_{2/3}(x) / (1 + \xi x)] dx. \quad (10.42)$$

Учитывая, что (см. [52], с. 691)

$$\int_0^\infty [K_\nu(x) / (1 + \xi x)] dx = [\pi^2 / (2 \xi \sin^2 \pi \nu)] \Phi_\nu(i/\xi), \quad (10.43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\nu(z) = \exp(-i\pi\nu/2) (J_\nu(z) - J_\nu(z)) + \\ + \exp(i\pi\nu/2) (J_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)); \\ \Phi_\nu = \Phi_{-\nu}; \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

$J_\nu$  — функции Бесселя;  $J_\nu^\pm$  — функции Ангера [см. [52], с. 1002], получаем для  $F(\xi)$  [см. (10.42)]

$$F(\xi) = (2\pi^2/3\xi) \Phi_{2/3}(i/\xi). \quad (10.45)$$

Переходя к переменной  $z = i/\xi$  и воспользовавшись тем, что

$$d/d\xi = i z^2 d/dz; \quad d^2/d\xi^2 = -z^4 d^2/dz^2 - 2z^3 d/dz; \quad d^3/d\xi^3 = \\ = -6i z^4 d/dz - 6i z^5 d^2/dz^2 - iz^6 d^3/dz^3, \quad (10.46)$$

можно переписать представление (10.41) в виде

$$W_e = [2\alpha\pi m^2 / (9\sqrt{3} \hbar \varepsilon z)] [3/2 (z^2 d^2/dz^2) + 5] [z\Phi_{2/3}(z)] = \\ = [\alpha\pi m^2 / (9\sqrt{3} \hbar \varepsilon)] [3z^2 \Phi_{2/3}''(z) + 6z\Phi_{2/3}'(z) + 10\Phi_{2/3}(z)], \quad (10.47)$$

где  $\Phi_\nu' = \frac{d}{dz} \Phi_\nu$  и т. д. Воспользовавшись рекуррентными соотношениями для функций  $\Phi_\nu(z)$ , имеем

$$\Phi_{2/3}' = -i\Phi_{1/3} - 2\Phi_{2/3}/3z - \sqrt{3}/2\pi z; \\ \Phi_{2/3}'' = (10/9z^2 - 1)\Phi_{2/3} + i\Phi_{1/3}/z + 3i/(2\pi z) + 5\sqrt{3}/(6\pi z^2). \quad (10.48)$$

Подставляя эти соотношения в (10.47) и переходя к переменной  $z = 2i/3\chi$ , получаем выражение для полной вероятности излучения электроном во внешнем поле в единицу времени:

$$W_e = [\alpha\pi m^2/(9\sqrt{3}\hbar\varepsilon)] \left\{ \frac{4}{3}(7 + 1/\chi^2)\Phi_{2/3}(2i/3\chi) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\chi}\Phi_{1/3}(2i/3\chi) - 3/(\pi\chi) - \sqrt{3}/2\pi \right\}. \quad (10.49)$$

Перейдем к рассмотрению полной интенсивности излучения. Исходя из формулы (10.27) и повторяя рассуждения [см. (10.32)—(10.35)], которые привели нас к формуле (10.36), получаем для полной интенсивности излучения:

$$I_e = [e^2 m^2/(4\pi^2 3\sqrt{3}\hbar^2)] \int_0^\infty [u(4u^2 + 5u + 4)/(1+u)^4] \times \\ \times K_{2/3}(2u/3\chi) du. \quad (10.50)$$

Воспользовавшись формулами (10.37) и (3.49) и проведя выкладку, как в (10.38), приходим к следующему выражению для полной интенсивности излучения:

$$I_e = [e^2 \sqrt{3} m^2 \chi^2/(32\pi^2 \hbar^2 2\pi i)] \int_{\lambda-1}^{\lambda+1} (3\chi)^s (s^2 + 2s + 8) \times \\ \times \Gamma(-s) \Gamma(s+2) \Gamma(s/2 + 2/3) \Gamma(s/2 + 4/3) ds. \quad (10.51)$$

При  $\chi \ll 1$ , замыкая контур интегрирования направо, получаем асимптотический ряд по степеням  $\chi$ :

$$I_e = [e^2 \sqrt{3} m^2 \chi^2/(32\pi^2 \hbar^2)] \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (k+1)(k^2 + 2k + 8) \times \\ \times \Gamma(k/2 + 2/3) \Gamma(k/2 + 4/3) (3\chi)^k = \\ = [e^2 m^2 \chi^2/(6\pi\hbar^2)] \{1 - 55\sqrt{3}\chi/16 + 48\chi^2 + \dots\}. \quad (10.52)$$

Первый член в этом разложении не содержит постоянной Планка и представляет собой классическую интенсивность излучения (2.10) [см. (5.43)], которая естественно не зависит от спина частицы; второй член — первая квантовая поправка\*, которая также не зависит от спина частицы, такая зависимость появляется начиная с членов  $\chi^2$  (члены  $\sim \hbar^2$ ).

\* Первая квантовая поправка к классической формуле была определена А. А. Соколовым, Н. Г. Клепиковым, И. М. Терновым [90] и несколько позднее Швингером [105]. Полное решение квантовой задачи о магнитотормозном излучении получено впервые (с использованием точных волновых функций) в работе [61]. Интенсивность и вероятность излучения в поле плоской электромагнитной волны и постоянных скрещенных электрических и магнитных полей вычислены с использованием точных волновых функций в работах [78, 79]. Как уже отмечалось выше, в разделе 5.3, в квазиклассическом пределе оба эти результата совпадают [см. (5.41)].

При  $\chi \gg 1$  контур интегрирования следует замкнуть налево, так что особенности  $\Gamma$ -функций лежат при  $s < 0$  и получаются ряды по обратным степеням  $\chi$ :

$$\begin{aligned}
 I_e &= \frac{\sqrt{3} e^2 m^2 \chi^2}{8\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{8(6n+1)(9n^2+3n+16)}{81n! \Gamma(n+1/3)} \times \right. \\
 &\times (3\chi)^{-2n-4/3} + \frac{8(6n+5)(9n^2+15n+22)}{81n! \Gamma(n+5/3)} (3\chi)^{-2n-8/3} - \\
 &\quad \left. - \frac{n(n^2+7)(3\chi)^{-n-1}}{[2-(-1)^n] \Gamma(n/2+1/6) \Gamma(n/2+5/6)} \right\} = \\
 &= \frac{8\Gamma(2/3) e^2 m^2 (3\chi)^{2/3}}{3^5 \pi \hbar^2} \left\{ 1 - \frac{81}{16\Gamma(2/3)} (3\chi)^{-2/3} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{165\Gamma(1/3)}{16\Gamma(2/3)} (3\chi)^{-4/3} + \dots \right\}. \quad (10.53)
 \end{aligned}$$

Наряду с полученными выше формулами можно, как и для вероятности процесса излучения, определить замкнутые выражения для интенсивности процесса излучения. Аналогично (10.41) представим (10.50) в виде

$$I_e = - \frac{e^2 m \xi^2}{12\sqrt{3} \pi^2 \hbar^2} \left[ \xi^2 \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} + \frac{3\xi}{2} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} + 4 \frac{d}{d\xi} \right] F(\xi). \quad (10.54)$$

где  $F(\xi)$  дается (10.42). Переходя к переменной  $z = i/\xi$  и воспользовавшись формулами (10.46), имеем

$$I_e = [e^2 m^2 / (18\sqrt{3} \pi^2)] [z^3 \Phi'''_{2/3} / 2 + 3z^2 \Phi''_{2/3} + 7z \Phi'_{2/3} + 4\Phi_{2/3}]. \quad (10.55)$$

Используя формулы (10.48), а также то, что

$$\begin{aligned}
 \Phi'''_{2/3} &= (5/3z - 80/27z^3) \Phi_{2/3} + i(1 - 22/9z^2) \Phi_{1/3} + \\
 &\quad + (1 - 40/9z^2) (\sqrt{3}/2\pi z) - 3i/\pi z^2, \quad (10.56)
 \end{aligned}$$

получаем окончательное выражение для интенсивности магнитотормозного излучения электронов ( $z = 2i/3\chi$ ):

$$\begin{aligned}
 I_e &= [e^2 m^2 / (3^4 2\pi \hbar^2)] \{ (2\pi/3 \sqrt{3}) [(16 + 13/\chi^2) \Phi_{2/3} (2i/3\chi) + \\
 &\quad + \frac{1}{\chi} (47 + 2/\chi^2) \Phi_{1/3} (2i/3\chi)] - 19 - 6\sqrt{3}/\chi - 1/\chi^2 \}. \quad (10.57)
 \end{aligned}$$

Чтобы найти асимптотические разложения  $I_e$  при  $\chi \gg 1$ ,  $\chi \ll 1$ , наиболее удобно интегральное представление (10.51), а для анализа поведения  $I_e$  вблизи  $\chi \sim 1$ , следует использовать интегральное представление (10.50) или замкнутое выражение (10.57). Отношение  $I_e/I_{cl}$  ( $I_{cl} = e^2 m^2 \chi^2 / 6\pi \hbar^2$ ) всегда меньше 1 (рис. 26).

10.3. Магнитотормозное излучение скалярных частиц. В этом случае рассмотрение проводится,

как и для электрона, исходя из формулы (10.2), в которую следует подставить

$$R_s = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} (e^* p + e^* p'), \quad (10.58)$$

причем вычисления оказываются более простыми. Воспользовавшись разложениями (10.10), получаем [ср. (10.12)] после суммирования по поляризациям фотона

$$dW_s = \{-\alpha d^3 k / [(2\pi)^2 \omega]\} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (1+u) (1/\gamma^2 + \omega^2 \tau^2 / 2) \exp\{-i u \varepsilon \tau (1 - n v + \omega^2 \tau^2 / 24) / \hbar\}. \quad (10.59)$$

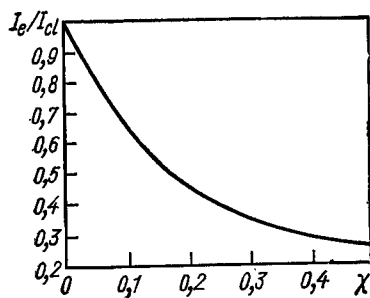


Рис. 26. Отношение  $I_e/I_{cl}$  как функция  $\chi$ .

Проводя вычисление интеграла по  $\tau$  (3.17), получаем

$$dW_s = [\alpha d^3 k / (\pi^2 \omega)] \sqrt{2/3} \times \\ \times [\sqrt{1 - n v} / (\omega \gamma^2)] (1+u) [4\gamma^2 (1 - n v) - 1] K_{1/3}(\xi), \quad (10.60)$$

где  $\xi$  определено (10.14). Проводя интегрирование по  $\tau$ ,  $\psi$ , как в (10.15), (10.16), находим распределение вероятности по частоте и полярному углу:

$$dW_s = \{\alpha \varepsilon^2 u / [3\pi^2 \omega \hbar^2 (1+u)^2]\} \mu^2 [\mu^2 (K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)) - K_{1/3}^2(\eta) / \gamma^2] du d\beta, \quad (10.61)$$

где  $\eta$ ,  $\mu$  определены формулой (10.18). Расчет спектрального распределения вероятности проводится аналогично (10.22)—(10.25), в результате имеем

$$dW_s = \{\alpha m^2 du / [\sqrt{3} \pi \hbar \varepsilon (1+u)^2]\} \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy. \quad (10.62)$$

Заметим, что все приведенные формулы можно получить из соответствующих формул для электронов, если в них отбросить члены с  $u^2$  в числителе. Формула для полной вероятности излучения скалярной частицы во внешнем поле [ср. (10.35), (10.41)—(10.47)] следующая:

$$W_s = [\alpha m^2 / (3 \sqrt{3} \pi \hbar \varepsilon)] \int_0^{\infty} [(5+2u)/(1+u)^2] K_{2/3}(2u/3\chi) du = \\ = [\alpha m^2 \pi / (9 \sqrt{3} \hbar \varepsilon)] \{4 [2\Phi_{2/3}(2i/3\chi) - \frac{1}{\chi} \Phi_{1/3}(2i/3\chi)] + \\ + 3 \sqrt{3} / \pi\}. \quad (10.63)$$

Все выражения для интенсивности излучения можно найти из (10.59)—(10.62) с помощью соотношения (10.19). Для полной интенсивности излучения, исходя из (10.62) с помощью (10.32), имеем

$$I_s = [e^2 m^2 / (12 \sqrt{3} \pi^2 \hbar^2)] \int_0^\infty [u(4+u)/(1+u)^3] K_{2/3}(2u/3\chi) du = \\ = [e^2 m^2 / (12 \sqrt{3} \hbar \pi)] \{ (2\pi/9) [2(1-1/\chi^2) \Phi_{2/3}(2i/3\chi) - \\ - \Phi_{1/3}(2i/3\chi)] - \sqrt{3}/6 + 1/\chi \}. \quad (10.64)$$

Как и в случае электронов, воспользовавшись формулами (10.37) и (3.49), из левой части формул (10.63) и (10.64) можно получить представления вероятности и интенсивности излучения скалярной частицей, из которых легко следуют ряды:

при  $\chi \ll 1$

$$W_s = [\sqrt{3} \alpha m^2 \chi / (2\pi \hbar \varepsilon \cdot 2\pi i)] \int_{\lambda-1}^{\lambda+1} (3\chi)^s \Gamma(-s) \Gamma(s+1) \times \\ \times \Gamma(s/2 + 1/6) \Gamma(s/2 + 11/6) ds \quad (10.65)$$

и при  $\chi \gg 1$

$$I_s = [e^2 3 \sqrt{3} m^2 \chi^2 / (16\pi^2 \hbar^2 \cdot 2\pi i)] \int_{\lambda-1}^{\lambda+1} (3\chi)^s \Gamma(-s) \times \\ \times \Gamma(s+2) \Gamma(s/2 + 2/3) \Gamma(s/2 + 7/3) ds. \quad (10.66)$$

Замыкая контур интегрирования направо, при  $\chi \ll 1$  получаем

$$W_s = [\alpha \sqrt{3} m^2 \chi / (2\pi \hbar \varepsilon)] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(n/2 + 1/6) \Gamma(n/2 + 11/6) \times \\ \times (3\chi)^n = [5 \sqrt{3} \alpha m^2 \chi / (6\hbar \varepsilon)] (1 - 8\chi/5 \sqrt{3} + 11\chi^2/4 + \dots); \quad (10.67)$$

$$I_s = [3 \sqrt{3} e^2 m^2 \chi^2 / (16\pi^2 \hbar^2)] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \Gamma(n/2 + 2/3) \times \\ \times \Gamma(n/2 + 7/3) (3\chi)^n = [e^2 m^2 \chi^2 / (6\pi \hbar^2)] (1 - \\ - 55 \sqrt{3} \chi / 16 + 42\chi^2 + \dots). \quad (10.68)$$

Два первых члена в этих разложениях совпадают с соответствующими членами в выражениях для электронов (10.39) и (10.52).

Замыкая контур интегрирования налево, при  $\chi \gg 1$  находим разложения по обратным степеням  $\chi$ :

$$W_s = [4\Gamma(2/3) \alpha m^2 (3\chi)^{2/3} / 9\hbar \varepsilon] [1 - 3(3\chi)^{-2/3} / 4\Gamma(2/3) + \\ + 9 \sqrt{3} (3\chi)^{-5/3} / 10\Gamma(2/3) - 3(3\chi)^{-2} / 2 + \dots]; \quad (10.69)$$

$$I_s = [e^2 \Gamma(2/3) m^2 / 54 \pi \hbar^2] (3\chi)^{2/3} [1 - 9(3\chi)^{-5/3} / 4 \Gamma(2/3) - \\ - 21(3\chi)^{-2} / 2 + 27 \sqrt{3} (3\chi)^{-8/3} / 5 + \dots]. \quad (10.70)$$

Качественные особенности излучения скалярных частиц такие же, как и для частиц со спином  $1/2$ , описанные в конце раздела 10.1.

При рассмотрении излучения векторных частиц вычисления проводятся так же, как и для частиц со спинами  $1/2$  и  $0$ , после подстановки в формулу (10.2)  $R_V$  в виде [см. (9.11)]

$$R_V = \frac{1}{2 \sqrt{e e'}} (e_i^V)_\mu (e^* p' g^{\mu\nu} - e^{*\mu} p'^\nu - e^{*\nu} p'^\mu + \\ + e^* p g^{\mu\nu} - e^{*\mu} p^\nu - e^{*\nu} p^\mu) (e_i^V)_\nu.$$

Если представить интенсивность излучения векторной частицей в виде

$$dI_V = dI_e + dI_1; \quad I_V = I_e + I_1,$$

где  $dI_e$  — интенсивность излучения частицы со спином  $1/2$  [см. (10.21)], то

$$dI_1 = [(e^2 / 4\pi) \varepsilon^3 u^4 / [9\pi^2 \omega \hbar^3 (1+u)^4]] \mu^4 [u^2 / 4 (1+u) + \\ + \gamma^2 \mu^2 (1+u^2/2(1+u))] [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)] du d\beta. \quad (10.71)$$

Добавка к полной интенсивности

$$I_1 = [3 \sqrt{3} e^2 m^2 \chi^4 / (32\pi^2 \hbar^2 \cdot 2\pi i)] \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} (3\chi)^s \Gamma(-s) \times \\ \times [(s+3) \Gamma(s+4) \Gamma(s/2+4/3) \Gamma(s/2+5/3) + [(3\chi)^2/8] \times \\ \times (3s/2+22/3) \Gamma(s+5) \Gamma(s/2+7/3) \Gamma(s/2+8/3)] ds. \quad (10.72)$$

Асимптотическое разложение при  $\chi \ll 1$  имеет вид

$$I_V = [e^2 m^2 \chi^2 / 6\pi \hbar^2] [1 - 55 \sqrt{3} \chi / 16 + 105 \chi^2 / 2 \dots] \quad (10.73)$$

и при  $\chi \gg 1$

$$I_V = [35 \Gamma(1/3) / 2\pi 3^8] (e^2 m^2 / \hbar^2) (3\chi)^{4/3} + \dots \quad (10.74)$$

Обратим внимание, что при  $\chi \gg 1$   $I_V$  растет с  $\chi$  быстрее, чем для частиц со спинами  $0, 1/2$ . Такая ситуация характерна для квантовой электродинамики векторной частицы.

10.4. Поляризационные свойства магнитотормозного излучения. В § 3 были рассмотрены поляризационные свойства излучения частиц большой энергии в классической теории. Здесь рассмотрим поляризационные эффекты



в квантовой теории\*. Сначала получим выражения для поляриза-  
ционной матрицы плотности, просуммированные по спинам ко-  
нечных электронов и усредненные по спинам начальных. Восполь-  
зовавшись формулами (10.2), (10.4), и (10.6) и учитывая, что  $dI =$   
 $= \hbar \omega dW$ , имеем

$$dI = (e^2/4\pi) [d^3k/(2\pi)^2] \int d\tau L(\tau) \exp[-i\varepsilon(kx_2 - kx_1)/\varepsilon_f], \quad (10.75)$$

где

$$L(\tau) = [(\varepsilon + \varepsilon')^2 (\mathbf{e}^* \mathbf{v}_1) (\mathbf{e} \mathbf{v}_2)]/4\varepsilon'^2 - [(\varepsilon - \varepsilon')^2 (\mathbf{e}^* \mathbf{v}_2) (\mathbf{e} \mathbf{v}_1)]/4\varepsilon'^2 + \\ + [(\varepsilon - \varepsilon')^2 (\mathbf{e}^* \mathbf{e}) (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 - 1 + 1/\gamma^2)]/4\varepsilon'^2. \quad (10.76)$$

В этих формулах мы отбросили члены  $\sim 1/\gamma^3$ ;  $\varepsilon_f = \varepsilon - \hbar\omega$ ;  
 $\varepsilon' = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$ ;  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ ; индексы 1, 2 означают зависимость  
от времени  $t_1 = t - \tau/2$ ;  $t_2 = t + \tau/2$ .

Исходя из (10.75), можно представить поляризационную мат-  
рицу в виде

$$dI_{ik} = (e^2/4\pi) [d^3k/(2\pi)^2] \int d\tau L_{ik}(\tau) \exp[-i\varepsilon(kx_2 - kx_1)/\varepsilon_f], \quad (10.77)$$

где

$$L_{ik} = (1 + u/2)^2 (v_1 - n)_i (v_2 - n)_k - u^2 (v_2 - n)_i (v_1 - n)_k/4 + \\ + u^2 (\delta_{ik} - n_i n_k) (v_2 v_1 - 1 + 1/\gamma^2)/4. \quad (10.78)$$

Тензор  $dI_{ik}$  является поперечным ( $n_i I_{ik} = n_k I_{ik} = 0$ ), по-  
скольку выражения  $(n\mathbf{v}_1 - 1)$ ,  $(n\mathbf{v}_2 - 1)$ , возникающие при свертке  
в первых двух членах  $L_{ik}$  согласно формуле (10.9), пропорциональ-  
ны полной производной и, следовательно, обращаются в нуль при  
интегрировании по  $\psi$  и  $\tau$ , третий член в  $L_{ik}$  явно поперечен.

Проводя разложения по степеням  $\tau$  [см. (10.10) и (10.11)] и вво-  
дя углы  $\beta$  и  $\psi$  [см. (2.7), рис. 3], находим

$$L = (1 + u) \begin{pmatrix} \psi^2 - (1 + u^2/2(1 + u)) \omega^2 \tau^2/4 & \beta\psi + \beta(1 + u^2/2(1 + u)) \omega\tau/2 \\ \beta\psi - \beta(1 + u^2/2(1 + u)) \omega\tau/2 & \beta^2 - (u^2/8(1 + u)) \omega^2 \tau^2 \end{pmatrix}. \quad (10.79)$$

Если  $u = \hbar\omega/(\varepsilon - \hbar\omega) \rightarrow 0$  (переход к классическому пределу),  
то  $L$  переходит в формулу (3.14). Проводя интегрирование по  
относительному времени  $\tau$  с помощью формул (3.17), имеем  
[ср. (10.20)]

$$dI_{ik} = (e^2/4\pi^3) \sqrt{2/3} (\sqrt{1 - n\mathbf{v}/\omega}) (1 + u) d^3k F_{ik}, \quad (10.80)$$

\* Ряд результатов для магнитотормозного излучения с учетом поляриза-  
ции фотонов и спиновых состояний электронов приведен в книге [92], в кото-  
рой дана подробная библиография.

где

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= \{\psi^2 + [2 + u^2/(1+u)](1-nv)\} K_{1/3}(\xi); \\ F_{22} &= \{\beta^2 + [u^2/(1+u)](1-nv)\} K_{1/3}(\xi); \\ F_{12} &= F_{21}^* = \beta \{\psi K_{1/3}(\xi) - \\ &- i[1 + u^2/2(1+u)] \sqrt{2(1-nv)} K_{2/3}(\xi)\}; \end{aligned} \right\} \quad (10.81)$$

$1 - nv = (\psi^2 + \beta^2)/2$ ,  $\xi$  задается формулой (10.14), при  $u \rightarrow 0$  (10.81) переходит в (3.22).

Как уже отмечалось, чтобы получить наблюдаемые характеристики (излучения с длины когерентности), необходимо провести интегрирование по азимутальному углу  $\psi$ , которое, как и раньше, удобно проводить одновременно с интегрированием по  $\tau$ . Переходя к переменным  $x, y$  — [см. (10.15)] и выполняя интегрирование, как в (10.16), получаем

$$dI_{ik} = \frac{e^2}{12\pi^3} \cdot \frac{g^3}{\omega \hbar^3} \cdot \frac{u^2 du d\beta}{(1+u)^3} \mu^2 G_{ik}, \quad (10.82)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \mu^2 K_{2/3}^2(\eta) + u^2 \mu^2 [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]/4(1+u); \\ G_{22} &= \beta^2 K_{1/3}^2(\eta) + u^2 \mu^2 [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]/4(1+u); \\ G_{12} &= G_{21}^* = -i[1 + u^2/2(1+u)] \beta \mu K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (10.83)$$

Здесь  $\eta$  дается формулой (10.18). Параметры Стокса, определяемые согласно формуле (1.72), для поляризационной матрицы (10.82) и (10.83) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0; \quad \xi_2 = 2G^{-1}[1 + u^2/2(1+u)] \beta \mu K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta); \\ \xi_3 &= G^{-1}[\mu^2 K_{2/3}^2(\eta) - \beta^2 K_{1/3}^2(\eta)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

где

$$G = G_{11} + G_{22} = \mu^2 [1 + u^2/2(1+u)] [K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2] - K_{1/3}^2/\gamma^2. \quad (10.85)$$

При  $u \rightarrow 0$  формулы (10.82) и (10.84) переходят соответственно в (3.37) и (3.38).

При  $\chi \ll 1$  [см. анализ после формулы (10.29)] все выражения переходят в соответствующие классические выражения (с малыми квантовыми поправками, представляющими ряды по  $\chi$ , вычисление которых проводится так же, как соответствующий расчет в разделах 10.1 и 10.2 для полной интенсивности и вероятности).

При  $\chi \gtrsim 1$  поляризационные свойства излучения отличаются от классических. Прежде всего излучение не является полностью поляризованным ( $\xi^2 < 1$ ). В определенном смысле это связано с тем, что мы считаем электроны неполяризованными, а при  $\chi \gtrsim 1$  спиновые свойства частиц имеют существенное значение (при  $\chi \ll 1$  спиновые члены имеют порядок  $u^2 \ll 1$ ). При  $\chi \gtrsim 1$  основной вклад

дает область  $u \sim 1$  и излучаемые фотоны частично эллиптически поляризованы, причем при  $\beta = 0$  исчезает круговая часть поляризации. В целом при  $n \sim 1$  отличия поляризационных свойств от классических в основном количественное [см. обсуждение после формулы (3.38)].

Иная ситуация возникает при  $\chi \gg 1$  и  $u \gg 1$ . В этой области, где интенсивность меняется как  $u^{-2/3}$  по сравнению с основной, а фотоны уносят большую часть энергии частицы  $\hbar\omega \gg \varepsilon - \hbar\omega$ , появляются новые качественные особенности\* поляризации. В частности, поляризация является только круговой:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \xi_3 = 0; \quad \xi_2 = (\beta\gamma/\sqrt{1+\beta^2\gamma^2}) \times \\ \times [2K_{1/3}(\eta)K_{2/3}(\eta)/[K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]] \end{aligned} \right\} \quad (10.86)$$

Наконец, проводя интегрирование по углу  $\beta$ , что удобно сделать по формуле (10.80) совместно с интегрированием по  $\psi$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} dI_{12} = dI_{21} = 0; \\ dI_{11} = [e^2 m^2 u du / 8 \sqrt{3} \pi^2 \hbar^2 (1+u)^3] \left\{ \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy + \right. \\ \left. + [1 + u^2/(1+u)] K_{2/3}(2u/3\chi) \right\}; \\ dI_{22} = [e^2 m^2 u du / 8 \sqrt{3} \pi^2 \hbar^2 (1+u)^3] \left\{ \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy + \right. \\ \left. + [-1 + u^2/(1+u)] K_{2/3}(2u/3\chi) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.87)$$

При  $u \rightarrow 0$  эти формулы переходят в (3.51).

Проведя интегрирование по  $u$ , имеем

$$\begin{aligned} I_{-} = I_{11} - I_{22} = [e^2 m^2 / 6 \sqrt{3} \hbar^2] [2(1 + 1/\chi^2) \Phi_{2/3}(2i/3\chi) / 9 + \\ + (1/\chi) \Phi_{1/3}(2i/3\chi) - 7\sqrt{3} / 12\pi - 1/2\pi\chi]; \end{aligned}$$

$$I = I_{11} + I_{22} = I_e, \quad (10.88)$$

где  $I_e$  дается формулой (10.57). Как и в классической теории, при интегрировании по углам круговая поляризация исчезает. Степень линейной поляризации зависит от  $u$ ,  $\chi$  в (10.87) и от  $\chi$  в (10.88). При  $\chi \ll 1$  выражения переходят в соответствующие классические. При  $\chi \gg 1$ , учитывая, что основной вклад дает область  $u \sim 1$ , и

\* Более подробно эта область обсуждается при рассмотрении излучения поляризованных электронов.

используя разложение  $K$ -функции в (10.87) при малых аргументах (3.24), имеем

$$I_- \approx [e^2 m^2 / 8 \sqrt{3} \pi^2 \hbar^2] \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} \int_0^\infty u^{1/3} du / (1+u)^3 = \\ = (e^2 m^2 / 4\pi 27\hbar^2) \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3}. \quad (10.89)$$

Тот же результат получается, если применять асимптотики функций  $\Phi$  в (10.88) при  $\chi \gg 1$ . Воспользовавшись формулой (10.53), имеем при  $\chi \gg 1$

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = I_- / I_e = 9/32. \quad (10.90)$$

10.5. Свойства излучения поляризованных электронов. Рассмотрим излучение в случае, когда начальные электроны поляризованы, а по спиновым состояниям конечных электронов проведено суммирование.

Используя формулу (10.6), где  $\xi_i = \xi$ , а по  $\xi_f$  проведено суммирование, имеем

$$\sum_{\xi_f} R_2^* R_1 = A_2^* A_1 + B_2^* B_1 + i [A_2^* (\xi B_1) - \\ - A_1 (\xi B_2^*) + (\xi [B_2^* B_1])], \quad (10.91)$$

где первый член — излучение неполяризованного электрона, а второй — зависящая от спина добавка.

Представим стоящий в формуле (10.77) тензор  $L_{ik}^p$  в виде

$$L_{ik}^p = L_{ik} + L_{ik}^\xi, \quad (10.92)$$

где  $L_{ik}^p$  — поляризационная матрица для электронов со спином  $\xi$ , причем  $L_{ik}$  дается формулой (10.79) (член, описывающий излучение неполяризованных электронов), а  $L_{ik}^\xi$  — зависящие от спина добавки, для которых имеем из (10.91):

$$L^{\xi} = L_{11}^{\xi} + L_{22}^{\xi} = i \omega \tau u [(2+u) \beta (\xi v) - (\xi v s) / \gamma] / 2 (1+u);$$

$$L_{-}^{\xi} = L_{11}^{\xi} - L_{22}^{\xi} = -i \omega \tau u (\xi v s) / 2 \gamma;$$

$$L_{12}^{\xi} + L_{21}^{\xi} = i \omega \tau u (\xi s) / 2 \gamma;$$

$$L_{12}^{\xi} - L_{21}^{\xi} = i \{ u (2+u) \omega^2 \tau^2 / 4 (1+u) + \\ + u / \gamma^2 (1+u) \} (\xi v) + u \psi (\xi s) / \gamma (1+u) + u \beta (\xi v s) / \gamma (1+u), \quad (10.93)$$

где  $(\xi v s)$  — смешанное произведение  $(\xi [v s])$ ,  $s = w / \omega$ .

Выполняя интегрирование по относительному времени  $\tau$ , приходим к формуле (10.80) с  $F_{ik}^p = F_{ik} + F_{ik}^c$ , причем зависящие от спина добавки к  $F_{ik}$  (10.81) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{\pm}^c &= F_{11}^c + F_{22}^c = u \sqrt{2(1-nv)} [(2+u)\beta(\xi v) - \\ &\quad - (\xi vs)/\gamma] K_{2/3}(\xi)/(1+u); \\ F_{\pm}^c &= F_{11}^c - F_{22}^c = [-\sqrt{2(1-nv)} u (\xi vs) K_{2/3}(\xi)]/\gamma; \\ F_{12}^c + F_{21}^c &= [\sqrt{2(1-nv)} u (\xi s) K_{2/3}(\xi)]/\gamma; \\ F_{12}^c - F_{21}^c &= i\{[u/\gamma^2(1+u)] - 2u(2+u)(1-nv)/(1+u)\} (\xi v) + \\ &\quad + u\psi(\xi s)/[\gamma(1+u)] + u\beta(\xi vs)/[\gamma(1+u)] K_{1/3}(\xi). \end{aligned} \right\} (10.94)$$

Интегрируя по углу  $\psi$ , что удобно сделать в формуле (10.93), проводя интегрирование одновременно по  $\tau$ , и  $\psi$ , получаем для  $G_{ik}^p = G_{ik} + G_{ik}^c$  в формуле (10.82) зависящее от спина добавки к (10.83):

$$\left. \begin{aligned} G_{\pm}^c &= G_{11}^c + G_{22}^c = \mu u [(2+u)\beta(\xi v) - \\ &\quad - (\xi vs)/\gamma] K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta)/(1+u); \\ G_{\pm}^c &= G_{11}^c - G_{22}^c = -\mu u (\xi vs) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta)/\gamma; \\ G_{12}^c + G_{21}^c &= \mu u (\xi s) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta)/\gamma; \\ G_{12}^c - G_{21}^c &= -i\{[u(2+u)\mu^2 [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]/2(1+u) - \\ &\quad - uK_{1/3}^2(\eta)/\gamma^2(1+u)] (\xi v) - u\beta(\xi vs) K_{1/3}^2(\eta)/\gamma(1+u)\}, \end{aligned} \right\} (10.95)$$

причем параметры Стокса  $\xi$  определяются соотношениями [ср. (1.72)]:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{G_{12}^p + G_{21}^p}{G^p}; \quad \xi_2 = i \frac{G_{12}^p - G_{21}^p}{G^p}; \\ \xi_3^p &= \frac{G_{11}^p - G_{22}^p}{G^p}; \end{aligned} \right\} (10.96)$$

где  $G^p = \text{Sp}(G_{ik}^p) = G_{11}^p + G_{22}^p = G + G^c$ .

В случае  $\chi \ll 1$  и  $u \sim \chi \ll 1$  и все члены, содержащие вектор поляризации  $\xi$  (и имеющие порядок  $u \sim \chi \ll 1$ ), можно опустить (естественно, члены, зависящие от спина, содержат дополнительную степень  $\hbar$ ). В случае  $\chi \gg 1$  основной вклад в изучение дает область  $u \sim 1$  и члены с  $u$  становятся существенными. В частности, при  $\beta = 0$  круговая часть поляризации излучения не обращается в нуль и становится пропорциональной величине проекции спина электрона на направление движения ( $\xi v$ ).

В области  $1 \ll u \leq \chi$ , которая, как отмечалось, дает вклад в излучение порядка  $\chi^{-2/3}$  по сравнению с основной областью  $u \sim 1$ ,

имеем из (10.96):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2(\xi s) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / \mu \gamma \tilde{G}; \\ \xi_2 &= [(\xi v) (K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)) + 2\beta K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / \mu] / \tilde{G}; \\ \xi_3 &= -2(\xi vs) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / (\mu \gamma \tilde{G}), \end{aligned} \right\} (10.97)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= 2G^p (u \gg 1) / \mu \mu^2 = K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta) + \\ &+ 2\beta K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) (\xi v) / \mu. \end{aligned}$$

Видно, что в рассматриваемом случае спиновые характеристики в значительной степени определяют поляризацию излучения. Например, в случае, когда вектор спина параллелен скорости  $\mathbf{v}$  и  $\xi^2 = 1$  (с релятивистской точностью  $|\mathbf{v}| = 1$ ), имеем:

$$\xi_1 = \xi_3 = 0; \quad \xi_2 = (\xi v) = \pm 1, \quad (10.98)$$

так что излучение полностью поляризовано по кругу.

Если  $\xi v = 0$ , то излучение является частично эллиптически поляризованным, причем степень линейной поляризации  $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$  и степень круговой поляризации  $\xi_2$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} &= (2/\mu \gamma) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / [K_{1/3}^2(\eta) + \\ &+ K_{2/3}^2(\eta)]; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\xi s / (\xi vs); \\ \xi_2 &= (2\beta/\mu) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]; \\ \xi &= \sqrt{\xi^2} = [2K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta) / K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)], \end{aligned} \right\} (10.99)$$

где угол  $\varphi$  характеризует направление линейной поляризации [см. (1.68)] и отсчитывается от направления ускорения в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{v}$ ;  $\xi$  — степень поляризации излучения.

Проинтегрированное по всем углам выражение для поляризационной матрицы плотности имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} dI &= (e^2/4\pi^2) (m^2/\sqrt{3} \hbar^2) (udu/(1+u)^3) \times \\ &\times \left[ \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy + u^2 K_{2/3}(2u/3\chi)/(1+u) - \right. \\ &\quad \left. - u(\xi vs) K_{1/3}(2u/3\chi)/(1+u) \right]; \\ dI_- &= (e^2/4\pi^2) (m^2/\sqrt{3} \hbar^2) (udu/(1+u)^3) \times \\ &\quad \times [K_{2/3}(2u/3\chi) - u(\xi vs) K_{1/3}(2u/3\chi)]; \\ dI_{12} + dI_{21} &= (e^2/4\pi^2) (m^2/\sqrt{3} \hbar^2) (u^2 du/(1+u)^3) (\xi s) K_{1/3}(2u/3\chi); \\ dI_{12} - dI_{21} &= -i (e^2/4\pi^2) (m^2/\sqrt{3} \hbar^2) \times \\ &\times (u^2 du/(1+u)^4) \left[ \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(y) dy + u K_{2/3}(2u/3\chi) \right] (\xi v). \end{aligned} \right\} (10.100)$$

При  $\chi \ll 1$  основной вклад в излучение дает область  $u \sim \chi$ , и поскольку все зависящие от  $u$  члены содержат лишнюю степень  $u$ , то это означает, что в основной области они содержат дополнительную степень  $\chi$ . Такое же утверждение сохраняется и для проинтегрированных по частотам ( $u$ ) выражениям для интенсивности.

При  $\chi \gg 1$  основной вклад в излучение дает область  $u \sim 1$ . Разлагая в (10.100)  $K_\nu$ -функции в области малых значений аргумента (3.24), получаем

$$\left. \begin{aligned} dI &= (e^2/8\pi^2)m^2 \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} u^{1/3} [1 + (1 + u)^2] du / [V\sqrt{3} \hbar^2 (1 + u)^4]; \\ dI_- &= (e^2/8\pi^2) m^2 \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} u^{1/3} du / [V\sqrt{3} \hbar^2 (1 + u)^3]; \\ dI_{12} + dI_{21} &= 0; \\ dI_{12} - dI_{21} &= -i (e^2/8\pi^2) m^2 \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} u^{4/3} (2 + u) (\zeta \mathbf{v}) du / [V\sqrt{3} \hbar^2 (1 + u)^4]. \end{aligned} \right\} (10.101)$$

Следовательно, при  $\chi \gg 1$  параметры Стокса

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0; & \xi_2 &= u(2 + u) (\zeta \mathbf{v}) / (2 + 2u + u^2); \\ \xi_3 &= (1 + u) / (2 + 2u + u^2). \end{aligned} \right\} (10.102)$$

Проинтегрировав (10.101) по  $u$ , найдем главные члены разложения величин по обратным степеням  $\chi$ :

$$\left. \begin{aligned} I &= (e^2/\pi) (8\Gamma(2/3)/3^5) (m^2/\hbar^2) (3\chi)^{2/3}; \\ I_- &= (e^2/\pi) (\Gamma(2/3)/4 \cdot 3^3) (m^2/\hbar^2) (3\chi)^{2/3}; \\ I_{12} - I_{21} &= -i (e^2/2\pi) (11\Gamma(2/3)/3^5) (m^2/\hbar^2) (3\chi)^{2/3} (\zeta \mathbf{v}), \end{aligned} \right\} (10.103)$$

так что параметры Стокса:

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = 11 (\zeta \mathbf{v}) / 16; \quad \xi_3 = 9/32. \quad (10.104)$$

При  $\zeta \mathbf{v} = 0$  приходим к (10.90), при  $\zeta \mathbf{v} = \pm 1$  степень поляризации излучения  $\xi = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{565/32} \approx 3/4$ .

Обсудим теперь полученные выше результаты с точки зрения инвариантности относительно дискретных  $P$ - и  $T$ -преобразований. Свойства входящих комбинаций приведены в табл. 3.1. Эти свойства очевидны, специального комментария требуют, пожалуй, только свойства параметров Стокса  $\xi_i$ . Дело в том, что мы вводим подвижные оси поляризации  $\mathbf{s} = \mathbf{w}/\omega$  и  $[\mathbf{ns}]$  [см. (2.11)], причем комбинация вида  $(\mathbf{es})$  ( $\mathbf{e} [\mathbf{ns}]$ ) меняет знак при  $P$ - и  $T$ -преобразованиях. Поэтому параметр Стокса  $\xi_1$ , связанный с компонентами поляризационной матрицы  $\rho_{12} + \rho_{21}$ , обладает указанными в таблице свойствами. Параметр Стокса  $\xi_3$ , связанный с компонентами  $\rho_{11} - \rho_{22}$ , очевидно, не меняется при  $P$ - и  $T$ -преобразованиях, как и комбинации  $(\mathbf{es})$  ( $\mathbf{es}$ ) и  $(\mathbf{ens})$  ( $\mathbf{ens}$ ). Параметр Стокса  $\xi_2$  — среднее значение спиральности, это определяет его свойства.

С принятой точностью  $(ns) = \psi$ ,  $(nvs) = \beta$  и легко убедиться в том, что в полученные выше формулы (10.79)–(10.104) входят комбинации величин в согласии с табл. 3. Обсудим в качестве примера формулы (10.100). Интенсивности  $dI$  и  $dI_-$  ( $\xi_3$ ) должны быть  $P, T$  четны, так что спин в них входит только в виде  $P, T$  четной комбинации ( $\xi vs$ ), комбинация  $dI_{12} + dI_{21}$  ( $\xi_1$ ) должна быть  $P, T$  нечетной (единственная возможная комбинация  $\xi s$ ), а комбинация

Таблица 3  
Свойства величин  
 $P$ - и  $T$ -преобразованиях

Величина	$P$	$T$
$\xi v$	—	+
$\xi s$	—	—
$\xi [vs]$	+	+
$ns$	+	—
$n [vs]$	—	+
$\xi s^{orig}$	—	—
$\xi s_2$	—	+
$\xi s_3$	+	+

$dI_{12} - dI_{21}$  ( $\xi_2$ )  $P$  — нечетна,  $T$  — четна (комбинация  $\xi v$ ).

10.6. Поляризац и о н н ы е свойства излучения скалярных частиц. Как уже отмечалось ранее выражения для интенсивности и вероятности излучения скалярных частиц получаются из соответствующих формул для электронов, если в последних отбросить члены с  $u^2$ . Такая же ситуация имеет место и для поляризационной матрицы излучения скалярных частиц. Если в формулах (10.79), (10.81), (10.83), (10.84) и (10.87) отбросить члены с  $u^2$ , то они по форме будут совпадать с соответствующими классическими выражениями. Отличия имеются только в показателе экспоненциального множителя в (10.79) (фактор  $\epsilon/\epsilon_f$ )

и в аргументах  $K_v$ -функций [где  $\hbar\omega/\epsilon \rightarrow \hbar\omega/(\epsilon - \hbar\omega)$ ], а также в общем множителе (фактор  $\epsilon/\epsilon_f$ ). С учетом этого обстоятельства для параметров Стокса до интегрирования по частоте фотона можно пользоваться классическими формулами.

Для проинтегрированной по частоте интенсивности имеем  $I_{12} = I_{21} = 0$ ;  $I_s = I_{11} + I_{22}$  найдено выше [см. (10.64) и (10.67)], а  $I_-$  для скалярных частиц такое же, как для электронов [см. (10.88) и (10.89)]. При  $\chi \gg 1$  имеем

$$\xi_1 = \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = I_-/I_s = 1/2. \quad (10.105)$$

## § 11. РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ФОНОМ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

11.1. Метод рассмотрения. Развитый в § 9 метод рассмотрения процесса излучения во внешнем поле можно без труда обобщить для рассмотрения других электромагнитных процессов. В низшем порядке теории возмущений по взаимодействию с полем излучения такими процессами являются рождение пары фотоном и однофотонная аннигиляция пары во внешнем поле.

Матричный элемент процесса рождения пары имеет вид [ср. (9.6)].

$$U_{fi} = [e/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}] \langle q | \int \exp[-i\omega t] \cdot M(t) dt | \bar{q} \rangle, \quad (11.1)$$



где

$$M(t) = \exp(i\mathcal{H}t) (1/\sqrt{\mathcal{H}}) \Psi_s^+ (\mathbf{P}, \mathcal{H}) [e_j (\mathbf{P}, \mathcal{H}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})/2 + \\ + \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) e_j (\mathbf{P}, -\mathcal{H})/2] \Psi_{\bar{s}} (\mathbf{P}, -\mathcal{H}) (1/\sqrt{\mathcal{H}}) \exp(i\mathcal{H}t). \quad (11.2)$$

Здесь в электромагнитной вершине рождается частица [с положительной частотой  $\Psi_s (\mathbf{P}, \mathcal{H})$ ] и античастица [с отрицательной частотой  $\Psi_{\bar{s}} (\mathbf{P}, -\mathcal{H})$ ];  $|q\rangle, |\bar{q}\rangle$  — вектора состояния, описывающие волновые пакеты частицы и античастицы;  $s, \bar{s}$  — индексы спиновых состояний.

Пронся оператор  $\exp(i\mathcal{H}t)$  в (11.2) направо, что соответствует переходу к гейзенберговским операторам ( $\exp(i\mathcal{H}t) A = \exp(i\mathcal{H}t) A \exp(-i\mathcal{H}t) \exp(i\mathcal{H}t) = A(t) \exp(i\mathcal{H}t)$ ), получаем:

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \Psi_s^+ [\mathbf{P}(t), \mathcal{H}] \frac{1}{2} \{e_j [\mathbf{P}(t), \mathcal{H}] \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] + \\ + \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] e_j [\mathbf{P}(t), -\mathcal{H}]\} \Psi_{\bar{s}} (\mathbf{P}(t), -\mathcal{H}) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \exp(2i\mathcal{H}t). \quad (11.3)$$

Перенося в выражении (11.3)  $\exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)]$  направо с помощью соотношения (9.14), имеем

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \Psi_s^+ (P) \frac{1}{2} [e_j (P) + e_j (-P')] \Psi_{\bar{s}} (-P') \times \\ \times (1/\sqrt{\mathcal{H}'}) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] \exp(2i\mathcal{H}t), \quad (11.4)$$

где

$$\mathbf{P}' = \mathbf{k} - \mathbf{P}; \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathbf{k} - \mathbf{P}); \quad P = (\mathcal{H}(\mathbf{P}), \mathbf{P}),$$

$$P' = (\mathcal{H}(\mathbf{k} - \mathbf{P}), \mathbf{k} - \mathbf{P}) = (\mathcal{H}', \mathbf{P}').$$

Нас будет интересовать вероятность перехода, просуммированная по конечным состояниям родившейся пары. Процедуру суммирования будем проводить в два этапа. Прежде всего просуммируем по конечным состояниям античастицы, воспользовавшись условием полноты  $\sum |\bar{q}\rangle \langle \bar{q}| = I$  [ср. (9.12)], тогда получим

$$d\omega = \frac{\alpha}{(2\pi)^2 \omega} \sum_q \langle q | \int dt_1 \int dt_2 \exp[-i\omega(t_2 - t_1)] M(t_2) M^+(t_1) | q \rangle. \quad (11.5)$$

Рассмотрим входящую в это выражение комбинацию [ср. (9.15)]:

$$L_p(t) = \exp(-i\omega t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_2) \exp(2i\mathcal{H}t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1), \quad (11.6)$$

которую мы представим в виде

$$L_p(\tau) = \exp(-i\omega\tau) \exp(i\mathcal{H}\tau) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \exp(i\mathcal{H}\tau) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) = \\ = \exp[i(\mathcal{H} - \omega)\tau] \exp[i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{k})\tau], \quad (11.7)$$

где мы воспользовались тем, что  $\exp(i\mathcal{H}\tau)$  — оператор сдвига по времени, а  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  — оператор сдвига в импульсном пространстве. Дальнейшее рассмотрение аналогично проведенному в § 9. Продифференцировав (11.7) по  $\tau$ , находим

$$dL_p/d\tau = i \exp[i(\mathcal{H} - \omega)\tau] [\mathcal{H} - \omega + \mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{k})] \exp[i\mathcal{H}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{k})\tau] = \\ = i [\mathcal{H} - \omega + \mathcal{H}(\mathbf{P}(t_1 + \tau) - \mathbf{k})] L_p(\tau). \quad (11.8)$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия  $L_p(0) = 1$ , имеем

$$L_p(\tau) = T \exp \left\{ i \left[ (\mathcal{H} - \omega)\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H}[\mathbf{P}(t) - \mathbf{k}] dt \right] \right\}, \quad (11.9)$$

где  $T$  — оператор хронологического произведения.

Далее следует учесть, что (как и в § 9) мы будем рассматривать случай, когда родившиеся частица и античастица являются ультрарелятивистскими. Ниже убедимся, что при  $H/H_0 \ll 1$  только такой случай представляет физический интерес. В такой ситуации основной вклад в вероятность процесса дает область скоростей конечной частицы, для которой  $1 - \mathbf{p}\mathbf{v} \sim 1/\gamma^2$ , где  $\mathbf{p}$  — направление движения начального фотона. Физически это означает, что родившаяся частица движется в начальный момент времени в направлении движения фотона, а взаимодействие фотон-частица остается существенным, пока частица не повернется на угол  $\sim 1/\gamma$ , так что картина весьма похожа на картину магнитотормозного излучения, а взаимодействие на длине поворота на угол  $\sim 1/\gamma$  соответствует излучению с длины когерентности. Учитывая, что для реальных фотонов  $k^2 = 0$ , имеем [см. (9.20) и (9.23)]

$$\mathcal{H}(\mathbf{P} - \mathbf{k}) = \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{P})^2 + m^2} = \sqrt{(\omega - \mathcal{H})^2 + 2(kP)} = \\ = (\omega - \mathcal{H}) [1 + kP/(\omega - \mathcal{H}) + \dots]. \quad (11.10)$$

На основании аргументов, которые привели нас от формулы (9.22) к формуле (9.25), имеем

$$L_p(\tau) = \exp \{ i \mathcal{H} (kx_2 - kx_1) / (\omega - \mathcal{H}) \}. \quad (11.11)$$

Подставляя этот результат в формулу (11.5) и переходя к классическим средним [см. (9.27)], получаем вероятности рождения пары

в единицу времени:

$$dW = dw/dt = [\alpha d^3 p / (2\pi)^2 \omega] \int d\tau \exp [i \varepsilon (kx_2 - kx_1) / \varepsilon_f] \times \\ \times R_p(t_2) R_p^*(t_1), \quad (11.12)$$

где

$$R_p(t) = \Psi_s^{\pm}(p) (e [j(p) + j(-p')]) \Psi_s^{\mp}(-p') / 2 \sqrt{\varepsilon \varepsilon'}; \quad (11.13)$$

$$\varepsilon_f = \omega - \varepsilon; \quad \varepsilon' = \sqrt{p'^2 + m^2}; \quad p' = k - p.$$

В формуле (11.12) проводится суммирование по конечным состояниям частицы с учетом того, что  $\sum \rightarrow d^3 p$ . К формулам (11.12)

и (11.13) можно прийти от формул (9.27) и (9.28) с помощью правил подстановки  $p' \rightarrow p$  (замена обозначений для выходящей частицы);  $p \rightarrow -p'$ ,  $k \rightarrow -k$ ,  $s' \rightarrow s$ ,  $s \rightarrow \bar{s}$  (правило подстановки);  $t_1 \leftrightarrow t_2$  (переход к однотипной записи). При замене  $p \rightarrow -p'$   $\Psi_s^{\pm}(p) \rightarrow \Psi_s^{\mp}(-p')$  (переход от входящей частицы к выходящей античастице, при такой замене волна с положительной частотой  $\exp(-ipx) \rightarrow \exp(ip'x)$ , т. е. волну с отрицательной частотой), так что  $\Psi_s^{\mp}(-p')$  описывает выходящую античастицу.

Для частиц со спином 1/2 выражение для  $R(t)$  [см. (10.3)] имеет вид

$$R(t) = m \bar{u}_s(p) \hat{e} u_{\bar{s}}(-p') / \sqrt{\varepsilon \varepsilon'} = \\ = m \bar{u}_s(p) \hat{e} v_{\bar{s}}(p') / \sqrt{\varepsilon \varepsilon'}, \quad (11.14)$$

и для частиц со спином 0 [см. (10.58)]

$$R(t) = (ep - ep') / 2 \sqrt{\varepsilon \varepsilon'}. \quad (11.15)$$

Наконец, отметим, что в соответствии с результатами § 9 развитый подход пригоден для рассмотрения процесса рождения пары фотоном в любом квазистационарном, не слишком неоднородном [см. (3.1), (3.2)] поле (фактически в любом макроскопическом электромагнитном поле).

11.2. Рождение пар частиц поляризованным фотоном. Рассмотрим рождение электрон-позитронной пары поляризованным фотоном. В качестве векторов, на которые будем проектировать поляризацию фотона, выберем единичные векторы, перпендикулярные\* направлению движения фотона  $n$ :

$$e_1 = \frac{[nH] + E_{\perp}}{|[nH] + E_{\perp}|}; \quad e_2 = [ne_1]; \quad E_{\perp} = E - n(nE). \quad (11.16)$$

\* Эти вектора зависят от времени. Но для полей, удовлетворяющих неравенствам (3.1), (3.2), с принятой точностью их можно считать постоянными в течение процесса.

Подставляя (11.14) в (11.12), выполняя суммирование по спидам родившейся электрон-позитронной пары, проводя разложение типа (10.10), (10.11) и переходя к углам  $\psi$ ,  $\beta$ , получаем для вероятности рождения пары выражение

$$dW_e(\mathbf{e}) = [-\alpha/(2\pi)^2] \cdot [d^3 p/\omega] \cdot [2\varepsilon/\varepsilon_f] \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ |\mathbf{e}\mathbf{e}_1|^2 [\psi^2 + (\varepsilon^2 + \varepsilon_f^2) \omega^2 \tau^2 / (8\varepsilon\varepsilon_f)] + |\mathbf{e}\mathbf{e}_2|^2 [\beta^2 + \omega^2 \tau^2 / (8\varepsilon\varepsilon_f)] + (\mathbf{e}^* \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}\mathbf{e}_2) \beta [\psi - (\varepsilon^2 + \varepsilon_f^2) \omega \tau / (8\varepsilon\varepsilon_f)] + (\mathbf{e}^* \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}\mathbf{e}_1) [\psi + (\varepsilon^2 + \varepsilon_f^2) \omega \tau / (8\varepsilon\varepsilon_f)] \beta \} \times \exp\{i \varepsilon \omega \tau (1 - n\nu + \omega^2 \tau^2 / 24) / \varepsilon_f\}, \quad (11.17)$$

где углы  $\beta$ ,  $\psi$ , характеризующие движение электрона, вводятся так же, как для случая излучения. Форма записи в (11.17) эквивалентна записи в виде поляризационной матрицы, причем коэффициенты при  $(\mathbf{e}^* \mathbf{e}_i)$   $(\mathbf{e}\mathbf{e}_k)$  суть компонента  $(ik)$  поляризационной матрицы. Формулу (11.17) можно получить из формул (10.77) и (10.79) заменой  $(1 + u) \rightarrow -\varepsilon/\varepsilon_f$ ,  $u^2 \rightarrow \omega^2/\varepsilon_f^2$ , что является следствием упомянувшегося выше правила подстановки, а также  $d^3 k \rightarrow d^3 p$ . Усредняя по поляризациям фотона, имеем

$$dW_e = [\alpha/(2\pi)^2] \cdot [d^3 p/\omega] \cdot [\varepsilon/\varepsilon_f] \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [1/\gamma^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon_f^2) \times \omega^2 \tau^2 / (4\varepsilon\varepsilon_f)] \exp\{i \varepsilon \omega \tau (1 - n\nu + \omega^2 \tau^2 / 24) / \varepsilon_f\}. \quad (11.18)$$

Эту же формулу можно найти из (10.12) с помощью тех же замен:

$$1 + u \rightarrow -\varepsilon/\varepsilon_f; \quad u^2 \rightarrow \omega^2/\varepsilon_f^2; \quad d^3 k \rightarrow d^3 p.$$

Принтегрировав по относительно времени  $\tau$  и азимутальному углу  $\psi$  [см. (10.15) и (10.16)], найдем для вероятности рождения пары поляризованным фотоном во внешнем поле в единицу времени:

$$dW_e(\mathbf{e}) = [4/3\pi^2] \cdot [\alpha m^2/\omega \kappa] dx dy \operatorname{ch}^3 x \{ |\mathbf{e}\mathbf{e}_1|^2 \operatorname{ch}^2 x [\operatorname{ch}^2 y K_{1/3}^2(\eta) + \operatorname{sh}^2 y K_{2/3}^2(\eta)] + |\mathbf{e}\mathbf{e}_2|^2 [\operatorname{ch}^2 x [\operatorname{sh}^2 y K_{1/3}^2(\eta) + \operatorname{ch}^2 y K_{2/3}^2(\eta)] + K_{1/3}^2(\eta)] - i [(\mathbf{e}^* \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}\mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}^* \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}\mathbf{e}_1)] \} \times \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x (2\operatorname{ch}^2 y - 1) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta), \quad (11.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= Hk_{\perp}/H_0 m = e \sqrt{|F_{\mu\nu} k^{\nu}|^2/m^3}; \\ \operatorname{sh} x &= \gamma\beta; \quad \operatorname{ch} x = \gamma\mu; \\ \operatorname{ch}^2 y &= \omega^2/4\varepsilon\varepsilon_f, \quad \eta = 4 \operatorname{ch}^2 y \cdot \operatorname{ch}^3 x / 3\kappa; \\ -\infty &\leq y \leq \infty; \quad -\infty \leq x \leq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Усредняя по поляризациям фотона, получаем

$$dW_e = [2/3\pi^2] \cdot [\alpha m^2 / \omega \kappa] dx dy F(x, y) \operatorname{ch}^3 x, \quad (11.21)$$

здесь

$$F(x, y) = K_{1/3}^2(\eta) + \operatorname{ch}^2 x (2\operatorname{ch}^2 y - 1) [K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)]. \quad (11.22)$$

Эта формула следует также из (10.17), если учесть, что  $\kappa = \omega \chi / \varepsilon$  с помощью указанных выше замен. Такое же соотношение и между формулами (10.82), (10.83) и (11.19).

Выражение (11.19) удобно представить через параметры Стокса фотона  $\xi$  [ср. (1.75)]:

$$dW_e(\xi) = dW_e(1 + \xi \lambda), \quad (11.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = [2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x (2\operatorname{ch}^2 y - 1) K_{1/3}(\eta) K_{2/3}(\eta)] / F(x, y); \\ \lambda_3 = [\operatorname{sh}^2 x K_{1/3}^2(\eta) - \operatorname{ch}^2 x K_{2/3}^2(\eta)] / F(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

Вычисление спектра конечных частиц производится аналогично расчету, проведенному в § 10 [см. (10.24) и (10.25)], в результате получаем

$$\begin{aligned} dW_e(\mathbf{e}) = \frac{\alpha m^2}{2\pi \sqrt{3} \omega \operatorname{ch}^2 y} \left\{ (\mathbf{e}\mathbf{e}_1)^2 \left[ (4\operatorname{ch}^2 y - 1) K_{2/3}(\xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \right] + (\mathbf{e}\mathbf{e}_2)^2 \left[ (4\operatorname{ch}^2 y + 1) K_{2/3}(\xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \right] \right\} dy, \quad (11.25) \end{aligned}$$

где

$$\xi = 8 \operatorname{ch}^2 y / 3\kappa, \quad -\infty \leq y \leq \infty. \quad (11.26)$$

Заметим, что, как и в случае магнитотормозного излучения, после интегрирования по полярному углу вылета конечной частицы пропадает зависимость от циркулярной поляризации фотона. Выражение (11.25) находим также из (10.87) с помощью указанных выше замен, причем  $udu/(1+u)^3 \rightarrow dy/2 \operatorname{ch}^2 y$ .

Усредняя по поляризациям фотона, получаем

$$dW_e = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3} \pi \omega \operatorname{ch}^2 y} \left[ 4 \operatorname{ch}^2 y K_{2/3}(\xi) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} K_{5/3}(\xi) \right] dy. \quad (11.27)$$

Для выполнения интегрирования по спектру следует в интегралах по  $y$ , содержащих  $\int_{\xi}^{\infty} K_{5/3} dx$ , провести интегрирование по частям и воспользоваться рекуррентным соотношением ([52], с. 984)

$$K_{5/3}(z) = K_{1/3}(z) + 4K_{2/3}(z)/3z. \quad (11.28)$$

В результате находим полную вероятность рождения электрон-позитронной пары поляризованным фотоном во внешнем поле:

$$\begin{aligned} W_e(e) = & \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi\omega} \int_0^{\infty} \{(\mathbf{e}\mathbf{e}_1)^2 [(3 - 5 \operatorname{th}^2 y/3) K_{2/3}(\xi) - \\ & - 16 \operatorname{sh}^2 y K_{1/3}(\xi)/3\kappa] + (\mathbf{e}\mathbf{e}_2)^2 [(5 - 11 \operatorname{th}^2 y/3) K_{2/3}(\xi) - \\ & - 16 \operatorname{sh}^2 y K_{1/3}(\xi)/3\kappa]\} dy. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Наконец, усредняя по поляризациям, имеем

$$\begin{aligned} W_e = & 4\alpha m^2 / \sqrt{3}\pi\omega \int_0^{\infty} [(1 - 2 \operatorname{th}^2 y/3) K_{2/3}(\xi) - \\ & - 4 \operatorname{sh}^2 y K_{1/3}(\xi)/3\kappa] dy. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Рассмотрим полную вероятность в зависимости от значений параметра  $\kappa$ . При  $\kappa \ll 1$  и при любых  $y$   $\xi = 8 \operatorname{ch}^2 y/3\kappa \gg 1$ , поэтому во всей области изменения  $y$  можно пользоваться асимптотическим разложением  $K_\nu(z)$  при  $z \gg 1$  (3.24). Тогда интегралы в (11.19) и (11.30) легко вычисляются, если учесть, что основной вклад в них дают значения  $y \ll 1$ , т. е. можно разложить входящие гиперболические функции. В результате находим ряды по степеням  $\kappa$ , главный член которых для поляризованных фотонов

$$W_e(e) = (\alpha m^2 \kappa / \omega) (1/8) \sqrt{3/2} \exp(-8/3\kappa) [(\mathbf{e}\mathbf{e}_1)^2 + 2(\mathbf{e}\mathbf{e}_2)^2], \quad \kappa \ll 1 \quad (11.31)$$

и для усреднений по поляризациям вероятности

$$W_e = [3\sqrt{3}\alpha m^2 \kappa / (16\sqrt{2}\omega)] \exp(-8/3\kappa). \quad (11.32)$$

В области  $\kappa \ll 1$  вероятность процесса экспоненциально мала. Такая ситуация характерна для всех процессов с конечным скачком квадрата 4-импульса системы (инвариантной массы системы). Проведем с этой точки зрения сравнение процесса рождения пар с процессом излучения во внешнем поле. Для процесса рождения пары скачок 4-импульса системы  $\Delta_p^2 = (p + p')^2 - k^2 = (p + p')^2$ ,  $(\Delta_p^2)_{\text{мин}} = 4m^2$ , в то время как для процесса излучения  $\Delta_p^2 = (p' + k)^2 - p^2 = 2kp' = 2e'\omega (1 - \mathbf{p}\mathbf{v}') \approx m\omega (1 + \gamma'^2\theta^2)/\gamma'$ . Итак,

при заданной частоте  $(\Delta_r^2)_{\text{мин}} = t\omega/\gamma'$ . Если при  $\chi \ll 1$  излучаемые частоты (5.43)  $\omega \sim \omega_0 \gamma'^3 \ll \epsilon$ , то  $\gamma' \sim \gamma$  и  $(\Delta_r^2)_{\text{мин}} \ll (\Delta_p^2)_{\text{мин}}$ . Так как скачок инвариантной массы обусловлен передачей импульса полю, то из приведенных соотношений следует, что когда передача импульса полю (или скачок инвариантной массы) становится значительным, вероятность процесса при  $\chi \ll 1$  ( $\chi \ll 1$ ) экспоненциально подавляется (в частности это относится к излучению фотонов с большой частотой).

При  $\chi \gg 1$  и  $y \sim 1$  имеем  $dW_e/dy \sim \chi^{2/3}$  и при  $\text{ch}^2 y \sim \chi$   $dW_e/dy \sim 1$ , так что основной вклад в величину  $W_e$  дает область  $y \sim 1$  (аналогичная ситуация имеет место и в магнитотормозном излучении). Воспользовавшись асимптотическим разложением  $K_\nu$ -функций (3.24) и проводя соответствующие интегрирования, получаем вероятность рождения пары поляризованным фотоном:

$$W_e(\epsilon) = \frac{(2/3)^{1/3} \Gamma(5/6)}{7\Gamma(7/6)} \cdot \frac{\alpha m^2 \chi^{2/3}}{\omega} \cdot [2(\epsilon e_1)^2 + 3(\epsilon e_2)^2], \quad \chi \gg 1 \quad (11.33)$$

и для усредненной по поляризациям вероятности

$$W_e = \frac{5\Gamma(5/6)(2/3)^{1/3}}{14\Gamma(7/6)} \cdot \frac{\alpha m^2 \chi^{2/3}}{\omega}, \quad \chi \gg 1. \quad (11.34)$$

Функция  $W_e(\chi)/(\alpha m H/H_0)$  приведена на рис. 27. Эта функция достигает максимума, равного 0,11 при  $\chi \approx 11$ .

Рождение пар скалярных частиц можно рассмотреть аналогично изложенному выше с учетом того, что на каждом этапе указывается способ перехода от формул, описывающих магнитотормозное излучение (см. раздел 10.6), к формулам для рождения пар, поэтому ограничимся здесь только результатом. Вероятность рождения пары скалярных частиц поляризованным фотоном имеет вид:

$$dW_s(\xi) = dW_s(1 + \xi \lambda_s); \quad (11.35)$$

$$dW_s = [4/3\pi^2] \cdot [\alpha m^2/(\omega \chi)] dx dy [\text{ch}^2 x K_{2/3}(\eta) + \text{sh}^2 x K_{1/3}^2(\eta)]; \quad (11.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1s} &= 0; & \lambda_{2s} &= \frac{2 \text{sh} x \text{ch} x K_{1/3} K_{2/3}}{\text{ch}^2 x K_{2/3}^2 + \text{sh}^2 x K_{1/3}^2}; \\ \lambda_{3s} &= \frac{\text{ch}^2 x K_{2/3}^2 - \text{sh}^2 x K_{1/3}^2}{\text{ch}^2 x K_{2/3}^2 + \text{sh}^2 x K_{1/3}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

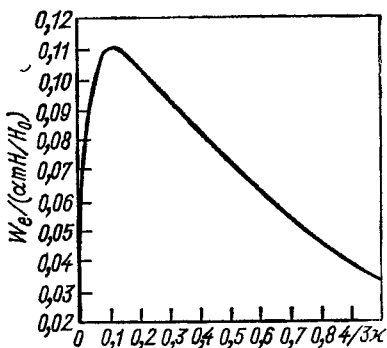


Рис. 27. Вероятность рождения пар в единицах  $\alpha m H/H_0$ .

Здесь введены те же обозначения, что и в (11.20). В этом случае  $\lambda^2 = 1$ , и при  $\xi = \lambda$  вероятность рождения пары максимальна:  $dW_s(\lambda) = 2W_s$  при  $\xi = -\lambda$  величина  $dW_s(-\lambda) = 0$ .

Асимптотические значения полной вероятности [ср. (11.32) и (11.34)] рождения пары скалярных частиц неполяризованным фотоном:

$$\left. \begin{aligned} W_s &= W_e/6 (\kappa \ll 1); \\ W_s &= W_e/5 (\kappa \gg 1). \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

11.3. Однофотонная аннигиляция электрон-позитронной пары. Рассмотрим процесс, обратный процессу рождения пары во внешнем поле, — однофотонную аннигиляцию пары, возможную также только во внешнем поле. Матричный элемент этого процесса — эрмитово сопряженный от  $U_{fi}$  (11.1). Входящая в выражение для вероятности процесса форма  $U_{fi}^\dagger U_{fi}$  содержит комбинацию  $|\bar{q}\rangle \langle \bar{q}'|$ . Воспользуемся искусственным приемом

$$|\bar{q}\mathbf{p}'\rangle \langle \bar{q}\mathbf{p}'| \rightarrow \sum_q |\bar{q}\rangle \langle \bar{q}| \delta(\mathbf{P} + \mathbf{p}') = \delta(\mathbf{P} + \mathbf{p}'), \quad (11.39)$$

где  $\mathbf{P}$  — оператор импульса, после чего выражение для вероятности сводится к среднему по одночастичным состояниям, как (11.5).

Поскольку рассматривается однофотонная аннигиляция пары частиц, движущихся по криволинейным траекториям в магнитном поле, затруднительно описать этот процесс (в отличие от процесса однофотонной аннигиляции в кулоновском поле) в терминах сечений. Удобным способом здесь является введение времени жизни частиц, движущихся в среде античастиц в магнитном поле (или наоборот).

Все выкладки с операторами, очевидно, тождественны с проведенными для случая рождения пары фотоном, так что можно исходить непосредственно из формулы (11.12), согласно которой вероятность процесса однофотонной аннигиляции может быть записана в виде

$$\begin{aligned} dW_a &= [\alpha/(2\pi)^2] \cdot [d^3\mathbf{k}/\omega] \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp[-ie(kx_2 - kx_1)/\varepsilon_f] \times \\ &\times R_a^*(t_2) R_a(t_1) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (11.40)$$

Это выражение можно использовать для частиц с любым спином. Интегрирование по конечным состояниям фотона сводится к интегрированию  $\delta$ -функции. После интегрирования по  $\tau$  получается выражение, зависящее от характеристик движения электрона. Однако так же, как в случае магнитотормозного излучения, интерес представляет вероятность, усредненная по азимутальному движению, которое, так же как при выводе формул (10.17) и (11.19), удобно



проводить одновременно с интегрированием по  $\tau$ . Результат следует из формулы (10.17), где положим

$$\begin{aligned} \gamma^2 \mu^2 &= 1 + \gamma^2 \sin^2 \beta = 1 + p_z^2/m^2; \\ p_z &= p \sin \beta; \quad u = -(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon' \end{aligned} \quad (11.41)$$

и учтем, что (11.40) необходимо умножить на  $(2\pi)^3 n/2\pi R'$  ( $1/R' = = |\mathbf{w}'|$ , а  $(2\pi)^3$  возникает из нормировки на объем  $1/(2\pi)^3$ ;  $n$  — плотность потока античастиц; множитель  $1/2\pi R'$  учитывает движение античастиц), а также разделить на  $1/4\pi$  (усреднение по спине античастиц и углу). В результате получаем для времени жизни

$$\begin{aligned} 1/\tau &= [\alpha/6\pi] \cdot \{ [nm^4/[\varepsilon^3 \varepsilon'^3 (\varepsilon + \varepsilon')]] \} (1 + p_z^2/m^2) \times \{ [(\varepsilon + \varepsilon')^2 + (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) p_z^2/m^2] K_{1/3}^2(\eta) + (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) (1 + p_z^2/m^2) K_{2/3}^2(\eta) \}; \quad (11.42) \end{aligned}$$

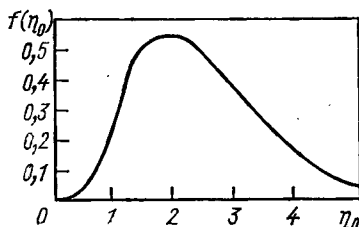


Рис. 28. Функция  $f(\eta_0)$ , описывающая однофотонную аннигиляцию электрон-позитронной пары.

$$\eta = (H_0/3H) \cdot [m(\varepsilon + \varepsilon')/(\varepsilon\varepsilon')] (1 + p_z^2/m^2)^{3/2} = (1/3\kappa) \cdot [(\varepsilon + \varepsilon')^2/(\varepsilon\varepsilon')] (1 + p_z^2/m^2)^{3/2}, \quad (11.43)$$

причем предполагается, что  $p_z = p \sin \beta \ll \varepsilon$  ( $p_z$  — проекция импульса электрона и позитрона в системе, где фотон летит перпендикулярно полю). Основной вклад в выражение (11.42) дает область, когда электрон и позитрон движутся в одном направлении и угол между их импульсами  $\sim 1/\gamma$ .

При  $\kappa \ll 1$   $\eta \gg 1$  и эффект экспоненциально мал в соответствии с утверждением, сделанным после формулы (11.32). В частности, при  $p_z = 0$  и  $\varepsilon = \varepsilon'$

$$\eta = \eta_0 = 2mH_0/3\varepsilon H, \quad (11.44)$$

и выражение для времени жизни можно представить в виде [61]

$$1/\tau = (\alpha n/m) (H/H_0)^5 f(\eta_0), \quad (11.45)$$

где

$$f(\eta_0) = \frac{81}{64\pi^3} \eta_0^5 [2K_{1/3}^2(\eta_0) + K_{2/3}^2(\eta_0)]. \quad (11.46)$$

Функция  $f(\eta_0)$  приведена на рис. 28. Воспользовавшись формулами (3.24), легко получить, что

$$\left. \begin{aligned} f(\eta_0) &= (3^5/2^7) \eta_0^4 \exp(-2\eta_0), \quad \eta_0 \gg 1; \\ f(\eta_0) &= [3^4 \Gamma^2(2/3) \sqrt{2}/2^7 \pi] \eta_0^{11/3}, \quad \eta_0 \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.47)$$

Вероятность аннигиляции достигает максимума при  $\varepsilon = 0,33 mH_0/H$ .

12.1. Диаграмма собственной энергии во внешнем поле. В квантовой электродинамике учет высших порядков по взаимодействию с полем излучения приводит, в частности, к перенормировке массы и появлению у частиц аномального магнитного момента (см. разд. 5.14). Рассмотрим, как модифицируются эти эффекты в присутствии внешнего электромагнитного поля

в низшем ( $\sim \alpha$ ) порядке теории возмущений по взаимодействию с полем излучения\*. Вычислим амплитуду, отвечающую диаграмме собственной энергии электрона во внешнем поле (рис. 29, а). Для простоты положим внешнее поле магнитным, хотя фактически результаты можно будет при-

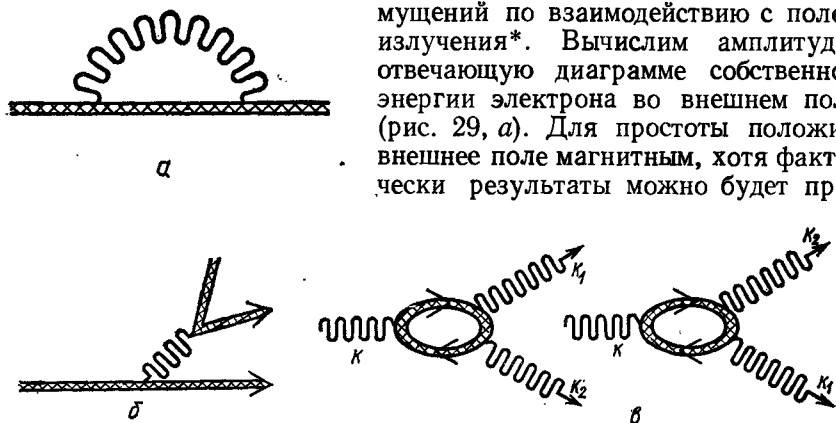


Рис. 29. Диаграмма собственной энергии электрона во внешнем поле (а) и диаграммы процессов высшего порядка: рожденные пары частиц (б) и расщепление фотона во внешнем поле (в).

менять и в произвольном внешнем поле. Переход к произвольному электромагнитному полю можно совершить также и при тех же ограничениях, как это было проведено в разделе 9.3.

Амплитуду, соответствующую диаграмме рис. 29, а можно записать в виде

$$T_{qq}^{(2)} = ie^2 \int d^4 x \int d^4 x' \bar{\Psi}_q(x) \gamma^\mu G(x, x') \gamma^\nu \Psi_q(x') \times D_{F\mu\nu}^e(x, x'), \quad (12.1)$$

где  $\Psi_q(x)$  — решение волнового уравнения для электрона во внешнем поле в состоянии с квантовыми числами  $q$ ;  $G(x, x')$  — функция Грина электрона в этом поле;  $D_{F\mu\nu}^e(x, x')$  — пропагатор фотона; в низшем порядке по  $\alpha$  в качестве  $D_{F\mu\nu}^e$  следует взять пропагатор фотона в отсутствие внешнего поля  $D_{F\mu\nu}(x - x')$ . Восполь-

\* В § 12 и 13 будем следовать работе [27].

зуемся представлением функции Грина, следующим из ее определения (5.160):

$$G(x, x') = \left\{ \begin{array}{l} -i \sum_q \Psi_q^{(+)}(x) \bar{\Psi}_q^{(+)}(x'), \quad x_0 > x'_0; \\ i \sum_q \Psi_q^{(-)}(x) \bar{\Psi}_q^{(-)}(x'), \quad x_0 < x'_0. \end{array} \right\} \quad (12.2)$$

и подставим это выражение в (12.1). Вычислим  $T_{qq}^{(2)}$  для ультрарелятивистских фермионов, движущихся во внешнем магнитном поле, когда применим операторный метод, развитый в § 9. Записав решения волнового уравнения в операторном виде, проделав необходимые коммутации и распутывание в каждой вершине ( $x$  и  $x'$ ) и перейдя к средним, как это было проведено для матричного элемента излучения (9.3), находим для (12.1)

$$T_{qq}^{(2)} = [e^2/(2\pi)^4] \sum_{\xi'} \int d^4k/(k^2 + i\epsilon) \times \\ \times \int dt \int_0^\infty d\tau [\bar{u}(\xi, p_2) \gamma^\mu u(\xi', p_2) \bar{u}(\xi', p_1) \gamma_\mu u(\xi, p_1) L_e(\tau) - \\ - \bar{u}(\xi, p_1) \gamma^\mu v(\xi', -p_1) \bar{v}(\xi', -p_2) \gamma_\mu u(\xi, p_2) L_p(\tau)], \quad (12.3)$$

где  $L_e(\tau)$ ,  $L_p(\tau)$  задаются формулами (9.22) и (11.9), в которых следует перейти от операторов к средним ( $\mathcal{H} \rightarrow \epsilon$ ,  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{p}$ );  $p_1 \equiv \mathbf{p}(t_1)$ ;  $p_2 \equiv \mathbf{p}(t_2)$ ;  $t_1 = t - \tau/2$ ;  $t_2 = t + \tau/2$ ;  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ . Интегрируя в (12.3) по  $dk_0$ , что соответствует переходу к нековариантной теории возмущений, в которой масса сохраняется, т. е.  $k^2 = 0$ , но энергия не сохраняется, получаем

$$T_{qq}^2 = [i\alpha/(2\pi)^2] \sum_{\xi'} \int d^3k/\omega \int dt \int_0^\infty d\tau [\bar{u}(\xi, p_2) \gamma^\mu u(\xi', p_2) \times \\ \times \bar{u}(\xi', p_1) \gamma_\mu u(\xi, p_1) L_1(\tau) - \bar{u}(\xi, p_1) \gamma^\mu v(\xi', -p_1) \times \\ \times \bar{v}(\xi', -p_2) \gamma_\mu u(\xi, p_2) L_2(\tau)], \quad (12.4)$$

здесь

$$L_1(\tau) = \exp \left\{ i \left[ (\epsilon - \omega)\tau - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \cdot \sqrt{(\epsilon - \omega)^2 + 2kp(t + \tau')} \right] \right\}; \\ L_2(\tau) = \exp \left\{ -i \left[ (\epsilon + \omega)\tau + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \sqrt{(\epsilon + \omega)^2 - 2kp(t + \tau')} \right] \right\}. \quad (12.5)$$

Если в выражении (12.4) устремить внешнее поле к нулю, то получающаяся амплитуда  $T_{qq}^{(2)}$  будет точной амплитудой для свободных частиц, поскольку для свободных частиц операторы импуль-

са, взятые в разные моменты времени, коммутируют между собой. Для частиц в поле эти выражения определены с точностью до членов  $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon$ . Члены в (12.4), не зависящие от внешнего поля, приводят к перенормировке массы свободной частицы. Здесь будем интересоваться только добавочным эффектом, связанным с присутствием внешнего поля. Считая, что проведена перенормировка массы свободной частицы, вычтем из  $T_{qq}^{(2)}$  (12.4) амплитуду для свободных частиц  $T_{qq}^{(2)0}$ , т. е. члены, не зависящие от поля.

Перейдем к вычислению  $T_{qq}^{(2)}$ , ограничившись старшими членами разложения по  $1/\gamma^2$ . Показатель экспоненты в  $L_2(\tau)$  никогда не бывает малым, поскольку «большие» члены ( $\varepsilon + \omega$ ) складываются. Это приводит к тому, что в (12.4) вклад члена с  $L_2$  в  $\gamma^2$  раз меньше, чем вклад члена с  $L_1$ , т. е. член с  $L_2$  можно отбросить. Интегрирование по  $\omega$  в  $L_1$  (12.5) ведется в пределах  $0 \leq \omega \leq \infty$ , однако, при  $\omega > \varepsilon$  в показателе экспоненты в  $L_1$  отсутствует компенсация, что так же приводит к подавлению интеграла по  $\tau$  при  $\omega > \varepsilon$  в  $\gamma^2$  раз, следовательно, с принятой точностью можно интегрировать в пределах  $0 \leq \omega \leq \varepsilon$ . Таким образом, с искомой точностью выражение (12.4) принимает вид

$$T_{qq}^{(2)} = [i\alpha/(2\pi)^2] \sum_{\xi'} \int dt \int_0^\varepsilon \omega d\omega \int d\Omega_k \int_0^\infty d\tau \bar{u}(\xi, \mathbf{p}_2) \gamma^\mu u(\xi', \mathbf{p}'_2) \times \\ \times \bar{u}(\xi', \mathbf{p}'_1) \gamma_\mu u(\xi, \mathbf{p}_1) L_1(\tau). \quad (12.6)$$

Как будет видно из дальнейшего,  $T_{qq}^{(2)}$  не содержит расходимостей. Вычислим  $T_{qq}^{(2)}$  в тех же предположениях, при которых проводились вычисления вероятности магнитотормозного излучения (см. § 9 и 10). Подынтегральное выражение в (12.6) имеет такой же вид, как квадрат матричного элемента излучения поляризованных в начальном состоянии частиц, так что, переходя к двухкомпонентной записи для входящих в (12.6) спиноров, получаем

$$\sum_{\xi'} \bar{u}(\mathbf{p}_2, \xi) \gamma^\mu u(\mathbf{p}'_2, \xi') \bar{u}(\mathbf{p}'_1, \xi') \gamma_\mu u(\mathbf{p}_1, \xi) = \\ = \varphi^+(\xi) [N_0 + iN\sigma] \varphi(\xi), \quad (12.7)$$

где

$$N_0 = \sum_\lambda (A_2^* A_1 + \mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1); \quad N = \sum_\lambda (A_2^* \mathbf{B}_1 - A_1 \mathbf{B}_2^* + [\mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1]). \quad (12.8)$$

Из (12.7) находим

$$\varphi^+(\xi) (N_0 + iN\sigma) \varphi(\xi) = N_0 + iN\xi, \quad (12.9)$$

где первый член не зависит от спина. Найденное выражение совпадает с вычисленным выше квадратом матричного элемента (10.91). Отметим здесь однозначное соответствие коэффициентов при  $\xi$  и  $\sigma$  в (12.7) и (12.9).

Явный вид членов  $N_0$  и  $\mathbf{N}$  был получен выше [для не зависящей от поляризации части  $N_0$  (10.12) и для зависящей от поляризации части  $\xi\mathbf{N}$ ,  $L^{\xi}$  в (10.93)]. С учетом этого можно записать (12.6) в виде

$$d\Gamma_{qq}^{(2)}/dt = [-\alpha\varepsilon/2\pi^2 \chi] \int_0^{\infty} u du / (1+u)^3 \int d\Omega \int_0^{\infty} d\tau \times \\ \times \exp\{-iuz(\tau + \tau^3/3)/\chi\} \{i z^{1/3} [1+u+z^{2/3}\tau^2(2+2u+u^2)] - \\ - z^{2/3} u\tau(\xi\mathbf{vs})\}. \quad (12.10)$$

Здесь

$$z = [2\gamma^2(1-nv)]^{3/2}; \quad s = w/w; \quad n = k/\omega; \quad (\xi\mathbf{vs}) = (\xi[\mathbf{vs}]).$$

В этой формуле мы перешли к новой переменной  $\tau \rightarrow 2^{3/2}(1-nv)\tau/w$  и опустили члены, обращающиеся в нуль при интегрировании по углам. Разобьем  $T_{qq}^{(2)}$  на два члена:

$$dT_{qq}^{(2)}/dt = T_0^{(2)} + T_{\xi}^{(2)}(\xi\mathbf{vs}) \quad (12.11)$$

и проведем интегрирование по  $\tau$ , воспользовавшись формулами (3.17), а также следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} dx x \cos[3a(x+x^3/3)/2] &= L_{2/3}(a); \\ \int_0^{\infty} dx x \sin[\frac{3a}{2}(x+x^3/3)] &= 2/3a - \int_0^{\infty} dx x^2 \times \\ &\times \sin[\frac{3a}{2}(x+x^3/3)] = L_{1/3}(a), \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

где функции  $L_{1/3}(a)$ ,  $L_{2/3}(a)$  выражаются через функции  $K_{\nu}(z)$  и функции Бесселя и Ангера  $J_{\nu}(z)$  ([52], стр. 1002):

$$\left. \begin{aligned} L_{1/3}(a) &= (1/3) \{K_{1/3}(a) + 2\pi [J_{1/3}(ia) - J_{1/3}(ia) - \\ &- J_{1/3}(-ia) + J_{1/3}(-ia)]/i\sqrt{3}\}; \\ L_{2/3}(a) &= (1/3) \{K_{2/3}(a) + 2\pi [J_{2/3}(ia) - J_{2/3}(ia) + \\ &+ J_{2/3}(-ia) - J_{2/3}(-ia)]/\sqrt{3}\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

В результате получаем для  $T_0^{(2)}$  и  $T_{\xi}^{(2)}$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{Im} T_0^{(2)} &= [-\alpha\varepsilon/(2\sqrt{3}\pi^2\chi)] \int_0^\infty u du/(1+u)^3 \int d\Omega z^{1/3} \times \\
 &\quad \times [1+u-z^{2/3}(2+2u+u^2)] K_{1/3}(2uz/3\chi); \\
 \operatorname{Re} T_0^{(2)} &= [-\alpha\varepsilon/(2\pi^2\chi)] \int_0^\infty u du/(1+u)^3 \int d\Omega z^{1/3} \times \\
 &\quad \times \{[1+u-z^{2/3}(2+2u+u^2)] L_{1/3}(2uz/3\chi) + \\
 &\quad + z^{-1/3}\chi(2+2u+u^2)/u\}; \\
 T_{\xi}^{(2)} &= [\alpha\varepsilon/(2\pi^2\chi)] \int_0^\infty u^2 du/(1+u)^3 \int d\Omega z^{2/3} [L_{2/3}(2uz/3\chi) - \\
 &\quad - i K_{2/3}(2uz/3\chi)/\sqrt{3}].
 \end{aligned} \right\} (12.14)$$

Интегрирование по углам в выражениях для  $\operatorname{Im} T_0^{(2)}$ ,  $T_{\xi}^{(2)}$  будем проводить так же, как при вычислении вероятности магнитотормозного излучения [см. (10.22) и (10.23)]. Если направить ось  $z$  по скорости  $\mathbf{v}$ , то интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$  выполняется тривиально, поскольку подынтегральное выражение от  $\varphi$  не зависит, а для интегрирования по углу  $\vartheta$  перейдем к переменной  $z = [2\gamma^2(1-nv)]^{3/2}$ , которая с релятивистской точностью меняется в интервале  $1 \leq z \leq \infty$ . Что касается выражения для  $\operatorname{Re} T_0^{(2)}$ , то ввиду недостаточно быстрого убывания  $L_{1/3}$  при больших  $z$  его необходимо вычислять в конечных пределах, сохраняя старшие члены по  $1/\gamma$ . Учитывая, что  $d\Omega = 2\pi dz/(3\gamma^2 z^{1/3})$ , приходим к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{Im} T_0^{(2)} &= [-\alpha m/(3\sqrt{3}\pi\gamma\chi)] \int_0^\infty u du/(1+u)^3 \int_1^\infty dz \times \\
 &\quad \times \{1+u-z^{2/3}[1+(1+u)^2]\} K_{1/3}(2uz/3\chi); \\
 \operatorname{Re} T_0^{(2)} &= [-\alpha m/(3\pi\gamma\chi)] \int_0^\infty u du/(1+u)^3 \int_1^\infty dz \times \\
 &\quad \times \{[1+u-z^{2/3}[1+(1+u)^2]] L_{1/3}(2uz/3\chi) + \\
 &\quad + (z^{-1/3}\chi/u)[1+(1+u)^2]\}; \\
 T_{\xi}^{(2)} &= [\alpha m/(3\pi\gamma\chi)] \int_0^\infty u^2 du/(1+u)^3 \int_1^\infty dz z^{1/3} \times \\
 &\quad \times [L_{2/3}(2uz/3\chi) - i K_{2/3}(2uz/3\chi)/\sqrt{3}].
 \end{aligned} \right\} (12.15)$$

Отметим, что второй член  $\text{Re } T_0^{(2)}$  не зависит от поля. Используя соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^\nu K_\nu(x)) &= -x^\nu K_{\nu-1}(x); \\ L_{1/3}(x) &= x^{-2/3} \frac{d}{dx} L_{2/3}(x) + 2/3\chi; \\ x^{1/3} L_{2/3}(x) &= \frac{d}{dx} [x^{1/3} L_{1/3}(x)], \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

а также формулу (10.32), получаем

$$\left. \begin{aligned} T_0^{(2)} &= [\alpha m^2 / (6\pi\epsilon)] \int_0^\infty [(5u^2 + 7u + 5) / (1+u)^3] \times \\ &\quad \times [-L_{2/3}(2u/3\chi) + iK_{2/3}(2u/3\chi) / \sqrt{3}] ; \\ T_\zeta^{(2)} &= [-\alpha m^2 / (2\pi\epsilon)] \int_0^\infty \frac{udu}{(1+u)^3} [L_{1/3}(2u/3\chi) + \\ &\quad + iK_{1/3}(2u/3\chi) / \sqrt{3}]. \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

В соответствии с принятым выше условием из формул (12.17) исключены члены, не зависящие от поля.

Выражение (12.11) для амплитуды  $dT_{qq}^{(2)}/dt$  через  $T_0^{(2)}$  и  $T_\zeta^{(2)}$ , определяемые формулами (12.17), удовлетворяет вытекающей из условия унитарности  $S$ -матрицы оптической теореме (см. раздел 5.15) в приближении порядка  $\alpha$  по взаимодействию с полем излучения:

$$2\text{Im} (dT_{qq}^{(2)}/dt) = W_e(\chi), \quad (12.18)$$

где в правой части стоит полная вероятность излучения поляризованного электрона в единицу времени [см. (10.36)] для не зависящей от поляризации части и (10.100) для части, пропорциональной  $(\zeta\nu s)$ ; в последней формуле необходимо перейти от интенсивности к вероятности с помощью соотношения (10.19).

Перепишем смешанное произведение  $(\zeta\nu s)$  в явно ковариантной форме. С точностью до членов более высокого порядка по  $1/\gamma$  это можно сделать однозначно:

$$(\zeta\nu s) = -e\tilde{F}_{\mu\nu} p^\mu s^\nu / \sqrt{|eF_{\lambda\sigma} p^\sigma|^2} = -2\mu_0 (\zeta\mathbf{H}_R) / (m\chi), \quad (12.19)$$

где  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ ;  $s^\mu$  — 4-вектор поляризации [см. (A.13)].  $\mu_0 = e/2m$ ;  $\mathbf{H}_R$  — магнитное поле в системе покоя частицы (5.66). Заметим, что инвариант (12.19) имеет порядок  $eH_0 \gamma (\zeta\mathbf{H}) / (m^2 H\gamma) = \zeta\mathbf{H}/H$ , т. е. не зависит от энергии частицы и величины магнитного поля (не меняется с изменением  $\chi$ ).

Учтем теперь, что вклад диаграммы рис. 29, *a* представляет собой поправку к собственной энергии электрона (см. § 5), т. е.

$$dT_{qq}^{(2)}/dt = -m\Delta M/\epsilon. \quad (12.20)$$

Подставляя в (12.20) выражения (12.11) и (12.17), получаем зависящую от поля  $F_{\mu\nu}$  часть поправки к массе, обусловленную взаимодействием электрона, находящегося во внешнем поле, с полем излучения  $\Delta M$ . Представим  $\Delta M$  в виде суммы

$$\Delta M = \Delta m + \Delta m_{\zeta}, \quad (12.21)$$

где только  $\Delta m_{\zeta}$  явно зависит от ориентации спина электрона. Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &= (\alpha m/6\pi) \int_0^{\infty} [du/(1+u)^3] (5u^2 + 7u + 5) \times \\ &\quad \times [L_{2/3}(2u/3\chi) - iK_{2/3}(2u/3\chi)/\sqrt{3}]; \\ \Delta m_{\zeta} &= [-\alpha m\mu_0 (\zeta \mathbf{H}_R)/(\pi m\chi)] \times \int_0^{\infty} u du / (1+u)^3 \times \\ &\quad + [L_{1/3}(2u/3\chi) + iK_{1/3}(2u/3\chi)/\sqrt{3}]. \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

В системе покоя частицы величину  $\text{Re } \Delta m_{\zeta}$ , зависящую от ориентации спина, можно рассматривать как энергию взаимодействия аномального магнитного момента, возникшего в результате взаимодействия с полем излучения, с магнитным полем  $\mathbf{H}_R$ :

$$\text{Re } \Delta m_{\zeta} = -\mu' (\zeta \mathbf{H}_R). \quad (12.23)$$

Отсюда получаем выражение для аномального магнитного момента электрона, обусловленного радиационными эффектами (в  $e^2$  порядке) и взаимодействием с внешним полем:

$$\mu'/\mu_0 = (\alpha/2\pi) (2/\chi) \int_0^{\infty} u du L_{1/3}(2u/3\chi)/(1+u)^3. \quad (12.24)$$

Для того чтобы найти явное выражение для  $\mu'$ , используем формулу (10.37) и интегральное представление для комбинации  $\mathbf{J}_\nu(z) - \mathbf{J}_\nu(z)$ , входящей в  $L_{1/3}$  и  $L_{2/3}$  ([52], с. 357):

$$\mathbf{J}_\nu(z) - J_\nu(z) = (\sin \pi\nu/\pi) \int_0^{\infty} \exp(-vt - z \text{sh}t) dt. \quad (12.25)$$

После этого интегралы по  $u$  и  $t$  в (12.24) можно легко вычислить, и получим выражение, удобное для нахождения разложений\*, когда

\* Подобно тому, как это имело место при рассмотрении магнитотормозного излучения (10.38).



параметр  $\chi \ll 1$  или  $\chi \gg 1$ . Для аномального магнитного момента  $\mu'$  имеем

$$\mu'/\mu_0 = [-\alpha/(16\sqrt{3}\chi)](1/2\pi i) \int_{-1-0-i\infty}^{-1-0+i\infty} ds (3\chi)^{s+2} \times \\ \times [(s+2)(s+1)/\cos^2(\pi s/2)] \Gamma(s/2+7/6) \Gamma(s/2+5/6). \quad (12.26)$$

Аналогичные вычисления дают для  $\Delta m$ ;

$$\operatorname{Re} \Delta m = [\alpha m/(96\sqrt{3})](1/2\pi i) \left\{ 5 \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} ds [(s+1)(s+2)/\cos^2(\pi s/2)] \times \right. \\ \times (3\chi)^{s+1} \Gamma(s/2+5/6) \Gamma(s/2+1/6) - 7 \int_{-1-0-i\infty}^{-1-0+i\infty} ds \times \\ \times [(s+1)(s+2)/\sin^2(\pi s/2)] (3\chi)^{s+2} \Gamma(s/2+4/3) \Gamma(s/2+2/3) + \\ \left. + 5 \int_{-2+0-i\infty}^{-2+0+i\infty} ds [(s+1)(s+2)/\cos^2(\pi s/2)] \times \right. \\ \left. \times (3\chi)^{s+3} \Gamma(s/2+11/6) \Gamma(s/2+7/6) \right\}; \quad (12.27)$$

$$\operatorname{Im} \Delta m = [-\alpha m \chi/(64\sqrt{3}\pi)] (1/2\pi i) \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} ds (3\chi)^s (3s^2+3s+10) \times \\ \times \Gamma(-s) \Gamma(s+1) \Gamma(s/2+1/6) \Gamma(s/2+5/6) \quad (12.28)$$

и для  $\operatorname{Im} \Delta m_{\zeta}$

$$\operatorname{Im} \Delta m_{\zeta} = [\alpha m/8\pi\sqrt{3}] [(\zeta v s)/2\pi i] \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} ds (3\chi)^{s+2} \times \\ \times [\Gamma(-s) \Gamma(s+3)/\Gamma(3)] \Gamma(s/2+7/6) \Gamma(s/2+5/6). \quad (12.29)$$

При  $\chi \ll 1$ , замыкая контур интегрирования (12.26)–(12.29) направо, получаем асимптотические ряды по степеням  $\chi$ . Для аномального магнитного момента имеем

$$\mu'/\mu_0 = (\alpha/2\pi) [1 - 12\chi^2 (\ln 1/\chi + C + (\ln 3)/2 - 37/12) + \dots], \quad (12.30)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $C = 0,577\dots$

Для  $\Delta m$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \Delta m &= (4\alpha m \chi^2/3\pi) (\ln 1/\chi + C + (\ln 3)/2 - 33/16) + \dots; \\ \operatorname{Im} \Delta m &= (-5\alpha m \chi/4\sqrt{3}) (1 - 8\sqrt{3}\chi/15 + 7\chi^2/2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (12.31)$$

и для  $\text{Im } \Delta m_{\zeta}$

$$\text{Im } \Delta m_{\zeta} = (\sqrt{3}/8) \alpha m (\zeta v s) \chi^2 (1 - 4 \sqrt{3} \chi + 105 \chi^2/2 + \dots). \quad (12.32)$$

При  $\chi \gg 1$  контур интегрирования следует замкнуть налево, тогда особенности  $\Gamma$ -функций будут находиться при  $s < 0$  и получим сходящиеся ряды по обратным степеням  $\chi$ . Выпишем первые члены соответствующих разложений. Для аномального магнитного момента

$$\begin{aligned} \mu'/\mu_0 &= [\alpha \Gamma(1/3)/9 \sqrt{3} (3\chi)^{2/3}] \times \\ &\times \{1 + [6\Gamma(2/3)/\Gamma(1/3)] (3\chi)^{-2/3} + \dots\}; \end{aligned} \quad (12.33)$$

для  $\Delta m$

$$\Delta m = [7\Gamma(2/3)(1 - i\sqrt{3}) \alpha m / 27 \sqrt{3}] (3\chi)^{2/3} + \dots \quad (12.34)$$

и для  $\text{Im } \Delta m_{\zeta}$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta m_{\zeta} &= [\alpha m \Gamma(1/3) (3\chi)^{1/3} (\zeta v s) / 54] \times \\ &\times \{1 - [6\Gamma(2/3)/\Gamma(1/3)] (3\chi)^{-2/3} + \dots\}. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Обсудим теперь полученные результаты. Зависящие от поля поправки к массе задаются формулами (12.22), а аномальный магнитный момент электрона во внешнем поле — формулой (12.24). Выражения (12.30)—(12.35) дают представление о величине эффектов при  $\chi \ll 1$  и  $\chi \gg 1$  и наглядно иллюстрируют следующие факты: 1)  $\text{Re } \Delta m > 0$  и монотонно возрастает с увеличением  $\chi$  (при  $\chi \gg 1$   $\text{Re } \Delta m$  растет как  $\chi^{2/3}$ ); 2)  $\text{Im } \Delta m < 0$  и  $|\text{Im } \Delta m|$  монотонно возрастает с увеличением  $\chi$ , причем при  $\chi \gg 1$  реальная и мнимая части  $\Delta m$  отличаются только множителем —  $\sqrt{3}$ ; 3) знак  $\Delta m_{\zeta}$  определяется знаком  $(\zeta v s)$ ,  $|\text{Im } \Delta m_{\zeta}|$  возрастает с увеличением  $\chi$ ; 4) наконец, аномальный магнитный момент (в боровских магнетонах)  $\mu'/\mu_0$  монотонно падает от швингеровского значения  $\alpha/2\pi$  при  $\chi \rightarrow 0$  до 0 при  $\chi \rightarrow \infty$  (рис. 30). Заметим, что при  $\chi \ll 1$  разложение  $\mu'/\mu_0$  начинается с члена  $\chi^2 \ln \chi$ , что делает ввиду малости  $\chi$  в реальных условиях чрезвычайно затруднительным наблюдение этой поправки.

В скрещенном внешнем поле  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ ,  $\mathbf{E}\mathbf{H} = 0$  инварианты  $f = g = 0$  (5.41). Проводившееся разложение по степеням  $1/\chi$  в инвариантном виде соответствует разложению по  $f/\chi$ . И поскольку в скрещенном поле  $f \equiv 0$ , то для такого поля приведенные выше результаты являются точными. Расчет радиационных эффектов в скрещенном поле с использованием точных волновых функций был проведен в работе [88].

12.2. Определение радиационных поправок во внешнем поле с помощью дисперсионных соотношений. Рассмотрим полученные в предыдущем разделе результаты с точки зрения аналитических свойств входящих функций. Формулы (12.12) справедливы при  $a > 0$ , так же как и записанные в форме (12.12) интегральные представления  $K_\nu$  функций (3.17). Для того чтобы рассмотреть  $\Delta m$ ,  $\Delta m_\zeta$  (12.22) при комплексных значениях  $\chi$ , необходимо вернуться к интегральным представлениям  $L_\nu$  и  $K_\nu$ . Отметим, что при выводе формул (12.22) были использованы только рекуррентные соотношения для  $L_\nu$ ,  $K_\nu$  (справедливые при любых значениях аргумента) и не предполагалась положительность  $a$ . Вернувшись к записи  $L_\nu$ ,  $K_\nu$  через их интегральные представления (3.17), (12.12), получим из (12.22):

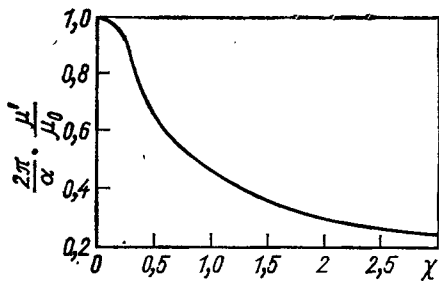


Рис. 30. Зависимость аномального магнитного момента от параметра  $\chi$ .

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &= (\alpha m / 6\pi) \int_0^\infty du [(5u^2 + 7u + 5)/(1 + u)^3] f_1(1/\chi, u); \\ \Delta m_\zeta &= [\alpha m (\zeta v s) / 2\pi i] \int_0^\infty [udu/(1 + u)^3] f_0(1/\chi, u), \end{aligned} \right\} (12.36)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1(1/\chi, u) &= \int_0^\infty d\tau \tau \exp[-(i u/\chi)(\tau + \tau^3/3)]; \\ f_0(1/\chi, u) &= \int_0^\infty d\tau \exp[-(i u/\chi)(\tau + \tau^3/3)]. \end{aligned} \right\} (12.37)$$

Функции  $f_1(z, u)$ ,  $f_0(z, u)$  — целые трансцендентные функции, экспоненциально падающие в нижней полуплоскости переменной  $z = 1/\chi$  при  $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ . Поэтому на действительной оси реальная и мнимая части  $f(z, u)$  связаны преобразованием Гильберта

$$\text{Re } f(z) = (-1/\pi) \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty [\text{Im } f(z')/(z' - z)] dz'. \quad (12.38)$$

Точно такие же соотношения имеют место для  $\Delta m$ ,  $\Delta m_\zeta$ . Справедливость формулы (12.38) можно без труда проверить прямой подста-

новкой. Таким образом, поскольку известен явный вид функции  $f(z, u)$ , то сам факт существования дисперсионного соотношения (12.38) очевиден.

Однако существование дисперсионных соотношений в квантовой электродинамике следует из весьма общих соображений, отнюдь не опирающихся на явный вид входящих функций. Поэтому к вычислению поправок  $\Delta m$ ,  $\Delta m_\zeta$  можно подойти иным путем, опираясь на дисперсионные соотношения (см.[88]). При таком подходе исходным пунктом является процесс излучения фотона электроном, полная вероятность которого связана с мнимой частью амплитуды диаграммы рис. 29, а (амплитуда упругого рассеяния электрона во внешнем поле в  $e^2$ -приближении) оптической теоремой (12.18). Указанная амплитуда определяет поправку к массе согласно (12.20), так что [ср. (5.185)]:

$$\text{Im } \Delta M = (-\varepsilon/2m) W_e(\chi). \quad (12.39)$$

Вероятность излучения фотона электроном была вычислена в § 10. Она состоит из двух частей: полной вероятности  $W_e(\chi)$  (10.36) и зависящей от ориентации спина части  $W_{e\zeta}(\chi)$  (10.100). Подставляя  $\text{Im } \Delta m$  и  $\text{Im } \Delta m_\zeta$  в дисперсионные соотношения (12.38), получаем  $\text{Re } \Delta m$  и  $\text{Re } \Delta m_\zeta$ , т. е. восстановим явный вид  $\Delta m$  и  $\Delta m_\zeta$  [см. (12.36) и (12.37)].

В качестве примера найдем поправку к массе скалярной частицы во внешнем электромагнитном поле, исходя из вероятности излучения  $W_s$  в форме (10.63). Подставляя в (12.39), получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta m_s = \\ = (-\alpha m/6 \sqrt{3} \pi) \int_0^\infty [du/(1+u)^2] (5+2u) K_{2/3}(2u/3\chi). \end{aligned} \quad (12.40)$$

Дисперсионное соотношение (12.38) дает для  $\text{Re } \Delta m_s$

$$\text{Re } \Delta m_s = (\alpha m/6\pi) \int_0^\infty [du/(1+u)^2] (5+2u) L_{2/3}(2u/3\chi). \quad (12.41)$$

Первые члены разложения  $\text{Re } \Delta m_s$  при  $\chi \ll 1$  и  $\chi \gg 1$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \Delta m_s &= (4\alpha m/3\pi) \chi^2 [\ln 1/\chi + C + (\ln 3)/2 - 15/8] \quad (\chi \ll 1); \\ \text{Re } \Delta m_s &= 2\alpha m \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} / 9 \sqrt{3} \quad (\chi \gg 1). \end{aligned} \right\} \quad (12.42)$$

Сравнивая эти выражения с (12.31) и (12.34), видим, что поправка к массе скалярной частицы во внешнем поле только численно отличается от поправки к массе электрона  $\Delta m$ .

### § 13. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СРЕДЫ ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Область пространства, занятая электромагнитным полем, во многом аналогична материальной среде. Это проявляется, в частности, в том, что в поле, как и в среде, происходят процессы тормозного излучения и рождения пар. Поляризация вакуума в присутствии внешнего поля изменяется, при распространении электромагнитных волн во внешнем поле это приводит к ряду явлений, присущих обычным средам (двойное лучепреломление, излучение Вавилова—Черенкова и т. д.). Исследование подобных явлений можно провести с помощью тензора поляризации  $\Pi_{\mu\nu}(k)$ . Расходящаяся часть  $\Pi_{\mu\nu}(k)$ , не зависящая от поля, приводит к перенормировке заряда. Конечная часть дает поправку к внешнему току, а зависящая от поля часть приводит к дополнительной поправке к току, который индуцируется падающей электромагнитной волной  $\delta j_\mu = -\Pi_{\mu\nu}^F A^\nu(q)$  (ср. § 5.14—5.15), где  $A_\nu$  — поле волны. Добавку  $\delta j_\mu$  следует дописать в уравнение Максвелла для волны, причем она аналогична току, наводимому полем в среде. Поэтому дальнейшее рассмотрение ведется так же, как в макроскопической электродинамике: вводится тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  ( $D_i = \epsilon_{ij} E_j$ ), связывающий индукцию  $\mathbf{D}$  с полем волны  $\mathbf{E}$ , и решается система уравнений Максвелла\*.

Ранее уже отмечалось, что наряду с прямым вычислением (с использованием функций Грина электрона и фотона в поле) можно пользоваться также методом дисперсионных соотношений. В разделе 12.2 мнимая часть изменения массы электрона в поле связывалась с вероятностью излучения фотона электроном [см. (12.39)]. В данной задаче будет использована связь мнимой части появляющейся у фотона массы  $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = \omega^2 (1 - \tilde{n}^2)$  с вероятностью процесса  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  в поле [ср. (5.185)]:

$$\text{Im } k^2 = -\omega W_e, \quad (13.1)$$

где  $W_e$  определяется формулами (11.27)—(11.30). Вводя показатель преломления  $\tilde{n} = |\mathbf{k}|/\omega$ , получаем

$$\text{Im } \tilde{n}^2 = W_e/\omega. \quad (13.2)$$

Аналитические свойства функции  $\tilde{n}^2$  такие же, как у функций  $f_1, f_0$  (10.47), т. е.  $\tilde{n}^2$  не имеет особенностей в нижней полуплоскости ком-

\* Поляризация вакуума внешним полем рассмотрена в пионерской работе Швингера [104], исходя из результатов этой работы Мингуззи [72, 73] провел прямое вычисление тока  $\delta j_\mu$ , индуцируемого совместным действием слабого переменного поля и постоянного поля, являющегося в определенной системе чисто магнитным. Затем были исследованы [74] аналитические свойства показателя преломления поля  $\tilde{n}$  в комплексной плоскости  $\omega$ . Конкретные вычисления для скрещенных электрического и магнитного полей проведены в работе [77], где использовано выражение для функций Грина электрона, найденного Швингером. [104].

плексной переменной  $z = 1/\kappa$  [где  $\kappa$  — определяется формулой (11.20)] и достаточно быстро спадает при больших  $|\operatorname{Im} z|$ , что вытекает из принципа причинности и, естественно, подтверждается прямым вычислением.

Дисперсионное соотношение имеет вид [ср. (12.38)]

$$\operatorname{Re} \tilde{n}^2(z) = 1 - (\mathcal{P}/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im} \tilde{n}^2(z')/(z' - z)] dz', \quad (13.3)$$

где учтено, что  $\operatorname{Re} \tilde{n}^2(\infty) = 1$ . Подставляя сюда  $\operatorname{Im} \tilde{n}^2(z)$  из (13.2) и  $W_e$  из (11.29), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{n}^2 = 1 + [2\alpha/[3\pi(\kappa H_0)^2]] \int_0^{\infty} (dy/\operatorname{ch}^2 y) [(i/\sqrt{3}) K_{2/3}(\xi) - \\ - L_{2/3}(\xi)] [(eF_1)^2(4 \operatorname{ch}^2 y - 1) + (eF_2)^2(4 \operatorname{ch}^2 y + 2)], \end{aligned} \quad (13.4)$$

где  $\xi = 8 \operatorname{ch}^2 y/3\kappa$ ;  $F_1 = E_{\perp} + [nH]$ ;  $F_2 = [nF_1]$  [ср. (11.16)], функция  $L_{\nu}(\xi)$  определена формулой (12.13). Уравнение Максвелла в среде для монохроматической волны  $D^{\omega} = D_0^{\omega} \exp[i(kr - \omega t)]$  имеют в импульсном пространстве вид

$$D^{\omega} = (-1/\omega) [kV^{\omega}]; \quad kD^{\omega} = 0; \quad V^{\omega} = (1/\omega) [kE^{\omega}]; \quad kV^{\omega} = 0. \quad (13.5)$$

Исключая поле  $V^{\omega}$ , находим

$$D^{\omega} = (-1/\omega^2) [k [kE^{\omega}]] = (1/\omega^2) [k^2 E^{\omega} - k (kE^{\omega})]. \quad (13.6)$$

Подставляя сюда  $D_i^{\omega} = \varepsilon_{ij} E_j^{\omega}$ , имеем уравнение

$$[\omega^2 \varepsilon_{ij} - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j] E_j^{\omega} = 0, \quad (13.7)$$

которое можно переписать с учетом того, что  $k = \omega \tilde{n}n$ , в виде

$$[\varepsilon_{ij} - \tilde{n}^2 (\delta_{ij} - n_i n_j)] E_j^{\omega} = 0. \quad (13.8)$$

Эта система однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение только при условии равенства нулю определителя

$$|\varepsilon_{ij} - \tilde{n}^2 (\delta_{ij} - n_i n_j)| = 0. \quad (13.9)$$

Решение этого дисперсионного уравнения определяет типы волн, которые могут распространяться в среде. Уравнение (13.8) можно переписать в виде

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon_{ij} E_i^{\omega} E_j^{\omega} / [(\delta_{ij} - n_i n_j) E_i^{\omega} E_j^{\omega}]. \quad (13.10)$$

Фактически выражение (13.4) представляет уравнение такого типа. Теперь учтем, что вычисление проводим в первом порядке по  $\alpha$  [причем  $\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \sim O(\alpha)$  и т. д.], и, пренебрегая членами  $\sim \alpha^2$ , получаем из (13.10) и (13.4)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 2g_1(\kappa) F_i^{(1)} F_j^{(1)} + 2g_2(\kappa) F_i^{(2)} F_j^{(2)}, \quad (13.11)$$

где

$$g_1(\kappa) = \left\{ \alpha / [3\pi (\kappa H_0)^2] \right\} \int_0^\infty (dy / \text{ch}^2 y) (4 \text{ch}^2 y - 1) \times \\ \times [(i/\sqrt{3}) K_{2/3}(\xi) - L_{2/3}(\xi)]; \\ g_2(\kappa) = \left\{ \alpha / [3\pi (\kappa H_0)^2] \right\} \int_0^\infty (dy / \text{ch}^2 y) (4 \text{ch}^2 y + 2) \times \\ \times [(i/\sqrt{3}) K_{2/3}(\xi) - L_{2/3}(\xi)]. \quad (13.12)$$

По самому способу получения уравнение (13.4) содержит информацию только о поперечных компонентах тензора  $\varepsilon_{ij}$ ; естественно, что мы нашли только указанные компоненты. Этого, однако, достаточно для определения основных характеристик в первом порядке по  $\alpha$ , поскольку, если подставить в уравнение (13.9) тензор  $\varepsilon_{ij}$  общего вида и учесть, что  $\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \sim O(\alpha)$ , то нетрудно убедиться в том, что вклад непоперечных компонент в  $\tilde{n}$  будет  $\sim \alpha^2$ .

Дисперсионное уравнение (13.9) удобно записывать в осях  $(F_1/|F_1|, F_2/|F_2|, \mathbf{n})$ . Подставляя в него (13.11), находим решение

$$\tilde{n}_{1,2} = 1 + g_{1,2} |F_{1,2}|^2. \quad (13.13)$$

Полученное значение  $\tilde{n}_{1,2}$  соответствуют двум волнам, которые распространяются в поле при заданном направлении волнового вектора. Этим волнам соответствует следующее значение частот:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 (1 - g_{1,2} |F_{1,2}|^2), \quad (13.14)$$

где  $\omega_0 = |\mathbf{k}|$ .

Когда затухание волны мало, можно ввести групповую скорость распространения соотношением

$$\mathbf{v}_g^{(1,2)} = \partial \text{Re } \omega_{1,2} / \partial \mathbf{k}. \quad (13.15)$$

Подставляя сюда  $\omega_{1,2}$  (13.14), получаем

$$\mathbf{v}_g^{(1,2)} = \mathbf{n} [1 - |F_{1,2}|^2 (\text{Re } g_{1,2} + \Psi_{1,2})] + \mathbf{s} [2 \text{Re } g_{1,2} + \Psi_{1,2}], \quad (13.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 s &= H_{\parallel} \mathbf{H}_{\perp} + E_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{E}\mathbf{H}]_{\perp}; \\
 \mathbf{H}_{\perp} &= \mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{H}\mathbf{n}); \quad \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{H}); \\
 \Psi_1 &= \left\{ \alpha / [3\pi (\kappa H_0)^2] \right\} \int_0^{\infty} (dy / \text{ch}^2 y) (4 \text{ch}^2 y - 1) \times \\
 &\quad \times [2L_{2/3}(\xi) + \xi L'_{2/3}(\xi)]; \\
 \Psi_2 &= \left\{ \alpha / [3\pi (\kappa H_0)^2] \right\} \int_0^{\infty} (dy / \text{ch}^2 y) (4 \text{ch}^2 y + 2) \times \\
 &\quad \times [2L_{2/3}(\xi) + \xi L'_{2/3}(\xi)].
 \end{aligned} \right\} (13.17)$$

Представление о величине эффектов можно получить из табл. 4. При  $\kappa \ll 1$ , как показано выше (13.2), (11.31), величины  $\text{Im } \tilde{n}_{1,2}$  экспоненциально малы. При  $\kappa \gg 1$  вклад в интегралы по  $y$  дает область  $\text{ch } y \sim 1$  и старший по  $\kappa$  вклад дает только член  $K_{2/3}$  из  $L_{2/3}$  [см. (12.13)], который входит с множителем  $1/3$ , т. е. реальная и мнимая часть поправок к  $\tilde{n}_{1,2}$  при  $\kappa \gg 1$  отличаются множителем  $(-1/\sqrt{3})$ , причем  $\text{Re } \tilde{n}_{1,2} < 1$ .

Таблица 4

Предельные значения показателя преломления  $\tilde{n}_{1,2}$  и групповой скорости  $v_{1,2}$  во внешнем электромагнитном поле

Характеристика	$\kappa \ll 1$	$\kappa \gg 1$
$\tilde{n}_1$	$1 + 2\rho_{F_1}$	$1 + 3(i\sqrt{3} - 1)\sigma_{F_1}/2$
$\tilde{n}_2$	$1 + 7\rho_{F_2}/2$	$1 + 9(i\sqrt{3} - 1)\sigma_{F_2}/4$
$v_1$	$n(1 - 2\rho_{F_1}) + 4\rho_{F_1}s/ F_1 ^2$	$n(1 - \sigma_{F_1}/2) - s\sigma_{F_1}/ F_1 ^2$
$v_2$	$n(1 - 7/2)\rho_{F_2} + 2s\rho_{F_2}/ F_2 ^2$	$n(1 - 3\sigma_{F_2}/4) - 3s\sigma_{F_2}/2 F_2 ^2$

$$\rho_{F_{1,2}} = \alpha |F_{1,2}|^2 / (45\pi H_0^2), \quad \sigma_{F_{1,2}} = [\sqrt{3} \alpha |F_{1,2}|^2 / (7\pi H_0^2)] (3\kappa/2)^{-4/3} \Gamma^2(5/6)$$

Вектора групповой скорости совпадают по направлению с  $\mathbf{n}$ , только если  $s = 0$  [см. (13.17)], например, в случае чисто магнитного поля  $s = 0$ , если  $\mathbf{n}$  направлено по (против) магнитному полю, а волна распространяется как в отсутствие поля ( $\tilde{n}_{1,2} = 1$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ ).



Когда  $n\mathbf{H} = 0$ , также  $s = 0$ , в этом случае волна уже «чувствует» поле ( $\tilde{n}_{1,2} \neq 1$ ) и т. д. В случае скрещенного поля\* невозмущенное движение волны происходит, если  $\mathbf{n}$  направлено по  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ ; если  $\mathbf{n}$  направлено по  $-[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , движение волны уже отличается от свободного, это связано с тем, что  $\tilde{n}(\omega, \mathbf{k}) \neq \tilde{n}(\omega, -\mathbf{k})$  для всех направлений с  $(\mathbf{n}[\mathbf{E}\mathbf{H}]) \neq 0$  (при отражении времени необходимо также проводить замену  $[\mathbf{E}\mathbf{H}] \rightarrow -[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ ). В чисто магнитном поле волна вдоль любого направления распространяется в обе стороны одинаково.

Выражение для показателя преломления и групповой скорости в магнитном поле получается из табл. 4, куда следует подставить  $|\mathbf{F}_1|^2 = \mathbf{H}_1^2$  [см. (13.4)].

Из полученных результатов следует, что движение достаточно быстрой частицы в поле будет сопровождаться, кроме тормозного излучения, еще и излучением Вавилова—Черенкова. Исследование этого излучения следует проводить с учетом анизотропии и дисперсии, характерных для области пространства, занятой полем, так что картина излучения Вавилова—Черенкова оказывается достаточно сложной. В полях  $|\mathbf{H}|, |\mathbf{E}| \ll H_0$  всегда  $\Delta n_{1,2} = (\text{Re } n_{1,2} - 1) \ll 1$ , излучение Вавилова—Черенкова возникает для очень быстрых частиц, для которых пороговое условие по порядку величины  $v\eta > 1$  можно переписать в виде  $\Delta n > 1/\gamma_{th}^2$ . Используя табл. 4, имеем  $\gamma_{th} \gg H_0/H$ . Для такой частицы  $\chi \sim \gamma H/H_0 \gg 1$ . Интенсивность излучения Вавилова—Черенкова ничтожно мала по сравнению с интенсивностью тормозного излучения, а при сравнении их угловых распределений следует учитывать, что при  $\chi \gg 1$  тормозное излучение идет в конус с раствором  $\chi^{1/3}/\gamma$  (см. § 10.1).

В заключение отметим, что вне существенно квантовой области, т. е. при  $H/H_0 \ll 1$ , все рассмотренные эффекты весьма малы при любых значениях  $\kappa$ .

13.2. Рождение пары частиц заряженной частицей. Представляет также интерес рождение пары частиц, движущейся во внешнем поле. Это процесс второго порядка по  $\alpha$  (в то время как рассмотренные выше первого порядка по  $\alpha$ ) и изображается диаграммой на рис. 29, б. Для изучения этого процесса в случае большой энергии начальной частицы можно использовать развитое выше квазиклассическое приближение [112]. Вероятность процесса в единицу времени представим в виде

$$W = dw/dt = \int (d^4 k/k^4) J^{\mu\nu} 2 \text{Im } \Pi_{\mu\nu} = W_{FF} + W_{F0} + W_{0F}, \quad (13.18)$$

где тензор  $J^{\mu\nu}$  описывает излучение (в единицу времени) начальной частицей поляризованного фотона с массой  $k^2$  [ср. (9.27), (9.28)];  $\Pi_{\mu\nu}$  — перенормированный поляризационный тензор, который свя-

\* Результаты для скрещенного поля получены в работе [77].

зан с рождением пары частиц поляризованным фотоном следующим образом [см. (11.12), (11.14) и (11.15)]:

$$W_p = e^\mu e^\nu \text{Im} \Pi_{\mu\nu}(k)/\omega. \quad (13.19)$$

Поскольку рассматриваемый процесс разрешен уже тогда, когда или падающие частицы, или родившаяся пара находятся в поле, было проведено разбиение вероятности на три части, в которых первые индексы соответствуют начальным частицам, при вычислениях  $W_{F0}$ ,  $W_{0F}$  одна из вершин рассматривается свободной, а  $W_{FF}$  обращается в нуль при выключении поля для любой из участвующих частиц.

Выражение (13.18) линейно расходится во времени. Это связано с тем, что в нем содержится вероятность излучения реального фотона, который нестабилен и в поле достаточной протяженности обязательно образует пару. Эта ситуация может описываться в терминах каскадной теории при известных вероятностях излучения фотона и рождения фотоном пары (10.25) и (11.27), но для рассмотрения этого вопроса нельзя пользоваться теорией возмущений. Нас же будет интересовать только вклад виртуальных фотонов.

Точные выражения для  $W$  получены в работе [112], здесь же приведем асимптотические значения для вероятности в области малых и больших значений параметров  $\chi$ . В области  $\chi \ll 1$  при достаточном различии между массами начальной  $m$  и конечной  $\mu$  частицами основной вклад дают вероятности  $W_{F0}$  или  $W_{0F}$ , когда в поле берется наиболее легкая из частиц, а в случае равных масс основной вклад дает вероятность  $W_{FF}$ . При  $\mu = m$

$$W = W_{FF};$$

$$W_{FF}^{(1/2, 1/2)} = 6W_{FF}^{(0, 0)} = [\alpha^2 m^2 \chi^{3/2} / (16 \sqrt{6\pi} \epsilon)] \exp[-16/3\chi], \quad (13.20)$$

где верхние индексы в  $W_{FF}$  обозначают спин начальной частицы и частиц родившейся пары соответственно; в случае  $\mu \gg m$

$$W = W_{F0};$$

$$\begin{aligned} W_{F0}^{(1/2, 1/2)} &= 4W_{F0}^{(0, 1/2)} = (16 \sqrt{3/\chi}) (\mu/m)^2 W_{F0}^{(1/2, 0)} = \\ &= (64 \sqrt{3/\chi}) (\mu/m)^2 W_{F0}^{(0, 0)} = [\alpha^2 m^2 \chi^{5/2} / (2^6 3^{5/4} \sqrt{\pi} \epsilon)] \times \\ &\times (m/\mu)^5 \exp[-(4 \sqrt{3/\chi}) (\mu/m)^2]. \end{aligned} \quad (13.21)$$

В случае  $\chi \gg 1$ ,  $\chi m^3/\mu^3 \gg 1$  основной вклад дают вероятности  $W_{FF}$  и  $W_{0F}$ . Это обусловлено тем, что существенны малые передачи импульса. По этой причине для вычисления (с логарифмической точностью) можно пользоваться методом эквивалентных фотонов с уче-

том того обстоятельства, что спектр эквивалентных фотонов меняется в присутствии поля

$$\begin{aligned}
 W_{FF}^{(1/2, 1/2)} &= 26W_{FF}^{(1/2, 0)}/5 = [13\alpha^2 m^2/9 \sqrt{3} \pi \varepsilon] \times \\
 &\quad \times \chi(m/\mu) \ln [\chi(m/\mu)^{3/2}]; \\
 W_{0F}^{(1/2, 1/2)} &= 26W_{0F}^{(1/2, 0)}/5 = \\
 &= [13\alpha^2 m^2/6 \sqrt{3} \pi \varepsilon] \chi(m/\mu) \ln [\chi(m/\mu)^2]. \quad (13.22)
 \end{aligned}$$

13.3. Расщепление фотона на два фотона во внешнем электромагнитном поле. Фотон во внешнем электромагнитном поле нестабилен, поскольку он может превратиться в электрон-позитронную пару (при  $\omega > 2m$ , см. § 11). Кроме того, в более высоком порядке по  $\alpha$  возможно расщепление фотона на два без ограничений на  $\omega$  (рис. 29, в).

Как показано в разделе 13.1, присутствие электромагнитного поля сказывается на распространении фотона таким образом, что для заданного волнового вектора  $\mathbf{k}$  появляется два решения с поляризациями, направленными по векторам  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  [в дальнейшем соответственно параллельная ( $\parallel$ ) и перпендикулярная ( $\perp$ ) поляризации]. Для каждого из этих решений существует свой закон дисперсии (13.13), причем  $\parallel$ -фотон оказывается «тяжелее». По этой причине распады  $\perp$ -фотонов, а также переход  $\parallel \rightarrow \parallel + \parallel$  запрещены. Из соображений  $CP$ -инвариантности запрещены распады с участием нечетного числа  $\perp$ -фотонов. В результате единственный разрешенный распад  $\parallel \rightarrow \perp + \perp$ , т. е. расщепление фотона является механизмом получения линейно поляризованных фотонов. Эта задача рассматривалась в работах [115, 123] (а также см. работу [116]). Здесь приведем асимптотические значения для вероятности при  $H/H_0 \ll 1$ , так что полученные выражения являются только функциями инвариантного параметра  $\kappa$  (11.19).

При  $\kappa \ll 1$  получаем для вероятности расщепления [123]

$$W(\parallel \rightarrow \perp + \perp) = (\alpha^3/60\pi^2) (26/315)^2 (m^2/\omega) \kappa^6. \quad (13.23)$$

При  $\kappa \gg 1$  имеем следующее асимптотическое выражение

$$\begin{aligned}
 W(\parallel \rightarrow \perp + \perp) &= [C\alpha^3 m^2/(18\pi^2 \omega)] (3\kappa)^{2/3} \Gamma(1/3); \\
 C &\approx 0,3. \quad (13.24)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в области малых значений  $\kappa$  вероятность рождения пары заряженных частиц фотоном экспоненциально мала, и процесс расщепления является доминирующим.

Все результаты, найденные в этой главе, справедливы при условии  $f, g \ll 1$  ( $H \ll H_0$ ). Представляют интерес точные по  $\kappa, f, g$

выражения для характеристик процессов во внешнем поле, что позволяет, в частности, оценить точность полученных выше результатов. В последнее время получен ряд результатов в этом направлении. Точные выражения для  $\Pi_{\mu\nu}$  в произвольном постоянном поле были приведены в [122], а учет членов  $H/H_0$  для показателя преломления и расщепления фотона был проведен в [115] при  $\omega < 2m$ .

#### § 14. РАДИАЦИОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

14.1. Излучение с переворотом спина. Магнитотормозное излучение приводит к поляризации движущихся в магнитном поле электронов и позитронов. Поляризация возникает потому, что вероятность радиационного перехода с переворотом спина зависит от ориентации начального спина. Начнем с вычисления вероятности процесса излучения, когда полностью поляризованный электрон с направлением поляризации  $\zeta_i = \zeta$  ( $\zeta^2 = 1$ ) меняет направление спина на обратное  $\zeta_f = -\zeta$  (переход с переворотом спина). Указанную вероятность можно получить непосредственно из формул (10.2) и (10.6), куда следует подставить  $\zeta_i = \zeta$ ,  $\zeta_f = -\zeta$ . Из (10.6) имеем

$$R_2^* R_1|_{sf} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^* - (\zeta \mathbf{B}_1) (\zeta \mathbf{B}_2^*) - i (\zeta [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^*]). \quad (14.1)$$

Вычисление  $\mathbf{B}$  из (10.4) дает

$$\mathbf{B} = (\hbar/2 \varepsilon_f) [\mathbf{e}^* \mathbf{q}]; \quad \mathbf{q} = [\rho\omega/(\varepsilon + m)] - \mathbf{k} = \omega \{[\mathbf{v}/(1 + 1/\gamma)] - \mathbf{n}\}, \quad (14.2)$$

где опущены члены более высокого порядка по  $1/\gamma$ . Если учесть, что электрическое поле излученного фотона  $\mathbf{E} \sim \omega \mathbf{e}$ , а магнитное поле [см. (1.30)]  $\mathbf{H} = [\mathbf{nE}] \sim \omega [\mathbf{ne}]$ , то комбинация  $[\mathbf{e}^* \mathbf{q}] \sim \{[\mathbf{E}\mathbf{v}]/(1 + 1/\gamma)\} + \mathbf{H} = \mathbf{H}_E$  [см. (5.63)]. С другой стороны, в разделе 5.5 мы показали, что на спин электрона Дирака во внешнем поле действует эффективное поле  $\mathbf{H}_E$ . Таким образом, причина переворота спина [член  $\sigma \mathbf{B}$  в матричном элементе излучения (10.3)] заключается в действии на спин эффективного поля  $\mathbf{H}_E$  излученного фотона ( $\sigma \mathbf{B} \sim \sigma \mathbf{H}_E$ ).

Выполнив в (14.1) суммирование по поляризациям фотона с помощью соотношения (A.19) [см. Приложение А] и подставив  $\mathbf{B}$  в форму (14.2), получим для вероятности излучения с переворотом спина в единицу времени [см. (10.2) и (10.10)]:

$$dW^{\pm} = [\alpha/(2\pi)^2] (d^3 k/\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\lambda} R_2^* R_1|_{sf} \times \\ \times \exp[(-i u \varepsilon \tau/\hbar) (1 - \mathbf{nv} + \omega^2 \tau^2/24)], \quad (14.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} R_2^* R_1 |_{sf} = & (\hbar^2/4\varepsilon_j^2) \{(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) [1 - (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{k})^2/\omega^2] + \\ & + [(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{k})/\omega^2] [(\mathbf{q}_1 \boldsymbol{\zeta}) (\mathbf{q}_2 \mathbf{k}) + (\mathbf{q}_2 \boldsymbol{\zeta}) (\mathbf{q}_1 \mathbf{k})] - \\ & - i [\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{k} (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{k})/\omega^2] [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2]\}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Взяв величины  $\mathbf{q}_{1,2}$  в форме (14.2), подставив в них расложения (10.10) с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$  и воспользовавшись соотношениями (2.17) и  $\boldsymbol{\zeta} \mathbf{n} = \beta (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s}) + [(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})/|\mathbf{v}|] (1 - \beta^2/2 - \psi^2/2) + \psi (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{s})$ , получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} R_2^* R_1 |_{sf} = & (u^2/4) \{ - [1 - (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2] (\omega^2 \tau^2/2) + (2/\gamma^2) (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2 + \\ & + (2/\gamma) (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v}) [\psi (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{s}) + \beta (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s})] + (i \omega \tau/\gamma) (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s}) \}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где  $u = \hbar \omega/\varepsilon_j$ ;  $\mathbf{s} = \mathbf{w}/\omega$ ;  $(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s}) = (\boldsymbol{\zeta} [\mathbf{v} \mathbf{s}])$ .

Интегрируя (14.3) после подстановки (14.5) по относительному времени  $\tau$  и углам вылета фотона, точно так же как это делалось при выводе формул (10.13) и (10.24), находим

$$\begin{aligned} dW^{\zeta} = & [\alpha m^2/(2 \sqrt{3} \pi \hbar \varepsilon)] [u^2 du/(1+u)^3] \{ [1 - (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2] K_{2/3}(2u/3\chi) + \\ & + (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2 \int_{2u/3\chi}^{\infty} K_{1/3}(x) dx + (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s}) K_{1/3}(2u/3\chi) \}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Это выражение как функция  $\chi$  является точным.

При  $\chi \ll 1$  во всей существенной области  $u \ll 1$  [при  $u \geq 1$  выражение экспоненциально мало, см. (3.24)]. Поэтому для вычисления старшего члена разложения по  $\chi$  можно опустить  $u$  рядом с единицей. Переходя к переменной  $x = 2u/3\chi$ , получаем:

$$\begin{aligned} W^{\zeta} = & [9 \sqrt{3} \alpha m^2 \chi^3/(16 \pi \hbar \varepsilon)] \int_0^{\infty} x^2 dx \{ [1 - (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2] K_{2/3}(x) + \\ & + (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2 (x/3) K_{1/3}(x) + (\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} \mathbf{s}) K_{1/3}(x) \}, \end{aligned} \quad (14.7)$$

где при преобразовании второго члена в фигурных скобках мы воспользовались формулой (10.32). Интегралы в формуле (14.7) элементарно вычисляются ([52], с. 698). В результате получаем для вероятности радиационного перехода с переворотом спина

$$W^{\zeta} = (1/2T) [1 - 2(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v})^2/9 + 8(\boldsymbol{\zeta} [\mathbf{v} \mathbf{s}])/5 \sqrt{3}], \quad (14.8)$$

где

$$1/T = 5 \sqrt{3} \alpha m^2 \chi^3 / (8 \hbar \varepsilon) = (5 \sqrt{3} \alpha \hbar^2 / 8 m^2) \gamma^5 |w|^3 = \\ = 5 \sqrt{3} \alpha \hbar^2 \gamma^5 / (8 m^2 R^3) = (\alpha m \gamma^2 / \hbar) (H_{\perp} / H_0)^3, \quad (14.9)$$

здесь  $R$  — мгновенный радиус кривизны в магнитном поле;  $H_0$  — напряженность критического магнитного поля (5.36). Отметим, что этот результат имеет место для произвольного магнитного поля [при выполнении слабых ограничений (3.1) и (3.2)]. Видно, что  $W^{\pm}$  пропорционально квадрату постоянной Планка.

Проведем анализ полученного выражения. Для продольной поляризации  $\xi \parallel v$ ,  $(\xi | vs) = 0$ ; остающиеся члены 1 — 2  $(\xi v)^2 / 9$  не зависят от того, направлен спин по скорости или против нее, так что в результате излучения не может возникнуть продольная поляризация. Иное положение возникает в случае поперечной поляризации, в этом случае вероятность перехода зависит от ориентации спина. Из (14.18) следует, что вероятность перехода из состояния, в котором спин направлен по вектору  $[vs]$ , больше вероятности перехода из состояния, в котором спин направлен против вектора  $[vs]$ . Таким образом, возникающая поляризация\* («радиационная поляризация») является поперечной\*\* и направлена против направления  $[vs]$ . Чтобы определить степень поляризации, необходимо решить соответствующее кинетическое уравнение, это будет сделано в следующем разделе.

При вычислении старшего члена разложения по  $\chi$  при  $\chi \ll 1$  [см. (14.7) и (14.8)], имеющего порядок  $\hbar^2$ , можно воспользоваться другим способом: в выражении  $\sum_{\lambda} R_2^* R_1$  [см. (14.4)] коэффициент  $\hbar^2$  вынесен явно так, чтобы во всех остальных членах внутри интеграла (14.3) можно было опустить  $\hbar \omega$ , т. е.  $\varepsilon_f \rightarrow \varepsilon$ , в частности в показателе экспоненты. Подставляя в (14.4) разложение (10.10) и выполняя интегрирование по конечным состояниям фотона до интегрирования по относительному времени  $\tau$  с помощью формулы

$$\int \exp[-i ky] f(k_{\mu}) (d^3 k / \omega) = -f(i \partial_{\mu}) \{4\pi / [(y_0 - i\varepsilon)^2 - y^2]\} \quad (14.10)$$

здесь  $y_0 = \tau$ ;  $y = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ;  $y^2 = y_0^2 - y^2 = \tau^2 (1/\gamma^2 + \omega^2 \tau^2 / 12)$ , полу-

\* На существование эффекта радиационной поляризации впервые указали А. А. Соколов и И. М. Тернов [91], которые провели расчет традиционным образом с использованием точных решений уравнения Дирака в однородном магнитном поле. Приведенный вывод, применимый и для неоднородных полей, основывается на работах [18, 19].

\*\* Это обстоятельство очевидно заранее: аксиальный вектор возникающей поляризации может быть направлен лишь вдоль единственного аксиального вектора, фигурирующего в задаче  $[v s]$ .

чаем следующее выражение\* для вероятности перехода с переворотом спина в единицу времени:

$$W^{\pm} = [(\alpha/\pi) (\hbar^2/m^2)] \gamma^5 \omega^3 \oint [dz/(1+z^2/12)^3] [3/z^4 - 5/12z^2 + (1/z^4 + 5/12z^2) (\xi v)^2 - (2i/z^3) (\xi |vs|)], \quad (14.11)$$

где сделана замена  $z = \omega\tau$ , а контур интегрирования проходит ниже вещественной оси и замыкается в нижней полуплоскости. Отсюда видно, что основной вклад в интеграл дает область  $\omega\tau \sim 1/\gamma$ . Входящие в формулу (14.11) контурные интегралы легко вычисляются, и в результате имеем

$$I_{n,m} \equiv \oint dz/[z^n (1+z^2/12)^m] = [i^n \pi (12)^{(1-n)/2}/(m-1)!] [(n+1)/2] \times \times [(n+1)/2+1] \dots [(n+1)/2+m-2]. \quad (14.12)$$

Подставляя интегралы (14.12) в (14.11), приходим к (14.8). Именно этот способ был использован первоначально авторами [18, 19].

14.2. Уравнение для вектора спина с учетом затухания. Из формулы (14.8) вытекает возможность возникновения поперечной поляризации электронов и позитронов во внешнем поле. Для того чтобы выяснить, как реализуется эта возможность, необходимо получить и решить кинетическое уравнение для поляризационной матрицы плотности с учетом взаимодействия с полем излучения. Учитывая квазиклассический характер движения электрона большой энергии во внешнем поле, это уравнение удобно представить в виде уравнения для вектора спина (среднего значения оператора спина в системе покоя электрона). Таким образом, речь идет о получении уравнения типа КВС (5.64) с учетом взаимодействия с полем излучения.

Введем гейзенберговский оператор спина электрона в системе покоя  $\sigma(t)$  ( $\sigma^+(t) = \sigma(t)$ ), среднее значение которого

$$\xi_0(t) = \langle t_0 | \sigma(t) | t_0 \rangle \quad (14.13)$$

есть вектор спина в системе покоя частицы. Без учета взаимодействия с полем излучения изменение этого вектора во времени для частиц с заданным аномальным магнитным моментом определяется уравнением КВС (5.64), а для частиц, удовлетворяющих уравнению Дирака, — уравнением (5.57) [в квазиклассическом пределе, т. е. для полей, слабо меняющихся на длинах порядка  $\hbar/mc$ , и узких волновых пакетов (см. раздел 5.5)].

\* Заметим, что формулами типа (14.10) можно пользоваться только в случае, когда показатель экспоненты в интеграле не содержит членов  $\hbar\omega$  (кроме общего фактора). Такая ситуация возникает непосредственно при вычислении членов низшего порядка ( $\sim \hbar^0$  при вычислении полной вероятности,  $\sim \hbar^2$  при вычислении вероятности перехода с переворотом спина). Однако эта формула может быть полезна и при вычислении поправок следующих порядков, для чего необходимо члены в экспоненте, содержащие  $\hbar\omega$ , разложить в степенной ряд.

После включения взаимодействия с полем излучения эволюция вектора состояния во времени определяется матрицей  $U(t, t_0)$

$$|t\rangle = U(t, t_0)|t_0\rangle. \quad (14.14)$$

Изменение среднего значения спина дираковского электрона во времени с учетом взаимодействия с полем излучения следующее

$$\begin{aligned} \langle t|\sigma(t)|t\rangle - \langle t_0|\sigma(t_0)|t_0\rangle &= \langle t_0|U^+(t, t_0)\sigma(t)U(t, t_0)|t_0\rangle - \\ &- \langle t_0|\sigma(t_0)|t_0\rangle = \langle t_0|U^+(t, t_0)[\sigma(t), U(t, t_0)]|t_0\rangle + \\ &+ \langle t_0|\sigma(t) - \sigma(t_0)|t_0\rangle. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Здесь последний член определяет изменение среднего спина в отсутствие поля излучения. Представим матрицу  $U(t, t_0)$  в виде разложения теории возмущений по электромагнитной константе связи  $e$ :

$$U(t, t_0) = I + iT(t, t_0) = I + i[T_1(t, t_0) + T_2(t, t_0) + \dots]. \quad (14.16)$$

Из условия унитарности матрицы рассеяния получаем\* (ср. раздел 5.15)

$$T_1 - T_1^\dagger = 0; \quad i(T_2^\dagger - T_2) = T_1^\dagger T_1 = 2\text{Im} T_2. \quad (14.17)$$

С учетом этих соотношений и (14.13) можно переписать (14.15) в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) - \xi(t_0) &= \langle t_0|\{T_1^\dagger \sigma(t) T_1 - (\sigma(t) T_1^\dagger T_1 + T_1^\dagger T_1 \sigma(t))/2 + \\ &+ i[\sigma(t), \text{Re} T_2]\}|t_0\rangle + \xi_0(t) - \xi_0(t_0), \end{aligned} \quad (14.18)$$

причем  $\xi_0(t_0) = \xi(t_0)$ , поскольку взаимодействие с полем излучения включается в момент времени  $t_0$ .

Приступим к вычислению отдельных членов в (14.18). В матрицу  $T_1$  входит оператор рождения или уничтожения фотона, поэтому матричный элемент

$$\langle t_0|T_1|t_0\rangle = 0, \quad (14.19)$$

поскольку вектор состояния  $|t_0\rangle$  описывает состояния электрона во внешнем поле при отсутствии поля излучения. Это обстоятельство учтено в (14.18). При вычислении членов, содержащих комбинацию  $T_1^\dagger T_1$ , следует учесть, что отличны от нуля только матричные элементы  $T_1$  для перехода в однофотонные состояния:

$$\begin{aligned} \langle t_0|T_1^\dagger T_1|t_0\rangle &= \sum_n \langle t_0|T_1^\dagger|n\rangle \langle n|T_1|t_0\rangle = \\ &= \int d^3k \sum \langle t_0|T_1^\dagger|f, k\rangle \langle k, f|T_1|t_0\rangle, \end{aligned} \quad (14.20)$$

\* Отметим, что введенный вектор состояния является двухкомпонентным спинором, а  $U(t, t_0)$  — матрица  $2 \times 2$ , действующая в пространстве этих спиноров.  $\text{Re} T_2$  и  $\text{Im} T_2$  означают соответственно эрмитову и деленную на  $i$  антиэрмитову части оператора  $T_2$ .



где интегрирование ведется по импульсам фотона, а суммирование по спидам электрона  $s_f$  и поляризациям фотона  $\lambda$ ,  $\langle f, k | T_1 | t_0 \rangle$  — матричный элемент перехода в однофотонное состояние с фотоном  $(k, \lambda)$  [излучение фотона, ср. (9.6), (10.2) и (10.3)]. В соответствии с результатами § 9 и 10 [см. (10.2)—(10.4)] этот матричный элемент имеет вид

$$\langle k, f | T_1 | t_0 \rangle = \{e/[(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\hbar\omega}]\} \times \\ \times \varphi_f^+ \left[ \int_{t_0}^t Q(t) \exp \{i(\varepsilon/\varepsilon_f)[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]\} dt \right] \varphi_i. \quad (14.21)$$

На основании аргументов, которые приводят к формуле (10.6) и в используемых выше терминах означают, что характерное время изменения матричных элементов операторов  $T_1$  есть время излучения ( $\tau \sim 1/\omega\gamma \sim T/\gamma$ ), тогда как характерное время изменения  $\sigma(t)$  ( $\xi(t)$ ) есть  $T$  ( $T$  — например, период обращения), можно с точностью до членов  $\sim 1/\gamma$  пренебречь зависимостью  $\sigma(t)$  от времени. С учетом этого обстоятельства и (14.20), (14.21) имеем:

$$\Delta \xi_1 \equiv \langle t_0 | \{T_1^+ \sigma T_1 - [\sigma T_1^+ T_1 + T_1^+ T_1 \sigma]/2\} | t_0 \rangle = \\ = (e^2/4\pi\hbar) \int [d^3 k/(2\pi)^2 \omega] \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \sum_{\lambda} \mathbf{S} \exp \{(-i\varepsilon/\varepsilon_f) \times \\ \times [\omega(t_2 - t_1) - \mathbf{k}(\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1))]\}, \quad (14.22)$$

где

$$\mathbf{S} = \text{Sp} \{[Q_2^+ \sigma Q_1 - (\sigma Q_2^+ Q_1 + Q_2^+ Q_1 \sigma)/2] (1 + \xi\sigma)/2\}. \quad (14.23)$$

Воспользовавшись соотношением

$$Q_1 \sigma = \sigma Q_1 + 2[\mathbf{B}_1 \sigma], \quad (14.24)$$

нетрудно вычислить след (14.23):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B; \\ \mathbf{S}_A &= -[(A_2^* \mathbf{B}_1 + A_1 \mathbf{B}_2^*) \xi]; \\ \mathbf{S}_B &= -2i[\mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1] + \mathbf{B}_2^* (\xi \mathbf{B}_1) + \mathbf{B}_1 (\xi \mathbf{B}_2^*) - 2\xi (\mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1). \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

Полученное выражение для  $\mathbf{S}$  содержит члены двух типов: квадратичные по  $B$  ( $\mathbf{S}_B \sim \hbar^2$ ) и линейные по  $B$  ( $\mathbf{S}_A \sim \hbar$ ). Рассмотрим их отдельно. Умножим  $\mathbf{S}$  (14.23) на  $\xi$ :

$$(\mathbf{S}\xi) = (\mathbf{S}_B \xi) = 2\{(\mathbf{B}_2^* \xi)(\mathbf{B}_1 \xi) - \xi^2 (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^*) + i(\xi [\mathbf{B}_2^* \mathbf{B}_1])\} = \\ = -2R_2^* R_1|_{sf}, \quad (14.26)$$

так что член  $(\mathbf{S}_B \xi)$  выражается через квадрат матричного элемента радиационного перехода с переворотом спина (14.1). Заметим, что

в отличие от предыдущего раздела, где была рассмотрена задача для одного электрона ( $\xi^2 = 1$ ), здесь мы ведем рассмотрение для ансамбля электронов (на языке одного из представлений матрицы плотности), так что  $|\xi| \neq 1$ . Дальнейшее вычисление интеграла (14.22) совпадает с проделанным в предыдущем разделе\*, поскольку члены при заданных структурах с  $\xi$  выделяются однозначно. Таким образом, ответ следует прямо из формулы (14.8):

$$\Delta \xi_{1,B}/\Delta t = (-1/T) \{ \xi - 2v(\xi v)/9 + 8[vs]/5\sqrt{3} \}, \quad (14.27)$$

где  $T$  задано формулой (14.9).

Рассмотрим теперь член  $\Delta \xi_{1,A}/\Delta t$ . Как видно из (14.25), структура этого члена  $[F_A \xi]$ ; как уже отмечалось, члены такого типа описывают вращение, а не изменение  $|\xi|$  в отличие от  $\Delta \xi_{1,B}/\Delta t$  (14.27). Используя явное выражение для  $A$ ,  $B$  (10.4), (14.2), проведя суммирование по поляризациям фотона и разложения (10.10), находим, сохраняя члены до порядка  $1/\gamma^2$  [это порядок членов  $\sum_{\lambda} A_1 A_2^*$ ,  $\sum_{\lambda} B_1 B_2^*$  (10.8)]:

$$\sum_{\lambda} (A_1 B_2^* + A_2^* B_1) = [\hbar \omega (\varepsilon + \varepsilon_j)/2\varepsilon_j^2] (1/\gamma) [nv].$$

Разлагая вектор  $[nv]$  по векторам  $s$ ,  $[vs]$ , получаем  $[nv] = \psi[sv] + \beta s$ . Подставляя это значение  $[nv]$  в выражение для  $\sum_{\lambda} (A_1 B_2^* + A_2^* B_1)$ , а затем в  $S_A$  (14.25), после чего полученное выражение — в интеграл (14.22), видим, что подынтегральная функция является нечетной функцией углов вылета фотона и, следовательно, обращается в нуль при интегрировании по конечным состояниям фотона.

Таким образом,

$$\Delta \xi_{1,A}/\Delta t = 0. \quad (14.28)$$

Это обстоятельство не случайно и связано с инвариантностью относительно отражения времени. Действительно, при  $t_1 \rightarrow -t_1$  и  $t_2 \rightarrow -t_2$  имеем  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $d\xi/dt \rightarrow d\xi/dt$ , в то время как интеграл  $\int \sum_{\lambda} (A_2^* B_1 + A_1 B_2^*)$  в (14.22) не меняет знака при этой замене.

Перейдем теперь к вычислению числа с  $\text{Re } T_2$  в (14.18). По определению  $\langle t_0 | T_2 | t_0 \rangle$  есть матричный элемент матрицы рассеяния второго по константе связи  $e$  порядка, взятый между одночастичными состояниями, т. е. вклад диаграммы собственной энергии (см. рис. 29,а), который был рассмотрен в § 12. Учитывая, что здесь использовано представление, в котором вектор состояния является двухкомпонент-

\* Необходимо, чтобы разность времен  $t - t_0 \gg \tau \sim 1/\omega\gamma$ .

ным спинором, т. е.  $|t_0\rangle = \varphi|i\rangle$ , имеем с учетом (12.6)—(12.8) и (12.11):

$$\begin{aligned} \langle t_0 | T_2 | t_0 \rangle &= T_{qq}^{(2)} = \int dt [T_0^{(2)} + T_{\xi}^{(2)}(\xi[vs])] = \\ &= (i\alpha/(2\pi)^2) \int dt \int (d^3 k/\omega) \int_0^\infty d\tau \langle i | \varphi^+ (N_0 + i\sigma\mathbf{N}) \varphi | i \rangle L_1. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Как уже отмечалось, имеется однозначная связь между  $T_0^{(2)}$  и  $N_0$ ,  $T_{\xi}^{(2)}[vs]$  и  $\mathbf{N}$ . Воспользовавшись явным видом  $T_{\xi}^{(2)}(\xi[vs])$ , (12.17) и (12.19), получим, что

$$\langle i | [\alpha/(2\pi)^2] \int (d^3 k/\omega) \int_0^\infty d\tau \operatorname{Re} \mathbf{N} L_1 | i \rangle = \mu' \mathbf{H}_R/\gamma, \quad (14.30)$$

где учтено представление (12.24). Используя явный вид  $\operatorname{Re} T_2$  (14.29) и (14.30) и проведя простые вычисления при тех же предположениях о  $\sigma(t)$ , что и в (14.22), найдем

$$\begin{aligned} \langle t_0 | i[\sigma, \operatorname{Re} T_2] | t_0 \rangle &= \langle i | \varphi^+ i[\sigma, \operatorname{Re} T_2] \varphi | i \rangle = \\ &= \langle i | \operatorname{Sp} \{[(1 + \xi\sigma)/2] i[\sigma, \operatorname{Re} T_2]\} | i \rangle = \\ &= \int_{t_0}^t dt \operatorname{Sp} \{[(1 + \xi\sigma)/2] (\mu'/\gamma) i[\sigma, \sigma\mathbf{H}_R]\} = \\ &= \int_{t_0}^t dt (\mu'/\mu_0) (e/m\gamma) |\xi\mathbf{H}_R|. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Отсюда получаем для приращения вектора  $\xi(t)$  [см. (14.18)]:

$$d\xi_2/dt = (\mu'/\mu_0) (e/\epsilon) [\xi\mathbf{H}_R], \quad (14.32)$$

т. е. определяем член вращения, пропорциональный аномальному магнитному моменту электрона в поле.

Наконец, входящая в (14.18) разность  $\xi_0(t) - \xi_0(t_0) = (d\xi_0/dt) dt$  описывает изменение вектора спина электрона во внешнем поле в отсутствие взаимодействия с полем излучения [см. (5.62) и (5.63)].

Таким образом, картина рассматриваемого явления следующая. В отсутствие взаимодействия с полем излучения спин прецессирует согласно уравнениям (5.62), (5.63).

Включение взаимодействия с полем излучения приводит к эффектам двух типов.

1. Возникают новые члены вращения, связанные с появлением у электрона вследствие взаимодействия с полем излучения аномального магнитного момента  $\mu'$  (12.24). Сумма (5.62) и (14.32) дает уравнение движения для вектора  $\xi$  (среднего значения поляризованного оператора  $\sigma$  в системе покоя) для электрона с аномальным магнит-

ным моментом. Если сохранить только члены нулевого по постоянной Планка  $\hbar$  порядка ( $\mu'/\mu_0 = \alpha/2\pi$ ), то сумма (14.31) и (14.32) дает уравнение КВС (5.65)\*.

2. Кроме того, появляются члены нового типа, не сводящиеся к вращению (члены затухания), которые меняют  $|\xi|$  (14.27).

Рассмотрим вопрос о квантовых поправках к уравнению КВС при  $H \ll H_0$  [в противном случае само уравнение КВС не имеет смысла, см. (5.48) и последующее обсуждение], которые можно найти из полученных результатов. При  $\chi \ll 1$  поправки представляют собой ряды по степеням  $\chi$ . Отметим, что поскольку  $d\xi_{1,A}/dt = 0$  [см. (14.28) и ниже], то поправки по степеням  $\chi$  в члены вращения входят только через зависимость от  $\chi$  аномального магнитного момента (12.30). Поправки к членам затухания можно определить непосредственно из (14.6). Следует иметь в виду, что старший член вращения имеет порядок  $\hbar^0$  ( $\chi^0$ ), в то время как члены затухания начинаются с порядка  $\hbar^2$  ( $\chi^2$ ) [см. (14.9)]. Тем не менее их следует учитывать и в приближении, когда ограничиваемся только членами старшего порядка (именно это приближение представляет практический интерес), поскольку они приводят к новым качественным эффектам — изменению  $|\xi|$ . В указанном приближении уравнение для движения спина [24, 25] имеет вид [см. (5.62), (14.27), (14.32)]

$$\begin{aligned} d\xi/dt = (e/\varepsilon) [\xi (\mu' \mathbf{H}_R / \mu_0 + \mathbf{H}_E)] - \\ - (\xi - 2\nu (\xi \mathbf{v})/9 + 8 |\mathbf{v}\mathbf{s}|/5 \sqrt{3})/T. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Противоположный случай  $\chi \gg 1$  будет обсужден ниже.

14.3. Решение кинетического уравнения. Рассмотрим решение уравнения (14.33) в магнитном поле ( $\mathbf{E} = 0$ ) в случае больших энергий  $\gamma \gg 1$ , поскольку только в этом случае имеет смысл учитывать члены, связанные с затуханием. Оказывается удобным ввести систему осей  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ;  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}'/|\mathbf{v}'|$ ;  $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{v}, \mathbf{v}]/|\mathbf{v}||\mathbf{v}'|$ , тогда уравнение (14.33) можно переписать в виде [24, 25]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\Omega \xi_2 - 7\xi_1/9T; \\ \dot{\xi}_2 &= \Omega \xi_1 + \omega \xi_3 - \xi_2/T; \\ \dot{\xi}_3 &= -\omega \xi_2 - (\xi_3 + 8/5 \sqrt{3})/T, \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

где

$\Omega = \eta \gamma |\dot{\mathbf{v}}|$ ;  $\omega = \eta e H_{\parallel} / \varepsilon + \dot{\mathbf{v}} \mathbf{H} / |\dot{\mathbf{v}}| H_{\perp}$ ;  $\eta = g/2 - 1$ ;  $\mu' = \eta \mu_0$ ;  $1/T$  определяется (14.9). Система (14.34) описывает движение спина ансамбля электронов с учетом затухания в произвольном магнитном поле\*\*.

\* В этом смысле проведенный расчет представляет прямой вывод уравнения КВС.

\*\* Простую оценку кинетики радиационной поляризации можно провести с помощью элементарных уравнений баланса [91].

В качестве простейшей иллюстрации характера решений системы уравнения (14.34) рассмотрим движение электрона в однородном магнитном поле при  $v_{\perp} \neq 0$ . В этом случае  $\Omega = \eta\gamma\omega_0$  ( $\omega_0 = \omega = eH/\varepsilon$  — ларморова частота),  $\omega = 0$ , причем  $\Omega, T$  не зависят от времени. Решение системы в этом случае:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_{\perp}(0) \cos(\Omega t + \varphi_0) \exp[-8t/9T]; \\ \zeta_2 &= \zeta_{\perp}(0) \sin(\Omega t + \varphi_0) \exp[-8t/9T]; \\ \zeta_3 &= (\zeta_3(0) + 8/5\sqrt{3}) \exp[-t/T] - 8/5\sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \quad (14.35)$$

где мы учли, что  $\Omega \gg 1/T$  (отброшены члены  $\sim \chi^4$ ). Отсюда вытекает, что компоненты  $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$  затухают за характерное время  $t \sim T$  [см. (14.9)], в то время, как компонента  $\zeta_3(t)$  выживает, причем через  $t \gg T$  имеем:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0; \quad \zeta_3 = -8/5\sqrt{3} = -0,924. \quad (14.36)$$

Этот результат не зависит от начальной поляризации электронов. В частности, если в начале электроны были не поляризованы, то

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= \zeta_2(t) = 0; \\ \zeta_3(t) &= (-8/5\sqrt{3})(1 - \exp[-t/T]). \end{aligned} \quad (14.37)$$

Выражения (14.35)—(14.37) определяют кинетику радиационной поляризации в однородном поле\*. Заметим, что для электронов ( $e < 0$ ) вектор  $[vs]$  направлен по полю, т. е. возникающая поляризация ориентирована против магнитного поля, для позитронов ( $e > 0$ ) вектор  $[vs]$  направлен против поля, а возникающая поляризация ориентирована по полю. Таким образом мы действительно убедились, что последний член в формуле (14.33) имеет природу, совершенно отличную от остальных членов. В то время как эти члены приводят к вращению спина, не меняя его модуля, член с  $1/T$  в (14.33) изменяет модуль  $\xi$ . Процесс радиационной поляризации протекает так, что на быструю прецессию вектора спина во внешнем поле накладывается медленный процесс затухания поперечных компонент спина\*\*. Еще одно замечание касается зависимости от времени величины степени поляризации. Из (14.37) следует, что  $|\zeta_3(\infty)| = 0,924$ ;  $|\zeta_3(T)| = 0,584$ ;  $|\zeta_3(T/4)| = 0,204$ .

Если электрон движется в однородном поле по винтовой линии ( $vH \neq 0$ ), и поскольку это движение можно получить из кругового преобразованием Лоренца вдоль поля и  $\xi^2 = -s^2$  (квадрат 4-век-

\* При  $\varepsilon/m = \gamma = 10^3$  и величине  $H_{\perp} = 2 \cdot 10^4$  э, время  $T \approx 30$  мин.

\*\* Большое различие в периодах прецессии и затухания можно использовать при решении кинетического уравнения (14.34) в общем случае, например, можно провести усреднение по времени (по быстрому движению) в коэффициентах члена с затуханием.

тора), то асимптотическая степень поляризации такая же, как при круговом движении. В большинстве практически интересных случаев электроны совершают малые колебания в неоднородном поле вокруг равновесной (круговой) орбиты, причем  $|\omega/\Omega| \sim z_0/R\eta\gamma \ll 1$  ( $z_0$  — амплитуда колебаний;  $R$  — средний радиус орбиты). Тогда система (14.34) может решаться с помощью теории возмущений\* [25]. Поправки к асимптотической степени поляризации имеют порядок  $(z_0/R)^2$ .

14.4. Переходы с переворотом спина при  $\chi \gg 1$ . Оставляя в (14.6) главные члены разложения по степеням  $1/\chi$  [для этого можно воспользоваться разложением  $K_\nu(z)$  по степеням  $z$  (3.24), сохраняя старшие члены], получаем

$$\begin{aligned}
 dW^\zeta &= \\
 &= (\alpha m^2/4 \sqrt{3} \pi \hbar \epsilon) \left\{ \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3} (1 - (\zeta v)^2) \int_0^\infty [u^{4/3}/(1+u)^3] du + \right. \\
 &+ 2 \ln \chi (\zeta v)^2 \int_0^\infty K_{1/3}(x) dx + \Gamma(1/3) (3\chi)^{1/3} (\zeta v s) \int_0^\infty [u^{5/3}/(1+u)^3] du \left. \right\} = \\
 &= [\Gamma(2/3)/27] [\alpha m^2 (3\chi)^{2/3} / \hbar \epsilon] \{ (1 - (\zeta v)^2) + [9 \ln \chi / 2 \Gamma(2/3) (3\chi)^{2/3}] (\zeta v)^2 + \\
 &+ [5 \Gamma(1/3) / 2 \Gamma(2/3) (3\chi)^{1/3}] (\zeta v s) \}, \quad (14.38)
 \end{aligned}$$

где при вычислении второго члена мы воспользовались соотношением (10.32) и оставили только главный член ( $\ln \chi$ ). Сравнивая (14.43) с (10.40), видим, что при  $\chi \gg 1$  вероятность перехода с переворотом спина того же порядка, что и полная вероятность излучения, в то время как при  $\chi \ll 1$  эта вероятность была порядка  $\chi^2$  по сравнению с полной. Если при  $\chi \ll 1$  член с  $(\zeta v s)$  такого же порядка, как остальные в вероятности перехода с переворотом спина, что приводит к появлению преимущественной ориентации спина, то при  $\chi \gg 1$  этот член порядка  $\chi^{-1/3}$  по сравнению с главным, следовательно, степень поляризации в этом случае порядка  $\chi^{-1/3}$ .

Отметим, что когда электрон обладает определенной спиральностью [ $(\zeta v)^2 = 1$ ], вероятность перехода с переворотом спина существенно уменьшается (в  $\chi^{2/3}$  раз), т. е. с точностью до членов порядка  $\chi^{-2/3}$  спиральность сохраняется. Это обстоятельство связано с правилом сохранения спиральности при электромагнитном взаимодействии релятивистских электронов, которое нарушается в процессах, связанных с фотонами в случае, когда фотоны излучаются в конус с углом  $\lesssim 1/\gamma$  по направлению движения. Однако при  $\chi \gg 1$  угол конуса становится порядка  $\chi^{1/3}/\gamma$ , так что с точностью до членов порядка  $\chi^{-2/3}$  спиральность сохраняется.

\* Процесс радиационной поляризации проанализирован в обзоре [26].

15.1. Квазиклассическое уравнение, определяющее воздействие излучения на заряд. В § 4 было рассмотрено воздействие излучения на движение заряженных частиц в классической теории. При больших энергиях ( $\gamma \gg 1$ ) для силы реакции излучения можно использовать локальное выражение (4.22), которое является следствием того, что формирование импульса излучения происходит на длине когерентности, которая стремится к нулю как  $1/\gamma$ . Для учета квантовых свойств излучения частиц большой энергии можно использовать развитый выше квазиклассический метод. Описание формирования фотона во времени содержится в формуле (10.12), причем подынтегральная функция  $\varphi(\tau)$  в (10.12) дает зависимость плотности вероятности излучения фотона от времени  $\tau$ . Эта функция является быстроеосциллирующей, следовательно, в интеграл (10.12) вклад дают  $\tau \lesssim 1/\omega\gamma \approx 1/\omega_0\gamma$  ( $\omega_0$  — ларморова частота), что и определяет время формирования фотона, которое такое же, как в классической теории [см. (3.6)]. При интегрировании  $\varphi(\tau)$  совместно с произвольной плавной функцией  $g(\tau)$  имеем

$$\int g(\tau) \varphi(\tau) d\tau \approx g(0) [1 + \text{const}(q/\gamma)] \int \varphi(\tau) d\tau, \quad (15.1)$$

где  $\Omega_g = \omega_0 q = |g'(0)/g(0)|$  — характерная частота изменения функции  $g(\tau)$ . Отсюда видно, что с точностью до членов  $\sim q/\gamma$  плотность вероятности излучения обладает свойствами  $\delta$ -функции. Это соответствует указанному выше свойству классического излучения.

Среднее число фотонов, излученных в единицах времени (рассмотрим ниже случай  $\chi \ll 1$ ), определяется  $W = \int dW$  (10.39), так что среднее время между излучениями фотона есть  $1/W = 1/\alpha\gamma\omega_0$ . Таким образом, картина излучения во времени представляет всплески длительностью  $\sim 1/\omega_0\gamma$ , разделенные средним интервалом  $\sim 1/\alpha\gamma\omega_0$ , а возможность представления ее в виде последовательности отдельных всплесков связана с малостью константы взаимодействия  $\alpha$ . Здесь было рассмотрено излучение при заданном движении частицы, характеризуемом  $v(t)$ ,  $w(t)$ , т. е. излучение «классическим током». Как было показано в § 6, в данном случае последовательные акты излучения статически независимы. Это следует из того, что вероятность излучения  $n$  фотонов описывается распределением Пуассона (6.31).

Таким образом, пространственно-временная картина процесса излучения в квантовой теории во многом аналогична классической. Имеются, однако, весьма существенные различия, связанные с дискретным характером излучения и конечностью энергии, уносимой фотоном.

Найдем в рамках метода, развитого в § 9, изменение среднего от функции оператора импульса  $F(P_\mu(t))$  для состояний до

и после излучения  $|t_0\rangle$  и  $|t\rangle = U(t, t_0)|t_0\rangle$ ,  $U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t \times$   
 $\times dt_1 H_{int}(t_1) \dots$ , где  $H_{int}(t_1)$  — гамильтониан взаимодействия ча-  
 стицы в магнитном поле с полем излучения (5.69), тогда

$$\langle t | F(P_\mu(t)) | t \rangle - \langle t_0 | F(P_\mu(t_0)) | t_0 \rangle = \langle t_0 | U^\dagger F(P_\mu(t)) U - \\ - F(P_\mu(t_0)) | t_0 \rangle = \langle t_0 | U^\dagger [F(P_\mu(t)), U] + F(P_\mu(t)) - \\ - F(P_\mu(t_0)) | t_0 \rangle. \quad (15.2)$$

Для вычисления входящего в (15.2) коммутатора учтем, что:  
 1) с оператором  $F(P_\mu(t))$  не коммутирует только член  $\exp[-ikr(t_1)]$   
 в  $H_{int}(t_1)$  [см. (9.14)]; 2) процесс излучения происходит за очень  
 короткое время, так что интервал  $t - t_0$  можно выбрать малым и  
 в коммутаторе провести разложение по разности времен и оставить  
 только старший член разложения; 3) имеет место\*  $\langle t_0 | [F(P_\mu),$   
 $U] | t_0 \rangle \approx 0$ . Тогда находим

$$\langle t_0 | U^\dagger [F(P_\mu), U] | t_0 \rangle = \langle t_0 | \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 H_{int}^\dagger(t_2) H_{int}(t_1) [F(P_\mu - \\ - \hbar k_\mu) - F(P_\mu)] | t_0 \rangle. \quad (15.3)$$

Проводя дальнейшие вычисления, как при рассмотрении магнито-  
 тормозного излучения (§ 10), и заменяя операторы в обкладках на  
 их классические значения, получаем

$$dF(p_\mu)/dt = \int dW [F(p_\mu(t) - \hbar k_\mu) - F(p_\mu(t))] + (dF/dt)_i, \quad (15.4)$$

где последний член описывает изменение функции  $F$ , не связанное  
 с излучением. Уравнение (15.4) есть квазиклассическое обобщение  
 реакции излучения. Область применимости этого уравнения такая же  
 как всех формул для магнитотормозного излучения. С помощью  
 уравнения (15.4) можно решить любую задачу о воздействии излу-  
 чения на движение частиц большой энергии ( $\gamma \gg 1$ ) во внешнем  
 поле.

15.2. Воздействие излучения на движение электронов в ускорителях. Мы применим  
 уравнение (15.4) к рассмотрению динамики электронов в ускорите-  
 лях. С одной стороны (этот вопрос рассмотрен в разделе 4.2), излу-  
 чение приводит к затуханию (иногда к раскачке) поперечных коле-  
 баний. С другой, вследствие дискретного характера процесса излу-

\* В этом соотношении член нулевого порядка в разложении  $U$ -матрицы  
 не дает вклада, поскольку коммутатор обращается в нуль, член первого по-  
 рядка выпадает в силу соотношения (14.19), член второго порядка не дает  
 вклада, так как для того, чтобы среднее по одночастичным состояниям не  
 обращалось в нуль, следует взять члены, содержащие по одному оператору  
 рождения и уничтожения, но в них входит комбинация в виде  
 $\exp[ikr(t_2)] \exp[-ikr(t_1)]$ , которая, как показано в § 9 [см. обсуждение  
 после (9.256)], коммутирует с  $F(P_\mu)$ .



чения энергия (и, следовательно, равновесный радиус  $R$ ) меняется скачком, совокупность таких толчков приводит к статической раскачке  $\rho$ - и  $X$ -колебаний, так называемая квантовая раскачка. Раскачка вертикальных  $z$ -колебаний происходит за счет малой поперечной отдачи электрона при излучении, для  $\rho$ - и  $X$ -колебаний эффектом отдачи можно пренебречь.

Перейдем к конкретному рассмотрению воздействия излучения на колебания. Для простоты предположим, как и в разделе 5.2, что колебания в отсутствие излучения независимы и что полная энергия электрона в среднем не меняется. Подставляя гамильтониан колебательного движения (4.24) в (15.4), получаем

$$d\mathcal{H}_j/dt = (1/2\varepsilon) \int (-2\rho_j \hbar k_j + \hbar^2 k_j^2) dW + \int [U_j(q_j(\varepsilon - \hbar\omega)) - U_j(q_j(\varepsilon))] + (dU_j/dq_j)(dq_j/d\varepsilon)(d\varepsilon/dt)_i. \quad (15.5)$$

Решая задачу при  $\chi \ll 1$  и сохраняя старшие члены разложения до второго порядка по  $(\hbar\omega/\varepsilon)$ , а также учитывая, что  $\dot{\varepsilon} = -I + (d\varepsilon/dt)_i$ , где  $I = \int \hbar\omega dW$  [см. (10.52)] — интенсивность излучения, и  $\hbar \int k_j dW \approx (v_j + \text{const } (1/\gamma^2)) I$ , находим

$$d\mathcal{H}_j/dt = -2T_j(I/\varepsilon) + (1/2\varepsilon) \int \hbar^2 k_j^2 dW + (dU_j/dq_j)(dq_j/d\varepsilon)\dot{\varepsilon} + (1/2)[d^2 U_j/dq_j^2 (dq_j/d\varepsilon)^2 + (dU_j/dq_j)(d^2 q_j/d\varepsilon^2)] \int \hbar^2 \omega^2 dW. \quad (15.6)$$

Это уравнение является квантовомеханическим обобщением уравнения (4.27) и может решаться при тех же предположениях. С учетом теоремы вириала (4.29) в итоге находим

$$d\mathcal{H}_j/dt = ((dq_j/d\varepsilon)(d\varepsilon/dt)_i - I/\varepsilon) 2\bar{T}(\mathcal{H}_j) + (\hbar^2/2\varepsilon) \int \overline{k_j^2 dW} + (1/2) \overline{(d^2 U_j/dq_j^2)(dq_j/d\varepsilon)^2} \int \hbar^2 \omega^2 dW. \quad (15.7)$$

Это уравнение есть обобщение уравнения (4.30) и применимо для любого потенциала. Для осцилляторных потенциалов  $2T_j = \varepsilon_j$  имеем

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_\rho/dt &= ((-dR/d\varepsilon)(d\varepsilon/dt)_i - I/\varepsilon)\varepsilon_\rho + (55\alpha/48\sqrt{3})\hbar^2\omega_\rho(\omega_\rho/\omega_0) \times \\ &\times (d \ln R/d \ln \varepsilon)^2 (\omega_0^2/m) \gamma^6; \\ d\varepsilon_X/dt &= [(dR/d\varepsilon)(d\varepsilon/dt)_i + \partial \varepsilon/\partial \varepsilon] \varepsilon_X + (55\alpha/48\sqrt{3})\hbar^2\omega_X \times \\ &\times (\omega_X/\omega_0) (d \ln R/d \ln \varepsilon)^2 (\omega_0^2/m) \gamma^6; \\ d\varepsilon_z/dt &= -(I/\varepsilon)\varepsilon_z + (13\alpha/48\sqrt{3})\hbar^2\omega_0(\omega_0^2/m)\gamma^4, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

где использованы соотношения (4.31). Последний член в каждом из уравнений дает квантовую раскачку\*, остальные члены являют-

\* На явление квантовой раскачки впервые указали А. А. Соколов и И. М. Тернов [92].

ся классическими (4.32). Все эти уравнения можно записать в форме [см. (4.33)]

$$d\varepsilon_j/dt = -\Gamma_j \varepsilon_j + \Delta_j. \quad (15.9)$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(t) = & \left[ \int_0^t dt' \Delta_j(t') \exp \left[ \int_0^{t'} \Gamma_j(t'') dt'' \right] \right] \times \\ & \times \exp \left[ -\int_0^t \Gamma_j(t') dt' \right] + \varepsilon_j(0) \exp \left[ -\int_0^t \Gamma_j dt \right]. \end{aligned} \quad (15.10)$$

В простейшем случае, когда  $\Gamma_j$  и  $\Delta_j$  — постоянные, имеем

$$\varepsilon_j(t) = (\Delta_j/\Gamma_j) [1 - \exp(-\Gamma_j t)] + \varepsilon_j(0) \exp(-\Gamma_j t). \quad (15.11)$$

Через время  $t \gg 1/\Gamma_j$  энергия поперечных колебаний стремится к конечному пределу:

$$\varepsilon_j(t \gg 1/\Gamma_j) = \Delta_j/\Gamma_j. \quad (15.12)$$

Физический смысл полученного результата следующий. Квантовые толчки раскачивают поперечные колебания, а радиационное затухание подавляет их. В результате конкуренции этих двух факторов устанавливается стационарный равновесный размер (15.12), иными словами, процесс раскачки может идти только до момента времени  $t \gg 1/\Gamma_j$ , после чего вступает в силу радиационное затухание.

Рассмотрим в качестве примера движение в поле (4.37), для которого с учетом (4.39):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p &= (55\alpha/48 \sqrt{3}) \{ \hbar \omega_0^3 / [m(1-n)] \} \gamma^6; \\ \Delta_x &= (55\alpha/48 \sqrt{3}) \{ \hbar \omega_x^2 \omega_0 / [(1-n)^2 m] \} \gamma^6; \\ \Delta_z &= (13\alpha/48 \sqrt{3}) (\hbar \omega_0^3 / m) \gamma^4. \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

Подставляя приведенные величины, а также  $\Gamma_j$  из (4.43) в формулу (15.12), находим равновесное значение соответствующей поперечной энергии. Учитывая, что амплитуда колебаний связана с энергией соотношением [роль массы играет полная энергия, ср. (4.24)]

$$a_j^2 = 2\varepsilon_j/\varepsilon\omega_j^2, \quad (15.14)$$

можно найти равновесное значение амплитуд колебаний.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

§ 16. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА В МИКРОСКОПИЧЕСКОМ  
ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

16.1. Общее выражение для сечения излучения. В предыдущей главе был сформулирован квазиклассический метод рассмотрения процесса излучения частиц большой энергии во внешнем поле и проведен анализ излучения в полях, в которых угол отклонения частицы велик по сравнению с характерным углом излучения  $1/\gamma$  (случай I). В другом случае (II) рассеяние происходит на углы, меньшие или того же порядка, что и характерный угол излучения. Случай I и II, очевидно, включают в себя все возможные виды внешних полей. Ниже будет рассмотрен процесс излучения в ситуации, когда внешнее поле велико в небольшой области пространства, т. е. в микроскопическом внешнем поле. Наиболее важным примером такого поля является кулоновское.

После проведения операции распутывания\* вероятность перехода с излучением фотона имеет вид (9.27), (9.28). В случае I вклад в излучение дает небольшой отрезок траектории («длина когерентности»), и поэтому излучение удобно характеризовать вероятностью излучения в единицу времени. Соответственно было проведено интегрирование по времени квадрата матричного элемента с переходом к относительному времени  $\tau = t_2 - t_1$ . В случае II вклад в излучение дает вся траектория частицы (длина когерентности стремится к бесконечности), так что излучение характеризуется вероятностью излучения «за все время». Поэтому оказывается удобным интегрировать по времени непосредственно матричный элемент, используя траекторию частицы в приближении малых углов, найденную в разделе 4.1. Вероятность перехода с излучением фотона представим в виде [см. (9.27), (9.28)]

$$d\omega = |M|^2 d^3 k, \quad (16.1)$$

где

$$M = [e/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}] \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp \{i [e/(\epsilon - \omega)] kx(t)\}, \quad (16.2)$$

\* В § 9 была проведена операция распутывания в общем виде для произвольного внешнего поля. Распутывание (и, соответственно, особенности квантовых явлений) в случае кулоновского поля приведено в Приложении Д.

причем  $R(t) = R(p(t))$  [см. (9.28), (10.3) и (10.58)], а зависимости  $p(t)$  и  $kx(t)$  определены формулами (4.1) и (4.8) соответственно.

Отметим, что в приближении малых углов, которым мы пользуемся в классической (§ 3) и квантовой задаче излучения в случае II, зависимость от времени подынтегрального выражения в (16.2) заметно упрощается, так как с принятой точностью ее необходимо учитывать только в главных членах разложения по  $1/\gamma$ . В интеграл (16.2) вклад дают времена  $t$ , такие, что  $[\varepsilon/(\varepsilon - \omega)] kx(t) \sim 1$ , отсюда получается оценка для характерного времени излучения  $t \sim t_c = 2\varepsilon(\varepsilon - \omega)/(m^2\omega)$  [при  $\omega \ll \varepsilon$  эта оценка переходит в полученную в классической теории (см. раздел 3.6)].

Дальнейшее рассмотрение существенно зависит от величины переданного импульса  $q$ . Можно выделить две специфические области значений  $q$  в зависимости от соотношения величин  $q$  и  $q_{\text{мин}}$ , где

$$q_{\text{мин}} = 1/t_c = \omega m^2/[2\varepsilon(\varepsilon - \omega)]; \quad (16.3)$$

минимальное значение переданного поля импульса. В первой области  $q \gg q_{\text{мин}}$ , во второй  $q \sim q_{\text{мин}}$ . Учитывая связь прицельного параметра  $\rho$  и переданного импульса  $q$ ,  $q\rho \sim 1$ , получаем, что в первой области  $t_c = 1/q_{\text{мин}} \gg \rho$ , а во второй —  $t_c = 1/q_{\text{мин}} \sim \rho$ . Это проясняет смысл разбиения на области. Поскольку рассеяние происходит за времена порядка  $t \sim \rho$  (скорость  $v \approx 1$ ), а электрон находится почти на массовой оболочке\* (с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$ ), то время излучения в первой области значительно превышает время рассеяния, т. е. процесс рассеяния в этой области не зависит от процесса излучения, а траекторию частицы, как и в соответствующей классической задаче, можно представить в виде угла [см. (3.83), (3.84)]. Необходимо отметить, что в этом случае полем передается только поперечный импульс. Наличие продольного импульса связано с явлением квантовомеханической дифракции в процессе рассеяния. Угол дифракции определяется неопределенностью импульса на участке траектории, который дает основную вклад в излучение фотона. Учитывая, что скорость электрона  $v \approx 1$ , т. е. длина этого участка  $\sim t_c$ , имеем

$$q_{\parallel} \sim \Delta p \sim 1/t_c = q_{\text{мин}} \ll q. \quad (16.4)$$

В результате вклад продольной передачи импульса в выражение для сечения рассеяния в первой области оказывается несущественным, а сечение излучения, в силу независимости процесса рассеяния от процесса излучения, можно представить в виде

$$d\sigma_{\gamma} = d\sigma_0(\mathbf{q}_{\perp}) d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = d\sigma_0(\mathbf{q}) d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = d\sigma_0(\mathbf{q}) |M|^2 d^3k \quad (16.5)$$

где  $d\sigma_0(\mathbf{q})$  — сечение процесса рассеяния;  $d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})$  — вероятность излучения на траектории в виде угла для данного переданного импульса  $\mathbf{q}$ .

\* Напомним, что рассматриваем рассеяние на малые углы  $\leq 1/\gamma$ , которые дают основной вклад в сечение.

Перейдем ко второй области, в которой  $q \sim q_{\min} = 1/t_c$ . В этой области  $t_c \sim \rho$  и рассеяние происходит за те же времена (на тех же длинах), что и излучение, следовательно, его уже нельзя считать независимым. Подобная ситуация имеет место и в классической теории (см. раздел § 3.6). Наряду с этим во второй области становится существенным явление квантовой механической дифракции, поскольку

$$q_{\parallel} \sim \Delta p \sim 1/t_c = q_{\min} \sim q. \quad (16.6)$$

Из-за дифракции величина переданного импульса уже не определяется углом рассеяния частицы. Поэтому, чтобы получить матричный элемент излучения с данным переданным импульсом, необходимо провести суммирование по траекториям [парциальным амплитудам  $\mathcal{M}(\rho)$ ]. Для этого воспользуемся методом прицельного параметра (см. Приложение Ж). Тогда выражение для сечения процесса излучения можно записать в виде

$$d\sigma = |M(\mathbf{q})|^2 d^3 k d^2 q_{\perp}, \quad (16.7)$$

где

$$M(\mathbf{q}) = (1/2\pi i) \int d^2 \rho \exp[i\mathbf{q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho} + i\chi(\rho)] \mathcal{M}(\rho); \quad (16.8)$$

$\chi(\rho)$  — фаза рассеяния в данном поле:

$$\chi(\rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} V(\rho, z) dz. \quad (16.9)$$

Приступим к вычислению интеграла (16.2) в первой области. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}(-\infty) &\equiv \mathbf{p}_1; & \mathbf{p}(+\infty) &\equiv \mathbf{p}_f = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}; \\ \mathbf{p}'(+\infty) &= \mathbf{p}_f - \mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q} - \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_2; \\ \varepsilon(-\infty) &= \varepsilon_1; & \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 - \omega; \\ q_{\min} &= |\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{k}| = \omega m^2 / 2\varepsilon(\varepsilon - \omega). \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

Поскольку импульс зависит от времени, то следует различать импульсы частицы после рассеяния  $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}$  и импульс частицы в конечном состоянии (после рассеяния и излучения)  $\mathbf{p}'(+\infty) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q} - \mathbf{k}$ . Ясно, что  $q_{\min}$  — минимальная передача импульса при заданных кинетических условиях. Соотношение между  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \omega$  и  $\varepsilon' = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2}$  дается формулой (9.23), где необходимо перейти от операторов к классическим средним. С принятой точностью (до членов  $\sim 1/\gamma^2$ ), учитывая зависимость от времени только главных членов, имеем

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= (e/[2\pi]^{3/2} \sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(t) \exp[i(\varepsilon_1/\varepsilon_2)kx(t)] dt = \\ &= (e/[2\pi]^{3/2} \sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}) (i\varepsilon_2/\varepsilon_1) [(\tilde{R}_1/kv_1) - (\tilde{R}_f/kv_f)], \end{aligned} \quad (16.11)$$

где

$$\tilde{R} = 1/\overline{\varepsilon\varepsilon'R}; \quad \tilde{R}_1 = \tilde{R}(-\infty); \quad \tilde{R}_f = \tilde{R}(+\infty). \quad (16.12)$$

Проводя разложение по  $1/\gamma^2$  и оставляя главные члены, имеем

$$\begin{aligned} kv_f &= \omega(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_f) = \omega \left[ 1 - (\mathbf{n}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k})/V\sqrt{(\mathbf{p}_2^2 + \mathbf{k}^2) + m^2}) \right] \approx \\ &\approx (\varepsilon_2/\varepsilon_1^2) kp_2 = (\varepsilon_2^2/\varepsilon_1^2) kv_2. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Во второй области  $q \sim q_{\text{мин}}$ , откуда  $kv_f \approx kv_1$ . Принимая во внимание последнее соотношение и (16.13), получаем

$$\begin{aligned} q_{\parallel} = \mathbf{n}\mathbf{q} = \mathbf{k}\mathbf{q}/\omega &= (kp_2 - kp_1)/\omega = [(\varepsilon_1/\varepsilon_2)kp_1 - kp_1]/\omega = \\ &= kp_1/\varepsilon_2 = (\varepsilon_1/\varepsilon_2)kv_1. \end{aligned} \quad (16.14)$$

С учетом этого результата и близости траектории к прямой, направленной вдоль  $v_1$ , формула (16.2) приобретает вид

$$\mathcal{M}(\rho) = [e/(2\pi)^{3/2} V\sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(t) \exp[iq_{\parallel}t] dt. \quad (16.15)$$

При вычислении этого интеграла учтем, что

$$\tilde{R}(t) = \tilde{R}_1 - (\partial\tilde{R}_1/\partial\mathbf{p}_1) \mathbf{q}_0(t) + \dots, \quad (16.16)$$

где  $\mathbf{q}_0(t)$  — переданный импульс как функция времени при данном прицельном параметре (3.71):

$$\mathbf{q}_0(t) = (-\rho/\rho) (d/d\rho) \int_{-\infty}^t V(\sqrt{\rho^2 + t^2}) dt. \quad (16.17)$$

Проинтегрировав (16.15) по частям с учетом того, что

$$\exp[iq_{\parallel}t] dt = d \exp[iq_{\parallel}t]/iq_{\parallel},$$

получим

$$\mathcal{M}(\rho) = (\mathbf{D}_R \rho/\rho) (d/d\rho) \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{\rho^2 + t^2}) \exp[iq_{\parallel}t] dt, \quad (16.18)$$

где

$$\mathbf{D}_R = \{e/[(2\pi)^{3/2} V\sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}]\} (1/iq_{\parallel}) (\partial\tilde{R}_1/\partial\mathbf{p}_1), \quad (16.19)$$

Подставляя (16.18) в (16.8), находим

$$M(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_R \mathbf{q}_{\perp} A(q), \quad (16.20)$$

где

$$\begin{aligned} A(q) &= (1/q_{\perp}) \int \rho d\rho J_1(q_{\perp}\rho) \exp[i\chi(\rho)] \times \\ &\times d/d\rho \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{\rho^2 + t^2}) \exp[iq_{\parallel}t] dt; \end{aligned} \quad (16.21)$$

$J_1(q_\perp \rho)$  — функция Бесселя. Сечение излучения в области  $q \sim q_{\text{мин}}$  [см. (16.7)] теперь можно представить в виде

$$d\sigma_{\gamma} = |\mathbf{D}_R \mathbf{q}_\perp|^2 d^3 k |A(q)|^2 d^2 q_\perp. \quad (16.22)$$

Для выявления смысла входящих величин рассмотрим выражение  $|A(q)|^2 d^2 q_\perp$  в промежуточной области  $q \gg q_{\text{мин}} \sim q_\parallel$ , где еще, однако, справедливо представление (16.15). В этой области

$$\begin{aligned} A(q) &\approx - (1/q_\perp) \int_0^\infty \rho d\rho J_1(q_\perp \rho) \exp[i\chi(\rho)] d\chi(\rho)/d\rho = \\ &= (-i/q_\perp) \int_0^\infty d\rho \exp[i\chi(\rho)] d\rho J_1(q_\perp \rho)/d\rho = \\ &= (1/i) \int_0^\infty \rho d\rho J_0(q_\perp \rho) \exp[i\chi(\rho)], \end{aligned} \quad (16.23)$$

здесь  $J_0, J_1$  — функции Бесселя. Это выражение (с точностью до множителя  $\rho$ ) совпадает с амплитудой упругого рассеяния в методе прицельного параметра [ср. с формулой (Ж.18) Приложения Ж]. Учитывая, что  $d^2 q_\perp = q_\perp dq_\perp d\varphi = p_2^2 \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi = p_2^2 d\Omega_2$ , имеем

$$|A(q)|^2 d^2 q_\perp = |p_2 A(q)|^2 d\Omega_2 = d\sigma_0(\mathbf{q}_\perp) \approx d\sigma_0(\mathbf{q}). \quad (16.24)$$

Тем самым в промежуточной области сечения (16.22) приобретает такой же вид, как (16.5):

$$d\sigma_{\gamma} = |\mathbf{D}_R \mathbf{q}_\perp|^2 d^3 k d\sigma_0(\mathbf{q}). \quad (16.25)$$

Теперь сопоставим  $\mathbf{D}_R \mathbf{q}_\perp$  с  $M(\mathbf{q})$  в области, где начальная и конечная частица движутся почти по одной прямой ( $kv_f \approx kv_1$ ), но  $q \gg q_{\text{мин}} \sim q_\parallel$ . Тогда из (16.11) следует:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &\approx [e/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}] [\varepsilon_2/i\varepsilon_1(kv_1)] (\tilde{R}_1 - \tilde{R}_f) \approx \\ &\approx [e/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}] \frac{1}{iq_\parallel} \cdot \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial p_1} \mathbf{q}_\perp = \mathbf{D}_R \mathbf{q}_\perp, \end{aligned} \quad (16.26)$$

где было использовано соотношение (16.14) и учтено, что при  $q \gg q_{\text{мин}}$

$$\tilde{R}_1 - \tilde{R}_f = \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial p_1} \mathbf{q}_\perp. \quad (16.27)$$

Это вытекает из (16.16), когда  $t \rightarrow \infty$ . Из сказанного следует, что комбинацию  $|A(q)|^2 d^2 q_\perp$  можно использовать в обеих областях, так как она непосредственно возникает во второй области и переходит в правильное выражение [см. (16.23), (16.24)] в первой. Одно-

временно выражение  $d\omega = |M(\mathbf{q})|^2 d^3 k$  также справедливо в обеих областях, поскольку оно исходит из первой области и переходит в правильную комбинацию (16.26) во второй. Таким образом, во всей области передач  $q$ , дающей основной вклад, сечение излучения аппроксимируется формулой [21]

$$d\sigma_{\nu} = d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k}) |A(q)|^2 d^2 q_{\perp} = |M(\mathbf{q})|^2 d^3 k |A(q)|^2 d^2 q_{\perp}, \quad (16.28)$$

где

$$d\omega = |M(\mathbf{q})|^2 d^3 k = (\alpha \varepsilon_2 / (2\pi)^2 \varepsilon_1) \left| \frac{\tilde{R}_1}{kp_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\tilde{R}_f}{kp_2} \right|^2 (d^3 k / \omega) \quad (16.29)$$

и  $A(q)$  определяется формулой (16.21). Выражение для  $d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})$  имеет универсальную форму и не зависит от конкретного вида поля. Для того чтобы найти явный вид  $d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})$ , следует подставить  $\tilde{R}$  в (16.29). Используя (10.3), (10.58) и проводя вычисления с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^4$ , получаем для скалярных частиц

$$d\omega_s = [\alpha / (2\pi)^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2] |\mathbf{e}^* \mathbf{I}|^2 d^3 k / \omega \quad (16.30)$$

и для спинорных частиц

$$d\omega_e = [\alpha / (2\pi)^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2] |\varphi_2^\dagger \{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}] \mathbf{e}^* \mathbf{I} + [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / 2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}] (i\mathbf{e}^* [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}])\} \varphi_1|^2 d^3 k / \omega, \quad (16.31)$$

где

$$\mathbf{I} = \varepsilon_2 [\mathbf{p}_1 - (\varepsilon_1 + m) \mathbf{n}] / kp_1 - \varepsilon_1 [\mathbf{p}_2 - (\varepsilon_2 + m) \mathbf{n}] / kp_2 - \mathbf{n}. \quad (16.32)$$

При малых передачах импульса, когда  $q \ll m$ , т. е.

$$(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) kv_1 \approx (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) kv_2 = q_{\parallel} \quad [\text{ср. (16.14)}], \text{ имеем}$$

$$\mathbf{I} \approx (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - nq_{\parallel}) / q_{\parallel} = \mathbf{q}_{\perp} / q_{\parallel}. \quad (16.33)$$

С другой стороны, функция  $A(q)$  определяется только внешним полем и передаваемым импульсом и совершенно не зависит от спина частиц, участвующих в реакции, и поляризованных состояний излученного фотона. Вся зависимость от указанных характеристик содержится в  $d\omega$ .

16.2. Переход к классической теории. Сечение рассеяния в приближении прицельного параметра (16.23), (16.24) имеет вид [ср. (Ж.15) Приложения Ж]

$$d\sigma_0 = \left| \int d^2 \rho \exp[iq_{\perp} \rho + i\chi(\rho)] \right|^2 d^2 q_{\perp} / (2\pi)^2. \quad (16.34)$$

При  $\chi(\rho) \gg 1$  в классическом пределе интеграл в (16.34) можно найти с помощью метода стационарной фазы. Показатель экспоненциального выражения экстремален при

$$q_{\perp} = (-d/d\rho_0) \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{\rho_0^2 + t^2}) dt; \quad \cos \varphi_0 = -1. \quad (16.35)$$



Проведя разложение, находим

$$\int d^2 \rho \exp [i \mathbf{q}_\perp \boldsymbol{\rho} + i \chi(\rho)] = \int \rho d\rho \int d\varphi \exp [-i \mathbf{q}_\perp \boldsymbol{\rho} + i \chi(\rho) + i q_\perp \rho \varphi^2 / 2] = \sqrt{2\pi/q_\perp} \exp [i\pi/4] \int \sqrt{\rho} d\rho \exp [-i q_\perp \rho + i \chi(\rho)] =$$

$$= 2\pi \sqrt{\rho_0 d\rho_0 / q_\perp dq_\perp} \exp [-i q_\perp \rho_0 + i \chi(\rho_0)], \quad (16.36)$$

причем связь  $q_\perp$  и  $\rho$  определяется условием экстремума (16.35). Такая связь имеет место в классической теории [ср. (3.96)]. Подставляя (16.36) в (16.34), получаем классическое сечение (4.35):

$$d\sigma_0 = (\rho d\rho / q_\perp dq_\perp) q_\perp dq_\perp d\varphi = d^2 \rho. \quad (16.37)$$

Подобный переход можно провести и в сечении (16.28). Для того чтобы убедиться в этом, учтем, что если в классическом пределе  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  умножить  $d\omega$  (16.30)—(16.31) на энергию фотона, то найдем выражение для излучаемой энергии (3.94) без множителя  $\Phi$ , а проделав в (16.21) такой же переход, как в (16.34) с учетом (16.14), получим  $d^2 \rho \Phi$ , следовательно, умноженное на энергию фотона сечение (16.28) переходит в энергетическое сечение излучения (3.104).

## § 17. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

17.1. Сечение для неполяризованных частиц. Рассмотрим теперь представляющий основной практический интерес случай излучения при рассеянии частиц большой энергии в кулоновском поле, для которого

$$\left. \begin{aligned} V(r) &= \xi/r; \quad \xi = Z\alpha; \\ \chi(\rho) &= - \int_{-a}^a V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz = 2\xi \ln \rho/a, \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

где  $a$  — параметр регуляризации для кулоновского потенциала, который будем считать много больше всех характерных размеров задачи и от которого сечение не зависит.

Как уже отмечалось, в общем выражении для сечения излучения (16.28) множитель  $d\omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})$  не зависит от вида поля [см. (16.30), (16.31)], поэтому необходимо найти лишь  $A(q)$  [см. (16.21)]. Учтывая, что (см. [52], с. 433)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d/d\rho) V(\sqrt{\rho^2 + t^2}) \exp [i q_{||} t] dt =$$

$$= -\xi \int_{-\infty}^{\infty} [\rho \exp (i q_{||} t) / (\rho^2 + t^2)^{3/2}] dt = -2\xi q_{||} K_1(q_{||} \rho), \quad (17.2)$$

где  $K_1$  — функция Макдональда, и используя явный вид фазы рассеяния в кулоновском поле (17.1), получаем для  $A(q)$  [см. (16.21)]

и [52], с. 707]:

$$\begin{aligned}
 A(q) &= (-2\xi q_{\parallel}/q_{\perp} a^{2i\xi}) \int_0^{\infty} \rho^{1+2i\xi} J_1(q_{\perp} \rho) K_1(q_{\parallel} \rho) d\rho = \\
 &= [-2\xi/(q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2)] (2/aq)^{2i\xi} (1 + i\xi) \Gamma^2(1 + i\xi) \times \\
 &\quad \times F(-i\xi, 1 + i\xi; 2; q_{\perp}^2/[q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2]), \quad (17.3)
 \end{aligned}$$

где  $F(a, b; c, z)$  — гипергеометрическая функция. Здесь мы воспользовались преобразованием гипергеометрических функций (см. [52], с. 1057) от аргумента  $(1 - 1/y)$  к аргументу  $(1 - y)$ :

$$F(2 + i\xi, 1 + i\xi; 2, 1 - 1/y) = y^{1+i\xi} F(-i\xi, 1 + i\xi; 2; 1 - y). \quad (17.4)$$

Для входящей в (18.3) гипергеометрической функции имеет место соотношение

$$(1 + i\xi) F(-i\xi, 1 + i\xi; 2; 1 - y) = V(y) + i\xi y W(y), \quad (17.5)$$

где

$$V(y) = F(i\xi, -i\xi; 1; 1 - y) = V^*; \quad W(y) = (1/\xi^2) dV(y)/dy, \quad (17.6)$$

следующее из преобразований сдвига параметров для гипергеометрических функций (см. [41], с. 71).

Удобно использовать переменную

$$y = (kp_1)(kp_2)/q^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (17.7)$$

которая в классическом пределе ( $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ ) переходит в (3.110). При  $q \sim q_{\text{мин}}$

$$y \approx q_{\parallel}^2/q^2 = 1 - q_{\perp}^2/q^2; \quad q^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2, \quad (17.8)$$

следовательно, в этой области

$$|A(q)|^2 = (4\xi^2/q^4) \Phi(y), \quad (17.9)$$

где

$$\Phi(y) = \frac{V^2(y) + \xi^2 y^2 W^2(y)}{V^2(0)}, \quad (17.10)$$

причем

$$V^{-2}(0) = \Gamma^2(1 - i\xi) \Gamma^2(1 + i\xi) = (\pi\xi/\text{sh } \pi\xi)^2. \quad (17.11)$$

При  $y \ll 1$ , что означает, что  $q_{\perp}^2 \sim q^2$ , т. е.  $q \gg q_{\parallel}$ , имеем  $\Phi(y) \rightarrow 1$ . По этой причине представление (17.9) можно использовать во всей области существенных передач  $q$  (с подобной ситуацией мы уже сталкивались в классической теории). Напомним, наконец, что  $A(q)$  не зависит от спина излучающей частицы, поэтому сечение излучения

ультрарелятивистской частицы в кулоновском поле имеет вид [см. (16.28), (17.9)]

$$d\sigma_{\gamma(s,e)} = (4\xi^2/q^4) \Phi(y) d^2 q_{\perp} d\omega_{s,e}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = d\sigma_{\gamma(s,e)}^B \Phi(y), \quad (17.12)$$

где  $d\sigma_{\gamma(s,e)}^B$  — сечение излучения в первом борновском приближении (нижнем приближении теории возмущений). Действительно, когда  $\xi \rightarrow 0$  (именно в этой области применимо борновское приближение), то  $\Phi(y) \rightarrow 1$ . Учитывая, что сечение  $d\sigma_0(q)$  из (16.5) в кулоновском поле

$$d\sigma_0 = (4\xi^2/q_{\perp}^4) d^2 q_{\perp}, \quad (17.13)$$

видим, что в области поперечных передач импульса  $q \gg q_{\parallel}$  сечение излучения в кулоновском поле совпадает с сечением в борновском приближении:

$$d\sigma_{\gamma(s,e)}^B = d\sigma_0(q) d\omega_{(s,e)}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = (4\xi^2/q^4) d\omega_{s,e}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^2 q_{\perp}. \quad (17.14)$$

Это обстоятельство связано с тем, что сечение рассеяния в кулоновском поле совпадает с борновским. Сечение (17.14) естественно можно получить с помощью диаграммной техники, изложенной в разделе 5.7 (см. диаграммы рис. 13), если в найденном сечении (в первом порядке по взаимодействию с внешним полем и точном по импульсам частиц) оставить старшие по  $1/\gamma^2$  члены [3]. В этом смысле вероятность излучения на траектории в виде угла (с учетом отдачи!) представляет собой в случае больших энергий старший по  $1/\gamma^2$  вклад двух диаграмм (см. рис. 13, а), без фактора  $4\xi^2/q^4$ , соответствующего внешнему полю [ср. (16.5) и (17.14)]. Замечательно, что после суммирования по всем порядкам взаимодействия с внешним полем (сумма вкладов бесконечного числа диаграмм) получаем сечение в борновском приближении (17.12), умножаемое на универсальный фактор  $\Phi(y)$ , не зависящий от спинов и поляризационных состояний и отличный от единицы только при  $q \sim q_{\text{мин}}$ .

Учитывая, что  $d^2 q_{\perp} = \varepsilon_2^2 d\Omega_2$ , и проводя простые преобразования в (16.30) и (16.31) находим для скалярных частиц:

$$d\sigma_{\gamma s}^B = [4Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 / (2\pi)^2 q^4 \varepsilon_1] |\varepsilon_2 \mathbf{e}_{p_1/\kappa_1} - \varepsilon_1 \mathbf{e}_{p_2/\kappa_2}|^2 (d^3 k/\omega) d\Omega_2, \quad (17.15)$$

где  $\kappa_1 = kp_1$ ;  $\kappa_2 = kp_2$ . Просуммировав по поляризациям фотона [см. (A.19) Приложения А], получим

$$d\sigma_{\gamma s}^B = [4Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 / (2\pi)^2 q^4 \varepsilon_1] [-(q^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2) / (\kappa_1 \kappa_2) - (m^2/\kappa_1^2 \kappa_2^2) (\varepsilon_1 \kappa_1 - \varepsilon_2 \kappa_2)^2 - 1] (d^3 k/\omega) d\Omega_2. \quad (17.16)$$

Аналогично для частиц со спином 1/2 после усреднения по спинам начальных и суммирования по спинам конечных частиц, что удоб-

но сделать непосредственно в двухкомпонентной записи (16.31) имеем

$$d\sigma_{\gamma e}^B = [4Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 / (2\pi)^2 q^4 \varepsilon_1] \{ |\varepsilon_2 \mathbf{e} \mathbf{p}_1 / \kappa_1 - \varepsilon_1 \mathbf{e} \mathbf{p}_2 / \kappa_2|^2 + \\ + [e^* e / 4\kappa_1 \kappa_2] [\mathbf{k} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)]^2 \} (d^3 k / \omega) d\Omega_2. \quad (17.17)$$

В этой формуле первый член в фигурных скобках совпадает с соответствующим членом в сечении излучения скалярной частицы, второй является спиновой добавкой. Просуммировав по поляризациям фотона [см. (A.19)], найдем

$$d\sigma_{\gamma e}^B = [4Z^2 \alpha^2 \varepsilon_2 / (2\pi)^2 q^4 \varepsilon_1] [(-m^2 / \kappa_1^2 \kappa_2^2) (\varepsilon_1 \kappa_1 - \varepsilon_2 \kappa_2)^2 - \\ - (q^2 / 2\kappa_1 \kappa_2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - (1/2) (\kappa_1 / \kappa_2 + \kappa_2 / \kappa_1)] (d^3 k / \omega) d\Omega_2 = \\ = [2Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 / (2\pi)^2 q^4 \varepsilon_1] \{ -2m^2 \varepsilon_1^2 / \kappa_2^2 - (2m^2 \varepsilon_1^2 / \kappa_1^2) (1 - \omega / \varepsilon_1)^2 + \\ + [4\varepsilon_1^2 (1 - \omega / \varepsilon_1) m^2 - q^2 \varepsilon_1^2 [1 + (1 - \omega / \varepsilon_1)^2]] / \kappa_1 \kappa_2 - \\ - \kappa_1 / \kappa_2 - \kappa_2 / \kappa_1 \} (d^3 k / \omega) d\Omega_2. \quad (17.18)$$

Для вычисления интегральных сечений, в частности спектра излученных фотонов, удобно перейти к переменным  $y$  [см. (17.7)] и

$$\zeta = (2\varepsilon_1 / \omega m^2) \kappa_1; \quad \eta = (2\varepsilon_2 / \omega m^2) \kappa_2, \quad (17.19)$$

в которых\* сечение для скалярных частиц (17.12) и (17.16) с точностью до членов, дающих вклад в спектр, имеет вид

$$d\sigma_{\gamma s} = [4Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 d\omega dy d\zeta d\eta / (\pi m^2 \varepsilon_1 \omega S \zeta \eta)] [1/y - 1 - \\ - (\zeta - \eta)^2 / \zeta^2 \eta^2 \delta^2] \Phi(y), \quad (17.20)$$

где

$$S = [2\lambda \zeta \eta (\zeta + \eta - 2) - (\lambda \zeta \eta)^2 - (\zeta - \eta)^2]^{1/2}; \\ \lambda = \delta^2 (1 - y) / y; \quad \delta = q_{\text{мин}} / m = \omega m / 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (17.21)$$

При тех же условиях сечение тормозного излучения электронов в используемых переменных имеет вид

$$d\sigma_{\gamma e} = [2Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 d\omega dy d\zeta d\eta / (\pi m^2 \varepsilon_1 \omega S \zeta \eta)] \times \\ \times [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) / \varepsilon_1 \varepsilon_2 y - \zeta \varepsilon_2 / \eta \varepsilon_1 - \eta \varepsilon_1 / \zeta \varepsilon_2 - 2(\zeta - \eta)^2 / \zeta^2 \eta^2 \delta^2] \Phi(y). \quad (17.22)$$

Интегрирование по  $\eta$  проводится между нулями  $S$  [см. (17.21)], а также (Г.40) и (Г.41) Приложения Г]. В рассматриваемые сечения входят интегралы вида

$$B'_n = \int d\eta S' / \eta^n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (17.23)$$

\* Переход к инвариантным переменным дан с помощью методики, приведенной в Приложении Г.

вычисляя которые, имеем

$$\left. \begin{aligned} B_1^{-1} &= \pi/\zeta; B_2^{-1} = (\pi/\zeta^2) [1 + \lambda(\zeta - 2)]; B_3^{-1} = (\pi/\zeta^3) \times \\ &\times [(1 - \lambda\zeta)^2 - 6\lambda(1 - \lambda)(\zeta - 1)]; B_1^1 = 2\pi(1 - \lambda)/(1 - \lambda\zeta); \\ B_2^1 &= 2\pi\lambda(1 - \lambda); B_3^1 = (2\pi/\zeta)\lambda(1 - \lambda)(\zeta - 1). \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Три последних интеграла понадобятся нам в дальнейшем. При интегрировании по  $y$  встречаются интегралы вида

$$\int_{\delta^2}^1 \Phi(y) (\lambda/\delta^2) dy = \int_{\delta^2}^1 \Phi(y) [(1-y)/y] dy; \int_{\delta^2}^1 \Phi(y) (\lambda^2/\delta^2) dy. \quad (17.25)$$

Воспользовавшись гипергеометрическим уравнением (см. [52], с. 1059), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{\delta^2}^1 \Phi(y) [(1-y)/y] dy &= [(1-y)/V^2(0)] [VW + V^2 - y(1-y)\xi^2 W^2]_{\delta^2}^1 = \\ &= 2(\ln 1/\delta - 1/2 - f(\xi)), \end{aligned} \quad (17.26)$$

где

$$\begin{aligned} f(\xi) &= [\psi(1 + i\xi) + \psi(1 - i\xi) - 2\psi(1)]/2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta(2n+1) \xi^{2n} = \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/[n(n^2 + \xi^2)]. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Здесь  $\psi(x) = \ln \Gamma(x)/dx$ ;  $\zeta(2n+1)$  — дзета-функция Римана. При получении правой части (17.26) мы использовали известные асимптотические разложения гипергеометрических функций (см. [41], с. 85) и оставили только старшие члены разложения. При вычислении другого интеграла (17.25) следует иметь в виду, что вклад в него дает (с точностью до членов более высокого порядка по  $\delta^2$ ) только область малых  $y \sim \delta^2$ , так что

$$\int_{\delta^2}^1 \Phi(y) (\lambda^2/\delta^2) dy \approx \delta^2 \int_{\delta^2}^1 dy/y^2 = 1 + O(\delta^2), \quad (17.28)$$

где было учтено, что  $\Phi(y) = 1 + O(y)$  при  $y \ll 1$ .

Выполнив интегрирование сечений (17.20) и (17.22) с помощью формул (17.23)—(17.26) и взяв элементарные интегралы по  $\zeta$ , получим (с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$ ) спектр тормозного излучения при рассеянии скалярной частицы в кулоновском поле

$$d\sigma_{\gamma s}^{\omega} = (16Z^2 \alpha^3/3m^2) (\varepsilon_2/\varepsilon_1) (d\omega/\omega) [\ln 1/\delta - 1/2 - f(\xi)] \quad (17.29)$$

и спектр\* тормозного излучения электронов большой энергии в кулоновском поле:

$$d\sigma_{\nu e}^{\omega} = [4Z^2 \alpha^3 \varepsilon_2 d\omega / (m^2 \varepsilon_1 \omega)] (\varepsilon_1 / \varepsilon_2 + \varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 2/3) [\ln 1/\delta - (17.30) \\ - 1/2 - f(\xi)],$$

где  $f(\xi)$  определяется формулой (17.27). При  $\xi \rightarrow 0$ ,  $f(\xi) \rightarrow 0$  получаем спектр излучения в борновском приближении.

При  $\xi \gg 1$  имеем  $f(\xi) \rightarrow \ln \xi + C$ , где  $C$  — постоянная Эйлера,  $C = 0,577$ . Этот случай соответствует переходу к классической теории ( $Z\alpha = Ze^2/\hbar c \gg 1$  при  $\hbar \rightarrow 0$ ). Учитывая, что  $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ , видим: оба сечения (17.29) и (17.30) переходят в (4.65). В классической теории имеется жесткая связь между  $\rho$  и  $q_{\perp}$  (см. раздел (16.2),  $\Phi(y) \rightarrow \Phi_{cl}(y)$  [см. (4.39)]. Тогда в интегралы (17.25) основной вклад дает область  $y \sim 1/4\xi^2 \ll 1$ , причем происходит экспоненциальное обрезание области с минимальной передачей импульса, где существенны квантовые эффекты.

Полученные сечения логарифмически растут с энергией. Отметим, что в выражениях для сечений (17.16), (17.18) содержатся члены, квадратично растущие с энергией, которые, однако, взаимно компенсируются. Именно поэтому удобны выражения, содержащие член  $(\varepsilon_1 \kappa_1 - \varepsilon_2 \kappa_2)^2$ , в котором указанная компенсация происходит внутри. При малых  $\omega$  сечения ведут себя как  $d\omega/\omega$ ; обратим внимание, что в сечениях (17.16), (17.18) имеются члены  $[1 + (\kappa_1/\kappa_2 + \kappa_2/\kappa_1)/2]$  соответственно, которые ведут себя как  $\omega d\omega$ . Однако при интегрировании по  $q^2$  вклад дает нижний предел  $(1/q_{\min}^2 \sim 4\gamma^4/\omega^2)$ , поэтому в спектр эти члены дают вклад вида  $d\omega/\omega$ . Основной вклад в интегралы дают области  $q_{\min}^2 \leq q^2 \lesssim m^2$ ;  $\eta, \zeta \sim 1$ . Это означает, что угол отклонения частицы лежит в интервале  $0 < \phi \lesssim m/\varepsilon$ , а углы излучения  $< 1/\gamma$ .

17.2. Поляризационные и спиновые эффекты в тормозном излучении. Формула (17.12) определяет сечение рассеяния для произвольно поляризованных электронов, если в нее подставить соответствующим образом преобразованное выражение  $dw_e$  [см. (16.31)]. Введем обозначения, которые уже использовались в разделе 3.7 (см. рис. 10):

$$m\mathbf{u} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}_1); \quad m\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}_2); \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega, \quad (17.31)$$

\* Сечение тормозного излучения для неполяризованных электронов [см. (17.12), (17.30)] было впервые найдено Бете и Максимоном [33], которые проводили вычисления в представлении Фарри с использованием приближенных  $l \gg 1$  волновых функций электрона в кулоновском поле. Спектр (17.30) затем получен в работе [81]. Формулы (17.12), (17.30), для электронов были найдены также в работе [82], в которой вычисления проводились с использованием квазиклассических волновых функций. Приведенное изложение следует работе [21]. Сечение в борновском приближении было вычислено Бете и Гайтлером [32] и часто носит имя этих авторов.

в терминах которых  $\mathbf{I}$  [см. (16.32)] приобретает вид [см. (17.19), (17.21)]

$$\mathbf{I} = (m/q_{\text{мин}}) [(\mathbf{u} - \mathbf{n})/\zeta - (\mathbf{v} - \mathbf{n})/\eta]. \quad (17.32)$$

Тогда сечения для скалярных частиц и электронов можно представить в виде

$$d\sigma_{\gamma(s,e)} = \frac{2Z\alpha^3}{\pi^2 m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{dyd\zeta d\eta d\varphi_1}{S\zeta\eta} L^{s,e}. \quad (17.33)$$

Здесь [см. (16.30), (16.31)]

$$L^s = |\mathbf{e}^* \mathbf{I}|^2; \quad (17.34)$$

$$\begin{aligned} L^e &= (1/8\varepsilon_1\varepsilon_2) \text{Sp} \{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathbf{eI} - i\omega\mathbf{e}[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I}]](1 + \boldsymbol{\zeta}_2\boldsymbol{\sigma}) \times \\ &\quad \times [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathbf{e}^*\mathbf{I} + i\omega\mathbf{e}[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I}]](1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\sigma})\} = \\ &= \frac{1}{2} \left( |\mathbf{eI}|^2 + \frac{\omega^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} \mathbf{I}^2 \right) (1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2) - \frac{\omega^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} (\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{I})(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{I}) - \\ &\quad - \frac{\omega}{2\varepsilon_1} \text{Re}(\mathbf{eI})(\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{I})(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{e}^*) + \frac{\omega}{2\varepsilon_2} \text{Re}(\mathbf{eI})(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{I})(\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{e}^*) - \\ &\quad - \frac{\omega^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} \text{Re}\mathbf{I}^2(\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{e})(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{e}^*) + i\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{8\varepsilon_1\varepsilon_2} \mathbf{I}^2[\mathbf{e}\mathbf{e}^*](\boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2) - \\ &\quad - i\frac{\omega}{4\varepsilon_1} [\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\mathbf{I}(\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{I}) - i\frac{\omega}{4\varepsilon_2} [\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\mathbf{I}(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{I}), \end{aligned} \quad (17.35)$$

где  $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2$  — вектора поляризации электрона в начальном и конечном состояниях. Выбирая в плоскости перпендикулярной  $\mathbf{n}$  оси

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}/u; \quad \mathbf{e}_2 = [u^2\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{v})]/u\sqrt{u^2v^2 - (\mathbf{u}\mathbf{v})^2},$$

получаем для соответствующих параметров Стокса, характеризующих поляризацию излучения (см. раздел 1.6):

$$\xi_1^s = 2I_{(1)}I_{(2)}/(\mathbf{I}^2 - I_{(3)}^2); \quad \xi_2^s = 0; \quad \xi_3^s = [I_{(1)}^2 - I_{(2)}^2]/[\mathbf{I}^2 - I_{(3)}^2];$$

$$\xi_1^e = \frac{1}{\sum_{\text{пол}} L^e} \{I_{(1)}I_{(2)}(1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2) - (\omega/2\varepsilon_1)(\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{I}) \times$$

$$\times (I_{(1)}\boldsymbol{\zeta}_{2(2)} + I_{(2)}\boldsymbol{\zeta}_{2(1)}) + (\omega/2\varepsilon_2)(\boldsymbol{\zeta}_2\mathbf{I})(I_1\boldsymbol{\zeta}_{1(2)} + I_{(2)}\boldsymbol{\zeta}_{1(1)}) - \\ - (\omega^2/4\varepsilon_1\varepsilon_2)\mathbf{I}^2(\boldsymbol{\zeta}_{1(1)}\boldsymbol{\zeta}_{2(1)} + \boldsymbol{\zeta}_{1(2)}\boldsymbol{\zeta}_{2(1)})\};$$

$$\begin{aligned} \xi_3^e &= \left( \frac{1}{\sum_{\text{пол}} L^e} \right) \{ (I_{(1)}^2 - I_{(2)}^2) (1 + \xi_1 \xi_2) / 2 - (\omega / 2\varepsilon_1) (\xi_1 \mathbf{I}) \times \\ &\times (I_{(1)} \xi_{2(1)} - I_{(2)} \xi_{2(2)}) + (\omega / 2\varepsilon_2) (\xi_2 \mathbf{I}) (I_{(1)} \xi_{1(1)} - I_{(2)} \xi_{1(2)}) - \\ &- (\omega^2 / 4\varepsilon_1 \varepsilon_2) \mathbf{I}^2 (\xi_{1(1)} \xi_{2(1)} - \xi_{1(2)} \xi_{2(2)}) \}; \\ \xi_2^e &= \left( \frac{1}{\sum_{\text{пол}} L^e} \right) \{ (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) / 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathbf{I}^2 (\xi_{1(3)} + \xi_{2(3)}) - \\ &- (\omega / 2\varepsilon_1) (\xi_1 \mathbf{I}) I_{(3)} - (\omega / 2\varepsilon_2) (\xi_2 \mathbf{I}) I_{(3)} \}, \end{aligned} \quad (17.36)$$

где сумма по поляризациям фотона

$$\begin{aligned} \sum_{\text{пол}} L^e &= \frac{1}{2} \{ [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) / (2\varepsilon_1 \varepsilon_2)] \mathbf{I}^2 - I_{(3)}^2 + (\mathbf{I}^2 - I_{(3)}^2) (\xi_1 \xi_2) + \\ &+ (\omega / \varepsilon_1) (\xi_1 \mathbf{I}) I_{(3)} \xi_{2(3)} - (\omega / \varepsilon_2) (\xi_2 \mathbf{I}) I_{(3)} \xi_{1(3)} + \\ &+ (\omega^2 / 2\varepsilon_1 \varepsilon_2) \mathbf{I}^2 \xi_{1(3)} \xi_{2(3)} \}. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Для входящих в эти выражения векторов введены обозначения

$$(a\varepsilon_1) = a_{(1)}; \quad (a\varepsilon_2) = a_{(2)}; \quad (a\mathbf{n}) = a_{(3)}.$$

Отметим, что если мы рассматриваем чистые состояния электрона

$$(\xi_1^2 = \xi_2^2 = 1), \quad \text{то} \quad (\xi^e)^2 = 1, \quad (\xi^s)^2 = 1.$$

Наряду с сечением (17.33) интерес представляют также сечения, проинтегрированные по углам вылета конечного электрона  $d\Omega_2$  или в новых переменных  $d\eta dy$ . Интегрирование по  $\eta$  ведется согласно формулам (17.23), (17.24), а интегрирование по  $y$  — согласно формулам (17.25)—(17.27). Для интегрирования сечения (17.33) достаточно найти тензор

$$T_{ij} = \int \frac{d\eta dy}{\eta S} I_i I_j, \quad (17.38)$$

поскольку остальные факторы от  $y$  и  $\eta$  не зависят. Учитывая, что после интегрирования в нашем распоряжении имеются два вектора  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{u}$  и что  $T_{ij} = T_{ji}$ , можно представить тензор  $T_{ij}$  в виде

$$T_{ij} = c_1 \delta_{ij} + c_2 u_i u_j + c_3 (n_i u_j + n_j u_i) + c_4 n_i n_j.$$

Для определения коэффициентов  $c_1 - c_4$  достаточно свернуть (17.37) с тензорными комбинациями, входящими в (17.38), тогда



получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= c_1 + c_4 = \int \frac{dyd\eta}{\eta S} \Phi(y) (\mathbf{In})^2; \\ I_2 &= c_3 u^2 = \int \frac{dyd\eta}{\eta S} \Phi(y) (\mathbf{In}) (\mathbf{Iu}); \\ I_3 &= 3c_1 + c_2 u^2 + c_4 = \int \frac{dyd\eta}{\eta S} \Phi(y) \mathbf{I}^2; \\ I_4 &= c_1 u^2 + c_2 u^4 = \int \frac{dyd\eta}{\eta S} \Phi(y) (\mathbf{Iu})^2. \end{aligned} \right\} (17.39)$$

Подставляя в эти интегралы  $\mathbf{I}$  (17.32) и воспользовавшись формулами (17.23)—(17.27), получаем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (\pi/\zeta^3) [4\Gamma(\zeta-1) + \zeta^2]; \quad I_2 = (2\pi/\zeta^3) \Gamma(\zeta-1)(\zeta-2); \\ I_3 &= (\pi/\zeta) (2\Gamma+3); \quad I_4 = (\pi/\zeta^3) (\zeta-1) [(\Gamma+1)\zeta^2 - 4\Gamma(\zeta-1)], \end{aligned} \right\} (17.40)$$

где

$$\Gamma = \ln(1/\delta) - 2 - f(\xi). \quad (17.41)$$

Используя найденные значения  $I_1 - I_4$  в системе уравнений для коэффициентов  $c_1 - c_4$  (17.39) и решая ее, имеем для тензора  $T_{ij}$  (17.38) следующее выражение:

$$T_{ij} = (\pi/\zeta^3) [(\Gamma+1)\zeta^2 \delta_{ij} - 4\Gamma \omega_i \omega_j], \quad (17.42)$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + (1 - \zeta/2) \mathbf{n}. \quad (17.43)$$

Подставляя  $T_{ij}$  в (17.33), находим сечение тормозного излучения, проинтегрированное по углам вылета конечной частицы:

$$d\sigma_{\gamma s} = \frac{2Z^2 \alpha^3}{\pi m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^4} d\varphi_1 [(\Gamma+1)\zeta^2 - 4\Gamma |\mathbf{e}\mathbf{u}|^2]; \quad (17.44)$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma e} &= \frac{Z^2 \alpha^3}{2\pi m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^2} d\varphi_1 \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (\Gamma + 3/2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \right. \\ &- \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\zeta^2} \Gamma (1 + \xi_1 \xi_2) |\mathbf{e}\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4\Gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2] (\xi_1 \xi_2) + \\ &+ \frac{4\omega^2}{\zeta^2} \Gamma (\xi_1 \mathbf{w}) (\xi_2 \mathbf{w}) - \omega^2 \operatorname{Re}(\mathbf{e}\xi_1) (\mathbf{e}^* \xi_2) - \frac{8\omega}{\zeta^2} \Gamma \operatorname{Re}(\mathbf{e}^* \mathbf{u}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times [\varepsilon_1 (\xi_1 \mathbf{w}) (\mathbf{e}\xi_1) - \varepsilon_2 (\xi_1 \mathbf{w}) (\mathbf{e}\xi_2)] + \tilde{\xi}_2 \left[ \omega (\Gamma + 3/2) (\varepsilon_1 (\xi_1 \mathbf{n}) + \varepsilon_2 (\xi_2 \mathbf{n})) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \omega (\varepsilon_2 \xi_1 + \varepsilon_1 \xi_2) \left( \mathbf{n} + \frac{8}{\zeta^2} \Gamma \mathbf{w} (1 - \zeta/2) \right) \right] \Big\}, \quad (17.45) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\xi}_2 = i [e e^*] n \quad (17.46)$$

спиральность [ср. (A.17) Приложения А], характеризующая круговую поляризацию фотона\*. Отметим, что в полученных выражениях с точностью до членов  $\sim 1/\gamma$  можно заменить  $(\xi_1 n)$  и  $(\xi_2 n)$  на  $(\xi_1 v)$  и  $(\xi_2 v)$ , где  $v \equiv v_1$ , и по той же причине положить

$$w = u + (1 - \zeta/2) v. \quad (17.47)$$

Суммируя по поляризациям конечного электрона, получаем

$$\begin{aligned} d\sigma(p_1, \xi_1, k, e) = & \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^2} d\Phi_1 \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (\Gamma + 3/2) - \right. \\ & - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\zeta^2} \Gamma |e u|^2 + \tilde{\xi}_2 \left[ \varepsilon_1 \omega (\Gamma + 3/2) (\xi_1 v) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \omega \varepsilon_2 [(\xi_1 v) + \frac{8}{\zeta^2} \Gamma (\xi_1 w) (1 - \zeta/2)] \right] \right\}. \quad (17.48) \end{aligned}$$

Просуммировав по поляризациям фотона, находим угловое распределение излученных фотонов:

$$d\sigma_{\gamma s}(p_1, k) = \frac{8Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^4} [\Gamma (\zeta^2 - 2\zeta + 2) + \zeta^2]; \quad (17.49)$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma e}(p_1, k) = & \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^4} \{ (\Gamma + 3/2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \zeta^2 - \\ & - \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\zeta^2 + 4\Gamma (\zeta - 1)] \}. \quad (17.50) \end{aligned}$$

Для описания поляризации фотона введем, как и прежде, орты  $e_1 = u/u$  [лежит в плоскости  $(k, p_1)$  (плоскость излучения)] и  $e_2 \perp e_1$ , которые были использованы в классической теории (§ 3). Из полученных сечений (17.33), (17.44), (17.45), (17.48) следует, что излучение скалярной частицы линейно поляризовано в плоскости, перпендикулярной плоскости излучения, а излучение электронов является в общем случае эллиптически поляризованным, причем большая ось эллипса перпендикулярна плоскости излучения (по-

\* Сечение тормозного излучения в борновском приближении с учетом всех поляризационных и спиновых корреляций имеет очень громоздкий вид. После суммирования по спину конечного электрона оно приведено в книге [3]. В некоторых работах проводилось интегрирование по импульсам и суммирование по спину конечного электрона, с тем чтобы найти средние характеристики тормозного излучения (включая и поляризацию): [49] (для неполяризованных электронов); [42, 30, 102] (для произвольно поляризованных электронов) и [66, 67] (для продольно поляризованных электронов). Поляризационные и спиновые эффекты при тормозном излучении частиц большой энергии получены в работе [83].

сколько в обоих случаях коэффициент при  $|\mathbf{e}_u|^2$  отрицательный). Основным интерес представляют средние параметры Стокса излучения, т. е. для сечения, проинтегрированного по углам вылета конечной частицы и просуммированного по спинам конечного электрона, из (17.44), (17.48) имеем:

$$\xi_1^s = \xi_2^s = 0; \quad \xi_3^s = -2\Gamma(\zeta - 1)/[\Gamma(\zeta^2 - 2\zeta + 2) + \zeta^2]; \quad (17.51)$$

$$\xi_1^e = 0, \quad \xi_3^e = -\frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Gamma(\zeta - 1)}{C\zeta^2},$$

$$\xi_2^e = (\omega/C) \{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2\Gamma + 3) - 2\varepsilon_2(1 + 4(\zeta - 1)\Gamma/\zeta^2)] \times \\ \times (\zeta_1 \mathbf{v}) + [\varepsilon_2 4(2 - \zeta)/\zeta^2] \Gamma(\zeta_1 \mathbf{u})\}, \quad (17.52)$$

$$C = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(2\Gamma + 3) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 [1 + 4(\zeta - 1)\Gamma/\zeta^2]. \quad (17.53)$$

Из найденных выражений следует, что линейная поляризация излучения не зависит от спина начального электрона. Легко убедиться, что в классическом пределе ( $\xi \equiv Z\alpha \gg 1$ ,  $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ ),  $2\Gamma \rightarrow G_1 - 3$  [см. (17.27), (17.4) и (3.126)], тогда  $\xi_3^s = \xi_3^e = \xi_3^{cl}$  (3.130), (3.131). Отсюда вытекает, что линейная поляризация тормозного излучения имеет классическое происхождение. Круговая поляризация возникает только при излучении поляризованных электронов, так что по степени круговой поляризации излучения можно определить величину поляризации начальных электронов. Все найденные характеристики зависят от угла излучения ( $\zeta = 1 + \vartheta_{1h}^2 \gamma_1^2$ ), для электрона имеется также зависимость от  $\omega$  (и  $\zeta_1$  для круговой поляризации), величина же поля входит только в величину  $\Gamma$ . Поэтому качественно поляризационные эффекты такие, как в борновском приближении, когда  $f(\xi) \rightarrow 0$  и  $\Gamma \rightarrow \Gamma_B = \ln(1/\delta) - 2$ .

В случае больших энергий ( $\Gamma \gg 1$ ) линейная поляризация излучения скалярной частицы достигает максимума при  $\zeta = 2$  ( $\vartheta_{1h} = 1/\gamma_1$ ), при  $\zeta = 1$  и при  $\zeta \rightarrow \infty$  поляризация излучения исчезает. В максимуме поляризация излучения приближается к единице:

$$\xi_3^s(\zeta = 2) = -2\Gamma/(2\Gamma + 4) \simeq -(1 - 2/\Gamma). \quad (17.54)$$

Для электронов при  $\Gamma \gg 1$  имеем

$$\xi_3^e = -4\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\zeta - 1)/[\zeta^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\zeta - 1)]. \quad (17.55)$$

Степень линейной  $|\xi_3^e|$  также достигает максимума при  $\zeta = 2$ , но, в отличие от случая скалярных частиц, она падает с ростом частоты фотона (рис. 31): при  $\omega \rightarrow 0$   $|\xi_3^e| \rightarrow 1$ , при  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \omega \ll \varepsilon_1$   $|\xi_3^e| \rightarrow \varepsilon_2/\varepsilon_1 \ll 1$  (заметим, что все формулы справедливы, если  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg 1/\gamma_1$ , т. е.  $\varepsilon_2 \gg m$ ). По этой причине при  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$  эллиптическая

поляризация переходит в круговую, из (17.52), (17.53) вытекает, что в этом случае

$$\xi_1^e = \xi_3^e = 0; \quad \xi_2^e = \xi_1 v. \quad (17.56)$$

Таким образом, излучение продольно поляризованных электронов ( $\xi_1 v = \pm 1$ ) при  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$  полностью поляризовано по кругу,

а знак  $\xi_2$  совпадает со знаком проекции спина на направление движения. Проинтегрировав сечения (17.44), (17.48) по полярному углу вылета фотона (с релятивистской точностью можно считать  $1 \leq \xi \leq \infty$ ), получим сечения, характеризующие поляризационные свойства в целом:

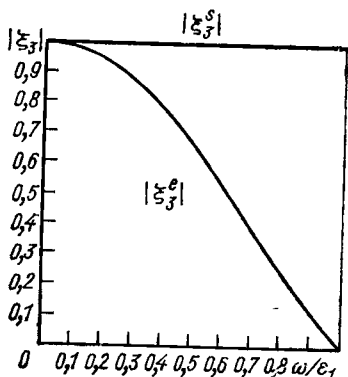


Рис. 31. Зависимость степени линейной поляризации от частоты фотона при  $\Gamma \gg 1$ ,  $\xi = 2$  без учета экранирования.

$$d\sigma_{sp}(\omega, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_1, \varphi_1) =$$

$$= \frac{4Z^2 \alpha^3}{3\pi m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} d\varphi_1 (\Gamma + 3/2) \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma + 3/2} \cos 2\varphi_1 \right]; \quad (17.57)$$

$$d\sigma_{ye}(\omega, \mathbf{e}, \mathbf{p}_1, \xi_1, \varphi_1) = \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} d\varphi_1 (\Gamma + 3/2) \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{\Gamma}{\Gamma + 3/2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\varphi_1 + \tilde{\xi}_2 \omega (\varepsilon_1 + \varepsilon_2/3) \xi_1 v \right\}. \quad (17.58)$$

Напомним здесь, что  $\varphi_1$  — угол между направлением  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{e}_1$ . Видно, что это сечение не зависит от поперечной поляризации начальных электронов. Параметры Стокса, характеризующие излучение в целом, следующие:

$$\xi_1^s = \xi_2^s = 0; \quad \xi_3^s = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma + 3/2}; \quad (17.59)$$

$$\xi_1^e = 0; \quad \xi_3^e = -\frac{2\Gamma}{\Gamma + 3/2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{C_0}; \quad \xi_2^e = 3\omega (\varepsilon_1 + \varepsilon_2/3) \xi_1 v / C_0, \quad (17.60)$$

где

$$C_0 = 3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (17.61)$$

Видно, что излучение существенно поляризовано. В классическом пределе ( $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ ,  $2\Gamma \rightarrow G_1 - 3$ )  $\xi_3^e = \xi_3^s = \xi_3^{e'l}$  [см. (3.134)]. При  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ ,  $\xi_3^e \rightarrow 0$ , а  $\xi_2^e \rightarrow \xi_1 v$ .

Проинтегрировав по азимутальному углу  $\varphi_1$ , что соответствует суммированию по линейным поляризациям, имеем для скалярных частиц сечение (17.29), а для электронов

$$d\sigma_{e\nu}(\omega, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} d\sigma_{e\nu}^{\omega} (1 + \tilde{\xi}_2 \xi_2^e), \quad (17.62)$$

где  $d\sigma_{e\nu}^{\omega}$  дается (17.30). Очевидно, что формулы (17.29), (17.30) можно также получить, проинтегрировав по углу вылета фотона сечения (17.49), (17.50).

Обсудим теперь найденные результаты с точки зрения дискретных симметрий. Параметр  $\tilde{\xi}_2$  является псевдоскаляром (см. приложения А), поэтому в сечении член с  $\tilde{\xi}_2$  может входить лишь в комбинации с другим псевдоскаляром, составленным из векторов задачи. Такие псевдоскаляры — скалярные произведения векторов спина  $\boldsymbol{\zeta}_1$  и  $\boldsymbol{\zeta}_2$  и полярных векторов задачи ( $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}$ ) [см. (17.35), (17.45), (17.48), (17.58), (17.62)]. Поскольку в данной задаче имеется три независимых вектора  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{k}$ , то из них также можно построить псевдоскаляр вида  $([\mathbf{k}\mathbf{p}_1]\mathbf{p}_2)$ . Члены такого вида не инвариантны относительно изменения знака всех импульсов и поэтому отсутствуют в первом борновском приближении, в котором эта операция эквивалентна преобразованию отражения времени. Поскольку в рассматриваемом случае учет высших борновских приближений сводится к умножению борновского сечения на универсальный множитель  $\Phi(y)$ , не зависящий от поляризаций (17.12), то в итоге *не могут возникнуть новые корреляционные члены* по сравнению с имеющимися в борновском приближении. Согласно соображениям, изложенным в разделе 7.3, параметр  $\xi_3$  является  $P$ - и  $T$ -инвариантом и соображениями симметрии не запрещается. Из векторов задачи  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , а также из векторов спина  $\boldsymbol{\zeta}_1$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_2$  можно построить несимметричные комбинации типа  $(\mathbf{e}\mathbf{u})(\mathbf{e}^*\mathbf{v})$ ,  $(\mathbf{e}\mathbf{l})(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\zeta}_2)$  и т. д. в сечениях (17.33), (17.35) и  $(\mathbf{e}\mathbf{u})(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\zeta}_1)$  и т. д. в сечении (17.45), т. е. появляются члены, содержащие параметр Стокса  $\xi_1$  [см. (17.36)]; этот параметр при выбранных осях  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  является  $P$ - и  $T$ -инвариантным, следовательно, излучаемый фотон обладает линейной поляризацией обоих видов как по осям  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , так и в «диагональных» направлениях под углом  $45^\circ$  к этим осям. Однако это имеет место, пока регистрируется направление вылета или спин конечного электрона. После суммирования по конечным состояниям электрона член с  $\xi_1$  выпадает, что, очевидно, следует из соображений симметрии: имеется одна выделенная плоскость  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)$  и нормаль к ней  $(\mathbf{e}_1)$ , а «диагональные» направления становятся эквивалентными. Что же касается корреляций вида  $\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi}_1$  (так же, как и  $\boldsymbol{\zeta}_1 \boldsymbol{\xi}_3$ ), то, поскольку  $\boldsymbol{\zeta}_1$  входит линейно, можно построить только один псевдоскаляр типа  $\boldsymbol{\zeta}_1\mathbf{v}$  (из двух оставшихся после интегрирования по  $\mathbf{p}_2$  векторов  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}$  нельзя построить псевдоскаляр). Таким образом, члены такого вида не инвариантны относительно инверсии. Из (17.48) вытекает, что степень линейной

поляризации не зависит от поляризации электрона, если по состояниям конечного электрона проведено суммирование.

Рассмотрим теперь сечение (17.45), проинтегрированное по углам вылета фотона ( $\zeta, \varphi_1$ ):

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma e}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \mathbf{e}) &= \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} (\Gamma + 3/2) \{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 / 3 + \\ &+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \boldsymbol{\zeta}_2) / 3 - 2\omega^2 \operatorname{Re}(\mathbf{e} \boldsymbol{\zeta}_1) (\mathbf{e}^* \boldsymbol{\zeta}_2) / 3 + \\ &+ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_2 \omega [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 / 3) (\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 / 3) (\boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v})] \}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

Корреляционные члены (спинов и поляризации фотона), содержащиеся в этом сечении, совпадают с имеющимися в борновском приближении, поскольку зависящий от внешнего поля член  $(\Gamma + 3/2)$  выделен в виде общего фактора. Просуммировав (17.63) по поляризациям фотона, получим сечение, содержащее возможные спиновые корреляции:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma e}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2) &= \frac{2Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} (\Gamma + 3/2) \{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 / 3 + \\ &+ 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \boldsymbol{\zeta}_2) / 3 + \omega^2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v}) / 3 \} = \frac{2Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \times \\ &\times \frac{d\omega}{\omega} (\Gamma + 3/2) \{ \omega^2 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \boldsymbol{\zeta}_1 \boldsymbol{\zeta}_2) / 3 + \omega^2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v}) / 3 \}. \end{aligned} \quad (17.64)$$

Отметим, что сечения (17.63), (17.64) легко получить из дифференциального сечения (17.35), если учесть, что [ср. (17.38) — (17.43)]:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \int \frac{dy d\eta d\zeta d\varphi_1}{\eta \zeta S} I_i I_j = \int \frac{d\zeta d\varphi_1}{\zeta} T_{ij} = \pi \int \frac{d\zeta d\varphi_1}{\zeta^2} \times \\ &\times \left[ (\Gamma + 1) \delta_{ij} - \frac{4\Gamma}{\zeta^2} \omega_i \omega_j \right] = 2\pi^2 [(\Gamma + 1) - \Gamma/3] \delta_{ij} = \\ &= (4\pi^2/3) (\Gamma + 3/2) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (17.65)$$

Параметры Стокса, совпадающие, как отмечалось, с борновскими, имеют вид

$$\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = B^{-1} \frac{\omega^2 |\boldsymbol{\zeta}_{1\perp}| |\boldsymbol{\zeta}_{2\perp}|}{3}; \quad \xi_3 = \xi \cos \psi, \quad \xi_1 = \xi \sin \psi;$$

$$\psi = \widehat{\boldsymbol{\zeta}_{1\perp} \boldsymbol{\zeta}_{2\perp}}, \quad \xi_2 = B^{-1} \omega [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2/3) (\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1/3) (\boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v})];$$

$$B = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 / 3 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \boldsymbol{\zeta}_2) / 3 + \omega^2 (\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v}) / 3. \quad (17.66)$$

Отсюда вытекает, что линейная поляризация излучения в целом (при фиксированных спиновых состояниях) максимильна, когда  $\boldsymbol{\zeta}_1 \mathbf{v} = \boldsymbol{\zeta}_2 \mathbf{v} = 0$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_1 = -\boldsymbol{\zeta}_2$ ,  $\xi_{1,2}^2 = 1$ . В этом случае  $B = \omega^2$  и  $\xi = 1/3$  для всех  $\omega$ . Циркулярная поляризация максимильна, когда

$(\xi_1 v) = -(\xi_2 v) = \pm 1$ . В этом случае  $\xi_2 = \xi_1 v$ , т. е. излучение полностью поляризовано по кругу, причем спиральности фотона и электрона совпадают.

В жесткой части спектра, где  $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ , параметры Стокса принимают простой вид:

$$\begin{aligned} \xi &= |\xi_{1\perp}| |\xi_{2\perp}| / [3 + (\xi_1 v)(\xi_2 v)]; \\ \xi_2 &= [(\xi_1 v) + (\xi_2 v)/3] / [1 + (\xi_1 v)(\xi_2 v)/3]. \end{aligned} \quad (17.67)$$

В заключение рассмотрим деполяризацию электронов при излучении. Степень деполяризации излучившего электрона определяется соотношением

$$D = 1 - \left| \frac{d\sigma_{\gamma e}(\zeta_1, \zeta_1) - d\sigma_{\gamma}(\zeta_1, -\zeta_1)}{d\sigma_{\gamma e}} \right|. \quad (17.68)$$

Подставляя сюда (17.64), получаем

$$D = \omega^2 [1 - (\xi_1 v)^2/3] / [\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1 \epsilon_2/3]. \quad (17.69)$$

В случае излучения мягких фотонов  $\omega \ll \epsilon_1$ ,  $D \sim \omega^2/\epsilon_1^2 \ll 1$ , т. е. деполяризация весьма мала. В случае же  $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$  (жесткая часть спектра) деполяризация максимальна и ее степень  $D \approx 2/3$  для продольно поляризованных электронов и  $D = 1$  для поперечно поляризованных электронов.

## § 18. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭКРАНИРОВАННОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

18.1. Сечения с учетом экранирования. Рассмотрим теперь задачу об излучении в реалистических условиях, т. е. с учетом экранирования заряда ядра атомными электронами\*, что приводит к уменьшению сечения излучения. Радиус экранирования  $r$ , очевидно, порядка размеров атома. Рассмотрим такие  $r$ , что  $r \gg 1/m$ , тогда при  $q \sim m$  ( $\rho \sim 1/m$ ) экранирование не сказывается, а сечение излучения в этой области [(17.12) при  $y \ll 1$ ] при отсутствии экранирования совпадают с борновским. Поэтому необходимо провести анализ в области  $0 \leq q_{\perp} \leq q_0$ ,  $1/r \ll q_0 \ll m$ . В этой области [ср. (16.16)]

$$R_f = R_1 + (\partial R_1 / \partial \mathbf{p}_1) \mathbf{q}_{\perp}. \quad (18.1)$$

Учитывая

$$q_{\perp}^2/m^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi = (u - v)^2 + 2uv(1 - \cos \varphi) \ll 1, \quad (18.2)$$

\* Эти вопросы рассматривались в работе [83].

видим, что  $u-v \ll 1$ ,  $1-\cos \varphi \ll 1$ , так что  $R_f \approx R_1 + \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\mathbf{u}}{u} q_{\perp}$

и

$$R_1/kv_1 - R_f/kv_f \approx R_1(1/kv_1 - 1/kv_f) - (1/kv_1) (\partial R_1/\partial \rho_1) (\mathbf{u}/u) q_{\perp} \approx \\ \approx a_1(\mathbf{u})(u-v) + a_2(\mathbf{u}) q_{\perp}. \quad (18.3)$$

Сечение излучения, проинтегрированное по углам вылета конечного электрона, имеет с учетом (18.3) вид [см. (16.21), (16.22)]:

$$d\sigma_{\gamma} = \int_0^{\infty} \rho_1 d\rho_1 \int_0^{\infty} \rho_2 d\rho_2 J_1(q_{\perp}\rho_1) J_1(q_{\perp}\rho_2) \exp\{i[\chi(\rho_1) - \chi(\rho_2)]\} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \exp[iq_{\parallel}(t_1 - t_2)] V(\sqrt{\rho_1^2 + t_1^2}) V(\sqrt{\rho_2^2 + t_2^2}) \times \\ \times [b_1(\mathbf{u})(u-v)^2/q_{\perp}^2 + b_2(\mathbf{u})(u-v)/q_{\perp} + b_3(\mathbf{u})] d\Omega_2 d^3 k. \quad (18.4)$$

В интеграле по  $d\Omega_2$  перейдем к переменным  $\beta = m(u-v)/q_{\perp}$  и  $q_{\perp}$ , тогда  $d\Omega_2 = m^2 v dv d\varphi/\varepsilon_2^2 \approx m^2 u dv d\varphi/\varepsilon_2^2 \rightarrow d\beta dq_{\perp}, dq_{\perp}/\varepsilon_2^2 \sqrt{1-\beta^2}$ , т. е. в этих переменных от  $q_{\perp}$  зависит только  $d\Omega_2$  и  $J_1(q_{\perp}, \rho_{1,2})$ .

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{L}(q_0) = \int \rho_1 d\rho_1 \rho_2 d\rho_2 \int_0^{q_0} q_{\perp} dq_{\perp} J_1(q_{\perp}\rho_1) J_1(q_{\perp}\rho_2) \times \\ \times [\exp\{i[\chi(\rho_1) - \chi(\rho_2)]\} - 1], \quad (18.5)$$

который представим в виде

$$\mathcal{L}(q_0) = \left[ \int_0^{\infty} dq_{\perp} - \int_0^{q_0} dq_{\perp} \right] [\dots].$$

Нетрудно убедиться, что здесь первый интеграл обращается в нуль. Действительно,  $\mathcal{L}(\infty)$  можно представить в форме:

$$\mathcal{L}(\infty) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 d^2 q_{\perp} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \times \\ \times \exp[iq_{\perp}(\rho_1 - \rho_2)] [\exp\{i[\chi(\rho_1) - \chi(\rho_2)]\} - 1] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \delta(\rho_1 - \rho_2) [\exp\{i[\chi(\rho_1) - \\ - \chi(\rho_2)]\} - 1] = 0. \quad (18.6)$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}(q_0) = \int_0^{q_0} dq_{\perp} [\dots] = - \int_0^{q_0} dq_{\perp} [\dots]. \quad (18.7)$$



Заметим, что разность  $[\exp \{i [\chi (\rho_1) - \chi (\rho_2)]\} - 1]$ , входящая в интеграл (18.5), входит в разность точного и борновского сечений излучения [ср. (16.23)]. Поскольку этот интеграл можно представить в виде (18.7), в котором эффекты экранирования в подынтегральном выражении уже не существенны, можно сделать вывод, что разность точного и борновского сечений излучения от экранирования не зависит. Иными словами, учет высших борновских приближений и экранирования можно провести независимо.

Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} d\sigma_{\gamma}^{sc} &= \int_{\Omega_1} [d\sigma_{\gamma}^{Bsc} + d\sigma_{\gamma}^{sc} - d\sigma_{\gamma}^{Bsc}] = \int_{\Omega_1} d\sigma_{\gamma}^{Bsc} + \int_{\Omega_2} [d\sigma_{\gamma}^{nosc} - d\sigma_{\gamma}^{Bnosc}] = \\ &= \int_{\Omega_1} d\sigma_{\gamma}^{nosc} + \int_{\Omega_2} [d\sigma_{\gamma}^{Bsc} - d\sigma_{\gamma}^{Bnosc}] \end{aligned} \quad (18.8)$$

вытекает, что вся информация об экранировании входит в борновское сечение излучения. Поскольку  $\int_{\Omega_2} d\sigma_{\gamma}^{nosc}$  найдено в § 17, нам остается вычислить второй интеграл (18.8), но уже в борновском приближении.

В случае экранирования вместо величины  $1/q^2$ , которая входит в амплитуду рассеяния на неэкранированном потенциале, мы должны ввести в матричный элемент множитель  $[1 - F(q)]/q^2$ , где  $F(q)$  — форм-фактор атомных электронов, следовательно, в сечении излучения вместо величины  $1/q^4$  будет стоять  $[1 - F(q)]^2/q^4$ , а разность в (18.8) будет содержать  $[1 - F(q)]^2 - 1/q^4$ .

В области малых передач импульса, где интеграл  $\int_{\Omega_2} [d\sigma_{\gamma}^{Bsc} - d\sigma_{\gamma}^{Bnosc}]$  отличен от нуля, передачу импульса  $q$  можно представить [см. (17.8), (17.19), (17.21)] в виде  $q/m = \delta\zeta/\sqrt{y}$ , поскольку в этой области  $\zeta \approx \eta$ . Поэтому интегрирование по переменной  $\eta$  проводится, как в (17.23), (17.24). При интегрировании по  $y$  вместо интегралов вида (17.25) будут входить следующие:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi\delta) &= \int_0^1 [(1-y)/y] [(1 - F(m\xi\delta/\sqrt{y}))^2 - 1] dy = \\ &= 2 \int_{\xi\delta}^{\infty} [(1 - F(mx))^2 - 1] [(x^2 - \xi^2\delta^2)/x^3] dx, \end{aligned} \quad (18.9)$$

причем в интеграле, содержащем  $[1 - F(x)]^2$ , можно положить нижний предел равным нулю, поскольку  $[1 - F(x)] \propto x$  и интеграл сходится на нижнем пределе.

Учитывая все сказанное выше, получаем, что тензор  $T_{ij}$  (17.37) — (17.42) при учете экранирования имеет такой же вид, как и раньше, но к функции  $\Gamma$  (17.41), возникавшей при интегрировании по  $y$ , следует добавить интеграл по  $y$  от второго члена в (18.8), т. е. (18.9).

Это возможно потому, что точное сечение представляло борновское сечение, умноженное на  $\Phi(y)$  (17.12), а сечение с экранированием представляет борновское сечение, умноженное на  $[1 - F(m\xi\delta/\sqrt{y})]^2$ . Итак,

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_{sc} = \Gamma + \mathcal{F}(\xi\delta) = \ln 1/\delta - 2 - f(\xi) + \mathcal{F}(\xi\delta). \quad (18.10)$$

Для явного вычисления  $\mathcal{F}(\xi\delta)$  воспользуемся видом атомного форм-фактора в модели Томаса—Ферми [75]

$$[1 - F(q)]/q^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i / (\beta_i^2 + q^2), \quad (18.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 0,10; \quad \alpha_2 = 0,55; \quad \alpha_3 = 0,35; \\ \beta_i = \frac{Z^{1/3}}{121} b_i m; \quad b_1 = 6,0; \quad b_2 = 1,20; \quad b_3 = 0,30. \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Подставляя (18.11) в (18.9), получаем в результате простых вычислений

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi\delta) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \ln(1 + B_i) + \\ & + \sum_{i \neq j}^3 \alpha_i \alpha_j \{ [(1 + B_j)/(B_i - B_j)] \ln(1 + B_j) + 1/2 \}, \end{aligned} \quad (18.13)$$

где

$$B_i = \beta_i / \xi \delta m. \quad (18.14)$$

В случае полного экранирования, когда  $B_i = \beta_i / \delta \xi m \gg 1$  (это означает, что радиус экранирования много меньше расстояния, соответствующего минимальной передаче, следовательно, область минимальных передач импульса обрезается), из (18.13) получаем следующее выражение:

$$\mathcal{F}(\xi\delta) = \ln(111Z^{-1/3} \xi\delta). \quad (18.15)$$

Подставляя в (18.10), находим, что

$$\Gamma_{sc} = \ln(111Z^{-1/3} \xi) - 2 - f(\xi) \quad (18.16)$$

уже не зависит от энергии (эта зависимость входила через  $\delta$ ).

Как уже отмечалось, сечение тормозного излучения, проинтегрированное по углам вылета конечной частицы, имеет одинаковый вид при отсутствии экранирования и при учете экранирования, и различие состоит только в том, что в первом случае  $\Gamma$  определяется формулой (17.41), а во втором  $\Gamma = \Gamma_{sc}$  — формулами (18.10), (18.13), так что можно непосредственно использовать (17.44) —

(17.56). Спектр излученных фотонов [см. (17.50), (18.10) и (18.13)] в свинце при  $\epsilon = 50 \text{ Мэв}$ ,  $\vartheta_{1k} = m/\epsilon_1$  приведен на рис. 32. На рис. 33 дана степень линейной поляризации излучения  $|\xi_3^e|$  (17.52), а на рис. 34 — степень круговой поляризации при излучении продольно поляризованных электронов —  $|\xi_2^e|$  (17.52) в тех же условиях.

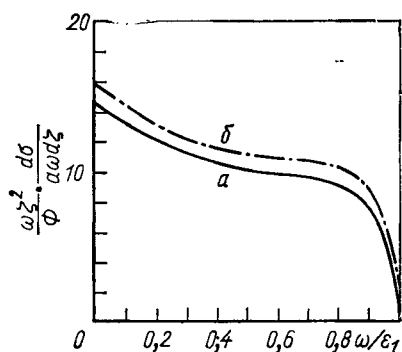


Рис. 32. Спектр излучения в свинце как функция частоты при угле излучения  $\vartheta_{1k} = m/\epsilon_1$  ( $\zeta=2$ ),  $\epsilon_1 = 50 \text{ Мэв}$ ,  $\sigma_0 = Z^2 r_0^2 \alpha$ : а—по (17.50), (18.10), (18.13); б—борновском приближении с учетом экранирования.

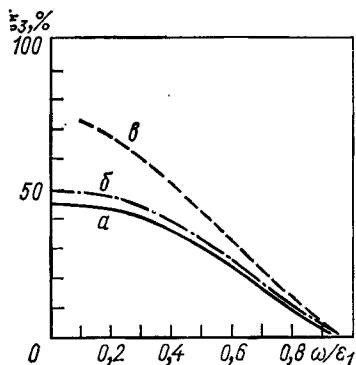


Рис. 33. Линейная поляризация излучения в направлении, перпендикулярном плоскости излучения  $|\xi_3^e|$  в свинце ( $\epsilon_1 = 50 \text{ Мэв}$ ,  $\vartheta_{1k} = m/\epsilon_1$ ): а—по (17.52); б—в борновском приближении с учетом экранирования; в—в борновском приближении в пренебрежении экранированием.

Наконец, на рис. 35 приведена степень линейной поляризации, а также степень круговой поляризации для продольно или поперечно поляризованных электронов при  $\epsilon = 50 \text{ Мэв}$ ,  $\vartheta_{1k} = 0,41 m/\epsilon_1$  в свинце.

Для нахождения спектра излучения (сечения, проинтегрированного по углам вылета фотона) будем исходить из (17.65):

$$l_{ij}^{sc} = \pi \int (d\xi d\varphi_1 / \zeta^2) [(\Gamma_{sc} + 1) \delta_{ij} - (4\Gamma_{sc} / \zeta^2) w_i w_j]. \quad (18.17)$$

Отличие потенциала от кулоновского приводит к тому, что в тензоре  $l_{ij}$  появляется наряду с изотропной  $\delta_{ij}$  еще и продольная (по отношению к скорости электрона) часть:

$$l_{ij}^{sc} = 2\pi^2 [(l_1 - l_2/3 + 1) \delta_{ij} + (l_2 - l_1) v_i v_j], \quad (18.18)$$

где

$$l_1 = \int_1^{\infty} [\Gamma_{sc}(\zeta) / \zeta^2] d\zeta;$$

$$l_2 = 6 \int_1^{\infty} [(\zeta - 1) / \zeta^4] \Gamma_{sc}(\zeta) d\zeta. \quad (18.19)$$

Отсюда видно, что если  $\Gamma$  не зависит от  $\xi$  (как это имеет место при отсутствии экранирования), то  $l_1 = l_2 = \Gamma$  и  $l_{ij} = 4\pi^2(\Gamma + 3/2)\delta_{ij}/3$  [ср. (17.65)].

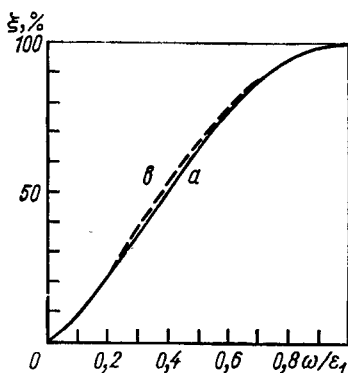


Рис. 34. Круговая поляризация тормозного излучения продольно поляризованных электронов в свинце ( $\epsilon_1 = 50 Mэв$ ,  $\vartheta_{1k} = m/\epsilon_1$ );  $a$  и  $b$  см. рис. 33.

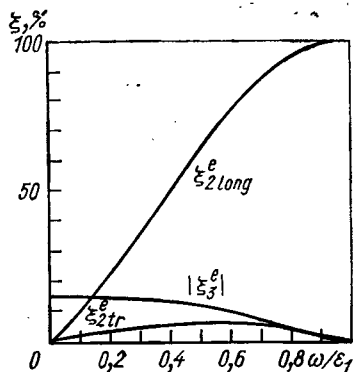


Рис. 35. Линейная поляризация тормозного излучения  $|\xi_3^e|$ , круговая поляризация тормозного излучения для продольно (поперечно) поляризованных электронов  $\xi_{2long}^e$  ( $\xi_{2tr}^e$ ) в свинце при  $\epsilon_1 = 50 Mэв$ ,  $\vartheta_{1k} = 0,41 m/\epsilon_1$  [согласно (17.52), (18.10), (18.13)].

Выражение (18.18) удобно представить в виде

$$l_{ij} = 2\pi^2 [(\psi_1 - \psi_2/3)\delta_{ij} + (\psi_2 - \psi_1)v_i v_j], \quad (18.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= l_1 + 3/2 = 3/2 + \int_0^\infty [\Gamma_{sc}(\xi)/\xi^2] d\xi; \\ \psi_2 &= l_2 + 3/2 = 3/2 + 6 \int_0^\infty [\Gamma_{sc}(\xi)/\xi^4](\xi - 1) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

В случае полного экранирования (для достаточно больших энергий), подставляя сюда  $\Gamma_{sc}$  (18.10), (18.15), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \ln(111Z^{-1/3}) + 1/2 - f(\xi) = \ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi); \\ \psi_2 &= \ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi) - 1/6 = \psi_1 - 1/6. \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

Подставляя найденный тензор  $l_{ij}^{sc}$  (17.65), (18.20) в (17.33), (17.35), получаем сечение тормозного излучения с учетом экранирования, которое проинтегрировано по углам вылета фотона и содержит все возможные спиновые и поляризационные

корреляции:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\nu e}^{sc}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}) = & (Z^2 \alpha^3 / m^2 \varepsilon_1^2) (d\omega / \omega) \{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - \\
 & - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2 / 3 + [2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\psi_1 - \psi_2 / 3) + \omega^2 \psi_2 / 3] (\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) + \\
 & + \omega^2 (\psi_1 - \psi_2) (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v}) - (2\omega^2 \psi_2 / 3) \operatorname{Re}(\mathbf{e} \boldsymbol{\xi}_1) (\mathbf{e}^* \boldsymbol{\xi}_2) + \\
 & + \tilde{\xi}_2 \omega [(\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)) ((\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) + (\varepsilon_2 \psi_1 + \\
 & + \varepsilon_1 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v})) \}. \quad (18.23)
 \end{aligned}$$

Суммируя по поляризациям фотона, найдем сечение, содержащее возможные спиновые корреляции:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\nu e}^{sc}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = & \frac{2Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2 / 3 + \\
 & + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\psi_1 - \psi_2 / 3) (\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) + \omega^2 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3) (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v}) \} = \\
 & = \frac{2Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} Q, \quad (18.24)
 \end{aligned}$$

а для параметров Стокса имеем из (18.23) [ср. с (17.66)]:

$$\begin{aligned}
 \xi^{sc} = & \sqrt{(\xi_1^{sc})^2 + (\xi_2^{sc})^2} = \omega^2 \psi_2 |\xi_{1\perp} \parallel \xi_{2\perp}| / 3Q; \\
 \xi_2^{sc} = & \{ [\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)] (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) + \\
 & + [\varepsilon_2 \psi_1 + \varepsilon_1 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)] (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v}) \} / Q. \quad (18.25)
 \end{aligned}$$

В жесткой части спектра ( $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ ) параметры Стокса имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^{sc} = & \psi_2 |\xi_{1\perp} \parallel \xi_{2\perp}| / [3\psi_1 + (3\psi_1 - 2\psi_2) (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v})]; \\
 \xi_2^{sc} = & [\psi_1 (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) + \\
 & + (\psi_1 - 2\psi_2 / 3) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v})] / [\psi_1 + (\psi_1 - 2\psi_2 / 3) (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) (\boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{v})];
 \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

В случае, когда начальные электроны полностью продольно поляризованы,  $\xi^{sc} = 0$ ,  $\xi_2^{sc} = \xi_1 \mathbf{v}$ , т. е. излучение полностью циркулярно поляризовано [ср. (17.56)], причем это утверждение не зависит от конкретных свойств потенциала.

Основной практический интерес представляет сечение, просуммированное по спину конечного электрона. Из (18.23) находим

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\nu e}^{sc}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{e}) = & \frac{2Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2 / 3 + \\
 & + \tilde{\xi}_2 \omega [\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)] (\boldsymbol{\xi}_1 \mathbf{v}) \}. \quad (18.27)
 \end{aligned}$$

Параметры Стокса в этом случае:

$$\xi^{sc} = 0; \quad \xi_2^{sc} = \omega [\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2/3)] (\xi_1 \mathbf{v}) / [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3]. \quad (18.28)$$

Наконец, усреднив по спину начального электрона и просуммировав по поляризациям фотона, получим спектр тормозного излучения в кулоновском поле с учетом кулоновских поправок при произвольном экранировании (для электронов  $e$  и скалярных  $s$  частиц:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\gamma e}^{sc} &= \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3\}; \\ d\sigma_{\gamma s}^{sc} &= \frac{8Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} (\psi_1 - \psi_2/3). \end{aligned} \right\} \quad (18.29)$$

Спектр излученных фотонов в случае полного экранирования:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\gamma e}^{sc} &= \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2 \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2/3) [\ln(183Z^{-1/3}) - \\ &\quad - f(\xi)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2/9\}; \\ d\sigma_{\gamma s}^{sc} &= \frac{16Z^2 \alpha^3}{3m^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d\omega}{\omega} [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi) + 1/12]. \end{aligned} \right\} \quad (18.30)$$

Средние потери энергии на единице длины пути электрона в веществе с плотностью атомов  $n$  характеризуется *радиационной длиной*  $L = \tau_{rad}^{-1}$ , где

$$L^{-1} = \tau_{rad} = n \int_0^{\varepsilon_1 - m} (\omega/\varepsilon_1) (d\sigma/d\omega) d\omega. \quad (18.31)$$

В отсутствие экранирования из (17.30) имеем

$$L^{-1} = (4Z^2 \alpha^3 n/m^2) [\ln(2\varepsilon_1/m) - 1/3 - f(\xi)] \quad (18.32)$$

и в случае полного экранирования имеем из (18.33)

$$L^{-1} = (4Z^2 \alpha^3 n/m^2) [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi) + 1/18]. \quad (18.33)$$

18.2. Деполяризация при излучении. Выражение для степени деполяризации (17.68) в случае экранирования следует из (18.24):

$$D = \omega^2 [\psi_1 - (\xi_1 \mathbf{v})^2 (\psi_1 - 2\psi_2/3)] / [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3]. \quad (18.34)$$

В конце спектра  $D \approx 2\psi_2/3\psi_1$  для продольно поляризованных электронов и  $D \approx 1$  для поперечно поляризованных электронов. Зависимости круговой поляризации тормозного излучения продольно поляризованных электронов и деполаризации продольно и поперечно поляризованных электронов от частоты для энергии  $\varepsilon_1 = 20 \text{ Мэв}$  и  $\varepsilon_1 = 10 \text{ Гэв}$  приведены на рис. 36.

Аналогично радиационной длине введем длину деполаризации, характеризующую среднюю деполаризацию на единицу длины пути электрона в веществе

$$L_{dep}^{-1} = \tau_{dep} = n \int D(\mathbf{p}_1, \xi_1) d\sigma = 2n\sigma_{flip}, \quad (18.35)$$

где  $\sigma_{flip}$  — полное сечение излучения с переворотом спина:

$$\sigma_{flip} = \int_0^{\varepsilon_1 - m} d\sigma(\xi_1, -\xi_1) \cdot d\omega/d\omega. \quad (18.36)$$

В случае отсутствия экранирования имеем из (17.64)

$$L_{dep}^{-1} = \frac{2Z^2\alpha^3 n}{m^2} (1 - (\xi_1 v)^2/3) \times [\ln(2\varepsilon_1/m) - 3/2 - f(\xi)]. \quad (18.37)$$

В случае полного экранирования имеем из (18.24), (18.22)

$$d\sigma(\xi_1, -\xi_1) = \frac{2Z^2\alpha^3}{m^2} \cdot \frac{\omega d\omega}{\varepsilon_1^2} \{ [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi)] (1 - (\xi_1 v)^2/3) - 1/9 \}, \quad (18.38)$$

откуда длина деполаризации

$$L_{dep}^{-1} = \frac{2Z^2\alpha^3 n}{m^2} \{ [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi)] (1 - (\xi_1 v)^2/3) - 1/9 \}. \quad (18.39)$$

Если пренебречь в (18.33), (18.39) малыми величинами  $1/18$  и  $1/9$ , то получим простое соотношение между длиной деполаризации и радиационной длиной:

$$L_{dep} \approx 2L_{rad}/[1 - (\xi_1 v)^2/3]. \quad (18.40)$$

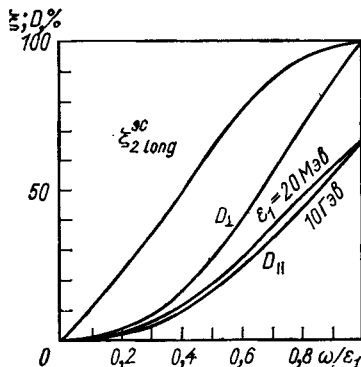


Рис. 36. Круговая поляризация тормозного излучения продольно поляризованных электронов  $\xi_2^{sc}$  (18.28), деполаризация продольно  $D_{\parallel}$  и поперечно  $D_{\perp}$  поляризованных электронов (18.34) с учетом кулоновских поправок и экранирования. Графики для  $\xi_2^{sc long}$  и  $D_{\perp}$  годятся для любых энергий и элементов,  $D_{\parallel}$  слабо зависит от энергии электрона.

§ 19. РОЖДЕНИЕ ПАР ЧАСТИЦ ФОТОНОМ  
В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Процесс рождения пары во внешнем поле отличается от процесса тормозного излучения заменой выходящего фотона на входящий и входящей частицы на выходящую. Поэтому сечение рождения пары можно получить из сечения тормозного излучения с помощью правил подстановки. Была продемонстрирована возможность использования правил подстановки для задач во внешнем поле на примере связи вероятностей магнитотормозного излучения и рождения пары фотоном в магнитном поле [см. (11.13) и последующее обсуждение] для вероятности, просуммированной по конечным состояниям одной из частиц пары (для определенности позитрона). Точно так же сечение тормозного излучения после интегрирования по углам вылета конечной частицы легко пересчитывается в сечение рождения пары\* с помощью следующих замен:  $\varepsilon_1, \mathbf{p}_1, \xi_1 \rightarrow -\varepsilon_1, -\mathbf{p}_1, -\xi_1$ ;  $\omega, \mathbf{k}, \mathbf{e} \rightarrow -\omega, -\mathbf{k}, \mathbf{e}^*$  ( $\tilde{\xi}_2 \rightarrow -\tilde{\xi}_2$ ) [ср. (17.46)];  $\omega^2 d\omega \rightarrow \varepsilon_1^2 d\varepsilon_1$ . С помощью этих замен из (17.44) и (17.45) имеем

$$d\sigma_{ps} = \frac{2Z^2 \alpha^3}{\pi m^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\omega^3} d\varepsilon_1 \frac{d\xi}{\xi^4} d\varphi [(\Gamma + 1) \xi^2 - 4\Gamma |e\mathbf{u}|^2]; \quad (19.1)$$

$$d\sigma_{pe} = \frac{Z^2 \alpha^3}{2\pi m^2} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{\omega^3} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2} d\varphi_1 \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (\Gamma + 3/2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \right. \\ \left. + \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\xi^2} \Gamma (1 - \xi_1 \xi_2) |e\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - 4\Gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2] (\xi_1 \xi_2) - \right. \\ \left. - \frac{4\omega^2}{\xi^2} \Gamma (\xi_1 \mathbf{w}) (\xi_2 \mathbf{w}) + \omega^2 \operatorname{Re} (e\xi_1) (e^* \xi_2) + \frac{8\omega}{\xi^2} \Gamma \operatorname{Re} (e^* \mathbf{u}) [\varepsilon_1 (\xi_2 \mathbf{w}) (e\xi_1) + \right. \\ \left. + \varepsilon_2 (\xi_1 \mathbf{w}) (e\xi_2)] + \tilde{\xi}_2 [\omega (\Gamma + 3/2) (\varepsilon_1 (\xi_1 \mathbf{n}) + \varepsilon_2 (\xi_2 \mathbf{n})) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \omega (\varepsilon_2 \xi_1 + \varepsilon_1 \xi_2) \left( \mathbf{n} + \frac{8}{\xi^2} \Gamma \mathbf{w} (1 - \xi/2) \right) \right] \Big\}, \quad (19.2)$$

где  $\mathbf{w}$  определяется также (17.47), а функция  $\Gamma$  совпадает с найденной в случае излучения для всех рассмотренных видов потенциалов.

Все последующие интегрирования в формулах (19.1), (19.2) нет необходимости проводить в явном виде, поскольку все результаты можно получить из найденных для тормозного излучения в § 17, 18 с помощью указанных выше замен.

\* Литературу см. в сноске на с. 222.



Так, сечение рождения пары, когда электрон имеет импульс  $\mathbf{p}_1$  и спин  $\xi_1$  получается из (17.48):

$$\begin{aligned} d\sigma_{pe}(\mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{p}_1, \xi_1) = & \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi m^2} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{\omega^3} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2} d\varphi_1 \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (\Gamma + 3/2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \right. \\ & + \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\xi^2} \Gamma |\mathbf{e}\mathbf{u}|^2 + \tilde{\xi}_2 [\varepsilon_1 \omega (\Gamma + 3/2) (\xi_1 \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \omega \varepsilon_2 ((\xi_1 \mathbf{n}) + \\ & \left. + \frac{8}{\xi^2} \Gamma (\xi_1 \mathbf{w}) (1 - \xi/2))] \right\}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Сечения рождения пары неполяризованным фотоном следует из (17.49), (17.50):

$$\begin{aligned} d\sigma_{pe}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) = & \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{\omega^3} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2} \{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (\Gamma + 3/2) + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + 4\Gamma (\xi - 1)/\xi^2) \}; \end{aligned} \quad (19.4)$$

$$d\sigma_{ps}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) = \frac{8Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 d\varepsilon_1}{\omega^3} \cdot \frac{d\xi}{\xi^4} [\xi^2 + \Gamma (\xi^2 - 2\xi + 2)]. \quad (19.5)$$

Поскольку после суммирования по поляризациям фотона результат не зависит от спина электрона, мы провели по нему суммирование (фактор 2).

В случае линейной поляризации фотона электроны рождаются преимущественно в плоскости поляризации фотона. Эту ситуацию удобно описывать *показателем асимметрии*, который легко найти из формулы (19.3) (для линейно поляризованных фотонов  $\tilde{\xi}_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} R^e = & [d\sigma_{pe}(\mathbf{u}\mathbf{e} = u) - d\sigma_{pe}(\mathbf{u}\mathbf{e} = 0)] / [d\sigma_{pe}(\mathbf{u}\mathbf{e} = u) + d\sigma_{pe}(\mathbf{u}\mathbf{e} = 0)] = \\ = & 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\xi - 1) \Gamma / [\xi^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) (3 + 2\Gamma) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\xi^2 + 4(\xi - 1)\Gamma)], \end{aligned} \quad (19.6)$$

где учтено, что  $u^2 = \xi - 1$ . Показатель асимметрии максимален, когда энергии электрона и позитрона одинаковы, и стремится к нулю, когда одна из частиц уносит почти всю энергию. Но даже максимальное значение  $R^e$  не слишком велико\*, и для экранированного кулоновского потенциала оно не превышает 20%.

Для скалярных частиц наблюдается обратная ситуация. Сечение  $d\sigma_{ps}(\mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{p}_1)$  (19.1) максимально в случае, когда  $\mathbf{p}_1$  лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации ( $\mathbf{e}\mathbf{u} = 0$ ). Показатель асимметрии в этом случае

$$\begin{aligned} R^s = & [d\sigma_{ps}(\mathbf{u}\mathbf{e} = 0) - d\sigma_{ps}(\mathbf{u}\mathbf{e} = u)] / [d\sigma_{ps}(\mathbf{u}\mathbf{e} = 0) + d\sigma_{ps}(\mathbf{u}\mathbf{e} = u)] = \\ = & 2(\xi - 1) \Gamma / [\xi^2 + \Gamma (\xi^2 - 2\xi + 2)]. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Отсюда видно, что при  $\Gamma \gg 1$  и  $\xi = 2$ ,  $R^s \approx 1$ , следовательно, для скалярных частиц асимметрия заметно больше, чем в случае электронов.

\* При  $\Gamma \gg 1$  максимальное значение  $R^e_{\text{макс}} \approx 1/3$ .

Если фотоны циркулярно поляризованы, то рождающиеся электроны также обладают поляризацией (в отличие от случая линейной поляризации фотона, когда электроны рождаются неполяризованными, поскольку, как уже отмечалось в разделе 17.2, отсутствуют корреляции типа  $\xi_1 \xi_1$ ,  $\xi_1 \xi_3$ ). Из сечения (19.3) можно найти средний спин:

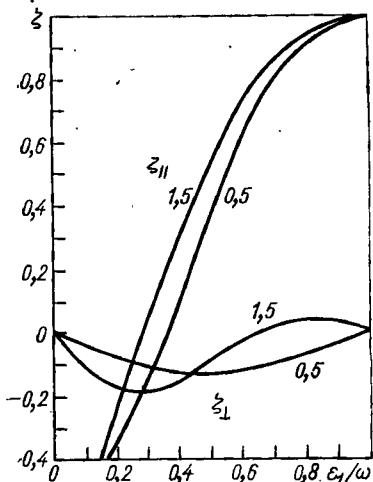


Рис. 37. Продольная и поперечная поляризация электронов, рождаемых циркулярно поляризованными фотонами с энергией 500 Мэв в свинце для некоторых углов (углы даны в миллирадианах). Учтены кулоновские поправки и экранирование.

$$\xi_1 = \tilde{\xi}_2 \omega \left\{ \left[ (\epsilon_1 - \epsilon_2) (3 + 2\Gamma) + 2\epsilon_2 \left( 1 + \frac{4(\zeta - 1)\Gamma}{\zeta^2} \right) \right] \mathbf{n} + \frac{4\epsilon_2(\zeta - 2)\Gamma}{\zeta^2} \mathbf{u} \right\} / \left[ (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) (3 + 2\Gamma) + 2\epsilon_1 \epsilon_2 \left( 1 + \frac{4(\zeta - 1)\Gamma}{\zeta^2} \right) \right]. \quad (19.8)$$

При увеличении энергии электрона степень поляризации электрона растет и достигает на верхнем пределе  $\epsilon_1 \approx \omega$ ,  $\epsilon_2 \ll \omega$  максимального значения  $\xi_1 = \tilde{\xi}_2 \mathbf{n}$ , причем из (19.8), очевидно, следует, что электроны рождаются в основном продольно поляризованными. По мере уменьшения энергии электрона степень продольной поляризации падает и при некотором значении энергии проходит через нуль, а затем меняет знак. При энергии, когда  $\xi_1 \mathbf{n} = 0$ , остается только поперечная поляризация, т. е. электроны рождаются поперечно поляризованными только в узком интервале энергий.

Зависимость продольной и поперечной поляризаций электрона от энергии электрона при  $\omega = 500$  Мэв ( $\omega/m = 10^3$ ) приведена на рис. 37.

Проинтегрировав сечение (19.2) по углам вылета конечного электрона ( $d\zeta d\varphi_1$ ), [к этому же результату можно придти, если проделать соответствующие замены в (18.23)], найдем поляризационные и спиновые корреляции при рождении электрон-позитронной пары в целом:

$$\begin{aligned} d\sigma_{pe}(\mathbf{k}, \mathbf{e}, \xi_1, \xi_2) = & \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{d\epsilon_1}{\omega^3} \{ (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \psi_1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 \psi_2 / 3 + \\ & + [2\epsilon_1 \epsilon_2 (\psi_1 - \psi_2 / 3) - \omega^2 \psi_2 / 3] (\xi_1 \xi_2) - \omega^2 (\psi_1 - \psi_2) (\xi_1 \mathbf{n}) (\xi_2 \mathbf{n}) + \\ & + 2\omega^2 \psi_2 \operatorname{Re}(\mathbf{e} \xi_1) (\mathbf{e}^* \xi_2) / 3 + \tilde{\xi}_2 \omega [ (\epsilon_1 \psi_1 - \epsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)) (\xi_1 \mathbf{n}) + \\ & + (\epsilon_2 \psi_1 - \epsilon_1 (\psi_1 - 2\psi_2 / 3)) (\xi_2 \mathbf{n}) \} \}, \quad (19.9) \end{aligned}$$

где функции  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  были определены выше (18.21).

Усредняя это выражение по поляризациям фотона и суммируя по спинам пары, получаем распределение рождаемых частиц по энергиям [ср. (18.29)]:

$$d\sigma_{pe} = \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{\omega^3} [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3]; \quad (19.10)$$

$$d\sigma_{ps} = \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 d\varepsilon_1}{\omega^3} (\psi_1 - \psi_2/3). \quad (19.11)$$

Обратим внимание, что эти результаты (рис. 38) симметричны относительно энергий частиц и античастиц.

Коэффициент корреляции спинов электрон-позитронной пары для неполяризованных фотонов

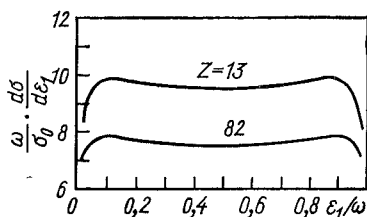


Рис. 38. Дифференциальное по энергии сечение рождения для алюминия ( $Z = 13$ ) и свинца. Учтены кулоновские поправки и экранирование.

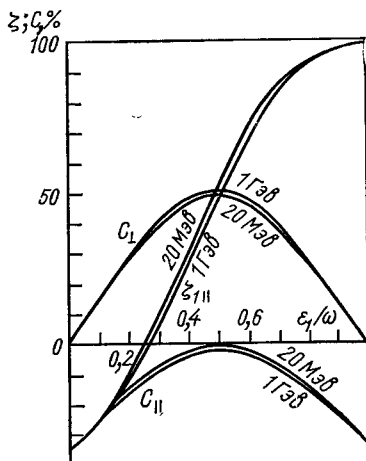


Рис. 39. Продольная поляризация электронов  $\xi_{1||}$  и коэффициент корреляции продольных и поперечных спинов в электрон-позитронной паре ( $\omega = 20 \text{ МэВ}, 1 \text{ ГэВ}$ ). Учтены кулоновские поправки и экранирование.

дается выражением

$$C = [d\sigma(\xi_1 = \xi_2) - d\sigma(\xi_1 = -\xi_2)] / [d\sigma(\xi_1 = \xi_2) + d\sigma(\xi_1 = -\xi_2)] = \\ = [2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\psi_1 - \psi_2/3) - \omega^2 (\psi_1 - 2\psi_2/3) \times \\ \times (\xi_1 \mathbf{n})^2] / [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3]. \quad (19.12)$$

Суммируя сечение (19.9) по  $\xi_2$ , получаем для среднего значения спина электрона в зависимости от циркулярной поляризации фотона  $\tilde{\xi}_2$  и энергии электрона  $\varepsilon_1$

$$\xi_1 = \tilde{\xi}_2 \omega [\varepsilon_1 \psi_1 - \varepsilon_2 (\psi_1 - 2\psi_2/3)] \mathbf{n} / [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \psi_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \psi_2/3] \quad (19.13)$$

Поперечная поляризация в этом случае естественно отсутствует (в задаче отсутствует выделенное поперечное направление). Ко-

Эффект корреляции  $C$  и степень продольной поляризации  $\xi_{\parallel} = \xi_{\parallel p}$  слабо зависят от энергии начального фотона. Это показано на рис. 39, где приведены эти характеристики как функции энергии электрона.

Наконец, приведем значения для полных сечений рождения пар заряженных частиц фотоном в кулоновском поле. При отсутствии экранирования (рис. 40) имеем из (19.10), (19.11):

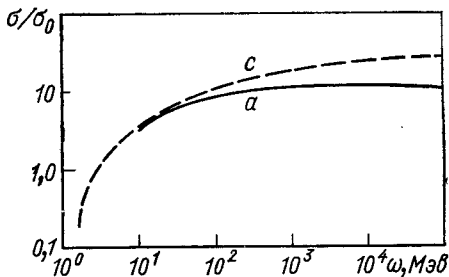


Рис. 40. Полное сечение рождения пары в свинце:

$a$  — по формуле (19.17);  $c$  — борновское приближение без экранирования,  $\sigma_0 = Z^2 r_0^2 \alpha$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{ps} &= \int_0^{\omega} \frac{d\sigma_{ps}}{d\varepsilon_1} d\varepsilon_1 = \\ &= \frac{4Z^2 \alpha^3}{9m^2} [\ln 2\omega/m - f(\xi) - 13/6]; \end{aligned} \quad (19.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{pe} &= \int_0^{\omega} \frac{d\sigma_{pe}}{d\varepsilon_1} d\varepsilon_1 = \\ &= \frac{28Z^2 \alpha^3}{9m^2} [\ln(2\omega/m) - f(\xi) - 109/42], \end{aligned} \quad (19.15)$$

и в случае полного экранирования

$$\sigma_{ps} = \frac{4Z^2 \alpha^3}{9m^2} [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi) + 1/12]; \quad (19.16)$$

$$\sigma_{pe} = \frac{28Z^2 \alpha^3}{9m^2} [\ln(183Z^{-1/3}) - f(\xi) - 1/42]. \quad (19.17)$$

## § 20. ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ НА ПРОЦЕССЫ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ПАР

20.1. Качественный анализ эффектов среды. Полученные выше, в § 16—19, сечения тормозного излучения и рождения пар фотоном на кулоновском центре с учетом экранирования хорошо описывает эти процессы при любых энергиях в случае изолированных атомов. Неоднократно уже обращалось внимание на то, что при высоких энергиях, когда направления импульсов частиц, участвующих в процессе, почти совпадают, для тормозного излучения и рождения пар существенны большие продольные расстояния (см. разделы 3.6, 16, 1). Так, при излучении тормозного кванта с длиной волны  $\lambda$  оказывается существенной продольная длина  $l \sim \lambda \gamma^2$  [см. (16.3)]. В случае, когда характерная длина  $l$  достигает размеров порядка расстояния между рассеивающими центрами, картина процесса приобретает новые качественные черты, которые проявляются тем раньше, чем выше плотность рассеивающих цент-

ров, так что фактически при разумных значениях энергии в речь будет идти о процессах в конденсированных средах. Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук [63, 64] показали, что при движении частицы в среде многократное рассеяние на характерной длине  $l$  приводит к существенному уменьшению вероятности элементарного процесса. Наряду с многократным рассеянием излучающей частицы следует учитывать еще влияние среды на электромагнитное поле. Вследствие того, что в задаче существенны большие длины, это влияние можно учитывать феноменологически введением диэлектрической постоянной  $\mathcal{E}(\omega)$ . Тер-Микаэлян [96] показал, что в случае мягких фотонов отличие диэлектрической постоянной от единицы также приводит к уменьшению вероятности процесса.

В. М. Галицкий, И. И. Гуревич [43] дали простой качественный анализ этих эффектов. Рассмотрим выражение для энергии классического излучения в среде [см. (1.56), (1.58)]:

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \mathbf{v}(t)] \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}(t))] dt \right|^2, \quad (20.1)$$

где  $\mathbf{k} = n\omega \sqrt{\mathcal{E}(\omega)}$ ,  $\mathcal{E}(\omega)$  — диэлектрическая постоянная;

$$\mathcal{E}(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2; \quad \omega_0^2 = 4\pi n \alpha Z/m, \quad (20.2)$$

здесь  $n$  — плотность атомов среды.

Ниже будем рассматривать только область высоких частот  $\omega \gg \omega_0$ . Переходя к относительному времени  $\tau$  и проводя простые преобразования, как в разделе 1.5, получаем

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau [\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+\tau) - n\mathbf{v}(t) \omega/k] \times \\ \times \exp\{-i[\omega\tau - \mathbf{k}(\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t))]\}. \quad (20.3)$$

При учете многократного рассеяния направление скорости в среде меняется. Разлагая вектор скорости  $\mathbf{v}(t+\tau)$  и направление излучения фотона  $\mathbf{n}$  по вектору скорости  $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}$  и перпендикулярным ему единичным векторам  $\mathbf{e}_s$ ,  $\mathbf{e}$  (рис. 41) в существенной

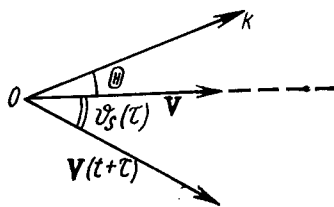


Рис. 41. Углы в задаче излучения в среде.

области малых углов, находим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t+\tau) &= \mathbf{v}(1 - \bar{\vartheta}_s^2(\tau)/2) + v \mathbf{e}_s(\tau) \bar{\vartheta}_s(\tau); \\ \mathbf{n} &= \mathbf{v}(1 - \Theta^2/2)/v + \mathbf{e}\Theta; \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)) &= \mathbf{k} \int_0^\tau \mathbf{v}(t+\tau') d\tau' = \\ &= kv \left[ (1 - \Theta^2/2) \int_0^\tau (1 - \bar{\vartheta}_s^2(\tau')/2) d\tau' + \right. \\ &\quad \left. + \Theta \int_0^\tau (\mathbf{e}\mathbf{e}_s(\tau')) \bar{\vartheta}_s(\tau') d\tau' \right]. \end{aligned} \right\} (20.4)$$

Входящий в эти формулы угол  $\bar{\vartheta}_s(\tau)$  является, очевидно, случайной величиной. Чтобы получить представляющие физический интерес результаты, необходимо провести в (20.3) с учетом (20.4) усреднение по расположению рассеивающих центров. Для качественного анализа можно проделать усреднение независимо в показателе экспоненты и в предэкспоненциальном множителе. Процесс многократного рассеяния был рассмотрен в разделе 5.12, полученный там результат (5.147) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_s^2(\tau) &= \varepsilon_s^2 l / \varepsilon^2 L; \quad \varepsilon_s^2 = 4\pi m^2 / \alpha, \\ L^{-1} &= 4\alpha n (Zr_0)^2 \ln(190Z^{-1/3}), \end{aligned}$$

где  $l = \tau$  (в обычных единицах  $l = c\tau$ ) — длина, на которой рассматривается многократное рассеяние. В результате усреднения имеем с точностью до малых более высокого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega\tau - \mathbf{k}(\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t))} &= (\omega m^2 / 2\varepsilon^2) \tau [1 + \Theta^2 \varepsilon^2 / m^2 + \\ &\quad + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2 + \bar{\vartheta}_s^2(\tau) \varepsilon^2 / 2m^2]; \\ \overline{\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+\tau) - n\mathbf{v}(t) \omega / k} &= - (m^2 / 2\varepsilon^2) [1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2 - \\ &\quad - \Theta^2 \varepsilon^2 / m^2] - \varepsilon_s^2 \tau / 2\varepsilon^2 L, \end{aligned} \right\} (20.5)$$

где черта показывает усреднение. Подставляя (20.5) в (20.3) и проводя в предэкспоненциальном выражении (20.3) преобразования, так чтобы в первом члене выделилась производная от показателя экспоненты, и проводя интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}(\mathbf{n}, \omega) &= \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\varepsilon_s^2 \Theta^2}{m^2} \cdot \frac{1}{1 + \Theta^2 \varepsilon^2 / m^2 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2} \times \\ &\times \frac{2 \operatorname{Re}}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau (-\tau) \exp \{ -i(m^2 \omega \tau / 2\varepsilon^2) [1 + \Theta^2 \varepsilon^2 / m^2 + \\ &\quad + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2 + \bar{\vartheta}_s^2(\tau) \varepsilon^2 / 2m^2] \}. \end{aligned} \quad (20.6)$$

Основной вклад в энергию излучения дает время (длина), при котором показатель экспоненты порядка единицы (*длина когерентности*). Для качественных оценок, которые мы здесь проведем, можно считать, что интеграл в (20.6) равен квадрату этой длины. В случае, когда эффекты среды несущественны, т. е.  $\omega_0 = 0$  и в показателе экспоненты в (20.6)  $\overline{\vartheta}_s^2 = 0$ , длина когерентности

$$l_0(\omega, \Theta) = 1/(\omega [1 - n\nu]) = 2\varepsilon^2/[\omega m^2 (1 + \Theta^2 \varepsilon^2/m^2)]. \quad (20.7)$$

При этих условиях для интенсивности излучения из (20.6) следует

$$d\varepsilon_0(\mathbf{n}, \omega)/dt = A l_0^2 d\omega d\Omega; \quad (20.8)$$

с другой стороны, эту же характеристику можно представить в виде

$$d\varepsilon_0(\mathbf{n}, \omega)/dt = n\omega d\sigma_{\nu e}^{sc}(\mathbf{n}, \omega), \quad (20.9)$$

где  $d\sigma_{\nu e}^{sc}(\mathbf{n}, \omega)$  — сечение излучения на изолированном атоме при полном экранировании (17.50), (18.16). Для качественных оценок можно пренебречь зависимостью  $A$  от углов, а саму величину  $A$  можно найти после выполнения интегрирования по углам при сравнении (20.8) с (20.9).

Те же соображения применимы и при учете эффектов среды. Согласно формуле (20.6) длина когерентности в этом случае

$$\begin{aligned} l(\omega, \Theta) &= \\ &= (2\varepsilon^2/m^2 \omega) [1/(1 + \Theta^2 \varepsilon^2/m^2 + \omega_0^2 \varepsilon^2/\omega^2 m^2 + \overline{\vartheta}_s^2 \varepsilon^2/2m^2)] = \\ &= \left( \frac{2\varepsilon^2}{m^2 \omega} \right) [1/(1 + \varepsilon^2 \omega_0^2/m^2 \omega^2 + \varepsilon_s^2 L^2(\omega, \Theta)/2m^2 L + \varepsilon^2 \Theta^2/m^2)]. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Интенсивность излучения можно записать в виде [ср. (20.8)]:

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega)/dt = A l^2(\omega, \Theta) d\omega d\Omega. \quad (20.11)$$

Заметим, что длина когерентности определена с точностью до численного коэффициента порядка единицы, величина которого, так же как значение коэффициента, возникающего при усреднении перед  $\overline{\vartheta}_s^2$  [см. (20.5)], не сказываются на качественном описании особенностей процесса излучения\*. По существу формулы (20.8), (20.11) следует рассматривать как интерполяционные. Точность их оказывается, однако, достаточной для качественного описания эффектов среды.

\* Для представления о порядках входящих величин приведем некоторые оценки. Для свинца  $\omega_0 = 60 \text{ эв}$ ,  $L\omega_0 = 1,5 \cdot 10^8$ ,  $L\omega_0^2 \approx 10^8 \text{ эв}$ ,  $\varepsilon_p = m(m/\varepsilon_s)^2$ ,  $L\omega_0 = 5 \cdot 10^8 \text{ эв}$ ,  $\varepsilon_0 = (m/\omega_0)\varepsilon_p = 4 \cdot 10^{12} \text{ эв}$ ,  $L = 0,5 \text{ см}$ ,  $\varepsilon_s = 4\omega_0 L\varepsilon_s \approx 1,3 \cdot 10^{14} \text{ эв}$ .

Найдем теперь величину  $A$  в области частот и энергии, где эффектами среды можно пренебречь (20.7), (20.8). В этом случае для интенсивности, проинтегрированной по углам излучения, имеем

$$d\epsilon_0(\omega)/dt = Ad\omega \int l_0^2(\omega, \Theta) d\Omega = 4\pi\epsilon^2 Ad\omega/m^2\omega^2. \quad (20.12)$$

С другой стороны, эта величина есть потеря энергии частицы в единицу времени на излучение при прохождении через вещество при условии полного экранирования (18.33):

$$d\epsilon_0(\omega)/dt = n\omega d\sigma_{\gamma e}^{sc}(\omega) = 4d\omega/3L, \quad (20.13)$$

где  $d\sigma_{\gamma e}^{sc}(\omega)$  — сечение тормозного излучения для случая мягких фотонов ( $\omega/\epsilon \ll 1$ ) и полного экранирования, имеющее с логарифмической точностью вид\* [см. (18.30)]

$$d\sigma_{\gamma e}^{sc} = (16/3)(Zr_0)^2 \alpha (d\omega/\omega) \ln(190Z^{-1/3}). \quad (20.14)$$

Приравнявая (20.13) и (20.12), находим

$$A = m^2\omega^2/3\pi\epsilon^2 L. \quad (20.15)$$

Введем теперь редуцированный множитель, с помощью которого будем описывать эффекты среды [см. (20.7), (20.10)]:

$$q_r \equiv l(\omega, 0)/l_0(\omega, 0) = 1/[1 + \epsilon^2\omega_0^2/m^2\omega^2 + \epsilon_s^2 l(\omega, 0)/2m^2L] < 1, \quad (20.16)$$

или, подставляя в правую часть  $l(\omega, 0)$ :

$$q_r = 1/[1 + \epsilon^2\omega_0^2/m^2\omega^2 + \epsilon_s^2 \epsilon^2 q_r/m^4\omega L]. \quad (20.17)$$

Тогда длину когерентности можно представить в виде

$$\begin{aligned} l(\omega, \Theta) &= l_0(\omega, 0) q_r / (1 + q_r \epsilon^2 \Theta^2 / m^2); \\ d\epsilon(\omega, \Theta)/dt &= Al_0^2(\omega, 0) q_r^2 / [1 + q_r (\epsilon\Theta/m)^2]^2, \end{aligned} \quad (20.18)$$

где  $l_0(\omega, 0) = 2\epsilon^2/m^2\omega$ . Проинтегрировав по углам, имеем

$$d\epsilon(\omega)/dt = \int_{\Omega} d\epsilon(\omega, \Theta)/dt = q_r d\epsilon_0(\omega)/dt = [l(\omega, 0)/l_0(\omega, 0)] [d\epsilon_0(\omega)/dt]. \quad (20.19)$$

Эффекты поляризации среды и множественного рассеяния в среде уменьшают длину когерентности, поскольку они *увеличивают* фазовую скорость света и *уменьшают* продольную скорость частиц. Оба эффекта, как это следует из (20.19), приводят к *уменьшению*

\* Логарифмические факторы, входящие в выражение для угла многократного рассеяния и сечение излучения в случае полного экранирования, почти совпадают, и в пределах вычислений с логарифмической точностью их можно считать одинаковыми.



интенсивности тормозного излучения. Существенная область углов в (20.18)  $\Theta \sim (1/\sqrt{q_r}) (m/\varepsilon)$ , таким образом, эффекты среды приводят также к *уширению* эффективного угла излучения.

Решая уравнение (20.17) относительно  $q_r$ , получаем

$$q_r = (m^4 \omega L / 2\varepsilon^2 \varepsilon_s^2) \times$$

$$\times \left[ \sqrt{(1 + \varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2)^2 + 4\varepsilon_s^2 \varepsilon^2 / m^4 \omega L} - (1 + \varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2) \right]. \quad (20.20)$$

В области, где многократное рассеяние еще не существенно, т. е. когда

$$(1 + \varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2) \gg \varepsilon_s \varepsilon / m^2 \sqrt{\omega L}, \quad (20.21)$$

имеем

$$q_r = 1 / [1 + \varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2]. \quad (20.22)$$

Если при этом  $\varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2 \gg 1$ , то приходим к результату работы [96] [см. (20.19), (20.13)];

$$d\varepsilon_P(\omega)/dt = 4m^2 \omega^3 d\omega / (3\varepsilon^2 \omega_0^2 L). \quad (20.23)$$

Характерно, что в этом случае сечение не содержит подъема в области малых частот, кроме того,  $d\varepsilon(\omega)/dt$  пропорционально  $Z$  и не зависит от  $n$ , а эффективный угол излучения  $\Theta \sim (1/\sqrt{q_r}) (m/\varepsilon) \sim \omega_0/\omega$ .

Если неравенство (20.21) выполняется, но  $\varepsilon^2 \omega_0^2 / m^2 \omega^2 \ll 1$ , то  $q_r \approx 1$  и  $d\varepsilon(\omega)/dt = d\varepsilon_0(\omega)/dt$ . При выполнении неравенства, обратного (20.21), имеем

$$q_r = m^2 \sqrt{\omega L} / \varepsilon \varepsilon_s. \quad (20.24)$$

В этом случае из (20.19) (с точностью до численного множителя) следует результат работ [63, 64]:

$$d\varepsilon_{MS}(\omega)/dt = (4m^2 / 3\varepsilon \varepsilon_s) \sqrt{\omega/L} d\omega. \quad (20.25)$$

Как видно из этой формулы, интенсивность излучения в этом случае пропорциональна  $Z$  и  $\sqrt{n}$  [а не  $Z^2$  и  $n$ , как  $d\varepsilon_0(\omega)/dt$  (20.13)], излучаемая энергия падает как  $\sqrt{\omega}$  с уменьшением  $\omega$  (отсутствует инфракрасная расходимость), эффективный угол излучения

$$\Theta \sim (1/\sqrt{q_r}) (m/\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon_s/\varepsilon} [1/(\omega L)]^{1/4}.$$

Перепишем неравенство (20.21) в виде

$$1 + (\varepsilon/\sqrt{\varepsilon_0 \omega})^4 (\varepsilon_p^2/\varepsilon^2) \gg (\varepsilon/\sqrt{\varepsilon_0 \omega}), \quad (20.26)$$

где

$$\varepsilon_0 = m^4 L / \varepsilon_s^2; \quad \varepsilon_p = m^3 L \omega_0 / \varepsilon_s^2 = \omega_0 \varepsilon_0 / m \ll \varepsilon_0. \quad (20.27)$$

Отсюда видно, что при  $\varepsilon \ll \varepsilon_p$  эффекты многократного рассеяния отсутствуют и при  $\omega \gtrsim \omega_0 \varepsilon/m$  выражение для энергии излучения (20.19), в котором учтена поляризация среды, переходит в выражение для энергии излучения на изолированных центрах  $d\varepsilon_0(\omega)/dt$  (20.13).

При  $\varepsilon \gg \varepsilon_p$  имеется три области частот, в которых интенсивность излучения задается соответственно формулами: 1) описывающей излучение на изолированных центрах  $d\varepsilon_0(\omega)/dt$  (20.13) (область *IR*); 2) учитывающей многократное рассеяние  $[d\varepsilon_{MS}(\omega)/dt, (20.25),$  область *MS*]; 3) учитывающей поляризацию среды  $[d\varepsilon_p(\omega)/dt, (20.23),$  область *P*]. Из (20.26) следует, что при малых  $\omega$  излучение находится в области *P*, при  $\omega \gtrsim \varepsilon^{2/3} \varepsilon_p^{4/3} / \varepsilon_0$  происходит переход в область *MS*, откуда при  $\omega \gtrsim \varepsilon^2 / \varepsilon_0$  происходит переход в область *IR*. Область *IR* имеется лишь при  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ; если  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ , то  $\varepsilon^2 / \varepsilon_0 \gg \varepsilon > \omega$ , так что неравенство  $\omega \gtrsim \varepsilon^2 / \varepsilon_0$  становится невозможным. Следовательно, при  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$  имеется только две области: *P* — при малых частотах (до  $\omega \sim \varepsilon^{2/3} \varepsilon_p^{4/3} / \varepsilon_0$ ) и *MS* — при больших частотах.

Выше было рассмотрено влияние среды на процесс излучения свободного фотона. Учтем теперь, что фотон в среде имеет конечное время жизни, которое (в области достаточно больших частот) определяется сечением рождения пар частиц на ядрах среды. В случае, когда эффекты среды еще не сказываются на процессе рождения, это время жизни равно  $1/n\sigma$ , где  $\sigma$  — сечение рождения пар [см. (19.17)], т. е. время жизни имеет тот же порядок величины, что и  $L$ . Если длина когерентности  $l(\omega, 0)$ , определяемая формулой (20.10), достигает величины  $L$ , то время излучения определяется уже временем жизни фотона. В этих условиях (20.19) переходит в следующее выражение [ср. (20.13), (20.19)]:

$$d\varepsilon_A(\omega)/dt \sim (L/l_0(\omega, 0)) (d\varepsilon_0(\omega)/dt) \sim m^2 \omega d\omega / \varepsilon^2, \quad (20.28)$$

и энергия излучения перестает зависеть от  $e$ ,  $n$  и  $Z$ . В области *MS*  $l(\omega, 0) = q_r l_0(\omega, 0) = (\varepsilon/\varepsilon_s) \sqrt{L/\omega}$ , так что при  $\omega \ll \varepsilon^2/(\varepsilon_s^2 L)$  имеем, что  $l(\omega, 0) \gg L$ , т. е. область *MS* переходит в область *A*, где основное значение имеет конечное время жизни фотона\*. Поскольку при  $\varepsilon > \varepsilon = \varepsilon_s^2 L$  неравенство  $\omega < \varepsilon^2/(\varepsilon_s^2 L)$  выполняется для любых  $\omega < \varepsilon$ , то это означает, что при  $\varepsilon > \varepsilon$  область *MS* вообще не существует. В области *P* (область малых частот)  $l(\omega, 0) \sim \omega/\omega_0^2$  и падает с уменьшением частоты, так что в этой области поглощение не существенно, но при  $\omega \gg \omega_0^2 L$  мы переходим в область *A*. Следовательно, для возникновения области поглощения должны выполняться критерии перехода в нее из области *P* и из области *MS*:  $\omega_0^2 L \ll \omega \ll \varepsilon^2/(\varepsilon_s^2 L)$ , т. е.  $\varepsilon^2/(\varepsilon_s^2 L) \gg \omega_0^2 L$ , или  $\varepsilon \gg \varepsilon_c = 4\omega_0 L \varepsilon_s \gg \varepsilon_p$ .

\* Этот эффект указан в работе [63], мы следуем анализу работы [43].

Все перечисленные области изображены на рис. 42 в плоскости  $(\omega, \epsilon)$ . Зависимость длины когерентности от частоты при разных значениях энергии приведена на рис. 43.

20.2. Теория электромагнитных эффектов в среде. Был проведен качественный анализ влияния среды на радиационные эффекты. Количественное рассмотрение процессов тормозного излучения и образования пар в среде для релятивистских электронов и квантов произвольной энергии было проведено А. Б. Мигдалом [68—71]. Весьма удобный подход к рассмотрению этого круга вопросов — развитый выше квазиклассический метод рассмотрения процессов излучения и рождения пар частиц (см. § 9, 10, 16).

Вероятность излучения фотона электроном большой энергии в единицу времени, усредненная по поляризации начального электрона и просуммированная по поляризациям конечных частиц, имеет вид [ср. (10.2), (10.3)]

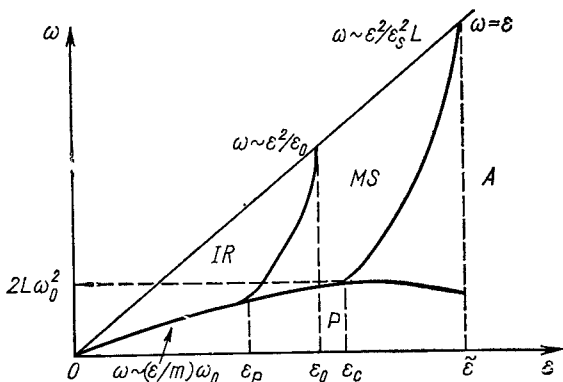


Рис. 42. Области частот фотона и энергий частицы, при которых осуществлены различные эффекты среды:

1 — поляризация среды ( $P$ ),  $d\epsilon_P(\omega)dt \approx m^2\omega^2 d\omega/(\epsilon^2\omega_0^2L)$ ; 2 — излучение на изолированном центре ( $IR$ ),  $d\epsilon_{IR}(\omega)dt \approx d\omega/L$ ; 3 — многократное рассеяние ( $MS$ ),  $d\epsilon_{MS}(\omega)/dt \approx (m^2/\epsilon\epsilon_s)\sqrt{\omega/L}d\omega$ ; 4 — поглощение фотона ( $A$ ),  $d\epsilon_A(\omega)dt = m^2(\omega/\epsilon^2 d\omega)$ .

$$dW = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3k}{2\omega} \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \exp[-i\tilde{k}(x(t_2) - x(t_1))] \times \\ \times \mathcal{L}(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{p}(t_1)) = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3k}{\omega} \cdot \frac{1}{2T} \operatorname{Re} \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} d\tau \times \\ \times \exp[-i\tilde{k}(x(t+\tau) - x(t))] \mathcal{L}(\mathbf{p}(t+\tau), \mathbf{p}(t)), \quad (20.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{k}_0 &= \epsilon\omega/(\epsilon - \omega) - (\omega^2 - \mathbf{k}^2)/2(\epsilon - \omega); \quad \epsilon - \omega \gg m, \\ \tilde{\mathbf{k}} &= \epsilon\mathbf{k}/(\epsilon - \omega); \\ \mathcal{L}(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{p}(t_1)) &= \mathcal{L}^*(\mathbf{p}(t_1), \mathbf{p}(t_2)) = \sum_{s, s', \lambda} R^*(t_2) R(t_1); \\ R(t) &= \sqrt{m/\epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} u_s^+(\mathbf{p}(t) - \mathbf{k}) (\mathbf{e}_\lambda \boldsymbol{\alpha}) \times \\ &\quad \times u_s(\mathbf{p}(t)) \sqrt{m/\epsilon_{\mathbf{p}}}; \end{aligned} \right\} \quad (20.30)$$

$k_\mu(\omega, \mathbf{k})$  — импульс фотона;  $k^2 \neq 0$ ;  $k^2 \ll (\varepsilon - \omega)^2$ ;  $s, s', \lambda$  — поляризационные индексы частиц. Отметим, что  $k^2 \neq 0$ , т. е. мы рассматриваем фотон не на массовой оболочке (но вблизи нее), следовательно, при проведении операции распутывания необходимо использовать (9.26), в которой величины должны быть заменены на классические средние. Если рассматривается распространение света в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной  $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$  (20.2), то  $k^2 = \omega_0^2$ . (В 20.29) учитывается воздействие

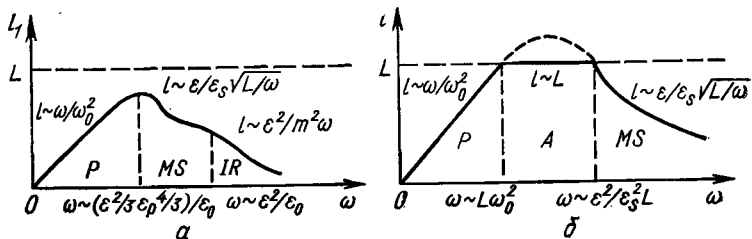


Рис. 43. Длина когерентности как функция частоты при разных энергиях:

$$a - \varepsilon_p < \varepsilon < \varepsilon_0; \quad b - \varepsilon_c < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}.$$

среды на траекторию. Именно анализ в терминах траектории, принятый в развитом выше методе рассмотрения процесса излучения, весьма удобен для учета влияния среды.

Формула (20.29) определяет вероятность излучения при движении электрона по заданной траектории и должна быть усреднена по всем возможным траекториям. Эта операция осуществляется при помощи функции распределения, усредненной по расположению атомов рассеивающей среды и удовлетворяющей обычному кинетическому уравнению:

$$dW_A = \langle dW \rangle = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3 k}{\omega} \operatorname{Re} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^\infty d\tau \exp[-i \tilde{k}_0 \tau] \int dv dv' \times \\ \times dr dr' \mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau; \mathbf{r}, \mathbf{v}) \times \\ \times \exp[i \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})]. \quad (20.31)$$

Здесь  $\langle \rangle$  означает усреднение;  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$ ;  $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'\gamma$ ;  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$  (энергия при столкновениях сохраняется);  $W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — вероятность того, что частица в момент времени  $t$  имеет координату  $\mathbf{r}$  и скорость  $\mathbf{v}$ ;  $W_2$  — вероятность того, что в более поздний момент времени  $t + \tau$  координата и скорость есть  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{v}'$ , если в момент времени  $t$  эти величины были  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ . Вероятности  $W_1$  и  $W_2$  удовлетворяют кинетическому уравнению

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \\ = n\nu \int \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}') [W(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) - W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] dv', \quad (20.32)$$

условию нормировки

$$\int d\mathbf{r} d\mathbf{v} W(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 1 \quad (20.33)$$

и начальному условию

$$W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0; \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (20.34)$$

При вычислении  $\mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  удобно перейти к двухкомпонентной форме записи [ср. (9.10), (10.3)]. Если направить  $\mathbf{k}$  по оси  $z$  и учесть, что  $\sum_s \varphi^{s+} \varphi^s = 1$ , то с точностью до членов  $m/\varepsilon$  получим\*:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1,2} \text{Sp} \{ [\sigma_i \sigma(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) / (\varepsilon_{\mathbf{p}' - \mathbf{k}} + m) + \sigma \mathbf{p}' \sigma_i / (\varepsilon_{\mathbf{p}'} + m)] [\sigma_i \sigma \mathbf{p} / (\varepsilon_{\mathbf{p}} + m) + \sigma(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \sigma_i / (\varepsilon_{\mathbf{p} - \mathbf{k}} + m)] \}. \quad (20.35)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{p}' / (\varepsilon_{\mathbf{p}'} + m); \quad \mathbf{B} = \mathbf{p} \mathbf{k} / [\varepsilon_{\mathbf{p}' - \mathbf{k}} + m]; \quad \mathbf{C} = \mathbf{p} / (\varepsilon_{\mathbf{p}} + m); \\ \mathbf{D} &= (\mathbf{p} - \mathbf{k}) / (\varepsilon_{\mathbf{p} - \mathbf{k}} + m), \end{aligned} \right\} \quad (20.36)$$

то в результате вычисления следа в (20.35) имеем

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = (\mathbf{D}_1 - \mathbf{C}_1)(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1) + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_2, \quad (20.37)$$

где  $\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{k}; \mathbf{A}_2 \perp \mathbf{k}; \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , аналогично разлагаются вектора  $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ . Запись в форме (20.37) удобна потому, что в существенной для излучения области малых углов между векторами  $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}$  явно видны сокращения между членами. В приближении малых углов разложим вектора скорости по вектору  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  и перпендикулярным ему направлениям:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v\mathbf{n} (1 - \vartheta^2/2) + \vartheta; \quad \mathbf{v}' = v\mathbf{n} (1 - \vartheta'^2/2) + \vartheta'; \\ \vartheta\mathbf{n} &= \vartheta' \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.38)$$

и выразим входящие в (20.37) величины через углы  $\vartheta, \vartheta'$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{C}_1 = (1 - m/\varepsilon) \mathbf{n}; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{D}_1 = (1 - m/(\varepsilon - k)) \mathbf{n}; \\ \mathbf{A}_2 &= \vartheta'; \quad \mathbf{B}_2 = \vartheta' \varepsilon / (\varepsilon - k); \quad \mathbf{C}_2 = \vartheta; \quad \mathbf{D}_2 = \vartheta \varepsilon / (\varepsilon - k); \end{aligned} \right\} \quad (20.39)$$

где  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathbf{p}}$  так что

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= R_1 + R_2 \vartheta \vartheta'; \\ R_1 &= k^2 m^2 / [\varepsilon^2 (\varepsilon - k)^2]; \quad R_2 = [\varepsilon^2 + (\varepsilon - k)^2] / (\varepsilon - k)^2. \end{aligned} \right\} \quad (20.40)$$

\* Способ вычисления вероятности (20.31) несколько отличен от использованного выше в § 16, 17. Это связано с тем, что в данном случае частица испытывает на траектории воздействие среды (многократное рассеяние), и необходимо провести усреднение до выполнения интегрирования по времени.

В формуле для вероятности излучения проведем интегрирование по  $d\mathbf{r} d(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ , воспользовавшись тем, что  $W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau; \mathbf{r}, \mathbf{v})$  может зависеть только от разности  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ :

$$dW_A = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d^3 k}{\omega} \cdot \text{Re}(1/2T) \int_{-T}^T dt \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' \times \quad (20.41)$$

$$\times \mathcal{L}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) V_1(\mathbf{v}, t) V_{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{v}', \tau; \mathbf{v}),$$

где

$$V_1(\mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{r} W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t);$$

$$V_{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{v}', \tau; \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' \exp[i\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau; \mathbf{r}, \mathbf{v}) \times \quad (20.42)$$

$$\times \exp[-i\tilde{k}_0 \tau].$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} V_{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{v}', \tau; \mathbf{v}) &\equiv U(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}; \tau) \delta(|\mathbf{v}'| - |\mathbf{v}|); \\ U(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}; 0) &= \delta(\boldsymbol{\vartheta}' - \boldsymbol{\vartheta}). \end{aligned} \right\} \quad (20.43)$$

Уравнение для  $U(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}; \tau)$  вытекает из уравнения (20.32), куда в качестве  $\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  следует подставить сечение рассеяния на кулоновском поле с учетом экранирования [см. (5.140)]:

$$\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta(|\mathbf{v}| - |\mathbf{v}'|) 4e^2 Z^2 \alpha^2 / [(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 + \kappa^2]^2, \quad (20.44)$$

где  $\kappa = 1/a$  ( $a$  — радиус экранирования, в приближении Томаса—Ферми  $a \sim Z^{-1/3}/m\alpha$ ). Интегрируя (20.32) по координатам, имеем в приближении малых углов:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial \tau + i[\tilde{k}_0 - |\tilde{\mathbf{k}}|(v - \boldsymbol{\vartheta}'^2/2)] U = \\ = (4\pi Z^2 \alpha^2 / \varepsilon^2) \int d\boldsymbol{\vartheta}'' (U(\boldsymbol{\vartheta}'', \boldsymbol{\vartheta}; \tau) - \\ - U(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}; \tau)) / [(\boldsymbol{\vartheta}' - \boldsymbol{\vartheta}'')^2 + \boldsymbol{\vartheta}_1^2]^2, \end{aligned} \quad (20.45)$$

где  $\boldsymbol{\vartheta}_1 = \kappa/\varepsilon$ . Разлагая  $U(\boldsymbol{\vartheta}'', \boldsymbol{\vartheta}; \tau)$  в окрестности  $\boldsymbol{\vartheta}'' = \boldsymbol{\vartheta}'$  по степеням  $\boldsymbol{\vartheta}'' - \boldsymbol{\vartheta}'$ , получаем дифференциальное уравнение Фоккера—Планка:

$$\partial U / \partial \tau + i(a + b\boldsymbol{\vartheta}'^2/2) U = q\Delta_{\boldsymbol{\vartheta}'} U, \quad (20.46)$$

где\*

$$\left. \begin{aligned} q &= (2\pi n Z^2 \alpha^2 / \varepsilon^2) \ln(\boldsymbol{\vartheta}_2 / \boldsymbol{\vartheta}_1); \quad a = \tilde{k}_0 - |\tilde{\mathbf{k}}|v \approx \\ &\approx \omega m^2 / 2\varepsilon (\varepsilon - \omega) + (\omega - k) \approx \omega_0^2 / 2\omega + m^2 \omega / 2\varepsilon (\varepsilon - \omega); \\ b &= |\tilde{\mathbf{k}}| = k\varepsilon / (\varepsilon - \omega) \approx \omega\varepsilon / (\varepsilon - \omega); \end{aligned} \right\} \quad (20.47)$$

\* Заметим, что  $q \sim \varepsilon_s^2 / 4\varepsilon^2 L$  при  $\boldsymbol{\vartheta}_2 \sim 2m/\varepsilon\alpha Z^{1/3}$ .

$\Delta_v$  — оператор Лапласа; величина  $\vartheta_2$  определяется из условия применимости разложения и будет конкретизирована ниже. Решение уравнения (20.46) будем искать в виде [50]

$$U(\vartheta', \vartheta; \tau) = \exp[\alpha(\tau)\vartheta'^2 + \beta(\tau)\vartheta\vartheta' + \gamma(\tau)]. \quad (20.48)$$

Подставляя это выражение в (20.46), находим систему уравнений для  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} + i b/2 &= 4\alpha^2 q; \quad \dot{\beta} = 4\alpha\beta q; \\ \dot{\gamma} + i a &= q(4\alpha + \beta^2 \vartheta^2). \end{aligned} \right\} \quad (20.49)$$

Решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям, имеем вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\tau) &= -\sqrt{i b/8q} \operatorname{cth}(\sqrt{2 i b q} \tau); \\ \beta(\tau) &= \sqrt{i b/2q} \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{2 i b q} \tau); \\ \gamma(\tau) &= -i a \tau - \ln \operatorname{sh}(\sqrt{2 i b q} \tau) - \\ &\quad - \vartheta^2 \sqrt{i b/8q} \operatorname{cth}(\sqrt{2 i b q} \tau) + \ln \sqrt{i b/8\pi^2 q}, \end{aligned} \right\} \quad (20.50)$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой.

Определим существенные области  $\tau$ ,  $\vartheta'$  и  $\vartheta$ , записав  $U(\vartheta', \vartheta; \tau)$  в виде

$$\begin{aligned} U(\vartheta', \vartheta; \tau) &= \sqrt{i b/8\pi^2 q} (\exp(-i a \tau) / \operatorname{sh}(\sqrt{2 i b q} \tau)) \times \\ &\times \exp\{-\sqrt{i b/8q} [\vartheta' - \vartheta / \operatorname{ch}(\sqrt{2 i b q} \tau)]^2 \operatorname{cth}(\sqrt{2 i b q} \tau) - \\ &\quad - \vartheta^2 \sqrt{i b/8q} \operatorname{th}(\sqrt{2 i b q} \tau)\}. \end{aligned} \quad (20.51)$$

Существенные значения  $\tau$  определяются минимальной из величин  $1/a$ ,  $1/\sqrt{bq}$ . Условие

$$\sqrt{bq/a} \Big|_{\omega \ll \varepsilon} \sim (\varepsilon \varepsilon_s / m^2; \overline{L\omega}) [1/(1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / m^2 \omega^2)] \ll 1, \quad (20.52)$$

совпадающее с условием (20.21), означает, что рассматривается или область  $IR$ , или область  $P$ . При выполнении обратного условия  $\sqrt{bq/a} \gg 1$  изучается область  $MS$ . В первом случае ( $\sqrt{bq/a} \ll 1$ ) можно разложить входящие в (20.51) гиперболические функции. Учитывая, что  $\tau \sim 1/a$ , имеем:

$$(\vartheta' - \vartheta)^2 \sim q/a; \quad \vartheta^2 \sim a/b = (q/a)(a/\sqrt{bq})^2 \gg q/a, \quad \text{т. е. } \vartheta'^2 \sim a/b. \quad (20.53)$$

Во втором случае ( $\sqrt{bq/a} \gg 1$ ) имеем

$$(\vartheta' - \vartheta)^2 \sim \sqrt{q/b}; \quad \vartheta^2 \sim \sqrt{q/b} \sim \vartheta'^2. \quad (20.54)$$

Таким образом, для применимости приближения малых углов, должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^2 \sim \vartheta'^2 \sim a/b \ll 1 \quad (\sqrt{bq}/a \ll 1); \\ \vartheta^2 \sim \vartheta'^2 \sim \sqrt{q/b} \ll 1 \quad (\sqrt{bq}/a \gg 1). \end{aligned} \right\} \quad (20.55)$$

С учетом  $a/b \sim m^2/\varepsilon^2 + \omega_0^2/\omega^2$  первое из этих неравенств выполняется всегда при  $\omega \gg \omega_0$ . Второе неравенство (20.55) есть требование малости угла многократного рассеяния за время излучения. Действительно, поскольку при  $\sqrt{bq}/a \gg 1$   $\tau \sim \sqrt{1/bq}$ , имеем [ср. (20.4)]:

$$\sqrt{q/b} \sim q\tau \sim \varepsilon_s^2 \tau / \varepsilon^2 L. \quad (20.56)$$

Указанное неравенство также выполняется всегда при  $\omega \gg \omega_0$ , так как  $q/b \ll \varepsilon_s^2/(\omega_0 L \varepsilon^2) \ll 1$ .

Определим теперь величину  $\vartheta_2$ . Первый член разложения в (20.45) порядка

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\vartheta' d\vartheta' \vartheta'^2 / \vartheta'^4) \Delta_{\vartheta'} U/4 \approx (\ln \vartheta_2 / \vartheta_1) \Delta_{\vartheta'} U/4; \quad (20.57)$$

следующий член

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\vartheta' d\vartheta' \vartheta'^4 / \vartheta'^4) (\partial^4 U / \partial \vartheta'^4) \approx \vartheta_2^2 \Delta_{\vartheta'} U / \vartheta_{ef}^{\prime 2}, \quad (20.58)$$

где  $\vartheta_{ef}^{\prime 2}$  — некоторое эффективное значение  $\vartheta'^2$ . Условие применимости разложения имеет вид

$$\vartheta_2^2 / \vartheta_{ef}^{\prime 2} \lesssim \ln \vartheta_2 / \vartheta_1 \equiv l. \quad (20.59)$$

Тогда при  $\sqrt{bq}/a < 1$  имеем  $\vartheta_2 \sim \sqrt{a/b} l^{1/2}$ , а при  $\sqrt{bq}/a > 1$   $\vartheta_2 \sim \sqrt[4]{q/b} l^{1/2}$ . При достаточно больших энергиях угол  $\vartheta_2$  сравнивается с углом дифракции на атомных ядрах, равным  $1/\varepsilon R$ . Верхний предел интегрирования по  $(\vartheta'' - \vartheta')^2$  в (20.45) определяется величиной  $1/(\varepsilon R)^2$  ( $R \approx 0,5r_0 Z^{1/3}$ ) и  $l = \ln \vartheta_2 / \vartheta_1 \approx 2 \ln (190 Z^{-1/3})$ . Верхний предел интегрирования по  $\vartheta'$  в (20.41) оказывается в области экспоненциального падения, и интегрирование можно проводить в бесконечных пределах. В результате интегрирования

$$\begin{aligned} dW_A = (\alpha d^3k / (2\pi)^2 \omega) \operatorname{Re} (1/2T) \int_{-T}^T dt \int_0^\infty d\tau \int d\nu V_1(\nu, t) \times \\ \times [R_1 g_1(\vartheta^2, \tau) + R_2 g_2(\vartheta^2, \tau)], \end{aligned} \quad (20.60)$$



где

$$\left. \begin{aligned} g_1(\vartheta^2, \tau) &= \int dv' V_{\bar{k}}(v', \tau; v) = \int d\vartheta' U(\vartheta', \vartheta; \tau) = \\ &= \{ \exp[-i a \tau] / \operatorname{ch}(\sqrt{2i b q \tau}) \} \exp \{ -\sqrt{i b / 8 q} \vartheta^2 \operatorname{th}(\sqrt{2i b q \tau}) \}; \\ g_2(\vartheta^2, \tau) &= \int dv' \vartheta \vartheta' V_{\bar{k}}(v', \tau, v) = \int d\vartheta' (\vartheta \vartheta') U(\vartheta', \vartheta; \tau) = \\ &= (2i/b) \exp[-i a \tau] (d/d\tau) \exp \{ -\sqrt{i b / 8 q} \vartheta^2 \operatorname{th}(\sqrt{2i b q \tau}) \}, \end{aligned} \right\} (20.61)$$

здесь  $R_1, R_2$  даются формулами (20.40).

Принимая во внимание, что  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}$ , можно выполнить интегрирование по  $d\mathbf{v}$ , а кроме того, по времени  $dt$  и азимутальному углу вылета фотона. Воспользовавшись условием нормировки [см. (20.33), (20.42)], а также проинтегрировав по частям по  $\tau$  в члене с  $R_2$ , получим:

$$\begin{aligned} dW_A &= (\alpha/4\pi) \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} \omega d\omega \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \int d\vartheta^2 [R_1 g_1(\vartheta^2, \tau) + R_2 g_2(\vartheta^2, \tau)] = \\ &= (\alpha/4\pi) \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} \omega d\omega \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp[-i a \tau] [R_1 / \operatorname{ch}(\sqrt{2i b q \tau}) - \\ &\quad - 2a R_2 / b] \int d\vartheta^2 \exp[-\vartheta^2 \sqrt{i b / 8 q} \operatorname{th}(\sqrt{2i b q \tau})]. \end{aligned} \quad (20.62)$$

Интегрирование по  $\vartheta^2$  удобно распространить до бесконечности, введя дополнительный обрезающий множитель  $\exp(-\lambda \vartheta^2)$  ( $\lambda > 0$ ), для того чтобы устранить расходящуюся интеграла по  $\vartheta^2$  при  $\tau = 0$  и в окончательном выражении  $\lambda \rightarrow 0$ . Для интегрирования по  $\tau$  введем новую переменную  $z = \sqrt{2i b q} \tau$  и повернем контур интегрирования по  $z$  так, чтобы он проходил по вещественной положительной оси, это возможно при  $a > 0$ . Проведя такие операции, получаем выражение для вероятности излучения в единицу времени:

$$\begin{aligned} dW_A &= (\alpha/2\pi) \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} (\omega d\omega / b) \operatorname{Re} \int_0^\infty (dx/i) \{ \exp[-\sqrt{2i} 2sx] / [\operatorname{th} x + \\ &\quad + \lambda \sqrt{8q/i b}] [R_1 / \operatorname{ch} x - 2a R_2 / b] = (\alpha/2\pi) \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} (\omega d\omega / b) \times \\ &\quad \times \left[ R_1 \left\{ \pi/4 - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx [\exp(-sx) \sin sx / \operatorname{sh}(x/2)] \right\} - (2a/b) R_2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \pi/4 - \frac{1}{2} \int_0^\infty \operatorname{cth}(x/2) \cdot \exp(-sx) \sin sx dx \right\} \right] = \\ &= (\alpha/2\pi) \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} (\omega d\omega / b) [(bq/3a^2) R_1 G(s) + (4q/3a) R_2 \Phi(s)], \end{aligned} \quad (20.63)$$

где

$$s = a/4 \sqrt{bq};$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s) &= 12s^2 \left[ \int_0^\infty \operatorname{cth} x/2 \exp(-sx) \sin sxdx - \pi/2 \right], \\ G(s) &= 24s^2 \left[ \pi/2 - \int_0^\infty \exp(-sx) \sin sx dx / \operatorname{sh} x/2 \right]. \end{aligned} \right\} (20.64)$$

Функции  $\Phi(s)$  и  $G(s)$  введены в работе [71]. Они выражаются через логарифмическую производную  $\Gamma$ -функции:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s) &= 12s^2 \{ -\operatorname{Im} [\psi(s-i s) + \psi(s+1-i s)] - \pi/2 \} = \\ &= 6s - 6\pi s^2 + 24s^3 \sum_{k=1}^{\infty} 2/[(s+k)^2 + s^2]; \\ G(s) &= 48s^2 [\pi/4 + \operatorname{Im} \psi(s+1/2-i s)] = \\ &= 12\pi s^2 - 48s^3 \sum_{k=0}^{\infty} 1/[(k+s+1/2)^2 + s^2]. \end{aligned} \right\} (20.65)$$

Эти формулы удобны для табулирования. Графики функций  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$  приведены на рис. 44, а численные значения содержатся в табл. 4.1.

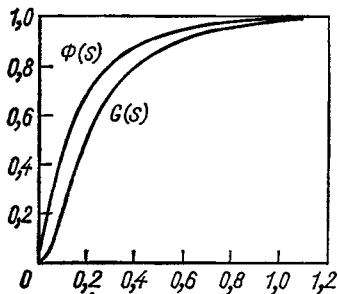


Рис. 44. Функции  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$  (20.64), (20.65).

Асимптотическое поведение функций  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$  дается формулами:

при  $s \rightarrow 0$

$$\Phi(s) \rightarrow 6s; \quad G(s) \rightarrow 12\pi s^2; \quad (20.66)$$

при  $s \rightarrow \infty$

$$\Phi(s) \rightarrow 1 - 0,012/s^4;$$

$$G(s) \rightarrow 1 - 0,029/s^4. \quad (20.67)$$

При  $s > 1$   $\Phi(s)$  и  $G(s)$  ничтожно мало отличаются от 1. Тогда положив также  $\omega_0 = 0$  ( $\mathcal{E}(\omega) = 1$ ), из (20.63) получим

$$dW_A = (2\alpha/3\pi\epsilon^2) B (d\omega/\omega) \{ \omega^2 + 2[\epsilon^2 + (\epsilon - \omega)^2] \}, \quad (20.68)$$

где  $B = 2\pi (Zr_0)^2 n \ln \vartheta_2/\vartheta_1$ ;

$$\vartheta_2/\vartheta_1 = (\sqrt{a/b} l^{1/2} \epsilon) / m\alpha Z^{1/3} \sim (l)^{1/2} / \alpha Z^{1/3}; \quad l = \ln \vartheta_2/\vartheta_1. \quad (20.69)$$

Оценка  $\vartheta_2$  при  $s > 1$ , т. е.  $4\sqrt{bq}/a < 1$ , проводилась после (20.59),  $\vartheta_1 = \kappa/\epsilon \approx m\alpha Z^{1/3}/\epsilon$ . Это выражение для вероятности отличается от формулы излучения на изолированных атомах [полное экранирование, см. (18.30)] только коэффициентом порядка единицы под

Функции  $\Phi(s)$  и  $G(s)$ 

$s$	$\Phi(s)$	$G(s)$	$s$	$\Phi(s)$	$G(s)$
0	0	0	0,6	0,95	0,917
0,05	0,258	0,094	0,7	0,965	0,945
0,1	0,446	0,206	0,8	0,975	0,963
0,2	0,686	0,475	0,9	0,985	0,975
0,3	0,805	0,695	1,0	0,990	0,985
0,4	0,880	0,800	1,5	0,998	0,994
0,5	0,93	0,875	2,0	0,999	0,998

аргументом логарифма. Неопределенность множителя под знаком логарифма — результат перехода от точного уравнения (20.45) к уравнению Фоккера—Планка (20.46), так как величина  $\vartheta_2$  определяется условием применимости разложения с точностью до численного коэффициента. Более точные формулы можно получить в результате решения уравнения (20.45), но эта задача — существенно более сложная.

Поскольку речь идет о численном коэффициенте, определим его так, чтобы при  $s > 1$ , что в явном виде (20.47) есть

$$(4\epsilon_s/m^2) \sqrt{\epsilon(\epsilon - \omega)/\omega L_\vartheta} (1 + \omega_0^2 \epsilon^2/m^2 \omega^2)^{-1} < 1, \quad (20.70)$$

где  $L_\vartheta^{-1} = 4\alpha n (Zr_0)^2 \frac{1}{2} \ln \vartheta_2/\vartheta_1$ , формула (20.68) переходила в формулу для излучения на изолированных атомах\* (18.30). Для этого необходимо, чтобы при  $s > 1$   $l = \ln \vartheta_2/\vartheta_1 = \ln(190Z^{-1/3})$ .

При  $s_1 < s < 1$  имеем  $\vartheta_2 \sim (q/b)^{1/4} l^{1/2} \sim \sqrt{a/b} (l^{1/2}/s^{1/2})$  [ср. (20.59)], откуда  $l = \ln \vartheta_2/\vartheta_1 = \ln(190Z^{-1/3}/s^{1/2})$  [ср. (20.69)],  $s_1$  — значение, при котором  $\vartheta_2$  достигает  $1/\epsilon R$ . Как уже отмечалось, при  $s < s_1$

$$l = \ln \vartheta_2/\vartheta_1 = \ln 1/\epsilon R \vartheta_1 = 2 \ln(190Z^{-1/3}).$$

Для описания приведенной ситуации введем функцию  $\xi(s)$ , такую, что

$$\left. \begin{aligned} l = \ln \vartheta_2/\vartheta_1 &= \xi(s) l_0; \quad l_0 = \ln(190Z^{-1/3}); \\ \xi(s) &= 2 (s < s_1); \quad \xi(s) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1/s)}{l_0}; \quad (s_1 < s < 1); \\ \xi(s) &= 1 (s > 1), \end{aligned} \right\} \quad (20.71)$$

\* Сравнивая это неравенство с (20.21), видим, что при  $\omega_0 = 0$  условие (20.70) можно рассматривать как обобщение на произвольные частоты условия того, что на длине когерентности угол многократного рассеяния меньше  $m/\epsilon$ . Это означает, что многократное рассеяние не влияет на процесс излучения.

где  $s_1^{-1/2} = (190Z^{-1/3})$ . Используя такую нормировку угла  $\vartheta_2$ , получаем для вероятности излучения (20.63) в единицу времени в среде

$$dW_A = \frac{\xi(s)}{3L} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \frac{2[\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2] \Phi(s)}{\varepsilon^2(1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2)} + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} G(s) \right\}, \quad (20.72)$$

где

$$s = (1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2) \sqrt{m^4 \omega L / 8\varepsilon_s^2 \varepsilon (\varepsilon - \omega) \xi(s)},$$

$L$ ,  $\varepsilon_s^2$  определены формулой (20.4),  $\xi(s)$  — (20.71),  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$  — (20.64)—(20.67). В формуле (20.72) отброшены члены вида  $\omega_0^2 / \omega^2 \ll \ll 1$ ,  $\omega_0^2 / m^2 \ll 1$ ; заметим, что члены типа  $1 + \omega_0^2 \varepsilon (\varepsilon - \omega) / \omega^2 m^2$  можно записать как  $1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / m^2 \omega^2$ , поскольку второе слагаемое существенно только при  $\omega / \varepsilon \ll 1$  (действительно, при  $\omega \sim \varepsilon$  член  $\omega_0^2 \varepsilon (\varepsilon - \omega) / \omega^2 m^2 \sim \omega_0^2 / m^2 \ll 1$ ), по той же причине множители этого типа опущены при члене  $(\omega^2 / \varepsilon^2) G(s)$ , который вообще не существует в области малых частот, где основное значение приобретают эффекты поляризации среды. При  $\omega \ll \varepsilon$  формула (20.72) имеет вид

$$dW_A = (4\xi(s)/3L) (d\omega/\omega) \{ \Phi(s) / [1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2] \}, \quad (20.73)$$

где  $s = (1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2) (m^2 / 2\varepsilon_s \varepsilon) \sqrt{\omega L / 2\xi(s)}$ . При  $s > 1$ , что означает  $(1 + \omega_0^2 \varepsilon^2 / \omega^2 m^2) > (2\varepsilon_s \varepsilon / m^2) \sqrt{2/\omega L}$  [ср. (20.21)],  $\xi(s) = 1$ ,  $\Phi(s) = 1$  и (20.73) переходит в (20.19) с учетом (20.13) и (20.22). Таким образом, полученная из чисто качественных соображений формула оказывается в этом случае точной. При  $s < 1$  становятся также существенными эффекты многократного рассеяния.

При  $\omega \sim \varepsilon$  имеем

$$dW_A = \frac{\xi(s)}{3L\varepsilon^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \{ 2[\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2] \Phi(s) + \omega^2 G(s) \}, \quad (20.74)$$

где  $s = (m^2 / 2\varepsilon_s) \sqrt{\omega L / 2\varepsilon (\varepsilon - \omega) \xi(s)}$ . Если энергии и частоты таковы, что возможно выполнение неравенства  $s > 1 (m^2 / 2\varepsilon_s > > \sqrt{2\varepsilon (\varepsilon - \omega) / \omega L})$ , то (20.74) переходит в формулу (20.68), в противном случае область  $MS$  тянется до конца спектра, критерием этого служит  $s < 1$  или

$$\varepsilon_0 / 8\varepsilon < \varepsilon (1 - \omega/\varepsilon) \xi(s) / \omega, \quad (20.75)$$

где  $\varepsilon_0$  дается (20.27). Наконец, при  $s \ll 1$ , когда эффекты многократного рассеяния весьма существенны, имеем  $\Phi(s) = 6s$  (20.66), функция  $G(s) \sim s^2$  может быть отброшена при  $s \ll 1$ , получаем:

$$dW_A = (\sqrt{2} m^2 / \varepsilon \varepsilon_s) (d\omega / \sqrt{\omega L (1 - \omega/\varepsilon) \xi(s)}) [1 + (1 - \omega/\varepsilon)^2]. \quad (20.76)$$

Следовательно, найденная выше качественная формула (20.25) удовлетворительно описывает ситуацию.

Рассмотрим теперь влияние многократного рассеяния на процесс рождения пар. Как известно (см. § 19), вероятность рождения фотон-электрон-позитронной пары, дифференциальная по энергии конечного электрона и просуммированная по конечным состояниям позитрона, может быть получена из  $dW_A$  заменой  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  с умножением на отношение статистических весов  $\varepsilon^2 d\varepsilon / \omega^2 d\omega$ . Поэтому вероятность рождения фотоном с энергией  $\omega$  электрон-позитронной пары с энергией электрона  $\varepsilon$  следует прямо из (20.72):

$$dW_A^p = (\xi(\tilde{s}) d\varepsilon / 3L\omega) \{ G(\tilde{s}) + 2[\varepsilon^2/\omega^2 + (1 - \varepsilon/\omega)^2] \Phi(\tilde{s}) \}, \quad (20.77)$$

где  $\tilde{s} = \sqrt{m^4 \omega L / 8\varepsilon(\omega - \varepsilon) \varepsilon_s^2 \xi(\tilde{s})}$ . Заметим, что члены, относящиеся к поляризации среды,  $\omega_0^2 \varepsilon(\omega - \varepsilon) / \omega^2 m^2 \sim \omega_0^2 / m^2 \ll 1$ . При  $\tilde{s} \gg 1$  это выражение переходит в формулу для рождения пар на изолированных центрах [при полном экранировании ср. (19.10)]:

$$dW_A^p = (d\varepsilon / 3L\omega) [3 + 4\varepsilon^2/\omega^2 - 4\varepsilon/\omega]. \quad (20.78)$$

Интегрирование  $dW_A^p$  по энергиям электрона от  $m$  до  $\omega$  дает

$$W_A^p = 7/9L. \quad (20.79)$$

В области, где эффекты многократного рассеяния весьма существенны [ $\tilde{s} \ll 1$ ,  $\Phi(\tilde{s}) = 6\tilde{s}$ ,  $G(\tilde{s}) \sim \tilde{s}^2$ ], имеем

$$dW_A^p = (\sqrt{2m^2} d\varepsilon / \omega \varepsilon_s) \left[ 1 / \sqrt{\varepsilon L (1 - \varepsilon/\omega) \xi(\tilde{s})} \right] \times \\ \times [\varepsilon^2/\omega^2 + (1 - \varepsilon/\omega)^2]. \quad (20.80)$$

20.3. Учет конечного времени жизни фотона в среде. Если время излучения становится порядка или больше времени жизни фотона в среде, то при решении задачи об излучении нельзя рассматривать фотон как стабильную частицу. В этих условиях сама задача об излучении свободного фотона является некорректно поставленной, и следует рассматривать более общую задачу об энергетических потерях при движении частиц в среде.

Время жизни фотона в среде определяется его взаимодействием с электронами атомных оболочек (возбуждение, ионизация) и рождением электрон-позитронных пар на ядрах (атомах). При больших энергиях фотона основное значение приобретает процесс рождения пар. Мнимая часть  $\mathcal{E}_2$  диэлектрической постоянной  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + i\mathcal{E}_2$ , определяющая время жизни фотона, равна  $W_A^p/\omega$ , где  $W_A^p$  — вероятность рождения пары в единицу времени.

Задачу об энергетических потерях можно также решить применявшимся здесь методом. Впервые она была рассмотрена в работе [46], где электромагнитное поле считалось классическим.

Потерю энергии электроном в интервале частоты  $\omega \div \omega + d\omega$  в единицу времени можно условно разделить на потерю на излучение  $dQ_T$  и потерю на образование пар  $dQ_{\Pi}$ . Конечность времени жизни фотона, в согласии с качественным рассмотрением, сказывается при

$$\varepsilon \gg \varepsilon_c = 4L\omega_0 \varepsilon_s; \quad L\omega_0^2 \ll \omega \ll L\omega_0^2 \varepsilon^2/\varepsilon_c^2. \quad (20.81)$$

При этом

$$dQ_T \approx (7 \cdot 16/9) \{[\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2]/\varepsilon(\varepsilon - \omega)\} (m^2/\varepsilon^2) \omega d\omega, \quad (20.82)$$

считая  $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$  [ср. (20.28) и последующее обсуждение]. С логарифмической точностью

$$dQ_{\Pi} = (\alpha/2\pi L) d\omega \ln \{ m^4 / [(\omega^2 m^2/\varepsilon^2 + 8\omega\sqrt{q\omega} + \omega_0^2)^2 + \omega^2/L^2] \}. \quad (20.83)$$

Такой результат весьма естествен с точки зрения анализа в терминах когерентной длины. Из него, в частности, можно определить области  $\varepsilon$ ,  $\omega$ , где будут доминировать эффекты поляризации среды (член  $\omega_0^2$ ), многократного рассеяния (член  $\omega\sqrt{q\omega}$ ), поглощение фотонов (член  $\omega^2/L^2$ ), а также область, где нет зависимости от эффектов среды (член  $\omega^2 m^2/\varepsilon^2$ ).

Приведем, наконец, все критерии для границ областей, которые изображены на рис. 42:

1) область, где эффекты среды не сказываются ( $IR$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &\ll L^3 \omega_0^3 m^3/\varepsilon_c^2, & \omega &\gg \omega_0 \varepsilon/m; \\ L^3 \omega_0^3 m^3/\varepsilon_c^2 &\ll \varepsilon &\ll L^3 \omega_0^2 m^4/\varepsilon_c^2, & \omega &\gg \varepsilon_c^2 \varepsilon^2/L^3 \omega_0^2 m^4; \end{aligned} \right\} \quad (20.84)$$

первый из критериев относится к границе между областями  $IR$  и  $P$ , второй — к границе между областями  $IR$  и  $MS$ ;

2) область поляризации ( $P$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &\ll L^3 \omega_0^3 m^3/\varepsilon_c^2, & \omega &\ll \omega_0 \varepsilon/m; \\ L^3 \omega_0^3 m^3/\varepsilon_c^2 &\ll \varepsilon &\ll \varepsilon_c, & \omega &\ll L\omega_0^2 (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2/3}; \\ \varepsilon &\gg \varepsilon_c, & \omega &\ll L\omega_0^2; \end{aligned} \right\} \quad (20.85)$$

первый из этих критериев относится к границе областей  $IR$  и  $P$ , второй — к границе областей  $MS$  и  $P$ , третий — к границе областей  $A$  и  $P$ ;

3) область многократного рассеяния ( $MS$ ):

$$\left. \begin{aligned} L^3 \omega_0^3 m^3/\varepsilon_c^2 &\ll \varepsilon &\ll L^3 \omega_0^2 m^4/\varepsilon_c^2, \\ L\omega_0^2 (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2/3} &\ll \omega &\ll \varepsilon_c^2 \varepsilon^2/L^3 \omega_0^2 m^4; \\ L^3 \omega_0^2 m^3/\varepsilon_c^2 &\ll \varepsilon &\ll \varepsilon_c, & \omega &\gg L\omega_0^2/(\varepsilon_c/\varepsilon)^{2/3}; \\ \varepsilon &\gg \varepsilon_c, & \omega &\gg L\omega_0^2 \varepsilon^2/\varepsilon_c^2; \end{aligned} \right\} \quad (20.86)$$

первый из критериев относится к границе областей  $MS$  и  $IR$ , второй — к границе областей  $MS$  и  $P$ , третий — к границе областей  $MS$  и  $A$ ;

4) область поглощения ( $A$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c^2 / L\omega_0^2 \gg \varepsilon \gg \varepsilon_c, \quad L\omega_0^2 \ll \omega \ll L\omega_0^2 \varepsilon^2 / \varepsilon_c^2; \\ \varepsilon \gg \varepsilon_c^2 / L\omega_0^2, \quad \omega \gg L\omega_0^2; \end{aligned} \right\} \quad (20.87)$$

первый из критериев относится к границе областей  $MS$  и  $A$ , второй — к границе областей  $P$  и  $A$ .

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР  
ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

§ 21. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ МЮОН-ЭЛЕКТРОННОМ  
СОУДАРЕНИИ

21.1. Испускание фотона мюоном. В § 16—18 было исследовано тормозное излучение частицы при рассеянии на кулоновском центре (на тяжелой частице, когда масса последней  $M \rightarrow \infty$ ). Здесь рассмотрим противоположный случай излучения при столкновении тяжелой частицы (для определенности мюон с мас-

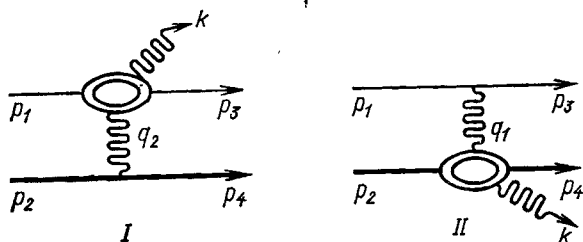


Рис. 45. Блочные диаграммы тормозного излучения при мюон-электронном соударении.

сой  $m$ ) с покоящейся легкой частицей (электрон с  $m_e=1$ ) [44, 45]. В низшем порядке теории возмущений этот процесс представляется двумя блочными диаграммами (рис. 45), где использованы «блоки излучения» рис. 21. Обозначим  $p_1$  ( $p_3$ ) импульс начального (конечного) электрона;  $p_2$  ( $p_4$ ) — импульс начального (конечного) мюона;  $k$ ,  $e_\lambda$  — импульс и поляризацию излученного фотона;  $\Delta_1^2 = -q_1^2 = -(p_1 - p_3)^2$ ;  $\Delta_2^2 = -q_2^2 = -(p_2 - p_4)^2$ .

В конечном счете будем вычислять спектр тормозного излучения, т. е. сечение, проинтегрированное по всем переменным, кроме частоты, в системе покоя электрона, причем мюон в этой системе является ультрарелятивистским ( $\epsilon \gg m$ , в ковариантной форме  $p_1 p_2 \gg m$ ). Обозначая вклады диаграмм, на которых излучает электрон (мюон) через  $d\sigma_e$  ( $d\sigma_\mu$ ) и интерференционный член  $d\sigma_{e\mu}$ , имеем для сечения процесса

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\mu + d\sigma_{e\mu}. \quad (21.1)$$



В соответствии с правилами диаграммной техники (раздел 5.7) матричный элемент диаграмм, на которых излучает мюон, есть

$$M = - [i e^3 / (2\pi)^{7/2}] [m / \sqrt{2\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}] \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \times \\ \times u(p_1) \bar{u}(p_4) [\gamma^\mu \{(\hat{p}_2 - \hat{k} + m) / [(p_2 - k)^2 - m^2]\} \gamma^\nu + \\ + \gamma^\nu \{(\hat{p}_4 + \hat{k} + m) / [(p_4 + k)^2 - m^2]\} \gamma^\mu] u(p_2) e_\nu / \Delta_1^2. \quad (21.2)$$

После суммирования и усреднения по поляризациям частиц, которые выполняются стандартным образом (см. раздел 5.8),  $d\sigma_\mu$  можно представить в виде

$$d\sigma_\mu = -g_{\rho\sigma} (1/4) J_{\mu\nu}^{(1/2)}(p_1, p_3) (1/4) K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}(p_2, p_4, q_1, k) \times \\ \times [\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) / (2\pi)^5 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^2}] \times \\ \times (1/\Delta_1^4) (d^3 p_3 / 2\varepsilon_3) (d^3 p_4 / 2\varepsilon_4) (d^3 k / 2\omega). \quad (21.3)$$

Здесь  $J_{\mu\nu}^{(1/2)}$  — токовый тензор спинорной частицы (электрона) (7.31):

$$J_{\mu\nu}^{(1/2)}(p_1, p_3) / 4 = e^2 \text{Sp} [(1 + \hat{p}_1) \gamma_\mu (1 + \hat{p}_3) \gamma_\nu] / 4 = \\ = e^2 (2p_{1\mu} p_{1\nu} - \Delta_1^2 g_{\mu\nu} / 2 - p_{1\mu} q_{1\nu} - p_{1\nu} q_{1\mu}) / 2. \quad (21.4)$$

$K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}$  — комптоновский тензор спинорной частицы (мюона) (17.35), причем один из фотонов ( $q_1$ ) — тяжелый. После суммирования по поляризациям фотона (свертка с  $g_{\rho\sigma}$ ) этот тензор может быть записан в виде:

$$-g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma} / 4 = e^4 \{ -(1/\kappa_4^2) \{ g^{\mu\nu} [-m^2 \Delta_1^2 / 2 + \kappa_2 \kappa_4] + \\ + m^2 (2p_{2\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} q_{1\nu} + q_{1\mu} p_{2\nu}) - (1/\kappa_2^2) \{ g^{\mu\nu} [-m^2 \Delta_1^2 / 2 + \\ + \kappa_2 \kappa_4] + m^2 [2(p_2 - k)_\mu (p_2 - k)_\nu + (p_2 - k)_\mu q_{1\nu} + \\ + (p_2 - k)_\nu q_{1\mu}] \} + (1/\kappa_2 \kappa_4) \{ -g^{\mu\nu} \Delta_1^2 (p_2 p_4) + (2m^2 + \Delta_1^2) \times \\ \times [p_{2\mu} p_{2\nu} + (p_2 - k)_\mu (p_2 - k)_\nu] - 2m^2 k_\mu k_\nu + \\ + (p_{2\mu} q_{1\nu} + p_{2\nu} q_{1\mu}) (\kappa_4 + m^2 + \Delta_1^2 / 2) + [(p_2 - k)_\mu q_{1\nu} + \\ + (p_2 - k)_\nu q_{1\mu}] (\kappa_2 + m^2 + \Delta_1^2 / 2) + 2\kappa_2 q_{1\mu} q_{1\nu} \} \}, \quad (21.5)$$

где введены обозначения

$$\kappa_i = k p_i. \quad (21.6)$$

Заметим, что члены с  $\kappa_4^2$  в знаменателе получаются из членов с  $\kappa_2^2$  в знаменателе заменой  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ , члены с  $\kappa_2 \kappa_4$  в знаменателе симметричны относительно этой замены.

Сворачивая тензоры в (21.3) и выражая все скалярные произведения через пять независимых, в качестве которых удобно выбрать  $p_1 p_2 = v$ ,  $\kappa_1 = k p_1 = \omega$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4$ ,  $\Delta_1^2$ , получаем сечение излучения мюоном, выраженное через независимые переменные. Удобно перейти к этим же переменным в выражении для фазового объема [см. Приложение Г, вывод (Г.37)]:

$$\int \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) (d^3 p_3 / 2\varepsilon_3) (d^3 p_4 / 2\varepsilon_4) (d^3 k / 2\omega) = \\ = [\pi/4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^2}] \int d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_4 d\Delta_1^2 / \sqrt{-S(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \quad (21.7)$$

где  $S$  выражается  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4$ ,  $\Delta_1^2$  и  $v = p_1 p_2$  и ее можно записать как квадратическую функцию по любой из этих переменных. Представим (Г.39):

$$S = Q_i \kappa_i^2 - 2\mathcal{P}_i \kappa_i + R_i, \quad (21.8)$$

где  $i = 1, 2, 4$  (нет суммирования);  $Q_i$ ,  $\mathcal{P}_i$ ,  $R_i$  не зависят от  $\kappa_i$ .

Чтобы получить спектр, необходимо провести трехкратное интегрирование по  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4$ ,  $\Delta_1^2$ . Если интересоваться только спектром, то порядок интегрирования можно выбирать, руководствуясь лишь соображениями удобства, по-разному в отдельных членах  $d\sigma_\mu$ . Кроме спектра представляют интерес и другие характеристики процесса, например угловое распределение фотонов (дифференциал  $d\kappa_1 d\kappa_2 = \omega p d\omega d \cos \vartheta$ ,  $\vartheta$ —угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_2$  в системе, где электрон покоится), распределение по энергиям вторичных электронов (дифференциал  $d\kappa_1 d\Delta_1^2 = 2 d\omega d\varepsilon_3$ ). Проведем вычисления для последнего случая, т. е. проинтегрируем сначала по  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4$  (в произвольном порядке) при фиксированной величине  $\Delta_1^2$ .

Как показано в Приложении Г, первое интегрирование по  $\kappa_2$  (или  $\kappa_4$ ) производится между корнями уравнения  $S = 0$  с помощью формул [см. (Г.40), (Г.41)]:

$$\left. \begin{aligned} I_i^{(n)} &= \int \kappa_i^n d\kappa_i / \sqrt{-S}; \\ I_i^{(0)} &= \pi/Q_i^{1/2}; \quad I_i^{(1)} = \pi\mathcal{P}_i/Q_i^{3/2}; \\ I_i^{(-1)} &= \pi/R_i^{1/2}; \quad I_i^{(-2)} = \pi\mathcal{P}_i/R_i^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

Заметим, что после выполнения свертки в формуле для сечения (21.3) возникают только приведенные выражения.

Явное представление функций  $Q_i$ ,  $\mathcal{P}_i$ ,  $R_i$  для  $i = 4$  дается формулой (Г.45), где следует положить  $m_1^2 = 1$ ,  $m_2^2 = m^2$ ,  $v = (p_1 p_2) = \varepsilon$ ;  $k^2 = 0$ ,  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ , в результате получаем:

$$Q_4 = (v - \kappa_1)^2 - m^2 + 2\kappa_2; \quad \mathcal{P}_4 = \kappa_2 [v(v - \kappa_1) + \kappa_2 - m^2] - \\ - \Delta_1^2 [\kappa_2(v + \kappa_1 + 1) - \kappa_1(v - \kappa_1 + m^2)]/2; \\ R_4 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 \Delta_1^4/4 - \Delta_1^2 (\kappa_1 + \kappa_2) (\kappa_2 v - \kappa_1 m^2) + \kappa_2^2 (v^2 - m^2). \quad (21.10)$$

Учитывая, что  $S = Q_4 \kappa_4^2 - 2\mathcal{P}_4 \kappa_4 + R_4$ , можно перегруппировать члены к виду  $S = Q_2 \kappa_2^2 - 2\mathcal{P}_2 \kappa_2 + R_2$ ; отметим, что  $Q_2, \mathcal{P}_2, R_2$  получаются из  $Q_4, -\mathcal{P}_4, R_4$  заменой  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ .

Рассмотрим области интегрирования. Если интегрирование ведется сначала по  $\kappa_4$ , то необходимо установить область изменения  $(\kappa_2, \Delta_1^2)$ . Ее можно найти из кинематических условий [см. (Г.46)]

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } |\cos \widehat{p_1 k}| &\leq 1 \text{ (система } p_1 + p_2 = 0); \\ \text{б) } |\cos \widehat{p_1 p_3}| &\leq 1 \text{ (система } p_1 + p_2 - k = 0). \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

Выразив эти косинусы через инварианты [ср. (Г.44)], получим уравнения для границы области (рис. 46):

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \kappa_2^2 - 2\omega \varepsilon \kappa_2 + \omega^2 m^2 &= 0; \\ \text{б) } \kappa_2^2 + \kappa_2 \Delta_1^2 (\varepsilon - \omega - 1 - \Delta_1^2/2) - \Delta_1^2 [(\varepsilon - \omega)^2 - \\ - m^2 - \Delta_1^2 (2(\varepsilon - \omega) + m^2 + 1)/4] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

где мы учли, что в системе, где электрон покоится,  $\kappa_1 = \omega$ ,  $\nu = \varepsilon$ . Взаимное расположение граничных линий (а) и (б) меняется в зависимости от частоты фотона. Частота

$$\omega^* = (\varepsilon - m)/(\varepsilon + p + 1) \approx 1/2, \quad (21.13)$$

где  $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$ , является граничной; при этой частоте прямая  $\kappa_2 = \omega(\varepsilon + p)$  касается кривой (б). При  $\omega < \omega^*$  эти линии пере-

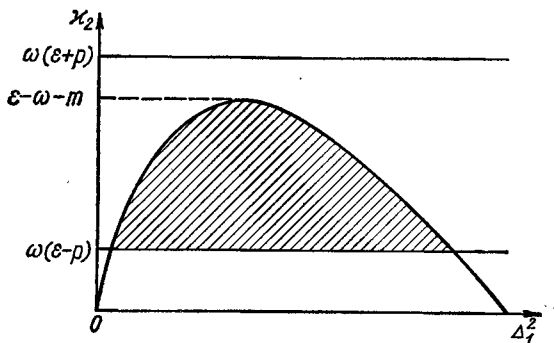


Рис. 46. Область изменения переменных  $\kappa_2, \Delta_1^2$  при  $\omega > \omega^*$ .

секаются, а при  $\omega > \omega^*$  прямая лежит выше кривой (б). Поскольку прямая  $\kappa_2 = \omega(\varepsilon + p)$  соответствует кинематической ситуации [см. (21.11)], когда фотон вылетает против движения начального мюона, заключаем, что фотоны с энергией  $\omega > \omega^*$  не могут испускаться против движения начального мюона. Смысл этого легко понять, если учесть, что  $\omega^*$  — это максимальная частота фотона, который испускается в Ц-системе мюона и электрона в направлении

движения электрона, пересчитанная в систему покоя электрона.

Если же мы сначала проинтегрируем по  $\kappa_2$ , то необходимо установить область изменения переменных  $\kappa_4, \Delta_1^2$ . Ее также можно найти из кинематических условий [см. (Г.49)]:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad |\cos \widehat{p_1 k}| &\leq 1 \text{ (система } p_1 + p_2 - p_3 = 0); \\ (z) \quad |\cos \widehat{p_1 p_3}| &\leq 1 \text{ (система } p_1 + p_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (21.14)$$

Выразив косинусы через инварианты [ср. Г.44)], получим (рис. 47):

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \kappa_4^2 - 2\omega\kappa_4(\varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2) + \omega^2 m^2 &= 0; \\ (z) \quad (\Delta_1^4/4)(2\varepsilon + m^2 + 1) + \Delta_1^2(-p^2 + \kappa_4(\varepsilon + 1)) + \kappa_4^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.15)$$

При  $\omega > \omega^*$  (21.13) верхняя ветвь гиперболы (a) лежит выше гиперболы (z). Необходимо определить еще точки пересечения граничных кривых для обоих рассмотренных случаев, для чего решим системы уравнений (21.12) или (21.15). Заметим, однако, что точки пересечения граничных кривых соответствуют таким кинематическим ситуациям, когда все вектора импульсов коллинеарны [см. (21.11), (21.14)] и, следовательно, величина  $\Delta_1^2$  в точках пересечения будет

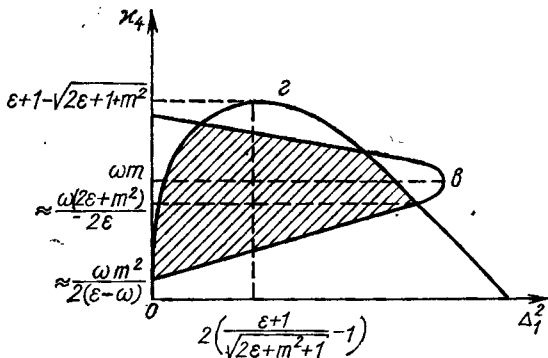


Рис. 47. Область изменения переменных  $\kappa_4, \Delta_1^2$  при  $\omega < \omega^*$ .

одна и та же для обоих случаев. Поскольку систему (21.12) решать гораздо удобнее, то можем найти из нее  $\Delta_1^2$ , а затем определить  $\kappa_4$  из любого уравнения (21.15).

Можно поступить и другим образом — найти  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$  для кинематических ситуаций, соответствующих точкам пересечения граничных кривых непосредственно из законов сохранения, которые выглядят так:

$$\varepsilon + 1 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \omega; \quad p = p_3 + p_4 \pm \omega, \quad (21.16)$$

где  $p = |\mathbf{p}_2|$ . Заметим, что  $p_3 > 0$ ,  $p_4 > 0$  (против направления  $\mathbf{p}_2$  не могут лететь ни мюон, ни электрон). Эта система решается элементарно, и получаем для знака (+):

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= [1/e_1 (e_2 - 2\omega)] [(\varepsilon - \omega + 1)(\varepsilon + m^2 - \omega e_1) \pm (p - \omega)g]; \\ p_4 &= [1/e_1 (e_2 - 2\omega)] [(p - \omega)(\varepsilon + m^2 - \omega e_1) \pm (\varepsilon - \omega + 1)g]; \\ \varepsilon_3 &= [1/e_1 (e_2 - 2\omega)] [(\varepsilon - \omega + 1)(\varepsilon + 1 - \omega e_1) \pm (p - \omega)g]; \\ p_3 &= [1/e_1 (e_2 - 2\omega)] [(p - \omega)(\varepsilon + 1 - \omega e_1) \pm (\varepsilon + 1 - \omega)g], \end{aligned} \quad (21.17)$$

где  $e_1 = \varepsilon - p + 1$ ;  $e_2 = \varepsilon + p + 1$ ;  $g = \sqrt{p^2 - 2\varepsilon\omega e_1 + \omega^2 e_1^2}$ .

Решения для знака (—) перед  $\omega$  получаются из (21.17) заменой  $p \rightarrow -p$ . Как мы видим, при фиксированном знаке и величине  $\omega$  есть два решения для конечных энергий электрона и мюона. Знак (—) соответствует тому, что фотон летит против  $\mathbf{p}_2$ , физические решения существуют только при  $\omega < \omega^*$  (21.13) (при  $\omega = \omega^*$  оба решения сливаются). Для знака (+) в (21.16), когда фотон летит вперед, решения существуют при  $\omega \leq \omega_m$ , где

$$\omega_m = (\varepsilon - m)/(\varepsilon - p + 1) \quad (21.18)$$

максимальная энергия фотона, который может быть излучен мюоном. При  $\omega = \omega_m$  решения сливаются. Из (21.17) легко найти координаты точек пересечения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^2 &= -2(p_1 - p_3)^2 = 2(p_1 p_3) - 2 = 2(\varepsilon_3 - 1); \\ \kappa_4 &= kp_4 = \omega(\varepsilon_4 \pm p_4); \quad \kappa_2 = kp_2 = \omega(\varepsilon \pm p). \end{aligned} \right\} \quad (21.19)$$

Если вычислять сечение, дифференциальное по  $d\Delta_1^2$ , то из вида областей следует, что при  $\omega < \omega^*$  второе интегрирование (по  $\kappa_2$  или  $\kappa_4$ ) будет проводиться в разных (аналитически) пределах в различных областях  $\Delta_1^2$ , поэтому сечение  $d\sigma_\mu/d\Delta_1^2$  не будет даваться единым аналитическим выражением. При  $\omega > \omega^*$  имеет место обратная ситуация.

Следует выбирать наиболее рациональный способ вычисления, учитывая особенности областей интегрирования и входящих выражений. Для сечения  $d\sigma/dx_1 d\Delta_1^2$  имеет смысл выбирать порядок интегрирования так, чтобы в формулах (21.9) не возникали громоздкие выражения с  $\mathcal{P}_i$  в числителе, поскольку сами свойства области изменения переменных не выделяют какого-либо определенного порядка интегрирования по  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4^*$ . Вычисления существенно облегчаются, если воспользоваться свойствами симметрии. Как уже отмечалось, выражение (21.5) симметрично относительно замены

\* Если не интересоваться  $d\sigma/dx_1 d\Delta_1^2$ , то область  $\kappa_2 \Delta_1^2$  предпочтительнее, так как единым образом можно провести интегрирование по  $\Delta_1^2$  при всех  $\kappa_2$ .

$p_2 \leftrightarrow -p_4$ , эта симметрия сохраняется и в выражении для сечения (21.3), которое после свертки тензоров с учетом (21.7) имеет вид

$$d\sigma_\mu = \left[ \alpha^3/\pi \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^2} \right] \left[ dx_1 dx_2 dx_4 d\Delta_1^2/\Delta_1^4 \sqrt{-S} \right] (A + A'), \quad (21.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= a_1/\kappa_2^2 + a_2/\kappa_2 \kappa_4 + a_3 \kappa_2/\kappa_4 + a_4/\kappa_2; & A' &= A(p_2 \leftrightarrow -p_4); \\ a_1 &= m^2 \{ -2(\varepsilon - \omega)^2 + \Delta_1^2 [2(\varepsilon - \omega) + m^2 + 1]/2 - \Delta_1^4/4 \}; \\ a_2 &= 2m^2 \varepsilon (\varepsilon - \omega) + \Delta_1^2 [\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2 - \\ & - m^2 (2\varepsilon - \omega + m^2 + 1)]/2 - \Delta_1^4 (2\varepsilon - \omega + 1)/4 + \Delta_1^6/8; \\ a_3 &= -(1 - \Delta_1^2/2); & a_4 &= -\Delta_1^2 (\varepsilon + m^2 + 1 - \Delta_1^2/2). \end{aligned} \right\} \quad (21.21)$$

Замена  $p_2 \leftrightarrow -p_4$  означает здесь  $\kappa_2 \leftrightarrow -\kappa_4$ ,  $\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon_4 = -(\varepsilon + 1 - \omega - \varepsilon_3) = -(\varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2)$ , так как  $\Delta_1^2 = 2(\varepsilon_3 - 1)$  в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ . Выражение для  $S$  также симметрично относительно замены  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ , как и  $dx_2 dx_4$  (в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $dx_2 dx_4 = = \omega^2 |p_2| |p_4| d\cos(\mathbf{k}p_2) d\cos(\mathbf{k}p_4)$ ) и область изменения  $\kappa_2, \kappa_4$ . Поэтому интеграл по  $dx_2 dx_4$  от  $A'$  получается из интеграла от  $A$  заменой  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ , так что фактически необходимо вычислить интеграл от  $A$ . Проводя первое интегрирование по  $\kappa_4$  с помощью формул (21.9), получаем выражение, содержащее  $I_4^{(0)}$ ,  $I_4^{(-1)}$ , так что необходимо взять только четыре типа интегралов:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \int dx_2/Q_4^{1/2} \kappa_2^2; & f_2 &= \int dx_2/R_4^{1/2} \kappa_2; \\ f_3 &= \int \kappa_2 dx_2/R_4^{1/2}; \\ f_4 &= \int dx_2/Q_4^{1/2} \kappa_2, \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

где  $Q_4, R_4$  даются формулами (21.10). Для вычисления этих интегралов необходимы значения  $Q_4, R_4$  на граничных кривых, для чего в (21.10) следует подставить решение уравнений (21.12). Имеется, однако, более простой способ. Интеграл  $I_4^{(n)}$  можно записать как [см. (Г.42) Приложения Г]

$$\begin{aligned} I_4^{(n)} &= \int \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \kappa_4^n (d^3 p_3/\varepsilon_3) \times \\ &\times (d^3 p_4/\varepsilon_4) \delta(\Delta_1^2 + (p_1 - p_3)^2). \end{aligned} \quad (21.23)$$

Условие границы (а) (21.11) (со знаком равенства) означает, что в системе  $\mathbf{p}_1 = 0$  фотон летит по или против  $\mathbf{p}_2$ , а условие (21.11), (б) означает в той же системе, что вектор  $\mathbf{p}_3$  направлен по  $\mathbf{p}_4$  (против  $\mathbf{p}_4$  он направлен быть не может из законов сохранения). Воспользовавшись этими соображениями, просто провести вычис-

ления; например, в системе  $p_1 = 0$  для  $I_4^{(0)}$  найдем

$$I_4^{(0)} = \pi/Q_4^{1/2} = 2\pi \int \delta(\varepsilon + 1 - \omega - \varepsilon_3 - \\ - \sqrt{p_3^2 + m^2 + (p_2 - k)^2 - 2|p_3||p_2 - k| \cos \vartheta}) \times \\ \times (|p_3|/\varepsilon_4) d\varepsilon_3 d \cos \vartheta \delta(\Delta_1^2 - 2 + 2\varepsilon_3) = \pi/|p_2 - k| = \pi/|p_3 + p_4|, \quad (21.24)$$

отсюда для границы (21.11), (а) имеем  $Q_4 = (p \pm \omega)^2$ , а для (б)  $Q_4 = (p_3 + p_4)^2$ . Подставляя сюда

$$\varepsilon_3 = 1 + \Delta_1^2/2; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon - \omega + 1 - \varepsilon_3; \quad (21.25)$$

$$p_4 = \sqrt{\varepsilon_4^2 - m^2}; \quad p_3 = \sqrt{\varepsilon_3^2 - 1},$$

получаем  $Q_4$  на границе. Аналогично находятся значения  $R_4$  на границе; в итоге имеем

$$\left. \begin{aligned} Q_4(a) &= (p \pm \omega)^2; \quad Q_4(b) = \left[ \sqrt{(\varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2)^2 - m^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\Delta_1^2(1 + \Delta_1^2/4)} \right]^2; \\ R_4(a) &= \omega^2 [p(\varepsilon - \Delta_1^2/2) \pm (p^2 - \Delta_1^2(\varepsilon + 1)/2)]^2; \\ R_4(b) &= \left\{ \sqrt{\Delta_1^2(1 + \Delta_1^2/4)} [p^2 - \omega\varepsilon - \Delta_1^2(2\varepsilon - \omega)/2 + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_1^4/4] - (\Delta_1^2/2)(\varepsilon - 1 - \Delta_1^2/2) \sqrt{(\varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2)^2 - m^2} \right\}^2. \end{aligned} \right\} \quad (21.26)$$

Знак (+) соответствует верхней ветви граничной прямой (а). Здесь рассмотрим случай  $\omega > \omega^*$ , тогда во всем интервале  $\Delta_1^2$  интегрирование по  $\kappa_2$  идет от нижней прямой (а) до кривой (б). Подставляя в интегралы (21.22) значения (21.26), получаем

$$f_1 = [-L_1/E + (\varepsilon + p)(p - \omega)/\omega m^2 - \{p_3[p_4^2 + \Delta_1^2(\varepsilon_4 - 1)/2] + \\ + (\Delta_1^2/2)(\varepsilon - \omega + 1)p_4\}/\Delta_1^2 [p_4^2 + \Delta_1^2(2\varepsilon_4 - m^2 - 1)/4]/E^2; \\ f_3 = \{(\omega\Delta_1^2/2)[(\varepsilon - m^2 - \Delta_1^2/2)/\Omega]L_3 + p_3(p_4^2 + \omega\varepsilon_4) - \\ - \Delta_1^2(\varepsilon - 1 - \Delta_1^2/2)p_4/2 - \omega p(\varepsilon - \Delta_1^2/2) + \\ + \omega [p^2 - \Delta_1^2(\varepsilon + 1)/2]/\Omega^2; \\ f_2 = L_2/\omega D; \quad f_4 = L_1/E, \quad (21.27)$$

где

$$L_2 = \pi \{ [2pD + \Delta_1^2(\varepsilon + m^2)] [2p_4D + \Delta_1^2(\varepsilon_4 - m^2)] \times \\ \times [D + m^2 + \Delta_1^2/2]/4m^4 [\omega p_3D + \\ + \Delta_1^2(\varepsilon\varepsilon_4 - m^2 - (\Delta_1^2/4)(m^2 - \omega + 1))] \};$$

$$L_1 = \ln [(p_4 + p_3 - E)(p - \omega + E)/(p_4 + p_3 + E)(p - \omega - E)];$$

$$L_3 = -L_1 \left( \begin{matrix} p \leftrightarrow -p_4 \\ E \rightarrow \Omega \end{matrix} \right); E^2 = (\varepsilon - \omega)^2 - m^2; \Omega^2 = (\varepsilon - \Delta_1^2/2)^2 - m^2; (21.28)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2; D^2 = \Delta_1^2(m^2 + \Delta_1^2/2);$$

$$p_3^2 = (1 + \Delta_1^2/2)\Delta_1^2; p_4^2 = \varepsilon_4^2 - m^2.$$

Сечение излучения фотона мюоном при столкновении с покоящимся электроном (21.20) с учетом (21.21), (21.27), (21.28) можно записать в виде

$$d\sigma_\mu/d\Delta_1^2 d\omega = (\alpha^3/p^2 \Delta_1^4) \left( \sum_{i=1}^4 a_i f_i + \text{члены } (p_2 \leftrightarrow -p_4) \right). (21.29)$$

Замена  $p_2 \leftrightarrow -p_4$  означает, что  $\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon_4 = -(\varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2)$ ,  $p \leftrightarrow -p_4 = -\sqrt{\varepsilon_4^2 - m^2}$ .

Все полученные выше результаты являются точными и могут быть использованы для анализа процесса излучения при столкновении частиц с любыми массами и произвольными энергиями.

Чтобы определить спектр излученных фотонов, необходимо проинтегрировать (21.29) по  $\Delta_1^2$  в пределах (21.19), (21.17). Рассмотрим область  $\omega_m - \omega \gg \omega_m m/\varepsilon$  [величина  $\omega_m$  определена (21.18)], т. е. не будем касаться пока конца спектра. Тогда

$$\Delta_{1\text{мин}}^2 \approx \omega^2 m^4 / 2\varepsilon (2\varepsilon + m^2) (\varepsilon - \omega) (\omega_m - \omega); (21.30)$$

$$\Delta_{1\text{макс}}^2 \approx 2(\omega_m - \omega).$$

Вся задача решается в приближении  $\varepsilon \gg m$ , однако если учесть, что  $m \gg 1$ , то соотношение  $\varepsilon$  и  $m^2$  не фиксировано, малыми параметрами в задаче являются  $1/m$ ,  $1/\varepsilon$ ,  $m/\varepsilon$  (но не  $m^2/\varepsilon$ ).

Поскольку интегрирование по  $\Delta_1^2$  приводит к весьма громоздким выражениям, начнем с анализа сечения (21.29), исходя из того, что главный член в сечении  $d\sigma_\mu/d\omega$  имеет вид  $\alpha^3/m^2 \omega$  [см., например, приближение мягких фотонов (6.47)]. Обратим внимание на специфическую особенность члена

$$a_3 f_3 = (1/\pi) \int (d\kappa_2 d\kappa_4 / \sqrt{-S}) a_3 \kappa_2 / \kappa_4, (21.31)$$

состоящую в том, что этот член дает вклад в спектр  $\sim 1/\omega$ , хотя в дифференциальном виде он не имеет полюса при  $\omega \rightarrow 0$  (см. раздел 17.1). Член  $a_4 f_4$  дает вклад  $\sim \alpha^3/\varepsilon^2$  [см. (21.21), (21.27)]. Его следует оставлять при  $\varepsilon \lesssim m^2$ , так как тогда  $1/\varepsilon^2 \sim 1/m^2 \omega_m$ , и отбрасывать при  $\varepsilon \gg m^2$ . В членах  $a_1 f_1$  и  $a_2 f_2$  имеются растущие



с энергией члены с «неправильным поведением» вида  $\alpha^3 \varepsilon^2 / \omega^3 m^6$  (такая же ситуация имеется и в сечении тормозного излучения на кулоновском центре), вклады этих членов (с учетом замены  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ )

$$2m^2 \{ -(\varepsilon - \omega)^2 / \kappa_2^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - \omega) / \kappa_2 \kappa_4 - \varepsilon^2 / \kappa_4^2 \}$$

взаимно сокращаются и остается вклад нормального типа.

Из (21.29), (21.30) следует, что при  $\varepsilon/m^2 \lesssim 1$  существенна вся область интегрирования по  $\Delta_1^2$ , а при  $\varepsilon/m^2 \gg 1$  (мюон является ультрарелятивистским в Ц-системе электрона и мюона) вклад дает область  $\Delta_1^2$  до  $\Delta_1^2 \sim m^2$  ( $\Delta_1^2_{\text{макс}} \sim \varepsilon$ ). Максимальный угол при упругом рассеянии мюона на электроне  $\cos \vartheta_{\text{макс}} = \sqrt{m^2 - 1}/m$ , т. е.  $\vartheta_{\text{макс}} \approx 1/m$ ; при излучении фотона мюоном  $\vartheta_{\text{макс}}$  только уменьшается (при  $\varepsilon/m^2 \lesssim 1$   $\vartheta_{\text{макс}} \lesssim m/\varepsilon$ , при  $\varepsilon/m^2 \gg 1$   $\vartheta_{\text{макс}} \gg m/\varepsilon$ ), причем  $\Delta_1^2 \sim m^2$  соответствует углу рассеяния  $\sim m/\varepsilon$  (это означает, что углы рассеяния  $\vartheta \gg m/\varepsilon$  не дают вклада в излучение). В случае  $2\varepsilon/m^2 = \xi \gg 1$ ,  $\varepsilon - \omega \gg m^2$  формула (21.29) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \varepsilon d\sigma_\mu/dx = \alpha^3 \int_{\tau_{\text{мин}}}^{\tau_{\text{макс}}} (d\tau/\tau^2) \{ & [4(1-x)/x] \Phi(\xi\tau/4) + \\ & + [4x\tau/\sqrt{\tau(\tau+4/\xi)}] \ln[\sqrt{\xi\tau/4} + \sqrt{1+\xi\tau/4}] + \\ & + x^3/2\varepsilon\xi(1-x)^2 + \sqrt{2\tau/\varepsilon} [2x^2/3\varepsilon\xi^2(1-x)^2\tau - \\ & - 1/(1-x) - (1-x)] + [x/\varepsilon\xi(1-x)] \ln \tau/\tau_{\text{мин}} \}, \end{aligned} \quad (21.32)$$

где  $\xi = 2\varepsilon/m^2$ ,  $x = \omega/\varepsilon$ ,  $\tau = \Delta_1^2/2\varepsilon$ ,  $\Phi(x^2)$  дается формулой (6.30), нижний предел интегрирования  $\tau_{\text{мин}} = x^2/2\varepsilon\xi^2(1-x)^2$ , а верхний предел можно положить  $\tau_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ , поскольку все интегралы сходятся при  $\tau \rightarrow \infty$  и основной вклад дает область  $\tau \lesssim 1/\xi \ll \tau_{\text{макс}}$  (как в задаче об излучении мягких фотонов, см. § 6).

Проводя интегрирование в (21.29), имеем:

$$\begin{aligned} (\varepsilon/\alpha^3)(d\sigma_\mu/dx) = (2/\rho) \{ & (1-\rho) [1-x + 1/(1-x) - 2/3] (1+\rho/2) + \\ & + 5\rho(1+4\rho/5)/3 + \rho [1-x + 1/(1-x) + 2\rho] \ln \rho \} \times \\ \times \ln [ & 2\varepsilon(x_0-x)/mx] + [(1-\rho)/\rho] [-(1-x + 1/(1-x) - 2/3) \times \\ \times ( & 1+4/\xi^2(1-x)) - 16\rho/3 + 8\rho^2/3 - 4/3(1-x) + 4 + \\ + x^2/2( & 1-x)^2]/\xi - 3(1-x_0) - y/x] - [2-x + x/2(1-x) + \\ + 2\rho + & y(x/2(1-x) - 1 - y_0)/x] \ln \rho + \{ 2/x - 3/2(1-x) + \\ + [2/x - & (x+1)/2(1-x)^2]/\xi + (8/3\xi^2) \times \\ \times [2/x + & 1/(1-x) - x/(1-x)^2] + (1-x)(1-x_0)/x + \\ + (y/x) [ & 1/x + x_0(1-x) + 1/[2x_0(1-x)] - y_0] \} \ln [(1-x)/(1-x_0)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1/x) (x_0 - x - y_0) \ln (x_0/x) - (1 + 2/\xi)/(1 - x) \times \\
& \times [\ln \rho \ln \{(x_0 - x)^2/[xy_0(1 - x)^2]\} + 2f(\rho) + f(y_0) - f(y) - \pi^2/3] - \\
& - [(2 - x + 2/\xi)/x] [\ln(y/x) \ln \rho - \ln(x/x_0) \ln(1 - x_0) + \\
& + f(x_0) - f(x) - f(y_0) + f(y)] + (1 - x + 2/\xi) \times \\
& \times \{2 \ln \rho \ln [(1 - x)/(x_0 - x)] - 2f(-(1 - x)/x) + \\
& + 2f(-1/\xi) - 2f(\rho) + \pi^2/3\}, \tag{21.33}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\xi &= 2\varepsilon/m^2; \quad x = \omega/\varepsilon; \quad \rho = x/[\xi(1 - x)]; \\
x_0 &= 1/(\varepsilon - \rho + 1) \approx \xi/(1 + \xi) \approx \omega_m/\varepsilon; \\
y &= x(1 - x_0)/(1 - xx_0); \quad y_0 = x_0(1 - x)/(1 - xx_0); \\
f(x) &= - \int_0^x \ln [|1 - t|/t] dt. \tag{21.34}
\end{aligned}$$

В предельном случае  $\xi \gg 1$ , и для частот  $\varepsilon - \omega \gg m^2$  сечение  $d\sigma_\mu$  приобретает вид формулы для излучения на кулоновском центре (17.30), что можно получить непосредственно из (21.32):

$$\begin{aligned}
d\sigma_\mu/d\omega &= (4\alpha^3/m^2 \omega) (1 - x) [1 - x + 1/(1 - x) - 2/3] \times \\
&\times (\ln [2\varepsilon(1 - x)/mx] - 1/2). \tag{21.35}
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в знаменателе выражения для сечения стоит квадрат массы излучающей частицы, это обстоятельство является универсальным. Переход к формуле (21.35) отражает тот факт, что при  $\xi \gg 1$  разложение в (21.29) ведется фактически по  $1/\varepsilon\xi$ ,  $1/\xi$  (но не  $\xi/\varepsilon$ ,  $1/\varepsilon$ ), в случае же рассеяния мюона на кулоновском поле  $1/\varepsilon\xi = m^2/2\varepsilon^2$ ;  $1/\xi = 0$  (дело в том, что  $\xi$  содержит массу электрона  $m_e$ ,  $\xi = 2\varepsilon m_e/m^2$ , при переходе к кулоновскому полю  $m_e \rightarrow \infty$ ). С физической точки зрения это означает: 1) отдача (передача энергии электрону) не существенна; 2) спиновые эффекты пренебрежимо малы. В самом деле, в выражении для тока (21.4) вклад в (21.3) дают только члены без  $q_\mu$  (ибо  $q_\mu K^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ); если рассматривается рассеяние на кулоновском поле, то масса частицы  $1 m_e \rightarrow \infty$  (см. раздел 5.11), тогда в  $J_{\mu\nu}$  остается первый член, а в  $\delta$ -функции появляется  $\delta(q_0)$ . В случае же  $\xi \gg 1$  основной вклад дают углы рассеяния  $\lesssim m/\varepsilon$  ( $\Delta_1^2 \lesssim m^2$ ), но тогда свертка  $g_{\mu\nu}$  с  $K^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\rho\sigma}$  не может дать больших величин типа  $\rho_1 \rho_2 \gg m^2$ , и по этой причине основной вклад в  $J_{\mu\nu}$  дает первый член, а  $\Delta_1^2/2 = -q_0 \lesssim m^2 \ll \varepsilon$ , т. е. передача энергии не существенна и возникает такая же ситуация как при рассеянии на кулоновском поле. Заметим, что  $\rho_\mu \rho_\nu$  пропорционально токовому тензору скалярной

частицы, следовательно, исчезает зависимость от спина частицы, на которой рассеивается налетающая частица.

Выше были вычислены сечения  $d\sigma_{\mu}/d\Delta_1^2 d\omega$  и  $d\sigma_{\mu}/d\omega$ , т. е. найдены спектр излученных мюоном фотонов и распределение по энергиям электронов отдачи. Обсудим теперь кратко некоторые черты углового распределения излученных фотонов, т. е. сечение  $d\sigma_{\mu}/dx_2 dx_1$ , которое можно получить, если проинтегрировать (21.20) по  $\kappa_4$  с помощью формул (21.9)—(21.10), а затем результат проинтегрировать по  $\Delta_1^2$ . В общем случае  $d\sigma/dx_1 dx_2 \propto 1/\kappa_2^2$ . При  $\xi \lesssim 1$  из (21.12) (а), (б) следует, что при  $\omega \sim \omega_m$  верхний и нижний пределы по  $\kappa_2$  одного порядка, следовательно, вклад дает вся область интегрирования по  $\kappa_2$ . Это означает, что фотоны испускаются с равной интенсивностью во всех кинематически допустимых направлениях. Для понимания этого факта следует учесть, что наибольший кинематически допустимый угол  $\vartheta_c \approx \sqrt{(1 - \omega/\omega_m)}/\omega$ , если  $(1 - \omega/\omega_m) \sim 1$  и  $\omega \sim \omega_m$ , то  $\vartheta_c \sim (m/\varepsilon) \sqrt{1 + \xi}$ . При  $\xi \lesssim 1$  кинематические условия ограничивают предельный угол излучения как раз на характерном угле излучения ультрарелятивистской частицы  $\vartheta \sim m/\varepsilon$ . При  $\xi \gg 1$  вклад дает нижний предел интегрирования по  $\kappa_2$ , а верхний (с точностью до членов  $\sim 1/\xi$ ) можно заменить на  $\infty$ .

Сечение в этом случае при  $\varepsilon - \omega \gg m^2$  выглядит так:

$$d\sigma_{\mu}/dx = \alpha^3 (dx_2/\kappa_2^2) \{ L [2(1-x) + x^2 - 2m^2 x(1-x)/\kappa_2 + \\ + m^4 x^2(1-x)/\kappa_2^2] + (m^4/\kappa_2^2)(1-x) [-3\kappa_2^2/m^4 + \\ + (\kappa_2 x/m^2)(8 + \kappa_2/m^2) - 4x^2] - 1 \}, \quad (21.36)$$

где

$$L = 2 \ln 2\varepsilon(\varepsilon - \omega)/\omega m. \quad (21.37)$$

Подобная ситуация имеет место и при интегрировании в порядке:  $\kappa_2, \Delta_1^2, \kappa_4$ . Тогда при  $\xi \lesssim 1$  и  $\omega \sim \omega_m$  вклад дает вся область интегрирования по  $\kappa_4$ , а при  $\xi \gg 1$  — только нижний предел.

При  $\omega < \omega^*$  спектр излучения также дается формулой (21.33), но она значительно упрощается, так как  $x \lesssim 1/\varepsilon$ . В этом случае верхний предел по  $\kappa_2 \sim 2\varepsilon\omega$ , он в  $4m^2/\varepsilon^2$  раз больше нижнего и потому вклада не дает, т. е. мягкие фотоны могут испускаться под большими углами, но основная часть фотонов испускается внутри угла  $\sim m/\varepsilon$ .

Нами получен спектр при  $\omega_m - \omega \gg \omega_m m/\varepsilon$ , т. е. не рассмотрен конец спектра. Изучим теперь область  $\omega_m - \omega \ll \omega_m(1 - \omega_m/\varepsilon)$ , которая частично перекрывается с первой, поскольку всегда существует интервал  $\omega_m m/\varepsilon \ll \omega_m - \omega \ll \omega_m(1 - \omega_m/\varepsilon)$ . Найдем значение  $\kappa_2, \kappa_4, \Delta_1^2$  в конце спектра. Из (21.17)—(21.19) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2 \approx \omega_m m^2/2\varepsilon; \quad \kappa_4 \approx \omega_m(m^2 + 2\varepsilon)/2\varepsilon; \\ \Delta_1^2 \approx 2\varepsilon m/(m^2 + 2\varepsilon) \approx x_0 m. \end{aligned} \right\} \quad (21.38)$$

Пределы интегрирования по  $\Delta_1^2$

$$\Delta_{1\text{мин}}^2 = \varepsilon (x_0 - x \pm \sqrt{(x_0 - x)^2 - x_0^2 m^2 / \varepsilon^2}), \quad (21.39)$$

г. е. интервал изменения такого же порядка, как сама величина. Интервал же изменения  $\kappa_2$ ,  $\kappa_4$  в конце спектра много меньше этих величин. Учитывая это, можно вычислить  $d\sigma_\mu/d\omega$  следующим образом. В формулах (21.20), (21.21) положим

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \omega_m m^2 / 2\varepsilon = \varepsilon / (1 + \xi); \\ \kappa_4 &= \omega_m (m^2 + 2\varepsilon) / 2\varepsilon \approx \varepsilon; \quad \omega = \varepsilon x_0, \end{aligned} \quad (21.40)$$

и считая, что  $1 \ll \Delta_1^2 \ll \varepsilon / (1 + \xi)$ , произведем отбор главных членов. В результате имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_\mu/d\omega &= (\alpha^3 / \pi p^2) \int [d\kappa_2 d\kappa_4 d\Delta_1^2 / 2\Delta_1^2 \sqrt{-S}] \times \\ &\times [1 - x_0 + 1/(1 - x_0)] = (\alpha^3 \xi / 2p^3) \int (d\kappa_2 d\Delta_1^2 / \Delta_1^2) \times \\ &\times [1 - x_0 + 1/(1 - x_0)] / x_0. \end{aligned} \quad (21.41)$$

Здесь мы провели интегрирование по  $\kappa_4$  и положили  $Q_4^{1/2} \approx \varepsilon (1 - x_0) \approx \varepsilon x_0 / \xi$ . Пределы интегрирования по  $\kappa_2$  при фиксированном  $\Delta_1^2$  могут быть найдены из (21.12):

$$\kappa_{2\text{макс}} - \kappa_{2\text{мин}} = (1/2\Delta_1^2 x_0) (\Delta_{1\text{макс}}^2 - \Delta_1^2) (\Delta_1^2 - \Delta_{1\text{мин}}^2). \quad (21.42)$$

Проводя элементарное интегрирование с учетом (21.39), (21.42), получаем

$$d\sigma_\mu/dx = (\alpha^3 \xi / \varepsilon x_0^2) [1 - x_0 + 1/(1 - x_0)] [(x_0 - x) L_f - z_0], \quad (21.43)$$

где

$$\begin{aligned} L_f &= \ln [\varepsilon (x_0 - x + z_0) / m x_0]; \\ z_0 &= \sqrt{(x_0 - x)^2 - x_0^2 m^2 / \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (21.44)$$

В промежуточной области  $\omega_m m / \varepsilon \ll \omega_m - \omega \ll \omega_m (1 - \omega_m / \varepsilon)$  выражения (21.33), (21.43) сшиваются:

$$\begin{aligned} d\sigma_\mu/dx &= (\alpha^3 \xi / \varepsilon x_0) (1 - x/x_0) [1 - x_0 + 1/(1 - x_0)] \times \\ &\times [\ln [2\varepsilon (x_0 - x) / m x_0] - 1]. \end{aligned} \quad (21.45)$$

21.2. Испускание фотона электроном. Матричный элемент процесса получается из формулы (21.2) заменой  $p_1 \leftrightarrow p_2$ ,  $p_3 \leftrightarrow p_4$ ,  $m_e \leftrightarrow m$ , а сечение  $d\sigma_e$  можно найти из (21.20), (21.21) с помощью этой же замены, причем  $\omega = k p_1 = \kappa_1 \leftrightarrow \kappa_2$ ,

$\kappa_4 \leftrightarrow \kappa_3$ ,  $\Delta_1^2 \leftrightarrow \Delta_2^2$ ,  $m^2 \leftrightarrow m_e^2$  (массу электрона нетрудно восстановить по размерности). Дальнейшее интегрирование можно вести как для случая излучения мюоном, начиная с формул (21.9). Однако продемонстрируем здесь другой подход. Запишем сечение в виде (21.3)

$$d\sigma_e = [1/(2\pi)^5] \left[ -g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_1, p_3, q_2, k) \times \right. \\ \left. \times J^{(1/2)\mu\nu}(p_2, p_4)/\Delta_2^4 16 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^2} \right] (d^3 p_3/2\varepsilon_3) \times \\ \times (d^3 p_4/2\varepsilon_4) (d^3 k/2\omega) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \quad (21.46)$$

и проведем интегрирование в тензорном виде, введя для фиксации частоты фотона  $\delta(\omega - kp_1)$ :

$$8e^4 I^{\mu\nu} = \int g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_3, q_2, k) (d^3 p_3/\varepsilon_3) \times \\ \times (d^3 k/\omega) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \delta(\omega - kp_1). \quad (21.47)$$

Тензор  $I^{\mu\nu}$  зависит от двух векторов  $q_2$  и  $p_1$ . Общий вид его содержит пять скалярных функций [ср. (7.21)], а условие калибровочной инвариантности  $q_{2\mu} I^{\mu\nu} = q_{2\nu} I^{\mu\nu} = 0$  сводит число независимых функций до двух (7.25), а эти последние выражаются через свертки  $I_{\mu\nu}$  с  $g^{\mu\nu}$  и  $p_1^\mu p_1^\nu$  (7.26):

$$I_{\mu\nu} = I_D^0 F_{1\mu\nu} + I_{\rho\sigma} p_1^\rho p_1^\sigma F_{2\mu\nu}, \quad (21.48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2F_{1\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - q_{2\mu} q_{2\nu}/q_2^2 + (q_2^2/[(q_2 p_1)^2 - q_2^2]) \times \\ &\times (p_{1\mu} - q_2 p_{1\nu} q_{2\mu}/q_2^2) (p_{1\nu} - q_2 p_1 q_{2\nu}/q_2^2); \quad 2F_{2\mu\nu} = \\ &= (q_2^2/[(q_2 p_1)^2 - q_2^2]) [g_{\mu\nu} - q_{2\mu} q_{2\nu}/q_2^2 + (3q_2^2/[(q_2 p_1)^2 - q_2^2]) \times \\ &\times (p_{1\mu} - q_2 p_1 q_{2\mu}/q_2^2) (p_{1\nu} - q_2 p_1 q_{2\nu}/q_2^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (21.49)$$

Итак, для определения  $I_{\mu\nu}$  достаточно вычислить интегралы от двух скалярных функций. Сворачивая  $g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_3, q_2, k)$  [(21.5) после выполнения указанных выше замен] и полагая  $\kappa_1 = \omega$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} 8e^4 K_1 &\equiv g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_3, q_2, k) = 8e^4 [\kappa_3/\omega + \\ &+ (1 - 2\omega)(1 - \Delta_2^2/2)/\omega^2 - (2 - 2\omega - \omega^2 + \\ &+ \omega\Delta_2^2 - \Delta_2^4/2)/\kappa_3 \omega + (1 - \Delta_2^2/2)/\kappa_3^2]; \\ 8e^4 K_2 &\equiv p_{1\mu} p_{1\nu} g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_3, q_2, k) = 8e^4 \times \\ &\times [\kappa_3(2 - 3\omega + 2\omega^2)/2\omega^2 + [1 - 4\omega + \omega^2 + \omega^3 + \Delta_2^2 \times \\ &\times (1 - 6\omega - 2\omega^2)/4]/\omega^2 + [-2 + 3\omega + \omega^2/2 + \Delta_2^2(\omega - 3)/2 - \\ &- \Delta_2^4/4]/\kappa_3 \omega + (1 + \Delta_2^2/4)/\kappa_3^2], \end{aligned} \right\} \quad (21.50)$$

где  $\kappa_3 = p_1 q_2 - \Delta_2^2/2$ . Интеграл (21.47) с учетом (21.48) легко взять, поскольку величины  $K_1, K_2$  (21.50) могут быть вынесены за

знак интеграла, а оставшийся интеграл элементарно берется в  $\mathcal{C}$ -системе фотона и электрона ( $\mathbf{p}_3 + \mathbf{k} = 0$ ):

$$I_{\mu}^{\mu} = 2\pi K_1 / \sqrt{Q(\Delta_2)}; \quad I_{\mu\nu} p_1^{\mu} p_1^{\nu} = 2\pi K_2 / \sqrt{Q(\Delta_2)}. \quad (21.51)$$

Перемножив тензоры  $I_{\mu\nu}$  и  $J_{\mu\nu}^{(1/2)}(p_2, p_4)$ , получим сечение излучения фотона электроном в виде

$$d\sigma_e/d\omega = (\alpha^3/2p^2) \int [d\kappa_3 d\Delta_2^2 / \Delta_2^4 \sqrt{Q(\Delta_2)}] \{K_1 [\Delta_2^2 - 2m^2 + [\Delta_2^2/Q(\Delta_2)](2\varepsilon^2 - 2(\kappa_3 + \Delta_2^2/2)\varepsilon - \Delta_2^2/2)] - K_2 \Delta_2^2/Q(\Delta_2) \times \\ \times [\Delta_2^2 - 2m^2 + [3\Delta_2^2/Q(\Delta_2)](2\varepsilon^2 - 2(\kappa_3 + \Delta_2^2/2)\varepsilon - \Delta_2^2/2)]\}. \quad (21.52)$$

Здесь введено обозначение  $Q(\Delta_2) = (\kappa_3 + \Delta_2^2/2)^2 + \Delta_2^2$ , проведена замена переменных  $d^3p_4/\varepsilon_4 = d\Delta_2^2 d\kappa_3 d\varphi/2p$  и выполнено интегрирование по углу  $\varphi$ . Этот же результат можно получить, если в формулах типа (21.20), (21.21) произвести интегрирование по  $\kappa_2$ , пользуясь интегралами типа (21.9), правда, необходим еще интеграл

$$I_i^{(2)} = \pi (3\mathcal{P}_i^2 - Q_i R_i) / 2Q_i^{5/2}.$$

Определим теперь область изменения переменных  $\kappa_3$ ,  $\Delta_2^2$ , пользуясь, как и для (21.11), (21.14), кинематическими условиями, [см. (Г.46) Приложение Г]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } |\cos \widehat{\mathbf{k}\mathbf{p}_1}| \leq 1 \quad (\text{система } \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4 = 0); \\ \text{б) } |\cos \widehat{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_4}| \leq 1 \quad (\text{система } \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0). \end{array} \right\} \quad (21.53)$$

Выразив косинусы через инварианты, получим для границы области (рис. 48):

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \kappa_3^2(2\omega - 1) - 2\kappa_3\omega(\omega - 1 - \Delta_2^2/2) - \omega^2 = 0; \\ \text{б) } \kappa_3^2 m^2 + \kappa_3 \Delta_2^2(m^2 + \varepsilon) + \Delta_2^4(2\varepsilon + 1 + m^2)/4 - \Delta_2^2 p^2 = 0. \end{array} \right\} \quad (21.54)$$

Отметим, что при  $\omega > \omega^*$  верхняя ветвь гиперболы (а) лежит выше гиперболы (б), а при  $\omega = \omega_m$  (21.18) нижняя ветвь (а) касается гиперболы (б), следовательно, область интегрирования обращается в нуль. Так же, как и в предыдущем разделе, точки пересечения кривых соответствуют кинематической ситуации, когда все частицы летят по одной прямой. Исходя из (21.17), получаем для пары нижних точек

$$\Delta_{\text{макс}}^2 = [(\varepsilon - p + 1)/(\varepsilon + p + 1 - 2\omega)] [\omega + p/(\varepsilon - p + 1) \pm \\ \pm \sqrt{(\omega_m - \omega)(\tilde{\omega} - \omega)}] \left[ [p + \omega(\varepsilon - p - 1)]/(\varepsilon - p + 1) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{(\omega_m - \omega)(\tilde{\omega} - \omega)} \right], \quad (21.55)$$

где  $\tilde{\omega} = (\varepsilon + m)/(\varepsilon - p + 1)$ . Для пары верхних точек значения получаются заменой в (21.55)  $p \rightarrow -p$ , включая замену в  $\tilde{\omega}$  и  $\omega_m$ .

Интегрирование сечения (21.52) по области, изображенной на рис. 48, оказывается трудновыполнимым из-за сложности как подынтегрального выражения, так и области интегрирования, а получающиеся формулы очень громоздки. Это в определенной степени связано с тем, что электрон излучает во всех кинематически допустимых направлениях с почти одинаковой интенсивностью [это видно непосредственно из (21.52)], что, в свою очередь, приводит к необходимости отдельно рассматривать интервалы  $\omega$ :  $\omega < \omega^*$  и  $\omega > \omega^*$ . По этим причинам мы проведем вычисление для двух предельных случаев:  $\omega \ll \omega^*$ ,  $\omega \gg \omega^*$  [если  $\varepsilon \gg m$ , то  $\omega^* \approx 1/2$  (21.13)].

В области  $\omega \ll \omega^*$  применимо приближение классических токов (§ 6), а выражение для сечения можно представить в виде (6.48). Этот же результат вытекает из (21.52), если в нем перейти к пределу  $\omega \rightarrow 0$  и оставить лишь наиболее сингулярные (по  $1/\omega$ ) члены:

$$d\sigma_e/d\omega = \int d\sigma_0 \int dW, \quad (21.56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_0 &= (2\pi\alpha^2/p^2) (d\Delta_2^2/\Delta_2^4) [2\varepsilon^2 - (\Delta_2^2/2)(1+2\varepsilon+m^2) + \Delta_2^4/4]; \\ \int dW &= [\alpha/2\pi \sqrt{\Delta_2^2(1+\Delta_2^2/4)}] \int_{\kappa_{3\text{ мин}}}^{\kappa_{3\text{ макс}}} d\kappa_3 [\Delta_2^2/\kappa_3\omega - \\ &\quad - (1/\omega - 1/\kappa_3)^2]. \end{aligned} \right\} \quad (21.57)$$

Пределы интегрирования легко находятся из (21.54), если учесть что  $\omega \ll 1/2$ :

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{3\text{ макс}} &= \omega [1 + \Delta_2^2/2 \pm \sqrt{\Delta_2^2(1+\Delta_2^2/4)}]; \\ m^2 \omega^2/p^2 &\leq \Delta_2^2 \leq 4p^2/(2\varepsilon + m^2 + 1). \end{aligned} \right\} \quad (21.58)$$

При получении второго из этих соотношений следует учесть, что  $\Delta_{2\text{ мин}}^2 \ll 1$ , а  $\Delta_{2\text{ макс}}^2 \gg 1$ . Предел  $\Delta_{2\text{ мин}}^2$  нельзя устремить к ну-

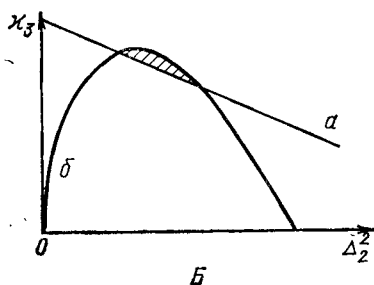
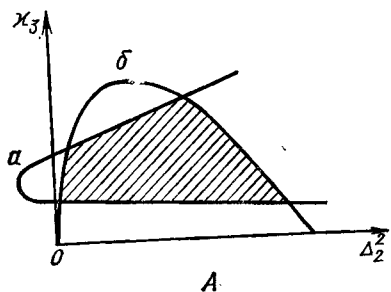


Рис. 48. Область изменения переменных  $\kappa_3$ ,  $\Delta_1^2$ , (А) при  $\omega < \omega^*$  (Б) в конце спектра.

лю, так как  $d\sigma_e$  при этом расходится. После интегрирования по  $\kappa_3$  (углу вылета фотона) имеем [ср. (6.30)]

$$\int dW' = (2\alpha/\pi\omega) \Phi(\Delta_2^2/4). \quad (21.59)$$

Учитывая свойство  $\Phi(x^2)$  (6.35), видим, что основной вклад в интеграл (21.56) после подстановки в него (21.59) дают  $\Delta_2^2 \lesssim 1$  (эта

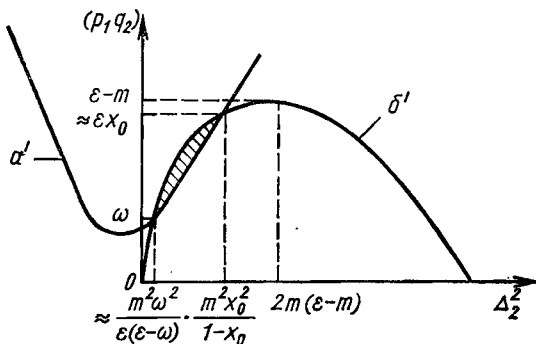


Рис. 49. Область изменения переменных  $p_1q_2$ ,  $\Delta_2^2$  ( $\omega \gg \omega^*$ ).

ситуация является общей для задачи излучения одного фотона, см. раздел 6.5). Вычисляя, как (6.39), находим

$$d\sigma_e = (16\alpha^3 d\omega/3\omega) \ln(\epsilon/m\omega) = (16\alpha r_0^2 d\omega/3\omega) \ln(\epsilon/m\omega). \quad (21.60)$$

В соответствии с общим правилом (см. § 6 и раздел 17.1), чтобы получить большую точность, чем логарифмическая, в формуле (21.60) необходимо в исходном выражении для сечения (21.52) учесть и некоторые члены, несингулярные при  $\omega \rightarrow 0$  [см. (21.31)].

В другом предельном случае  $\omega \gg \omega^* = 1/2$  разобьем область на две перекрывающиеся: 1)  $\omega_m - \omega \gg \omega_m m/\epsilon$  и 2)  $\omega_m - \omega \ll \omega_m \times (1 - \omega_m/\epsilon)$  (область 2 относится к концу спектра). В области 1 удобно перейти к переменным  $\Delta_2^2$ ,  $p_1q_2 = \kappa_3 + \Delta_2^2/2$ ; из (21.54) находим уравнения для границы области (рис. 49):

$$\left. \begin{aligned} (a') \quad & (p_1q_2)^2(2\omega - 1) - 2p_1q_2[\omega(\omega - 1) + \Delta_2^2(\omega - 1)/2] - \\ & - (\omega + \Delta_2^2/2)^2 + \omega^2\Delta_2^2 = 0; \\ (b') \quad & \Delta_2^4/4 - \Delta_2^2(p^2 - \epsilon(p_1q_2)) + m^2(p_1q_2)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.61)$$

Заметим, что верхняя точка кривой (б') соответствует остановке мюона и поэтому никогда не может лежать в физической области. Из (21.61) (см. рис. 49) видно, что при  $\omega \gg \omega^*$  в существенной



области  $\Delta_2^2 \gg 1$ ,  $p_1 q_2 \gg 1$ , следовательно, можно провести разложение в (21.52) по обратным степеням этих величин и оставить только старшие члены разложения. Следует обратить особое внимание на члены, содержащие  $x_3$  в знаменателе, так как  $x_{3\text{мин}} \sim 1(x_{3\text{мин}} \sim \omega(\epsilon_3 - p_3) = \omega/(\epsilon_3 + p_3))$ . В результате получаем

$$d\sigma_e/dx = (\alpha^3/\epsilon) \int (dy/y) (dt/t^2) \{ [t(1/2 - 1/y + 1/y^2) - 1/\xi] \times \\ \times [y/x + t/x + x/(y-t) - 2t/(y-t) + 2t^2/x(y-t) - \\ - t/\epsilon(y-t)^2] + [2t(y-x)/y^2] [t(1/2 - 3/y + 3/y^2) - 1/\xi] \}, \quad (21.62)$$

где

$$y = p_1 q_2 / \epsilon; \quad t = \Delta_2^2 / 2\epsilon; \quad x = \omega / \epsilon.$$

Переменные  $y$ ,  $t$  изменяются в следующих пределах:

$$x \leq y \leq x_0 \approx \xi / (1 + \xi); \quad y^2 / \xi (1 - y) \leq t \leq y - x / 2\epsilon (y - x), \quad (21.63)$$

где нижний предел интегрирования по  $t$  следует из (6'), (21.61), верхний находится из разложения (a') (неточность разложения сказывается в интервале  $\delta y \sim 1/\epsilon$  и не влияет на  $d\sigma_e$ ). Вычисляя элементарные интегралы, имеем:

$$d\sigma_e/dx = (\alpha^3/\epsilon) \{ 2(1 - x/x_0) [4/3x^2 + (5/6x_0 + x_0)/x - 1/6x_0^2 + 1/2] \times \\ \times \ln [2\epsilon(x_0 - x)/mx_0] - [(1/2x_0 + 1)/x - 1/x_0 - 1/2] \times \\ \times \ln [(1 - x)/(1 - x_0)] - [(1/x_0 - x_0)/x + 2/x_0^2 - 2/x_0 - 1/2 - \\ - x(1/3x_0^2 - 1)/x_0] \ln(x_0/x) - (1/xx_0) \ln(x_0/x) \ln[x_0/(1 - x)] - \\ - (1 + 1/xx_0) [(1/2) \ln(xx_0) \ln(x_0/x) + f(x_0) - f(x)] - (1 + 2/xx_0) \times \\ \times [f(x/x_0) - f(x_0/x) + \ln(x_0/x) \ln 2\epsilon] + (1 - x/x_0) \times \\ \times [-4/3x^2 - (2/3x_0 + 1 + 3x_0)/x + (2/3x_0 - 1/2)/x_0] \}. \quad (21.64)$$

в предельном случае  $\omega \ll \omega_m$  выражение для сечения сильно упрощается:

$$d\sigma_e/d\omega = 8\alpha^3 (\ln 2\epsilon/m - 1/2) / 3\omega^2, \quad (21.65)$$

т. е.  $d\sigma_e/d\omega$  падает как  $1/\omega^2$  (при излучении налетающей частицы  $d\sigma_\mu/d\omega \propto 1/\omega$ ). Этот факт можно объяснить так. В  $\mathcal{C}$ -системе электрона и мюона электрон является ультрарелятивистским [ $\epsilon_c = (1 + \epsilon)/\sqrt{2\epsilon + m^2 + 1} \gg 1$ ], и его излучение, с точностью до членов  $\sim 1/\epsilon_c$ , сосредоточено в конусе с углом  $\sim 1/\epsilon_c$ . Но, как отмечалось, фотоны с максимальной в  $\mathcal{C}$ -системе энергией, испускаемые в направлении движения электрона, имеют в  $\mathcal{L}$ -системе энергию  $\omega^* \approx 1/2$ . Поэтому  $\omega \gg 1/2$  в  $\mathcal{L}$ -системе могут иметь толь-

ко фотоны, испускаемые в  $\mathcal{C}$ -системе под большим углом к направлению движения электрона, а такое излучение подавлено.

В области (2) введем переменные  $t = \Delta_2^2/2\varepsilon$ ;  $z = \kappa_3/\varepsilon$  и найдем область из (21.54). Если  $1 - \omega/\omega_m \ll 1 - \omega_m/\varepsilon$ , то  $t \sim x_0$ ,  $z \sim x_0 - x$  [проще всего в этом убедиться из (21.17) при  $\omega \rightarrow \omega_m$ , когда  $\Delta_2^2 = -2m^2 + 2\varepsilon\varepsilon_4 - 2pp_4$ ;  $\kappa_3 = \omega(\varepsilon_3 - p_3)$ , так что  $\kappa_3 = (\varepsilon - m)/(1 + m)$ ;  $\Delta_2^2 = 2m(\varepsilon - m)/(m + 1)(\varepsilon - p + 1)$  при  $\omega = \omega_m$ ]. В выжении для  $d\sigma_e$  можно положить  $\omega = \omega_m$ ,  $\Delta_2^2 = \Delta_2^2(\omega = \omega_m)$  и учитывать только изменение  $\kappa_3$  (его изменение порядка самой величины). Область интегрирования задается выражениями (см. рис. 48, б):

$$\left. \begin{aligned} z_{\text{макс}} &= [1/2(1-x_0)] [x_0 - x \pm \sqrt{(x-x_0)^2 - x_0^2 m^2/\varepsilon^2}]; \\ t_{\text{макс}} - t_{\text{мин}} &= (z_{\text{макс}} - z)(z_{\text{мин}} - z)(1-x_0)/z. \end{aligned} \right\} \quad (21.66)$$

Выделяя главные члены, получаем:

$$d\sigma_e/dx = (\alpha^3/2x_0\varepsilon) \int (dz/z) dt = (\alpha^3/\varepsilon x_0) [(x_0 - x)L_f - z_0]; \quad (21.67)$$

обозначения такие же, как в (21.44). Области (1) и (2) перекрываются. В промежуточной области  $\omega_m m/\varepsilon \ll \omega_m - \omega \ll \omega_m(1 - \omega_m/\varepsilon)$  сечения (21.64) и (21.67) дают одинаковый результат:

$$d\sigma_e/dx = (\alpha^3/\varepsilon)(1 - x/x_0) \{\ln [2\varepsilon(x_0 - x)/mx_0] - 1\}. \quad (21.68)$$

**21.3. Анализ результатов.** Для оценки интерференционного члена запишем амплитуду диаграмм излучения мюоном и электроном в приближении классических токов (см. § 6):

$$\begin{aligned} A_e &= e(p_3/\kappa_3 - p/\kappa_1)_\mu e_\lambda^\mu A^c; \\ A_\mu &= e(p_4/\kappa_4 - p_2/\kappa_2)_\mu e_\lambda^\mu A^c, \end{aligned} \quad (21.69)$$

где  $A^c = -(ie^2/\Delta^2)\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2 \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1$ ;  $u_i \equiv u(p_i)$ .

Тогда интерференционный член в сечении излучения:

$$\begin{aligned} d\sigma_{e\mu} &= [1/4p(2\pi)^5] \text{Re} \sum_{S_e, S_\mu, \lambda} (A_e A_\mu^*) \frac{d^3 p_3}{2\varepsilon_3} \times \\ &\times \frac{d^3 p_4}{2\varepsilon_4} \cdot \frac{d^3 k}{2\omega} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k). \end{aligned} \quad (21.70)$$

Выполнив интегрирование, при котором полезна формула (6.29), получим вклад в спектр интерференционного члена в случае мягких фотонов (с точностью до логарифмического множителя):

$$d\sigma_{e\mu}/d\omega \sim \alpha^3/\varepsilon\omega. \quad (21.71)$$

Для оценки интерференционного члена при больших частотах воспользуемся неравенством Шварца:

$$d\sigma_{\mu e}/d\omega \leq 2 \int dx_2 \sqrt{d\sigma_e/d\omega dx_2 \cdot d\sigma_{\mu}/d\omega dx_2}. \quad (21.72)$$

Уже отмечалось [см., например, (21.36)], что  $d\sigma_{\mu}/d\omega \sim \alpha^3 dx_2/\varepsilon x_2^2$ , т. е. сечение излучения мюоном имеет резкие пики вперед (излучает ультрарелятивистская частица). Электрон же излучает в кинематически допустимых направлениях почти равномерно, так что  $d\sigma_e/d\omega \sim \alpha^3 dx_2/\omega^2 \varepsilon$ . Подставляя в (21.72), имеем

$$d\sigma_{e\mu}/dx \lesssim \alpha^3/\omega = 2\alpha^3/m^2 \xi x, \quad (21.73)$$

Эта оценка по порядку величины справедлива для всех частот.

Проведем теперь обсуждение полученных результатов. Сравнивая сечение излучения мягких фотонов ( $\omega \ll 1/2$ ) [см. (21.33), (21.34), (21.60) и (21.71)], видим, что  $d\sigma_e \gg d\sigma_{\mu}$ ,  $d\sigma_e \gg d\sigma_{e\mu}$ , т. е. мягкие фотоны излучаются в основном *электроном*. Это связано с тем, что сечение излучения электроном содержит  $1/\omega m_e^2$ , а не  $1/\omega m^2$ ,  $1/\omega \varepsilon m_e$ . При  $\omega > 1/2$  следует сравнивать (21.33), (21.34), (21.64) и (21.73). Отношение сечений  $d\sigma_e/d\sigma_{\mu} \sim m^2/\omega = 2/x\xi$ . Если  $\xi \ll 1$ , то  $\omega_m \approx 2\varepsilon^2/m^2 = \varepsilon\xi$  и  $d\sigma_e/d\sigma_{\mu} \geq m^2/\omega_m \gg 1$ , т. е. если  $\xi \ll 1$ , то *электрон всегда излучает больше мюона*. Точно так же  $d\sigma_e/d\sigma_{\mu e} \sim \varepsilon/\omega \gg 1$  при  $\xi \ll 1$ . Сечение излучения мюоном может конкурировать с сечением излучения электроном *только при  $\xi \gg 1$  для жестких фотонов*, когда  $\omega_m \sim \varepsilon$  и  $d\sigma_e/d\sigma_{\mu} \sim m^2/\omega \ll 1$  при  $\omega \gg m^2$ . Из (21.72) очевидно следует, что вклад интерференционного члена такого же порядка, как остальные, если  $d\sigma_{\mu} \sim d\sigma_e$  и угловые распределения излученных фотонов одинаковы.

Угловое распределение фотонов, испускаемых мюоном, представляет собой конус с углом  $\sim m/\varepsilon$  (21.36), причем в некоторых случаях только этот конус кинематически допустим. Угловое распределение фотонов, испускаемых электроном, существенно более плавное (в кинематически допустимой области, которая при  $\omega < \omega^*$  охватывает все углы, а при  $\omega > \omega^*$  переходит в конус в направлении импульса мюона, сужающийся по мере роста частоты). В конце спектра фотоны излучаются в направлении импульса мюона.

Энергия электронов отдачи при излучении фотона мюоном согласно (21.19) достигает  $\varepsilon_3 \sim \Delta_1^2 \sim \varepsilon$  (при  $\xi \lesssim 1$ ) и  $\varepsilon_3 \sim \Delta_1^2 \sim m^2$  (при  $\xi \gg 1$ ), в последнем случае  $\Delta_1^2 \gg m^2$  не дают вклада в сечение [см. (21.29), (21.30) и ниже].

## § 22. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА В АННИГИЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

22.1. Спектр излучения фотонов. Рассмотрим излучение при электрон-мюонном взаимодействии, однако в другом канале, а именно при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару мюонов [10—12]. Процесс представляется теми же диаграммами (см. рис. 45), что и в § 21, только необходимо проделать

замену  $p_2 \rightarrow -p_3$ ,  $p_3 \rightarrow -p_2$ . Сечение снова запишем в виде (21.1). Сечения  $d\sigma_e$  и  $d\sigma_\mu$  легко вычисляются с помощью методики инвариантного интегрирования тензоров (§ 7). Интерференционный член антисимметричен при замене  $p_3 \leftrightarrow p_4$  и поэтому обращается в нуль при интегрировании по конечным состояниям  $[\int (d^3p_3/\varepsilon_3) (d^3p_4/\varepsilon_4) \times \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k)]$ . Эта антисимметрия возникает потому, что пара конечных частиц рождается в состояниях с разной  $C$ -четностью ( $C$ -четность фотона отрицательна) в зависимости от того, излучается фотон начальными частицами ( $C$ -четность отрицательна) или конечными ( $C$ -четность положительна). Совершенно аналогичная ситуация имеет место при рождении (или аннигиляции) пары скалярных частиц.

Сечение излучения начальными частицами согласно результатам § 7 имеет вид

$$d\sigma_1 = [\eta^{(s_i)}/4 (2\pi)^2 \sqrt{\mathbf{v}^2 - m^4}] (-g^{\mu\nu} \times \\ \times K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s_i)}(p_1, -p_2, -k, \Delta_2) (d^3k/2\omega) (-(g^{\rho\sigma} - \Delta_2^\rho \Delta_2^\sigma / \Delta_2^2) f_2^{(s_f)}(\Delta_2^2)), \quad (22.1)$$

где  $m$  — масса начальной частицы;  $\Delta_2 = p_3 + p_4$ ;  $s_i$  — спин начальных частиц;  $s_f$  — спин конечных частиц; функция  $f_2^{(s_f)}$  определена равенствами (7.12), (7.13), и комптоновский тензор  $K(p_1, -p_2, -k, \Delta_2)$  дается (7.34) и (7.35),  $\eta^{(0)} = 1$ ,  $\eta^{(1/2)} = -1/4$  [изменение знака обусловлено тем, что тензор (7.35) приведен в канале рассеяния]. Переходя к переменным  $\kappa_1, \kappa_2$  [ср. (7.42)]

$$d^3k/2\omega = \pi d\kappa_1 d\kappa_2 / \sqrt{\mathbf{v}^2 - m^4}, \quad (22.2)$$

учитывая калибровочную инвариантность тензора  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$  ( $K_{\mu\nu\rho\sigma} \Delta_2^\rho = K_{\mu\nu\rho\sigma} \Delta_2^\sigma = 0$ ) и выполняя операцию свертки, получаем сечение излучения начальными частицами:

$$d\sigma_1 = [\eta^{(s_i)} e^4 / 8 (2\pi) (\mathbf{v}^2 - m^4)] A_1^{(s_i)} f_2^{(s_f)} d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (22.3)$$

где в выражениях для  $A_1^{(s_i)}$  (7.39) необходимо заменить

$$\omega^2 \rightarrow m^2 - 2\kappa_1; \quad q^2 \rightarrow m^2 - 2\kappa_2; \quad \Delta_1^2 \rightarrow \Delta_2^2 = (p_1 + p_2 - k)^2 = \\ = s - 2\kappa; \quad \Delta^2 \rightarrow k^2 = 0; \quad s = (p_1 + p_2)^2; \\ \kappa = k(p_1 + p_2).$$

Приведем явный вид сечения (22.3) для спинорных частиц в  $C$ -системе начальных частиц:

$$d\sigma_1/d\omega d \cos \vartheta_h = (\alpha^3 \omega / 6\varepsilon\rho) [(2\mu^2 + \Delta_2^2) / \Delta_2^4] [(\Delta_2^2 - \\ - 4\mu^2) / \Delta_2^2]^{1/2} \{ -m^2 (\Delta_2^2 + 2m^2) (1/\kappa_1^2 + 1/\kappa_2^2) + 2m^2 (1/\kappa_2 + 1/\kappa_1) + \\ + 2 (\kappa_1/\kappa_2 + \kappa_2/\kappa_1) + 4 [\varepsilon^2 \Delta_2^2 + m^2 (\varepsilon\omega - m^2)] / \kappa_1 \kappa_2 \}, \quad (22.4)$$

где  $\vartheta_k$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_1$ ;  $\mu$  — масса конечной частицы, в этой системе  $\Delta_2^2 = 4\varepsilon$  ( $\varepsilon = \omega$ );  $\varepsilon$  — энергия начальной частицы,  $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$ .

Выполняя простое интегрирование по углу вылета фотона, имеем

$$d\sigma_I/d\omega = (2\alpha^3/3\varepsilon p\omega) [(2\mu^2 + \Delta_2^2)/\Delta_1^4] [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} \{ (L - 1) (\Delta_2^2 + 2\omega^2) + m^2 [L (2\omega/\varepsilon - m^2/\varepsilon^2) - 2] \}, \quad (22.5)$$

где

$$L = (\varepsilon/p) \ln [(\varepsilon + p)/(\varepsilon - p)]. \quad (22.6)$$

Чтобы вычислить вклад диаграмм, на которых излучают конечные частицы, необходимо проинтегрировать комптоновский тензор

$K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}(-p_3, p_4, \Delta_1, k)$ , где  $\Delta_1 = p_1 + p_2$ ,  $k^2 = 0$  [см. (7.34), (7.35)]:

$$d\sigma_{II} = [2\pi\eta^{(sf)} F^{\mu\nu(s_i)}(p_1, p_2)/4 \sqrt{\mathbf{v}^2 - m^4}] (d^3k/2\omega) \times \\ \times \int -g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}(-p_3, p_4, \Delta_1, k) (1/(2\pi)^6) \delta(p_1 + p_2 - \\ - p_3 - p_4 - k) (d^3p_3/2\varepsilon_3) (d^3p_4/2\varepsilon_4), \quad (22.7)$$

где  $F^{\mu\nu(s_i)}$  дается формулами (7.9)–(7.10). Проводя интегрирование в тензорном виде, как в § 7.2 [см. (7.19)–(7.30)], и переходя к инвариантным переменным (22.2), находим [см. (7.29)]:

$$d\sigma_{II} = [\pi^2 |\eta^{(sf)}| d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2/4(\mathbf{v}^2 - m^4)] \{ I_1^{(sf)} [\Delta_1^2 \Gamma_2^{(s_i)}/(k\Delta_1)^2 + \Gamma_1^{(s_i)}] + \\ + \Delta_1^2 I_2^{(sf)} [\Gamma_1^{(s_i)} + 3\Delta_1^2 \Gamma_2^{(s_i)}/(k\Delta_1)^2]/(k\Delta_1)^2 \}. \quad (22.8)$$

Здесь  $I_{1,2}^{(sf)}$  дается формулами (7.52)–(7.54), где следует положить  $\omega^2 \rightarrow \Delta_2^2$ ,  $\Delta^2 \rightarrow \Delta_1^2$ ,  $(\Delta\Delta_1)^2 \rightarrow (k\Delta_1)^2 = \kappa^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2$ , в (22.8) входит  $|\eta^{(sf)}|$ , так как в  $I_{1,2}^{(sf)}$  уже учтено изменение знака; функции:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1^{(s_i)} &= g^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(s_i)}(p_1, p_2); \\ \Gamma_2^{(s_i)} &= k^\mu k^\nu F_{\mu\nu}^{(s_i)}(p_1, p_2); \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

а их явный вид

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1^{(0)} &= e^2 (4m^2 - \Delta_1^2)/\Delta_1^4; & \Gamma_2^{(0)} &= e^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2/\Delta_1^4; \\ \Gamma_1^{1/2} &= -4e^2 (\Delta_1^2 + 2m^2)/\Delta_1^4; & \Gamma_2^{1/2} &= 8e^2 \kappa_1 \kappa_2/\Delta_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

В  $\mathcal{C}$ -системе начальных частиц сечение (22.8) для спинорных частиц можно записать в форме

$$d\sigma_{II}/d\omega d \cos \vartheta_k = (\alpha^3/8\omega\varepsilon^3 p) [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} \times \\ \times \{ -(1 + m^2/2\varepsilon^2) a_1 + (\kappa_1 \kappa_2/2\varepsilon^2 \omega^2) (a_1 + a_2) \}, \quad (22.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \Delta_2^2 (2 + \mu^2/2\varepsilon^2) + 2\omega^2 - L_1 [\Delta_2^2 (1 + \\ &\quad + \mu^2/2\varepsilon^2) + 2\omega^2 - \mu^4/\varepsilon^2]; \\ a_2 &= 2 (\Delta_2^2 - 2\mu^2 L_1), \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

$L_1$  дается формулой (7.54) с  $\omega^2 = \Delta_2^2$ , остальные обозначения, как в (22.4). Проинтегрировав сечение (22.11) по углу, найдем

$$d\sigma_{II}/d\omega = (\alpha^3 d\omega/6\varepsilon^3 p\omega) (1 + m^2/2\varepsilon^2) [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} \times \\ \times \{ (L_1 - 1) (\Delta_2^2 + 2\omega^2) - \mu^2 [L_1 (2\omega/\varepsilon + \mu^2/\varepsilon^2) + 2(1 - \omega/\varepsilon)] \}. \quad (22.13)$$

Заметим, что спектр излучения конечными частицами можно просто получить с помощью следующего варианта методики инвариантного интегрирования тензоров. Представим (22.7) в виде

$$d\sigma_{II} = [2\pi\eta^{(sf)} F^{\mu\nu (si)} (p_1, p_2)/4 \sqrt{v^2 - m^2}] R_{\mu\nu}^{(sf)} d\omega/2\omega, \quad (22.14)$$

где

$$R_{\mu\nu}^{(sf)} = \int \omega^2 d\Omega_R (d^3p_3/2\varepsilon_3) (d^3p_4/2\varepsilon_4) \times \\ \times [\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k)/(2\pi)^6] (-g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}(-p_3, p_4, \Delta_1, k)) \quad (22.15)$$

может зависеть только от 4-вектора, фиксирующего систему отсчета, в которой выбрана энергия фотона [ср. (6.28)]. Таким вектором в  $\mathcal{C}$ -системе является  $n_\mu = (1, 0, 0, 0) = \Delta_{1\mu}/\sqrt{\Delta_1^2}$ . Учитывая калибровочную инвариантность, имеем

$$R_{\mu\nu}^{(s)} = (g_{\mu\nu} - \Delta_{1\mu} \Delta_{1\nu}/\Delta_1^2) f_{\Delta_1}^{(s)}. \quad (22.16)$$

Величина  $f_{\Delta_1}^{(s)}$  вычисляется, как обычно, сверткой с  $g^{\mu\nu}$ . Используя (7.38), (7.39), получаем для скалярных конечных частиц:

$$f_{\Delta_1}^{(0)} = (2\alpha^2/3 (2\pi)^2) [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} \times \\ \times \{ [(\Delta_2^2 - 2\mu^2) L_1 - \Delta_2^2] (1 - \mu^2/\varepsilon^2) + 4\omega^2 \}. \quad (22.17)$$

Подставляя (22.16), (22.17) в (22.14), получаем спектр излучения конечными частицами при превращении электрон-позитронной пары в пару скалярных частиц\*:

$$d\sigma_{II}^{(0)} = (\alpha^3/24\varepsilon^3 p) (d\omega/\omega) [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} (1 + m^2/2\varepsilon^2) \times \\ \times \{ [(\Delta_2^2 - 2\mu^2) L_1 - \Delta_2^2] (1 - \mu^2/\varepsilon^2) + 4\omega^2 \}. \quad (22.18)$$

\* Здесь рассмотрено излучение при аннигиляции пары частиц со спином 0, 1/2 в пару точечных, удовлетворяющих квантовой электродинамике частиц со спином 0 или 1/2. Точно так же можно найти сечение излучения начальными частицами с учетом структуры (форм-факторов) конечных частиц, это сечение выражается через две функции этих форм-факторов [11].

Сечения (22.5), (22.13), (22.18) вычислены без каких-либо пренебрежений.

Обсудим особенности излучения при аннигиляции. Вблизи порога реакции (если  $\mu \gg m$ ,  $\varepsilon^2 \simeq \mu^2$ ,  $\omega \ll \varepsilon$ ) имеем из (22.5), (22.13):

$$d\sigma_1^{th} = (2\alpha^3/\varepsilon^2) (d\omega/\omega) \beta_0 [\ln(2\varepsilon/m - 1/2)];$$

$$d\sigma_{II}^{th} = 4\alpha^3 d\omega \beta_0^3 / 3\varepsilon^2 \omega, \quad (22.19)$$

где  $\beta_0 = [(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2}$ , (7.5), вблизи порога  $\beta_0 \ll 1$ , следовательно, сечение излучения конечными частицами имеет дополнительную малость, пропорциональную квадрату скорости этих частиц, как и должно быть, поскольку излучение тяжелых частиц вблизи порога является дипольным.

При  $\varepsilon \gg \mu$  (и  $\omega \ll \varepsilon$  имеем):

$$d\sigma_1 = (4\alpha^3 d\omega / 3\varepsilon^2 \omega) [\ln(2\varepsilon/m) - 1/2];$$

$$d\sigma_{II} = (4\alpha^3 d\omega / 3\varepsilon^2 \omega) [\ln(2\varepsilon/\mu) - 1/2]. \quad (22.20)$$

В этом случае отношение сечений сводится к отношению входящих логарифмов, и поэтому не мало.

Существенной особенностью полученных формул, качественно отличающей случай излучения при аннигиляции от случая тормозного излучения (см. § 6 и 21), является убывание спектра излучения с ростом энергии как  $\ln(\varepsilon/m)/\varepsilon^2$ , в то время как спектр тормозного излучения растет как  $\ln(\varepsilon/m)$ . Это связано с тем, что основной вклад в сечение тормозного излучения дают малые передачи импульса. В данном же случае передача импульса не может быть малой (она больше  $2\mu$ ), что и приводит к тому, что множитель  $1/\varepsilon^2$  не компенсируется. Очевидно, такое утверждение не связано со спином частиц.

**22.2. Особенности излучения начальными частицами.** Сечение процесса излучения при аннигиляции содержит в знаменателе четвертую степень передачи импульса ( $\Delta_1^4$  или  $\Delta_2^4$ ). Величина  $\Delta_1^4$ , входящая в сечение  $d\sigma_{II}$ , постоянна и очень велика ( $\Delta_1^2 = 4\varepsilon^2$  в  $\mathcal{C}$ -системе). Однако в случае излучения фотона начальными частицами (сечение  $d\sigma_1$ ) положение меняется, поскольку по мере роста энергии фотона величина переданного импульса  $\Delta_2^2$  падает и в пределе жестких фотонов может стать малой. В  $\mathcal{C}$ -системе фотон обладает максимальной энергией; когда он и обе конечные частицы разлетаются в противоположные стороны и конечные частицы имеют равные импульсы, тогда

$$\omega_m = (\varepsilon^2 - \mu^2)/\varepsilon. \quad (22.21)$$

Учитывая, что  $\Delta_2^2 = 4\varepsilon(\varepsilon - \omega)$ , при  $\omega = \omega_m$  имеем  $\Delta_2^2 = 4\mu^2$ . По этой причине по мере роста энергии фотона вклад излучения на-

чальными частицами возрастает [12]. Особенно сильно этот эффект выражен в случае, когда начальные частицы тяжелые ( $m \gg \mu$ ).

Для проведения количественного анализа следует сравнить сечения (22.5), (22.13). При  $\Delta_2^2 = 4\mu^2$  (на границе спектра) сечения  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  обращаются в нуль вследствие наличия кинематического фактора  $(\Delta_2^2 - 4\mu^2)^{1/2}$ . Однако вблизи этой точки поведение этих сечений качественно различно: сечение  $d\sigma_{II}$  плавно падает до нуля, а сечение  $d\sigma_I$

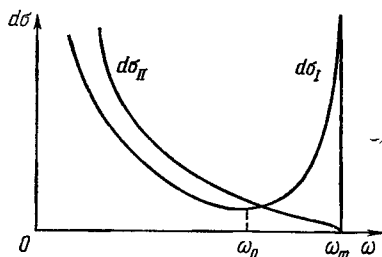


Рис. 50. Зависимость сечений излучения начальными  $d\sigma_I$  и конечными  $d\sigma_{II}$  частицами от частоты.

падает до нуля, когда  $\Delta_2^2$  изменяется в интервале  $1,6\mu^2$ , с другой стороны полуширина пика равна  $9,5\mu^2$ . Сечение  $d\sigma_I$  тем самым имеет минимум при  $\Delta_2^2 \sim \varepsilon^2$  (см. рис. 50,  $\omega_0 = 0,6\varepsilon$  при  $\varepsilon \gg m$  и  $\omega_0 = 0,8\varepsilon$  при  $\varepsilon \sim m$ ). Если  $m \gg \mu$ , то мягкие фотоны излучаются в основном легкими (конечными) частицами, при  $\omega \ll \varepsilon$

$$d\sigma_I/d\sigma_{II} = \ln(2\varepsilon/m)/\ln(2\varepsilon/\mu) \quad (\varepsilon \gg m);$$

$$d\sigma_I/d\sigma_{II} = 2v^2/3 \ln(2\varepsilon/\mu) \quad (\varepsilon \approx m), \quad (22.23)$$

где  $v$  — скорость начальных частиц. Интересно отметить, что в случае, когда начальные частицы являются нерелятивистскими, они излучают мягкие фотоны дипольным образом ( $\sim v^2$ ) и в то же время с большой вероятностью излучают жесткие фотоны [см. (22.22)].

Представляет интерес интегральный (по частоте) вклад пика. Для того чтобы найти его, следует учесть: в сечении (22.5) в районе пика меняется лишь фактор  $[(\Delta_2^2 - 4\mu^2)/\Delta_2^2]^{1/2} [(2\mu^2 + \Delta_2^2)/\Delta_2^4]$  [происходящий из функции  $f_2^{(1/2)}$  (7.13)], а остальные члены практически постоянны. Проводя интегрирование, получаем

$$\int_{\text{пик}} d\sigma_I = (2\alpha^3/3\varepsilon^2)(L-1) \quad (\varepsilon \gg m). \quad (22.24)$$

Появление пика при малых значениях  $\Delta_2^2$  имеет простой физический смысл. В этом случае фотон и пара конечных частиц разле-



таются в противоположные стороны, так что данный процесс близок к двухквантовой аннигиляции пары начальных частиц, когда один из фотонов конвертируется в пару частиц, причем угол между их импульсами  $\sim \mu/\epsilon$ , а  $\epsilon_3 \sim \epsilon_4$ . Как следует из вывода (7.7)—(7.13), процесс конверсии фотона в пару, по конечным состояниям которой проведено интегрирование, при данной передаче импульса описывается функциями (7.12)—(7.13) независимо от процесса, в котором излучается фотон.

Сравнение (22.24) с интегральным сечением двухквантовой аннигиляции дает

$$\int_{\text{пик}} d\sigma_1/\sigma_{2\gamma} = 4\alpha/3\pi. \quad (22.25)$$

Это выражение можно рассматривать как относительную вероятность превращения фотона, излученного в любом процессе в пару частиц.

### § 23. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА ПРИ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННЫХ И ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ СОУДАРЕНИЯХ

23.1. Тормозное излучение вне области конца спектра. В низшем порядке теории возмущений при электрон-электронном соударении процесс тормозного излучения представляется четырьмя «блочными» диаграммами (рис. 51) (две прямых и две обменных), а в случае электрон-позитронных соударений на диаграммах следует сделать замену  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ , тогда обменные диаграммы переходят в аннигиляционные\*.

Будем искать спектр и угловое распределение излученных фотонов [1, 13], которые можно получить из сечения\*  $d\sigma/dx_1 dx_2$  в системе покоя электрона ( $\mathcal{L}$ -система,  $\mathbf{p}_1 = 0$ ) и  $\mathcal{C}$ -системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ . Будем считать частицы ультрарелятивистскими в  $\mathcal{C}$ -системе, т. е.  $v = p_1 p_2 \gg 1$  (масса электрона  $m_e = 1$ ), проводить рассмотрение для неполяризованных частиц и не касаться области частот в конце спектра, т. е. будем полагать, что в  $\mathcal{C}$ -системе  $\epsilon (\epsilon = \omega) \gg 1$ , а в  $\mathcal{L}$ -системе  $\epsilon = \omega \gg 1$  (в инвариантном виде  $v = x \sim v \gg 1$ ). Будем систематически разлагать все величины по степеням  $1/v$  и оставлять только старшие члены разложения.

Вычислим вклады блочных диаграмм  $A, A', B, B'$ , ( $d\sigma_A$  и т. д.), каждая из которых описывает излучение определенной линией, как это делалось и в § 21 и 22. Именно вклады этих диаграмм (но не каждой фейнмановской диаграммы в отдельности) являются калибровочно инвариантными, поэтому, в частности, ковариантное правило суммирования по поляризациям [см. (A.18) Приложение A] может применяться только к вкладам блочных диаграмм. Но особенно удобна такая группировка членов при приближенных вы-

\* Здесь использованы обозначения, как в § 21 [см. (21.6)].

числениях, поскольку тогда просто следить за сохранением калибровочной инвариантности. С другой стороны, поскольку ультрарелятивистская частица излучает в узкий конус в направлении движения с углом  $\sim 1/\epsilon$ , то вклад интерференции между излучением различных частиц, определяемый степенью перекрытия этих конусов, имеет порядок  $1/\nu$ , так же как и интерференции

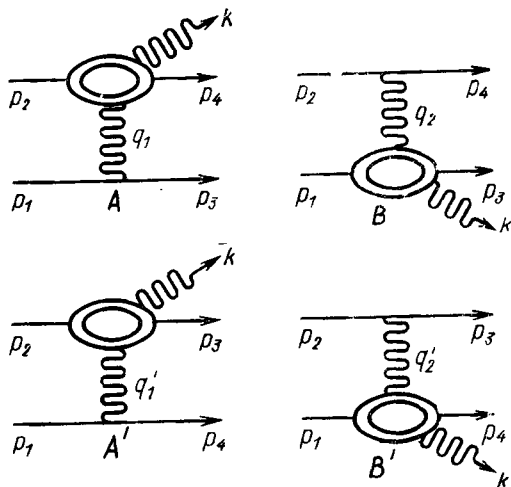


Рис. 51. Блочные диаграммы тормозного излучения при электрон-электронном соударении ( $q_1^2 = -\Delta_1^2$  и т. д.).

5.7). Поэтому при пренебрежении интерференцией можно рассматривать только вклад прямых диаграмм и не учитывать тождественности электронов. В случае электрон-позитронных соударений вклад аннигиляционных диаграмм  $A'$ ,  $B'$  был вычислен в § 22 [см. (22.5), (22.13)], там же отмечалось, что этот вклад мал (имеет порядок  $1/\nu$ ) вне области конца спектра, следовательно, в данном случае также можно ограничиться рассмотрением прямых диаграмм  $A$ ,  $B$ .

Вклад диаграммы  $A$  в сечение в случае электрон-электронного соударения можно получить из (21.3)—(21.5) или после перехода к ковариантным переменным из (21.20), (21.21), где следует положить  $m = 1$ ,  $\omega = \kappa_1$ ,  $\epsilon = p_1 p_2 = \nu$ . В случае электрон-позитронного соударения в этих формулах следует заменить  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ , но формулы симметричны относительно такой замены. Вклад диаграммы  $B$  получается из вклада диаграммы  $A$  заменой  $p_1 \leftrightarrow p_2$  для обоих указанных случаев. Следовательно, вне области конца спектра при  $\nu \gg 1$  излучение при электрон-электронном соударении такое же, как при электрон-позитронном соударении. В формуле, получаемой из (21.20), необходимо сначала провести интегрирование по  $\kappa_4$ ,  $\Delta_1^2$ , тогда получим  $d\sigma_A/dx_1 dx_2$ . Чтобы определить вклад диаграммы  $B$ , следует провести замену  $p_1 \leftrightarrow p_2$ .

прямых и обменных (аннигиляционных) диаграмм вдали от жесткого конца спектра. Тем самым можно ограничиться вычислением вкладов указанных блочных диаграмм. Более детальные количественные оценки будут приведены ниже.

В случае электрон-электронных соударений после интегрирования по импульсам конечных фермионов  $d\sigma_A = d\sigma_{A'}$ ,  $d\sigma_B = d\sigma_{B'}$ . В силу тождественности электронов суммарный вклад прямых и обменных диаграмм следует разделить на два (см. раздел

Обсудим теперь порядок интегрирования. Первое интегрирование ведется между корнями уравнения  $S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4, \Delta_1^2, \nu) = 0$  с помощью формул (Г.40), (Г.41) Приложения Г. Если это интегрирование ведется по  $\kappa_4$ , то пределы изменения  $\Delta_1^2$  даются формулами (Г.46) Приложения Г. Выражая  $\cos \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3$  через инварианты [см. (Г.44) Приложения Г], получаем

$$\Delta_{\text{мин}}^2 = (\nu - \kappa_1 - 1) \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\kappa_2^2 / (\nu - \kappa + 1) (\nu - \kappa_1 - 1)^2} \right) =$$

$$= (\nu - \kappa_1 - 1) \left[ 1 \pm [1 / (\nu - \kappa_1 - 1)] \sqrt{(\nu - \kappa - 1) / (\nu - \kappa + 1)} Q_4^{1/2} \right], \quad (23.1)$$

Область изменения  $\kappa_1, \kappa_2$  определяется вторым из неравенств (Г.46) Приложения Г, которое в инвариантном виде записывается как

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\nu\kappa_1\kappa_2 \leq 0, \quad (23.2)$$

а также условием существования области по  $\Delta_1^2$

$$\nu - \kappa - 1 \geq 0. \quad (23.3)$$

Последнее равенство означает, что относительный импульс конечных фермионов в их  $\Pi$ -системе равен нулю, поскольку  $(p_3 + p_4)^2 = (p_2 + p_1 - k)^2 = 2(\nu + 1 - \kappa) = 2(\nu - \kappa - 1) + 4$ , откуда, в свою очередь, следует, что частицы пары движутся с равными скоростями в любой системе. Условие (23.3) дает максимальную энергию фотона в  $\Pi$ -системе:

$$\omega_c^m = (\nu - 1) / 2\varepsilon = \varepsilon - 1/\varepsilon. \quad (23.4)$$

Если же первое интегрирование проводить по  $\Delta_1^2$ , то область изменения  $\kappa_4, \kappa_2, \kappa_1$  определяется неравенствами (Г.47). Первое из них определяет область по  $\kappa_4$ :

$$\kappa_{4\text{макс}} = \kappa \left[ 1 \pm \sqrt{(\nu - \kappa - 1) / (\nu - \kappa + 1)} \right] / 2, \quad (23.5)$$

а второе дает (23.2).

Функции  $Q_4, R_4, \mathcal{P}_4$  в представлении  $S = Q_4 \kappa_4^2 - 2\mathcal{P}_4 \kappa_4 + R_4$  даются формулами (21.10), где следует положить  $m = 1, \omega = \kappa_1, \varepsilon = \nu$ . Произведя перегруппировку членов, можно привести  $S$  к виду

$$S = Q_\Delta \Delta_1^4 - 2P_\Delta \Delta_1^2 + R_\Delta, \quad (23.6)$$

где

$$Q_\Delta = \kappa^2 / 4; \quad \mathcal{R}_\Delta = \kappa [\kappa_2 (\nu + 1) - \kappa] / 2 - \kappa_4 [2\kappa_2 (\nu + 1 - \kappa / 2) - \kappa (\nu + 1 - \kappa)] / 2; \quad R_\Delta = \kappa_4^2 [(\nu - \kappa_1)^2 + 2\kappa_2 - 1] -$$

$$- 2\kappa_2 \kappa_4 [\nu (\nu - \kappa_1) + \kappa_2 - 1] + \kappa_2^2 (\nu^2 - 1). \quad (23.7)$$

Наряду с проведенным выше определением области изменения переменных для вычисления необходимо отобрать в (21.20) старшие члены, отбросив члены, дающие вклад  $\sim 1/\nu$ . Малый вклад  $\sim 1/\nu$  дают члены типа

$$\Delta_1^2 \nu/\kappa_2; \Delta_1^2 \nu/\kappa_2^2; \Delta_1^2 \nu/\kappa_2 \kappa_4; \Delta_1^2 \nu/\kappa_4; \Delta_1^2 \nu/\kappa_4^2; \Delta_1^4 \nu/\kappa_2 \kappa_4. \quad (23.8)$$

В этом можно убедиться, например, следующим образом. Возьмем сечение (21.20) и будем подставлять в него вместо  $(A + A')$  перечисленные в (23.8) члены. Первое интегрирование проведем по  $\Delta_1^2$ . Учитывая, что в сечении (21.20) стоит общий множитель  $1/\Delta_1^4$ , видим, что последний член в (23.8) дает вклад  $\pi/Q_\Delta^{1/2}$ , а остальные члены дают вклад  $\pi/R_\Delta^{1/2}$ . Член, содержащий  $1/Q_\Delta^{1/2}$ , после интегрирования по  $\kappa_4$  в пределах (23.5) дает вклад\* в сечение  $\sim (\alpha^3 d\kappa_1 d\kappa_2/\nu \kappa_2)$ . Этот член можно опустить, поскольку в  $\Pi$ -системе после интегрирования по  $\kappa_1$  (или  $\kappa_2$ ) при фиксированном  $\kappa = 2\omega$  вклад этого члена  $\sim (\alpha^3 d\kappa/\nu \kappa)$ , т. е.  $\sim 1/\nu$  по сравнению с основным  $(\alpha^3 d\kappa/\kappa)$ . Область интегрирования по  $\kappa_{1,2} = \kappa - \kappa_{2,1}$  определяется из (23.2):

$$\kappa (1 - \sqrt{(\nu-1)/(\nu+1)})/2 \leq \kappa_{1,2} \leq \kappa (1 + \sqrt{(\nu-1)/(\nu+1)})/2. \quad (23.9)$$

Аналогично в  $\mathcal{L}$ -системе  $\mathbf{p}_1 = 0$  роль частоты играет  $\kappa_1$ , а область изменения  $\kappa_2$  определяется из (23.2), (23.3):

$$\left. \begin{array}{l} \text{(а)} \quad \kappa_1 (\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}) \leq \kappa_2 \leq \kappa_1 (\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}); \\ \text{(б)} \quad \kappa_2 \leq \nu - \kappa_1 - 1, \end{array} \right\} \quad (23.10)$$

т. е. при  $\kappa_1 < \kappa_0$ , где

$$\kappa_0 = (\nu - 1)/(\nu + 1 + \sqrt{\nu^2 - 1}) \approx 1/2, \quad (23.11)$$

пределы интегрирования по  $\kappa_2$  определяются (23.10, а), а при  $\kappa_1 > \kappa_0$  нижний предел задается (23.10, а), а верхний предел — (23.10, б). Величина  $\kappa_0$  имеет тот же смысл, что и  $\omega^*$  (21.13), поэтому в  $\mathcal{L}$ -системе фотоны с частотой  $\omega = \kappa_1 > \kappa_0$  не могут лететь против  $\mathbf{p}_2$ , следовательно, вступает в действие предел (23.10, б). Максимальное значение частоты в  $\mathcal{L}$ -системе находится из условия существования области по  $\kappa_2$  (на границе верхний и нижний пределы совпадают):

$$\kappa_1^m = \omega_r^m = (\nu - 1)/(\nu + 1 - \sqrt{\nu^2 - 1}), \quad (23.12)$$

\* Отбрасываются члены, имеющие степенную малость, так что логарифмические факторы не влияют на оценку членов и потому при анализе порядка величин выписываться не будут.

с учетом этого вклад в сечение в  $\mathcal{L}$ -системе будет  $\alpha^3 dx_1/vx_1$ , т. е.  $\sim 1/v$  по сравнению с основным.

Результаты для системы, где  $p_2 = 0$ , получаются из найденных заменой  $1 \leftrightarrow 2$  (как уже отмечалось, с помощью такой замены можно найти  $d\sigma_B$  из  $d\sigma_A$ ).

Таким же образом можно провести оценку 1—4-го членов в (23.8), содержащих  $1/R_\Delta^{1/2}$ , если учесть, что интегралы по  $x_4$ :

$$\begin{aligned} \int dx/\sqrt{ax^2+bx+c} &\sim 1/\sqrt{a}, \quad a > 0; \\ \int dx/x\sqrt{ax^2+bx+c} &\sim 1/\sqrt{c}, \quad c > 0, \end{aligned} \quad (23.13)$$

где не выписаны логарифмы. Оценку пятого члена можно провести с помощью замены  $x_4^2 \rightarrow x_4 x_{4\text{мин}}$ , при которой член только увеличивается.

Отметим, что первый и второй члены в (23.8) имеют порядок малости в  $\mathcal{C}$ -системе  $1/(v-x)$  и их можно отбросить только вне области конца спектра, когда  $(v-x) \sim v$  [в  $\mathcal{L}$ -системе  $p_1 = 0$ , их порядок  $1/(v-x_1)$ ]. Отбрасывая члены (23.8) и заведомо меньшие члены вида  $\Delta_1^2/x_2$ ,  $\Delta_1^2 x_4/x_2$ , и т. д., получаем выражение, дающее с принятой точностью вклад в  $d\sigma_A/dx_1 dx_2$ :

$$d\sigma_A = (r_0^2 \alpha/\pi v^2) \int [dx_1 dx_2 dx_4 d\Delta_1^2/\Delta_1^4 \sqrt{-S}] T, \quad (23.14)$$

где

$$\begin{aligned} T = & -2v^2/x_4^2 + (4v^2/x_2 x_4) (1-x_1/v) - (2v^2/x_2^2) (1-x_1/v)^2 - \\ & - x_2/x_4 - x_4/x_2 + (\Delta_1^2 v^2/x_2 x_4) [(1-x_1/v)^2 + 1]. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Аналогичный результат найден и в § 21 для излучения мюоном при  $\xi \gg 1$ . При этом в комптоновском тензоре (21.5) в членах с  $g^{\mu\nu}$  следует остановить только  $x_2 x_4$  и отбросить все члены с  $\Delta_{1\mu}$ ,  $\Delta_{1\nu}$ . Такой «укороченный тензор» имеет вид

$$\begin{aligned} -g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}/4 = & (-e^4/x_4^2) [g^{\mu\nu} x_2 x_4 + 2p_2^\mu p_2^\nu] - \\ & - (e^4/x_2^2) [g^{\mu\nu} x_2 x_4 + 2(p_2 - k)^\mu (p_2 - k)^\nu] + \\ & + (e^4/x_2 x_4) \{ [p_2^\mu p_2^\nu + (p_2 - k)^\mu (p_2 - k)^\nu] (2 + \Delta_1^2) - 2k^\mu k^\nu \}. \end{aligned} \quad (23.16)$$

В токовом тензоре остаются только члены с  $p_{1\mu} p_{1\nu}$ , т. е. результат не зависит от спина рассеивающей частицы (но, естественно, зависит от спина излучающей).

Перейдем к интегрированию сечения (23.14). Учитывая, что при малых  $\Delta_1^2$  имеет место компенсация в первых трех членах (23.15)

[см. обсуждение после (21.31)], удобно переписать  $T$ :

$$\begin{aligned}
 T = & -2R_{\Delta} v^2/(v^2-1) \kappa_2^2 \kappa_4^2 + 4v\kappa/(v^2-1) \kappa_2 \kappa_4 - \\
 & -4/\kappa_4 + 4/\kappa_2 - 2 [2(v+1)/\kappa_4 + \kappa(2v_1 - \kappa)/\kappa_2^2 - \\
 & -2(v-\kappa+1)/\kappa_2 - 1]/(v^2-1) - \kappa_2/\kappa_4 - \kappa_4/\kappa_2 + \\
 & + \Delta_1^2 [v^2 + (v-\kappa_1)^2]/\kappa_2 \kappa_4,
 \end{aligned} \tag{23.17}$$

где  $R_{\Delta}$  приведено в (23.7). Первое интегрирование будем проводить в первом члене по  $\Delta_1^2$ , а в остальных по  $\kappa_4$ . При такой группировке членов компенсации происходят в первом члене, а в остальных не появляется  $R_4^{3/2}$  в знаменателе. После выполнения первого интегрирования с помощью формул (Г.40), (Г.41) приходим к следующим интегралам:

$$\left. \begin{aligned}
 h_1 &= \int d\kappa_4/\kappa_4 R_{\Delta}^{1/2} = \int d\Delta_1^2/\Delta_1^2 R_4^{1/2} = L/\kappa_2 \sqrt{v^2-1}; \\
 h_2 &= \int d\kappa_4/\kappa_4^2 R_{\Delta}^{1/2} = [R_{\Delta}^{1/2}(\kappa_{4\text{макс}})/(-\kappa_{4\text{макс}}) + \\
 & + R_{\Delta}^{1/2}(\kappa_{4\text{мин}})/\kappa_{4\text{мин}}]/\kappa_2^2(v^2-1) + \\
 & + [v(v-\kappa_1) + \kappa_2 - 1]/\kappa_2^2(v^2-1)^{3/2} L; \\
 h_3 &= \int d\Delta_1^2/\Delta_1^4 R_4^{1/2} = [R_4^{1/2}(\Delta_{1\text{макс}}^2)/(-\Delta_{1\text{макс}}^2) + \\
 & + R_4^{1/2}(\Delta_{1\text{мин}}^2)/\Delta_{1\text{мин}}^2]/\kappa_2^2(v^2-1) + \\
 & + [\kappa[\kappa_2(v+1) - \kappa]/2\kappa_2^2(v^2-1)^{3/2}] L; \\
 h_4 &= \int d\Delta_1^2/\Delta_1^4 = Q_4^{1/2} \sqrt{(v-\kappa)^2-1}/\kappa_2^2,
 \end{aligned} \right\} \tag{23.18}$$

где

$$\begin{aligned}
 L &= \ln \left\{ [v(v-\kappa) - 1 + \sqrt{v^2-1} \sqrt{(v-\kappa)^2-1}] / [v(v-\kappa) - 1 - \right. \\
 & \left. - \sqrt{v^2-1} \sqrt{(v-\kappa)^2-1}] \right\} = \\
 & = 2 \ln \left\{ [v(v-\kappa) - 1 + \sqrt{v^2-1} \sqrt{(v-\kappa)^2-1}] / \kappa \right\}.
 \end{aligned} \tag{23.19}$$

Значения функций  $R_{\Delta}$  на границе области можно получить подстановкой пределов (23.1), (23.5) в (23.7). Существует другой, более простой путь (см. § 21). Учтем, что [см. (Г.42) Приложения Г]:

$$\begin{aligned}
 I_4^{(-1)} &= \int d\kappa_4/\kappa_4 \sqrt{-S} = \\
 & = \int \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \delta(\Delta_1^2 + (p_1 - p_3)^2) \times \\
 & \quad \times [d^3 p_3 d^3 p_4 / \kappa_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4] = \pi / \sqrt{R_4},
 \end{aligned} \tag{23.20}$$

вычисляя этот интеграл в системе, где  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$ , получим [см. (Г.43) Приложения Г]:

$$R_4^{1/2} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) |\mathbf{p}_1| [(\varepsilon_4 \omega - |\mathbf{p}_4| |\mathbf{k}| \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}))^2 - (|\mathbf{p}_4| |\mathbf{k}| \sin(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \sin(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}))^2]^{1/2}, \quad (23.21)$$

причем пределы интегрирования по  $\Delta_1^2$  в этой системе [см. Г.46] соответствуют  $\cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) = -\cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3}) = \pm 1$ , т. е.

$$R_4^{1/2} (\Delta_{\text{мин}}^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) |\mathbf{p}_1| (\varepsilon_4 \omega \mp |\mathbf{p}_4| \omega \cos(\widehat{\mathbf{p}_4 \mathbf{k}})). \quad (23.22)$$

Выражая входящие величины через инварианты [(Г. 44), Приложение Г.], имеем

$$R_4^{1/2} (\Delta_{\text{мин}}^2) = \kappa Q_4^{1/2} / 2 \pm \sqrt{(\nu - \kappa - 1) / (\nu - \kappa + 1)} [\kappa(\nu - \kappa_1 + 1) - 2\kappa_2(\nu + 1)] / 2. \quad (23.23)$$

Аналогично можно найти

$$R_{\Delta}^{1/2} (\kappa_{\text{мин}}) = \{\kappa(\nu - \kappa_1 - 1) \pm \sqrt{(\nu - \kappa - 1) / (\nu - \kappa + 1)} [\kappa(\nu - \kappa_1 + 1) - 2\kappa_2(\nu + 1)]\} / 2. \quad (23.24)$$

Подставляя все эти результаты в (23.14) и сохраняя члены, дающие вклад, получаем сечение излучения фотона электроном

$$d\sigma_A = d\sigma_A^{(L)} + d\sigma_A^{(0)}, \quad (23.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_A^{(L)} &= (r_0^2 \alpha / \nu^3) (d\kappa_1 d\kappa_2 / \kappa_2^2) L \{2\nu(\nu - \kappa_1) + \kappa_1^2 + \\ &+ 2\kappa_1(\kappa_1 - \nu) / \kappa_2 + \kappa_1^2(1 - \kappa_1 / \nu) / \kappa_2^2\}; \\ d\sigma_A^{(0)} &= (r_0^2 \alpha / \nu^3) (d\kappa_1 d\kappa_2 / \kappa_2^2) \times \\ &\times \{(1 - \kappa_1 / \nu) [-3\kappa_2^2 \nu^2 + \kappa_1 \kappa_2 \nu (8 + \kappa_2) - 4\kappa_1^2] / \kappa_2^2 - \nu^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (23.26)$$

Здесь

$$L = 2 \ln [2\nu(\nu - \kappa) / \kappa]. \quad (23.27)$$

Полное выражение для сечения

$$d\sigma = d\sigma_A + d\sigma_B; \quad d\sigma_B = d\sigma_A (1 \leftrightarrow 2). \quad (23.28)$$

Сечения (23.25)—(23.28) дают спектр и угловое распределение излученных фотонов при столкновениях электронов и позитронов. Отметим, что в  $C$ -системе  $\omega = (\kappa_1 + \kappa_2)/2\varepsilon = \kappa/2\varepsilon$ , в  $L$ -системе, где  $p_1 = 0$ ,  $\omega = \kappa_1$ , а при  $p_2 = 0$   $\omega = \kappa_2$ . В  $C$ -системе область изменения  $\kappa_{1,2} = \omega(\varepsilon - p \cos \vartheta_{1,2})$  определяется при фиксированной величине  $\kappa$  формулой (23.9). В  $L$ -системе  $p_1 = 0$ , область изменения

$\kappa_2 = \omega(\varepsilon - p \cos \vartheta)$  находится при фиксированной величине  $\kappa_1$  формулами (23.10). Область изменения переменных  $\kappa_1, \kappa_2$  приведена на рис. 52, на котором угловые точки имеют координаты  $\kappa_0, \kappa_1^m$  [см. (23.11), (23.12)].

Для дальнейшего рассмотрим отдельно разные системы.

1. В  $C$ -системе угловое распределение характеризуется резкими пиками в направлении движения каждой из частиц (вдоль  $p_2$  в  $d\sigma_A$  и вдоль  $p_1$  в  $d\sigma_B$ ), поскольку в знаменателе стоят высокие степени  $\kappa_2$  (или  $\kappa_1$ ). Поэтому основной вклад в интеграл по

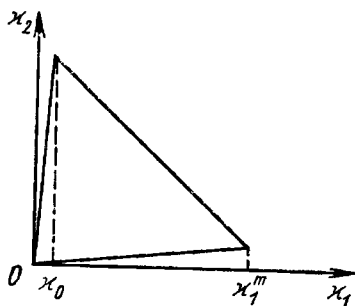


Рис. 52. Область изменения переменных  $\kappa_1, \kappa_2$ .

$\kappa_2$  (для  $d\sigma_A$ ) дает нижний предел интегрирования. В результате интегрирования получаем для спектра излучения вдоль  $p_2$ :

$$d\sigma_A^C = 4r_0^2 \alpha (d\omega/\omega) [(\varepsilon - \omega)/\varepsilon][\varepsilon/(\varepsilon - \omega) + (\varepsilon - \omega)/\varepsilon - 2/3] \{ \ln [4\varepsilon^2(\varepsilon - \omega)/\omega] - 1/2 \}; \quad (23.29)$$

$$d\sigma^C = d\sigma_A^C + d\sigma_B^C = 2d\sigma_A^C.$$

Очевидно, что угловое и спектральное распределения излученных фотонов вдоль  $p_1$  и  $p_2$  одинаковы, т. е.  $d\sigma_B^C/d\omega = d\sigma_A^C/d\omega$ .

2. В  $L$ -системе ( $p_1 = 0$ ) следует отдельно рассмотреть излучение быстрой ( $d\sigma_A$ ) и покоившейся в начале частицы ( $d\sigma_B$ ). Угловое распределение фотонов, излучаемых быстрой частицей, имеет резкий пик вдоль  $p_2$  (высокие степени  $\kappa_2$  в знаменателе), вклад в интеграл дает нижний предел по  $\kappa_2$  и результат не зависит от соотношения между  $\omega_1$  и  $\omega_0$ :

$$d\sigma_A^L = 4r_0^2 \alpha (d\omega/\omega) [(\varepsilon - \omega)/\varepsilon][\varepsilon/(\varepsilon - \omega) + (\varepsilon - \omega)/\varepsilon - 2/3] \{ \ln [2\varepsilon(\varepsilon - \omega)/\omega] - 1/2 \}. \quad (23.30)$$

Излучение частицы, которая вначале покоилась, следует из (23.26), если положить  $\kappa_2 = \omega$ ,  $\kappa_1 = \omega(\varepsilon - p \cos \vartheta_k)$ . Видно, что угловое распределение излучения частиц отдачи весьма плавное. Поэтому вклад в спектр дает вся область интегрирования, и результат зависит от соотношения между  $\omega_1$  и  $\omega_0$ :



$$\left. \begin{aligned}
 d\sigma'_B &= (2r_0^2 \alpha/3) (d\omega/\omega^2) \{ [4 - 1/\omega + 1/4\omega^2] \times \\
 &\quad \times \ln 2\varepsilon - 2 + 2/\omega - 5/8\omega^2 \}; \\
 \kappa_1 &= \omega > \kappa_0 \approx 1/2; \\
 d\sigma'_B &= (r_0^2 \alpha/3) (d\omega/\omega) \{ 16(1 - \omega + \omega^2) \ln \varepsilon/\omega - \\
 &\quad - 2(1 - 2\omega) \ln(1 - 2\omega) [1/4\omega^3 - 1/2\omega^2 + 3/\omega - \\
 &\quad - 2 + 4\omega] - 1/\omega^2 + 3/\omega - 4 + 4\omega - 8\omega^2 \}; \\
 \kappa_1 &= \omega < \kappa_0 \approx 1/2.
 \end{aligned} \right\} \quad (23.31)$$

При  $\kappa_1 = \kappa_0$  оба сечения совпадают. Сечения (23.30), (23.31) следует подставить в (23.28).

Обсудим полученные результаты. 1. С принятой точностью излучение в электрон-электронном и в электрон-позитронном соударениях одинаково. 2. Существенна область передач импульса  $\Delta_1^2 \lesssim 1$  (на диаграмме *A* это видно, например, из того, что член  $\Delta_1^4 v/\kappa_2 \kappa_4$  дает вклад  $\sim 1/v$ , а  $\Delta_1^2 v^2/\kappa_2 \kappa_4 \sim 1$ ). 3. Излучение в *C*-системе направлено в два конуса вдоль импульсов сталкивающихся частиц, а в *L*-системе налетающая частица излучает в узкий конус, а угловое распределение излучения частицы отдачи является плавным. 4. Вклад диаграмм, на которых излучает частица 2 ( $d\sigma_A$ ), не зависит от спина частицы 1 и наоборот. Такая же ситуация уже встречалась в § 21 при  $\xi \gg 1$  [см. (21.35) и далее]. Причина этого заключается в малости передач импульса. 5. Излучение частицы отдачи при  $\omega > \kappa_0$  падает как  $1/\omega^2$ . Это связано с тем, что такие фотоны в *C*-системе излучаются вне конуса вперед [ср. (21.65) и последующий анализ]. 6. Сечения (23.29) и (23.30) совпадают с точностью до релятивистского пересчета энергии в аргументе логарифма. Более того, можно зафиксировать переменную  $\eta = \kappa_1 + \alpha \kappa_2$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Это означает, что частота фиксирована в системе, где движутся обе частицы (при  $\alpha = 1$  *C*-система, при  $\alpha = 0$  *L*-система). Если провести теперь в (23.26) интегрирование по  $\kappa_2$ , то получим (23.30), где следует положить  $\omega/\varepsilon \rightarrow \eta/v$  и провести соответствующее преобразование энергии в аргументе логарифма, т. е. хотя спектр излучения не есть релятивистски инвариантная величина, тем не менее для быстрых частиц в силу излучения фотона в узкие конуса оказывается возможным пересчет спектра из системы в систему.

**23.2. Общие характеристики излучения фотона при рассеянии релятивистской частицы.** На основании проделанного анализа (§ 21—23) можно дать общие характеристики процесса излучения фотона ультрарелятивистскими частицами вне области конца спектра. Из вида отброшенных членов (23.8) по сравнению с оставленными (23.15) следует, что в существенной области вклада диаграмм  $A \Delta_1^2 \lesssim 1$ ,  $\kappa_4 \lesssim 1$  (соответственно  $\Delta_2^2 \lesssim 1$ ,  $\kappa_3 \lesssim 1$  для вклада диаграмм *B*). Эти неравенства определяют кинематические особенности процесса излучения.

Рассмотрим  $\mathcal{C}$ -систему и диаграмму  $A$ . Из  $\Delta_1^2 = 2(\epsilon_1 \epsilon_3 - p_1 p_3 \cos \vartheta_{13} - 1) \lesssim 1$  следует, что  $\epsilon_3 \gg 1$  и угол рассеяния  $\vartheta_{13} \lesssim 1/\epsilon_3 \ll 1$ , т. е. вектор  $p_3$  направлен почти по  $p_1$ . Поскольку  $\kappa_2$  существенны вблизи нижнего предела, то фотон летит в направлении движения излучающей частицы  $p_2$ . Составляющая  $p_4$ , перпендикулярная  $p_2$ , мала ( $\lesssim 1$ ), т. е. после излучения частица движется вдоль направления импульса  $p_2$ , поскольку в существенной области  $\kappa_4 \lesssim 1$ . Рассмотрим еще передачу энергии от излучающего электрона к рассеивающему. Из  $(p_1 + p_2 - p_3)^2 = (p_4 + k)^2$  имеем  $4\epsilon (\epsilon - \epsilon_3) = \kappa_4 \lesssim 1$ , т. е.  $\epsilon - \epsilon_3 \lesssim 1/\epsilon$ . Отсюда вытекает, что рассеивающий электрон практически не меняет энергию и, следовательно, фотон получает энергию за счет излучающего электрона. Таким образом, картина излучения для диаграммы  $A$  следующая: электрон с импульсом  $p_1$  после взаимодействия движется с импульсом  $p_3$ , причем последний по величине и по направлению почти совпадает\* с  $p_1$ , а электрон с импульсом  $p_2$  после взаимодействия «делит» свою энергию между электроном и излученным фотоном, т. е.  $\epsilon_4 = \epsilon - \omega + 0 (1/\epsilon)$ . При этом как фотон, так и конечный электрон движутся в направлении  $p_2$ , угол отклонения фотона порядка  $1/\epsilon$ , а угол отклонения конечного электрона  $\lesssim 1/\epsilon_4 \approx 1/(\epsilon - \omega)$ ; обратим внимание, что угол вылета конечного электрона определяется его энергией. Для диаграммы  $B$  получаются идентичные результаты, только следует заменить  $p_1 \leftrightarrow p_2$ ,  $p_3 \leftrightarrow p_4$ .

В  $\mathcal{L}$ -системе для диаграммы  $A$  ( $p_1 = 0$ ) из  $\Delta_1^2 = 2(\epsilon_3 - 1) \lesssim 1$  следует, что покоящаяся до взаимодействия частица приобретает энергию порядка массы ( $|p_3| \lesssim 1$ ). Поэтому  $\epsilon_4 \approx \epsilon - \omega$ , фотон и конечный электрон движутся вдоль  $p_2$ , угол отклонения фотона  $\lesssim 1/\epsilon$ , а угол отклонения электрона  $\lesssim 1/\epsilon_4 \approx 1/(\epsilon - \omega)$ . Идентичные результаты имеют место для диаграммы  $A'$  (для электрон-электронного рассеяния) после замены  $p_3 \leftrightarrow p_4$ . В случае частиц с разной массой  $\Delta_1^2 \leq m^2$ , где  $m^2$  — масса налетающей частицы [см. обсуждение после (21.35) в § 21], т. е. в этом случае  $\epsilon_3 \sim m^2/m_e$  ( $m_e$  — масса электрона). Излучение частицы отдачи (диаграммы  $B$ ) при  $\omega > \kappa_0 \approx 1/2$  подавлено [см. (23.31)], что, как уже отмечалось, связано с тем, что в  $\mathcal{C}$ -системе фотоны с такой энергией испускаются под большим углом. Вклад диаграмм  $A$  и  $B$  становится одного порядка при  $\omega \lesssim 1$ , при этом для диаграмм  $B$   $(\epsilon - \epsilon_4) \sim 1$ ,  $p_4$  направлен под углом  $\lesssim 1/\epsilon \kappa_2$ , фотон с почти одинаковой вероятностью движется в любом из кинематически допустимых направлений.

Проведенное обсуждение позволяет понять некоторые характерные черты формул (23.29)—(23.31). Сечения (23.29), (23.30) совпадают (кроме аргумента логарифма), поскольку при излучении быстрых

\* Таким образом, передача импульса рассеивающему электрону очень мала, т. е. время процесса велико. Если рассеивающий электрон за время излучения приобретает дополнительный импульс, сравнимый с указанной передачей импульса (например, если столкновение электронов происходит во внешнем электромагнитном поле), то сечение излучения уменьшается [114].

частиц можно считать, что все частицы движутся вдоль направления начального импульса, тогда  $(d\omega/\omega)_c = (d\omega/\omega)_i$ ;  $(\omega/\varepsilon)_c = (\omega/\varepsilon)_i$  и  $2\varepsilon_i = 4\varepsilon_c^2$  (для аргумента логарифма), здесь  $c$  и  $i$  относятся к  $\Pi$ - и  $\mathcal{L}$ -системе соответственно. Сечение  $d\sigma_A/d\Delta_1^2 d\omega$  в  $\mathcal{L}$ -системе можно получить из (21.32), положив  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} d\sigma_A = & 2\alpha^3 (d\kappa_1/\kappa_1) (d\Delta_1^2/\Delta_1^2) \{4(1 - \kappa_1/v) [\Phi_i(\Delta_1^2/4) + \\ & + [4\kappa_1^2 \Delta_1^2/v^2 \sqrt{\Delta_1^2(\Delta_1^2 + 4)}] \ln(\sqrt{\Delta_1^2/4} + \sqrt{1 + \Delta_1^2/4}) + \\ & + (\kappa_1^2/v^2) \Delta_{\text{мин}}^2 + 8(1 - \kappa_1/v)/(\Delta_{\text{мин}}^2)^{3/2}/3\sqrt{\Delta_1^2} - \\ & - 2\sqrt{\Delta_1^2 \Delta_{\text{мин}}^2} [1 + (1 - \kappa_1/v)^2] + \\ & + 2(1 - \kappa_1/v) \Delta_{\text{мин}}^2 \ln(\Delta_1^2/\Delta_{\text{мин}}^2)\}, \end{aligned} \quad (23.32)$$

где  $\Delta_{\text{мин}}^2 = \kappa_1^2/4v^4 (1 - \kappa_1/v)^2$ , пределы изменения  $\Delta_1^2$ : от  $\Delta_{\text{мин}}^2$  до величины порядка  $v - \kappa_1$ . Поскольку интеграл по  $\Delta_1^2$  сходится при больших  $\Delta_1^2$ , то для получения спектра  $d\sigma_A/d\kappa_1$  можно устремить верхний предел интегрирования к бесконечности. Если заметить в (23.32)  $\kappa_1 \rightarrow \kappa$ , то получим сечение в  $\Pi$ -системе. Это следует из того, что в  $\Pi$ -системе дают вклад  $\kappa_2 \sim \kappa/v = (\kappa_1 + \kappa_2)/v \approx \kappa_1/v$ , причиной этого является малость угла излучения как в  $\mathcal{L}$ -системе, так и в  $\Pi$ -системе. Проинтегрировав в пределах  $\Delta_{\text{мин}}^2 \leq \Delta_1^2 \leq \infty$ , получим спектр излучения в  $\Pi$ -системе (23.29). Отметим, что после интегрирования по  $\Delta_1^2$  зависимость от  $\Delta_{\text{мин}}^2$  остается только в первых двух членах в фигурных скобках (23.32), которые при  $\Delta_1^2 \ll 1$  ведут себя как  $\Delta_1^2$ , что и дает в сечение  $-\ln \Delta_{\text{мин}}^2$ .

Характернейшей чертой спектра излучения быстрой частицы в  $\mathcal{L}$ -системе является совпадение его со спектром излучения на кулоновском центре [ср. (23.30) и (17.30)]. Это означает отсутствие зависимости от спина рассеивающей частицы и малость отдачи (передачи энергии). Несущественность спиновых эффектов можно понять, например, в  $\Pi$ -системе, где рассеивающая частица теряет энергию  $\sim 1/\varepsilon$  ( $\varepsilon - \varepsilon_3 \sim 1/\varepsilon$ ), а ее импульс поворачивается на угол  $\sim 1/\varepsilon$ , т. е. движение ее квазиклассично (см. § 9). Влияние отдачи в  $\mathcal{L}$ -системе в формулах (23.14), (23.15) состоит в том, что при фиксированной  $\Delta_1^2$  меняется  $\kappa_4 = \omega(\varepsilon_4 - p_4 \cos \vartheta_4)$ , поскольку без учета отдачи  $\varepsilon_4 = \varepsilon - \omega$ , а с учетом ее  $\varepsilon_4 = \varepsilon - \omega - \Delta_1^2/2$ . Однако в существенной области  $\Delta_1^2 \lesssim 1$ , и при  $\varepsilon - \omega \gg 1$  величина  $\kappa_4$  меняется на относительную величину  $\Delta_1^2/(\varepsilon - \omega) \ll 1$ , т. е.  $T$  (23.15) с учетом или без учета отдачи различается на члены вида  $v\Delta_1^2/\kappa_4^2$ ,  $v\Delta_1^2/\kappa_2\kappa_4$  и т. д., которые все равно вклада не дают [см. (23.8)]. Нижний же предел  $\Delta_1^2$  не меняется при учете отдачи. В частности, при излучении мюона  $\Delta_{\text{мин}}^2 = \omega^2 m^4/4\varepsilon^2 (\varepsilon - \omega)^2$  при  $\xi = 2\varepsilon/m^2 \gg 1$  (21.30), так что  $\Delta_{\text{мин}}^2$  не зависит от массы рассеивающей частицы, а это означает, что величина  $\Delta_{\text{мин}}^2$  такая же, как в случае излучения в кулоновском поле, когда масса бесконечна. В результате вышеизложенного спектр (23.30) совпадает со

спектром излучения в кулоновском поле в борновском приближении, а спектр в  $\mathcal{C}$ -системе, как мы видели, можно получить из (23.30) прямым пересчетом. Более того, если известно сечение излучения на кулоновском центре  $d\sigma/d\omega d \cos \vartheta$  с точностью до членов  $\sim 1/\varepsilon$ , то можно найти все формулы (23.29)—(23.31). Действительно, если положить в (23.25)—(23.27)  $\kappa_1 = \omega, \kappa_2 = \omega (\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)$ ,  $\nu = \varepsilon$ , то мы получим сечение излучения на кулоновском центре. Причина этого для излучения быстрых частиц была изложена выше. Остается обсудить излучение электрона отдачи (в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ ). Но в силу симметрии задачи в системе, где  $\mathbf{p}_2 = 0$ , электрон с импульсом  $p_1$  излучает так же, как электрон с импульсом  $p_2$  в  $\mathcal{L}$ -системе, а при пересчете сечения  $d\sigma/d\omega d \cos \vartheta$   $\omega$  и  $\cos \vartheta$  преобразуются друг через друга. Возникает еще вопрос: не могут ли отброшенные члены  $\sim 1/\nu, \kappa_1/\kappa_2$  стать существенными после перехода из системы в систему [ $\kappa_2 = \omega, \kappa_1 = \omega (\varepsilon - p \cos \vartheta_1) \sim \kappa_2/\nu$  в существенной области]. Это не так, поскольку и в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ , можно считать  $\kappa_1/\kappa_2 \sim 1/\nu$ , поскольку вклад дает верхний предел по  $\kappa_2$ .

**23.3. Анализ интерференционных членов.** В случае электрон-электронных соударений оценку интерференционных членов можно провести с помощью неравенства Шварца [ср. (21.72)]. Например, вклад интерференции диаграмм, на которых излучают разные начальные частицы  $\{(A, B), (A', B'), (AB'), (A'B)\}$ , можно оценить с помощью неравенства

$$d\sigma_{int}/d\kappa_1 d\kappa_2 \leq 2\sqrt{(d\sigma_A/d\kappa_1 d\kappa_2)(d\sigma_B/d\kappa_1 d\kappa_2)}. \quad (23.33)$$

Подставив сюда  $d\sigma_A$  (23.25)—(23.27) и  $d\sigma_B = d\sigma_A$  ( $1 \leftrightarrow 2$ ) и взяв старшие члены разложений, получим (с точностью до коэффициента)

$$d\sigma_{int} \lesssim (r_0^2 \alpha/\nu)_i^2 (d\kappa_1/\kappa_1) (d\kappa_2/\kappa_2) L. \quad (23.34)$$

Членами такого типа пренебрегали. Малость интерференционных членов обусловлена тем, что в  $\mathcal{C}$ -системе: 1) существенный вклад дают только малые углы рассеяния; 2) все частицы являются ультра-релятивистскими и излучают в узкие конусы в направлении своего движения. Остается рассмотреть интерференцию прямых и обменных диаграмм  $(AA'), (BB')$ , на которых излучает одна и та же начальная частица, и поэтому не имеет смысла пользоваться неравенством (23.33). В этом случае малость интерференции следует, например, из того, что для диаграммы  $A$   $\Delta_1^2 \lesssim 1$ , а для диаграммы  $A'$   $\Delta_1'^2 \lesssim 1$  в существенной области, но  $\Delta_1'^2 = -\Delta_1^2 + 2(\nu - \kappa_1 - 1)$  и вне области конца спектра  $\nu - \kappa_1 \sim \nu$  (в конце спектра  $\nu - \kappa_1 \sim 1$ ), поэтому в области, где  $\Delta_1^2 \lesssim 1$ ,  $\Delta_1'^2 \sim \nu$ , следовательно, нет области передач импульса, где одновременно оба сечения  $d\sigma_A$  и  $d\sigma_{A'}$  были бы велики. Поскольку излучают разные конечные частицы, то для оценки интерференционного члена можно воспользоваться неравенством Шварца, но для сечений  $d\sigma_A/d\omega d\kappa_1$  и т. д. Эти соображения применимы для интерференции диаграмм  $B, B'$ .

В случае электрон-позитронных соударений интерференция диаграмм ( $AB$ ) выпадает согласно (23.24). Вклад аннигиляционных диаграмм найден в § 22 [см. (22.4), (22.11)], где следует положить  $m = \mu = 1$ . Проведенный там анализ показал, что порядок сечения для диаграмм, на которых излучает конечная частица (не выписывая логарифмического фактора),

$$d\sigma_{A'} \lesssim (\alpha^3/\nu) \cdot (d\kappa_1 d\kappa_2/\kappa^2), \quad (23.35)$$

а для диаграмм, на которых излучает начальная частица\*,

$$d\sigma_{B'} \lesssim [\alpha^3/(\nu - \kappa)] [d\kappa_1 d\kappa_2/\kappa_1 \kappa_2]. \quad (23.36)$$

Если  $\nu - \kappa \sim \nu$ , то это члены  $\sim 1/\nu$ . Такой же порядок имеет и интерференция диаграмм  $A, B$  с аннигиляционными, что следует для интерференции диаграмм\*\* ( $A, A'$ ) из (23.33). Однако для установления этого факта для интерференции диаграмм ( $AB'$ ), ( $BB'$ ) неравенства (23.33) недостаточно (оно дает  $\sim 1/\sqrt{\nu}$ ), поскольку фотоны летят в конусы вокруг  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , хотя эти конусы «логарифмические».

Резюмируя полученные результаты, имеем, что в случае электрон-электронного столкновения интерференционные члены диаграмм ( $AB$ ), ( $A'B'$ ), ( $AB'$ ), ( $A'B$ ) имеют малость  $1/\nu$ , а интерференционные члены для диаграмм ( $AA'$ ), ( $BB'$ ) имеют порядок  $1/(\nu - \kappa)$  ( $\mathcal{C}$ -система) и  $1/(\nu - \kappa_1)$  ( $\mathcal{L}$ -система). В случае электрон-позитронного рассеяния вклад диаграмм  $A'$  и их интерференции с  $A, B$  (как и интерференции  $A$  и  $B$ )  $\sim 1/\nu$ , интерференция с  $B'$  равна нулю, а вклад диаграмм  $B'$  и их интерференции с  $A, B \sim 1/(\nu - \kappa)$  ( $\mathcal{C}$ -система),  $\sim 1/(\nu - \kappa_1)$  ( $\mathcal{L}$ -система).

23.4. Жесткий конец спектра. Полный спектр тормозного излучения с учетом жесткого конца спектра вычислен в [20]. Используя его, можно оценить также границу применимости принятого выше приближения. В конце спектра  $\nu - \kappa = 1$  (23.3), (23.4), поэтому необходимо учесть вклады, опущенные по критерию  $1/(\nu - \kappa) \sim 1/\nu$ . Для электрон-электронного соударения ( $d\sigma_e$ ) это вклады интерференции диаграмм  $AA'$ ,  $BB'$ ; для электрон-позитронного соударения ( $d\sigma_p$ ) — вклады интерференции диаграмм  $AB'$ ,  $BB'$  и вклад аннигиляционной диаграммы  $B'$ , так что сечения  $d\sigma_e$  и  $d\sigma_p$  различны:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_e &= d\sigma_A + \frac{1}{2} d\sigma_{AA'} + (1 \leftrightarrow 2); \\ d\sigma_p &= d\sigma_A + d\sigma_{AB'} + (1 \leftrightarrow 2) + d\sigma_{B'}. \end{aligned} \right\} \quad (23.37)$$

\* Обратим внимание на тот факт, что излучаемые фотоны как при тормозном излучении, так и в аннигиляционном процессе летят в конуса в направлении движения начальных частиц. Однако эти конусы существенно различны: в первом случае они степенные ( $d\kappa_2/\kappa_2^2$ ), а во втором только логарифмические ( $d\kappa_2/\kappa_2$ ).

\*\* Если применять неравенство Шварца не к дифференциальным по  $\kappa_1, \kappa_2$  сечениям, а к спектрам, то получится менее сильное утверждение, что  $d\sigma_{int}(A A') \lesssim (\alpha^2/\sqrt{\nu}) (d\omega/\omega)$ .

Физически понятна существенность интерференции в конце спектра. Для вклада диаграммы  $A$  вклад дают  $\Delta_1^2 = -(p_1 - p_3)^2 \lesssim 1$ , а для вклада диаграммы  $A'$  —  $\Delta_1'^2 = -(p_1 - p_4)^2 \lesssim 1$ . Интерференция дает вклад, когда  $p_3$  и  $p_4$  направлены почти по  $p_1$ , что действительно имеет место в конце спектра. При  $\omega_r = 2\varepsilon$  ( $\varepsilon - 1$ )/(2\varepsilon - 1) электрон после излучения может остановиться, а при

$\omega = \omega_c^m$  (23.4) оба конечных электрона летят по одной прямой в направлении, обратном  $k$ . Явный вид сечений приведен в [20]. Только  $d\sigma_B$  содержит большой логарифм  $\ln(2\nu)$ , а остальные вклады в  $d\sigma_e$ ,  $d\sigma_p$  (23.37) — нет. Поэтому  $d\sigma_p$  значительно превышает  $d\sigma_e$ , что видно на рис. 53, где при  $\varepsilon = 2 \cdot 10^3$  приведены  $d\sigma_e$ ,  $d\sigma_p$  и  $d\sigma_c$  (23.28), (23.29).

Отметим в заключение, что сечения  $d\sigma_e$ ,  $d\sigma_p$  отличаются от приближенной формулы (23.28), (23.29) только при  $\varepsilon - \omega \ll 1$ . Эта область частот вносит

весьма малый вклад в интегральное по частоте сечение. Поэтому аппроксимация всего спектра формулами типа (23.28), (23.29) является достаточно хорошей, если не интересоваться специально самым концом спектра.

## § 24. ДВОЙНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ЭЛЕКТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

24.1. Спектр двойного тормозного излучения. Процесс двойного тормозного излучения, т. е. излучения двух фотонов при электрон-электронном или электрон-позитронном соударении, уже обсуждался нами в случае мягких фотонов в разделе 6.4. Теперь рассмотрим эту задачу для фотонов с произвольной частотой [8, 9, 11, 22]. Процесс двойного тормозного излучения представляется сорока фейнмановскими диаграммами (20 прямых, 20 обменных или аннигиляционных). Из двадцати диаграмм двенадцать отвечают излучению обоих фотонов одним из электронов, а восемь —

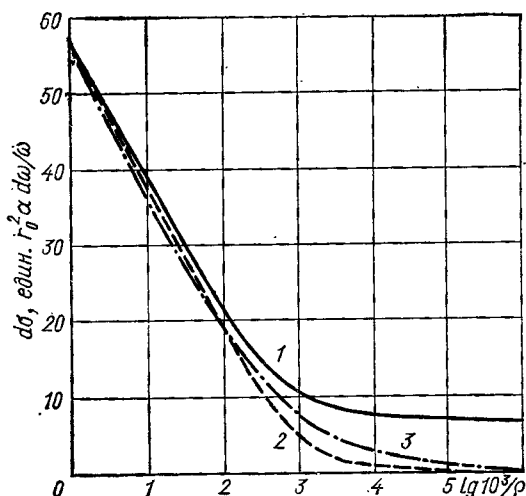


Рис. 53. Форма конца спектра тормозного излучения при электрон-электронном соударении (2) и электрон-позитронном соударении (3) при энергии  $\varepsilon = 1$  Гэв в Ц-системе. Для сравнения приведено сечение (23.28) — (23.29) (1),  $\rho = r \varepsilon^2 (1 - \omega/\varepsilon - 1/\varepsilon^2)$ , значение  $\rho = 0$  соответствует концу спектра.

излучению фотонов разными электронами, из них четыре изображены в виде блочной диаграммы на рис. 54, другие четыре получаются перестановкой фотонных линий.

Обозначим  $p_1, p_2$  — импульсы начальных частиц, а  $p_3, p_4$  — импульсы конечных,  $k_1 (\omega_1, \mathbf{k}_1), k_2 (\omega_2, \mathbf{k}_2)$  — импульсы фотонов, масса электрона  $m_e = 1$ . Рассмотрение будем вести в  $\zeta$ -системе сталкивающихся частиц в предположении, что  $(p_1, p_2) = v = \varepsilon^2 + p^2 \gg 1$  [ $p_1 = (\varepsilon, \mathbf{p}), p_2 = (\varepsilon, -\mathbf{p})$ ], и не рассматривать жесткий конец спектра, т. е.  $\varepsilon - \omega_{1,2} \gg 1$ , тогда конечные частицы будут ультра-релятивистскими ( $\varepsilon_{3,4} \gg 1$ ). Заметим, что в процессе двойного тормозного излучения возможно излучение одного или двух жестких фотона с энергией  $\omega \approx (\varepsilon - 1)$ . Для того чтобы убедиться в этом, найдем область кинематически допустимых значений  $\omega_1, \omega_2$ . Очевидно, что при фиксированной энергии  $\omega_2$  величина  $\omega_1$  будет достигать максимального значения в том случае, когда  $p_3, p_4, k_2$  будут направлены против направления импульса  $k_1$ , причем  $|p_3| = |p_4|$ . Взяв равенство  $(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$  при этих условиях, получим уравнение

$$(\varepsilon - \omega_1)(\varepsilon - \omega_2) = 1. \quad (24.1)$$

Область в плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  приведена на рис. 55. В случае, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon - 1$ , конечные фермионы покоятся, т. е. фотоны принимают всю кинетическую энергию начальных частиц. Область вблизи конца спектра обсудим ниже.

Проведенный в разделе 23.2 анализ процесса однократного тормозного излучения позволяет составить простую качественную картину рассматриваемого процесса. Действительно, так как существенны малые углы рассеяния и малые углы излучения, то и в случае излучения двух фотонов они будут испускаться в узкие конусы вдоль направлений  $p_1 = \mathbf{p}$  и  $p_2 = -\mathbf{p}$ . Ясно, что они могут испускаться в один конус, т. е. в одном направлении в том случае, когда они излучаются одной частицей, и в два конуса, т. е. в противоположных направлениях, в том случае, когда фотоны излучаются разными частицами (см. рис. 54).

Основной практический интерес представляет случай, когда фотоны разлетаются в противоположные стороны. В соответствии с этим будем вычислять дифференциальное по частотам и углам вылета фотонов сечение при произвольных частотах (при условии  $\varepsilon - \omega_{1,2} \gg 1$ ) и в противоположные конусы. Такая постановка вопроса определяет отбор диаграмм. Вклад будут давать только диаграммы, на которых излучают разные частицы. Более того, можно

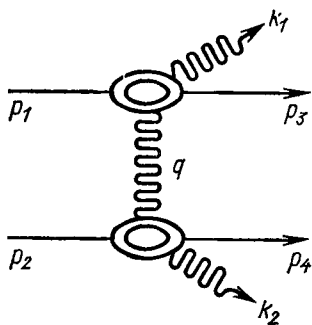


Рис. 54. Блочная диаграмма двойного тормозного излучения.

ограничиться рассмотрением блочной диаграммы на рис. 54 (т. е. четырех фейнмановских диаграмм). В самом деле, обменные диаграммы (в случае электрон-электронного столкновения) после интегрирования по конечным состояниям электронов дают такой же вклад, как и прямые, а в силу тождественности электронов результат следует разделить на 2, поэтому можно рассматривать только прямые диаграммы и не учитывать тождественности электронов. При излу-

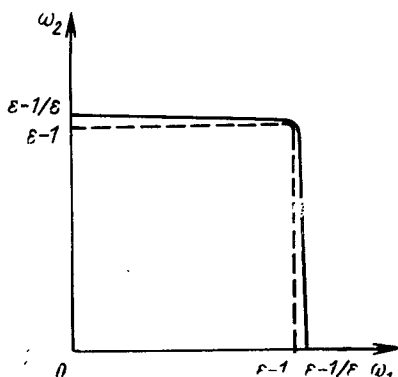


Рис. 55. Область допустимых значений энергии фотонов при двойном тормозном излучении.

чению не слишком жестких фотонов передаваемый импульс на аннигиляционных диаграммах (в случае электрон-позитронных столкновений), как уже неоднократно отмечалось в § 22 и 23, имеет порядок  $\epsilon^{-2}$ , и, следовательно, вклад этих диаграмм мал. Таким образом, полученные результаты будут одинаково справедливы для случая электрон-позитронного и электрон-электронного столкновений, поскольку интерференционные члены между прямыми и обменными диаграммами и прямыми и аннигиляционными диаграммами малы по тем же причинам, что и для процесса однократного

тормозного излучения. Итак, рассмотрим диаграмму рис. 54, добавив к ней диаграмму, на которой переставлены фотонные импульсы, и разделим на 2 в силу тождественности фотонов. Поскольку интерференция между этими диаграммами мала, так как фотоны летят в разные конусы, то можно рассматривать только диаграмму на рис. 54 и не учитывать тождественность фотонов.

Вклад диаграммы рис. 54 в сечение можно записать в виде

$$d\sigma = [1/16 (2\pi)^8 \sqrt{v^2 - 1}] \int g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_2, p_4, q, k_2) \times$$

$$\times g_{\rho'\sigma'} K^{(1/2)\mu\nu\rho'\sigma'}(p_1, p_3, -q, k_1) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 -$$

$$- k_1 - k_2) (d^3p_3/2\epsilon_3) (d^3p_4/2\epsilon_4) (d^3k_1/2\omega_1) (d^3k_2/2\omega_2) / \Delta^4, \quad (24.2)$$

где  $q = p_1 - p_3 - k$ ;  $\Delta^2 = -q^2$ ; тензор  $g_{\rho\sigma} K^{(1/2)\mu\nu\rho\sigma}$  определен формулой (21.5), в которой следует положить  $m = 1$ . Как уже отмечалось, в сечение однократного тормозного излучения дает вклад «укороченный тензор» (23.16). При переходе к двойному тормозному излучению происходят дальнейшие упрощения. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим частный случай, когда один из фотонов является мягким, следовательно, его излучение можно найти с помощью метода, изложенного в разделе 6.4, а второй обладает



произвольной частотой. В соответствии с общим правилом (6.23) сечение процесса в случае, когда жесткий фотон испускается частицей  $p_2$ ,

$$d\sigma = d\sigma_A dW(k_1), \quad (24.43)$$

где  $d\sigma_A$  — вклад диаграммы  $A$  (см. рис. 51) в сечение однократного тормозного излучения. Воспользовавшись для него формулой (23.32) и проведя интегрирование в  $dW(k_1)$  по углу вылета фотона (6.30), приходим к выражению

$$d\sigma = 4\pi\alpha^2 (d\Delta^2/\Delta^4) dU(\Delta^2, \omega_2) dI(\Delta^2, \omega_1), \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} dU(\Delta^2, \omega_2) = & (2\alpha d\omega_2/\pi\omega_2) \{ (1 - \omega_2/\varepsilon) \Phi(\Delta^2/4) + \\ & + [\omega_2^2 \Delta^2/\varepsilon^2 \sqrt{\Delta^2(\Delta^2 + 4)}] \ln(\sqrt{\Delta^2/4} + \sqrt{1 + \Delta^2/4}) + \\ & + \omega_2^2 \Delta_{\text{мин}}^2/4\varepsilon^2 + 2(1 - \omega_2/\varepsilon) \Delta_{\text{мин}}^3/3\sqrt{\Delta^2} - \\ & - \sqrt{\Delta^2} \Delta_{\text{мин}}^2 [(1 + (1 - \omega_2/\varepsilon)^2)/2 + \\ & + (1 - \omega_2/\varepsilon)] \Delta_{\text{мин}}^2/2 \ln(\Delta^2/\Delta_{\text{мин}}^2) \}; \end{aligned} \quad (24.5)$$

$$dI(\Delta^2, \omega_1) = (2\alpha d\omega_1/\pi\omega_1) \Phi(\Delta^2/4). \quad (24.6)$$

Здесь  $\Delta_{\text{мин}}^2 = \omega_2^2/16\varepsilon^6 (1 - \omega_2/\varepsilon)^2$ , в формуле (23.32) мы положили  $\kappa_1/v = \omega_2/\varepsilon$ ;  $d\kappa_1/\kappa_1 = d\omega_2/\omega_2$ ,  $\Delta_1^2 = \Delta^2$ . Обсудим теперь сечение  $d\sigma$  (24.4). Чтобы получить спектр излученных фотонов, необходимо провести интегрирование по  $\Delta^2$  ( $\Delta_{\text{мин}}^2 \leq \Delta^2 \leq \Delta_{\text{макс}}^2$ ). При  $\Delta^2 \ll 1$   $\Phi(\Delta^2/4) = (4\Delta^2/3)[1 + O(\Delta^2)]$  [см. (6.35)]. Отсюда видно, что  $dI(\Delta^2, \omega_1)$  и  $dU(\Delta^2, \omega_2)$  ведут себя при  $\Delta^2 \ll 1$  так, что область  $\Delta^2 \sim \Delta_{\text{мин}}^2$  не дает вклада в интеграл по  $\Delta^2$  (входят члены вида  $\int_{\Delta_{\text{мин}}^2} d\Delta^2$ ,  $\Delta_{\text{мин}}^2 \int_{\Delta_{\text{мин}}^2} d\Delta^2/\Delta^2$

и т. д.), т. е. имеет место та же ситуация, которая была в задаче об излучении двух мягких фотонов. Поскольку  $\Delta_{\text{мин}}^2 \sim 1/\varepsilon^4$ , то при вычислении главных по  $1/\varepsilon^2$  членов в выражении для сечения можно положить  $\Delta_{\text{мин}}^2 = 0$ . При  $\Delta^2 \gg 1$   $\Phi(\Delta^2/4) \sim \ln \Delta$ , следовательно, ввиду сходимости интеграла  $\Delta^2 \gg 1$  также вклада не дают. Учитывая, что  $\Delta_{\text{макс}}^2 \sim \varepsilon^2$ , можно с этой точностью положить  $\Delta_{\text{макс}}^2 \rightarrow \infty$ , как и в разделе 6.4. Следовательно, существенной областью передач импульса является  $\Delta_{\text{мин}}^2 \ll \Delta^2 \sim 1 \ll \Delta_{\text{макс}}^2$ . По этой причине в выражении для  $dU(\Delta^2, \omega_2)$  можно отбросить все члены, содержащие  $\Delta_{\text{мин}}^2$  (их порядок  $\sim 1/\varepsilon^2$ ), так что выражение для  $dU(\Delta^2, \omega_2)$  заметно упрощается:

$$\begin{aligned} dU(\Delta^2, \omega_2) = & (2\alpha d\omega_2/\pi\omega_2) \{ (1 - \omega_2/\varepsilon) \Phi(\Delta^2/4) + \\ & + [\omega_2^2 \Delta^2/\varepsilon^2 \sqrt{\Delta^2(\Delta^2 + 4)}] \ln(\sqrt{\Delta^2/4} + \sqrt{1 + \Delta^2/4}) \}. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Если бы анализ велся на более раннем этапе (до интегрирования по углам вылета фотонов), то точно так же легко установить,

что в квадрате матричного элемента [см., например, (23.15)] можно отбросить члены, которые стали существенными из-за вклада области  $\Delta^2 \sim \Delta_{\text{мин}}^2$ . Такими членами являются  $\kappa_2/\kappa_4$  и  $\kappa_4/\kappa_2$  [ср. (21.31) и ниже], а все остальные члены дают вклад.

Выполняя интегрирование по  $\Delta^2$  в (24.4), получаем [ср. (6.55), (6.59)] спектр двойного тормозного излучения при электрон-электронных и электрон-позитронных соударениях:

$$d\sigma = 4\pi\alpha^2 \int_0^\infty (d\Delta^2/\Delta^4) dU(\Delta^2, \omega_2) dI(\Delta^2, \omega_1) = \\ = (8r_0^2 \alpha^2/\pi) (d\omega_1 d\omega_2/\omega_1 \omega_2) \{ \eta_1 (1 - \omega_2/\varepsilon) + \eta_2 \omega_2^2/\varepsilon^2 \}, \quad (24.8)$$

где константы

$$\eta_1 = 5/4 + \eta_3; \quad \eta_2 = 1/2 + \eta_3, \quad \eta_3 = 7\zeta(3)/8, \quad (24.9)$$

$\zeta(3)$  — дзета-функция Римана;  $7\zeta(3)/8 = \eta_3 = 1,052$ .

Для получения спектра в случае обоих жестких фотонов воспользуемся следующими соображениями. Формула (24.4) имеет такой же вид, как (6.53) ( $x^2 = \Delta^2/4$ ), только одна из функций  $dI(\Delta^2, \omega) \rightarrow dU(\Delta^2, \omega)$ , она может быть интерпретирована так же, как (6.53): множитель  $4\pi\alpha d\Delta^2/\Delta^4$  — вероятность процесса рассеяния с передачей  $\Delta^2$ ,  $dI(\Delta^2, \omega_1)$  — вероятность излучения мягкого фотона при заданной передаче  $\Delta^2$ ;  $dU(\Delta^2, \omega)$  — вероятность излучения жесткого фотона при заданной передаче  $\Delta^2$ . Именно такой смысл имеет величина  $dU(\Delta^2, \omega_2)$  в (24.4). Мультипликативный характер формулы (24.4) обусловлен следующими причинами. Как указывалось в разделе 23.2, в ультрарелятивистской области быстрая излучающая частица сама «обеспечивает» энергией излучаемый фотон, а процесс излучения совершенно не зависит от того, каким механизмом обеспечивается передача импульса  $\Delta^2$ , причем  $\Delta^2$  существенно малы. А такая ситуация как раз характерна для излучения мягких фотонов, где сечение излучения всегда имеет мультипликативную форму. Поэтому формы  $dU(\Delta^2, \omega)$  (24.5) и (24.7) являются прямым обобщением\*  $dI(\Delta^2, \omega)$  (6.30), очевидно, что  $dU(\Delta^2, \omega) \rightarrow dI(\Delta^2, \omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Напомним, что в выражении для  $dU(\Delta^2, \omega)$  учитывались законы сохранения энергии импульса при излучении фотона, но пренебрегалось передачей энергии от одной заряженной частицы к другой, так как эта передача оказывается малой. Поскольку в рассматриваемом случае каждый из электронов излучает по одному фотону, то в соответствии с приведенными соображениями процесс излучения при заданной передаче импульса  $\Delta^2$  протекает независимо для каждой из заряженных частиц\*\*. Поэтому сечение двойного тормозного

\* Область применимости  $dU(\Delta^2, \omega)$ , конечно, существенно уже, чем  $dI(\Delta^2, \omega)$ .

\*\* Более строго это показано в работах [8, 9].

излучения можно представить в виде

$$d\sigma = 4\pi r_0^2 \int d\Delta^2 dU(\Delta^2, \omega_1) dU(\Delta^2, \omega_2) / \Delta^4. \quad (24.10)$$

Как и в рассмотренном выше случае, в интеграл по  $\Delta^2$  основной вклад дает область  $\Delta^2 \sim 1$ , а интегрирование можно вести от 0 до  $\infty$ . Проводя интегрирование, получаем [ср. (6.55), (6.59)] спектр двойного тормозного излучения в случае жестких фотонов:

$$d\sigma = (8r_0^2 \alpha^2 / \pi) (d\omega_1 / \omega_1) (d\omega_2 / \omega_2) \{ (1 - \omega_1 / \varepsilon) (1 - \omega_2 / \varepsilon) \eta_1 + \\ + [(1 - \omega_1 / \varepsilon) \omega_2^2 / \varepsilon^2 + \\ + (1 - \omega_2 / \varepsilon) \omega_1^2 / \varepsilon^2] \eta_2 + \omega_1^2 \omega_2^2 \eta_3 / \varepsilon^4 \}. \quad (24.11)$$

Константы  $\eta$  приведены в (24.9), при  $\omega_1 / \varepsilon \ll 1$  формула (24.11) переходит в (24.8), а при  $\omega_{1,2} / \varepsilon \ll 1$  — в (6.55).

Заметим, что в рамках принятых приближений выражение для сечения  $d\sigma/d\Delta^2$  имеет строго мультипликативную форму, т. е. является произведением двух множителей, каждый из которых зависит от частоты только одного из фотонов. Вследствие того, что имеется некоторая корреляция в зависимости сечения  $d\sigma/d\Delta^2$  от  $\omega_{1,2}$  и  $\Delta^2$ , сечение (24.11) не имеет мультипликативной формы. Однако эта корреляция весьма мала, и с хорошей численной точностью ( $\lesssim 1\%$ ) сечение (24.11) можно представить в мультипликативной форме (т. е.  $\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3$ ),

$$d\sigma = (8r_0^2 \alpha^2 / \pi) R(\omega_1) R(\omega_2) (d\omega_1 / \omega_1) (d\omega_2 / \omega_2), \quad (24.12)$$

где

$$R(\omega) = \sqrt{\eta_1} (1 - \omega / \varepsilon) + \sqrt{\eta_3} \omega^2 / \varepsilon^2. \quad (24.13)$$

24.2. Угловое распределение излучаемых фотонов. Перейдем теперь к вычислению сечения, дифференциального по углам вылета фотона. Будем исходить из формулы (24.2). При проведении свертки с «укороченным тензором» (23.16) имеют место дальнейшие упрощения, связанные с тем, что  $\Delta^2 \sim \Delta_{\text{МН}}^2$  не дают вклада. В свертке  $g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_2, p_4, q, k_2)$  (23.16) можно считать, что  $\kappa_{24}, \kappa_{22}, \Delta^2 \sim 1$  [ $\kappa_{nm} = (k_n p_m)$ ], компоненты векторов  $p_2, (k_2) \sim \varepsilon$ ,  $(\omega_2)$ , компоненты вектора  $q \sim 1$  ( $q^2 = -\Delta^2$ ), кроме того, существенны малые углы между  $p_2$  и  $k_2$ , т. е. можно положить  $k_{2\mu} = \omega_2 p_{2\mu} / \varepsilon$ . Учитывая это и оставляя в тензоре только старшие члены, получаем

$$-g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_2, p_4, q, k_2) = 8e^4 p_{2\mu} p_{2\nu} N_2, \quad (24.14)$$

где

$$N_2 = -1/\kappa_{24}^2 - (1 - \omega_2 / \varepsilon)^2 / \kappa_{22}^2 + \\ + \{ \Delta^2 [1 + (1 - \omega_2 / \varepsilon)^2] / 2 + 2(1 - \omega_2 / \varepsilon) \} / \kappa_{22} \kappa_{24}, \quad (24.15)$$

и аналогично для  $g^{\rho\sigma} K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1/2)}(p_1, p_3, -q, k_1)$ . Подставляя эти свертки в формулу (24.2), получаем дифференциальное сечение двойного тормозного излучения, которое справедливо с точностью до членов, дающих вклад в спектр  $\sim \varepsilon^{-2}$ :

$$d\sigma = [8r_0^2 \alpha^2 \varepsilon^2 / (2\pi)^4] \int (d^4 q / q^4) \int N_1 \delta(p_1 - q - p_3 - k_1) (d^3 k_1 / \omega_1) \times \\ \times (d^3 p_3 / \varepsilon_3) \int N_2 \delta(p_2 + q - p_4 - k_2) (d^3 k_2 / \omega_2) (d^3 p_4 / \varepsilon_4), \quad (24.16)$$

где  $N_2$  дается формулой (24.15);  $N_1 = N_2$  ( $2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ ). В формуле (24.16) была введена дополнительная  $\delta$ -функция, чтобы разделить вклады излучения каждой из частиц. Перейдем теперь к ковариантным переменным. Последний интеграл в (24.16) такого же типа, как рассмотренный в Приложении Г интеграл  $V_1^2$  (Г.11) — (Г.19), где в качестве «постороннего» вектора входит  $p_1$  [в  $N_2$  (24.15) входит  $\omega_2 = k_2(p_1 + p_2) / \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ ]. С учетом этого можно записать:

$$\int N_2 \delta(p_2 + q - p_4 - k_2) (d^3 p_4 / \varepsilon_4) (d^3 k_2 / \omega_2) = \\ = 4\varepsilon \int N_2 d\kappa_{22} d\omega_2 / \sqrt{-S(p_1, p_2, p_4, k_2)}. \quad (24.17)$$

Функция  $S(p_1, p_2, p_4, k_2)$  выражается через ковариантные переменные  $\nu, \kappa_{21}, \kappa_{22}, \kappa_{24}, \Delta^2 = -q^2$  и  $(p_1 p_4)$ . Остановимся на последней зависимости. Если бы фотон  $k_1$  не излучился, то  $p_1 p_4$  выражалась бы с помощью соотношения  $p_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k_2) = 0$ , т. е.  $p_1 p_4 = \nu - \kappa_{21} - \Delta^2/2$ . В нашем случае  $(p_1 p_4) = \nu - \kappa_{21} - \Delta^2/2 - \kappa_{13}$ . Учитывая, однако, что в существенной области малых углов ( $\sim 1/\varepsilon$ ) излучения и рассеяния  $\kappa_{13} \sim 1$ , а главные члены в  $S \sim \varepsilon^4$ , можно с точностью до членов  $\sim 1/\varepsilon^2$  использовать для функции  $S$  то же выражение, что и для однократного тормозного излучения [см. (21.10), (23.6), (23.7)], упростив его с учетом того, что малые передачи импульса  $\Delta^2$  вклада не дают. Тогда в (21.10) можно оставить только старшие члены  $\sim \varepsilon^4$ , в результате чего найдем

$$S = (c_2 \kappa_{24}^2 - 2b_2 \kappa_{24} + a_2) 4\varepsilon^4, \quad (24.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= (1 - \omega_2/\varepsilon)^2; & b_2 &= (1 - \omega_2/\varepsilon) \{ \kappa_{22} + \Delta^2 \omega_2 / 2\varepsilon \}; \\ a_2 &= (\kappa_{22} - \Delta^2 \omega_2 / 2\varepsilon)^2 + \omega_2^2 \Delta^2 / \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (24.19)$$

Все выражения для интеграла с  $N_1$  в (24.16) получаются заменой  $2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ . Перейдем к обсуждению интеграла  $\int d^4 q$ . В системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ , можно провести следующие преобразования:

$$\int d^4 q = \int d^4 q \delta(\Delta^2 - q^2 + q_0^2) \delta(\kappa_{13} + \Delta^2/2 + q_0) \delta(\kappa_{24} + \\ + \Delta^2/2 - q_0 \varepsilon_2 + |\mathbf{q}| |\mathbf{p}_2| \cos \vartheta) d\Delta^2 d\kappa_{13} d\kappa_{24} = \\ = (\pi / |\mathbf{p}_2|) \int d\Delta^2 d\kappa_{13} d\kappa_{24} = (\pi / \sqrt{v^2 - 1}) \int d\Delta^2 d\kappa_{13} d\kappa_{24}. \quad (24.20)$$

Подставляя (24.17), (24.20) в (24.16), имеем

$$d\sigma = [32r_0^2 \alpha^2 \varepsilon^2 / (2\pi)^3] d\omega_1 d\omega_2 d\kappa_{22} d\kappa_{11} \int d\Delta^2 dR_1 dR_2 / \Delta^4, \quad (24.21)$$

где

$$dR_2 = N_2 d\kappa_{24} / \sqrt{-S(p_1, p_2, p_4, k_2)}; \quad dR_1 = dR_2 (2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3). \quad (24.22)$$

Функции  $N_2$  и  $S(p_1, p_2, p_4, k_2)$  приведены выше (24.15) и (24.18). Интегралы  $\int dR_2$ ,  $\int dR_1$  берутся как стандартный первый интеграл задачи о тормозном излучении, согласно (Г.40), (Г.41) Приложения Г. В итоге

$$\int dR_2 = \pi \tilde{N}_2 / 2\varepsilon^2; \quad \int dR_1 = \pi \tilde{N}_1 / 2\varepsilon^2, \quad (24.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{N}_2 &= \left[ -b_2/a_2^{3/2} - (1 - \omega_2/\varepsilon)^2 / \kappa_{22}^2 c_2^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \{\Delta^2 [1 + (1 - \omega_2/\varepsilon)^2] + 4(1 - \omega_2/\varepsilon)\} / 2\kappa_{22} a_2^{1/2} \right]; \\ \tilde{N}_1 &= \tilde{N}_2 (2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3); \end{aligned} \right\} \quad (24.24)$$

значения  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  приведены выше (24.19). В результате имеем

$$d\sigma = (r_0^2 \alpha^2 / \pi \varepsilon^2) d\omega_1 d\omega_2 d\kappa_{11} d\kappa_{22} \int d\Delta^2 \tilde{N}_2 \tilde{N}_1 / \Delta^4; \quad (24.25)$$

Чтобы получить дифференциальное по углам вылета и частотам фотонов сечение, необходимо взять интеграл по  $\Delta^2$  ( $0 \leq \Delta^2 \leq \infty$ ). Однако практический интерес представляет интегральное по *заданному* телесному углу сечение двойного тормозного излучения. Очевидно, что когда этот угол будет существенно превышать  $1/\varepsilon$ , то в него будут попадать почти все излученные фотоны, и мы придем к сечению (24.11) и (24.12). Положение меняется, если размеры телесного угла, излучение фотонов в который мы рассматриваем, сравнимы с  $1/\varepsilon$ . Ясно, что зависимость сечения от размеров телесного угла является характеристикой, которую можно непосредственно сравнить с опытом. В соответствии со сказанным найдем излучение в углы  $0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_{10}$ ,  $0 \leq \vartheta_2 \leq \vartheta_{20}$  для фотонов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Это означает в терминах  $\kappa_{22} = \omega_2 (\varepsilon - p \cos \vartheta_2)$   $\omega_2 / 2\varepsilon \leq \kappa_{22} \leq \omega_2 \kappa_0^{(2)} / \varepsilon$ . Если представить  $\vartheta_{20} = n_2 / \varepsilon$ , то при  $n_2 \ll \varepsilon$  имеем  $\kappa_0^{(2)} = n_2^2 / 2$ . Проводя простое интегрирование по  $\kappa_{11}$  и  $\kappa_{22}$  в (24.25) в указанных пределах, получаем следующее выражение для сечения двойного тормозного излучения:

$$\begin{aligned} d\sigma &= (8r_0^2 \alpha^2 / \pi) (d\xi_1 / \xi_1) (d\xi_2 / \xi_2) \times \\ &\times \int (dx/x^3) \{ (1 - \xi_1) \Phi(x^2) + [\xi_1^2 x / \sqrt{1 + x^2}] \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \\ &\quad - F(x, \kappa_0^{(1)}, \xi_1) \} \{ (1 - \xi_2) \Phi(x^2) + \\ &\quad + [\xi_2^2 x / \sqrt{1 + x^2}] \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - F(x, \kappa_0^{(2)}, \xi_2) \}, \quad (24.26) \end{aligned}$$

где

$$F(x, \kappa_0, \xi_1) = \left\{ \left[ (1 - \xi_1) + [2(1 - \xi_1) + \xi_1^2] x^2 \right] / x \sqrt{1 + x^2} \right\} \times \\ \times \ln \left[ (2x(1 + x^2) - x\kappa_0 + \sqrt{(1 + x^2)R_0}) / \kappa_0 [1 + x^2 - x] \right] - \\ - (1 - \xi_1) (1 + 1/\kappa_0 + (1 - \kappa_0 + 2x^2) / \sqrt{R_0}) / 4; \quad (24.27) \\ R_0 = (2x^2 - \kappa_0)^2 + 4x^2; \quad x^2 = \Delta^2 / 4; \quad \xi = \omega / \varepsilon.$$

Видно, что при  $\kappa_0 \rightarrow \infty$  функция  $F(x, \kappa_0, \xi_1) \rightarrow 0$ , так что формула (24.26) переходит в формулу (24.10). Легко видеть, что при  $x \rightarrow 0$  слагаемое  $F(x, \kappa_0, \xi_1)$ , подобно остальной части выражения, стоящего в фигурных скобках, пропорционально  $x^2$ , следовательно, как и прежде, нижний предел интегрирования по  $x$  можно положить равным нулю, аналогично верхний предел интегрирования по  $x$  — равным бесконечности.

Входящие в формулу (24.26) интегралы не удается вычислить в аналитическом виде. Поэтому они были найдены численно как функция  $\kappa_0(n)$  [14]. В случае, когда рассматривается излучение в одинаковые телесные углы  $n_2 = n_1$ , сечение двойного тормозного излучения в заданный угол представим в виде

$$d\sigma = (8r_0^2 \alpha^2 / \pi) \{ (1 - \omega_1 / \varepsilon) (1 - \omega_2 / \varepsilon) \eta_1(n) + \\ + [(1 - \omega_1 / \varepsilon) \omega_2^2 / \varepsilon^2 + (1 - \omega_2 / \varepsilon) \omega_1^2 / \varepsilon^2] \eta_2(n) + \\ + (\omega_1^2 \omega_2^2 / \varepsilon^4) \eta_3(n) \} (d\omega_1 d\omega_2 / \omega_1 \omega_2). \quad (24.28)$$

В области значений  $1 \ll n \ll \varepsilon$  оказывается возможным получить асимптотические выражения для коэффициентов  $\eta_m(n)$  в формуле (24.28)

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(n) &= 5/4 + 7\zeta(3)/8 - [10 \ln^2 n - \pi^2/2 + 11/2]/n^2; \\ \eta_2(n) &= 1/2 + 7\zeta(3)/8 - [10 \ln^2 n + 5 \ln n - \pi^2/2 + 9/2]/2n^2; \\ \eta_3(n) &= 7\zeta(3)/8 - [5 \ln^2 n + 5 \ln n - \pi^2/4 + 5/2]/2n^2. \end{aligned} \right\} \quad (24.29)$$

Начиная с  $n = 4$  результаты, получаемые с помощью формул (24.29), находятся в хорошем соответствии с результатами численного расчета [14].

Зависимость коэффициентов  $\eta_m(n)$  в (24.28) от  $n$  приведена\* на рис. 56. Заметим, что сечение (24.28) с малой численной погрешностью ( $< 2\%$ ) можно представить в форме (24.12) и (24.13).

Проведем теперь анализ полученных результатов. Как и в случае однократного тормозного излучения, при излучении фотона разными частицами (см. диаграмму рис. 54) каждый электрон передает

\* Аналогично проводится рассмотрение, когда  $n_1 \neq n_2$ , предельный случай  $\vartheta_{20} \gg 1/\varepsilon$ ,  $\vartheta_{10} \sim 1/\varepsilon$  проанализирован в работе [14].

энергию *излучаемому им самим* фотону, следовательно,  $\varepsilon_{3,4} = \varepsilon - \omega_{1,2}$  (в области, дающей существенный вклад), фотоны излучаются под углом  $\sim 1/\varepsilon$  к направлению движения излучающего начального электрона, угол отклонения конечного электрона порядка его обратной энергии, т. е.  $\sim 1/\varepsilon_3 = 1/(\varepsilon - \omega_1)$  ( $\sim 1/\varepsilon_4 = 1/(\varepsilon - \omega_2)$ ). Это означает, что поперечные импульсы конечных частиц — порядка их массы.

Как и в случае однократного тормозного излучения, использованный подход неприменим в конце спектра. В частности, когда оба фотона жесткие  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \varepsilon$ , конечные электроны

имеют энергию порядка массы, а когда  $\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon - 1$ , они вообще покоятся. В этой области становится существенной интерференция с обменными по электронным линиям диаграммами (уже отмечалось, что интерференция существенна, если совпадают угловые распределения фотонов и электронов, в конце спектра фотоны летят вперед, а конечные электроны распределены плавно). По указанным причинам не существенна интерференция диаграмм, отличающихся перестановкой фотонных линий.

Следует учитывать также, как в разделе 23.4, аннигиляционные диаграммы, на которых излучают начальные частицы (для электрон-позитронных соударений). Таким образом, картина излучения вблизи границы спектра меняется. Можно показать\*, что, как и в случае однократного тормозного излучения (см. раздел 23.4), полученные выше сечения неприменимы только в узкой полосе вблизи границы спектра шириной  $\sim 1$ . В этой полосе сечение не имеет высоких пиков, которые при интегрировании по интервалу с шириной  $\sim 1$  давали бы в сечение вклад типа  $r_0^2 \alpha^2$ . Следовательно, сечения (24.11), (24.28) и (24.30) применимы для всего спектра, если вблизи границы спектра брать интеграл по интервалу частот  $\delta\omega \gg 1$ .

Сделаем еще замечание относительно диаграмм, на которых оба фотона испускаются одним электроном и летят в одну сторону в направлении импульса электрона. Если фотоны мягкие, то сечение процесса дается (6.55) и (6.59) и отличается только численным

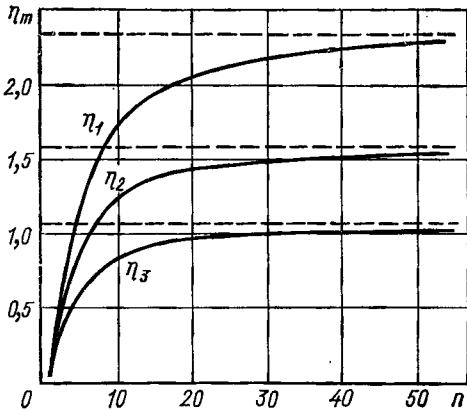


Рис. 56. Зависимость коэффициентов  $\eta_{1,2,3}$  в формуле (24.28) от  $n$ .

\* Подробный анализ области вблизи границы спектра проведен в работе [22].

множителем от сечения излучения в разные стороны. Такая ситуация сохраняется, пока  $\omega_1 + \omega_2 < \varepsilon$ . Если же  $\omega_1 + \omega_2 > \varepsilon$ , то:

1) фотоны не могут излучаться в одну сторону в силу закона сохранения импульса;

2) часть энергии фотонов берется от неизлучающего электрона, т. е. передача импульса становится большой. По этим причинам сечение излучения падает и при  $\omega_{1,2} \approx \varepsilon$  оказывается  $\sim 1/\varepsilon^2$ .

## § 25. РОЖДЕНИЕ ПАР ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОТОНА С ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ

В § 19 было рассмотрено рождение пары частиц фотоном в кулоновском поле. Теперь проведем анализ процесса рождения пары при взаимодействии фотона с заряженной частицей [15] (фоторождение

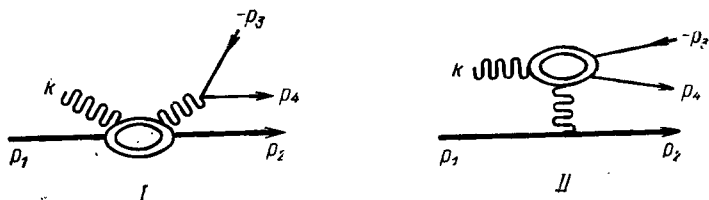


Рис. 57. Блочные диаграммы процесса фоторождения пары заряженных частиц.

ние пары частиц). Положим все частицы, участвующие в процессе, неполяризованными. В низшем порядке теории возмущений процесс представляется двумя блочными диаграммами (рис. 57), где использованы «блоки излучения» (см. рис. 21). Обозначим  $k$  — импульс фотона;  $p_1$  ( $p_2$ ) — импульс начальной (конечной) заряженной частицы ( $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ );  $s_i$  — ее спин;  $p_3, p_4$  — импульсы родившейся пары ( $p_3^2 = p_4^2 = \mu^2$ );  $s_j$  — их спин и будем полагать, что в процессе участвуют различные частицы. Вклад в сечение диаграмм I и II (см. рис. 57) обозначим соответственно  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$ . Поскольку пара на диаграммах I и II рождается в состояниях с противоположной  $C$ -четностью, так как  $C$ -четность фотона отрицательна, то интерференционный член вкладов диаграмм I и II меняет знак при перестановке  $p_3 \leftrightarrow p_4$ . По этой причине он обращается в нуль после суммирования по состояниям родившейся пары\*.

Таким образом, просуммированное по состояниям родившейся пары сечение процесса можно представить в виде

$$d\sigma = d\sigma_I + d\sigma_{II}. \quad (25.1)$$

\* На том же основании интерференционный член исчезает, если при детектировании процесса не различается знак заряда частиц родившейся пары.



Для получения искомого сечения весьма удобен изложенный в § 7 метод инвариантного интегрирования тензоров, аналогично тому как это делалось в задаче об излучении фотона в аннигиляционных процессах, причем сечения  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  можно получить из формул § 22 с помощью правила подстановки и преобразования соответствующих фазовых объемов. А именно  $d\sigma_I$  получается из (22.1), а  $d\sigma_{II}$  — из (22.7) с помощью замены

$$k \rightarrow -k; \quad p_2 \rightarrow -p_2; \quad [(-1)^{(2s_i)} / (2s_i + 1)] \times \\ \times [1 / \sqrt{v^2 - m^4}] d^3 k / 2\omega \rightarrow d^3 p_2 / 2\kappa_1 2\varepsilon_2, \quad (25.2)$$

где  $\kappa_i = kp_i$ ;  $s_i$  — спин аннигилирующих частиц. После перехода к ковариантным переменным согласно (Г.31), (Г.32) Приложения Г

$$\left. \begin{aligned} d^3 p_2 / 2\varepsilon_2 &= \pi d\Delta_1^2 d\Delta^2 / 4\kappa_1; \\ \Delta &= p_3 + p_4; \quad \Delta_1 = p_1 - p_2, \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

те же замены выглядят как

$$\left. \begin{aligned} [(-1)^{(2s_i)} / (2s_i + 1)] [d\kappa_1 d\kappa_2 / (v^2 - m^4)] &\rightarrow \left. \right\} \\ \rightarrow d\Delta_1^2 d\Delta^2 / 8\kappa_1^2; \quad \kappa_1 &\rightarrow -\kappa_1. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

Приведем теперь явный вид сечений:

$$d\sigma_I = [\alpha^3 d\Delta^2 / 24\kappa_1^2 \Delta^2] d\Lambda^2 \beta_0 g^{(s_i)} A_1^{(s_i)} / (2s_i + 1), \quad (25.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^2 &= -\Delta_1^2; \quad \beta_0 = \sqrt{(\Delta^2 - 4\mu^2) / \Delta^2}; \quad g^{(0)} = \beta_0^2 / 4; \\ g^{(1/2)} &= (\Delta^2 + 2\mu^2) / \Delta^2; \quad A_1^{(0)} = (4m^2 - \Delta^2) [m^2 (1/\kappa_1^2 + 1/\kappa_2^2) + \\ &\quad + 2(1/\kappa_1 - 1/\kappa_2) + (\Delta^2 - 2m^2) / \kappa_1 \kappa_2] + 8; \\ A_1^{(1/2)} &= 4(2m^2 + \Delta^2) [m^2 (1/\kappa_1^2 + 1/\kappa_2^2) + 2(1/\kappa_1 - 1/\kappa_2) + \\ &\quad + (\Delta^2 - 2m^2) / \kappa_1 \kappa_2] + 8(\kappa_1 / \kappa_2 + \kappa_2 / \kappa_1); \\ \kappa_2 &= kp_2 = \kappa_1 - (\Lambda^2 + \Delta^2) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

и сечение

$$d\sigma_{II} = (\alpha^3 d\Lambda^2 / 32\kappa_1^2 \Lambda^4) d\Delta^2 \beta_0 \left\{ I_{\rho_1}^{(s_i)} \left[ -4\Lambda^2 \Gamma_{\rho_2}^{(s_i)} / (\Lambda^2 + \Delta^2)^2 + \Gamma_{\rho_1}^{(s_i)} \right] - \right. \\ \left. - 4\Lambda^2 I_{\rho_2}^{(s_i)} \left[ \Gamma_{\rho_1}^{(s_i)} - 12\Lambda^2 \Gamma_{\rho_2}^{(s_i)} / (\Lambda^2 + \Delta^2)^2 \right] / (\Lambda^2 + \Delta^2)^2 \right\}, \quad (25.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 I_{\rho_1}^{(0)} &= [4/(\Delta^2 + \Lambda^2)^2] \{(\Delta^2 + 4\mu^2)[(\Delta^2 - 2\mu^2)L_1 - \Delta^2] - (\Delta^2 + \Lambda^2)^2\}; \\
 I_{\rho_2}^{(0)} &= L_1(\Delta^2 + 2\mu^2) - 3\Delta^2; \\
 I_{\rho_1}^{(1/2)} &= [4/(\Delta^2 + \Lambda^2)^2] \{8\mu^2\Delta^2 + 2\Lambda^4 + 2\Delta^4 - L_1[8\mu^2(\Delta^2 + \Lambda^2) + \\
 &\quad + 2\Delta^4 + 2\Lambda^4 - 16\mu^4]\}; \quad I_{\rho_2}^{(1/2)} = 4\Delta^2 - 8\mu^2 L_1; \\
 L_1 &= (1/\beta_0) \ln [(1 + \beta_0)/(1 - \beta_0)]; \quad \Gamma_{\rho_1}^{(0)} = 4m^2 + \Lambda^2; \\
 \Gamma_{\rho_2}^{(0)} &= (\kappa_1 + \kappa_2)^2; \quad \Gamma_{\rho_1}^{(1/2)} = 4m^2 - 2\Lambda^2; \quad \Gamma_{\rho_2}^{(1/2)} = 4\kappa_1 \kappa_2.
 \end{aligned} \right\} (25.8)$$

Область изменения переменных  $\Delta^2$ ,  $\Lambda^2$  определена неравенствами:

$$\left. \begin{aligned}
 4\mu^2 &\leq \Delta^2 \leq (\sqrt{m^2 + 2\kappa_1} - m)^2; \\
 \Lambda_{\text{мин}}^2 &\leq \Lambda^2 \leq \Lambda_{\text{макс}}^2; \\
 \Lambda_{\text{макс}}^2 &= [1/(2\kappa_1 + m^2)] [\kappa_1(2\kappa_1 - \Delta^2) - m^2\Delta^2 \pm \\
 &\quad \pm \kappa_1 \sqrt{(2\kappa_1 - \Delta^2)^2 - 4m^2\Delta^2}].
 \end{aligned} \right\} (25.9)$$

Подставляя  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  в (25.1), получаем сечение, дифференциальное по передаче импульса и массе родившейся пары, причем все вычисления проводились точно.

Представляет интерес соотношение между вкладами  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  при различных значениях  $\mu^2$ ,  $m^2$  и параметра  $\kappa_1$ , величина которого должна превышать пороговое значение  $\kappa_1 \geq \kappa_i$ :

$$\kappa_i = 2\mu(m + \mu). \quad (25.10)$$

При анализе не будем рассматривать припороговую область, т. е. будем полагать, что  $\kappa_1 - \kappa_i \geq \kappa_i$ . Удобно ввести простые приближенные выражения для сечений  $d\tilde{\sigma}_I$  и  $d\tilde{\sigma}_{II}$ , поведение которых обладает теми же качественными особенностями, что и точные сечения  $d\sigma_I$ ,  $d\sigma_{II}$  (отношение  $d\sigma/d\tilde{\sigma}$  ограничено сверху и снизу некоторыми числами). Такими выражениями во всей рассматриваемой области изменения  $\kappa_1$  и при значениях переменных  $\Delta^2$ ,  $\Lambda^2$  вдали от границы (25.9), т. е. когда  $\Delta^2 - 4\mu^2 \gtrsim \mu^2$ ,  $\Lambda^2 - \Lambda_{\text{мин}}^2 \gtrsim \Lambda_{\text{мин}}^2$ , могут служить следующие:

$$\left. \begin{aligned}
 d\tilde{\sigma}_I^{(s_i=0)} &= (\alpha^3 d\Delta^2/\kappa_1^2 \Delta^2) d\Lambda^2 (1 + \Delta^2/\kappa_2); \\
 d\tilde{\sigma}_I^{(s_i=1/2)} &= [\alpha^3 d\Delta^2/\kappa_1^2 \Delta^2] d\Lambda^2 \kappa_1/\kappa_2,
 \end{aligned} \right\} (25.11)$$

независимо от спина конечных частиц. В области  $\Delta^2 - 4\mu^2 \ll 4\mu^2$ , которую не будем рассматривать и которая несущественна в инте-

гральном смысле, если не касаться реакции на пороге, появляется зависимость и от спина родившихся частиц. Для сечения  $d\sigma_{II}$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{d}\sigma_{II}^{(s_f=1/2)} &= \alpha^3 (d\Lambda^2/\Lambda^2) [d\Delta^2/(\Delta^2 + \Lambda^2)^2] L_1; \\ \tilde{d}\sigma_{II}^{(s_f=0)} &= \alpha^3 (d\Lambda^2/\Lambda^2) [d\Delta^2/(\Lambda^2 + \Delta^2)^2] \times \\ &\quad \times [1 + \Lambda^2 \Delta^2 L_1/(\Lambda^2 + \Delta^2)^2] \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

независимо от спина начальной частицы.

Обратим внимание, что при  $\Lambda^2 \ll \Delta^2$

$$\tilde{d}\sigma_{II}^{(s_f=1/2)} / \tilde{d}\sigma_{II}^{(s_f=0)} \approx L_1. \quad (25.13)$$

Это отношение при  $\Delta^2 \gg 4\mu^2$  логарифмически велико, что является отображением того факта, что сечение рождения спинорной пары двумя фотонами содержит в старшем по  $m/\epsilon$  члене  $\ln \epsilon/m$ , а старший член в сечении рождения пары скалярных частиц не содержит этого логарифмического фактора [ср. (7.56)]. Аналогичная ситуация имеет место и для  $\tilde{d}\sigma_I$ : если в (25.11) провести интегрирование по  $\Lambda^2$  в пределах (25.9), то при  $\Delta^2 \ll \kappa_1$  и  $\kappa_1 \gg m^2$  сечение  $\tilde{d}\sigma_I^{(s_i=1/2)}$  логарифмически велико по сравнению с сечением  $\tilde{d}\sigma_I^{(s_i=0)}$ , как и сечение комптоновского рассеяния на частице со спином 1/2 по сравнению с рассеянием на частице со спином 0 [ср. (7.49), (7.50)].

Рассмотрим соотношение сечений  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  в случаях:

1)  $\mu \sim m$ , 2)  $\mu \ll m$ , 3)  $\mu \gg m$ , каждый из которых разобьем на две области: а)  $\kappa_1 \sim \kappa_i$  (25.10) и б)  $\kappa_1 \gg \kappa_i$ .

1а)  $\mu \sim m$ ,  $\kappa_1 \sim \kappa_i \sim \mu^2$ . Из (25.9) получаем, что максимальные и минимальные значения  $\Lambda^2$ ,  $\Delta^2$  одного порядка ( $m^2$  и  $\mu^2$ ). Учитывая, что  $\kappa_2 = \kappa_1 - (\Lambda^2 + \Delta^2)/2$ , находим из (25.9) область изменения  $\kappa_2$  при фиксированном значении  $\Delta^2$ :

$$\kappa_{2\text{макс}} \underset{\text{мин}}{=} [\kappa_1/2 (2\kappa_1 + m^2)] [2\kappa_1 - \Delta^2 + 2m^2 \pm \sqrt{(2\kappa_1 - \Delta^2)^2 - 4m^2 \Delta^2}]. \quad (25.14)$$

Переменная  $\kappa_2$  достигает абсолютных максимального и минимального значений при  $\Delta^2 = 4\mu^2$ , эти значения  $\sim m^2$ ,  $\mu^2$ . Отсюда следует, что во всей области  $d\sigma_I \sim d\sigma_{II}$ . После интегрирования по  $\Delta^2$ ,  $\Lambda^2$  имеем для полных сечений

$$\sigma_I \sim \sigma_{II} \sim \alpha^3/\mu^2. \quad (25.15)$$

1б)  $\mu \sim m$ ,  $\kappa_1 \gg \kappa_i$ . В этом случае  $\Lambda_{\text{макс}}^2 \sim \Delta_{\text{макс}}^2 \sim \kappa_1$ ,  $\Lambda_{\text{мин}}^2 \sim m^2 \mu^4/\kappa_1^2$ . В области  $\Lambda^2 + \Delta^2 \ll \kappa_1$  имеем  $d\sigma_I \ll d\sigma_{II}$  независимо от спина. Именно эта область ( $\Delta^2 \sim \mu^2$ ,  $\Lambda^2 \lesssim \mu^2$ ) дает основной вклад в полное сечение процесса. Выполнив интегрирование, находим

$$\sigma_{II} \sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m\mu)/\mu^2 \quad (25.16)$$

независимо от спина частиц. Это утверждение ни в коей мере не противоречит сделанному выше (25.13), поскольку сечения для случаев  $s_f = 0$  и  $s_f = 1/2$  логарифмически отличались лишь в области  $\Delta^2 \gg 4\mu^2$ , которая не дает вклада в интегральное сечение. Разумеется, сечение (25.16) найдено лишь с точностью до численного коэффициента. Найдем теперь, что представляет область, дающая основной вклад в системе, где начальная частица покоилась. Из того, что  $\Lambda^2 \leq \mu^2$ , имеем  $\varepsilon_2 \leq m + \mu^2/2m$ , следовательно, весьма небольшая часть энергии передается частице отдачи, а остальную часть энергии фотона получают частицы родившейся пары:  $\Delta^0 = \omega - (\varepsilon_2 - m) \approx \omega$ .

Из закона сохранения импульса следует, что суммарный импульс пары направлен почти вдоль  $\mathbf{k}$ , а из условия  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$  вытекает, что угол разлета частиц пары мал ( $\sim \mu/\omega$ ) и обе частицы пары являются ультрарелятивистскими ( $\varepsilon_3 \gg \mu$ ;  $\varepsilon_4 \approx \omega - \varepsilon_3 \gg \mu$ ;  $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_4$ ). Таковы особенности основной области.

Если фиксировать  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$  и увеличивать  $\Lambda^2$  от  $\Lambda^2 \sim \mu^2$ , то вклад  $d\sigma_{II}$  будет падать как  $1/\Lambda^6$  и сравняется с вкладом  $d\sigma_I$  при  $\Lambda^6 \sim \Delta^2 \kappa_1^2$ . Далее при  $\Lambda^2 \sim \kappa_1$ ,  $d\sigma_{II} \ll d\sigma_I$  в этой области  $\varepsilon_2 \sim \omega$ . Если же  $\Delta^2 \sim \kappa_1$ , то при  $\kappa_2 = \kappa_1 - (\Lambda^2 + \Delta^2)/2 \sim \kappa_1$  и  $\Lambda^2 \ll \kappa_1 d\sigma_{II} \gg d\sigma_I$ , а при  $\kappa_2 \sim \kappa_1$  и  $\Lambda^2 \sim \kappa_1 d\sigma_{II} \sim d\sigma_I$ ; при  $\Lambda^2 \sim \kappa_1$ ,  $\kappa_2 \ll \kappa_1$  имеем  $d\sigma_{II} \ll d\sigma_I$ . Вклад  $\sigma_I$  в полное сечение [см. (25.1)]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I^{(s_i=0)} &\sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m^2)/\kappa_1; \\ \sigma_I^{(s_i=1/2)} &\sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m^2) \ln(\kappa_1/\mu^2)/\kappa_1 \end{aligned} \right\} \quad (25.17)$$

пренебрежимо мал по сравнению с  $\sigma_{II}$  (25.16).

2а)  $\mu \ll m$ ,  $\kappa_1 \sim \kappa_t \sim \mu m$ . В этом случае  $\Delta_{\text{макс}}^2 \sim \Delta_{\text{мин}}^2 \sim \Lambda_{\text{макс}}^2 \sim \Lambda_{\text{мин}}^2 \sim \mu^2$ ;  $\kappa_2 \approx \kappa_1$  и во всей области  $\Lambda^2$ ,  $\Delta^2$  имеем  $d\sigma_{II}/d\sigma_I \sim m^2/\mu^2 \gg 1$ .

Вклад в полное сечение

$$\sigma_{II} \sim \alpha^3/\mu^2; \quad \sigma_I \sim \alpha^3/m^2 \quad (25.18)$$

независимо от спина частиц.

2б)  $\mu \ll m$ ,  $\kappa_1 \gg \mu m$ . Здесь имеем  $\Delta_{\text{макс}}^2 \sim \Lambda_{\text{макс}}^2 \gg \mu^2$ , а  $\Delta_{\text{мин}}^2 \sim m^2 \mu^4/\kappa_1^2 \ll \mu^2$ . Аналогично случаю 1б) в основной области  $\Delta^2 \lesssim 4\mu^2$ ,  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$  всегда  $d\sigma_{II} \gg d\sigma_I$ . Интегральные сечения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{II} &\sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m\mu)/\mu^2; \\ \sigma_I^{(s_i=0)} &\sim \sigma_I^{(s_i=1/2)} \sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m\mu)/m^2 \quad (\kappa_1 \lesssim m^2); \\ \sigma_I^{(s_i=1/2)} &\sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/m^2) \ln(\kappa_1/\mu^2)/\kappa_1 \\ \sigma_I^{(s_i=0)} &\sim \alpha^3 \ln(\kappa_1/\mu^2)/\kappa_1 \end{aligned} \right\} \quad (\kappa_1 \gg m^2). \quad (25.19)$$

3а)  $\mu \gg m$ ,  $\kappa_1 \sim \kappa_t \sim \mu^2$ . В этом случае  $\Delta_{\text{макс}}^2 \sim \Delta_{\text{мин}}^2 \sim \Lambda_{\text{макс}}^2 \sim \mu^2$ ,  $\Lambda_{\text{мин}}^2 \sim m^2$ . Отношение  $d\sigma_{II}/d\sigma_I \sim \kappa_2/\Lambda^2$  меняется от  $m^2/\mu^2$  до  $\mu^2/m^2$ , поскольку  $\kappa_{2\text{мин}} \sim \Lambda_{\text{мин}}^2 \sim m^2$ .

Вклады в интегральные сечения одного порядка:

$$\sigma_I \sim \sigma_{II} \sim \alpha^3 \ln(\mu/m)/\mu^2. \quad (25.20)$$

36)  $\mu \gg m$ ,  $\kappa_1 \gg \mu^2$ . Этот случай обладает такими же особенностями, как случаи 16) и 26). Существенный вклад дает область  $\Delta^2 \leq \mu^2$ ,  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ . Интегральные сечения даются формулами (25.16), (25.17), а соотношения между дифференциальными сечениями такие же, как в 16) и 26).

Приведенные выше сечения (25.5), (25.7) удается точно проинтегрировать по передаче импульса  $\Delta^2$ . В результате получаем сечения, дифференциальные по массе родившейся пары:

$$d\sigma_I = (\alpha^3/12\kappa_1^2) (d\Delta^2/\Delta^2) \beta_0 B^{(s_i)} g^{(s_j)}, \quad (25.21)$$

где  $\beta_0$ ,  $g^{(s_j)}$  определены (25.6), а

$$\left. \begin{aligned} B^{(0)} &= (4m^2 - \Delta^2) (\Delta^2 - 2m^2 - 2\kappa_1) L_4 / \kappa_1 + \\ &+ 4\lambda [(4m^2 - \Delta^2)/2 + 2\kappa_1^2/(2\kappa_1 + m^2)] / \kappa_1; \\ B^{(1/2)} &= 2 [2\kappa_1 + (2m^2 + \Delta^2) (\Delta^2 - 2m^2 - 2\kappa_1) / \kappa_1] L_4 + \\ &+ 4\lambda [2m^2 + \Delta^2 + \kappa_1^2 (2\kappa_1 + 2m^2 - \Delta^2) / 2 (2\kappa_1 + m^2)^2] / \kappa_1; \\ L_4 &= \ln(\kappa_{2\text{макс}} / \kappa_{2\text{мин}}), \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

здесь  $\lambda = \sqrt{(2\kappa_1 - \Delta^2)^2 - 4m^2\Delta^2}$ ;  $\kappa_{2\text{макс}}$ ,  $\kappa_{2\text{мин}}$  определены в (25.14). Для сечения  $d\sigma_{II}$  имеем:

$$d\sigma_{II} = [\alpha^3 \beta_0 d\Delta^2 / 2\kappa_1^2 \Delta^4] \sum_{n=1}^4 c_n^{(s_j)} D_n^{(s_i)}, \quad (25.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1^{(1/2)} &= 1 - L_1; \quad c_2^{(1/2)} = (1 - L_1)/2; \\ c_3^{(1/2)} &= \mu^2 [\Delta^2 (1 - L_1) + 2\mu^2 L_1] / \Delta^4; \\ c_4^{(1/2)} &= 2 - (2\mu^2/\Delta^2 + 1/2) L_1; \quad c_1^{(0)} = -1/2; \\ c_2^{(0)} &= (\mu^2 L_1 / \Delta^2 - 1/2) / 2; \quad c_3^{(0)} = -c_3^{(1/2)} / 2; \quad c_4^{(0)} = -c_4^{(1/2)} / 2; \\ D_1^{(1/2)} &= 8\kappa_1 (\kappa_1 - \Delta^2/2) (L_3 - L_2) - \Delta^4 L_2 + 8\kappa_1 \lambda; \\ D_2^{(1/2)} &= 8\Delta^2 m^2 (L_3 - L_2) + 2\lambda (2m^2 + \Delta^2) \Delta^2 / \kappa_1; \\ D_3^{(1/2)} &= 4 (L_3 - L_2) [\Delta^4 + 4 (m^2 - \kappa_1) \Delta^2 + 8\kappa_1^2] + \\ &+ 4\lambda [\Delta^4 + 2 (m^2 - 2\kappa_1) \Delta^2 + 34\kappa_1^2] / 3\kappa_1; \\ D_4^{(1/2)} &= 2\lambda [2 (4\kappa_1 - \Delta^2) - \Delta^2 (\Delta^2 + 2m^2) / \kappa_1] / 3; \\ D_1^{(0)} &= D_1^{(1/2)} + \Delta^4 L_2; \quad D_2^{(0)} = D_2^{(1/2)} - 3\Delta^4 \lambda / \kappa_1; \\ D_3^{(0)} &= D_3^{(1/2)} + 4\Delta^4 (L_2 - L_3 - \lambda/2\kappa_1); \\ D_4^{(0)} &= D_4^{(1/2)} + \lambda \Delta^4 / \kappa_1. \end{aligned} \right\} \quad (25.24)$$

Здесь  $L_2 = \ln(\Lambda_{\text{макс}}^2/\Lambda_{\text{мин}}^2)$ ;

$$L_3 = \ln[(\Delta^2 + \Lambda_{\text{макс}}^2)/(\Delta^2 + \Lambda_{\text{мин}}^2)];$$

$L_1$  определены в (25.8);  $\Lambda_{\text{макс}}^2$  даны в (25.9). Подставляя найденные  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  в (25.1), получаем точные выражения для сечения фоторождения пары частиц со спином 0 или 1/2 на частице со спином 0 или 1/2, дифференциальные по массе родившейся пары.

Интегрирование сечений (25.21), (25.23) приводит к очень громоздким выражениям. Поэтому ограничимся здесь рассмотрением случая больших энергий, когда  $\kappa_1 \gg m\mu$ ,  $\kappa_1 \gg \mu^2$ , т. е.  $\kappa_1 \gg \kappa_t$  (25.10). Мы уже видели, что при этих условиях в интегральном сечении доминирует вклад  $d\sigma_{II}$ , причем существенные значения  $\Delta^2$  суть  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ . Для получения интегрального сечения фоторождения пар в этом случае в (25.23) можно провести разложение по степеням  $\mu^2/\kappa_1$ ,  $m^2\mu^2/\kappa_1^2$  и полагать при анализе величины членов, что  $\Delta^2 \sim \mu^2$ . Отметим, что коэффициенты  $c_n \sim 1$ , а предельные значения  $\Lambda^2$  следуют из (25.9):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\text{макс}}^2 &= 4\kappa_1^2/(2\kappa_1 + m^2); \\ \Lambda_{\text{мин}}^2 &= m^2 \Delta^4/4\kappa_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (25.25)$$

Из (25.24) вытекает, что главные члены в функциях  $D_n$  не зависят от спина частицы, с которой взаимодействует падающий фотон. Отсюда следует, что сечение фоторождения пары с точностью до членов относительного порядка  $\mu^2/\kappa_1$ ,  $m^2\mu^2/\kappa_1^2$  в существенной области не зависит от спина начальной частицы, и его можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma/d\Delta^2 = d\sigma_{II}/d\Delta^2 &= (4\alpha^3 \beta_0/\Delta^4) [(c_1^{(s,f)} + 4c_3^{(s,f)}) \ln(m^2 \Delta^2/4\kappa_1^2) + \\ &+ 2c_1^{(s,f)} + 34c_3^{(s,f)}/3 + 4c_4^{(s,f)}/3]. \end{aligned} \quad (25.26)$$

Здесь  $c_n^{(s,f)}$  определены формулой (25.24). Для получения полного (интегрального) сечения интегрирование по  $\Delta^2$  можно проводить в интервале  $4\mu^2 \leq \Delta^2 \leq \infty$  ввиду сходимости интеграла при больших  $\Delta^2$ . В результате имеем полное сечение фоторождения пары частиц со спином 1/2:

$$\sigma^{(1/2)} = (\alpha^3/\mu^2) [28 \ln(2\kappa_1/m\mu)/9 - 218/27] \quad (25.27)$$

и полное сечение фоторождения пары частиц со спином 0:

$$\sigma^{(0)} = (\alpha^3/\mu^2) (4 \ln^2(2\kappa_1/m\mu)/9 - 26/27), \quad (25.28)$$

причем в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \omega m$ . В этой системе найденные сечения не зависят от массы частицы, на которой происходит

рождение пары, и следовательно, совпадают с сечением фоторождения на кулоновском центре ( $m \rightarrow \infty$ ). Эта ситуация совершенно аналогична той, на которую было указано при рассмотрении тормозного излучения в релятивистской области: 1) малость отдачи; 2) независимость от спина рассеивающей частицы. Такое положение обусловлено тем, что существенной областью изменения переменных является  $\Lambda^2 \lesssim \mu^2$ ,  $\Delta^2 \sim \mu^2$ . В этой области, как уже отмечалось, практически вся энергия фотона передается паре  $\Delta^0 = \omega - \Lambda^2/2m \approx \omega$ , так как  $\Delta^2/2m\omega = \Lambda^2/2\kappa_1 \lesssim \mu^2/2\kappa_1 \ll 1$ , что и приводит к несущественности отдачи. Отсутствие зависимости от спина нетрудно понять в системе, где  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} = 0$ , в которой

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= (k + p_1)(p_1 - p_2)/\sqrt{(k + p_1)^2} = \\ &= \Lambda^2/2 \sqrt{2\kappa_1 + m^2} \sim [\mu^2/(m^2 + \kappa_1)] [(m^2 + \kappa_1)/\sqrt{m^2 + 2\kappa_1}] = \\ &= \mu^2 \varepsilon_1/(m^2 + \kappa_1) \ll \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (25.29)$$

т. е. происходит потеря энергии относительного порядка  $\mu^2/(m^2 + \kappa_1)$ ; из того, что  $\Lambda^2 \lesssim \mu^2$ , следует, что угол отклонения импульса  $\mathbf{p}_2$  в этой системе  $\theta^2 \lesssim \mu^2/(m^2 + \kappa_1) \ll 1$ , т. е. движение частицы с импульсом  $\mathbf{p}_1$  в этой системе можно считать равномерным и прямолинейным.

В силу изложенного при выполнении условий  $\kappa_1 \gg \mu^2$ ,  $\kappa_1 \gg m\mu$  можно в существенной области, т. е. в области, которая дает вклад в интегральное сечение, пользоваться найденными в § 19 формулами для процесса фоторождения в кулоновском поле (для углового и энергетического распределений частиц пары и т. д.).

Сделаем еще замечание относительно случая тождественных частиц\* при том же условии  $\kappa_1 \gg m^2$  (массы одинаковые). Тогда к диаграммам рис. 57 необходимо добавить обменные (применить правило подстановки к диаграммам (рис. 51) и учесть следующие обстоятельства: 1) диаграммы типа I вклада не дадут по указанным выше причинам, соответственно мала и интерференция диаграмм I и II; 2) обменная к типу II диаграмма дает такой же вклад, как и прямая, но в силу тождественности конечных частиц результат нужно разделить на 2; 3) интерференция прямых и обменных диаграмм мала, поскольку они отличаются перестановкой одной из частиц пары, которая является ультрарелятивистской, и частицы отдачи, энергия которой в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 \sim m$ , а это означает, что существенные области не перекрываются. Следовательно, и для тождественных частиц применимы все полученные выше результаты.

\* Фоторождение электрон-позитронной пары на электроне обсуждается в обзоре [76].

§ 26. РОЖДЕНИЕ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ  
ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

26.1. Общие формулы для сечения. Процесс образования пары при столкновении двух заряженных частиц (процесс электророждения пары) описывается в низшем приближении теории возмущений тремя блочными диаграммами (рис. 58), где  $p_{1,2}$  ( $p_{3,4}$ ) — импульсы начальных (конечных) частиц,  $p_5$  ( $p_6$ ) — импульсы частицы (античастицы) родившейся пары. Все частицы будем полагать разными:  $p_1^2 = p_3^2 = m_1^2$ ;  $p_2^2 = p_4^2 = m_2^2$ ;  $p_5^2 = p_6^2 = \mu^2$ . Будем рассматривать только процессы с неполяризованными частицами. После проведения соответствующих операций

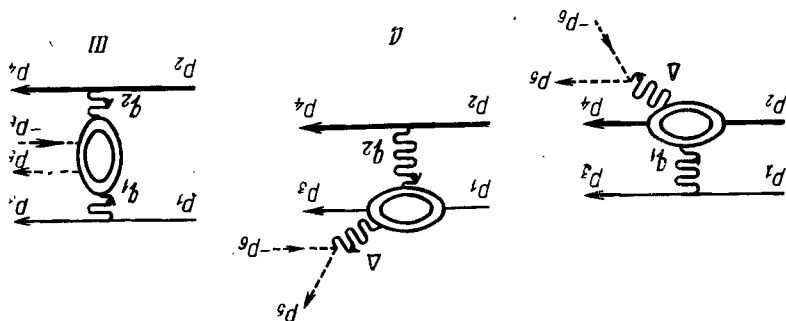


Рис. 58. Блочные диаграммы процесса электророждения пары заряженных частиц.

усреднения и суммирования по поляризациям вклад [в сечение диаграммы I (см. рис. 58) можно представить в виде

$$d\sigma_I = \frac{F_{\rho\sigma}^{(s_f)}(p_6, p_5) J_{\mu\nu}^{(s_1)}(p_1, p_3) K^{(s_2)}{}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_2, p_4, q_1, \Delta)}{4(2\pi)^8 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} dp, \quad (26.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} dp &= \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) (d^3 p_3 / 2\varepsilon_3) \times \\ &\quad \times (d^3 p_4 / 2\varepsilon_4) (d^3 p_5 / 2\varepsilon_5) (d^3 p_6 / 2\varepsilon_6); \\ \Delta_{1,2}^2 &= -q_{1,2}^2; \quad q_{1,2} = p_{1,2} - p_{3,4}; \quad \Delta = p_5 + p_6; \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

$s_{1,2,f}$  — спины начальных частиц (1, 3 и 2, 4) и спин частиц родившейся пары ( $s_{1,2,f} = 0$  или  $1/2$ ). Для этих спинов входящие в сечение  $d\sigma_I$  тензора даются формулами: (7.9), (7.10) —  $F_{\rho\sigma}$ , (7.31) —  $J_{\mu\nu}$ , (7.34), (7.35) —  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Вклад диаграммы II, очевидно, дается той же формулой с заменой  $p_{1,3} \leftrightarrow p_{2,4}$ , вклад диаграммы III в этих же обозначениях

$$d\sigma_{III} = (-1)^{2s_f} \frac{J_{\mu\nu}^{(s_1)}(p_1, p_3) J_{\rho\sigma}^{(s_2)}(p_2, p_4) K^{(s_f)}{}^{\mu\nu\rho\sigma}(-p_6, p_5, q_1, -q_2)}{4(2\pi)^8 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 \Delta_2^4 (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} dp. \quad (26.3)$$



Что касается интерференционных членов между вкладами диаграмм I, II, III, то ограничимся здесь замечанием, что на диаграмме III пара рождается с положительной  $C$ -четностью ( $C$ -четность двух фотонов), а на диаграммах I, II—с отрицательной  $C$ -четностью ( $C$ -четность одного фотона). Поэтому интерференция между вкладами диаграмм I или II и III меняет знак при замене  $p_6 \leftrightarrow p_5$ . При исследовании процесса электророждения пар частиц нас в основном будут интересовать следующие характеристики процесса: полное сечение, сечение, дифференциальное по квадрату массы  $\Delta^2$  родившейся пары, энергетическое распределение родившихся частиц в системе, где одна из начальных частиц (для определенности  $p_1$ ) покоилась. В первых двух случаях вклад интерференции диаграмм I или II и III равен нулю, в последнем этот вклад меняет знак при замене  $\varepsilon_5 \leftrightarrow \varepsilon_6$ .

В (26.1) можно выделить множитель, равный сечению тормозного излучения виртуального фотона с импульсом  $\Delta$  при соударении заряженных частиц:

$$d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} = \frac{J^{\mu\nu(s_1)}(p_1, p_3) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s_2)}(p_2, p_4, q_1, \Delta) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \Delta)}{4(2\pi)^5 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 (2s_1 + 1) (2s_2 + 1)} \times \\ \times \frac{d^3 p_3}{2\varepsilon_3} \cdot \frac{d^3 p_4}{2\varepsilon_4} \cdot \frac{d^3 \Delta}{2\Delta_0}, \quad (26.4)$$

где  $\Delta_0 = \sqrt{\Lambda^2 + \Delta^2}$ . Тогда

$$d\sigma_I = d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} F^{(s_f)\rho\sigma}(p_6, p_5) \delta(\Delta - p_5 - p_6) d\Delta^2 (d^3 p_5 / 2\varepsilon_5) (d^3 p_6 / 2\varepsilon_6) [1 / (2\pi)^3] \quad (26.5)$$

Интегрирование по импульсам рождающейся пары в (26.5) удобно провести в тензорном виде. Если для наших целей пару достаточно характеризовать ее суммарным импульсом  $\Delta$ , то интегрирование проводится, как в разделе 7.1, и имеем

$$d\sigma_I = -f^{(s_f)}(\Delta^2) d\Delta^2 d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma}, \quad (26.6)$$

где  $f^{(s_f)}$  дается формулами (7.12), (7.13). Если же интересоваться индивидуальными характеристиками частиц пары (например, энергией  $\varepsilon_6$  в системе, где  $p_1 = 0$ ), то интегрирование можно провести с введением дополнительной  $\delta$ -функции, фиксирующей эту характеристику (энергию  $\varepsilon_6$  в указанном примере):

$$d\sigma_I = d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} d\varepsilon_6 d\Delta^2 K^{(s_f)\rho\sigma}, \quad (26.7)$$

где

$$K_{\rho\sigma}^{(s_f)} = [1 / (2\pi)^3] \int \frac{d^3 p_5}{2\varepsilon_5} \cdot \frac{d^3 p_6}{2\varepsilon_6} \delta(\Delta - p_5 - p_6) \delta(\varepsilon_6 - p_1 p_6 / m_1) \times \\ \times F_{\rho\sigma}^{(s_f)}(p_6, p_5). \quad (26.8)$$

Тензор  $K_{\rho\sigma}^{(sf)}$  может зависеть от векторов  $p_1$ ,  $\Delta$ ; по вектору  $\Delta$  он удовлетворяет условию калибровочной инвариантности, и поэтому его можно представить в виде [ср. (7.25)—(7.27)]:

$$\begin{aligned}
 K_{\rho\sigma} = & (1/2) K_1 \{g_{\rho\sigma} + \Delta^2 p_{1\rho} p_{1\sigma} / [(p_1 \Delta)^2 - \Delta^2 m_1^2] - \\
 & - p_1 \Delta (p_{1\rho} \Delta_\sigma + p_{1\sigma} \Delta_\rho - \Delta_\rho \Delta_\sigma m_1^2 / p_1 \Delta) / [(p_1 \Delta)^2 - \Delta^2 m_1^2]\} + \\
 & + (K_2 \Delta^2 / 2 [(p_1 \Delta)^2 - \Delta^2 m_1^2]) \{g_{\rho\sigma} + 3\Delta^2 p_{1\rho} p_{1\sigma} / [(p_1 \Delta)^2 - \Delta^2 m_1^2] - \\
 & - ((p_1 \Delta) / [(p_1 \Delta)^2 - \Delta^2 m_1^2]) [3(p_{1\rho} \Delta_\sigma + p_{1\sigma} \Delta_\rho) - \\
 & - \Delta_\rho \Delta_\sigma (m_1^2 / p_1 \Delta + 2p_1 \Delta / \Delta^2)]\}, \quad (26.9)
 \end{aligned}$$

где

$$K_1 = g_{\rho\sigma} K^{\rho\sigma}; \quad K_2 = p_{1\rho} p_{1\sigma} K^{\rho\sigma} \quad (26.10)$$

можно найти, свернув обе стороны формулы (26.8) и выполнив интегрирование в правой части. Последнее сводится к интегрированию выражений с  $\delta$ -функциями, поскольку свертки  $F_{\rho\sigma}$  выражаются  $\Delta^2$ ,  $(p_1, \Delta)$ ,  $p_1$ ,  $p_6$ , и элементарно проводится в системе, где  $\Delta = 0$ . В результате

$$\left. \begin{aligned}
 K_1^{(0)} &= (-\alpha m_1 / 4\pi \Delta^4) \{(\Delta^2 - 4\mu^2) / [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]^{1/2}\}; \\
 K_1^{1/2} &= (-\alpha / \pi \Delta^4) \{(\Delta^2 + 2\mu^2) m_1 / [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]^{1/2}\}; \\
 K_2^{(0)} &= \alpha (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 m_1^3 / 4\pi \Delta^4 [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]^{1/2}; \\
 K_2^{1/2} &= (\alpha / \pi) \{(2\varepsilon_5 \varepsilon_6 - \Delta^2 / 2) m_1^3 / \Delta^4 [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]^{1/2}\};
 \end{aligned} \right\} \quad (26.11)$$

где  $\varepsilon_5 = [(p_1 \Delta) - m_1 \varepsilon_6] / m_1$  — энергия частицы пары  $p_5$  в системе, где  $p_1 = 0$ .

Произведя свертку в (26.7)  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} K^{(sf)\rho\sigma}$  с учетом того, что сечение  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)}$  удовлетворяет условию калибровочной инвариантности по вектору  $\Delta$ , имеем

$$\begin{aligned}
 d\sigma_1 = & [d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} (K_1 + \Delta^2 K_2 / [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]) / 2 + \\
 & + \{d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma \Delta^2 / 2 [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]\} \times \\
 & \times (K_1 + 3\Delta^2 K_2 / [(p_1 \Delta)^2 - m_1^2 \Delta^2]) d\Delta^2 d\varepsilon_6. \quad (26.12)
 \end{aligned}$$

В свертках сечения  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)}$  (26.4) с  $g^{\rho\sigma}$  и  $p_1^\rho p_1^\sigma$  удобно перейти к ковариантным переменным:  $\Delta_1^2$  (знаменатель фотонного пропагатора),  $\kappa_2 = p_2 \Delta - \Delta^2 / 2$ ,  $\kappa_4 = p_4 \Delta + \Delta^2 / 2$  (знаменатели пропага-

торов частиц),  $\kappa_1 = p_1 \Delta$  ( $\kappa_1/m_1$  — энергия пары в системе, где  $p_1 = 0$ ). Будем также пользоваться обозначениями  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ ,  $v = p_1 p_2$ . Переход к этим переменным проведен в Приложении Г (Г.37), где надо заменить  $k \rightarrow \Delta$ :

$$\int \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \Delta) [d^3 p_3 d^3 p_4 d^3 \Delta / 2\varepsilon_3 2\varepsilon_4 2\Delta_0] = \\ = [\pi/4 \sqrt{v^2 - m_1^2 m_2^2}] \int d\kappa_1 d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4 / \sqrt{-S(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \quad (26.13)$$

где  $S$  дается формулами (Г.37).

Обратимся теперь к сечению  $d\sigma_{III}$  (26.3). Выделим из него множитель, равный вкладу диаграммы типа рис. 57 (II) в сечение образования пары виртуальным фотоном с импульсом  $q_2$  на частице с импульсом  $p_1$ :

$$d\sigma_{III} = [J_{\rho\sigma}^{(s_2)}(p_2, p_4) d\sigma^{(3)\rho\sigma} \sqrt{(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2} / (2\pi)^3 \times \\ \times \sqrt{v^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_2^4 (2s_2 + 1)] (d^3 p_4 / 2\varepsilon_4), \quad (26.14)$$

где

$$d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} = [(-1)^{2s_f} J^{(s_1)\mu\nu}(p_1, p_3) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s_f)}(-p_6, p_5, q_1, -q_2) / [4(2\pi)^5 \times \\ \times \sqrt{(p_1, q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2} (2s_1 + 1) \Delta_1^4]] \delta(p_1 + q_2 - p_3 - p_5 - p_6) \times \\ \times [d^3 p_3 d^3 p_5 d^3 p_6 / 2\varepsilon_3 2\varepsilon_5 2\varepsilon_6]. \quad (26.15)$$

Если в (26.15) провести интегрирование по конечным состояниям, то получится тензор, зависящий от векторов  $p_1, q_2$  и удовлетворяющий условию калибровочной инвариантности по вектору  $q_2$ . Поскольку ситуация аналогична имевшей место для (26.8), то соответствующий тензор находится из (26.9) заменой  $K_{\rho\sigma} \rightarrow d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)}$ ,  $\Delta \rightarrow q_2$ ; он полностью определяется своими свертками  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma}$ ,  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma$ . Произведя в (26.14) переход к ковариантным переменным [ср. (7.42)] с одновременным интегрированием по азимутальному углу

$$d^3 p_4 / 2\varepsilon_4 \rightarrow \pi d(p_1 q_2) d\Delta_2^2 / 2 \sqrt{v^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (26.16)$$

и выполнив с учетом калибровочной инвариантности свертку  $J_{\rho\sigma}^{(s_2)}$  с  $\sigma^{(3)\rho\sigma}$  в форме, полученной из (26.9), найдем

$$\begin{aligned}
d\sigma_{III} = & (1/32 \pi^2) \left[ \sqrt{(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2 / (v^2 - m_1^2 m_2^2)} \right] [d(p_1 q_2) d\Delta_2^2 / \Delta_2^4] \times \\
& \times \{ \sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} (\tilde{\Gamma}_1^{(s_2)} - \Delta_2^2 \tilde{\Gamma}_2^{(s_2)} / [(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2]) - \\
& - \{ \Delta_2^2 \sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma / [(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2] \} \times \\
& \times (\tilde{\Gamma}_1^{(s_2)} - 3\Delta_2^2 \tilde{\Gamma}_2^{(s_2)} / [(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2]) \} = d\sigma_{III}^{(1)} + d\sigma_{III}^{(2)}, \quad (26.17)
\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_1^{(0)} &= e^2 (4m_2^2 + \Delta_2^2); \\
\tilde{\Gamma}_2^{(0)} &= e^2 [4v^2 - 4v(p_1 q_2) + (p_1 q_2)^2]; \\
\tilde{\Gamma}_1^{(1/2)} &= \tilde{\Gamma}_1^{(0)} - 3e^2 \Delta_2^2; \\
\tilde{\Gamma}_2^{(1/2)} &= \tilde{\Gamma}_2^{(0)} - e^2 (m_1^2 \Delta_2^2 + (p_1 q_2)^2).
\end{aligned} \right\} \quad (26.18)$$

В свертках  $\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma}$ ,  $\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma$ , которые получаются из (26.15), переход к ковариантным переменным осуществляется аналогично (26.13).

В предыдущем обсуждении мы считали, что сечение  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)}$  (26.15) проинтегрировано по всем конечным состояниям. Однако все сказанное остается в силе и для дифференциального по каким-либо ковариантным переменным сечения  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)}$ , если эти переменные выражаются только через вектора, содержащиеся в (26.15), например  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} / d\Delta^2$ ,  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} / d(p_1 p_0)$  и т. д.

26.2. Рождение пар заряженной частицей при столкновении с кулоновским центром. Вначале рассмотрим процесс рождения пары, когда масса одной из начальных частиц очень велика ( $m_1 \rightarrow \infty$ ). Тогда вклад дают только диаграммы I, III, а соответствующие сечения получаются из найденных выше формул предельным переходом  $m_1 \rightarrow \infty$ . Будем искать сечение с дифференциалами  $d\epsilon_5 d\epsilon_6$ .

Начнем с сечения  $d\sigma_I$ , где надо вычислить  $d\sigma^{(1)\rho\sigma} g_{\rho\sigma} / d\omega$ ,  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\omega$ , где  $\omega = \kappa_1 / m_1 = p_1 \Delta / m_1$  — энергия пары в системе, где  $\mathbf{p}_1 = 0$ . Взяв выражение для  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)}$  (26.4), произведя в нем необходимые свертки и перейдя к ковариантным переменным [см. (26.13)], найдем в пределе  $m_1 \rightarrow \infty$  [когда  $J_{\mu\nu}^s(p_1, p_3) / (2s_1 + 1) \rightarrow 4p_{1\mu} p_{1\nu}$  независимо от спина]:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega &= (2\alpha^3 / \pi) \int [d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4 / p^2 \Delta_1^4 \sqrt{-\tilde{S}}] N_1^{(s_2)}; \\
d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma / d\omega m_1^2 &= (2\alpha^3 / \pi) \int [d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4 / p^2 \Delta_1^4 \sqrt{-\tilde{S}}] N_2^{(s_2)}, \quad (26.19)
\end{aligned}$$

где  $p^2 = \epsilon^2 - m_2^2$ ;  $\epsilon = p_1 p_2 / m_1 = v / m_1$  — энергия частицы  $p_2$  в системе  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned}
N_1^{(1/2)} &= (m_2^2 + \Delta^2/2) [\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2]^2 + (\kappa_2/\kappa_4 + \\
&+ \kappa_4/\kappa_2)/2 - \Delta_1^2 [\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2]/2\kappa_2 \kappa_4 + (\Delta_1^2/4) \times \\
&\times \{2/\kappa_2 - 2/\kappa_4 - (m_2^2 + \Delta^2/2) (1/\kappa_2^2 + 1/\kappa_4^2) + (m_2^2 + \\
&+ \Delta_1^2 - \Delta^2)/\kappa_2 \kappa_4\}; \\
N_2^{(1/2)} &= [\varepsilon (\varepsilon - \omega) + \Delta^2/4] [\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2]^2 + \\
&+ \{(\Delta_1^2/4\kappa_2 \kappa_4) [2\varepsilon (\varepsilon - \omega) + \omega^2 + \Delta^2/2] - \\
&- (\Delta_1^2/4) [\varepsilon (\varepsilon - \omega) + \Delta^2/4] (1/\kappa_4^2 + 1/\kappa_2^2) + [2(\varepsilon - \omega)^2 + \\
&+ 2\varepsilon (\varepsilon - \omega) + \kappa_4/2]/2\kappa_2 - [2\varepsilon^2 + \\
&+ 2\varepsilon (\varepsilon - \omega) - \kappa_2/2]/2\kappa_4 - 1/2\}; \\
N_1^{(0)} &= (m_2^2 - \Delta^2/4) [\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2]^2 - \\
&- \Delta_1^2 \varepsilon (\varepsilon - \omega)/\kappa_2 \kappa_4 + 1; \\
N_2^{(0)} &= [2\varepsilon - \omega] [\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2]/2 - 1]^2; \\
\tilde{S} &= \lim_{m_1 \rightarrow \infty} S(p_1, p_2, p_3, p_4)/m_1^2.
\end{aligned} \right\} (26.20)$$

Функцию  $\tilde{S}$  можно представить в форме (Г.39). Если в ней в качестве  $\xi$  взять  $\kappa_4$ , то:

$$\left. \begin{aligned}
Q_{\kappa_4} &= (\varepsilon - \omega)^2 + 2\kappa_2 - m_2^2; \\
P_{\kappa_4} &= \kappa_2 [\varepsilon (\varepsilon - \omega) - m_2^2 + \kappa_2 + \Delta^2/2] + \\
&+ (\Delta_1^2/2) [\omega (\varepsilon - \omega) - \kappa_2 + \Delta^2/2]; \\
R_{\kappa_4} &= \Delta_1^4 (\omega^2 - \Delta^2)/4 - \Delta_1^2 [\omega (\varepsilon \kappa_2 - m_2^2 \omega) - \\
&- \Delta^2 (\varepsilon^2 - m_2^2 - \omega \varepsilon + \kappa_2/2) - \Delta^4/4] + \\
&+ \kappa_2^2 (\varepsilon^2 - m_2^2).
\end{aligned} \right\} (26.21)$$

Если первое интегрирование проводить по  $\kappa_4$  [между нулями  $\tilde{S}$ , см. (Г.40), (Г.41)], а затем по  $\Delta_1^2$  и  $\kappa_4$ , то пределы по  $\Delta_1^2$  будут, очевидно,

$$\Delta_{1\pm}^2 = (p_2 - \Delta)^2 + p_4^2 \pm 2|p_4| |p_2 - \Delta|. \quad (26.22)$$

Здесь величины взяты в системе, где  $p_1 = 0$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned}
p_4^2 &= \varepsilon_4^2 - m_2^2 = (\varepsilon - \omega)^2 - m_2^2; \\
(p_2 - \Delta)^2 &= (\varepsilon - \omega)^2 - (p_2 - \Delta)^2 = (\varepsilon - \omega)^2 - m_2^2 + 2\kappa_2,
\end{aligned} \right\} (26.23)$$

так что

$$\left. \begin{aligned}
\Delta_{1\pm}^2 &= 2[(\varepsilon - \omega)^2 - m_2^2 + \kappa_2] \pm 2\sqrt{(\varepsilon - \omega)^2 - m_2^2} \sqrt{Q_{\kappa_4}}; \\
(\Delta_{1+}^2)(\Delta_{1-}^2) &= 4\kappa_2^2.
\end{aligned} \right\} (26.24)$$

Пределы интегрирования по  $\kappa_2$  будут

$$\begin{aligned}
\kappa_{2\pm} &= \varepsilon\omega - \Delta^2/2 \pm |p_2| |\Delta| = \\
&= \varepsilon\omega - \Delta^2/2 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - m_2^2} \sqrt{\omega^2 - \Delta^2}.
\end{aligned} \quad (26.25)$$

Если же интегрирование вести сначала по  $\kappa_2$ , а потом по  $\Delta_1^2$  и  $\kappa_4$ , то пределы по  $\Delta_1^2$  получаются из (26.24) заменой  $p_2 \rightarrow -p_4$ , т. е.  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon + \omega$  и  $\kappa_2 \rightarrow -\kappa_4$ , а пределы по  $\kappa_4$  — той же заменой из (26.25).

Во всех приведенных выше выражениях ничем не пренебрегали. Теперь перейдем к рассмотрению случая ультрарелятивистских частиц, т. е. будем везде считать, что

$$\varepsilon \gg m_2, \quad \varepsilon \gg \mu, \quad (26.26)$$

не делая предположений о соотношении между  $m_2$  и  $\mu$ , и будем отбрасывать члены, имеющие порядок  $m_2^2/\varepsilon^2$ ,  $\mu^2/\varepsilon^2$  (по сравнению с единицей). Будем считать также, что налетающая частица после взаимодействия остается ультрарелятивистской, т. е.  $\varepsilon_4 \gg m_2^2$  ( $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$ ). Как будет видно из дальнейшего, можно считать  $\Delta^2$  порядка большей из величин  $m_2^2$ ,  $\mu^2$ . Рассмотрим случай, когда частицы пары обладают большой энергией  $\omega^2 \gg \Delta^2$ , и можно проводить разложение по  $\Delta^2/\varepsilon^2$ ,  $\Delta^2/\omega^2$ .

Вычисление интегралов (26.19) во многом аналогично вычислению спектра тормозного излучения. Так же, как там, в существенной области  $\kappa_{2,4} \sim \kappa_{2,4\text{мин}} \ll \kappa_{2,4\text{макс}}$ ,  $\Delta_1^2 \ll \Delta_{1\text{макс}}^2$ . Конкретнее, существенны значения  $\kappa_{2,4} \sim \max(m_2^2, \mu^2)$  и  $\Delta_1^2 \lesssim \max(m_2^2, \mu^2)$ . Нижний предел по  $\Delta_1^2 \sim \max(m_2^4, \mu^4)/\varepsilon^2$  соответствует кинематической ситуации, когда все частицы летят по одной прямой, при этом  $\kappa_4/\kappa_2 \approx \varepsilon/(\varepsilon - \omega)$ , так что входящие в (26.20) члены  $\varepsilon/\kappa_4$  и  $(\varepsilon - \omega)/\kappa_2$  взаимно компенсируются. Так же, как в сечении тормозного излучения, члены  $\kappa_2/\kappa_4$  и  $\kappa_4/\kappa_2$  в выражении для  $N_1^{1/2}$  дают вклад лишь в области  $\Delta_1^2 \sim \Delta_{1\text{мин}}^2$ , и их можно заменить на  $\varepsilon/(\varepsilon - \omega)$  и  $(\varepsilon - \omega)/\varepsilon$ . Произведя в (26.19), (26.20) отбор главных членов в соответствии с вышесказанным, можно записать сечения в виде

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma}/d\omega &= (2\alpha^3/\pi p^2) [e_1^{(s_2)} J_1 + e_2^{(s_2)} J_2]; \\ d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma/m_1^2 d\omega &= (2\alpha^3/\pi p^2) e_3^{(s_2)} J_1, \end{aligned} \right\} \quad (26.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(0)} &= m_2^2 - \Delta^2/4; & e_2^{(0)} &= \varepsilon(\varepsilon - \omega); \\ e_3^{(0)} &= (2\varepsilon - \omega)^2/4; & e_1^{(1/2)} &= m_2^2 + \Delta^2/2; \\ e_2^{(1/2)} &= [\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2]/2; & e_3^{(1/2)} &= \varepsilon(\varepsilon - \omega); \\ J_1 &= \int [d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4/\Delta_1^4 \sqrt{-\tilde{S}}] (\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2)^2; \\ J_2 &= \int [d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4/\Delta_1^4 \sqrt{-\tilde{S}}] (1/\varepsilon(\varepsilon - \omega) - \Delta_1^2/\kappa_2 \kappa_4). \end{aligned} \right\} \quad (26.28)$$

Запишем входящее в  $J_1$  выражение в виде

$$\begin{aligned} [\varepsilon/\kappa_4 - (\varepsilon - \omega)/\kappa_2]^2 &= (\varepsilon - \omega)^2/\kappa_2^2 - \varepsilon(\varepsilon - \omega)/\kappa_2 \kappa_4 - \\ &\quad - \varepsilon(\varepsilon - \omega)/\kappa_4 \kappa_2 + \varepsilon^2/\kappa_4^2, \end{aligned} \quad (26.29)$$

последние два члена получаются из двух первых заменой  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ . Так как дифференциал в интеграле  $J_1$  и область интегрирования также симметричны при этой замене, то можно интегрировать только два первых члена, а остальные получать заменой. При интегрировании в порядке  $\kappa_4, \Delta_1^2, \kappa_2$  первый интеграл стандартный [см. (Г.41) Приложения Г], причем с принятой точностью можно положить

$$R_{\kappa_4} = \Delta_1^4 \omega^2 / 4 - \Delta_1^2 [\omega (\epsilon \kappa_2 - m_2^2 \omega) - \Delta^2 \epsilon (\epsilon - \omega)] + \kappa_2^2 (\epsilon^2 - m_2^2), \quad (26.30)$$

а интегрирование по  $\Delta_1^2$  вести от  $\kappa_2^2 / (\epsilon - \omega)^2$  до  $\infty$ . Приведем входящие интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \int d\Delta_1^2 / \Delta_1^4 &= (\epsilon - \omega)^2 / \kappa_2^2; & \int d\Delta_1^2 / \Delta_1^2 R_{\kappa_4}^{1/2} &= H_1 / \epsilon \kappa_2; \\ \int d\Delta_1^2 / \Delta_1^4 R_{\kappa_4}^{1/2} &= (\epsilon - \omega)^2 / \sqrt{\epsilon^2 - m_2^2} \kappa_2^3 - \omega / 2\epsilon^2 \kappa_2^2 + \\ &+ [(\omega \epsilon \kappa_2 - m_2^2 \omega^2 \Gamma_1) / 2\kappa_2^3 \epsilon^3] (H_1 - 1), \end{aligned} \right\} \quad (26.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= 1 + \Delta^2 \epsilon (\epsilon - \omega) / m_2^2 \omega^2; \\ H_1 &= \ln [4\epsilon^2 (\epsilon - \omega)^2 / m_2^2 \omega^2 \Gamma_1]. \end{aligned} \right\} \quad (26.32)$$

В последнем интеграле сохранены члены относительного порядка  $m_2^2 / \epsilon^2, \kappa_2 / \epsilon^2, \Delta^2 / \epsilon^2$ , так как старшие члены в  $J_1$  велики и взаимно компенсируются. Проведя явно эту компенсацию с помощью разложения  $\sqrt{\epsilon^2 - m_2^2}$  и  $\sqrt{Q_{\kappa_4}}$  и взяв элементарные интегралы по  $\kappa_2$  (в качестве пределов можно взять  $m_2^2 \omega^2 \Gamma_1 / 2\epsilon \omega \leq \kappa_2 \leq \infty$ ), получим

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= [\pi \epsilon (\epsilon - \omega) / m_2^4 \omega \Gamma_1^2] [(H_1 - 1) / 3 + \\ &+ 4 (\epsilon^2 - (\epsilon - \omega)^2) / 3\omega^2 \Gamma_1 - (\epsilon + (\epsilon - \omega)) / \omega + \\ &+ \text{члены } (\epsilon \leftrightarrow -(\epsilon - \omega))] = 2\pi \epsilon (\epsilon - \omega) (H_1 - 1) / 3m_2^4 \omega \Gamma_1^2; \\ J_2 &= -2\pi (H_1 - 1) / m_2^2 \omega \Gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (26.33)$$

Подставляя эти значения в (26.27) получаем для  $s_2 = 1/2$ :

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega &= [-2\alpha^3 / m_2^2 \omega \Gamma_1] [1 + ((\epsilon - \omega) / \epsilon)^2 - \\ &- [2(\epsilon - \omega) / 3\epsilon \Gamma_1] (1 + \Delta^2 / 2m_2^2)] (H_1 - 1); \\ d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\omega &= 4\alpha^3 (\epsilon - \omega)^2 (H_1 - 1) / 3m_2^4 \omega \Gamma_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (26.34)$$

и для  $s_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega &= [-4\alpha^3 (\epsilon - \omega) / m_2^2 \omega \Gamma_1 \epsilon] \times \\ &\times [1 - (1 - \Delta^2 / 4m_2^2) / 3\Gamma_1] (H_1 - 1); \\ [d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\omega] &= [\alpha^3 (2\epsilon - \omega)^2 \times \\ &\times (\epsilon - \omega) / 3m_2^4 \omega \Gamma_1^2 \epsilon] (H_1 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (26.35)$$

При  $\Delta^2 = 0$  первые из приведенных формул (26.34), (26.35) дают (естественно, с обратным знаком) просуммированный по поляризации спектр тормозного излучения в кулоновском поле для частиц со спинами 0 и 1/2. Подставив (26.34) и (26.35) в (26.6), получим сечение рождения пары (вклад диаграммы I), дифференциальное по инвариантной массе пары и ее энергии для спина  $s_2 = 1/2$ :

$$d\sigma_I = (2\alpha^3/m_2^2 \omega \Gamma_1) [1 + ((\varepsilon - \omega)/\varepsilon)^2 - 2(\varepsilon - \omega)/3\varepsilon \Gamma_1] \times \\ \times (1 + \Delta^2/2m_2^2) (H_1 - 1) f^{(s_f)}(\Delta^2) d\Delta^2 d\omega, \quad (26.36)$$

и для спина  $s_2 = 0$ :

$$d\sigma_I = [4\alpha^3(\varepsilon - \omega)/m_2^2 \omega \Gamma_1 \varepsilon] [1 - (1 - \Delta^2/4m_2^2)/3\Gamma_1] \times \\ \times (H_1 - 1) f^{(s_f)}(\Delta^2) d\Delta^2 d\omega, \quad (26.37)$$

где  $f^{(s_f)}(\Delta^2)$  даются формулами (7.12), (7.13).

Формулы (26.34), (26.35), а следовательно, и (26.36), (26.37), получены в предположении, что  $|p_4| \gg m_2$ ; в частности, при их выводе отбрасывались члены типа  $m_2^2/(\varepsilon - \omega)^2$  и  $\Delta^2/\varepsilon(\varepsilon - \omega)$ . Возникает вопрос, можно ли использовать их для вычисления полного сечения. Для анализа существенной области можно считать, что

$$d\sigma_I \sim \alpha^4 \omega d\omega d\Delta^2/m_2^2 \omega^2 \Gamma_1 \Delta^2. \quad (26.38)$$

Инвариантная масса и энергия пары изменяются в пределах\*

$$4\mu^2 \leq \Delta^2 \leq (\varepsilon - m_2)^2; \quad \sqrt{\Delta^2} \leq \omega \leq \varepsilon - m_2.$$

Найдем с помощью (26.38) существенный интервал  $\varepsilon - \omega$ . Видно, что при  $\mu^2 \sim \varepsilon m_2 \gg m_2^2$  можно считать  $d\sigma_I \sim \alpha^4 \omega d\omega d\Delta^2/\varepsilon(\varepsilon - \omega)\Delta^4$ , откуда следует, что интервал  $\varepsilon - \omega \sim m_2$  существен. Поэтому при таких значениях  $\mu^2$  уже нельзя пользоваться формулами (26.36), (26.37) для вычисления полного сечения. Более того, при  $\mu^2 \gg m_2 \varepsilon$  прямое использование (26.38) дает неправильный результат  $\sigma \sim \alpha^4/m_2 \varepsilon$  (а не  $\sigma \sim \alpha^4/\mu^2$ ). Это связано с тем, что в выражении для  $\kappa_{2-}$  (26.25) нельзя пренебречь  $\Delta^2$  по сравнению с  $\varepsilon(\varepsilon - \omega)$ . Точное выражение

$$\kappa_{2-} = (m_2^2 \omega^2 + \Delta^2 [\varepsilon(\varepsilon - \omega) + \Delta^2/4 - m_2^2]) / (\varepsilon\omega - \Delta^2/2 + \\ + \sqrt{\varepsilon^2 - m_2^2} \sqrt{\omega^2 - \Delta^2})$$

дает следующее выражение для  $\Gamma_1$ :

$$\Gamma_1 = 1 + (\Delta^2/m_2^2 \omega^2) [\varepsilon(\varepsilon - \omega) + \Delta^2/4 - m_2^2] \approx 1 + \\ + (\Delta^2/m_2^2 \omega^2) [\varepsilon(\varepsilon - \omega) + \Delta^2/4]. \quad (26.39)$$

\* Из формулы (26.38) видно, что существенна область изменения  $\Delta^2$  до  $\Delta_m^2 \sim \max(\mu^2, m_2^2 \omega^2/\varepsilon(\varepsilon - \omega))$ . Отсюда следует  $\Delta^2/\varepsilon^2 \ll 1$  и для ультрарелятивистских конечных частиц  $\Delta^2/\omega^2 \ll 1$ .



поскольку всегда  $\varepsilon (\varepsilon - \omega) \geq \varepsilon m_2 \gg m_2^2$ , то член  $m_2^2$  можно опустить. Чтобы найти полное сечение, необходимо использовать именно эту формулу для  $\Gamma_1$ . При вычислении функций  $J_{1,2}$  проводилось еще разложение по  $\kappa_2/(\varepsilon - \omega)^2$ , однако если использовать точные пределы, то можно обойтись и без этого разложения, и, действуя, как выше (26.28) — (26.33), можно получить точные выражения для  $J_{1,2}$ :

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \left[ 2\pi \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} pp' / 3m_2^4 \omega^2 \Gamma_1^2 \right] \times \\ &\times [\varepsilon \varepsilon' (\omega^2 - \Delta^2) H_1^{ex} / pp' \omega^2 - 1 + \Delta^4 (4\varepsilon \varepsilon' + \omega^2) / m_2^2 \omega^4 \Gamma_1]; \\ J_2 &= \left[ -2\pi \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} pp' / \varepsilon \varepsilon' m_2^2 \omega^2 \Gamma_1 \right] (\varepsilon \varepsilon' H_1^{ex} / pp' - 1), \end{aligned} \right\} \quad (26.40)$$

где  $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$ ;  $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m_2^2}$ ;  $p' = \sqrt{\varepsilon'^2 - m_2^2}$ ;  $\Gamma_1$  дается (26.39) и

$$H_1^{ex} = \ln [(\varepsilon \varepsilon' + pp' - m_2^2 + \Delta^2/2) / m_2^2 \omega^2 \Gamma_1]. \quad (26.41)$$

Подставляя (26.40) в (26.27), получаем точное выражение для  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega$  в случае скалярных частиц ( $s_2 = 0$ ), воспользовавшись которым, можно найти точное выражение для сечения  $d\sigma_1 / d\Delta^2 d\omega$  (26.6). В случае, когда спин налетающей частицы  $s_2 = 1/2$ , точное выражение для  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega$  значительно более громоздко, поскольку оно выражается не только через  $J_{1,2}$  [ср. (26.20)]. Сравнивая точное выражение  $d\sigma_1 / d\Delta^2 d\omega$  с приближенным (26.37), видим, что точность приближения для вычисления полного сечения хорошая при  $\mu^2 \ll m_2 \varepsilon$  ( $\max(m_2^2, \mu^2) / m_2 \varepsilon$ ), а при  $\mu^2 \lesssim m_2 \varepsilon$  точность приближения [с использованием корректного выражения (26.39)], становится логарифмической. То же справедливо и для  $s_2 = 1/2$ .

Приступим к вычислению дифференциального по энергиям частиц пары сечения. Чтобы найти  $d\sigma_1$ , следует подставить (26.34), (26.35) в (26.12), перейти к пределу  $m_1^2 \rightarrow \infty$  и выполнить интегрирование по  $\Delta^2$ , а для  $d\sigma_{III}$  необходимо еще найти  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} / d\varepsilon_6$ ,  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\varepsilon_6$ . Но, очевидно, эти сечения можно получить с помощью правил подстановки, а именно:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} / d\varepsilon_6 &= [(-1)^{2s_f} (2s_f + 1) (\varepsilon_6^2 - \mu^2) / (\omega^2 + \Delta_2^2)] \{ (d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} / d\omega) \} \\ & (s_2 \rightarrow s_f, m_2^2 \rightarrow \mu^2, \Delta^2 \rightarrow -\Delta_2^2, \omega \rightarrow -\omega, \varepsilon \rightarrow -\varepsilon_6) \end{aligned} \quad (26.42)$$

и аналогично для  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\varepsilon_6$ . Для  $s_f = 1/2$  [см. (26.34), (26.35)]

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} / d\varepsilon_6 &= (-4\alpha^3 / \mu^2 \omega^3 \Gamma_3) [\varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2 + \\ &+ (2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\Gamma_3) (1 - \Delta_2^2 / 2\mu^2)] (H_3 - 1); \\ d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\varepsilon_6 &= \\ &= (8\alpha^3 / 3\mu^4 \omega^3) (\varepsilon_5^2 \varepsilon_6^2 / \Gamma_3^2) (H_3 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (26.43)$$

и для  $s_f = 0$

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} / d\varepsilon_6 &= (-4\alpha^3 / \mu^2 \omega^3) \times \\ &\times [(\varepsilon_5 \varepsilon_6) / \Gamma_3] [1 - (1 + \Delta_2^2 / 4\mu^2) / 3\Gamma_3] (H_3 - 1); \\ d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma / m_1^2 d\varepsilon_6 &= [\alpha^3 (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 3\mu^4 \omega^3] \times \\ &\times [\varepsilon_5 \varepsilon_6 / \Gamma_3^2] (H_3 - 1), \end{aligned} \right\} \quad (26.44)$$

где

$$\varepsilon_5 = \omega - \varepsilon_6;$$

$$\Gamma_3 = 1 + \Delta_2^2 \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \mu^2 \omega^2; \quad H_3 = \ln [4\varepsilon_5^2 \varepsilon_6^2 / \mu^2 \omega^2 \Gamma_3]. \quad (26.45)$$

Естественно, первые выражения в (26.43), (26.44) представляют при  $\Delta_2^2 = 0$  сечение фоторождения пары (с коэффициентом  $-2$ ). Формулы (26.43) и (26.44) получены в предположении, что  $\mu^2 / \varepsilon_{5,6}^2 \ll 1$ ,  $\Delta_2^2 / \varepsilon_{5,6}^2 \ll 1$ . Ниже покажем, что существенной областью  $\Delta_2^2$  является  $\Delta_2^2 \lesssim \mu^2$ , следовательно, все формулы справедливы, когда частицы пары являются ультрарелятивистскими.

Пределы интегрирования по  $\Delta^2$  и  $\Delta_2^2$  находятся элементарно:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)^2 - (p_5 + p_6)^2 &\leq \Delta^2 \leq (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)^2 - (p_5 - p_6)^2; \\ (p_2 - p_4)^2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2 &\leq \Delta_2^2 \leq (p_2 + p_4)^2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2 \end{aligned} \right\} \quad (26.46)$$

или для ультрарелятивистских частиц:

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 \omega^2 / \varepsilon_5 \varepsilon_6 &\leq \Delta^2 \leq 4\varepsilon_5 \varepsilon_6; \quad m_2^2 \omega^2 / \varepsilon \varepsilon' \leq \Delta_2^2 \leq 4\varepsilon \varepsilon'; \\ \varepsilon &= \varepsilon_2; \quad \varepsilon' = \varepsilon_4 = \varepsilon - \omega. \end{aligned} \right\} \quad (26.47)$$

После подстановки (26.34) и (26.35) в (26.12) и (26.43) и (26.44) в (26.17) и перехода к пределу  $m_1^2 \rightarrow \infty$ , получим следующие универсальные выражения для сечений электророждения пары на кулоновском поле [60]:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_I &= (2\alpha^4 / m_2^2 \pi) (d\varepsilon_6 d\omega d\Delta^2 \varepsilon' / \omega^2 \varepsilon) \times \\ &\times [A_I (m_2^2 / \Delta^2 - \varepsilon \varepsilon' / \Gamma_1 \omega^2) + B_I \omega^2 / \xi \varepsilon \varepsilon' \Delta^4 + \\ &+ C_I \varepsilon \varepsilon' / \Gamma_1^2 \omega^2] (H_1 - 1); \\ d\sigma_{III} &= (2\alpha^4 / \mu^2 \pi) (d\varepsilon_6 d\omega d\Delta_2^2 \varepsilon' / \omega^2 \varepsilon) \times \\ &\times [A_{III} (\mu^2 / \Delta_2^2 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \Gamma_3 \omega^2) / \mu^2 + B_{III} \xi \omega^2 \mu^2 / \Delta_2^4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 + \\ &+ C_{III} \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \mu^2 \Gamma_3^2 \omega^2] (H_3 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (26.48)$$

Здесь  $\xi = m_2^2 \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \mu^2 \varepsilon \varepsilon'$ ; коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  зависят от спинов участвующих частиц и не зависят от  $\Delta^2$ ,  $\Delta_2^2$ . Приведем значения этих коэффициентов в разных случаях:

I. ( $s_2 = 1/2$ ;  $s_f = 1/2$ )

$$\left. \begin{aligned} A_I &= (1/2 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) (4/3 + \omega^2 / \varepsilon \varepsilon') - (4\mu^2 / 3m_2^2) (1 + \varepsilon \varepsilon' / \omega^2); \\ B_I &= (\varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) (4/3 + \omega^2 / \varepsilon \varepsilon'); \\ C_I &= 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2 + \mu^2 / 3m_2^2 - (\omega^2 / 3\varepsilon \varepsilon') (1/2 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2); \\ A_{III} &= (1 - 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2) (1 + \omega^2 / 2\varepsilon \varepsilon') + 4\xi (1 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) / 3; \\ B_{III} &= 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2 - 1; \\ C_{III} &= -\xi / 3 - \omega^2 / 6\varepsilon \varepsilon' - (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 3\omega^2. \end{aligned} \right\} (26.49)$$

II. ( $s_2 = 1/2$ ;  $s_f = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} A_I &= (\varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) (2/3 + \omega^2 / 2\varepsilon \varepsilon') + (2\mu^2 / 3m_2^2) (1 + \varepsilon \varepsilon' / \omega^2); \\ B_I &= (-\varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) (2/3 + \omega^2 / 2\varepsilon \varepsilon'); \\ C_I &= (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 6\omega^2 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / 6\varepsilon \varepsilon' - \mu^2 / m_2^2; \\ A_{III} &= 2(1 + \xi + \omega^2 / 2\varepsilon \varepsilon') \varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2; \\ B_{III} &= -2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2; \quad C_{III} = (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 6\omega^2. \end{aligned} \right\} (26.50)$$

III. ( $s_2 = 0$ ,  $s_f = 1/2$ )

$$\left. \begin{aligned} A_I &= 4(1/2 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) / 3 - 4\mu^2 \varepsilon \varepsilon' / 3m_2^2 \omega^2; \\ B_I &= 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2; \quad C_I = (4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2) (1 + \omega^2 / 4\varepsilon \varepsilon'); \\ A_{III} &= 1 - 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2 + 4\xi (1 - \varepsilon_5 \varepsilon_6 / \omega^2) / 3; \\ B_{III} &= 4\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2 - 1; \\ C_{III} &= -(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 3\omega^2 - \xi / 3 + \varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\varepsilon \varepsilon'. \end{aligned} \right\} (26.51)$$

IV. ( $s_2 = 0$ ,  $s_f = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} A_I &= 2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2 + 2\mu^2 \varepsilon \varepsilon' / 3m_2^2 \omega^2; \\ B_I &= -2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2; \quad C_I = [(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 6\omega^2] (1 + \omega^2 / 4\varepsilon \varepsilon'); \\ A_{III} &= [2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2] (1 + \xi); \quad B_{III} = -2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / 3\omega^2; \\ C_{III} &= [(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)^2 / 6\omega^2] (1 + \omega^2 / 4\varepsilon \varepsilon'). \end{aligned} \right\} (26.52)$$

Напомним для удобства, что  $\varepsilon$  ( $\varepsilon'$ ) — начальная (конечная) энергия налетающей частиц;  $\varepsilon_{5,6}$  — энергия образовавшихся частиц;  $m_2$  ( $\mu$ ) — масса налетающей (родившейся) частицы,  $\omega = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \varepsilon - \varepsilon'$ .

Взяв интегралы по  $\Delta^2$ ,  $\Delta_2^2$  от сечений (26.48), причем интеграл по  $\Delta_2^2$  сходится при больших  $\Delta_2^2$  и существенной областью является  $\Delta_2^2 \lesssim \mu^2$ , получим спектр родившихся частиц [60]:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_I &= (2\alpha^4/m_2^2 \pi) (d\varepsilon_6 d\varepsilon_5 \varepsilon' / \omega^2 \varepsilon) \{ 2 (\ln [2\varepsilon\varepsilon' / m_2 \omega \sqrt{1 + 1/\xi}] - \\ &\quad - 1/2) [A_I \ln(1 + \xi) + B_I + C_I \xi / (1 + \xi)] - \\ &\quad - A_I f(\xi / (1 + \xi)) - B_I \ln(1 + \xi) / \xi - C_I \xi / (1 + \xi) \}; \\ d\sigma_{III} &= (2\alpha^4/\mu^2 \pi) (d\varepsilon_5 d\varepsilon_6 \varepsilon' / \omega^2 \varepsilon) \{ 2 (\ln [2\varepsilon_5 \varepsilon_6 / \mu \omega \sqrt{1 + 1/\xi}] - \\ &\quad - 1/2) [A_{III} \ln(1 + 1/\xi) + B_{III} + C_{III} / (1 + \xi)] - \\ &\quad - A_{III} f(1 / (1 + \xi)) - B_{III} \xi \ln(1 + 1/\xi) - C_{III} / (1 + \xi) \}, \end{aligned} \right\} (26.53)$$

где  $f(x) = -\int_0^x (\ln|1 - t|/t) dt$  [см. (21.34)]. Обратим внимание, что при  $m_2 \gg \mu$  сечение  $d\sigma_I$  ( $\sim 1/m_2^2$ ) мало по сравнению с сечением  $d\sigma_{III}$  ( $\sim 1/\mu^2$ ). Что касается интерференции между вкладом диаграмм I и III  $d\sigma_{I III}$ , то, как уже отмечалось,  $d\sigma_{I III}(\varepsilon_5, \varepsilon_6) = -d\sigma_{I III}(\varepsilon_6, \varepsilon_5)$ , следовательно, этот член можно устранить симметризацией опыта и, очевидно, он не дает вклада в полное сечение.

Напомним, что все полученные выражения справедливы, если  $\varepsilon \gg \mu$ ,  $m_2, \varepsilon_{5,6} \gg \mu$ ,  $\varepsilon - \omega \gg m_2$ , кроме того, при вычислении  $d\sigma_I$  использовано, что  $\varepsilon(\varepsilon - \omega) \gg \mu^2$ .

Обсудим теперь изменения, которые возникнут, если масса  $m_1$  конечна. Очевидно, что тогда будет иметь место отдача частицы I ( $\varepsilon_3 \neq m_1$ ). Можно сразу указать, когда отдача несущественна. При вычислении сечения  $d\sigma_I$  существенны значения  $\Delta_1^2 \lesssim \max(m_2^2, \mu^2)$  [ $\Delta_1^2 = 2m_1(\varepsilon_3 - m_1)$ ], и для того чтобы передачей энергии  $\varepsilon_3 - m \lesssim \max(m_2^2, \mu^2)/m_1$  можно было пренебречь, необходимо, чтобы она была много меньше, чем  $\varepsilon$  и  $\varepsilon - \omega$  (сопоставления с  $\varepsilon_{5,6}$ , как и разложения по  $\Delta_1^2/\omega^2$ , здесь нет). В сечение  $d\sigma_{III}$  основной вклад дают передачи  $\Delta_1^2 \lesssim \mu^2$ , и для несущественности отдачи необходимо, чтобы  $\varepsilon_{5,6} \gg \mu^2/m_1$ , т. е. должно быть  $\varepsilon \gg \mu^2/m_1$ . При выполнении этих условий можно пользоваться (26.53), и в случае столкновения с частицей конечной массы мы уже сталкивались с такой ситуацией для процесса фоторождения пар. Кроме того, дополнительный вклад даст диаграмма II; этот вклад следует рассматривать лишь при  $m_1 \lesssim \mu$ , поскольку при  $m_1 \gg \mu$  он мал ( $d\sigma_{III} \sim 1/\mu^2$ ;  $d\sigma_{II} \sim 1/m_1^2$ ).

Частица отдачи будет рожать пару с энергиями  $\sim \mu^2/m_1$ . Это можно понять из анализа, проведенного для диаграммы I. Основной вклад дают  $\kappa_2 \sim \kappa_{2-}$ , т. е. когда  $p_2 \Delta \sim \max(\mu^2, m_2^2)$ . В системе же, где  $p_2 = 0$ ,  $p_2 \Delta = m_2 \Delta^0$ , т. е. в этой системе энергия пары порядка  $\max(m_2, \mu^2/m_2)$ , а вклад диаграммы II получается из вклада диаграмм I заменой  $1 \leftrightarrow 2$ . Интерференционный член  $d\sigma_{I III}$  обладает теми же свойствами, что и  $d\sigma_{I III}$ , а интерферен-

ционный член  $d\sigma_{II}$  мал, поскольку существенные области  $d\sigma_I$  и  $d\sigma_{II}$  не перекрываются.

Из обсуждения после формулы (26.38) следует, что полное сечение  $\sigma_I$  можно получить из (26.53) только с логарифмической точностью. Та же ситуация имеет место и для  $\sigma_{III}$ , поскольку после интегрирования (по  $d\varepsilon_5$  или  $d\varepsilon_6$ ) при фиксированном  $\omega$  получим, что  $d\sigma_{III} \sim d\omega/\omega$ .

26.3. Полные сечения и сечения  $d\sigma/d\Delta^2$ . Будем искать сечения электророжения пары частиц при условии, что  $v \equiv p_1 p_2 \gg m_1 m_2; m_1 \mu, m_2 \mu, \mu^2$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $m_1 \geq m_2$ . Уже из (26.53) следует, что при больших энергиях сечение ведет себя как  $\ln^3 [v/m_1 m_2]$ . Наличие высокой степени логарифма обычно означает, что вычисление сечения сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому будем проводить вычисления с «дважды логарифмической» точностью, т. е. сохранять в сечении члены, содержащие произведение трех и двух больших логарифмов (большими могут быть логарифмы отношения энергии к массе и логарифмы отношения масс), и отбрасывать члены, содержащие один логарифм и константы. Естественно, такое приближение достаточно точно лишь при высоких энергиях.

Наряду с полным сечением важной характеристикой процесса электророжения является сечение  $d\sigma/d\Delta^2$ , дающее распределение родившихся частиц по инвариантной массе. Поэтому вычисления будут проводиться так, чтобы последнее интегрирование велось по  $\Delta^2$ . Главный (трижды логарифмический) вклад в сечение дает диаграмма III (см. рис. 5б), вклады диаграмм I и II содержат не больше двух логарифмов. В сечении  $d\sigma_{III}$  (26.17) рассмотрим сначала член с  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma}$ ,  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)}$  дается формулой (26.15). Вычисление  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma}/d\Delta^2$  проще всего провести с помощью методики инвариантного интегрирования тензоров (§ 7), так же как это делалось в § 25 для рождения пары фотоном, только теперь фотон с импульсом  $q_2$  имеет массу  $\sqrt{-\Delta_2^2}$ . Получаем

$$d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma}/d\Delta^2 = - (\alpha^3 d\Delta_1^2/8\pi\Delta_1^4) \times \\ \times \{ [I_1^{(s_f)} R_1^{(s_1)} + I_2^{(s_f)} R_2^{(s_1)} \Delta_1^2] / [(q_1 q_2)^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2] \times \\ \times [(p_1 q_2)^2 + m_1^2 \Delta_2^2] \}, \quad (26.54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1^{(s)} &= g_{\mu\nu} I^{(s)\mu\nu}; & I_2^{(s)} &= q_2^\mu q_2^\nu I_{\mu\nu}^{(s)}; \\ e^4 I_{\mu\nu}^{(s)} &= (-1)^{2s} g^{\rho\sigma} \int (d^3 p_5/2\varepsilon_5)(d^3 p_6/2\varepsilon_6) \times \\ &\times \delta(q_1 + q_2 - p_5 - p_6) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s)}(-p_6, p_5, q_1, -q_2). \end{aligned} \right\} \quad (26.55)$$

Для частиц со спинами 0 и 1/2 имеем [ср. (7.17), (7.18)]:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1^{(0)} &= -(\pi\beta/2) \{ -8 - 2(4\mu^2 + \Delta_1^2)(4\mu^2 + \Delta_2^2)\Delta^2/g + \\
 &+ [4(4\mu^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2) - (4\mu^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_1^2) \times \\
 &\times (4\mu^2 + 2\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/(q_1 q_2)] L_p \}; \\
 I_2^{(0)} &= -(\pi\beta/2) \{ -4\Delta^2 - 2\Delta^2(4\mu^2 + \Delta_2^2)[q_1 q_2 - \Delta_2^2]^2/g + \\
 &+ [2(4\mu^2 + \Delta_2^2 + 2q_1 q_2) - (q_1 q_2 + \Delta_2^2) \times \\
 &\times (4\mu^2 + 2\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/(q_1 q_2)] (q_1 q_2 - \Delta_2^2) L_p \}; \\
 I_1^{(1/2)} &= -8\pi\beta \{ 1 + \Delta^2(2\mu^2 - \Delta_1^2)(2\mu^2 - \Delta_2^2)/g + \\
 &+ [2\mu^2(\mu^2 - q_1 q_2) - (q_1 q_2)^2 + \Delta^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/2] \times \\
 &\times L_p/(q_1 q_2) \}; \\
 I_2^{(1/2)} &= -2\pi\beta \{ 2\Delta^2 - 2\Delta^4\Delta_2^2(2\mu^2 - \Delta_2^2)/g - [4\mu^2(q_1 q_2 - \Delta_2^2) + \\
 &+ [\Delta_2^2/(q_1 q_2)] [2\mu^2(\Delta_2^2 - \Delta_1^2) + \Delta^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)]] L_p \}; \\
 R_1^{(0)} &= \Delta_1^2 [2(p_1 q_2)^2 - 2(p_1 q_2)(q_1 q_2) + \Delta_1^2 \Delta_2^2/2] - 2m_1^2 D; \\
 R_2^{(0)} &= 2m_1^2 - \Delta_1^2 - 3\Delta_1^2 [2(p_1 q_2)^2 - 2(p_1 q_2)(q_1 q_2) + \Delta_1^2 \Delta_2^2/2]/D; \\
 R_1^{1/2} &= R_1^{(0)} + \Delta_1^2 D; \quad R_2^{1/2} = R_2^{(0)}.
 \end{aligned} \right\} (26.56)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 g &= \Delta^2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 + 4\mu^2 D; \quad D = (q_1 q_2)^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2; \\
 L_p &= (1/\beta \sqrt{D}) \ln [(q_1 q_2 + \beta \sqrt{D}) / (q_1 q_2 - \beta \sqrt{D})]; \\
 \beta &= \sqrt{(\Delta^2 - 4\mu^2)/\Delta^2}.
 \end{aligned} \right\} (26.57)$$

Приведенные выражения являются точными. Теперь упростим их, сохранив только члены дающие дважды логарифмический вклад. Обсудим прежде всего происхождение трех логарифмов в сечении  $\sigma_{\text{пл}}$ . Два из них получаются при интегрировании по передачам импульса  $d\Delta_1^2/\Delta_1^2$ ,  $d\Delta_2^2/\Delta_2^2$ , а третий — при интегрировании по  $d(p_1 q_2)$  [в задаче электророжения на кулоновском центре  $m_1 \rightarrow \infty$ ,  $p_1 q_2/m_1 = \omega$ , интегрирование по  $d\omega$  в (26.53) дает логарифм]. Для вычисления с принятой точностью можно пренебречь  $\Delta_1^2 \Delta_2^2$  по сравнению с  $(q_1 q_2)^2 = [(\Delta^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2)/2]^2$ , поскольку при разложении по степеням  $\Delta_1^2 \Delta_2^2/(q_1 q_2)^2$  исчезают сразу два логарифма. Это обстоятельство существенно упрощает расчет, тогда имеем

$$D = (q_1 q_2)^2; \quad L_p = [1/\beta (q_1 q_2)] \ln [(1 + \beta)/(1 - \beta)]. \quad (26.58)$$

Аналогично, в произведении  $I_1^{(s)} R_1^{(l)}$  можно опустить все члены вида  $\Delta_1^2 \Delta_2^2$ .

В числителях  $I_2^{(s)}$  и  $R_2^{(s)}$  можно опустить все члены, содержащие  $\Delta_2^2$  (положить  $\Delta_2^2 = 0$ ), так как член с  $I_2^{(s)}$  не дает логарифма при интегрировании по  $\Delta_1^2$ . Кроме того, можно положить  $g = 4\mu^2 (q_1 q_2)^2$ , опустив  $\Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta^2$ , поскольку существенная область изменения  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ .

Пределы интегрирования по  $\Delta_1^2$  находятся из условия обращения угла между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_3$  в  $(0, \pi)$  в системе  $\mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_1 = 0$ . В инвариантной форме

$$\Delta_{1\pm}^2 = -2m_1^2 + \{(\omega^2 + m_1^2 + \Delta_2^2)(\omega^2 + m_1^2 - \Delta_2^2) \pm \sqrt{[(\omega^2 - m_1^2 + \Delta_2^2)^2 + 4m_1^2 \Delta_2^2][(\omega^2 - m_1^2 - \Delta_2^2)^2 - 4m_1^2 \Delta_2^2]}\} / 2\omega^2, \quad (26.59)$$

где

$$\omega^2 = (p_1 + q_2)^2 = m_1^2 + 2p_1 q_2 - \Delta_2^2.$$

С принятой точностью можно положить:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1-}^2 &= m_1^2 (\Delta^2 + \Delta_2^2)^2 / 4 (p_1 q_2)^2; \\ \Delta_{1+}^2 &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (26.60)$$

После сделанных пренебрежений интегралы по  $\Delta_1^2$  от (26.54) вычисляются элементарно. Не будем приводить здесь довольно громоздкий результат интегрирования, ограничившись замечанием, что зависимость этого результата от  $\Delta_2^2$  весьма проста, поскольку в аргументе логарифма, возникающего при интегрировании по  $\Delta_1^2$ , можно положить  $\Delta_2^2 = 0$ ; кроме того, можно пренебречь членами  $m_1^2 \Delta_2^2$  по сравнению с  $(p_1 q_2)^2$ .

Далее следует подставить сечение  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} g^{\rho\sigma} / d\Delta^2$  в (26.17) (сечение  $d\sigma_{11}^{(1)}$ ) и провести интегрирование по  $\Delta_2^2$ . Область изменения  $\Delta_2^2$ ,  $(p_1 q_2)$  при фиксированном значении  $\Delta^2$  находится стандартным образом (см. приложение Г) и определяется неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + \sqrt{\Delta^2})^2 &\leq \omega^2 \leq (\sqrt{(p_1 + p_2)^2 - m_2^2})^2; \\ \Delta_{2-}^2 &\leq \Delta_2^2 \leq \Delta_{2+}^2, \end{aligned} \right\} \quad (26.61)$$

где  $\Delta_{2\pm}^2$  получаются из (26.59) заменой  $\omega^2 \rightarrow (p_1 + p_2)^2 = s$ ,  $\Delta_2^2 \rightarrow -m_1^2$ ,  $m_1 \rightarrow m_2$ ,  $\Delta^2 \rightarrow \omega^2$ . С принятой точностью можно положить:

$$\Delta_{2-}^2 = m_2^2 (p_1 q_2)^2 / v^2; \quad \Delta_{2+}^2 = \infty. \quad (26.62)$$

Обратимся теперь к сечению  $d\sigma_{11}^{(2)}$  в (26.17) (член с  $\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma$ ). Из формулы (26.17) следует, что в этом члене интегрирование по  $\Delta_2^2$  не дает логарифма. Поэтому логарифмы должны возникать при интегрировании по  $\Delta_1^2$  и  $\lambda \equiv p_1 q_2$  (иначе вклад не будет дважды логарифмическим). Из (26.17) видно, что логарифмическим поведением по  $\lambda$  обладают члены, которые в  $\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma$  ведут себя как  $\lambda^2$  при больших  $\lambda$ . Для выделения этих членов удобно воспользоваться результатами § 7. Свернув (26.15) с  $p_1^\rho p_1^\sigma$  и преобразовав  $d^3 p_3 / \epsilon_3 \rightarrow \pi d\Delta^2 d\Delta_1^2 / 2\sqrt{\lambda^2 + m_1^2 \Delta_2^2}$ , получим

$$\begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma &= \{d\Delta^2 d\Delta_1^2 / [2(4\pi)^4 \Delta_1^4 (\lambda^2 + m_1^2 \Delta_2^2)]\} \times \\ &\times [p_1^\rho p_1^\sigma / (2s_1 + 1)] J^{(s_1)}{}^{\mu\nu} (p_1, p_3) G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s_f)}, \end{aligned} \quad (26.63)$$

где

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)} = (-1)^{2sf} \int [d^3 p_5 d^3 p_6 / (2\varepsilon_5 2\varepsilon_6)] \times \\ \times \delta(q_1 + q_2 - p_5 - p_6) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}(-p_6, p_5, q_1, -q_2). \quad (26.64)$$

Теперь воспользуемся результатами раздела 7.3, где получено выражение для  $G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}$  через его свертки. Вторую степень  $\lambda$  в (26.63) дадут лишь те члены в тензоре  $G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}$ , которые содержат  $q_{2\mu} q_{2\nu} q_{2\rho} q_{2\sigma}$ . При этом те из них, которые пропорциональны  $\Delta_1^4$  не дадут логарифмов при интегрировании по  $\Delta_1^2$  и, следовательно, в принятом приближении могут быть отброшены. Из (7.60)—(7.63) находим, что единственным членом, дающим вклад, является  $(B_4/D^3) \Delta^2 (q_1 q_2)^2 q_{2\mu} q_{2\nu} q_{2\rho} q_{2\sigma}$ , причем в  $D$  и в выражении для  $B_4$  (7.64) можно положить  $q_1^2 = 0$ , т. е.  $B_4 \Delta^2 (q_1 q_2)^2 / D^3 = g^{\mu\nu} q_1^\rho q_1^\sigma \times \times G_{\mu\nu\rho\sigma} / [2 (q_1 q_2)^4]$ . Величина же  $g^{\mu\nu} q_1^\rho q_1^\sigma G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}$  получается в силу симметрии тензора  $G_{\mu\nu\rho\sigma}^{(sf)}$  относительно замены  $(\mu, \nu \leftrightarrow \rho, \sigma, q_1 \leftrightarrow q_2)$  из  $e^4 I_2^{(sf)}$  (26.57) заменой  $\Delta_1^2 \leftrightarrow \Delta_2^2$ , окончательно имеем:

$$d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma = \{-\alpha^3 \lambda^2 / [4\pi (q_1 q_2)^4]\} [d\Delta^2 d\Delta_1^2 / \Delta_1^2] I_2^{(sf)} (\Delta_1^2 \leftrightarrow \Delta_2^2), \quad (26.65)$$

причем можно положить  $\Delta_1^2 = 0$  в  $I_2^{(sf)}$  ( $\Delta_1^2 \leftrightarrow \Delta_2^2$ ). Из (26.17) следует, что с дважды логарифмической точностью

$$d\sigma_{\text{III}}^{(2)} = [3\alpha d\lambda / (2\pi\lambda^3)] d\Delta^2 d\sigma_{\rho\sigma}^{(3)} p_1^\rho p_1^\sigma. \quad (26.66)$$

Интегрирование этого выражения по  $\Delta_1^2$  и  $\Delta_2^2$  в пределах, определяемых (26.60) и (26.62), проводится элементарно.

В результате для  $d\sigma_{\text{III}} = d\sigma_{\text{III}}^{(1)} + d\sigma_{\text{III}}^{(2)}$  получаем

$$d\sigma_{\text{III}} = [4\alpha^4 d\Delta^2 d\lambda / (\pi\Delta^4\lambda)] \beta \{d_1^{(sf)} [1 - \lambda/\nu - \Delta^2/2\lambda + s_1 \Delta^4/4\lambda^2 + \\ + s_2 \lambda^2/\nu^2] l_1 l_2 + (d_2^{(sf)} - d_1^{(sf)}) [l_2 + l_1/(1 + m_2^2 \lambda^2/\Delta^2 \nu^2)]\}, \quad (26.67)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_1^{(0)} &= [1 + 4\mu^2/\Delta^2 - 4\mu^2(1 - 2\mu^2/\Delta^2) l_0/\Delta^2]/2; \\ d_1^{(1/2)} &= -1 - 4\mu^2/\Delta^2 + (1 + 4\mu^2/\Delta^2 - 8\mu^4/\Delta^4) l_0; \\ d_2^{(1/2)} &= 11/3 + 22\mu^2/3\Delta^2 - (5/3 + 10\mu^2/\Delta^2 - 44\mu^4/3\Delta^4) l_0; \\ d_2^{(0)} &= [-11/3 - 22\mu^2/3\Delta^2 + (2/3 + 10\mu^2/\Delta^2 - \\ &\quad - 44\mu^4/3\Delta^4) l_0]/2; \quad l_1 = \ln [4\lambda^2/m_1^2 \Delta^2]; \\ l_2 &= \ln [(m_2^2 \lambda^2 + \Delta^2 \nu^2)/m_2^2 \lambda^2]; \\ l_0 &= (1/\beta) \ln [(1 + \beta)/(1 - \beta)]. \end{aligned} \right\} \quad (26.68)$$



Отметим, что величина  $4\alpha^2\pi\beta d_1^{(sf)}/\Delta^2 = \sigma_{\nu\nu}^{(sf)}$  — сечение превращения двух фотонов в пару частиц, а член, содержащий  $l_1, l_2$  в (26.67), можно получить с помощью метода эквивалентных фотонов. Выполняя интегрирование по  $\lambda$  в пределах, которые определяются формулой (26.61) и имеют с принятой точностью вид

$$\sqrt{\Delta^2} (m_1 + \sqrt{\Delta^2}/2) \leq \lambda \leq \nu, \quad (26.69)$$

получаем сечение, дифференциальное по инвариантной массе родившейся пары:

$$\begin{aligned} d\sigma_{III} = & [8\alpha^4 d\Delta^2/\pi\Delta^4] \beta \{ d_1^{(sf)} [(1/3) \ln^3(2\nu/m_1 m_2) - \\ & - \ln(2\nu/m_1 m_2) [\ln^2(1 + \Delta/m_1) + \ln^2(1 + \Delta/m_2)] + \\ & + 2 [\ln^3(1 + \Delta/m_1) + \ln^3(1 + \Delta/m_2)]/3 - \\ & - \ln(2\nu/m_1 m_2) \ln[\nu/(m_1 + \Delta)(m_2 + \Delta)] - (2 - \\ & - s_1) \ln(\nu/m_2 \Delta) \ln[1 + \Delta/m_1] - (2 - s_2) \ln(\nu/m_1 \Delta) \ln(1 + \\ & + \Delta/m_2)] + d_2^{(sf)} \ln(2\nu/m_1 m_2) \ln[\nu/(m_1 + \Delta)(m_2 + \Delta)] \}, \quad (26.70) \end{aligned}$$

где  $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$ ,  $d_{1,2}$  даются (26.68).

Полученное сечение  $d\sigma_{III}/d\Delta^2$  пригодно для любого соотношения между массами частиц. Интегральное сечение  $\sigma_{III}$  имеет разный вид в зависимости от этого соотношения. В случае, когда  $\mu \gg m_{1,2}$ , имеем (логарифм отношения  $\mu/m_{1,2}$  считается «большим»)

$$\begin{aligned} \sigma_{III} = & (\alpha^4/27\pi\mu^2) \{ a_1^{(sf)} [L^3 - 3L(L_1^2 + L_2^2) + 2(L_1^3 + L_2^3)] - \\ & - a_2^{(sf)} L^2 - a_3^{(sf)} L(L_1 + L_2) + a_4^{(sf)} (L_1^2 + L_2^2) + \\ & + a_5^{(sf)} [s_1 - 2] L_1(L - L_1) + a_5^{(sf)} [s_2 - 2] L_2(L - L_2) \}, \quad (26.71) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} L &\equiv \ln(2\nu/m_1 m_2); & L_1 &\equiv \ln(\mu/m_1); \\ L_2 &\equiv \ln(\mu/m_2); & \nu &\equiv (p_1 p_2); \\ a_1^{(0)} &= 4; & a_1^{(1/2)} &= 28; & a_2^{(0)} &= 19; & a_2^{(1/2)} &= 178; \\ a_3^{(0)} &= 14; & a_3^{(1/2)} &= 80; & a_4^{(1/2)} &= 258; \\ a_4^{(0)} &= 33; & a_5^{(0)} &= 12; & a_5^{(1/2)} &= 84. \end{aligned} \right\} \quad (26.72)$$

В случае, когда  $m_1 \gtrsim \mu$ ,  $m_2 \gtrsim \mu$ , следует в (26.71) положить  $L_1 = L_2 = 0$ , тогда получим\*, независимо от спинов  $s_1, s_2$

$$\sigma_{III}^{(sf)} = (\alpha^4/27\pi\mu^2) \{ a_1^{(sf)} L^3 - a_2^{(sf)} L^2 \}. \quad (26.73)$$

\* Трижды логарифмический член при  $m_1, m_2 \gg \mu$  при  $s_f = 1/2$  был получен впервые Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [62]. Изложение разделов 1 и 3 этого параграфа следует работе [28].

В случае, когда  $m_{1(2)} \gtrsim \mu$ ,  $\mu \gg m_{2(1)}$ , следует в (26.71) положить  $L_{1(2)} = 0$ . Из полученных результатов видно, что члены, квадратичные по логарифмам, входят с отрицательными знаками и большими коэффициентами. Поэтому в широкой области энергий они весьма существенны и могут компенсировать трижды логарифмические члены (при этом уже нельзя пользоваться приведенными выше формулами и надо проводить более точный расчет).

В некоторых случаях можно получить простые формулы для  $\sigma_{II}$  и с однологарифмической точностью (когда в сечении сохраняются все члены, содержащие большие логарифмы). Для этого удобно воспользоваться результатами второго раздела этого параграфа. Интегрируя формулу (26.53) для  $d\sigma_{III}/d\varepsilon_5 d\varepsilon_6$  по  $\varepsilon_5$  (или  $\varepsilon_6$ ) при фиксированном  $\omega$  от нуля до  $\omega$ , получаем энергетический спектр родившихся пар  $d\sigma_{III}/d\omega$  для случая рождения пары на кулоновском центре, имеющий степенную точность при  $\omega \gg \mu$ ,  $\varepsilon - \omega \gg m_2$ . Приведем этот спектр для некоторых случаев:

### I. ( $m_2 = \mu$ , $s_2 = s_f$ )

$$d\sigma_{III}/d\xi = (2\alpha^4/9\pi\mu^2\xi) \{ g_1^{(s_f)} \ln(2\omega/\mu) \ln(1/\xi) + g_2^{(s_f)} \ln(1/\xi) + g_3^{(s_f)} \ln(2\omega/\mu) + g_4^{(s_f)} \ln(2\omega/\mu) \ln(1-\xi) + g_5^{(s_f)} \}, \quad (26.74)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega/\varepsilon; \quad g_1^{(1/2)} = 28\tau + 32\xi^2/5; \quad g_2^{(1/2)} = -218/3; \\ g_3^{(1/2)} &= 8[11/\xi^2 - 22/\xi + 2 + 9\xi]/5; \\ g_4^{(1/2)} &= 4[22/5\xi^3 - 11/\xi^2 + 3/2\xi + 49/4 - 10\xi + \\ &\quad + 51\xi^2/10 - 9\xi/[4(2-\xi)]]; \\ g_5^{(1/2)} &= 7\pi^2/2 - 811/9; \quad g_1^{(0)} = 4[\tau + \xi^2/5]; \\ g_2^{(0)} &= -26/3; \\ g_3^{(0)} &= 4[-11/\xi^2 + 22/\xi - 63/4 + 19\xi/4]/3; \\ g_4^{(0)} &= -44/5\xi^3/22/\xi^2 - 23/\xi + 29/2 - 11\xi/2 + 4\xi^2/5; \\ g_5^{(0)} &= \pi^2/2 - 121/9; \quad \tau = (1 - \xi + s_2 \xi^2). \end{aligned} \right\} \quad (26.75)$$

### II. ( $m_2 \ll \mu$ )

$$d\sigma_{III}/d\xi = (2\alpha^4/9\pi\mu^2\xi) \{ h_1^{(s_f, s_2)} \ln(2\omega/\mu) \ln[(1-\xi)\mu^2/\xi^2 m_2^2] + h_2^{(s_f, s_2)} \ln(2\omega/\mu) + h_3^{(s_f, s_2)} \ln(\mu/\xi m_2) + g_5^{(s_f)} \}, \quad (26.76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} h_1^{(1/2, s_2)} &= 7h_1^{(0, s_2)} = 14\tau; \\ h_2^{(1/2, s_2)} &= 40(1 - \xi)/3 + \xi^2(1 + 64s_2/3); \\ h_3^{(1/2, s_2)} &= -218\tau/3; \\ h_2^{(0, s_2)} &= 7(1 - \xi)/3 + \xi^2(1/4 + 17s_2/6); \\ h_3^{(0, s_2)} &= -26\tau/3. \end{aligned} \right\} \quad (26.77)$$

### III. ( $m_2 \gg \mu$ )

$$\begin{aligned} d\sigma_{III}/d\xi &= [2\alpha^4/(9\pi\mu^2\xi)] \{ e_1^{(sf)} \ln z \ln(2\varepsilon/m_2) + e_2^{(sf)} \ln(2\varepsilon/m_2) + \\ &+ e_3^{(sf)} \{ \ln[(\sqrt{4+z^2}+z)/2] \ln(2\varepsilon/m_2)/(z\sqrt{4+z^2}) \} + \\ &+ e_4^{(sf)} \ln^2 z/(1+z^2) + e_5^{(sf)} \ln z/(1+z^2) + g_5^{(sf)}/(1+z^2) \}, \quad (26.78) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} z &= \xi m_2/\mu; \quad e_1^{(1/2)} = -28 - 32z^2/5; \\ e_2^{(1/2)} &= 8[-4 + 11/z^2]/5; \\ e_3^{(1/2)} &= 4[-88/z^2 + 84 + 51z^2 + 8z^4]/5; \\ e_4^{(1/2)} &= 7e_4^{(0)} = -28; \quad e_5^{(1/2)} = 86; \\ e_1^{(0)} &= 4(-1 - z^2/5); \quad e_2^{(0)} = -4(1 + 11/z^2)/5; \\ e_3^{(0)} &= 4(44/z^2 + 23 + 7z^2 + z^4)/5; \quad e_5^{(0)} = 11. \end{aligned} \right\} \quad (26.79)$$

Эти сечения приведены с точностью до членов, дающих логарифмический вклад в полное сечение, и справедливы при  $\omega \gg \mu$ ,  $\varepsilon - \omega \gg m_2$ . Поэтому, чтобы вычислить полное сечение, необходимо отдельно рассмотреть область  $\omega \sim \mu$ . Эта область дает однологарифмический вклад, который можно найти с помощью метода эквивалентных фотонов:

$$d\sigma_{III}(\omega \sim \mu) = (2\alpha/\pi) \ln(\varepsilon/\omega) (d\omega/\omega) \sigma_\nu^{(sf)}(\omega), \quad (26.80)$$

где  $d\sigma_\nu^{(sf)}(\omega)$  — сечение фоторождения пары на ядре. Точное выражение для  $d\sigma_\nu^{(sf)}(\omega)/d\Delta^2$  получено в (25.23), (25.24), где следует положить  $m \rightarrow \infty$ . Такой же вид (26.80) (с логарифмической точностью) приобретают при  $\omega \sim \mu$  и сечения (26.74) — (26.79), только в них будут входить  $\sigma_\nu^{(sf)}(\omega \gg \mu)$ , взятые с точностью до константы (25.27), (25.28). Чтобы избежать шивки, следует в (26.80) из  $\sigma_\nu^{(sf)}(\omega)$  вычесть  $\sigma_\nu^{(sf)}(\omega \gg \mu)$ , тогда полученное в результате выражение будет вести себя как  $1/\omega^3$  при  $\omega \gg \mu$ . Для получения полных сечений с однологарифмической точностью следует это выражение проинтегрировать в пределах  $2\mu < \omega < \infty$  и добавить к нему интегралы от сечений (26.74) — (26.79) в пределах  $2\mu < \omega < \varepsilon$

{нетрудно видеть, что основной вклад дает область  $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$ , что позволяет использовать формулы (26.74)—(26.79) во всем интервале}. В итоге приходим к сечению электророждения пары в кулоновском поле. Однако найденные результаты можно использовать также и для получения сечений электророждения при столкновении двух частиц. В самом деле, как уже говорилось в конце предыдущего раздела, формулой (26.53) для  $d\sigma_{III}$  можно пользоваться и в случае, когда  $m_1$  конечна, если кроме  $\varepsilon_{5,6} \gg \mu$   $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$  выполнено еще условие  $\varepsilon_{5,6} \gg \mu^2/m_1$ . Следовательно, при  $\omega \gg \mu$ ,  $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$ ,  $\omega \gg \mu^2/m_1$  справедливы и формулы (26.74)—(26.79), причем  $\omega = p_1 q_2 / m_1 = \lambda / m_1$ .

Обсудим теперь процедуру вычисления полных сечений электророждения пары при столкновении двух частиц. В случае  $m_1 = \mu$  это вычисление проводится так же, как в кулоновском поле, только в качестве  $\sigma_V^{(s_f)}(\omega)$  в (26.80) следует подставить сечение фоторождения на частице с массой  $m_1$  и спином  $s_1$  [дифференциальное по  $\Delta^2$  сечение дается (25.23), (25.24)] и учесть, что в этом случае область изменения  $\omega$  определяется из  $2\mu (\mu + m_1) \ll \lambda \leq \nu$ . Соответствующую процедуру можно развить и для  $m_1 \ll \mu$ , но этого можно и не делать, если учесть, что результат должен быть симметричным относительно замены  $(p_1, s_1 \leftrightarrow p_2, s_2)$ . Это позволяет найти вклад при малых  $\lambda$ , воспользовавшись результатами при  $m_2 \ll \mu$ .

В результате довольно громоздких вычислений приходим к сечениям в однологарифмическом приближении\*. Для получения явного вида их к сечениям (26.71)—(26.73) следует добавить

$$\Delta d\sigma_{III}^{(s_f)}(s_1, s_2) = (\alpha^4 / 27 \pi \mu^2) \omega^{(s_f)}(s_1, s_2), \quad (26.81)$$

где при  $m_1 \gg \mu$ ,  $m_2 \gg \mu$

$$\omega^{(1/2)} = (7\pi^2 + 370) L; \quad \omega^{(0)} = (\pi^2 + 22) L; \quad (26.82)$$

при  $m_1 \gg \mu$ ,  $m_2 = \mu, s_2 = s_f$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1/2)} &= (-75\pi^2/2 + 430) L; \\ \omega^{(0)} &= (-27\pi^2/2 + 100) L; \end{aligned} \right\} \quad (26.83)$$

при  $m_1 \gg \mu$ ,  $m_2 \ll \mu$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1/2)} &= [-7\pi^2 + 223/3 + 43s_2] L + A_2^{(1/2)} L_2; \\ A_2^{(1/2)} &= [-7\pi^2 + 3917/3 - 303s_2]; \\ \omega^{(0)} &= [-\pi^2 - 311/12 + 11s_2/2] L + A_2^{(0)} L_2; \\ A_2^{(0)} &= [-\pi^2 + 2183/12 - 75s_2/2]; \end{aligned} \right\} \quad (26.84)$$

при  $m_1 = \mu$ ,  $m_2 = \mu$ ,  $s_1 = s_2 = s_f$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1/2)} &= (-82\pi^2 + 490) L; \\ \omega^{(0)} &= (-28\pi^2 + 178) L; \end{aligned} \right\} \quad (26.85)$$

\* Эти сечения для случая соударения электрона с электроном (позитроном) приведены на рис. 59.

$$\text{при } m_1 = \mu, \quad m_2 \ll \mu, \quad s_1 = s_2$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1/2)} &= (-103\pi^2/2 + 403/3 + 43s_2)L + A_2^{(1/2)}L_2; \\ \omega^{(0)} &= (-31\pi^2/3 + 625/12 + 11s_2/2)L + A_2^{(0)}L_2; \end{aligned} \right\} \quad (26.86)$$

$$\text{при } m_1 \ll \mu, \quad m_2 \ll \mu$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(1/2)} &= [-21\pi^2 - 664/3 + 43(s_1 + s_2)]L + A_2^{(1/2)}L_2 + A_1^{(1/2)}L_1; \\ \omega^{(0)} &= [-3\pi^2 - 443/6 + 11(s_1 + s_2)/2]L + A_2^{(0)}L_2 + A_1^{(0)}L_1; \end{aligned} \right\} \quad (26.87)$$

$$A_1 = A_2 (s_2 \rightarrow s_1).$$

Нам осталось рассмотреть вклады диаграмм I и II. Достаточно вычислить  $d\sigma_I/d\Delta^2$  и  $\sigma_I$ , поскольку  $d\sigma_{II}/d\Delta^2 = d\sigma_I/d\Delta^2$  ( $1 \leftrightarrow 2$ )  $\sigma_{II} = \sigma_I$  ( $1 \leftrightarrow 2$ ). Вклад диаграмм I имеет смысл вычислять только при условии  $m_2 \lesssim \mu$ . В противном случае этот вклад мал как  $\mu^2/m_2^2$  по сравнению с вкладом диаграммы III [ср. (26.53)],

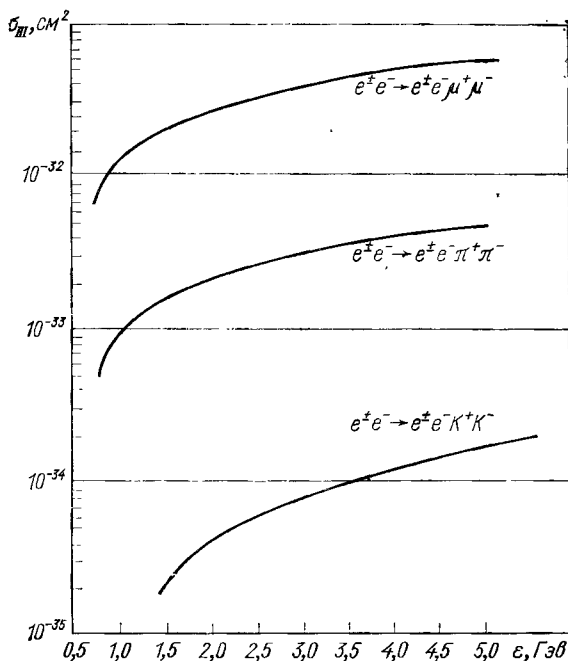


Рис. 59. Сечение  $\sigma_{III}$  образования пар мюонов ( $\mu$ ), пионов ( $\pi$ ), каонов ( $K$ ), для двух последних частиц предполагалось точечное электромагнитное взаимодействие, при столкновениях электронов (или электрона и позитрона) как функция энергии электрона в Ц-системе.

последний результат получен в предельном случае  $m_1 \rightarrow \infty$ , но он сохраняет силу и для конечных значений  $m_1$  [см. после (26.53)]. Итак, будем полагать  $p_1 p_2 = v \gg m_2^2$  (у нас было усло-

вие  $v \gg \mu^2$ ). Искомое сечение возьмем в форме (26.6), где  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma}$  есть сечение излучения фотона с массой  $\sqrt{\Delta^2}$ . Вычисление этого сечения проводится так же, как и в безмассовом случае (§ 23), причем переход к ковариантным переменным

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2 &= p_2 \Delta - \Delta^2/2; & \kappa &= (p_1 + p_2) \Delta - \Delta^2/2; \\ \kappa_4 &= p_4 \Delta + \Delta^2/2; & \Delta_1^2 &= -(p_1 - p_3)^2, \end{aligned} \right\} \quad (26.88)$$

получение сечения  $d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma}/d\kappa$ , отбор членов, определение границ областей проводятся, как в § 23. В случае, когда

$$v(v - \kappa) \gg m_1^2 \Delta^2; \quad v - \kappa \gg m_1 m_2 \quad (26.89)$$

независимо от спина частицы с импульсом  $p_1$ , получаем для  $s_2 = 1/2$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} &= [-2\alpha^3 d\kappa/(m_2^2 \kappa \beta_1)] [1 + (1 - \kappa/v)^2 - \\ &- 2(1 - \kappa/v)(1 + \Delta^2/2m_2^2)/3\beta_1] (l_3 - 1) \end{aligned} \quad (26.90)$$

и для  $s_2 = 0$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\rho\sigma}^{(1)} g^{\rho\sigma} &= [-4\alpha^3 d\kappa/(m_2^2 \kappa \beta_1)] (1 - \kappa/v) \times \\ &\times [1 - (1 - \Delta^2/4m_2^2)/3\beta_1] (l_3 - 1), \end{aligned} \quad (26.91)$$

где

$$l_3 = \ln [4v^2 (v - \kappa)^2 / (m_1^2 m_2^2 \kappa^2 \beta_1)]; \quad \beta_1 \approx 1 + \Delta^2 v (v - \kappa) / \kappa^2 m_2^2. \quad (26.92)$$

При  $\Delta^2 = 0$  сечение (26.90) переходит (с обратным знаком) в формулу для спектра тормозного излучения в  $\mathcal{C}$ -системе (23.29). При  $m_1 \rightarrow \infty$  выражения (26.90), (26.91) совпадают с выражениями (26.34), (26.35), поскольку при  $m_1 \rightarrow \infty$   $\kappa/m_1 \rightarrow \omega$ ,  $p_1 p_2 / m_1 \rightarrow \epsilon$ ; имеет место ситуация, с которой мы уже сталкивались при рассмотрении тормозного излучения: сечения, найденные для взаимодействия с кулоновским центром, могут на самом деле пересчитываться из системы в систему.

При вычислении интегрального сечения мы сталкиваемся с ситуацией, с которой имели дело в задаче рождения пары на кулоновском центре [см. обсуждение после (26.41)]. А именно, формулы (26.90), (26.91) дают степенную точность для вычисления полного сечения  $\sigma_1$  при  $v \gg \mu^2 m_1 / m_2$  (до членов  $\sim \mu^2 m_1 / m_2 v$ ), при  $v \lesssim \mu^2 m_1 / m_2$  следует использовать точное выражение для  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = 1 + (\Delta^2 / \kappa^2 m_2^2) [v(v - \kappa) + m_1^2 \Delta^2 / 4], \quad (26.93)$$

и точность (при использовании этого выражения для  $\beta_1$ ) будет логарифмической. Дифференциальное по инвариантной массе родившейся пары сечение получим, подставив (26.90), (26.91) в (26.6) и выполнив интегрирование по  $\kappa$ . Пределы этого интегрирования определяются, с одной стороны, условием

$$(p_1 + p_2 - \Delta)^2 = (p_3 + p_4)^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \quad (26.94)$$

и с другой, условием того, что в системе  $p_1 + p_2 = 0$   $\Delta_0 \geq \sqrt{\Delta^2}$ , т. е.

$$(p_1 + p_2 - \Delta)^2 \leq (\sqrt{(p_1 + p_2)^2} - \sqrt{\Delta^2})^2. \quad (26.95)$$

Приведем здесь результат интегрирования для случая  $m_2 \leq \mu$  с однологарифмической точностью (с этой точностью можно положить  $0 \leq \kappa \leq \nu$ ):

$$\begin{aligned} d\sigma_1 = & (\alpha^3 d\Delta^2/\Delta^2) f^{(s,f)}(\Delta^2) \{z_1^{(s_1)} \ln [4\nu^2/(m_1^2 \mu^2)] + \\ & + z_2^{(s_2)} [\ln^2(1 + \Delta^2/m_2^2) - \ln^2(1 + m_1^2 \Delta^4/(4m_2^2 \nu^2))] + \\ & + z_3^{(s_3)} \ln(1 + \Delta^2/m_2^2) + z_4^{(s_4)} \ln(1 + m_1^2 \Delta^4/(4m_2^2 \nu^2))\}, \end{aligned} \quad (26.96)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z_1^{(1/2)} = & (-4\Delta^2/3m_2^2 + 2\Delta^4/m_2^4 - 5\Delta^6/3m_2^6) \ln(\Delta^2/m_2^2) + \\ & + 2[-4\Delta^2/(\Delta^2 - 4m_2^2) + 2\Delta^2/m_2^2 - 16\Delta^4/3m_2^4 + 5\Delta^6/3m_2^6] \times \\ & \times \sqrt{\Delta^2/(\Delta^2 - 4m_2^2)} \ln[\sqrt{\Delta^2} + \sqrt{\Delta^2 - 4m_2^2}/2m_2] + \\ & + 8\Delta^2/(\Delta^2 - 4m_2^2) + \Delta^2/m_2^2 + 10\Delta^4/3m_2^4; \\ z_1^{(0)} = & (-4\Delta^2/3m_2^2 + \Delta^4/2m_2^4 + \Delta^6/3m_2^6) \ln(\Delta^2/m_2^2) + \\ & + 2(\Delta^4/6m_2^4 - \Delta^6/3m_2^6 + 3\Delta^2/m_2^2) \times \\ & \times \sqrt{\Delta^2/(\Delta^2 - 4m_2^2)} \ln[\sqrt{\Delta^2} + \sqrt{\Delta^2 - 4m_2^2}/2m_2] - \\ & - 2\Delta^2/m_2^2 - 2\Delta^4/3m_2^4; \\ z_2^{(1/2)} = & -2/3; \quad z_2^{(0)} = -1/6; \quad z_3^{(1/2)} = -4 \ln(\Delta^2/\mu^2)/3 - 2; \\ z_3^{(0)} = & -\ln(\Delta^2/\mu^2)/3; \quad z_4^{(1/2)} = 2; \quad z_4^{(0)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26.97)$$

причем при  $\Delta^2 \gg 4m_2^2$

$$z_1^{(1/2)} = 4 \ln(\Delta^2/m_2^2)/3 + 2/9; \quad z_1^{(0)} = \ln(\Delta^2/m_2^2)/3 + 19/18, \quad (26.98)$$

так что существенной является область  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$  и интегрировать по  $\Delta^2$  можно в пределах  $4\mu^2 \leq \Delta^2 < \infty$ .

Из (26.96) и (26.97) следует, что  $\sigma_1$  является дважды логарифмическим лишь при  $\mu \gg m_2$ . В этом случае с однологарифмической точностью имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & (\alpha^4/45\pi\mu^2) b_1^{(s_2, s_f)} \{ \ln(\mu^2/m_2^2) \ln(4\nu^2 m_2/m_1^2 \mu^3) + \\ & + \frac{1}{2} \ln^2(1 + m_1^2 \mu^4/4m_2^2 \nu^2) + b_2^{(s_2, s_f)} \ln(4\nu^2/m_1^2 \mu^2)/15 + \\ & + b_3^{(s_2, s_f)} [\ln(1 + m_1^2 \mu^4/4m_2^2 \nu^2) - \ln(\mu^2/m_2^2)]/15\}, \end{aligned} \quad (26.99)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_{1/2}^{(1/2, 1/2)} = & 4; \quad b_{1/2}^{(1/2, 0)} = 1/2; \quad b_{1/2}^{(0, 1/2)} = 1; \\ b_{1/2}^{(0, 0)} = & 1/8; \quad b_{3/2}^{(1/2, 1/2)} = 41; \quad b_{3/2}^{(1/2, 0)} = 97/2; \\ b_{3/2}^{(0, 1/2)} = & 86; \quad b_{3/2}^{(0, 0)} = 187/2; \quad b_{3/2}^{(1/2, 1/2)} = 199/2; \\ b_{3/2}^{(1/2, 0)} = & 229/2; \quad b_{3/2}^{(0, 1/2)} = 77; \quad b_{3/2}^{(0, 0)} = 92. \end{aligned} \right\} \quad (26.100)$$

При  $m_2 = \mu$  сечение  $\sigma_1$  является однологарифмическим:

$$\sigma_1 = (\alpha^4/81\pi\mu^2) c^{(s_f)} \ln(2\nu/m_1 \mu), \quad (26.101)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c^{(1/2)} &= (231\pi^2 - 2198)/2; \\ c^{(0)} &= (425 - 42\pi^2)/4. \end{aligned} \right\} \quad (26.102)$$

Сечения  $d\sigma_{II}/d\Delta^2$ ,  $\sigma_{II}$  получаются из (26.96)—(26.102) заменой  $s_1 \leftrightarrow s_2$ ,  $m_1 \leftrightarrow m_2$ . Интерференция вкладов диаграмм I и II мала, что легко понять в Ц-системе, где родившаяся пара летит по направлению движения той частицы, которая ее испускает. Сумма

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (26.103)$$

дает полное сечение рождения пары частиц\*.

Сделаем еще замечание относительно углового и энергетического распределений частиц родившейся пары. Пусть в Ц-системе сталкиваются частицы с массами  $m_1 \sim m_2$ . Начнем с вклада диаграммы III. В существенной области  $\Delta_1^2, \Delta_2^2 \lesssim \Delta^2$ ,  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ , отсюда следует, что перпендикулярные (по отношению к  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ ) составляющие импульсов конечных частиц  $|\mathbf{p}_{i\perp}| \lesssim \mu$  ( $i = 3-6$ ). Из того, что существенна вся область изменения переменных  $\lambda = p_1 q_2$ , ( $p_2 q_1$ ) [см. (26.69)], вытекает, что энергетический спектр частиц родившейся пары имеет вид  $d\omega/\omega$  ( $\omega = \varepsilon_5 + \varepsilon_6$ ). Если  $\omega \gg \mu$ , то угол разлета частиц родившейся пары  $\sim \mu/\omega$ ,  $\varepsilon_5 \sim \varepsilon_6 \sim \omega$ , частицы пары летят вдоль направления движения одной из начальных частиц, причем энергию паре передает в основном та частица, вдоль направления импульса которой пара движется. Энергетическое и угловое распределения вкладов в сечение диаграмм II и I являются существенно иными. При  $\mu \gtrsim m_{1,2}$  существенна область изменения ( $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ ,  $\omega \sim \varepsilon$ ; при  $\mu < m_{1,2}$  существенна область изменения (на соответствующих диаграммах)  $4\mu^2 < \Delta^2 < m_{1,2}^2$ ,  $\omega \sim \varepsilon \sqrt{\Delta^2/m_{1,2}}$ , так что частицы пары рождаются ультрарелятивистскими, а угол разлета их мал [см. (26.90), (26.91)]. Пара летит в направлении движения рождающей ее частицы и получает в основном от нее энергию. Угол отклонения неизлучающей частицы имеет вид  $\sim \max(\mu/\varepsilon, m_{1,2}/\varepsilon)$ .

Рассмотрим теперь, как изменится сечение (26.103), если в реакции участвуют тождественные частицы. Если тождественны начальные частицы, но они отличны от родившихся, то сечение со степенной точностью по-прежнему дается формулой (26.103). Действительно, вклад интерференции диаграмм III и III' (штрихом будем обозначать обменные диаграммы) с I, II', II, II' обра-

\* При  $m_{1,2} \gg \mu$ .  $s_f = 1/2$  [118] и  $m_1 = m_2 \ll \mu$ .  $s_1 = s_2 = s_f = 1/2$  [111, 117] полное сечение электророжения найдено со степенной точностью. Процессу электророжения посвящены также работы [109, 110, 113, 119, 120].



щаются в нуль вследствие  $S$ -инвариантности; вклад интерференции прямых и обменных диаграмм ( $I$  и  $I'$  и т. д.) имеет степенную малость, поскольку существенные области для импульсов  $p_3$  и  $p_4$  не перекрываются, интерференционный член вкладов диаграмм  $I'$  и  $II'$  равен соответствующему вкладу диаграмм  $I$  и  $II$  и мал по той же причине. В общем случае, когда рождающиеся частицы тождественны по крайней мере одной из начальных, как показывает анализ выражений для сечений и существенных кинематических областей, сечение (26.103) справедливо с дважды логарифмической точностью.

### § 27. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОЦЕССАХ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ФОТОРОЖДЕНИЯ ПАР ЧАСТИЦ

Как неоднократно отмечалось выше, процессы тормозного излучения при столкновении электронов высокой энергии и рождения пары частиц при взаимодействии фотона с заряженной частицей в случае  $\omega \gg \mu$ ,  $\mu^2/m$  ( $\omega$  — энергия фотона в  $L$ -системе;  $\mu$  — масса родившейся частицы;  $m$  — масса частицы отдачи) во многом аналогичны таким же процессам в кулоновском поле. В частности, в разделе 23.2 показано, что угловое и энергетическое распределения фотонов тормозного излучения в кулоновском поле позволяют получить соответствующие характеристики и при столкновении электронов высокой энергии как в  $L$ -системе (для быстрой частицы и частицы отдачи), так и в  $C$ -системе прямым пересчетом. Такая же ситуация сохраняется и в случае, когда частицы являются поляризованными. Реакции с участием поляризованных частиц в кулоновском поле детально обсуждались в § 17 и 19. Воспользуемся найденными там результатами для получения сечений указанных выше процессов при столкновении частиц.

Начнем с тормозного излучения в  $L$ -системе, где следует различать излучение быстрой частицы и частицы отдачи. Будем использовать обозначения, принятые в § 23, и не рассматривать поляризаций конечных электронов, введя вектора спина электрона  $\xi_1, \xi_2$  для электронов с импульсами  $p_1, p_2$ . Сечение излучения быстрой частицы при учете поляризации начальных электронов и излученных фотонов можно получить из формулы (17.48), в которой нужно провести замену  $1 \rightarrow 2$ , и положить в функции  $\Gamma$  [см. (17.41)]  $f(\xi) = 0$ ,  $Z = m = 1$ ,  $\zeta = 2\varepsilon\kappa_2/\omega$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon - \omega$ . Отметим, что сечение не зависит от спина электрона отдачи. В ковариантной записи это сечение с принятой точностью (до членов  $\sim 1/v$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_2 = & (\alpha^3/v^3) (d\kappa_1 d\kappa_2/\kappa_2^2) (d\varphi/2\pi) \{ [v^2 + (v - \kappa_1)^2] (L - 1)/2 - \\ & - v(v - \kappa_1) - (\kappa_1^2/\kappa_2^2) (1 - \kappa_1/v) (L - 4) |e_{p_2} - \kappa_2 e_{p_1/\kappa_1}|^2 + \\ & + \tilde{\xi}_2 \kappa_1 [(L - \kappa_1/v) s_2 p_1/2 + \\ & + [\kappa_1^2 (v - \kappa_1)/v^2 \kappa_2^2] (L/2 - 2) (1 - v\kappa_2/\kappa_1) [2(1/v - \\ & - \kappa_2/\kappa_1) (s_2 p_1) + v(s_2 k)/\kappa_1] \}, \end{aligned} \quad (27.1)$$

где

$$\tilde{\xi}_2 = (1/\kappa_1) i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha e^{*\beta} k^\gamma p_1^\delta = i ([\mathbf{e} \mathbf{e}^*] \mathbf{n}); \quad L = 2 \ln [2\nu(\nu - \kappa_1)/\kappa_1]$$

[см. (23.27)];  $s_2$  — 4-вектор спина электрона с импульсом  $p_2$ . Чтобы получить излучение частицы отдачи, воспользуемся этой же формулой, сделав замену  $1 \leftrightarrow 2$  и перейдя в систему  $\mathbf{p}_1 = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_1 = & [\alpha^3 d\omega d\kappa_2 / (2\pi\omega^2\varepsilon)] d\varphi \{ [1 + (1 - \kappa_2/\varepsilon)^2] \times \\ & \times (L' - 1)/2 - (1 - \kappa_2/\varepsilon) \{ 1 + (|\mathbf{e} \mathbf{p}_2|^2/\varepsilon^2) (L' - 4) \} - \\ & - (\tilde{\xi}_2 \kappa_2/\varepsilon) \{ (\mathbf{p}_2 \xi_1/\varepsilon) [(L' - \kappa_2/\varepsilon)/2] + \\ & + (1 - \kappa_2/\varepsilon) (1 - \kappa_2/\varepsilon\omega) (L' - 4) [(\mathbf{p}_2 \xi_1/\varepsilon) (1 - \kappa_2/\varepsilon\omega) - \mathbf{n}\xi_1/2] \}, \end{aligned} \quad (27.2)$$

где

$$L' = L (1 \leftrightarrow 2) = 2 \ln [2\nu(\nu - \kappa_2)/\kappa_2].$$

Быстрая частица излучает фотоны в узкий конус в направлении импульса падающей частицы, а угловое распределение фотонов, излучаемых частицей отдачи, является плавным. Поэтому можно отдельно рассматривать параметры Стокса для этих случаев. Параметры Стокса излучения быстрой частицы после проведения указанной выше замены следуют из (17.52) и (17.53). Параметры Стокса излучения частицы отдачи (ось  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}_{2\perp} / |\mathbf{p}_{2\perp}|$ ,  $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{n}$ ) следуют из сечения (27.2) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0; \quad \xi_3 = & -A^{-1} (L' - 4) (2\varepsilon\omega/\kappa_2 - 1) (1 - \kappa_2/\varepsilon) (\kappa_2^2/\varepsilon^2 \omega^2); \\ \xi_2 = & (-A^{-1} \kappa_2/\varepsilon) \{ (\mathbf{p}_2 \xi_1/\varepsilon) (L' - \kappa_2/\varepsilon) + \\ & + (1 - \kappa_2/\varepsilon) (1 - \kappa_2/\varepsilon\omega) (L' - 4) [(2\mathbf{p}_2 \xi_1/\varepsilon) (1 - \kappa_2/\varepsilon\omega) - \mathbf{n}\xi_1] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & [1 + (1 - \kappa_2/\varepsilon)^2] (L' - 1) - (1 - \kappa_2/\varepsilon) [2 + \\ & + (\kappa_2^2/\varepsilon^2 \omega^2) (2\varepsilon\omega/\kappa_2 - 1) (L' - 4)]. \end{aligned} \quad (27.3)$$

В  $\Pi$ -системе фотоны излучаются в два узких конуса в направлении движения начальных частиц. Поэтому можно рассматривать поляризационные свойства излучения в каждый из конусов (для определенности вдоль  $\mathbf{p}_2$ ). Сечение дается формулой (27.1), которая в  $\Pi$ -системе имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_2 = & (\alpha^3\omega/2\pi\varepsilon) d\varphi (d\omega/\omega) (d\kappa_2/\kappa_2^2) \{ [1 + (1 - \omega/\varepsilon)^2] [(L - 1)/2] - \\ & - (1 - \omega/\varepsilon) [1 + (\omega^2/\varepsilon^2) (|\mathbf{e} \mathbf{p}_2|^2/\kappa_2^2) (L - 4)] + (\tilde{\xi}_2 \omega/\varepsilon) \{ (\mathbf{v}_2 \xi_2/2) \times \\ & \times (L - \omega/\varepsilon) + (1/2) (1 - \omega/\varepsilon) (1 - \omega/\varepsilon\kappa_2) (L - 4) ((\mathbf{v}_2 \xi_2) \times \\ & \times [1 - \omega/(\varepsilon\kappa_2)] = \mathbf{u}\xi_2 \omega/(\varepsilon\kappa_2)) \}, \end{aligned} \quad (27.4)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}_2)$ .

Отсюда следуют параметры Стокса ( $e_1 = p_{2\perp} / |p_{2\perp}|$ ), которые можно получить и из (17.52), (17.53):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0; \quad \xi_3 = [-C^{-1} \omega^2 / (\varepsilon^2 \kappa_2^2)] (2\varepsilon \kappa_2 / \omega - 1) (1 - \omega / \varepsilon) (L - 4); \\ \xi_2 &= (C^{-1} \omega / \varepsilon) \{ v_2 \zeta_2 (L - \omega / \varepsilon) + (1 - \omega / \varepsilon) [1 - \omega / (\varepsilon \kappa_2)] \times \\ &\quad \times (L - 4) [v_2 \zeta_2 (1 - \omega / (\varepsilon \kappa_2)) - u \zeta_2 \omega / (\varepsilon \kappa_2)] \}; \\ C &= [1 + (1 - \omega / \varepsilon)^2] (L - 1) - \\ &\quad - (1 - \omega / \varepsilon) [2 + (\omega^2 / \varepsilon^2 \kappa_2^2) (2\varepsilon \kappa_2 / \omega - 1) (L - 4)]. \end{aligned} \right\} (27.5)$$

Особенности поляризации в  $\mathcal{C}$ -системе такие же, как при тормозном излучении в кулоновском поле [см. обсуждение после (17.53)]. Отметим, что, измеряя круговую поляризацию фотонов ( $\omega \sim \varepsilon$ ) при заданных углах вылета фотона ( $\vartheta, \varphi$ ), можно определить степень продольной и поперечной поляризации электрона.

Поляризационные свойства излучения в целом (после интегрирования по полярному углу вылета фотона) в  $\mathcal{C}$ -системе и для излучения быстрой частицы в  $\mathcal{L}$ -системе можно найти из формул (17.58), (17.60) и (17.61) с помощью тех же замен, которые проводились в (27.1).

Поляризационные эффекты в процессе фоторождения пары на покоящейся частице описываются непосредственно формулами § 19, поскольку, как было показано в § 25, диаграмма рис. 57 (I) в принятых предположениях вклада не дает, а вклад диаграммы рис. 57 (II) обладает теми же свойствами, что и сечение фоторождения в кулоновском поле.

Что касается поляризационных эффектов в двойном тормозном излучении, то этот процесс является существенно более сложным, хотя и здесь можно использовать формулы § 17. Случай, когда фиксированы все поляризации, приводит к весьма громоздким выражениям, поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда по спинам конечных электронов и поляризациям одного из фотонов (для определенности с импульсом  $k_2$ ) проведено суммирование. Как и в § 24, будем рассматривать фотоны, излучаемые в противоположных направлениях. Воспользуемся формулой (24.2), где в комптоновском тензоре фотона  $k_1$  не проведено суммирование по поляризациям фотона и усреднение по спину начального электрона. Для второго комптоновского тензора можно использовать формулы (24.14) и (24.15). Свертка входящей в (24.14) комбинации  $p_{2\mu} p_{2\nu}$  с первым комптоновским тензором пропорциональна с нашей точностью квадрату матричного элемента однократного тормозного излучения (для поляризованных частиц), для которого можно использовать результаты, найденные в § 17. Интегрирование по конечным состояниям фотона  $k_2$  проводится, как в § 24, причем в формуле (24.20)

не следует проводить интегрирование по азимутальному углу фотона с импульсом  $k_1$ . В результате получаем

$$d\sigma = (16r_0^2 \alpha^2 / (2\pi)^3) (d\omega_2 / \omega_2) (d\Delta^2 / \Delta^4) \{ (1 - \omega_2 / \varepsilon) \Phi(\Delta^2 / 4) + \\ + [\omega_2^2 \sqrt{\Delta^2} / (\varepsilon^2 \sqrt{4 + \Delta^2})] \ln(\sqrt{\Delta^2 / 2} + \sqrt{1 + \Delta^2 / 4}) \} \times \\ \times L_1 \{ d\omega_1 d\kappa_{11} d\varphi d\kappa_{13} / [\varepsilon^3 \sqrt{-S(p_1, p_2, p_3, k_1)}] \}, \quad (27.6)$$

где  $L_1$  получается пересчетом из  $L_e$  (17.35) и имеет с принятой точностью вид

$$L_1 = (v^2 / 2) \{ |e I_1|^2 + \omega_1^2 I_1^2 / [4\varepsilon(\varepsilon - \omega_1)] \} + \tilde{\xi}_2^{(1)} (v^2 \omega_1 / 4\varepsilon) \times \\ \times \{ [(2\varepsilon - \omega_1) / 2(\varepsilon - \omega_1)] (v_1 \xi_1) I_1^2 - (n_1 I_1) (\xi_1 I_1) \}, \quad (27.7)$$

где

$$I_1 = [(1 - \omega / \varepsilon) / \kappa_{11}] [p_1 - n_1(\varepsilon + 1)] - [p_3 - n_1(\varepsilon - \omega + 1)] / \kappa_{13}.$$

Отметим, что с принятой точностью  $\varepsilon_3 = \varepsilon - \omega$ , тогда направление  $p_3$  определяется переменными  $\Delta^2$  и  $\kappa_{13}$  (при фиксированном  $k_1$ ).

Интегрирование комбинации  $\int d\kappa_{13} I_{1i} I_{1j} / \sqrt{-S}$  (между корнями  $S$ ) проводится так же, как в формуле (17.38), в итоге получаем

$$\{ \omega_1^2 \varepsilon / 2\pi(\varepsilon - \omega_1) \} \int [d\kappa_{13} / \sqrt{-S}] I_{1i} I_{1j} = g_1 \delta_{ij} + g_2 u_i u_j + \\ + g_3 (n_{1i} u_j + n_{1j} u_i) + g_4 n_{1i} n_{1j}, \quad (27.8)$$

где  $u = p_1 - n_1 (n_1 p_1)$ ;  $u^2 = 2\varepsilon \kappa_{11} / \omega_1 - 1$ ;

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= (b/a^{1/2} - 1) / 4u^2; \quad g_2 = \{ -G - 2(1 + u^4) g_1 / (1 + u^2)^2 + \\ &+ [b \Delta^2 [\Delta^2 (1 + 2u^2) + 2(1 + u^4)] - 8u^4 \Delta^4] / [a^{3/2} (1 + u^2)^2] \} / u^2; \\ g_3 &= -2(1 - u^2) g_1 / (1 + u^2)^2 + \{ b \Delta^2 [2(1 - u^2) - \Delta^2] + \\ &+ 2\Delta^4 (3u^2 - 1) \} / [a^{3/2} (1 + u^2)^2]; \\ g_4 &= -[1 + 4u^2 / (1 + u^2)^2] g_1 + \\ &+ [\Delta^2 b (4u^2 + \Delta^2) - 8u^2 \Delta^4] / [a^{3/2} (1 + u^2)^2]; \\ G &= \Delta^2 / [(1 + u^2) a^{1/2}]; \quad a = b^2 - 4u^2 \Delta^2; \quad b = 1 + u^2 + \Delta^2. \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

В результате получаем сечение двойного тормозного излучения в случае, когда один из фотонов и излучающий его начальный электрон являются поляризованными:

$$d\sigma = [4r_0^2 \alpha^2 / (2\pi)^3] (d\omega_1 / \omega_1) (d\omega_2 / \omega_2) du^2 d\varphi (d\Delta^2 / \Delta^4) \times \\ \times [(\varepsilon - \omega_1) / \varepsilon] \{ (1 - \omega_2 / \varepsilon) \Phi(\Delta^2 / 4) + (\omega_2^2 / \varepsilon^2) (\sqrt{\Delta^2} / \sqrt{4 + \Delta^2}) \} \times \\ \times \ln(\sqrt{\Delta^2} / 2 + \sqrt{1 + \Delta^2 / 4}) \{ 4g_1 + 2g_2 u^2 + G \omega_1^2 / [\varepsilon(\varepsilon - \omega_1)] + \\ + 4g_2 (|e u|^2 - u^2 / 2) + (\tilde{\xi}_2^{(1)} \omega_1 / \varepsilon) [((2\varepsilon - \omega_1) G / (\varepsilon - \omega_1) - \\ - 2g_1 - 2g_4) (v_1 \xi_1) - 2g_3 (u \xi_1)] \}. \quad (27.10)$$

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ

А.1. Электроны и позитроны. В ковариантной записи уравнение Дирака имеет вид

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m \bar{\psi}(x) = 0, \quad (A.1)$$

где  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ . Матрицы  $\gamma$  удовлетворяют условиям антикоммутации

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (A.2)$$

Часто удобно использовать каноническое представление:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^k); \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^k = \gamma^0 \alpha^k, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (A.3)$$

Здесь  $\sigma_k$  — матрицы Паули;  $I$  — единичная матрица. Решение уравнения Дирака в виде плоских волн

$$\psi(x) = [1/(2\pi)^{3/2}] \sqrt{m/\epsilon_p} [u(p) \exp(-i p x) + v(p) \exp(i p x)], \quad (A.4)$$

где  $\epsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  — энергия. Биспиноры  $u(p)$ ,  $v(p)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{p} - m) u(p) &= \bar{u}(p) (\hat{p} - m) = 0; \\ (\hat{p} + m) v(p) &= \bar{v}(p) (\hat{p} + m) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

где  $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \gamma^r p^r$ ;  $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2} = \epsilon_p$ .

Имеют место соотношения ортонормировки:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}^s(p) u^r(p) &= 0; \\ \bar{u}^r(p) u^s(p) &= -\bar{v}^r(p) v^s(p) = \delta^{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (A.6)$$

Явный вид спиноров

$$\left. \begin{aligned} u^r(p) &= [1/\sqrt{2m(\epsilon + m)}] (\hat{p} + m) \begin{pmatrix} \varphi^r \\ 0 \end{pmatrix}; \\ v^r(p) &= [1/\sqrt{2m(\epsilon + m)}] (-\hat{p} + m) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'^r \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \\ \text{или} \\ \left. \begin{aligned} u^r(p) &= \sqrt{(\epsilon + m)/2m} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{\sigma p}{\epsilon + m} \varphi^r \end{pmatrix}; \\ v^r(p) &= \sqrt{(\epsilon + m)/2m} \begin{pmatrix} \frac{\sigma p}{\epsilon + m} \varphi'^r \\ \varphi'^r \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

Функции  $\varphi^r$ ,  $\varphi'^r$  описывают поляризационные состояния.

Если ось квантования есть единичный вектор  $\zeta$  ( $\theta$ ,  $\varphi$ ), то спиноры с определенной проекцией (по и против этой оси) суть

$$\begin{aligned} \varphi_{\uparrow}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \exp[-i\varphi/2] \\ \sin(\theta/2) \exp[i\varphi/2] \end{pmatrix}; \\ \varphi_{\downarrow}(\zeta) = \varphi_2(\zeta) &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \exp[-i\varphi/2] \\ \cos(\theta/2) \exp[i\varphi/2] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

причем

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}^{\dagger}(\zeta) \sigma \varphi_{1,2}(\zeta) &= \pm \zeta; \\ (\zeta \sigma) \varphi_{1,2}(\zeta) / 2 &= \pm \varphi_{1,2}(\zeta) / 2, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

т. е.  $(\zeta \sigma)$  — поляризационный оператор в системе покоя. Он же в 4-компонентной записи

$$\zeta \mathbf{O}_0 = \gamma^0 (\zeta \Sigma), \quad (\text{A.10})$$

где  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ . В произвольной системе отсчета поляризационные операторы

$$\mathbf{O}_{\zeta}^{\pm} = S^{\mu} s_{\mu} = R^{\mu\nu} t_{\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

где

$$S^{\mu} = -\gamma^5 \gamma^{\mu}; \quad R^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = (i/2) [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]; \quad \mathbf{O} = \gamma^0 \Sigma + (\mathbf{p}/m) [\gamma^0 \Sigma \mathbf{p} / (\varepsilon + m) - \gamma^5 \gamma^0]; \quad (\text{A.12})$$

$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$  — 4-вектор поляризации  $s \mathbf{p} = 0$ ;  $s|_{\text{сист. покоя}} = (0, \zeta)$ :

$$\mathbf{s} = \zeta + (\zeta \mathbf{p}) \mathbf{p}/m (\varepsilon + m); \quad s_0 = \zeta \mathbf{p}/m. \quad (\text{A.13})$$

Операторы (A.11) коммутируют с  $(i \partial_{\mu} \gamma^{\mu} - m)$  и имеют собственные значения  $\pm 1$ . Для оператора  $\mathbf{O}$  это означает, что собственные значения проекции на ось  $\zeta$  будут  $\pm 1$ .

Поляризационная матрица плотности для электронов и позитронов

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\mu\nu}^{(+)} &= \overline{u_{\mu}(p) \bar{u}_{\nu}(p)}; \\ \rho_{\mu\nu}^{(-)} &= -\overline{v_{\mu}(p) \bar{v}_{\nu}(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

а явный ее вид

$$\rho_{\pm}^s(p) = [(m \pm \hat{p})/2m] [(1 - \gamma^5 \hat{s})/2], \quad (\text{A.15})$$

причем для чистых состояний  $|\zeta| = 1$ , а для смешанных (частично поляризованных)  $1 \gg |\zeta| \gg 0$ .

**A.2. Фотон.** Поляризационные свойства фотона определяются векторами поляризации  $e^{\mu}(k, \lambda)$ . Произвольный вектор поляризации можно разложить по двум взаимно перпендикулярным векторам ортогональным вектору  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{e} = e_1 e^{(1)} + e_2 e^{(2)} = e^{(1)} \cos \alpha + e^{(2)} \sin \alpha \exp[i\beta], \quad (\text{A.16})$$

где  $|e_1|^2$  и  $|e_2|^2$  определяют вероятности иметь фотону поляризации  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$ . Если  $\beta = 0$ , то фотон линейно поляризован под углом  $\alpha$  к  $e^{(1)}$ , если

$\beta = \pm \pi/2$ ,  $\alpha = \pi/4$ , то фотон *циркулярно* поляризован вправо ( $R$ ) или влево ( $L$ ). Для частицы, движущейся со скоростью света, имеется аксиальная симметрия, при которой сохраняется лишь *спиральность* — проекция полного момента на направление движения. Циркулярно поляризованные состояния — состояния с определенной спиральностью. Смешанные состояния описываются матрицей плотности  $\rho_{ik} = e_i e_k^*$  через параметры Стокса  $\xi$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) (5.119). Физический смысл их рассмотрим в разделе 1.6. Вероятность того, что фотон поляризован по оси  $e^{(1)}$ , есть  $(1 + \xi_3)/2$ , а по оси  $e^{(2)}$  —  $(1 - \xi_3)/2$ . Величины  $(1 \pm \xi_3)/2$  дают те же характеристики, но для осей, повернутых на  $\pi/4$  относительно  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ . Параметр  $\xi_2$  — степень циркулярной (круговой) поляризации, т. е. среднее значение спиральности. Для чистого состояния

$$\xi_2 = i [ee^*]n, \quad (\text{A.17})$$

где  $n = k/|k|$ . При инверсии  $\xi_2 \rightarrow -\xi_2$ , а при отражении времени  $T - \xi_2 \rightarrow \xi_2$ . Параметр  $\xi_3 \rightarrow \xi_3$  при  $P$ - и  $T$ -преобразованиях, а свойства  $\xi_1$  зависят от свойств преобразования осей  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ .

Суммирование по поляризациям фотона проводится одним из двух эквивалентных способов:

$$\sum_{\lambda} e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{*(\lambda)} = -g_{\mu\nu} \quad (\text{A.18})$$

в произвольной калибровке и

$$\sum_{\lambda} e_i^{(\lambda)} e_k^{*(\lambda)} = \delta_{ik} - n_i n_k \quad (\text{A.19})$$

в кулоновской калибровке ( $e^0 = 0$ ).

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интегралы вида

$$\int n_{i_1} \dots n_{i_{2k}} f(n\nu) d\Omega = T_{i_1 \dots i_{2k}}^{(2k)}; \quad (\text{B.1})$$

$$\int n_{i_1} \dots n_{i_{2k-1}} f(n\nu) d\Omega = T_{i_1 \dots i_{2k-1}}^{(2k-1)}, \quad (\text{B.2})$$

где  $n_i$  — компоненты единичного вектора, по которому идет интегрирование ( $d^2n = d\Omega$ ), а  $\nu$  — некоторый фиксированный вектор, можно вычислить, если учесть, что тензор  $T$  симметричен по всем индексам и что в нашем распоряжении после интегрирования имеются лишь тензор  $\delta_{ik}$  и вектор  $v_i$ . Самый общий вид тензора  $T$ , полученный с учетом этих обстоятельств, можно записать следующим образом:

$$T_{i_1 \dots i_{2k}}^{(2k)} = \sum (c_0 \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} + \dots + c_{k-n} \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2n-1} i_{2n}} v_{i_{2n+1}} \dots v_{i_{2k}} + \dots + c_k v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2k}}); \quad (\text{B.3})$$

$$T_{i_1 \dots i_{2k-1}}^{(2k-1)} = \sum (c'_0 \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2k-3} i_{2k-2}} v_{i_{2k-1}} + \dots + c'_{k-n-1} \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2n-1} i_{2n}} v_{i_{2n+1}} \dots v_{i_{2k-1}} + \dots + c'_{k-1} v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2k-1}}), \quad (\text{B.4})$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов. Сворачивая выражения (Б.1) и (Б.2) с соответствующими комбинациями в (Б.3) и (Б.4), получаем  $(k+1)$ -,  $k$ -уравнений для такого же числа коэффициентов, причем эти свертки выражаются через интегралы типа

$$I_m = \int (nv)^m f(nv) d\Omega = (2\pi/v) \int_{-v}^v x^m f(x) dx. \quad (\text{Б.5})$$

Решая эту систему уравнений, находим явный вид тензора  $T$ . Вычислим, например, интегралы

$$\int [n_i n_k / (1-nv)^5] d\Omega = c_0 \delta_{ik} + c_1 v_i v_k; \quad (\text{Б.6})$$

$$\int [n_i / (1-nv)^4] d\Omega = c'_0 v_i. \quad (\text{Б.7})$$

Сворачивая (Б.6) с  $\delta_{ik}$  и  $v_i v_j$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} 3c_0 + c_1 v^2 &= (2\pi/v) \int_{-v}^v dx / (1-x)^5 = 4\pi (1+v^2)/(1-v^2)^4; \\ c_0 + c_1 v^2 &= (2\pi/v^3) \int_{-v}^v x^2 dx / (1-x)^5 = 4\pi (1+5v^2)/3(1-v^2)^4, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.8})$$

отсюда

$$\int [n_i n_k / (1-nv)^5] d\Omega = [4\pi/3 (1-v^2)^4] [\delta_{ik} (1-v^2) + 6v_i v_k]. \quad (\text{Б.9})$$

Точно так же для (Б.7) найдем

$$\int [n_i / (1-nv)^4] d\Omega = 16\pi v_i / 3 (1-v^2)^3. \quad (\text{Б.10})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим комбинацию вида  $e^a e^b$ , где  $a$  и  $b$  — некоммутирующие операторы. Введем оператор  $L(\tau)$

$$L(\tau) = \exp[-\tau(a + b)] \exp(\tau a) \exp(\tau b). \quad (\text{В.1})$$

Очевидно, что

$$e^a e^b = \exp[a + b] L(1). \quad (\text{В.2})$$

Дифференцируя (В.1) по  $\tau$ , получаем уравнение

$$dL/d\tau = \exp[-\tau(a + b)] [\exp(\tau a), b] \exp(\tau b) \quad (\text{В.3})$$

с граничным условием

$$L(0) = 1. \quad (\text{В.4})$$

Умножив (В.3) на  $L^{-1}$ , находим

$$\begin{aligned} L^{-1} dL/d\tau &= \exp(-\tau b) [b - \exp(-\tau a) b \exp(\tau a)] \exp(\tau b) = \\ &= b - \exp(-\tau b) \exp(-\tau a) b \exp(\tau a) \exp(\tau b) = \\ &= b - \exp(-\tau b) f(\tau) \exp(\tau b). \end{aligned} \quad (\text{В.5})$$



Операторную функцию  $f(\tau) = \exp(-\tau a) b \exp(\tau a)$  можно разложить в ряд по степеням  $\tau$ :

$$f(\tau) \equiv \exp(-\tau a) b \exp(\tau a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau^n/n!) (d^n f(0)/d\tau^n) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} [(-\tau)^n/n!] \overbrace{[a, [a \dots [a, b] \dots]]}^n. \quad (\text{B.6})$$

Подставляя это разложение в уравнение (B.5), получаем уравнение для  $L$ , выраженное через коммутаторы входящих операторов. Общее решение этого уравнения является крайне сложным, поэтому ограничимся некоторыми частными случаями.

1. Отличен от нуля только коммутатор  $[a, b]$  (являющийся  $c$ -числом), а все остальные коммутаторы равны нулю. В этом случае  $f(\tau)$  (B.6)

$$f(\tau) = b - \tau [a, b]. \quad (\text{B.7})$$

Решая уравнение (B.5) с граничным условием (B.4), получаем

$$L(\tau) = \exp(\tau^2 [a, b]/2), \quad (\text{B.8})$$

так что [48]

$$e^a e^b = \exp(a \nabla b + [a, b]/2). \quad (\text{B.9})$$

Если отличны от нуля также коммутаторы  $[a, [a, b]]$  и  $[[a, b], b]$ , то  $f(\tau)$  имеет вид

$$\exp[-\tau b] f(\tau) \exp[\tau b] = b - \exp[-\tau b] [\tau [a, b] - \tau^2 [a, [a, b]]/2] \exp[\tau b] = \\ = b - \tau [a, b] - \tau^2 [[a, b], b] \nabla + \tau^2 [a, [a, b]]/2. \quad (\text{B.10})$$

В этом случае в результате решения уравнения (B.5) получаем:

$$e^a e^b = \exp(a \nabla b) \exp\{[a, b]/2 \nabla + [[a, b], b]/3 - [a, [a, b]]/6\}. \quad (\text{B.11})$$

2. Отличны от нуля только коммутаторы вида  $[a, [a, [a \dots [a, b] \dots]]]$ , т. е. все они коммутируют друг с другом и с  $b$ . Тогда  $f(\tau)$  [и  $L(\tau)$ ] также коммутируют с  $b$  и между собой. В этом случае

$$L(\tau) = \exp\left[\tau b - \int_0^\tau f(\tau') d\tau'\right] \quad (\text{B.12})$$

и

$$e^a e^b = \exp(a \nabla b) \exp\left[b - \int_0^1 f(\tau) d\tau\right]. \quad (\text{B.13})$$

Частным случаем является ситуация, когда

$$[a, [a \dots [a, b] \dots]] = c_n \lambda^n b, \quad c_0 = 1. \quad (\text{B.14})$$

Здесь  $\lambda$  — оператор, коммутирующий с  $b$ ;  $c_n$  — численные коэффициенты. Подставляя этот коммутатор в (B.6), получаем

$$f(\tau) = b \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-\lambda\tau)^n/n! = \varphi(\lambda\tau) b. \quad (\text{B.15})$$

С учетом этого  $L(\tau)$  (В.12) принимает вид

$$L(\tau) = \exp \left[ b \left( \tau - \int_0^\tau \varphi(\lambda\tau') d\tau' \right) \right], \quad (\text{В.16})$$

т. е. [см. (В.12)]

$$\exp(a) \exp(b) = \exp(a \dagger b) \exp \left[ b \left( 1 - \int_0^1 \varphi(\lambda\tau) d\tau \right) \right] \quad (\text{В.17})$$

или

$$\exp(a \dagger b) = \exp(a) \exp \left[ b \int_0^1 \varphi(\lambda\tau) d\tau \right]. \quad (\text{В.18})$$

В случае  $c_n = 1$  имеем для (В.15)—(В.17):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda\tau)^n / n! = \exp[-\lambda\tau]; \\ \exp(a \dagger b) &= \exp(a) \exp[b(1 - \exp(-\lambda))/\lambda], \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.19})$$

и в случае  $c_n = (n \dagger 1)!$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda\tau) &= (d/d\tau) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda\tau)^n / n! = (d/d\tau) [1/(1 \dagger \lambda\tau)]; \\ \exp(a \dagger b) &= \exp(a) \exp[b/(1 \dagger \lambda)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.20})$$

Проводя эрмитовое сопряжение в формулах (В.19) и (В.20) и переходя к новым обозначениям входящих операторов, имеем другую форму записи:

$$\exp(b \dagger a) = \exp[b(e^\lambda - 1)/\lambda] \exp(a) \quad (c_n = 1); \quad (\text{В.21})$$

$$\exp(b \dagger a) = \exp[b/(1 - \lambda)] \exp(a) \quad (c_n = (n \dagger 1)!). \quad (\text{В.22})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### ФАЗОВЫЕ ОБЪЕМЫ В ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть  $l_1, l_2$  — импульсы начальных частиц;  $l_1^2 = \mu_1^2, l_2^2 = \mu_2^2, P = l_1 + l_2$  — полный импульс начального состояния,  $q_1, q_2, q_3, \dots$  — импульсы конечных частиц,  $q_1^2 = m_1^2, q_2^2 = m_2^2, q_3^2 = m_3^2, \dots$  Напомним, что из  $n$  импульсов, связанных законами сохранения, при  $n > 3$  можно построить кроме их квадратов  $3n - 10$  независимых величин. Рассмотрим ниже несколько примеров представления фазовых объемов через инвариантные переменные в типичных выражениях для сечений различных процессов.

В простейшем случае

$$\begin{aligned} V_1 &= \int \delta^4(l_1 - q_1) d^3 q_1 / 2q_{10} = \int \delta^4(l_1 - q_1) d^4 q_1 \delta(q_1^2 - m_1^2) \times \\ &\quad \times \delta(q_{10}) = \delta(l_1^2 - m_1^2) \delta(q_{10}). \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

Сечение процесса с двумя частицами в конечном состоянии можно записать в виде

$$V_2 = \int \delta^4(l_1 + l_2 - q_1 - q_2) (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}) \tilde{g}_2(l_1, l_2, q_1, q_2), \quad (\Gamma.2)$$

где  $\tilde{g}(l_1, l_2, q_1, q_2)$  — скалярная функция входящих векторов. В качестве инвариантов в данной четырехчастичной задаче выберем следующие два:  $s = (l_1 + l_2)^2 = (q_1 + q_2)^2$ ;  $t = (l_1 - q_1)^2$ , тогда  $\tilde{g}_2(l_1, l_2, q_1, q_2) = g_2(s, t)$ . Интеграл (Г.2) удобно вычислять в  $\Pi$ -системе:  $P = l_1 + l_2 = q_1 + q_2 = 0$ . Проинтегрировав векторную часть  $\delta$ -функции, получим

$$V_2 = \int \delta(l_{10} + l_{20} - q_{10} - \sqrt{q_{10}^2 - m_1^2 + m_2^2}) q (dq_{10} / 4q_{20}) d \cos \vartheta d\varphi g_2(s, t) = \\ = \vartheta (P_0 - m_1 - m_2) [2\pi q / 4 (q_{10} + q_{20})] \int_{-1}^1 d \cos \vartheta g_2(s, t), \quad (\Gamma.3)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $l_1$  и  $q_1$ ,  $q = |q_1| = |q_2|$ . Задача обладает азимутальной симметрией (рассматривается случай неполяризованных частиц), так что интегрирование по  $\varphi$  дало  $2\pi$ . Величины  $q$ ,  $q_{10}$ ,  $q_{20}$  выражаются через инварианты и массы с помощью законов сохранения. Следует учесть, что в  $\Pi$ -системе  $(q_1 + q_2 = l_1 + l_2 = 0)$   $s = (q_{10} + q_{20})^2 = P_0^2 = (l_{10} + l_{20})^2$ ;  $q_{10}^2 = q^2 + m_1^2$ ;  $q_{20}^2 = q^2 + m_2^2$ . Тогда легко получить

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= (s + m_1^2 - m_2^2) / 2\sqrt{s}; & q_{20} &= (s + m_2^2 - m_1^2) / 2\sqrt{s}; \\ q^2 &= [(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2] / 4s. \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.4)$$

Если  $g_2$  не зависит от  $t$  (это имеет место, если  $\tilde{g}_2$  (Г.2) разбивается на произведение двух функций, одна из которых зависит только от  $l_1, l_2$ , а вторая — только от  $q_1, q_2$ ), то  $g_2$  не зависит от угла. В этом случае

$$V_2^{(0)} = \vartheta (\sqrt{s} - m_1 - m_2) \vartheta (P_0) (\pi / 2s) \sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2} g_2; \quad (\Gamma.5)$$

при равных массах  $m_1 = m_2 = m$

$$V_2^{(0)} = \vartheta (\sqrt{s} - 2m) \vartheta (P_0) (\pi / 2) \sqrt{(s - 4m^2) / s} g_2. \quad (\Gamma.6)$$

Когда  $g_2$  зависит от  $t$ , перейдем от интегрирования по  $\cos \vartheta$  к интегрированию по  $t$ . Для этого воспользуемся следующим приемом:

$$\int_{-1}^1 d \cos \vartheta g_2(s, t) = \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \int dt \delta(t - \mu_1^2 - m_1^2 + 2l_{10} q_{10} - \\ - 2|l||q| \cos \vartheta) g_2(s, t) = (1/2|l||q|) \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} dt g_2(s, t). \quad (\Gamma.7)$$

Пределы интегрирования по  $t$  определяются из условия обращения в нуль аргумента  $\delta$ -функции при  $|\cos \vartheta| \leq 1$ , т. е.

$$t_{\text{мин}}^{\text{макс}} = \mu_1^2 + m_1^2 - 2l_{10} q_{10} \pm 2|l||q|, \quad (\Gamma.8)$$

или в инвариантном виде

$$t_{\text{мин}}^{\text{макс}} = \mu_1^2 + m_1^2 - (1/2s) \left\{ (s + m_1^2 - m_2^2) (s + \mu_1^2 - \mu_2^2) \mp \right. \\ \left. \mp \sqrt{[(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]} [(s - \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2] \right\} \quad (\Gamma.9)$$

[заметим, что  $l_{10}, l_{20}, |l|$  получаются из (Г.4) заменой  $m_k \rightarrow \mu_k, t_{\text{мин}}^{\text{макс}}$  не меняется при замене  $l_1 \leftrightarrow l_2, q_1 \leftrightarrow q_2$ , что очевидно, так как  $t = (l_1 - q_1)^2 = (l_2 - q_2)^2$ ]. В итоге имеем

$$V_2 = \vartheta (\sqrt{s} - m_1 - m_2) \vartheta (P_0) \times \\ \times \left[ \pi/2 \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \sqrt{(s - \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2} dt g_2(s, t) \right] \quad (\text{Г.10})$$

Азимуальная симметрия, которой мы пользовались выше, может отсутствовать, если в задаче имеется «посторонний» вектор (роль такого вектора может, например, играть вектор поляризации). Рассмотрим вычисление  $V_2$  при наличии такого вектора. Пусть

$$V_2^{(1)} = \int \delta(l_1 + l_2 - q_1 - q_2) (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}) \tilde{g}_2^{(1)}(l_1, l_2, q_1, q_2, r), \quad (\text{Г.11})$$

где  $r$  — «посторонний» вектор. Переменными будут инварианты, содержащие  $q_1, q_2$ . Учитывая, что  $q_2 = l_1 + l_2 - q_1$  и  $l_1 r, l_2 r$  — постоянные, получаем, что переменными являются два инварианта  $t = (l_1 - q_1)^2$  и  $\omega = (q_1 + r)^2$ , остальные инварианты или выражаются через них, или являются постоянными. Перейдем в (Г.11) к интегрированию по явно инвариантным переменным  $dt d\omega$ . В  $\Pi$ -системе  $l_1 + l_2 = q_1 + q_2 = 0$  направим ось  $z$  по  $l_1$ , плоскость  $xz$  выберем так, чтобы в ней лежал вектор  $r$ , его полярный угол обозначим  $\vartheta_r$ . Интегрируя  $\delta$ -функцию как в (Г.3), получаем:

$$V_2^{(1)} = \vartheta (P_0 - m_1 - m_2) [ |q| / 4 (q_{10} + q_{20}) ] \int_{-1}^1 \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int dt \times \\ \times \delta(t - \mu_1^2 - m_1^2 + 2l_{10} q_{10} - 2|l| |q| \cos \vartheta) \int d\omega \delta(\omega - m_1^2 - r^2 - 2q_{10} r_0 \mp \\ \mp 2|q| |r| (\cos \vartheta \cos \vartheta_r \mp \sin \vartheta \sin \vartheta_r \cos \varphi)) g_2^{(1)}(t, \omega). \quad (\text{Г.12})$$

Интеграл по  $\varphi$  можно разбить на  $\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}$ , вклады обоих интегралов равны, так что можно рассматривать удвоенный первый. В интервале  $[0, \pi]$  вторая  $\delta$ -функция в (Г.12) может иметь только один нуль в аргументе, так как  $\cos \varphi$  в этом интервале меняется монотонно. Пределы определяются из условия обращения в нуль аргументов  $\delta$ -функций. Для  $t_{\text{мин}}^{\text{макс}}$  это (Г.8), (Г.9), для

переменной  $\omega$   $t_{\text{мин}}^{\text{макс}}$  это

$$\omega_{\text{макс}}^{\text{мин}} = m_1^2 + r^2 + 2q_{10} r_0 - 2|q| |r| (\cos \vartheta \cos \vartheta_r \mp \sin \vartheta \sin \vartheta_r), \quad (\text{Г.13})$$

где  $q_{10}, |q|$  даются формулами (Г.4);  $\sin \vartheta, \cos \vartheta$  выражаются через инварианты с помощью первой  $\delta$ -функции,  $r_0, |r|, \cos \vartheta_r$  можно выразить через инварианты с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} r(l_1 + l_2) &= r_0 \sqrt{s}; \quad |r| = \sqrt{r_0^2 - r^2}; \\ r l_1 &= r_0 l_{10} - |r| |l_1| \cos \vartheta_r. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.14})$$

В итоге имеем

$$V_2^{(1)} = \vartheta (\sqrt{s} - m_1 - m_2) [\vartheta (P_0) / 8] \times \\ \times \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} dt \int_{\omega_{\text{мин}}}^{\omega_{\text{макс}}} d\omega g_2^{(1)}(t, \omega) / (l_1^0 + l_2^0) |r| |l| |q| |\sin \vartheta \sin \vartheta_r \sin \varphi|. \quad (\text{Г.15})$$

Знаменатель подынтегрального выражения должен быть представлен через инварианты. Заметим, что  $|q| |l| |r| |\sin \vartheta \sin \vartheta_r \sin \varphi|$  есть модуль смешанного произведения векторов  $(r [q_1 l_1])$  и, следовательно, модуль определителя, составленного из компонент этих векторов. Поскольку в  $\Pi$ -системе  $P = l_1 + l_2 = 0$ , то знаменатель подынтегрального выражения в (Г.15) есть модуль определителя:

$$\det T(P, l_1, q_1, r) = \begin{vmatrix} P_0 & P_x & P_y & P_z \\ l_{10} & l_{1x} & l_{1y} & l_{1z} \\ q_{10} & q_{1x} & q_{1y} & q_{1z} \\ r_0 & r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}. \quad (\text{Г.16})$$

Так как величины  $l_1, l_2, q_1, q_2, P$  связаны между собой однородными линейными соотношениями, то в первых трех строках можно без изменения величины модуля определителя писать любые три независимых из них. Рассмотрим определитель матрицы  $TgT^T$ , где  $g$  — матрица метрического тензора:

$$\det TgT^T = \begin{vmatrix} \mu_1^2 & l_1 l_2 & l_1 q_1 & l_1 r \\ l_2 l_1 & \mu_2^2 & l_2 q_1 & l_2 r \\ q_1 l_1 & q_1 l_2 & m_1^2 & q_1 r \\ r l_1 & r l_2 & r q_1 & r^2 \end{vmatrix}. \quad (\text{Г.17})$$

Учитывая, что  $\det(TgT^T) = \det T \det g \det T = -(\det T)^2$ , имеем

$$|\det T| = \sqrt{-S(l_1, l_2, q_1, r)}, \quad (\text{Г.18})$$

где  $S = \det(TgT^T)$ . Очевидно, что  $S(l_1, l_2, q_1, r) = S(l_1, q_1, q_2, r) = S(P, l_1, q_1, r)$  и т. д. Следовательно,

$$V_2^{(1)} = \vartheta(\sqrt{S} - m_1 - m_2) [\vartheta(P_0)/8] \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega [g_2^{(1)}(t, \omega) / \sqrt{-S(l_1, l_2, q_1, r)}]. \quad (\text{Г.19})$$

По определению  $\omega_{\min}^{\max}$  соответствуют  $\cos \varphi = \pm 1$  ( $\sin \varphi = 0$ ), т. е. они являются корнями  $S$ , если  $S$  выразить через  $t, \omega$  и постоянные инварианты и разрешить уравнение относительно  $\omega$ . Слияние этих корней, т. е. появление у  $S$  кратного корня, возникает, очевидно, при  $\sin \vartheta = 0$  ( $\cos \vartheta = \pm 1$ ), т. е. при  $t = t_{\min}^{\max}$  и, следовательно, определяет пределы интегрирования по  $t$ .

Пределы интегрирования в обратном порядке также можно получить из выражения для  $S$ . Тогда необходимо решить уравнение  $S = 0$  относительно  $t$ , а затем найти точки слияния этих корней относительно  $\omega^*$ .

\* Законность такой операции видна, например, из того, что при вычислении  $V_2^{(1)}$  мы смогли ось  $z$  направить по  $g, l_1$ , взять в плоскости  $xz$ . Эта операция переставляет местами  $t, \omega$ , не меняя  $S$ .

Обратимся теперь к рассмотрению интегралов с тремя частями в конечном состоянии:

$$V_3 = \int \delta^4(l_1 \mp l_2 - q_1 - q_2 - q_3) \times \\ \times (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}) (d^3 q_3 / 2q_{30}) \tilde{g}_3(l_i, q_n), \quad (\text{Г.20})$$

где  $\tilde{g}_3$  — скалярная функция. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если  $\tilde{g}_3(l_i, q_n) = \tilde{g}_3^{(1)}(l_1, l_2, q_3) \tilde{g}_3^{(2)}(q_1, q_2)$ , то интегрирование в (Г.20) удобно проводить в следующем порядке:

$$V_3^{(1)} = \int d^4 \Lambda \delta^4(l_1 \mp l_2 - q_3 - \Lambda) \tilde{g}_3^{(1)}(l_1, l_2, q_3) (d^3 q_3 / 2q_{30}) \times \\ \times \int \delta(\Lambda - q_1 - q_2) (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}) \tilde{g}_3^{(2)}(q_1, q_2) = \\ = \int d^4 \Lambda \delta^4(l_1 \mp l_2 - q_3 - \Lambda) \tilde{g}_3^{(1)}(l_1, l_2, q_3) (d^3 q_3 / 2q_{30}) \times \\ \times \vartheta(\sqrt{\Lambda^2} - m_1 - m_2) \vartheta(\Lambda_0) (\pi / 2\Lambda^2) \sqrt{(\Lambda^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2} g_3^{(2)}(\Lambda^2). \quad (\text{Г.21})$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл по  $q_1, q_2$  соответствует рассмотренному выше случаю  $V_2^{(0)}$  (Г.5). Оставшийся интеграл зависит от четырех векторов ( $l_1, l_2, q_3, \Lambda$ ), следовательно, имеется три независимых скалярных инварианта (один из них  $\Lambda^2$ ), поэтому  $\tilde{g}_3^{(1)}(l_1, l_2, q_3) g_3^{(2)}(\Lambda^2) = h_3(s, s_1, u)$ , где  $s_1 = \Lambda^2$ ,  $u = (l_2 - q_3)^2$ ,  $s = (l_1 + l_2)^2$ . Перейдем теперь в (Г.21) к интегрированию по  $s_1, u$ :

$$\int d^4 \Lambda \delta^4(l_1 + l_2 - q_3 - \Lambda) \vartheta(\Lambda_0) (d^3 q_3 / 2q_{30}) = \\ = \int ds_1 \int \delta(s_1 - \Lambda^2) \delta^4(l_1 + l_2 - q_3 - \Lambda) \vartheta(\Lambda_0) d^4 \Lambda (d^3 q_3 / 2q_{30}), \quad (\text{Г.22})$$

и поскольку  $d^4 \Lambda \vartheta(\Lambda_0) \delta(\Lambda^2 - s_1) = d^3 \Lambda / 2\Lambda^0$ ;  $\Lambda_0 = \sqrt{\Lambda^2 + s_1}$ , внутренний интеграл в правой части можно вычислить как  $v_2$  (замены:  $q_2 \rightarrow q_3, q_1 \rightarrow \Lambda, \Lambda^2 = s_1$ ), имеем [ср. (Г.10)]:

$$V_3^{(1)} = (\pi^2 / 4) [\vartheta(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3) \vartheta(P_0) / \sqrt{(s - \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2}] \times \\ \times \int_{(m_1 + m_2)}^{(\sqrt{s} - m_3)^2} (ds_1 / s_1) \int_{u_{\text{мин}}}^{u_{\text{макс}}} du \sqrt{(s_1 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2} h_3(s, s_1, u), \quad (\text{Г.23})$$

где  $u_{\text{макс}}$  и  $u_{\text{мин}}$  получаются из (Г.9) заменой  $m_1^2 \rightarrow s_1, m_2^2 \rightarrow m_3^2$ ; пределы интегрирования по  $s_1$  задаются  $\vartheta$ -функциями из (Г.21), (Г.10), причем в (Г.10) следует заменить  $m_1^2 \rightarrow s_1, m_2^2 \rightarrow m_3^2$ .

В случае  $h_3 = 1$  полученное выражение представляет фазовый объем:

$$V_3^{Ph} = (\pi^2 / 4) [\vartheta(P_0) \vartheta(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3) / s] \times \\ \times \int_{(m_1 + m_2)^2}^{(\sqrt{s} - m_3)^2} (ds_1 / s_1) \sqrt{(s_1 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2} \sqrt{(s - s_1 - m_3^2)^2 - 4m_3^2 s_1}. \quad (\text{Г.24})$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда  $l_1$  и  $l_2$  входят в (Г.20) только в виде суммы  $P = l_1 + l_2$ . В этом случае

$$V_3^{(2)} = \int (d^3 q_3 / 2q_{30}) \int \delta^4(P - q_1 - q_2 - q_3) \times \\ \times \tilde{g}_3(P, q_1, q_2, q_3) (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}). \quad (\text{Г.25})$$

Внутренний интеграл совпадает с интегралом (Г.10) после замены  $l_1 \rightarrow P$ ,  $l_2 \rightarrow -q_3$  и дается формулами (Г.9), (Г.10), где следует проделать замену  $\mu_1^2 \rightarrow P^2 = s$ ;  $\mu_2^2 \rightarrow m_3^2$ ;  $s = (l_1 + l_2)^2 \rightarrow (P - q_3)^2 = (q_1 + q_2)^2 = s_1$ ;  $t = (l_1 - q_1)^2 \rightarrow (P - q_1)^2 = (q_2 + q_3)^2 = t_1$ ;  $g_2(s, t) \rightarrow g_3(s, s_1, t_1)$ . Итак, получаем

$$V_3^{(2)} = (\pi/2) \int (d^3 q_3 / 2q_{30}) \left[ \vartheta(\sqrt{s_1} - m_1 - m_2) \vartheta(P_0 - q_{30}) / \sqrt{(s_1 - s - m_3^2)^2 - 4sm_3^2} \right] \times \\ \times \int_{t_{1\text{мин}}}^{t_{1\text{макс}}} dt_1 g_3(s, s_1, t_1), \quad (\text{Г.26})$$

где  $t_{1\text{макс}}$  дается формулой (Г.9) с указанными заменами. Подынтегральное выражение зависит от  $q_3$  через  $s_1$ . Перейдем к интегрированию по  $s_1$  в системе, где  $P = 0$ :

$$\int d^3 q_3 / 2q_{30} = \int ds_1 \delta(s_1 - s - m_3^2 + 2q_{30} P_0) (d^3 q_3 / 2q_{30}) = \\ = \int ds_1 (\pi |q_3| / P_0) \vartheta((s + m_3^2 - s_1) / 2P_0 - m_3). \quad (\text{Г.27})$$

Область интегрирования по  $s_1$  определяется  $\vartheta$ -функциями в (Г.26) и (Г.27). Выражая  $|q_3|$  и  $P_0$  через инварианты

$$P_0 = \sqrt{s}; \quad |q_3| = \sqrt{q_{30}^2 - m^2} = (1/2 \sqrt{s}) \sqrt{(s - m_3^2 - s_1)^2 - 4m_3^2 s_1} = \\ = (1/2 \sqrt{s}) \sqrt{(s_1 - s - m_3^2)^2 - 4sm_3^2}, \quad (\text{Г.28})$$

получаем

$$V_3^{(2)} = (\pi^2 / 4s) \vartheta(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3) \vartheta(P_0) \int_{(m_1 + m_2)^2}^{(V\sqrt{s} - m_3)^2} ds_1 \int_{t_{1\text{мин}}}^{t_{1\text{макс}}} dt_1 g_3(s, s_1, t_1). \quad (\text{Г.29})$$

Заметим, что в системе  $P = 0$ ,  $ds_1 = -2P_0 dq_{30}$  и  $dt_1 = -2P_0 dq_{10}$ , т. е. элемент фазового объема  $ds_1 dt_1 \sim dq_{10} dq_{30}$ . Так как  $q_{10} + q_{20} + q_{30} = P_0 = \text{const}$ , то можно взять  $dq_{20} dq_{30}$ ,  $dq_{10} dq_{20}$ . Полагая в (Г.29)  $g_3 = 1$ , приходим к формуле (Г.24).

Рассмотрим еще один случай. Пусть  $\tilde{g}_3(l_i, q_n) = \tilde{g}_3^{(1)}(l_i, q_3) \tilde{g}_3^{(2)}(l_1, q_1, q_2)$ , в этом случае удобно интегрировать в следующей последовательности:

$$V_3^{(3)} = \int d^4 \Lambda \delta^4(l_2 - q_3 - \Lambda) \tilde{g}_3^{(1)}(l_i, q_3) (d^3 q_3 / 2q_{30}) \times \\ \times \int d^4 (l_1 + \Lambda - q_1 - q_2) \tilde{g}_3^{(2)}(l_1, q_1, q_2) (d^3 q_1 / 2q_{10}) (d^3 q_2 / 2q_{20}). \quad (\text{Г.30})$$

Последний интеграл в (Г.30) вычисляется как  $V_2$  с заменой  $l_2 \rightarrow \Lambda$ . Обозначая  $\tilde{g}_3^{(2)}(l_1, q_1, q_2) = g_3^{(2)}(s_1, t, u)$ , где  $s_1 = (q_1 + q_2)^2 = (l_1 + \Lambda)^2$ ;  $t = (l_1 - q_1)^2$ ,  $u = (l_2 - q_3)^2 = \Lambda^2$ ; получаем

$$V_3^{(3)} = (\pi/2) \int \tilde{g}_3^{(1)}(l_i, q_3) (d^3 q_3 / 2q_{30}) [\vartheta \sqrt{s_1} - m_1 - m_2] \times \\ \times \vartheta(P_0 - q_{30}) / \sqrt{(s_1 - \mu_1^2 - u)^2 - 4\mu_1^2 u} \delta^4(l_2 - q_3 - \Lambda) d^4 \Lambda \int_{t_{1\text{мин}}}^{t_{1\text{макс}}} dt g_3^{(2)}(s_1, t, u). \quad (\text{Г.31})$$

Здесь  $t_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$  определяется формулой (Г.9), в которой необходимо заменить

$s \rightarrow s_1, \mu_2^2 \rightarrow u$ . Положив  $\tilde{g}_3^{(1)}(l_i, q_3) g_3^{(2)}(s_1, t, u) = g_3(t, s_1, u)$ , перейдем к интегрированию по  $s_1, u$ . Отличие от случая  $V_3^{(2)}$  состоит в том, что под интегралом есть зависимость от  $u$  (угловой переменной в системе  $\mathbf{P} = 0$ ). Так как после выполнения интегрирования по  $t$  подынтегральная функция будет зависеть от  $s_1, u$ , переход от (Г.31) к интегралам по этим переменным можно осуществить как переход от (Г.21) к (Г.23) (это ясно, если в (Г.31) заменить  $\Lambda \rightarrow \Lambda - l_1$ ) и в результате имеем

$$V_3^{(3)} = (\pi^2/4) [\Phi(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3) \Phi(P_0)/\gamma^3 (s - \mu_1^2 - \mu_2^2) - 4\mu_1^2 \mu_2^2] \times \\ \times \frac{(V\bar{s} - m_3)^2}{(m_1 + m_2)^2} \int_{u_{\text{мин}}}^{u_{\text{макс}}} ds_1 \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} (du/\gamma) \frac{t_{\text{макс}}}{(s_1 - \mu_1^2 - u)^2 - 4\mu_1^2} \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} dt g_3(t, s_1, u). \quad (\text{Г.32})$$

Как уже отмечалось,  $t_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$  дается формулой (Г.9), где надо заменить  $s \rightarrow s_1$ ,

$\mu_2^2 \rightarrow u$ ;  $u_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$  дается той же формулой (Г.9) с заменой  $m_1^2 \rightarrow s_1, m_2^2 \rightarrow m_3^2$ .

Если  $g_3$  не зависит от  $t$ , то, выполняя интегрирование по  $t$ , приходим к (Г.23).

Перейдем теперь к обсуждению общего случая. Ранее установлено, что при вычислении  $V_3^{(1)}$  (Г.23) и  $V_3^{(2)}$  (Г.29) остается два нетривиальных интеграла, при вычислении (Г.32) — три. В общем случае  $\tilde{g}_3(l_i, q_n)$  зависят от пяти кинематических инвариантов, один из которых есть квадрат полной энергии в  $\mathcal{C}$ -системе  $s = (l_1 + l_2)^2$ , а по четырем остальным необходимо проводить четыре нетривиальных интегрирования [другое рассуждение следующее: из девятикратного интеграла по конечным состояниям в (Г.20) четыре интегрирования необходимы для того, чтобы проинтегрировать  $\delta$ -функцию, одно тривиальное интегрирование по общему азимутальному углу в  $\mathcal{C}$ -системе, остается четыре нетривиальных интеграла]. Интегрирование можно проводить следующим образом:

$$V_3^{(4)} = \int d^4 \Lambda \delta^4(l_2 - q_3 - \Lambda) (d^3 q_3/2q_{30}) \int \delta^4(l_1 + \Lambda - q_1 - q_2) \times \\ \times \tilde{g}_3(l_i, q_n) (d^3 q_1/2q_{10}) (d^3 q_2/2q_{20}). \quad (\text{Г.33})$$

Внутренний интеграл здесь является подобным  $V_2^{(1)}$  с «посторонним» вектором  $\mathbf{r}$ , в качестве которого можно выбрать любую линейную комбинацию векторов  $l_i, q_n$ , не выражающуюся через векторы, стоящие в  $\delta$ -функции внутреннего интеграла, например  $l_2, q_3, l_2 + q_3$  (но не  $l_2 - q_3 = \Lambda$ ),  $l_1 + l_2 + q_3$  и т. д. Не будем здесь конкретизировать вектор  $\mathbf{r}$  и выберем в качестве независимых переменных  $t = (l_1 - q_1)^2, s_1 = (q_1 + q_2)^2, u = (l_2 - q_3)^2; \omega = (q_1 + r)^2$ . Как уже отмечалось, внутренний интеграл можно вычислить как  $V_2^{(1)}$ , остающийся интеграл, очевидно, тот же, что и при вычислении  $V_3^{(3)}$  (Г.31), (Г.32). Используя эти обстоятельства, можно сразу же написать результат:

$$V_3^{(4)} = (\pi/16) [\Phi(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3) \Phi(P_0)/\sqrt{(s - \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2}] \times \\ \times \frac{(V\bar{s} - m_3)^2}{(m_1 + m_2)^2} \int_{u_{\text{мин}}}^{u_{\text{макс}}} ds_1 \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} du \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} dt \int_{\omega_{\text{мин}}}^{\omega_{\text{макс}}} d\omega g_3(t, s_1, u, \omega)/\sqrt{-S(l_1, q_1, q_2, r)}, \quad (\text{Г.34})$$

где, как в (Г.32),  $t_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$  определяются формулой (Г.9), в которой следует положить  $s \rightarrow s_1, \mu_2^2 \rightarrow u$ ;  $u_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$  следует из той же формулы после замены  $m_1^2 \rightarrow s_1, m_2^2 \rightarrow m_3^2; g_3(t, s_1, u, \omega) = \tilde{g}_3(l_i, q_n); \omega_{\text{макс}}$   
 $\text{мин}$ , как и в (Г.19),



определяются корнями уравнения  $S = 0$  (выраженные для  $S$  задается формулами (Г.17), (Г.18)), в системе, где  $l_1 + \Lambda = l_1 + l_2 - q_3 = 0$ , явный вид  $\omega_{\text{макс}}$  следует из формулы (Г.13), в которой все величины необходимо

выразить через инварианты. В частности, если взять в качестве  $g$  вектор  $q_3$ , то  $\omega = (q_1 + q_3)^2$ , тогда  $S(l_1, q_1, q_2, r) = S(l_1, q_1, q_2, q_3) = S(l_1, l_2, q_1, q_2)$  и т. д.

Как уже отмечалось, пределы интегрирования по  $\omega$  и  $t$  можно определить прямо из выражения для  $S$ . Более того, из этого выражения можно также ийти пределы по переменным  $u$  и  $s_1$ . В этом можно убедиться, если учесть, что пределы интегрирования по  $u$  соответствуют в системе  $l_1 + l_2 = 0$  случаю  $l_2 q_3 = \pm |l_2| |q_3|$ , а пределы интегрирования по  $s_1$  соответствуют или  $|q_1| = |q_2| = 0$  в системе  $l_1 + l_2 - q_3 = 0$  (при этом условия  $q_1$  и  $q_2$  коллинеарны в любой системе), или  $q_3 = 0$  в системе, где  $l_1 + l_2 = 0$  [ср. (Г.22), (Г.23)]. С другой стороны, пользуясь инвариантностью  $S$  и тем, что  $S$  не меняется при заменах, оставляющих постоянным модуль определителя из компонент векторов [см. (Г.16)—(Г.18)] можно (с точностью до коэффициента) представить  $S$  как  $(q_1 [l_2 q_3])^2$  в системе  $l_1 + l_2 = 0$ , откуда видно, что  $S$  обращается в нуль на границах области по  $u, s_1$ .

Рассмотрим теперь выражение для фазового объема в форме, удобной для задач тормозного излучения и рождения пар частиц. Пусть  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + k$ ,  $p_{1,3}^2 = m_1^2$ ;  $p_{2,4}^2 = m_2^2$ ;  $k^2 \neq 0$  (в общем случае). В качестве независимых переменных выберем

$$\left. \begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2v + m_1^2 + m_2^2; \quad \kappa = k(p_1 + p_2) - k^2/2; \\ \kappa_2 &= (kp_2) - k^2/2; \quad \kappa_4 = (kp_4) + k^2/2; \quad \Delta_1^2 = -(p_1 - p_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.35})$$

Одним из возможных способов перехода от (Г.34) к этому набору является следующий:

$$l_{1,2} \rightarrow p_{1,2}; \quad q_{1,2} \rightarrow p_{3,4}; \quad q_3 \rightarrow k; \quad r = -(p_1 + p_2).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2v + m_1^2 + m_2^2; \\ s_1 &= (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2\kappa; \\ u &= (p_2 - k)^2 = m_2^2 - 2\kappa_2; \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = -\Delta_1^2; \\ \omega &= (p_4 + k)^2 = 2\kappa_4 + m_2^2; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.36})$$

$$S(l_1, q_1, q_2, r) \rightarrow S(p_1, p_3, p_4, -p_1 - p_2) = S(p_1, p_2, p_3, p_4) \text{ и т. д.}$$

Формулу (Г.34) теперь можно записать в виде [будем считать, что реакция кинематически возможна («канал открыт») и будем опускать  $\theta$ -функции]

$$\begin{aligned} V_3^p &= \int \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) (d^3 p_3 / 2\varepsilon_3) (d^3 p_4 / 2\varepsilon_4) \times \\ &\quad \times (d^3 k / 2\omega) \tilde{g}_3(p_i, k) = [\pi/4 \sqrt{v^2 - m_1^2 m_2^2}] \times \\ &\quad \times \int [d\kappa d\kappa_2 d\Delta_1^2 d\kappa_4 / \sqrt{-S(p_1, p_2, p_3, p_4)}] g_3(v, \kappa, \kappa_2, \kappa_4, \Delta_1^2). \end{aligned} \quad (\text{Г.37})$$

Если функцию  $S$  выразить через независимые инварианты, то она оказывается квадратичной по каждому из них. Это следует прямо из выражения для  $S$  в виде определителя (Г.17), (Г.18), но можно использовать и иной способ.

Запишем  $S$  как  $S(p_1 + p_2 - k, p_1, k, p_4)$  в системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$ ,  $\mathbf{p}_1$ -вектор направлен по  $z$ , вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ . Тогда [ср. (Г.15)]

$$-S = [(p_1 + p_2 - k)^0 | \mathbf{p}_1 || \mathbf{p}_4 |]^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \sin^2(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) \sin^2 \varphi, \quad (\text{Г.38})$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{p}_4$ . Выражая величины через инварианты, видим, что, например, зависимость от  $\kappa_4$  содержится только в  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ , причем  $\kappa_4 = \omega \varepsilon_4 - |\mathbf{k} || \mathbf{p}_4 | (\cos \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4} \cos \widehat{\mathbf{k} \mathbf{p}_1} + \sin \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4} \sin \widehat{\mathbf{k} \mathbf{p}_1} \times \times \cos \varphi) + k^2/2$ , так что  $\cos \varphi$  линеен по  $\kappa_4$ , значит,  $(-S)$  квадратична по  $\kappa_4$  и т. д. Итак,

$$S = Q_\xi \xi^2 - 2\mathcal{P}_\xi \xi + R_\xi, \quad (\text{Г.39})$$

где  $\xi$  — любая переменная из (Г.35). В (Г.37) первое интегрирование проводится между корнями уравнения  $S = 0$  [ср. (Г.19)], рассмотрим интеграл

$$I_\xi^{(n)} = \int \xi^n d\xi / \sqrt{-S}, \quad (\text{Г.40})$$

который удобно брать переходом к контурному\* с последующим вычислением вычетов:

$$\begin{aligned} I_\xi^{(2)} &= \pi(3\mathcal{P}_\xi^2 - Q_\xi R_\xi) / 2Q_\xi^{5/2}; \quad I_\xi^{(1)} = \pi\mathcal{P}_\xi / Q_\xi^{3/2}; \\ I_\xi^{(0)} &= \pi / Q_\xi^{1/2}; \quad I_\xi^{(-1)} = \pi / R_\xi^{1/2}; \quad I_\xi^{(-2)} = \pi\mathcal{P}_\xi / R_\xi^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.41})$$

Явный вид  $S(Q, \mathcal{P}, R)$  можно получить из (Г.17) и (Г.18) или (Г.38). Укажем еще один способ, в котором интегралы (Г.40) вычисляются в определенной системе, а затем ответ выражается через инварианты. Для нахождения  $Q_{\kappa_4}$ ,  $\mathcal{P}_{\kappa_4}$ ,  $R_{\kappa_4}$  вычислим  $I_{\kappa_4}^{(n)}$ . При фиксированных  $\kappa_1, \kappa_2$ ,  $\Delta_1^2$  интегрирование по  $\kappa_4$  — интегрирование по азимутальному углу вектора  $\mathbf{p}_4$  в системе, где  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$  [см. (Г.38)]:

$$\begin{aligned} I_{\kappa_4}^{(n)} &= \int \kappa_4^n d\kappa_4 / \sqrt{-S} = \int \kappa_4^n \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \times \\ &\quad \times \delta(\Delta_1^2 + (p_1 - p_3)^2) (d^3 p_3 / \varepsilon_3) (d^3 p_4 / \varepsilon_4) = \\ &= \int_0^{2\pi} [d\varphi / 2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) | \mathbf{p}_1 | | \omega \varepsilon_4 + k^2/2 - |\mathbf{k} || \mathbf{p}_4 | \times \\ &\quad \times (\cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) + \sin(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}}) \sin(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) \cos \varphi)]^n. \end{aligned} \quad (\text{Г.42})$$

Отсюда находим

$$I_{\kappa_4}^{(0)} = \pi / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) | \mathbf{p}_1 |;$$

$$I_{\kappa_4}^{(1)} = \pi [ \omega \varepsilon_4 + k^2/2 - |\mathbf{k} || \mathbf{p}_4 | \cos(\widehat{\mathbf{k} \mathbf{p}_1}) \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) ] / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) | \mathbf{p}_1 |;$$

$$\begin{aligned} I_{\kappa_4}^{(-1)} &= [ \pi / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) | \mathbf{p}_1 | | (\varepsilon_4 \omega + k^2/2 - |\mathbf{k} || \mathbf{p}_4 | \times \\ &\quad \times \cos(\widehat{\mathbf{k} \mathbf{p}_1}) \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) - (|\mathbf{k} || \mathbf{p}_4 | \sin(\widehat{\mathbf{k} \mathbf{p}_1}) \sin(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4}) )^2 ]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.43})$$

\* Интеграл по азимутальному углу до перехода к инвариантным переменным по существу является контурным.

Выражая входящие величины через инварианты, имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2 - \omega &= \sqrt{s-2\kappa}; \quad \varepsilon_1 = (m_1^2 + \nu - \kappa \mp \kappa_2) / \sqrt{s-2\kappa}; \\ \varepsilon_4 &= (\nu - \kappa \mp m_2^2) / \sqrt{s-2\kappa}; \\ \omega &= (2\kappa - k^2) / 2 \sqrt{s-2\kappa}; \\ \cos(\widehat{\mathbf{kp}}_1) &= (\omega \varepsilon_1 - \kappa + \kappa_2) / |k| |\mathbf{p}_1|; \quad \cos(\widehat{\mathbf{p}}_1 \mathbf{p}_4) = \\ &= (2m_1^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \Delta_1^2) / 2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3|; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega - \varepsilon_4; \\ |\mathbf{p}_i| &= \sqrt{\varepsilon_i^2 - m_{i,2}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.44})$$

Подставляя эти выражения в (Г.38) или в (Г.43) с учетом (Г.41), найдем

$$\left. \begin{aligned} Q_{\kappa_4} &= (\nu - \kappa_1)^2 - (m_2^2 - 2\kappa_2) m_1^2; \\ \mathcal{P}_{\kappa_4} &= \kappa_2 [\nu(\nu - \kappa_1) - m_1^2 (m_2^2 - \kappa_2 - k^2/2)] - \Delta_1^2 [\kappa_2 (\nu \mp \\ &\mp \kappa_1 \mp m_1^2) - \kappa_1 (\nu - \kappa_1 \mp m_2^2) - k^2 (m_1^2 + \nu - \kappa_1) / 2] / 2; \\ R_{\kappa_4} &= \Delta_1^4 [\kappa^2 - k^2 (2\nu + m_1^2 + m_2^2 - \kappa) \mp k^4 / 4] / 4 - \\ &- \Delta_1^2 \{ \kappa (\kappa_2 \nu - m_2^2 \kappa_1) - k^2 [m_1^2 \kappa \mp \nu^2 - m_1^2 m_2^2 - \\ &- (\kappa + \kappa_1) (\nu + m_1^2) / 2] - m_1^2 k^4 / 4 \} + \kappa_2^2 (\nu^2 - m_1^2 m_2^2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.45})$$

где  $\kappa_1 = \kappa - \kappa_2$ . Выражения для функций  $Q_\xi$ ,  $\mathcal{P}_\xi$ ,  $R_\xi$  при других  $\xi$  можно получить перегруппировкой членов в выражении для  $S$ .

Порядок интегрирования в (Г.37) определяется свойствами функции  $g_3$ . Если выполнять интегрирование в том порядке, в котором записаны дифференциалы в (Г.37), то пределы интегрирования можно получить из (Г.34) заменами (Г.36). Используя замены, можно найти пределы интегрирования в ином порядке, они, как уже отмечалось, определяются также из  $S$ . Проще, однако, находить область изменения переменных прямо из кинематических условий, из которых мы фактически исходили [см. (Г.7), (Г.8)]. Рассмотрим несколько примеров. После выполнения интегрирования по  $\kappa_4$  согласно (Г.40) и (Г.41) ограничения на область интегрирования по  $\Delta_1^2$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa$  можно получить из условий:

$$\left. \begin{aligned} |\cos(\widehat{\mathbf{p}}_1 \mathbf{p}_3)| &\leq 1 \quad (\text{система } \mathbf{p}_1 \mp \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} = 0); \\ |\cos(\widehat{\mathbf{p}}_2 \mathbf{k})| &\leq 1 \quad (\text{система } \mathbf{p}_1 \mp \mathbf{p}_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.46})$$

Действительно, интегрирование по  $\kappa_4$  при фиксированных  $\Delta_1^2$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa$  — интегрирование по азимутальному углу вектора  $\mathbf{p}_4$  в системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$ . Очевидно, что полярные углы вектора  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$  могут быть любыми, так как  $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$  и, следовательно, выпадают из аргумента  $\delta$ -функции, содержащей законы сохранения, которые и определяют искомую область.

Итак, граничные значения  $\cos(\widehat{\mathbf{p}}_1 \mathbf{p}_3)$  есть  $\pm 1$ , они определяют экстремумы  $\Delta_1^2 = -(\rho_1 - \rho_3)^2$ , причем, поскольку все энергии выражаются через  $\kappa$ ,  $\kappa_2$  (Г.44), то получаем  $\Delta_1^2 \text{ макс} = 2[\varepsilon_1 \varepsilon_3 \pm |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| - m_1^2]$  при фиксированных  $\kappa$ ,  $\kappa_2$ .

Чтобы реакция могла идти, необходимо  $(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 > (m_1 + m_2)^2$ , т. е.  $(m_1 + m_2)^2 \leq (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega)^2 = (\rho_1 + \rho_2 - k)^2$ . Это дает ограничение на  $\kappa$ . После интегрирования по  $\Delta_1^2$  вектор  $\mathbf{k}$  может иметь любое направление в системе  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$  [второе условие (Г.46)], причем

$\cos(\widehat{kp}_1) = \pm 1$  соответствует экстремумам  $\kappa_{2\text{макс}} = \omega \varepsilon_2 \pm |k| |p_2| - k^2/2$ .

Величина  $\kappa = \omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - k^2/2$  ограничивается условием  $\omega^2 > k^2$ . Отметим, что при  $p_4, p_3 = 0$  в системе  $p + p_2 - k = 0$  интервал изменения  $\Delta_1^2$  уменьшается до нуля, а при  $k = 0$  в системе  $p_1 + p_2 = 0$  интервал по  $\kappa_2$  падает до нуля, поэтому ограничения на  $\kappa$  получаются из условия существования областей по  $\Delta_1^2, \kappa_2$ .

Если же первое интегрирование (Г.40), (Г.41) проведено по  $\Delta_1^2$ , то область изменения  $\kappa_4, \kappa_2, \kappa$  можно найти из условий:

$$\left. \begin{aligned} |\cos(\widehat{kp}_4)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 - k = 0); \\ |\cos(\widehat{kp}_2)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.47})$$

Если первое интегрирование проведено по  $\kappa_2$ , то область  $\kappa, \Delta^2, \kappa_4$  следует из условий:

$$\left. \begin{aligned} |\cos(\widehat{kp}_3)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 - p_3 = 0); \\ |\cos(\widehat{p}_1 p_3)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.48})$$

И, наконец, если первое интегрирование проводить по  $\kappa_2$ , но фиксировать не  $\kappa$ , а  $\kappa_1 = \kappa - \kappa_2$  ( $dx_1 dx_2 = d\kappa_1 dx_2$ ), то функцию  $S$  в (Г.40) необходимо выразить через  $\kappa_1, \kappa_2, \Delta_1^2, \kappa_4, s$ , и выражение для  $Q, \mathcal{P}, R$  будет меняться. Пределы интегрирования по  $\kappa_1, \Delta_1^2, \kappa_4$  находятся из условий

$$\left. \begin{aligned} |\cos(\widehat{kp}_1)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 - p_3 = 0); \\ |\cos(\widehat{p}_1 p_3)| &\leq 1 && (\text{система } p_1 + p_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.49})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

### РАСПУТЫВАНИЕ КОМБИНАЦИИ $\exp[-i kx(t_2)] \exp[i kx(t_1)]$

1. Магнитное поле. Введем обозначения

$$i(kx(t_1) - kx(t_2)) = b; \quad -i kx(t_1) = a. \quad (\text{Д.1})$$

В этих обозначениях

$$\exp[-i kx(t_2)] \exp[i kx(t_1)] = \exp(b + a) \exp(-a). \quad (\text{Д.2})$$

В коммутатор  $[a, b]$  входят только пространственные компоненты  $x_\mu(t)$ :

$$[a, b] = -[kr, kp], \quad (\text{Д.3})$$

где  $\rho = r(t_2) - r(t_1)$ . Разлагая  $\rho$  по степеням  $\tau$  до нужного порядка [ср. (3.11), (10.10)], получаем

$$\rho = v\tau + \dot{v}\tau^2/2 + \ddot{v}\tau^3/6 + \dots \quad (\text{Д.4})$$

Воспользовавшись гейзенберговскими уравнениями движения с учетом связи  $v$  и  $P$  (5.28), а также выражением для коммутатора  $r$  и  $v$  (5.40), получаем

$$[a, b] = 2\hbar\omega b/3c. \quad (\text{Д.5})$$

При вычислении этого коммутатора отбрасывались члены порядка  $\hbar\omega_0/\varepsilon$  и  $1/\gamma^2$ , входящие в (Д.5) операторы  $\mathcal{H}$  и  $b$  с точностью до членов  $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon$  коммутируют между собой. Если учесть, что с принятой степенью точности коммутатор

$$[a, \mathcal{H}^{-1}] = [ikr, \mathcal{H}^{-1}] = \hbar kv / \mathcal{H}^2 = \hbar\omega / \mathcal{H}^2, \quad (\text{Д.6})$$

то для коммутатора  $\overbrace{[a[a \dots [a, b] \dots ]]}^n$  имеем

$$[a, [a \dots [a, b] \dots]] = (n+1)! (\hbar\omega / \mathcal{H})^n b. \quad (\text{Д.7})$$

Этот случай был рассмотрен нами в приложении В [см. В.14), (В.20), (В.22)], где  $c_n = (n+1)!$ ,  $\lambda = \hbar\omega / \mathcal{H}$ . Воспользовавшись формулой (В.22), получаем

$$\begin{aligned} \exp[-i kx(t_2)] \exp[i kx(t_1)] &= \exp(b+a) \exp(-a) = \\ &= \exp[b/(1-\lambda)] = \exp\{i \mathcal{H} [kx(t_1) - kx(t_2)] / (\mathcal{H} - \hbar\omega)\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

**2. Кулоновское поле.** В этом случае коммутатор  $[a, b]$  можно вычислить, если использовать явный вид  $kx$ , который можно получить, решая гейзенберговские уравнения движения, для чего достаточно заменить величины в классическом выражении для  $kx(t)$  (3.78) на операторы

$$kx = (kv_1 + kv_f) t / 2 + (kv_f - kv_1) g(t) / 2 + kx_c, \quad (\text{Д.9})$$

где

$$g(t) = \left[ \int_0^\infty \partial V(\sqrt{\rho^2 + v^2 y^2}) / \partial \rho^2 \right]^{-1} \left( t \int_0^t (\partial V / \partial \rho^2) dy - V(r) / 2 \right). \quad (\text{Д.10})$$

Операторы  $(kv_1)$  и  $(kv_f)$  коммутируют друг с другом. Функция  $g(t)$  с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$  ( $v^2 = 1 - 0(1/\gamma^2)$ ) является  $c$ -числом и зависит только от вида поля. По этой причине вычисление коммутатора  $[a, b]$  сводится к вычислению  $[kx_c, kv_1]$ ,  $[kx_c, kv_f]$ . Используя соотношения

$$v = P / \sqrt{P^2 + m^2}, \quad [x_{ci}, P_k] = i\hbar \delta_{ik}, \quad (\text{Д.11})$$

получаем с точностью до членов  $\sim 1/\gamma^2$  и  $\hbar\omega_0/\varepsilon$

$$[kx_c, kv_{1, f}] = 2i\hbar\omega kv_{1, f} / \mathcal{H}, \quad (\text{Д.12})$$

так что с указанной точностью приходим к формуле (Д.5). Последующее рассмотрение и результат совпадают со случаем магнитного поля.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

### МЕТОД ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Рассмотрим упругое рассеяние частиц высокой энергии на статическом потенциале  $V(r)$ , локализованном в некоторой области, характерные размеры которой  $\sim d$ . Рассмотрим рассеяние только на малые углы, т. е. будем считать, что характерные расстояния  $r_c$ , такие, что  $V(r_c) \ll \varepsilon$ . Предполагается также, что потенциал убывает с расстоянием не медленнее, чем кулоновский.

Уравнение Клейна—Гордона во внешнем поле имеет вид (5.6). В случае стационарных состояний для координатной части волновой функции имеем

$$[(\varepsilon - V(r))^2 + \nabla^2 - m^2] \psi(r) = 0. \quad (\text{E.1})$$

В случае рассеяния на малые углы, учитывая, что  $V(r) \ll \varepsilon$ , и оставляя только линейный по потенциалу член, приходим к уравнению Шредингера:

$$(\nabla^2 + p^2 - 2\varepsilon V) \psi = 0, \quad (\text{E.2})$$

которое будем решать с асимптотическим условием:

$$\psi(r) \approx \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r}] + f(\theta) \exp[ipr]/r \quad (r \rightarrow \infty), \quad (\text{E.3})$$

причем сечение рассеяния выражается через  $f(\theta)$  следующим образом:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (\text{E.4})$$

Уравнение (E.2) с условием (E.3) можно представить в виде интегрального уравнения:

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r}] - (\varepsilon/2\pi) \int \{ \exp[i\mathbf{p}'\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{r}]/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (\text{E.5})$$

Учитывая, что при  $r \rightarrow \infty$   $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}'\mathbf{r}/r$ , получаем

$$\psi(\mathbf{r}) \approx \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r}] - (\varepsilon/2\pi r) \exp[ipr] \int \exp[-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'] V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (\text{E.6})$$

так что

$$f(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = (-\varepsilon/2\pi) \int \exp[-i\mathbf{p}'\mathbf{r}] V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (\text{E.7})$$

где  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ . Представим волновую функцию в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r}] \phi(\mathbf{r}). \quad (\text{E.8})$$

Тогда, подставляя (E.8) в (E.5), получаем

$$\phi(\mathbf{r}) = 1 - (\varepsilon/2\pi) \int \{ \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{r}' - \mathbf{p}'\mathbf{r})/r'] \} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (\text{E.9})$$

Для нахождения амплитуды рассеяния нам достаточно знать  $\phi(\mathbf{r})$  в области, где потенциал отличен от нуля. В этой области основной вклад в (E.9) дают такие  $\mathbf{r}'$  (в случае малых углов рассеяния), что  $\mathbf{p}\mathbf{r}' \gg 1$ . Принимая во внимание, что функции  $V$  и  $\phi$  меняются по сравнению с быстро осциллирующей экспонентой медленно, видим, что основной вклад определяется стационарной по углам  $\theta'$  ( $\theta'$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}'$ ) фазой  $\cos \theta' = \pm 1$ , причем вклад  $\cos \theta' = -1$  мал, поскольку при интегрировании по  $\mathbf{r}'$  подынтегральное выражение быстро осциллирует. Окончательно имеем

$$\phi(\mathbf{r}) \approx 1 - i\varepsilon \int_0^\infty V(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{p}}r') \phi(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{p}}r') dr'/p, \quad (\text{E.10})$$

где  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  — единичный вектор вдоль направления падающей волны. Выбирая ось  $z$  вдоль этого направления, перепишем (E.10) в виде

$$\phi(\rho, z) = 1 - i \int_{-\infty}^z V(\rho, z') \phi(\rho, z') dz'/v. \quad (\text{E.11})$$

Решение уравнения (E.11) имеет вид

$$\Phi(\rho, z) = \exp \left[ (-i/v) \int_{-\infty}^z V(\rho, z') dz' \right]. \quad (\text{E.12})$$

Подставляя (E.12) в (E.8), получаем

$$\Psi(\rho, z) = \exp \left[ i p r - (i/v) \int_{-\infty}^z V(\rho, z') dz' \right], \quad (\text{E.13})$$

а для амплитуды рассеяния имеем

$$f(\rho', \rho) = (-e/2\pi) \int \exp \{ i(\rho - \rho')(\rho \mp \hat{p}z) \} V(\rho, z) \times \\ \times \exp \left[ (-i/v) \int_{-\infty}^z V(\rho, z') dz' \right] dz d^2 \rho. \quad (\text{E.14})$$

В экспоненте подынтегрального выражения (E.14) можно пренебречь членом  $(\rho - \rho') \hat{p}z$ , поскольку он квадратичен по углу рассеяния. Проведя после этого тривиальное интегрирование по  $z$ , получаем

$$f(\rho', \rho) = (\rho/2\pi i) \int \exp [iq\rho] [\exp [i\chi(\rho)] - 1] d^2 \rho, \quad (\text{E.15})$$

где

$$\mathbf{q} = \rho - \rho', \quad \chi(\rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} V(\rho, z) dz/v. \quad (\text{E.16})$$

В потенциале, обладающем аксиальной симметрией по отношению к оси,  $\hat{p}\chi(\rho) = \chi(\rho)$ . Учитывая, что  $\mathbf{q}\rho = q\rho \cos \varphi$ , и то, что

$$\int_0^{2\pi} \exp(iq\rho \cos \varphi) d\varphi = 2\pi J_0(q\rho), \quad (\text{E.17})$$

где  $J_0$  — функция Бесселя, находим

$$f(q) = -ip \int_0^{\infty} J_0(\rho q) (\exp [i\chi(\rho)] - 1) \rho d\rho. \quad (\text{E.18})$$

В случае кулоновского потенциала

$$V(r) = Ze^2/4\pi r. \quad (\text{E.19})$$

В этом случае фаза  $\chi$  логарифмически расходится, чтобы избавиться от этой трудности, введем параметр обрезания  $a$ , такой, что  $V(r)$  определяется формулой (E.19) при  $r < a$  и равен нулю при  $r > a$ , тогда

$$\chi(\rho) = 0 (\rho > a); \quad \chi(\rho) = -2\xi \ln [(a \mp \sqrt{a^2 - \rho^2})/\rho] (\rho < a); \quad (\text{E.20})$$

здесь

$$\xi = Z\alpha/v, \quad \alpha = e^2/4\pi = 1/137.$$

Считая  $a$  много больше всех характерных размеров задачи и разлагая  $\chi(\rho)$  по степеням  $\rho/a$ , получаем

$$\chi(\rho) \approx 2\xi \ln(\rho/2a). \quad (E.21)$$

Подставляя фазу  $\chi$  в (E.18), находим для амплитуды рассеяния

$$f(q) = (-2\xi p/q^2) \exp\{-2i[\xi \ln(aq) - \arg \Gamma(1 + i\xi)]\}, \quad (E.22)$$

а сечение рассеяния совпадает с формулой Резерфорда (5.136).

Что касается рассеяния спинорных частиц, то, поскольку вклад в сечение дают большие орбитальные моменты (в случае малых углов рассеяния)  $pr \sim l \gg 1$ , сечение не зависит от спина и амплитуда рассеяния определяется формулой (E.15).



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Altarelli C., Buchella F. Nuovo cimento, 1964, 34, 1337.
2. Арцимович Л. А., Померанчук И. Я. J. Phys. USSR, 1945, 9, 267; «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1946, 16, 379.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
4. Бадалян А. М., Смородинский Я. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 40, 1231.
5. Байер В. Н., Хейфец С. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 40, 613.
6. Байер В. Н., Хейфец С. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 40, 715.
7. Bauer V. N., Galitsky V. M. Phys. Lett., 1964, 13, 355.
8. Байер В. Н., Галицкий В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 49, 661.
9. Байер В. Н., Галицкий В. М. «Письма ЖЭТФ», 1965, 2, 259.
10. Байер В. Н., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 48, 946.
11. Байер В. Н., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 48, 1708.
12. Байер В. Н., Хозе В. А. «Ядерная физика», 1965, 2, 287.
13. Байер В. Н., Фадин В. С., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 51, 1135.
14. Байер В. Н., Фадин В. С., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, 1611.
15. Байер В. Н., Фадин В. С., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, 156.
16. Bauer V. N., Katkov V. M. Phys. Lett., 1967, 25A, 492.
17. Байер В. Н., Катков В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 53, 1478.
18. Байер В. Н., Катков В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 52, 1422.
19. Bauer V. N., Katkov V. M. Phys. Lett., 1967, 24A, 327.
20. Байер В. Н., Фадин В. С., Хозе В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 53, 2194.
21. Байер В. Н., Катков В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1968, 55, 1542.
22. Байер В. Н. и др. «Ядерная физика», 1968, 8, 1174.
23. Байер В. Н., Катков В. М. «Докл. АН СССР», 1969, 188, 56.
24. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1970, 58, 1695.
25. Bauer V. N., Katkov V. M., Strachovenko V. M. Phys. Lett., 1970, 31A, 198.
26. Байер В. Н. «Успехи физ. наук», 1971, 105, 441.
27. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. «Докл. АН СССР», 1971, 197, 66.

28. Байер В. Н., Фадин В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 61, 476.
29. Bargman V., Michel L., Telegdi V. Phys. Rev. Lett., 1959, 2, 435.
30. Vanerjee H. Phys. Rev., 1958, 111, 532.
31. Берестецкий Б. В., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. I. М., «Наука», 1968.
32. Bethe H., Heitler M. Proc. Roy. Soc., 1934, A146, 83.
33. Bethe H., Maximon L. Phys. Rev., 1954, 93, 768.
34. Bloch F., Nordsiek A. Phys. Rev., 1937, 52, 54.
35. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехтеориздат, 1957.
36. Bjorken J., Drell S. Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill Book Company, 1965.
37. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
38. Weizsacker C. Z. Phys., 1934, 88, 612.
39. Williams E. Phys. Rev., 1934, 45, 729.
40. Volkov D. Z. Phys., 1935, 94, 250.
41. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
42. Высоцкий В. Л., Креснин А. А., Розенцвейг Л. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1957, 32, 1078.
43. Calitsky V. M., Gurevich I. I. Nuovo cimento, 1964, 32, 396.
44. Галицкий В. М., Кельнер С. Р. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 52, 1427
45. Галицкий В. М., Кельнер С. Р. «Изв. АН СССР, Сер. физ.», 1967, 31, 1565.
46. Галицкий В. М., Якимец В. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, 1966.
47. Гинзбург В. Л. «Успехи физ. наук», 1969, 98, 569.
48. Glauber R. Phys. Rev., 1961, 84, 395.
49. Gluckstern R., Hull M., Breit G. Phys. Rev., 1953, 90, 1026, 1030.
50. Гольдмай И. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1960, 38, 1866.
51. Gorge V., Locher M., Rollnik H. Nuovo cimento, 1963, 27, 929.
52. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
53. Грибов В. Н. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 41, 1839.
54. Джексон Д. Классическая электродинамика. Перев. с англ. М., «Мир», 1965.
55. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc. (London), 1938, A167, 148.
56. Зельдович Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 41, 912.
57. Зоммерфельд А. Электродинамика. Перев. с нем. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
58. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. «Докл. АН СССР», 1948, 59, 1551.
59. Yennie D., Frautschi S., Suura N. Ann. Phys., 1961, 13, 379.
60. Кельнер С. Р. «Ядерная физика», 1967, 5, 1092.
61. Клепиков Н. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1954, 26, 19.
62. Landau L. D., Lifshitz E. M. Physikalische Zeitschrift der Soviet Union 1934, 6, 244.
63. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. «Докл. АН СССР», 1953, 92, 535.
64. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. «Докл. АН СССР», 1953, 92, 735.

65. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1967. ■
66. McVoy K. Phys. Rev., 1957, 106, 828.
67. McVoy K. Phys. Rev., 1958, 111, 1333.
68. Мигдал А. Б. «Докл. АН СССР», 1954, 96, 49.
69. Мигдал А. Б. «Докл. АН СССР», 1955, 105, 77.
70. Migdal A. B. Phys. Rev., 1956, 103, 1811.
71. Мигдал А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1957, 32, 633.
72. Minguzzi A. Nuovo cimento, 1956, 4, 476.
73. Minguzzi A. Nuovo cimento, 1957, 6, 501.
74. Minguzzi A. Nuovo cimento, 1958, 9, 145.
75. Moliere G. Z. Naturforsch., 1947, 2a, 133.
76. Motz J., Olsen H., Koch H. Rev. Mod. Phys., 1969, 41, 581.
77. Нарожный Н. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1968, 55, 714.
78. Никишов А. Н., Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, 776.
79. Никишов А. Н., Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, 1768.
80. Никишов А. Н., Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 56, 2035.
81. Olsen H. Phys. Rev., 1955, 99, 1335.
82. Olsen H., Maximon L., Wergeland H. Phys. Rev., 1957, 106, 27.
83. Olsen H., Maximon L. Phys. Rev., 1959, 114, 887.
84. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М., Физматгиз, 1963.
85. Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1939, 9, 915.
86. Pomeranchuk I. Ya., Shmushkevich I. M. Nucl. Phys., 1961, 23, 452.
87. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Физматгиз, 1961.
88. Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 2176.
89. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
90. Соколов А. А., Клепиков Н. Г., Тернов И. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1952, 23, 632.
91. Соколов А. А., Тернов И. М. «Докл. АН СССР», 1963, 153, 1052.
92. Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М., «Наука» 1966.
93. Scott W. Rev. Mod. Phys., 1963, 35, 231.
94. Stutton L., de Groot S. Nuovo cimento, 1970, 65, 245.
95. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., Гостехиздат, 1957.
96. Тер-Микаэлян М. Л. «Докл. АН СССР», 1954, 94, 1033.
97. Wheeler J., Feynman R. Rev. Mod. Phys., 1945, 17, 157.
98. Furry W. Phys. Rev., 1937, 51, 125.
99. Furry W. Phys. Rev., 1951, 81, 115.
100. Fradkin D., Good R. Rev. Mod. Phys., 1961, 33, 343.
101. Frenkel Ja. Z. Phys., 1926, 37, 243.
102. Fronsall C., Uberall H. Phys. Rev., 1953, 111, 580.
103. Fulton T., Rohrlich R. Ann. Phys., 1960, 9, 499.
104. Schwinger J. Phys. Rev., 1949, 75, 1912.
105. Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci., 1954, 40, 132.
106. Schott G. A. Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912.
107. Erikson K. Nuovo cimento, 1961, 19, 1010.
108. Jauch J., Rohrlich F. Helv. Phys. Acta, 1954, 27, 613.

109. Байер В. Н., Фадин В. С. «Письма в ЖЭТФ», 1971, 13, 293.
110. Bayer V. N., Fadin V. S. Nuovo cimento Lett., 1971, 1, 481.
111. Bayer V. N., Fadin V. S. Phys. Lett., 1971, 35B, 156.
112. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. «Ядерная физика», 1971, 14, 1020.
113. Байер В. Н., Фадин В. С. «Ядерная физика», 1972, 15, 95.
114. Байер В. Н., Катков В. М. «Докл. АН СССР», 1972, 207, 68.
115. Adler S. L. App. phys., 1971, 67, 599.
116. Папьян В. О., Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физики», 1971, 61, 2231.
117. Кураев Э. А., Липатов А. Н. «Письма в ЖЭТФ», 1972, 15, 229.
118. Rasah G. Nuovo cimento, 1937, 14, 93.
119. Brodsky S., Kinoshita T., Terazawa H. Phys. Rev., 1971, D4, 1532.
120. Arteaga-Romero H., Jaccarini A., Terazawa H. Phys. Rev., 1971, D3, 1569.
121. Erber T. Rev. mod. phys., 1966, 38, 626.
122. Баталии И. А., Шабад А. Е. «Ж. эксперим. и теор. физики», 1971, 60, 894.
123. Adler S. L. e. a. Phys. Rev. Lett., 1970, 25, 1061.
124. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. «Ж. эксперим. и теор. физики», 1972, 63, № 12.
125. Bardeen W., Tung W. Phys. Rev., 1968, 173, 1923.
126. Зима В. Г. «Ядерная физика», 1972, 16, 1051.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие . . . . .	3
Г л а в а I. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ . . . . .	5
§ 1. Излучение заряженной частицы . . . . .	5
§ 2. Излучение ультрарелятивистских частиц . . . . .	21
§ 3. Спектральное распределение излучения ультрарелятивистских частиц . . . . .	26
§ 4. Реакция излучения . . . . .	54
Г л а в а II. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА . . . . .	62
§ 5. Основные положения квантовой электродинамики . . . . .	62
§ 6. Излучение мягких фотонов . . . . .	99
§ 7. Метод инвариантного интегрирования . . . . .	113
§ 8. Метод эквивалентных фотонов . . . . .	128
Г л а в а III. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ . . . . .	137
§ 9. Квазиклассический метод для описания излучения частиц большой энергии . . . . .	137
§ 10. Магнитотормозное излучение . . . . .	146
§ 11. Рождение пары фотоном во внешнем поле . . . . .	168
§ 12. Масса и аномальный магнитный момент электрона во внешнем поле . . . . .	178
§ 13. Поляризация среды внешним электромагнитным полем . . . . .	189
§ 14. Радиационная поляризация . . . . .	196
§ 15. Реакция излучения в квазиклассической теории . . . . .	207
Г л а в а IV. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ . . . . .	211
§ 16. Излучение фотона в микроскопическом внешнем поле . . . . .	211
§ 17. Тормозное излучение частицы в кулоновском поле . . . . .	217
§ 18. Тормозное излучение электронов в экранированном кулоновском поле . . . . .	231
§ 19. Рождение пар частиц фотоном в кулоновском поле . . . . .	240
§ 20. Влияние среды на процессы тормозного излучения и рождения пар . . . . .	244

Глава V. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ	264
§ 21. Тормозное излучение при мюон-электронном соударении	264
§ 22. Излучение фотона в аннигиляционных процессах . . . . .	283
§ 23. Тормозное излучение фотона при электрон-электронных и электрон-позитронных соударениях . . . . .	289
§ 24. Двойное тормозное излучение при электронных столкнове- ниях . . . . .	302
§ 25. Рождение пар частиц при взаимодействии фотона с заряжен- ной частицей . . . . .	312
§ 26. Рождение пар при столкновении двух заряженных частиц	320
§ 27. Поляризационные эффекты в процессах тормозного излу- чения и фоторождения пар частиц . . . . .	345
<i>Приложение А. Волновые уравнения для свободных частиц . . .</i>	<i>349</i>
<i>Приложение Б. Интегрирование трехмерных тензорных выражений</i>	<i>351</i>
<i>Приложение В. Некоторые формулы операторного исчисления . .</i>	<i>352</i>
<i>Приложение Г. Фазовые объемы в инвариантных переменных . . .</i>	<i>354</i>
<i>Приложение Д. Распутывание комбинаций <math>\exp[-ikx(t_2)]_2 \exp[ikx(t_1)]</math></i>	<i>364</i>
<i>Приложение Е. Метод прицельного параметра . . . . .</i>	<i>365</i>
Литература . . . . .	369

Список замеченных опечаток

Стр.	Строка, формула, рисунок	Напечатано	Должно быть
68	Формула (5.41)	$x^2 = \dots$	$\chi^2 = \dots$
68	То же	$\dots = (1/H_0^2 m^2) \dots$	$\dots = (1/H_0^2 m^2) \dots$
68	23 св.	$\dots$ углы $\nu \gg \dots$	$\dots$ углы $\vartheta \gg \dots$
232	10 св.	$\dots \rightarrow d\beta q_1, dq_{\perp} \dots$	$\dots \rightarrow d\beta q_1 dq_{\perp} \dots$
253	11 св.	$\dots B = p k \dots$	$\dots B = p' k \dots$
291	Формула (23.6)	$\dots - 2 P_{\Delta} \Delta_1^2 + \dots$	$\dots - 2 \mathcal{P}_{\Delta} \Delta_1^2 + \dots$
3	сн.	$\dots \mathcal{R}_{\Delta} = \dots$	$\dots \mathcal{P}_{\Delta} = \dots$
299	8 св.	$\dots - \kappa_1/\nu / (\Delta_{1\text{мин}}^2)^{3/2}$	$\dots - \kappa_1/\nu (\Delta_{1\text{мин}}^2)^{3/2}$
320	Рис. 58	Рисунок необходимо повернуть на $180^\circ$	
338	5 сн.	$\dots - 44/5 \xi^3 / 22\xi^2$	$\dots - 44/5 \xi^3 + 22/\xi^2 \dots$
346	2 сн.	$\dots ] = u \zeta_2 \omega \dots$	$\dots ] - u \zeta_2 \omega \dots$