И. Я. БАКЕЛЬМАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

Илья Яковлевич Бакельман

Геометрические методы решения эллиптических уравнений

М., 1965 г., 340 стр. с илл.

Редактор *А. Л. Вернер*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 6/III 1965 г. Подписано к печати 3/VII 1965 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 10,83. Условн. печ. л. 17,43. Уч.-изд. л. 15,81. Тираж 7500 экз.
Т-06600. Цена книги 94 коп. Заказ № 1297.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР
по печати, Измайловский проспект, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 7

Глава I

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия и вспомогательные сведения 14

1. Эллиптические операторы и уравнения (14). 2. Пространства C^m, $C^{m,\alpha}$ (17). 3. Сведения из теории линейных эллиптических уравнений (19). 4. Свойства решений эллиптических уравнений, основанные на принципе максимума. Теорема единственности для задачи Дирихле (21). 5. Метод Ньютона для решения функциональных уравнений (27). 6. Иллюстрация метода Ньютона (41).

§ 2. Задача Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения 47

1. Формулировка основной теоремы (47). 2. Леммы о собственные числах квадратичной формы $\Phi_r\xi^2 + \Phi_s\xi\eta + \Phi_t\eta^2$ (49). 3. Лемма о локальной разрешимости по параметру задачи Дирихле (53). 4. Завершение доказательства основной теоремы (55). 5. Основная теорема в случае общего краевого условия (56).

§ 3. Априорные оценки решений линейных эллиптических уравнений 58

1. Вспомогательные утверждения (58). 2. Гельдерова непрерывность некоторых отображений (63). 3. Основные теоремы об оценках решений линейных уравнений (76).

§ 4. Априорные оценки вторых и старших производных нелинейных эллиптических уравнений в классах гельдеровых функций 78

1. Априорные оценки вторых производных (79). 2. Априорные оценки третьих производных (85). 3. Априорные оценки старших производных (общий случай) (90).

§ 5. Усиленные теоремы существования 96

1. Общие эллиптические уравнения (96). 2. Квазилинейные уравнения (100).

Глава II

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛАБЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

§ 6. Априорная оценка модуля решения 105

1. Первый прием $(D_z \geqslant \text{const} > 0)$ (106). 2. Второй прием $(D_z \geqslant 0)$ (108).

§ 7. Априорные оценки первых производных квазилинейного уравнения класса L 110

1. Геометрические характеристики граничного условия задачи Дирихле (110). 2. Геометрические свойства функций и дифференциальные неравенства (113). 3. Основные понятия. Уравнения класса L (115). 4. Априорные оценки первых производных на границе (116). 5. Априорные оценки первых производных внутри области (119).

§ 8. Теорема существования 123

1. Уравнения класса L в выпуклых областях (123). 2. Задача Дирихле в области, ограниченной невыпуклым контуром (125).

Глава III

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

§ 9. Геометрический метод оценки модуля решений квазилинейных уравнений 130

1. Некоторые геометрические факты (130). 2. Оценка модуля решений квазилинейных уравнений (134). 3. Обобщение результатов пункта 2 (142).

§ 10. Априорные оценки первых производных на границе области 144

1. План исследования (144). 2. Основные понятия (147). 3. Основная теорема об априорных оценках нормальной производной (148). 4. Обобщение основной теоремы (153).

§ 11. Априорные оценки первых производных внутри области 155

1. Предварительные замечания (155). 2. Априорная оценка $p^2 + q^2$ для решений уравнения вида $A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$ (156). 3. Формулировка результатов (160).

§ 12. Теорема существования, случай уравнения вида $A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$ 162

§ 13. Задача Дирихле для квазилинейного уравнения в невыпуклой области 165

1. Постановка задачи (165). 2. Основные построения (168). 3. Формулировка результатов (172).

§ 14. Построение минимальной поверхности с невыпуклой проекцией 173

§ 15. Построение поверхности с данной средней кривизной 177

1. Предварительные замечания (177). 2. Априорные оценки первых производных (случай строго выпуклой области) (180).

Глава IV

УРАВНЕНИЯ МОНЖА — АМПЕРА (ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ)

§ 16. Основные понятия и факты теории выпуклых поверхностей 187

1. Выпуклые функции и выпуклые поверхности (187). 2. Опорные плоскости. Классификация точек выпуклой поверхности (188). 3. Сходимость выпуклых функций и их первых производных (189). 4. Нормальное изображение выпуклой поверхности. Условная кривизна (189).

§ 17. Свойства выпуклых поверхностей, связанные с условной кривизной 193

1. Теоремы компактности (193). 2. Край выпуклой поверхности (196). 3. Условия равномерной сходимости выпуклых функций в замкнутой области (198).

§ 18. Простейшие уравнения Монжа — Ампера 205

1. Обобщенные и условные решения простейших уравнений Монжа — Ампера (205). 2. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Дирихле. Обобщенное удовлетворение краевому условию (209). 3. Решение задачи Дирихле для уравнения (18,2,6) (212). 4. О точном удовлетворении краевому условию в задаче Дирихле (219). 5. Задача Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ (221).

§ 19. Гладкость обобщенных решений. Теорема единственности. Проблема многих решений 226

1. Теоремы А. Д. Александрова о гладкости выпуклой поверхности с ограниченной удельной внешней кривизной (226). 2. Теорема единственности для обобщенных решений уравнений $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ (230). 3. Теоремы о неподвижных точках в конусах (236). 4. Проблема многих решений для простейших уравнений Монжа — Ампера (239).

§ 20. n-мерные аналоги уравнений Монжа — Ампера ($n > 2$). Сильно эллиптические уравнения Монжа — Ампера . . . 251

1. n-мерный аналог простейшего уравнения Монжа — Ампера (251). 2. Условные кривизны различных порядков (257). 3. n-мерные аналоги уравнений Монжа — Ампера (268). 4. Сильно эллиптические уравнения Монжа — Ампера (274).

Дополнение к главе IV. Вариационная задача, связанная с уравнением Монжа — Ампера 283

Глава V
РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОНЖА — АМПЕРА

§ 21. Регулярные решения задачи Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ 289

1. Постановка задачи (289). 2. Априорная оценка модуля $z_\mu(x, y)$ (291). 3. Априорная оценка для $|\operatorname{grad} z_\mu|$ в $\Omega + \Gamma$ (292). 4. Априорные оценки вторых производных решений z_μ задачи (21,1,5—6) на окружности Γ (297). 5. Оценки вторых производных решений z_μ в замкнутом круге $\Omega + \Gamma$ (302). 6. Теорема существования для задачи Дирихле в классе функций $C^{n+2,\lambda'}(\Omega+\Gamma)$ (305).

§ 22. Регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера 307

1. Априорные оценки решений в метрике C^2, зависящие от расстояния точки до границы области (307). 2. Регулярность обобщенных решений уравнения $rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q)$ со строго выпуклой функцией $R(p, q)$. (312). 3. Операторы, связанные с задачей Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ (320). 4. Свойства оператора $F_{R,\sigma}$. Теорема о существовании регулярных решений уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ (328). 5. Регулярность обобщенных решений уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ при условии, что $\varphi_z \geqslant 0$ (331). 6. Вопрос о существовании многих регулярных решений (333). 7. Регулярность обобщенных решений сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера (334).

ДОПОЛНЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Априорные оценки первых производных (случай звездной невыпуклой области) 335

Литература 339

Светлой памяти
моей матери посвящаю

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что многочисленные проблемы геометрии, вариационного исчисления и механики тесно связаны с краевыми задачами для эллиптических нелинейных уравнений. В этой книге подробно изучаются взаимосвязи между геометрией и эллиптическими краевыми задачами. Наибольшее внимание уделено первой краевой задаче (задаче Дирихле).

Остановимся теперь на методах и результатах, излагаемых в книге.

Глава I посвящена задаче Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0. \qquad (1)$$

Первые фундаментальные результаты в этой области получены в классических работах С. Н. Бернштейна [6] в 1910—1912 годах. С. Н. Бернштейн рассматривал вопрос о построении аналитических решений уравнения (1) в предположении, что функция $F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$ и граничные условия аналитичны по всем входящим в них аргументам. Основной результат С. Н. Бернштейна в общих чертах состоит в следующем: в задачу Дирихле для уравнения (1) вводится параметр $t \in [0,1]$. Тогда, если при $t = 0$ задача Дирихле имеет аналитическое решение, при $t = 1$ обращается в исходную задачу и, наконец, при всех $t \in [0,1]$ можно получить равномерные оценки в метрике C^2 для решений $z_t(x, y)$ всех вспомогательных задач Дирихле (предполагая лишь существование решения)*), то исходная задача имеет решение в классе аналитических функций.

Построения в классе аналитических функций, проведенные в работах Бернштейна, были весьма сложными. На

*) Такие оценки принято называть априорными.

протяжении нескольких десятилетий усилия математиков были направлены на обобщение результатов С. Н. Бернштейна в более простых классах функций. Это оказалось возможным осуществить в пространствах $C^{n,\alpha}$, состоящих из функций, у которых все производные порядка n удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1)$. Наибольшее внимание привлекла к себе теорема С. Н. Бернштейна об аналитичности решений эллиптического уравнения (1), если заранее известно, что эти решения принадлежат пространству C^3. (Этот результат С. Н. Бернштейна содержит в себе как частный случай решение известной проблемы Гильберта об аналитичности решения регулярных задач вариационного исчисления для двойных интегралов.) Решение вопросов, связанных с упрощением доказательства основных результатов С. Н. Бернштейна, упиралось, прежде всего, в изучение тонких свойств решений линейных эллиптических уравнений в пространствах $C^{n,\alpha}$. Особый интерес и значение здесь имели классические результаты Ю. Шаудера [15а,б], [12] [формулировку теорем Ю. Шаудера см. в п.3 § 1 гл. I). В 1953 г. Л. Ниренберг [13] предложил весьма простое доказательство теоремы о регулярности решений эллиптического уравнения, используя для этого интегральные оценки типа теорем вложения и некоторые свойства квазиконформных отображений. В основе построений Ниренберга лежат оценки специального типа для решений линейных эллиптических уравнений. Эти результаты Л. Ниренберга изложены в §§ 3 и 4 главы I.

В §§ 2 и 5 автором дано новое доказательство основного результата С. Н. Бернштейна о разрешимости задачи Дирихле в пространстве $C^{n,\alpha}$ ($n \geqslant 2$; $0 < \alpha < 1$), если известна априорная оценка по параметру решения $z_t(x, y)$ в метрике C^2. Это предложение доказано с помощью метода Ньютона (см. [9]) и результатов Ю. Шаудера и Л. Ниренберга по линейным эллиптическим уравнениям, о которых мы говорили выше. Для квазилинейных уравнений установлена разрешимость задачи Дирихле при меньших предположениях. Именно, достаточно иметь равномерную по параметру оценку решений в метрике пространства C^1.

Таким образом, вопрос о существовании решения задачи Дирихле сводится к получению соответствующих априорных оценок решений исследуемых классов уравнений. В главах

II и III такие оценки проводятся для квазилинейных уравнений, а в главе V для уравнений Монжа — Ампера.

При построении априорных оценок наряду с методами, восходящими к С. Н. Бернштейну, широко применяются наглядные геометрические методы. Большое внимание в книге уделено построению понятий различных кривизн поверхности *), которые строятся по коэффициентам уравнения и краевому условию. С помощью этих кривизн легко формулируются естественные условия наглядного характера, позволяющие получить нужные априорные оценки решения искомой задачи Дирихле. Условия, о которых идет речь, достаточны для разрешимости задачи Дирихле. Они часто близки или совпадают с необходимыми. Геометрические методы исследования эллиптических краевых задач основаны на системе понятий, методов и результатов геометрии «в целом», развитых в работах А. Д. Александрова и его учеников.

В главе II (§§ 6—8) излагаются результаты работ С. Н. Бернштейна по задаче Дирихле для квазилинейных уравнений в строго выпуклых областях [6]. В этих работах, исходя из потребностей задач вариационного исчисления, выделен широкий класс квазилинейных уравнений, названный С. Н. Бернштейном классом L. Опуская подробное определение этого класса уравнений, отметим, что всякое квазилинейное уравнение класса L удовлетворяет условию: для всех (x, y) из выпуклой области Ω и $|z| \leqslant M$; $p^2+q^2 \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{|D|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2} \leqslant R_M, \tag{2}$$

где постоянная R_M зависит лишь от числа M. Это позволяет смотреть на уравнения класса L, как на уравнения с согласованным порядком роста коэффициентов уравнения по p, q при $p^2+q^2 \to +\infty$. Для таких уравнений при условии $D_z \geqslant 0$ задача Дирихле оказывается разрешимой в области любых размеров, если имеет место равномерная по параметру априорная оценка для модуля решения. Существование априорной оценки модуля гарантируется неравенством $D_z \geqslant \text{const} > 0$.

Если рассматривать уравнения, не принадлежащие классу L, т. е. уравнения, для которых нарушено условие (2), то, как

*) Под поверхностью мы понимаем график решения соответствующей эллиптической краевой задачи.

правило, задача Дирихле будет иметь решение в области, размеры и форма которой зависят от свойств коэффициентов уравнения и свойств граничного условия. Это обстоятельство позволяет трактовать уравнения класса L как уравнения «слабо нелинейные по первым производным».

В главе III изучается задача Дирихле в строго выпуклой области для уравнений, свободных от ограничения (2). Для получения априорных оценок решений таких уравнений методы С. Н. Бернштейна оказываются неприменимыми. Это потребовало создания нового метода получения априорных оценок решений в метрике C^1, основанного на соображениях геометрии «в целом». Содержание §§ 9—12 является развитием и подробным изложением работ автора [3з — и]. В §§ 13—15 рассматривается задача Дирихле для квазилинейных уравнений в невыпуклых областях. Там же подробно изучаются вопросы о построении минимальной поверхности с невыпуклой проекцией и поверхности с заданной средней кривизной и данным краем. Результаты автора, изложенные в §§ 13—15, публикуются впервые.

Остановимся несколько подробнее на задаче о построении поверхности с заданной средней кривизной, которая на языке дифференциальных уравнений сводится к задаче Дирихле

$$\begin{gathered}(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=\\ =H(x,\ y)(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}, \qquad (3)\\ z|_{\text{гр}\Omega}=h(s);\end{gathered}$$

здесь Ω — некоторая область на плоскости x, y, $H(x,\ y)$ — заданная в Ω непрерывная функция, а $h(s)$ — непрерывная функция длины дуги контура Ω. Эта задача в классе C^2 имеет единственное решение, что легко вытекает из принципа максимума (см. п. 4 § 1). Рассмотрим частный случай, когда функция $H(x,\ y)\equiv H_0=\text{const}>0$, область Ω — круг $x^2+y^2\leqslant R^2$ и ищется решение уравнения

$$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=H_0(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}, \quad (4)$$

обращающееся в нуль на границе круга Ω. Решением этой задачи будет сферический сегмент

$$z(x,\ y)=\sqrt{\frac{1}{H_0^2}-R^2}-\sqrt{\frac{1}{H_0^2}-x^2-y^2}\,.$$

Очевидно, что интересующая нас задача Дирихле будет иметь решение лишь при условии, что радиус круга Ω не превосходит постоянной $1/H_0$. Этот простой пример показывает, что условие разрешимости задачи Дирихле в наперед заданной области Ω зависит от свойств коэффициентов уравнения (4). Такое явление, как мы увидим ниже, типично для большинства геометрических задач. Аналитически это объясняется тем, что рост «коэффициентов» при вторых производных в уравнении (4) по z_x, z_y при $z_x^2+z_y^2 \to \infty$ слабее, чем рост по z_x, z_y функции $(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}$. Про такие уравнения естественно сказать, что они «сильно нелинейны по первым производным».

Геометрические построения, развитые в §§ 9—11, позволяют получить для общих квазилинейных уравнений (в том числе и для уравнения (3)) достаточные условия существования решения задачи Дирихле. Эти условия близки к необходимым. Они геометрически означают, что интегральная кривизна решения $z(x, y)$ не должна быть слишком большой. Неравенство $R < \frac{1}{H_0}$ в приведенном выше примере как раз и есть частный случай такого рода ограничения интегральной кривизны решения. Отметим, что интегральная кривизна и соотношение, с ней связанное, строятся только по коэффициентам квазилинейного уравнения и краевому условию и, следовательно, допускают эффективную проверку.

В главе IV излагается теория обобщенных решений уравнения Монжа — Ампера, построенная в последние годы в работах А. Д. Александрова [1б, в, г, д], И. Я. Бакельмана [3а, б, д, е, ж] и А. В. Погорелова [14б, в]. В простейших случаях решение краевых задач для уравнения Монжа — Ампера эллиптического типа с точки зрения геометрии есть построение выпуклой поверхности с данной интегральной гауссовой кривизной или с данной линейной комбинацией интегральной гауссовой и средней кривизн. Это позволило распространить понятие решения уравнения Монжа — Ампера на любые выпуклые поверхности с помощью условных интегральных кривизн и установить в классе обобщенных решений теоремы существования, единственности или наличия многих решений для задачи Дирихле. При этом в наиболее важных случаях получены результаты окончательного характера, в которых достаточные условия смыкаются с необходимыми. Следует отметить, что аналитическими методами эти результаты вряд ли могут быть получены.

Основные результаты по теории обобщенных решений уравнения Монжа — Ампера изложены в обзорных докладах А. Д. Александрова, А. В. Погорелова [2], И. Я. Бакельмана [3к] и Н. В. Ефимова [8] на IV Всесоюзном математическом съезде в 1961 г. и в монографии А. В. Погорелова [14в].

В настоящей книге систематически излагаются как результаты, вошедшие в эти обзоры, так и новые результаты, полученные в 1962—1963 гг. и частично опубликованные в [4]. Эти новые результаты позволили доказать существование решения задачи Дирихле, которое удовлетворяет краевому условию в классическом смысле, для уравнений Монжа — Ампера без дополнительных ограничений на порядки роста коэффициентов уравнения по первым производным.

В дополнении к главе IV доказывается, что задача Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x,\ y)$$

может быть рассмотрена как некоторая вариационная задача. Тем самым дается положительный ответ на вопрос, поставленный в книге Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики», т. II, стр. 264.

В главе V исследуются разрешимость задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \tag{5}$$

в классе регулярных функций и регулярность обобщенных решений уравнения (5).

В § 21 излагаются новые результаты о разрешимости в классе функций $C^{n,\alpha'}$ ($n \geqslant 4$, $0 < \alpha' < 1$) в замкнутой строго выпуклой области задачи Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$, если $\varphi > 0$, $\varphi_z \geqslant 0$, $\varphi \in C^{n-2,\alpha}$ ($\alpha' < \alpha$), а граничные значения принадлежат $C^{n,\alpha}$. Эти результаты носят, в известном смысле, окончательный характер. Они дают смыкающиеся необходимые и достаточные условия разрешимости первой краевой задачи в пространстве функций $C^{n,\alpha'}$, рассматриваемых в строго выпуклой замкнутой области Ω.

В § 22 исследуется регулярность обобщенных решений, построенных в предыдущей главе. Новым здесь является метод исследования, основанный на сочетании результатов § 21 и топологических методов функционального анализа. Указанный метод не опирается на теорему единственности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi$.

Результаты главы V представляют собой усиления и обобщения результатов А. В. Погорелова и И. Я. Бакельмана, которые изложены в [14б, в], [3в, г].

Ниже, как правило, разбирается случай уравнений для функций двух независимых переменных. Многие понятия и результаты в дословных или почти дословных формулировках вместе с доказательствами обобщаются на случай уравнений с функциями от n независимых переменных. Это прежде всего относится ко всей главе IV и результатам глав II и III (§§ 6, 7, 9, 10), которые опираются на сугубо геометрические построения.

Автор приносит глубокую благодарность профессору Н. В. Ефимову и доценту А. Л. Вернеру за внимание и ценные советы, которые оказали автору большую помощь при работе над книгой.

ГЛАВА I

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия и вспомогательные сведения

1. Эллиптические операторы и уравнения. Пусть Ω—некоторая область на плоскости x, y, ограниченная простой замкнутой кривой Γ. В области Ω рассмотрим совокупность $C^2(\Omega)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций $z(x, y)$.

Положим *)

$$p = z_x, \quad q = z_y, \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}. \qquad (1,1,1)$$

Пусть $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция всех аргументов в области $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z, p, q, r, s, t < +\infty$. Тогда на $C^2(\Omega)$ определен оператор

$$\Phi(z) = F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y). \qquad (1,1,2)$$

Говорят, что оператор $\Phi(z)$ эллиптичен на функции $z_0 \in C^2(\Omega)$, если квадратичная форма

$$T(\Phi, z_0) = F_r^0\xi^2 + F_s^0\xi\eta + F_t^0\eta^2 \qquad (1,1,3)$$

является определенной во всех точках области Ω.

Функции F_r^0, F_s^0, F_t^0 есть результат подстановки в F_r, F_s, F_t вместо r, s, t, p, q, z функции $z_0(x, y)$ и ее производных $z_{0,x}$, $z_{0,y}$, $z_{0,xx}$, $z_{0,xy}$, $z_{0,yy}$. Если во всех точках Ω форма (1,1,3) положительно (отрицательно) определенная, то говорят, что оператор $\Phi(z)$ положительно (отрицательно) эллиптичен на $z_0(x, y)$.

---

*) В тройной нумерации формул первый номер означает параграф, второй — пункт и третий — номер формулы в этом пункте.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Phi(z) \equiv F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0. \quad (1,1,4)$$

Уравнение (1,1,4) называется уравнением эллиптического типа, если на всех решениях этого уравнения оператор $\Phi(z)$ эллиптичен.

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Линейное уравнение второго порядка

$$\Phi(z) \equiv A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t + \\ + D(x, y)p + E(x, y)q + F(x, y)z + G(x, y) = 0. \quad (1,1,5)$$

Пусть $z_0 \in C^2(\Omega)$. Тогда

$$T(\Phi, z_0) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2. \quad (1,1,6)$$

Квадратичная форма (1,1,6) в случае линейного уравнения не зависит от функции $z_0 \in C^2(\Omega)$. Поэтому, если в Ω выполнено неравенство $AC - B^2 > 0$, то оператор $\Phi(z)$ эллиптичен на любой функции $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ и, следовательно, уравнение (1,1,5) всегда эллиптическое в этом случае. Более того, если A, B, C — непрерывные функции, то знак коэффициента A или C в одной из точек Ω однозначно определяет, будет ли уравнение положительно или отрицательно эллиптично.

б) Квазилинейные уравнения

$$\Phi(z) \equiv A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t + D(x, y, z, p, q) = 0. \quad (1,1,7)$$

Пусть $z \in C^2(\Omega)$. Тогда

$$T(\Phi, z) = A(x, y, z, p, q)\xi^2 + 2B(x, y, z, p, q)\xi\eta + \\ + C(x, y, z, p, q)\eta^2. \quad (1,1,8)$$

Условие

$$A(x, y, z, p, q)C(x, y, z, p, q) - \\ - B^2(x, y, z, p, q) > 0 \quad (1,1,9)$$

на всех функциях из $C^2(\Omega)$ обеспечивает эллиптичность оператора $\Phi(z)$ на $C^2(\Omega)$ и тем более эллиптичность уравнения (1,1,7).

Можно также предполагать, что при всех $(x, y) \in \Omega$ и любых конечных значениях переменных z, p, q справедливо неравенство

$$A(x, y, z, p, q)C(x, y, z, p, q)-\\ -B^2(x, y, z, p, q)>0. \quad (1,1,10)$$

Условия (1,1,9) и (1,1,10), очевидно, эквивалентны.

в) Уравнения типа Монжа — Ампера

$$\Phi(z)\equiv\varphi(x, y, z, p, q)(rt-s^2)+A(x, y, z, p, q)r+\\ +2B(x, y, z, p, q)s+C(x, y, z, p, q)t-\\ -D(x, y, z, p, q)=0. \quad (1,1,11)$$

К уравнению (1,1,11) приводят многие задачи геометрии. Наиболее важные и интересные из них — это задача о восстановлении поверхности с заданной внутренней метрикой (или, что то же, с данной первой квадратичной формой) и задача о восстановлении поверхности по ее гауссовой кривизне. Подробно вторая задача рассмотрена ниже в гл. IV и V.

Пусть $z\in C^2(\Omega)$ — решение уравнения (1,1,11). Тогда квадратичная форма $T(\Phi, z)$ для этого решения имеет вид

$$T(\Phi,z)=(\varphi t+A)\xi^2-2(\varphi s-B)\xi\eta+(\varphi r+C)\eta^2. \quad (1,1,12)$$

Эллиптичность уравнения (1,1,11) эквивалентна выполнению неравенства

$$(\varphi t+A)(\varphi r+C)-(\varphi s-B)^2>0$$

на всех решениях этого уравнения. Для любого решения уравнения (1,1,11) справедливо тождество

$$(\varphi t+A)(\varphi r+C)-(\varphi s-B)^2=\varphi[\varphi(rt-s^2)+\\ +Ar+2Bs+Ct]+AC-B^2=\varphi D+AC-B^2. \quad (1,1,13)$$

Отсюда вытекает, что условием эллиптичности уравнения (1,1,11) является неравенство

$$\varphi D+AC-B^2>0, \quad (1,1,14)$$

которое должно выполняться для всех $(x, y)\in\Omega$ и любых конечных z, p, q.

Остановимся подробнее на так называемом простейшем уравнении Монжа — Ампера

$$rt-s^2=D(x, y, z, p, q). \quad (1,1,15)$$

Из (1,1,14) вытекает, что эллиптичность уравнения (1,1,15) эквивалентна положительности функции $D(x, y, z, p, q)$ при $(x, y) \in \Omega$ и всех конечных z, p, q. Это обстоятельство необходимо влечет за собой выпуклость поверхностей, являющихся графиками решений эллиптических уравнений (1,1,15). Последний факт открывает возможность исследования уравнения Монжа — Ампера методами геометрии «в целом», что ниже подробно проводится в главах IV и V.

2. Пространства C^m; $C^{m,\lambda}$. Многие вопросы, изучаемые в книге, связаны с задачей Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения (1,1,4). Остановимся на формулировке этой задачи.

Пусть Ω — гомеоморфная кругу область, ограниченная ...нутой кривой Γ. Рассмотрим в Ω нелинейное уравнение ...4). Задача Дирихле, как известно, состоит в нахождении ...я $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ уравнения (1,1,4), обращающегося ...заданную непрерывную функцию $h(X)$. (X — точка Γ.) Однако, как правило, при решении задачи Дирихле ...одится налагать дополнительные требования, связанные как с гладкостью и геометрической формой кривой Γ, так и с гладкостью коэффициентов уравнения (1,1,4) и заданной на границе функцией $h(X)$.

Введем теперь некоторые понятия и обозначения, которые будут играть существенную роль в дальнейшем.

а) Пусть Ω — область на плоскости x, y, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся простых замкнутых кривых. Мы будем предполагать, что каждая кривая, входящая в состав границы области Ω, имеет конечную длину и функции

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

задающие эту кривую (s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на кривой), имеют непрерывные производные до порядка m включительно.

Класс областей, границы которых удовлетворяют перечисленным выше условиям, будем обозначать через L_m. Через $L_{m,\lambda}$ будем обозначать класс областей, у которых для каждой кривой, входящей в состав границы области, функции $x(s)$, $y(s)$ имеют m производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\lambda \in [0, 1]$.

Отметим, что граничные кривые областей класса L_2 имеют ограниченную кривизну и, кроме того, в окрестности каждой точки такой кривой одна из координат, например x, может служить локальным параметром; так что кривая может быть локально представлена уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

б) Пусть на некотором множестве A в плоскости x, y определена и непрерывна функция $f(x, y)$. Говорят, что она удовлетворяет в A условию Гельдера с показателем $\lambda \in [0, 1]$, если отношение

$$\frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}$$

равномерно ограничено сверху для любых (x, y), $(x', y') \in A$. Точную верхнюю грань этого отношения называют коэффициентом Гельдера функции $f(x, y)$.

Будем говорить, что функция $f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области Ω принадлежит классу C^k $(C^{k,\lambda})$, если все ее производные k-го порядка непрерывны в Ω (удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda \in [0, 1]$); естественно, полагаем, что $C^0 (C^{0,\lambda})$ есть класс функций, непрерывных (удовлетворяющих условию Гельдера с показателем λ) в Ω.

Если же $f(x, y)$ определена в области G, к которой иногда будет также присоединяться часть границы G, то мы относим $f(x, y)$ к классу C^k или $C^{k,\lambda}$ в том случае, когда она принадлежит этому классу в каждой замкнутой ограниченной области, содержащейся в G.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область. На множествах функций C^k и $C^{k,\lambda}$ вводим соответственно нормы следующим образом:

$$\|f\|_{C^k} \equiv \|f\|_k = \sum_{l=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} \max_{\Omega} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x^m \partial y^{l-m}} \right|,$$

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}} \equiv \|f\|_{k,\lambda} = \\ = \|f\|_k + \sum_{m=0}^{k} \sup_{\Omega} \frac{\left| \dfrac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{k-m}} - \dfrac{\partial^k f(x', y')}{\partial x^m \partial y^{k-m}} \right|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}.$$

Относительно этих норм множества функций C^k и $C^{k,\lambda}$ являются банаховыми пространствами.

в) Пусть Ω — область класса L_m или $L_{m,\lambda}$ и пусть γ_i — одна из простых кривых, входящих в состав ее границы. Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрическое представление кривой γ_i, где s — длина переменной дуги на γ_i с одним фиксированным концом. Функцию $f(x, y)$, заданную на γ_i, можно рассматривать как функцию $\bar{f}(s) = f(x(s), y(s))$ переменной s. Тогда принадлежность $\bar{f}(s)$ классу C^k или $C^{k,\lambda}$ можно трактовать так же, как и выше, с учетом той разницы, что на этот раз рассматриваются функции одной переменной. При этом естественно учитывается, что функции $x(s)$, $y(s)$ сами принадлежат классу C^m или $C^{m,\lambda}$ и $k \leqslant m$. Нормы в $C^k(\gamma_i)$ и $C^{k,\lambda}(\gamma_i)$ вводятся так:

$$\|\bar{f}(s)\|_k = \sum_{l=0}^{k} \max_{\gamma_i} |f^{(l)}(s)|,$$

$$\|\bar{f}(s)\|_{k,\lambda} = \sum_{l=0}^{k} \max_{\gamma_i} |f^{(l)}(s)| + \sup_{s, s' \in [0, s(\gamma_i)]} \frac{|f^{(k)}(s') - f^{(k)}(s)|}{|s' - s|^{\lambda/2}},$$

где $s(\gamma_i)$ — длина кривой γ_i.

3. **Сведения из теории линейных эллиптических уравнений.** Здесь мы формулируем результаты Ю. Шаудера [11 а, б] по линейным эллиптическим уравнениям. Эти результаты с доказательствами изложены также в монографии [12].

Пусть Ω — замкнутая область из класса $L_{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$. Рассмотрим в Ω линейный оператор

$$\mathfrak{M}u \equiv \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x, y)\, u_{ik} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x, y)\, u_i + c(x, y)\, u.$$

Коэффициенты оператора $\mathfrak{M}u$ будем считать принадлежащими пространству $C^{m-2,\lambda}$ $(m \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1)$. Положим

$$\|\mathfrak{M}\|_{m-2,\lambda} = \sum_{i,k=1}^{2} \|a_{ik}\|_{m-2,\lambda} + \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_{m-2,\lambda} + \|c\|_{m-2,\lambda}.$$

Будем также считать оператор $\mathfrak{M}$ эллиптическим. Это, как известно, означает, что существует постоянная $\alpha_0 > 0$ такая, что для любых вещественных чисел ξ_1, ξ_2 всюду в Ω выполнено неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant \alpha_0\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right).$$

Рассмотрим в Ω задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\mathfrak{M}u=f(x,\ y) \qquad (1,\ 3,\ 1)$$

при краевом условии

$$u|_{\Gamma}=\varphi, \qquad (1,\ 3,\ 2)$$

где $f\in C^{m-2,\ \lambda}(\Omega)$, а $\varphi\in C^{m,\ \lambda}(\Gamma)$.

Имеют место следующие результаты

Теорема 1. *Пусть относительно оператора $\mathfrak{M}u$, функций f, φ и области Ω выполнены условия, сформулированные выше в п. 3, и пусть, кроме того, всюду в Ω $c(x,\ y)\leqslant 0$; тогда задача Дирихле* (1, 3, 1—2) *всегда имеет единственное решение $u_0\in C^{m,\ \lambda}(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$\|u_0\|_{m,\ \lambda}\leqslant K\left(\|f\|_{m-2,\ \lambda}+\|\varphi\|_{m,\ \lambda}\right), \qquad (1,\ 3,\ 3)$$

где $K>0$ — постоянная, зависящая лишь от $\|\mathfrak{M}\|_{m-2,\ \lambda}$, α_0 и области Ω.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия $c(x,\ y)\leqslant 0$ в Ω; тогда для всякого решения $u(x,\ y)\in C^{m}(\Omega)$ задачи Дирихле* (1, 3, 1—2) *имеет место оценка*

$$\|u\|_{m,\ \lambda}\leqslant K_1\left(\|f\|_{m-2,\ \lambda}+\|\varphi\|_{m,\ \lambda}+\max_{\Omega}|u|\right), \qquad (1,\ 3,\ 4)$$

где $K_1>0$ — постоянная, зависящая от $\|\mathfrak{M}\|_{m-2,\ \lambda}$, α_0 и области Ω.

Теорема 3. *Пусть в открытой области Ω задано эллиптическое уравнение*

$$\mathfrak{M}u=f(x,\ y), \qquad (1,\ 3,\ 5)$$

коэффициенты которого a_{ik}, b_i, c, f удовлетворяют условиям, сформулированным в начале п. 3. Пусть далее $u(x,\ y)$ — решение уравнения (1, 3, 5), *принадле-*

ющее $C^{m,\lambda}$ внутри Ω и непрерывное в $\overline{\Omega}$). Тогда для всякого замкнутого множества $D \subset \Omega$, удаленного от границы Ω на расстояние $\delta > 0$, справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(D)} \leqslant K_2\left(\|f\|_{C^{m-2,\lambda}(\Omega)} + \max_{\Omega}|u|\right), \quad (1, 3, 6)$$

где постоянная $K_2 > 0$ зависит лишь от $\|\mathfrak{M}\|_{m-2,\lambda}$; α_0, δ и диаметра области Ω.

Теоремы 1, 2, 3 в дословно тех же формулировках справедливы для линейных эллиптических уравнений с n независимыми переменными ($n > 2$). Именно, в этом общем случае они и были установлены Шаудером.

4. Свойства решений эллиптических уравнений, основанные на принципе максимума. Теорема единственности для задачи Дирихле. Многие построения при исследовании эллиптических краевых задач опираются на так называемый принцип максимума, который состоит в том, что решение рассматриваемой задачи не может иметь внутри области ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов.

Остановимся сначала на случае линейных уравнений.

Теорема 4 (принцип максимума). *Пусть в области Ω задано линейное дифференциальное уравнение*

$$L(u) \equiv a(x, y)\,u_{xx} + 2b(x, y)\,u_{xy} + c(x, y)\,u_{yy} + \\ + d(x, y)\,u_x + e(x, y)\,u_y + f(x, y)\,u = 0. \quad (1, 4, 1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты этого уравнения непрерывны в Ω и при всех $(x, y) \in \Omega$ квадратичная форма

$$a(x, y)\,\xi^2 + 2b(x, y)\,\xi\eta + c(x, y)\,\eta^2 \quad (1, 4, 2)$$

положительна, а функция $f(x, y)$ неположительна. Пусть $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ — решение уравнения (1, 4, 1).

Тогда $u(x, y)$ внутри Ω не может иметь ни отрицательных минимумов, ни положительных максимумов.

Доказательство. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда всюду в Ω выполнено строгое неравенство

$$f(x, y) < 0,$$

*) Через $\overline{\Omega}$ здесь и везде ниже обозначается замыкание области Ω.

отсылая читателя по доказательству более общего случая к монографии [12] и работам [1е—ж].

Если бы в некоторой внутренней точке (x_0, y_0) области Ω функция $u(x, y)$ имела отрицательный минимум, то в этой точке были бы справедливы соотношения

а) $u(x_0, y_0) < 0$,

б) $u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0$,

в) квадратичная форма $u_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2u_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + u_{yy}(x_0, y_0)\eta^2$ является неотрицательной.

Поэтому в точке (x_0, y_0) имеем:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \geqslant 0,$$
$$fu > 0.$$

Это влечет за собой выполнение в точке (x_0, y_0) строгого неравенства

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu > 0.$$

Но тогда функция $u(x, y)$ не может быть решением уравнения (1, 4, 1). Таким образом, $u(x, y)$ не может иметь внутри Ω отрицательных минимумов.

Аналогично устанавливается, что $u(x, y)$ внутри Ω не имеет положительных максимумов.

В случае, когда $f(x, y) \leqslant 0$ в Ω выбор точки (x_0, y_0), в которой было бы нарушено уравнение, несколько усложняется. Как уже было сказано выше, читатель может ознакомиться с этим по работам [12], [1е — ж].

Из теоремы 4 непосредственно вытекают важные следствия:

1. *Если решение уравнения* (1, 4, 1)—*функция* $u(x, y)$ *на границе* Ω *принимает неотрицательные значения, то всюду в* Ω

$$u(x, y) \geqslant 0.$$

2. *Если решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1, 4, 1) *на границе* Ω *принимает неположительные значения, то*

$$u(x, y) \leqslant 0.$$

3. *Если решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1, 4, 1) *на границе* Ω *обращается в нуль, то* $u(x, y) \equiv 0$ *в* Ω.

Следствие 3 гарантирует единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1, 4, 1), удовлетворяющего условиям (1, 4, 2) и $f(x, y) \leqslant 0$.

4. Как видно из доказательства теоремы 4, она допускает следующее обобщение: *рассмотрим уравнение*

$$L(u) = g(x, y), \quad g(x, y) \in C^0(\Omega),$$

где

$$L(u) \equiv a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + \\ + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u$$

и коэффициенты оператора $L(u)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4. *Тогда, если в* Ω *выполнено неравенство* $g(x, y) \geqslant 0$, $(g(x, y) \leqslant 0)$, *то решение* $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ *уравнения* $L(u) = g(x, y)$ *не имеет внутри* Ω *положительных максимумов (отрицательных минимумов).*

Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение.

5. *Если* $z_1(x, y)$ *и* $z_2(x, y)$ — *две функции из класса* $C^2(\Omega)$ *такие, что на границе* Ω $z_1(x, y)$ *не меньше* $z_2(x, y)$, *а внутри* Ω *всюду*

$$g_1(x, y) = L(z_1) \leqslant g_2(x, y) = L(z_2),$$

то тогда всюду в Ω

$$z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y).$$

Доказательство. Пусть $\delta(x, y) = z_2(x, y) - z_1(x, y)$. Тогда на границе Ω: $\delta(x, y) \leqslant 0$. Далее

$$g(x, y) = L(\delta) = L(z_2) - L(z_1) \geqslant 0.$$

Таким образом, функция $\delta(x, y)$ не может иметь внутри Ω положительных максимумов. Так как на границе $\delta(x, y)$ неположительна, то везде в Ω $\delta(x, y) \leqslant 0$. А это и значит, что всюду в Ω справедливо неравенство

$$z_2(x, y) \leqslant z_1(x, y).$$

Перейдем теперь к рассмотрению аналогичных вопросов для нелинейных эллиптических уравнений.

Пусть $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ — функция, определенная при всех конечных значениях переменных r, s, t, p, q, z и $(x, y) \in \Omega$ и дважды непрерывно дифференцируема при всех допустимых значениях аргументов. На множестве функций $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ функция F, как уже говорилось в п. 1 настоящего параграфа, порождает оператор

$$\Phi(z) = F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y).$$

Ниже в этом пункте мы будем всегда предполагать, что *оператор* $\Phi(z)$ *эллиптически выпуклый.* Под этим понимается следующее: если на функциях z_1, $z_2 \in C^2(\Omega)$ оператор $\Phi(z)$ положительно (отрицательно) эллиптичен, то для всех функций вида

$$z_\tau = (1-\tau) z_1 + \tau z_2, \qquad \tau \in [0, 1]$$

оператор $\Phi(z)$ также положительно (отрицательно) эллиптичен. Другими словами, если квадратичная форма

$$T(\Phi, z) = F_r \xi^2 + F_s \xi\eta + F_t \eta^2$$

положительно (отрицательно) определенная на функциях z_1, $z_2 \in C^2(\Omega)$, то она также положительно (отрицательно) определенная на всех функциях z_τ, когда τ изменяется между нулем и единицей.

Для дальнейшего удобно ввести следующее обозначение. Пусть $A(r, s, t, p, q, z, x, y)$ — непрерывная функция при всех конечных значениях r, s, t, p, q, z и всех $(x, y) \in \Omega$. Для всякой функции $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ положим

$$a(x, y; z) = A(z_{xx}(x, y), z_{xy}(x, y), \ldots, z(x, y), x, y).$$

Теорема 5. *Пусть функция* $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, *рассмотренная выше, порождает эллиптически выпуклый оператор* $\Phi(z)$. *Пусть на функциях* $z_1, z_2 \in C^2(\Omega)$ *оператор* $\Phi(z)$ *положительно эллиптичен. Тогда, если*

1) *на границе* Ω

$$z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y),$$

2) *всюду в* Ω

$$\Phi(z_1) \equiv f(x, y; z_1) \leqslant f(x, y; z_2) \equiv \Phi(z_2), \qquad (1,4,3)$$

3) *при всех конечных* r, s, t, p, q, z *и всех* $(x, y) \in \Omega$ *справедливо неравенство*

$$F_z(r, s, t, p, q, z, x, y) \leqslant 0, \qquad (1,4,4)$$

то везде в Ω *имеем* $z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y)$.

Доказательство. Положим

$$\delta(x, y) = z_2(x, y) - z_1(x, y);$$
$$z_\tau(x, y) = (1-\tau) z_1(x, y) + \tau z_2(x, y),$$

где $\tau \in [0, 1]$. Тогда

$$f(x, y; z_2) - f(x, y; z_1) = \int_0^1 \frac{df(x, y; z_\tau)}{d\tau} d\tau =$$
$$= \delta_{xx} \int_0^1 f_r(x, y; z_\tau) d\tau + \delta_{xy} \int_0^1 f_s(x, y; z_\tau) d\tau +$$
$$+ \delta_{yy} \int_0^1 f_t(x, y; z_\tau) d\tau + \delta_x \int_0^1 f_p(x, y; z_\tau) d\tau +$$
$$+ \delta_y \int_0^1 f_q(x, y; z_\tau) d\tau + \delta \int_0^1 f(x, y; z) d\tau,$$

где

$$f_r(x, y; z_\tau) = F_r(z_{\tau, xx}, z_{\tau, xy}, \ldots, z_\tau, x, y),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_z(x, y; z_\tau) = F_z(z_{\tau, xx}, z_{\tau, xy}, \ldots, z_\tau, x, y).$$

Введем обозначения

$$a(x, y) = \int_0^1 f_r(x, y; z_\tau) d\tau, \quad 2b(x, y) = \int_0^1 f_s(x, y; z_\tau) d\tau,$$
$$c(x, y) = \int_0^1 f_t(x, y; z_\tau) d\tau,$$
$$d(x, y) = \int_0^1 f_p(x, y; z_\tau) d\tau, \quad e(x, y) = \int_0^1 f_q(x, y; z_\tau) d\tau,$$
$$f(x, y) = \int_0^1 f_z(x, y; z_\tau) d\tau.$$

Так как $\Phi(z_\tau)$ — эллиптически выпуклый оператор, который к тому же положительно эллиптичен, то квадратичная форма

$$a(x, y)\xi^2+2b(x, y)\xi\eta+c(x, y)\eta^2$$

является положительной в Ω. Из неравенства (1,4,3) вытекает, что в Ω функция $f(x, y)$ неположительна.

Функция $\delta(x, y)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$a\delta_{xx}+2b\delta_{xy}+c\delta_{yy}+d\delta_x+e\delta_y+f\delta=$$
$$=f(x, y; z_2)-f(x, y; z_1)\geqslant 0,$$

поэтому из следствия 4 (обобщение теоремы 4) вытекает, что $\delta(x, y)$ не имеет внутри Ω положительных максимумов. По построению $\delta(x, y)\leqslant 0$ на границе Ω. Поэтому везде в Ω имеем $\delta(x, y)\leqslant 0$. А это и значит, что при всех $(x, y)\in\Omega$ справедливо неравенство

$$z_1(x, y)\geqslant z_2(x, y).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает теорема единственности для задачи Дирихле. Аналогичная теорема имеет место, если на z_1 и z_2 оператор $\Phi(z)$ отрицательно эллиптичен.

Теорема 6. *Пусть функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5, порождает эллиптически выпуклый оператор $\Phi(z)$. Пусть на решениях $z_1, z_2\in C^2(\Omega)$ уравнения*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y)=0$$

оператор $\Phi(z)$ положительно (отрицательно) эллиптичен. Тогда, если на границе Ω функции z_1 и z_2 совпадают и

$$F_z(r, s, t, p, q, z, x, y)\leqslant 0 \quad (F_z(r, s, t, p, q, z, x, y)\geqslant 0)$$

при всех конечных r, s, t, p, q, z и всех $(x, y)\in\Omega$, то всюду в Ω имеем $z_1(x, y)\equiv z_2(x, y)$.

5. Метод Ньютона для решения функциональных уравнений. В математическом анализе хорошо известен метод Ньютона или, что то же самое, метод касательных для решения уравнения

$$f(x)=0. \tag{1,5,1}$$

Относительно функции $f(x)$ будем предполагать, что она дважды непрерывно дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, ее производная на $[a, b]$ всюду отлична от нуля и внутри $[a, b]$ находится корень x^* уравнения (1,5,1); будем считать, что $f'(x)>0$ всюду на $[a, b]$. Последовательные приближения по методу Ньютона строятся так: пусть

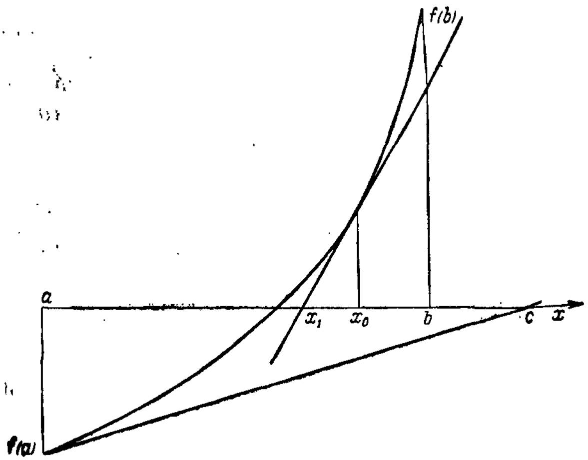

Рис. 1.

$x_0 \in [a, b]$ — начальное приближение. Следующее приближение x_1 определяется как точка пересечения оси x с касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Приближение x_2 строится по числу x_1 точно так же, как число x_1 строилось по x_0. Аналитически построение последовательности приближений по этому методу дается формулой

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{1,5,2}$$

На рис. 1 изображено нахождение по числу x_0 следующего приближения x_1. Из рис. 1 ясно, что далеко не всякая точка $x_0 \in [a, b]$ может быть выбрана в качестве начального приближения. Например, если взять $x_0 = a$, то число

$$c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

будет лежать вне сегмента $[a, b]$, и следующее приближение уже нельзя построить.

Таким образом, выбор начального приближения x_0 должен быть определенным образом связан со свойствами функции $f(x)$. Далее, весьма важным вопросом является получение широких достаточных условий сходимости метода Ньютона. Ниже мы остановимся на одном из возможных вариантов таких условий.

Теорема А. *Пусть x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Для функции $f(x)$, дважды непрерывно дифференцируемой на промежутке $[a, b]$, положим*

1) $\eta = |f(x_0)|$;

2) $B = \frac{1}{f'(x_0)}$ *(как мы выше условились, $f'(x) > 0$ на $[a, b]$)*;

3) $K = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f''(x)|$;

4) $h = B^2 K \eta, \qquad r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta.$

Тогда, если

$$h \leqslant \frac{1}{2}, \qquad r = \min\{x_0 - a, \ b - x_0\} \geqslant r_0,$$

то:

1) *с помощью формулы* (1,5,2) *последовательность чисел x_n может быть построена;*

2) *она сходится к корню x^* уравнения $f(x) = 0$ и при этом $|x_0 - x^*| \leqslant r_0$ (т. е. всегда $x^* \in [a, b]$);*

3) *скорость сходимости такова:*

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h}.$$

При этом не гарантируется единственность корня x^* уравнения $f(x)=0$ на промежутке $[x_0-r,\ x_0+r]$. Единственность корня на этом промежутке будет иметь место, если число r достаточно мало, т. е.

$$r < r_1 = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}B\eta$$

(Доказательство этого предложения см. в [9]).

Заданием уравнения (1,5,1) число $K=\sup\limits_{[a,\ b]}|f''(x)|$ определяется сразу, независимо от того, где на отрезке $[a,\ b]$ мы берем начальное приближение x_0. Поэтому можно считать, что число $K<+\infty$ фиксировано. Тогда выбор начального приближения x_0 должен быть подчинен условиям:

$$\text{а)}\quad |f(x_0)|\frac{1}{f'^2(x_0)}=\eta B^2\leqslant\frac{1}{2K},$$

б) точка x_0 должна быть удалена от обоих концов промежутка $[a,\ b]$ на расстояние, не меньшее чем $r_0=\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}B\eta$. На промежутке $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ функция $\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}$ монотонно возрастает от 1 до 2, и потому при любом $h\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ имеют место неравенства

$$B\eta\leqslant r_0\leqslant 2B\eta.$$

Поэтому, если взять начальное приближение $x_0\in[a,\ b]$ так, что

$$1)\quad \eta B^2\equiv\frac{|f(x_0)|}{f'^2(x_0)}\leqslant\frac{1}{2\sup\limits_{[a,\ b]}|f''(x)|},$$

2) расстояние x_0 до a и b не меньше, чем $2\eta B=2\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}$, то построенная по методу Ньютона числовая последовательность $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ сходится к одному из корней x^* уравнения $f(x)=0$, причем

$$|x_0-x^*|\leqslant r_0\leqslant 2B\eta.$$

Сказанное выше можно кратко сформулировать так:

Теорема Б. *Пусть на промежутке* $[a, b]$ *задана дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f(x)$ *и пусть* $f'(x) \neq 0$ *на* $[a, b]$. *Введем обозначения*

$$B = \frac{1}{|f'(x_0)|}, \quad K = \sup_{[a,\, b]} |f''(x)|, \quad \eta = |f(x_0)|.$$

Тогда, если точка $x_0 \in [a, b]$ *такова, что*

1) $\eta B^2 \leqslant \dfrac{1}{2K}$,

2) *расстояния точки* x_0 *до точек* a *и* b *не меньше, чем* $2B\eta$, *то при всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *можно построить последовательность Ньютона*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in [a, b],$$

которая сходится к одному из корней x^* *уравнения* $f(x) = 0$, *при этом*

$$|x_0 - x^*| \leqslant 2B\eta = \frac{2|f(x_0)|}{f'(x_0)}.$$

Дополнение к теореме Б. *Пусть* $r > 0$ — *число, строго меньшее расстояний точки* x_0 *до обоих концов промежутка* $[a, b]$. *Тогда, если выполнены неравенства*

$$\eta B^2 < \frac{1}{2K}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta \leqslant r \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta,$$

где $h = B^2 K\eta$, *то корень* x^* *уравнения* $f(x) = 0$, *о котором шла речь в теореме* Б, *таков, что*

4) $|x_0 - x^*| \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta$;

5) x^* — *единственный корень уравнения* $f(x) = 0$ *на отрезке* $[a, b] \cap [x_0 - r, x_0 + r]$;

6) *скорость сходимости* x_n *к* x^* *дается неравенством*

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h}.$$

Обратимся теперь к рассмотрению формулы (1,5,2) с операторной точки зрения. Как уже отмечалось, функция $f(x) \in C^2[a, b]$ и $f'(x) > 0$ на $[a, b]$. Поэтому функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$ и, следовательно, взаимно однозначно отображает $[a, b]$ на отрезок $[m, M]$, где $m = f(a)$, $M = f(b)$.

В каждой точке $x \in [a, b]$ определен дифференциал функции $f(x)$:

$$df = f'(x)\,dx.$$

В точке x_0 этот дифференциал порождает отображение оси x на ось y по формуле

$$y = f'(x_0)\,x. \tag{1,5,3}$$

Так как $f'(x_0) \neq 0$, то линейная функция (1, 5, 3) имеет обратную

$$x = \frac{1}{f'(x_0)}\,y,$$

которая переводит ось y на ось x. Число $y_0 = f(x_0)$ переходит при этом отображении в число

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(x_0)}\,f(x_0) = [f'(x_0)]^{-1} f(x_0). \tag{1,5,4}$$

Поэтому запись

$$\bar{x} = [f'(x_0)]^{-1} f(x_0)$$

можно понимать двояко: с одной стороны, число $\frac{1}{f'(x_0)}$ умножается на число $f(x_0)$, с другой стороны, выражение $\Gamma_{x_0} = [f'(x_0)]^{-1}$ есть обратная операция к линейной операции $y = f'(x_0)\,x$ и поэтому соотношение (1,5,4) есть результат применения операции Γ_{x_0} к числу $f(x_0)$ (рис. 2).

Для обычных уравнений, связанных с функциями одного переменного, оба толкования формулы (1,5,4) равноправны. Но это уже далеко не так, если пытаться обобщать формулы (1,5,2) на операторные уравнения в банаховых пространствах. Первое толкование формулы там лишено смысла, в то время как второе имеет глубокое содержание. Это позволило Л. В. Канторовичу [9] сформулировать и развить метод Ньютона для решения общих функциональных уравнений в банаховых пространствах. На этом пути Л. В. Канторовичем и его учениками были получены сильные результаты в ре шении общих нелинейных уравнений.

Итак, формулу, по которой строятся последовательны приближения в методе Ньютона, в операторном виде можн записать так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) =$$
$$= x_n - \Gamma_{x_n}[f(x_n)]$$

При переходе к построению метода Ньютона в банаховы пространствах нужно прежде всего сформулировать поняти

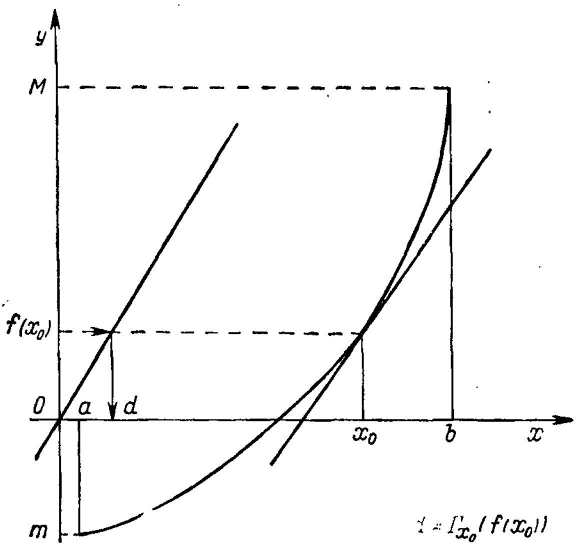

Рис. 2.

производной или дифференциала для произвольного оператора В работах по методу Ньютона для этого используется та называемый сильный дифференциал или дифференциал Фреше Приведем точную формулировку этого понятия. Пусть X и Y — два банаховых пространства и пусть на некоторо открытом множестве $G \subset X$ определен оператор $P(x)$ с значениями в банаховом пространстве Y. Будем говорить что в точке $x_0 \in G$ оператор $P(x)$ имеет сильный дифференциа или дифференциал Фреше, если существует линейный оператор A, отображающий X в Y, такой, что

$$P(x_0+h)-P(x_0)=A(h)+\omega(x_0,\ h), \qquad (1,5,5)$$

где

$$\lim_{\|h\|_X\to 0}\frac{\|\omega(x_0,\ h)\|_Y}{\|h\|_X}=0.$$

Линейный оператор $A(h)=Ah$ зависит, вообще говоря, от точки $x_0\in G$. Он называется сильным дифференциалом или дифференциалом Фреше и обозначается $P'(x_0)[h]$ или просто $P'(x_0)h$.

Если в точке $x_0\in G$ у оператора $P(x)$ существует сильный дифференциал, то его всегда можно находить по формуле

$$P'(x_0)h=\lim_{t\to 0}\frac{P(x_0+th)-P(x_0)}{t} \qquad (1,5,6)$$

(t числовой параметр. Так как G — открытое множество, то $x_0+th\in G$ при всех достаточно малых значениях t).

Для существования в точке x_0 предела, стоящего в правой части соотношения (1,5,6), не обязательно наличие в этой точке сильного дифференциала. Если в точке $x_0\in G$ при любых $h\in X$ существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(x_0+th)-P(x_0)}{t},$$

то говорят, что в x_0 оператор $P(x)$ имеет слабый дифференциал. Во многих случаях слабый дифференциал проще находить, чем сильный. Поэтому, если в точке $x_0\in G$ существует сильный дифференциал, то его удобнее находить по формуле (1,5,6).

Рассмотрим примеры.

1. Пусть X и Y — двумерные евклидовы пространства, и в круге $G\subset X$ определен оператор P, переводящий G в Y. Если $x_1,\ x_2$ — декартовы координаты точки $x\in X$, а $y_1,\ y_2$ — декартовы координаты точки $y\in Y$, то P аналитически можно задать так:

$$P:\ \begin{aligned} y_1&=f(x_1,\ x_2),\\ y_2&=g(x_1,\ x_2), \qquad \text{где} \quad x=(x_1,\ x_2)\in G.\end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что существование сильного дифференциала у оператора P в точке (x_1^0, x_2^0) эквивалентно существованию в этой точке обычных дифференциалов у функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$. Дифференциал Фреше в точке (x_1^0, x_2^0) имеет вид

$$y_1 = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)h_1 + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)h_2,$$
$$y_2 = g'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)h_1 + g'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)h_2.$$

Если матрица $\begin{pmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} \\ g'_{x_1} & g'_{x_2} \end{pmatrix}$ в точке (x_1^0, x_2^0) не особенная, то оператор $P'(x_1^0, x_2^0)$ (т. е. $P'(x_1^0, x_2^0)h$) имеет обратный $\Gamma_{(x_1^0, x_2^0)} = [P'(x_1^0, x_2^0)]^{-1}$, который переводит Y на X.

2. Пусть X — совокупность функций из пространства $C^{m,\alpha}(\Omega)$, заданных в замкнутом круге Ω и обращающихся в нуль на границе Ω $(m \geqslant 2,\ 0 < \alpha < 1)$. X есть банахово пространство, которое ниже мы будем обозначать $\overset{\circ}{C}{}^{m,\alpha}(\Omega)$.

Пусть $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ — функция из класса $C^{m-1,\alpha}$ при всех $(x, y) \in \Omega$ и всех конечных значениях переменных r, s, t, p, q, z. На $\overset{\circ}{C}{}^{m,\alpha}$ рассмотрим оператор

$$\Phi(z) = F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y).$$

Этот оператор переводит $X = \overset{\circ}{C}{}^{m,\alpha}(\Omega)$ в банахово пространство $Y = C^{m-2,\alpha}(\Omega)$.

Читатель легко докажет, что этот оператор имеет на любой функции $z_0 \in X$ сильный дифференциал. Используя формулу (1,5,6), получаем аналитическое выражение для $\Phi'(z_0)h$. Именно, для всякого $h \in \overset{\circ}{C}{}^{m,\alpha}$ имеем

$$\Phi'(z_0)h = F_r^0 h_{xx} + F_s^0 h_{xy} + F_t^0 h_{yy} + F_p^0 h_x + F_q^0 h_y + F_z^0 h, \tag{1,5,7}$$

где положено $F_r^0 = F_r(z_{0,xx}, z_{0,xy}, \ldots)$, остальные обозначения в (1,5,7) аналогичны.

$\Phi'(z_0)h$ есть линейный оператор, переводящий пространство $\overset{\circ}{C}{}^{m,\alpha}(\Omega)$ в пространство $C^{m-2,\alpha}(\Omega)$. Операция $\Gamma_{z_0} = [\Phi'(z_0)]^{-1}$, обратная к $\Phi'(z_0)h$, состоит в нахождении решения $u(x, y) \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \alpha}(\Omega)$ линейного уравнения

$$F_r^0 u_{xx} + F_s^0 u_{xy} + F_t^0 u_{yy} + F_p^0 u_x + F_q^0 u_y + F_z^0 u = v, \qquad (1,5,8)$$

где $v(x, y)$ — любой элемент пространства $C^{m-2, \alpha}(\Omega)$.

Таким образом, существование обратной операции к $\Phi'(z_0) h$ эквивалентно существованию решения $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения (1,5,8) с любой функцией $v(x, y) \in C^{m-2, \alpha}(\Omega)$ при краевом условии $u|_{\text{гр}\,\Omega} = 0$, причем решение $u(x, y)$ должно принадлежать пространству $C^{m, \alpha}(\Omega)$.

Так как $z_0 \in C^{m, \alpha}(\Omega)$, то коэффициенты линейного уравнения (1,5,8) — функции F_r^0, F_s^0, F_t^0, F_p^0, F_q^0, F_z^0 — принадлежат пространству $C^{m-2, \alpha}(\Omega)$. Если теперь на функции $z_0(x, y)$ квадратичная форма

$$F_r^0 \xi^2 + F_s^0 \xi\eta + F_t^0 \eta^2$$

положительно определенная, т. е. при всех $(x, y) \in \Omega$ имеем

$$F_r^0 \xi^2 + F_s^0 \xi\eta + F_t^0 \eta^2 \geqslant \beta_0 (\xi^2 + \eta^2), \qquad (1,5,9)$$

где $\beta_0 = \text{const} > 0$, и, кроме того, в Ω справедливо неравенство

$$F_z^0 \leqslant 0, \qquad (1,5,10)$$

то, согласно первой теореме Шаудера (§ 1, п. 3), для любой функции $v \in C^{m-2, \alpha}(\Omega)$ задача Дирихле

$$F_r^0 u_{xx} + F_s^0 u_{xy} + F_t^0 u_{yy} + F_p^0 u_x + F_q^0 u_y + F_z^0 u = v,$$
$$u|_{\text{гр}\,\Omega} = 0$$

имеет единственное решение, которое принадлежит $C^{m, \alpha}(\Omega)$, и для него имеет место оценка

$$\|u\|_{m, \alpha} \leqslant B \|v\|_{m-2, \alpha} \qquad (1,5,11)$$

(постоянная $B > 0$ не зависит от функции $v(x, y)$, а зависит лишь от $\max\left\{\|F_r^0\|_{m-2, \alpha}, \ldots, \|F_z^0\|_{m-2, \alpha}\right\}$ и числа β_0).

Таким образом, при выполнении условий (1,5,9) и (1,5,10) существует линейная операция $\Gamma_{z_0} = [\Phi'(z_0)]^{-1}$, обратная к линейному оператору $\Phi'(z_0)h$, а неравенство (1,5,11) дает оценку нормы этой операции, т. е.

$$\|\Gamma_{z_0}\| \leqslant B.$$

Определим теперь понятие второго сильного дифференциала (или второго дифференциала Фреше) оператора $P(x)$ в точке $x_0 \in G$. Говорят, что в точке x_0 оператор $P(x)$ имеет второй сильный дифференциал, если во всех точках некоторой окрестности $U \subset G$ точки x_0 существует сильный первый дифференциал $P'(x)$, который в x_0 имеет дифференциал Фреше. Развернуто это означает следующее: пусть оператор $Q[x, h] = P'(x)h$ определен при всех $x \in U$ и любых $h \in X$ и относительно h при фиксированных $x \in G$ является линейным оператором. Тогда, если существует билинейный оператор T такой, что при всех достаточно малых по норме $g \in X$ справедливо соотношение

$$Q[x_0+g, h] - Q[x_0, h] = T(g, h) + \omega(x_0, g, h),$$

где

$$\lim_{\|g\|_X \to 0} \frac{\|\omega(x_0, g, h)\|_Y}{\|g\|_X} = 0,$$

то оператор T называется вторым сильным дифференциалом или вторым дифференциалом Фреше оператора P в точке $x_0 \in G$. Обозначать его будем так: $P''(x_0)h, g$. Он переводит прямое произведение пространства $X \times X$ в пространство Y.

В приведенных выше примерах второй сильный дифференциал имеет следующие аналитические выражения:

а) Первый пример.

$$P(x): \begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2), \\ y_2 = g(x_1, x_2); \end{cases}$$

$$P''(x_0)h, g: \begin{cases} y_1 = f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0)h_1g_1 + f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)(h_1g_2+h_2g_1) + \\ \qquad + f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0)h_2g_2, \\ y_2 = g_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0)h_1g_1 + g_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)(h_1g_2+h_2g_1) + \\ \qquad + g_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0)h_2g_2. \end{cases}$$

Здесь существование второго сильного дифференциала P'' в точке (x_1^0, x_2^0) эквивалентно существованию вторых дифференциалов функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ в этой точке.

Норма билинейной операции $P''(x_1, x_2)h, g$ определяется как обычно. Именно, $\|P''(x_1, x_2)\|$ — есть точная нижняя грань всех чисел N, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{y_1^2+y_2^2} \leqslant N\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{g_1^2+g_2^2}.$$

Отсюда

$$\|P''(x_1, x_2)\| \leqslant 2\sqrt{f_{x_1x_1}^2+f_{x_1x_2}^2+f_{x_2x_2}^2+g_{x_1x_1}^2+g_{x_1x_2}^2+g_{x_2x_2}^2}$$

и, следовательно,

$$\sup_G \|P''(x_1, x_2)\| \leqslant 2\sup_G \sqrt{f_{x_1x_1}^2+f_{x_1x_2}^2+f_{x_2x_2}^2+g_{x_1x_1}^2+g_{x_1x_2}^2+g_{x_2x_2}^2}.$$

б) Второй пример. Здесь

$$\Phi''(z_0)h, g = F_{rr}^0 h_{xx}g_{xx} + F_{rs}^0(h_{xy}g_{xx}+h_{xx}g_{xy}) + \\ + F_{rt}^0(h_{xx}g_{yy}+h_{yy}g_{xx}) + \ldots + F_{zz}^0 hg.$$

Очевидно,

$$\|\Phi''(z_0)\| \leqslant \|F_{rr}^0\|_{m-2,\,\alpha} + \|F_{rs}^0\|_{m-2,\,\alpha} + \ldots + \|F_{zz}^0\|_{m-2,\,\alpha}.$$

Перейдем теперь к построению последовательности приближений по методу Ньютона и формулировке условий сходимости этой последовательности к корню операторного уравнения.

Итак, пусть по-прежнему X и Y — два банаховых пространства и на открытом множестве $G \subset X$ задан оператор $P(x)$, переводящий G в Y. Пусть в множестве G имеется элемент x^*, переводящийся оператором $P(x)$ в нуль пространства Y. Пусть x_0 — некоторый элемент из G. Построим последовательность элементов

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_{x_n}(P(x_n)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\Gamma_{x_n} = [P'(x_n)]^{-1}$. Способ образования этой последовательности называют методом Ньютона.

Обозначим через G_0 шар

$$\|x - x_0\|_X \leqslant r.$$

Число $r > 0$ выберем так, чтобы $G_0 \subset G$. Для банаховых пространств имеет место теорема, являющаяся естественным аналогом теоремы A. Эта теорема доказана Л. В. Канторовичем [9].

Теорема 7. *Пусть на открытом множестве G банахова пространства X определен оператор P со значениями в банаховом пространстве Y. Пусть в G_0 этот оператор дважды непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть, кроме того,*

1) *существует линейная операция* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и $\|\Gamma_0\| \leqslant B$;

2) $\|P(x_0)\|_Y \leqslant \eta$;

3) *норма билинейной операции $P''(x)$ в шаре G_0 удовлетворяет неравенству*

$$\|P''(x)\| \leqslant K.$$

Положим

$$h = B^2 K\eta, \qquad r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} B\eta,$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h} B\eta.$$

Тогда, если

$$h \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad r \geqslant r_0,$$

то уравнение $P(x) = 0$ имеет решение x^*, к которому сходится процесс Ньютона. При этом

$$\|x^* - x_0\|_X \leqslant r_0$$

(т. е. *решение x^* заведомо содержится в шаре G_0*).

Дополнение. *Если, кроме того, выполнены неравенства*

$$h < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad r < r_1,$$

то в шаре G_0 решение уравнения $P(x) = 0$ единственно. Быстрота сходимости метода Ньютона описывается неравенством

$$\|x^* - x_n\|_X \leqslant \frac{1}{2^n}(2h)^{2^n}\frac{\eta}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство этой теоремы см. в [9].

Часто бывает так, что величины $\|\Gamma_0\|$ и $\sup\limits_G \|P''(x)\|$ допускают оценки через исходные данные нелинейной задачи. В таких случаях удобно считать числа B и K фиксированными и подбирать начальное приближение x_0 так, чтобы число η удовлетворяло условиям теоремы 7.

Таким образом, речь идет о модификации теоремы 7, которая была бы аналогом теоремы Б.

Допустим, что начальное приближение $x_0 \in G_0$ выбрано так, что

$$\|P(x_0)\|_Y = \eta$$

и

$$\eta B^2 \leqslant \frac{1}{2K}, \tag{1,5,12}$$

где

$$B \geqslant \|\Gamma_0\|, \qquad K = \sup_{G_0} \|P''(x)\|.$$

Чтобы гарантировать существование решения x^* уравнения $P(x) = 0$, в шаре G_0, согласно теореме 7, должно выполняться неравенство

$$r \geqslant r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} B\eta, \tag{1,5,13}$$

где $h = B^2 K\eta$. Из (1,5,12) следует, что в рассматриваемом случае $h \leqslant \frac{1}{2}$. Как мы уже отмечали, выражение $\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}$ на промежутке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ есть строго возрастающая функция h, изменяющаяся в пределах от 1 до 2. Поэтому неравенство (1,5,13) тем более будет удовлетворено, если точка x_0 выбрана так, что

$$r \geqslant 2B\eta.$$

Из проведенных построений вытекает следующая модификация теоремы 7:

Теорема 8 (аналог теоремы Б). *Пусть на открытом множестве G банахова пространства X определен оператор $P(x)$ со значениями в банаховом пространстве Y. Пусть в G_0*) этот оператор дважды не-*

---

*) Напоминаем, что G_0 есть шар $\|x - x_0\|_X \leqslant r$, содержащийся в G.

непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть, кроме того:

1) *существует линейная операция* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *и* $\|\Gamma_0\| \leqslant B$,

2) $\|P(x_0)\|_Y = \eta$,

3) $\sup\limits_{x \in G} \|P''(x)\| = K$.

Тогда, если

а) $B^2\eta \leqslant \dfrac{1}{2K}$,

б) *расстояние точки* x_0 *до границы шара* G_0 *не меньше, чем* $2B\eta$, *то в шаре* G_0 *существует решение* x^* *уравнения* $P(x)=0$, *к которому сходится последовательность приближений*

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_{x_n}(P(x_n)) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

при этом

$$\|x^* - x_0\|_X \leqslant 2B\eta$$

и

$$\|x^* - x_n\|_X \leqslant \frac{1}{2^n}(2h)^{2^n}\frac{\eta}{h}.$$

Дополнение. *Если потребовать выполнения строгого неравенства*

$$B^2\eta < \frac{1}{2K}$$

и неравенств

$$\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}B\eta \equiv r_0 < r < r_1 \equiv \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}B\eta, \qquad (1,5,13)$$

то в шаре G_0 *уравнение* $P(x)=0$ *будет иметь единственное решение.*

Неравенствам (1,5,13) можно придать более обозримый характер. Пусть $h \leqslant \frac{2}{5}$. Тогда легко проверить, что

$$\frac{1+\sqrt{1-2h}}{h} \geqslant 3, \quad \text{а} \quad \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \leqslant \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}.$$

Поэтому

$$r_1 \geqslant 3B\eta, \quad r_0 \leqslant \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}B\eta.$$

Следовательно, теорема 8 будет иметь место в усиленной формулировке (включая теорему единственности), если выполнены условия:

а) $B^2\eta \leqslant \frac{2}{5K}$,

б) расстояние r от начального приближения x_0 до границы шара G_0 удовлетворяет неравенству

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} B\eta \leqslant r \leqslant 3B\eta.$$

6. Иллюстрация метода Ньютона. В качестве иллюстрации приложения метода Ньютона рассмотрим следующую задачу Дирихле.

Пусть Ω — замкнутый круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Будем в Ω искать решение уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \varphi(x, y), \tag{1,6,1}$$

обращающееся в нуль на границе Ω. Относительно функции $\varphi(x, y)$ будем предполагать, что

$$\varphi(x, y) \geqslant k^2 = \mathrm{const} > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) \in C^\alpha(\Omega)\,^{*}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Вводим в рассмотрение банаховы пространства $X = \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$ и $Y = C^\alpha(\Omega)$ и семейство операторов

$$P(u, \mu) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - (1-\mu)k_0^2 + \mu\varphi(x, y), \tag{1,6,2}$$

зависящих от параметра $\mu \in [0, 1]$ и переводящих X в Y. Обозначим через $u_\mu(x, y)$ решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} P(u, \mu) = 0, \\ u|_{\text{гр}\,\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1,6,3}$$

Ниже будет доказано (см. гл. IV), что эта задача всегда имеет точно два решения, причем одно из них получается из другого умножением на -1. Через $u_\mu(x, y)$ мы будем постоянно обозначать решение, на котором оператор $P(u, \mu)$ положительно эллиптичен.

---

*) Ниже пространство C^0 обозначается через C, а $C^{0,\alpha}$ — через C^α.

Если будет доказана разрешимость этой задачи при всех $\mu \in [0, 1]$, то интересующая нас задача (1,6,3) будет решена.

При $\mu = 0$ задача (1,6,1) имеет решение $u_0 = \frac{k}{2} \times (x^2 + y^2 - R^2)$. Рассмотрим вопрос о существовании решений $u_\mu(x, y)$ задачи (1,6,3) для $\mu \in [0,1]$. Фиксируем некоторое $\mu_1 \in [0, 1]$. В качестве начального приближения по методу Ньютона для задачи

$$\left\{ \begin{aligned} P(u, \mu_1) &= 0, \\ u|_{\text{гр}\,\Omega} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{1,6,4}$$

возьмем функцию $u_0(x, y)$ — решение задачи (1,6,3) при $\mu = 0$. Производная Фреше оператора $P(u, \mu)$ на функции $u_0(x, y)$ имеет вид

$$P'(u_0, \mu_1)v = u_{0,xx}v_{yy} - 2u_{0,xy}v_{xy} + u_{0,yy}v_{xx} = k_0\,\Delta v;$$

она переводит функцию $v(x, y) \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}$ в функцию $g = k_0\,\Delta v \in C^\alpha$. Обратная к ней операция $\Gamma_0 = [P'(u_0, \mu_1)]^{-1}$, участвующая в построении метода Ньютона, переводит функцию $g(x, y) \in C^\alpha$ в решение $v(x, y)$ уравнения

$$k_0\,\Delta v = g,$$

которое обращается в нуль на границе Ω. Из первой теоремы Шаудера (см. п. 3 § 1) вытекает, что эта операция определена, ограничена и взаимно однозначно переводит $Y = C^\alpha(\Omega)$ на $X = \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$; при этом норма этой операции оценивается сверху в зависимости лишь от числа k_0 и радиуса круга Ω.

Далее

$$\begin{aligned} &\|P(u_0, \mu_1)\|_Y = \\ &\quad = \|u_{0,xx}u_{0,yy} - u_{0,xy}^2 - (1-\mu_1)k^2 - \mu_1\varphi(x, y)\|_\alpha = \\ &\qquad = \|k^2 - (1-\mu_1)k^2 - \mu_1\varphi\|_\alpha = \mu_1\|k^2 - \varphi\|_\alpha. \end{aligned}$$

Наконец, при всяком $u \in X$ и v, $w \in X$ имеем

$$P''(u, \mu)v, w = v_{xx}w_{yy} - 2v_{xy}w_{xy} + v_{yy}w_{xx}. \tag{1,6,5}$$

Отсюда вытекает, что норма второй производной оператора $P(u, \mu)$ при всех $u \in X$ и всех $\mu \in [0, 1]$ удовлетворяет неравенству

$$\|P(u, \mu)\| \leqslant 4.$$

Итак, числа B, η, K, участвующие в формулировке условий сходимости последовательности приближений по Ньютону, таковы:

1) $B = \|\Gamma_0\|$,
2) $\eta = \mu_1 \|\varphi(x, y) - k^2\|_\alpha$,
3) $K = 4$.

Докажем, что если

$$\mu_1 \leqslant \mu_1^0 = \min\left\{1, \frac{1}{12\|\varphi - k^2\|_\alpha \|\Gamma_0\|^2}\right\}, \tag{1,6,6}$$

то положительное решение задачи

$$\left\{\begin{aligned} P(u, \mu_1) &= 0, \\ u|_\Gamma &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1,6,7}$$

может быть получено методом Ньютона, если за начальное приближение взята функция

$$u_0(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 - R^2).$$

Действительно строим числа h и r_0 (см. теорему 7). Имеем

$$h = \eta K B^2 = 4\mu_1 \|\varphi - k^2\|_\alpha \|\Gamma_0\|^2,$$

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta B = \frac{2\eta B}{1 + \sqrt{1 - 2h}}.$$

Из соотношения (1,6,6) вытекает, что $h \leqslant \frac{1}{3}$ и тем более $h < \frac{1}{2}$. Поэтому

$$r_0 < \frac{2\mu_1 \|\varphi - k^2\|_\alpha \|\Gamma_0\|}{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + 1)\|\Gamma_0\|}.$$

Так как для всех $u \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$ и $\mu \in [0, 1]$ имеем $\|P''(u, \mu)\| \leqslant 4$, то тем более это неравенство верно при $\mu = \mu_1$ в любом шаре G_0: $\{\|u - u_0\|_X \leqslant r\}$, где r — любое число, большее r_0.

Следовательно, все условия теоремы 7 соблюдены, и существует решение $u_{\mu_1}(x, y)$ задачи (1,6,7). Как уже отмечалось, задача (1,6,7) имеет при любом $\mu \in [0, 1]$ только одно решение, на котором оператор $P(u; \mu)$ положительно эллиптичен.

Обратимся теперь к анализу условия (1,6,6). Величина $\|\Gamma_0\|$, как было сказано выше, зависит лишь от числа k и радиуса круга Ω. Поэтому $\|\Gamma_0\|$ не может рассматриваться как малая величина. Если мы хотим, чтобы исходная задача (1,6,1) была решена методом Ньютона, то достаточно требовать выполнение неравенства

$$\|\varphi(x, y) - k^2\|_\alpha \leqslant \frac{1}{12\|\Gamma_0\|}. \tag{1,6,8}$$

Это условие характеризует малое отклонение функции $\varphi(x, y)$ в метрике C^α от константы k^2.

Если считать, что условие (1,6,8) не выполнено, то мы не можем гарантировать разрешимости задачи (1,6,1), а можем лишь утверждать, что при $\mu \leqslant \mu_1^0$ задача с параметром (1,6,3) имеет положительное решение в $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$. В указанном случае дальнейший путь решения задачи (1,6,1) таков: в качестве нового начального приближения возьмем функцию $u_{\mu_1^0}(x, y)$ — решение задачи (1,6,7) при $\mu = \mu_1^0$ — и применим снова метод Ньютона для задачи

$$\begin{cases} P(u, \mu_2) = 0, \\ u|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{1,6,9}$$

где $\mu_1^0 < \mu_2 \leqslant 1$ — некоторое фиксированное число. Операция $\Gamma_0^{\mu_1^0}$ — обратная к операции

$$P'\left(u_{\mu_1^0}, \mu_2\right)v \equiv u_{\mu_1^0, xx}v_{yy} - 2u_{\mu_1^0, xy}v_{xy} + u_{\mu_1^0, yy}v_{xx},$$

состоит в нахождении функции $v \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$, являющейся решением уравнения

$$u_{\mu_1^0, xx}v_{yy} - 2u_{\mu_1^0, xy}v_{xy} + u_{\mu_1^0, yy}v_{xx} = g(x, y)$$

по заданной функции $g(x, y)$ из пространства $C^{\alpha}(\Omega)$. Согласно первой теореме Шаудера $\Gamma_0^{\mu_1^0}$ будет ограниченной линейной операцией, причем ее норма $\left\|\Gamma_0^{\mu_1^0}\right\|$ зависит лишь от $\left\|u_{\mu_1^0}\right\|_{2, \alpha}$, радиуса R круга Ω и числа λ_0, которое оценивает снизу собственные числа квадратичной формы

$$u_{\mu_1^0, xx}\xi^2 + 2u_{\mu_1^0, xy}\xi\eta + u_{\mu_1^0, yy}\eta^2.$$

Поскольку в Ω справедливо неравенство

$$u_{\mu_1^0, xx}u_{\mu_1^0, yy} - u^2_{\mu_1^0, xy} = \mu_1^0\varphi(x, y) + \left(1 - \mu_1^0\right)k^2 \geqslant k^2,$$

то очевидно, что λ_0 может быть оценена снизу положительным числом, зависящим лишь от k^2, $\left\|u_{\mu_1^0}\right\|_2$ и радиуса круга Ω.

Далее

$$\left\|P\left(u_{\mu_1^0};\ \mu_2\right)\right\|_Y = \left\|\mu_1^0\varphi - \left(1 - \mu_1^0\right)k^2 - \mu_2\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \mu_2\right)k^2\right\|_\alpha = \left(\mu_2 - \mu_1^0\right)\left\|\varphi - k^2\right\|_\alpha.$$

Для нормы операции $P''(u, \mu_2)$ в любой точке $u \in X$, очевидно, имеет место оценка

$$\|P''(u, \mu_2)\| \leqslant 4.$$

Числа B, η, K определяются по формулам:

$$B = \left\|\Gamma_0^{\mu_1^0}\right\|, \quad \eta = \left(\mu_2 - \mu_1^0\right)\left\|\varphi(x, y) - k^2\right\|_\alpha, \quad K = 4.$$

Так же, как и выше, устанавливается, что при выполнении соотношения

$$\mu_2 \leqslant \mu_2^0 = \min\left\{1;\ \mu_1^0 + \frac{1}{12\left\|\varphi - k^2\right\|_\alpha \left\|\Gamma_0^{\mu_1^0}\right\|^2}\right\}$$

задача

$$\left.\begin{aligned} P(u, \mu_2) &= 0, \\ u|_\Gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1,6,10)$$

имеет единственное решение $u_{\mu_2}(x, y)$. Если $\mu_2^0 = 1$, то исходная задача (1,6,1) решена. Если же $\mu_2^0 < 1$, то продолжаем процесс, выбирая за новое начальное приближение функцию $u_{\mu_2^0}(x, y)$.

Повторяя дословно те же построения, что и выше, докажем существование решения задачи (1,6,3) для $\mu \leqslant \mu_3^0$, где

$$\mu_3^0 = \min\left\{1;\ \mu_2^0 + \frac{1}{12\,\|\varphi - k^2\|_\alpha \left\|\Gamma_0^{\mu_2^0}\right\|^2}\right\}.$$

Если указанный процесс не окончится в конечное число шагов, то существование положительного решения задачи (1,6,3) в результате неограниченного применения процесса будет доказано для всех $\mu < m$, где

$$m = \min\left\{1,\ \frac{1}{12\,\|\varphi - k^2\|_\alpha}\left(\frac{1}{\|\Gamma_0\|^2} + \frac{1}{\left\|\Gamma_0^{\mu_1^0}\right\|^2} + \dots\right)\right\}.$$

Для $\mu = m$ существование положительного решения задачи (1,6,3) устанавливается в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha'}$, где $\alpha' > 0$ — любое число, меньшее α.

Задача (1,6,3) имела бы положительное решение в $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Omega)$ при любом $\mu \in [0, 1]$, если бы нам удалось установить равномерную по n оценку

$$\left\|\Gamma_0^{\mu_n^0}\right\| \leqslant B_0.$$

В свою очередь, $\left\|\Gamma_0^{\mu_n^0}\right\|$ зависит лишь от $\left\|u_{\mu_n^0}\right\|_{2,\alpha}$, числа k и радиуса круга Ω. Таким образом, если бы была установлена равномерная по $\mu \in [0, 1]$ оценка

$$\|u_\mu\|_{2,\alpha} \leqslant M = \text{const} < +\infty \qquad (1,6,11)$$

для всех решений u_μ задачи (1,6,3) в предположении существования этого решения, то была бы установлена разрешимость исходной задачи (1,6,1).

Оценка (1,6,11) обычно устанавливается, исходя из свойств коэффициентов эллиптического уравнения и свойств граничных условий. При этом предполагается, что решение краевой задачи существует. (Нас не интересует, каким методом это решение может быть получено.) Поэтому такого типа оценки решений краевых задач называют априорными.

Итак, мы выяснили, что наличие равномерной априорной оценки решения задачи (1,6,3) в метрике $C^{2,\alpha}(\Omega)$ гарантирует разрешимость исходной задачи (1,6,1). Само решение может быть получено конечным числом применений метода Ньютона. Ниже в § 2 с аналогичных позиций будет рассмотрена задача Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения.

§ 2. Задача Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения

1. Формулировка основной теоремы. Пусть Ω — замкнутая область класса $L_{m,\lambda}$ ($m \geqslant 2$; $0 < \lambda < 1$), Γ — граница Ω. На классе функций $\overset{\circ}{C}{}^{m,\lambda}$ рассмотрим оператор $F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$, которому соответствует эллиптическое уравнение

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0. \qquad (2,1,1)$$

Будем предполагать, что

1. При всех $(x, y) \in \Omega$ и любых конечных z, p, q, r, s, t функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, как функция восьми независимых переменных, имеет все производные до порядка m включительно ($m \geqslant 2$), причем производные m-го порядка удовлетворяют условию Гельдера по переменным x, y, z, p, q, r, s, t. Аналитически это означает следующее: обозначим через

$$Q_M = \begin{cases} -M \leqslant z \leqslant M, & -M \leqslant r \leqslant M,\text{*)} \\ -M \leqslant p \leqslant M, & -M \leqslant s \leqslant M, \\ -M \leqslant q \leqslant M, & -M \leqslant t \leqslant M \end{cases} \qquad (2,1,2)$$

($M > 0$ — некоторое фиксированное число). Тогда на топологическом произведении $Q_M \times \Omega$ функция восьми независимых переменных $F(r, s, t, p, q, z, x, y) \in C^{m,\lambda}$. Ясно, что $\|F\|_{m,\lambda}$ на $Q_M \times \Omega$ зависит от M и может неограниченно возрастать при $M \to +\infty$.

---

*) Множество Q_M, очевидно, представляет собой куб в шестимерном пространстве переменных r, s, t, p, q, z.

2. На всех решениях из $C^{m,\lambda}$ уравнения (2,1,1), удовлетворяющих неравенству $\|z\|_2 \leqslant M$, справедливы соотношения

$$F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 \geqslant 2\sigma(M) > 0, \tag{2,1,3}$$

$$F_z \leqslant 0, \tag{2,1,4}$$

где $\sigma(M)$ — положительная непрерывная функция на $[0, +\infty)$.

Ниже мы будем исследовать вопрос о достаточных условиях существования в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{m,\lambda}$ решений задачи Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0, \\ z|_\Gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2,1,5}$$

на которых оператор $F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$ положительно эллиптичен.

Так же, как и в п. 6 предыдущего параграфа, мы используем для этого метод продолжения по параметру. Допустим, что нам удалось включить уравнение (2,1,1) в параметрическое семейство уравнений

$$\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0; \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{2,1,6}$$

обладающее следующими свойствами:

1. $\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; 1) \equiv F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$.

2. Функция Φ при любом $M > 0$ на топологическом произведении $Q_M \times \Omega \times [0, 1]$ принадлежит $C^{m,\lambda}$ как функция независимых переменных $r, s, t, p, q, z, x, y, \mu$.

3. На всех решениях $z(x, y) \in C^2$ уравнения

$$\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0$$

при любом фиксированном $\mu \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\Phi_r \Phi_t - \frac{1}{4} \Phi_s^2 \geqslant \sigma(\|z\|_2) \tag{2,1,7}$$

(функция $\sigma(M)$ введена выше, см. соотношение (2,1,3)).

4. При всех $(x, y) \in \Omega$, $\mu \in [0, 1]$ и любых конечных z, p, q, r, s, t справедливо неравенство

$$\Phi_z(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu) \leqslant 0. \tag{2,1,8}$$

В дальнейшем через $z_\mu(x, y)$ будем обозначать решение следующей задачи Дирихле:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0,\\ z\big|_\Gamma = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (2,1,9)$$

на котором оператор Φ положительно эллиптичен.

Теорема 9 (основная теорема). *Рассмотрим задачу Дирихле* (2,1,5), *и пусть уравнение* (2,1,1) *включено в параметрическое семейство уравнений* (2,1,6), *для которого выполнены условия* 1—4. *Тогда, если при всех* $\mu \in [0, 1]$ *справедлива равномерная априорная оценка*

$$\|z_\mu\|_{m, \lambda} \leqslant A < +\infty \qquad (2,1,10)$$

и при $\mu = 0$ *задача Дирихле* (2,1,9) *имеет решение* $z_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$, *то задача Дирихле* (2,1,9) *имеет решение* $z_\mu(x, y)$ *в* $\overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$ *для всех* $\mu \in [0, 1]$, *т. е. исходная задача Дирихле* (2,1,5) *имеет по крайней мере одно решение в пространстве* $\overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$.

Если мы знаем дополнительно, что функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ порождает эллиптически выпуклый оператор (см. п. 4 § 1), то, согласно теореме 6 (см. там же), задача Дирихле (2,1,5) будет всегда иметь единственное решение.

Доказательство теоремы 9 опирается на ряд вспомогательных предложений.

2. Леммы о собственных числах квадратичной формы $\Phi_r\xi^2 + \Phi_s\xi\eta + \Phi_t\eta^2$. Пусть $u(x, y) \in C^2$; положим

$$\begin{aligned}T(\mu, u) = \Phi_r(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu)\,\xi^2 +\\ + \Phi_s(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu)\,\xi\eta +\\ + \Phi_t(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu)\,\eta^2.\end{aligned} \qquad (2,2,1)$$

Лемма 1. *В условиях теоремы 9 справедлива равномерная по* $\mu \in [0, 1]$ *оценка*

$$T(\mu, z_\mu) \geqslant 2\nu_0(\xi^2 + \eta^2). \qquad (2,2,2)$$

Положительная постоянная ν_0 *зависит лишь от числа* B, *являющегося точной верхней гранью норм* $\|z_\mu\|_2$, *где* z_μ — *любое положительное решение задачи* (2,1,9).

Число B, очевидно, удовлетворяет неравенствам

$$\|z_\mu\|_2 \leqslant B \leqslant A. \tag{2,2,3}$$

Доказательство. Для любого $\mu \in [0, 1]$ коэффициенты формы $T(\mu, z_\mu)$: Φ_r, Φ_s, Φ_t удовлетворяют неравенствам

$$\Phi_r\Phi_t - \frac{1}{4}\Phi_s^2 \geqslant \sigma(B) > 0, \tag{2,2,4}$$

$$|\Phi_r|,\ |\Phi_s|,\ |\Phi_t| \leqslant C = \text{const} < +\infty; \tag{2,2,5}$$

постоянная C, очевидно, зависит лишь от числа B.

Из (2,2,4) вытекает, что

$$\frac{1}{4}\Phi_s^2 \leqslant \Phi_r\Phi_t - \sigma_0, \quad \text{где} \quad \sigma_0 = \sigma(B).$$

Положим

$$\sigma_0 = \varepsilon\Phi_r\Phi_t. \tag{2,2,6}$$

Так как

$$\Phi_r\Phi_t \geqslant \sigma_0; \quad |\Phi_r| \leqslant C; \quad |\Phi_t| \leqslant C,$$

то

$$1 \geqslant \varepsilon \geqslant \frac{\sigma_0}{C^2}. \tag{2,2,7}$$

Из (2,2,6) следует, что

$$\frac{1}{4}\Phi_s^2 \leqslant (1-\varepsilon)\Phi_r\Phi_t. \tag{2,2,8}$$

Перейдем к оценке снизу квадратичной формы $T(\mu, z_\mu)$. Пользуясь неравенствами (2,2,8) и (2,2,7) имеем

$$\begin{aligned} T(\mu, z_\mu) &\geqslant \Phi_r\xi^2 - |\Phi_s|\,|\xi|\,|\eta| + \Phi_t\eta^2 \geqslant \\ &\geqslant \Phi_r\xi^2 - 2\sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{\Phi_r\Phi_t}\,|\xi|\,|\eta| + \Phi_t\eta^2 = \\ &= \left(\sqrt[4]{(1-\varepsilon)}\sqrt{\Phi_r}\,|\xi| - \sqrt[4]{1-\varepsilon}\sqrt{\Phi_t}\,|\eta|\right)^2 + \\ &+ \left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)(\Phi_r\xi^2 + \Phi_t\eta^2) \geqslant \left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)(\Phi_r\xi^2 + \Phi_t\eta^2). \end{aligned} \tag{2,2,9}$$

Так как

$$\Phi_r = \frac{\Phi_r\Phi_t}{\Phi_t} \geqslant \frac{\sigma_0}{C}; \quad \Phi_t = \frac{\Phi_r\Phi_t}{\Phi_r} \geqslant \frac{\sigma_0}{C}$$

и

$$1-\sqrt{1-\varepsilon} \geqslant 1-\sqrt{1-\frac{\sigma_0}{C^2}},$$

то имеем

$$T(\mu,\ z_\mu) \geqslant \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{C^2}}\right) \frac{\sigma_0}{C} (\xi^2 + \eta^2).$$

Приняв за $2\nu_0$ число $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{C^2}}\right) \frac{\sigma_0}{C}$, получим неравенство (2,2,2). Лемма доказана.

Пусть $z_{\mu_0}(x,\ y) \in \overset{\circ}{C}{}^{m,\ \lambda}$ $(m \geqslant 2;\quad \mu_0 \in [0,\ 1])$ — решение задачи (2,1,9), на котором оператор, порожденный функцией $\Phi(z_{xx},\ \ldots,\ z;\ \mu_0)$, положительно эллиптичен. Рассмотрим некоторое число $\bar{\mu} \in [0,\ 1]$. Нас будет интересовать вопрос, какому достаточному условию должно удовлетворять число $\bar{\mu}$, чтобы собственные числа квадратичной формы $T(\bar{\mu},\ z_{\mu_0})$ оценивались снизу числом ν_0, фигурирующим в лемме 1.

Далее мы будем предполагать, что выполнены все условия теоремы 9 и леммы 1, связанные со свойствами функции $\Phi(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ x,\ y;\ \mu)$ и решений $z_\mu(x,\ y)$.

Поэтому при всех $\mu \in [0,\ 1]$

$$\| z_\mu \|_2 \leqslant B. \qquad (*)$$

Рассмотрим квадратичную форму $T(\bar{\mu},\ z_{\mu_0})$. Из $(*)$ следует, что в пространстве переменных $r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z$ при любых $(x,\ y) \in \Omega$ точка с координатами

$$\begin{aligned} r &= z_{\mu_0,\ xx}(x,\ y), \\ s &= z_{\mu_0,\ xy}(x,\ y), \\ t &= z_{\mu_0,\ yy}(x,\ y), \\ p &= z_{\mu_0,\ x}(x,\ y), \\ q &= z_{\mu_0,\ y}(x,\ y), \\ z &= z_{\mu_0}(x,\ y) \end{aligned}$$

принадлежит кубу Q_B. Поэтому аргументы коэффициентов квадратичной формы $T(\bar{\mu},\ z_{\mu_0})$ при любых μ_0 и $\bar{\mu} \in [0,\ 1]$ заполняют собой некоторое замкнутое множество, лежащее в компактном множестве $Q_B \times \Omega \times [0,\ 1]$ девятимерного евклидова пространства $r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ x,\ y,\ \mu$.

В силу условия 2, наложенного на функцию Φ, частные производные $\Phi_r,\ \Phi_s,\ \Phi_t$ по всем девяти переменным удовлетворяют условию Гельдера с показателем 1 и коэффициентами, зависящими от числа B, если аргументы этих функций меняются в области $Q_B \times \Omega \times [0, 1]$.

Поэтому

$$T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) \geqslant T(\mu_0, z_{\mu_0}) - |T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) - T(\mu_0, z_{\mu_0})|.$$

Но

$$|T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) - T(\mu_0, z_{\mu_0})| \leqslant |\bar{\mu} - \mu_0| (A_1\xi^2 + A_2|\xi||\eta| + A_3\eta^2),$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные следующих условий Гельдера:

$$|\Phi_r(r, s, t, p, q, z, x, y; \bar{\mu}) - \Phi_r(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu_0)| \leqslant \leqslant A_1|\bar{\mu} - \mu_0|,$$

$$|\Phi_s(r, s, t, p, q, z, x, y; \bar{\mu}) - \Phi_r(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu_0)| \leqslant \leqslant A_2|\bar{\mu} - \mu_0|,$$

$$|\Phi_t(r, s, t, p, q, z, x, y; \bar{\mu}) - \Phi_t(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu_0)| \leqslant \leqslant A_3|\bar{\mu} - \mu_0|,$$

а аргументы $r, s, t, p, q, z \in Q_B$; $(x, y) \in \Omega$; $\mu_0, \bar{\mu} \in [0, 1]$. Как уже было сказано, постоянные A_1, A_2, A_3 зависят лишь от числа B.

Поэтому существует такое $\delta > 0$, что из $|\bar{\mu} - \mu_0| \leqslant \delta$ следует

$$|T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) - T(\mu_0, z_{\mu_0})| \leqslant \nu_0(\xi^2 + \eta^2).$$

Следовательно, для $\bar{\mu}$, удовлетворяющих неравенству $|\bar{\mu} - \mu_0| \leqslant \delta$, будем иметь, используя лемму 1, что

$$T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) \geqslant T(\mu_0, z_{\mu_0}) - |T(\bar{\mu}, z_{\mu_0}) - T(\mu_0, z_{\mu_0})| \geqslant \nu_0(\xi^2 + \eta^2).$$

Суммируя приведенные рассуждения, приходим к следующей лемме.

Лемма 2. *В условиях теоремы 9 существует такое* $\delta \in [0, 1]$, *что лишь* $\mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ *и* $|\mu_2 - \mu_1| \leqslant \delta$, *тотчас же справедливо соотношение*

$$T(\mu_2, z_{\mu_1}) \geqslant \nu_0(\xi^2 + \eta^2).$$

Число $\delta > 0$ *определяется числом* B *из неравенства* (2,2,3). *Здесь через* $z_{\mu_1}(x, y)$ *обозначено решение задачи Дирихле* (2,1,9), *на котором оператор, порожденный* *функцией* $\Phi(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu)$, *положительно эллиптичен.*

3. Лемма о локальной разрешимости по параметру задачи Дирихле. Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 9. Пусть, далее, при некотором* $\mu_0 \in [0, 1]$ *задача Дирихле* (2,1,9) *имеет положительное решение* $z_{\mu_0} \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$. *Тогда при всех* $\mu \in [0, 1]$ *и удовлетворяющих неравенству*

$$|\mu - \mu_0| \leqslant \min\left(\delta, \frac{1}{3R_0^2R_1R_2}, \frac{1}{4R_0R_2}\right)^{*)} \tag{2,3,1}$$

задача Дирихле (2,1,9) *имеет в шаре* $\|z - z_0\|_{m, \lambda} \leqslant \frac{1}{2}$ *единственное решение* $z_\mu \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$.

Через R_0, R_1, R_2 обозначены следующие величины:

$$R_1 = \sup_{Q_A \times \Omega \times [0, 1]} \left\| \frac{\partial \Phi(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu)}{\partial \mu} \right\|_{m-2, \lambda}, \tag{2,3,2}$$

$$R_2 = \sup_{Q_{A+1} \times \Omega \times [0, 1]} \|\Phi(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu)\|_{m, \lambda}, \tag{2,3,3}$$

$$R_0 = \sup_{\substack{\mu \in [0, 1] \\ |\mu - \mu_0| \leqslant \delta}} \left\| [P'(z_{\mu_0}, \mu)]^{-1} \right\|. \tag{2,3,4}$$

Через $P'(z_{\mu_0}, \mu)$ обозначена производная Фреше от оператора

$$P(u, \mu) = \Phi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu). \tag{2,3,5}$$

Как число $\delta > 0$, так и постоянные R_0, R_1, R_2 полностью определяются числами A и $\sigma_0 > 0$, фигурирующими в условиях теоремы 9. Отметим, что все числа δ, R_0, R_1, R_2 не зависят от выбора точки μ_0 на сегменте $[0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим на $\overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$ семейство операторов

$$P(u, \mu) = \Phi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu),$$

зависящих от параметра $\mu \in [0, 1]$.

Из условий леммы 3 вытекает, что при всяком фиксированном $\mu \in [0, 1]$ $P(u, \mu)$ отображает банахово пространство $X = \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}(\Omega)$ в банахово пространство $Y = C^{m-2, \lambda}(\Omega)$.

*) Число $1 \geqslant \delta > 0$ то же, что и в лемме 2.

Фиксируем теперь произвольно число $\bar{\mu} \in [0, 1]$, удовлетворяющее неравенству (2,3,1). Для этого $\bar{\mu}$ будем находить решение $z_{\bar{\mu}}(x, y)$ задачи (2,1,9) методом Ньютона, выбирая в качестве начального приближения функцию $z_{\mu_0}(x, y)$. Производная Фреше от $P(u, \bar{\mu})$ на функции $z_{\mu_0}(x, y)$ имеет вид

$$P'(z_{\mu_0}, \bar{\mu})v = \Phi_r^0 v_{xx} + \Phi_s^0 v_{xy} + \Phi_t^0 v_{yy} + \\ + \Phi_p^0 v_x + \Phi_q^0 v_y + \Phi_z^0 v. \qquad (2,3,6)$$

(Через Φ_r^0, Φ_s^0, ..., Φ_z^0 обозначены соответственно результаты подстановки в Φ_r, Φ_s, ..., Φ_z функции $z_{\mu_0}(x, y)$ и числа $\bar{\mu}$.) Эта производная есть линейный оператор, переводящий функцию $v \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$ в функцию $g(x, y) \in C^{m-2, \lambda}$. Из условий теоремы 9 вытекает, что $\Phi_r^0, \Phi_s^0, \ldots, \Phi_z^0 \in C^{m-2, \lambda}$, причем согласно обозначениям п. 5 § 1 при всех $\mu \in [0, 1]$ $\|P'(z_{\mu_0}, \mu)\|_{m-2, \lambda}$ ограничена сверху в зависимости лишь от числа A, которое определяется неравенством (2,1,10).

Так как $|\bar{\mu} - \mu_0| \leqslant \delta$, то из леммы 2 вытекает, что

$$T(z_{\mu_0}, \bar{\mu}) = \Phi_r^0 \xi^2 + \Phi_s^0 \xi\eta + \Phi_t^0 \eta^2 \geqslant \nu_0(\xi^2 + \eta^2).$$

Напомним, что число ν_0 определяется лишь числами A и σ_0. Из условия (2,1,8) вытекает, что

$$\Phi_z \leqslant 0.$$

Применяя первую теорему Шаудера (п. 3, § 1), убеждаемся, что операция $P'(z_{\mu_0}, \bar{\mu})$ имеет обратную $\Gamma_0^{\bar{\mu}}$, причем $\|\Gamma_0^{\bar{\mu}}\|$ зависит лишь от чисел A и σ_0. Так как число $\bar{\mu} \in [0, 1]$, подчиненное неравенству $|\bar{\mu} - \mu_0| \leqslant \delta$, выбрано произвольно, то $\|\Gamma_0^{\bar{\mu}}\| \leqslant R_0$. Кроме того, из наших рассуждений следует, что R_0 зависит лишь от чисел A и σ_0 и не зависит от выбора числа μ_0 на сегменте $[0, 1]$.

Далее

$$\|P(z_{\mu_0}, \bar{\mu})\|_{m-2, \lambda} = \|P(z_{\mu_0}, \bar{\mu}) - P(z_{\mu_0}, \mu_0)\|_{m-2, \lambda} \leqslant |\bar{\mu} - \mu_0| \times \\ \times \left\| \frac{\partial \Phi(z_{\mu_0, xx}, z_{\mu_0, xy}, z_{\mu_0, yy}, \ldots, z_{\mu_0}, x, y, \mu_0 + \theta(\bar{\mu} - \mu_0))}{\partial \mu} \right\|_{m-2, \lambda} \leqslant \\ \leqslant |\bar{\mu} - \mu_0| R_1,$$

где число R_1 определено выше соотношением (2,3,2). Ясно, что число R_1 зависит лишь от числа A и не зависит от выбора точки μ_0 на сегменте $[0, 1]$.

Вторая производная от оператора $P(u, \bar{\mu})$ имеет вид

$$[P''(u, \bar{\mu})]\, v,\ w = \Phi_{rr} w_{xx} v_{xx} + \Phi_{ss} w_{xy} v_{xy} + \Phi_{tt} w_{yy} v_{yy} + \\ + \Phi_{rs}(w_{xx} v_{xy} + w_{xy} v_{xx}) + \ldots + \Phi_{zz} wv.$$

Очевидно, что при любом $\mu \in [0, 1]$ и любой функции $u \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$, удовлетворяющей неравенству $\| u \|_{m, \lambda} \leqslant A + \frac{1}{2}$, норма второй производной $P''(u, \mu)$, как линейной операции, допускает оценку

$$\| P''(u, \mu) \| \leqslant (\sup \| \Phi_{rr}(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu) \|_{m-2, \lambda} + \ldots \\ \ldots + \sup \| \Phi_{zz}(r, s, t, p, q, z, x, y; \mu) \|_{m-2, \lambda}),$$

где точная верхняя граница каждого слагаемого берется в области $Q_{A+1} \times \Omega \times [0, 1]$. Тем более имеет место оценка

$$\| P''(u, \mu) \| \leqslant R_2,$$

где число R_2 определяется соотношением (2,3,3). В частности, для всех $u \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$, удовлетворяющих неравенству $\| u \|_{m, \lambda} \leqslant A + \frac{1}{2}$, имеем

$$\| P''(u, \bar{\mu}) \| \leqslant R_2. \tag{2,3,7}$$

Докажем, что решение задачи (2,1,9) для $\mu = \bar{\mu}$ может быть получено методом Ньютона, если в качестве начального приближения взята функция $z_{\mu_0}(x, y)$. В самом деле, примем за G_0 множество функций из $\overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$, удовлетворяющих неравенству

$$\| u(x, y) - z_{\mu_0}(x, y) \|_{m, \lambda} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для функций $u(x, y)$ из G_0, очевидно, имеем, что $\| u \|_{m, \lambda} \leqslant A + \frac{1}{2}$.

Далее, числа h и r_0, фигурирующие в методе Ньютона, таковы:

$$h = R_0^2 R_1 R_2 |\bar{\mu} - \mu_0|,$$

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \eta B = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} R_0 R_1 |\bar{\mu} - \mu_0|.$$

Так как выполнено неравенство (2,3,1), то $h \leqslant \frac{1}{3}$, а $r_0 < \frac{1}{2}$. Последнее неравенство есть следствие соотношений

$$r_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-2h}} R_0 R_1 |\bar{\mu} - \mu_0| < 2R_0 R_1 |\bar{\mu} - \mu_0| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h} B\eta = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h} R_0 R_1 |\bar{\mu} - \mu_0| > \frac{1}{2}. \tag{2,3,8}$$

Действительно, неравенство (2,3,8) с помощью неравенства (2,3,1) сводится при $0 < h \leqslant \frac{1}{3}$ к очевидному неравенству $2h - 1 < \sqrt{1-2h}$.

Итак, все условия теоремы 7 и дополнения к ней соблюдены. Лемма 3, следовательно, доказана *).

4. Завершение доказательства основной теоремы. Нетрудно видеть, что в силу равномерных оценок для чисел $\delta > 0$, R_0, R_1, R_2, полученных в леммах 1, 2, 3, независимо от выбора числа μ_0 на $[0, 1]$, и используя условие теоремы 9 о существовании решения задачи (2,1,9) при $\mu = \mu_0$, мы, применяя конечное число раз метод Ньютона по схеме, описанной в п. 6 § 1, докажем существование решения задачи (2,1,9) в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$ при всех $\mu \in [0, 1]$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость основной теоремы.

5. Основная теорема в случае общего краевого условия. Перейдем теперь к изучению задачи Дирихле для уравнения (2,1,1), когда рассматривается общее граничное условие

---

*) Если оператор $P(z; \mu)$ эллиптически выпуклый на решениях уравнения $P(z; \mu) = 0$, то, согласно принципу максимума (теорема 6 п. 3 § 1), задача Дирихле (2,1,9) будет иметь в C^2 единственное решение $z_\mu(x, y) \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \lambda}$.

$z|_\Gamma = g(s)$. Ниже так же, как и во всем предшествующем изложении, рассматриваются только те решения уравнения (2,1,1), на которых оператор

$$P(z) = F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$$

положительно эллиптичен, о чем мы не делаем никаких оговорок в дальнейшем.

Теорема 10. *Пусть относительно функции* $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ *и всех решений* $z(x, y) \in C^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$ *уравнения* (2,1,1) *выполнены условия 1 и 2 п. 1 настоящего параграфа. Тогда, если задача Дирихле* (2,1,5) *имеет решение* $z_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{m,\lambda}(\Omega + \Gamma)$, *то задача Дирихле*

$$\left.\begin{aligned} F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0, \\ z|_\Gamma = g(s) \in C^{m+2,\lambda}(\Gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (2,5,1)$$

также имеет решение в $C^{m,\lambda}(\Omega + \Gamma)$, *если для всех решений* $z_\mu(x, y)$ *задачи*

$$\left.\begin{aligned} F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0, \\ z|_\Gamma = \mu g(s) \end{aligned}\right\} \qquad (2,5,2)$$

справедлива равномерная по $\mu \in [0, 1]$ *априорная оценка*

$$\|z\|_{m,\lambda} \leqslant A < +\infty.$$

Доказательство. Эта теорема легко доказывается путем сведения ее к теореме 9.

Пусть функция $v(x, y) \in C^{m+2,\lambda}(\Omega + \Gamma)$ и на границе обращается в $g(s)$. Такая функция заведомо существует. Ею может служить, например, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\left.\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ v|_\Gamma = g(s). \end{aligned}\right\} \qquad (2,5,3)$$

Пусть $z_\mu(x, y)$ — решение задачи (2,5,2), зависящее от параметра $\mu \in [0, 1]$. Положим

$$u_\mu(x, y) = z_\mu(x, y) - \mu v(x, y).$$

Функция $u_\mu(x, y)$, очевидно, обращается в нуль на границе области Ω и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu) = 0, \qquad (2,5,4)$$

где

$$\Phi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu) \equiv$$
$$\equiv F(u_{xx} + \mu v_{xx}, u_{xy} + \mu v_{xy}, u_{yy} + \mu v_{yy}, u_x + \mu v_x, u_y + \mu v_y, u + \mu v, x, y).$$

При $\mu = 1$ функция $z_1 = u_1 + v$ есть решение задачи (2,5,2). Легко проверяется (это мы предоставляем сделать читателю), что относительно задачи Дирихле

$$\Phi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x, y; \mu) = 0,$$
$$u|_\Gamma = 0$$

выполнены все условия теоремы 9. Справедливость теоремы 10 вытекает отсюда немедленно.

Если оператор $P(z)$ эллиптически выпуклый на решениях уравнения

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0,$$

то задача Дирихле имеет единственное решение, на котором $P(z)$ положительно эллиптичен. (См. теорему 6 п. 4 § 1.)

§ 3. Априорные оценки решений линейных эллиптических уравнений

В этом параграфе будут изложены результаты Л. Ниренберга [13] об априорных оценках решений линейных эллиптических уравнений

$$A(x, y)\, z_{xx} + 2B(x, y)\, z_{xy} + C(x, y)\, z_{yy} = D(x, y)$$

в $C^{1,\lambda}$, если известны их априорные оценки в C^1.

1. Вспомогательные утверждения. Лемма 4. *Пусть $p(x, y)$ — функция, определенная в области $\mathfrak{A}$ на плоскости x, y и имеющая там непрерывные первые производные. Пусть $\mathfrak{B}$ — замкнутая подобласть области $\mathfrak{A}$, удаленная на расстояние $2d$ от границы $\mathfrak{A}$. Предположим, что 1) функция $p(x, y)$ ограничена по модулю положительной постоянной K_1 в $\mathfrak{B}$; 2) существуют* *такие положительные постоянные M и $\alpha < 1$, что для любого круга C_d с центром в $\mathfrak{B}$ и радиусом d имеет место неравенство*

$$\iint\limits_{C_d} r^{-\alpha}(p_x^2 + p_y^2)\,dx\,dy \leqslant M$$

(r — расстояние от точки интегрирования до центра круга C_d). Тогда функция $p(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера в $\mathfrak{B}$ с показателем $\alpha/2$ и коэффициентом, зависящим только от K_1, M, α и d.

Доказательство. Если расстояние между двумя точками P, $P' \in \mathfrak{B}$ не меньше d, то

$$\frac{|p(P) - p(P')|}{|\overline{PP'}|^{\alpha/2}} \leqslant \frac{2K_1}{d^{\alpha/2}},$$

так как $|p(x, y)| \leqslant K_1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $|\overline{PP'}| < d$ и P, $P' \in \mathfrak{B}$. Для любой точки $(x, y) \in \mathfrak{A}$ имеем

$$|p(P) - p(P')| \leqslant |p(P) - p(x, y)| + |p(x, y) - p(P')|. \tag{3,1,1}$$

Пусть точка (x, y) пробегает круг ω, для которого отрезок PP' является диаметром. Обозначая через s диаметр круга ω и интегрируя по этому кругу неравенство (3,1,1), придем к соотношению

$$\frac{\pi s^2}{4}|p(P) - p(P')| \leqslant \iint\limits_{\omega} |p(P) - p(x, y)|\,dx\,dy + \\ + \iint\limits_{\omega} |p(x, y) - p(P')|\,dx\,dy. \tag{3,1,2}$$

Первое слагаемое в правой части не уменьшится, если мы расширим область интегрирования до круга C_s с центром в P и радиусом s. Поскольку $s < d$, то $C_s \subset \mathfrak{A}$. Введем полярные координаты r, θ в этом круге. Так как

$$p(r, \theta) - p(P) = \int\limits_0^r p_r(\rho, \theta)\,d\rho,$$

то первое слагаемое правой части (3,1,2) не превосходит величины

$$I_1=\int_{C_s}\int r\left[\int_0^r |p_r(\rho,\ \theta)|\,d\rho\right]dr\,d\theta.$$

Положим

$$f(r)=\int_0^r |p_r(\rho,\ \theta)|\,d\rho.$$

Тогда

$$I_1=\int_0^{2\pi}\int_0^s rf(r)\,dr\,d\theta.$$

Производя во внутреннем интеграле интегрирование по частям, получим тождество

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^s\int_0^{2\pi}(s^2-r^2)|\,p_r|\,dr\,d\theta.$$

Следовательно,

$$I_1\leqslant\frac{1}{2}s^2\int_0^s\int_0^{2\pi}|p_r|dr\,d\theta=\frac{1}{2}s^2\int_{C_s}\int\frac{|p_r|}{r}dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}s^2\int_{C_s}\int r^{\frac{\alpha}{2}-1}|\,p_r|\,r^{-\frac{\alpha}{2}}\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}s^2\left[\int_{C_s}\int r^{\alpha-2}\,dx\,dy\int_{C_s}\int r^{-\alpha}p_r^2\,dx\,dy\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}s^2\left[\frac{2\pi}{\alpha}s^\alpha\int_{C_d}\int r^{-\alpha}\left(p_x^2+p_y^2\right)dx\,dy\right]^{1/2}.$$

(В предпоследнем переходе в неравенствах использовано неравенство Буняковского, а в последнем — соотношения $p_x^2+p_y^2\geqslant p_r^2$ и $C_s\subset C_d$.) Таким образом,

$$I_1\leqslant\sqrt{\frac{\pi M}{2\alpha}}\;s^{2+\frac{\alpha}{2}}. \tag{3,1,3}$$

Аналогичная оценка может быть получена для второго слагаемого в правой части неравенства (3,1,2). Поэтому из соотношений (3,1,2—3) вытекает неравенство

$$\frac{\pi s^2}{4}|p(P)-p(P')|\leqslant\sqrt{\frac{2\pi M}{\alpha}}\,s^{2+\frac{\alpha}{2}},$$

или

$$\frac{|p(P)-p(P')|}{|PP'|^{\alpha/2}}\leqslant 4\sqrt{\frac{2M}{\pi\alpha}},$$

так как $|\overline{PP'}|=s$. Справа стоит постоянная, зависящая только от M и α. Доказательство леммы окончено.

Докажем теперь аналогичную лемму в случае, когда $\mathfrak{B}$ — замкнутая область.

Лемма 5. *Пусть $p(x, y)$ — функция, имеющая непрерывные первые производные в замкнутой области $\mathfrak{A}$ типа L_2. Предположим, что $|p(x, y)|\leqslant K_1$ и существуют такие положительные постоянные* α, M, d ($\alpha<1$), *что для любого круга C_d с центром в $\mathfrak{A}$ и радиусом d выполняется неравенство*

$$\iint\limits_{C_d\cap\mathfrak{A}} r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2)\,dx\,dy\leqslant M.$$

Тогда $p(x, y)$ удовлетворяет в $\mathfrak{A}$ условию Гельдера с показателем $\alpha/2$, причем коэффициент условия Гельдера зависит только от чисел K_1, M, α, d и свойств границы $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть P — любая точка области $\mathfrak{A}$. Рассмотрим прямой круговой сектор радиуса s с вершиной в точке P; обозначим такой сектор через $\Omega(P, s)$. Так как $\mathfrak{A}\in L_2$, то граница $\mathfrak{A}$ не имеет угловых точек. Поэтому для каждой точки $P\in\mathfrak{A}$ можно найти такой сектор $\Omega(P, s)$, который при достаточно малом s целиком лежит в $\mathfrak{A}$. Очевидно, что для любой точки P и радиуса s может существовать много таких секторов.

По условию леммы во всех точках границы $\mathfrak{A}$ кривизна оценена сверху одним числом. Поэтому существует такое положительное число d', что при $s\leqslant d'$ для любых двух точек P и $P'\in\mathfrak{A}$, удаленных друг от друга на расстояние s, существуют области $\Omega(P, s)$ и $\Omega(P', s)$ с общей площадью не меньше $\frac{1}{4}s^2$, целиком лежащие в $\mathfrak{A}$.

После этих предварительных замечаний перейдем к нахождению констант Гельдера для функции $p(x, y)$.

Если расстояние $|\overline{PP'}| \geqslant d'$, то

$$\frac{|p(P)-p(P')|}{|\overline{PP'}|^{\alpha/2}} \leqslant \frac{2K_1}{(d')^{\alpha/2}},$$

так как $|p(x, y)| \leqslant K_1$. Поэтому можно ограничиться случаем, когда

$$|\overline{PP'}| = s < d'.$$

Пусть (x, y) — точка из $\mathfrak{A}$. Тогда

$$|p(P)-p(P')| \leqslant |p(P)-p(x, y)| + |p(x, y)-p(P')|.$$

Введем области $\Omega(P, s)$, $\Omega(P', s)$, определенные выше, и проинтегрируем написанное выше неравенство по пересечению ω этих областей. Тогда будем иметь

$$\frac{s^2}{4}|p(P)-p(P')| \leqslant \int\limits_{\omega}\int |p(P)-p(x, y)|\,dx\,dy + \\ + \int\limits_{\omega}\int |p(x, y)-p(P')|\,dx\,dy.$$

Первый интеграл в правой части последнего неравенства не уменьшится, если область интегрирования расширить до всей области $\Omega(P, s)$. Вводя полярные координаты r, θ с полюсом P, легко видеть, что первый интеграл не превосходит

$$I_1 = \int\limits_{\Omega(P, s)}\int r\left[\int\limits_0^r |p_r(\rho, \theta)|\,d\rho\right]dr\,d\theta.$$

Так же, как и в предыдущей лемме, получаем оценку

$$I_1 \leqslant \sqrt{\frac{\pi M}{2\alpha}}\, s^{2+\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогичная оценка может быть получена для второго слагаемого из правой части неравенства, написанного выше.

Следовательно, это неравенство приведет к соотношению

$$\frac{s^2}{4}\,|p(P)-p(P')|\leqslant\sqrt{\frac{2\pi M}{\alpha}}\,s^{2+\frac{\alpha}{2}}$$

или

$$\frac{|p(P)-p(P')|}{|\overline{PP'}|^{\alpha/2}}\leqslant 4\sqrt{\frac{2\pi M}{\alpha}}\,s^{2+\frac{\alpha}{2}}.$$

Лемма доказана.

2. Гельдерова непрерывность некоторых отображений. Лемма 6. *Пусть p, q — непрерывные функции, определенные в области $\mathfrak{A}$ и имеющие там непрерывные первые производные, которые в $\mathfrak{A}$ удовлетворяют неравенству*

$$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\leqslant k\left(p_yq_x-p_xq_y\right)+k_1 \qquad (3,2,1)$$

(k *и* k_1 — *неотрицательные постоянные*).

Предположим, что $|q|\leqslant K_1$. Пусть $\mathfrak{B}$ — любая замкнутая подобласть области $\mathfrak{A}$; расстояние от $\mathfrak{B}$ до границы $\mathfrak{A}$ обозначим через $2d$. Тогда существуют такие положительные постоянные M и $\alpha<1$, зависящие только от k, k_1, K_1 и d, что имеет место неравенство

$$\iint\limits_{C_d} r^{-\alpha}\left(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\right)dx\,dy\leqslant M.$$

Интегрирование осуществляется по кругу C_d с центром в точках $\mathfrak{B}$ и радиусом d; через r обозначено расстояние от центра круга до точки интегрирования.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь круг C_d с центром внутри $\mathfrak{B}$ радиуса d, и пусть C — концентрический с C_d круг радиуса $\frac{3}{2}d$ (он лежит в $\mathfrak{A}$). В C введем полярные координаты r, θ, имеющие полюс в центре круга C_d.

Рассмотрим функцию $\zeta(r)$, заданную в круге C и такую, что

а) ζ — функция только от r, непрерывная и непрерывно дифференцируемая;

б) $\zeta \equiv 1$ при $0 \leqslant r \leqslant d$ и монотонно убывает до нуля, когда r стремится к $\frac{3}{2}d$.

Умножим обе части неравенства (3,2,1) на $r^{-\alpha}\zeta^2$, где $\alpha < 1$ — положительное число, которое будет определено ниже, и полученное соотношение проинтегрируем по кругу C. Обозначая через $I_C(p)$, $I_C(q)$ интегралы

$$\int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 (p_x^2 + p_y^2)\,dx\,dy, \qquad \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 (q_x^2 + q_y^2)\,dx\,dy,$$

приходим к неравенству

$$I_C(p) + I_C(q) \leqslant k \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 (p_y q_x - p_x q_y)\,dx\,dy + \\ + k_1 \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2\,dx\,dy = I. \qquad (3,2,2)$$

Интегрирование по частям в первом интеграле из правой части неравенства (3,2,2) приводит к тождеству

$$k \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 (p_y q_x - p_x q_y)\,dx\,dy = \\ = -k \int_C\int (r^{-\alpha}\zeta^2)_r\, q\,(p_y r_x - p_x r_y)\,dx\,dy. \qquad (3,2,3)$$

(Здесь индекс r означает дифференцирование по r.) Так как ζ исчезает на границе C, то интегрирование по частям не дает контурного интеграла. (Интегрирование по частям было бы законным, если бы $p(x, y)$ имела непрерывные вторые производные. Однако мы можем равномерно аппроксимировать $p(x, y)$ последовательностью функций $p_n(x, y)$, имеющих вторые производные, у которых, кроме того, первые производные равномерно сходятся к первым производным функций $p(x, y)$. Очевидно, что тождество (3,2,3) имеет место для $p_n(x, y)$, поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем справедливость тождества (3,2,3) для функции $p(x, y)$.) Используя тождество (3,2,3), приходим к равенству $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = -k \int\limits_C\int 2\zeta\zeta_r r^{-\alpha} q (p_y r_x - p_x r_y)\, dx\, dy,$$

$$I_2 = k\alpha \int\limits_C\int r^{-\alpha-1}\zeta^2 q (p_y r_x - p_x r_y)\, dx\, dy,$$

$$I_3 = k_1 \int\limits_C\int r^{-\alpha}\zeta^2\, dx\, dy.$$

Рассмотрим сначала оценку для интеграла I_3. Так как $\zeta^2 \leqslant 1$, то

$$I_3 \leqslant k_1 \int\limits_C\int r^{-\alpha}\, dx\, dy = \frac{2\pi k_1}{2-\alpha}\left(\frac{3}{2}\, d\right)^{2-\alpha}.$$

Далее, так как $|p_y r_x - p_x r_y| \leqslant \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, то

$$I_1 \leqslant 2k \int\limits_C\int r^{-\alpha} |q\zeta_r| \zeta \sqrt{p_x^2 + p_y^2}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant k \int\limits_C\int r^{-\alpha}\left[\varkappa q^2\zeta_r^2 + \varkappa^{-1}\zeta^2 \left(p_x^2 + p_y^2\right)\right] dx\, dy,$$

где $\varkappa > 0$ — произвольное число *). Так как $|q| \leqslant K_1$, имеем

$$I_1 \leqslant k\varkappa K_1^2 \int\limits_C\int r^{-\alpha}\zeta_r^2\, dx\, dy + k\varkappa^{-1} I_C(p).$$

Наиболее интересной является оценка интеграла I_2, к которой мы и переходим. Заметим сначала, что выражение $p_y r_x - p_x r_y$ в полярных координатах имеет вид $\frac{1}{r}\, p_\theta$, так что взятый по окружности $r = \text{const}$ интеграл $\oint (p_y r_x - p_x r_y)\, d\theta$ обращается в нуль. Отсюда следует, что

$$\int\limits_C\int f(r) (p_y r_x - p_x r_y)\, r\, dr\, d\theta = 0$$

---

*) При получении оценки использовано неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(\varkappa a^2 + \frac{1}{\varkappa} b^2\right).$$

для всякой функции $f(r)$, зависящей только от r. Поэтому, добавляя в интеграле I_2 к q любую функцию, зависящую только от r, мы не изменим величины интеграла. Положим

$$\bar{q}(r) = q(r, 0).$$

На основании сделанного только что замечания имеем

$$I_2 = k\alpha \int_C\int r^{-\alpha-1}\zeta^2 (q - \bar{q})(p_y r_x - p_x r_y)\, r\, dr\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant k\alpha \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 \left[r^{-1}|q - \bar{q}|\sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right] r\, dr\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} k\alpha \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2 \left[r^{-2}(q - \bar{q})^2 + p_x^2 + p_y^2\right] r\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{k\alpha}{2} \int_0^{\frac{3}{2}d} r^{-\alpha-2}\zeta^2 r\, dr \int_0^{2\pi} (q - \bar{q})^2\, d\theta + \frac{k\alpha}{2} I_C(p).$$

Так как

$$\bar{q}(r) = q(r, 0),$$

то

$$\oint (q - \bar{q})^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\theta} q_\varphi\, d\varphi\right]^2 d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \left(\theta \int_0^{\theta} q_\varphi^2\, d\varphi\right) d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \int_0^{2\pi} q_\theta^2\, d\theta.$$

(При получении последней оценки использовано неравенство Буняковского.)

Так как

$$q_x^2 + q_y^2 = q_r^2 + \frac{1}{r^2} q_\theta^2,$$

то

$$\oint (q - \bar{q})^2\, d\theta \leqslant 4\pi^2 r^2 \oint (q_x^2 + q_y^2)\, d\theta.$$

Пользуясь этим неравенством, мы получаем окончательную оценку I_2:

$$I_2 \leqslant 2\pi^2 k\alpha I_C(q) + \frac{k\alpha}{2} I_C(p).$$

Возвращаясь к неравенству (3,2,2) и пользуясь оценками для I_1, I_2, I_3, приходим к соотношению

$$I_C(p)+I_C(q)\leqslant\left(k\varkappa^{-1}+\frac{k\alpha}{2}\right)I_C(p)+2\pi^2k\alpha I_C(q)+$$
$$+k\varkappa K_1^2\int\limits_C\int r^{-\alpha}\zeta_r^2\,dx\,dy+\frac{2\pi k_1}{2-\alpha}\left(\frac{3}{2}d\right)^{2-\alpha}.$$

Это неравенство дает нам возможность оценить $I_C(p)+I_C(q)$ при условии, что каждый из коэффициентов для $I_C(p)$ и $I_C(q)$ в правой части неравенства меньше единицы (равен, скажем, $^2/_3$). Это достигается подбором подходящих значений для $\varkappa$ и α, которые пока были произвольными.

Выберем $\alpha<1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2\pi^2k\alpha\leqslant\frac{2}{3}$$

и затем $\varkappa$ так, чтобы

$$k\varkappa^{-1}+\frac{k\alpha}{2}\leqslant\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$I_C(p)+I_C(q)\leqslant 3k\varkappa K_1^2\int\limits_C\int r^{-\alpha}\zeta_r^2\,dx\,dy+\frac{6\pi k_1}{2-\alpha}\left(\frac{3}{2}d\right)^{2-\alpha}.$$

Слагаемые в правой части ограничены, следовательно, получаем неравенство

$$I_C(p)+I_C(q)\leqslant M,$$

где M — постоянная, зависящая только от k, k_1, K_1 и d. Так как $\zeta(r)\equiv 1$ для $0\leqslant r\leqslant d$, т. е. в круге C_d, то получаем

$$\int\limits_{C_d}\int r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2)\,dx\,dy+\int\limits_{C_d}\int r^{-\alpha}(q_x^2+q_y^2)\leqslant$$
$$\leqslant I_C(p)+I_C(q)\leqslant M,$$

где M — постоянная, зависящая только от k, k_1, K_1 и d. Это неравенство имеет место для любого круга C_d радиуса d с центром в $\mathfrak{B}$. Итак, лемма 6 доказана.

Установим теперь в несколько более узком классе функций аналогичную лемму для случая замкнутой области.

Именно, мы будем считать, что функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ являются первыми частными производными некоторой функции $z(x, y)$.

Пусть $\overline{\mathfrak{A}}$ — замыкание области $\mathfrak{A} \in L_2$. Рассмотрим функции $z(x, y)$, которые определены в $\overline{\mathfrak{A}}$ и удовлетворяют условию

А) функция $z(x, y)$, ее первые и вторые производные непрерывны в $\mathfrak{A}$, а на границе области $\mathfrak{A}$ функция $z(x, y)$ имеет непрерывные первую и вторую производные по длине дуги, при этом вторая производная по модулю не превосходит постоянной $K_2 \geqslant 0$.

Лемма 7. *Пусть функция $z(x, y)$ удовлетворяет условию* А. *Пусть, далее, первые производные $p(x, y)$ и $q(x, y)$ функции $z(x, y)$ в $\mathfrak{A}$ ограничены по модулю сверху постоянной $K_1 \geqslant 0$ и для них в $\mathfrak{A}$ справедливо неравенство*

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leqslant k(p_y q_x - p_x q_y) + k_1$$

с неотрицательными постоянными k, k_1. Тогда функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ в $\overline{\mathfrak{A}}$ удовлетворяют условию Гельдера, коэффициент и показатель которого зависят только от чисел k, k_1, K_1, K_2 и свойств границы области $\mathfrak{A}$.

Дадим сначала план доказательства этой леммы.

Как следует из леммы 5, справедливость леммы 7 будет доказана, если удастся получить равномерные оценки для интегралов вида

$$\int\int r^{-\alpha}(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\, dx\, dy,$$

взятых по пересечению $\overline{\mathfrak{A}}$ со всеми кругами C с центрами в точках $\mathfrak{A}$ и имеющими некоторый фиксированный радиус.

Оценки для интегралов по кругам, лежащим полностью внутри $\mathfrak{A}$, уже получены в лемме 6. Нам осталось получить оценки для интегралов, взятых по кругам, пересекающим границу $\mathfrak{A}$.

Если проводить рассуждения, уже примененные в доказательстве леммы 6, то они сохраняются с некоторыми незначительными изменениями, кроме одной детали. Именно, при получении соотношения (3, 2, 3) в доказательстве леммы 6 проводилось интегрирование по частям, которое давало равный нулю контурный интеграл. В рассматриваемом случае этот интеграл, вообще говоря, отличен от нуля. Поэтому необходимо получить оценки для этого интеграла. Рассматривая члены подынтегрального выражения в контурном интеграле, заметим, что функции $p = z_x$, $q = z_y$ встречаются в нем в выражении $q(p_x\,dx + p_y\,dy) = qp_s\,ds$, где p_s — производная от $p(x, y)$ по длине дуги s границы $\mathfrak{A}$. Ясно, что этот интеграл можно оценить при условии, что оценка для $|p_s|$ на границе $\mathfrak{A}$ известна. (Отметим, что $|q| \leqslant K_1$ в $\overline{\mathfrak{A}}$.)

Функция $p_s = (z_x)_s$ есть комбинация вторых производных функции $z(x, y)$; на границе $\mathfrak{A}$ известна же только оценка для второй производной по s от z вдоль границы (условие A). Таким образом, оценка для p_s известна лишь в том случае, если часть границы $\mathfrak{A}$, которая пересекает C, есть прямолинейный отрезок, параллельный оси x.

Поэтому сначала нужно отобразить границу $\mathfrak{A}$, по крайней мере локально, в прямолинейный отрезок Γ. Это преобразование можно получить с помощью локального преобразования параметров, затем, повторяя описанное выше рассуждение, мы получим оценки для интегралов по пересечениям области с кругами C, которые пересекают прямолинейный отрезок Γ. После обращения преобразования эти оценки дадут требуемые оценки для интегралов по кругам, пересекающим границу $\mathfrak{A}$.

Установим сначала обобщение леммы 6 для областей $\mathfrak{A}$ специального вида, когда в состав границы области входит прямолинейный участок.

Лемма 6′. *Пусть справедливы условия леммы* 6. *Обозначим через γ границу области $\mathfrak{A}$ и пусть в состав γ входит прямолинейный отрезок Γ, лежащий на оси x.*

Пусть в $\mathfrak{A} + \Gamma$ определены непрерывно дифференцируемые функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ и, кроме того, на Γ справедливы неравенства (3,2,1) *и*

$$|p_x| \leqslant K_2,$$

где $K_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть P — любая точка области $\mathfrak{A}$, удаленная от $\gamma - \Gamma$ на расстояние, не меньшее чем $2c$. Обозначим *через C_c пересечение $\mathfrak{A}$ с кругом радиуса c, имеющим центр в точке P.*

Тогда существуют постоянные $\alpha < 1$ и M, зависящие лишь от чисел k, k_1, K_1, K_2, c, такие, что

$$\iint\limits_{C_c} r^{-\alpha}(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\,dx\,dy \leqslant M.$$

Доказательство. Обозначим через C пересечение $\mathfrak{A}$ с кругом радиуса $2c$, имеющим центр в точке P. Если расстояние P от Γ меньше $2c$ (а это как раз и есть наиболее интересный случай), то граница C состоит из дуги окружности и прямолинейного отрезка Γ'. Введем в рассмотрение функцию $\zeta(r)$, которая так же, как и в случае леммы 6, зависит только от полярного расстояния r. (При этом полюс находится в точке P.) Функцию $\zeta(r)$ вводим так, что при $0 \leqslant r \leqslant c$ она равна единице и монотонно убывает до нуля при $r \to 2c$. Умножим обе части неравенства

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leqslant k(p_y q_x - p_x q_y) + k_1 \qquad (3,2,1)$$

на $r^{-\alpha}\zeta^2$ и интегрируем его по области C, после чего приходим к неравенству (3,2,2). Затем так же, как и в доказательстве леммы 6, интегрируем по частям. Так как ζ не равна нулю на Γ', то при этом появляется контурный интеграл по Γ', которого не было в доказательстве леммы 6.

Если, как и в доказательстве леммы 6, обозначить через I интеграл, стоящий в правой части (3,2,2), то

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_4 = k\int\limits_{\Gamma'} r^{-\alpha}\zeta q\,(p_x dx + p_y dy) = k\int\limits_{\Gamma'} r^{-\alpha}\zeta^2 q p_x dx,$$

а I_1, I_2, I_3 введены выше в доказательстве леммы 6. (Заметим, что в рассматриваемом случае интегралы I_1, I_2, I_3 берутся лишь по области C.)

Оценки для интегралов I_1 и I_2 даются теми же неравенствами, что и в лемме 6:

$$I_1 \leqslant k\varkappa K_1^2 \iint\limits_C r^{-\alpha}\zeta_r^2\,dx\,dy + k\varkappa^{-1} I_C(p),$$

$$I_3 \leqslant \frac{2\pi k_1}{2-\alpha}\left(\frac{3}{2}\,d\right)^{2-\alpha}.$$

Из условия леммы 6′ легко получаем оценку для интеграла I_4:

$$I_4 \leqslant k \int\limits_{\Gamma'} r^{-\alpha}\zeta^2 \, |qp_x| \, dx \leqslant kK_1K_2 \int\limits_{\Gamma'} \zeta^2 r^{-\alpha} \, dx \text{ *)}$$

и, так как $\zeta^2 \leqslant 1$, окончательно получаем

$$I_4 \leqslant 2kK_1K_2 \int\limits_0^{2c} |x|^{-\alpha} \, dx = \frac{2kK_1K_2}{1-\alpha} (2c)^{1-\alpha}.$$

Теперь нам осталось дать вывод оценки для интеграла

$$I_2 = k\alpha \int\limits_C\int r^{-\alpha-1}\zeta^2 q \, (p_y r_x - p_x r_y) \, dx \, dy.$$

Так как

$$p_y r_x - p_x r_y = \frac{1}{r} \, p_\theta \text{ **)},$$

то интеграл

$$\bar{p}(r) = \int\limits_\lambda (p_y r_x - p_x r_y) \, d\theta,$$

взятый по дуге λ окружности $r = \text{const}$, лежащей в C и имеющей концы в точках P_1 и P_2, выражается так:

$$\bar{p}(r) = \frac{1}{r} (p(P_2) - p(P_1)).$$

Вводим функцию

$$\bar{q}(r) = q(r, 0)$$

и представим I_2 в виде $I_2 = I_2' + I_2''$, где

$$I_2' = k\alpha \int\limits_C\int r^{-\alpha-1}\zeta^2 (q - \bar{q}) (p_y r_x - p_x r_y) \, r \, dr \, d\theta,$$

а

$$I_2'' = k\alpha \int\limits_C\int r^{-\alpha-1}\zeta^2 \bar{q} \, (p_y r_x - p_x r_y) \, r \, dr \, d\theta = k\alpha \int\limits_0^{2c} r^{-\alpha}\zeta^2 \bar{q} \bar{p} \, dr.$$

*) Напомним, что, согласно условиям леммы 6, $|q| \leqslant K_1$.

**) r, θ — полярные координаты с полюсом в точке P.

Интеграл I_2' имеет тот же вид, что и интеграл I_2 в лемме 6, и может быть оценен тем же путем, так что для I_2' имеет место оценка

$$I_2' \leqslant 2\pi^2 k\alpha I_C(q) + \frac{k\alpha}{2} I_C(p).$$

Чтобы оценить I_2'', заметим, что выражение

$$\bar{p}(r) = \frac{1}{r}(p(P_2) - p(P_1))$$

допускает оценку $|\bar{p}(r)| \leqslant 2K_2$. Это следует из соотношения $|p_x| |_{\Gamma'} \leqslant K_2$ и того, что расстояние между этими точками не превосходит $2r$. Так как $|q| \leqslant K_1$ и $\zeta^2 \leqslant 1$, то приходим к оценке

$$I_2'' \leqslant 2k\alpha K_1 K_2 \int_0^{2c} r^{-\alpha} dr = \frac{2k\alpha K_1 K_2}{1-\alpha}(2c)^{1-\alpha}.$$

Таким образом,

$$I_2 \leqslant 2\pi^2 k\alpha I_C(q) + \frac{1}{2} k\alpha I_C(p) + \frac{2\alpha}{1-\alpha} kK_1K_2 (2c)^{1-\alpha}.$$

Соединяя вместе оценки для I_1, I_2, I_3, I_4, приходим к неравенству

$$I_C(p) + I_C(q) \leqslant A(\varkappa, \alpha)(I_C(p) + I_C(q)) + B(\varkappa, \alpha),$$

где $A(\varkappa, \alpha)$ и $B(\varkappa, \alpha)$ — постоянные, зависящие от $\varkappa$ и α (которые пока произвольны), а также от k, k_1, K_1, K_2 и c. Так же, как и в лемме 6, можно подобрать α и $\varkappa$ так, чтобы $A(\varkappa, \alpha) < \frac{2}{3}$. Тогда

$$I_C(p) + I_C(q) \leqslant 3B(\varkappa, \alpha).$$

Так как $\zeta(r) = 1$ для $0 \leqslant r \leqslant c$, то

$$I_C(p) + I_C(q) = \int_C\int r^{-\alpha}\zeta^2(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\,dx\,dy \geqslant$$
$$\geqslant \int_{C_c}\int r^{-\alpha}(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\,dx\,dy,$$

где C_c — пересечение $\mathfrak{A}$ с кругом, имеющим центр в точке P и радиус c.

Таким образом, из оценки для $I_C(p)+I_C(q)$ находим

$$\iint\limits_{C_c} r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2)\,dx\,dy \leqslant M, \tag{3,2,4}$$

где M и $0<\alpha<1$ — положительные постоянные, зависящие только от k, k_1, K_1, K_2, c. Лемма 6′ доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 7.

Как мы уже отмечали, для этого достаточно установить существование таких положительных чисел d', c', M' и $\alpha'\in(0, 1)$, зависящих только от k, k_1, K_1, K_2 и области $\mathfrak{A}$, что имеет место неравенство

$$\iint\limits_{C_{c'}} r^{-\alpha'}(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2)\,dx\,dy \leqslant M'; \tag{3,2,5}$$

через $C_{c'}$ обозначено пересечение $\mathfrak{A}$ с кругом радиуса c', центр которого находится в точке $P\in\mathfrak{A}$ и удален от границы $\mathfrak{A}$ на расстояние, меньшее $2d'$.

Допустим, что такие числа найдутся; тогда рассмотрим замкнутую подобласть $\mathfrak{B}$, состоящую из всех точек $\mathfrak{A}$, расстояние которых от границы $\mathfrak{A}$ не меньше $2d'$. Для области $\mathfrak{B}$ все условия леммы 6 выполнены и поэтому существуют такие положительные числа M_1 и α_1, что

$$\iint\limits_{C_{d'}} r^{-\alpha_1}(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2)\,dx\,dy \geqslant M_1,$$

где $C_{d'}$ — любой круг с центром в $\mathfrak{B}$ и радиусом d'. Положим теперь

$$\alpha=\min(\alpha', \alpha_1),$$
$$M=\max(M', M_1),$$
$$d=\min(c', d', 1).$$

Из последнего неравенства и неравенства (3,2,5) непосредственно следует, что

$$\iint\limits_{C_d} r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2)\,dx\,dy < M,$$

где C_d — пересечение $\mathfrak{A}$ с любым кругом радиуса d, имеющим центр в $\mathfrak{A}$. Лемма 7 теперь немедленно следует из леммы 5 (см. п.1 § 3 гл. I). Итак, все сводится к определению чисел d', c', M' и α'.

Найдем сначала постоянную d'. Она определяется свойствами области $\mathfrak{A}$. Пусть Q — граничная точка $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ — область типа L_2, то ее граничная кривая $\Gamma \in Q$ представима в окрестности Q уравнением вида $y = f(x)$, причем $f(x) \in C^2$. Вводим в окрестности точки Q новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = y - f(x). \tag{3,2,6}$$

Тогда существует круг S с центром Q такой, что:

а) $\gamma = S \cap \Gamma$ будет простой дугой;

б) преобразование (3,2,6) отображает S взаимно однозначно на некоторую область плоскости ξ, η. Очевидно, что γ отображается на отрезок линии $\eta = 0$. Обозначим через Ω образ той части круга S, которая лежит в $\mathfrak{A}$, относительно отображения (3,2,6). Тогда Ω будет иметь отрезок оси ξ частью своей границы. В S функция $f(x) \in C^2$, а следовательно, и $\xi(x, y)$, $\eta(x, y) \in C^2$. Положим

$$\overline{K} = \sup_S \{|\xi_x|, |\xi_y|, \ldots, |\eta_{yy}|\}. \tag{3,2,7}$$

Круг, по своим свойствам аналогичный кругу S, может быть описан вокруг любой граничной точки Q, и, так как граница области $\mathfrak{A}$ содержит конечное число замкнутых кривых (конечной длины), то мы приходим к заключению, что существуют такие положительные постоянные d' и $\overline{K}$, что каждый круг с центром на границе $\mathfrak{A}$ и радиусом $4d'$ удовлетворяет условиям леммы 6' и что новые переменные ξ, η, введенные в этих кругах (согласно формулам (3,2,6)), удовлетворяют неравенству (3,2,7). Итак, постоянная d' определена.

Отметим, что расстояния между точками при отображениях (3,2,6) кругов радиуса $4d'$, описанных вокруг граничных точек, меняются мало.

Нетрудно проверить, что существует такое положительное число $\varkappa$, зависящее только от $\overline{K}$, что расстояние l между любыми двумя точками такого круга и расстояние l' между образами этих точек при отображении (3,2,6) удовлетворяют неравенству

$$\varkappa \leqslant \frac{l}{l'} \leqslant \frac{1}{\varkappa}. \tag{3,2,8}$$

Пусть P — любая точка области $\mathfrak{A}$, расстояние которой от границы $\mathfrak{A}$ меньше $2d'$ и пусть Q — граничная точка, самая близкая к P. Опишем круг с центром в Q радиуса $4d'$.

Из определения числа d' следует, что можно ввести новые переменные ξ, η, как описано выше, отображающие круг на некоторую область плоскости ξ, η. Как и выше, обозначим через Ω образ части круга, лежащей в $\mathfrak{A}$; отрезок на оси $\eta = 0$ является частью границы Ω. Так как расстояние P от окружности с центром Q не меньше $2d'$, то из (3,2,8) следует, что расстояние точки P' (образ точки P) от любой точки границы Ω, не лежащей на оси $\eta = 0$, не меньше $2\varkappa d'$. Положим $c = \varkappa d'$.

В области Ω функцию z можно рассматривать как функцию переменных ξ, η; обозначим ее через $z'(\xi, \eta)$.

Из условий леммы 7 вытекает, что

1) производные $p' = z'_\xi$, $q' = z'_\eta$ ограничены по модулю постоянной K_1' и удовлетворяют неравенству

$$p'^2_\xi + p'^2_\eta + q'^2_\xi + q'^2_\eta \leqslant k'(p'_\eta q'_\xi - p'_\xi q'_\eta) + k'_1,$$

где K_1', k', k_1' — положительные постоянные, зависящие лишь от K_1, k, k_1, $\bar{K}$.

2) Из условия А леммы 7 следует, что на отрезке оси $\eta = 0$, который принадлежит границе Ω, имеет место неравенство

$$|p'_\xi| = |z'_{\xi\xi}| \leqslant K_2',$$

где K_2' — постоянная, зависящая от K_2 и $\bar{K}$.

3) $p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leqslant \varkappa_1 (p'^2_\xi + p'^2_\eta + q'^2_\xi + q'^2_\eta + 1)$, где $\varkappa_1 > 0$ — постоянная, зависящая только от K_1 и $\bar{K}$.

Из сказанного выше ясно, что функции p' и q' удовлетворяют в Ω всем условиям леммы $6'$. Поэтому из этой леммы получаем, что существуют такие положительные постоянные $\bar{M}$ и $\alpha' < 1$, зависящие только от k', k_1', K_1', K_2' и c, что имеет место неравенство

$$\iint\limits_{C'_c} \rho^{-\alpha'} (p'^2_\xi + p'^2_\eta + q'^2_\xi + q'^2_\eta)\, d\xi\, d\eta \leqslant \bar{M}, \qquad (3,2,9)$$

где C'_c — пересечение Ω с кругом радиуса c с центром в P' (P' — образ точки $P \in \mathfrak{A}$) и через ρ обозначено расстояние от точки интегрирования до P'.

После возвращения к переменным x, y интеграл по C'_c может быть рассмотрен как интеграл по области в плоскости x, y (якобиан преобразования ξ, η равен 1).

Из соотношения (3,2,8) следует, что эта область содержит пересечение области $\mathfrak{A}$ с кругом S' радиуса $\varkappa c = \varkappa^2 d'$ с центром P. Пусть $c' = \varkappa^2 d'$. Обозначим через $C_{c'}$ пересечение $\mathfrak{A}$ с кругом S'. Из неравенства (3,2,8) следует, что если r — расстояние точки интегрирования из C'_c от P и ρ — расстояние ее образа от P', то $r \geqslant \varkappa\rho$.

Из сделанных замечаний вытекает, что

$$\iint\limits_{C'_c} r^{-\alpha'}(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{C'_c} \varkappa^{-\alpha'}\rho^{-\alpha'}(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2)\,d\xi\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^{-\alpha'} \iint\limits_{C'_c} \rho^{-\alpha'}\varkappa_1\left(p_\xi'^2 + p_\eta'^2 + q_\eta'^2 + q_\xi'^2 + 1\right)d\xi\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^{-\alpha'}\varkappa_1\left(\overline{M} + \iint\limits_{C'_c} \rho^{-\alpha'}\,d\xi\,d\eta\right) = M' = \mathrm{const}. \qquad (3,2,10)$$

Итак, постоянные d', c', M' и $\alpha' \in (0, 1)$, зависящие от k, k_1, K_1, K_2 и от области $\mathfrak{A}$, найдены и одновременно доказано неравенство (3,2,10) с этими постоянными.

Этим завершается доказательство леммы 7.

3. Основные теоремы об оценках решений линейных уравнений. Теорема 11. *Пусть $z(x, y)$ определена в области $\mathfrak{A}$ плоскости x, y и удовлетворяет эллиптическому уравнению*

$$Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} = D, \qquad (3,3,1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

1. *A, B, C, D есть функции от x, y, ограниченные по модулю постоянной K.*

2. *$z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{A}$ и ее первые производные ограничены в $\mathfrak{A}$ по модулю постоянной K_1.*

3. *Для любых вещественных чисел ξ, η в $\mathfrak{A}$ справедливо неравенство*

$$A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2 \geqslant \nu(\xi^2+\eta^2),$$

где $\nu=\mathrm{const}>0$.

Тогда в каждой замкнутой подобласти $\mathfrak{B}$ области $\mathfrak{A}$ первые производные от функции $z(x, y)$ удовлетворяют неравенству Гельдера с показателем и постоянными, зависящими только от K, K_1, λ и расстояния $\mathfrak{B}$ до границы области $\mathfrak{A}$.

Доказательство этой теоремы будет непосредственно вытекать из леммы 6, если мы установим, что в $\mathfrak{A}$ справедливо неравенство

$$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2 \leqslant k\left(p_y q_x - p_x q_y\right)+k_1,$$

где k и k_1 — положительные постоянные, зависящие лишь от K и λ. Написанное неравенство в случае, когда $p=z_x$, $q=z_y$, имеет вид

$$r^2+2s^2+t^2 \leqslant k(s^2-rt)+k_1.$$

Так как $z(x, y)$ — решение уравнения (3,3,1), то

$$A(r^2+s^2)+B(rs+st)+C(s^2+t^2)= \\ =D(r+t)+(A+C)(s^2-rt).$$

Используя условие 3 теоремы 11, имеем

$$\nu(r^2+2s^2+t^2) \leqslant A(r^2+s^2)+B(rs+st)+C(s^2+t^2)= \\ =D(r+t)+(A+C)(s^2-rt).$$

Отсюда

$$2\,\frac{\nu}{2}(r^2+2s^2+t^2)-\frac{\nu}{2}(r^2+t^2) \leqslant \frac{D^2}{2\nu}+(A+C)(s^2-rt)$$

или

$$\frac{\nu}{2(A+C)}(r^2+2s^2+t^2) \leqslant \frac{D^2}{2\nu(A+C)}+(s^2-rt).$$

Используя условия 1 и 3 теоремы 11, имеем

$$\frac{\nu}{4K}(r^2+2s^2+t^2) \leqslant \frac{K^2}{4\nu^2}+(s^2-rt).$$

или окончательно

$$r^2+2s^2+t^2 \leqslant \frac{4K}{\nu}(s^2-rt)+\frac{K^3}{\nu^3}, \tag{3,3,2}$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 12. *Пусть функция $z(x, y)$ определена в замыкании $\overline{\mathfrak{A}}$ области $\mathfrak{A}$ и удовлетворяет в $\mathfrak{A}$ эллиптическому дифференциальному уравнению*

$$Az_{xx}+Bz_{xy}+Cz_{yy}=D.$$

Пусть, далее, выполнены условия 1—3 *предыдущей теоремы и условие* A *). *Тогда первые производные функции z удовлетворяют в $\overline{\mathfrak{A}}$ условию Гельдера с коэффициентом и показателем, зависящими только от чисел K, K_1, K_2, ν.* (Эти постоянные фигурируют в условиях 1—3, A.)

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из леммы 7, так как в $\overline{\mathfrak{A}}$ выполнено всюду неравенство (3,3,2).

§ 4. Априорные оценки вторых и старших производных нелинейных эллиптических уравнений в классах гельдеровых функций

В этом параграфе будут получены оценки производных от второго порядка до порядка $m+2$ для решений $z(x, y)$ эллиптических уравнений

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)=0$$

в метрике C^{β} $(0<\beta<1)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, как функции независимых переменных r, s, t, p, q, z, x, y, принадлежащей классу $C^{m,\alpha}$ (при некотором $\alpha \in (0, 1)$), и оценок самих решений в метрике C^2.

Для удобства читателя мы проведем изложение в следующем порядке: сначала рассмотрим оценки вторых производных, затем остановимся на получении оценок третьих производных, после чего разберем общий случай.

---

*) Напомним, что если z удовлетворяет условию A, то $z \in C^2(\overline{\mathfrak{A}})$ и граничные значения z, как функция длины дуги контура, принадлежат C^2, причем вторая производная ограничена величиной K_2.

1. Априорные оценки вторых производных. Сформулируем основные предположения, на которых основано получение оценок вторых производных решений эллиптических уравнений.

I. Пусть D — ограниченная область на плоскости x, y и пусть $z(x, y)$ — решение уравнения

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0,$$

имеющее в D непрерывные первые и вторые производные, которые при $(x, y) \in D$ удовлетворяют неравенствам:

$$|z| \leqslant K_1, |z_x| \leqslant K_1, |z_y| \leqslant K_1, |z_{xx}| \leqslant K_1, |z_{xy}| \leqslant K_1, |z_{yy}| \leqslant K_1.$$

II. Функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ имеет непрерывные производные по независимым переменным r, s, t, p, q, z, x, y в открытом множестве Q восьмимерного пространства r, s, t, p, q, z, x, y, содержащем поверхность

$$\Phi\colon\ (x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y),$$
$$r(x, y), s(x, y), t(x, y)), \ (x, y) \in D.$$

Первые частные производные от F на поверхности Φ ограничены по модулю постоянной K. (Здесь, как и выше, положено $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.)

III. На поверхности Φ для любых $(x, y) \in D$ и любых вещественных чисел ξ, η справедливо неравенство

$$F_r\xi^2 + F_s\xi\eta + F_t\eta^2 \geqslant \lambda(\xi^2 + \eta^2),$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

IV. Область D представляет собой область класса L_3, а само решение $z(x, y)$ и его производные до третьего порядка включительно непрерывны в замыкании области D. Кроме того, граничные значения $z(x, y)$ как функция длины дуги границы, имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем все эти производные и сами граничные значения ограничены по модулю постоянной K_2.

Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема 13. *Пусть относительно эллиптического уравнения*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad (4,1,1)$$

и его решения $z(x, y)$ в области D выполнены условия предположений I, II, III.

Тогда в любой замкнутой подобласти $\mathfrak{B} \subset D$ вторые производные функции $z(x, y)$ удовлетворяют условию Гельдера, постоянные и показатель которого зависят только от постоянных K, K_1, λ и расстояния $\mathfrak{B}$ до границы D.

Теорема 14. *Пусть относительно эллиптического уравнения*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \tag{4,1,2}$$

и его решения $z(x, y)$ в области D выполнены условия I, II, III, IV.

Тогда производные второго порядка в замыкании области D удовлетворяют условию Гельдера с константами и показателем, зависящими только от постоянных K, K_1, λ, K_2.

Доказательство теоремы 13. Обозначим расстояние $\mathfrak{B}$ от границы D через $2d$. Пусть $\mathfrak{A} \subset D$ — открытая область, состоящая из всех точек D, удаленных от границы D на расстояние большее, чем d. Очевидно, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Пусть $(x, y) \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Положим

$$z^h(x, y) = \frac{1}{h}[z(x+h, y) - z(x, y)],$$

где $0 < h = \text{const} < d$.

Рассмотрим тождество

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0$$

в точках $(x+h, y)$ и (x, y). Вычитая второе выражение из первого, получим:

$$\begin{gathered} F(z_{xx}(x+h, y), z_{xy}(x+h, y), z_{yy}(x+h, y), \\ z_x(x+h, y), \\ z_y(x+h, y), z(x+h, y), x+h, y) - F(z_{xx}(x, y), \\ z_{xy}(x, y), z_{yy}(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y), \\ z(x, y), x, y) = 0. \end{gathered}$$

Левая часть этого уравнения может быть представлена в виде

$$\int_0^1 \frac{d}{d\tau}[F([1-\tau]z_{xx}(x, y)+\tau z_{xx}(x+h, y), \ldots$$

$$\ldots, [1-\tau]z(x, y)+\tau z(x+h, y), x+\tau h, y)]\,d\tau=$$

$$=h\left[\tilde{F}_r z^h_{xx}+\tilde{F}_s z^h_{xy}+\tilde{F}_t z^h_{yy}+\tilde{F}_p z^h_x+\tilde{F}_q z^h_y+\tilde{F}_z z^h+\tilde{F}_z\right],$$

где через $\tilde{\varphi}$ обозначено выражение

$$\tilde{\varphi}=\int_0^1 \varphi([1-\tau]z_{xx}(x, y)+\tau z_{xx}(x+h, y), \ldots$$

$$\ldots, [1-\tau]z(x, y)+\tau z(x+h, y), x+\tau h, y)\,d\tau.$$

Очевидно, что функция z^h удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\tilde{F}_r z^h_{xx}+\tilde{F}_s z^h_{xy}+\tilde{F}_t z^h_{yy}+\tilde{F}_p z^h_x+\tilde{F}_q z^h_y+\tilde{F}_z z^h+\tilde{F}_x=0.$$

Так как первые производные функции F непрерывны и так как область $\mathfrak{A}$ замкнута, то для достаточно малых h функции $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_s$, ..., $\tilde{F}_x$ мало отличаются соответственно от F_r, F_s, ..., F_x *) и, следовательно, их модули ограничены постоянной $2K$ (где K — оценка модулей F_r, F_s, ..., F_x на поверхности Φ). Кроме того, для всех действительных чисел ξ, η и $(x, y)\in\overline{\mathfrak{A}}$

$$\tilde{F}_r\xi^2+\tilde{F}_s\xi\eta+\tilde{F}_t\eta^2\geqslant\frac{\lambda}{2}(\xi^2+\eta^2).$$

Так как z^h_x и z^h_y стремятся к z_{xx} и z_{xy} при $h\to 0$, то из условия I теоремы 13 вытекает, что при достаточно малых h модули этих производных ограничены постоянной $2K_1$.

Уравнение, которому удовлетворяет z^h, может быть записано в виде

$$\tilde{F}_r z^h_{xx}+\tilde{F}_s z^h_{xy}+\tilde{F}_t z^h_{yy}=\tilde{G}, \qquad (4,1,3)$$

где

$$\tilde{G}=-\left(\tilde{F}_p z^h_x+\tilde{F}_q z^h_y+\tilde{F}_z z^h+\tilde{F}_x\right).$$

*) Функции восьми переменных F_r, F_s, ..., F_x рассматриваются на поверхности Φ.

При достаточно малых h имеем:

1) $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_s$, $\tilde{F}_t$, $\tilde{G}$ ограничены по модулю постоянной, зависящей только от K и K_1;

2) $z^h(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые производные, причем первые производные в $\mathfrak{A}$ ограничены постоянной $2K_1$;

3) при всех $(x, y) \in \mathfrak{A}$ и любых вещественных числах ξ, η справедливо неравенство

$$\tilde{F}_r\xi^2 + \tilde{F}_s\xi\eta + \tilde{F}_t\eta^2 \geqslant \frac{\lambda}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Поэтому при достаточно малых h к уравнению (4,1,3) применимы выводы теоремы 11 § 3.

Отсюда вытекает, что z_x^h, z_y^h удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой подобласти $\overline{\mathfrak{B}}$ с постоянными, зависящими только от K, K_1, λ и d. Это условие Гельдера не зависит от величины h. Устремляя h к нулю, получим, что пределы функций z_x^h и z_y^h удовлетворяют тем же условиям Гельдера. Эти предельные функции являются функциями z_{xx} и z_{xy}.

Аналогично устанавливается, что z_{yy} удовлетворяют условию Гельдера в $\mathfrak{B}$. Теорема 13 доказана.

Доказательство теоремы 14. Продифференцируем уравнение (4,1,2), в которое подставлено решение $z(x, y)$, по x. (Здесь мы пользуемся тем, что благодаря предположению IV функция $z(x, y)$ трижды непрерывно дифференцируема в замыкании области D.)

Если в полученном уравнении

$$F_r z_{xxx} + F_s z_{xxy} + F_t z_{xyy} + F_p z_{xx} + F_q z_{xy} + \\ + F_z z_x + F_x = 0 \qquad (4,1,4)$$

положить

$$p(x, y) = z_x(x, y)$$

и рассматривать его как уравнение относительно функции $p(x, y)$, то будут выполнены все условия теоремы 12 (см. п. 3 § 3), кроме одного. Именно на границе D нам даны оценки третьей производной граничных значений $z(x, y)$, а не второй производной граничных значений $p(x, y)$.

Поэтому, чтобы применить теорему 12, нам надо получить оценку модуля второй производной граничных значений функции $p(x, y)$. А для этого, в свою очередь, достаточно найти такие числа $d > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и $M > 0$, зависящие лишь от постоянных K, K_1, K_2, λ и свойств границы области D, что

$$\iint\limits_{C_d} \rho^{-\alpha}\left(r_x^2 + r_y^2 + s_x^2 + s_y^2 + t_x^2 + t_y^2\right) dx\,dy \leqslant M, \qquad (4,1,5)$$

где через C_d обозначено пересечение D с любым кругом, имеющим центр в D и радиус d; ρ — расстояние точки интегрирования от центра круга.

Оценки вида (4,1,5) будут сначала получены для функций r, s, которые удовлетворяют неравенству

$$r_x^2 + r_y^2 + s_x^2 + s_y^2 \leqslant k\left(r_y s_x - r_x s_y\right) + k_1, \qquad (4,1,6)$$

где постоянные $k \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$ зависят только от констант K, K_1, λ.

Неравенство (4,1,6) получается из уравнения (4,1,4) дословно так же, как оно было получено в доказательстве теоремы 11 в п. 3 § 3.

Аналогично, дифференцируя уравнение (4,1,2) по y, получим неравенство

$$s_x^2 + s_y^2 + t_x^2 + t_y^2 \leqslant k'\left(s_y t_x - s_x t_y\right) + k'',$$

где постоянные $k' \geqslant 0$, $k'' \geqslant 0$ зависят только от констант K, K_1, λ.

Отсюда

$$t_x^2 + t_y^2 \leqslant k'\left(s_y t_x - s_x t_y\right) + k'' = k'\left(s_y^2 - s_x t_y\right) + k'' \leqslant$$
$$\leqslant k' s_y^2 + 2k'^2 s_x^2 + \frac{1}{2} t_y^2 + k''.$$

Поэтому

$$2t_x^2 + t_y^2 \leqslant 2k' s_y^2 + 4k'^2 s_x^2 + 2k''.$$

После чего, очевидно, в $\bar{D}$ справедлива оценка

$$t_x^2 + t_y^2 \leqslant \bar{K}\left(r_x^2 + r_y^2 + s_x^2 + s_y^2\right) + \bar{K} \leqslant$$
$$\leqslant \bar{K}k\left(r_y s_x - r_x s_y\right) + \bar{K}k_1, \qquad (4,1,7)$$

где $\bar{K} > 0$ зависит лишь от постоянных K, K_1, λ.

Применяя лемму 6 к неравенству (4,1,5), видим, что функции r и s удовлетворяют оценкам вида (4,1,5) для достаточно малых кругов C_d, лежащих целиком внутри D. (Отметим, что в этом случае расстояние C_d до границы области D ограничено снизу.) Мы должны получить теперь оценки для таких фигур C_d, которые могут приближаться к границе области и даже пересекать ее.

Для этой цели так же, как и в п. 2 § 3, введем локальные преобразования переменных (от x, y к ξ, η) по формулам (3,2,6) в окрестности границы, которые отображают граничную кривую, по крайней мере локально, в прямолинейный отрезок на прямой $\eta = \text{const}$. Функция $z(x, y)$ как функция $z'(\xi, \eta)$ новых переменных, удовлетворяет преобразованному дифференциальному уравнению, которое мы обозначим через (4,1,2′).

Дифференцированием уравнения (4,1,2′) по ξ находим так же, как и в п. 2 § 3, что вторые производные $z'_{\xi\xi} = r'$, $z'_{\xi\eta} = s'$ удовлетворяют неравенству, аналогичному неравенству (4,1,6), которое можно обозначить через (4,1,6′) с константами k' и k'_1, зависящими только от констант из условий I—III и области D (здесь используется тот факт, что D — область типа L_3). Кроме того, так как оценка третьих производных граничных значений z известна (условие IV), то на прямолинейном отрезке прямой $\eta = \text{const}$, входящей в образ границы D, имеем

$$|r'_\xi| \leqslant K'_2$$

(постоянная K'_2 зависит только от констант из условий I, II, III, IV и области D).

В силу неравенства (4,1,6′) и последнего неравенства мы можем воспользоваться леммой 6′ и заключить, что оценки вида (4,1,5) имеют место для функций r' и s' в кругах C'_d, которые могут пересекать прямолинейный граничный отрезок. Дифференцированием уравнения (4,1,2′) по η мы можем получить неравенство (4,1,7′), аналогичное неравенству (4,1,7), и, следовательно, заключить, что t' также удовлетворяет оценкам вида (4,1,5) для кругов C'_d.

Возвращаясь к переменным x, y, мы можем повторить заключительные рассуждения из п. 2 § 3 и получить числа

d, M, $\alpha < 1$, для которых имеет место (4,1,5), и тем самым завершить доказательство теоремы.

2. Априорные оценки третьих производных. Приведем прежде всего формулировки дополнительных предположений, на которых основано получение оценок третьих производных в гельдеровской метрике.

V. Функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ имеет первые производные по всем независимым переменным r, s, t, p, q, z, x, y, которые на множестве Q (фигурирующем в предположении II) удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

VI. Выполнено условие IV п. 1 и, кроме того, третья производная граничных значений удовлетворяет условию Гельдера с коэффициентом K_2 и показателем α.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 15. *Пусть выполнены условия* I, II, III *и* V. *Тогда в любой связной подобласти* $\mathfrak{B} \subset D$ *производные* $z(x, y)$ *до третьего порядка включительно ограничены по модулю постоянной, которая вместе с показателем и постоянными Гельдера в* $\mathfrak{B}$ *для производных третьего порядка зависит только от постоянных* K, K_1, λ, α, *расстояния* $\mathfrak{B}$ *до границы* D *и диаметра* $\mathfrak{B}$.

Теорема 16. *Пусть относительно эллиптического уравнения*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0$$

и области D *выполнены условия* I, II, III, IV, V, VI. *Тогда производные третьего порядка функции* $z(x, y)$ *в замыкании области* D *удовлетворяют условию Гельдера, показатель и постоянные которого зависят лишь от постоянных* K, K_1, K_2, λ, α *и свойств границы области* D *(а именно, от максимумов модулей функций* $x = x(s)$ *и* $y = y(s)$, *задающих границу* D, *и их производных до третьего порядка включительно и величины диаметра области* D).

Доказательство теоремы 15. Для доказательства этой теоремы дифференцируем тождество

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0 \qquad (4,2,1)$$

по x и применяем теоремы о линейных эллиптических уравнениях.

Имеем

$$F_r z_{xxx} + F_s z_{xxy} + F_t z_{xyy} + F_p z_{xx} + F_q z_{xy} + F_z z_x + F_x = 0.$$

Затем рассматриваем полученное уравнение как линейное относительно функции $p = z_x$ с известными коэффициентами

$$F_r p_{xx} + F_s p_{xy} + F_t p_{yy} + F_p p_x + F_q p_y + F_z p + F_x = 0. \tag{4,2,2}$$

В коэффициентах этого уравнения аргументы z, p, q, r, s, t являются функциями от x, y, которые в любой связной замкнутой подобласти $\mathfrak{B}' \subset D$ удовлетворяют условию Гельдера, с постоянными, зависящими только от констант условий I, II, III, расстояния d' от границы D до области $\mathfrak{B}'$ и диаметра области D. Для функций $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$ это есть следствие теоремы 13, а для $p = z_x$, $q = z_y$ это вытекает из условия II. Наконец, используя связность области $\mathfrak{B}'$, убеждаемся, что $z(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера в $\mathfrak{B}'$ с показателем 1 и постоянной, зависящей только от K_1, d' и диаметра D.

Из гельдеровой непрерывности (по всем аргументам) первых производных функции F следует, что коэффициенты уравнения (4,2,2), рассматриваемые как известные функции от x, y, удовлетворяют условию Гельдера в $\mathfrak{B}'$ с константами, зависящими только от констант из условий I—IV, от d' и от диаметра области D.

Пусть $\mathfrak{B}$—данная связная замкнутая подобласть области D. Введем другую замкнутую связную подобласть $\mathfrak{B}' \subset D$, состоящую из точек D, удаленных от границы D на расстояние, не меньше $d/2$, и содержащую в себе $\mathfrak{B}$.

Полагая $d' = \frac{d}{2}$, применим к уравнению (4,2,2) в области $\mathfrak{B}'$ теорему 3 (Ю. Шаудер) (п. 3 § 1). Тогда в $\mathfrak{B}$ модули вторых производных функции $p(x, y)$, т. е. $|z_{xxx}|$, $|z_{xxy}|$, $|z_{xyy}|$, ограничены константой, которая вместе с константами условий Гельдера для этих производных в $\mathfrak{B}$ зависит только от постоянных из условий I—VI и диаметра D.

Аналогично, дифференцируя (4,2,1) по y, получим для z_{yyy} оценки того же вида.

Теорема 15 доказана.

Доказательство теоремы 16 основано также на дифференцировании уравнения (4,2,1), в которое подставлено решение $z(x, y)$, и последующем применении теорем 14 и 15 и теоремы о линейных уравнениях.

Искомые оценки для любой замкнутой подобласти, удаленной от границы D на положительное расстояние, следуют из теоремы 15. Для получения оценок в точках, близких к границе, вводятся снова локальные преобразования координат от x, y к ξ, η в окрестности произвольной точки граничной кривой, отображающие эту кривую локально в отрезок Γ на прямой $\eta = \mathrm{const}$. Преобразованная при этом функция $z'(\xi, \eta)$ удовлетворяет соответствующим образом преобразованному уравнению, которое мы обозначим через (4,2,1′) и которое после дифференцирования по ξ дает уравнение (4,2,2′), аналогичное уравнению (4,2,2). Уравнение (4,2,2′) можно рассматривать как «линейное» с известными коэффициентами относительно функции $p'(\xi, \eta) = z'_\xi(\xi, \eta)$. Это уравнение справедливо в области G, имеющей Γ частью своей границы.

Как и в доказательстве теоремы 15, мы можем заключить на основании теоремы 15 и условия V, что коэффициенты уравнения (4,2,2′), как функции ξ, η в области G, удовлетворяют условию Гельдера, показатель которого и постоянные зависят только от констант K, K_1, K_2, λ, α, фигурирующих в условиях I—V, и от максимумов модулей функций $x = x(s)$ и $y = y(s)$ и их производных до третьего порядка включительно. (Функции $x(s)$, $y(s)$, как уже указывалось в формулировке теоремы 16, задают границу области D.) Кроме того, в силу условия IV, решение $p'(\xi, \eta)$ «линейного» уравнения (4,2,2′) удовлетворяет неравенству на Γ

$$|p'_{\xi\xi}| \leqslant K'_2,$$

а в силу условия VI $p'_{\xi\xi}$ на Γ удовлетворяет, кроме того условию Гельдера с показателем α и постоянной K_2.

Заключительный этап доказательства основан на следующем вспомогательном предложении: пусть G — область, гомеоморфная открытому кругу, и пусть в состав границы G входит прямолинейный отрезок Γ с концами в точках A и B. Пусть A' и B' — точки отрезка AB, удаленные соответственно от концов A и B на расстояние $3\delta > 0$, где 8δ не превосходит l — длины отрезка Γ. Обозначим через G' замкнутую подобласть области G такую, что:

а) граница области G' состоит из отрезка $A'B'$ и дуги γ' с концами в точках $A'B'$ (рис. 3);

б) если P — граница области G, то расстояние γ' до множества $P-\Gamma$ не меньше, чем 2δ.

В области $G+\Gamma$ рассмотрим решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=h \tag{4,2,3}$$

и пусть 1) функция $u(x, y)\in C^2(G+\Gamma)$ и на отрезке Γ обращается в функцию $g(s)\in C^{2,\alpha}(\Gamma)$; 2) функции a, b, c,

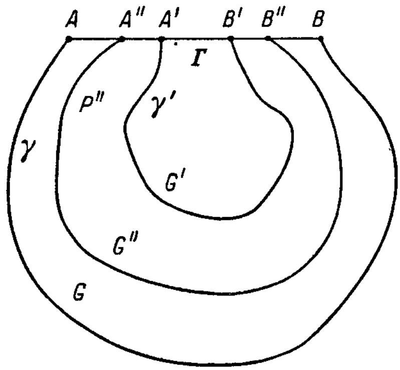

Рис. 3.

d, e, f, h удовлетворяют условию Гельдера с показателем α в $\bar{G}$; 3) в $\bar{G}$ справедливо неравенство

$$ac-b^2\geqslant\sigma_0=\text{const}>0.$$

Тогда в области $G'+\gamma'+A'B'$ функция $u(x, y)\in C^{2,\alpha}$, и в этой области имеет место оценка

$$\|u\|_{2,\alpha}\leqslant R,$$

где постоянная $R\geqslant 0$ зависит лишь от σ_0, $\|g\|_{2,\alpha}$,

$$\max\left\{\|a\|_{C^\alpha(G)},\ \|b\|_{C^\alpha(G)},\ \|c\|_{C^\alpha(G)},\ \|d\|_{C^\alpha(G)},\ \|e\|_{C^\alpha(G)},\ \|f\|_{C^\alpha(G)},\ \|h\|_{C^\alpha(G)}\right\},$$

$\|u\|_\alpha$ и числа δ.

Доказательство этого предложения легко вытекает из второй теоремы Шаудера (см. п. 3 § 1).

Действительно, пусть A'' и B'' — соответственно середины отрезков AA' и BB'. Тогда можно построить бесконечно дифференцируемую кривую $P'' \subset G + \Gamma$, ограничивающую гомеоморфную открытому кругу область $G'' \supset G'$ и состоящую из суммы отрезков $A''B''$ и дуги γ''. При этом γ'' можно считать выбранной так, что она удалена как от границы G, так и от замыкания области G' на расстояние, не меньшее $\delta > 0$. Пусть $\zeta(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция в области $G'' + P''$, обладающая следующими свойствами:

а) на замыкании G' она равна единице;

б) в $\delta/2$-окрестности кривой P'' она равна нулю;

в) в остальных точках области G'' ее значения заключены между нулем и единицей. (Способ построения такой функции очевиден, так как γ — дуга окружности, удаленная от P'' на расстояние, не меньшее чем $\delta > 0$.)

В области $G'' + P''$ функция $v = \zeta u$ такова, что

1) на границе этой области — кривой P'' — она принадлежит пространству $C^{2, \alpha}$, причем

$$v|_{\gamma''} = 0, \quad v|_{A''B''} = \zeta g(s);$$

2) в замкнутой области $G'' + P''$ функция $v \in C^2$ удовлетворяет уравнению

$$av_{xx} + 2bv_{xy} + cv_{yy} + dv_x + ev_y = h',$$

где $h'(x, y) \in C^\alpha(G'' + P'')$ и $\|h'\|_\alpha$ оценивается через $\|\zeta\|_{2, \alpha}$ и $\|u\|_\alpha$ в области $G'' + P''$; $\|\zeta\|_{2, \alpha}$ оценивается лишь через число $\delta > 0$.

Таким образом, условия второй теоремы Шаудера выполнены, и мы имеем в замкнутой области $G'' + P''$ оценку

$$\|v\|_{2, \alpha} \leqslant R_1\left(\|\zeta g\|_{2, \alpha} + \max_{G''+P''} |\zeta u| + \|h'\|_\alpha\right) \equiv R_2,$$

где постоянная $R_1 \geqslant 0$ зависит лишь от σ_0, δ,

$$\|u\|_{C^\alpha(G''+P'')}, \quad \max\left\{\|a\|_{C^\alpha(G)}, \ldots, \|h\|_{C^\alpha(G)}\right\}.$$

Но на множестве $G'+A'B'+\gamma'$ имеем $\zeta\equiv 1$, поэтому

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(G'+A'B'+\gamma')}\leqslant R_2.$$

и наше утверждение доказано.

Вернемся теперь к завершению доказательства теоремы 16. Если мы обозначим через $\beta\in(0,1)$ наименьший из показателей Гельдера для коэффициентов уравнения (4,2,3) и числа α (условие VI), то мы будем находиться в условиях только что доказанного утверждения. Отсюда следует, что для третьих производных функции $z'(\xi,\eta)$: $z'_{\xi\xi\xi}$, $z'_{\xi\xi\eta}$, $z'_{\xi\eta\eta}$ получены оценки констант Гельдера с показателем β в круговом сегменте $G'+\gamma'+A'B'$ (который был построен выше), зависящие лишь от постоянных K, K_1, K_2, λ, α.

Из уравнения, полученного дифференцированием уравнения (4,2,1') по η, можно выразить $z'_{\eta\eta\eta}$ через оцененные уже третьи производные от $z'(\xi,\eta)$.

Следовательно, для $z'_{\eta\eta\eta}$ требуемые оценки также имеют место.

Возвращаясь к исходным координатам x, y и замечая, что этот прием можно применить в окрестности каждой граничной точки области D, мы получаем оценки третьих производных от $z(x,y)$ и констант Гельдера для них в области, представляющей собой некоторую окрестность границы D. При этом используется, что D — область типа L_3. Детали рассуждения, которое нужно было бы провести, подробно приведены в п. 3 § 3 (здесь мы их опускаем).

Остальная часть области D есть некоторая замкнутая подобласть D, для которой оценки получены в теореме 15.

Комбинируя эти оценки, получаем искомые оценки для третьих производных функции $z(x,y)$ во всей замкнутой области D. Теорема доказана.

3. Априорные оценки старших производных (общий случай). Методика, которая была применена в теоремах 15 и 16 для получения оценок показателей и постоянных в условиях Гельдера для третьих производных, в основных чертах сохраняется при получении аналогичных оценок в случае производных высших порядков.

Основные предположения, при которых проводится исследование свойств старших производных, таковы:

А. Пусть D — ограниченная область на плоскости x, y и пусть $z(x, y)\in C^3(D)$ — решение уравнения

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y)=0,$$

имеющее в D непрерывные производные до третьего порядка включительно, и пусть, кроме того, для всех $(x, y)\in D$ справедливы неравенства

$$|z|\leqslant K_1, \quad |z_x|\leqslant K_1, \quad |z_y|\leqslant K_1,$$
$$|z_{xx}|\leqslant K_1, \quad |z_{xy}|\leqslant K_1, \quad |z_{yy}|\leqslant K_1.$$

Б. Функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ имеет непрерывные производные до порядка $m\,(m\geqslant 1)$ включительно по независимым переменным r, s, t, p, q, z, x, y в открытом множестве Q восьмимерного пространства r, s, t, p, q, z, x, y, содержащем поверхность

$$\Phi\colon (r=z_{xx}(x, y),\ s=z_{xy}(x, y),\ t=z_{yy}(x, y),\ p=z_x(x, y),$$
$$q=z_y(x, y), \quad z=z(x, y),\ x,\ y), \quad (x, y)\in D,$$

и все производные m-го порядка удовлетворяют на Φ условию Гельдера по совокупности переменных r, s, t, p, q, z, x, y с показателем $\alpha\in(0, 1)$.

Обозначим через K постоянную, ограничивающую сверху на поверхности Φ как модули всех производных функции $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ до m-го порядка включительно, так и константы Гельдера производных m-го порядка этой функции относительно показателя α.

В. На поверхности Φ для любых $(x, y)\in D$ и любых вещественных чисел ξ, η справедливо неравенство

$$F_r\xi^2+F_s\xi\eta+F_t\eta^2\geqslant\lambda(\xi^2+\eta^2),$$

где $\lambda=\mathrm{const}>0$.

Г. Область D представляет собой область класса $L_{m+2,\alpha}$ *), а само решение $z(x, y)$ и его производные до третьего

---

*) В соответствии с п. 2 § 1 принадлежность D классу $L_{m+2,\alpha}$ означает следующее: граница D задается конечным набором простых замкнутых кривых $\Gamma_i: x=x^i(s)$, $y=y^i(s)$, где функции $x^i(s)$ и $y^i(s)$ принадлежат $C^{m+2,\alpha}$. В дальнейшем будем считать, что при любом $k\leqslant m+2$ справедливы неравенства

$$\|x(s)\|_k\leqslant\|x(s)\|_{k,\alpha}\leqslant K_3;\quad \|y(s)\|_k\leqslant\|y(s)\|_{k,\alpha}\leqslant K_3,$$

где K_3 — некоторая постоянная.

порядка включительно непрерывны в $\overline{D}$. Кроме того, граничные значения $z(x, y)$, как функция длины дуги границы, имеют производные до $(m+2)$-го порядка включительно, причем $(m+2)$-я производная удовлетворяет условию Гельдера с постоянной K_2 и показателем α.

Имеют место следующие основные теоремы.

Теорема 17. *Если выполнены предположения А, Б, В, то во всякой замкнутой подобласти* $\mathfrak{B} \subset D$ *функция* $z(x, y)$ *имеет в* D *непрерывные производные до* $m+2$-го *порядка включительно, причем все производные порядка* $m+2$ *удовлетворяют в* $\mathfrak{B}$ *условию Гельдера с показателем* β *и*

$$\|z\|_{C^{2,\beta}(\mathfrak{B})} \leqslant R.$$

Постоянные $\beta \in (0, 1)$ *и* $R < +\infty$ *зависят только от следующих величин:*

1) *расстояния области* $\mathfrak{B}$ *до границы* D,

2) *постоянных* K, K_1, λ,

3) *диаметра области* $\mathfrak{B}$.

Теорема 18. *Если выполнены предположения А, Б, В, Г, то в замыкании области* D *функция* $z(x, y)$ *имеет непрерывные производные до* $m+2$-го *порядка включительно, причем все производные порядка* $m+2$ *удовлетворяют в* $\overline{D}$ *условию Гельдера с показателем* β *и общей константой* R.

Постоянные $\beta \in (0, 1)$ *и* $R > 0$ *зависят лишь от следующих величин:*

1) *постоянных* K, K_1, K_2, λ, α,

2) *диаметра области* D,

3) *постоянной* K_3, *характеризующей степень гладкости границы области* D *в метрике* $C^{m+2,\alpha}$.

Доказательство теоремы 17. Пусть $3\delta > 0$ — расстояние $\mathfrak{B}$ до границы области D. Тогда можно найти область $\mathfrak{A} \subset D$ такую, что

1. Область $\mathfrak{A}$ принадлежит классу $L_{m+2,\alpha}$.

2. Расстояние $\mathfrak{B}$ до границы $\mathfrak{A}$ не меньше $\frac{3}{2}\delta$.

3. Расстояние $\mathfrak{A}$ до границы D не меньше δ. Пусть $\zeta(x, y)$ бесконечно дифференцируемая функция в замыкании области $\mathfrak{A}$, обладающая следующими свойствами:

а) $\zeta(x, y)$ на U_1 равна единице, где U_1 — замкнутая окрестность области $\mathfrak{B}$ радиуса $\frac{3}{4}\delta$;

б) в окрестности границы области $\mathfrak{A}$ шириной $\delta/2$ функция $\zeta \equiv 0$;

в) в прочих точках области $\mathfrak{A}$ функция ζ заключена между нулем и единицей.

Так как $z(x, y)$ трижды непрерывно дифференцируема в D, то она удовлетворяет в D уравнениям:

$$F_r z_{xxx} + F_s z_{xxy} + F_t z_{xyy} + F_p z_{xx} + \\ + F_q z_{xy} + F_z z_x + F_x = 0, \quad (4,3,1)$$

$$F_r z_{xxy} + F_s z_{xyy} + F_t z_{yyy} + F_p z_{xy} + \\ + F_q z_{yy} + F_z z_y + F_y = 0, \quad (4,3,2)$$

которые получаются дифференцированием тождества

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) \equiv 0$$

по x и y.

Положим $p = z_x$, $q = z_y$, тогда уравнения (4,3,1) и (4,3,2) превращаются в уравнения второго порядка относительно функций p и q:

$$F_r p_{xx} + F_s p_{xy} + F_t p_{yy} + F_p p_x + F_q p_y + \\ + F_z p + F_x = 0; \quad (4,3,3)$$

$$F_r q_{xx} + F_s q_{xy} + F_t q_{yy} + F_p q_x + F_q q_y + \\ + F_z q + F_y = 0. \quad (4,3,4)$$

Из условий А, Б, В настоящей теоремы вытекает, что выполнены условия теоремы 15 на множестве $\overline{\mathfrak{A}}$ и потому все третьи производные функции $z(x, y)$ на $\overline{\mathfrak{A}}$ удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем $\alpha' \in (0, 1)$ и константой R_1, зависящими лишь от постоянных K, K_1, λ, δ.

Таким образом, «коэффициенты» обоих уравнений (4,3,3) и (4,3,4) функции F_r, F_s, F_t, F_p, F_q, F_z, F_x, F_y непрерывно дифференцируемы в $\overline{\mathfrak{A}}$ и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера с общим показателем $\beta = \min(\alpha, \alpha')$. Нормы этих функций в метрике $C^{1,\beta}(\overline{\mathfrak{A}})$ оцениваются сверху постоянной R_2, зависящей лишь от чисел K, K_1, λ, δ, α.

Рассмотрим теперь функцию $v=\zeta p$. Эта функция принадлежит пространству $C^{2,\beta}(\overline{\mathfrak{A}})$, совпадает с функцией $p(x, y)$ на множестве U_1 и обращается в нуль на границе области $\mathfrak{A}$.

Нетрудно видеть, что функция v удовлетворяет в $\overline{\mathfrak{A}}$ уравнению

$$F_r v_{xx}+F_s v_{xy}+F_t v_{yy}=H(x, y), \tag{4,3,5}$$

где $H(x, y)\in C^{1,\beta}(\overline{\mathfrak{A}})$.

Норма функции $H(x, y)$ так же, как и нормы функций F_r, F_s, F_t, F_p, F_q, F_z, F_x в пространстве $C^{1,\beta}(\overline{\mathfrak{A}})$, оценивается постоянной R_2', зависящей лишь от чисел K, K_1, λ, δ, α.

Таким образом, $v(x, y)$ есть решение задачи Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} F_r v_{xx}+F_s v_{xy}+F_t v_{yy}&=H, \\ v\,|_{\text{гр}\mathfrak{A}}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4,3,6}$$

Так как всюду в $\mathfrak{A}$

$$F_r\xi^2+F_s\xi\eta+F_t\eta^2\geqslant\lambda(\xi^2+\eta^2),$$

то задача Дирихле (4,3,6) имеет единственное решение в $C^2(\mathfrak{A})$. Это решение есть функция $v(x, y)$.

С другой стороны, задача Дирихле (4,3,6) удовлетворяет всем условиям первой теоремы Шаудера (теорема 1 § 1), если считать, что $n=1$.

Поэтому функция $v(x, y)\in C^{3,\beta}(\overline{\mathfrak{A}})$, причем

$$\|v\|_{3,\beta}\leqslant R_3\|H\|_{1,\beta}\leqslant R_3R_2'=R_4, \tag{4,3,7}$$

где постоянные R_3 и R_4 зависят только от постоянных K, K_1, λ, δ, α. Так как $v\equiv 0$ в окрестности границы области $\mathfrak{A}$ радиуса $\delta/2$, то оценка (4,3,7) не зависит от свойств границы области $\mathfrak{A}$.

Отсюда легко следует, что на U_1: $p\in C^{3,\beta}(U_1)$ и имеет место оценка

$$\|p\|_{C^{3,\beta}(U_1)}\leqslant R_4,$$

тем более

$$\|p\|_{C^{3,\beta}(\mathfrak{B})}\leqslant R_4.$$

Совершенно аналогично, вводя функцию $w = \zeta q$, получим

$$\|q\|_{C^{3,\beta}(\mathfrak{B})} \leqslant \|q\|_{C^{3,\beta}(U_1)} \leqslant R_4'$$

и, следовательно,

$$\|z\|_{C^{4,\beta}(\mathfrak{B})} \leqslant \|z\|_{C^{4,\beta}(U_1)} \leqslant (R_4 + R_4' + K_1).$$

Если бы $m = 2$, то теорема 17 была бы уже доказана.

Покажем, как продолжить доказательство это теоремы для $m > 2$. Мы получили, что на множестве U_1: $p, q \in C^{3,\beta}(U_1)$ и на этом множестве верны неравенства

$$\|p\|_{C^{3,\beta}} \leqslant R_3, \quad \|q\|_{C^{3,\beta}} \leqslant R_3'.$$

Следовательно, на U_1 функция $z \in C^{4,\beta}$ и

$$\|z\|_{4,\beta} \leqslant R_4 + R_4' + K_1.$$

Таким образом, на множестве U_1 функции F_r, F_s, F_t, H принадлежат $C^{2,\beta}$. Строим область U_2 класса $L_{m+2,\alpha}$, промежуточную между U_1 и $\mathfrak{B}$, срезающую функцию

$$\zeta_1(z, y) = \begin{cases} \text{единице, если } (x, y) \text{ принадлежит } \delta/2\text{—замкнутой} \\ \text{окрестности множества } \mathfrak{B}, \text{ т. е. } (x, y) \in U_2; \\ \text{нулю в } \delta/8\text{ — окрестности границы } U_1; \text{ во всех} \\ \text{других точках } U_1 \text{ функция } \zeta_1 \text{ заключена между} \\ \text{нулем и единицей.} \end{cases}$$

Функцию ζ_1 строим, как и функцию ζ, бесконечно дифференцируемой.

Далее проводим те же рассуждения, пользуясь на этот раз теоремой Шаудера для $n = 2$.

Таким путем получаем оценки пятых производных в $\delta/2$ — окрестности множества $\mathfrak{B}$. Проведя аналогичные построения конечное число раз, мы дойдем до оценок $m+2$ — производных функции $z(x, y)$, используя при этом теорему Шаудера для $n = m$, и завершим тем самым доказательство теоремы.

П л а н д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 18. Как мы уже знаем, получение оценок в замкнутой области с достаточно гладкой границей разбивается на две части: на рассмотрение в замкнутой подобласти (они уже проведены в теореме 17) и на рассмотрение производных решения в малых окрестностях граничных точек. Мы не будем описывать последние построения подробно, так как они осуществляются простой комбинацией приемов, примененных в доказательствах теорем 16 и 17. Детальное оформление этих рассуждений было бы весьма полезным упражнением для читателя.

Комбинируя эти оценки, получаем искомые оценки для $m+2$ производных функции $z(x, y)$ во всей замкнутой области D.

§ 5. Усиленные теоремы существования

1. Общие эллиптические уравнения. Результаты, изложенные в §§ 3 и 4, позволяют значительно усилить теоремы 9 и 10 § 2, в которых устанавливалась разрешимость задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. Именно вместо того, чтобы требовать равномерных по параметру априорных оценок решений вспомогательных задач Дирихле в метрике $C^{m,\alpha}$ $(m \geqslant 2)$, достаточно иметь их теперь только в метрике C^2.

Ниже мы неизменно будем предполагать, что область Ω, где рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0, \tag{5,1,1}$$

имеет границу $\Gamma \in L_{m+2,\alpha}$ $(m \geqslant 1,\ 0 < \alpha < 1)$.

Рассмотрим сначала, как можно усилить теорему 9. Основные предположения, на которых строится доказательство теоремы 9, таковы:

А. При всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых конечных z, p, q, r, s, t функция $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, как функция восьми независимых переменных, имеет все производные до m-го порядка включительно $(m \geqslant 2)$, причем производные порядка m удовлетворяют условию Гельдера по переменным r, s, t, p, q, z, x, y.

Аналитически это эквивалентно следующему. Пусть область

$$Q_M = \begin{cases} |z| \leqslant M, & |r| \leqslant M, \\ |p| \leqslant M, & |s| \leqslant M, \\ |q| \leqslant M, & |t| \leqslant M \end{cases}$$

($M>0$ — некоторое фиксированное число). Тогда на топологическом произведении $Q_M \times (\Omega+\Gamma)$ функция восьми независимых переменных $F(r, s, t, p, q, z, x, y) \in C^{m,\alpha}$, при этом $\|F\|_{m,\alpha}$ на $Q_M \times (\Omega+\Gamma)$ зависит от M и может неограниченно возрастать при $M \to +\infty$.

Б. На любом решении $z(x, y) \in C^2$ уравнения (5,1,1) справедлива оценка

$$F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 \geqslant \sigma(\|z\|_2),$$

где $\sigma(M)$ — положительная непрерывная функция M на $[0, +\infty)$. $\left(\text{Случай } \lim\limits_{M \to +\infty} \sigma(M) = 0 \text{ не исключается.}\right)$

В. Существует параметрическое семейство уравнений

$$\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0 \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1), \quad (5,1,2)$$

обладающее следующими свойствами:

а) $\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; 1) \equiv F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$;

б) функция Φ при любом $M>0$ на топологическом прямом произведении $Q_M \times (\Omega+\Gamma) \times [0, 1]$ принадлежит $C^{m,\alpha}$ как функция независимых переменных $r, s, t, p, q, z, x, y, \mu$;

в) на всех решениях $z(x, y) \in C^2(\Omega+\Gamma)$ уравнения

$$\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0$$

при любом фиксированном $\mu \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\Phi_r \Phi_t - \frac{1}{4} \Phi_s^2 \geqslant \sigma(\|z\|_{C^2}) > 0 \qquad (5,1,3)$$

(функция $\sigma(M)$ введена в предположении Б);

г) при всех $(x, y) \in \Omega$, $\mu \in [0, 1]$ и любых конечных z, p, q, r, s, t справедливо неравенство

$$\Phi_z(r, s, t, p, q, z, y; \mu) \leqslant 0. \qquad (5,1,4)$$

В дальнейшем в соответствии с обозначениями п. 1 § 2 под $z_\mu(x, y)$ будем понимать решение задачи Дирихле

$$\Phi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y; \mu) = 0, \qquad (5,1,5)$$

$$z|_\Gamma = 0, \qquad (5,1,5')$$

на котором оператор Φ положительно эллиптичен.

Результат, содержащийся в теореме 9, формулируется так: рассмотрим задачу Дирихле

$$F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0, \tag{5,1,6}$$

$$z|_\Gamma = 0, \tag{5,1,7}$$

и пусть уравнение (5,1,6) включено в параметрическое семейство уравнений (5,1,5), для которого выполнены сформулированные выше условия В (а, б, в, г).

Тогда если при всех $\mu \in [0, 1]$ справедлива равномерная априорная оценка

$$\| z_\mu \|_{m, \alpha} \leqslant A < +\infty \tag{5,1,8}$$

и при $\mu = 0$ задача Дирихле (5,1,5—5′) имеет решение $z_0(x, y) \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \alpha}$, то задача Дирихле (5,1,5—5′) имеет при любом $\mu \in [0, 1]$ решение $z_\mu \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \alpha}$, на котором оператор Φ положительно эллиптичен. Таким образом, исходная задача Дирихле имеет решение $z_1(x, y) \in \overset{\circ}{C}{}^{m, \alpha}(\Omega + \Gamma)$, на котором оператор F положительно эллиптичен.

Из теоремы 6 вытекает, что это решение единственно в C^2, если функция F порождает эллиптически выпуклый оператор (см. п. 4 § 1).

Допустим, что все условия теоремы 9, кроме соотношения

$$\| z_\mu \|_{m, \alpha} \leqslant A < +\infty,$$

выполнены. Вместо этого мы будем предполагать, что при всех $\mu \in [0, 1]$ для любого решения $z_\mu \in C^2(\Omega + \Gamma)$ задачи (5,1,5—5′) справедлива оценка

$$\| z_\mu \|_2 \leqslant B. \tag{5,1,8′}$$

Тогда из леммы 2 (п. 2 § 2) вытекает, что выполняются условия I, II, III, IV и VI (а) с одними и теми же постоянными для любых решений z_μ, $\mu \in [0, 1]$, т. е. выполнены все условия теоремы 15. Отсюда вытекает существование таких чисел $\delta \in (0, 1)$ и $R > 0$, что для всех решений $z_\mu(x, y) \in C^3(\Omega + \Gamma)$, на которых оператор, порожденный функцией $\Phi(z_{xx}, z_{xy}, \ldots, z, x, y; \mu)$, положительно эллиптичен, справедливы равномерные априорные оценки

$$\| z_\mu \|_{2, \delta} \leqslant R.$$

В силу теоремы 15 постоянные δ и R зависят лишь от числа B, числа $\sigma(B)$ и постоянных K, K_1, λ, K_2 условий I, II, III и VI (а), которые полностью определяются с помощью условий В (а, б, в) постоянными B и $\sigma(B)$.

После этого, так как выполняются условия IV и V (см. начало § 4) и VI (а) и (б), мы находимся в условиях теоремы 18 и, следовательно, решение $z_\mu(x, y)$ имеет непрерывные $m+2$ производные, которые удовлетворяют условию Гельдера, показатель β и постоянные которого зависят только от констант условий I—VI, т. е. в конечном итоге от чисел B, $\sigma(B)$ и свойств функции Φ, фигурирующих в условиях В (а, б, в).

Таким образом, имеет место равномерная априорная оценка

$$\| z_\mu \|_{m+2, \beta} \leqslant R_1$$

при всех $\mu \in [0, 1]$ для любого решения $z_\mu \in C^3(\Omega+\Gamma)$ задачи Дирихле (5,1,5—5′), на котором оператор, порожденный функцией $\overline{\Phi}(z_{xx}, z_{xy}, \ldots, z, x, y; \mu)$, положительно эллиптичен. Следовательно, подавно имеет место равномерная оценка

$$\| z_\mu \|_{m, \alpha} \leqslant R_1$$

и поэтому справедлив результат теоремы 9 для задачи (5,1,6—7).

Из построений, проведенных выше, вытекает следующий важный результат, который мы, естественно, называем усиленной теоремой существования решения задачи Дирихле для уравнения (5,1,1):

Теорема 19. *Рассмотрим задачу Дирихле*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0, \tag{5,1,9}$$

$$z|_\Gamma = 0, \tag{5,1,10}$$

и пусть уравнение (5,1,9) *удовлетворяет условиям* А, Б *и включено в параметрическое семейство уравнений* (5,1,5). *Будем считать, что для семейства уравнений* (5,1,5) *выполнены условия* В (а, б, в, г). *Тогда, если при всех* $z_\mu(x, y) \in C^3(\Omega+\Gamma)$ *справедлива равномерная априорная оценка*

$$\| z_\mu \|_2 \leqslant B$$

и при $\mu=0$ *задача Дирихле* (5,1,5—5′) *имеет решение* $z_0 \in C^3(\Omega+\Gamma)$, *то задача Дирихле* (5,1,9—10) *имеет решение* $z(x, y) \in C^{m+2,\delta}(\Omega+\Gamma)$, *на котором оператор, порожденный функцией* $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$, *положительно эллиптичен.*

Это решение единственно в классе $C^2(\Omega+\Gamma)$, *если оператор эллиптически выпуклый.*

Совершенно аналогично устанавливается.

Теорема 20. *Рассмотрим задачу Дирихле*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y)=0, \tag{5,1,11}$$

$$z|_\Gamma = g(s) \in C^{m+2,\alpha}(\Gamma) \tag{5,1,12}$$

и пусть уравнение (5,1,11) *удовлетворяет условиям* А, Б *при* $m \geqslant 1$. *Тогда, если задача Дирихле* (5,1,9—10) *имеет решение* $z_0 \in C^3(\Omega+\Gamma)$, *то исходная задача Дирихле* (5,1,11—12) *имеет решение в* $C^{m+2,\delta}(\Omega+\Gamma)$, *если для всех решений* $z_\mu \in C^3(\Omega+\Gamma)$ *задачи Дирихле*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y)=0,$$

$$z|_\Gamma = \mu g(s),$$

на которых оператор, порожденный функцией F, *положительно эллиптичен, справедлива равномерная априорная оценка*

$$\| z_\mu \|_2 \leqslant B.$$

2. Квазилинейные уравнения. Остановимся более подробно на случае квазилинейных уравнений. Пусть в области Ω, принадлежащей классу L_{m+2} $(m \geqslant 1)$, задано уравнение

$$A(x, y, p, q)\,r + 2B(x, y, p, q)\,s + \\ + C(x, y, p, q)\,t = D(x, y, z, p, q). \tag{5,2,1}$$

Относительно коэффициентов этого уравнения будем ниже предполагать выполненными следующие условия:

А) Функции A, B, C, D при всех конечных значениях z, p, q и при всех (x, y) из замкнутой области $\Omega+\Gamma$ принадлежат $C^{m,\alpha}$ и их m-е $(m \geqslant 1)$ производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и коэффициентами, которые в шаре $z^2+p^2+q^2 \leqslant R^2$ для всех $(x, y) \in \Omega$ зависят только от радиуса R.

Б) При всех конечных значениях z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega$ выполнены неравенства

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \lambda_0(\xi^2 + \eta^2) \qquad (5,2,2)$$

(где $\alpha_0 = \mathrm{const} > 0$, а ξ и η — произвольные вещественные числа),

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0. \qquad (5,2,3)$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{aligned} Ar + 2Bs + Ct &= \mu D; \\ z|_\Gamma &= \mu\varphi(x), \end{aligned} \qquad (5,2,4)$$

где параметр $\mu \in [0, 1]$, а $\varphi(x) \in C^{m+2,\alpha}$. При $\mu = 0$ эта задача имеет тривиальное решение $z_0 \equiv 0$.

Нетрудно видеть, что все условия теоремы 20 будут выполнены, если предполагать справедливой для решений $z_\mu \in C^3$ задачи (5,2,4) равномерную по μ априорную оценку

$$\|z_\mu\|_2 \leqslant M < +\infty. \qquad (5,2,5)$$

Поэтому задача Дирихле (5,2,4) при любом $\mu \in [0, 1]$ имеет решение из $C^{m+2,\delta}$, если справедлива равномерная по $\mu \in [0, 1]$ априорная оценка (5,2,5).

Покажем, что наличие равномерной по $\mu \in [0, 1]$ оценки

$$\|z_\mu\|_1 \leqslant N < +\infty$$

при условии, что $z_\mu \in C^3$, достаточно, чтобы имела место оценка (5,2,5).

Действительно, подставим z_μ в уравнение (5,2,4). Тогда получим

$$A_\mu r_\mu + 2B_\mu s_\mu + C_\mu t_\mu = \mu D_\mu, \qquad (5,2,6)$$

где

$$A_\mu = A(x, y, p_\mu, q_\mu), \quad C_\mu = C(x, y, p_\mu, q_\mu),$$
$$B_\mu = B(x, y, p_\mu, q_\mu), \quad D_\mu = D(x, y, p_\mu, q_\mu).$$

Нетрудно видеть, что:

1. Функции A_μ, B_μ, C_μ, D_μ равномерно по $\mu \in [0, 1]$ ограничены по модулю постоянной K, которая зависит лишь от N.

2. Для любых вещественных чисел ξ, η в $\Omega+\Gamma$ справедливо неравенство

$$A_\mu\xi^2+2B_\mu\xi\eta+C_\mu\eta^2 \geqslant \lambda(\xi^2+\eta^2) \qquad (5,2,7)$$

с одной и той же постоянной $\lambda>0$ при всех $\mu \in [0, 1]$.

3. $z_\mu \in C^2$ и имеет место равномерная оценка

$$\|z_\mu\|_1 \leqslant N < +\infty.$$

4. Граничные значения $z_\mu(x, y)$, т. е. функция $\mu\varphi$, имеет непрерывные первые и вторые производные по длине границы Ω, причем вторые производные ограничены постоянной K_2; при этом имеет место равномерная по $\mu \in [0, 1]$ оценка

$$K_2 \leqslant \mu\|\varphi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_{m+2,\alpha}.$$

Поэтому, применяя теорему 18 п. 3 § 4, получаем, что $z_\mu \in C^{1,\gamma}$ для любого $\mu \in [0, 1]$, причем показатель γ и константа Гельдера для z_μ зависят только от чисел K, λ, N, K_2, т. е. от N, λ, $\|\varphi\|_{m+2,\alpha}$.

Это значит, что коэффициенты уравнения (5,2,6) принадлежат классу C^γ, а так как $z_\mu \in C^{2,\gamma}$, то, согласно теореме Шаудера (теорема 1 п. 3 § 1), имеет место равномерная по $\mu \in [0, 1]$ оценка

$$\|z_\mu\|_{2,\gamma} \leqslant M,$$

где постоянная M зависит лишь от N, λ, $\|\varphi\|_{m+2,\alpha}$.

Оценка (5,2,5) тогда и подавно имеет место, так как

$$\|z_\mu\|_2 \leqslant \|z_\mu\|_{2,\gamma} \leqslant M.$$

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 21. *Пусть в области* Ω, *принадлежащей классу* L_{m+2}, *задано квазилинейное уравнение*

$$A(x, y, p, q)r+2B(x, y, p, q)s+ \\ +C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q), \qquad (5,2,1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям А) *и* Б). *Рассмотрим для уравнения* (5,2,1) *задачу Дирихле* *с краевым условием* $z|_\Gamma = \varphi$, *где* $\varphi \in C^{m+2,\alpha}$. *Тогда, если для любого положительного решения* $z_\mu \in C^3(\Omega + \Gamma)$, $\mu \in [0, 1]$ *вспомогательной задачи Дирихле* (5,2,4) *имеет место априорная оценка*

$$\|z_\mu\|_1 \leqslant N,$$

то исходная задача Дирихле имеет в C^2 *единственное решение, которое принадлежит пространству* $C^{m+2,\delta}(\Omega + \Gamma)$ (*число* $\delta \in (0, 1)$ *зависит только от чисел* N, λ, $\|\varphi\|_{m+2,\alpha}$ *и свойств границы* Ω).

ГЛАВА II

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛАБЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Результаты главы I сводят исследование вопроса о существовании решения задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения к более простому вопросу: получению априорной оценки искомого решения в метрике C^1.

Это позволяет для широких классов квазилинейных эллиптических задач Дирихле дать простые достаточные условия разрешимости.

Пусть Ω — область на плоскости x, y, где рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$Ar + 2Bs + Ct = D. \tag{II, 1}$$

Во Введении было отмечено, что далеко не для всякого уравнения (II, 1) в области Ω задача Дирихле может иметь решение. Препятствием тому могут служить размеры и форма границы Ω, как это, например, имеет место в задаче о построении поверхности с данной средней кривизной (см. Введение, стр. 10—11).

В этой главе рассматривается класс уравнений, для которого решение задачи Дирихле существует во всякой строго выпуклой области произвольных размеров. Во многих случаях выпуклость области также не будет играть роли.

Этот класс уравнений был подробно изучен в работах С. Н. Бернштейна и назван им классом уравнений L. Точное определение этого понятия будет дано ниже в п. 3 § 7. Здесь мы отметим следующее: если уравнение

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = \\ = D(x, y, z, p, q)$$

принадлежит классу L, то при всех $p^2+q^2 \geqslant 1$ и $|z| \leqslant M$ существует такая постоянная $R_M < +\infty$, зависящая только от M, что

$$\frac{|D|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2} \leqslant R_M. \tag{II, 2}$$

Это условие показывает согласованность порядков роста по p и q при $p^2+q^2 \to \infty$ «коэффициентов» левой части и «свободного члена» в уравнении (II, 1). Как мы уже отметили во Введении, условие (II, 2) позволяет смотреть на уравнения класса L, как на уравнения со слабыми нелинейностями по первым производным.

Отметим, что класс L играет весьма важную роль: к нему приводят так называемые регулярные задачи вариационного исчисления для интегралов

$$\int\int_{\Omega} F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy$$

(см. [6]).

В следующей главе будут рассмотрены квазилинейные уравнения, свободные от ограничения (II, 2). Их мы будем называть уравнениями с сильными нелинейностями.

Для получения априорных оценок решений уравнений класса L в метрике C^1 С. Н. Бернштейн разработал систему весьма тонких аналитических и геометрических построений, которая явилась основополагающей для дальнейших работ по нелинейным эллиптическим задачам. Отметим, что методика С. Н. Бернштейна часто неприменима, если уравнение (II, 1) не есть уравнение класса L. Это будет видно в главе III.

Рассмотрения С. Н. Бернштейна относились к случаю аналитических функций. Ниже в этой главе излагаются результаты С. Н. Бернштейна применительно к случаю функций из гельдеровых пространств $C^{m, \alpha}$.

§ 6. Априорная оценка модуля решения

Ниже будут изложены два приема нахождения явной оценки максимума модуля решения задачи Дирихле для уравнения

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q). \tag{6,0,1}$$

Первый из них основан на рассмотрении уравнения в тех точках, где решение $z(x, y)$ достигает своих точных верхней и нижней границ; этот прием существенно опирается на предположения, что $D_z \geqslant \text{const} > 0$ и форма $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ положительная.

Второй прием, связанный с более слабым требованием $D_z \geqslant 0$, опирается на факт существования ограниченного решения $z_0(x, y) \in C^2(\Omega)$ уравнения (6,0,1).

1. Первый прием ($D_z \geqslant \text{const} > 0$). Теорема 22. *Пусть в открытой области Ω, ограниченной замкнутой кривой Γ, дано решение $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ уравнения*

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q), \tag{6,1,1}$$

которое на Γ обращается в ограниченную непрерывную функцию $\varphi(X)$ точки $X \in \Gamma$. Пусть, далее,

1) *A, B, C — непрерывные функции при $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и всех конечных z, p, q, удовлетворяющие неравенству*

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant 0. \tag{6,1,2}$$

2) *Функция D абсолютно непрерывна по $z \in (-\infty, +\infty)$ и непрерывна по остальным аргументам при всех конечных p, q; $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и удовлетворяет неравенству*

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant k = \text{const} > 0. \tag{6,1,3}$$

Тогда

$$\max_{\Omega+\Gamma}|z(x, y)| \leqslant \max\left\{\sup_{\Gamma}|\varphi(x)|, \frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D(x, y, 0, 0, 0)|}{k}\right\}. \tag{6,1,4}$$

Доказательство. Интерес представляют случаи, когда наибольшее положительное и наименьшее отрицательное значения функция $z(x, y)$ принимает внутри Ω.

Пусть $P(x_0, y_0)$ — точка, в которой $z(x, y)$ достигает наибольшего положительного значения. Тогда имеем

$$z(x_0, y_0) > 0;$$
$$z_x(x_0, y_0) = z_y(x_0, y_0) = 0; \tag{6,1,5}$$
$$z_{xx}(x_0, y_0) \leqslant 0, z_{yy}(x_0, y_0) \leqslant 0, \qquad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\big|_P \geqslant 0. \tag{6,1,6}$$

В точке P имеем

$$A(x_0,\ y_0,\ z,\ 0,\ 0)\,z_{xx}(x_0,\ y_0)+2B(x_0,\ y_0,\ z,\ 0,\ 0)\times \\ \times z_{xy}(x_0,\ y_0)+C(x_0,\ y_0,\ z,\ 0,\ 0)\,z_{yy}(x_0,\ y_0)= \\ =D(x,\ y,\ z(x_0,\ y_0),\ 0,\ 0).$$

Из неравенств (6,1,2) и (6,1,6) имеем

$$D(x,\ y,\ z(x_0,\ y_0),\ 0,\ 0)\leqslant 0\ ^{*)}.$$

Так как

$$D(x,\ y,\ z(x_0,\ y_0),\ 0,\ 0)=D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)+ \\ +\int\limits_0^{z(x_0,\ y_0)} D_z(x,\ y,\ \tau,\ 0,\ 0)\,d\tau\geqslant D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)+kz(x_0,\ y_0),$$

то

$$z(x_0,\ y_0)\leqslant\frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)|}{k}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$z(x_0,\ y_0)\geqslant-\frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)|}{k}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим в условиях теоремы* 22 *уравнение*

$$A(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,r+2B(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,s+ \\ +C(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,t=\mu D(x,\ y,\ z,\ p,\ q), \qquad (6,1,7)$$

где μ — *произвольное положительное число. Пусть* $z_\mu(x,\ y)$ — *решение этого уравнения, обращающееся на* Γ *в* $\mu\varphi(X)$. *Тогда при всех* $\mu>0$ *имеет место оценка*

$$\max_{\Omega+\Gamma}|z_\mu|\leqslant\max\left\{\max_\Gamma|\varphi(X)|,\ \frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D_*(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)|}{k}\right\}. \qquad (6,1,8)$$

Оценка (6,1,8) легко вытекает из того, что

$$\frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)|}{k}\geqslant\frac{\max\limits_{\Omega+\Gamma}|D(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0)|}{\inf\limits_{\substack{\Omega\\-\infty<z<+\infty}} D_z(x,\ y,\ z,\ 0,\ 0)}.$$

---

*) См. по этому поводу теорему 25 § 7.

2. Второй прием ($D_z \geqslant 0$). В случае, когда $D_z \geqslant 0$, нельзя, вообще говоря, указать априорную оценку для верхней границы $|z|$. Однако если известно некоторое ограниченное в $\Omega+\Gamma$ решение уравнения (6,1,1), то можно ограничить $|z|$ в $\Omega+\Gamma$ для любого другого решения этого уравнения. При этом приходится предполагать, что функции A, B, C, не зависят от z.

Имеет место

Теорема 23. *Пусть $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ — решение уравнения*

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = \\ = D(x, y, z, p, q), \qquad (6,2,1)$$

которое обращается на Γ в непрерывную функцию $\varphi(X)$. Функции $A(x, y, p, q)$, $B(x, y, p, q)$, $C(x, y, p, q)$, $D(x, y, z, p, q)$ таковы, что при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega+\Gamma$:

1) $D_z \geqslant 0$;

2) $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \alpha_0(\xi^2+\eta^2)$, $\alpha_0 = \text{const} > 0$;

3) A, B, C, D — *непрерывно дифференцируемые функции всех переменных.*

Пусть, далее, $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ — решение уравнения (6,2,1). *Тогда*

$$\max_{\Omega+\Gamma}|z(x, y)| \leqslant \max_{\Gamma}|\varphi(X)| + 2\max_{\Omega+\Gamma}|u|.$$

Доказательство. Функция $\delta = z - u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению

$$\tilde{A}\delta_{xx} + 2\tilde{B}\delta_{xy} + \tilde{C}\delta_{yy} + \tilde{E}\delta_x + \tilde{G}\delta_y + \tilde{F}\delta = 0, \qquad (6,2,2)$$

где

$$\tilde{A} = \int_0^1 A(x, y, \tau z_x + (1-\tau)u_x, \tau z_y + (1-\tau)u_y)\,d\tau,$$

$$\tilde{B} = \int_0^1 B(x, y, \tau z_x + (1-\tau)u_x, \tau z_y + (1-\tau)u_y)\,d\tau,$$

$$\tilde{C} = \int_0^1 C(x, y, \tau z_x + (1-\tau)u_x, \tau z_y + (1-\tau)u_y)\,d\tau$$

и

$$\tilde{F}=\int\limits_0^1 D_z(x,\ y,\ \tau z+(1-\tau)u,\ \tau z_x+(1-\tau)u_x,\ \tau z_y+(1-\tau)u_y)\,d\tau\ ^{*}),$$

а $\tilde{E}$ и $\tilde{G}$ — непрерывные функции. Из условий 1, 2 вытекает, что

$$\tilde{A}\xi^2+2\tilde{B}\xi\eta+\tilde{C}\eta^2\geqslant\alpha_0(\xi^2+\eta^2),$$
$$\tilde{F}\leqslant 0.$$

А тогда из принципа максимума (см. п. 4 § 1) следует, что наибольшее и наименьшее значения функция $\delta(x,\ y)$ принимает на границе области Ω. Поэтому

$$\max_{\Omega+\Gamma}|\delta|=\max_{\Gamma}|z-u|.$$

Отсюда

$$\max_{\Omega+\Gamma}|z|\leqslant\max_{\Omega+\Gamma}|\delta|+\max_{\Omega+\Gamma}|u|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{\Gamma}|z-u|+\max_{\Omega+\Gamma}|u|\leqslant\max_{\Gamma}|\varphi(x)|+2\max_{\Omega+\Gamma}|u|.$$

Теорема доказана.

Итак, зная хотя бы одно ограниченное решение $u(x,\ y)$ уравнения (6,2,1) в $\Omega+\Gamma$, можно получить в замкнутой области $\Omega+\Gamma$ априорную оценку модуля любого решения $z(x,\ y)$ этого уравнения через граничные значения $z(x,\ y)$ и $\max\limits_{\Omega+\Gamma}|u(x,\ y)|$.

3. В задачах вариационного исчисления, которые мы не рассматриваем в этой книге, применяются также и другие методы для нахождения априорной оценки модуля решения уравнения Эйлера, основанные на свойствах изучаемого функционала (см., например, [6]).

Ниже в § 9 главы III будет изложен метод априорной оценки модуля решений квазилинейных уравнений, основанный на геометрических соображениях.

---

*) Здесь использован прием, уже описанный в доказательстве теоремы 13 (гл. I, § 4, п. 1).

§ 7. Априорные оценки первых производных квазилинейного уравнения класса L

1. Геометрические характеристики граничного условия задачи Дирихле. В этом параграфе под областью Ω мы неизменно будем понимать область, ограниченную замкнутой выпуклой кривой Γ: $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — длина переменной дуги на Γ).

Мы будем также предполагать, что $x(s)$, $y(s) \in C^{2,\beta}(\Gamma)$ (где β — любое число из $(0,1)$) и кривизна кривой Γ во всех точках не меньше, чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$.

Рассмотрим в пространстве кривую γ, определяемую уравнением:

$$\begin{aligned} &x = x(s), \\ &y = y(s), \\ &z = \psi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S \quad (S \text{ — длина } \Gamma). \end{aligned}$$

Относительно $\psi(s)$ предполагаем, что она дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, предполагаем, что значения функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ и их производных до второго порядка включительно при $s = 0$ и $s = S$ совпадают.

Пусть P — произвольная точка кривой γ. Рассмотрим плоскости

$$\tilde{z} = ax + by + c, \tag{7,1,1}$$

проходящие через касательную к γ в точке P и оставляющие γ над собой (рис. 4). Нижним извиванием кривой γ будем называть величину

$$M_{\text{н}}(\gamma) = \sup_{P \in \gamma} \{\inf (a^2 + b^2)\},$$

где точная нижняя граница берется в каждой точке $P \in \gamma$ по всем плоскостям (7,1,1), оставляющим кривую γ над собой.

Аналогично вводится с помощью плоскостей, оставляющих γ под собой, верхнее извивание $M_{\text{в}}(\gamma)$ кривой γ. Поскольку контур Γ фиксирован, то функция $\psi(s)$ однозначно определяет кривую γ. Мы часто поэтому будем писать вместо $M_{\text{н}}(\gamma)$, $M_{\text{в}}(\gamma)$ соответственно $M_{\text{н}}(\psi)$, $M_{\text{в}}(\psi)$. *Извиванием* $M(\gamma) \equiv M(\psi)$ будем называть наибольшее из чисел $M_{\text{н}}(\gamma)$, $M_{\text{в}}(\gamma)$.

Дадим оценку извиваниям кривой γ с помощью дифференциальных свойств функций $x(s)$, $y(s)$, $\psi(s)$.

Пусть P — произвольная точка кривой γ. Для координат точки P имеем формулы

$$x = x_0 = x(s_0),$$
$$y = y_0 = y(s_0),$$
$$z = \psi_0 = \psi(s_0).$$

Уравнения касательной к γ в точке P таковы:

$$\frac{X - x_0}{x_0'} = \frac{Y - y_0}{y_0'} = \frac{Z - \psi_0}{\psi_0'}, \tag{7,1,2}$$

где $x_0' = x'(s_0)$, $y_0' = y'(s_0)$, $\psi_0' = \psi'(s_0)$. Так как s — длина дуги кривой Γ, то $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$. Поэтому, не нарушая

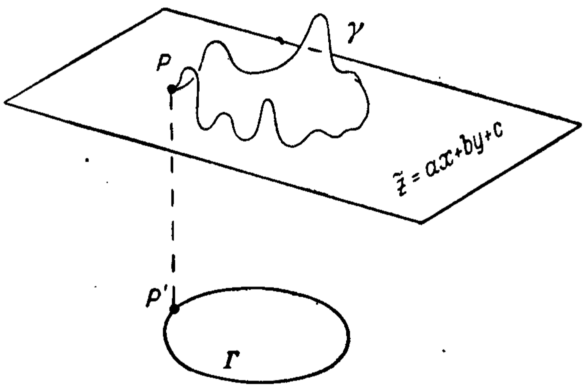

Рис. 4.

общности, можно считать, что $x_0' \neq 0$ и даже $x_0' \geqslant \frac{1}{4}$. Касательную (7,1,2) можно определить так же, как пересечение плоскостей:

$$\begin{cases} (X - x_0)\, y_0' - (Y - y_0)\, x_0' = 0, \\ (Z - \psi_0) - \dfrac{X - x_0}{x_0'}\, \psi_0' = 0. \end{cases}$$

Поэтому уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту касательную, таково:

$$\mu\left[(X-x_0)\,y_0'-(Y-y_0)\,x_0'\right]+\left[Z-\psi_0-\frac{X-x_0}{x_0'}\,\psi_0'\right]=0, \tag{7,1,3}$$

где μ — любое вещественное число.

Разрешая уравнение (7,1,3) относительно Z, получим

$$Z=\psi_0+\frac{X-x_0'}{x_0'}\,\psi_0'+\mu\left\{(X-x_0)\,y_0'-(Y-y_0)\,x_0'\right\}. \tag{7,1,4}$$

На Γ уравнение (7,1,4) определяет функцию

$$\tilde z(s)=\psi_0+\frac{x(s)-x_0}{x_0'}\,\psi_0'+\mu\left\{(x(s)-x_0)\,y_0'-(y(s)-y_0)\,x_0'\right\}. \tag{7,1,5}$$

Обозначая через Q_{γ_1} плоскость (7,1,4), будем иметь, что функция (7,1,5) определяет аппликаты точек кривой γ_1, по которой плоскость (7,1,4) пересекает цилиндр с направляющей Γ и образующими, параллельными оси Z.

Рассмотрим плоскости Q_{γ_1}, над которыми лежит кривая γ. Тогда для них должно выполняться неравенство $\delta(s)\equiv\equiv\psi(s)-\tilde z(s)\geqslant 0$ при всех $s\in[0, S]$. Имеем

$$\begin{aligned}
\psi(s)&=\psi_0+\psi_0'\,\Delta s+\frac{1}{2}\,\psi''(s')\,\Delta s^2,\\
x(s)&=x_0+x_0'\Delta s+\frac{1}{2}\,x''(s'')\,\Delta s^2,\\
y(s)&=y_0+y_0'\,\Delta s+\frac{1}{2}\,y''(s''')\,\Delta s^2,
\end{aligned} \tag{7,1,6}$$

где $\Delta s=s-s_0$, а s', s'', s''' — некоторые точки на сегменте с концами в точках s_0 и s.

Используя формулы (7,1,5) и (7,1,6), после простых выкладок получаем

$$\begin{aligned}
\delta(s)&=\frac{1}{2}\,\psi''(s')\,\Delta s^2-\frac{1}{2}\,\frac{x''(s'')}{x_0'}\,\psi_0'(\Delta s)^2-\\
&\qquad-\frac{1}{2}\,\mu\left[x''(s'')\,y_0'-y''(s''')\,x_0'\right]\Delta s^2=\\
&=\frac{1}{2}\,\Delta s^2\left\{\psi''(s')-x''(s'')\,\frac{\psi_0'}{x_0'}+\mu\varkappa(s_0)+\right.\\
&\qquad\left.+\mu\left[y''(s''')-y''(s_0)\right]x_0'-\mu\left[x''(s'')-x''(s_0)\right]y_0'\right\}.
\end{aligned}$$

где $\varkappa(s)$ — кривизна кривой Γ в точке, отвечающей значению параметра s.

Из полученной формулы для $\delta(s)$ ясно, что можно найти в зависимости от $\|x(s)\|_{2,\beta}$, $\|y(s)\|_{2,\beta}$, $\|\psi(s)\|_2$ и числа $\varkappa_0 > 0$ такие постоянные $\sigma_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что при $\mu > \mu_0$ и $|s - s_0| \leqslant \sigma_0$ будет выполняться неравенство $\delta(s) > 0$, если $s \neq s_0$. После чего ясно, что в зависимости от тех же величин $\left(\text{т. е. } \|x(s)\|_{2,\beta}, \|y(s)\|_{2,\beta}, \|\psi(s)\|_2, \varkappa_0\right)$ можно указать такое $\mu_1 > 0$, что при всех s будет выполняться неравенство

$$\delta(s) \geqslant 0.$$

Так как точка s_0 была взята произвольно, то с помощью числа μ_1 и проводится оценка нижнего извивания кривой γ. Аналогичным образом оценивается верхнее извивание кривой γ.

Из проведенных рассуждений вытекает следующая

Теорема 24. *Пусть* Ω — *область класса* $L_{2,\beta}$, *ограниченная замкнутой выпуклой кривой* Γ: $x = x(s)$, $y = y(s)$, *кривизна которой во всех точках не меньше* $\varkappa_0 = \text{const} > 0$. *Пусть* γ — *кривая, заданная функциями* $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = \psi(s)$ $(\psi(s) \in C^2(\Gamma))$, *тогда верхнее, нижнее и просто извивания кривой* γ *ограничены сверху в зависимости только от* $\varkappa_0 > 0$, $\|x(s)\|_{2,\beta}$, $\|y(s)\|_{2,\beta}$, $\|\psi(s)\|_2$ (β — *любое число из интервала* $(0, 1]$).

2. Геометрические свойства функций и дифференциальные неравенства. Теорема 25. *Пусть* $z(x, y)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\alpha z_{xx} + 2\beta z_{xy} + \gamma z_{yy} < 0. \tag{7,2,1}$$

Тогда, если форма $\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2$ *положительна, то поверхность* $z(x, y)$ *не имеет эллиптических и параболических точек, обращенных выпуклостью в сторону* $z < 0$.

Аналогично, если форма $\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2$ *положительна и выполнено неравенство*

$$\alpha z_{xx} + 2\beta z_{xy} + \gamma z_{yy} > 0, \tag{7,2,2}$$

то поверхность $z(x, y)$ не имеет эллиптических и параболических точек, обращенных выпуклостью в сторону $z > 0$.

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (7,2,1). В эллиптической или параболической точке поверхности $z(x, y)$, обращенной выпуклостью в сторону $z < 0$, имеют место неравенства

$$z_{xx} \geqslant 0, \quad z_{yy} \geqslant 0, \quad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \geqslant 0.$$

Положительность формы $\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2$ означает, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha\gamma - \beta^2 \geqslant 0$. Отметим, что если $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, то в обоих случаях будет $\beta = 0$; аналогичное заключение можно сделать, если хотя бы одна из величин z_{xx} или z_{yy} равна нулю.

В отмеченных частных случаях будем иметь

$$\alpha z_{xx} + 2\beta z_{xy} + \gamma z_{yy} \geqslant 0. \tag{7,2,3}$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $z_{xx} > 0$, $z_{yy} > 0$. Тогда имеем

$$\alpha z_{xx} + 2\beta z_{xy} + \gamma z_{yy} =$$
$$= \left(\sqrt{\alpha z_{xx}} - \sqrt{\gamma z_{yy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\alpha\gamma z_{xx}z_{yy}} + \beta z_{xy}\right). \tag{7,2,4}$$

Неотрицательность последнего слагаемого в правой части тождества (7,2,4) вытекает из неравенств

$$\alpha\gamma \geqslant \beta^2; \qquad z_{xx}z_{yy} \geqslant z_{xy}^2.$$

Действительно,

$$\alpha\gamma z_{xx}z_{yy} \geqslant \beta^2 z_{xy}^2.$$

Поэтому

$$|\beta z_{xy}| \leqslant \left|\sqrt{\alpha\gamma z_{xx}z_{yy}}\right| = \sqrt{\alpha\gamma z_{xx}z_{yy}}.$$

Итак, существование у поверхности $z(x, y)$ эллиптической или параболической точки, обращенной выпуклостью в сторону $z < 0$, приводит к неравенству

$$\alpha z_{xx} + 2\beta z_{xy} + \gamma z_{yy} \geqslant 0,$$

которое несовместно с неравенством (7,2,1). Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

3. Основные понятия. Уравнения класса L. Рассмотрим в области Ω квазилинейное эллиптическое уравнение

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q). \quad (7,3,1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (7,3,1) непрерывно дифференцируемы по всем переменным при всех конечных z, p, q и $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ (Γ — граница Ω). При тех же значениях переменных квадратичная форма $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ удовлетворяет неравенству

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \alpha_0 (\xi^2 + \eta^2),$$

где $\alpha_0 = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим выражение

$$E = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2. \quad (7,3,2)$$

В дальнейшем будем неизменно предполагать, что E ведет себя при $p^2 + q^2 \to \infty$ как полином относительно p, q, т. е.

$$E = E_m + G,$$

где

$$E_m = a_0 p^m + a_1 p^{m-1} q + \ldots + a_m q^m \quad (7,3,3)$$

и

$$\lim_{p^2+q^2 \to \infty} \frac{G}{E} = 0.$$

Если E_m обращается в нуль только при $p = q = 0$, то выражение E и соответствующее уравнение называют определенным. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая определенных уравнений.

Рассмотрим выражение

$$I = (A + C)(p^2 + q^2).$$

Родом уравнения (7,3,1) по С. Н. Бернштейну назовем положительную или равную нулю разность между порядками роста I и E.

Согласно С. Н. Бернштейну уравнение (7,3,1) принадлежит классу L, если можно найти такое число $R_M \in [0, +\infty)$, что при $(x, y) \in \Omega + \Gamma$, $|z| \leqslant M$ и $p^2 + q^2 \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\frac{|D|}{E} \leqslant R_M. \quad (7,3,4)$$

В случае определенных уравнений условие (7,3,4) равносильно условию, чтобы порядок роста D был не больше порядка m роста E. (В случае, когда E является неопределенным выражением, нужно предполагать дополнительно, что неравенство (7,3,4) выполняется при обращении главного полинома в нуль.)

Во всем дальнейшем неизменно предполагается, что частные производные A_x, A_y; B_x, B_y; C_x, C_y; D_x, D_y относительно p, q имеют порядки роста при $p^2+q^2\to\infty$ соответственно не больше порядка роста A; B; C; D.

4. Априорные оценки первых производных на границе. Пусть Ω — область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ, кривизна которой во всех точках не меньше $\varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$; будем предполагать, что Γ задается параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги на Γ, а сами $x(s)$, $y(s) \in C^{2,\beta}$. В $\Omega+\Gamma$ рассмотрим уравнение (7,3,1), принадлежащее классу L.

Пусть $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ — решение уравнения (7,3,1), которое на Γ обращается в функцию $\varphi(s) \in C^2(\Gamma)$.

Мы будем предполагать, что известна оценка

$$\max_{\Omega+\Gamma} |z(x, y)| \leqslant M. \tag{7,4,1}$$

Ниже в п. 4 и 5 будет получена априорная оценка $z(x, y)$ в метрике $C^1(\Omega+\Gamma)$.

Обратимся сначала к оценке модулей первых производных $z(x, y)$ на границе Ω. Для этого достаточно ограничить сверху модуль нормальной производной $\frac{\partial z}{\partial n}$ на Γ.

Положим

$$z = -M + \alpha \ln u. \tag{7,4,2}$$

Имеем

$$p = \frac{\alpha}{u} u_x, \qquad q = \frac{\alpha}{u} u_y,$$

$$r = \frac{\alpha}{u} u_{xx} - \frac{\alpha}{u^2} u_x^2, \qquad s = \frac{\alpha}{u} u_{xy} - \frac{\alpha}{u^2} u_x u_y,$$

$$t = \frac{\alpha}{u} u_{yy} - \frac{\alpha}{u^2} u_y^2.$$

Поэтому функция u удовлетворяет уравнению

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=\frac{1}{u}\left[Au_x^2+2Bu_xu_y+Cu_y^2\right]+$$
$$+\frac{u}{\alpha}D\equiv Q(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y). \qquad (7,4,3)$$

Пусть E_m — совокупность членов наибольшей степени (очевидно, $m\geqslant 2$) в $E=Ap^2+2Bpq+Cq^2$, а D_m — совокупность (может быть и отсутствующих) членов той же степени в D.

Заметим, что

$$Au_x^2+2Bu_xu_y+Cu_y^2=\frac{u^2}{\alpha^2}\left[Ap^2+2Bpq+Cq^2\right]=\frac{u^2}{\alpha^2}E.$$

Тогда главный член правой части уравнения (7,4,3) будет

$$\frac{\alpha^{m-2}}{u^{m-1}}\left[E_m(u_x,\ u_y)+\alpha D_m(u_x,\ u_y)\right].$$

Из неравенства (7,3,4) следует, что в зависимости только от числа R_M параметр $\alpha>0$ можно выбрать достаточно малым так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha\,|D_m|\leqslant\frac{1}{2}E_m. \qquad (7,4,4)$$

Одно из таких α зафиксируем.

Так как $u=e^{\frac{z+M}{\alpha}}$, то при всех $(x,\ y)\in\Omega+\Gamma$ имеем

$$1\leqslant u\leqslant e^{\frac{2M}{\alpha}}.$$

Поэтому можно найти такое $d>0$, зависящее лишь от M, что при $u_x^2+u_y^2\geqslant d$ будем иметь, что

$$Q>0.$$

Обозначим через $N=\max|Q|$ в области: $(x,\ y)\in\Omega+\Gamma$, $1\leqslant u\leqslant e^{\frac{2M}{\alpha}}$, $u_x^2+u_y^2\leqslant d$. Тогда при всех значениях $(x,\ y)\in\Omega+\Gamma$, $1\leqslant u\leqslant e^{\frac{2M}{\alpha}}$ и любых конечных u_x, u_y будем иметь

$$Q\geqslant -N.$$

Положим

$$u' = u + \frac{N}{2\alpha}(x^2 + y^2).$$

Тогда

$$Au'_{xx} + 2Bu'_{xy} + Cu'_{yy} > 0.$$

Согласно теореме 25 поверхность $u'(x, y)$ не имеет эллиптических и параболических точек, обращенных выпуклостью в сторону $z > 0$.

Обозначим через γ' край поверхности $u'(x, y)$. Если провести через касательную в любой точке P кривой γ' плоскость T, оставляющую под собой γ', то касательная плоскость к поверхности $u'(x, y)$ в точке P над Ω будет лежать под плоскостью T. Это вытекает из того, что вся поверхность $u'(x, y)$ лежит под T; в противном случае T отрезает от поверхности $u'(x, y)$ горбушку, на которой имеются эллиптические или параболические точки, обращенные выпуклостью вверх.

Отсюда вытекает, что существует такое число $S > 0$, зависящее только от верхнего извивания кривой γ', что всюду на Γ

$$\frac{\partial u'}{\partial n} > -S.$$

А тогда существует такое число $S_1 > 0$, что

$$\frac{\partial z}{\partial n} > -S_1$$

всюду на Γ.

Число S_1 зависит лишь от верхнего извивания кривой γ', числа M и числа $\alpha > 0$, выбранного в соответствии с неравенством (7, 4, 4). Но верхнее извивание кривой γ' оценивается через M и извивание исходной кривой γ: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = \psi(s)$.

Таким образом, искомая оценка $\frac{\partial z}{\partial n}$ снизу на контуре получена. Заменяя z на $-z$ и проводя те же построения, получим априорную оценку такого же характера для $\frac{\partial z}{\partial n}$ на Γ сверху, в которой будет участвовать нижнее извивание кривой γ.

Итак, всюду на Γ имеем

$$\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right| \leqslant S_1.$$

Замечание 1. Рассмотрим в $\Omega+\Gamma$ уравнение

$$Ar + 2Bs + Ct = \mu D, \tag{7,4,5}$$

где μ — вещественное число из промежутка $[0, 1]$, а функции A, B, C, D удовлетворяют всем условиям этого пункта. Рассмотрим, далее, решение $z_\mu \in C^2(\Omega+\Gamma)$ задачи Дирихле для уравнения (7,4,5), которое обращается на Γ в функцию $\mu\psi(s)$ и для которого $|z_\mu| \leqslant M$. Тогда повторением только что проведенных рассуждений получим на Γ равномерную по $\mu \in [0, 1]$ априорную оценку

$$\left|\frac{\partial z_\mu}{\partial n}\right| \leqslant S_1.$$

5. Априорные оценки первых производных внутри области. Ниже предполагаем, что решение $z(x, y) \in C^3(\Omega+\Gamma)$.

а) Случай, когда $D_z \geqslant \mathrm{const} > 0$ и порядок роста D_z относительно p, q, при $p^2+q^2 \to \infty$, ниже порядка роста D *).

Пусть функция $w = \frac{1}{2}p^2$ достигает наибольшего значения внутри области Ω в некоторой точке G. Тогда G является точкой максимума функции w. Поэтому в этой точке выполняются соотношения

$$w_x = w_y = 0, \tag{7,5,1}$$

$$w_{xx} \leqslant 0, \quad w_{yy} \leqslant 0, \quad w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 \geqslant 0. \tag{7,5,2}$$

Так как интерес представляет лишь случай, когда $p(G) \neq 0$, то из соотношений (7,5,1) имеем, что в G

$$r = s = 0. \tag{7,5,3}$$

Поэтому соотношения (7,5,2) принимают вид

$$p_{xx}p_{yy} - p_{xy}^2 \geqslant 0, \quad pp_{xx} \leqslant 0, \quad pp_{yy} \leqslant 0.$$

*) Мы предполагаем, что все условия п. 4 выполнены и, стало быть, априорные оценки модуля решения уравнения (7,3,1) в $\Omega+\Gamma$ и первых производных на контуре уже имеются.

Отсюда получаем, что в точке G справедливо неравенство

$$p(Ap_{xx}+2Bp_{xy}+Cp_{yy})\leqslant 0. \tag{7,5,4}$$

Уравнение (7,3,1) перепишем в виде

$$\frac{A}{C}r+\frac{2B}{C}s+t=\frac{D}{C}$$

и продифференцируем по x. Учитывая соотношения (7,5,3), получим в точке G тождество

$$\frac{A}{C}p_{xx}+\frac{2B}{C}p_{xy}+p_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D}{C}\right)+p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{C}\right).$$

Используя неравенство (7,5,4), получаем в точке G соотношение

$$p\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D}{C}\right)+p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{C}\right)\right]\leqslant 0. \tag{7,5,5}$$

Раскрывая последнее неравенство и пользуясь условием $D_z>0$, приходим к неравенству

$$|p|\leqslant\frac{\left|D_x-\frac{C_x}{C}D\right|}{D_z}. \tag{7,5,6}$$

Так как $D_z\geqslant\mathrm{const}>0$, то, используя предположения о порядке роста D_z, D_x, C_x, D, C по p, q, приходим к искомой априорной оценке для $|p|$. Оценка для $|q|$ проводится аналогично.

Отметим, что в приведенном рассуждении мы не пользовались принадлежностью уравнения к классу **L**.

б) Случай $D_z\geqslant 0$ и снято предположение о соответствии порядков роста p, q у функций D_z и D.

Пусть по-прежнему $M=\max|z|$. Введем функцию

$$u=\ln\left(e^{\frac{z+M+h}{\alpha}}-1\right),$$

где $h>0$, $\alpha>0$ — некоторые постоянные. При изменении z в промежутке $[-M, M]$ функция e^u изменяется в промежутке $\left[e^{\frac{h}{\alpha}}-1,\ e^{\frac{2M+h}{\alpha}}-1\right]$.

Имеем

$$z = -M - h - \alpha \ln(e^u + 1),$$

$$p = \frac{\alpha e^u}{e^u + 1} u_x, \qquad q = \frac{\alpha e^u}{e^u + 1} u_y,$$

$$r = \frac{\alpha e^u}{e^u + 1}\left[u_{xx} + \frac{u_x^2}{e^u + 1}\right], \quad s = \frac{\alpha e^u}{e^u + 1}\left[u_{xy} + \frac{1}{e^u + 1} u_x u_y\right],$$

$$t = \frac{\alpha e^u}{e^u + 1}\left[u_{yy} + \frac{1}{e^u + 1} u_y^2\right].$$

Подставляя значения p, q, r, s, t в уравнение (7,3,1), получаем, что функция u удовлетворяет уравнению

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = -\frac{1}{e^u + 1}\left[Au_x^2 + 2Bu_x u_y + Cu_y^2\right] + \\ + \frac{1}{\alpha}\left(1 + e^{-u}\right) D \equiv Q(u_x, u_y, u, x, y). \tag{7,5,7}$$

Дальнейшие рассуждения связаны с тем, чтобы подобрать параметры $h > 0$ и $\alpha > 0$ так, чтобы уравнение (7,5,7) могло быть сведено к изученному уже выше случаю а).

Пусть $E_m(p, q, x, y)$ — определенная однородная форма (7,3,3) наивысшей степени $m \geqslant 2$ относительно p, q в выражении $E = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, а $D_m(p, q, z, x, y)$ — совокупность членов степени m в D относительно p, q (которая может и отсутствовать), тогда совокупность членов высшей степени m относительно u_x, u_y в функции $Q(u_x, u_y, u, x, y)$ будет равна

$$Q_m = \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-2)u}}{(e^u + 1)^{m-1}}\left[-E_m(u_x, u_y, x, y) + \alpha e^u D_m(u_x, u_y, u, x, y)\right]$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial Q_m}{\partial u} = \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-1)u}}{(e^u + 1)^m}\left\{\left[1 - (m-2)e^{-u}\right] E_m + \alpha(m-1) D_m + \right. \\ \left. + \alpha^2 e^u \frac{\partial D_m}{\partial z}\right\}. \tag{7,5,8}$$

Параметры h и α подчиним условию $e^{\frac{h}{\alpha}} > 2m - 3$; тогда при всех рассматриваемых значениях $e^u \in \left[e^{\frac{h}{\alpha}} - 1,\ e^{\frac{2M+h}{\alpha}} - 1\right]$ будем иметь

$$1 - (m-2)e^{-u} \geqslant 1 - \frac{m-2}{e^{\frac{h}{\alpha}} - 1} > \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{\partial D_m}{\partial z} \geqslant 0$, то из соотношения (7,5,8) имеем

$$\frac{\partial Q_m}{\partial u} > \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-1)u}}{(e^u+1)^m}\left[\frac{1}{2} E_m + \alpha (m-1) D_m\right]. \qquad (7,5,9)$$

Взяв теперь $\alpha > 0$ достаточно малым, будем иметь, в силу (7,3,4) (здесь используется, что уравнение принадлежит классу L) неравенство

$$\frac{\partial Q_m}{\partial u} > \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-1)u}}{4(e^u+1)^m} E_m.$$

Последнее неравенство показывает, что мы находимся теперь в условиях пункта а). Применяя неравенство (7,5,6), получим оценку

$$|u_x| \leqslant \frac{\left|Q_x - \frac{C_x}{C} Q\right|}{Q_u}.$$

Так как по доказанному порядок роста Q_u не ниже порядка роста выражения $Q_x - \frac{C_x}{C} Q$, то возможно указать априорную оценку для максимума модуля u_x в $\Omega + \Gamma$. Для u_y соответствующая априорная оценка устанавливается аналогично.

Замечание 2. Если все рассмотрения вести для решений $z_\mu \in C^3(\Omega + \Gamma)$ уравнений

$$Ar + 2Bs + Ct = \mu D$$

при условиях замечания 1 п. 4, то наши рассуждения приведут к равномерной по $\mu \in [0, 1]$ априорной оценке для $p_\mu^2 + q_\mu^2$ в $\Omega + \Gamma$.

Из рассуждений, приведенных в пп. 4 и 5, вытекает следующая теорема.

Теорема 26. *Пусть область Ω ограничена замкнутой кривой Γ, кривизна которой во всех точках не меньше, чем $\varkappa_0 > 0$. В $\Omega + \Gamma$ рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения класса* L:

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = \mu D(x, y, z, p, q), \qquad (7,5,10)$$

$$z|_\Gamma = \mu\varphi(s), \quad \mu \in [0, 1].$$

Относительно коэффициентов уравнения и краевого условия будем предполагать выполненными следующие условия:

1. *Граница* Γ *параметрически задается функциями* $x = x(s)$, $y = y(s)$, *причем* $x(s)$, $y(s) \in C^{2,\beta}(\Gamma)$ $(0 < \beta \leqslant 1)$.

2. $\varphi(s) \in C^2(\Gamma)$.

3. *Функции* A, B, C, D *непрерывно дифференцируемы при всех конечных* z, p, q *и* $(x, y) \in \Omega + \Gamma$.

4. *При всех* $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ *и любых конечных* z, p, q *имеет место неравенство*

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0.$$

5. *Порядки роста по* p, q *при* $p^2 + q^2 \to \infty$ *функций* A_x, A_y; B_x, B_y; C_x, C_y; D_x, D_y *соответственно не выше порядков роста* A, B, C, D.

6. *Имеет место равномерная по* $\mu \in [0, 1]$ *априорная оценка модуля решений*

$$\|z_\mu\|_C \leqslant M < +\infty$$

задачи Дирихле (7,5,10).

Тогда в $\Omega + \Gamma$ *может быть получена равномерная по* $\mu \in [0, 1]$ *оценка для модулей первых производных, решений* $z_\mu(x, y)$, *зависящая лишь от следующих величин:* $\|x(s)\|_{2,\beta}$, $\|y(s)\|_{2,\beta}$, $\|\varphi\|_2$, α_0, R, M. (О свойствах α_0 и R см. п. 3 настоящего параграфа.)

§ 8. Теорема существования

1. Уравнения класса L в выпуклых областях. Пусть Ω — область класса $L_{m+2,\lambda}$ $(m \geqslant 1)$, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ. Будем предполагать дополнительно, что во всех точках Γ кривизна ограничена снизу положительным числом $\varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$.

В $\Omega + \Gamma$ рассмотрим задачу Дирихле:

$$Ar + 2Bs + Ct = D, \tag{8,1,1}$$

$$z|_\Gamma = \varphi(s). \tag{8,1,2}$$

Пусть «коэффициенты» уравнения (8,1,1) таковы, что:

А) Функции A, B, C, D, при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ принадлежат $C^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 1)$ и удовлетворяют неравенствам

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \alpha_0 (\xi^2 + \eta^2), \tag{8,1,3}$$

$\alpha_0 = \mathrm{const} > 0$, ξ, η — любые вещественные числа,

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant \mathrm{const} > 0. \tag{8,1,4}$$

Б) Уравнение (8,1,1) есть уравнение класса $\mathfrak{L}$, т. е.

1) при всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$, $|z| \leqslant M$ и $p^2 + q^2 \geqslant 1$

$$\frac{|D|}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2} \leqslant R_M < +\infty, \tag{8,1,5}$$

где $R_M = \mathrm{const} < +\infty$, зависящая только от M;

2) порядки роста по p, q при $p^2 + q^2 \to +\infty$ функций A_x, A_y; B_x, B_y; C_x, C_y; D_x, D_y соответственно не выше порядков роста функций A, B, C, D.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 27. *Пусть относительно краевой задачи* (8,1,1—2) *и области* $\Omega + \Gamma$, *где эта задача рассматривается, выполнены все условия, сформулированные выше в п.* 1 § 8. *Тогда, какова бы ни была функция* $\varphi(s) \in C^{m+2,\lambda}(\Gamma)$, *заданная на* Γ, *задача Дирихле* (8,1,1—2) *имеет решение* $z(x, y) \in C^{m+2,\delta}(\Omega + \Gamma)$. *Это решение единственно в* $C^2(\Omega + \Gamma)$. *Число* $\delta \in (0,1)$ *определяется исходными данными задачи* (8,1,1—2).

Доказательство этой теоремы есть простое следствие теорем 21, 22, 24, 25. Действительно, рассмотрим вспомогательную задачу Дирихле

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = \\ = \mu D(x, y, z, p, q),$$

$$z|_\Gamma = \mu\varphi(s).$$

Из условий теоремы $D_z \geqslant k = \mathrm{const} > 0$ и теоремы 22 вытекает равномерная по $\mu \in [0, 1]$ оценка $\|z_\mu\|_C \leqslant M$. После этого мы находимся в условиях теоремы 25. Поэтому выполнены все условия теоремы 21, а отсюда, в свою очередь, и вытекает справедливость теоремы 27.

В случае, когда $D_z \geqslant 0$, уже отмечалось, что нельзя, вообще говоря, указать априори верхнюю границу для $|z|$. Однако, используя теорему 23, можно получить следующую теорему.

Теорема 27'. *Пусть выполнены все условия теоремы* 27, *за исключением неравенства* (8,1,4), *которое заменено более слабым* $D_z \geqslant 0$.

Тогда, если существует решение $z_0 \in C^{m+2}$ $(m \geqslant 1)$ *задачи Дирихле для некоторого краевого условия* $z|_\Gamma = \varphi_0(s)$, *то задача Дирихле для уравнения* (8,1,1—2) *имеет решение при любом краевом условии* $z|_\Gamma = \varphi(s)$, *где* $\varphi(s) \in C^{m+2,\lambda}(\Gamma)$. *Это решение единственно в* C^2 *и принадлежит* $C^{m+2,\delta}(\Omega+\Gamma)$ (δ, *как и выше, определяется данными задачи*).

Доказательство этой теоремы очевидно.

2. Задача Дирихле в области, ограниченной невыпуклым контуром. Пусть область Ω гомеоморфна кругу и принадлежит классу L_m. Предположим, что функции $x_1 = \varphi_1(x, y)$, $y_1 = \psi_1(x, y)$ принадлежат C^m $(m \geqslant 3)$ и осуществляют гомеоморфное отображение замкнутого круга K на замкнутую область Ω, причем

$$\det{}^2 \begin{Vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \end{Vmatrix} \geqslant \text{const} > 0.$$

Обратные функции

$$x = \varphi(x_1, y_1), \qquad y = \psi(x_1, y_1),$$

очевидно, обладают аналогичными свойствами.

Через $p, q; r, s, t$ обозначим первые и вторые производные функции $z(x, y)$ по переменным x, y, а через p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 — производные той же функции $z(x, y)$, но по переменным x_1, y_1.

Имеют место формулы

$$p = p_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + q_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \qquad q = p_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$

$$r = r_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2s_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + t_1 \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + p_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + q_1 \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2},$$

$$s = r_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + s_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right) +$$
$$+ t_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + p_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} + q_1 \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y},$$

$$t = r_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + 2s_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + t_1 \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + p_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + q_1 \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}.$$

Уравнение
$$Ar+2Bs+Ct=D \tag{8,2,1}$$
в круге K при переходе к переменным x_1, y_1 преобразуется к виду
$$A_1r_1+2B_1s_1+C_1t_1=D_1,$$
где
$$A_1=A\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2,$$
$$B_1=A\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$
$$C_1=A\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2.$$
Положим
$$E_1=A_1p_1^2+2B_1p_1q_1+C_1q_1^2;$$
тогда после простых вычислений получим
$$E_1=Ap^2+2Bpq+Cq^2.$$

Таким образом, выражение E инвариантно относительно преобразования координат.

Функция $D(x, y, z, p, q)$ при переходе к координатам x_1, y_1 изменяется. Легко видеть, что
$$D_1=D+D',$$
где
$$D'=-\left[A\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2B\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}+q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\right)+C\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)\right].$$

Если порядок роста D' не превосходит порядка роста E, то преобразование координат не изменит класса уравнения (8,2,1). Это будет всегда, если порядок роста E не меньше порядка роста $(A+C)(p^2+q^2)$, т. е. если род уравнения (8,2,1) не больше единицы (см. п. 5 § 7). Но, вообще говоря, это уже не имеет места, если род больше единицы.

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 28. *Квазилинейные эллиптические уравнения рода не больше чем единица с точки зрения разрешимости задачи Дирихле ведут себя одинаково относи-*

тельно контуров любой геометрической формы; это будет, вообще говоря, не так, если род уравнения больше единицы.

Поэтому в теоремах 26—28 контуры Γ, кривизна которых всюду больше $\varkappa_0 > 0$, можно заменить любыми контурами, которые ограничивают замкнутую область Ω, допускающую гладкий гомеоморфизм порядка m ($m \geqslant 3$), на замкнутый круг.

В качестве примеров можно указать все линейные уравнения, которые, очевидно, имеют нулевой род, и уравнения

$$(1+p^2)r + 2pqs + (1+q^2)t = z(1+p^2+q^2)^2,$$
$$(1+q^2)r + 2pqs + (1+p^2)t = z^3,$$

род которых тоже равен нулю.

С другой стороны, если взять, например, уравнение минимальных поверхностей

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

то оно будет рода 2, так как в этом случае

$$E = p^2 + q^2$$

и

$$(A+C)(p^2+q^2) = (2+p^2+q^2)(p^2+q^2).$$

Поэтому нельзя утверждать существование минимальной поверхности такой, чтобы z была однозначной непрерывной функцией $z(x, y)$, край которой имеет невыпуклую проекцию.

Доказательство этого и более общих фактов см. в [6], стр. 218—222.

В случае невыпуклых контуров для уравнений рода, большего чем 1, вопрос о разрешимости задачи Дирихле сводится к вопросу о разрешимости проблемы Дирихле для уравнения, не принадлежащего классу L. С. Н. Бернштейном ([6] стр. 219—221) установлена следующая теорема.

Теорема 29. *Если уравнение*

$$Ar + 2Bs + Ct = D$$

не принадлежит классу L, *то можно указать выпуклые контуры со строго положительной кривизной, для которых задача Дирихле будет, вообще говоря, неразрешима.*

Там же установлено, что если уравнение класса L имеет род 2, то существуют невыпуклые контуры, на которых проблема Дирихле не имеет решений.

Теорема 29 может рассматриваться как обратная к теоремам §§ 7—8 (теоремы 25—27).

Ниже в главе III будут даны достаточные условия, при которых проблема Дирихле имеет решение для уравнений, не принадлежащих классу L. Это позволит, в частности, более полным образом исследовать вопрос о разрешимости задачи Дирихле в невыпуклых областях.

ГЛАВА III

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Во Введении мы условились понимать под квазилинейными уравнениями с сильными нелинейностями уравнения

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q). \qquad \text{(III, 1)}$$

для которых не выполнено ограничение С. Н. Бернштейна

$$\frac{|D|}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2} \leqslant R_M < +\infty. \qquad \text{(III, 2)}$$

В (III, 2) предполагается, что $p^2 + q^2 \geqslant 1$, $|z| \leqslant M$, а переменные x и y меняются в некоторой замкнутой области Ω; постоянная R_M зависит лишь от числа M. Другими словами, для уравнений (III, 1) снято условие согласования порядков роста выражения $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ и функции $D(x, y, z, p, q)$ по переменным p и q.

Для таких уравнений необходимые условия разрешимости задачи Дирихле могут приводить к ограничениям на размеры и форму области. Типичным примером может служить геометрическая задача о построении поверхности с заданной средней кривизной, о которой мы уже неоднократно говорили выше; подробное изучение этой задачи будет проведено в главе III, в §§ 14 и 15.

Методы С. Н. Бернштейна для получения оценок решений квазилинейных уравнений оказываются неприменимыми для уравнений с сильными нелинейностями. Это прежде всего относится к оценкам модуля решения и его нормальной производной на границе.

В связи с этим автором была построена новая методика получения оценок решений в метрике C^1. Эта методика опирается на ряд геометрических соображений из теории выпуклых поверхностей. Речь идет об оценках в метрике C^1 решений $z(x, y)$ уравнения (III, 1) через условные интегральные кривизны выпуклых поверхностей $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$, натянутых соответственно снизу и сверху на функцию $z(x, y)$. Интегральные условные кривизны выпуклых функций строятся по «коэффициентам» уравнения (III, 1) и представляют собой аналоги интеграла от гауссовой кривизны поверхности $z(x, y)$ по ее площади. Подробное изложение этих вопросов проведено в §§ 9—10, а также в главе IV.

На основе указанной методики в главе III проводится изучение задачи Дирихле для квазилинейных уравнений с сильной нелинейностью как в выпуклых, так и в невыпуклых областях и подробно изучается задача о построении поверхности с данной средней кривизной.

§ 9. Геометрический метод оценки модуля решений квазилииейиых уравнений

Как уже отмечалось в § 6, методика априорных оценок модуля решений квазилинейных уравнений

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$$

существенно опирается на предположение, что

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant \text{const} > 0 \qquad (9,0,0)$$

при всех допустимых значениях переменных x, y, z, p, q.

Ниже мы покажем, что для широкого класса квазилинейных уравнений, где условие (III, 2) не выполнено, оценку модуля можно получить другим методом, основанным на ряде геометрических соображений. Необходимые для этого факты из геометрии кратко излагаются в п. 1 настоящего параграфа (их подробное изложение помещено ниже в гл. IV, §§ 16, 17).

1. Некоторые геометрические факты. Пусть Ω — область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ, и пусть $z(x, y)$ — выпуклая функция, заданная в Ω. График функции $z(x, y)$ определяет некоторую выпуклую поверхность Φ_z.

Отобразим область Ω на плоскость переменных p, q с помощью поверхности Φ_z так: каждой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$

отнесем совокупность всех точек (p_0, q_0), для которых плоскости

$$z - z(x_0, y_0) = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

опорны к поверхности Φ_z в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$. На выпуклой поверхности могут быть точки только трех типов: гладкие, ребристые и конические. В гладких точках существует единственная опорная плоскость, т. е. гладким точкам при указанном соответствии отвечает единственная точка в плоскости p, q. Ребристым точкам соответствует совокупность опорных плоскостей, проходящих через общую прямую; таким точкам на плоскости p, q соответствует отрезок или луч. Наконец, коническим точкам в плоскости p, q соответствует выпуклая фигура с внутренними точками. Описанное отображение называется нормальным и обозначается Ψ_z. Через $\Psi_z(e)$ обозначим сумму нормальных образов всех точек $(x, y) \in e \subset \Omega$; множество $\Psi_z(e)$ назовем нормальным образом множества e.

Пусть $f(p, q) \geqslant 0$ — локально суммируемая функция на плоскости p, q. Условной кривизной выпуклой поверхности Φ_z, порожденной функцией $f(p, q)$, называется функция множества

$$\omega(f, z, e) = \int\limits_{\Psi_z(e)}\int f(p, q)\, dp\, dq. \tag{9,1,1}$$

$\omega(f, z, e)$ есть вполне аддитивная неотрицательная функция борелевских множеств области Ω.

Имеет место следующий факт (доказательство см. в § 17).

Рассмотрим совокупность $W(\omega_0)$ выпуклых функций $z(x, y)$, заданных в Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

а) на границе области Ω выполнены неравенства

$$m \leqslant z(x, y) \leqslant M; \tag{9,1,2}$$

б)

$$\omega(f, z, \Omega) \leqslant \omega_0 < A(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p, q)\, dp\, dq. \tag{9,1,3}$$

Тогда в Ω для выпуклых функций $z(x, y) \in W(\omega_0)$ и обращенных выпуклостью вверх справедливы оценки

$$m \leqslant z(x, y) \leqslant M + F(f, \omega_0)\, d, \tag{9,1,4a}$$

а для $z(x, y) \in W(\omega_0)$ и обращенных выпуклостью вниз справедливы оценки

$$m - F(f, \omega_0)\, d \leqslant z(x, y) \leqslant M, \tag{9,1,4б}$$

где d — диаметр области Ω, а $F(f, \tau)$ — монотонно возрастающая функция τ, определенная на промежутке $[0, A(f))$ и являющаяся обратной для функции

$$g(\rho) = \iint\limits_{p^2+q^2 \leqslant \rho^2} f(p, q)\, dp\, dq, \tag{9,1,5}$$

заданной на промежутке $[0, +\infty)$. Отметим, что при любом $\tau \in [0, A(f))$ функция $F(f, \tau) > 0$ конечна и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\tau \to A(f)} F(f, \tau) = +\infty.$$

В приложениях часто используется функция $f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^m$. Для этой функции

$$\left.\begin{aligned} g(\rho) &= \iint\limits_{p^2+q^2 \leqslant \rho^2} (1 + p^2 + q^2)^m\, dp\, dq = \\ &= 2\pi \int_0^\rho (1 + r^2)^m\, r\, dr = \left[\frac{\pi (1 + \rho^2)^{m+1}}{m+1} - \frac{\pi}{m+1}\right], \\ &\qquad\qquad \text{если } m \neq -1, \\ g(\rho) &= \pi \ln (1 + \rho^2), \quad \text{если } m = -1. \end{aligned}\right\} \tag{9,1,6}$$

Обратной функцией для $g(\rho)$ будет

$$\left.\begin{aligned} F(f, \tau) &= \left[\left(\frac{m+1}{\pi}\tau + 1\right)^{\frac{1}{m+1}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\qquad\qquad \text{если } m \neq -1; \\ F(f, \tau) &= \left(e^{\frac{\tau}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{если } m = -1. \end{aligned}\right\} \tag{9,1,7}$$

Она задана на промежутке $[0, A(f))$. Отметим, что

$$A(f) = \begin{cases} +\infty & \text{для } m \geqslant -1, \\ \dfrac{\pi}{|m| - 1} & \text{для } m < -1. \end{cases}$$

В случае, если выпуклая функция $z(x, y) \in C^2$, то ее условная кривизна выражается формулой

$$\omega(f, z, e) = \iint\limits_e f(z_x, z_y)(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2)\,dx\,dy. \qquad (9,1,8)$$

Пусть теперь Ω — область, ограниченная кривой Γ, гомеоморфной окружности. В $\Omega + \Gamma$ рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$. Построим выпуклую оболочку поверхности U, являющуюся графиком функции $u(x, y)$. (Выпуклой оболочкой U называется наименьшее выпуклое тело, содержащее в себе поверхность U; выпуклая оболочка U может быть получена как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих U.) Внутренностью проекции выпуклой оболочки U на плоскость x, y будет некоторая выпуклая область G, ограниченная замкнутой выпуклой кривой γ. Очевидно, что $G + \gamma$ есть выпуклая оболочка множества Ω на плоскости x, y. Граница выпуклой оболочки поверхности U состоит из трех частей: выпуклых поверхностей Φ_1 и Φ_2, обращенных выпуклостями соответственно вверх и вниз, и замкнутого множества точек S на прямом цилиндре Z с образующими, параллельными оси z, и направляющей γ. Поверхности Φ_1 и Φ_2 над открытой областью G задаются выпуклыми функциями $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$, первая из которых обращена выпуклостью вверх, а вторая — выпуклостью вниз. При этом над областью Ω имеют место неравенства

$$\bar{z}(x, y) \geqslant u(x, y) \geqslant \bar{\bar{z}}(x, y), \qquad (9,1,9)$$

а точки краев поверхностей $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$ удалены от плоскости x, y на расстояния не более чем $\max\limits_{\Gamma} |u(x, y)|$.

Обозначим через M_2 проекцию общей части $\overline{M}_2$ поверхностей Φ_2 и U на плоскость x, y. В монографии [1а] доказано, что сферическое изображение всей выпуклой поверхности Φ_2 совпадает со сферическим изображением множества $\overline{M}_2$ на этой поверхности. Так как нормальное изображение множества на выпуклой поверхности получается центральной проекцией сферического изображения, расположенного на сфере $p^2 + q^2 + w^2 = 1$ в пространстве p, q, w, на плоскость $w = 1$ и последующим ортогональным проектированием на плоскость p, q, то для нормальных изображений множеств M_2 и G имеет место соотношение

$$\psi_{\bar{\bar{z}}}(G)=\psi_{\bar{\bar{z}}}(M_2).$$

Далее в точках множества $\overline{M}_2$ опорные плоскости к выпуклой поверхности Φ_2 совпадают с касательными плоскостями к поверхности U. Так как $u(x, y)\in C^2$ и множество $\overline{M}_2$ состоит из выпуклых точек поверхности U, лежащих на одной выпуклой поверхности, то для множества M_2 определено число $\omega(f, u, M_2)$ и имеет место равенство

$$\omega(f, \bar{\bar{z}}, G)=\omega(f, \bar{\bar{z}}, M_2)=\iint\limits_{\psi_{\bar{\bar{z}}}(M_2)} f(p, q)\,dp\,dq=$$

$$=\omega(f, u, M_2)=\iint\limits_{M_2} f(u_x, u_y)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\,dx\,dy. \qquad (9,1,10)$$

Отметим, что в точках множества M_2 квадратичная форма

$$u_{xx}\xi^2+2u_{xy}\xi\eta+u_{yy}\eta^2 \qquad (9,1,11)$$

неотрицательна, так как на поверхности U точки множества $\overline{M}_2$ эллиптические и параболические и их малые окрестности обращены выпуклостью в сторону $z<0$.

Обозначим через M_1 проекцию общей части поверхностей Φ_1 и U на плоскость x, y. Тогда также справедлива формула

$$\omega(f, \bar{z}, G)=\omega(f, u, M_1)=$$

$$=\iint\limits_{M_1} f(u_x, u_y)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\,dx\,dy. \qquad (9,1,12)$$

В точках множества M_1 квадратичная форма (9,1,11) неположительна, так как на поверхности U точки множества $\overline{M}_1$ эллиптические или параболические и малые их окрестности обращены выпуклостью в сторону $z>0$.

2. Оценка модуля решений квазилинейных уравнений. В области $\Omega+\Gamma$, удовлетворяющей условиям п. 1 настоящего параграфа, рассмотрим квазилинейное уравнение

$$A(x, y, z, p, q)\,r+2B(x, y, z, p, q)\,s+C(x, y, z, p, q)\,t=$$

$$=D(x, y, z, p, q), \qquad (9,2,1)$$

на коэффициенты которого наложены следующие ограничения:

а) Квадратичная форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительна при любых $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых значениях z, p, q.

б) При любых конечных z, p, q и любых $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ имеем

$$A(x, y, z, p, q)\,C(x, y, z, p, q) - B^2(x, y, z, p, q) > 0.$$

в) При всех конечных z, p, q и любых $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ имеют место неравенства

$$-\frac{\varphi_-(x, y)}{f_1(p, q)} \leqslant \frac{D(x, y, z, p, q)}{[AC - B^2]^{1/2}} \leqslant \frac{\varphi_+(x, y)}{f_2(p, q)},$$

где неотрицательные функции $\varphi_-(x, y)$ и $\varphi_+(x, y)$ суммируемы с квадратом в Ω, а неотрицательные функции $f_1(p, q)$ и $f_2(p, q)$ локально суммируемы с квадратом на плоскости p, q.

Теорема 30. *Пусть в области Ω, удовлетворяющей условиям* п. 1 § 9, *задано квазилинейное уравнение* (9,2,1), *«коэффициенты» которого удовлетворяют требованиям* а), б), в). *Тогда для всякого решения $z(x, y) \in C^2$ этого уравнения имеют место неравенства*

$$\omega(f_1^2, \bar{z}, G) \leqslant \iint_\Omega \varphi_-^2(x, y)\,dx\,dy, \qquad (9,2,2)$$

$$\omega(f_2^2, \bar{\bar{z}}, G) \leqslant \iint_\Omega \varphi_+^2(x, y)\,dx\,dy, \qquad (9,2,3)$$

где $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$ — выпуклые функции, натянутые соответственно сверху и снизу на функцию $z(x, y)$ (см. п. 1 § 9), *а G — внутренность выпуклой оболочки области Ω.*

Доказательство. Установим соотношение (9,2,3). Соотношение (9,2,2) доказывается аналогично. Пусть так же, как и в п. 1 настоящего параграфа, $\overline{M}_2$ — множество общих точек поверхностей $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$, а M_2 — проекция $\overline{M}_2$

на плоскость x, y. Тогда из равенства (9,1,10) имеем

$$\omega\left(f_2^2, \bar{\bar{z}}, G\right)=\iint\limits_{M_2} f_2^2\left(z_x, z_y\right)\left(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2\right)dx\,dy.$$

Но на множестве точек M_2 квадратичные формы

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2 \quad \text{и} \quad z_{xx}\xi^2+2z_{xy}\xi\eta+z_{yy}\eta^2$$

положительны. Поэтому в точках множества M_2 справедливо неравенство

$$0\leqslant\sqrt{AC-B^2}\sqrt{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}\leqslant Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}=D.$$

Из условия в), которому удовлетворяют «коэффициенты» уравнения (9,2,1), вытекает неравенство

$$0\leqslant\sqrt{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}\leqslant\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\leqslant\varphi_+(x, y)\frac{1}{f_2(p, q)}.$$

Отсюда в точках множества M_2 имеем

$$f_2^2\left(z_x, z_y\right)\left(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2\right)\leqslant\varphi_+^2(x, y).$$

Поэтому

$$\omega\left(f_2^2, \bar{\bar{z}}, G\right)\leqslant\iint\limits_{M_2}\varphi_+^2(x, y)\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_{\Omega}\varphi_+^2(x, y)\,dx\,dy.$$

Соотношение (9,2,3) доказано.

Теорема 31. *Пусть выполнены все условия теоремы* 30 *и пусть, кроме того, функции* $\varphi_+(x, y)$ *и* $\varphi_-(x, y)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned}\omega_+&=\iint\limits_{\Omega}\varphi_+^2(x, y)\,dx\,dy<A\left(f_2^2\right),\\ \omega_-&=\iint\limits_{\Omega}\varphi_-^2(x, y)\,dx\,dy<A\left(f_1^2\right).\end{aligned}\qquad(9,2,4)$$

Тогда для решения $z(x, y)\in C^2(\Omega)$ *уравнения* (9,2,1) *в* Ω *имеют место оценки*

$$m-F\left(f_2^2, \omega_+\right)d\leqslant z(x, y)\leqslant M+F\left(f_1^2, \omega_-\right)d,\qquad(9,2,5)$$

где d — *диаметр* Ω, $m=\inf\limits_{\Gamma} z(x, y)$, $M=\sup\limits_{\Gamma} z(x, y)$. *Через* Γ *обозначена граница* Ω.

Доказательство. Выпуклые функции $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$, натянутые соответственно сверху и снизу на решение $z(x, y)$, таковы, что в $\Omega+\Gamma$ выполняются неравенства

$$\bar{\bar{z}}(x, y) \leqslant z(x, y) \leqslant \bar{z}(x, y). \tag{9,2,6}$$

Согласно теореме 30 для выпуклых функций $\bar{\bar{z}}(x, y)$ и $\bar{z}(x, y)$ справедливы неравенства

$$\omega\left(f_2^2, \bar{\bar{z}}, G\right) \leqslant \int_{\Omega}\int \varphi_+^2\, dx\, dy = \omega_+,$$

$$\omega\left(f_1^2, \bar{z}, G\right) \leqslant \int_{\Omega}\int \varphi_-^2\, dx\, dy = \omega_-.$$

Согласно неравенствам (9,2,4) и (9,1,4а, б) имеем оценки

$$m - F\left(f_2^2, \omega_+\right) d \leqslant \bar{\bar{z}}(x, y), \quad \bar{z}(x, y) \leqslant M + F\left(f_1^2, \omega_-\right) d.$$

Отсюда, учитывая неравенства (9,2,6), имеем (9,2,5). Теорема доказана.

Теорема 31 и дает искомую оценку модуля решений квазилинейных уравнений.

Рассмотрим теперь частный случай, когда функции f_1 и f_2 — степенные относительно выражения p^2+q^2. Пусть

$$f_1(p, q) = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^k},$$

$$f_2(p, q) = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^l},$$

где k и l — неотрицательные числа.

Тогда, в соответствии с п. 1 § 9, имеем

$$A\left(f_1^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\, dq}{(1+p^2+q^2)^{2k}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2k-1}, & \text{если } k > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и для $\omega_- \in [0, A(f_1^2))$ имеем

$$F(f_1^2, \omega_-) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega_-}{\pi}}, & \text{если } k = 0, \\ \left[\left(1 + \dfrac{1-2k}{\pi}\omega_-\right)^{\frac{1}{1-2k}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } k \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left(e^{\frac{\omega_-}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } k = \dfrac{1}{2}, \\ \left\{\left[1 - \dfrac{2k-1}{\pi}\omega_-\right]^{\frac{1}{2k-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}, & \text{если } k > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Аналогичные формулы справедливы для функции f_2^2. Именно:

$$A(f_2^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{2l}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } l \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2l-1}, & \text{если } l > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

и для $\omega_+ \in [0, A(f_2^2))$ имеем

$$F(f_2^2, \omega_+) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega_+}{\pi}}, & \text{если } l = 0, \\ \left\{\left[1 + \dfrac{1-2l}{\pi}\omega_+\right]^{\frac{1}{1-2l}} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}, & \text{если } l \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left(e^{\frac{\omega_+}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } l = \dfrac{1}{2}, \\ \left\{\left[1 - \dfrac{2l-1}{\pi}\omega_+\right]^{-\frac{1}{2l-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}, & \text{если } l > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, в случае линейного уравнения, т. е. когда A, B и C в (9,2,1) зависят только от x и y, $A(f_1^2) = A(f_2^2) = +\infty$ и оценка (9,2,6) имеет вид

$$m - \sqrt{\frac{\omega_+}{\pi}}\,d \leqslant z(x, y) \leqslant M + \sqrt{\frac{\omega_-}{\pi}}\,d.$$

Для $f_1 = f_2 = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$m - \left(e^{\frac{\omega_+}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} d \leqslant z(x, y) \leqslant M + \left(e^{\frac{\omega_-}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} d.$$

Оценки модуля решения, которые были построены выше, естественно, охватывают случай $D_z \equiv A_z \equiv B_z \equiv C_z \equiv 0$. Как показано С. Н. Бернштейном в [6], при этих условиях априорная оценка для модуля решения $z(x, y)$ не всегда может быть построена на основе рассмотрения точек максимума и минимума $z(x, y)$ (см. 1-й метод п. 1 § 6), даже если уравнение принадлежит классу L.

Пример задачи Дирихле, приведенный С. Н. Бернштейном, таков:

$$\begin{gathered} r + t = (x^2 + y^2 - 2)(p^2 + q^2) - 4; \\ z|_\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{9,2,7}$$

У этой задачи существует единственное решение в круге Ω: $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ лишь для $R < 1$, и это решение есть $\ln \frac{1 - \rho^2}{1 - R^2}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Результаты, полученные выше, позволяют дать достаточные условия, близкие к необходимым, при которых может быть получена оценка максимума модуля решения задачи (9,2,7).

Так как $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то имеем

$$(x^2 + y^2 - 2)(p^2 + q^2) - 4 \leqslant -[4 + p^2 + q^2] < 0.$$

Поэтому можно взять $\varphi_+(x, y) \equiv 0$, а $f_2(p, q) \equiv 1$. Отсюда будет следовать, что всюду в Ω

$$z(x, y) \geqslant 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - 2)(p^2 + q^2) - 4 = \\ &\qquad = -[4 + (p^2 + q^2)(2 - x^2 - y^2)] \geqslant -2[2 + p^2 + q^2]. \end{aligned}$$

Поэтому можно взять

$$\varphi_-(x, y) = 2, \quad \text{а} \quad f_1(p, q) = [2 + p^2 + q^2]^{-1}.$$

Имеем

$$A(f_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{(2+p^2+q^2)^2}=\pi\int_0^{+\infty}\frac{d\sigma}{(2+\sigma)^2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2+\sigma}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

Согласно обозначениям, принятым выше, имеем

$$\omega_-=\int_\Omega\int\varphi_-^2(x,\ y)\,dx\,dy=4\int_\Omega\int dx\,dy=4\pi R^2.$$

В соответствии с теоремой 31 неравенство

$$\omega_-<A(f_1^2) \qquad (9,2,8)$$

дает достаточное условие для оценки $z(x,\ y)$ сверху.

Соотношение (9,2,8) дает в нашем случае

$$4\pi R^2<\frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$R<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что для кругов Ω радиуса $R<\frac{1}{2\sqrt{2}}$ оценка $z(x,\ y)$ дается неравенством *)

$$0\leqslant z(x,\ y)\leqslant\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}4\pi R^2\right]^{-1}-2\right\}^{\frac{1}{2}}2R.$$

В заключение этого пункта разберем вопрос об оценке высоты поверхности в зависимости от свойств ее средней кривизны.

Пусть в области Ω задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $z(x,\ y)$, обращающаяся в нуль на границе Ω. Обозначим через $H(x,\ y)$ среднюю кривизну поверхности $z=z(x,\ y)$ в точке, имеющей точку $(x,\ y)$ своей проекцией.

*) В рассматриваемом примере

$$F(f_1^2,\ \omega)=\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_-}{\pi}\right)^{-1}-2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда функция $z(x, y)$ есть решение задачи Дирихле

$$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=$$
$$=H(x, y)\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad (9,2,9)$$
$$z|_\Gamma=0.$$

Функция $\dfrac{D}{\sqrt{AC-B^2}}$ для этой задачи такова:

$$\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}=H(x, y)\left(1+z_x^2+z_y^2\right).$$

Пусть $H_+(x, y)$ и $H_-(x, y)$ — соответственно положительная и отрицательная части функции $H(x, y)$. Функции H, H_+ и H_-, очевидно, непрерывные функции переменных x, y в Ω.

Нетрудно видеть, что в нашем случае

$$\varphi_+(x, y)=H_+(x, y),$$
$$\varphi_-(x, y)=H_-(x, y),$$
$$f_1(p, q)=f_2(p, q)=(1+p^2+q^2),$$

а потому

$$A(f_1^2)=A(f_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^2}=\pi.$$

Если

$$\iint_\Omega H_+^2(x, y)\,dx\,dy<\pi$$

и

$$\iint_\Omega H_-^2(x, y)\,dx\,dy<\pi, \qquad (9,2,10)$$

то из теоремы 31 вытекает, что для функции $z(x, y)$ справедливы оценки

$$-\sqrt{\frac{\omega_+}{\pi-\omega_+}}\,d\leqslant z(x, y)\leqslant\sqrt{\frac{\omega_-}{\pi-\omega_-}}\,d, \qquad (9,2,11)$$

где $\omega_+=\iint_\Omega H_+^2\,dx\,dy$, $\omega_-=\iint_\Omega H_-^2\,dx\,dy$ и d — диаметр области Ω.

Естественно поставить вопрос, насколько условия (9,2,10), с помощью которых проводятся двусторонние оценки функции $z(x, y)$, близки к необходимым.

Пусть Ω будет кругом $x^2+y^2 \leqslant R^2$, а функция $H(x, y) = H_0 = \text{const} > 0$.

Тогда $H_+(x, y) = H_0$, $H_-(x, y) \equiv 0$. Поэтому интересен лишь случай первого из неравенств (9,2,10), которое в рассматриваемом частном случае принимает вид

$$H_0^2 \operatorname{mes} \Omega < \pi$$

или

$$H_0^2 \pi R^2 < \pi,$$

т. е.

$$R < \frac{1}{H_0}.$$

Это условие сколь угодно близко к необходимому.

Действительно, если Ω — круг и $z|_{\text{гр}\,\Omega} = 0$, то решением задачи Дирихле (9,2,10) может быть лишь сегмент сферы радиуса $1/H_0$. Поэтому необходимо $R \leqslant \frac{1}{H_0}$. Итак, в случае задачи (9,2,9) неравенства (9,2,10) дают, вообще говоря, смыкающиеся необходимые и достаточные условия для оценки высоты поверхности $z(x, y)$ по ее средней кривизне.

3. Обобщение результатов пункта 2. Условие в) п. 2, лежащее в основе получения двусторонних оценок решений квазилинейных уравнений, накладывает на функцию $\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}$ требование, чтобы эта функция была ограниченной функцией переменной z при фиксированных значениях p и q. Ясно, что это условие покрывает случай $D_z \equiv A_z \equiv B_z \equiv C_z = 0$. В предыдущей главе подробно изучался случай $D_z \geqslant 0$, $A_z \equiv B_z \equiv C_z \equiv 0$, который не перекрывается требованием в) п. 2.

Оказывается, что с помощью простых дополнительных построений этот, а также несколько более общий характер ограничений «коэффициентов» уравнений (9,2,1) сводится к условиям типа в) п. 2.

Именно рассмотрим класс уравнений, у которых функции

$$A(x, y, z, p, q), \quad B(x, y, z, p, q), \quad C(x, y, z, p, q),$$
$$D(x, y, z, p, q)$$

удовлетворяют неравенству

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right) \geqslant 0. \tag{9,3,1}$$

Обозначим через m и M точную нижнюю и точную верхнюю грани значений $z(x, y)$ на Γ.

Функция $\bar{z}(x, y)$, с помощью которой проводилась оценка сверху решения $z(x, y)$, согласно неравенству (9,1,4а), такова, что

$$m \leqslant \bar{z}(x, y).$$

Поэтому в точках множества $\overline{M}_1$, на котором поверхности $z(x, y)$ и $\bar{z}(x, y)$ совпадают, выполняется неравенство

$$m \leqslant z(x, y).$$

Повторяя доказательство теоремы 30 для точек, выпуклых вверх, имеем, что в точках M_1 справедливо неравенство

$$0 \leqslant \sqrt{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2} \leqslant \frac{-D(x, y, z, p, q)}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

Но из неравенства (9,3,1) следует, что при фиксированных значениях переменных x, y, p, q функция $\dfrac{-D}{\sqrt{AC-B^2}}$ есть невозрастающая функция z. Поэтому в точках M_1 приходим к неравенству

$$0 \leqslant \sqrt{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{-D(x, y, m, p, q)}{\sqrt{A(x, y, m, p, q)\,C(x, y, m, p, q) - B^2(x, y, m, p, q)}}.$$

В функцию $\left.\dfrac{-D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x, y, m, p, q)}$ переменная z уже не входит. Поэтому для этой функции выполнение ограничения

$$\frac{D(x, y, m, p, q)}{\sqrt{A(x, y, m, p, q)\,C(x, y, m, p, q) - B^2(x, y, m, p, q)}} \geqslant$$
$$\geqslant -\varphi_{-, m}(x, y)\frac{1}{f_m(p, q)} \tag{9,3,2}$$

(где $\varphi_{-, m}(x, y) \geqslant 0$ — суммируемая с квадратом в Ω функция, а $f_m(p, q) > 0$ — локально суммируемая с квадратом на плоскости p, q функция) является естественным требованием.

Повторяя рассуждения теорем 30 и 31, приходим к оценкам

$$\omega\left(f_m^2, \bar{z}, G\right) \leqslant \int_\Omega \int \varphi_{-, m}^2 \, dx \, dy,$$

и если

$$\omega_- = \int_\Omega \int \varphi_{-, m}^2 \, dx \, dy < A\left(f_m^2\right),$$

то

$$z(x, y) \leqslant M + F\left(f_m^2, \omega_-\right) d.$$

Аналогично получаем оценку

$$m + F\left(f_M^2, \omega_+\right) d \leqslant z(x, y)$$

$$\left(\omega_+ = \int_\Omega \int \varphi_{+, M}^2 \, dx \, dy < A\left(f_M^2\right)\right),$$

где $\varphi_{+, M}(x, y) \geqslant 0$ — суммируемая с квадратом в Ω функция, а $f_M(p, q) \geqslant 0$ — локально суммируемая с квадратом на плоскости p, q функция, которые определяются неравенством

$$\varphi_{+, M}(x, y) \frac{1}{f_M(p, q)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{D(x, y, M, p, q)}{\sqrt{A(x, y, M, p, q)\, C(x, y, M, p, q) - B^2(x, y, M, p, q)}}. \quad (9,3,3)$$

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 32. *Пусть выполнены условия теоремы* 31, *за исключением условия* в), *которое заменено условиями* (9,3,2) *и* (9,3,3), *где* m *и* M *соответственно точные нижняя и верхняя грани значений* $z(x, y)$ *на кривой* Γ. *Тогда справедливы оценки*

$$m - F\left(f_M^2, \omega_+\right) d \leqslant z(x, y) \leqslant M + F\left(f_m^2, \omega_-\right) d.$$

§ 10. Априорные оценки первых производных на границе области

1. План исследования. Получение оценок первых производных решения на границе области основано на более тонких геометрических построениях по сравнению с теми, которые были применены в § 9 для оценки модуля решения. Наметим сначала план исследования.

Пусть Ω — область на плоскости x, y, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ, которую будем предполагать, во-первых, принадлежащей классу $C^{2,\beta}$ ($\beta \in (0, 1)$) и, во-вторых, имеющей в каждой точке кривизну, не меньшую чем $\varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$. На Γ зададим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h(s)$ (s — длина переменной дуги на Γ с фиксированным началом). Обозначим через γ кривую в пространстве, заданную уравнением

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = h(s),$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения кривой Γ.

Пусть, далее, дважды непрерывно дифференцируемая в $\Omega + \Gamma$ функция $z(x, y)$ является решением квазилинейного эллиптического уравнения

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$$

и пусть край поверхности $z = z(x, y)$ есть кривая γ. Пусть P' — произвольная точка Γ, а P — точка кривой γ, имеющая P' своей проекцией. В силу теоремы 24 (п. 1 § 7) нижнее и верхнее извивания кривой γ ограничены. Поэтому через касательную к γ в точке P можно провести плоскости Q_1 и Q_2, которые оставляют соответственно под и над собою кривую γ. Пусть уравнения плоскостей Q_1 и Q_2 таковы:

$$Q_1\colon\ z = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$Q_2\colon\ z = a_2x + b_2y + c_2.$$

Обозначим через $K_{P'}$ наименьший круг, содержащий в себе $\Omega + \Gamma$ и касающийся Γ в точке P'. Очевидно, что радиус $r_{P'}$ круга $K_{P'}$ не превосходит $1/\varkappa_0$. Пусть Z и $Z_{P'}$ — прямые цилиндры, образующие которых параллельны оси z, а направляющие суть кривые Γ и граница круга $K_{P'}$.

Пусть γ_1 и γ_2 — эллипсы, получающиеся соответственно в пересечении цилиндра $Z_{P'}$ с плоскостями Q_1 и Q_2. Если теперь построить выпуклые функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ с краями γ_1 и γ_2, первая из которых обращена выпуклостью вверх, а вторая — вниз, такие, что в Ω всюду

$$u_1(x, y) \geqslant z(x, y) \geqslant u_2(x, y),$$

то для нормальной производной функции $z(x, y)$ в точке P'

имеем двустороннюю оценку

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{P'} \leqslant \left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{P'} \leqslant \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{P'}.$$

Это построение сводит решение вопроса об априорных оценках нормальной производной функции $z(x, y)$ в точке P' к нахождению выпуклых функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$.

Допустим, что нам удалось установить, что во всех эллиптических и параболических точках поверхности $z = z(x, y)$, обращенных выпуклостью вниз, справедливо неравенство

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \leqslant H_-^2 f\left(z_x^2 + z_y^2\right), \qquad (10,1,1)$$

где $H_- = \mathrm{const} > 0$, а $f > 0$ — непрерывная функция от выражения $p^2 + q^2$. Тогда функцию $u_1(x, y)$ строим так:

$$u_1(x, y) = v_1(x, y) + a_1x + b_1y + c_1,$$

где поверхность $z = v_1(x, y) \equiv v_1(x^2 + y^2)$ есть выпуклая вниз поверхность вращения с осью z в качестве оси вращения и такая, что $v_1|_{\text{гр.}\,K_{P'}} = 0$ и

$$v_{1,\,xx}v_{1,\,yy} - v_{1,\,xy}^2 = H_-^2 f\left(v_{1,\,x}^2 + v_{1,\,y}^2\right).$$

При этом, если верхнее извивание кривой γ, число H_- и функция $f(p^2 + q^2)$ связаны между собой некоторым интегральным неравенством, которое ниже точно описано, то функцию $v_1(x, y)$ можно подобрать так, чтобы всюду в $K_{P'}$ было справедливо неравенство

$$u_{1,\,xx}u_{1,\,yy} - u_{1,\,xy}^2 \geqslant H_-^2 f\left(u_{1,\,x}^2 + u_{1,\,y}^2\right). \qquad (10,1,2)$$

Так как край поверхности $z = u_1(x, y)$ лежит над краем поверхности $z = z(x, y)$, то из соотношений (10,1,1) и (10,1,2) будет следовать (ниже это будет разобрано подробно), что всюду в $\Omega + \Gamma$ имеет место неравенство

$$u_1(x, y) \leqslant z(x, y).$$

Поскольку функция $u_1(x, y)$ будет явно построена по данным задачи, то для $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{P'}$ тем самым будет получена эффективная оценка снизу. Оценка $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{P'}$ сверху с помощью функции $u_2(x, y)$ строится аналогично.

Перейдем теперь к формулировке понятий, которые позволяют реализовать намеченный нами план построений.

2. Основные понятия. Так же, как и в п. 1, считаем, что область Ω имеет границей замкнутую выпуклую кривую Γ класса $C^{2,\beta}$ ($\beta \in [0, 1]$), причем кривизна Γ во всех точках не меньше некоторой постоянной $\varkappa_0 > 0$.

Пусть γ — кривая, заданная уравнениями

$$x = x(s),$$
$$y = y(s),$$
$$z = h(s),$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения кривой Γ; s — длина переменной дуги Γ с фиксированным концом, а $h(s) \in C^2(\Gamma)$.

Согласно теореме 24 § 7 верхнее и нижнее извивания γ конечны и оцениваются сверху через числа $\varkappa_0$, $\|x(s)\|_{2,\beta}$, $\|y(s)\|_{2,\beta}$ и $\|h(s)\|_2$. Обозначим эти извивания соответственно $M_в(\gamma)$ и $M_н(\gamma)$.

В области $\Omega + \Gamma$ рассмотрим квазилинейное уравнение

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = \\ = D(x, y, z, p, q).$$

Ниже будем считать, что функции A, B, C и D при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ непрерывны и таковы, что

1) Квадратичная форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительна и $AC - B^2 > 0$.

2) Функция $\dfrac{D}{\sqrt{AC - B^2}}$ допускает двусторонние оценки:

$$\frac{-H_-}{R_1(p^2+q^2)} \leqslant \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} \leqslant \frac{H_+}{R_2(p^2+q^2)},$$

где H_- и H_+ — некоторые неотрицательные постоянные, а $R_1(p^2+q^2)$ и $R_2(p^2+q^2)$ — положительные непрерывные функции на плоскости p, q.

По функции $R_1(p^2+q^2)$ и числу $M_в(\gamma)$ строим новую функцию

$$N_в(p, q; \gamma, R_1^2) = \inf R_1^2(\overline{p}^2 + \overline{q}^2), \qquad (10,2,1)$$

где точная нижняя граница берется в круге радиуса $\sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)}$ с центром в точке (p, q).

Аналогично по функции $R_2(p^2+q^2)$ и числу $M_{\text{н}}(\gamma)$ строится функция

$$N_{\text{н}}(p, q; \gamma, R_2^2) = \inf R_2^2(\overline{p}^2+\overline{q}^2), \tag{10,2,2}$$

где точная нижняя граница берется в круге радиуса $\sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)}$ с центром в точке p, q.

Так как R_1 и R_2 есть функции от выражения p^2+q^2, то, очевидно, и функции $N_{\text{в}}$ и $N_{\text{н}}$ также есть функции выражения p^2+q^2, потому мы ниже всегда будем пользоваться обозначениями

$$N_{\text{в}}(p^2+q^2; \gamma, R_1^2) \quad \text{и} \quad N_{\text{н}}(p^2+q^2; \gamma, R_2^2).$$

Функции $N_{\text{в}}(p^2+q^2; \gamma, R_1^2)$, $N_{\text{н}}(p^2+q^2; \gamma, R_2^2)$ как раз и являются основным аппаратом, с помощью которого получаются на Γ оценки для нормальной производной решения $z(x, y) \in C^2(\Omega+\Gamma)$ задачи Дирихле

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + \\ + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q); \tag{10,2,3}$$

$$z|_{\Gamma} = h(s). \tag{10,2,4}$$

3. Основная теорема об априорных оценках нормальной производной. Итак, пусть $z(x, y) \in C^2(\Omega+\Gamma)$ — решение задачи (10,2,3—4).

Пусть P' — произвольная точка Γ, а P — точка кривой γ, имеющая P' своей проекцией. Проведем через касательную к γ в точке P плоскости Q_1 и Q_2, о которых шла речь в п. 1.

Напомним, что Q_1 оставляет под собой, а Q_2 оставляет над собой кривую γ. Пусть уравнения этих плоскостей таковы:

$$Q_1\colon \quad z = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$Q_2\colon \quad z = a_2x + b_2y + c_2.$$

Из результатов § 7 вытекает, что Q_1 и Q_2 могут быть выбраны так, что

$$a_1^2 + b_1^2 \leqslant M_{\text{в}}(\gamma),$$
$$a_2^2 + b_2^2 \leqslant M_{\text{н}}(\gamma).$$

Функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, с помощью которых в п. 1 строилась оценка $\frac{\partial z}{\partial n}$ в точке P', вводим так:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1(x, y) + a_1 x + b_1 y + c_1, \\ u_2 &= v_2(x, y) + a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \tag{10,3,1}$$

где $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ есть решения следующих задач Дирихле:

$$\frac{v_{1,xx} v_{1,yy} - v_{1,xy}^2}{N_{\text{в}}\left(v_{1,x}^2 + v_{1,y}^2;\ \gamma,\ R_1^2\right)} = H_-^2;$$

$$v_1|_{\text{гр. } K_{P'}} = 0,$$

и $v_1(x, y)$ обращена выпуклостью вверх;

$$\frac{v_{2,xx} v_{2,yy} - v_{2,xy}^2}{N_{\text{н}}\left(v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2;\ \gamma,\ R_2^2\right)} = H_+^2;$$

$$v_2|_{\text{гр. } K_{P'}} = 0,$$

и $v_2(x, y)$ обращена выпуклостью вниз.

В § 18 главы IV доказано, что выпуклые функции $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ могут быть построены, если соответственно выполнены неравенства

$$\begin{aligned} H_-^2 \operatorname{mes} K_{P'} &< \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}\left(p^2 + q^2;\ \gamma,\ R_1^2\right) dp\, dq = A(N_{\text{в}}), \\ H_+^2 \operatorname{mes} K_{P'} &< \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2 + q^2;\ \gamma,\ R_2^2\right) dp\, dq = A(N_{\text{н}}). \end{aligned} \tag{10,3,2}$$

Так как $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ являются, очевидно, поверхностями вращения, то их нормальные изображения на плоскости p, q являются кругами S_1 и S_2 с общим центром в точке $(p = 0,\ q = 0)$. Тогда

$$\iint_{S_1} N_{\text{в}}\, dp\, dq = \omega(N_{\text{в}},\ v_1,\ K_{P'}) = H_-^2 \operatorname{mes} K_{P'},$$

$$\iint_{S_2} N_{\text{н}}\, dp\, dq = \omega(N_{\text{н}},\ v_2,\ K_{P'}) = H_+^2 \operatorname{mes} K_{P'}$$

и, в силу неравенств (10,3,2) и результатов п. 1 § 9, мы имеем

$$\begin{aligned}&\left(v_{1x}^2+v_{1y}^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\text{гр. }K_{P'}}=F\left(N_{\text{в}},\ H_-^2\ \operatorname{mes}K_{P'}\right)<+\infty;\\&\left(v_{2x}^2+v_{2y}^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\text{гр. }K_{P'}}=F\left(N_{\text{н}},\ H_+^2\ \operatorname{mes}K_{P'}\right)<+\infty,\end{aligned}\tag{10,3,3}$$

так как $\left(v_{1x}^2+v_{1y}^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\text{гр. }K_{P'}}$ и $\left(v_{2x}^2+v_{2y}^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\text{гр. }K_{P'}}$ соответственно суть радиусы кругов S_1 и S_2.

Докажем теперь, что в Ω выполнены неравенства

$$u_1(x,\ y)\geqslant z(x,\ y)\geqslant u_2(x,\ y).$$

Как уже отмечено в п. 1 § 10, в силу проведенных построений, имеем

$$u_1|_\Gamma\geqslant z|_\Gamma\geqslant u_2|_\Gamma.$$

Пусть $\bar z(x,\ y)$ и $\bar{\bar z}(x,\ y)$ — выпуклые функции, натянутые сверху и снизу на функцию $z(x,\ y)$. Из результатов § 9 и условий, наложенных на краевую задачу (10,2,3—4), вытекает, что для любого множества $e\subset\Omega$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\omega\left(R_1^2,\ \bar z,\ e\right)&=\omega\left(R_1,\ \bar z,\ e\cap M_1\right)=\\&=\iint\limits_{e\cap M_1}R_1^2\left(z_x^2+z_y^2\right)\left(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2\right)dx\,dy\leqslant\\&\leqslant H_-^2\iint\limits_{e\cap M_1}dx\,dy\leqslant H_-^2\operatorname{mes}e.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\omega\left(R_2^2,\ \bar{\bar z},\ e\right)\leqslant H_+^2\operatorname{mes}e.$$

Для того же множества $e\subset\Omega$ имеем

$$\begin{aligned}\omega\left(R_1^2,\ u_1,\ e\right)&=\iint\limits_e R_1^2\left(u_{1,x}^2+u_{1,y}^2\right)\left(u_{1,xx}u_{1,yy}-u_{1,xy}^2\right)dx\,dy=\\&=\iint\limits_e R_1^2\left[(v_{1,x}+a_1)^2+(v_{1,y}+b_1)^2\right]\left(v_{1,xx}v_{1,yy}-v_{1,xy}^2\right)dx\,dy\geqslant\\&\geqslant\iint\limits_e N_{\text{в}}\left(v_{1,x}^2+v_{1,y}^2;\ \gamma;\ R_1^2\right)dx\,dy=H_-^2\operatorname{mes}e.\end{aligned}$$

Точно так же

$$\omega(R_2^2, u_2, e) \geqslant H_+^2 \operatorname{mes} e.$$

Таким образом, на всех борелевских множествах $e \subset \Omega$ имеем

$$\omega(R_1^2, u_1, e) \geqslant \omega(R_1^2, \bar{z}, e)$$

и

$$\omega(R_2^2, u_2, e) \geqslant \omega(R_2^2, \bar{\bar{z}}, e).$$

Поэтому в области G имеют место неравенства

$$u_1(x, y) \geqslant \bar{z}(x, y) \geqslant z(x, y) \geqslant \bar{\bar{z}}(x, y) \geqslant u_2(x, y).$$

Отсюда, используя соотношения (10,3,1) и (10,3,3), получаем

$$-F(N_{\text{в}}, H_-^2 \operatorname{mes} K_{P'}) - \sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)} \leqslant \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_{\text{гр.}K_{P'}} -$$

$$-\sqrt{a_1^2+b_1^2} \leqslant \frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{\text{гр.}K_{P'}} \leqslant \frac{\partial z}{\partial n}\bigg|_{\text{гр.}K_{P'}} \leqslant \frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_{\text{гр.}K_{P'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_{\text{гр.}K_{P'}} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} \leqslant F(N_{\text{н}}, H_+^2 \operatorname{mes} K_{P'}) + \sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)}.$$

Так как радиус круга $K_{P'}$ не больше $1/\varkappa_0$, то при выполнении условий

$$\frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}(p^2+q^2;\ \gamma;\ R_1^2)\,dp\,dq$$

и

$$\frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}(p^2+q^2,\ \gamma,\ R_2^2)\,dp\,dq$$

получим равномерные на Γ оценки

$$\sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{н}}, \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right) \geqslant \frac{\partial z}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} \geqslant$$

$$\geqslant -\sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)} - F\left(N_{\text{в}}, \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right).$$

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 33 (основная теорема). *Пусть Ω — область класса $C^{2,\beta}$ ($\beta \in [0, 1]$), ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ, у которой во всех точках кривизна* *не меньше чем* $\varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$. *В* $\Omega + \Gamma$ *рассмотрим решение* $z(x, y) \in C^2(\Omega + \Gamma)$ *задачи Дирихле*

$$A(x, y, z, p, q)\,r + 2B(x, y, z, p, q)\,s + C(x, y, z, p, q)\,t = D(x, y, z, p, q),$$
$$z|_\Gamma = h(s).$$

Пусть при всех конечных z, p, q *и всех* $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ *выполнены условия:*

а) *Форма* $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ *положительна и* $AC - B^2 > 0$,

б)
$$\frac{-H_-}{R_1(p^2+q^2)} \leqslant \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} \leqslant \frac{H_+}{R_2(p^2+q^2)}, \qquad (10,3,4)$$

где H_- *и* H_+ — *некоторые неотрицательные постоянные, а* R_1 *и* R_2 — *некоторые непрерывные положительные функции на плоскости* p, q.

Обозначим через $M_{\text{в}}(\gamma)$ *и* $M_{\text{н}}(\gamma)$ *верхнее и нижнее извивания кривой* γ *края поверхности* $z = z(x, y)$.

Тогда, если

$$\frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}(p^2+q^2, \gamma, R_1^2)\,dp\,dq,$$

$$\frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}(p^2+q^2, \gamma, R_2^2)\,dp\,dq,$$

где функции $N_{\text{в}}(p^2+q^2, \gamma, R_1^2)$ *и* $N_{\text{н}}(p^2+q^2, \gamma, R_2^2)$ *строятся по формулам* (10,2,1) *и* (10,2,2), *то для нормальной производной функции* $z(x, y)$ *на границе* Γ *имеют место двусторонние оценки:*

$$\sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{н}}, \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right) \geqslant \left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant -\sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)} - F\left(N_{\text{в}}, \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right). \qquad (10,3,5)$$

Следствие. *Во всех рассмотрениях мы не предполагали, что для* $z(x, y)$ *известна оценка модуля* в $\Omega+\Gamma$. *Так как для* $u_1(x, y)$ *и* $u_2(x, y)$ *имеют место оценки*

$$u_1(x, y) \leqslant \max_{\Gamma} h(s) + d\left(\sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{в}}, \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right)\right),$$

$$u_2(x, y) \geqslant \min_{\Gamma} h(s) - d\left(\sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{н}}, \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right)\right),$$

то в Ω *для решения* $z(x, y)$ *задачи* (10,2,3—4) *имеют место двусторонние оценки*:

$$\max_{\Gamma} h(s) + d\left(\sqrt{M_{\text{в}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{в}}, \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right)\right) \geqslant z(x, y) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{\Gamma} h(s) - d\left(\sqrt{M_{\text{н}}(\gamma)} + F\left(N_{\text{н}}, \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right)\right).$$

4. Обобщение основной теоремы. Рассмотрим теперь случай, когда переменная z входит в отношение $\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}$ неограниченным образом. Так же, как и в п. 3 § 9, будем считать, что вместо условия (10,3,4) функция $\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}$ при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega+\Gamma$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right) \geqslant 0.$$

В этом случае $\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}$ есть возрастающая функция z при фиксированных x, y, p, q.

Поэтому будем иметь неравенства

$$\left.\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x, y, h_1, p, q)} \leqslant \left.\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x, y, z, p, q)} \leqslant$$
$$\leqslant \left.\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x, y, h_2, p, q)},$$

где $h_1 = \min\limits_{\Gamma} h(s)$, $h_2 = \max\limits_{\Gamma} h(s)$ и $h_1 \leqslant z \leqslant h_2$.

Теорема 34. *Предположим, что имеют место неравенства*:

$$\left.\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x,\,y,\,h_1,\,p,\,q)} \geqslant \frac{-H_-}{R_1(p^2+q^2)},$$
$$\left.\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}}\right|_{(x,\,y,\,h_2,\,p,\,q)} \leqslant \frac{H_+}{R_2(p^2+q^2)},$$

где H_- и H_+ — некоторые неотрицательные постоянные, а R_1 и R_2 — неотрицательные функции на плоскости p, q. По функциям R_1^2 и R_2^2 строим функции $N_в$ и $N_н$ по формулам (10,2,1) *и* (10,2,2).

Тогда, если выполнены неравенства

$$\frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_в(p^2+q^2,\ \gamma,\ R_1^2)\,dp\,dq$$

и

$$\frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_н(p^2+q^2,\ \gamma,\ R_2^2)\,dp\,dq,$$

то для $\frac{\partial z}{\partial n}$ на Γ и $z(x,\,y)$ в $\Omega+\Gamma$ имеют место двусторонние оценки

$$\sqrt{M_н(\gamma)}+F\left(N_н,\ \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right) \geqslant \left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant$$
$$\geqslant -\sqrt{M_в(\gamma)}-F\left(N_в,\ \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right),$$

$$\max_\Gamma h(s)+d\left(\sqrt{M_в(\gamma)}+F\left(N_в,\ \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right)\right) \geqslant z(x,\,y) \geqslant$$
$$\geqslant \min_\Gamma h(s)-d\left(\sqrt{M_н(\gamma)}+F\left(N_н,\ \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right)\right).$$

§ 11. Апрнорные оценки первых производных внутри областн

1. Предварительные замечання. Пусть Ω — область класса L_3, ограниченная гомеоморфной окружности кривой Γ. В $\Omega+\Gamma$ рассмотрим задачу Дирихле

$$A(x, y, z, p, q) r+2B(x, y, z, p, q) s+C(x, y, z, p, q) t= \\ =D(x, y, z, p, q), \quad (11,1,1)$$

$$z|_\Gamma=h(s)\in C^2(\Gamma). \quad (11,1,2)$$

Ниже постоянно предполагается, что решение $z(x, y)$ задачи (11,1,1—2) принадлежит $C^3(\Omega)\cap C^2(\Omega+\Gamma)$ и для него уже известны априорные оценки

$$\max_{\Omega+\Gamma}|z(x, y)|\leqslant M \text{ и } \max_{\Gamma}|\operatorname{grad} z|\leqslant M_1. \quad (11,1,3)$$

При сделанных предположениях для задачи (11,1,1—2) в п. 5 § 7 уже рассматривались априорные оценки $|\operatorname{grad} z|$ во всей области $\Omega+\Gamma$. Именно пусть функции A, B, C, D таковы, что

1) A, B, C не зависят от z; форма $A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2$, положительно определенная при всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ и при любых конечных z, p, q.

2) Частные производные A_x, A_y; B_x, B_y; C_x, C_y; D_x, D_y относительно p, q имеют порядок роста при $p^2+q^2\to\infty$ соответственно не больше порядков роста функций A; B; C; D.

3) $D_z\geqslant\text{const}>0$ и порядок роста D_z относительно p, q при $p^2+q^2\to\infty$ не ниже порядка роста D.

Тогда в п. 5 § 7 установлено, что для максимума $z_x^2+z_y^2$ ($z(x, y)$ — решение задачи (11,1,1—2)) в $\Omega+\Gamma$ может быть получена априорная оценка через исходные данные задачи (11,1,1—2).

К условиям 1—3 могут быть сведены с помощью вспомогательных функций квазилинейные уравнения, у которых функция $D(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет, в известном смысле, менее жестким ограничениям, чем условие 3.

В п. 5 § 7 это сделано применительно к уравнениям класса L. Именно условие 3 можно заменить условием 3':

$$D_z(x, y, z, p, q)\geqslant 0,$$

и уравнение принадлежит классу $\mathbf{L}$ (т. е.

$$\frac{|D|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2} \leqslant R_M,$$

если $p^2+q^2 \geqslant 1$, $(x, y) \in \Omega+\Gamma$, $|z| \leqslant M$. Константа R_M может зависеть от M).

Ниже будут даны другие условия на функцию $D(x, y, z, p, q)$, которые вместе с условиями 1 и 2 приведут к выполнению условий 1, 2, 3 для некоторого вспомогательного квазилинейного уравнения.

2. Априорная оценка p^2+q^2 для решений уравнения вида $A(x, y, p, q)r+2B(x, y, p, q)s+C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$. Относительно области Ω и решения $z(x, y)$ задачи Дирихле (11,1,1—2) будем предполагать выполненными все условия предыдущего пункта; мы, кроме того, предполагаем, что z не входит в коэффициенты уравнения A, B, C.

На промежутке $[-M, M]$ рассмотрим трижды непрерывно дифференцируемую функцию $u=\Phi(z)$, производная которой всюду удовлетворяет неравенствам

$$+\infty > a_1 \geqslant \Phi'(z) \geqslant a_0 = \text{const} > 0.$$

Пусть $\alpha=\Phi(-M)$ и $\beta=\Phi(M)$. Тогда на $[\alpha, \beta]$ определена обратная к $\Phi(z)$ функция

$$z=\varphi(u).$$

Функция $\varphi(u)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяет всюду неравенству

$$\frac{1}{a_0} \geqslant \varphi'(u) \geqslant \frac{1}{a_1}.$$

Имеем

$$p=\varphi'(u)\,u_x,$$

$$q=\varphi'(u)\,u_y,$$

$$r=\varphi'(u)\,u_{xx}+\varphi''(u)\,u_x^2, \quad s=\varphi'(u)\,u_{xy}+\varphi''(u)\,u_xu_y,$$

$$t=\varphi'(u)\,u_{yy}+\varphi''(u)\,u_y^2.$$

Поэтому функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$A(x, y, p, q)\,u_{xx} + 2B(x, y, p, q)\,u_{xy} + C(x, y, p, q)\,u_{yy} =$$
$$= -\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}\left[A\left(x, y, \varphi' u_x, \varphi' u_y\right)u_x^2 + 2B\left(x, y, \varphi' u_x, \varphi' u_y\right)u_x u_y +\right.$$
$$\left. + C\left(x, y, \varphi' u_x, \varphi' u_y\right)u_y^2\right] + \frac{1}{\varphi'(u)}D\left(x, y, \varphi(u), \varphi' u_x, \varphi' u_y\right) \equiv$$
$$\equiv Q(x, y, u, u_x, u_y).$$

Пусть m — порядок роста выражения $E = Au_x^2 + 2Bu_x u_y + Cu_y^2$ относительно $\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{1/2}$ *), а l — порядок роста функции D относительно той же величины $\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{1/2}$. Так как уравнения класса L уже изучены, то случай $m \geqslant l$, характеризующий этот класс, нас не интересует, и можно считать, что $l > m \geqslant 2$ **).

В этом случае совокупность членов в Q, имеющих порядок l относительно u_x, u_y, такова:

$$Q_l(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{\varphi'(u)}D_l(x, y, \varphi(u), \varphi'(u)\,u_x, \varphi'(u)\,u_y),$$

где $D_l(x, y, \varphi(u), \varphi'(u)\,u_x, \varphi'(u)\,u_y)$ — совокупность членов наивысшего порядка l относительно u_x и u_y в функции D. Имеем

$$Q_l(x, y, u, u_x, u_y) = [\varphi'(u)]^{l-1} D_l(x, y, \varphi(u), u_x, u_y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial Q_l}{\partial u} = \left[(l-1)D_l(x, y, \varphi(u), u_x, u_y)\varphi''(u) + \right.$$
$$\left. + [\varphi'(u)]^2 \frac{\partial D_l}{\partial z}\right](\varphi'(u))^{l-2}.$$

Положим

$$S_\varphi(u) = \frac{[\varphi'(u)]^{l-2}}{\left[u_x^2 + u_y^2\right]^{l/2}}\left[(l-1)D_l(x, y, \varphi(u), u_x, u_y) + \right.$$
$$\left. + [\varphi'(u)]^2 \frac{\partial D_l}{\partial z}\right].$$

---

*) Ниже мы считаем, что функции A, B, C, D относительно p и q при $p^2 + q^2 \to \infty$ ведут себя как степенные функции.

**) Не нарушая общности, можно считать, что при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ справедливо неравенство

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \alpha_0(\xi^2 + \eta^2),$$

$\alpha_0 = \text{const} > 0$. Поэтому $m \geqslant 2$.

Поэтому, если существует функция $z=\varphi(u)$ такая, что

1) $\varphi(u)\in C^3[\alpha, \beta]$,

2) всюду на $[\alpha, \beta]$ справедливо неравенство $\varphi'(u)\geqslant \geqslant\frac{1}{a_1}=\text{const}>0$,

3) $S_\varphi(u)\geqslant S_0$ $(S_0=\text{const}>0)$ для $u_x^2+u_y^2\geqslant 1$, $u\in[\alpha, \beta]$ и $(x, y)\in\Omega+\Gamma$, то имеет место оценка

$$\frac{\partial Q_l}{\partial u}\geqslant S_0\left(u_x^2+u_y^2\right)^{l/2}. \qquad (11,2,1)$$

Отсюда так же, как и в п. 5 § 7, вытекает, что для уравнения (11,1,1) выполнены условия 1, 2, 3 и, следовательно, для $z_x^2+z_y^2$ в $\Omega+\Gamma$ имеет место априорная оценка через исходные данные задачи (11,1,1—2).

Остановимся на некоторых простых достаточных условиях, из которых вытекает соотношение (11,2,1).

А) Пусть $D_l(x, y, z, p, q)\geqslant R_0(p^2+q^2)^{l/2}$, а функция $\frac{\partial D_l}{\partial z}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial D_l(x, y, z, p, q)}{\partial z}\geqslant -T_0(p^2+q^2)^{l/2}$$
$$(R_0=\text{const}>0,\ T_0=\text{const}\geqslant 0)$$

для $p^2+q^2\geqslant 1$ и $|z|\leqslant M$. В этом случае функцию $\Phi(z)$ можно выбрать так: для $z\in[-M, M]$

$$\Phi(z)=\ln\left(e^{\frac{z+M+\gamma}{\gamma}}-1\right),$$

где $\gamma>0$ — некоторая постоянная. Тогда для $z\in[-M, M]$ имеем

$$+\infty>a_1=\text{const}=\frac{1}{\gamma}\frac{e^{\frac{2M+\gamma}{\gamma}}}{e-1}\geqslant\Phi'(z)=$$
$$=\frac{1}{\gamma}\frac{e^{\frac{z+M+\gamma}{\gamma}}}{e^{\frac{z+M+\gamma}{\gamma}}-1}\geqslant\frac{1}{\gamma}\frac{e}{e^{\frac{2M+\gamma}{\gamma}}-1}=a_0>0$$

и потому $\Phi(z)$ — допустимая, строго возрастающая функция z. Обратной для нее будет функция

$$\varphi(u) = -M - \gamma + \gamma \ln(e^u + 1),$$

заданная на сегменте $\left[\ln(e-1),\ \ln\left(e^{\frac{2M+\gamma}{\gamma}} - 1\right)\right]$. При всех значениях u из этого промежутка справедливы оценки

$$\frac{1}{a_0} \geqslant \varphi'(u) \geqslant \frac{1}{a_1}, \quad \varphi''(u) = \varphi'(u)\frac{1}{e^u+1} \geqslant \frac{1}{a_1 e^{\frac{2M+\gamma}{\gamma}}} = a_2 > 0.$$

Поэтому

$$S_\varphi(u) = \frac{[\varphi'(u)]^{l-2}}{\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{l/2}}\Big[(l-1)\,D_l(x,\ y,\ \varphi(u),\ u_x,\ u_y)\,\varphi''(u) +$$
$$+ [\varphi'(u)]^2\,\frac{\partial D_l}{\partial z}\Big] \geqslant \left(\frac{1}{a_1}\right)^{l-2}\left[(l-1)\,R_0 a_2 - \frac{1}{a_1^2}\,T_0\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{a_1}\right)^{l-1}\frac{1}{e^{\frac{2M+1}{\gamma}}}\,[(l-1)\,R_0 - \gamma(e-1)\,T_0].$$

Если теперь зафиксировать $\gamma > 0$ так, что

$$\gamma < \frac{\left(l - \frac{3}{2}\right)R_0}{(e-1)\,T_0},$$

то

$$S_\varphi(u) > \frac{1}{2}\,R_0\left(\frac{1}{a_1}\right)^{l-1}\frac{1}{e^{\frac{2M+1}{\gamma}}},$$

откуда и вытекает априорная оценка для $z_x^2 + z_y^2$ во всей области $\Omega + \Gamma$.

Б) Теперь для функций D_l и $\frac{\partial D_l}{\partial z}$ справедливы неравенства

$$D_l(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \leqslant -R_0\,(p^2 + q^2)^{l/2},$$
$$\frac{\partial D_l(x, y, z, p, q)}{\partial z} \geqslant -T_0\,(p^2 + q^2)^{l/2},$$

где $(x, y) \in \Omega + \Gamma$, $|z| \leqslant M$ и $p^2 + q^2 \geqslant 1$, а $R_0 > 0$, $T_0 \geqslant 0$ — некоторые постоянные. Тогда с помощью функции

$$u = \Phi_1(z) = \ln\left(e^{\frac{z+M+\gamma}{\gamma}} + 1\right),$$

заданной на сегменте $[-M, M]$ ($\gamma > 0$ — некоторая надлежаще выбранная постоянная), приходим к неравенству

$$S_\varphi(u) \geqslant a_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Подробное доказательство мы опускаем, так как оно аналогично доказательству пункта A.

3. Формулировка результатов. Ниже мы формулируем итоговые результаты об априорных оценках модулей первых производных решений задачи Дирихле, которые были получены в настоящем параграфе.

Пусть Ω — область класса L_3, ограниченная кривой Γ, гомеоморфной окружности. В $\Omega + \Gamma$ рассмотрим задачу Дирихле

$$A(x, y, z, p, q)\, r + 2B(x, y, z, p, q)\, s + C(x, y, z, p, q)\, t = \\ = D(x, y, z, p, q), \tag{11,3,1}$$

$$z|_\Gamma = h(s) \in C^2(\Gamma). \tag{11,3,2}$$

Относительно решения этой задачи и относительно коэффициентов уравнения (11,3,1) будем предполагать выполненными следующие условия:

I. Решение задачи (11,3,1—2) — функция $z(x, y) \in C^3(\Omega) \cap C^2(\Omega + \Gamma)$; для нее известны оценки

1) $$\max_{\Omega+\Gamma} |z| \leqslant M = \mathrm{const} < +\infty, \tag{11,3,3}$$

2) $$\max_{\Gamma} z_x^2 + z_y^2 \leqslant M_1 = \mathrm{const} < +\infty. \tag{11,3,4}$$

II. Функции A, B, C, D таковы, что

1) При всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$, $|z| \leqslant \overline{M}$ и любых конечных p, q справедливо неравенство

$$A(x, y, z, p, q)\, \xi^2 + 2B(x, y, z, p, q)\, \xi\eta + \\ + C(x, y, z, p, q)\, \eta^2 \geqslant \alpha_0(\overline{M})(\xi^2 + \eta^2),$$

где постоянная $\alpha_0(\overline{M}) > 0$, если $\overline{M} < +\infty$.

2) Частные производные A_x, A_y; B_x, B_y; C_x, C_y; D_x, D_y относительно p, q имеют порядок роста при $p^2+q^2\to+\infty$ соответственно не больше порядков роста функций A; B; C; D.

3) Функции A, B, C, D относительно p и q при $p^2+q^2\to\infty$ ведут себя как степенные функции.

Справедливы следующие теоремы, которые дают априорную оценку $z_x^2+z_y^2$ во всей области $\Omega+\Gamma$ для квазилинейных уравнений с сильными нелинейностями.

Теорема 35 (итоги пункта 2). *Пусть относительно решения задачи Дирихле* (11,3,1—2) *выполнены условия* I (1—2) *и* II (1—3), *сформулированные выше, и пусть, кроме того, переменная z не входит в функции* A, B, C.

Тогда априорная оценка $z_x^2+z_y^2$ в $\Omega+\Gamma$ *может быть получена, если выполнено следующее условие:*

При $(x, y)\in\Omega+\Gamma$; $|z|\leqslant M$ *и* $p^2+q^2\geqslant 1$ *существуют такие конечные постоянные* $R(M)>0$ *и* $T(M)\geqslant 0$, *что*

$$D_l(x, y, z, p, q)\geqslant R(M)(p^2+q^2)^{l/2},\qquad \frac{\partial D_l}{\partial z}\geqslant -T(M)(p^2+q^2)^{l/2} \tag{11,3,5}$$

или

$$D_l(x, y, z, p, q)\leqslant -R(M)(p^2+q^2)^{l/2},\qquad \frac{\partial D_l}{\partial z}\geqslant -T(M)(p^2+q^2)^{l/2}. \tag{11,3,6}$$

Предполагается, что уравнение (11,3,1) не принадлежит классу L (т. е. порядок роста функции $D(x, y, z, p, q)$ относительно p, q больше порядка роста функции $E=Ap^2+2Bpq+Cq^2$ (через D_l обозначена совокупность членов наивысшего порядка l относительно p, q в функции $D(x, y, z, p, q)$).

При этом оценка сверху для $z_x^2+z_y^2$ в $\Omega+\Gamma$ зависит лишь от констант условий I (1—2), II (1—3) и констант $R(M)$ и $T(M)$.

§ 12. Теорема существования, случай уравнения вида $A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$

Случаи, когда это уравнение принадлежит классу L или когда функция $D(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет условию

$$D_z \geqslant \text{const} > 0,$$

уже рассмотрены в § 8. Поэтому нам осталось рассмотреть случай, когда функция $D(x, y, z, p, q)$ имеет порядок роста по p, q выше, чем выражение $E = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$.

Рассмотрим в $\Omega + \Gamma$ задачу Дирихле

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q), \tag{12,1}$$

$$z|_\Gamma = h(s) \in C^{m+2, \lambda}(\Gamma) \qquad (m \geqslant 1). \tag{12,2}$$

Попутно рассмотрим вспомогательную задачу Дирихле с параметром

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = \mu D(x, y, z, p, q) \tag{12,3}$$

$$z|_\Gamma = \mu h(s), \tag{12,4}$$

где $\mu \in [0, 1]$. Решения этой задачи будем обозначать через $z_\mu(x, y)$.

Ниже будем предполагать выполненными условия:

I. Область Ω принадлежит классу L_{m+2} $(m \geqslant 1)$.

II. Функции $A(x, y, p, q)$, $B(x, y, p, q)$, $C(x, y, p, q)$, $D(x, y, z, p, q)$ при всех значениях z, p, q и при всех x, y из замкнутой области $\Omega + \Gamma$ принадлежат $C^{m, \lambda}$.

III. При всех конечных значениях z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega$ выполнены неравенства

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0, \tag{12,5а}$$

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant \alpha_0(\xi^2 + \eta^2), \tag{12,5б}$$

где ξ, η — любые положительные числа, а α_0 — положительная константа, если $|z| < +\infty$.

Согласно теореме 21 (§ 5, п. 2) при $m \geqslant 1$ задача Дирихле (12, 1, 1—2) имеет единственное решение в C^2, которое принадлежит пространству $C^{m+2,\delta}$ $(0<\delta\leqslant\lambda<1)$, если выполнено условие

IV. Для решений $z_\mu(x, y)$ вспомогательной задачи (12, 3—4) имеет место равномерная априорная оценка

$$\|z_\mu\|_{C^1}\leqslant N<+\infty.$$

Итак, мы видим, что для получения теоремы существования интересующей нас задачи Дирихле нужно формулировать условия на коэффициенты уравнения (12,1), которые позволят установить справедливость требования IV. (Прочие условия заключаются в выполнении требований I—III, которые даются непосредственно при постановке задачи Дирихле (12, 1—2). Формулировка этих условий содержится в теоремах 33 и 34.) Для удобства читателя мы приводим их еще раз:

V. *Кривизна границы* Ω *во всех точках не меньше чем* $\varkappa_0$, *где* $\varkappa_0>0$ — *некоторая константа.*

Положим

$$H_1=\min_\Gamma h(s),\qquad H_2=\max_\Gamma h(s).$$

Будем предполагать, что выполнены неравенства

$$\frac{D(x, y, H_1, p, q)}{\sqrt{A(x, y, p, q)\,C(x, y, p, q)-B^2(x, y, p, q)}}\geqslant-\frac{H_-}{f_1(p^2+q^2)},\tag{12,6}$$

$$\frac{D(x, y, H_2, p, q)}{\sqrt{A(x, y, p, q)\,C(x, y, p, q)-B^2(x, y, p, q)}}\leqslant\frac{H_+}{f_2(p^2+q^2)},\tag{12,7}$$

где H_- и H_+ — некоторые неотрицательные постоянные, а $f_1>0$, $f_2>0$ — непрерывные функции переменных p и q на плоскости p, q. Пусть, далее, $M_{\text{в}}(S_\mu)$ и $M_{\text{н}}(S_\mu)$ соответственно верхнее и нижнее извиваиия кривой S_μ, определяемой условием (12,2).

Легко видеть, что величины $M_{\text{в}}(S_\mu)$ и $M_{\text{н}}(S_\mu)$ достигают наибольших значений при $\mu=1$. Кривую S_1 в дальнейшем обозначим через S. По функциям $f_1(p^2+q^2)$ и $f_2(p^2+q^2)$ строим функции $N_{\text{в}}(p^2+q^2;\ S,\ f_1^2)$ и $N_{\text{н}}(p^2+q^2;\ S,\ f_2^2)$ по формулам

$$N_{\text{в}}(p^2+q^2;\ S,\ f_1^2)=\inf f_1^2(\bar p^2+\bar q^2),$$

$$N_{\text{н}}(p^2+q^2;\ S,\ f_2^2)=\inf f_2^2(\bar p^2+\bar q^2),$$

где точная нижняя граница берется соответственно в кругах:

$$(\bar p-p)^2+(\bar q-q)^2\leqslant M_{\text{в}}(S);\quad (\bar p-p)^2+(\bar q-q)^2\leqslant M_{\text{н}}(S).$$

Условие VI формулируется так:

VI. Функции A, B, C, D и $h(s)$ таковы, что для вспомогательных функций $N_в(p^2+q^2;\ S,\ f_1^2)$ и $N_н(p^2+q^2;\ S,\ f_2^2)$, построенных выше, справедливы неравенства

$$\frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_в\, dp\, dq,$$

$$\frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_н\, dp\, dq.$$

Отметим, что из теоремы 33 при выполнении условий I — VI вытекают равномерные оценки:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|_\Gamma \leqslant \max\left\{\sqrt{M_в(S)} + F\left(N_в,\ \frac{\pi H_-^2}{\varkappa_0^2}\right),\right.$$

$$\left.\sqrt{M_н(S)} + F\left(N_н,\ \frac{\pi H_+^2}{\varkappa_0^2}\right)\right\} \equiv \overline{M},$$

$$\max_{\Omega+\Gamma} |z| \leqslant \overline{M} \operatorname{diam} \Omega + \|h(s)\|_C.$$

Отсюда вытекает равномерная оценка

$$\max_\Gamma (z_x^2 + z_y^2) \leqslant \overline{M}_1 < +\infty,$$

где постоянная M_2 зависит лишь от $\overline{M_1}$ и $\|h(s)\|_C$. Поэтому, если рассматривать одновременное выполнение условий I—VI, то можно считать, что постоянные M и M_1, входящие в условие I, соответственно равны

$$M = \overline{M} \operatorname{diam} \Omega + \|h(s)\|_C,$$

$$M_1 = \overline{M}_1.$$

Суммируя сказанное выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 36. *Рассмотрим в области* Ω *задачу Дирихле* (12, 1—2). *Пусть относительно границы области* Ω, *коэффициентов уравнения* (12, 1), *краевого условия* (12, 2) *выполнены условия* I, II, III, V, VI *и условие* IV *с коэффициентами*

$$M = \overline{M}_1 \operatorname{diam} \Omega + \|h(s)\|_C,$$

$$M_1 = M_2.$$

Тогда задача Дирихле (12, 1—2) *имеет в* $C^{m+2,\delta}(\Omega+\Gamma)$ *решение* $z(x, y)$, *где* $\delta \in (0, \lambda]$ — *некоторое число, определяемое константами условий* I—IV. *Как уже отмечалось выше, задача Дирихле* (12, 1—2) *имеет единственное решение в* $C^2(\Omega) \cap C(\Omega+\Gamma)$.

§ 13. Задача Дирихле для квазилинейного уравнения в невыпуклой области

1. Постановка задачи. Пусть область Ω гомеоморфна кругу и принадлежит классу L_m $(m \geqslant 3)$. Обозначим через Γ границу области Ω. Рассмотрим гомеоморфную кругу область G из класса L_m, граница которой γ имеет во всех точках кривизну, не меньшую чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$. Пусть функции

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) \in C^m, \\ v &= g(x, y) \in C^m \end{aligned} \tag{13,1,1}$$

отображают гомеоморфно $\Omega+\Gamma$ на $G+\gamma$, причем якобиан преобразования (13,1,1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < I_1 = \text{const} \leqslant \left| I\left(\frac{u, v}{x, y}\right) \right| \leqslant I_2 = \text{const} < +\infty. \tag{13,1,2}$$

Очевидно, что и обратные функции

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

принадлежат $C^m(G+\gamma)$ и имеют место соотношения

$$0 < \frac{1}{I_2} \leqslant \left| I\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| \leqslant \frac{1}{I_1} < +\infty.$$

Через p, q, r, s, t обозначим первые и вторые производные функции $z(x, y)$ по переменным x, y, а через p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 — аналогичные производные той же функции, но по переменным u, v.

Имеют место формулы

$$p = p_1 f_x + q_1 g_x, \qquad q = p_1 f_y + q_1 g_y, \tag{13,1,3}$$

$$r = r_1 f_x^2 + 2s_1 f_x g_x + t_1 g_x^2 + p_1 f_{xx} + q_1 g_{xx},$$

$$s = r_1 f_x f_y + s_1 (f_x g_y + f_y g_x) + t_1 g_x g_y + p_1 f_{xy} + q_1 g_{xy}, \tag{13,1,4}$$

$$t = r_1 f_y^2 + 2s_1 f_y g_y + t_1 g_y^2 + p_1 f_{yy} + q_1 g_{yy}.$$

Из (13,1,3) имеем, что

$$p^2 + q^2 \leqslant [f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2](p_1^2 + q_1^2).$$

Полагая

$$T(f, g) = \sup_{\Omega + \Gamma} [f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2],$$

приходим к неравенству

$$p^2 + q^2 \leqslant T(f, g)(p_1^2 + q_1^2). \tag{13,1,5а}$$

Аналогично

$$p_1^2 + q_1^2 \leqslant \tau(\varphi, \psi)(p^2 + q^2), \quad \text{где} \quad \tau(\varphi, \psi) = \sup_{G + \gamma} (\varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \psi_u^2 + \psi_v^2). \tag{13,1,5б}$$

Уравнение

$$A(x, y, z, p, q) r + 2B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = D(x, y, z, p, q) \tag{13,1,6}$$

при переходе к переменным u, v преобразуется в уравнение

$$A_1 r_1 + 2B_1 s_1 + C_1 t_1 = D_1, \tag{13,1,7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A f_x^2 + 2B f_x f_y + C f_y^2, \\ B_1 &= A f_x g_x + B(f_x g_y + f_y g_x) + C f_y g_y, \\ C_1 &= A g_x^2 + 2B g_x g_y + C g_y^2, \end{aligned}\right\} \tag{13,1,8}$$

$$D_1 = D + D',$$

$$D' = -[A(p_1 f_{xx} + q_1 g_{xx}) + 2B(p_1 f_{xy} + q_1 g_{xy}) + C(p_1 f_{yy} + q_1 g_{yy})]. \tag{13,1,9}$$

Как было показано в § 8, выражение E инвариантно относительно преобразования координат, т. е.

$$E = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = A_1p_1^2 + 2B_1p_1q_1 + Cq_1^2;$$

что же касается функции D, то при переходе к новым переменным u, v она может существенно измениться за счет появления дополнительного слагаемого — функции D'. Так, например, для уравнений класса L, у которых порядок роста D не больше порядка роста E, вообще говоря, порядок роста D_1 может оказаться больше порядка роста E.

В § 8 был подробно рассмотрен случай, когда порядок роста D_1 остается не больше чем порядок роста выражения E. Для этого достаточно, чтобы род уравнения (13,3,6) был бы не больше чем единица (см. п. 3 § 7). Это будет всегда так, если порядок роста E не меньше порядка роста выражения $(A + C)(p^2 + q^2)$.

Из результатов § 8 вытекает, что уравнения рода, не большего единицы, ведут себя относительно разрешимости задачи Дирихле одинаково независимо от того, будет ли область выпуклой или нет. Поэтому ниже мы рассматриваем уравнения рода, большего чем единица.

Как уже отмечалось в § 8, уравнение минимальных поверхностей

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0$$

имеет род 2. Поэтому при переходе к новым переменным u, v это уравнение переходит, вообще говоря, в уравнение, не принадлежащее классу L. Это показывает, что существуют контуры с невыпуклой проекцией (см. п. 2 § 8), на которые нельзя натянуть минимальную поверхность, задаваемую внутри контура однозначной функцией $z(x, y)$. Еще более сложным оказывается вопрос о построении поверхности с заданной средней кривизной и заданным краем.

Сказанное выше приводит к следующей задаче: установить меру отличия области от выпуклой так, чтобы задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений рода, большего единицы, была бы в ней разрешима. Этим мы и будем заниматься ниже. Отметим, что геометрические задачи, о которых выше шла речь, являются частными случаями сформулированной проблемы.

2. Основные построения. Рассмотрение задачи Дирихле в невыпуклой области вносит в методику исследования, применявшуюся ранее, единственное изменение. Оно касается видоизменения приема оценки нормальной производной решения на границе области. Поэтому естественно сначала преобразовать исходную область Ω в строго выпуклую область G и затем воспользоваться результатами § 10.

Отметим, что при преобразовании области Ω претерпевают изменения как свойства уравнения (13,1,6), так и свойства краевого условия $z|_\Gamma = h(s)$.

Как уже было сказано в п. 1 § 13, границей области G из класса L_m является замкнутая выпуклая кривая γ, кривизна которой во всех точках не меньше чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$. Пусть функции

$$\begin{aligned} u &= f(x, y), \\ v &= g(x, y) \end{aligned}$$

осуществляют по крайней мере трехкратно непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $\chi_{f,g}$ замкнутой области $\Omega + \Gamma$ на $G + \gamma$ и пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения кривой Γ (s – длина переменной дуги на Γ с одним фиксированным концом). Выпуклая кривая γ задается уравнениями

$$\begin{aligned} u(s) &= f(x(s), y(s)), \\ v(s) &= g(x(s), y(s)), \end{aligned}$$

где $s \in [0, s(\Gamma)]$ ($s(\Gamma)$ — длина кривой Γ).

Кривая λ, определяемая в пространстве (u, v, z) уравнениями

$$\begin{aligned} u(s) &= f(x(s), y(s)), \\ v(s) &= g(x(s), y(s)), \\ z(s) &= h(s) \end{aligned} \tag{13,2,1}$$

имеет конечные верхнее и нижнее извивания, зависящие лишь от $\|u(s)\|_{C^{2,\beta}}$, $\|v(s)\|_{C^{2,\beta}}$, $\|h(s)\|_{C^2}$ и чисел m_0 и $\varkappa_0$, где β — любое число из $(0, 1)$, а $m_0 = \inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant s(\Gamma)} \left(u_s'^2 + u_s'^2\right)$.

Уточним теперь характер требований, которые мы будем предъявлять к преобразованиям

$$\chi_{f,g}\colon \quad u = f(x, y), \qquad v = g(x, y) \tag{13,2,2}$$

области $\Omega+\Gamma$ на выпуклую область $G+\gamma$:

1. Функции $f(x, y)$ и $g(x, y) \in C^m$, где $m \geqslant 3$.
2. Отображения $\chi_{f, g}$ являются гомеоморфизмами.
3. Существуют такие положительные конечные постоянные l_1, l_2, M_0^+, M_0^-, T_0, τ_0, $\varkappa_0$, m_0, что все допустимые нами преобразования удовлетворяют соотношениям:

а) $0 < l_1 \leqslant \left| I\left(\frac{u, v}{x, y}\right)\right| \leqslant l_2 < +\infty$,

б) $T(f, g) \leqslant T_0$, $[\tau(\varphi, \psi)]^{-1} \geqslant \tau_0 > 0$,

в) $\left| \dfrac{v''(s)\, u'(s) - u''(s)\, v'(s)}{\left(u_s'^2 + v_s'^2\right)^{3/2}} \right| \geqslant \varkappa_0$,

г) $\inf\limits_{s \in [0,\, s(\Gamma)]} \left(u_s^2 + v_s^2\right) \geqslant m_0$.

д) Верхнее $M_{\text{в}}(\lambda)$ и нижнее $M_{\text{н}}(\lambda)$ извивания кривой λ, определяемой уравнениями (13,2,1), удовлетворяют неравенствам

$$M_{\text{в}}(\lambda) \leqslant M_0^+;$$
$$M_{\text{н}}(\lambda) \leqslant M_0^-.$$

(Может случиться, что $M_{\text{в}}(\lambda) = M_{\text{н}}(\lambda) = 0$. Это будет например, если $h(s) \equiv 0$.)

Множество отображений $\chi_{f, g}$, удовлетворяющее условиям 1, 2, 3, будем обозначать $\mathfrak{A}(l_1, l_2, T_0, \tau_0, \varkappa_0, M_0^+, M_0^-, m_0)$ или кратко $\mathfrak{A}$.

В начале настоящего пункта уже отмечалось, что оценку модуля решения задачи Дирихле можно считать известной. Поэтому будем считать, что в $\Omega+\Gamma$ для решения $z(x, y)$ уравнения (13,1,6) справедлива оценка

$$|z(x, y)| \leqslant Z_0.$$

Кроме того, мы предполагаем, что на Γ выполняется условие

$$z(x, y)\,|_{\Gamma} = h(s).$$

Предположим, что функции A, B, C, D при всех $(x, y) \in \Omega+\Gamma$, $|z| \leqslant Z_0$ и любых p и q удовлетворяют следующим условиям:

I.

$$A^2+2B^2+C^2 \leqslant \mu R(p^2+q^2), \tag{13,2,3}$$

II.

$$AC-B^2 \geqslant \nu Q(p^2+q^2), \tag{13,2,4}$$

III.

$$|D| \leqslant \delta S(p^2+q^2), \tag{13,2,5}$$

где μ, ν, δ — неотрицательные постоянные, а R, S, Q — положительные непрерывные функции на плоскости p, q, причем $S(p^2+q^2)$, $R(p^2+q^2)$ и $Q(p^2+q^2)$ — неубывающие функции величины p^2+q^2. (Отметим, что в зависимости от изменения постоянной Z_0 константы μ, ν и δ могут претерпевать изменения.)

Из формул (13,1,8) простыми вычислениями находим, что

$$A_1C_1-B_1^2=I^2\left(\frac{u,\ v}{x,\ y}\right)(AC-B^2).$$

Далее имеем

$$\frac{|D_1|}{\sqrt{A_1C_1-B_1^2}} \leqslant \frac{|D|+|D'|}{I\sqrt{AC-B^2}} =$$

$$=\frac{|D|+|A(p_1f_{xx}+q_1g_{xx})+2B(p_1f_{xy}+q_1g_{xy})+C(p_1f_{yy}+q_1g_{yy})|}{I\sqrt{AC-B^2}} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{|D|+\sqrt{A^2+2B^2+C^2}\sqrt{(f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2)+(g_{xx}^2+2g_{xy}^2+g_{yy}^2)}\sqrt{p_1^2+q_1^2}}{I\sqrt{AC-B^2}}.$$

Введем обозначение

$$\beta(f)=\sup_{\Omega+\Gamma}(f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2).$$

С помощью соотношений (13,2,3—5) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{|D_1|}{\sqrt{A_1C_1-B_1^2}} \leqslant \frac{\sqrt{\delta^2+\mu(\beta(f)+\beta(g))}}{I\sqrt{\nu}} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{S^2(p^2+q^2)+(p_1^2+q_1^2+\varepsilon)R(p^2+q^2)}{Q(p^2+q^2)}},$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное фиксированное малое число.

Так как функции $S^2(p^2+q^2)+R(p^2+q^2)(p_1^2+q_1^2+\varepsilon)$ и $Q(p^2+q^2)$ — неубывающие функции переменной p^2+q^2, то из неравенств

$$\frac{1}{\tau(\varphi,\ \psi)}(p_1^2+q_1^2)\leqslant p^2+q^2\leqslant T(f,\ g)(p_1^2+q_1^2),$$
$$[\tau(\varphi,\ \psi)]^{-1}\geqslant\tau_0,\quad T(f,\ g)\leqslant T_0,$$

получаем, что

$$\frac{S^2(p^2+q^2)+(p_1^2+q_1^2+\varepsilon)R(p^2+q^2)}{Q(p^2+q^2)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{S^2(T_0(p_1^2+q_1^2))+(p_1^2+q_1^2+\varepsilon)R(T_0(p_1^2+q_1^2))}{Q(\tau_0(p_1^2+q_1^2))}.$$

Введем функцию

$$N(p_1^2+q_1^2)=\frac{Q(\tau_0(p_1^2+q_1^2))}{S^2(T_0(p_1^2+q_1^2))+(p_1^2+q_1^2+\varepsilon)R(T_0(p_1^2+q_1^2))}. \tag{13,2,6}$$

Тогда окончательно имеем

$$\frac{|D_1|}{\sqrt{A_1C_1-B_1^2}}\leqslant\frac{\sqrt{\delta^2+\mu(\beta(f)+\beta(g))}}{l_1\sqrt{\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{N(p_1^2+q_1^2)}}. \tag{13,2,7}$$

Итак, оценка выражения $\dfrac{|D_1|}{\sqrt{A_1C_1-B_1^2}}$ получена.

По функции $N(p_1^2+q_1^2)$ строим функции $N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2)$ и $N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2)$ способом, описанным в п. 2 § 10. Именно

$$\left.\begin{aligned} N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2,\ \lambda,\ N)&=\inf N(\bar p_1^2+\bar q_1^2),\\ N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2,\ \lambda,\ N)&=\inf N(\bar p_1^2+\bar q_1^2),\end{aligned}\right\} \tag{13,2,8}$$

где точная нижняя граница берется соответственно в кругах

$$(\bar p_1-p_1)^2+(\bar q_1-q_1)^2\leqslant M_{\text{в}}(\lambda);\ (\bar p_1-p_1)^2+$$
$$+(\bar q_1-q_1)^2\leqslant M_{\text{н}}(\lambda).$$

Положим

$$W_{f,g}=\frac{\pi}{\varkappa_0^2}\,\frac{\delta^2+\mu(\beta(f)+\beta(g))}{l_1\sqrt{\nu}}.$$

Тогда, согласно результатам § 10 (теорема 33), если

$$W_{f,g} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}(p^2+q^2;\ \lambda;\ N)\,dp\,dq,$$

$$W_{f,g} < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}(p^2+q^2;\ \lambda;\ N)\,dp\,dq,$$

то на контуре γ имеет место оценка

$$-\sqrt{M_{\text{в}}(\lambda)} - F(N_{\text{в}},\ W_{f,g}) \leqslant \left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{\gamma} \leqslant \sqrt{M_{\text{н}}(\lambda)} + F(N_{\text{н}},\ W_{f,g}).$$

Итак, искомые априорные оценки $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{\gamma}$ получены. Отсюда уже следует конечная оценка для $\max\limits_{\gamma}\left(p_1^2+q_1^2\right) \leqslant k$, зависящая от величин $M_{\text{в}}(\lambda)$, $M_{\text{н}}(\lambda)$, $W_{f,g}$, $\left\|\frac{dh}{ds}\right\|_C$, m_0. А тогда

$$\max_{\Gamma}(p^2+q^2) \leqslant T_0 k.$$

3. Формулировка результатов. Итак, пусть в области Ω класса L_m, граница которой Γ гомеоморфна окружности, рассматривается задача Дирихле

$$A(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,r + 2B(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,s + C(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,t = D(x,\ y,\ z,\ p,\ q), \qquad (13,3,1)$$

$$z|_{\Gamma} = h(s). \qquad (13,3,2)$$

Если область Ω не выпукла, то схема исследования задачи Дирихле остается той же, что и в главах I и II, за исключением одного пункта: оценка $\frac{\partial z}{\partial n}$ на Γ проводится иными методами.

Для этого, предполагая уже известной оценку $\max\limits_{\Omega+\Gamma}|z| \leqslant Z_0$ (которую можно, например, получить так же, как в § 6 или в § 9), отображаем $\Omega+\Gamma$ гомеоморфно на всевозможные выпуклые области G с достаточно гладкой границей γ; причем предполагаем, что кривизна кривой γ во всех точках не меньше чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$.

Аналитически класс этих отображений описан в п. 2. на стр. 168—169 и обозначен так: $\mathfrak{A}\left(l_1, l_2, T_0, \tau_0, \varkappa_0, M_0^+, M_0^-, m_0\right)$.

По константам этого класса и функциям S, Q и R, характеризующим рост по p, q при $p^2+q^2 \to \infty$ коэффициентов уравнения (13,3,1), строим функции $N(p_1^2+q_1^2)$, $N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2)$, $N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2)$ по формулам (13,2,6), (13,2,8).

Далее с помощью отображения $\chi_{f,g} \in \mathfrak{A}$ вводим число

$$W_{f,g} = \frac{\pi}{\varkappa_0^2} \frac{\delta_2 + \mu(\beta(f) + \beta(g))}{l_1 \sqrt{\nu}}.$$

Положим

$$W_0(\mathfrak{A}) = \inf_{\chi_{f,g} \in \mathfrak{A}} W_{f,g}.$$

Тогда, если

$$W_0(\mathfrak{A}) < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\, dp\, dq, \quad W_0(\mathfrak{A}) < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}\, dp\, dq,$$

то для $|\operatorname{grad} z|$ на Γ может быть получена конечная оценка, определяемая исходными данными задачи Дирихле и константами класса $\mathfrak{A}(l_1, l_2, T_0, \tau_0, \varkappa_0, M_0^+, M_0^-, m_0)$.

§ 14. Построение минимальной поверхности с невыпуклой проекцией

Как известно, задача о построении минимальной поверхности с заданным краем, имеющей однозначную проекцию на плоскость x, y, эквивалентна задаче Дирихле

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0, \tag{14,1}$$

$$z|_{\text{гр}\,\Omega} = h(s). \tag{14,2}$$

го

Если область Ω имеет границей замкнутую выпуклую кривую Γ с существенно положительной кривизной, то задача Дирихле (14,1—2) всегда имеет единственное решение из класса $C^{m,\delta}$; при этом предполагается, конечно, что $h(s) \in C^{m,\delta+\varepsilon}$, а $\delta+\varepsilon < 1$, $\Omega \in L_m$ $(m \geqslant 3)$. Этот результат есть прямое следствие теоремы 28 (см. § 8).

Если не предполагать строгой выпуклости контура Γ, то минимальной поверхности с заданным краем и однозначной проекцией на некоторую плоскость может не существовать (об этом уже говорилось в § 8). Аналитически это означает, что краевая задача (14,1—2) не имеет решений.

С помощью результатов § 13 можно дать достаточные условия, характеризующие отличие области Ω от строго выпуклой области, при соблюдении которых задача Дирихле (14,1—2) будет иметь решение.

Рассмотрим оценки для функций $AC-B^2$, $A^2+2B^2+C^2$ и D. Имеем

$$A=1+q^2, \quad B=-pq, \quad C=1+p^2, \quad D\equiv 0.$$

Отсюда

$$AC-B^2=1+p^2+q^2; \quad A^2+2B^2+C^2=1+(1+p^2+q^2)^2.$$

Поэтому, если положить

$$\begin{aligned} &R(p^2+q^2)=1+(1+p^2+q^2)^2, \\ &Q(p^2+q^2)=1+p^2+q^2, \\ &S(p^2+q^2)\equiv 0, \end{aligned}$$

то неравенства (13,2,3—5) будут иметь место с постоянными $\mu=1$, $\nu=1$, $\delta=0$.

Отметим, что $R(p^2+q^2)$ и $Q(p^2+q^2)$, очевидно, неубывающие функции величины p^2+q^2.

Пусть функции

$$\begin{aligned} u&=f(x, y), \\ v&=g(x, y) \end{aligned}$$

принадлежат классу $\mathfrak{A}(I_1, I_2, T_0, \tau_0, \varkappa_0, m_0, M_0^+, M_0^-)$ и удовлетворяют условию

$$W_{f,g}\leqslant W_0(\mathfrak{A})+\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — произвольно взятое малое число. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1}{\tau_0}(p_1^2+q_1^2)\leqslant p^2+q^2\leqslant T_0(p_1^2+q_1^2).$$

По формуле (13,2,6) строим функцию

$$N(p_1^2+q_1^2)=\frac{Q\left(\frac{1}{\tau_0}(p_1^2+q_1^2)\right)}{R\left[T_0(p_1^2+q_1^2)\right](p_1^2+q_1^2)}=$$

$$=\frac{\tau_0+(p_1^2+q_1^2)}{\tau_0\left[1+\left(1+T_0(p_1^2+q_1^2)\right)^2\right](p_1^2+q_1^2)}.$$

Обозначим через M^+ и M^- верхнее и нижнее извивания кривой γ, построенной по краевому условию

$$z|_{\text{гр } G} = H(s),$$

и будем считать, что M^+ и M^- строго положительны.

Далее полагаем

$$N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2;\ \gamma;\ N) = \inf N(\bar{p}_1^2+\bar{q}_1^2),$$
$$N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2;\ \gamma;\ N) = \inf N(\bar{p}_1^2+\bar{q}_1^2),$$

где точная нижняя грань берется соответственно в кругах $(\bar{p}_1-p_1)^2+(\bar{q}_1-q_1)^2 \leqslant M^-$, $(\bar{p}_1-p_1)^2+(\bar{q}_1-q_1)^2 \leqslant M^+$.

Очевидно, что функции $N_{\text{н}}$ и $N_{\text{в}}$ в нуле ограничены снизу и допускают оценки

$$N_{\text{н}} \geqslant \frac{\tau_0+(\sqrt{W}-\sqrt{M^-})^2}{\tau_0(1+[1+T_0(\sqrt{W}+\sqrt{M^-})^2]^2)(\sqrt{W}+\sqrt{M^-})^2} \equiv n_{\text{н}}(W),$$

$$N_{\text{в}} \geqslant \frac{\tau_0+(\sqrt{W}-\sqrt{M^+})^2}{\tau_0(1+[1+T_0(\sqrt{W}+\sqrt{M^+})^2]^2)(\sqrt{W}+\sqrt{M^+})^2} \equiv n_{\text{в}}(W),$$

где в обоих соотношениях положено $W = p_1^2+q_1^2$.

В соответствии с обозначениями § 9 имеем

$$A(n_{\text{н}}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} n_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2)\,dp_1\,dq_1 <$$
$$< \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2)\,dp_1\,dq_1 = A(N_{\text{н}}),$$

$$A(n_{\text{в}}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} n_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2)\,dp_1\,dq_1 <$$
$$< \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2)\,dp_1\,dq_1 = A(N_{\text{в}}).$$

Важно отметить, что числа $A(n_{\text{н}})$ и $A(n_{\text{в}})$ находятся явно по свойствам краевого условия, а именно по числам M^-

и M^+. Поэтому в дальнейшем для получения эффективно проверяемых достаточных условий существования минимальной поверхности с данным краем удобно пользоваться величинами $A(n_н)$ и $A(n_в)$.

В соответствии с § 13 для отображения

$$u = f(x, y),\quad v = g(x, y), \tag{14,3}$$

переводящего Ω в строго выпуклую область G, имеем

$$W_{f,g} = \frac{\pi}{\varkappa_0^2}\frac{\delta^2 + \mu(\beta(f) + \beta(g))}{l_1^2\nu} = \frac{\pi(\beta(f) + \beta(g))}{\varkappa_0^2 l_1^2},$$

так как $\delta = 0$, а $\mu = \nu = 1$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — наименьшая из разностей $A(N_н) - A(n_н)$ и $A(N_в) - A(n_в)$. Подберем отображение (14,3) так, чтобы было

$$W_0(\mathfrak{A}) < W_{f,g} + \varepsilon_0.$$

Тогда, если выполнены неравенства

$$W_{f,g} \leqslant A(n_н),\quad W_{f,g} \leqslant A(n_в),$$

или, развернуто,

$$\sup_{\Omega+\Gamma}\{f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2\} \leqslant \frac{l_1^2\varkappa_0^2}{\pi}A(n_н),$$
$$\sup_{\Omega+\Gamma}\{f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2\} \leqslant \frac{l_1^2\varkappa_0^2}{\pi}A(n_в), \tag{14,4}$$

то для $\max_{\Omega+\Gamma}|z(x, y)|$ и $|\operatorname{grad} z|$ на Γ могут быть получены конечные оценки в зависимости лишь от исходных данных задачи Дирихле (14,1 — 2) и констант, определяющих класс отображений $\mathfrak{A}(T_0, \tau_0, \varkappa_0, M^+, M^-, m_0)$. Эти оценки, как нетрудно видеть, будут равномерными в задаче Дирихле с параметром $\xi \in [0, 1]$

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0, \tag{14,5}$$

$$z|_\Gamma = \xi h(s). \tag{14,6}$$

Равномерные априорные оценки $|\operatorname{grad} z|$ во всей области $\Omega+\Gamma$ отсюда уже вытекают, так как при всех $\xi\in[0, 1]$ уравнение (14,5) в задаче Дирихле (14,5—6) принадлежит классу L и, следовательно, по теореме 21 (§ 5 гл. I) исходная задача Дирихле (14,1—2) имеет единственное решение $z\in C^{m+2,\delta}$, если выполняются неравенства (14,4). Тем самым получено достаточное условие для существования минимальной поверхности.

Например, в случае звездной относительно начала координат области удобно применить преобразование

$$\begin{aligned} u &= x\left(1+\frac{a(x^2+y^2)}{\rho^3(0)}\right), \\ v &= y\left(1+\frac{a(x^2+y^2)}{\rho^3(\theta)}\right), \end{aligned} \tag{14,7}$$

где постоянное число a определяется неравенствами (14,4). Здесь $\rho=\rho(\theta)$ — уравнение границы в полярных координатах. Соответствующие результаты помещены в конце книги (см. стр. 335—338).

§ 15. Построение поверхности с данной средней кривизной

1. Предварительные замечания. Аналитически задача о построении поверхности с данным краем и заданной средней кривизной сводится к задаче Дирихле

$$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=H(x, y)(1+p^2+q^2)^{3/2}, \tag{15,1,1}$$

$$z\,|_{\text{гр. }\Omega}=h(s). \tag{15,1,2}$$

При этом так же, как и для минимальных поверхностей (см. § 14), мы ограничиваемся рассмотрением поверхностей с однозначной проекцией на плоскость x, y. Функция $H(x, y)$ является, как уже отмечалось ранее, средней кривизной поверхности $z=z(x, y)$.

В данной задаче средняя кривизна есть наперед заданная функция проекции точки поверхности на плоскости x, y.

Аналогично краевую задачу

$$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=H(x, y, z)(1+p^2+q^2)^{3/2} \tag{15,1,3}$$

$$z\,|_{\text{гр. }\Omega}=h(s) \tag{15,1,4}$$

геометрически можно рассматривать как задачу о построении поверхности с данным краем и средней кривизной, которая является заданной функцией точки поверхности.

Ниже в этом пункте область Ω будем предполагать гомеоморфной кругу и принадлежащей классу L_2.

Рассмотрим вопрос об оценке модуля решений краевых задач (15,1,1—2) и (15,1,3—4). Применим для этого геометрический метод, изложенный в § 9. Остановимся сначала на задаче (15,1,1—2). Положим

$$H_+(x, y) = \begin{cases} H(x, y), & \text{если } H(x, y) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } H(x, y) < 0; \end{cases}$$

$$H_-(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } H(x, y) \geqslant 0, \\ -H(x, y), & \text{если } H(x, y) < 0. \end{cases}$$

Функция

$$\frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{H(x, y)(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}},$$

очевидно, удовлетворяет неравенствам

$$-H_-(x, y)(1 + p^2 + q^2) \leqslant \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} \leqslant$$
$$\leqslant H_+(x, y)(1 + p^2 + q^2).$$

Используя обозначения § 9, вводим величины

$$\omega_+ = \int\limits_{\Omega}\int H_+^2(x, y)\,dx\,dy, \quad \omega_- = \int\limits_{\Omega}\int H_-^2(x, y)\,dx\,dy$$

$$m = \inf_{\Gamma} h(s), \quad M = \sup_{\Gamma} h(s), \quad f(p^2 + q^2) = \frac{1}{1 + p^2 + q^2}.$$

Пусть $\bar{z}(x, y)$ и $\bar{\bar{z}}(x, y)$ — выпуклые функции, натянутые сверху и снизу на функцию $z(x, y)$. Тогда в $\Omega + \Gamma$ имеем

$$\bar{\bar{z}}(x, y) \leqslant z(x, y) \leqslant \bar{z}(x, y)$$

и для поверхностей $\bar{z}$ и $\bar{\bar{z}}$ условные кривизны $\omega(f^2, \bar{z}, G)$ и $\omega(f^2, \bar{\bar{z}}, G)$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega(f^2, \bar{z}, G) \leqslant \omega_-,$$
$$\omega(f^2, \bar{\bar{z}}, G) \leqslant \omega_+.$$

Из теоремы 31 (п. 2 § 9) вытекает, что если

$$\omega_- < \pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^2}, \qquad (15,1,5)$$

$$\omega_+ < \pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^2}, \qquad (15,1,6)$$

то для $z(x, y)$ в замкнутой области $\Omega+\Gamma$ справедливы оценки

$$m - F(f^2, \omega_+)\,d \leqslant \bar{\bar{z}}(x, y) \leqslant z(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{z}(x, y) \leqslant M + F(f^2, \omega_-)\,d,$$

где d — диаметр Ω, а

$$F(f^2, \rho) = \sqrt{\frac{\rho}{\pi-\rho}}.$$

Итак окончательно, если выполнены неравенства (15,1,5—6), то для решения задачи Дирихле справедливы следующие двусторонние оценки:

$$m - \sqrt{\frac{\omega_+}{\pi-\omega_+}}\,d \leqslant z(x, y) \leqslant M + \sqrt{\frac{\omega_-}{\pi-\omega_-}}\,d. \qquad (15,1,7)$$

Перейдем к задаче (15,1,3—4). Будем предполагать, что $H_z(x, y, z) \geqslant 0$. Положим

$$H_+(x, y, M) = \begin{cases} H(x, y, M), & \text{если } H(x, y, M) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } H(x, y, M) < 0; \end{cases}$$

$$H_-(x, y, m) = \begin{cases} 0, & \text{если } H(x, y, m) \geqslant 0; \\ -H(x, y, m), & \text{если } H(x, y, m) < 0; \end{cases}$$

Тогда функция

$$\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}} \equiv \frac{H(x, y, z)(1+p^2+q^2)^{3/2}}{(1+p^2+q^2)^{1/2}}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}} \geqslant -H_-(x, y, m)(1+p^2+q^2)$$

для $z \geqslant m$, $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых p, q,

$$\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}} \leqslant H_+(x, y)(1+p^2+q^2)$$

для $z \leqslant M$, $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых p, q.

Положим

$$\omega_{+, M} = \iint_{\Omega} H_+^2(x, y, M)\, dx\, dy,$$

$$\omega_{-, m} = \iint_{\Omega} H_-^2(x, y, m)\, dx\, dy.$$

Тогда, если

$$\omega_{+, M} < \pi, \quad \omega_{-, m} < \pi,$$

то из теоремы 31 (см. п. 2 § 9) следует, что

$$m - \sqrt{\frac{\omega_{+, M}}{\pi - \omega_{+, M}}}\, d \leqslant z(x, y) \leqslant M + \sqrt{\frac{\omega_{-, m}}{\pi - \omega_{-, m}}}\, d. \tag{15,1,8}$$

Итак, априорные оценки решения $z(x, y)$ для обоих краевых задач получены.

2. Априорные оценки первых производных (случай строго выпуклой области). В этом пункте будет предполагаться, что область $\Omega \in L_m$ $(m \geqslant 3)$ и ее граница Γ представляет собой замкнутую выпуклую кривую, кривизна которой во всех точках не меньше чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$. Пусть, далее, $M^+ \geqslant 0$ и $M^- \geqslant 0$ — соответственно верхнее и нижнее извивания кривой l, построенной по краевому условию (15,1,2). По функции $f(p^2+q^2) = \frac{1}{1+p^2+q^2}$ и числам M^+ и M^- строим функции $f_{\text{в}}(p^2+q^2)$ и $f_{\text{н}}(p^2+q^2)$, с помощью которых проводились оценки нормальной производной решения $z(x, y)$ на кривой Γ. В соответствии с § 10 имеем

$$f_{\text{в}}(p^2+q^2) = \inf\,[1+\bar{p}^2+\bar{q}^2]^{-1},$$
$$f_{\text{н}}(p^2+q^2) = \inf\,[1+\bar{p}^2+\bar{q}^2]^{-1},$$

где точная нижняя грань берется соответственно в кругах:

$$(\bar{p}-p)^2+(\bar{q}-q)^2 \leqslant M^+, \quad (\bar{p}-p)^2+(\bar{q}-q)^2 \leqslant M^-.$$

Если на плоскости p, q ввести полярные координаты w, τ, то

$$f_в(p^2+q^2)=f_в(w^2)\geqslant\left[1+(w+\sqrt{M^+})^2\right]^{-1},$$
$$f_н(p^2+q^2)=f_н(w^2)\geqslant\left[1+(w+\sqrt{M^-})^2\right]^{-1}.$$

В обозначениях § 10 имеем

$$A(f_в^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_в^2(p^2+q^2)\,dp\,dq>$$
$$>2\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{w\,dw}{[1+(w+\sqrt{M^+})^2]^2}=$$
$$=\pi\left[1+\sqrt{M^+}\operatorname{arctg}\sqrt{M^+}-\frac{\pi\sqrt{M^+}}{2}\right],$$

$$A(f_в^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_н^2(p^2+q^2)\,dp\,dq>$$
$$>2\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{w\,dw}{[1+(w+\sqrt{M^-})^2]^2}=$$
$$=\pi\left[1+\sqrt{M^-}\operatorname{arctg}\sqrt{M^-}-\frac{\pi\sqrt{M^-}}{2}\right].$$

Легко видеть, что числа $A(f_в^2)$ и $A(f_н^2)$ не превосходят

$$\pi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Вместо величин $A(f_н^2)$ и $A(f_в^2)$ введем несколько меньшие величины

$$\Phi(M^+)=\left(1+\sqrt{M^+}\operatorname{arctg}\sqrt{M^+}-\frac{\pi}{2}\sqrt{M^+}\right)^{1/2},$$
$$\Phi(M^-)=\left(1+\sqrt{M^-}\operatorname{arctg}\sqrt{M^-}-\frac{\pi}{2}\sqrt{M^-}\right)^{1/2}.$$

Далее будем предполагать, что функция $H(x, y)$ в задаче (15,1,1—2) и функция $H(x, y, z)$ в задаче (15,1,3—4) соответственно удовлетворяют неравенствам

$$-H_0^-\leqslant H(x, y)\leqslant H_0^+,$$
$$H(x, y, M)\leqslant H_M^+,\qquad H(x, y, m)\geqslant -H_m^-,$$

где H_0^+, H_0^-; H_M^+, H_m^- — неотрицательные постоянные.

Из теорем 33 и 34 вытекает, что при выполнении неравенств

$$H_0^- \leqslant \varkappa_0 \Phi(M^+), \quad H_0^+ \leqslant \varkappa_0 \Phi(M^-), \tag{15,2,1}$$

$$H_m^- \leqslant \varkappa_0 \Phi(M^+), \quad H_M^+ \leqslant \varkappa_0 \Phi(M^-) \tag{15,2,2}$$

конечные априорные оценки модуля решения во всей области и модуля его градиента на границе области можно считать известными.

Перейдем теперь к получению априорных оценок $|\operatorname{grad} z|$ во всей области $\Omega + \Gamma$. Сразу будем рассматривать задачу (15,1,3—4), при этом будем считать, что

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z} \geqslant 0$$

при всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых конечных z. Задача (15,1,1—2) есть, очевидно, частный случай этой задачи.

Из результатов пп. 2 и 3 § 11 вытекает, что для получения таких оценок либо функция $H(x, y, z)$, либо функция $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z}$ должны быть знакопостоянными и модуль такой знакопостоянной функции должен быть ограничен снизу положительной константой. Однако, используя специфику коэффициентов конкретного квазилинейного уравнения (15,1,3), можно снять условие необращения в нуль функции H или $\frac{\partial H}{\partial z}$.

Пусть $u(x, y)$ — вспомогательная функция, введенная в п. 2 § 11. Тогда

$$z \equiv \varphi(u) = -K - h + \gamma \ln(e^u + 1), \tag{15,2,3}$$

где h и γ — некоторые положительные константы, а

$$K = \max_{\Omega+\Gamma} |z|.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(u) &= \frac{\gamma e^u}{e^u + 1}, \quad \varphi''(u) = \frac{\gamma e^u}{(e^u + 1)^2}, \\ \varphi'''(u) &= -\varphi''(u) + \frac{2\gamma e^u}{(e^u + 1)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{15,2,4}$$

Уравнение (15,1,3) переходит относительно функции $u(x, y)$ в следующее уравнение:

$$(1+q^2)u_{xx}-2pqu_{xy}+(1+p^2)u_{yy}=$$
$$=-\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}\left(u_x^2+u_y^2\right)+\frac{1}{\varphi'(u)}H(x, y, \varphi(u))\times$$
$$\times\left(1+\varphi'^2(u)\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{3/2}\equiv Q(x, y, \varphi(u), u_x, u_y).$$

Как следует из результатов §§ 7 и 11, для получения априорной оценки $\sup|\operatorname{grad} z|$ в $\Omega+\Gamma$ достаточно установить, что при всех достаточно больших значениях выражения $u_x^2+u_y^2$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\geqslant R_0=\text{const}>0. \qquad (15,2,5)$$

Имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{-\varphi'''\varphi'+(\varphi'')^2}{\varphi'^2}\left(u_x^2+u_y^2\right)+$$
$$+H(x, y, \varphi(u))\left[-\frac{\varphi''(u)}{[\varphi'(u)]^2}\left(1+(\varphi'(u))^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{3/2}+\right.$$
$$\left.+3\varphi''\left(1+\varphi'^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{1/2}\left(u_x^2+u_y^2\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial z}\left(1+\varphi'^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{3/2}.$$

Так как $\frac{\partial H}{\partial z}\geqslant 0$, то имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\geqslant\frac{-\varphi'''\varphi'+(\varphi'')^2}{\varphi'^2}\left(u_x^2+u_y^2\right)+$$
$$+H(x, y, \varphi(u))\left(1+\varphi'^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{1/2}\left[-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}+2\varphi''\left(u_x^2+u_y^2\right)\right].$$
$$(15,2,6)$$

Используем теперь конкретный выбор функции $\varphi(u)$. Тогда соотношение (15,2,6) переходит в следующее:

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\geqslant\frac{e^u}{(e^u+1)^2}\left(u_x^2+u_y^2\right)+$$
$$+H\left(1+\varphi'^2(u)\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)^{1/2}\frac{\gamma e^u}{e^u+1}\left[-\frac{(e^u+1)^4}{\gamma^2 e^{2u}}+2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right].$$

Так как

$$e^{\frac{K+z+h}{\gamma}}=e^u+1$$

и

$$|z|\leqslant K,$$

то

$$\frac{e^u}{(e^u+1)^2}\geqslant\left(e^{\frac{h}{\gamma}}-1\right)e^{-\frac{4K+2h}{\gamma}}=a_0=\text{const}>0$$

и

$$-\frac{(e^u+1)^4}{\gamma^2e^{2u}}+2\left(u_x^2+u_y^2\right)\geqslant-\frac{e^{\frac{8K+4h}{\gamma}}}{\gamma^2\left(e^{\frac{2h}{\gamma}}-1\right)}+2\left(u_x^2+u_y^2\right).$$

Отсюда следует, что если

$$u_x^2+u_y^2\geqslant\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{8K+h}{\gamma}}}{\gamma^2\left(e^{\frac{2h}{\gamma}}-1\right)}=a_1=\text{const}>0,$$

то справедливо неравенство

$$-\frac{(e^u+1)^4}{\gamma^2e^{2u}}+2\left(u_x^2+u_y^2\right)\geqslant 0.$$

Пусть

$$T=\max\{1,\ a_1\}.$$

Тогда, если $H(x,\ y,\ z)\geqslant 0$, то при $u_x^2+u_y^2\geqslant T$ имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\geqslant a_0=\text{const}>0. \qquad (15,2,7)$$

Если же $H(x,\ y,\ z)\leqslant 0$ и по-прежнему $\frac{\partial H}{\partial z}\geqslant 0$, то из неравенства (15,2,17) с помощью вспомогательной функции

$$z\equiv\varphi(u)=-K-h+\gamma\ln\left(e^u-1\right)$$

придем к неравенству

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\geqslant\bar{a}_0=\text{const}>0.$$

Итак, априорные оценки первых производных в $\Omega+\Gamma$ для задач (15,1,1—2) и (15,1,3—4) получены.

Если рассмотреть случай знакопеременной функции $H(x, y, z)$ и потребовать выполнения строгого неравенства $\frac{\partial H}{\partial z} \geqslant \mathrm{const} > 0$ (при этом задача (15,1,1—2) уже выпадает из нашего рассмотрения), то путем соответствующего подбора параметров h и γ можно добиться выполнения неравенства (15,2,7).

Из наших рассмотрений вытекает теорема.

Теорема 37. *Краевая задача* (15,1,1—2) (*она же задача о построении поверхности по данной средней кривизне и заданному краю*) *имеет единственное решение в пространстве* C^2, *которое принадлежит пространству* $C^{m+2,\delta}$, *если выполнено одно из двух условий*:

1. $H_0^+ \geqslant H(x, y) \geqslant 0$ и

$$H_0^+ \leqslant \varkappa_0 \sqrt{1 + \sqrt{M^-} \operatorname{arctg} \sqrt{M^-} - \frac{\pi\sqrt{M^-}}{2}}$$

или

1′. $-H_0^- \leqslant H(x, y) \leqslant 0$ и

$$H_0^- \leqslant \varkappa_0 \sqrt{1 + \sqrt{M^+} \operatorname{arctg} \sqrt{M^+} - \frac{\pi\sqrt{M^+}}{2}}.$$

Дословно так же исследуется вопрос для задачи

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = H(x, y, z)\,(1 + p^2 + q^2)^{3/2}, \tag{15,1,3}$$

$$z|_\Gamma = h(s). \tag{15,1,4}$$

Здесь справедлива следующая теорема.

Теорема 38. *Краевая задача* (15,1,3—4) *имеет единственное решение в пространстве* C^2. *Это решение принадлежит пространству* $C^{m+2,\delta}$, *если выполнено одно из двух условий*:

1. $H(x, y, z) \geqslant 0$, $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z} \geqslant 0$ и

$$H_M^+ \leqslant \varkappa_0 \sqrt{1 + \sqrt{M^-} \operatorname{arctg} \sqrt{M^-} - \frac{\pi}{2}\sqrt{M^-}}$$

или

$$1'.\ H(x,\ y,\ z) \leqslant 0;\quad \frac{\partial H(x,\ y,\ z)}{\partial z} \geqslant 0 \text{ и}$$

$$H_m^- \leqslant \varkappa_0 \sqrt{1 + \sqrt{M^+} \operatorname{arctg} \sqrt{M^+} - \frac{\pi}{2}\sqrt{M^+}},$$

где величины H_M^+, H_m^- *были определены в п.* 2 § 15, стр. 181.

В заключение отметим, что если в задаче

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = H(x,\ y,\ z)\,(1 + p^2 + q^2)^{3/2},$$

$$z\,|_\Gamma = h(s) \tag{15,1,3—4}$$

считать функцию $H(x,\ y,\ z)$ знакопеременной, а функцию $\frac{\partial H}{\partial z}$ подчинить условию

$$\frac{\partial H}{\partial z} \geqslant \text{const} > 0,$$

то теорема 38 останется справедливой, если выполняются неравенства (15,2,2).

Доказательство этого утверждения несколько отличается от доказательства теоремы 38. Сначала с помощью метода Ньютона устанавливаем так же, как и в п. 6 § 1, что при достаточно малых μ задача

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = \mu H(x,\ y,\ z)\,(1 + p^2 + q^2)^{3/2},$$

$$z\,|_\Gamma = \mu h(s)$$

имеет решение в классе $C^{m+2,\,\delta}(\Omega + \Gamma)$.

Пусть μ_0 — одно из таких чисел. Тогда на промежутке $[\mu_0,\ 1]$ задача (15,1,3—4) допускает равномерную априорную оценку в метрике пространства C^1. Отсюда уже легко вытекает, что задача (15,1,3—4) при всех $\mu \in [0,\ 1]$ разрешима.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ МОНЖА — АМПЕРА (ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ)

§ 16. Основные понятия и факты теории выпуклых поверхностей

1. Выпуклые функции и выпуклые поверхности. В этом параграфе в обзорном порядке излагаются необходимые для дальнейшего понятия и факты из теории выпуклых поверхностей. Более подробное освещение затронутых здесь вопросов читатель может найти в монографиях [1а, б], [14в] и журнальных статьях [1д] [3а, б].

Фиксируем на плоскости x, y некоторую ограниченную открытую выпуклую область Ω. Через Γ обозначим границу Ω. Непрерывную в Ω функцию $z(x, y)$ называют выпуклой и и притом обращенной выпуклостью вниз, если для любого $\lambda \in [0, 1]$ и любых точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \Omega$ справедливо неравенство

$$z(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \quad \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leqslant \\ \leqslant \lambda z(x_1, y_1) + (1-\lambda) z(x_2, y_2). \quad (16,1,1)$$

Функцию z, для которой при тех же условиях неравенство (16,1,1) заменено противоположным, также называют выпуклой и говорят, что она обращена выпуклостью вверх.

Совокупность выпуклых функций, заданных в Ω и обращенных выпуклостью вниз (вверх) будем обозначать $W^+(\Omega)\,(W^-(\Omega))$. Ниже мы будем рассматривать лишь функции из класса $W^+(\Omega)$, так как для функций из класса $W^-(\Omega)$ все рассмотрения совершенно аналогичны.

График функции $z \in W^+(\Omega)$ будем называть выпуклой поверхностью и обозначать Φ_z. Поверхность Φ_z, очевидно, обращена выпуклостью вниз.

2. Опорные плоскости. Классификация точек выпуклой поверхности. Плоскость P называется опорной к некоторому множеству Q, лежащему в пространстве x, y, z, если P и Q имеют общие точки и все множество Q лежит по одну сторону от P. Пусть $z \in W^+(\Omega)$ и Φ_z — выпуклая поверхность, соответствующая функции $z(x, y)$. Тогда в каждой точке Φ_z существует по крайней мере одна опорная плоскость к Φ_z, причем Φ_z лежит над любой своей опорной плоскостью. Если $z(x, y) \in C^1$, то опорная плоскость в любой точке Φ_z совпадает с касательной плоскостью. В случае общей выпуклой поверхности Φ_z или, что то же, произвольной функции $z(x, y) \in W^+(\Omega)$ в некоторых точках Φ_z касательной плоскости может не быть, но опорная плоскость в этих точках всегда существует. Отсюда ясно, что опорная плоскость есть обобщение понятия касательной плоскости на общие выпуклые поверхности. Отметим, что у поверхности Φ_z может быть не более одной опорной плоскости с одной и той же нормалью.

Точки выпуклой поверхности Φ_z могут быть только одного из трех типов: гладкие, ребристые и конические.

Точка $X \in \Phi_z$ называется гладкой, если в ней есть только одна опорная плоскость. В гладкой точке существует касательная плоскость, которая совпадает с опорной. Точка $X \in \Phi_z$ называется ребристой, если в ней существует семейство опорных плоскостей с общей прямой. Единичные нормали к плоскостям этого семейства, отложенные из точки X, заполняют плоский выпуклый круговой сектор. Наконец, точка X называется конической, если совокупность концов единичных нормалей к опорным плоскостям в этой точке, отложенных из X, образует на единичной сфере с центром в X двумерное множество. Это множество всегда является сферически выпуклой замкнутой областью.

Отметим, что мера проекции множества конических и ребристых точек поверхности Φ_z на плоскость x, y равна нулю. В гладких точках выпуклая функция $z(x, y)$ имеет первый дифференциал. Площадь области $G \subset \Phi_z$ определяется по известной формуле

$$\sigma(G) = \int\limits_{G'}\int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy,$$

где $G' \subset \Omega$ — проекция G на плоскость x, y.

В силу известной теоремы Г. Буземана и В. Феллера всякая выпуклая функция $z(x, y) \in W^{\pm}(\Omega)$ почти везде имеет второй дифференциал.

3. Сходимость выпуклых функций и их первых производных. Под сходимостью выпуклых функций $z_n(x, y)$, определенных в открытой выпуклой области Ω или в ее открытой подобласти Ω', к выпуклой функции $z(x, y)$ мы будем понимать обычную точечную сходимость.

Если в области $\Omega' \subseteq \Omega$ выпуклые функции $z_n(x, y)$ сходятся к выпуклой функции $z(x, y)$, то относительно сходимости опорных плоскостей поверхностей Φ_{z_n} над областью Ω' справедливо следующее утверждение: если точки $X_n \in \Phi_{z_n}$ сходятся к точке $X \in \Phi_z$, то предел любой сходящейся последовательности опорных плоскостей Φ_{z_n} в точках X_n есть опорная плоскость к Φ_z в точке X.

Поскольку почти все точки на любой выпуклой поверхности гладкие, то отсюда следует, что почти везде в Ω' $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ сходятся соответственно к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. Нормальное изображение выпуклой поверхности. Условная кривизна. Пусть $z(x, y) \in W^{+}(\Omega)$. Фиксируем точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ и пусть

$$Z - z(x_0, y_0) = p_0(X - x_0) + q_0(Y - y_0)$$

— уравнение некоторой опорной плоскости к поверхности Φ_z в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$. Тогда этой опорной плоскости на плоскости переменных p, q соответствует точка с декартовыми координатами (p_0, q_0). Рассмотрим всевозможные опорные плоскости, которые можно провести к поверхности Φ_z в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$. На плоскости (p, q) этим опорным плоскостям соответствует некоторое множество, которое мы обозначим $\nu_z[(x_0, y_0)]$ и будем называть нормальным изображением точки (x_0, y_0) относительно поверхности Φ_z или, что то же, функции $z(x, y)$. Тем самым определяется некоторое, вообще говоря, многозначное отображение области Ω на плоскость p, q, которое мы называем нормальным изображением и которое будет обозначаться ν_z. Нормальное изображение всегда связано с некоторой фиксированной функцией $z \in W^{+}(\Omega)$. Образ гладкой точки при нормальном изображении есть точка, образ ребристой точки — прямолинейный отрезок и, наконец, образ конической точки — замкнутая выпуклая область.

Нормальное изображение $\nu_z(M)$ любого множества $M \subset \Omega$ определяется как сумма нормальных изображений отдельных его точек.

Как уже отмечалось, нормальное изображение, вообще говоря, не является однозначным отображением. Однако нарушение однозначности этого отображения может происходить лишь на множестве меры нуль. Это вытекает из того, что множество конических и ребристых точек поверхности имеет нулевую меру, а нарушение однозначности происходит только в этих точках.

Пусть $f(p, q) > 0$ — локально суммируемая функция на плоскости p, q. Строим функцию множества

$$\omega(f, z, M) = \iint_{\nu_z(M)} f(p, q)\, dp\, dq,$$

где M — борелевское множество области Ω. Функцию множеств $\omega(f, z, M)$ в дальнейшем будем называть условной кривизной поверхности Φ_z или функции $z(x, y)$, порожденной функцией $f(p, q)$. Имеют место следующие теоремы, доказательство которых мы опускаем (см. эти доказательства в [36]).

Теорема 39. *Для любой функции $z(x, y) \in W^{\pm}(\Omega)$ и любой локально суммируемой положительной функции $f(p, q)$ условная кривизна $\omega(f, z, M)$ есть вполне аддитивная неотрицательная функция борелевских множеств области Ω; при этом мы допускаем, что $\omega(f, z, M)$ может принимать и бесконечные значения.*

Теорема 40. *Если функции $z_n(x, y) \in W^{\pm}(\Omega)$ сходятся к функции $z(x, y) \in W^{\pm}(\Omega)$, то их условные кривизны $\omega(f, z_n, M)$ как функции множества слабо сходятся внутри Ω к $\omega(f, z, M)$.*

(Под слабой сходимостью функций множеств $\mu_n(M)$ внутри области Ω к функции $\mu(M)$ понимается следующее: предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega} g(x, y)\, \mu_n(dM) = \iint_{\Omega} g(x, y)\, \mu(dM)$$

имеет место для любой непрерывной функции $g(x, y)$, отличной от нуля лишь на некотором множестве G, содержащемся в Ω вместе со своим замыканием $\overline{G}$.)

Теорема 41. *Пусть функции* $z_1(x, y)$, $z_2(x, y) \in W^+(\Omega)$ *и на границе* Ω *выполнено неравенство* $z_1 \geqslant z_2$. *Пусть, далее,* $f(p, q)$ — *любая локально суммируемая положительная функция на плоскости* p, q. *Тогда, если для всякого борелевского множества* $M \subseteq \Omega$ *имеем*

$$\omega(f, z_1, M) \leqslant \omega(f, z_2, M),$$

то всюду в Ω

$$z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если для всех $M \subseteq \Omega$ справедливо равенство

$$\omega(f, z_1, M) = \omega(f, z_2, M),$$

и на границе Ω функции z_1 и z_2 совпадают, то

$$z_1(x, y) = z_2(x, y).$$

Теоремы 39—41 справедливы также для выпуклых функций из класса $W^-(\Omega)$.

Выше условная кривизна была построена с помощью функции $f(p, q)$. Можно построить и более общее понятие условной кривизны выпуклой поверхности, связанное с функцией $\varphi(x, y, z, p, q)$. Это делается следующим образом: рассмотрим отображение, обратное к нормальному. Такое отображение, вообще говоря, неоднозначно. Неоднозначность отображения имеет место в тех точках (p, q), которым соответствуют так называемые особые опорные плоскости, имеющие с поверхностью более одной общей точки. Известно, что мера нормального изображения таких плоскостей равна нулю. Поэтому отображение, обратное к нормальному, так же, как и само нормальное изображение, почти везде однозначно. Таким образом, на множестве $\nu_z(\Omega)$ почти везде определены функции

$$x(p, q), \quad y(p, q), \quad z(p, q) \equiv z(x(p, q), \quad y(p, q)).$$

Пусть теперь $\varphi(x, y, z, p, q)$ — неотрицательная функция, определенная для всех $(x, y) \in \Omega$ и любых конечных значениях z, p, q. Тогда на $\nu_z(\Omega)$ определена функция

$$\overline{\varphi}_z(p, q) \equiv \varphi(x(p, q), \quad y(p, q), \quad z(p, q), p, q).$$

Условной кривизной множества $M \subseteq \Omega$ назовем число

$$\omega(\varphi, z, M) = \int\limits_{\nu_z(M)}\int \overline{\varphi}_z(p, q)\, dp\, dq.$$

А. Д. Александров [1д] установил, что, если функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x, y, z, p, q)$ определена для всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega$; кроме того, $\varphi \geqslant 0$ и для нее можно также допускать бесконечные значения;

2) для всякой замкнутой ограниченной области R изменения переменных x, y, z, p, q существует суммируемая функция $f_0(p, q)$ такая, что для всех (x, y, z, p, q)

$$\varphi(x, y, z, p, q) \leqslant f_0(p, q);$$

3) существует такое z_0 и такая функция $f_1(p, q) \geqslant 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(p, q)\, dp\, dq > 0$$

(не исключая, что этот интеграл может быть равным $+\infty$) и при всех $(x, y) \in \Omega$ и $z \leqslant z_0$

$$\varphi(x, y, z, p, q) \geqslant f_1(p, q);$$

4) при почти всех (p, q) функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ непрерывна по x, y, z,

то $\omega(\varphi, z, M)$ есть вполне аддитивная функция борелевских множеств, $M \leqslant \Omega$ и при условии, что $z_n \in W^+(\Omega)$ сходятся к $z \in W^+(\Omega)$, $\omega(\varphi, z_n, M)$ слабо сходятся внутри Ω к $\omega(\varphi, z, M)$.

Для всех построений в дальнейшем достаточно использовать условные кривизны, порожденные функцией $f(p, q)$. Поэтому мы ниже, как правило, ими и будем пользоваться.

§ 17. Свойства выпуклых поверхностей, связанные с условной кривизной

1. Теоремы компактности. Пусть $z \in W^{+}(\Omega)$, тогда для всякой локально суммируемой положительной функции $f(p, q)$ справедливо неравенство

$$\omega(f, z, \Omega) = \iint\limits_{\nu_z(\Omega)} f(p, q)\,dp\,dq \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p, q)\,dp\,dq.$$

Положим

$$A(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p, q)\,dp\,dq.$$

Величина $A(f)$ может быть как конечной положительной величиной, так и $+\infty$. Имеет место следующая

Теорема 42. *Выпуклые функции* $z(x, y) \in W^{+}(\Omega)$ *внутри области ограничены в совокупности, если*

1) *ограничены их значения на границе,*

2) *для всех* $z(x, y)$ *выполнено неравенство*

$$\omega(f, z, \Omega) \leqslant \omega_0 = \text{const} < A(f). \tag{17,1,1}$$

Доказательство. Пусть граничные значения у всех рассматриваемых функций $z(x, y) \in W^{+}$ ограничены сверху числом M, а снизу числом m, тогда для всех этих функций в Ω справедливо неравенство

$$z(x, y) \leqslant M.$$

Далее достаточно рассмотреть лишь те поверхности Φ_z, от которых плоскость $z = m$ отсекает шапочку *) $\overline{\Phi}_z$, лежащую под этой плоскостью. Достаточно доказать, что эти шапки ограничены в совокупности.

Обозначим через $\overline{\Omega}$ проекцию шапочки $\overline{\Phi}_z$. Очевидно, что условная кривизна $\overline{\Phi}_z$ равна $\omega(f, z, \overline{\Omega})$ и, следовательно, не превосходит $\omega(f, z, \Omega)$. Так как край поверхностей $\overline{\Phi}_z$

*) Шапочкой называется выпуклая поверхность с плоским краем, которая однозначно проектируется на плоскость края.

фиксирован, то по мере неограниченного роста высоты поверхности Φ_z, а вместе с нею и высоты шапочки $\overline{\Phi}_z$, нормальный образ шапочки увеличивается, распространяясь в пределе на всю плоскость p, q. Поэтому величина $\omega(f, z, \overline{\Omega})$ может быть сделана для шапочек $\overline{\Phi}_z$ с достаточно большой высотой, сколь угодно близкой к $A(f)$. Следовательно, для таких шапочек будет выполняться неравенство

$$\omega(f, z, \overline{\Omega}) > \omega_0,$$

но тогда и подавно для соответствующих функций $z \in W^+(\Omega)$

$$\omega(f, z, \Omega) > \omega_0.$$

А это противоречит неравенству (17,1,1). Теорема доказана.

Из теоремы 42 в силу известного принципа компактности В. Бляшке [1а, б] для выпуклых тел вытекает следующая важная теорема.

Теорема 43. *Множество выпуклых функций, удовлетворяющих условиям теоремы* 42, *компактно относительно точечной сходимости в* Ω.

Перейдем теперь к получению явной оценки возможной высоты поверхностей Φ_z, удовлетворяющих условию (17,1,1).

Прежде всего рассмотрим оценку для высоты шапочки $\overline{\Phi}_z$, которую отсекает от Φ_z плоскость $z = m$. Обозначим через T_ρ круг радиуса ρ в плоскости p, q с центром в точке (0, 0) и введем функцию

$$g(\rho) = \int\limits_{T_\rho}\int f(p, q)\, dp\, dq.$$

Возьмем на шапочке $\overline{\Phi}_z$ точку X, наиболее удаленную от плоскости $z = m$. Проектируя из этой точки край шапочки, получим выпуклый конус K. Нормальное изображение конуса K, очевидно, содержится в нормальном изображении поверхности Φ_z.

Пусть $\overline{\Omega}$ — область, вырезанная на плоскости $z = m$ шапочкой $\overline{\Phi}_z$. Ее диаметр, очевидно, не больше диаметра области Ω, который будем далее обозначать через d. Поэтому область $\overline{\Omega}$ заведомо содержится в круге Ω_0 радиуса d, описанного на плоскости $z=m$ вокруг точки X_1 — проекции точки X. Проектируя круг Ω_0 из точки X, получим прямой круговой конус K_0. Нормальное изображение K_0 содержится в нормальном изображении конуса K и представляет собой на плоскости p, q круг $T_{\frac{\bar{h}}{d}}$ радиуса $\bar{h}/d$ с центром в точке (0, 0). Через $\bar{h}$ обозначена высота шапочки $\bar{\Phi}_z$. Используя введенную выше функцию $g(\rho)$, получим

$$g\left(\frac{\bar{h}}{d}\right) \leqslant \int\limits_{\nu_z(\Omega)}\int f(p, q)\,dp\,dq.$$

Рассмотрим свойства функции $g(\rho)$. Так как $f(p, q) > 0$, то $g(\rho)$ — строго возрастающая функция. Область ее значений есть промежуток $[0, A(f))$, на котором определена обратная функция $F(f, \omega)$. Так как

$$g\left(\frac{\bar{h}}{d}\right) \leqslant \omega(f, z, \Omega) \leqslant \omega_0 < A(f),$$

то

$$\bar{h} \leqslant F(f, \omega_0)\,d.$$

Если обозначить через h высоту поверхности Φ_z, а через h_1 расстояние точек края от плоскости $z=m$, то для высоты любой поверхности Φ_z, удовлетворяющей условиям теоремы 42, будем иметь оценку

$$h \leqslant F(f, \omega_0)\,d + h_1. \qquad (17,1,2)$$

Из проведенных только что рассмотрений вытекает следующая теорема, которой мы уже пользовались в главе III для получения оценок модулей решений квазилинейных уравнений.

Теорема 44. *Пусть $W(\omega_0)$ — совокупность выпуклых функций, заданных в Ω и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) *на границе области Ω выполнены неравенства*

$$m \leqslant z(x, y) \leqslant M,$$

б) $\omega(f, z, \Omega) \leqslant \omega_0 < A(f)$,

тогда в Ω для выпуклых функций $z(x, y) \in W(\omega_0)$, *обращенных выпуклостью вниз, справедливы оценки*

$$-F(f, \omega_0)\,d + m \leqslant z(x, y) \leqslant M, \qquad (17,1,3)$$

а для $z(x, y) \in W(\omega_0)$ *и обращенных выпуклостью вверх оценки*

$$m \leqslant z(x, y) \leqslant M + F(f, \omega_0)\,d, \qquad (17,1,4)$$

где d *— диаметр области* Ω (рис. 5).

А. Д. Александровым в работе [1д] аналогичные оценки построены для условных кривизн, порожденных более общими функциями $\varphi(x, y, z, p, q)$.

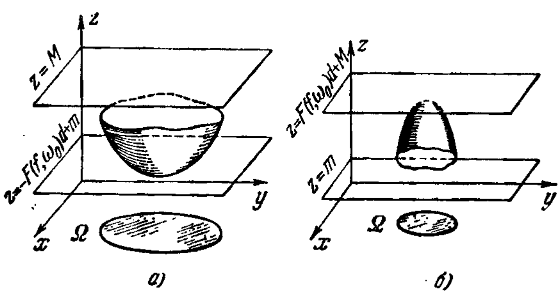

Рис. 5.

2. Край выпуклой поверхности. До сих пор мы рассматривали выпуклые функции и порожденные ими выпуклые поверхности в ограниченной открытой выпуклой области Ω. Рассмотрим произвольную функцию $z(x, y) \in W^+(\Omega)$. Исследуем вопрос о предельных значениях функции $z(x, y)$ на Γ при приближении к границе изнутри области. Решение этого вопроса, очевидно, эквивалентно выяснению того, что представляет собой множество граничных точек поверхности Φ_z. (Напомним, что Φ_z есть график функции $z(x, y)$.)

Ниже мы будем использовать следующее понятие верхнего топологического предела множеств. Говорят, что M — верхний топологический предел множеств M_α, где $\alpha \in [a, b)$, при $\alpha \to b$, если

1) для всякой точки $X \in M$ существует сходящаяся к ней последовательность точек $X_\alpha \in M_\alpha$ и

2) всякая точка, не принадлежащая M, не является точкой сгущения никакой последовательности точек, принадле-

жащих разным M_α (не обязательно по точке из каждого множества, а хотя бы по точке из некоторых M_α разных индексов).

Пусть O — внутренняя точка области Ω. Обозначим через Γ_α кривую, которая получается подобным преобразованием из Γ с центром в точке O и коэффициентом $\alpha \in (0, 1)$. Кривая $\Gamma_\alpha \subset \Omega$ и удалена на положительное расстояние от Γ. При $\alpha \to 1$ Γ_α, очевидно, сходятся к Γ. Через $\overline{\Omega}_\alpha$ обозначим замкнутую область, ограниченную кривой Γ_α. Обозначим, далее, через $\overline{\Phi}_{\alpha, z}$ выпуклые поверхности, заданные в $\overline{\Omega}_\alpha$ одной и той же функцией $z(x, y)$. При $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ имеем

$$\overline{\Phi}_{\alpha_1, z} \subset \overline{\Phi}_{\alpha_2, z}.$$

Поэтому при $\alpha \to 1$ существует предел выпуклых поверхностей $\overline{\Phi}_{\alpha, z}$. Этот предел, который мы обозначим через $\overline{\Phi}_z$, есть замкнутое множество, представляющее собой выпуклую поверхность. Проекция $\overline{\Phi}_z$ на плоскость x, y совпадает с замкнутой областью $\Omega + \Gamma$. Над областью Ω поверхность $\overline{\Phi}_z$ совпадает с Φ_z, т. е. задается функцией $z(x, y)$. Замкнутое множество $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$ расположено на цилиндре Z с образующими, параллельными оси z и направляющей Γ. Нетрудно видеть, что, так как $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$ есть часть выпуклой поверхности $\overline{\Phi}_z$, то оно с каждой образующей цилиндра Z может иметь либо общую точку, либо общий отрезок, либо общий луч. Поэтому множество $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$ может проектироваться на Γ неоднозначно. Нетрудно видеть, что график совокупности предельных значений функции $z(x, y)$ при стремлении точек $(x, y) \in \Omega$ к точкам Γ и есть множество $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$.

Пусть X — произвольная точка кривой Γ. Тогда над точкой X на цилиндре Z лежат точки множества $\overline{\Phi}_z - \Phi$. Пусть $h_z(X)$ и $H_z(X)$ соответственно точная нижняя и точная верхняя границы аппликат этих точек.

Функцию $h_z(X)$ точки $X \in \Gamma$ или определяемую ею в пространстве кривую γ будем называть краем поверхности Φ_z. Край поверхности может не быть непрерывной функцией точки $X \in \Gamma$. Примером тому может служить край конуса, вершина которого лежит на одной из образующих цилиндра Z, а направляющей является окружность Γ. Функция $h_z(X)$ будет заведомо непрерывной, если множество $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$ имеет с каждой образующей цилиндра Z единственную общую точку. Это утверждение легко вытекает из того факта, что множество $\overline{\Phi}_z - \Phi_z$ замкнуто.

3. Условия равномерной сходимости выпуклых функций в замкнутой области*). Прежде всего рассмотрим вопрос, когда предел краев сходящейся последовательности выпуклых поверхностей есть край предельной выпуклой поверхности. В общем случае, как было видно из рассмотрений предыдущего пункта, этот вопрос решается отрицательно. Ряд обстоятельств, связанных с этим явлением, будет разобран в § 18. Ниже мы остановимся на ряде достаточных условий, которые обеспечивают равномерную сходимость выпуклых функций в замкнутой области $\Omega + \Gamma$.

Будем говорить, что удельная кривизна замкнутой выпуклой кривой Γ в точке Q_0 имеет порядок вырождения не более $\tau = \mathrm{const} > 0$, если существует такая постоянная $b(Q_0) > 0$, что

$$\frac{\theta}{l} \geqslant b(Q_0)\, l^{\tau}, \tag{17,3,1}$$

где l — длина произвольной достаточно малой дуги кривой Γ, содержащей точку Q_0, а θ — угол между любыми опорными прямыми в концах этой дуги.

Это условие означает, что в точке Q_0 можно коснуться кривой Γ изнутри параболой $y = b(Q_0)|x|^{\tau+2}$. При этом ось x направлена по касательной, а ось y по внутренней нормали в точке Q_0.

Пусть, далее, $f(p, q)$ — положительная функция переменных p, q, удовлетворяющая на плоскости p, q неравенству

$$f(p, q) \geqslant C_0 (1 + p^2 + q^2)^{-k}, \tag{17,3,2}$$

где $k \geqslant 0$ и $C_0 > 0$ — некоторые постоянные числа.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 45. *Пусть Ω — открытая область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ, у которой*

*) Результаты п. 3 изложены в работе [4].

во всех точках удельная кривизна имеет порядок вырождения не более чем $\tau = \mathrm{const} > 0$. *Пусть, далее,* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ — *последовательность выпуклых поверхностей, каждая из которых проектируется однозначно внутрь открытой выпуклой области* $\Omega_n \subseteq \Omega$ *и имеет краем гомеоморфную кругу кривую* γ_n. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_n \subseteq \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

2. *Поверхности* P_n *при* $n \to \infty$ *сходятся к выпуклой поверхности* P, *которая внутри* Ω *задается выпуклой функцией* $z(x, y) \in W^+(\Omega)$.

3. *Края* γ_n *поверхностей* P_n *сходятся к гомеоморфной окружности кривой* γ, *которая однозначно проектируется на* Γ.

4. *Существуют такие постоянные числа* $\lambda \geqslant 0$ *и* $a > 0$, *что для каждой точки* $Q_0 \in \Gamma$ *можно найти окрестность* S *такую, что для всех борелевских множеств* $H \subset S \cap \Omega$ *выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \omega(f, P_n, H \cap \Omega_n) \leqslant a \left[\sup_H \rho(x, y)\right]^{\lambda} \operatorname{mes} H\,^{*)}; \tag{17,3,3}$$

в качестве $f(p, q)$ *взята функция, удовлетворяющая неравенству* (17,3,2), *а* $\rho(x, y)$ — *расстояние точки* $(x, y) \in H$ *до кривой* Γ.

Тогда, если числа k, λ, τ *удовлетворяют неравенству*

$$k \leqslant 1 + \frac{1}{\tau + 2} + \frac{\lambda}{2}, \tag{17,3,4}$$

то кривая γ *является краем поверхности* P.

Доказательство. Допустим, что край $\bar{\gamma}$ поверхности P не совпадает с кривой γ. Тогда существуют такие

---

*) Поверхность P_n, очевидно, задана выпуклой функцией $z_n \in W^+(\Omega_n)$, поэтому под $\omega(f, P_n, H \cap \Omega_n)$ мы понимаем $\omega(f, z_n, H \cap \Omega_n)$.

точки $Q \in \gamma$ и $\bar{Q} \in \bar{\gamma}$, проектирующиеся в одну и ту же точку $Q_0 \in \Gamma$, что $\bar{Q}$ расположена ниже точки Q. Не нарушая общности, можно считать, что Q_0 совпадает с началом координат, а область Ω расположена в полуплоскости $y \geqslant 0$ и при этом ось y не является опорной прямой для $\Omega + \Gamma$. Следовательно, кривая Γ вблизи точки Q_0 задается уравнением

$$y = \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — неотрицательная и выпуклая в направлении $y < 0$ функция. Так как порядок вырождения удельной кривизны Γ не более чем τ, то для достаточно малых по модулю x имеем

$$\psi(x) \geqslant b|x|^{\tau+2}.$$

Поскольку при любых $\lambda \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ имеем

$$1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\tau+2} \geqslant 1,$$

то число k, характеризующее на бесконечности убывание функции $f(p, q)$, не нарушая общности, можно считать большим единицы.

На отрезке $Q\bar{Q}$ выберем точку Q', а на его продолжении за точкой $\bar{Q}$ точку Q'' так, чтобы

$$QQ' = \bar{Q}Q'' = \delta Q\bar{Q},$$

где $0 < \delta < 1$ — произвольное число.

Через точки Q' и Q'' проведем плоскости β' и β'', заданные уравнениями

$$\beta' : z = z_{Q'} - \frac{1}{\alpha} y,$$

$$\beta'' : z = z_{Q''},$$

где $z_{Q'}$ и $z_{Q''}$ соответственно аппликаты точек Q' и Q'', а α — достаточно малое положительное число.

Цилиндрическая поверхность Z с направляющей Γ и образующими, параллельными оси z вместе с плоскостями β' и β'', ограничивают некоторое выпуклое тело K. При достаточно больших n поверхность P_n пересекается с телом K.

Положим

$$P_{n,K}=P_n\cap K,\quad \beta'_K=\beta'\cap K.$$

Через Q_n обозначим ближайшую к $\bar{Q}$ точку поверхности P_n.

Если $\alpha>0$ взять достаточно малым, а n достаточно большим, то множество $P_{n,K}$ не пересекается с β'' и Z и точка $Q_n\in P_{n,K}$. Поэтому при достаточно больших n нормальное изображение множества $P_{n,K}$ покрывает нормальное изображение конуса V_n с вершиной в точке Q_n и основанием β'_K. Отсюда следует неравенство

$$\omega(f,V_n)\leqslant\omega(f,P_n,H_{n,K}),$$

где $H_{n,K}$ — проекция $P_{n,K}$ на плоскость x, y.

Так как

$$H_{n,K}\subset H_K\cap\Omega_n,$$

где H_K — проекция тела K на плоскость x, y, то

$$\omega(f,P_n,H_{n,K})\leqslant\omega(f,P_n,H_K\cap\Omega_n).$$

Следовательно,

$$\omega(f,V_n)\leqslant\omega(f,P_n,H_K\cap\Omega_n). \qquad (17{,}3{,}5)$$

При $n\to\infty$ имеем, что точки Q_n сходятся к точке Q, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\omega(f,V_n)=\omega(f,V),$$

где V — конус, проектирующий из $\bar{Q}$ множество β'_K.

С другой стороны, борелевское множество $H_K\subset S\cap\Omega$ при достаточно малых α, где S — окрестность точки Q_0, о которой шла речь в условии 4. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty}\omega(f,P_n,H_K\cap\Omega_n)\leqslant a\left[\max_{H_K}\rho(x,y)\right]^{\lambda}\operatorname{mes}H_K.$$

Вместе с неравенством (17,3,5) это соотношение приводит к неравенству

$$\omega(f,V)\leqslant a\left[\max_{H_K}\rho(x,y)\right]^{\lambda}\operatorname{mes}H_K. \qquad (17{,}3{,}6)$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{H_K} \rho(x, y) = Q\bar{Q}\alpha.$$

Обозначим через T множество, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам

$$b|x|^{\tau+2} \leqslant y \leqslant Q\bar{Q}\alpha.$$

Тогда

$$H_K \subseteq T \subset \Omega.$$

После простых вычислений имеем оценку

$$\operatorname{mes} T \leqslant d_1 \alpha^{1+\frac{1}{\tau+2}},$$

где $d_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда и из неравенства (17,3,6) получаем

$$\omega(f, V) \leqslant d_2 \alpha^{\lambda+1+\frac{1}{\tau+2}}, \tag{17,3,7}$$

где $d_2 > 0$ некоторая постоянная.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность $\tilde{Z}$ с образующими параллельными оси z и направляющей, лежащей в плоскости x, y и имеющей уравнение

$$y = b|x|^{\tau+2}.$$

Если в описанном выше построении заменить поверхность Z поверхностью $\tilde{Z}$, то вместо конуса V получится конус $\tilde{V}$, нормальное изображение которого содержится в нормальном изображении конуса V. Поэтому

$$\omega(f, V) \geqslant \omega(f, \tilde{V}).$$

Элементарные подсчеты, которые мы опускаем, показывают, что нормальное изображение конуса $\tilde{V}$ покрывает на плоскости p, q треугольник Δ с вершинами $\left(0, \frac{\delta}{\alpha}\right)$, $\left(\pm \frac{c'}{\alpha^{\frac{1}{\tau+2}}}, \frac{c''}{\alpha}\right)$, где c' и c'' не зависят от α и имеют положительные пределы при $\delta \to 0$. Отсюда имеем

$$\omega(f, V) \geqslant \omega(f, \tilde{V}) \geqslant \iint_{\Delta} f(p, q)\, dp\, dq \geqslant$$

$$\geqslant c_0 \iint_{\Delta} (1 + p^2 + q^2)^{-k}\, dp\, dq > d_3 \delta^{2-2k} \alpha^{-1-\frac{1}{\tau+2}+2k},$$

где $d_3 > 0$ — некоторая постоянная.

Последнее неравенство вместе с неравенством (17,3,7) приводит к соотношению

$$\alpha^{2k-2-\lambda-\frac{2}{\tau+2}} < d_4 \delta^{2k-2},$$

где $d_4 = \mathrm{const} > 0$. Подберем число $\delta > 0$ столь малым, чтобы

$$d_4 \delta^{2k-2} < 1.$$

Это возможно, ибо $k > 1$.

Из проведенного построения вытекает, что

$$\alpha^{2k-2-\lambda-\frac{2}{\tau+2}} < 1.$$

Но это невозможно при достаточно малых значениях α, ибо

$$k \leqslant 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\tau+2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что в случае достаточно слабого убывания функции $f(p, q)$ при $p^2 + q^2 \to \infty$, которое аналитически можно характеризовать так:

$$f(p, q) \geqslant c_0 (1 + p^2 + q^2)^{-k},$$

где $0 \leqslant k \leqslant 1$, условие (17,3,4), связанное с порядком невырождения кривой и характером стремления условной кривизны к нулю для множеств, лежащих вблизи границы области Ω, можно опустить.

Теорема 46. *Если выполнены условия теоремы* 45 *и* $\Omega_n = \Omega$, *то последовательность функций* $z_n(x, y)$, *для которых поверхности* P_n *являются графиками, сходится равномерно в* Ω *к функции* $z(x, y)$, *график которой есть поверхность* P.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно; тогда существуют такие точки $(x_s, y_s) \in \Omega$ и натуральные числа

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_s < \ldots,$$

что

$$\left| z(x_s, y_s) - z_{n_s}(x_s, y_s) \right| \geqslant \varepsilon_0 > 0, \qquad (17,3,8)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторое число.

Последовательность точек $\left(x_s, y_s, z_{n_s}(x_s, y_s)\right)$, очевидно, ограничена. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что она сходится к некоторой точке (x_0, y_0, z_0).

Покажем, что точка $(x_0, y_0) \in \Gamma$. В самом деле, если бы это было не так, то, переходя к пределу в неравенстве (17,3,8), мы получили бы, что

$$| z(x_0, y_0) - z_0 | \geqslant \varepsilon_0,$$

а это невозможно, так как $(x_0, y_0) \in \Omega$ и точка (x_0, y_0, z_0) должна принадлежать поверхности P, т. е. $z_0 = z(x_0, y_0)$. Итак, $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Пусть $z^*(x, y)$ и $z_n^*(x, y)$ —функции, определенные на Γ и задающие кривые γ и γ_n. Переходя к пределу в неравенстве (17,3,8), получим

$$| z^*(x_0, y_0) - z_0 | \geqslant \varepsilon_0. \qquad (17,3,9)$$

Поверхности P_n и P выпуклы в направлении $z < 0$, поэтому из (17,3,9) следует, что

$$z_0 + \varepsilon \leqslant z^*(x_0, y_0). \qquad (17,3,10)$$

С другой стороны, $z_n^*(x, y)$ сходятся равномерно к $z^*(x, y)$ на Γ. Поэтому при всех достаточно больших n и любых $(x, y) \in \Gamma$ имеем

$$z_n^*(x, y) \geqslant z^*(x, y) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Отсюда следует, что при всех $(x, y) \in \Omega$

$$z_n^*(x, y) \geqslant z_\gamma(x, y) - \frac{\varepsilon_0}{2},$$

где $z_\gamma(x, y)$ — функция, задающая минимальную выпуклую поверхность в направлении $z > 0$, натянутую на кривую γ.

Полагая в последнем неравенстве

$$(x,\ y)=(x_s,\ y_s),\quad n=n_s,$$

и переходя к пределу, получим

$$z_0\leqslant z^*(x_0,\ y_0)-\frac{\varepsilon_0}{2},$$

что противоречит неравенству (17,3,10). Теорема доказана.

§ 18. Простейшие уравнения Монжа—Ампера

1. Обобщенные и условные решения простейших уравнений Монжа—Ампера. Простейшим уравнением Монжа — Ампера мы будем называть уравнение вида

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\varphi\left(x,\ y,\ z,\ z_x,\ z_y\right). \qquad (18,1,1)$$

В § 1 гл. I было показано, что эллиптичность уравнения (18,1,1) эквивалентна положительности функции $\varphi(x,\ y,\ z,\ z_x,\ z_y)$. Ниже мы будем предполагать, что функция $\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ определена и неотрицательна для всех $(x,\ y)$ из некоторой ограниченной открытой выпуклой области Ω и любых конечных $z,\ p,\ q$.

Пусть сначала $z(x,\ y)\in C^2(\Omega)$ является решением уравнения (18,1,1); тогда $z(x,\ y)$ есть выпуклая функция. Пусть ν_z — нормальное изображение области Ω, порожденное функцией $z(x,\ y)$. Тогда, на множестве $\nu_z(\Omega)$, расположенном на плоскости $p,\ q$, определены функции $x(p,\ q)$, $y(p,\ q)$, $z(p,\ q)$, которые определяют точку поверхности Φ_z с опорной плоскостью

$$Z-z(p,\ q)=p\,(X-x(p,\ q))+q\,(Y-y(p,\ q)).$$

Обозначим через M произвольное борелевское множество, содержащееся в Ω вместе с замыканием. Тогда, используя тождество

$$\omega\left(\frac{1}{\varphi},\ z,\ M\right)=\iint\limits_{\nu_z(M)}\frac{dp\,dq}{\varphi(x(p,\ q),\ y(p,\ q),\ z(p,\ q),\ p,\ q)}=$$

$$=\iint\limits_{M}\frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{\varphi(x,\ y,\ z,\ z_x,\ z_y)}\,dx\,dy$$

и то, что $z(x, y)$ есть решение уравнения (18,1,1), приходим к соотношению

$$\omega\left(\frac{1}{\varphi}, z, M\right) = \int_M \int dx\,dy. \qquad (18,1,2)$$

Отсюда вытекает, что решения уравнения (18,1,1) с точки зрения геометрии, представляют собой выпуклые поверхности, у которых условная кривизна, порожденная функцией $1/\varphi(x, y, z, p, q)$ над множеством $M \subset \Omega$, равна площади множества M.

В дальнейшем уравнение (18,1,1) оказывается более удобным записывать в другом, но эквивалентном виде

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \psi(x, y)\,\varphi(x, y, z, p, q), \qquad (18,1,3)$$

где $\psi(x, y) \geqslant 0$ — суммируемая в Ω функция. (Уравнению (18,1,1) соответствует случай $\psi(x, y) \equiv 1$.) Если $z(x, y) \in C^2$ есть решение уравнения (18,1,3,), то, так же, как и выше, приходим к соотношению

$$\omega\left(\frac{1}{\varphi}, z, M\right) = \int_M \int \psi(x, y)\,dx\,dy,$$

справедливому для любого борелевского множества $M \subset \Omega$.

Решения уравнения (18,1,3) геометрически можно трактовать как такие выпуклые поверхности, у которых условная кривизна, порожденная функцией $1/\varphi(x, y, z, p, q)$, равна заданной функции множеств

$$\mu(M) = \int_M \int \psi(x, y)\,dx\,dy.$$

Отметим, что функция множеств $\mu(M)$ абсолютно непрерывна и неотрицательна.

Таким образом, интегрирование уравнения (18,1,3) сводится к геометрической задаче о восстановлении выпуклой поверхности Φ_z по ее условной кривизне $\omega\left(\frac{1}{\varphi}, z, e\right)$, заданной на борелевских множествах области Ω. Этот подход к трактовке решений уравнения (18,1,3) позволяет использовать при решении краевых задач для простейших уравнений Монжа — Ампера прямые методы, развитые А. Д. Александровым [1а], [1б] для решения основных проблем геометрии «в целом». Аналитически эти геометрические проблемы представляют собой краевые задачи для некоторых специальных частных типов уравнений Монжа — Ампера. Эти методы в сочетании с топологическими методами функционального анализа позволяют исчерпывающим образом исследовать краевые задачи не только для простейших уравнений Монжа — Ампера, но и краевые задачи для широкого класса общих уравнений Монжа—Ампера, так называемых сильно эллиптических уравнений Монжа—Ампера.

Этим вопросам посвящены главы IV и V.

Применительно к краевым задачам для уравнения (18,1,3) геометрическая методика исследования кратко может быть сформулирована так:

1. Краевая задача для уравнения (18,1,3) ставится в интегральных терминах так, чтобы она имела смысл в классе общих выпуклых поверхностей.

2. После этого задача в обобщенной постановке решается в классе выпуклых многогранников.

3. Решение задачи в общем случае получается предельным переходом от выпуклых многогранников.

В аналитическом плане это означает следующее: вводится обобщенное понятие решения краевой задачи для уравнения (18,1,3), после чего эта задача изучается с помощью специального конечно-разностного метода.

Сформулируем понятие обобщенного решения уравнения (18,1,3). Как и выше в §§ 16 и 17, ограничимся рассмотрением класса выпуклых функций $W^+(\Omega)$, обращенных выпуклостью вниз. Обобщенным решением уравнения (18,1,3) будем называть выпуклую функцию $z \in W^+(\Omega)$ такую, что для всякого борелевского множества M, содержащегося в Ω вместе со своим замыканием, справедливо равенство

$$\omega\left(\frac{1}{\varphi},\ z,\ M\right) = \int\limits_M\int \psi(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Обобщенное решение уравнения (18,1,3) может не быть функцией класса $C^2(\Omega)$, даже если $\psi(x,\ y)$ — непрерывная функция. Нетрудно видеть, что обобщенные решения уравнения (18,1,3) представляют собой выпуклые функции

$z(x, y) \in W^+(\Omega)$, для которых условная кривизна $\omega\left(\frac{1}{\varphi}, z, M\right)$ есть абсолютно непрерывная функция множеств области Ω. Поэтому выпуклые многогранники и более общие выпуклые поверхности с коническими точками или ребрами, для которых условная кривизна имеет точечные или линейные нагрузки, не могут быть обобщенными решениями уравнения (18,1,3), так как функция множества $\iint\limits_M \psi(x, y)\,dx\,dy$ абсолютно непрерывна.

Сформулируем теперь понятие обобщенного решения уравнения (18,1,3) так, чтобы эти решения охватывали весь класс выпуклых функций $W^+(\Omega)$. Именно вместо абсолютно непрерывных функций множества $\mu(M)$ будем рассматривать совокупность всех вполне аддитивных неотрицательных функций борелевских множеств области Ω. Тогда геометрическая задача о восстановлении выпуклой поверхности, для которой условная кривизна, порожденная функцией $1/\varphi(x, y, z, p, q)$, совпадает с заранее заданной вполне аддитивной неотрицательной функцией множества $\mu(M)$, содержит в себе как частный случай задачу об интегрировании уравнения (18,1,3). Аналитически эта геометрическая задача сводится к интегрированию уравнения в функциях множества

$$\omega\left(\frac{1}{\varphi}, z, M\right) = \mu(M), \tag{18,1,4}$$

где $\mu(M)$, как уже говорилось, есть вполне аддитивная неотрицательная функция множества. Решения уравнения (18,1,4) мы будем называть условными решениями уравнения (18,1,3). Если $\mu(M)$ — абсолютно непрерывная функция множества, то между обобщенным и условным решением разницы нет.

Обозначим через Γ границу области Ω. Зададим на Γ непрерывную функцию $h(X)$, где X точка Γ. В области Ω зададим произвольную вполне аддитивную неотрицательную функцию множеств $\mu(M)$. Задачей Дирихле для уравнения (18,1,4) будем называть задачу о нахождении выпуклой функции $z \in W^+(\Omega)$ или $z \in W^-(\Omega)$, которая является условным решением этого уравнения и край которого совпадает с функцией $h(X)$.

Эта задача будет подробно исследоваться в этом и следующих параграфах настоящей главы.

2. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Дирихле. Обобщенное удовлетворение краевому условию. В пп. 2, 3, 4 настоящего параграфа речь будет идти об условных решениях уравнения (18,1,4) в случае, когда функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ зависит лишь от переменных p и q, т. е.

$$\varphi(x, y, z, p, q) \equiv R(p, q).$$

Выделение уравнений вида

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \psi(x, y) R(p, q) \tag{18,2,1}$$

представляет самостоятельный интерес по ряду причин. Во-первых, исследование задачи Дирихле для них наиболее просто и носит законченный характер. Во-вторых, с помощью свойств решений этих уравнений и топологических методов функционального анализа единообразным методом исследуются не только простейшие уравнения Монжа — Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \varphi(x, y, z, z_x, z_y),$$

но и упомянутые выше сильно эллиптические уравнения Монжа — Ампера

$$\begin{aligned} z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + {} \\ + 2B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + {} \\ + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y). \end{aligned}$$

Последние характеризуются положительностью формы $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ и функции $D(x, y, z, p, q)$. Наконец, в-третьих, к уравнениям вида (18,2,1) приводят наиболее интересные геометрические задачи: проблема Минковского о построении выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна есть данная функция нормали ($R(p, q) \equiv 1$), построение поверхности, у которой интегральная или гауссова кривизна есть данные функции проекции точки поверхности на некоторую плоскость (в этих задачах соответственно $R = (1 + p^2 + q^2)^{3/2}$ и $R = (1 + p^2 + q^2)^2$).

Остановимся на необходимых условиях разрешимости задачи Дирихле для уравнения (18,2,1). Пусть $z(x, y) \in W^+$ —

условное решение этого уравнения, а $\mu(M)$ — вполне аддитивная неотрицательная функция множества, соответствующая функции $\psi(x, y)$. Тогда имеем

$$\mu(\Omega)=\omega\left(\frac{1}{R},\ z,\ \Omega\right)=\iint\limits_{\nu_z(\Omega)}\frac{dp\,dq}{R(p,q)}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{R(p,q)}=A\left(\frac{1}{R}\right).$$

Итак, необходимым условием разрешимости задачи Дирихле в классе условных решений является неравенство

$$\mu(\Omega)\leqslant A\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (18,2,2)$$

Ниже мы установим, что неравенство

$$\mu(\Omega)<A\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (18,2,3)$$

есть достаточное условие разрешимости задачи Дирихле.

В частном случае, когда $R=(1+p^2+q^2)^{3/2}$, функция $\omega\left(\frac{1}{R},\ z,\ M\right)$ представляет собой площадь сферического изображения множества $\tilde{M}$ на поверхности Φ_z, имеющего проекцией на плоскость x, y множество M. Поэтому неравенство (18,2,2) можно рассматривать как естественное обобщение хорошо известного факта: площадь сферического изображения любой выпуклой поверхности с однозначной проекцией на некоторую плоскость не превосходит 2π.

Перейдем теперь к вопросу об удовлетворении краевому условию в задаче Дирихле. Прежде всего рассмотрим в круге Ω: $x^2+y^2<R^2$ уравнение

$$rt-s^2=(1+p^2+q^2)^2. \qquad (18,2,4)$$

Для любого условного, или, что то же самое, обобщенного решения этого уравнения справедливо соотношение

$$2\pi\geqslant\omega\left(\frac{1}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},\ z,\ \Omega\right)=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy.$$

Отсюда следует, что площадь $\sigma(\Phi_z)$ поверхности Φ_z необходимо удовлетворяет неравенству

$$\sigma(\Phi_z) \leqslant 2\pi.$$

Неравенство (18,2,3) выполнено, если радиус круга R меньше единицы.

Фиксируем некоторое $R_0 < 1$ и в круге $x^2 + y^2 < R_0^2$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} rt - s^2 = (1 + p^2 + q^2)^2, \\ z\big|_{\text{гр. }\Omega} = kx. \end{cases} \tag{18,2,5}$$

Цилиндр $x^2 + y^2 = R_0^2$ вырезает на плоскости $z = kx$ эллипс γ с площадью $\pi R_0^2 \sqrt{1 + k^2}$. Отсюда следует, что если

$$\sqrt{1 + k^2} > \frac{2}{R_0^2},$$

то любая выпуклая поверхность Φ_z с краем γ (Φ_z задается функцией $z(x, y) \in W^{\pm}(\Omega)$) имеет площадь бо́льшую, чем 2π. Поэтому для таких k не существует обобщенных решений задачи (18,2,5) с краем γ. Итак, при достаточно больших значениях k^2 не существует решений задачи (18,2,5), удовлетворяющих граничному условию в классическом смысле. Указанные обстоятельства приводят к новому пониманию того, что мы будем считать удовлетворением краевому условию в задаче Дирихле.

Пусть Ω — открытая область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ. Пусть, далее, γ — непрерывная кривая, проектирующаяся однозначно на Γ. В Ω рассмотрим вполне аддитивную неотрицательную функцию множеств $\mu(M)$. Решением задачи Дирихле из класса $W^+(\Omega)$ $\left(W^-(\Omega)\right)$ для уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ z,\ M\right) = \mu(M) \tag{18,2,6}$$

и граничного условия, определяемого кривой γ, будем называть такое решение уравнения (18,2,6), край которого лежит под γ (над γ) и которое само лежит над (под) всеми остальными решениями этого уравнения с краями, лежащими под γ (над γ).

Существование и единственность такого решения будет установлена ниже в этом параграфе.

3. Решение задачи Дирихле для уравнения (18,2,6). Прежде всего получим решение задачи Дирихле в классе выпуклых многогранников. В этом случае задача Дирихле, очевидно, формулируется так:

В открытом многоугольнике Ω, ограниченном замкнутой выпуклой ломаной Γ, фиксированы точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Каждой точке A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ поставим в соответствие число $\mu_i > 0$. Пусть, далее, γ — замкнутая ломаная в пространстве, имеющая однозначную проекцию на Γ, причем вершины γ проектируются в вершины Γ.

Требуется установить, что в каждом из классов $W^+(\Omega)$ и $W^-(\Omega)$ существует выпуклый многогранник Φ_z с краем γ, такой, что при всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z, A_i\right) = \mu_i. \tag{18,3,1}$$

Из теоремы 36 вытекает, что если искомый многогранник существует, то он единственный в каждом из классов.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 47. *Пусть выполнены условия, сформулированные выше в этом пункте при постановке задачи Дирихле в классе выпуклых многогранников. Тогда, если*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p, q)},$$

то в каждом из классов $W^+(\Omega)$ *и* $W^-(\Omega)$ *существует выпуклый многогранник, являющийся решением задачи Дирихле для уравнения* (18,3,1).

Доказательство, которое приводится ниже, основано на одном экстремальном приеме А. В. Погорелова, с помощью которого им была доказана аналогичная более частная теорема для случая $R = (1 + p^2 + q^2)^{3/2}$. Случай функции $R = (1 + p^2 + q^2)^{3/2}$, как мы знаем, соответствует построению многогранника или поверхности с заданными площадями сферических изображений. Эта геометрическая задача была впервые поставлена и решена А. Д. Александровым в работе [1г], при этом А. Д. Александров решал задачу в классе многогранников другим приемом, основанным на применении так называемой леммы об отображении.

Обозначим через T совокупность выпуклых многогранников, обладающих следующими свойствами:

1) выпуклые функции $z(x, y)$, задающие Φ_z внутри Ω, принадлежат $W^+(\Omega)$;

2) краями Φ_z является ломаная γ;

3) проекциями вершин всех многогранников Φ_z могут быть только точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ или часть этих точек;

4) если $\Phi_z \in T$, то при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнены неравенства

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z, A_i\right) \leqslant \mu_i.$$

Класс T не пуст. Построим выпуклую оболочку V *) ломаной γ. Так как вершины γ лежат над Γ, то граница множества V состоит из выпуклых многогранников Φ_{z_1} и Φ_{z_2} с общим краем γ и таких, что

$$z_1(x, y) \in W^+(\Omega), \quad z_2(x, y) \in W^-(\Omega).$$

Очевидно, что выпуклая оболочка ломаной γ совпадает с выпуклой оболочкой ее вершин. Но выпуклая оболочка конечного числа точек $X_1, \ldots, X_n$, как известно (см. [1б]), есть выпуклый многогранник, вершины которого находятся только в точках $X_1, \ldots, X_n$ или в части этих точек. Отсюда следует, что

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_1, \Omega\right) = 0,$$

и потому многогранник $\Phi_{z_1} \in T$. Итак, класс T не пуст.

Из теоремы 42 (§ 17, п. 1) вытекает, что множество $T \subset W^+(\Omega)$ компактно относительно равномерной сходимости. В самом деле, если функция $z(x, y) \in W^+(\Omega)$ определяет многогранник $\Phi_z \in T$, то

$$\max_{\Omega} |z(x, y)| \leqslant Q, \tag{18,3,2}$$

*) Выпуклой оболочкой множества M называют минимальное выпуклое тело, содержащее M. Очевидно, выпуклая оболочка множества M есть общая часть всех выпуклых тел, содержащих M.

где постоянная $Q < +\infty$ зависит лишь от диаметра области Ω и величины

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \text{если} \quad A\left(\frac{1}{R}\right) = +\infty,$$

и

$$A\left(\frac{1}{R}\right) - \mu > 0, \quad \text{если} \quad A\left(\frac{1}{R}\right) < +\infty.$$

Обозначим через ρ наименьшее из расстояний точек A_i до границы Ω. Так как проекции вершин Φ_z удалены от Γ не менее чем на ρ, то наклоны граней Φ_z к плоскости x, y ограничены сверху числом $2Q/\rho$. Отсюда вытекает, что множество выпуклых многогранников T задается выпуклыми функциями, которые удовлетворяют условию Липшица с показателем 1 и общей константой $4Q/\rho$. Вместе с неравенством (18,3,2) это и доказывает компактность T в равномерной метрике.

Каждому многограннику $\Phi_z \in T$ поставим в соответствие число

$$S(\Phi_z) = \sum_{i=1}^{n} z(A_i).$$

Функционал $S(\Phi_z)$ на T, очевидно, непрерывен и так как T — компактное множество, то существует многогранник $\Phi_{z_0} \in T$ такой, что

$$\inf_T S(\Phi_z) = S(\Phi_{z_0}).$$

Докажем, что $\Phi(z_0)$ и есть искомый многогранник. Если бы это было не так, то нашлось хотя бы одно i, для которого

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ z_0,\ A_i\right) < \mu_i.$$

Пусть M_i — вершина Φ_{z_0}, которая проектируется в точку A_i. Сдвинем точку M_i параллельно оси z вниз на расстояние $\delta > 0$ в положение $\overline{M}_i$. Число δ, как легко видеть, можно выбрать столь малым, чтобы нижняя граница выпуклой оболочки точки $\overline{M}_i$ и многогранника Φz_0 представляла собой многогранник $\Phi_{\bar{z}}$ с краем γ, все вершины которого, за исключением вершины M_i, совпадают с вершинами Φ_{z_0}, а вершина M_i переместилась в точку $\overline{M}_i$. Величина $\omega\left(\frac{1}{R},\ \bar{z},\ A_i\right)$ является строго возрастающей непрерывной функцией δ. Фиксируем теперь малое число $\delta>0$ так, чтобы были выполнены только что сформулированные ограничения и чтобы выполнялось неравенство

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ z_0,\ A_i\right)<\omega\left(\frac{1}{R},\ \bar{z},\ A_i\right)<\mu_i.$$

Нормальное изображение каждой из остальных вершин многогранника $\Phi_{\bar{z}}$, как нетрудно видеть, содержится в нормальном изображении соответствующей вершины многогранника Φ_{z_0}. Поэтому имеем

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ \bar{z},\ A_s\right)\leqslant\omega\left(\frac{1}{R},\ z_0,\ A_s\right)=\mu_i$$

для $s\neq i$ и, следовательно, $\Phi_{\bar{z}}\in T$. Но

$$S\left(\Phi_{\bar{z}}\right)<S\left(\Phi_{z_0}\right),$$

и мы получили противоречие, так как

$$\inf_T S\left(\Phi_z\right)=S\left(\Phi_{z_0}\right)\leqslant S\left(\Phi_{\bar{z}}\right).$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи Дирихле для общего уравнения (18,2,6). Пусть Ω — область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varepsilon(\dot{\Omega})$ совокупность вполне аддитивных неотрицательных функций множества $\mu(e)$ в области Ω, удовлетворяющих условию

$$\mu(\Omega_\varepsilon)=0, \tag{18,3,3}$$

где Ω_ε — пограничная полоса области Ω ширины $\varepsilon>0$. (Разумеется, что число $\varepsilon>0$ должно быть выбрано достаточно малым в зависимости от свойств Ω.)

Теорема 48. *Пусть* $\mu(e)\in\mathfrak{M}_\varepsilon(\Omega)$ *при некотором* $\varepsilon>0$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (18,2,6) *в каждом из классов* $W^+(\Omega)$ *и* $W^-(\Omega)$ *имеет единственное решение, краем которого является любая наперед заданная непрерывная кривая* γ, *имеющая однозначную проекцию на* Γ.

Доказательство. Рассмотрим последовательность выпуклых многоугольников $\Omega^{(m)}$, ограниченных замкнутыми выпуклыми ломаными Γ^m, сходящуюся к области Ω. Множества $\Omega^{(m)}$ выбираем так, чтобы при всех m

$$\Gamma^m \subset \Omega_{\varepsilon/2}$$

и

$$\Omega - \Omega_\varepsilon \subset \Omega^{(1)} \subset \Omega^{(2)} \subset \ldots \subset \Omega^{(m)} \subset \ldots \subset \Omega.$$

Тогда множество $\Omega - \Omega_\varepsilon$ удалено от границ всех многоугольников $\Omega^{(m)}$ на расстояние, не меньшее чем $\varepsilon/2$. Аппроксимируем функцию $\mu(e)$ положительными функциями точечных нагрузок, которые подчинены следующим условиям:

1) нагрузки всех функций $\mu_m(e)$ находятся в точках множества $\Omega - \Omega_\varepsilon$;

2) $\mu_m(e)$ слабо сходятся внутри Ω к $\mu(e)$;

3) $\mu_m(\Omega) = \mu_m(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) = \mu(\Omega)$. Кривую γ аппроксимируем равномерно сходящейся последовательностью замкнутых ломаных γ_m таких, что каждая из γ_m однозначно проектируется на кривую Γ^m, причем вершины γ_m проектируются только в вершины Γ^m.

Так как при любом m

$$\mu(\Omega^{(m)}) \leqslant \mu(\Omega) < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p,\,q)},$$

то выполнены все условия теоремы 47 и, следовательно, существует многогранник Φ_{z_m} с краем γ_m, являющийся решением уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R},\, z_m,\, e\right) = \mu_m(e) \qquad (18,3,4)$$

в области $\Omega^{(m)}$. Из построений, проведенных при доказательстве теоремы 47, вытекает, что функции $z_m(x,\,y)$ равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица с показателем 1 и общей константой. Поэтому из последовательности выпуклых функций $z_m(x,y)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_{m_k}(x,\,y)$, которая будет сходиться к некоторой выпуклой функции $z(x,y) \in W^+(\Omega)$. Опорные плоскости поверхности Φ_z — графика функции $z(x,\,y)$, имеют равномерно ограниченные наклоны над областью Ω. Отсюда вытекает, что краем Φ_z является кривая γ. Так как

$\omega\left(\frac{1}{R}, z_{m_k}, e\right)$ слабо сходятся к $\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right)$ (теорема 40, § 16, п. 4), а $\mu_{m_k}(e)$ слабо сходятся к $\mu(e)$, то, используя единственность слабого предела функций множеств, имеем для любого борелевского множества $e \subseteq \Omega$, что

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right) = \mu(e).$$

Следовательно, функция $z(x, y)$ и есть искомое решение интересующей нас задачи. Из теоремы 41 (§ 16, п. 4) следует, что это решение единственно в классе $W^+(\Omega)$. Случай, когда задача рассматривается в классе $W^-(\Omega)$, исследуется дословно так же.

Теорема доказана.

Перейдем наконец к рассмотрению задачи Дирихле для уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right) = \mu(e) \tag{18,2,6}$$

в случае, когда $\mu(e)$ — произвольная вполне аддитивная неотрицательная функция множеств. Имеет место следующая

Теорема 49. *Пусть функция множества $\mu(e)$ удовлетворяет условию*

$$\mu(\Omega) < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p, q)}$$

и пусть γ — любая замкнутая непрерывная кривая, однозначно проектирующаяся на Γ; тогда среди решений уравнения (18,2,6) *из класса $W^+(\Omega)$, края которых лежат под γ, существует единственное решение $z(x, y)$, край которого лежит над краями всех остальных решений. Более того, это решение $z(x, y)$ лежит над всеми указанными решениями уравнения* (18,2,6).

Доказательство. На борелевских множествах области Ω по функции множества $\mu(e)$ построим функции множества

$$\mu_\varepsilon(e) = \mu(e \cap \Omega - \Omega_\varepsilon),$$

где Ω_ε — пограничная полоса ширины $\varepsilon > 0$ области Ω. Очевидно, что $\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = 0$. При $\varepsilon \to 0$ имеем, что $\mu_\varepsilon(e)$ слабо сходятся внутри Ω к $\mu(e)$. Из теоремы 48 следует, что при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует единственная функция $z_\varepsilon(x, y) \in W^+(\Omega)$, имеющая краем кривую γ и удовлетворяющая уравнению

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_\varepsilon, e\right) = \mu_\varepsilon(e). \qquad (18,3,5)$$

Для любого $e \subseteq \Omega$ и любых $\varepsilon' < \varepsilon''$ имеем

$$\mu_{\varepsilon'}(e) \geqslant \mu_{\varepsilon''}(e).$$

Из теоремы 41 (§ 16, п. 4) вытекает, что тогда

$$z_{\varepsilon''}(x, y) \geqslant z_{\varepsilon'}(x, y). \qquad (18,3,6)$$

Так как на границе Ω все функции $z_\varepsilon(x, y)$ совпадают, а их условные кривизны удовлетворяют неравенству

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_\varepsilon, \Omega\right) = \mu_\varepsilon(\Omega) < \mu(\Omega) = \text{const} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p, q)},$$

то, согласно теореме 42 (§ 17, п. 1), совокупность функций $z_\varepsilon(x, y)$ равномерно ограничена. Вместе с соотношением монотонности (18,3,6) это приводит к тому, что при $\varepsilon \to 0$ функции $z_\varepsilon(x, y)$ сходятся к некоторой выпуклой функции $z_0(x, y) \in W^+(\Omega)$. Край функции $z_0(x, y)$, вообще говоря, лежит под γ и может с γ не совпадать. Поскольку $\omega\left(\frac{1}{R}, z_0, e\right)$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходятся внутри Ω к $\omega\left(\frac{1}{R}, z_0, e\right)$, то $z_0(x, y)$ есть решение уравнения (18,2,6). Покажем, что $z_0(x, y)$ и есть то решение, существование которого утверждается в настоящей теореме.

Пусть $u(x, y) \in W^+$ — решение уравнения (18,2,6), край которого лежит под γ. Тогда для всех $e \subseteq \Omega$ и при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_\varepsilon, e\right) = \mu_\varepsilon(e) \leqslant \mu(e) = \omega\left(\frac{1}{R}, u, e\right)$$

и, следовательно,

$$z_\varepsilon(x, y) \geqslant u(x, y).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что

$$z_0(x, y) \geqslant u(x, y).$$

Отсюда вытекает, что край $z_0(x, y)$ лежит над краем $u(x, y)$. Если края $z_0(x, y)$ и $u(x, y)$ совпадают, то, согласно теореме 41 (§ 16, п. 4), получим, что в Ω $z_0(x, y) \equiv u(x, y)$.

Теорема доказана.

4. О точном удовлетворении краевому условию в задаче Дирихле. Обратимся теперь к установлению достаточных условий, которым должны удовлетворять функции $\mu(e)$ и $R(p, q)$, чтобы задача Дирихле для уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right) = \mu(e) \qquad (18,2,6)$$

имела решения, край которых совпадал бы с произвольной замкнутой непрерывной кривой γ, имеющей однозначную проекцию на Γ.

Теорема 50. *Пусть замкнутая выпуклая кривая* Γ *имеет порядок вырождения удельной кривизны не более чем* $\tau = \text{const} > 0$; *пусть, далее, положительная функция* $R(p, q)$ *удовлетворяет неравенству*

$$R(p, q) \leqslant c_0(1 + p^2 + q^2)^k, \quad (c_0 = \text{const},\ k = \text{const} > 0) \qquad (18,4,1)$$

и пусть, наконец, вполне аддитивная неотрицательная функция множеств $\mu(e)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\Omega) < A\left(\frac{1}{R}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p, q)}. \qquad (18,4,2)$$

Тогда, если существуют постоянные числа $a > 0$ *и* $\lambda > 0$ *такие, что для каждой точки* $Q_0 \in \Gamma$ *найдется окрестность* S, *обладающая следующими свойствами*:

а) *для всех борелевских множеств* $H \subseteq S$ *справедливо неравенство*

$$\mu(H \cap \Omega) \leqslant a\left[\sup_H \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} H, \qquad (18,4,3)$$

б) *числа* k, λ, τ *удовлетворяют соотношению*

$$k \leqslant 1 + \frac{1}{\tau + 2} + \frac{\lambda}{2}, \qquad (18,4,4)$$

то существует единственное решение $z(x, y) \in W^+$ *уравнения* (18,2,6), *имеющее краем любую наперед* *заданную кривую* γ. (При этом, как всегда, предполагается, что γ имеет однозначную проекцию на плоскость x, y и этой проекцией является кривая Γ; через ρ обозначено расстояние переменной точки множества H до точки Q_0.)

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 49, строим функции множества

$$\mu_\varepsilon(e) = \mu(e \cap \Omega - \Omega_\varepsilon).$$

Очевидно, что

$$\mu_\varepsilon(\Omega) \leqslant \mu(\Omega) < A\left(\frac{1}{R}\right),$$

и при любом допустимом $\varepsilon > 0$ для $\mu_\varepsilon(e)$ найдется такая окрестность S любой точки $Q_0 \in \Gamma$, что справедливо неравенство (18,4,3). Поэтому

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(H \cap \Omega) \leqslant a\left[\sup_H \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} H. \qquad (18,4,5)$$

Пусть $z_\varepsilon(x, y) \in W^+(\Omega)$ — решение уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_\varepsilon, e\right) = \mu_\varepsilon(e),$$

имеющее краем кривую γ. Существование такого решения было установлено в теореме 49 и там же было доказано, что при $\varepsilon \to 0$ внутри Ω функции $z_\varepsilon(x, y)$ сходятся к функции $z_0(x, y)$.

Из соотношения (18,4,5) следует неравенство

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \omega\left(\frac{1}{R}, z_\varepsilon, H \cap \Omega\right) \leqslant a\left[\sup_{H \subseteq S} \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} H. \qquad (18,4,6)$$

Применим к последовательности функций $z_\varepsilon(x, y)$ теорему 45 (§ 17, п. 3). В рассматриваемом случае все $\Omega_\varepsilon = \Omega$ и края всех функций $z_\varepsilon(x, y)$ совпадают. Выполнение всех прочих условий теоремы 45 следует из соотношений (18,4,1)—(18,4,4). Поэтому предел функций $z_\varepsilon(x, y)$ — функция $z_0(x, y)$ будет иметь краем кривую γ. То, что $z_0(x, y)$ есть решение уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R}, z_0, e\right) = \mu(e), \qquad (18,4,7)$$

доказано в теореме 49. Единственность решения уравнения (18,4,7) при фиксированных краевых условиях в каждом из классов $W^+(\Omega)$ и $W^-(\Omega)$ следует из теоремы 41 (§ 16, п. 4). Теорема полностью доказана.

5. Задача Дирихле для уравнения $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$. Ниже мы предполагаем, что функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ неотрицательна и непрерывна по всем переменным: по x, y в замыкании ограниченной выпуклой области Ω, а по z, p, q — при всех конечных значениях этих аргументов. Относительно границы Ω кривой Γ будем предполагать, что она имеет порядок вырождения удельной кривизны не более чем $\tau = \mathrm{const} > 0$. Пусть, далее, непрерывная функция $h(X)$ точки $X \in \Gamma$ определяет в пространстве замкнутую непрерывную кривую γ. (Очевидно, что γ однозначно проектируется на Γ.) Положим

$$M = \sup_{\Gamma} h(X).$$

Далее будем предполагать, что функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ в области

$$G_M = \begin{cases} (x, y) \in \Omega + \Gamma, \\ -\infty < z \leqslant M, \\ -\infty < p < +\infty, \quad -\infty < q < +\infty \end{cases}$$

допускает оценку

$$\varphi(x, y, z, p, q) \leqslant \psi_M(x, y) R_M(p, q), \qquad (18,5,1)$$

где $\psi_M \geqslant 0$ — суммируемая в Ω функция, а $R_M(p, q) > 0$ — локально суммируемая функция на плоскости p, q. Значок M, используемый в обозначениях функций ψ_M и R_M, указывает, что в оценке (14,5,1) функции ψ_M и R_M могут меняться при изменении числа M.

Ограничение (14,5,1) на функцию $\varphi(x, y, z, p, q)$ является весьма слабым. Ему, например, удовлетворяют функции $\varphi(x, y, z, p, q)$, которые являются неубывающими функциями z при фиксированных значениях остальных аргументов. (Важно при этом отметить, что доказательство единственности решения задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$$

существенно опирается на указанное выше свойство монотонности функции φ по переменной z (§ 19, п. 2).

Теорема 51. *Пусть относительно области* Ω, *кривых* Γ *и* γ *выполнены условия, сформулированные в начале пункта* 5. *Пусть, далее, непрерывная неотрицательная функция* $\varphi(x, y, z, p, q)$ *в области* G_M *удовлетворяет неравенству* (18,5,1) *и пусть, кроме того, выполняются условия*:

1. *Функция* $R_M(p, q)$ *удовлетворяет неравенству*

$$R_M(p, q) \leqslant C(1+p^2+q^2)^k, \tag{18,5,2}$$

где $C = \mathrm{const} > 0$, $k = \mathrm{const}$.

2. *Существуют постоянные числа* $a > 0$ *и* $\lambda \geqslant 0$ *такие, что для каждой точки* $Q_0 \in \Gamma$ *найдется окрестность* S, *для всех множеств которой справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{H \cap \Omega} \psi_M \, dx\, dy \leqslant a \left[\sup_H \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} H \tag{18,5,3}$$

(ρ — *расстояние переменной точки* H *от точки* Q_0).

3. *Числа* k, λ, τ *связаны неравенством*

$$k \leqslant 1 + \frac{1}{\tau+2} + \frac{\lambda}{2}.$$

4. *Функции* ψ_M *и* R_M *удовлетворяют соотношению*

$$\iint\limits_{\Omega} \psi_M \, dx\, dy < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\, dq}{R_M(p, q)}. \tag{18,5,4}$$

Тогда в классе функций $W^+(\Omega)$ *существует по крайней мере одно обобщенное решение уравнения*

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q) \tag{18,5,5}$$

с краем γ.

Доказательство. Пусть $\mu(x, y) \geqslant 0$ — суммируемая функция в Ω, удовлетворяющая неравенству

$$\mu(x, y) \leqslant \psi_M(x, y). \tag{18,5,6}$$

Совокупность таких функций обозначим через U. Для всякой функции $\mu(x, y) \in U$, согласно теореме 50, существует единственная функция $z(x, y) \in W^+$ с краем γ, являющаяся решением уравнения

$$\omega\left(\frac{1}{R_M}, z, e\right) = \int_\Omega\int \mu(x, y)\,dx\,dy \qquad (18,5,7)$$

(или, как нетрудно видеть, обобщенным решением уравнения

$$rt - s^2 = \mu(x, y) R_M(p, q)).$$

Тем самым на множестве U определен оператор B:

$$z = B(\mu).$$

Обозначим через T множество выпуклых функций из класса $W^+(\Omega)$ с краем γ. Нетрудно видеть, что решения интересующей нас задачи Дирихле есть решения операторного уравнения

$$z = B\left(\frac{\varphi(x, y, z, z_x, z_y)}{R_M(z_x, z_y)}\right), \qquad (18,5,8)$$

принадлежащие множеству T.

Для упрощения изложения введем на множестве T оператор

$$\mathfrak{G}(z) = B\left(\frac{\varphi(x, y, z, z_x, z_y)}{R_M(z_x, z_y)}\right).$$

Неподвижные точки оператора $\mathfrak{G}(z)$, как легко видеть, являются обобщенными решениями интересующей нас задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q).$$

Существование неподвижных точек оператора $\mathfrak{G}(z)$ проще всего установить с помощью известного принципа Шаудера. Формулировка его такова: «Пусть Q — выпуклое множество в банаховом пространстве E и F — непрерывный оператор на Q, переводящий Q в свою компактную часть. Тогда в Q есть по крайней мере одна неподвижная точка оператора F».

В качестве пространства E возьмем пространство $C(\Omega + \Gamma)$ непрерывных в $\Omega + \Gamma$ функций. Множество $T \subset C(\Omega + \Gamma)$, очевидно, выпукло. Пусть $z \in T$. Тогда функция

$$f_z(x, y) = \frac{\varphi(x, y, z, z_x, z_y)}{R_M(z_x, z_y)}$$

неотрицательна и почти везде удовлетворяет неравенству

$$f_z(x, y) \leqslant \psi_M(x, y). \qquad (18,5,9)$$

Если функция $z \in W^+(\Omega) \cap C^1$, то функция $f_z(x, y)$ непрерывна внутри Ω, а в силу (18,5,9) суммируема в Ω; при этом имеет место оценка

$$\int_\Omega\int f_z(x, y)\,dx\,dy \leqslant \int_\Omega\int \psi_M(x, y)\,dx\,dy. \qquad (18,5,10)$$

Если функции $z_n \in W^+(\Omega) \cap C^1$ сходятся к функции $z(x, y)$, то почти везде $z_{n,x}$ и $z_{n,y}$ сходятся соответственно к z_x и z_y. Следовательно, для любой функции $z(x, y) \in W^+(\Omega)$ функция $f_z(x, y)$ суммируема и имеет место оценка (18,5,10)

Отсюда вытекает, что множество T оператором

$$f_z(x, y) = \frac{\varphi(x, y, z, z_x, z_y)}{R_M(z_x, z_y)}$$

переводится в множество суммируемых неотрицательных функций U, введенное выше в начале доказательства настоящей теоремы. Поэтому оператор

$$\mathfrak{G}(z) = B(f_z(x, y))$$

переводит функцию $z \in T$ в функцию

$$v = \mathfrak{G}(z) \in T$$

такую, что для любого $e \subseteq \Omega$

$$\omega\left(\frac{1}{R_M}, v, e\right) \leqslant \int_e\int \psi_M(x, y)\,dx\,dy. \qquad (18,5,11)$$

Из условий настоящей теоремы следует, что функции $1/R_M$, ψ_M и граница области Ω удовлетворяют условиям теорем 42, 43 (§ 17, п. 1) и 46 (§ 17, п. 3). Поэтому множество T переводится оператором $\mathfrak{G}(z)$ в свою компактную часть относительно метрики пространства $C(\Omega+\Gamma)$.

Докажем теперь, что оператор $\mathfrak{G}(z)$ непрерывен на T. Пусть последовательность функций $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \in T$ и в $\Omega+\Gamma$ равномерно сходится к функции $z_0 \in T$. Докажем, что тогда функции

$$v_n = \mathfrak{G}(z_n) \in T$$

равномерно сходятся к функции $v_0 = \mathfrak{G}(z_0) \in T$.

Множество функций v_n компактно в T относительно равномерной сходимости. Это утверждение доказывается дословно так же, как выше было установлено, что T переводится оператором $\mathfrak{G}(z)$ в свою компактную часть.

Извлечем из v_n сходящуюся в метрике $C(\Omega+\Gamma)$ подпоследовательность v_{n_k}. Пусть

$$\bar{v} = \lim_{n_k\to\infty} v_{n_k}.$$

Тогда $\bar{v} \in T$. Это есть следствие соотношения (18,5,11), условий, наложенных на функции $\psi_M(x, y)$, $R_M(p, q)$ и границу Γ, и теорем 45 и 46. Далее $\omega\left(\frac{1}{R_M}, v_{n_k}, e\right)$ слабо сходятся внутри Ω к $\omega\left(\frac{1}{R_M}, \bar{v}, e\right)$. Так как $z_{n_k} \in T$ равномерно сходятся к $z_0 \in T$, то неотрицательные суммируемые функции

$$f_{z_{n_k}} = \frac{\varphi\left(x, y, z_{n_k}, z_{n_k, x}, z_{n_k, y}\right)}{R_M\left(z_{n_k, x}, z_{n_k, y}\right)}$$

сходятся почти везде к функции

$$f_{z_0} = \frac{\varphi(x, y, z_0, z_{0,x}, z_{0,y})}{R_M(z_{0x}, z_{0y})},$$

обладающей теми же свойствами.

Для каждой из функций $f_{z_{n_k}}(x, y)$ выполняется соотношение (18,5,11). Так как $\psi_M(x, y)$ суммируема в Ω, то, в силу известной теоремы А. Лебега, для любого $e \subseteq \Omega$ имеем

$$\iint_e f_{z_0}(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n_k\to\infty} \iint_e f_{z_{n_k}}(x, y)\,dx\,dy. \qquad (18,5,12)$$

Так как

$$\omega\left(\frac{1}{R_M}, v_{n_k}, e\right) = \iint_e f_{z_{n_k}}(x, y)\,dx\,dy,$$

то из (18,5,12) вытекает, что

$$\omega\left(\frac{1}{R_M}, \bar{v}, e\right) = \iint_e f_{z_0}(x, y)\,dx\,dy.$$

Но функция $v_0 = \mathfrak{G}(z_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega\left(\frac{1}{R_M},\ v_0,\ e\right) = \int\limits_e\int f_{z_0}(x,\ y)\,dx\,dy,$$

где $e \subseteq \Omega$ — произвольное борелевское множество в Ω.

Итак, функции v_0 и $\bar{v} \in T$ являются обобщенными решениями одного и того же уравнения

$$v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 = f_{z_0}(x,\ y)\,R_M(v_x,\ v_y).$$

Так как у v_0 и $\bar{v}$ края совпадают, то $v_0(x,\ y) \equiv \bar{v}(x,\ y)$. Итак, всякая сходящаяся подпоследовательность, извлеченная из компактной последовательности $v_n = \mathfrak{G}(z_n)$, сходится равномерно в $\Omega + \Gamma$ к функции $v_0 = \mathfrak{G}(z_0)$. Непрерывность оператора $\mathfrak{G}(z)$ на T тем самым доказана. Таким образом, все условия принципа Шаудера соблюдены и, следовательно, оператор $\mathfrak{G}(z)$ имеет на T хотя бы одну неподвижную точку. Теорема доказана.

§ 19. Гладкость обобщенных решений. Теорема единственности. Проблема многих решений

1. Теоремы А. Д. Александрова о гладкости выпуклой поверхности с ограниченной удельной внешней кривизной. Внешней кривизной выпуклой поверхности (см. [1a]) называют площадь сферического изображения множеств этой поверхности. Сферическое изображение строится с помощью единичных внешних нормалей к опорным плоскостям поверхности. Внешняя кривизна выпуклой поверхности является неотрицательной вполне аддитивной функцией борелевских множеств поверхности. Если рассматривать выпуклые поверхности Φ_z, заданные функциями $z(x,\ y) \in W^{+}(\Omega)$, то, как уже отмечалось выше, внешняя кривизна борелевских множеств $e \subseteq \Omega$ есть не что иное, как условная кривизна, порожденная функцией

$$R(p,\ q) = (1 + p^2 + q^2)^{-3/2}.$$

Пусть $\tau(M)$ — внешняя кривизна множества M на выпуклой поверхности F, а $\sigma(M)$ — площадь M. Удельной внешней кривизной множества M называется отношение

$$\frac{\tau(M)}{\sigma(M)}.$$

Говорят, что выпуклая поверхность F имеет ограниченную удельную кривизну, если удельные кривизны всех областей на поверхности равномерно ограничены.

Для выпуклых поверхностей справедливы следующие важные теоремы А. Д. Александрова (подробные доказательства содержатся в монографии [14а]).

Теорема 52. *Каждая точка X выпуклой поверхности ограниченной удельной внешней кривизны или гладкая, или принадлежит прямолинейному ребру, причем точка X не является концом этого ребра.*

Теорема 53. *Пусть F — выпуклая поверхность, g — прямолинейный отрезок на поверхности F, X — точка отрезка g.*

Тогда существует последовательность областей на поверхности, сходящихся к точке X, удельные внешние кривизны которых неограниченно убывают.

Из теоремы 52 вытекает

Теорема 54. *Выпуклые шапочки с ограниченной удельной кривизной являются гладкими* (т. е. все точки шапочки гладкие).

Действительно, нарушение гладкости может произойти только из-за наличия прямолинейного ребра, концы которого лежат на границе шапочки. Но тогда шапочка вырождается в плоскую выпуклую область.

Из теорем 52 и 53 вытекает следующая

Теорема 55. *Если для всех областей G выпуклой поверхности Φ выполнены неравенства*

$$0 < a_1 = \text{const} \leqslant \frac{\tau(G)}{\sigma(G)} \leqslant a_2 = \text{const} < +\infty, \quad (19,1,1)$$

то поверхность Φ гладкая.

Теорема 55 играет важную роль при исследовании дифференциальных свойств обобщенных решений уравнения Монжа — Ампера.

В теоремах 52—55 под выпуклой поверхностью, согласно А. Д. Александрову [1а], понимается любая область (т. е. связное открытое множество) на границе выпуклого тела.

Пусть, как и выше, Ω — открытая выпуклая ограниченная область на плоскости x, y. Тогда график всякой выпуклой функции $z(x, y)$, заданной в Ω над каждой открытой областью $\Omega' \subseteq \Omega$, определяет некоторую выпуклую поверхность. Очевидно, имеет место

Лемма 8. *Пусть Ω' — открытая область, содержащаяся в Ω и удаленная от границы Ω на положительное расстояние $\rho > 0$. Пусть, далее, $z(x, y)$ — выпуклая функция, заданная в Ω. Предположим, что над Ω' поверхность Φ_z — график функции $z(x, y)$ — является гладкой. Тогда функция $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема в Ω'.*

Пусть $f(p, q)$ — неотрицательная функция, заданная на плоскости p, q. Положим

$$f_1(N) = \sup_{p^2+q^2 \leqslant N^2} f(p, q), \quad f_2(N) = \inf_{p^2+q^2 \leqslant N^2} f(p, q).$$

Функции $f_1(N)$ и $f_2(N)$ являются соответственно неубывающей и невозрастающей функциями переменной $N \in (0, +\infty)$.

Будем говорить, что функция $f(p, q)$ правильная, если при любом $N \in [0, +\infty)$ выполняются соотношения

$$f_1(N) < +\infty, \quad f_2(N) > 0.$$

Теорема 56. *Пусть область $\Omega' \subset \Omega$ и удалена от границы Ω на положительное расстояние $\rho > 0$. Пусть, далее, $z(x, y)$ — выпуклая функция, заданная в Ω, и пусть, наконец, $f(p, q)$ — правильная на плоскости p, q функция.*

Тогда, если для всех областей $G \subseteq \Omega'$ справедливы неравенства

$$0 < \beta_1 = \mathrm{const} \leqslant \frac{\omega(f, z, G)}{\operatorname{mes} G} \leqslant \beta_2 = \mathrm{const} < +\infty, \qquad (19,1,2)$$

то функция $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области Ω'.

Доказательство. Утверждение настоящей теоремы будет непосредственно вытекать из теоремы 55 и леммы 8, если мы установим, что из неравенств (19,1,2) вытекают неравенства (19,1,1).

Так как точки области Ω' удалены от границы Ω на положительное расстояние ρ, то нормальное изображение области Ω' относительно функции $z(x, y)$ содержится в круге

$$K:\ p^2+q^2 \leqslant \frac{8H^2}{\rho^2}, \tag{19,1,3}$$

где

$$H = \sup_{\Omega} |z(x, y)|.$$

Так как $f(p, q)$ — правильная функция, то при всех $(p, q) \in K$ имеем

$$0 < f_2\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right) \leqslant f(p, q) \leqslant f_1\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right) < +\infty. \tag{19,1,4}$$

Пусть теперь G — произвольная область, содержащаяся в области Ω'. Тогда внешняя кривизна и площадь области $\tilde{G}$ на поверхности Φ_z, которая имеет своей проекцией множество G, находятся по формулам

$$\tau(\tilde{G}) = \omega\left((1+p^2+q^2)^{-3/2}, z, G\right) = \iint\limits_{\nu_z(G)} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q)^{3/2}}, \tag{19,1,5}$$

$$\sigma(\tilde{G}) = \iint\limits_{G} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy. \tag{19,1,6}$$

Имеем

$$\frac{\tau(\tilde{G})}{\sigma(\tilde{G})} = \frac{\omega(f, z, G)}{\operatorname{mes} G}\,\frac{\tau(\tilde{G})}{\omega(f, z, G)}\,\frac{\operatorname{mes} G}{\sigma(\tilde{G})}. \tag{19,1,7}$$

Дадим двусторонние оценки для второго и третьего отношений в правой части (19,1,7):

$$\frac{\tau(\tilde{G})}{\omega(f, z, G)} = \frac{\iint\limits_{\nu_z(G)} (1+p^2+q^2)^{-3/2}\,dp\,dq}{\iint\limits_{\nu_z(G)} f(p, q)\,dp\,dq};$$

$$\frac{\operatorname{mes} G}{\sigma(\tilde{G})} = \frac{\operatorname{mes} G}{\iint\limits_{G} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\left(1+\frac{8H^2}{\rho^2}\right)^{3/2} f_1\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right)} \leqslant \frac{\tau(\widetilde{G})}{\omega(f,z,\widetilde{G})} \leqslant \frac{1}{f_2\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right)};$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{8H^2}{\rho^2}\right)^{1/2}} \leqslant \frac{\operatorname{mes} G}{\sigma(\widetilde{G})} \leqslant 1.$$

Из этих неравенств, соотношения (19,1,7) и неравенств (19,1,2) приходим к неравенствам

$$0 < \alpha_1 \leqslant \frac{\tau(\widetilde{G})}{\sigma(\widetilde{G})} \leqslant \alpha_2 < +\infty,$$

где постоянные

$$\alpha_1 = \beta_1 \frac{1}{\left(1+\frac{8H^2}{\rho^2}\right)^2 f_1\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right)}, \quad \alpha_2 = \beta_2 \frac{1}{f_2\left(\frac{2\sqrt{2}H}{\rho}\right)}$$

будут одними и теми же для всех областей $G \subseteq \Omega'$. Итак, неравенство (19,1,1) для удельной кривизны области $\widetilde{G}$ установлено. Теорема доказана.

Если выполнены все условия теоремы 56, а неравенства (19,1,2) справедливы для всех областей, содержащихся в открытой области Ω, то функция $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема в Ω.

Пусть Γ — граница области Ω, тогда, если замыкание $\nu_z(\Omega)$ нормального изображения области Ω относительно функции $z(x, y)$ ограничено, то при выполнении условий теоремы 56 в области Ω функция $z(x, y) \in C^1(\Omega+\Gamma)$. (При этом, естественно, значения z_x и z_y на Γ принимаются в смысле предельных значений этих функций изнутри области Ω.)

2. Теорема единственности для обобщенных решений уравнений $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$. Пусть в области $\Omega + \Gamma$ рассматриваются два обобщенных решения уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad (19,2,1)$$

обращенных выпуклостью в сторону $z < 0$ и совпадающих на кривой Γ. Мы будем предполагать в этом пункте, что функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ непрерывна и неотрицательна при всех конечных z, p, q и всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$. Вначале будет установлена теорема единственности для регулярных решений. Это сделано для того, чтобы доказательство теоремы для обобщенных решений было более прозрачным.

Теорема 57. *Пусть в области* Ω *задано уравнение* (19,2,1), *где* $\varphi(x, y, z, p, q)$ — *непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi > 0, \quad \varphi_z \geqslant 0, \tag{19,2,2}$$

а $z_1(x, y)$, $z_2(x, y) \in W^+(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ — *решения этого уравнения. Тогда, если* $z_1(x, y)$ *и* $z_2(x, y)$ *совпадают на границе* Ω, *то они совпадают в* Ω *тождественно.*

Доказательство. Имеем

$$\left.\begin{aligned} r_1 t_1 - s_1^2 &= \varphi(x, y, z_1, p_1, q_1), \\ r_2 t_2 - s_2^2 &= \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2). \end{aligned}\right\} \tag{19,2,3}$$

Положим

$$u = z_1 - z_2.$$

Функция $u(x, y)$ обращается в нуль на границе Ω. Теорема будет доказана, если мы установим, что $u(x, y) \equiv 0$ в Ω.

Введем функции

$$A = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad B = \frac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad C = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = (r_1 t_1 - s_1^2) - (r_2 t_2 - s_2^2). \tag{19,2,4}$$

Отсюда и из (19,2,3) получаем, что $u(x, y)$ есть решение уравнения

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z u, \tag{19,2,5}$$

где функции φ_p, φ_q, φ_z вычислены для значений z, p, q, промежуточных между z_1, p_1, q_1 и z_2, p_2, q_2.

Квадратичные формы

$$t_1\xi^2 - 2s_1\xi\eta + r_1\eta^2 \quad \text{и} \quad t_2\xi^2 - 2s_2\xi\eta + r_2\eta^2$$

положительно определенные. Поэтому их полусумма

$$A\xi^2 - 2B\xi\eta + C\eta^2$$

также положительно определенная форма и, следовательно, выражение $AC - B^2$ строго положительно. Таким образом, уравнение (19,2,5) для функции $u(x, y)$ есть уравнение эллиптического типа. А так как $u=0$ на границе Ω и $\varphi_z \geqslant 0$, то, согласно известному принципу максимума (см. § 1, п. 4 гл. I), функция $u(x, y)$ не может иметь в Ω ни положительных максимумов ни отрицательных минимумов. Следовательно, $u \equiv 0$ в Ω и теорема доказана.

Замечание. Если рассматривать решения $z_1, z_2 \in W^- \cap C^2$ уравнения (19,2,1), то теорема единственности будет иметь место, если условие

$$\varphi_z \geqslant 0$$

заменить условием

$$\varphi_z \leqslant 0.$$

В этом случае квадратичная форма $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$, рассмотренная в доказательстве теоремы 57, будет на этот раз отрицательно определенной.

При переходе к обобщенным решениям уравнения (19,2,1) все построения, рассмотренные выше, сохраняются, кроме одного. Именно может оказаться, что в точках положительного максимума или отрицательного минимума функции $u(x, y)$ не существует d^2u. А тогда принцип максимума неприменим.

В теореме единственности, к которой мы переходим, используется интегральный принцип максимума.

Теорема 58. *Пусть $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — два обобщенных решения уравнения*

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \tag{19,2,1}$$

совпадающие на границе области Ω.

Предположим, что $z_1, z_2 \in W^+(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, а функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ при всех $(x, y) \in \Omega$ и любых конечных z, p, q такова, что

1) *она непрерывна и неотрицательна,*

2) *как функция переменной z при фиксированных значениях остальных аргументов она абсолютно непрерывна и удовлетворяет неравенству*

$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant c = \text{const} > 0. \tag{19,2,6}$$

Тогда решения $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ совпадают в Ω тождественно.

Доказательство. Рассмотрим в Ω функцию

$$u = z_1 - z_2 \in C^1(\Omega).$$

Очевидно, что $u|_{\text{гр.}\,\Omega} = 0$. Так как при построении функции u функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ можно менять ролями, то достаточно установить, что функция $u(x, y)$ не может иметь в Ω отрицательных минимумов. Допустим, что это не так, и пусть

$$\inf_{\Omega} u(x, y) = m < 0.$$

Обозначим через F множество точек Ω, где $u(x, y) = m$. Так как $u(x, y) \in C^1(\Omega)$ и $u(x, y) = 0$ на границе Ω, то F есть замкнутое множество, удаленное от границы Ω на некоторое положительное расстояние ρ. Пусть $\delta > 0$ удовлетворяет неравенству $\delta < \rho$. Обозначим через G_δ сумму открытых кругов радиуса δ с центрами в точках множества F. Множество G_δ открытое и удалено от границы Ω на расстояние, не меньшее чем $\rho - \delta > 0$. Пусть G'_δ — граница G_δ. Так как G'_δ удалено от F на положительное расстояние, то при любом достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь

$$\min_{G'_\delta} u(x, y) = u_\delta > m.$$

Пусть S_δ — график функции $u(x, y)$ над множеством $G_\delta + G'_\delta$. Построим выпуклую оболочку S_δ. Пусть выпуклая поверхность $\tilde{S}_\delta$ есть нижняя граница этой оболочки. Очевидно, что $\tilde{S}_\delta$ имеет своей проекцией на плоскость x, y выпуклую оболочку Γ_δ множества $G_\delta + G'_\delta$. Рассмотрим поверхность $\tilde{S}_\delta$ над множествами G_δ и G'_δ. Так как выпуклая оболочка есть минимальное выпуклое тело, натянутое на S_δ, то на границе G_δ — множестве G'_δ — аппликаты точек поверхности $\tilde{S}_\delta$ не меньше чем u_δ. Следовательно, край поверхности $\tilde{S}_\delta$ лежит над плоскостью $z = u_\delta$. Поскольку на множестве F имеем, что

$$u(x, y) = m < u_\delta,$$

то отсюда следует, что плоскость $z = u_\delta$ отсекает от поверхности $\tilde{S}_\delta$ шапочку $\tilde{S}^0_\delta$ с ненулевой площадью нормального изображения. Так как поверхность S_δ задана функцией $z=u(x, y)\in C^1(\Omega)$, то площадь нормального изображения шапочки $\tilde{S}_\delta^0$ равна площади нормального изображения множества $\tilde{M}_\delta$, вдоль которого $\tilde{S}_\delta^0$ касается поверхности S_δ. Множество $\tilde{M}_\delta$, очевидно, замкнуто и проектируется в замкнутое множество M_δ, которое лежит внутри G_δ. Множество $\tilde{M}_\delta$ лежит на поверхности S_δ и, кроме того, оно же расположено на выпуклой поверхности $\tilde{S}_\delta^0$. Поверхность S_δ задается функцией $u(x, y)$, которая есть разность выпуклых функций z_1 и z_2. Поэтому для любого множества $M'\subset M$ будем иметь, что

$$\omega(1, u, M')\leqslant\omega(1, z_1, M')+\omega(1, z_2, M')\,^{*})$$

($\omega(1, z, M)$ есть площадь нормального изображения множества M относительно выпуклой функции $z(x, y)$; в этом случае $f(p, q)\equiv 1$).

Так как $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — обобщенные решения уравнения (19,2,1), то функции множества $\omega(1, z_1, M')$ и $\omega(1, z_2, M')$ абсолютно непрерывны в Ω. Следовательно, $\omega(1, u, M')$ есть абсолютно непрерывная функция множеств для борелевских подмножеств M' множества M_δ; кроме того, $u(x, y)$ как разность двух выпуклых функций почти везде имеет второй дифференциал. Поэтому

$$\omega(1, u, M_\delta)=\int\limits_{M_\delta}\int\left(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2\right)dx\,dy. \tag{19,2,7}$$

Так как $\omega(1, u, M_\delta)$ есть одновременно площадь нормального изображения шапочки $\tilde{S}_\delta^0$, то при любом достаточно малом $\delta>0$

$$\omega(1, u, M_\delta)>0. \tag{19,2,8}$$

---

*) Это неравенство для дважды дифференцируемых выпуклых функций z_1 и z_2 вытекает из соотношения $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\left(r_1-r_2\right)\times\left(t_1-t_2\right)-\left(s_1-s_2\right)^2\leqslant\left(r_1t_1-s_1^2\right)+\left(r_2t_2-s_2^2\right)$. На общие выпуклые поверхности оно переносится предельным переходом (подробно см. [14в]).

Функция $u(x, y)$, как было показано в доказательстве теоремы 57, почти везде удовлетворяет уравнению

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \\ = \varphi(x, y, z_1, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2). \quad (19.2,5)$$

Из соотношений (19,2,7) и (19,2,8) вытекает, что множество M_δ имеет положительную меру при любом достаточно малом $\delta > 0$. Над множеством M_δ функция $u(x, y)$ выпуклая. Поэтому почти везде в M_δ: $d^2u \geqslant 0$. Так как

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

— положительная форма, то почти везде в M_δ имеем

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} \geqslant 0. \quad (19,2,9)$$

Докажем, теперь, что если число $\delta > 0$ выбрать достаточно малым, то почти везде в M_δ будем иметь

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} < 0. \quad (19,2,10)$$

Так как неравенства (19,2,9) и (19,2,10) несовместны, то отсюда и будет вытекать доказательство настоящей теоремы.

При всяком $\delta < \rho$ множество $G_\delta + G'_\delta$ удалено на положительное расстояние от границы области Ω. Поэтому при таких $\delta > 0$ на $G_\delta + G'_\delta$ функции z_1, $z_2 \in C^1$. Имеем

$$\Delta = \varphi(x, y, z_1, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2) = \\ = [\varphi(x, y, z_1, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_1, q_1)] + \\ + [\varphi(x, y, z_2, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2)] = \\ = u(x, y) \int_0^1 \varphi_z(x, y, tz_1 + (1-t)z_2, p_1, q_1)\,dt + \\ + [\varphi(x, y, z_2, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2)].$$

По условию теоремы 58 функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ непрерывна при $(x, y) \in \Omega$ и любых конечных значениях z, p, q. Так как z_1, $z_2 \in C^1(G_\delta + G'_\delta)$, а на F

$$p_1 - p_2 = u_x = 0, \quad q_1 - q_2 = u_y = 0,$$

то можно подобрать число $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялись условия

1) $|\varphi(x, y, z_2, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z_2, p_2, q_2)| < \frac{c}{6}|m|$,

2) $\sup\limits_{G_\delta + G'_\delta} u(x, y) < \frac{2}{3}m < 0$.

Тогда почти везде в M_δ будем иметь

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \Delta < -\frac{cm}{6} + \frac{2cm}{3} = \frac{1}{2}cm < 0.$$

Итак, почти везде в M_δ выполняется неравенство (19,2,10). Отсюда, как было сказано выше, и вытекает доказательство теоремы.

Замечание. Если рассматривать обобщенные решения z_1, $z_2 \in W^- \cap C^1$ уравнения (19,2,1), то теорема единственности будет иметь место, если условие

$$\varphi_z \geqslant c > 0$$

заменить условием

$$\varphi_z \leqslant -c < 0.$$

Теорема 53 остается справедливой, если условие (19,2,6) заменить условиями $\varphi > 0$, $\varphi_z \geqslant 0$ и потребовать, чтобы функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ по переменным p и q удовлетворяла условию Липшица. (Эта теорема установлена А. В. Погореловым, см. [14в]).

Если же отказаться от условия $\varphi_z \geqslant 0$, то в классе обобщенных решений уравнения, обращенных выпуклостью вниз, задача Дирихле может иметь не единственное решение. Более того, она может иметь даже счетное число решений. Аналогично, если снять условие $\varphi_z \leqslant 0$, то та же ситуация имеет место в классе обобщенных решений уравнения (19,2,1), обращенных выпуклостью вверх. Эти вопросы были изучены совместно М. А. Красносельским и автором в [5]. Они излагаются ниже в п. 4 этого параграфа.

3. Теоремы о неподвижных точках в конусах. В настоящем пункте кратко излагаются теоремы М. А. Красносельского [10] о неподвижных точках вполне непрерывных операторов в конусах.

А. Основные понятия. Выпуклое замкнутое множество K в вещественном банаховом пространстве E называется конусом, если вместе с каждым элементом $x \in K$ оно содержит все элементы вида tx, где $t \geqslant 0$, и если из x, $-x \in K$ вытекает, что $x = 0$.

При помощи конуса K в пространство E вводят полуупорядоченность: пишут $x \leqslant y$, если $y - x \in K$. Соотношения полуупорядоченности обладают обычными свойствами числовых неравенств: их можно складывать, умножать на неотрицательные числа, переходить в них к пределу и т. п.

Примером конуса в пространстве непрерывных функций в ограниченной выпуклой области Ω является совокупность всех неотрицательных на Ω функций. Для нас в дальнейшем существенную роль играет конус K_0, состоящий из всех неотрицательных и выпуклых в Ω функций, обращающихся в нуль на граничном контуре F.

Ниже используется следующее обозначение: будем писать $x \overline{\leqslant} y$, если $y - x \bar{\in} K$. Аналогично $y \overline{\leqslant} x$, если $x - y \bar{\in} K$. Теория пространств с конусом является одним из возможных геометрических аспектов теории полуупорядоченных пространств *).

Вполне непрерывный оператор F, оставляющий инвариантным некоторый конус K в банаховом пространстве E, называется положительным. Инвариантность конуса описывается соотношением $FK \subseteq K$. Оператор F может быть определен также лишь на конусе K. В дальнейшем через S_ρ обозначается пересечение конуса K_0 со сферой $\|x\|_C = \rho$.

Б. Существование решений. Будем говорить, что элемент x при применении оператора F не идет вперед, если при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$Fx \overline{\geqslant} (1 + \varepsilon) x.$$

Теорема 59. *Пусть положительный оператор A вполне непрерывен, и пусть все точки $x \in S_\rho$ при применении оператора A не идут вперед. Тогда A имеет в конусе K_0 по крайней мере одну неподвижную точку, такую, что $\|x\| \leqslant \rho$.*

Доказательство этой теоремы основано на простом применении принципа Шаудера (см. [10]).

Допустим теперь, что $F(0) = 0$. Тогда возникает вопрос о существовании ненулевых неподвижных точек оператора F.

---

*) Разработка основных положений теории этих пространств дана в работах М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и их учеников.

Будем говорить, что элемент x при применении оператора F не идет назад, если имеет место соотношение

$$Fx \overline{\leqslant} x.$$

В определении движения элемента не назад не участвует число $\varepsilon > 0$.

Теорема 60. *Допустим, что при применении вполне непрерывного положительного оператора A все точки $x \in S_{\rho_1}$ не идут вперед, а все точки $x \in S_{\rho_2}$ не идут назад. Тогда оператор имеет в K_0 по крайней мере одну неподвижную точку x_0, такую, что $\|x_0\|$ находится между числами ρ_1 и ρ_2.*

В случае, когда $\rho_1 < \rho_2$, оператор A называют оператором сжатия слоя $\rho_1 \leqslant \|x\| \leqslant \rho_2$, а в случае $\rho_1 > \rho_2$ оператором растяжения.

Пусть $R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел. Допустим, что положительный вполне непрерывный оператор A, оставляющий инвариантным конус K_0, таков, что все точки $x \in S_{R_{2k-1}}$ не идут вперед, а все точки $x \in S_{R_{2k}}$ не идут назад. Тогда в каждом слое между $S_{R_{2k-1}}$ и $S_{R_{2k}}$; $S_{R_{2k}}$ и $S_{R_{2k+1}}$ оператор A будет иметь неподвижную точку. Отсюда вытекает наличие счетного множества неподвижных точек оператора A в конусе K_0.

В. Теорема единственности ненулевой неподвижной точки. Пусть в пространстве E заданы два конуса K_0 и K, причем $K_0 \subset K$. Отношение полуупорядоченности в K_0 введем с помощью большего конуса K. Пусть u_0 — некоторый фиксированный элемент из K_0. Будем говорить, что оператор F, оставляющий инвариантным конус K_0, u_0-вогнут, если для каждого ненулевого элемента $x \in K_0$ выполнены неравенства

$$\alpha u_0 \leqslant Fx \leqslant \beta u_0,$$

где

$$\alpha = \alpha(x) > 0, \quad \beta = \beta(x) > 0,$$

и

$$F(\lambda x) \geqslant \lambda(1 + \eta) F(x), \quad \lambda \in (0, 1), \quad \eta = \eta(x, \lambda) > 0.$$

Теорема 61. *u_0-вогнутый оператор имеет на конусе K_0 не более одной ненулевой неподвижной точки.*

4. Проблема многих решений для простейших уравнений Монжа — Ампера. Пусть Ω — открытая область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ. Будем предполагать, что удельная кривизна кривой Γ имеет порядок вырождения не более чем $\tau = \mathrm{const} > 0$ (см. п. 3 § 17). В области Ω рассмотрим краевую задачу

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \tag{19,4,1}$$

$$z\,|_{\Gamma} = 0. \tag{19,4,2}$$

Функцию $\varphi(x, y, z, p, q)$ в дальнейшем будет удобно записывать в виде

$$\varphi(x, y, z, p, q) \equiv (1 + p^2 + q^2)^k f(x, y, z, p, q). \tag{19,4,3}$$

Относительно функции $f(x, y, z, p, q)$ будем предполагать, что она задана в области

$$(x, y) \in \Omega + \Gamma, \quad -\infty < z < +\infty,$$
$$-\infty < p < +\infty, \quad -\infty < q < +\infty,$$

где она непрерывна, неотрицательна и удовлетворяет неравенствам

$$f_1(z)\psi_1(x, y) \geqslant f(x, y, z, p, q) \geqslant f_2(z)\psi_2(x, y); \tag{19,4,4}$$

$f_1(z)$ и $f_2(z)$ — непрерывные неотрицательные функции, а $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ неотрицательны и суммируемы в Ω.

Как мы уже видели в § 17, интересен случай, когда число $k \geqslant 0$ *). Мы будем изучать проблему многих решений для задачи (19,4,1—2), ограничиваясь рассмотрением лишь неотрицательных выпуклых функций, обращающихся в нуль на Γ. Этот класс функций образует в пространстве $C(\Omega)$ конус, который в п. 3 настоящего параграфа был обозначен через K_0.

---

*) В совместной работе М. А. Красносельского и автора [5] рассматривался частный случай этой задачи. А именно, предполагалось, что порядок вырождения удельной кривизны границы равен нулю: $\tau = 0$ (см. § 17, п. 3), а число $k \in [0, 1]$. Поэтому в [5] можно было считать, что $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 1$. Опираясь на результаты п. 3 § 17, можно, сохраняя методику исследования работы [5], рассматривать сразу общий случай задачи (19,4,1—2), что ниже и делается.

Обозначим через $z = A_k(\mu)$ решение краевой задачи

$$\omega\left((1+p^2+q^2)^{-k},\ z,\ e\right) = \mu(e),$$
$$z\,|_\Gamma = 0,$$

где $\mu(e) \geqslant 0$ — вполне аддитивная функция множеств области Ω.

Оператор $A_k(\mu)$ (см. п. 4 § 18) определен на множестве U_k, состоящем из всех вполне аддитивных неотрицательных функций множеств $\mu(e)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а)

$$\mu(\Omega) < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^k} = \begin{cases} +\infty, & k \leqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & k > 1. \end{cases} \tag{19,4,5}$$

б) Существуют числа $a > 0$ и $\lambda \geqslant 0$, что для каждой точки $Q_0 \in \Gamma$ найдется окрестность S такая, что для всех борелевских множеств $H \subseteq S$ выполнено неравенство

$$\mu(H \cap \Omega) \leqslant a\left[\sup_H \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} H \tag{19,4,6}$$

(ρ — расстояние переменной точки множества H до кривой Γ). (Числа a и λ могут зависеть от выбора функции $\mu \in U_k$; важно только, чтобы число $\lambda \geqslant 0$ всегда удовлетворяло неравенству (19,4,7).)

в) Числа k, λ, τ удовлетворяют неравенству

$$k \leqslant 1 + \frac{1}{\tau+2} + \frac{\lambda}{2}. \tag{19,4,7}$$

Нетрудно видеть, что проблема существования многих решений краевой задачи (19,4,1—2) для функций, обращенных выпуклостью вверх, эквивалентна аналогичной проблеме для операторного уравнения

$$z = A_k(f(x,\ y,\ z,\ z_x,\ z_y))$$

в конусе K_0.

Свойство операторов A_k

А) Монотонность.

Теорема 62. *Пусть* $\mu_1(e)$ *и* $\mu_2(e) \in U_k$. *Тогда если для всех* $e \subseteq \Omega$ *имеем*

$$\mu_1(e) \leqslant \mu_2(e),$$

то для функций

$$z_1(x, y) = A_k(\mu_1),$$
$$z_2(x, y) = A_k(\mu_2)$$

в Ω *справедливо неравенство*

$$z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y).$$

Это утверждение есть частный случай теоремы 41 (§ 16, п. 4).

Теорема 63. *Пусть числа* k_1, k_2 *таковы, что*

$$0 \leqslant k_1 < k_2.$$

Пусть функция множества $\mu(e) \in U_{k_1} \cap U_{k_2}$, *тогда функции*

$$z_1 = A_{k_1}(\mu),$$
$$z_2 = A_{k_2}(\mu)$$

в Ω *удовлетворяют неравенству*

$$z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y).$$

Доказательство. Действительно, для всех множеств $e \subseteq \Omega$ имеем

$$\omega\left[(1+p^2+q^2)^{-k_1}, z_2, e\right] =$$
$$= \iint_e \left(1+z_x^2+z_y^2\right)^{k_2-k_1} \mu(de) \geqslant \omega\left[(1+p^2+q^2)^{-k_1}, z_1, e\right].$$

Отсюда с помощью теоремы 62 и получаем утверждение теоремы 63.

В заключение заметим, что оператор $A_0(\mu)$ $(k=0)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ удовлетворяет соотношению

$$A_0(\lambda\mu) = \sqrt{\lambda}\, A_0(\mu). \tag{19,4,8}$$

Б) Полная непрерывность оператора A_k.

Теорема 64. *Если функции множества* $\mu_n(e) \in U_k$ *таковы, что*

$$\mu_n(\Omega) \leqslant \mu_0 = \text{const} < \begin{cases} +\infty, & \text{если } k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & k > 1, \end{cases}$$

то функции

$$z_n(x, y) = A_k(\mu)$$

удовлетворяют в Ω *неравенствам*

$$0 \leqslant z_n(x, y) \leqslant \begin{cases} \left[\left(1 + \dfrac{1-k}{\pi}\mu_0\right)^{\frac{1}{1-k}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{diam}\Omega, & k < 1; \\ \left(e^{\frac{\mu_0}{\pi}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{diam}\Omega, & k = 1; \\ \left[\left(1 - \dfrac{k-1}{\pi}\mu_0\right)^{-\frac{1}{k-1}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{diam}\Omega, & k > 1. \end{cases} \tag{19,4,9}$$

Доказательство. Из теорем 42 и 44 (§ 17, п. 1) имеем, что при всех n

$$0 \leqslant z_n(x, y) \leqslant F\left((1 + p^2 + q^2)^{-k}, \mu_0\right) d, \tag{19,4,10}$$

где функция F определена в п. 2 § 9, а d — диаметр области Ω. Заметим, что в § 9 для функций вида $(1 + p^2 + q^2)^{-k}$ было найдено точное аналитическое выражение функции F.

Из (9,1,7) и (19,4,10) непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 65. *Пусть функции множества* $\mu_n(e) \in U_k$ *сходятся слабо внутри* Ω *к функции множества* $\mu(e) \in U_k$. *Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

1. *При всех* n

$$\mu_n(\Omega) \leqslant \mu_0 < \begin{cases} +\infty, & \text{если } k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{если } k > 1. \end{cases} \tag{19,4,11}$$

2. *Существуют числа $a > 0$ и $\lambda \geqslant 0$, что для каждой точки $Q_0 \in \Gamma$ найдется окрестность S такая, что для борелевских множеств $H \subseteq S$ имеем*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \mu_n (H \cap S) \leqslant a \left(\max_{H} \rho^{\lambda} \right) \operatorname{mes} H. \qquad (19,4,12)$$

3. *Числа k, λ, τ связаны неравенством*

$$k \leqslant 1 + \frac{1}{\tau + 2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда функции

$$z_n(x, y) = A_k(\mu_n)$$

равномерно в $\Omega + \Gamma$ сходятся к функции

$$z(x, y) = A_k(\mu).$$

Замечание. Каждая из функций $\mu_n(e)$, согласно определению множества U_k, удовлетворяет неравенству

$$\mu_n (H \cap \Omega) \leqslant a_n \left(\max_{H} \rho^{\lambda_n} \right) \operatorname{mes} H, \qquad (19,4,13)$$

где H — борелевское множество из некоторой окрестности произвольной точки $Q_0 \in \Gamma$. Условие 2 теоремы 65 будет всегда выполненным, если при всех n справедливы следующие требования:

а) окрестность точки $Q_0 \in \Gamma$, в пределах которой выполняется соотношение (19,4,13), будет одной и той же,

б) константы a_n и λ_n одни и те же. Этот усиленный вариант условия 2 теоремы 65 будет часто использоваться ниже.

Доказательство. Из условия (19,4,11) и теоремы 64 вытекает, что совокупность функций

$$z_n(x, y) = A_k(\mu_n) \qquad (19,4,14)$$

удовлетворяет в Ω неравенствам

$$0 \leqslant z_n(x, y) \leqslant F\left((1 + p^2 + q^2)^{-k}, \mu_0\right) \operatorname{diam} \Omega.$$

Из теоремы 43 (§ 17, п. 1) тогда будет следовать, что последовательность (19,4,14) компактна относительно точечной сходимости в Ω. Каждая точечно сходящаяся подпоследовательность функций

$$z_{n_s}(x, y) = A_k\left(\mu_{n_s}\right),$$

извлеченная из последовательности (19,4,14), удовлетворяет условиям теоремы 45 (§ 17 п. 3). Поэтому $z_{n_s}(x, y)$ равномерно сходятся к некоторой выпуклой функции $\tilde{z}(x, y) \in K_0$.

Нетрудно видеть, что $\tilde{z}(x, y)$ есть решение задачи Дирихле

$$\omega\left[(1+p^2+q^2)^{-k}, \tilde{z}, e\right] = \mu(e),$$
$$\tilde{z}\,|_{\Gamma} = 0.$$

Функция $z(x, y) = A_k(\mu) \in K_0$ есть решение той же задачи Дирихле. Следовательно, из теоремы 41 вытекает, что

$$z(x, y) = \tilde{z}(x, y).$$

Итак, всякая подпоследовательность компактной последовательности (19,4,14), сходящаяся точечно в Ω, равномерно сходится к функции $z(x, y) = A_k(\mu)$.

Поэтому $z_n(x, y)$ равномерно сходятся к $z(x, y)$.

Таким образом, любая последовательность функций множества $\mu_n \in U_k$, удовлетворяющая условиям 1—3, оператором A_k переводится в компактную относительно равномерной сходимости последовательность выпуклых функций из конуса K_0.

Остановимся на некоторых частных случаях теоремы 65.

1. Число $k \leqslant 1$. В этом случае неравенство

$$k \leqslant 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\tau+2}$$

выполняется при предельных значениях числа λ и τ: $\lambda = 0$ и $\tau = 0$, кроме того

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^k} = +\infty.$$

Поэтому все условия теоремы 65 сводятся к следующему: функции множества $\mu_n(e)$ сходятся слабо внутри Ω к $\mu(e)$ и числа $\mu_n(\Omega)$ равномерно ограничены.

Отсюда следует, что при $k \leqslant 1$ оператор $A_k(\mu)$ переводит каждое семейство функций множества $\mu(e)$ с равномерно ограниченными вариациями в семейство выпуклых функций из конуса K_0, компактное относительно равномерной сходимости.

2. Если рассматривать области Ω, ограниченные кривыми с удельной кривизной, отделенной от нуля снизу положительным числом ($\tau = 0$), то теорема 65 и выводы из нее сохранятся при условиях, что вместо (19,4,7) выполнено неравенство $k \leqslant \frac{3+\lambda}{2}$.

3. Пусть V_k — подмножество U_k, состоящее из абсолютно непрерывных функций множества. Всякая функция $\mu(e) \in V_k$ порождается некоторой неотрицательной суммируемой функцией $\psi(x, y)$, такой, что

$$\int_\Omega\int \psi(x, y)\,dx\,dy < \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{если} \quad k > 1 \end{cases} \tag{19,4,15}$$

и

$$\psi(x, y) \leqslant a\rho^\lambda. \tag{19,4,16}$$

Неравенство (19,4,16) выполняется для точек (x, y), лежащих в достаточно узкой окрестности границы области Ω. Через ρ здесь обозначено расстояние от точки (x, y) до кривой Γ.

Пусть $g_1(x, y), \ldots, g_n(x, y), \ldots$ — последовательность неотрицательных, суммируемых в Ω функций, удовлетворяющая равномерной оценке

$$g_n(x, y) \leqslant \psi(x, y), \tag{19,4,17}$$

где $\psi(x, y)$ — функция, удовлетворяющая условиям (19,4,15—16). Тогда, если $g_n(x, y)$ почти везде в Ω сходится к функции $g(x, y) \geqslant 0$, то из известной теоремы Лебега следует, что для любого множества $e \subseteq \Omega$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_e\int g_n(x, y)\,dx\,dy = \int_e\int g(x, y)\,dx\,dy.$$

Поэтому функции множества

$$\mu_n(e) = \int_e\int g_n(x, y)\,dx\,dy$$

слабо сходятся внутри Ω к функции множества

$$\mu(e) = \int_e\int g(x, y)\,dx\,dy.$$

Функции множества $\mu_n(e)$ и $\mu(e)$ удовлетворяют условиям 1, 2, 3 теоремы 65, если число λ удовлетворяет неравенству

$$k \leqslant 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\tau+2}. \tag{19,4,18}$$

Отсюда вытекает, что если последовательность функций $g_n(x, y)$, сходящаяся почти везде к функции $g(x, y)$, подчинена условиям (19,4,17—18), то оператор A_k переводит последовательность функций множества $\mu_n(e)$, или, что то же самое, последовательность неотрицательных суммируемых функций $g_n(x, y)$ в равномерно сходящуюся последовательность выпуклых функций

$$z_n = A_k(\mu_n) = A_k(g_n(x, y)).$$

В) Существование многих решений в краевой задаче (19,4,1—2).

Как уже отмечалось в начале этого пункта, нам надлежит установить существование многих решений у операторного уравнения

$$z = A_k(f(x, y, z, z_x, z_y))$$

в конусе K_0.

Функция $f(x, y, z, p, q)$, заданная в области

$$(x, y) \in \Omega + \Gamma, \quad z \geqslant 0, \quad -\infty < p < +\infty, \quad -\infty < q < +\infty \tag{19,4,19}$$

порождает на конусе K_0 оператор

$$g_z(x, y) = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

переводящий T_0 в совокупность неотрицательных функций, заданных в Ω.

Как уже говорилось выше, функция $f(x, y, z, p, q)$ непрерывна в области (19,4,19) и удовлетворяет неравенствам

$$f_1(z)\psi_1(x, y) \geqslant f(x, y, z, p, q) \geqslant f_2(z)\psi_2(x, y), \tag{19,4,20}$$

где $f_i(z) > 0$ и $\psi_i(x, y) > 0$ непрерывные функции своих аргументов соответственно для $z \in [0, +\infty)$ и $(x, y) \in \Omega + \Gamma$.

Положим

$$F_1(R) = \max_{0 \leqslant z \leqslant R} f_1(z), \tag{19,4,21}$$

$$L_1 = \int\limits_{\Omega}\int \psi_1(x, y)\,dx\,dy, \tag{19,4,22}$$

и пусть, кроме того, функция $\psi_1(x, y)$ в достаточно узкой окрестности кривой Γ удовлетворяет неравенству

$$\psi_1(x, y) \leqslant a\rho^\lambda,$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, а ρ — расстояние точки (x, y) до Γ. Число $\lambda \geqslant 0$ удовлетворяет, как всегда, неравенству

$$k \leqslant 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\tau + 2}.$$

Рассмотрим оператор

$$B_k(z) = A_k(g_z(x, y)) \equiv A_k(f(x, y, z, z_x, z_y)) \tag{19,4,23}$$

в конусе K_0. Этот оператор определен на тех $z \in K_0$, для которых выполнено неравенство

$$L_1 F_1(\|z\|_C) < \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{если} \quad k > 1. \end{cases}$$

Если через K_R обозначить множество элементов конуса K_0, удовлетворяющих неравенству

$$\|z\|_C \leqslant R,$$

то при всех R, таких, что

$$L_1 F_1(R) < \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{если} \quad k > 1, \end{cases} \tag{19,4,24}$$

будем иметь, что оператор $B_k(z)$ есть вполне непрерывный оператор из K_R в K_0. Это вытекает из свойств функции $\psi_1(x, y)$, теоремы 65 и замечания к ней.

Рассмотрим, как ведет себя оператор $B_k(z)$ на множествах S_R, являющихся в пространстве $C(\Omega)$ пересечением конуса K_0 и сферы радиуса R.

Лемма 9. *Если число* $R > 0$ *удовлетворяет условию* (19,4,24), *то для функций* $z \in S_R$ *справедливо неравенство*

$$\|B_k(z)\|_C \leqslant F\left((1+p^2+q^2)^{-k},\ L_1F_1(R)\right) \operatorname{diam} \Omega.$$

Доказательство. Пусть

$$u = B_k(z) \in K_0.$$

Тогда $u|_\Gamma = 0$ и

$$\omega\left((1+p^2+q^2)^{-k},\ u,\ \Omega\right) \leqslant L_1F_1(R).$$

Из теоремы 44 имеем

$$0 \leqslant u = B_k(z) \leqslant F\left((1+p^2+q^2)^{-k},\ L_1F_1(R)\right) \operatorname{diam} \Omega.$$

Лемма доказана.

Пусть функция $\psi_2(x, y) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ в некотором круге Ω_1, который удален от границы Ω на расстояние $\rho_0 > 0$. Рассмотрим оценку снизу для $\|B_k(z)\|_C$ на множествах S_R.

Прежде всего отметим, что в Ω для любой функции $z(x, y) \in K_0$ справедлива оценка

$$z(x, y) \geqslant \frac{\rho(x, y)}{d} \|z\|_C,$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние точки (x, y) до кривой Γ, а d — диаметр области Ω. Действительно, пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$ — точка, где

$$z(x_0, y_0) = \|z\|_C.$$

Построим конус с вершиной в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ и направляющей Γ. Пусть $h(x, y) \in K_0$ — функция, задающая этот конус. Тогда в Ω имеем

$$z(x, y) \geqslant h(x, y) \geqslant \rho(x, y) \frac{\|z\|_C}{d}.$$

Положим

$$\delta = \frac{\rho_0}{d}.$$

Через $\chi_\delta(x, y)$ обозначим характеристическую функцию множества, состоящего из тех точек Ω, для которых $\rho(x, y) \geqslant \delta d$.

Из определения числа $\delta > 0$ следует, что это множество не пусто. Пусть теперь $z(x, y) \in K_0$, тогда

$$z(x, y) \geqslant \frac{\rho(x, y)}{d} \|z\|_C \geqslant \frac{\rho_0}{d} \|z\|_C \chi_\delta(x, y) = \delta \|z\|_C \chi_\delta(x, y).$$

Поэтому

$$f_2[z(x, y)] \geqslant f_2[z(x, y)] \chi_\delta(x, y) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{\delta \|z\|_C \leqslant z \leqslant \|z\|_C} f_2(z) \chi_\delta(x, y) \psi_2(x, y).$$

Следовательно,

$$g_z(x, y) = f(x, y, z, z_x, z_y) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{\delta \|z\|_C \leqslant z \leqslant \|z\|_C} f_2(z) \chi_\delta(x, y) \psi_2(x, y).$$

Полагая

$$G_\delta(R) = \min_{\delta R \leqslant z \leqslant R} f_2(z)$$

и используя теорему 63, получим

$$B(z) = A_k(g_z(x, y)) \geqslant A_0(g_z(x, y)) \geqslant A_0(G_\delta(\|z\|_C) \chi_\delta \psi_2) =$$
$$= \sqrt{G_\delta(\|z\|_C)}\, A_0(\chi_\delta(x, y) \psi_2(x, y)).$$

Функция

$$v = A_0(\chi_\delta(x, y) \psi_2(x, y)) \in K_0,$$

не зависит от $z \in K_0$ и отлична от нуля, так как

$$\iint_\Omega \chi_\delta \psi_2(x, y)\, dx\, dy \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{mes} \Omega_1 > 0.$$

Положим

$$L_2 = \|v\|_C > 0.$$

Число L_2 определяется лишь свойствами $\psi_2(x, y)$ и не зависит от выбора функции $z \in K_0$.

Из проведенных выше рассуждений вытекает следующая

Лемма 10. *Для всех выпуклых функций, взятых из области определения оператора $B_k(z)$, справедлива оценка*

$$\|B_k(z)\|_C \geqslant L_2 \sqrt{G_\delta(\|z\|_C)}.$$

Теорема 66. *Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ удовлетворяют следующим требованиям: существуют* *убывающие к нулю последовательности положительных чисел* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{r_n\}$, $\{r_n^*\}$ *такие, что*

1) $f_1(z) \leqslant \alpha_n r_n^2$ при $0 \leqslant z \leqslant r_n$,

2) $f_2(z) \geqslant \frac{1}{\beta_n} z^2$ при $\delta r_n^* \leqslant z \leqslant r_n^*$.

Тогда краевая задача (19,4,1—2), *или, что то же самое, операторное уравнение*

$$z = B_k(z),$$

имеет по крайней мере счетную последовательность решений, сходящуюся по норме к нулю.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что члены последовательностей r_n и r_n^* чередуются, т. е.

$$r_1 > r_1^* > r_2 > r_2^* > \ldots$$

На множествах S_{r_n} имеем

$$L_1 F_1(r_n) = L_1 \max_{0 \leqslant z \leqslant r_n^2} f_1(z) \leqslant L_1 \alpha_n r_n^2.$$

Так как α_n и $r_n \to 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что при всех n

$$L_1 \alpha_n r_n^2 \leqslant \omega_0 < \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad k \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{если} \quad k > 1, \end{cases}$$

$$F\left((1 + p^2 + q^2)^{-k},\ L_1 \alpha_n r_n^2\right) < r_n d^{-1}.$$

Поэтому в K_{r_n} определен оператор $B_k(z)$, для которого на множествах S_{r_n} справедливы оценки

$$\|B_k(z)\|_C \leqslant F\left((1 + p^2 + q^2)^{-k},\ L_1 \alpha_n r_n^2\right) d < r_n.$$

Из последних вытекает, что на любом S_{r_n} оператор $B_k(z)$ не идет вперед.

При любом n множество $S_{r_n^*}$ лежит в K_{r_n}. Поэтому на $S_{r_n^*}$ оператор $B_k(z)$ определен. Из леммы 10 имеем, что

$$\|B_k(z)\|_C \geqslant L_2 \sqrt{G_\delta(\|z\|_C)}.$$

Применим это неравенство для $z \in S_{r_n^*}$ и воспользуемся тем, что при условии $\delta r_n^* \leqslant z \leqslant r_n^*$ будет всегда

$$f_2(z) \geqslant \frac{1}{\beta_n} z^2.$$

Тогда получим

$$\|B_k(z)\|_C \geqslant L_2 \sqrt{\min_{\delta r_n^* \leqslant z \leqslant r_n^*} f_2(z)} \geqslant L_2 \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\beta_n}} r_n^*.$$

Так как $\beta_n \to 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что

$$\frac{L_2 \sqrt{\delta}}{\sqrt{\beta_n}} > \frac{3}{2}.$$

Отсюда будет следовать, что на всех множествах $S_{r_n^*}$ оператор $B_k(z)$ не идет назад.

Таким образом, в каждом из слоев между $S_{r_n^*}$ и S_{r_n}; S_{r_n} и $S_{r_{n+1}^*}$ существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора $B_k(z)$. Следовательно, у операторного уравнения $z = B_k(z)$ существует по крайней мере счетная последовательность решений, нормы которых стремятся к нулю.

§ 20. *n*-мерные аналоги уравнений Монжа—Ампера ($n > 2$). Сильно эллиптические уравнения Монжа—Ампера

1. *n*-мерный аналог простейшего уравнеиия Монжа — Ампера. Прежде всего введем ряд обозначений, которыми мы постоянно будем пользоваться ниже. Через Ω будет обозначена некоторая область в n-мерном евклидовом пространстве E^n с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Граница Ω будет предполагаться замкнутой выпуклой поверхностью, гомеоморфной $n-1$-мерной сфере; ее мы будем обозначать через Γ.

Точки пространства E^n будем кратко обозначать x, полагая при этом, что $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть, далее, P — некоторое евклидово n-мерное пространство с декартовыми координатами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Точки этого пространства будем обозначать p, полагая

$$p=(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Пусть $z(x_1, \ldots, x_n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная в Ω. Ее мы кратко будем записывать $z(x)$. Набор ее первых частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ будем обозначать Dz.

Далее функцию

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

от переменных $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ будем кратко записывать так:

$$\varphi(x, z, p),$$

предполагая при этом, что $x \in \Omega$, $p \in P$ и z может принимать любые конечные значения.

Пусть $z(x)$ по-прежнему принадлежит $C^2(\Omega)$. Оператор

$$\det\|z_{ij}\|=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \tag{20,1,1}$$

представляет собой n-мерный аналог оператора

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2.$$

Уравнение

$$\det\|z_{ij}\|=\varphi(x, z, Dz) \tag{20,1,2}$$

будем называть n-мерным аналогом простейшего уравнения Монжа — Ампера.

Если функция $\varphi(x, z, p)$ неотрицательна, то при $n>2$ среди решений уравнения (20,1,1) могут быть как выпуклые, так и невыпуклые функции. Ниже в п. 1 мы остановимся на понятии обобщенного решения уравнения (20,1,1) в классе $W^+(\Omega)$ всех выпуклых функций, заданных в Ω и обращенных выпуклостью вниз, и сформулируем результаты, относящиеся к решению первой краевой задачи для уравнения (20,1,1). Доказательство этих результатов дословно повторяет рассуждения, которые были изложены выше для двумерного случая (см. § 18).

Все дальнейшие построения будут вестись в $n+1$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ и введенном выше пространстве P, которое мы иногда будем называть n-мерной плоскостью.

Обозначим через Φ_z выпуклую поверхность, которая в пространстве E^{n+1} задается функцией $z=z(x)\in W^+(\Omega)$.

Отображение ν_z области Ω в плоскость P, которое произвольной точке $x\in\Omega$ относит совокупность угловых коэффициентов $p=(p_1, \ldots, p_n)$ всех опорных плоскостей к Φ_z, проходящих через точку $(x, z(x))\in\Phi_z$, назовем нормальным изображением области Ω, порожденным поверхностью Φ_z или функцией $z(x)$. Так же, как и в двумерном случае, это отображение может быть многозначным.

Пусть $f(p)$ — локально суммируемая, неотрицательная функция, заданная на плоскости P. Эта функция порождает условную кривизну поверхности

$$\omega(f, z, e)=\int\limits_{\nu_z(e)} f(p)\,dP \qquad (dP=dp_1\,\ldots\,dp_n), \tag{20,1,3}$$

которая является вполне аддитивной неотрицательной функцией борелевских множеств $e\subset\Omega$.

Положим

$$A(f)=\int\limits_P f(p)\,dP.$$

Рассмотрим уравнение

$$\det\|z_{ij}\|=\psi(x)\,R(Dz), \tag{20,1,4}$$

где $\psi(x)\geqslant 0$ — суммируема в Ω, а $\dfrac{1}{R(p)}$ неотрицательна и локально суммируема на плоскости P.

Уравнению (20,1,4) в классе функций $W^+(\Omega)$ соответствует уравнение

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ z,\ e\right)=\mu(e), \tag{20,1,5}$$

где

$$\mu(e) = \int_e \psi(x)\,dX \qquad (dX = dx_1 \ldots dx_n)$$

абсолютно непрерывная неотрицательная функция множеств области Ω. Можно рассматривать и более общий случай, когда $\mu(e)$ — произвольная вполне аддитивная неотрицательная функция множеств.

Решения уравнения (20,1,5) будем называть условными решениями уравнения (20,1,4); если же $\mu(e)$ — абсолютно непрерывная функция множества, то решение уравнения (20,1,5) будем называть обобщенным решением уравнения (20,1,4).

Сформулируем основные результаты относительно первой краевой задачи для уравнения (20,1,4).

Теорема 67. (аналог теоремы 49). *Пусть вполне аддитивная неотрицательная функция множеств* $\mu(e)$ *удовлетворяет условию*

$$\mu(\Omega) < A\left(\frac{1}{R}\right)$$

и пусть S *— любая непрерывная поверхность, имеющая однозначную проекцию на* Γ. *Тогда существуют решения уравнения* (20,1,5) *из* $W^+(\Omega)$, *края которых лежат под* S, *и среди этих решений есть только одно решение* $z_0(x)$, *край которого лежит над краями всех остальных.*

Более того, это решение расположено над всеми указанными решениями уравнения (20,1,5).

Сформулируем теперь условия, достаточные для того, чтобы первая краевая задача имела решение, обращающееся на Γ в заранее данную непрерывную функцию.

Эти условия таковы:

1. Функция $R(p)$ на плоскости P удовлетворяет неравенству

$$R(p) \leqslant C_0(1 + |p|^2)^k, \tag{20,1,6}$$

где $C_0 = \mathrm{const} > 0$, $|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}$, $k = \mathrm{const}$.

2. Поверхность Γ — граница Ω — такова, что через каждую ее точку можно провести $n-1$-мерную сферу, содержащую

в себе Ω *), причем радиус сферы не больше постоянного числа $r_0 > 0$.

3. Функция множества $\mu(e) \geqslant 0$ такова, что для каждой точки $Q_0 \in \Gamma$ найдется окрестность U, обладающая следующим свойством: для всех борелевских множеств $e \subseteq U$

$$\mu(e \cap \Omega) \leqslant a \left[\sup_e \rho^\lambda\right] \operatorname{mes} e, \qquad (20,1,7)$$

где ρ — расстояние от точки $x \in e$ до границы Ω.

Имеет место следующая

Теорема 68. *Пусть функция* $R(p)$ — *вполне аддитивная неотрицательная функция множеств* $\mu(e)$ — *и граница* Γ *области* Ω *удовлетворяют условиям* 1, 2, 3. *Тогда, если выполнены соотношения*

$$\mu(\Omega) < A\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (20,1,8)$$

и

$$k \leqslant \frac{n+1+\lambda}{2}, \qquad (20,1,9)$$

то первая краевая задача для уравнения (20,1,5) *всегда имеет единственное решение* $z(x) \in W^+(\Omega)$, *краем которого является поверхность* S, *заданная на* Γ *любой непрерывной функцией* $g(X)$.

Замечание 1. В двумерном случае при соблюдении условия строгой положительности удельной кривизны границы области ($\tau = 0$) формула (18,4,4) принимает вид

$$k \leqslant \frac{3+\lambda}{2}. \qquad (20,1,10)$$

Неравенство (20,1,9) есть прямое обобщение неравенства (20,1,10).

Замечание 2. Если функция $\mu(e)$ абсолютно непрерывна:

$$\mu(e) = \int_e \varphi(x)\, dX,$$

*) Условие 2 в случае, когда поверхность S регулярна, сводится к тому, что главные нормальные кривизны в любой точке S строго положительны.

Можно было бы допускать и обращение нормальных кривизн в нуль, как это сделано в двумерном случае (см. § 18, п. 4). Рассмотрением этого вопроса подробно занимался И. Я. Губерман [7].

то решение $z(x)$ краевой задачи для уравнения (20,1,5) будет одновременно и обобщенным решением уравнения

$$\det\|z_{ij}\| = \varphi(x) R(Dz),$$

так как условная кривизна поверхности Φ_z: $\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right)$ будет абсолютно непрерывной функцией множества.

Рассмотрим теперь в выпуклой области Ω первую краевую задачу

$$\det\|z_{ij}\| = \varphi(x) R(Dz), \qquad (20,1,11)$$

$$z|_\Gamma = g(X), \qquad (20,1,12)$$

где

А. $R(p) > 0$ локально суммируема на P и удовлетворяет неравенству (20,1,6).

Б. Для границы Ω выполнено условие 2 (стр. 254).

В. Функция $\varphi(x) \geqslant 0$ суммируема в Ω и в некоторой окрестности U границы Ω удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) \leqslant a\rho^\lambda, \qquad (20,1,13)$$

$a = \text{const} > 0$, ρ — расстояние точки $x \in \Omega$ до Γ.

Г. $g(X)$ — непрерывная функция точки $X \in \Gamma$.

Тогда, если

$$\int_\Omega \varphi(x)\,dX < A\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \mathbf{(20,1,14)}$$

и

$$k \leqslant \frac{n+1+\lambda}{2}, \qquad (20,1,15)$$

то выполняются условия теоремы 68 и, следовательно, краевая задача (20,1,11—12) имеет единственное обобщенное решение $z(x) \in W^+(\Omega)$.

Если функции $R(p)$ и $g(X)$ считать фиксированными, а функцию $\varphi(x)$ изменять так, что выполняются неравенства (20,1,13—15), то на множестве допустимых функций $\varphi(x)$ будет определен оператор B, переводящий $\varphi(x)$ в обобщенное решение $z(x)$ краевой задачи (20,1,11—12):

$$z = B\varphi.$$

Перейдем теперь к рассмотрению первой краевой задачи для уравнения

$$\det\|z_{ij}\| = \Psi(x, z, Dz) \qquad (20,1,16)$$

при краевом условии

$$z|_{\Gamma} = g(X). \tag{20,1,17}$$

Далее неизменно будем предполагать выполненным условие Д. Функция $\Psi(x, z, p)$ непрерывна при $x \in \Omega + \Gamma$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$ и при всех допустимых значениях аргументов удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \Psi(x, z, p) \leqslant \varphi(x) R(p),$$

причем для функций $\varphi(x)$ и $R(p)$ выполнены условия A, B и соотношения (20,1,14—15).

Относительно поверхности Г и заданной на ней функции $g(X)$ мы ниже постоянно предполагаем выполненными условия Б и Г.

Обозначим через T множество выпуклых функций из класса $W^+(\Omega)$, удовлетворяющих краевому условию (20,1,17). Тогда на T определен оператор

$$\mathfrak{G}(z) = B\left(\frac{\Psi(x, z, Dz)}{R(Dz)}\right),$$

который переводит T в себя. Так же, как и в двумерном случае, устанавливается, что этот оператор вполне непрерывен на T в метрике $C(\Omega + \Gamma)$ и его значениями являются функции из $W^+(\Omega)$, имеющие абсолютно непрерывную условную кривизну $\omega\left(\frac{1}{R}, z, e\right)$. Неподвижные точки этого оператора будем называть обобщенными решениями краевой задачи (20,1,16—17).

Для оператора $\mathfrak{G}(z)$ выполнены все условия принципа Шаудера (заметим, что T — выпуклое множество в пространстве $C(\Omega + \Gamma)$). Поэтому краевая задача (20,1,16—17) всегда имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Итак, справедлива следующая

Теорема (аналог теоремы 51). *Если относительно функции $\Psi(x, z, p)$ выполнено условие* Д, *а относительно границы области Ω и заданной на этой границе функции $g(X)$ выполнены условия* Б *и* Г, *то краевая задача* (20,1,16—17) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

2. Условные кривизны различных порядков. Пусть $z(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная в области Ω. Образуем матрицу из ее вторых производных

$$\|z_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2\, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2\, \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n\, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n\, \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{Vmatrix}. \qquad (20,2,1)$$

Главный минор k-го порядка, составленный из $\|z_{ij}\|$:

$$\Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_1}^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_k}\, \partial x_{i_1}} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_k}\, \partial x_{i_2}} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_{i_k}^2} \end{vmatrix}, \qquad (20,2,2)$$

очевидно, является якобианом преобразования

$$\begin{aligned} p_{i_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_{i_1}}, \\ p_{i_2} &= \frac{\partial z}{\partial x_{i_2}}, \\ &\ldots\ldots \\ p_{i_k} &= \frac{\partial z}{\partial x_{i_k}} \end{aligned} \qquad (20,2,3)$$

по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Ниже постоянно под $z(x)$ будем понимать выпуклые функции, обращенные выпуклостью в сторону $z < 0$. У таких функций $d^2 z$ образует неотрицательную квадратичную форму относительно dx_i, dx_j, и потому при любом $k \leqslant n$ главные миноры суть неотрицательные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Введем ряд обозначений, удобных для дальнейшего изложения.

k-мерную плоскость в пространстве E^n, задаваемую системой уравнений

$$x_{i_{k+1}} = x^0_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} = x^0_{i_n},$$

где $x^0_{i_s}$ — некоторые постоянные и $i_{k+1}, \ldots, i_n$ — набор попарно различных чисел из множества $1, 2, \ldots, n$, будем обозначать $Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$.

Отображение (20,2,3), рассмотренное на выпуклой k-мерной области $\Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$, представляет собой нормальное изображение этой области в k-мерную плоскость $\widetilde{P}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ с декартовыми координатами $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$, которое порождается выпуклой функцией

$$\zeta(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = z(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{\substack{x_{i_{k+1}} = x^0_{i_{k+1}}, \\ \cdots\cdots \\ x_{i_n} = x^0_{i_n}.}} \tag{20,2,4}$$

Это отображение на множестве $e \subset \Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$ будем обозначать так: $\chi_z(i_1, \ldots, i_k; e)$.

Пусть теперь $z(x) \in C^2(\Omega)$ такова, что d^2z есть положительно определенная форма. Рассмотрим непрерывную функцию

$$a(x, z, p),$$

определенную для всех $x \in \Omega + \Gamma$ и любых $p \in P$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Подставим вместо z и p в функцию $a(x, z, p)$ соответственно z и набор ее первых производных, умножим результат на $\Delta^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ и проинтегрируем по множеству $E \subset \Omega$. Тогда

$$\int_E a(x, z, p)\, \Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}\, dX =$$
$$= \int\limits_{E \cap Q_{i_1 \ldots i_k}} dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_n} \int\limits_{E \cap Q_{i_{k+1} \ldots i_n}} a\Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_n}. \tag{20,2,5}$$

На $E \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$ отображение

$$\chi_z(i_1, \ldots, i_k, e): \begin{cases} p_{i_1} = \dfrac{\partial z}{\partial x_{i_1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{i_k} = \dfrac{\partial z}{\partial x_{i_k}} \end{cases}$$

обратимо и $\Delta^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ есть якобиан этого преобразования. Поэтому $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ суть однозначные функции $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ и $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$ и, стало быть, z и $\dfrac{\partial z}{\partial x_{i_{k+1}}}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_{i_n}}$ можно рассматривать как функции тех же переменных $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$.

Рассмотрим отображение $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, e)$, которое на $e = \Omega$ определяется формулами

$$\begin{cases} p_{i_1} = \dfrac{\partial z}{\partial x_{i_1}}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{i_k} = \dfrac{\partial z}{\partial x_{i_k}}, \\ x_{i_{k+1}} = x_{i_{k+1}}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{i_n} = x_{i_n}. \end{cases} \tag{20,2,6}$$

Оно переводит Ω в плоскость переменных $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$. Так как $z(x)$ — строго выпуклая функция, то отображение (20,2,6) взаимно однозначное. На множестве $E \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n} \nu_z \left(i_1, \ldots, i_k, \ldots\right)$ совпадает с отображением $\chi_z(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$. Из формулы (20,2,6) видно, что

$$I\left(\frac{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}}{x_{i_1} x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}}\right) = \Delta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Поэтому соотношение (20,2,5) можно записать так:

$$\int\limits_E a\Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} dX =$$

$$= \int\limits_{E \cap Q_{i_1 \ldots i_k}} dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_n} \int\limits_{\chi_z(i_1, \ldots, i_k;\, E \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n})} a\, dp_{i_1} \ldots dp_{i_k} =$$

$$= \int\limits_{\nu_z(i_1, \ldots, i_k, E)} a\, dp_{i_1} \ldots dp_{i_k} dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_n}. \qquad (20,2,7)$$

Функцию множества

$$\omega_{i_1 \ldots i_k}(a,\, z,\, E) = \int\limits_E a\Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} dX,$$

а также суммы таких функций множеств для функций $z(x) \in C^2(\Omega) \cap W^+(\Omega)$ будем называть условными кривизнами порядка k. Условная кривизна, которая была введена в п. 1 § 20, есть кривизна порядка n. Ее будем называть также условной полной кривизной выпуклой поверхности.

Интегральное представление (20,2,7) для условной кривизны порядка k регулярной выпуклой функции указывает путь построения условной кривизны порядка k для любой выпуклой функции $z(x) \in W^+(\Omega)$.

Пусть $z(x) \in W^+(\Omega)$. Рассмотрим прежде всего, как строится отображение (20,2,6) для этой функции. Точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ на n-мерной плоскости $P_{i_1, \ldots, i_k}$ с декартовыми координатами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$ будем ставить в соответствие множество точек

$$\{(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n})\},$$

где $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ — угловые коэффициенты опорных плоскостей в точке $(M, z(M)) \in \Phi_z$. (Эти угловые коэффициенты соответствуют переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.) Координаты точки M относительно осей Ox_{i_s}, $s = k+1, \ldots, n$ при этом соответствии остаются неизменными.

Указанное отображение будем называть нормальным порядка k и обозначать

$$\nu_z(i_1, \ldots, i_k;\, e),$$

если оно применено к множеству $e \subseteq \Omega$. Всякое такое отображение порождается выпуклой функцией $z(x) \in W^{+}(\Omega)$.

При $k = n$ мы имеем нормальное изображение, описанное в п. 1. Для этого случая оставляем старое обозначение $\nu_z(e)$.

Нормальное изображение порядка k, вообще говоря, многозначно. Его однозначность нарушается в тех точках, над которыми поверхность Φ_z имеет более одной опорной плоскости. Так как выпуклая функция имеет почти везде первый дифференциал, то при любом $k \leqslant n$ нарушение однозначности ν_z может быть лишь на множестве нулевой меры.

Рассмотрим отображение $\nu_z^{-1}(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, ставящее в соответствие точкам плоскости $P_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ точки области Ω. Это отображение определено на множестве $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$. Нарушение однозначности обратного отображения ν_z^{-1} происходит в тех точках $\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right)$, которым соответствуют опорные плоскости поверхности Φ_z, имеющие с Φ_z общие прямолинейные отрезки, параллельные k-мерной плоскости

$$\left\{\begin{array}{l} x_{i_{k+1}} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{i_n} = 0. \end{array}\right. \tag{20,2,8}$$

Фиксируем теперь произвольно набор чисел $x^0_{i_{k+1}}, \ldots, x^0_{i_n}$ так, чтобы

$$\Omega \cap Q^0_{i_{k+1}, \ldots, i_n} \neq \Lambda.$$

Пусть

$$\nu_z(i_1, \ldots, i_k; \ldots)$$

— нормальное изображение k-мерного выпуклого множества

$$\Omega \cap Q^0_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$$

с помощью k-мерных опорных плоскостей к графику функции

$$\zeta\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) = z(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{\substack{x_{i_{k+1}} = x^0_{i_{k+1}} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_{i_n} = x^0_{i_n}}}.$$

Тогда для любой точки

$$M \in \Omega \cap Q^0_{i_{k+1}, \ldots, i_n}$$

будем иметь

$$\chi_z(i_1, \ldots, i_k, M) = \nu_z(i_1, \ldots, i_k, M). \qquad (20,2,9)$$

Далее,

$$\Omega = \bigcup \left(\Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}\right),$$

где любая пара слагаемых не имеет общих точек. Поэтому из (20,2,9) следует, что

$$\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega) = \nu_z\left(i_1, \ldots, i_k, \bigcup\left(\Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}\right)\right) = \\ = \bigcup \chi_z\left(i_1, \ldots, i_k, \Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}\right). \qquad (20,2,10)$$

Далее на каждом множестве

$$\chi_z\left(i_1, \ldots, i_k, \Omega \cap Q_{i_{k+1}, \ldots, i_n}\right)$$

k-мерная мера множества точек, где отображение χ_z^{-1} неоднозначно, равна нулю (см. § 17, а также [1a]), поскольку мера нормального изображения особых опорных плоскостей к выпуклой поверхности равна нулю. (Опорная плоскость называется особой, если она имеет с выпуклой поверхностью более одной общей точки.) Поэтому, используя соотношения (20,2,9—10) и теорему Фубини, получим, что нарушение однозначности отображения ν_z^{-1} на множестве $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$ может происходить лишь на множестве нулевой n-мерной меры.

Отсюда следует, что почти везде на множестве

$$\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$$

определены однозначные функции

$$x_{i_1} = x_{i_1}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{i_k} = x_{i_k}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right).$$

Рассмотрим множество опорных плоскостей к графику выпуклой функции $z(x)$ — поверхности Φ_z. Пусть p_1, $p_2, \ldots, p_n$ — угловые коэффициенты этих плоскостей. Докажем, что почти везде на множестве $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$

угловые коэффициенты $p_{i_{k+1}}, \ldots, p_{i_n}$ есть однозначные функции переменных $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$. В пространстве E^{n+1} рассмотрим опорные плоскости к Φ_z, у которых угловые коэффициенты $p^0_{i_1}, \ldots, p^0_{i_k}$ фиксированы. Тогда это множество опорных плоскостей совпадает с совокупностью опорных плоскостей к выпуклому цилиндру Z, имеющему в качестве образующих k-мерные плоскости, параллельные k-мерной плоскости:

$$\begin{cases} z = p_{i_1}x_{i_1} + p_{i_2}x_{i_2} + \ldots + p_{i_k}x_{i_k}, \\ x_{i_{k+1}} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i_n} = 0. \end{cases}$$

В сечении цилиндра Z $n-k$-мерными плоскостями, параллельными плоскости

$$\begin{gathered} x_{i_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i_k} = 0, \end{gathered}$$

получим конгруентные и параллельно расположенные между собой направляющие цилиндра Z. Если $\tilde{\Omega}$ есть проекция Ω на координатную плоскость

$$\begin{gathered} x_{i_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i_k} = 0, \\ z = 0, \end{gathered}$$

то направляющая Z в $\tilde{\Omega}$ задается выпуклой функцией

$$z = u\left(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right). \tag{20,2,11}$$

Так как всякая выпуклая функция почти везде имеет первый дифференциал, то почти везде над точками $(n-k)$-мерной области $\tilde{\Omega}$ опорные плоскости к поверхности (20,2,11) совпадают с касательными плоскостями этой поверхности и, следовательно, почти везде в смысле $n-k$-мерной меры в $\tilde{\Omega}$ угловые коэффициенты $q_{i_{k+1}}, \ldots, q_{i_n}$ $n-k$-мерных опорных плоскостей есть однозначные функции переменных $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$.

В силу проведенного построения опорные плоскости к поверхности Φ_z, имеющие вид

$$z = p^0_{i_1} x_1 + \ldots + p^0_{i_k} x_{i_k} + p_{i_{k+1}} x_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_n} x_{i_n} + c$$

таковы, что

$$p_{i_{k+1}} = q_{i_{k+1}}, \ldots, p_{i_n} = q_{i_n}.$$

Отсюда следует, что на любом $n - k$-мерном множестве $T^0_{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$ плоскости $P_{i_1 \ldots i_k}$, которое есть пересечение плоскости

$$p_{i_1} = p^0_{i_1}, \ldots, p_{i_k} = p^0_{i_k}$$

и множества $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$, угловые коэффициенты $p_{i_{k+1}}, \ldots, p_{i_n}$, за исключением, быть может, множества $n - k$-мерной меры нуль, суть однозначные функции переменных $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$. Поэтому почти везде в смысле n-мерной меры на плоскости $P_{i_1 \ldots i_k}$ на множестве $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$ угловые коэффициенты $p_{i_{k+1}}, \ldots, p_{i_n}$ будут однозначными функциями $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$.

Пусть теперь $a(x, z, p)$ — непрерывная функция, определенная в области $x \in \Omega$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$. Пусть, далее, $z(x) \in W^+(\Omega)$. На множестве $\nu_z(i_1, \ldots, i_k, \Omega)$ функция a и выпуклая функция $z(x)$ определяют измеримую функцию

$$\begin{aligned}
A\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right) = \\
= a\Big(x_{i_1}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right), \ldots \\
\ldots, x_{i_k}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right), x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}, \\
z\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right), p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, \\
p_{i_{k+1}}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right), \ldots \\
\ldots, p_{i_n}\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right)\Big);
\end{aligned}$$

если функция a неотрицательна, то и функция A также неотрицательна.

Условной кривизной порядка k выпуклой функции $z(x)$, порожденной функцией $a(x, z, p)$, будем называть функцию множеств

$$\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}(a, z, e) = \\ = \int\limits_{\nu_z(i_1, \ldots, i_k, e)} A\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right) dp_{i_1} \ldots \\ \ldots dp_{i_k} dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_n}$$

или сумму таких функций.

Непосредственно из определения условной кривизны вытекают следующие предложения:

Теорема 69. *Если $a(x, z, p)$ — неотрицательная функция, то для любой функции $z \in W^+(\Omega)$ условная кривизна $\omega_{i_1 \ldots i_k}(a, z, e)$ неотрицательна и вполне аддитивна на кольце борелевских множеств Ω.*

Теорема 70. *Пусть $a(x, z, p)$ — знакопеременная функция, для которой справедлива оценка*

$$|a(x, z, p)| \leqslant R\left(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\right) \psi\left(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\right) \rho^\lambda, \qquad (20,2,12)$$

где ρ — расстояние точки $x \in \Omega$ до границы Ω, $\lambda = \mathrm{const} \geqslant 0$, а R и ψ — неотрицательные суммируемые функции: первая на плоскости переменных $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, вторая в области Ω. Тогда условная кривизна $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}(a, z, e)$ вполне аддитивна на кольце борелевских множеств Ω и имеет место оценка

$$\left|\omega_{i_1 \ldots i_k}(a, z, e)\right| \leqslant \\ \leqslant \left\{\sup_e \rho^\lambda\right\} \int\limits_{\tilde{P}_{i_1 \ldots i_k}} R\, dp_{i_1} \ldots dp_{i_k} \int\limits_{e \cap Q_{i_1 \ldots i_k}} \psi\, dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_n}. \qquad (20,2,13)$$

Через $\tilde{P}_{i_1 \ldots i_k}$ здесь обозначена k-мерная плоскость с декартовыми координатами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$.

Из теоремы 70 вытекает важное следствие.

Теорема 71. *Пусть функция* $a(x, z, p)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|a(x, z, p)| \leqslant C_0\left(1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{-m} \rho^{\lambda}, \qquad (20,2,14)$$

где

$$C_0 = \mathrm{const} > 0,$$
$$m = \mathrm{const} > \frac{1}{2}k > 0, \qquad \lambda = \mathrm{const} \geqslant 0$$

и ρ — *расстояние точки* $x \in \Omega$ *до границы* Ω.

Тогда для любой выпуклой функции $z(x) \in W^+(\Omega)$ *и произвольного борелевского множества* $e \subseteq \Omega$ *имеет место оценка*

$$\left|\omega_{i_1 \ldots i_k}(a, z, e)\right| \leqslant C_0\left\{\sup_e \rho^{\lambda}\right\} \sigma_{k-1} q_m d_{i_{k+1} \ldots i_n}(e). \qquad (20,2,15)$$

В (20,2,15) введены следующие обозначения: σ_{k-1} — площадь единичной $k-1$-мерной сферы,

$$q_m = \int_0^{+\infty} \frac{r^{k-1}\,dr}{(1+r^2)^m},$$

$d_{i_{k+1} \ldots i_n}(e)$ — $n-k$-мерная мера проекции множества e на плоскость переменных $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$.

Действительно, так как

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{-m} \leqslant \left(1+\sum_{s=1}^{k} p_{i_s}^2\right)^{-m},$$

то утверждение теоремы 71 немедленно следует из теоремы 70, если положить

$$R(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}) = \left(1+\sum_{s=1}^{k} p_{i_s}^2\right)^{-m}$$

и

$$\psi(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}) = C_0.$$

Отметим, что если в условиях теорем 70 и 71 $\lambda = 0$, то в правых частях неравенств (20,2,12) и (20,2,14) множитель $\sup_e\{\rho^{\lambda}\}$ заменяется числом единица.

Теорема 72. *Если выпуклые функции* $z_n \in W^+(\Omega)$ *сходятся к выпуклой функции* $z \in W^+(\Omega)$ *и функция* $a(x, z, p)$ *удовлетворяет условиям теорем 69 или 70, то условные кривизны* $\omega_{i_1, \ldots, i_k}(a, z_n, e)$ *слабо сходятся внутри* Ω *к условной кривизне* $\omega_{i_1 \ldots i_k}(a, z, e)$.

(Определение слабой сходимости функций множеств внутри области дано выше в п. 4 § 16.)

Доказательство теоремы 72 мы опускаем.

Перед формулировкой теорем 69—72 указывалось, что $a(x, z, p)$ — непрерывная функция всех своих аргументов. Сейчас мы еще раз подчеркиваем, что в теоремах 69—72 предполагается непрерывность этой функции.

3. n-мерные аналоги уравнений Монжа — Ампера. Рассмотрим уравнения вида

$$\det \|z_{ij}\| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, Dz) \Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} \right) + a_0(x, z, Dz), \quad (20,3,1)$$

где

$$\|z_{ij}\| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

$\Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}$ — главные миноры k-го порядка определителя матрицы $\|z_{ij}\|$, $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ и a_0 — непрерывные функции $x \in \Omega$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$. Суммирование во внутренней сумме в правой части (20,3,1) производится по всем наборам из k попарно различных чисел, взятых из совокупности натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$.

Уравнения (20,3,1) будем называть n-мерными аналогами уравнений Монжа — Ампера.

В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что при всех допустимых значениях аргументов функции

$a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ и a_0 неотрицательны и функция a_0 удовлетворяет, кроме того, неравенству

$$a_0(x, z, p) \leqslant R(p_1, \ldots, p_n)\psi(x_1, \ldots, x_n), \qquad (20,3,2)$$

где $R(p_1, \ldots, p_n) \geqslant 0$, и непрерывна на плоскости P, а $\psi(x) \geqslant 0$ и суммируема в Ω.

Тогда уравнение (20,3,1) будет, очевидно, эквивалентно следующему:

$$\frac{\det \| z_{ij} \|}{R(Dz)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, Dz)}{R(Dz)} \Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} \right) + \frac{a_0(x, z, Dz)}{R(Dz)}. \qquad (20,3,3)$$

Из неравенства (20,3,2) и неотрицательности функции a_0 вытекает, что при подстановке в выражение

$$\frac{a_0(x, z, p)}{R(p)}$$

вместо z любой выпуклой функции $z(x) \in W^+(\Omega)$, а вместо p соответственно набора ее первых производных Dz получится суммируемая в Ω функция

$$\varphi_z(x) = \frac{a_0(x, z, Dz)}{R(Dz)}. \qquad (20,3,4)$$

При этом для любого измеримого множества $e \subseteq \Omega$ имеет место неравенство

$$\int_e \varphi_z(x)\, dX \leqslant \int_e \psi(x)\, dX. \qquad (20,3,5)$$

Через $\sigma\left(\frac{a_0}{R}, z, e\right)$ обозначим абсолютно непрерывную функцию множеств области Ω:

$$\sigma\left(\frac{a_0}{R}, z, e\right) = \int_e \varphi_z(x)\, dX. \qquad (20,3,6)$$

Функцию множеств $\sigma\left(\frac{a_0}{R},\ z,\ e\right)$ естественно называть условной площадью графика функции $z(x)$, поскольку при

$$\frac{a_0(x,\ z,\ p)}{R(p)}=\left(1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

функция $\sigma\left(\frac{a_0}{R},\ z,\ e\right)$ дает площадь множества поверхности $z(x)$ над множеством $e\subset\Omega$.

Очевидно,

$$\sigma\left(\frac{a_0}{R},\ z,\ \Omega\right)\leqslant\int_{\Omega}\psi(x)\,dX.$$

Если рассматривать интегральный аналог уравнения (20,3,3) в классе выпуклых функций $W^+(\Omega)$, то он будет иметь вид

$$\omega\left(\frac{1}{R},\ z,\ e\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\ \ldots,\ i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}\left(\frac{a_{i_1\ldots i_k}}{R},\ z,\ e\right)\right)+$$
$$+\sigma\left(\frac{a_0}{R},\ z,\ e\right).\qquad(20,3,7)$$

Интегрирование уравнения (20,3,7) можно трактовать как нахождение выпуклой поверхности с заданной линейной комбинацией условных кривизн разных порядков и условной площади.

Выпуклые функции $z(x)\in W^+(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (20,3,7), будем называть обобщенными решениями уравнений (20,3,1) или (20,3,3).

Перейдем теперь к вопросу о существовании обобщенного решения первой краевой задачи для уравнения (20,3,3).

Сформулируем условия, которые будут предъявлены к коэффициентам уравнения (20,3,3), функциям R и ψ и к границе области Ω.

1. Функция $R(p)$ на плоскости P удовлетворяет неравенству

$$R(p)\leqslant c_0\left(1+\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right)^l,\qquad(20,3,8)$$

где

$$c_0=\mathrm{const}>0,\qquad l=\mathrm{const}.$$

2. Поверхность Γ — граница области Ω — такова, что через каждую ее точку можно провести $n-1$-мерную сферу, содержащую в себе Ω, причем радиусы всех этих сфер не больше числа $r_0>0$.

3. Функции $a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, p)$ и $a_0(x, z, p)$ удовлетворяют в некоторой окрестности U границы Ω и при любых $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$ неравенствам

$$\frac{a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, p)}{R(p)} \leqslant C_{i_1 \ldots i_k}\left(1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{-m_{i_1 \ldots i_k}} \rho^{\lambda_k},$$
$$\frac{a_0(x, z, p)}{R(p)} \leqslant C_0 \rho^{\lambda}, \tag{20,3,9}$$

где $C_{i_1 \ldots i_k}$ и C_0 — положительные постоянные, $m_{i_1 \ldots i_k} > \frac{1}{2}k>0$, $\lambda_k = \text{const} \geqslant 0$, $\lambda = \text{const} \geqslant 0$; через ρ, как обычно, обозначено расстояние точки $x \in \Omega$ до Γ.

Не нарушая общности, можно считать, что ширина окрестности U не превосходит единицы.

4. Для всех $x \in \Omega - U$ и любых $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$ функции $a_{i_1 \ldots i_k}$ и a_0 удовлетворяют неравенствам

$$\frac{a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, p)}{R(p)} \leqslant C_{i_1 \ldots i_k}\left(1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{-m_{i_1 \ldots i_k}}, \tag{20,3,10}$$
$$\frac{a_0(x, z, p)}{R(p)} \leqslant \psi(x), \tag{20,3,11}$$

где $\psi(x) \geqslant 0$ — суммируемая в Ω функция, и $m_{i_1 \ldots i_k} \geqslant \frac{1}{2}k$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 73. *Рассмотрим в Ω первую краевую задачу*

$$\frac{\det\|z_{ij}\|}{R(Dz)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{a_{i_1 \ldots i_k}(x, z, Dz)}{R(Dz)} \Delta^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}\right) + \frac{a_0(x, z, Dz)}{R(Dz)}, \tag{20,3,3}$$

$$z|_{\Gamma} = g(X), \tag{20,3,12}$$

где $g(X)$ — непрерывная функция точки $X \in \Gamma$.

Пусть функции $a_{i_1 \ldots i_k}$, a_0, R *и граница области* Ω *удовлетворяют условиям* 1—4, *сформулированным на стр.* 270, 271. *Тогда, если*

1) *постоянные* l, λ_k *и* λ *связаны неравенствами*

$$l \leqslant \frac{n-k+\lambda_k+1}{2}, \quad l \leqslant \frac{n+\lambda+1}{2}, \qquad (20,3,13)$$

2) *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \ldots i_k} C_{i_1 \ldots i_k} \sigma_{k-1} \, q_{m i_1 \ldots i_k} d_{i_{k+1} \ldots i_n}(\Omega) + \\ + \int_{\Omega} \psi(x)\, dX < A\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (20,3,14)$$

(*по поводу обозначений в* (20,3,14) *см. теорему* 71), *то краевая задача* (20,3,3), (20,3,12) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение. Этим решением является функция* $z(x) \in W^+(\Omega)$.

Приведем план доказательства теоремы 73.

Обозначим через T совокупность выпуклых функций из $W^+(\Omega)$, обращающихся на Γ в функцию $g(X)$. Множество T не пусто и в пространстве $C(\Omega+\Gamma)$ образует выпуклое множество.

Пусть $z(x)$ — произвольная функция из T. Рассмотрим построенную по этой функции операторную функцию борелевских множеств $e \subset \Omega$

$$H(z, e) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1 \ldots i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} \left(\frac{a_{i_1 \ldots i_k}}{R} z, e \right) \right) + \\ + \sigma\left(\frac{a_0}{R}, z, e \right). \qquad (20,3,15)$$

Функция множеств $H(z, e)$, очевидно, неотрицательна. Далее из условий 1—4, стр. 270—271, и соотношений (20,3,13—14) следует, что выполнены условия теорем 68 70, 71, 72. Поэтому совокупность функций множества $H(z, e)$, которые построены по формуле (20,3,15), когда $z(x)$ пробегает T, входит в область определения оператора B (см.

п. 1 § 20, стр. 257). Напомним, что B — оператор, обратный к краевой задаче

$$\frac{\det\|u_{ij}\|}{R(u_i)} = \varphi(x),$$
$$u|_\Gamma = g(X).$$

Поэтому все обобщенные решения уравнения (20,3,3) суть неподвижные точки операторного уравнения

$$z = B(H(z, e)).$$

Из соотношений (20,3,14) и теоремы 72 тем же приемом, который был уже применен в § 18 и п. 1 § 20, легко получаем, что оператор $B(H(z, e))$ непрерывен и переводит выпуклое множество T в свою компактную часть, т. е. выполнены все условия принципа Шаудера. Отсюда и следует существование по крайней мере одного обобщенного решения искомой краевой задачи (20,3,3), (20,3,12).

Особо отметим частный случай, когда в уравнении (20,3,3) функция $R(p)$, характеризующая рост «свободного члена» $a_0(x, z, p)$ по первым производным, имеет сравнительно небольшой порядок роста. Именно, предположим, что в условии 1 неравенство (20,3,8) имеет вид

$$R(p) \leqslant C_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right), \tag{20,3,16}$$

т. е.

$$l = 1.$$

В этом случае

$$A\left(\frac{1}{R}\right) = \int_P \frac{dP}{\left(1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)} = +\infty \tag{20,3,17}$$

и неравенства

$$\frac{n - k + \lambda_k + 1}{2} \geqslant 1, \qquad \frac{n + \lambda + 1}{2} \geqslant 1$$

тривиально выполнены уже при

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Поэтому, если функция $R(p)$ удовлетворяет условию (20,3,16), то условия теоремы 73 значительно упрощаются. Именно опускается условие 3 (см. (20,3,9)), неравенство (20,3,11) и соотношения (20,3,13—14). Сформулируем получившийся результат.

Теорема 73а. *Рассмотрим краевую задачу*

$$\frac{\det\|z_{ij}\|}{R(z_i)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1\ldots i_k}\left(\frac{a_{i_1\ldots i_k}}{R}\Delta^{(k)}_{i_1\ldots i_k}\right)\right)+\frac{a_0}{R},$$
$$z|_\Gamma=g(X),$$

где $g(X)$ — непрерывная функция точки $X\in\Gamma$.

Тогда, если $R(p)$ на плоскости F удовлетворяет неравенству

$$R(p)\leqslant C_0\left(1+\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right)$$

и выполнены условия 2 и 4, то поставленная краевая задача имеет по крайней мере одно обобщенное решение в множестве выпуклых функций $W^+(\Omega)$.

4. Сильно эллиптические уравнения Монжа — Ампера. Пусть Ω — открытая область на плоскости x, y, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ.

В Ω рассмотрим уравнение Монжа — Ампера

$$\Phi(z)\equiv rt-s^2-[A(x,\ y,\ z,\ p,\ q)r+\\+2B(x,\ y,\ z,\ p,\ q)s+C(x,\ y,\ z,\ p,\ q)t+\\+D(x,\ y,\ z,\ p,\ q)]=0.\qquad(20,4,1)$$

Функции A, B, C, D будем предполагать непрерывными по всем аргументам в области

$$(x,\ y)\in\Omega+\Gamma,\quad -\infty<z<+\infty,\quad -\infty<p<+\infty,\\ -\infty<q<+\infty.$$

Исследуем связь между свойствами коэффициентов уравнения (20,4,1) и геометрической формой решений этого же уравнения.

Пусть $z(x,\ y)\in C^2(\Omega)$ — решение уравнения (20,4,1), на котором выражение $\Phi(z)$ положительно эллиптично. Так как

$$\Phi_r=t-A,\quad \Phi_s=-2(s+B),\quad \Phi_t=r-C,$$

то при любых вещественных ξ и η в Ω справедливо неравенство

$$(t-A)\xi^2-2(s+B)\xi\eta+(r-C)\eta^2>0.$$

Поэтому для функции $z(x, y)$ в Ω имеет место соотношение

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2<t\xi^2-2s\xi\eta+r\eta^2.$$

Если дополнительно предположить, что при всех конечных значениях z, p, q и всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ квадратичная форма

$$A(x, y, z, p, q)\xi^2+2B(x, y, z, p, q)\xi\eta+ \\ +C(x, y, z, p, q)\eta^2$$

будет положительной, то рассматриваемое нами решение уравнения (20,4,1) необходимо будет выпуклой функцией.

Уравнение (20,4,1) будем называть сильно эллиптическим уравнением Монжа — Ампера, если выполнены следующие два условия:

1. Квадратичная форма

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2\geqslant 0 \qquad (20,4,2)$$

при всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ и любых конечных z, p, q; ξ, η — произвольные вещественные числа.

2. При всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ и любых конечных z, p, q имеем

$$D(x, y, z, p, q)\geqslant 0. \qquad (20,4,3)$$

Если $A\equiv B\equiv C\equiv 0$, то сильно эллиптическое уравнение переходит в простейшее уравнение Монжа — Ампера.

Из определения положительной эллиптичности выражения $\Phi(z)$ (см. § 1 гл. I) следует, что уравнение (20,4,1) будет эллиптическим, если при всех допустимых значениях аргументов квадратичная форма

$$(t-A)\xi^2-2(s+B)\xi\eta+(r-C)\eta^2 \qquad (20,4,4)$$

положительна. Аналитически это описывается неравенством

$$AC-B^2+D\geqslant 0\ ^{*}), \qquad (20,4,5)$$

*) Заметим, что на самом деле эллиптичность уравнения (20,4,1) влечет за собой строгое неравенство $AC-B^2+D>0$. В дальнейшем нам будет несущественна строгая эллиптичность уравнения (20,4,1). Поэтому мы и используем неравенство (20,4,5).

которое справедливо для $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых конечных z, p, q. В случае сильно эллиптического уравнения (20,4,1) неравенство (20,4,5) выполнено в усиленной форме, именно в этом случае

$$AC - B^2 \geqslant 0$$

и

$$D \geqslant 0.$$

Отметим, что для сильно эллиптического уравнения класс решений, где форма (20,4,5) отрицательна, может содержать уже и невыпуклые поверхности.

Ниже мы будем подробно рассматривать краевые задачи для сильно эллиптического уравнения в классе решений, где форма $(r - C)\xi^2 - 2(s + B)\xi\eta + (t - A)\eta^2$ положительна. Как мы уже говорили, эти решения всегда будут выпуклыми функциями, обращенными выпуклостью в сторону $z < 0$. В этом пункте будет введено понятие обобщенных решений сильно эллиптического уравнения (20,4,1) в классе выпуклых функций $W^+(\Omega)$ и для таких решений будет изучена задача Дирихле.

Прежде всего построим в интегральных терминах обобщение оператора

$$\begin{aligned}\Phi(z) \equiv rt - s^2 - [A(x, y, z, p, q)\, r + {}&\\ + 2B(x, y, z, p, q)\, s + C(x, y, z, p, q)\, t + {}&\\ + D(x, y, z, p, q)]&\end{aligned}$$

на классе $W^+(\Omega)$. Это легко сделать с помощью условных кривизн различных порядков и условной площади.

Именно операторам

$$rt - s^2,$$
$$A(x, y, z, p, q)\, r,$$
$$C(x, y, z, p, q)\, t,$$
$$D(x, y, z, p, q)$$

в классе выпуклых функций $W^+(\Omega)$ соответствуют построенные в пп. 1, 2, 3 § 20 неотрицательные операторные функции множеств области Ω

$\omega(1, z, e)$ (условная кривизна 2-го порядка),
$\omega_1(A, z, e)$ (условная кривизна 1-го порядка),
$\omega_2(C, z, e)$ (условная кривизна 1-го порядка),
$\sigma(D, z, e)$ (условная площадь).

Рассмотрим оператор $2B(x, y, z, p, q)s$. Пусть функция $z(x, y) \in C^2(\Omega)$. От системы декартовых координат x, y перейдем к новой системе декартовых координат $\bar{x}, \bar{y}$, повернув оси координат x и y на угол, равный $\pi/4$. Тогда

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} - \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} + \bar{y}), \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

Введем обозначения

$$\bar{p} = \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{q} = \frac{\partial z}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{r} = \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2}, \quad \bar{s} = \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}\, \partial \bar{y}}, \quad \bar{t} = \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{y}^2}.$$

После простых вычислений получим

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{p} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q},$$
$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{p} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q},$$
$$s = \frac{1}{2} \bar{r} - \frac{1}{2} \bar{t}.$$

Отсюда

$$2B(x, y, z, p, q)s = \\ = B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} - \bar{y}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} + \bar{y}), z, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p} + \bar{q}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p} - \bar{q})\right)(\bar{r} - \bar{t}). \quad (20,4,6)$$

Положим

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} - \bar{y}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} + \bar{y}), z, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p} + \bar{q}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p} - \bar{q})\right) = \\ = \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{p}, \bar{q}).$$

Тогда (20,4,6) примет вид

$$2B(x, y, z, p, q)s \equiv \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{p}, \bar{q})\bar{r} - \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{p}, \bar{q})\bar{t}$$

и, следовательно, оператору $2B(x, y, z, p, q)s$ в новой системе координат соответствует разность операторов, которые порождают условные кривизны первого порядка. Таким образом, в классе $W^+(\Omega)$ оператору $2B(x, y, z, p, q)$ соответствует операторная функция множества

$$\bar{\omega}_1(\bar{B}, z, e) - \bar{\omega}_2(\bar{B}, z, e).$$

Черта над ω_1 и ω_2 указывает, что эти функции множества строятся в декартовой системе координат $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Таким образом, в терминах функций множеств, обобщение уравнения (20,4,1) в классе $W^+(\Omega)$ имеет вид

$$\omega(1, z, e) = \omega_1(A, z, e) + \bar{\omega}_1(\bar{B}, z, e) - \\ - \bar{\omega}_2(\bar{B}, z, e) + \omega_2(C, z, e) + \sigma(D, z, e). \quad (20,4,7)$$

Уравнение (20,4,7) по своей природе мало чем отличается от уравнений, которые изучались в п. 3 § 20. Поэтому и здесь доказательство теоремы существования решения первой краевой задачи может быть проведено по аналогичному плану.

Отметим прежде всего отличие уравнения (20,4,7) от уравнений (20,3,7). В уравнениях (20,3,7) все слагаемые, входящие в правую часть, неотрицательны. Условные кривизны $\bar{\omega}_1(\bar{B}, z, e)$ и $\bar{\omega}_2(\bar{B}, z, e)$, участвующие в образовании правой части (20,4,7), могут быть знакопеременными функциями множества. Поэтому, чтобы свести уравнение (20,4,7) к эквивалентному операторному уравнению вида

$$z = B(V(A, B, C, z, e) + \sigma(D, z, e)),$$

где

$$V(A, B, C, z, e) = \omega_1(A, z, e) + \bar{\omega}_1(\bar{B}, z, e) - \\ - \bar{\omega}_2(\bar{B}, z, e) + \omega_2(C, z, e), \quad (20,4,8)$$

нужно установить неотрицательность функции множества $V(A, B, C, z, e)$ для всех $z \in W^+(\Omega)$ и дать для нее оценки сверху типа тех, о которых шла речь в теоремах 70 и 71 (п. 2 § 20).

Сформулируем соответствующие предложения.

Теорема 74. *Если функции* $z_n \in W^+(\Omega)$ *сходятся к функции* $z \in W^+(\Omega)$, *то* $V(A, B, C, z_n, e)$ *слабо сходятся внутри* Ω *к функции множества* $V(A, B, C, z, e)$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 72.

Теорема 75. *Функция* $V(A, B, C, z, e)$, *построенная по коэффициентам сильно эллиптического уравнения* (20,4,1), *неотрицательна для всех* $z \in W^+(\Omega)$.

Доказательство. Если

$$z_n(x, y) \in C^2(\Omega) \cap W^+(\Omega),$$

то всюду в Ω

$$A(x, y, z_n, z_{nx}, z_{ny})\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + 2B(x, y, z_n, z_{nx}, z_{ny})\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} + \\ + C(x, y, z, z_{nx}, z_{ny})\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} \geqslant 0.$$

Это есть прямое следствие неравенств (20,4,2) и $d^2 z_n \geqslant 0$. Поэтому для любого $e \subseteq \Omega$ имеем

$$V(A, B, C, z_n, e) = \\ = \int\limits_e\int \left(A\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right) dx\, dy \geqslant 0.$$

Из слабой сходимости $V(A, B, C, z_n, e)$ к $V(A, B, C, z, e)$ вытекает утверждение теоремы.

Ниже будем предполагать, что квадратичная форма

$$A(x, y, z, p, q)\xi^2 + 2B(x, y, z, p, q)\xi\eta + \\ + C(x, y, z, p, q)\eta^2 \qquad (20,4,9)$$

при всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых конечных z, p, q удовлетворяет неравенству

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \leqslant (1 + p^2 + q^2)^k \psi(x, y)(\xi^2 + \eta^2); \qquad (20,4,10)$$

здесь k — некоторое фиксированное число, а $\psi(x, y) \geqslant 0$ — непрерывная функция, удовлетворяющая в достаточно узкой окрестности кривой Γ неравенству

$$\psi(x, y) \leqslant a\rho^\lambda, \qquad (20,4,11)$$

где $a = \text{const} > 0$, $\lambda = \text{const} \geqslant 0$ и ρ — расстояние точки $(x, y) \in \Omega$ до Γ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 76. *Для любой функции $z \in W^+(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$V(A', B', C', z, G) \leqslant \sup_G \{\psi(x, y)\} (d_x(G) + d_y(G)) N_\varepsilon, \tag{20,4,12}$$

если выполнено соотношение (20,4,10).

В неравенстве (20,4,12) употреблены следующие обозначения:

$$A' = A(1+p^2+q^2)^{-k'}, \quad B' = B(1+p^2+q^2)^{-k'},$$
$$C' = C(1+p^2+q^2)^{-k'},$$

$G \subset \overline{G} \subset \Omega$ — произвольное открытое множество, $d_x(G)$ и $d_y(G)$ — линейные меры проекций G на оси x и y, $k' = k + \frac{1}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и, наконец, $N_\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$.

Доказательство достаточно провести для функций $z \in W^+(\Omega) \cap C^2$, после чего для любой функции $z \in W^+$ оно получается предельным переходом от регулярных выпуклых функций.

Если $z \in W^+(\Omega) \cap C^2$, то всюду в Ω имеем неравенство

$$Ar + 2Bs + Ct \leqslant (1+p^2+q^2)^k \psi(x, y)(r+t). \tag{20,4,13}$$

Отсюда

$$V(A', B', C', z, G) = \iint_G \frac{Ar+2Bs+Ct}{(1+p^2+q^2)^{k'}}\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \iint_G \frac{\psi(r+t)\, dx\, dy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_G \{\psi(x, y)\} \left[\iint_G \frac{r\, dx\, dy}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} + \iint_G \frac{t\, dx\, dy}{(1+q^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_G \{\psi(x, y)\} [d_y(G) + d_x(G)] N_\varepsilon.$$

Рассмотрим теперь вопрос об условиях существования обобщенных решений первой краевой задачи

$$rt - s^2 = Ar + 2Bs + Ct + D, \tag{20,4,14}$$
$$z|_\Gamma = g(X). \tag{20,4,15}$$

Будем предполагать, что замкнутая выпуклая кривая Γ — граница Ω — имеет ограниченную снизу положительным числом удельную кривизну.

Сформулируем еще раз условия, которые мы накладываем на функции A, B, C, D:

А. $$A(x, y, z, p, q),\quad B(x, y, z, p, q),$$
$$C(x, y, z, p, q),\quad D(x, y, z, p, q)$$

непрерывны при $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых конечных z, p, q.

Б. При тех же значениях переменных справедливы неравенства

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant 0, \tag{20,4,16}$$

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \leqslant (1 + p^2 + q^2)^k \psi(x, y)(\xi^2 + \eta^2), \tag{20,4,17}$$

$$0 \leqslant D(x, y, z, p, q) \leqslant (1 + p^2 + q^2)^{k_1} \psi_1(x, y), \tag{20,4,18}$$

где ξ, η — любые вещественные числа, k, k_1 — некоторые постоянные, $\psi(x, y) \in C(\Omega)$ и $\psi_1(x, y) \in L(\Omega)$ неотрицательны в Ω и удовлетворяют условиям:

$$\psi(x, y) \leqslant a\rho^{\lambda},\quad \psi_1(x, y) \leqslant a_1\rho^{\lambda_1}, \tag{20,4,19}$$

при $\rho \leqslant \delta$, где ρ — расстояние от точки $(x, y) \in \Omega$ до Γ ($\delta > 0$ и $\lambda \geqslant 0$ — некоторые фиксированные числа).

Теорема 77. *Пусть Γ — граница области Ω — имеет ограниченную снизу положительным числом удельную кривизну, а функции A, B, C, D удовлетворяют условиям А и Б. Положим*

$$k' = \max\left\{k + \frac{1}{2} + \varepsilon,\ k_1\right\},$$

где $\varepsilon > 0$ — малое фиксированное число.

Тогда, если выполнены неравенства

$$\sup_{\Omega}\{\psi(x, y)\}[d_x(\Omega) + d_y(\Omega)] N_\varepsilon +$$
$$+ \iint_{\Omega} \psi_1\, dx\, dy < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\, dq}{(1 + p^2 + q^2)^{k'}}, \tag{20,4,20}$$

$$k' \leqslant \frac{3 + \lambda}{2},\quad k' \leqslant \frac{2 + \lambda_1}{2}, \tag{20,4,21}$$

то краевая задача (20,4,14—15) *имеет в* $W^+(\Omega)$ *по крайней мере одно обобщенное решение.*

Наметим план доказательства этой теоремы. Положим

$$f_{k'}(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{-k'}$$

и пусть

$$A' = A(1 + p^2 + q^2)^{-k'}, \quad C' = C(1 + p^2 + q^2)^{-k'},$$
$$B' = B(1 + p^2 + q^2)^{-k'}, \quad D' = D(1 + p^2 + q^2)^{-k'}.$$

Строим операторные функции множеств

$$V(A', B', C', z, e), \quad \sigma(D', z, e).$$

Тогда обобщенные решения краевой задачи (20,4,14—15) есть решения операторного уравнения

$$\omega\left(f_{k'}, z, e\right) = V(A', B', C', z, e) + \sigma(D', z, e),$$

рассматриваемого на множестве T выпуклых функций из $W^+(\Omega)$, удовлетворяющих краевому условию

$$z|_\Gamma = g(X).$$

Исходя из условий настоящей теоремы и опираясь на теоремы 74—76 с помощью рассуждений, примененных нами в § 18 и п. 3 § 20, установим, что оператор

$$B(V(A', B', C', z, e) + \sigma(D', z, e))$$

непрерывен на T и переводит T в свою компактную часть в метрике $C(\Omega + \Gamma)$. Напомним, что T выпукло в $C(\Omega + \Gamma)$. После чего применением принципа Шаудера получаем доказательство теоремы.

Теорема единственности для обобщенных решений. Ниже приводится формулировка теоремы единственности обобщенных решений для сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера. Эта теорема установлена А. В. Погореловым. (Доказательство см. в [14в].)

Пусть в области Ω *рассматривается сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера*

$$rt - s^2 - [Ar + 2Bs + Ct] - D = 0,$$

коэффициенты которого дифференцируемы по z, p, q, причем функция D и форма $A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2$ есть неубывающие функции z.

Тогда обобщенные решения этого уравнения, обращенные выпуклостью в сторону $z<0$, совпадают в Ω, если они совпадают на границе Ω.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С УРАВНЕНИЕМ МОНЖА — АМПЕРА

1. Как известно [11], уравнение

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\varphi(x, y) \tag{1}$$

формально может быть получено как уравнение Эйлера для некоторых функционалов. Такими функционалами, например, являются

$$E(u)=\int\limits_{\Omega}\int\left[u_x^2u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{xx}+6\varphi u\right]dx\,dy, \tag{2}$$

$$I(u)=\int\limits_{\Omega}\int\left(u\left[u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2\right]-3u\varphi\right)dx\,dy. \tag{3}$$

Через Ω обозначена область на плоскости x, y, ограниченная замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой кривой Γ. Если функционалы (2) и (3) рассматривать на классе $\overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$, то имеет место тождество

$$2I(u)=-E(u),$$

которое получается простым интегрированием по частям в интеграле (2). Ниже в обзорном порядке мы рассматриваем вопросы, связанные с решением вариационной задачи для функционала (3). Как известно, корректная постановка таких задач связана с тем, чтобы соответствующее уравнение Эйлера (1) было эллиптическим. Нетрудно видеть, что эллиптичность уравнения (1) равносильна положительности функции $\varphi(x, y)$, а это в свою очередь влечет выпуклость всех дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (1).

Так как уравнение Эйлера для функционала (3) имеет второй, а не четвертый порядок, то рассматриваемая вариационная задача является вырожденной. Этот факт влияет на количество краевых условий в вариационной задаче; именно вместо двух краевых условий приходится рассматривать лишь одно краевое условие. Роль отпавшего краевого условия в известной степени заменяется условием выпуклости функций, сообщающих экстремум функционалу $J(u)$. Это обстоятельство играет существенную роль при исследовании интересующих нас вопросов.

2. Пусть Ω — выпуклая область на плоскости x, y, ограниченная замкнутой существенно выпуклой гладкой кривой Γ (т. е. каждая касательная к Γ имеет с Γ единственную общую точку). Обозначим через $\overset{*}{C}_h$ совокупность непрерывных неотрицательных функций $u(x, y)$, определенных в $\Omega+\Gamma$ и обращающихся на Γ в заданную непрерывную неотрицательную функцию $h(X)$. Через W_h^- обозначим класс всех выпуклых функций, обращающихся на Γ в $h(X)$ и обращенных выпуклостью в сторону $z>0$. Очевидно, $W_h^-\subset\overset{*}{C}_h$. Класс W_h^- не пуст. Действительно, пусть Z — цилиндр с направляющей Γ и образующими, параллельными оси z. Функция $h(X)$ определяет на Z некоторую замкнутую кривую с однозначной проекцией на Γ. Она разбивает Z на две цилиндрические области: нижнюю Z_1 и верхнюю Z_2. Построим выпуклую оболочку Z_1. Легко доказать, что ее граница состоит из цилиндрической области Z_1 и выпуклой вверх поверхности нулевой внешней кривизны S_L. Поверхность S_L задается функцией $z_L(x, y)\in W_h^-$.

Пусть теперь $u\in\overset{*}{C}_h$. Построим выпуклую оболочку Z_1 и поверхности $z=u(x, y)$. Верхняя граница этой выпуклой оболочки задается некоторой функцией $\bar{u}(x, y)\in W_h^-$. Функцию $\bar{u}(x, y)$ будем называть выпуклой оболочкой функции $u(x, y)$. Определим функционалы

$$\Phi_1(u)=\iint_\Omega u\omega(\bar{u}, de),\quad \Phi_2(u)=-3\iint_\Omega \varphi u\,dx\,dy,$$
$$I(u)=\Phi_1(u)+\Phi_2(u),\tag{4}$$

где $\omega(\bar{u}, e)$ — площадь нормального изображения выпуклой функции $\bar{u}(x, y)$. Функционал $I(u)$ и есть распространение функционала (3) на класс функций $\overset{*}{C}_h(\Omega)$. В дальнейшем функционалы $\Phi_2(u)$ и $J(u)$ будем рассматривать в несколько более общем виде

$$\Phi_2(u) = -3\int_\Omega\int u\mu(de), \quad J(u) = \Phi_1(u) - 3\int_\Omega\int u\mu(de), \tag{5}$$

где $\mu(e)$ — вполне аддитивная неотрицательная функция множеств, для которой $\mu(\Omega) < +\infty$. Функционалы (4) получаются из (5), если $\mu(e)$ — абсолютно непрерывная функция множества. Отметим, что если $w \in W_h^-$, то

$$\Phi_1(w) = \int_\Omega\int w\omega(w, de),$$

$$J(w) = \int_\Omega\int w\omega(w, de) - 3\int_\Omega\int w\mu(de).$$

Теорема 78. *Для любой функции $u \in C_h^*$ справедливы соотношения*

$$\Phi_1(u) \geqslant \Phi_1(\bar{u}), \quad \Phi_2(u) \geqslant \Phi_2(\bar{u}), \quad I(u) \geqslant I(\bar{u}).$$

Отсюда ясно, что функцию, реализующую абсолютный минимум функционала $I(u)$, достаточно искать в множестве W_h^-.

До сих пор в задаче о минимуме функционала $I(u)$ использовалось только одно краевое условие $u|_\Gamma = h$. Оказывается, что функционал $I(u)$ в классе функций W_h^- и тем более в C_h^* не непрерывен. Дело в том, что для выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = I(u)$, где $u_h \in W_h^-$ и равномерно сходятся к $u \in W_h^-$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \omega(u_n, \Omega) = \omega(u, \Omega). \tag{6}$$

Соотношение (6) и есть в известном смысле аналог отпавшего второго краевого условия в изучаемой нами вариационной задаче. Именно условие (6) сводится к тому, что опорные плоскости в точках краев выпуклых поверхностей $u_n(x, y)$ должны сходиться к опорным плоскостям на краю предельной поверхности $u(x, y)$. Это в случае достаточной гладкости функций означает, что в точках Γ $\frac{\partial u_n}{\partial n} \to \frac{\partial u}{\partial n}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right.$ — производная $u(x, y)$ по нормали). Отсюда видно, что условие (6) есть в известном смысле обобщение условия, что функции сравнения в невырожденной вариационной задаче второго порядка подчинены условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = h_1(X)$.

Преодоление трудностей, связанных с отсутствием непрерывности функционала $I(u)$, осуществляется следующим образом.

3. Обозначим через $\mathfrak{M}_\varepsilon$ совокупность всех вполне аддитивных неотрицательных функций множества $\mu(e)$ таких, что $\mu(\Omega) < +\infty$ и $\mu(\Omega_\varepsilon) = 0$, где Ω_ε — открытая пограничная полоса ширины $\varepsilon > 0$ области Ω. Пусть, далее, $W_{h,\varepsilon}^{-}$ — совокупность всех выпуклых функций из $W_{h,\varepsilon}^{-}$, для которых $\omega(u, \Omega_\varepsilon) = 0$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 79. *Для функционала $I(u)$ в случае, когда $\mu(e) \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, функцию, сообщающую абсолютный минимум этому функционалу, достаточно искать в классе $W_{h,\varepsilon}^{-}$.*

Теорема 80. *Класс функций $W_{h,\varepsilon}^{-}$ замкнут относительно равномерной сходимости.*

Теорема 81. *Функционал $I(u)$ непрерывен на $W_{h,\varepsilon}^{-}$.*

Решение задачи о нахождении функции, сообщающей абсолютный минимум функционалу $I(u)$, основан на следующих фактах.

Теорема 82. *Для всякой функции $u \in W_{h,\varepsilon}^{-}$, у которой*

$$\|u\|_c \geqslant 2 \max h(X) \geqslant 0,$$

справедливы оценки

$$\Phi_1(u) \geqslant C_1 \varepsilon \|u\|_c (\|u\|_c - \max_{\Gamma} h(x))^2,$$

$$|\Phi_2(u)| \leqslant 3 \|u\|_c \mu(\Omega),$$

где C_1 — постоянная, зависящая лишь от области Ω.

Из теоремы 82 непосредственно следует, что $\lim I(u_n) = +\infty$, если $u_n \in W_{h,\varepsilon}^{-}$ и $\|u_n\|_c \to +\infty$. Поэтому существует такое $M > 0$, что для всех $u \in W_{h,\varepsilon}^{-}$, у которых $\|u\|_c \geqslant M$, имеем

$$I(u) > 1.$$

С другой стороны, для функции $z_L \in W^-_{h,\varepsilon}$, построенной в пункте 1,

$$I(u) = -3 \iint_{\Omega} z_L \mu(de) \leqslant 0,$$

так как $\omega(z_L, \Omega) = 0$. Поэтому функцию, сообщающую абсолютный минимум $I(u)$, достаточно искать в множестве $W^-_{h,\varepsilon,M}$ функций из $W^-_{h,\varepsilon}$, для которых $\|u\|_c < M$. Но множество $W^-_{h,\varepsilon,M}$ компактно в метрике $C(\Omega)$, а функционал $I(u)$ непрерывен на этом множестве. Поэтому существует такая функция $u_\varepsilon \in W^-_{h,\varepsilon}$, что

$$I(u_\varepsilon) = \inf_{u \in C_h^+} I(u).$$

4. Пусть $u(x, y)$ — некоторая функция из класса $W^-_{h,\varepsilon}$. Обозначим через $\eta(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемую в Ω функцию, обращающуюся в нуль в пограничной полосе Ω_ε. Пусть, далее, α — вещественный параметр, изменяющийся в $(-1, 1)$. Рассмотрим функционал

$$T(\alpha) = I(u + \alpha\eta).$$

Теорема 83. *При предположениях* п. 4 *существует производная*

$$\left.\frac{dT}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{I(u + \alpha\eta) - I(u)}{\alpha},$$

причем имеет место формула

$$\left.\frac{dT}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 3 \iint_{\Omega} \eta\,[\omega(u, de) - \mu(de)].$$

Пусть u_ε — функция, сообщающая абсолютный минимум функционалу $I(u)$, для которого $\mu(e) \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. Тогда из теоремы 83 вытекает, что для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\eta(x, y)$, обращающейся в нуль в пограничной полосе Ω_ε, справедливо тождество

$$\iint_{\Omega} \eta\,[\omega(u_\varepsilon, de) - \mu(de)] = 0.$$

Отсюда немедленно вытекает, что функция u_ε удовлетворяет уравнению в функциях множества

$$\omega(u_\varepsilon, e) = \mu(e), \tag{7}$$

где e — любое борелевское множество из Ω. Если

$$\mu(e) = \int\limits_e \int \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

где $\varphi(x, y)$ — неотрицательная суммируемая функция, равная нулю в Ω_ε, то, так как выпуклая функция почти везде имеет второй дифференциал, почти везде в Ω

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \varphi(x, y). \tag{8}$$

Из теоремы 41 следует, что задача Дирихле для уравнения (7) в классе выпуклых функций W_h^+ имеет единственное решение. Отсюда вытекает

Теорема 84. *В классе функций C_h^+ существует лишь одна функция, сообщающая абсолютный минимум функционалу $I(u)$. При этом предполагается, что $\mu(e) \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. Эта функция принадлежит множеству $W_{h,\varepsilon}^+$.*

5. Пусть теперь $\mu(e)$ — неотрицательная вполне аддитивная функция множеств области Ω, причем $\mu(\Omega) < +\infty$. Строим функции множеств $\mu_\varepsilon(M) = \mu(M \cap \Omega - \Omega_{2\varepsilon})$. Тогда: 1) $\mu_\varepsilon(M) \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, 2) при $\varepsilon \to 0$ μ_ε слабо сходятся к $\mu(M)$. Для каждой $\mu_\varepsilon(M)$ существует решение u_ε задачи на абсолютный минимум функционала $I_\varepsilon(u) = \Phi_1(u) - 3\int\limits_\Omega\int u\mu_\varepsilon(de)$, которое является решением задачи Дирихле для уравнения (7) с краевым условием $u|_\Gamma = h(x)$. Из теоремы 41 следует, что при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ всюду в Ω

$$u_{\varepsilon_1}(x, y) \leqslant u_{\varepsilon_2}(x, y). \tag{9}$$

Так как все u_ε равномерно ограничены по модулю величиной, зависящей только от числа $\mu(\Omega)$, то существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x, y) = u(x, y)$. Функция $u(x, y)$ обращается на границе Ω в $h(X)$ и в Ω удовлетворяет уравнению $\omega(u, e) = \mu(e)$. Кроме того, используя неравенство (9), устанавливаем, что $I(u) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(u_\varepsilon)$.

ГЛАВА V

РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОНЖА — АМПЕРА

В настоящей главе исследуются два вопроса, которые тесно связаны между собой: решение задачи Дирихле для уравнений Монжа — Ампера в классе достаточно гладких функций и исследование дифференциальных свойств обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера.

§ 21. Регулярные решения задачи Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$

1. Постановка задачи. На протяжении этого параграфа область Ω будет кругом $x^2 + y^2 < a^2$, а ее граница Γ будет соответственно окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. В круге Γ рассмотрим задачу Дирихле

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad (21,1,1)$$

$$z|_\Gamma = g(s). \qquad (21,1,2)$$

Относительно функций $g(s)$ и $\varphi(x, y, z, p, q)$ предполагаются выполненными следующие условия:

А) $g(s) \in C^{n+2, \lambda}(\Gamma)$; $n \geqslant 2$, $0 < \lambda < 1$.

Б) Функция $\varphi(x, y, z, p, q) \in C^{n, \lambda}$ в области G:

$$(x, y) \in \Omega + \Gamma, \quad -\infty < z < +\infty, \quad -\infty < p, \ q < +\infty.$$

В) В области G выполнены неравенства

$$\varphi(x, y, z, p, q) > 0, \qquad (21,1,3)$$

$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0. \qquad (21,1,4)$$

Нас ниже будут интересовать условия, при которых задача Дирихле (21,1,1—2) имеет решение из класса функций

$$W^{+}(\Omega) \cap C^{n+2, \lambda'}(\Omega+\Gamma), \text{ где } \lambda' \in [0, \lambda].$$

Отметим, что эта задача Дирихле, согласно теореме 57 (§ 19, п. 2), имеет в классе функций $W^{+}(\Omega) \cap C^{2}(\Omega)$ не более одного решения.

Ниже в этом параграфе будем предполагать, что при любом $m \geqslant 0$ функция $\varphi(x, y, m, p, q)$ допускает оценку

$$\varphi(x, y, m, p, q) \leqslant \Phi_m(x, y) f_m(p^2+q^2),$$

где $\Phi_m(x, y)$ непрерывная в $\Omega+\Gamma$ функция, а $f_m(p^2+q^2) \in \in C^{n+2, \lambda}$ на плоскости p, q.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 = \mu\varphi(x, y, z_\mu, p_\mu, q_\mu) + \\ + (1-\mu) f_m(p_\mu^2 + q_\mu^2) k_0^2, \qquad (21,1,5)$$

$$z_\mu|_\Gamma = \mu g(s), \qquad (21,1,6)$$

где параметр $\mu \in [0,1]$, а $k_0 > 0$ — некоторая постоянная, выбор которой будет ниже уточнен. Эта задача при любом $\mu \in [0, 1]$ имеет в $W^{+}(\Omega) \cap C^{2}(\Omega)$ не более одного решения. При $\mu = 1$ краевая задача (21,1,5—6) сводится к исходной задаче Дирихле (21,1,1—2).

При $\mu = 0$, как показано в п. 3 § 10, эта задача имеет решение $z_0 \in W^{+}(\Omega) \cap C^{n+2, \lambda}(\Omega+\Gamma)$, если число $k_0 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$k_0^2 \operatorname{mes} \Omega < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{f_m(p^2+q^2)}.$$

Далее, так как при всех $\mu \in [0, 1]$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\varphi + (1-\mu) k_0^2 f_m\right) = \mu\varphi_z \geqslant 0,$$

то из теоремы 20 (§ 5, п. 1) следует, что исходная задача Дирихле (21,1,1—2) будет иметь решение $z_\mu \in W^{+}(\Omega) \cap C^{m+2, \lambda'}$, если при всех $\mu \in [0, 1]$ могут быть получены равномерные оценки решения краевой задачи (21,1,5—6) в метрике $C^2(\Omega+\Gamma)$.

2. Априорная оценка модуля $z_\mu(x, y)$. Пусть $z_\mu(x, y)$ — решение краевой задачи (21,1,5—6). Обозначим через

$$m = \max\left\{\sup_\Gamma g(s),\ 0\right\}.$$

Так как $z_\mu \in W^+(\Omega)$, то при любом $\mu \in [0, 1]$ имеем

$$\max_{\Omega+\Gamma} z_\mu(x, y) = \max_\Gamma z_\mu \leqslant \mu m \leqslant m.$$

Из условия (21,1,4) следует, что $\varphi(x, y, z, p, q)$ — неубывающая функция переменной z. Поэтому имеем

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 \leqslant \mu\varphi(x, y, m, p_\mu, q_\mu) + \\ + (1-\mu)k_0^2 f_m(p_\mu^2 + q_\mu^2). \qquad (21,2,1)$$

Докажем, что если выполнено соотношение

$$\iint_\Omega \Phi_m(x, y)\,dx\,dy < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{f_m(p^2+q^2)}, \qquad (21,2,2)$$

то при всех достаточно малых значениях постоянной k_0^2 может быть получена равномерная оценка $\|z_\mu\|_C$ для любых $\mu \in [0, 1]$.

Действительно, при любом $\mu \in [0, 1]$ имеем

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 \leqslant \mu\Phi_m(x, y) f_m(p_\mu^2 + q_\mu^2) + (1-\mu)k_0^2 f_m(p_\mu^2 + q_\mu^2).$$

Отсюда

$$\frac{r_\mu t_\mu - s_\mu^2}{f_m(p_\mu^2 + q_\mu^2)} \leqslant \mu\Phi_m(x, y) + (1-\mu)k_0^2.$$

Так как

$$\iint_\Omega \Phi_m(x, y)\,dx\,dy < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{f_m(p^2+q^2)},$$

то существует число $k_0 > 0$ такое, что

$$\omega_m = \iint_\Omega \Phi_m(x, y)\,dx\,dy + k_0^2 \operatorname{mes}\Omega < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{f_m(p^2+q^2)}.$$

Отсюда имеем

$$\omega\left(\frac{1}{f_m},\ z_\mu,\ \Omega\right)=\iint\limits_{\Omega}\frac{r_\mu t_\mu-s_\mu^2}{f_m\left(p_\mu^2+q_\mu^2\right)}\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\omega_m<\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{f_m\left(p^2+q^2\right)}.$$

А тогда из теоремы 31 вытекает, что

$$\mu\min_{\Gamma}g(s)-2F\left(\frac{1}{f_m},\ \omega_m\right)a\leqslant z_\mu\leqslant m.$$

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 85. *Пусть*

$$m=\max\left\{\max_{\Gamma}g(s),\ 0\right\},\qquad m_1=\min\left\{0,\ \min_{\Gamma}g(s)\right\}.$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\iint\limits_{\Omega}\Phi_m(x,\ y)\,dx\,dy<\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{f_m\left(p^2+q^2\right)},$$

то для любого числа $k_0>0$, *удовлетворяющего соотношению*

$$\omega_m=\iint\limits_{\Omega}\Phi_m(x,\ y)\,dx\,dy+k_0^2\operatorname{mes}\Omega<\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\,dq}{f_m\left(p^2+q^2\right)},$$

при всех $\mu\in[0,\ 1]$ *решение* $z_\mu(x,\ y)$ *задачи Дирихле* (21,1,5—6) *допускает равномерные оценки*

$$m_1-2aF\left(\frac{1}{f_m},\ \omega_m\right)\leqslant z_\mu(x,\ y)\leqslant m.$$

Итак, априорная оценка $|z_\mu|$ получена.

3. Априорная оценка для $|\operatorname{grad} z_\mu|$ в $\Omega+\Gamma$. Так как для выпуклых функций наибольшее значение модуля градиента достигается на границе области, то нам достаточно оценить сверху $|\operatorname{grad} z_\mu|$ в точках окружности Γ.

Обозначим через γ_μ кривую, которая в пространстве x, y, z определяется краевым условием (21,1,6). Пусть $\bar{P}$ — произвольная точка γ_μ, а P — ее проекция на плоскость x, y. Очевидно, $P\in\Gamma$. Так как $g(s)\in C^{n+2,\lambda}(\Gamma)$, то нижнее извивание кривой γ_μ конечно, а именно

$$M_н(\gamma_\mu) \leqslant M_н(\gamma) = M_н < +\infty.$$

Поэтому существует плоскость

$$\tilde{z} = \alpha x + \beta y + c \tag{21,3,1}$$

такая, что:

а) $\alpha^2 + \beta^2 \leqslant M_н$,

б) она проходит через касательную к γ_μ в точке $\bar{P}$,

в) кривая γ_μ целиком лежит над этой плоскостью. Плоскость (23,3,1) пересекает прямой круговой цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ по некоторому эллипсу γ'_μ, лежащему под кривой γ_μ и проходящему через точку $\bar{P}$.

Рассмотрим теперь некоторую выпуклую функцию $v \in W^+(\Omega) \cap C^2(\Omega + \Gamma)$ такую, что

$$v|_\Gamma = \alpha x + \beta y + c,$$

а внутри Ω справедливо неравенство

$$v(x, y) \leqslant z_\mu(x, y).$$

Тогда, очевидно, $0 \leqslant \left.\frac{\partial z_\mu}{\partial n}\right|_\Gamma \leqslant \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma$ и потому оценка $|\operatorname{grad} z_\mu|$ на Γ сводится к построению вспомогательной функции $v(x, y)$, для которой нормальная производная на границе может быть непосредственно оценена через данные задачи (21,1,1—2).

В качестве функции $v(x, y)$ можно взять, например, функцию, удовлетворяющую в Ω дифференциальному неравенству

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{f_m\left(v_x^2 + v_y^2\right)} > \mu\Phi_m(x, y) + (1-\mu)k_0^2 \tag{21,3,2}$$

и обращающуюся на Γ в функцию $\alpha x + \beta y + c$. Покажем, как построить эту функцию. Положим

$$\Phi_0 = \sup_{\Omega+\Gamma} \Phi_m(x, y),$$

$$N_н\left(p^2 + q^2;\ \gamma, \frac{1}{f_m}\right) = [\sup f_m(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)]^{-1}, \tag{21,3,3}$$

где точная верхняя грань берется в круге $(\bar{p} - p)^2 + (\bar{q} - q)^2 \leqslant M_н(\gamma)$.

В § 10 показано, что функция $N_н$ на самом деле зависит лишь от выражения p^2+q^2 и является непрерывной на плоскости p, q. Ниже мы ее будем обозначать так: $N_н\left(\frac{1}{f_m}\right)$.

Докажем теперь, что если выполнено неравенство

$$\Phi_0 \operatorname{mes} \Omega < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_н\left(\frac{1}{f_m}\right) dp\, dq, \qquad (21,3,4)$$

то для $|\operatorname{grad} z_\mu|$ на Γ могут быть получены оценки, равномерные по $\mu \in [0, 1]$.

Из неравенства (21,3,4) вытекает, что существует постоянная $k_0 > 0$ такая, что

$$\bar{\omega}_m = (\Phi_0 + k_0^2) \operatorname{mes} \Omega < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_н\left(\frac{1}{f_m}\right) dp\, dq.$$

Одно из таких чисел k_0 зафиксируем.

В п. 3 § 10 установлено, что краевая задача

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = (\Phi_0 + k_0^2)\frac{1}{N_н\left(\frac{1}{f_m}\right)},$$

$$u|_\Gamma = 0$$

имеет решение $u \in W^+(\Omega) \cap C^2(\Omega + \Gamma)$, причем для функции u справедлива оценка

$$0 \leqslant \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma \leqslant F\left(N_н\left(\frac{1}{f_m}\right), \bar{\omega}_m\right).$$

Положим

$$v(x, y) = u(x, y) + \alpha x + \beta y + c,$$

где $z = \alpha x + \beta y + c$ — уравнение плоскости (23,3,1). Очевидно,

$$v(x, y) \in W^+(\Omega) \cap C^2(\Omega + \Gamma).$$

Докажем, что построенная функция $v(x, y)$ и есть искомая. Действительно

$$v|_\Gamma = u|_\Gamma + \alpha x + \beta y + c|_\Gamma = \alpha x + \beta y + c|_\Gamma.$$

Далее

$$v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \frac{\Phi_0 + k_0^2}{N_н\left(u_x^2 + u_y^2, \gamma, \frac{1}{f_m}\right)}.$$

Исходя из определения функции $N_н\left(\frac{1}{f_m}\right)$, получим

$$v_{xx}v_{yy}-v_{xy}^2=\left(\Phi_0+k_0^2\right)\sup f_m\left(\bar{p}^2+\bar{q}^2\right),$$

где точная верхняя грань берется в круге $(\bar{p}-u_x)^2+(\bar{q}-u_y)^2\leqslant M_н(\gamma)$. Так как $v_x=u_x+\alpha$, $v_y=u_y+\beta$ и

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant M_н(\gamma),$$

то точка (v_x, v_y) принадлежит кругу $(\bar{p}-u_x)^2+(\bar{q}-u_y)^2\leqslant M_н(\gamma)$. Следовательно,

$$\sup f_m\left(\bar{p}^2+\bar{q}^2\right)\geqslant f_m\left(v_x^2+v_y^2\right).$$

Поэтому

$$\frac{v_{xx}v_{yy}-v_{xy}^2}{f_m\left(v_x^2+v_y^2\right)}\geqslant\Phi_0+k_0^2.$$

При любом $\mu\in[0, 1]$ имеем

$$\Phi_0+k_0^2\geqslant\mu\Phi_m(x, y)+(1-\mu)k_0^2$$

и поэтому функция $v(x, y)$ и будет искомой.

Следовательно, в произвольной точке P при любом $\mu\in[0, 1]$ имеем

$$0\leqslant\left.\frac{\partial z_\mu}{\partial n}\right|_\Gamma\leqslant\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma\leqslant F\left(N_н\left(\frac{1}{f_m}\right), \bar{\omega}_m\right)+\sqrt{M_н(\gamma)}.$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 86. *Пусть γ — кривая, построенная по краевому условию*

$$z|_\Gamma=g(s),$$

и $M_н$ — нижнее извивание этой кривой. Положим

$$m=\max\left\{0, \max_\Gamma g(s)\right\}, \quad m_1=\min\left\{0, \min_\Gamma g(s)\right\}.$$

Пусть, далее, функция $\varphi(x, y, m, p, q)$ при любом $m\geqslant 0$ допускает оценку

$$0\leqslant\varphi(x, y, m, p, q)\leqslant\Phi_m(x, y)f_m(p^2+q^2),$$

где свойства функций Φ_m *и* f_m *описаны в* п. 1. *Строим функцию*

$$N_{н}\left(p^2+q^2,\ \gamma,\ \frac{1}{f_m}\right)$$

и число

$$\Phi_0=\sup_{\Omega+\Gamma}\Phi_m(x,\ y).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\Phi_0 \operatorname{mes}\Omega<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{н}\left(\frac{1}{f_m}\right)dp\,dq, \tag{21,3,5}$$

то для всех $k_0>0$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\bar{\omega}_m\equiv\left(\Phi_0+k_0^2\right)\operatorname{mes}\Omega<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{н}\left(\frac{1}{f_m}\right)dp\,dq$$

(такие k_0 заведомо существуют) *краевая задача* (21,1,5—6) *допускает равномерные по* $\mu\in[0,\ 1]$ *априорные оценки*

$$0\leqslant\frac{\partial z_\mu}{\partial n}\leqslant F\left(N_{н}\left(\frac{1}{f_m}\right),\ \bar{\omega}_m\right)+\sqrt{M_{н}},$$

$$m_1-2aF\left(N_{н}\left(\frac{1}{f_m}\right),\ \bar{\omega}_m\right)\leqslant z_\mu(x,\ y)\leqslant m.$$

Заметим, что из неравенства (21,3,5) неравенство (21,2,2) вытекает немедленно, ибо

$$\Phi_m(x,\ y)\leqslant\Phi_0,$$

$$f_m(p^2+q^2)\leqslant\frac{1}{N_{н}\left(p^2+q^2,\ \gamma,\ \dfrac{1}{f_m}\right)}.$$

Поэтому оценка $z_\mu(x,\ y)$ проведена в теореме 86 при более жестких условиях, чем в теореме 85.

Итак, априорная оценка $z_\mu(x,\ y)$ в метрике $C^1(\Omega+\Gamma)$ получена. Неравенство (21,3,5), как мы уже отмечали, является более сильным ограничением на данные задачи (21,1,1—2), чем неравенство (21,2,2) (последнее является достаточным условием существования обобщенного решения той же задачи (см. § 18)). Это вполне естественно, так как для обобщенных решений первые производные на границе могут принимать бесконечные значения.

Если рассмотреть функции, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2+q^2,\ \gamma,\ \frac{1}{f_m}\right) dp\, dq = +\infty,$$

то неравенство (21,3,5) для оценки модуля примет вид

$$\Phi_0 \operatorname{mes}\Omega < +\infty.$$

Это значит, что для получения конечных априорных оценок в $C^1(\Omega+\Gamma)$ функция $\Phi_m(x, y)$ может быть произвольной непрерывной функцией.

Заметим, что в случае, когда

$$f_m(p^2+q^2) = (1+p^2+q^2)^k,$$

оба интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2+q^2;\ \gamma;\ \frac{1}{f_m}\right) dp\, dq \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\, dq}{f_m(p^2+q^2)}$$

сходятся или расходятся одновременно.

4. Априорные оценки вторых производных решений z_μ задачи (21,1,5—6) на окружности Г. Оценки вторых производных функций $z_\mu(x, y)$ на Г удобно проводить в полярных координатах ρ, θ. Мы будем предполагать, что равномерные оценки функций $z_\mu(x, y)$ в метрике $C^1(\Omega+\Gamma)$ уже получены. Ниже речь будет идти о получении априорных оценок модулей функций $\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\theta^2}$ на Г.

Так как на Г

$$z_\mu = \mu g(s),$$

где $s = a\theta$, то при всех $\mu \in [0, 1]$ имеем равномерную оценку

$$\left|\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\theta^2}\right| \leqslant a^2 \|g_{ss}\|_c.$$

Оценим теперь производную $\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta}$. Введем функцию

$$\zeta = \frac{\partial z_\mu}{\partial\theta}.$$

Очевидно,

$$\zeta_\rho = \frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta}$$

и поэтому оценка $\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta}$ сводится к оценке ζ_ρ на Γ.

Продифференцируем уравнение

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 = \mu\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu) + (1-\mu)k_0^2$$

по θ. Тогда получим

$$\frac{\partial r_\mu}{\partial\theta} t_\mu - 2\frac{\partial s_\mu}{\partial\theta} s_\mu + \frac{\partial t_\mu}{\partial\theta} r_\mu = \\ = \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \varphi_z\frac{\partial z_\mu}{\partial\theta} + \varphi_p\frac{\partial p_\mu}{\partial\theta} + \varphi_q\frac{\partial q_\mu}{\partial\theta}\right). \qquad (21,4,1)$$

В уравнении (21,4,1) заменим производные от z_μ, p_μ, q_μ, r_μ, s_μ, t_μ по θ через производные функций ζ и z_μ по x и y. Имеем

$$\zeta = -\frac{\partial z_\mu}{\partial x} y + \frac{\partial z_\mu}{\partial y} x = -p_\mu y + q_\mu x; \qquad (21,4,2)$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_x &= -r_\mu y + s_\mu x + q_\mu = \frac{\partial p_\mu}{\partial\theta} + q_\mu, \\ \zeta_y &= -s_\mu y + t_\mu x - p_\mu = \frac{\partial q_\mu}{\partial\theta} - p_\mu; \end{aligned}\right\} \qquad (21,4,3)$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{xx} &= (r_\mu)_\theta + 2s_\mu, \\ \zeta_{xy} &= (s_\mu)_\theta - r_\mu + t_\mu, \\ \zeta_{yy} &= (t_\mu)_\theta - 2s_\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (21,4,4)$$

С помощью соотношений (21,4,2—4) уравнение (21,4,1) преобразуется к следующей форме:

$$t_\mu\zeta_{xx} - 2s_\mu\zeta_{xy} + r_\mu\zeta_{yy} = \mu(-\varphi_x y + \varphi_y x + \varphi_z\zeta + \\ + \varphi_p\zeta_x + \varphi_q\zeta_y - \varphi_p q_\mu + \varphi_q p_\mu). \qquad (21,4,5)$$

Так как в $\Omega + \Gamma$ функции $|z_\mu|$, $|p_\mu|$, $|q_\mu|$, $|\zeta|$ равномерно по $\mu \in [0,\ 1]$ ограничены сверху некоторым числом $D_0 < +\infty$, то имеет место оценка

$$|\mu(-\varphi_x y+\varphi_y x+\varphi_z\zeta+\varphi_p\zeta_x+\varphi_q\zeta_y-\varphi_p q_\mu+\varphi_q p_\mu)| \leqslant \leqslant D_1(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{1}{2}},$$

где $D_1=\text{const}<+\infty$, зависящая лишь от числа D_0 и

$$\max\{\sup|\varphi_x|,\ \sup|\varphi_y|,\ \sup|\varphi_z|,\ \sup|\varphi_p|,\ \sup|\varphi_q|\}$$

(точная верхняя грань каждой из указанных функций берется в области

$$(x,\ y)\in\Omega+\Gamma;\quad |z_\mu|\leqslant D_0,\quad |p_\mu|\leqslant D_0,\quad |q_\mu|\leqslant D_0).$$

Пусть $\tilde{\gamma}_\mu$ — кривая в пространстве x, y, z, определяемая краевым условием

$$z|_\Gamma=\mu g_0.$$

Тогда при любом $\mu\in[0,\ 1]$ имеем, что

$$M_{\text{в}}(\tilde{\gamma}_\mu)\leqslant M_{\text{в}}(\tilde{\gamma}_1)=\tilde{M}_{\text{в}}<+\infty,$$
$$M_{\text{н}}(\tilde{\gamma}_\mu)\leqslant M_{\text{н}}(\tilde{\gamma}_1)=\tilde{M}_{\text{н}}<+\infty.$$

(Числа $\tilde{M}_{\text{в}}$ и $\tilde{M}_{\text{н}}$ оцениваются (см. § 7, п. 1) сверху в зависимости лишь от $\|g_0(s)\|_{C^2}$ или, что то же, $\|g(s)\|_{C^2}$.)

По функции $(1+\bar{p}^2+\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}}$ строим так же, как и в п. 3 § 10 функции

$$N_{\text{н}}\left(p^2+q^2;\ \tilde{\gamma}_1,\ \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{1/2}}\right),$$
$$N_{\text{в}}\left(p^2+q^2;\ \tilde{\gamma}_1,\ \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{1/2}}\right).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{\text{н}}^2\,dp\,dq=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{\text{в}}^2\,dp\,dq=+\infty,$$

то для $|\zeta_\rho|$, или, что то же самое, для нормальной производной этой функции, может быть получена на Γ конечная оценка в зависимости лишь от $\|g(s)\|_3$ и числа

$$\Psi = \int_\Omega \int \frac{D_1^2}{r_\mu t_\mu - s_\mu^2}\, dx\, dy.$$

Но

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 = \mu\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu) + (1-\mu)k_0^2.$$

Так как $\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ — положительная непрерывная функция для $(x,\ y) \in \Gamma$ и любых конечных значений $z,\ p,\ q$, то существует такое число $k_1 > 0$, зависящее лишь от D_0, что при всех $\mu \in [0,\ 1]$

$$\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu) \geqslant k_1^2 > 0.$$

Отсюда

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 = \mu\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu) + (1-\mu)k_0^2 \geqslant$$
$$\geqslant \mu k_1^2 + (1-\mu)k_0^2 \geqslant \min\{k_1^2,\ k_0^2\} \equiv \bar{k} > 0.$$

Таким образом, имеем окончательно

$$\Psi \leqslant \frac{D_1^2}{\bar{k}} \operatorname{mes}\Omega,$$

и, следовательно, пользуясь оценкой (10,3,5), получим

$$-\sqrt{\tilde{M}_в} - F\left(N_в^2,\ \frac{D_1^2}{\bar{k}} \operatorname{mes}\Omega\right) \leqslant \zeta_\rho|_\Gamma \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\tilde{M}_н} + F\left(N_н^2,\ \frac{D_1^2}{\bar{k}} \operatorname{mes}\Omega\right).$$

Итак, равномерная по $\mu \in [0,\ 1]$ оценка $\left|\dfrac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta}\right|$ на Γ получена.

Уравнение

$$r_\mu t_\mu - s_\mu^2 = \mu\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu) + (1-\mu)k_0^2$$

в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z_\mu}{\partial\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\rho\,\partial\theta} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial z_\mu}{\partial\theta}\right)^2 =$$
$$= \mu\varphi + (1-\mu)k_0^2.$$

Поэтому, если мы установим, что при всех $\mu \in [0, 1]$ выражение

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z_\mu}{\partial\rho}$$

допускает равномерную положительную оценку снизу, то отсюда будет следовать равномерная по $\mu \in [0, 1]$ априорная оценка для $|z_{\mu\rho\rho}|$.

В [6], стр. 135, С. Н. Бернштейн показал, что можно построить параболоид

$$u=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0,$$

являющийся решением уравнения

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=K=\text{const}>0,$$

обращенный выпуклостью в сторону $z<0$ и удовлетворяющий в $\Omega+\Gamma$ следующим условиям:

1. В одной наперед заданной произвольной точке $M\in\Gamma$ имеем

$$u=g,\quad u_\theta=g_\theta,\quad u_{\theta\theta}=g_{\theta\theta},\quad u_{\theta\theta\theta}=g_{\theta\theta\theta}.$$

2. Во всех других точках Γ имеем

$$u_0\geqslant g.$$

3. В точке M

$$\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{\rho}u_\rho>\alpha_0>0,$$

где α_0 — постоянная, зависящая лишь от K и максимума модулей производных функции $g(s)$ до четвертого порядка.

Как было показано выше, при всех $\mu\in[0, 1]$ имеем

$$\mu\varphi(x,\ y,\ z_\mu,\ p_\mu,\ q_\mu)+(1-\mu)k_0^2>\bar{k}=\text{const}>0.$$

Поэтому в качестве K можно взять число $\bar{k}$. Обозначим через $u_\mu(x, y)$ параболоид С. Н. Бернштейна, построенный по граничной функции $\mu g(s)$ и числу $\bar{k}$. Тогда функция $v=u_\mu-z_\mu$ удовлетворяет в Ω дифференциальному неравенству

$$Av_{xx}-2Bv_{xy}+Cv_{yy}=\bar{k}-\mu\varphi-(1-\mu)k_0^2<0,$$

где

$$2A=2a_{22}^\mu+t_\mu,\quad 2B=2a_{12}^\mu+s_\mu,\quad 2C=2a_{11}^\mu+r_\mu.$$

Отсюда следует, что в круге Ω нет точек, где $d^2v \geqslant 0$. Поэтому функция v, будучи неотрицательной на окружности Γ, неотрицательна и в самом круге Ω.

Так как в точке M $v=0$, то в этой точке $v_\rho = (u_\mu - z_\mu)_\rho \leqslant 0$, то есть $(u_\mu)_\rho \leqslant \frac{\partial z_\mu}{\partial \rho}$. А отсюда следует, что в точке M

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z_\mu}{\partial \rho} \geqslant \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\mu}{\partial \rho} \geqslant \alpha_0 > 0.$$

Очевидно, что число α_0 не зависит от $\mu \in [0, 1]$. Итак, существование априорных оценок вторых производных на Γ, равномерных по $\mu \in [0, 1]$, доказано, так как

$$r_\mu^2 + 2s_\mu^2 + t_\mu^2 = \left[(z_\mu)_{\rho\rho}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial \rho\,\partial \theta} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial z_\mu}{\partial \theta}\right]^2 + \\ + \left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z_\mu}{\partial \rho}\right]^2.$$

5. Оценки вторых производных решений z_μ в замкнутом круге $\Omega + \Gamma$. В предположении, что вторые производные решений задачи (21,1,5—6) оценены по модулю на Γ равномерно по $\mu \in [0, 1]$ и известны равномерные оценки z_μ в метрике $C^1(\Omega + \Gamma)$, установим оценки вторых производных функций z_μ во всем круге $\Omega + \Gamma$.

Для этого мы используем специальный выбор вспомогательной функции, который был предложен А. В. Погореловым (см. [14в]). Начнем с оценки производной r_μ. Так как решение z_μ обращено выпуклостью в сторону $z < 0$, то $r_\mu > 0$ и, следовательно, достаточно оценить $\sup r_\mu$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $w = \lambda r_\mu$, где λ — некоторая ограниченная, положительная в замкнутом круге функция, которая ниже будет выбрана конкретно. Функция w достигает наибольшего значения в $\Omega + \Gamma$. Если оно достигается на окружности Γ, то w_0 оценивается через известную уже оценку r_μ сверху на Γ. После этого оценка r_μ в $\Omega + \Gamma$ дается неравенством

$$r_\mu \leqslant \frac{w_0}{\min \lambda}.$$

Пусть w достигает максимума в некоторой внутренней точке A круга Ω. Тогда в этой точке будем иметь

$$w_x = w_y = 0.$$

Отсюда

$$r_x = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_x = -r\frac{\lambda_x}{\lambda}, \quad r_y = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_y = -r\frac{\lambda_y}{\lambda}\ ^{*)}. \qquad (21,5,1)$$

Для вторых производных в точке A получаем выражения

$$r_{xx} = \frac{w_{xx}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx},$$

$$r_{xy} = \frac{w_{xy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy},$$

$$r_{yy} = \frac{w_{yy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}.$$

Дифференцируя уравнение

$$rt - s^2 = \mu\varphi(x, y, z, p, q) + (1-\mu)k_0^2 \qquad (21,5,2)$$

по x, получим

$$r_x t + t_x r - 2ss_x = \frac{d\left(\mu\varphi + (1-\mu)k_0^2\right)}{dx}.$$

С помощью этого равенства выражение $r_x t_x - s_x^2$ в точке A преобразуется к виду (при этом используем, что $r_y = s_x$ и (21,5,1)):

$$r_x t_x - s_x^2 = -\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d(\mu\varphi)}{dx} + 2rs\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{\lambda_y}{\lambda} - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2.$$

Дифференцируя теперь уравнение (21,5,2) дважды по x, получим

$$\left(r_{xx}t - 2r_{xy}s + r_{yy}r\right) + 2\left(r_x t_x - s_x^2\right) = \frac{d^2(\mu\varphi)}{dx^2}.$$

---

*) Здесь и ниже значок μ у функции z_μ и ее производных опускается.

Подставляя сюда найденное выражение для $r_x t_x - s_x^2$ в точке A, будем иметь

$$\frac{1}{\lambda}(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) + \lambda r\left\{t\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx} - 2s\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy} + \right.$$
$$\left. + r\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}\right\} + 2\left\{-\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d(\mu\varphi)}{dx} + 2rs\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{\lambda_y}{\lambda} - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2\right\} = \frac{d^2(\mu\varphi)}{dx^2}. \qquad (21{,}5{,}3)$$

Но

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx} - 2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 = -\frac{\lambda_{xx}}{\lambda},$$
$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy} - 2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda_{xy}}{\lambda},$$
$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy} - 2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2 = -\frac{\lambda_{yy}}{\lambda}.$$

Поэтому соотношение (21,5,3) приведется к виду

$$\frac{1}{\lambda}(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) - \frac{\lambda_{xx}}{\lambda}rt + \frac{2\lambda_{xy}}{\lambda}rs -$$
$$- \frac{\lambda_{yy}}{\lambda}r^2 - \frac{2\lambda_x}{\lambda}\frac{d(\mu\varphi)}{dx} = \frac{d^2(\mu\varphi)}{dx^2}.$$

Заменяя в этом равенстве rt на $\varphi + s^2$ и пользуясь тождеством

$$\frac{d^2(\mu\varphi)}{dx^2} + 2\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d(\mu\varphi)}{dx} + \mu\varphi\frac{\lambda_{xx}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2(\lambda\mu\varphi)}{dx^2},$$

получаем

$$(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) - \lambda_{xx}s^2 + 2\lambda_{xy}rs - \lambda_{yy}r^2 = \frac{d^2(\lambda\mu\varphi)}{dx^2}.$$

Так как в точке A функция w достигает максимума, то

$$tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}|_A \leqslant 0;$$

и, следовательно, в этой точке

$$\frac{d^2(\lambda\mu\varphi)}{dx^2} + \lambda_{xx}s^2 - 2\lambda_{xy}rs + \lambda_{yy}r^2 \leqslant 0.$$

Положим

$$\lambda = e^{\frac{a}{2}(x^2+y^2)}.$$

Тогда в точке A будем иметь

$$(\alpha + 2\alpha^2 x^2) s^2 + 4\alpha^2 xyrs + (\alpha + 2\alpha^2 y^2) r^2 + \\ + (\varphi_{pp} r^2 + 2\varphi_{pq} rs + \varphi_{qq} s^2) + \ldots \leqslant 0, \qquad (21,5,4)$$

где не выписаны члены, содержащие r и s в первой степени. При достаточно большом α квадратичная форма (по r и s)

$$(\varphi_{qq} + \alpha + 2\alpha^2 x^2) s^2 + 2(\varphi_{pq} + 2\alpha^2 xy) rs + \\ + (\varphi_{pp} + a + 2\alpha^2 y^2) r^2,$$

равномерно по всем $\mu \in [0, 1]$ положительно определенная и, следовательно, r не может быть больше некоторого r_0, определяемого неравенством (21,5,4).

Отсюда

$$w_0 \leqslant r_0 \sup_{\Omega+\Gamma} \lambda$$

и, следовательно, во всем круге $\Omega + \Gamma$

$$r \leqslant r_0 \frac{\sup \lambda}{\inf \lambda}.$$

Очевидно, что оценка для r_μ будет равномерной по $\mu \in [0, 1]$.

Оценка для производной t_μ получается аналогично. После этого s_μ оценивается очевидным образом из соотношения

$$s_\mu^2 = r_\mu t_\mu - \mu\varphi - (1 - \mu) k_0^2.$$

Итак, производные второго порядка от функции z_μ оценены в замкнутом круге, и эти оценки равномерны по $\mu \in [0, 1]$.

6. Теорема существования для задачи Дирихле в классе функций $C^{n+2, \lambda'}(\Omega + \Gamma)$. Из всех рассмотрений, проведенных в пунктах 1—5 настоящего параграфа, вытекает следующая

Теорема 87. *Пусть в круге $\Omega + \Gamma$ рассматривается задача Дирихле*

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= \varphi(x, y, z, p, q), \\ z|_\Gamma &= g(s), \end{aligned} \qquad (21,6,1)$$

где функция $g(s) \in C^{n+2, \lambda}(\Gamma)$, а функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ обладает следующими свойствами:

1. *В области* G:

$$(x,\ y)\in\Omega+\Gamma,\ -\infty<z<+\infty,$$
$$-\infty<p<+\infty,\ -\infty<q<+\infty$$

выполнены неравенства

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)>0,\quad \varphi_z(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\geqslant 0.$$

2. *В той же области* G:

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\in C^{n,\lambda}.$$

3. *При любом* $m\geqslant 0$ *функция* $\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ *допускает оценку*

$$0<\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\leqslant\Phi_m(x,\ y)f_m(p^2+q^2)$$

(ниже через m обозначен $\max\left\{0,\ \max\limits_{\Gamma} g(s)\right\}$).

Строим функцию

$$N_{\text{н}}\left(p^2+q^2,\ \gamma,\ \frac{1}{f_m}\right)=\inf_{(\bar p-p)^2+(\bar q-q)^2\leqslant M_{\text{н}}}\frac{1}{f_m(\bar p^2+\bar q^2)},$$

где $M_{\text{н}}$ — *нижнее извивание кривой* γ, *построенной по краевому условию*

$$z|_{\Gamma}=g(s).$$

Тогда, если выполнено условие

$$\sup_{\Omega+\Gamma}\{\Phi_m(x,\ y)\}\operatorname{mes}\Omega<\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}N_{\text{н}}\left(\frac{1}{f_m}\right)dp\,dq,\quad (21,6,2)$$

то задача Дирихле (21,6,1) *всегда имеет решение в* $C^{n+2,\lambda'}(\Omega+\Gamma)$ *и притом единственное в* $C^2(\Omega)\cap W^+(\Omega)$. (Число $\lambda'\in(0,\ 1)$ определяется постоянными условий 1—3.)

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из теоремы 20 гл. I (п. 1, § 5) и результатов пп. 1—5 настоящего параграфа. Отметим, что если вместо круга Ω взять выпуклую область класса $L_{n+2,\lambda}$, у которой кривизна границы во всех точках не меньше $\varkappa_0=\text{const}>0$, то теорема 87 для нее полностью сохраняется, только в (21,6,2) вместо $\operatorname{mes}\Omega$ нужно взять число $\pi/\varkappa_0^2$.

§ 22. Регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера

1. Априорные оценки решений в метрике C^2, зависящие от расстояния точки до границы области. Пусть Ω — открытая область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ. (Никаких требований гладкости к Γ в этом параграфе не предъявляется.) Пусть, далее, функция $z(x, y) \in C^4(\Omega) \cap W^+(\Omega)$ и внутри Ω удовлетворяет уравнению

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q),$$

причем функция φ в области G:

$$(x, y) \in \Omega, \ -\infty < z < +\infty, \ -\infty < p < +\infty, \ -\infty < q < +\infty$$

удовлетворяет условиям

а) $\varphi(x, y, z, p, q) > 0$,

б) $\varphi(x, y, z, p, q) \in C^2$.

Ниже будем предполагать, что

$$\sup_{\Omega} |z(x, y)| \leqslant M_0. \tag{22,1,1}$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \in \Omega$ и удалена от Γ на расстояние $\rho > 0$. Докажем, что в этой точке первые производные функции $z(x, y)$ удовлетворяют неравенству

$$z_x^2 + z_y^2 \leqslant \frac{4M_0^2}{\rho^2}. \tag{22,1,2}$$

Действительно, рассмотрим прямой круговой конус K_0 с вершиной в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$, направляющая которого лежит в плоскости $z = M_0$ и представляет собой окружность радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0, M_0). Конус M_0 обращен выпуклостью в сторону $z < 0$, а касательная плоскость к поверхности $z(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ есть одна из опорных плоскостей в вершине K_0 к этому конусу. Следовательно, на плоскости p, q точка $(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0))$ принадлежит нормальному изображению конуса K_0.

Нормальное изображение K_0, очевидно, представляет собой круг на плоскости p, q с центром в точке $(0, 0)$. Поскольку высота K_0 не превосходит $2M_0$, то нормальное изображен K_0 содержится в круге

$$p^2+q^2 \leqslant \frac{4M_0^2}{\rho^2}.$$

Поэтому в точке (x_0, y_0) имеет место оценка

$$z_x^2+z_y^2 \leqslant \frac{4M_0^2}{\rho^2}.$$

Рассмотрим, как производятся оценки модулей втор производных функции $z(x, y)$ во внутренних точках Ω в висимости от их расстояния до Γ. Так как во всех точках справедливо неравенство

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\varphi(x, y, z, z_x, z_y)>0,$$

то поверхность $z(x, y)$ строго выпукла, т. е. имеет с каж своей касательной плоскостью единственную общую точ Рассмотрим плоскость Q, параллельную касательной п скости к поверхности $z(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0$ лежащую над этой плоскостью и удаленную от нее достаточно малое расстояние. Очевидно, смещение мо взять столь малым, чтобы плоскость Q отрезала от верхности $z(x, y)$ шапочку F, край которой проектируе строго внутрь Ω, т. е. плоскость Q удалена от края верхности $z(x, y)$ на положительное расстояние. Обозна через Ω_1 проекцию шапочки F на плоскость x, y. Тогд есть замкнутая выпуклая область, удаленная от Γ на по жительное расстояние, которое можно считать не мень $\rho/2$. Точка (x_0, y_0), очевидно, есть внутренняя точка области

Пусть уравнение плоскости Q таково:

$$\bar{z}=ax+by+c. \qquad (22,$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} a&=z_x(x_0, y_0), \\ b&=z_y(x_0, y_0). \end{aligned} \qquad (22,$$

В Ω_1 рассмотрим функцию

$$\lambda(x, y)=ax+by+c-z(x, y).$$

Эта функция, очевидно, равна нулю на границе Ω строго положительна внутри Ω_1 (в частности, $\lambda(x_0, y_0)>$

Далее в Ω_1 вводим вспомогательную функцию

$$W = \lambda z_{xx} \equiv \lambda r.$$

Внутри Ω_1 функция W строго положительна, а на границе Ω_1 обращается в нуль. Поэтому наибольшего значения эта функция достигает в некоторой точке P, расположенной внутри Ω_1.

Согласно выводам п. 5 § 21 в точке P выполняется неравенство

$$\lambda_{xx}s^2 - 2\lambda_{xy}rs + \lambda_{yy}r^2 + \frac{d^2(\lambda\varphi)}{dx^2} \leqslant 0. \qquad (22,1,5)$$

Для функции $\lambda(x, y)$ и ее производных имеем соотношения

$$\lambda_x = a - p, \quad \lambda_y = b - q, \qquad (22,1,6)$$

$$\lambda_{xx} = -r, \quad \lambda_{xy} = -s, \quad \lambda_{yy} = -t. \qquad (22,1,7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi)_{xx} = \lambda_{xx}\varphi &+ 2\lambda_x[\varphi_x + \varphi_z p + \varphi_p r + \varphi_q s] + \\ &+ \lambda[\varphi_{xx} + \varphi_{xz}p + \varphi_{xp}r + \varphi_{xq}s] + \\ &+ \lambda[r\varphi_z + p\varphi_{xz} + \varphi_{zz}p^2 + \varphi_{zp}pr + \varphi_{zq}ps] + \\ &+ \lambda[r_x\varphi_p + r\varphi_{xp} + \varphi_{zp}pr + \varphi_{pp}r^2 + \varphi_{pq}rs] + \\ &\qquad + \lambda[s_x\varphi_q + s\varphi_{xq} + \varphi_{zq}ps + \varphi_{pq}rs + \varphi_{qq}s^2].\end{aligned}$$

В точке P (см. п. 5 § 21, соотношение (21,5,1)) имеем

$$r_x = -\frac{\lambda_x}{\lambda}r, \quad s_x = r_y = -\frac{\lambda_y}{\lambda}s. \qquad (22,1,8)$$

С помощью соотношений (21,1,6—8) неравенство (22,1,5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\lambda^2[\varphi_{pp}r^2 + 2\varphi_{pq}rs + \varphi_{qq}s^2] + \lambda[\bar{A}r + 2\bar{B}s + \bar{C}] + \\ + \lambda^2[Ar + Bs + C] \leqslant 0, \qquad (22,1,9)\end{aligned}$$

где A, B, C, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — непрерывные функции переменных x, y, z, p, q в области:

$$(x, y) \in \Omega, \quad |z| < +\infty, \quad p^2 + q^2 < +\infty.$$

В точке P, как уже отмечалось, $\lambda > 0$. Будем теперь предполагать, что функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ строго выпукла по переменным p, q. Под этим мы понимаем следующее:

для любых вещественных чисел α и β справедливо неравенство

$$\varphi_{pp}(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,\alpha^2+2\varphi_{pq}(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,\alpha\beta+ \\ +\varphi_{qq}(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,\beta^2\geqslant c(z,\ p,\ q)(\alpha^2+\beta^2), \qquad (22,1,10)$$

где $c(z,\ p,\ q)$ — положительная непрерывная функция $z,\ p,\ q$ для любых конечных значений этих переменных.

В рассматриваемом нами случае

$$|z(x,\ y)|\leqslant M_0,$$

$$p^2+q^2\leqslant\frac{16M_0^2}{\rho^2}.$$

Поэтому

$$\inf_{\substack{|z|\leqslant M_0\\ p^2+q^2\leqslant 16M_0^2/\rho^2}} c(z,\ p,\ q)=C_0>0.$$

Отсюда следует, что неравенство (22,1,9) принимает вид

$$C_0\lambda^2(r^2+s^2)+\lambda(\bar{A}r+\bar{B}s+\bar{C})+\lambda^2(Ar+Bs+C)\leqslant 0. \qquad (22,1,11)$$

Из неравенства (22,1,11) вытекает, что существует такая положительная постоянная $W_0<+\infty$, зависящая лишь от ρ, M_0 и наибольшего из супремумов модулей

$$|\varphi|,\ |\varphi_x|,\ |\varphi_y|,\ |\varphi_z|,\ \ldots,\ |\varphi_{zp}|,\ |\varphi_{zq}|$$

$\left(\text{супремумы берутся в области } (x,\ y)\in\Omega_1,\ |z|\leqslant M_0,\ p^2+q^2\leqslant\frac{16M_0^2}{\rho^2}\right)$, что в точке P имеем

$$W^2=\lambda^2r^2\leqslant\lambda^2(r^2+s^2)\leqslant W_0^2.$$

Поэтому и подавно в точке $(x_0,\ y_0)$ выполнено неравенство

$$\lambda(x_0,\ y_0)\,r\leqslant W_0.$$

Отсюда

$$r(x_0,\ y_0)\leqslant\frac{W_0}{\lambda(x_0,\ y_0)}.$$

Итак, оценка для r в точке (x_0, y_0) получена. Оценка для $t(x, y)$ с помощью функции $\lambda(x, y)t$ получается аналогично

$$t(x_0, y_0) \leqslant \frac{W_1}{\lambda(x_0, y_0)},$$

где постоянная W_1 определяется из неравенства типа (22,1,11).

Обозначим через Ω_2 множество точек области Ω, для которых выполнено соотношение

$$\lambda(x, y) = ax + by + c - z(x, y) \geqslant \frac{\lambda(x_0, y_0)}{2}.$$

Очевидно,

$$\Omega_1 \supset \Omega_2$$

и (x_0, y_0) — внутренняя точка Ω_2. Легко видеть, что для точек замкнутой выпуклой области Ω_2 справедливы оценки:

$$0 < r \leqslant \frac{2W_0}{\lambda(x_0, y_0)}; \quad 0 < t \leqslant \frac{2W_0}{\lambda(x_0, y_0)};$$

$$|s| \leqslant \frac{2\sqrt{W_0 W_1}}{\lambda(x_0, y_0)}.$$

Так как точка (x_0, y_0) является внутренней для области Ω_2, то Ω_2 можно рассматривать как замкнутую окрестность точки (x_0, y_0).

Итак, оценки решения $z(x, y)$ уравнения $rt - s^2 = \varphi$ внутри Ω в зависимости от расстояния точки до границы Ω в метрике C^2 получены. При этом не были использованы свойства кривой Γ и свойства функции $z(x, y)$, когда $(x, y) \in \Gamma$.

Если теперь предположить дополнительно, что функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ принадлежит $C^{n, \lambda}(\Omega)$ $(n \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1)$ по всем переменным, то из теоремы 20 § 5 главы I будет следовать, что для $z(x, y)$ внутри Ω могут быть получены априорные оценки в метрике $C^{n+2, \lambda'}$, зависящие только от следующих величин: M_0, ρ, C_0

$$\varphi_0 = \inf \varphi(x, y, z, p, q), \quad \|\varphi(x, y, z, p, q)\|_{n, \lambda}$$

(последние две величины берутся при условии, что $(x, y) \in \Omega - \Omega_{\rho/2}$, $|z| \leqslant M_0$, $p^2 + q^2 \leqslant \dfrac{16M_0^2}{\rho^2}\Big)$.

Замечание. В настоящем пункте получены априорные оценки в предположении, что $\varphi(x, y, z, p, q)$ строго выпукла по p и q. На самом деле это ограничение излишне. За счет более сложного построения вспомогательной функции W можно добиться сразу получения априорных оценок модулей вторых производных решений любого уравнения вида

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q) \quad (\varphi > 0, \ \varphi_z \geqslant 0) \qquad (22,1,12)$$

(см. по этому поводу [14в]. Подробное изложение одной из возможных конструкций функции W дано в монографии А. В. Погорелова).

В настоящей книге предлагается другой метод, который более прост в техническом отношении. Именно, вначале устанавливается регулярность обобщенных решений уравнений

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q)$$

со строго выпуклой функцией $R(p, q)$, после чего, опираясь на топологические методы и теорему единственности для обобщенных решений уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q) \qquad (\varphi > 0, \ \varphi_z \geqslant 0),$$

устанавливается регулярность обобщенных решений уравнений (22,1,12).

Если снять условие $\varphi_z \geqslant 0$, гарантирующее справедливость теоремы единственности, то предлагаемый нами метод позволяет установить существование многих регулярных решений задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q).$$

Методами работ [3в, г], [14в] этот результат не может быть получен.

2. Регулярность обобщенных решений уравнения $rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q)$ со строго выпуклой функцией $R(p, q)$. Пусть в выпуклой области Ω, ограниченной замкнутой выпуклой кривой Γ, определено обобщенное решение $z(x, y) \in W^+(\Omega)$ уравнения

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q). \qquad (22,2,1)$$

Ниже мы будем предполагать, что функции $\psi(x, y)$ и

$R(p, q)$ таковы, что

1. $\psi(x, y) \in C^{n, \lambda}(\Omega) \qquad (n \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1),$

$$\inf_{\Omega} \psi(x, y) = \psi_0 > 0.$$

2. $R(p, q) > 0$, принадлежит пространству $C^{n, \lambda}$ при всех конечных значениях p, q и удовлетворяет неравенству (22,1,10) с функцией $C(p, q)$.

Тогда всякое обобщенное решение $z(x, y)$ уравнения (22,2,1), согласно теореме 56 (§ 19, п. 1), непрерывно дифференцируемо внутри Ω. Пусть (x_0, y_0) — внутренняя точка области Ω, удаленная на расстояние ρ от кривой Γ. Обозначим через G_δ круг радиуса $\delta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0). Далее будем считать, что $\delta < \frac{\rho}{2}$. Границу круга G_δ обозначим через C_δ. Через γ_δ — обозначим кривую, лежащую на поверхности $z = z(x, y)$ и имеющую проекцией окружность C_δ.

Пусть

$$M_0 = \sup_{\Omega} |z(x, y)|.$$

Тогда (см. п. 1 § 22)

$$\sup_{G_\delta + C_\delta} \left(z_x^2 + z_y^2\right) \leqslant \frac{4M_0^2}{(\rho - \delta)^2} \leqslant \frac{16M_0^2}{\rho^2}.$$

Так как касательные плоскости к поверхности $z = z(x, y)$ являются одновременно опорными плоскостями к этой поверхности, то при любом $\delta \in \left(0, \frac{\rho}{2}\right)$ для нижнего извивания кривой γ_δ имеет место равномерная оценка

$$M_{\text{н}}(\gamma_\delta) \leqslant \frac{16M_0^2}{\rho^2}.$$

Пусть теперь $U_k(x, y)$ — последовательность бесконечно дифференцируемых выпуклых функций, сходящаяся внутри Ω к выпуклой функции $z(x, y)$. Тогда в замкнутом круге $G_{3/4\rho} + C_{3/4\rho}$ функции $U_k(x, y)$ равномерно сходятся к функции $z(x, y)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что при всех k

$$\sup_{G_{3/4\rho} + C_{3/4\rho}} |U_k(x, y)| \leqslant M_0 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число.

Из оценок (22,1,2) вытекает справедливость равномерных по k оценок

$$\sup_{G_{\rho/2}+C_{\rho/2}} \left(U_{kx}^2+U_{ky}^2\right) \leqslant \frac{4(M_0+\varepsilon)^2\,16}{\rho^2}. \tag{22,2,2}$$

Тем более оценки (22,2,2) верны в любом круге $G_\delta+C_\delta$, когда $\delta \in \left(0, \frac{\rho}{2}\right]$.

Обозначим через $\gamma_{k,\,\delta}$ кривую, лежащую на поверхности $z=U_k(x, y)$ и имеющую проекцией окружность C_δ. Для нижних извиваний $\gamma_{k,\,\delta}$ имеем равномерную оценку

$$M_{\text{н}}\left(\gamma_{k,\,\delta}\right) \leqslant \frac{64(M_0+\varepsilon)^2}{\rho^2}. \tag{22,2,3}$$

Кривые $\gamma_{k,\,\delta}$ задаются в пространстве бесконечно дифференцируемыми функциями от длины дуги окружности C_δ. Эти функции при $k \to +\infty$ равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции того же аргумента, которая определяет в пространстве кривую γ_δ.

Докажем теперь, что число $\delta \in \left(0, \frac{\rho}{2}\right)$ может быть выбрано так, что при всех k в круге G_δ существует решение

$$z_k(x, y) \in C^{n+2,\,\lambda'}(G_\delta)$$

(число $\lambda' \in (0, 1)$ будет определено ниже) уравнения

$$r_k t_k - s_k^2 = \psi(x, y) R\left(p_k, q_k\right), \tag{22,2,4}$$

имеющее краем кривую γ_δ.

Это предложение проще всего получить как следствие теоремы 87.

Так как у всех кривых $\gamma_{k,\,\delta}$ при любых k и δ нижние извивания ограничены сверху одним и тем же числом, то могут быть построены одни и те же функции $f_m(p^2+q^2)$, с помощью которых формулируется условие разрешимости задачи Дирихле в классе регулярных решений для уравнения

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q),$$

рассмотренное в теореме 87.

Положим

$$\psi_0 = \sup_{\Omega} \psi(x, y).$$

Тогда условия теоремы 87 будут выполнены сразу при всех k, если число $\delta > 0$ достаточно мало. (Отметим, что малость δ определяется лишь в зависимости от свойств функции $R(p, q)$ и числа $\frac{64(M_0+\varepsilon)^2}{\rho^2}$.)

Пусть $\delta_0 \in \left(0, \frac{\rho}{2}\right)$ такое число, что для него выполнены условия теоремы 87. Тогда при всех k в круге G_{δ_0} существует решение $z_k(x, y) \in C^{n+2, \lambda'}(G_{\delta_0})$ уравнения (22,2,1), имеющее краем кривую γ_{k, δ_0}. Из теоремы 87 также следует, что при всех k имеет место оценка

$$\sup_{G_{\delta_0}+C_{\delta_0}} \left(z_{k,x}^2 + z_{k,y}^2\right) \leqslant M_1 = \text{const} < +\infty.$$

Таким образом, последовательность решений $z_k(x, y)$ уравнения (22,2,1) в круге $G_{\delta_0} + C_{\delta_0}$ компактна относительно равномерной сходимости.

Используя прием, примененный нами в доказательстве теоремы 51 (§ 18, п. 5), получим, что последовательность функций $z_k(x, y)$ сходится равномерно в $G_{\delta_0} + C_{\delta_0}$ к исходному обобщенному решению $z(x, y)$ уравнения (22,2,1). Для того, чтобы установить принадлежность функции $z(x, y)$ классу $C^{n+2, \lambda'}$ в некоторой малой окрестности точки (x_0, y_0), достаточно установить в этой окрестности равномерную ограниченность в метрике $C^{n+2, \lambda''}$ $(\lambda' < \lambda'' < \lambda)$ функций $z_k(x, y)$.

Соответствующие оценки были проведены выше в п. 1 § 22. Рассмотрим, как они могут быть применены в нашем случае.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная внутренняя точка области Ω. Обозначим через $\rho > 0$ ее расстояние до границы Γ. Функция $z(x, y)$, как уже отмечалось, непрерывно дифференцируема и существенно выпукла. Поэтому существует плоскость

$$Q: \ \bar{z} = ax + by + c,$$

параллельная касательной плоскости к поверхности $z(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ такая, что

1) край поверхности $z(x, y)$ в $G_{\delta_0}+C_{\delta_0}$ лежит строго над плоскостью Q,

2) если Ω_1 — проекция шапочки, которая отрезается плоскостью Q от поверхности $z(x, y)$, то Ω_1 удалена от C_{δ_0} на расстояние, не меньшее $\rho/2$.

При $k\to\infty$ функции $z_k(x, y)$ равномерно сходятся к функции $z(x, y)$ в $G_{\delta_0}+C_{\delta_0}$. Поэтому при достаточно больших k плоскость x, y будет отсекать от поверхностей $z_k(x, y)$ шапочки, проекции которых $\Omega_1^{(k)}$ удалены от границы G_{δ_0} не менее, чем на $\rho/3$. Обозначим через $\Omega_2^{(k)}$, Ω_2 множества точек, определяемые соотношениями

$$\lambda_k(x, y)=ax+by+c-z_k(x, y)\geqslant\frac{1}{2}\lambda(x_0, y_0),$$

$$\lambda(x, y)=ax+by+c-z(x, y)\geqslant\frac{1}{2}\lambda(x_0, y_0).$$

$\Omega_2^{(k)}$, Ω_2 представляют собой выпуклые фигуры с внутренними точками и $\Omega_2^{(k)}$ при $k\to\infty$ имеют своим пределом выпуклое множество Ω_2. Будем считать, что числа k выбраны столь большими, что выпуклые фигуры

$$\Omega_3^{(k)}=\Omega_2^{(k)}\cap\Omega_2$$

содержат в себе некоторую окрестность V точки (x_0, y_0) вместе с ее замыканием.

Если на множествах $\Omega_1^{(k)}$ ввести вспомогательные функции

$$\begin{aligned}\lambda_k(x, y)&=ax+by+c-z_k(x, y),\\ w_k&=\lambda_k r_k,\\ w_k'&=\lambda_k t_k,\end{aligned}$$

то на множествах $\Omega_2^{(k)}$, согласно результатам п. 1 § 22 могут быть получены равномерные априорные оценки функций $z_k(x, y)$ в метрике $C^{n+2,\lambda''}$, зависящие лишь от следующих величин:

$$\begin{gathered}M_0,\ \rho,\ \psi_0;\quad \inf R(p, q),\ \|\psi(x, y)\|_{n,\lambda},\ \|R(p, q)\|_{n,\lambda},\\ C_0=\inf C(p, q),\quad \text{где } \inf R(p, q),\ \|\psi(x, y)\|_{n,\lambda},\ \|R(p, q)\|_{n,\lambda}\end{gathered}\tag{22,2,5}$$

и $C_0=\inf C(p, q)$ вычисляются в области:

$$(x, y)\in\Omega-\Omega_{\rho/2},\quad |z|\leqslant M_0+\varepsilon,\quad p^2+q^2\leqslant\frac{64(M_0+\varepsilon)^2}{\rho^2}.$$

Отсюда вытекает, что на множестве V функция $z(x, y) \in C^{n+2, \lambda'}$, причем константы и показатель условия Гельдера зависят лишь от постоянных (22,2,5).

Итак, у каждой внутренней точки области Ω есть окрестность, в которой функция $z(x, y) \in C^{n+2, \lambda'}$. Отсюда следует, что функция $z(x, y)$ имеет непрерывные производные до порядка $n+2$ и $n+2$-е производные удовлетворяют внутри Ω условию Гельдера.

Суммируя рассуждения, проведенные выше, приходим к следующим выводам:

Теорема 88. *Пусть в выпуклой области Ω задано уравнение*

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p, q),$$

причем функции ψ и R удовлетворяют следующим условиям:

1. $\psi(x, y) \geqslant \psi_0 > 0$;
2. $R(p, q) > 0$ *для любых конечных p, q*;
3. $\psi(x, y) \in C^{n, \lambda}(\Omega)$, $R(p, q) \in C^{n, \lambda}$ $(n \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1)$;
4. $R(p, q)$ — *строго выпуклая функция переменных p, q.*

Тогда в открытой области Ω любое обобщенное решение уравнения (22,2,1) *имеет непрерывные производные до порядка $n+2$, причем $(n+2)$-е производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda' < \lambda$.*

В частности, если ψ и R — бесконечно дифференцируемые (аналитические) функции, то любое обобщенное решение уравнения (22,2,1) *будет бесконечно дифференцируемым (аналитическим).*

Пусть по-прежнему замкнутая выпуклая кривая Γ ограничивает выпуклую область Ω. Обозначим через W_1^+ совокупность непрерывно дифференцируемых в Ω выпуклых функций (поверхностей), обращенных выпуклостью вниз. Будем говорить, что гомеоморфная окружности кривая K в пространстве x, y, z определяет допустимое краевое условие для задачи Дирихле, если выполнены следующие условия:

1. Существует замкнутая выпуклая кривая $\gamma \subset \Omega$, удаленная от Γ на положительное расстояние, на которую K проектируется однозначно.

2. Существует выпуклая поверхность $z(x, y) \in W_1^+$ такая, что кривая K целиком лежит на этой поверхности.

В дальнейшем в качестве кривой γ у нас всегда будет фигурировать окружность. Поэтому кривая K, задающая допустимое краевое условие, определяется непрерывно дифференцируемой функцией

$$h(\theta) = z(a + \rho_0 \cos\theta,\ b + \rho_0 \sin\theta),$$

где ρ и θ — полярные координаты на плоскости x, y с полюсом в центре окружности γ — точке (a, b), а ρ_0 — радиус этой же окружности.

Отметим, что нижнее извивание любой кривой K, порождающей допустимое краевое условие, всегда конечно. Более того, если рассмотреть все такие кривые, расположенные на одной поверхности $z(x, y)$, проекции которых удалены от Γ на расстояние, не меньшее чем $\rho > 0$, то имеет место равномерная оценка

$$M_{\text{н}}(K) \leqslant \frac{4\left[\sup\limits_{\Omega} |z(x, y)|\right]^2}{\rho^2}.$$

Это утверждение есть следствие двух простых фактов:

а) каждая касательная плоскость к выпуклой поверхности есть ее опорная плоскость,

б) наклон касательной плоскости к поверхности $z(x, y)$ в точке (x, y), удаленной от Γ на расстояние, не меньшее чем $\rho > 0$, не превосходит

$$\frac{4\left[\sup\limits_{\Omega} |z(x, y)|\right]^2}{\rho^2}.$$

Теорема 89. *Пусть в открытой области Ω задана строго положительная функция $\psi(x, y)$, имеющая в Ω непрерывные производные до n-го порядка, и n-е производные которой удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ $(0 < \lambda < 1)$, а на плоскости p, q определена строго выпуклая функция $R(p^2 + q^2)$ переменных p, q, которая при всех конечных p, q строго положительна. Пусть, кроме того, на плоскости p, q функция $R(p^2 + q^2) \in C^{n, \lambda}$.*

Рассмотрим кривую K, порождающую допустимое краевое условие и проектирующуюся на плоскость x, y в окружность γ. Через G_γ обозначим круг, ограниченный кривой γ.

По функции $R(p^2+q^2)$ *строим функцию*

$$N_{\text{н}}\left(p^2+q^2,\ K,\ \frac{1}{R}\right).$$

Пусть

$$\psi_1 = \sup_{\Omega} \psi(x,\ y).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\psi_1 \operatorname{mes} G_\gamma < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2+q^2,\ K,\ \frac{1}{R}\right) dp\, dq,$$

то в G_γ *существует обобщенное решение* $z(x,\ y)$ *задачи Дирихле для уравнения*

$$rt - s^2 = \psi(x,\ y)\, R(p^2+q^2)$$

такое, что

1. *краем* $z(x,\ y)$ *является кривая* K,
2. $z(x,\ y) \in C^1(G_\gamma)$ и

$$\max_{G_\gamma+\gamma} |z| \leqslant M_0 =$$

$$= \sup_{\Omega} |h| + F_{\text{н}}\left(N_{\text{н}},\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\, dp\, dq - \psi_1 \operatorname{mes} G_\gamma\right) \operatorname{diam} G_\gamma,$$

$$\sup_{G_\gamma+\gamma} (z_x^2 + z_y^2) \leqslant M_1$$

$\left(M_1 \textit{ зависит лишь от } M_{\text{н}}(K) \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\, dp\, dq - \psi_1 \operatorname{mes} G_\gamma\right)$.

3. $z(x,\ y)$ *имеет в* G_γ *непрерывные производные до порядка* $n+2$ *включительно, причем* $n+2$*-е производные удовлетворяют условию Гельдера внутри* G_γ. *Пусть* G_σ — *замкнутый круг, концентрический с* G_γ, *радиуса* σ *меньшего, чем радиус* σ_0 *круга* G_γ. *Тогда при любом* $\sigma < \sigma_0$ *в* G_σ *функция* $z(x,\ y)$ *допускает оценку*

$$\|z\|_{n+2,\ \lambda'} \leqslant B_\sigma,$$

где постоянные λ' *и* B_σ *зависят лишь от следующих величин:* $\sigma_0 - \sigma$, M_0, $\inf \psi(x,\ y)$, $\inf R(p,\ q)$, $\|\psi(x,\ y)\|_{n,\ \lambda}$,

$\|R(p, q)\|_{n,\lambda}$, $\inf c(p, q)$ *при условии, что последние пять функций рассматриваются в области* $(x, y) \in C_\gamma + \gamma$, $|z| \leqslant M_0$, $p^2+q^2 \leqslant M_1$.

3. Операторы, связанные с задачей Дирихле для уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$. На плоскости p, q фиксируем строго выпуклую функцию $R(p^2+q^2)$, удовлетворяющую условиям теоремы 89. Пусть Ω — открытая выпуклая область, содержащая внутри себя замкнутый круг G_γ радиуса ρ_0. Фиксируем далее кривую K, порождающую допустимое краевое условие и имеющую проекцией на плоскость x, y окружность γ. Пусть $M_н$ — нижнее извивание K. Строим функцию

$$N_н\left(p^2+q^2, K, \frac{1}{R}\right). \tag{22,3,1}$$

Пусть Ψ — совокупность функций $\psi(x, y) > 0$, определенных в G_γ, принадлежащих $C^{n,\lambda}(G_\gamma - \gamma)$ и удовлетворяющих соотношению

$$\sup_{G_\gamma} [\psi(x, y)] \operatorname{mes} G_1 < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_н\left(p^2+q^2, K, \frac{1}{R}\right) dp\, dq. \tag{22,3,2}$$

Тогда на основании теоремы 89 каждой функции $\psi(x, y) \in \Psi$ соответствует единственное обобщенное решение $z(x, y) \in W^+(G_\gamma)$ уравнения

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p^2+q^2), \tag{22,3,3}$$

обладающее следующими свойствами:

1. Краем выпуклой поверхности $z(x, y)$ является кривая K.
2. $z(x, y) \in C^1(G_\gamma)$ и при этом

$$\|z\|_{C(G_\gamma)} \leqslant M_0, \tag{22,3,4}$$

$\sup\limits_{G_\gamma+\gamma} (z_x^2 + z_y^2) \leqslant M_1$ (постоянные M_0 и M_1 введены в теореме 89).

3. Если G_σ — концентрический с G_γ замкнутый круг, то при любом $\sigma < \rho_0$ имеем $z(x, y) \in C^{n+2,\lambda'}(G_\sigma)$, где числа $0 < \lambda' < 1$, $\|z\|_{n+2,\lambda'}$ зависят лишь от следующих величин:

а) разности $\rho_0 - \sigma$,

б) $$\|\psi(x, y)\|_{C^{n,\lambda}\left(G_{\sigma+\frac{\rho_0-\sigma}{3}}\right)}, \tag{22,3,5}$$

в) $$\inf_{G_\gamma} \psi(x, y) = \psi_0 > 0,$$

г) $$\|R(p^2+q^2)\|_{C^{n,\lambda}(T)},$$

где T — круг на плоскости p, q с центром в начале координат радиуса M_1,

д) $$r_T = \inf_T R(p^2+q^2).$$

Отметим, что показатель условия Гельдера λ' и постоянные этого условия для $n+2$ производных функции $z(x, y)$ зависят, вообще говоря, от выбора функции $\psi(x, y) \in \Psi$ и числа $\sigma < \rho_0$. Однако для любой функции $\psi(x, y) \in \Psi$ и любого $\sigma < \rho_0$ всегда $\lambda' > 0$ и

$$\|z\|_{C^{n+2,\lambda'}(G_\sigma)} < +\infty.$$

Каждой строго положительной функции $\psi(x, y) \in \Psi$ поставим в соответствие решение $z(x, y)$ уравнения

$$rt - s^2 = \psi(x, y) R(p^2+q^2),$$

имеющее краем кривую K. Это соответствие определяет оператор

$$z = A_R(\psi), \tag{22,3,6}$$

переводящий множество функций $\Psi \subset C^{n,\lambda}(G_\gamma - \gamma)$ в множество выпуклых функций V, обладающих следующими свойствами:

1. Функции $v \in V$ определены в G_γ, обращены выпуклостью вниз и имеют краем кривую K.

2. Внутри G_γ функции $v \in V$ по крайней мере $n+1$ раз непрерывно дифференцируемы и все $n+1$ производные этих функций удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — фиксированное число, подчиненное единственному ограничению $\lambda+\varepsilon < 1$.

3. Внутри G_γ все функции $v(x, y) \in V$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{R\left(v_x^2 + v_y^2\right)} \geqslant \frac{1}{2}\varphi_0 = \mathrm{const} > 0;$$

см. (22,3,5).

(Условие 3 обеспечивает строгую выпуклость всех функций $v \in V$ и тем самым нормальные изображения G_γ на плоскость p, q посредством этих функций представляют собой гомеоморфизмы.)

Пусть функция $\varphi(x, y, z, p, q)$, определенная при всех $(x, y) \in G_\gamma$ и любых конечных z, p, q, такова, что

а) при всех допустимых значениях аргументов

$$\varphi(x, y, z, p, q) > 0, \tag{22,3,7}$$

б) по совокупности всех пяти переменных $\varphi(x, y, z, p, q)$ имеет все производные до порядка n включительно, причем производные порядка n удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ,

в) функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ при всех допустимых значениях аргументов удовлетворяет оценке

$$\varphi(x, y, z, p, q) \leqslant \psi_0 R\left(p^2 + q^2\right), \tag{22,3,8}$$

где положительная постоянная $\psi_0 < +\infty$ не зависит от $(x, y) \in C_\gamma$ и $z \in (-\infty, M)$; через M обозначена наибольшая из аппликат точек кривой K. (Как было выяснено выше, если кривая K фиксирована, то случай задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q),$$

где функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет условиям а), б) и, кроме того, неравенствам

$$\varphi(x, y, z, p, q) > 0, \quad \varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0,$$

сводится к задаче Дирихле, когда функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет условиям а), б), в). Поэтому этот случай не нуждается в специальном рассмотрении.)

В дальнейшем будем предполагать, что постоянная Ψ_0 удовлетворяет неравенству

$$\Psi_0 \operatorname{mes} G_\gamma < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2+q^2;\ K;\ \frac{1}{R}\right) dp\, dq. \qquad (22,3,9)$$

Обозначим через U множество выпуклых функций $u(x, y)$, обладающих следующими свойствами:

1. Функции $u(x, y)$ определены в круге G_γ, обращены выпуклостью вниз и имеют краем кривую K.

2. Внутри G_γ функции $u(x, y) \in U$ по крайней мере $n+1$ раз непрерывно дифференцируемы и все их $n+1$ производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ.

Множество U не пусто; оно содержит, например, выпуклую функцию $v_0(x, y)$, имеющую краем кривую K и удовлетворяющую внутри G_γ уравнению

$$v_{0,xx}v_{0,yy} - v_{0,xy}^2 = \psi_0 R\left(v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2\right).$$

На множестве U введем оператор

$$f(u) = \frac{\varphi(x, y, u, u_x, u_y)}{R\left(u_x^2+u_y^2\right)}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $f(u)$ переводит совокупность выпуклых функций U в множество строго положительных функций Ψ. Далее мы часто будем пользоваться обозначением

$$\psi_u(x, y) \equiv f(u).$$

Рассмотрим оператор

$$F_R(u) = A_R[f(u)] \equiv A_R(\psi_u(x, y)). \qquad (22,3,10)$$

Он переводит множество выпуклых функций U в множество выпуклых функций $V \subset U$, т. е.

$$F_R(U) \subset V \subset U.$$

Покажем теперь, что с помощью введения соответствующих норм к оператору F_R может быть применен принцип Шаудера.

Рассмотрим множество функций $g(x, y)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем 1 в замкнутом круге G_γ и имеющих внутри G_γ производные до порядка n $(n \geqslant 4)$ включительно, причем все производные порядка n удовлетворяют внутри G_γ условию Гельдера с показателем λ. Обозначим через $\tau_\sigma(\rho^2)$ бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на промежутке $[0, \rho_0]$, такую, что

$$\tau_\sigma(\rho^2) \begin{cases} \text{равна единице, если } \rho \in [0, \sigma], \\ \text{строго убывает, если } \rho \in \left[\sigma, \sigma + \frac{\rho_0 - \sigma}{2}\right], \\ \text{равна нулю, если } \rho \in \left[\sigma + \frac{\rho_0 - \sigma}{2}, \rho_0\right]. \end{cases}$$

Функцию $\tau_\sigma(\rho^2)$ можно построить многими способами. Ниже нам не важен конкретный вид этой функции на промежутке $\left[\sigma, \sigma + \frac{\rho_0 - \sigma}{2}\right]$. Важно лишь, что при каждом $\sigma < \rho_0$ такая функция будет считаться фиксированной.

В введенное выше множество функций $g(x, y)$ введем норму

$$|g|_{n, \lambda, \sigma} = \|g\|_{C(G_\gamma)} + \sup_{G_\gamma} \frac{|g(x', y') - g(x, y)|}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} + \\ + \|\tau_\sigma(x^2 + y^2)\, g(x, y)\|_{C^{n, \lambda}\left(G_{\sigma + \frac{3(\rho_0 - \sigma)}{4}}\right)},$$

и произведем пополнение множества функций $g(x, y)$ относительно этой нормы. Результат пополнения образует, очевидно, банахово пространство, которое мы будем обозначать через $\tilde{C}_\sigma^{n, \lambda}$. Совокупности выпуклых функций U и V, очевидно, принадлежат соответственно пространствам $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda}$ и $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda+\varepsilon}$ при любом $\sigma < \rho_0$.

Фиксируем теперь некоторое $\sigma < \rho_0$. Пусть, далее, $\bar{U}$ и $\bar{V}$ — замыкания множеств U и V соответственно в метриках $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda}$ и $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda+\varepsilon}$. Очевидно, $\bar{U}$ и $\bar{V}$ представляют собой совокупности выпуклых в сторону $z < 0$ функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеющих краем кривую K, для которых соответственно выполняются неравенства

$$|u|_{n+1, \lambda, \sigma} < +\infty, \qquad |v|_{n+1, \lambda+\varepsilon, \sigma} < +\infty.$$

Из построения множеств $\bar{U}$ и $\bar{V}$ ясно, что $\bar{V} \subset \bar{U}$.

Докажем, что множество $\overline{V}$ компактно в $\overline{U}$ относительно нормы $|\ \ |_{n+1,\lambda,\sigma}$. Действительно, пусть последовательность выпуклых функций

$$v_k(x, y) \in \overline{V}$$

такова, что

$$|v_k|_{n+1,\lambda+\varepsilon,\sigma} \leqslant v_0 < +\infty. \tag{22,3,11}$$

Тогда в замкнутом круге G_γ имеем при всех k

$$\sup_{G_\gamma} |v_k| + \sup_{G_\gamma} \frac{|v_k(x', y') - v_k(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \leqslant v_0.$$

Поэтому из $v_k(x, y)$ можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность функций, за которой мы оставляем обозначение $v_k(x, y)$, имеющих пределом выпуклую функцию $v(x, y)$ с краем K, для которой справедлива оценка

$$\sup_{G_\gamma} |v| + \sup_{G_\gamma} \frac{|v_k(x', y') - v_k(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \leqslant v_0.$$

Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{G_\gamma} \frac{|v_k(x', y') - v_k(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \sup_{G_\gamma} \frac{|v(x', y') - v(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \tag{22,3,12}$$

Так как множество G_γ есть замкнутый круг, то нормальные изображения $\nu_{v_k}(G_\gamma)$ и $\nu_v(G_\gamma)$ поверхностей $z = v_k(x, y)$ и $z = v(x, y)$, в силу свойства 3 функции $v \in V$, есть замкнутые области на плоскости p, q. Заметим, что

$$\sup_{G_\gamma} \frac{|v(x', y') - v(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = |OP|,$$

где P — одна из точек $\nu_v(G_\gamma)$, удаленных на наибольшее расстояние от точки $(0, 0)$.

Так как предел любой сходящейся последовательности опорных плоскостей к поверхностям $v_k(x, y)$ есть опорная плоскость к поверхности $v(x, y)$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое N, что при $k \geqslant N$ все множества $\nu_{v_k}(G_\gamma)$ лежат в ε-окрестности множества $\nu_v(G_\gamma)$. Отсюда следует, что

$$\sup_{G_\gamma} \frac{|v(x', y') - v(x, y)|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = |OP| \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k \to \infty} \sup_{G_\gamma} \frac{|v_k(x', y') - v_k(x, y)|}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}. \qquad (22,3,13)$$

Отметим попутно, что

$$\iint\limits_{\nu_v(G_\gamma)} \frac{dp\,dq}{R(p^2+q^2)} \equiv \iint\limits_{G_\gamma} \psi_v\,dx\,dy = \lim_{k \to \infty} \iint\limits_{G_\gamma} \psi_{v_k}\,dx\,dy \equiv$$

$$\equiv \lim_{k \to \infty} \iint\limits_{\nu_{v_k}(G_\gamma)} \frac{dp\,dq}{R(p^2+q^2)}. \qquad (22,3,14)$$

Если существует последовательность точек $P_k \in \nu_{v_k}(G_\gamma)$, сходящаяся к точке P, то это гарантирует, благодаря неравенству (22,3,13), справедливость соотношения (22,3,12). Если же это не так, то существует окрестность точки P, в которой нет точек множеств $\nu_{v_k}(G_\gamma)$ при всех достаточно больших k. Так как ψ_v — строго положительная функция, то равенство (22,3,14) не выполняется. Полученное противоречие доказывает соотношение (22,3,12).

Поскольку для всех k справедлива равномерная оценка (22,3,11), то $\|v_k - v\|_{n+1, \lambda, \sigma} \to 0$. Это и доказывает, что множество $\bar{V} \subset \bar{U}$ компактно в пространстве $\tilde{G}_\sigma^{n+1, \lambda}$.

Выше был построен оператор $F_R(u)$, который переводил множество выпуклых функций U в множество $V \subset U$. Распространим теперь оператор $F_R(u)$ на $\bar{U}$. Для этого достаточно определить этот оператор на $\bar{U} - U$. Итак, пусть выпуклая функция $\bar{u}(x, y) \in \bar{U} - U$. Тогда существует последовательность выпуклых функций $u_k(x, y) \in U$, сходящаяся в метрике пространства $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda}$ к функции $\bar{u}(x, y)$. Функции

$$\psi_{u_k}(x, y) = \frac{\varphi(x, y, u_k, u_{k,x}, u_{k,y})}{R\left(u_{k,x}^2 + u_{k,y}^2\right)}$$

сходятся почти везде к функции

$$\psi_{\bar{u}}(x, y) = \frac{\varphi(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)}{R\left(\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2\right)}$$

на множестве $G_\gamma - G_{\sigma+\frac{\rho_0-\sigma}{2}}$, а в замкнутом круге $G_{\sigma+\frac{\rho_0-\sigma}{2}}$ имеет место сходимость в метрике $C^{n,\lambda}$ тех же функций $\psi_{u_k}(x, y)$ к функции $\psi_{\bar{u}}(x, y)$. Так как в G_γ имеют место равномерные оценки

$$\sup_{G_\gamma}|u_k| + \sup_{G_\gamma}|u_{k,x}^2 + u_{k,y}^2| \leqslant u_0 < +\infty$$

и

$$\sup_{G_\gamma}|\bar{u}| + \sup_{G_\gamma}|\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2| \leqslant u_0 < +\infty,$$

то из свойств функций $\varphi(x, y, z, p, q)$ и $R(p^2+q^2)$ вытекает, что существуют такие постоянные $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1 > 0$, что в G_γ при всех k справедливы неравенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \geqslant \psi_{u_k}(x, y) \geqslant \alpha_0 > 0, \\ \alpha_1 \geqslant \psi_{\bar{u}}(x, y) \geqslant \alpha_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{22,3,15}$$

Далее,

$$\iint_{G_\gamma} \psi_{\bar{u}}(x, y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\iint_{G_\gamma} \psi_{u_k}(x, y)\,dx\,dy.$$

Так как

$$\psi_0 \operatorname{mes} G_\gamma < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\,dp\,dq \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\,dq}{R(p^2+q^2)},$$

то существует единственное обобщенное решение $v(x, y) \in W^+(G_\gamma)$ уравнения

$$\frac{\bar{v}_{xx}\bar{v}_{yy} - \bar{v}_{xy}^2}{R(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2)} = \psi_{\bar{u}}(x, y), \tag{22,3,16}$$

имеющее краем кривую K.

Докажем, что $\bar{v} \in \bar{V}$.

Все функции $u_k(x, y) \in U$, поэтому существуют решения уравнения

$$v_{k,xx}v_{k,yy} - v_{k,xy}^2 = \psi_{u_k}(x, y)\,R(v_{k,x}^2 + v_{k,y}^2),$$

имеющие краем кривую K. Эти решения $v_k(x, y)$ имеют равномерно ограниченные в G_γ первые производные. Отсюда, в силу теоремы 46 (§ 17, п. 3), $\|v_k - \bar{v}\|_c \to 0$; при этом, как показано выше в круге G_γ, коэффициенты условия Липшица функций $v_k(x, y)$ сходятся к коэффициенту условия Липшица функции $\bar{v}(x, y)$. Далее, из неравенств (22,3,15), используя гладкость и строгую выпуклость поверхности $\bar{v}(x, y)$, приходим к выводу о равномерных оценках функций $v_k(x, y)$ в метрике пространства $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda+\varepsilon+\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 > 0$ — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\lambda + \varepsilon + \varepsilon_1 < 1.$$

Отсюда следует, что функция $\bar{v}(x, y)$ в круге G_γ принадлежит пространству $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda+\varepsilon}$.

Таким образом, каждой функции $\bar{u} \in \bar{U}$ можно поставить в соответствие функцию $\bar{v} \in \bar{V}$, которая является решением уравнения (22,3,16) и имеет краем кривую K. Построенный оператор будем обозначать $F_{R, \sigma}$. Этот оператор переводит множество выпуклых функций $\bar{u} \subset \tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda}$ в свою компактную часть $\bar{V}$, при этом $\bar{V} \subset \tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda+\varepsilon}$.

4. Свойства оператора $F_{R, \sigma}$. Теорема о существовании регулярных решений уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$. а) Непрерывность оператора $F_{R, \sigma}$. Пусть последовательность функций $\bar{u}_k \in \bar{U}$ сходится к некоторой функции $\bar{u}_0 \in \bar{U}$ в метрике пространства $\tilde{C}_\sigma^{n+1, \lambda}$. Тогда функции

$$\psi_{\bar{u}_k}(x, y) \equiv \frac{\varphi(x, y, \bar{u}_k, \bar{u}_{k, x}, \bar{u}_{k, y})}{R\left(\bar{u}_{k, x}^2 + \bar{u}_{k, y}^2\right)}$$

сходятся почти везде к функции

$$\psi_{\bar{u}_0}(x, y) = \frac{\varphi(x, y, \bar{u}_0, \bar{u}_{0x}, \bar{u}_{0y})}{R\left(\bar{u}_{0, x}^2 + \bar{u}_{0, y}^2\right)}$$

в $G_\gamma - G_{\frac{\rho_0+\sigma}{2}}$, а в круге $G_{\frac{\rho_0+\sigma}{2}}$ имеет место сходимость этих функций в метрике $C^{n, \lambda}$ к функции $\psi_{\bar{u}}(x, y)$. Так как наклоны опорных плоскостей к выпуклым поверхностям

$$\bar{v}_k = F_{R, \sigma}(\bar{u}_k),$$
$$\bar{v} = F_{R, \sigma}(\bar{u})$$

равномерно ограничены, то из теоремы 46 (§ 17, п. 3) вытекает, что функции $\bar{v}_k(x, y)$ в метрике $C(G_\gamma)$ сходятся к функции $\bar{v}(x, y)$. Теперь для доказательства сходимости $\bar{v}_k$ к $\bar{v}$ в метрике $\tilde{C}_\sigma^{n+1,\lambda}$ достаточно установить, что нормы функций $\bar{v}_k$ в метрике пространства $\tilde{C}_\sigma^{n+1,\lambda+\varepsilon}$ равномерно ограничены. А это очевидно. Действительно из сходимости

$$|\bar{u}_k - \bar{u}|_{n+1,\lambda,\sigma} \to 0$$

вытекает равномерная ограниченность следующих величин:

$$|\bar{v}_k|_{n+1,\lambda+\varepsilon,\sigma} \leqslant M = \text{const} < +\infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{G_\gamma} \frac{|\bar{v}_k(x', y') - \bar{v}_k(x, y)|}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}} = \sup_{G_\gamma} \frac{|\bar{v}(x', y') - \bar{v}(x, y)|}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}.$$

Отсюда имеем

$$|\bar{v}_k - v_k|_{n+1,\lambda,\sigma} \to 0.$$

(Сходимость постоянных условий Липшица для функций $\bar{v}_k(x, y)$ доказывается дословно так же, как и в пункте 3.)

Итак, непрерывность оператора $F_{R,\sigma}$ доказана.

б) Существование неподвижных точек оператора $F_{R,\sigma}$. Выше уже было доказано, что оператор $F_{R,\sigma}$ переводит замкнутое множество $\bar{U}$ в его компактную часть $\bar{V}$. Множество $\bar{U}$, очевидно, выпукло в пространстве $\tilde{C}_\sigma^{m+1,\lambda}$. Поэтому к оператору $F_{R,\sigma}$ может быть применен принцип Шаудера, и, следовательно, оператор $F_{R,\sigma}$ имеет на множестве $\bar{U}$ неподвижную точку $u(x, y)$. Ясно, что $u(x, y)$ имеет краем кривую K и является обобщенным решением уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \varphi(x, y, u, u_x, u_y)$$

и принадлежит пространству $\tilde{C}_\sigma^{m+1,\lambda}$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 90. *Пусть Ω — открытая выпуклая область на плоскости x, y, содержащая внутри себя замкнутый круг G_γ радиуса ρ_0. Пусть, далее, кривая K порождает допустимое краевое условие и имеет проек-*

цией на плоскость x, y *окружность* γ — *границу* G_γ. *Через* $M_н(K)$ *обозначим нижнее извивание кривой* K. *Пусть, далее, функция* $\varphi(x, y, z, p, q)$, *определенная при всех* $(x, y) \in G_\gamma$ *и любых конечных* z, p, q, *такова, что*

а) *при всех допустимых значениях аргументов*

$$\varphi(x, y, z, p, q) > 0,$$

б) *по совокупности всех пяти переменных в области допустимых значений аргументов функция* $\varphi(x, y, z, p, q)$ *имеет все производные до порядка* n *включительно, причем производные порядка* n *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* λ $(n \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1)$,

в) *функция* $\varphi(x, y, z, p, q)$ *при всех допустимых значениях аргументов* x, y, p, q *и* $z \leqslant \overline{M}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(x, y, z, p, q) \leqslant \psi_{\overline{M}} R(p^2 + q^2),$$

где: 1) $\psi_{\overline{M}} = \mathrm{const} > 0$, *зависящая лишь от числа* $\overline{M}$ *и не зависящая от переменных* $(x, y) \in G_\gamma$; p, q, 2) *функция* $R(p^2+q^2) > 0$ *при всех конечных значениях* p, q *строго выпукла по* p, q *и на плоскости* p, q *принадлежит пространству* $C^{n,\lambda}$.

По функции $R(p^2+q^2)$ *строим функцию*

$$N_н\left(p^2+q^2;\ K;\ \frac{1}{R}\right). \tag{22,4,1}$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\psi_{\overline{M}_k} \operatorname{mes} G_\gamma < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_н\left(p^2+q^2;\ K;\ \frac{1}{R}\right) dp\, dq \tag{22,4,2}$$

(*через* $\overline{M}_K$ *обозначена наибольшая из аппликат точек кривой* K), *то при любом* $\sigma < \rho_0$ *в круге* G_γ *существует по крайней мере одно решение* $z(x, y) \in W^+(G_\gamma)$ *уравнения*

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \varphi(x, y, z, z_x, z_y), \tag{22,4,3}$$

имеющее краем кривую K *и принадлежащее пространству* $\widetilde{C}_\sigma^{m+1,\lambda}$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ подчинена дополнительному условию

$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0$$

при всех допустимых значениях x, y, z, p, q. В этом случае, как мы знаем, существует не более одного обобщенного решения уравнения (22,4,3) с краем K в классе $W^+(C_\gamma)$. Поэтому утверждение теоремы 90 в этом случае будет более сильным. Именно, при выполнении всех условий теоремы 90 и условия

$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0$$

существует единственное обобщенное решение уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q),$$

которое при любом $\sigma < \rho_0$ принадлежит пространству $\tilde{C}_\sigma^{m+1, \lambda}$.

5. Регулярность обобщенных решений уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ при условии, что $\varphi_z \geqslant 0$. Пусть функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ определена при всех конечных z, p, q и при всех x, y, принадлежащих некоторой открытой выпуклой области Ω. Предположим, что эта функция удовлетворяет при всех допустимых значениях аргументов условиям а), б), в) теоремы 90 и условию

$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0.$$

Пусть теперь $z(x, y) \in W^+(\Omega)$ — обобщенное решение уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q). \tag{22,5,1}$$

Положим

$$\overline{M}_z = \sup_{\Omega} z(x, y).$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\overline{M}_z < +\infty;$$

в противном случае вопрос о регулярности решения будем рассматривать в любой выпуклой подобласти Ω' области Ω, удаленной от границы Ω на положительное расстояние, В связи с этим достаточно рассматривать функцию $\varphi(x, y, z, p, q)$ лишь для $z \leqslant \overline{M}_z$, а тогда из условия в) будет следовать, что

$$\varphi(x, y, z, p, q) \leqslant \overline{M}_z R(p^2+q^2).$$

Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$ — внутренняя точка этой области, удаленная на расстояние ρ_0 от границы Ω. В любом круге G_σ радиуса $\sigma \leqslant \frac{1}{2}\rho_0$ с центром в точке (x_0, y_0) функция $z(x, y) \in C^1$ и при этом справедлива оценка

$$\sup_{G_\sigma}\left(z_x^2+z_y^2\right) \leqslant \frac{64\overline{M}_z^2}{\rho_0^2}.$$

Обозначим через K_σ кривую, лежащую на поверхности $z=z(x, y)$ и проектирующуюся на границу круга G_σ. Кривая K_σ при любом $\sigma \leqslant \frac{1}{2}\rho_0$ порождает допустимое краевое условие, и для нижнего извивания кривой K_σ имеет место равномерная оценка

$$M_{\text{н}}(K_\sigma) \leqslant \frac{64\overline{M}_z^2}{\rho_0^2}.$$

Поэтому при всех $\sigma \leqslant \frac{1}{2}\rho_0$ функция $N_{\text{н}}\left(p^2+q^2; K_\sigma, \frac{1}{R}\right)$, которая строится по кривой K_σ и функции $R(p^2+q^2)$, может быть взята одной и той же. Так как σ может принимать сколь угодно малые значения, то существует $\sigma_0 > 0$ *), при котором выполняется неравенство

$$\psi_{\overline{M}_z} \operatorname{mes} G_{\sigma_0} < \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\text{н}}\left(p^2+q^2, K_\sigma, \frac{1}{R}\right) dp\, dq.$$

Тогда, согласно дополнению к теореме 90, в круге G_{σ_0} функция $z(x, y)$ принадлежит пространству $\widetilde{C}_\sigma^{m+1, \lambda}$, где $\sigma > 0$ — любое число, меньшее σ_0. Таким образом, в круге

---

*) Само собой разумеется, что $\sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}\rho_0$.

$G_{\sigma_0/2}$ функция $z(x, y) \in C^{n+1, \lambda}$. Так как центр круга $G_{\sigma_0/2}$ — точка (x_0, y_0) — была выбрана произвольно внутри Ω, то мы получаем, что внутри Ω функция $z(x, y)$ принадлежит пространству $C^{m+1, \lambda}$.

Итак, приходим к следующей основной теореме о регулярности обобщенных решений уравнения (22, 5, 1).

Теорема 91. *Всякое обобщенное решение* $z(x, y) \in$ $\in W^1(\Omega)$, *где* Ω — *открытая выпуклая область, уравнения*

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$$

принадлежит $C^{n+1, \lambda}$ $(n \geqslant 2,\ 0 < \lambda < 1)$ *внутри* Ω, *если*

1)
$$\varphi(x, y, z, p, q) > 0,$$
$$\varphi_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0$$

при всех $(x, y) \in \Omega$ *и любых конечных* z, p, q,

2) *при всех допустимых значениях аргументов* $\varphi(x, y, z, p, q)$ *как функция пяти переменных принадлежит* $C^{n, \lambda}$.

Как уже отмечалось выше, условие в) теоремы 90 есть следствие условия $\varphi_z \geqslant 0$ и условия 2) теоремы 91. (Заметим, что условие в) применяется всегда, когда x, y, z, p, q меняются в компактной области.) Поэтому условие в) можно опустить в формулировке теоремы 91, что и сделано.

6. Вопрос о существовании многих регулярных решений. В п. 4 § 19 на основе теорем о неподвижных точках в конусах был исследован вопрос о существовании многих решений задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q). \tag{22, 6, 1}$$

С помощью оператора $F_{R, \sigma}$, введенного в п. 3 настоящего параграфа, аналогичные построения можно провести в конусе выпуклых функций в пространстве $\tilde{C}_\sigma^{m+1, \lambda}$. Это приведет к теоремам существования многих регулярных решений в задаче Дирихле для уравнения (22, 6, 1). Чтобы не загромождать изложение довольно сложными построениями, мы не будем останавливаться на рассмотрении этого вопроса.

Отметим только, что в этом случае функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ должна быть регулярна, а в остальном формулировки соответствующих результатов мало чем отличаются от результатов п. 4 § 19.

7. Регулярность обобщенных решений сильно эллиптических уравнений Монжа—Ампера. Этот вопрос подробно исследован в монографии А. В. Погорелова [14 в], куда мы и отсылаем читателя. Основной результат формулируется так.

Теорема 92. *Пусть коэффициенты сильно эллиптического уравнения Монжа—Ампера*

$$rt - s^2 = A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t + \varphi(x, y, z, p, q)$$

принадлежат $C^{n, \lambda}$ $(n \geqslant 2;\ 0 < \lambda < 1)$ *и удовлетворяют условиям*:

1) *функция* $\varphi > 0$, *не убывающая по* z *и выпуклая по* p, q;

2) *квадратичная форма*

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant 0,$$

не убывающая по z *и выпуклая по* p, q.

Тогда всякое обобщенное решение этого уравнения из класса $W^+(\Omega)$ *принадлежит внутри* Ω *классу* $C^{n+1, \lambda}$. *Если же коэффициенты уравнения аналитические, то решение аналитическое.*

ДОПОЛНЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Априорные оценки первых производных (случай звездной невыпуклой области)*. Результаты, которые излагаются ниже, относятся к материалу §§ 14 и 15 гл. III. Поэтому дополнение можно рассматривать как п. 3 § 15. Пусть Ω — звездная относительно точки O область. Не нарушая общности, считаем, что O — начало декартовой системы координат. Пусть ρ, θ — полярная система координат с полюсом в точке O и

$$\rho = \rho(\theta) \tag{1}$$

— уравнение кривой Γ — границы области Ω. Преобразование

$$u = x\left(1 + \frac{a(x^2 + y^2)}{\rho^3(\theta)}\right), \qquad v = y\left(1 + \frac{a(x^2 + y^2)}{\rho^3(\theta)}\right) \tag{2}$$

переводит Ω в область G; при этом граница Ω переходит в кривую γ — границу области G. Кривая γ определяется уравнением $\rho_1(\theta) = \rho(\theta) + a$. Для кривизны кривой γ справедлива формула

$$\varkappa_1(\theta) = \frac{-\rho_{\theta\theta}(\rho + a) + 2\rho_\theta + (\rho + a)^2}{[(\rho_\theta)^2 + (\rho + a)^2]^{3/2}}. \tag{3}$$

Если теперь выбрать постоянную a так, что

$$a > a_0 = \sup_\theta \big| |\rho_{\theta\theta}| - \rho \big|, \tag{4}$$

то

$$\varkappa_1(\theta) \geqslant \varkappa_0 = \inf_\theta \varkappa_1(\theta) = \text{const} > 0 \tag{5}$$

и кривая γ — выпуклая.

*) Результаты получены автором совместно с А. Л. Вернером.

Пусть $z(x, y)$ — решение задачи (15, 1, 1—2). Тогда функция $z_1(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ будет решением задачи

$$A_1 r_1 + 2B_1 s_1 + C_1 t_1 = D_1, \tag{6}$$

$$z_1(u, v)\big|_\gamma = h(\theta), \tag{7}$$

где

$$A_1 = (1+q^2) f_x^2 - 2pq f_x f_y + (1+p^2) f_y^2,$$

$$B_1 = (1+q^2) f_x g_x - pq(f_x g_y + f_y g_x) + (1+p^2) f_y g_y,$$

$$C_1 = (1+q^2) g_x^2 - 2pq g_x g_y + (1+p^2) g_y^2,$$

$$D_1 = H(x(u, v), y(u, v))(1+p^2+q^2)^{3/2} -$$

$$- [(1+q^2)(p_1 f_{xx} + q_1 g_{xx}) - 2pq(p_1 f_{xy} + q_1 g_{xy}) +$$

$$+ (1+p^2)(p_1 f_{yy} + q_1 g_{yy})].$$

Интерес представляет только оценка $\max\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|$ на кривой Γ, поскольку оценка $\max\limits_{\Omega+\Gamma}|z|$ и оценка модулей первых производных функции z во всей области $\Omega+\Gamma$ при наличии оценки $\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|$ на Γ проводятся без предположения о выпуклости кривой Γ. Как было выяснено в § 14, для случая минимальных поверхностей ($H \equiv 0$) оценка $\frac{\partial z}{\partial n}$ сводится к неравенству (14,4). Нас будет интересовать, во-первых, обобщение этих условий на случай поверхности с ненулевой средней кривизной и, во-вторых, оценка выражения

$$\beta(f) + \beta(g) = \sup_{\Omega+\Gamma}\left\{f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2\right\}$$

через свойства краевого условия задачи (15, 1, 1—2).

Решение указанных вопросов проводится по общей схеме, развитой в § 13; при этом мы учитываем ряд моментов, связанных с конкретным видом «коэффициентов» уравнения (1).

Для преобразования (2) имеем

$$\beta(f) + \beta(g) \leqslant \frac{a^2}{\rho_0^8} K_1 \|\rho(\theta)\|_2 \equiv K, \tag{8}$$

где $\rho_0 = \inf\limits_\theta \rho(\theta) > 0$, $a = \mathrm{const} > \sup\limits_\theta \left|\,|\rho_{\theta\theta}| - \rho\right|$, а $K_1 > 0$ — абсолютная постоянная.

Выражение $\dfrac{D_1^2}{A_1C_1 - B_1^2}$ для задачи (6) — (7) допускает оценку

$$\frac{D_1^2}{A_1C_1 - B_1^2} \leqslant 2\,(2 + p^2 + q^2) \times$$
$$\times \sqrt{H_0^4 + (\beta(f) + \beta(g))^2}\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2) + (p_1^2 + q_1^2)}, \tag{9}$$

где $H_0 = \sup\limits_{\Omega+\Gamma} |H(x,\ y)|$.

Обозначим через

$$T_0 = \sup_{\Omega+\Gamma}(f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2); \tag{10}$$

тогда

$$T_0 = \sup_{\Omega}\left(2 + \frac{8a}{\rho^3(\theta)} + \frac{8a\,(x^2 + y^2)}{\rho^3(\theta)} + \right.$$
$$\left. + \frac{10a^2}{\rho^6(\theta)}(x^2 + y^2)^2 + \frac{9a^2\rho'\theta^2\,(x^4 + y^4)}{\rho^8(\theta)}\right) > 2 \tag{11}$$

и

$$\frac{1}{T_0}\left(p_1^2 + q_1^2\right) \leqslant p^2 + q^2 \leqslant T_0\left(p_1^2 + q_1^2\right). \tag{12}$$

В случае, когда $H \equiv 0$, из (8) — (12) можно получить условие существования минимальной поверхности в краевой задаче (14,1 — 2). Это условие имеет вид

$$3 + \frac{2K}{\varkappa_0^2} < \ln\left(1 + \frac{2}{T_0\sqrt{M}} + \frac{2}{T_0^2 M}\right),$$

где M — извивание кривой L: $\rho_1(\theta) = \rho(\theta) + a$, $z = h(\theta)$; постоянная $\varkappa_0$ введена в (5), а постоянная K введена в соотношении (8). В случае выпуклого контура Γ: $\beta(f) + \beta(g) = 0$ и мы снова приходим к случаю, разобранному в п. 2 § 15. Теперь несколько угрубим оценки (9), чтобы сделать более простыми по формулировке окончательные результаты. Имеем

$$\frac{D_1^2}{A_1C_1 - B_1^2} \leqslant 2\sqrt{2}\,T_0^2\sqrt{H_0^4 + (\beta(f) + \beta(g))^2}\,(1 + p_1^2 + q_1^2)^2.$$

Следовательно,

$$N\,(p_1^2 + q_1^2) = \frac{1}{(1 + p_1^2 + q_1^2)^2},$$

и потому

$$N_{\text{в}}(p_1^2+q_1^2)=N_{\text{н}}(p_1^2+q_1^2)=\frac{1}{[1+(\sqrt{p_1^2+q_1^2}+\sqrt{M})^2]^2}.$$

Так же как и в п. 2 § 15, имеем

$$A(N_{\text{н}})=A(N_{\text{в}})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}N_{\text{н}}\,dp\,dq=$$

$$=\pi\left[1+\sqrt{M}\operatorname{arctg}\sqrt{M}-\frac{\pi\sqrt{M}}{2}\right].$$

Итак, искомое неравенство (см. п. 3 § 13) имеет вид

$$2\sqrt{2}T_0^2\sqrt{H_0^4+(\beta(f)+\beta(g))^2}\,\frac{\pi}{\varkappa_0^2}\leqslant$$

$$\leqslant\pi\left[1+\sqrt{M}\operatorname{arctg}\sqrt{M}-\frac{\pi\sqrt{M}}{2}\right].$$

Так как

$$\beta(f)+\beta(g)\leqslant\frac{a^2}{\rho_0^8}K_1\|\rho(\theta)\|_2\equiv K,$$

то неравенство, гарантирующее существование решения задачи (15, 1, 1—2) в звездной области, имеет вид

$$\frac{2\sqrt{2}\,T_0^2}{\varkappa_0^2}\sqrt{H_0^4+K^2}\leqslant 1+\sqrt{M}\operatorname{arctg}\sqrt{M}-\frac{\pi\sqrt{M}}{2},$$

где

$$a>\inf_{\theta}\left[\,|\rho_{\theta\theta}|-\rho\right].$$

Из проведенных рассмотрений вытекает

Теорема. *Краевая задача* (15, 1, 1—2) *имеет единственное решение в пространстве* $C^2(\Omega)$, *которое принадлежит* $C^{m+2,\delta}(\Omega+\Gamma)$, *если выполнено одно из двух условий*:

1. $H(x, y)\geqslant 0$,

$$\frac{2\sqrt{2}\,T_0^2}{\varkappa_0^2}\sqrt{H_0^4+K^2}\leqslant 1+\sqrt{M}\operatorname{arctg}\sqrt{M}-\frac{\pi\sqrt{M}}{2}$$

или

1. $H(x, y)\leqslant 0$,

$$\frac{2\sqrt{2}\,T_0^2}{\varkappa_0^2}\sqrt{H_0^4+K^2}\leqslant 1+\sqrt{M}\operatorname{arctg}\sqrt{M}-\frac{\pi\sqrt{M}}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров
   а) Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.
   б) Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1950.
   в) Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной, ДАН СССР, № 36, 1942.
   г) Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, ДАН СССР, № 35, 1942.
   д) Задача Дирихле для уравнения $\det \| z_{ij} \| = \varphi(x_i, z, z_i)$, Вестник ЛГУ, № 1, 1958.
   е) Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле, ДАН СССР, т. 134, № 5, 1960.
   ж) Исследования о принципе максимума I—VI. Известия высш. учебн. завед., Математика, № 5, 1958; №№ 3, 5, 1959, №№ 3, 5, 1960; № 1, 1961.
   з) Additive set-functions in abstr. spaces I—IV, Матем. сб. **8** (50), вып. 2, 1940; 9 (51), вып. 3, 1941; **13** (53), вып. 2—3, 1943.
2. А. Д. Александров, А. В. Погорелов
   Теория поверхностей и дифференциальные уравнения с частными производными. Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. I, 1963.
3. И. Я. Бакельман
   а) Обобщенные решения уравнений Монжа—Ампера, ДАН СССР **114**, № 6, 1957.
   б) К теории уравнений Монжа — Ампера, Вестник ЛГУ, № 1, 1958.
   в) Регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера, Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена **166**, 1958.
   г) Априорные оценки и регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера, ДАН СССР **116**, № 5, 1957.
   д) Задача Дирихле для уравнений типа Монжа — Ампера и их n-мерных аналогов, ДАН СССР **126**, № 5, 1959.
   е) Вариационная задача, связанная с уравнением Монжа — Ампера, ДАН СССР **141**, № 5, 1961.
   ж) Вариационная задача, связанная с уравнением Монжа — Ампера, Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена **238**, 1962.
   з) Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН СССР **134**, № 5, 1960.

н) К теории квазилинейных эллиптических уравнени матем. журнал, № 2, 1961.

к) Уравнения с оператором Монжа — Ампера, Труды союзн. матем. съезда, т. II, 1964.

4. И. Я. Бакельман, И. Я. Губерман
Задача Дирихле с оператором Монжа — Ампера, Сиб. журнал IV, № 6, 1963.

5. И. Я. Бакельман, М. А. Красносельский
Нетривиальные решения уравнений с оператором М(Ампера, ДАН СССР 137, № 5, 1961.

6. С. Н. Бернштейн
Собрание сочинений, т. III (уравнения в частных пр ных), Изд. АН СССР, 1960.

7. И. Я. Губерман
О равномерной сходимости выпуклых функций в зам области, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1965.

8. Н. В. Ефимов
Проблемы изометрического погружения в целом, Тр Всесоюзн. матем. съезда, т. I, 1963.

9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов
Функциональный анализ в нормированных простра Гостехиздат, 1955.

10. М. А. Красносельский
Положительные решения операторных уравнений, Физ 1962.

11. Р. Курант, Д. Гильберт
Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 19

12. К. Миранда
Уравнения в частных производных эллиптического ИЛ, 1957.

13. Л. Ниренберг
On nonlinear elliptic partial differentiel and Hölder con Commun. pure appl. Mathem. 6, № 1, 1953. (Русский п Математика 3:3, 1959.)

14. А. В. Погорелов
а) Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат,
б) Регулярность выпуклой поверхности с данной га кривизной, Матем. сб. 31, №1, 1952.
в) Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического тип ХГУ, 1960.

15. Ю. Шаудер
а) Über lineare elliptische Differentialgleichungen Ordnung. Math. Zeitschr., № 38, 1934.
б) Numerische Abschätzungen in elliptische linearen D tialgleichungen, Studia Mathem., № 5, 1934.