ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

ALGEBRAIC VARIETIES

BY

M. BALDASSARRY

SPRINGER — VERLAG
BERLIN—GÖTTINGEN — HEIDELBERG
1956

М. Бальдассарри

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Перевод с английского

Ю. И. Манина

Под редакцией

М. М. Постникова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Книга Бальдассарри представляет собой по существу изложение наиболее важных аспектов абстрактной алгебраической геометрии. Эта интереснейшая отрасль современной математики, выросшая на стыке алгебры, топологии и дифференциальной геометрии, тесно связана как своими методами, так и результатами с многими математическими дисциплинами. Отечественная литература по алгебраической геометрии до сих пор крайне бедна. Рассматриваемая монография заполняет поэтому важный пробел в научной литературе. Ее особенность — очень богатое содержание при сравнительно небольшом объеме. Это достигается за счет того, что автор везде, где возможно, жертвует деталями, делая упор на основные идеи.

Книга будет полезна математикам различных специальностей — как научным работникам, так и аспирантам и студентам университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой перевод обзора современного состояния алгебраической геометрии, впервые опубликованного в известной серии Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. При переводе исправлены встречающиеся неточности и опечатки. Кроме того, в ряде мест текст автора переработан и дополнен с целью достичь большей ясности изложения. Наиболее существенные изменения отмечены знаками ◀ и ▶. Особенно большие изменения произведены в гл. 7. Само собой разумеется, редактор принимает на себя всю ответственность за произведенные изменения.

М. М. Постников

ПРЕДИСЛОВИЕ

Алгебраическая геометрия, корни которой уходят в глубь алгебры, теории функций и топологии, всегда была несколько эклектической наукой. За исключением первых работ, теперь уже столетней давности, этой прекрасной отраслью математики в течение долгих лет занималась в основном итальянская школа, первооткрытия которой, сделанные алгебро-геометрическими средствами, составляют внушительную совокупность знаний. Помимо самостоятельного интереса, который представляют эти результаты, они имеют большую эвристическую ценность, являясь важным шагом к современным достижениям. Некоторый недостаток строгости, особенно в основаниях, в значительной степени оправдан тем творческим порывом, с которым развивалась наша наука на первых этапах. То же явление в большей или меньшей степени можно наблюдать в истории любой другой науки, математической или нематематической. В пределах во всяком случае классической области основания алгебраической геометрии были позже исследованы и укреплены. Эта заслуга принадлежит в основном Севери, работы которого часто вдохновляли дальнейшие исследования уже в абстрактной области.

Около двадцати пяти лет тому назад Б. Л. ван дер Варден, а позже О. Зариский и А. Вейль вместе со своими учениками создали методы современной абстрактной алгебраической геометрии. Классическое ограничение комплексным основным полем было отвергнуто вместе с геометрической интуицией и под растущим влиянием абстрактной алгебры была предпринята арифметизация алгебраической геометрии. На этом пути совершенствовалось одно из наиболее тонких орудий современной математики, которое затем применялось в различных классических вопросах (линейные системы, геометрические и арифметические роды), а также в выделяющейся по своему характеру теории абстрактных абелевых многообразий.

Тем временем У. В. Ходж и К. Кодаира с помощью новой теории дифференциальных форм сделали более тесными связи между трансцендентной теорией и алгебраической геометрией, открытые в основном М. Нетером, Пуанкаре и Севери. Эти исследования развивались в двух направлениях: обобщение классических свойств поверхностей на многообразия высших размерностей и переход к рассмотрению келеровых многообразий. Эти работы дали свежую пищу для интуиции и обогатили собственно алгебраическую геометрию новыми точками зрения.

Наконец, трансцендентные исследования, топологическая природа которых была до конца вскрыта А. Картаном и его школой, ввели в алгебраическую геометрию мощные методы теории расслоенных пространств и пучков. С этой точки зрения оказалось возможным дать топологическое построение канонических систем многомерных алгебраических многообразий над комплексным полем. Ранее эти системы были определены алгебраически М. Эже, Б. Сегре и Дж. А. Тоддом на основе работ Севери о рациональной эквивалентности. Эта область является одним из самых заманчивых отделов новой алгебраической геометрии, в котором алгебра и топология, трансцендентная теория и дифференциальная геометрия сливаются в единый поток.

Цель настоящей работы — по необходимости кратко, но, насколько позволяет объем, полно описать наиболее важные аспекты современной алгебраической геометрии. Вообще говоря, различные методы рассматриваются здесь с сугубо утилитарной точки зрения, независимо от того, насколько они интересны сами по себе. Специальная алгебраическая, трансцендентная и топологическая техника, которая требуется для наших целей, предполагается известной. Краткие введения к различным разделам имеют целью лишь напомнить определения и условиться относительно терминологии. По поводу алгебраической стороны дела мы часто ссылаемся на весьма полную монографию П. Самюэля, изданную в этой серии. К сожалению, оказалось невозможным сделать то же по отношению к топологии, ибо монография Ф. Хирцебруха в этой же серии вышла после окончания нашей работы.

Разумеется, осуществление подобной программы не может быть свободно от недостатков в силу острой нехватки места, не говоря уже о тех несовершенствах, в которых прямо виноват автор. Так, нам пришлось излагать лишь самые существенные вопросы, повсюду добиваться краткости, ограничиваться наброском доказательства в одних случаях и вовсе опускать доказательство в других. Нам остается лишь надеяться, что изложение не достигло той степени сжатости, которая сделала бы книгу непонятной. Не следует придавать особое значение относительному объему места, отведенного разным теориям и доказательствам. Исторические и библиографические замечания и списки предназначены лишь в помощь читателю и не претендуют на полноту.

Мне приятно поблагодарить проф. Б. Сегре за его ценное содействие в составлении обзора, а также проф. Л. Рота, который прочел английский текст и корректуру и предложил много исправлений и усовершенствований. Я чрезвычайно обязан им обоим. Всем друзьям и коллегам, которые интересовались моей работой, я выражаю свою надежду, что эта книга поможет распространить знание алгебраической геометрии за пределы всевозможных личных стилей и школ.

Марио Бальдассарри

Падуя, май 1956 года.

I

Обзор оснований

Эта глава построена в основном по образцу обзора Самюэля, в котором читатель найдет почти все опущенные здесь доказательства. Наша единственная цель—условиться относительно терминологии и по возможности кратко напомнить некоторые основные принципы. Мы не касаемся более или менее элементарных вопросов, например, проекций в аффинных и проективных пространствах, изложение которых можно найти в книгах Самюэля [в] или Ходжа и Пидо [а] (в последней лишь для случая нулевой характеристики).

Алгебраические основы изложены в книгах ван дер Вардена [а], Самюэля [а, б] и Норткотта [а]. С другой стороны, читатель, которому необходимо или желательно узнать, как можно заложить удовлетворительный фундамент средствами классической алгебраической геометрии, найдет наилучшую трактовку этого предмета в критических работах Севери [20, 29, 31, 32] и в его же монографии [в].

Монографии ван дер Вардена [б] и Ходжа и Пидо [а] носят характер промежуточный между классической и абстрактной алгебраической геометрией. Наиболее глубокий синтез обеих этих тенденций достигнут в монографии А. Вейля [а]. Несмотря на некоторые позднейшие упрощения, она остается высшим достижением в интересующих нас вопросах [1]).

1. Алгебраические многообразия

Пусть k — подполе алгебраически замкнутого поля k^*, и пусть $\mathbf{A}^n(k^*)$ и $\mathbf{P}^n(k^*)$ — аффинное и проективное n-мерные пространства над полем k^*. Подмножество H точек пространства $\mathbf{A}^n(k^*)$ называется *алгебраическим множеством* над k или *k-множеством*, если его точки являются нулями некоторой совокупности $\mathfrak{F}$ многочленов кольца $k[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = k[\xi]$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — неиз-

[1]) Все основные факты абстрактной алгебраической геометрии с упрощениями, достигнутыми после появления книги Вейля, изложены также в книге Ленга [а].— *Прим. перев.*

вестные. В этом случае мы пишем $H = V_k(\mathfrak{J})$ (обсуждение этого определения см. в докладе Зариского [б], стр. 79).

Множество всех многочленов кольца $k[\xi]$, обращающихся в нуль на H, представляет собой идеал этого кольца; мы обозначаем его символом $\mathfrak{J}_k(H)$.

Заметим, что не всякий идеал $\mathfrak{J} \subset k[\xi]$ соответствует указанным образом некоторому алгебраическому k-множеству H. Для этого необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{J}$ совпадал со своим *радикалом*, т. е. с множеством $\mathfrak{J}^*$ таких элементов $f \in k[\xi]$, что $f^m \in \mathfrak{J}$ для некоторого положительного целого числа m. Необходимость этого условия очевидна, а достаточность составляет содержание знаменитой *«теоремы о нулях»* Гильберта; как заметил Рабинович [1], теорема Гильберта равносильна утверждению, что не имеющий нулей идеал $\mathfrak{J} \subset k[\xi]$ является единичным идеалом (см. Самюэль [в], стр. 4).

Эту теорему в однородной форме можно положить в основание элементарной теории алгебраических многообразий; см. Зариский [б], стр. 81, Ходж и Пидо [a_2], гл. X. Простые доказательства теоремы Гильберта были даны Брауэром [1], Голдманом [1] и Зариским [13].

k-Множества пространства $\mathrm{A}^n(k^*)$ образуют систему, замкнутую относительно операций конечного объединения и пересечения. k-Множество V называется ***неприводимым k-множеством*** или ***k-многообразием***, если оно не является объединением двух собственных k-подмножеств. Любое приводимое k-множество является объединением некоторых k-многообразий; эти многообразия определяются однозначно и называются ***компонентами*** данного k-множества.

k-Множество V тогда и только тогда неприводимо, когда идеал $\mathfrak{J}_k(V)$ является простым идеалом. Обозначая этот простой идеал символом $\mathfrak{p}$, рассмотрим факторкольцо $k[\xi]/\mathfrak{p} \cong k[v]$, где v — класс $\xi \bmod \mathfrak{p}$. Кольцо $k[v]$ представляет собой область целостности и называется ***кольцом аффинных координат***, или ***многочленов, на многообразии*** V. Поле отношений $k(v)$ кольца $k[v]$ называется ***полем рациональных функций на многообразии*** V и обозначается либо символом $R_k(V)$, либо символом $k(V)$. Оно является конечным трансцендентным расширением поля k; его степень называется *размерностью* $\dim V$ многообразия V.

Это чисто алгебраическое понятие размерности совпадает с топологическим, которое, однако, имеет смысл лишь в случае, когда k является полем комплексных чисел (см. ван дер Варден [б], стр. 123). По поводу других чисто алгебраических определений размерности см. Абельянас [1] и Зариский [а], стр. 1.

Если поле k^* имеет бесконечную степень трансцендентности над полем k, то точка $P=(x)$, где x — образ класса v при некотором k-изоморфизме кольца $k[v]$ в поле k^*, называется *общей точкой* многообразия V *над полем* k, а многообразие V — *геометрическим местом* этой точки. По этой точке можно восстановить над полем k идеал $\mathfrak{p}$; она однозначно определена многообразием V с точностью до k-изоморфизма и удовлетворяет соотношению $\dim_k(x)=\dim V$.

Специализацией точки P *над полем* k называется такая точка P', что всякий многочлен кольца $k[\xi]$, обращающийся в нуль в P, обращается в нуль и в P' (отсюда вытекает, что $P'\in V$). С помощью этого понятия *общую точку* k*-множества* H можно определить как такую его точку P, что любая другая точка $P'\in H$ является специализацией точки P над k. Множество H, обладающее общей точкой P, является k-многообразием; с точностью до k-изоморфизма точка P совпадает с общей точкой, определенной выше.

Пусть V и W — такие k-многообразия, что $W\subset V$. Тогда $\dim W\leqslant\dim V$, причем эти размерности совпадают лишь в случае $W=V$. Если $\dim W=\dim V-1$, то W называется k*-гиперповерхностью*[1]) многообразия V. k-Гиперповерхности аффинного пространства $\mathbf{A}^n(k^*)$ называются также k*-формами*; они задаются единственным уравнением (доказательство см. Самюэль [в], стр. 6).

Все эти определения и результаты можно распространить на проективные k-множества пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$, рассматривая однородные многочлены кольца $k[\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n]=k[\xi]$, где $(\xi_0,\xi_1,\ldots\xi_n)$ — неизвестные, соответствующие однородным координатам $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ точек P пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$. Обозначая через $k(P)$ подполе поля k^*, получающееся при присоединении к k отношений всех координат (x) точки P пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$ к одной из них, отличной от нуля, мы будем называть координаты (x) точки P *строго однородными*, если поле $k(x)$ представляет собой простое трансцендентное расши-

1) Автор пользуется также термином «k-primal», не имеющим русского соответствия. —*Прим. перев.*

рение поля $k(P)$. Такие координаты обязательно существуют, если только поле k^* имеет бесконечную степень трансцендентности над полем k.

Точка P с координатами (x) называется *проективным нулем* многочлена $F(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ над полем k, если $F(x)=0$. Поскольку, как легко видеть, выполнения равенства $F(x)=0$ достаточно требовать лишь для строго однородных координат (x), вопрос изучения проективных нулей сводится к изучению нулей однородных многочленов.

Можно связать аффинные и проективные k-множества, отождествляя пространство $\mathbf{P}^n(k^*)$ с пучком лучей пространства $\mathbf{A}^{n+1}(k^*)$; при этом проективные k-множества пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$ взаимно однозначно соответствуют коническим аффинным k-множествам, состоящим из лучей этого пучка. В частности, свойства пересечения и объединения немедленно переносятся на проективные k-множества, так что мы можем говорить о *неприводимых* проективных k-множествах, т. е. о *проективных k-многообразиях*. Кроме того, для проективного k-многообразия V можно определить *кольцо однородных координат* $k[v_0, v_1, \ldots, v_n]=k[v]$ и *поле* $R_k(V)$ *рациональных функций на многообразии* V, включая в последнее лишь однородные отношения. Все эти понятия совпадают с соответствующими аффинными для конуса $C(V)$, получающегося проектированием многообразия V в пространство $\mathbf{A}^{n+1}(k^*)$.

Полагая, как и выше, $\dim V=[R_k(V):k]$, мы получим, что $\dim C(V)=\dim V+1$. Понятия *общей точки относительно поля k* и *специализации относительно k* распространяются на проективный случай очевидным образом. Подчеркнем, что в отличие от аффинных специализаций каждую проективную специализацию всегда можно продолжить на любое конечное множество величин.

Последнее утверждение чисто алгебраически формулируется следующим образом: «Пусть (x), (y)—данные системы элементов поля $k^* \supset k$; тогда любую специализацию (x') системы (x) над полем k можно по крайней мере одним способом продолжить до специализации (x', y') системы (x, y) над полем k, если при этом допускать специализации в ∞ (обобщенные специализации)». Здесь символ ∞ следует рассматривать как элемент поля k^*. Эта теорема была доказана ван дер Варденом [2] (см. также [6], стр. 164) с помощью теории исключения, а впоследствии американской школой (см. А. Вейль [a], стр. 30) независимо от этой теории. Обсуждение этой теоремы см. Зариский [6], стр 81 и ван дер Варден [12].

Хорошо известно, что проективное пространство $\mathbf{P}^n(k^*)$ превращается в аффинное пространство $\mathbf{A}^n(k^*)$, если исключить из $\mathbf{P}^n(k^*)$ бесконечно удаленную гиперплоскость. Этим определяется некоторое отображение f пространства $\mathbf{A}^n(k^*)$ в пространство $\mathbf{P}^n(k^*)$; наименьшее k-множество $\overline{H}$ пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$, содержащее данное k-множество H пространства $\mathbf{A}^n(k^*)$, называется *проективным замыканием* множества H. Легко видеть, что $\overline{H}$ описывается однородной системой уравнений, соответствующей системе уравнений, описывающей над полем k множество H. Отображение f сохраняет размерность и свойство неприводимости над k. Обратное отображение f^{-1} определено для любого k-множества пространства $\mathbf{P}^n(k^*)$, не лежащего целиком в бесконечности (см. Самюэль [в], стр. 12).

2. Абсолютные и относительные многообразия

Данные до сих пор определения связаны с фиксированным основным полем k, так что они применимы лишь к тем множествам пространства $\mathbf{A}^n(k^*)$ (или $\mathbf{P}^n(k^*)$), которые можно описать системой уравнений над полем k. Чтобы избежать этого, не полагая $k = k^*$ (что лишило бы нас возможности определить общую точку или пользоваться алгебраически незамкнутыми полями), мы можем, следуя А. Вейлю, выбрать определенную *«универсальную область»*, т. е. поле $\mathbf{K}$, имеющее бесконечную степень трансцендентности над любым полем, которое мы будем впоследствии рассматривать. Удобно также считать поле $\mathbf{K}$ алгебраически замкнутым.

Критическое исследование такого выбора универсальной области, являющейся, по словам Зариского (Зариский [б], стр. 78), *«вместилищем бесконечного множества трансцендентностей для координат точек в нашей геометрии»*, было дано А. Вейлем; в частности, он показал, что для любой характеристики существует лишь одна геометрия независимо от выбора поля $\mathbf{K}$. Например, для полей нулевой характеристики имеет место *принцип Лефшеца*, утверждающий, что любой результат, касающийся конечного числа геометрических объектов, справедлив над любым полем нулевой характеристики, если он имеет место над комплексным полем. Поэтому в случае, когда поле $\mathbf{K}$ имеет характеристику нуль, можно пользоваться как топологическими, так и аналитическими методами (см. А. Вейль [а], стр. 242).

k-Многообразие V, определенное идеалом $\mathfrak{p}$, называется *абсолютным многообразием*, если для любого расширения k' поля k оно k'-неприводимо в том смысле, что радикал расширенного идеала $\mathfrak{p}k'[\xi]$ является простым идеалом. Это безусловно так, если идеал $\mathfrak{p}k'[\xi]$ сам прост, что имеет место тогда и только тогда, когда поле $k(P)$, где P — общая точка многообразия V над полем k, является *регулярным* расширением поля k, т. е. поле k алгебраически замкнуто в поле $k(P)$ и поле $k(P)$ сепарабельно порождено над полем k. В этом случае поле k называется *полем определения* многообразия V и обозначается символом def V. С другой стороны, многообразие V тогда и только тогда *абсолютно неприводимо*, т. е. для любого расширения k' поля k оно k'-неприводимо в том смысле, что над полем k' его нельзя представить в виде объединения двух или более многообразий, когда любой элемент поля $R_k(V)$ либо трансцендентен над полем k, либо p-радикален, где p — степень характеристики поля k (см. Самюэль [в], стр. 32). В этом случае поле k может и не быть полем определения многообразия V.

Любое расширение поля определения k многообразия V снова является полем определения V; наименьшее из всех этих полей мы будем обозначать символом def* V (см. А. Вейль [а], стр. 71). В случае, когда оно совпадает с простым подполем поля K, многообразие V называется *универсальным* (это название было предложено Зариским; см. [б], стр. 79).

Для любой конечной системы многообразий существует их общее поле определеиия, над которым степень трансцендентности поля K бесконечна, так что результаты о любом конечном числе многообразий можно формулировать, не указывая явно поле определения.

Любое k-многообразие V является объединением конечного числа абсолютных многообразий над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k; эти многообразия определяются минимальными простыми идеалами кольца $\bar{k}[\xi]$, содержащими идеал $\mathfrak{p}\bar{k}[\xi]$. Эти так называемые *абсолютные компоненты* многообразия V сопряжены над полем k в смысле теории Галуа. Впредь мы будем называть абсолютные многообразия просто *многообразиями* и будем обозначать через V/k и P/k соответственно многообразие над полем определения k и общую точку многообразия V над его полем определения k. Аффинное и проективное пространства над полем $\mathbf{K}$ будем обозначать символами $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{P}^n$ соответственно.

Иногда бывает полезным следующее словоупотребление: мы говорим, что *«почти все»* точки многообразия V обладают данным свойством α, если точки многообразия V, не обладающие свойством α, принадлежат некоторому его собственному алгебраическому подмножеству. Ясно, что свойство, имеющее место для почти всех точек многообразия V, имеет место также и для любой его общей точки P; обратное неверно, что показывает свойство «быть общей точкой многообразия V над полем определения k».

Терминологией типа *«почти все»* часто пользовались итальянские геометры, употребляя словосочетание «elemento generico» и ему подобные [см. Севери [д], стр. 320, замечание (1)]; это вполне допустимо, пока не возникает риска смешения с понятием общего элемента в абстрактном смысле.

В связи с этим приведем принадлежащий Зарискому ([б], стр. 80), менее тривиальный пример, в котором эти два понятия существенно различны. Этот пример основывается на чисто алгебраическом понятии аналитической неприводимости многообразия V в некоторой его точке (см. п° I, 3). Пусть W — произвольная алгебраическая кривая на поверхности V. Может случиться, что поверхность V аналитически приводима почти во всех точках кривой W, но аналитически неприводима в любой общей точке этой кривой. Над комплексным полем для этого необходимо, чтобы почти во всех точках кривой W поверхность V распадалась на несколько ветвей, причем эти ветви должны быть транзитивно перестановочны.

Первое важное применение понятия «почти всюду» связано с определением порядка многообразия V. Многообразие пространства $\mathbf{P}^n$ называется *линейным*, если оно представимо системой линейных уравнений. Как известно, совокупность всех $(n-r)$-мерных линейных многообразий (так называемое *многообразие Грассмана*) является абсолютно неприводимым алгебраическим многообразием (см., например, Севери [15] и Ходж и Пидо [а], стр. 309). Можно показать, что почти все $(n-r)$-мерные линейные многообразия пространства $\mathbf{P}^n$ пересекают r-мерное многообразие V/k, расположенное в этом пространстве по конечному и постоянному числу точек, причем эти точки алгебраичны и сопряжены над полем k (см. Самюэль [в], стр. 38); число этих точек и называется *порядком* многообразия V.

Заметим, что этот классический результат дает также возможность по-новому определить понятие размерности многообразия (см. Зариский [а], стр. 2).

3. Локальные кольца

Нётерово подкольцо $\mathfrak{n}_k(P; V)$ поля $R_k(V)$, состоящее из дробей вида a/b, где b не обращается в нуль в точке P многообразия V, называется *локальным кольцом многообразия V в точке P*. Обладая единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}_k(P; V)$, который состоит из дробей, обращающихся в нуль в точке P, это кольцо является локальным кольцом в смысле Крулля. Кольца $\mathfrak{n}_k(P; V)$ и $\mathfrak{m}_k(P; V)$ обозначаются также символами $\mathfrak{n}_k(W; V)$ и $\mathfrak{m}_k(W; V)$, где $W \subset V$ — геометрическое место точки P над полем k.

Относительно основных понятий локальной алгебры мы отсылаем читателя к книгам Норткотта [а] и Самюэля [б]. Этот раздел современной алгебры был основан Круллем [2] целиком в рамках абстрактной алгебры, но его позднейшее развитие оказалось тесно связанным с алгебраической геометрией. Мы ограничимся напоминанием лишь некоторых основных определений из книги Самюэля [б].

$\mathfrak{m}$-*Адическим кольцом* называется топологическое нётерово кольцо A, обладающее фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из степеней данного идеала $\mathfrak{m}$; при этом предполагается, что эта топология хаусдорфова (что равносильно отсутствию делителей нуля в множестве $1+\mathfrak{m}$; см. Самюэль [б], стр. 5). $\mathfrak{m}$-Адическое кольцо A называется *кольцом Зариского*, если любой его идеал замкнут (Зариский [12], Самюэль [б], стр. 6). *Полулокальное кольцо*, т. е. нётерово кольцо с конечным числом максимальных идеалов $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ является кольцом Зариского с $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_h$ (Самюэль [б], стр. 7); эти кольца ввел Шевалле [1]. Полулокальные кольца с единственным максимальным идеалом совпадают с локальными кольцами в смысле Крулля [2].

Локальные кольца возникают при изучении многообразия в окрестности одной точки, а полулокальные кольца — при изучении многообразия в окрестности конечного числа точек; что же касается общих $\mathfrak{m}$-адических колец, то они описывают поведение многообразия вдоль подмногообразий.

Основными операциями над этими кольцами являются: топологическое пополнение, построение факторколец, построение колец отношений, а также операция конечного расширения (Самюэль [б], гл. I).

Если некоторый идеал $\mathfrak{n}$ определяет топологию полулокального кольца A (т. е. его степени составляют фундаментальную систему окрестностей нуля) — в этом случае он называется *определяющим идеалом* кольца A,— то, как доказал Самюэль, длина $P(n)$ идеала $\mathfrak{n}^n$ для больших n является многочленом от n (обобщение хорошо известной теоремы Гильберта; см. Самюэль [б], стр. 24). Степень d многочлена $P(n)$ называется, согласно Самюэлю, *размерностью* кольца A. Это есть также наименьшее количество элементов, порождающих какой-нибудь определяющий идеал кольца A (система элементов, обладающая этим свойством, называется системой параметров кольца A); это определение размерности принадлежит Шевалле [1]. Кроме того, в случае, когда A является локальным кольцом, число d совпадает с максимальной длиной цепи простых идеалов кольца A, т.е. совпадает с первоначальным определением размерности локального кольца, предложенным Круллем [2]. Наконец, старший член многочлена $P(n)$ имеет вид $e(d!)^{-1}n^d$, где e — целое число, называемое *кратностью* идеала $\mathfrak{n}$ в кольце A.

Локальные кольца, обычно появляющиеся в алгебраической геометрии (т. н. *геометрические* локальные кольца), допускают формальную характеризацию, принадлежащую Шевалле [3]; см. Самюэль [б], гл. III. Зариский доказал [15, 19] фундаментальный результат о том, что любое целозамкнутое геометрическое кольцо A без делителей нуля имеет своим пополнением подобное же кольцо; отсюда немедленно следуют важные геометрические результаты, которые мы сформулируем в конце n° 1, 5.

Отметим, наконец, что удовлетворительная теория полных локальных колец, принадлежащая в основном Коэну [1], построена только для *регулярных колец*, т. е. для колец, максимальный идеал которых порождается некоторой системой параметров кольца, и притом лишь в некоторых дополнительных ограничениях (см. Самюэль [б], гл. V).

Если точка P' является специализацией точки P над полем k, то локальное кольцо в точке P' представляет собой подкольцо локального кольца в точке P, совпадая с ним в том и только том случае, когда точка P в свою очередь является специализацией точки P' над полем k (такую специализацию А. Вейль называет *общей*; [а], стр. 27). Отсюда следует, что если $W' \subset W \subset V$, то $\mathfrak{n}_k(W'; V) \subset \mathfrak{n}_k(W; V)$.

Аналогично определяется локальное кольцо точки проективного многообразия V; если точка P не находится в бесконечности, то оно изоморфно аффинному локальному кольцу. Локальное кольцо $\mathfrak{n}(W; V)$, построенное относительно поля K, называется *абсолютным*. Локальное кольцо $\mathfrak{n}_k(W; V)$ можно пополнить до полного локального кольца $\hat{\mathfrak{n}}_k(W; V)$ относительно топологии, определенной степенями максимального идеала. k-Многообразие V называется, согласно Зарискому [15], *аналитически неприводимым* вдоль k-подмногообразия W, если это пополнение $\hat{\mathfrak{n}}_k(W; V)$ не имеет делителей нуля.

◀ 3ª. Алгебраические многообразия как множества со строением

Дадим краткий очерк еще одного способа введения основных понятий алгебраической геометрии, при котором алгебраические многообразия появляются как множества, наделенные определенным строением, и не отождествляются заранее с подмножествами точек некоторого пространства, что методологически более удобно, а в иных случаях неизбежно (см., например, результат Нагата [1], согласно которому существуют абстрактные многообразия в смысле А. Вейля, неизоморфные проективным многообразиям). При необходимости рассматривать объекты более общие, чем классические алгебраические многообразия, именно этот подход может быть легче всего обобщен.

По поводу нижеследующих определений см. Шевалле [a], Картье [1].

Пусть $k \subset \mathrm{K}$ — произвольное подполе фундаментальной области.

Строение *аффинного k-многообразия* на некотором множестве V задается, по определению, множеством $A_k(V)$ отображений $V \to \mathrm{K}$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

AI. *Множество $A_k(V)$ содержит все постоянные отображения $V \to k$ и является кольцом, конечно порожденным над этим полем постоянных отображений.*

AII. *Для любого k-гомоморфизма $\chi: A_k(V) \to \mathrm{K}$ существует один и только один такой элемент $x \in V$, что $\chi(f) = f(x)$ для всех $f \in A_k(V)$.*

AIII. *Кольцо $A_k(V)$ является областью целостности, поле отношений которого представляет собой регулярное расширение поля k.*

Пусть V — произвольное аффинное k-многообразие. Множество F точек $x \in V$, для которого существует такое множество $H \subset A_k(V)$, что $x \in F$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ для всех $f\in H$, называется *k-замкнутым множеством* k-многообразия V. Легко видеть, что система всех k-замкнутых множеств определяет на V некоторую топологию.

Пусть теперь $U\subset V$ — произвольное открытое подмножество. Отображение $f: U\to K$ называется *регулярным*, если у любой точки $x\in U$ существует такая открытая окрестность, содержащаяся в U, что $f(y)=g(y)/h(y)$ для любой точки y этой окрестности, где g, $h\in A_k(V)$ и $h(y)\neq 0$. *Рациональной функцией* на аффинном k-многообразии V, определенной над полем k, называется такое регулярное отображение некоторого открытого подмножества пространства V в поле K, которое нельзя продолжить на большее открытое подмножество, не нарушая условие регулярности. Множество рациональных функций на k-многообразии V является полем и обозначается символом $R_k(V)$.

Абстрактные алгебраические многообразия получаются из аффинных путем «склеивания». Именно, строение *абстрактного k-многообразия* или просто *k-многообразия* на множестве V задается некоторым множеством $R_k(V)$ отображений f некоторых подмножеств $D(f)\subset V$ в поле K; при этом требуется, чтобы были выполнены следующие аксиомы:

I. *Существует такое конечное покрытие (U_i) множества V аффинными многообразиями U_i, что для любого отображения $f\in R_k(V)$, для которого $D(f)\subset V$, индуцированное отображение множества $D(f)\cap U_i$ принадлежит кольцу $A_k(U_i)$.*

II. *Множества $U_i\cap U_j$ открыты в U_i; множество $\Delta_{ij}\subset U_i\times U_j$, состоящее из пар (x, x), где $x\in U_i\cap U_j$ является множеством нулей некоторого семейства функций вида*

$$(x, y)\to\sum_\alpha f_\alpha(x)\,g_\alpha(y);\quad f_\alpha\in A_k(U_i),\quad g_\alpha\in A_k(U_j),$$

определенных на $U_i\times U_j$.

Множества $D(f)$, на которых определены отображения $f\in R_k(V)$, по определению, составляют базис открытых множеств k-топологии пространства V.

Описанный объект — топологическое пространство V, вместе с системой $R_k(V)$ частичных отображений является основным объектом изучения абстрактной алгебраической геометрии. Для этих объектов понятия прямого произведения, проекции, рационального отображения и т. п. (см. следующие пункты) вводятся очевидным образом.

Определение алгебраического многообразия можно основывать вместо поля $R_k(V)$ на некотором пучке (*пучке локальных колец*), базой которого служит топологическое пространство V (общее определение пучка над топологическим пространством см., например, в статье Серра [4]; там же приведена детальная аксиоматика алгебраического многообразия как топологического пространства, снабженного пучком локальных колец). Не вдаваясь в подробности, укажем лишь, что слоем над точкой $x \in V$ пучка локальных колец на аффинном многообразии V, определенном над алгебраически замкнутым полем k, является локализация кольца $A_k(V)$ по простому идеалу — ядру гомоморфизма $\chi: A_k(V) \to \mathbf{K}$, определенного формулой $\chi(f) = f(x)$.

В своем докладе на Международном математическом съезде в Эдинбурге А. Гротендик набросал перспективы дальнейшего обобщения основных понятий алгебраической геометрии. В терминах приведенных выше определеиий это обобщение можно охарактеризовать следующим образом. Прежде всего, изучеиие аффинных многообразий сводится к изучению конечно порождеиных k-алгебр A без иильпотентных элементов (и даже без делителей нуля, если, следуя данному выше определению, рассматривать лишь неприводимые многообразия). Оказывается, однако, что большинство «геометрических» утверждений относительно аффинных многообразий сохраняют смысл и остаются верны, если считать, что A является произвольным (иногда нётеровым) коммутативиым кольцом с единицей; поле k заменяется при этом некоторым подкольцом $B \subset A$. Множество V появляется как множество простых идеалов кольца A. Оно топологизируется: замкнутые множества, по определению, состоят из всех простых идеалов, содержащих иекоторое даиное подмножество элементов кольца A. Наконец, множество V сиабжается пучком, слой которого над идеалом $x \in V$ является локализацией кольца A по этому идеалу. Так получается объект, который называется *аффинной схемой*; он представляет собой обобщение понятия аффинного многообразия. Общая *схема* определяется как топологическое пространство, на котором определен некоторый пучок н которое вблизи каждой точки локально изоморфно аффинной схеме; при этом требуется, чтобы переход от одной окрестности к другой удовлетворял бы некоторым условиям «алгебраичности». Переход от областей целостности к кольцам с нильпотентными элементами и делителями иуля имеет содержательный характер, ибо уже в классической алгебраической геометрии приходится сталкиваться с такими кольцами, изучая вопросы специализации общего члена алгебраической системы или редукции алгебраического многообразия по простому модулю. ▶

4. Алгебраическое произведение

Пусть V, V' — аффинные многообразия аффинных пространств $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{A}^{n'}$ (над полем $\mathbf{K}$) соответственно и пусть $k=\mathrm{def}(V, V')$. Рассмотрим подмножество $V \times V'$ аффинного пространства $\mathbf{A}^{n+n'}$. Всегда существуют общие точки P/k и P'/k соответственно многообразий V и V', независимые друг от друга; это равносильно тому, что поля $k(P)$ и $k(P')$ линейно разделены над полем k (см. А. Вейль [а], стр. 4 и стр. 78). Можно показать, что идеалы многообразий V и V' порождают простой идеал $\mathfrak{J}$ кольца $k[X, X']$, а так как расширение $k(P, P')$ регулярно, то $\mathfrak{J}$ представляет собой идеал некоторого многообразия, называемого *алгебраическим произведением* $V \times V'$ данных многообразий V и V'. Аналогичное определение можно дать и в проективном случае (см. Самюэль [в], стр. 20).

Ясно, что $\dim(V \times V') = \dim V + \dim V'$. Ограничиваясь проективным случаем, рассмотрим произвольное подмногообразие U произведения $V \times V'$. Пусть $k=\mathrm{def}(V, V', U)$ и Q/k — общая точка многообразия U. Представив точку Q в виде $P \times P'$, где $P \in V$, $P' \in V'$, рассмотрим геометрическое место U^* точки P над полем k, являющееся, очевидно, подмногообразием многообразия V. Это подмногообразие содержит все точки $\overline{P} \in V$, для которых существует специализация точки Q вида $\overline{P} \times \overline{P'}$, где $\overline{P'} \in V'$. Оно называется *теоретико-множественной проекцией* многообразия U на многообразие V и обозначается символом $\mathrm{pr}_V U$. Очевидно, что проектирование сохравяет общие точки. Кроме того, $\dim U^* \leqslant \dim U$. Наконец, многообразие U^* определяется идеалом $\mathfrak{J} \cap k[X]$, где $\mathfrak{J}$ — идеал многообразия U в пространстве $\mathbf{A}^{n+n'}$ (см. А. Вейль [а], стр. 80—81).

Рассмотрим теперь три проективных пространства $\mathbf{P}^n$, $\mathbf{P}^{n'}$ и $\mathbf{P}^N$ с однородными координатами (x), (x') и (y) соответственно. Отображение f, задаваемое формулами $y_i = f_i(x, x')$, $i=0, \ldots, N$, где $f_i(x, x')$ — однородные по двум совокупностям аргументов многочлены (с коэффициентами из поля k) одинаковых степеней (скажем, степени a по

(x) и степени a' по (x')) называется *рациональным* отображением произведения $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$ в пространство $\mathbf{P}^N$. Оно сохраняет понятия k-многообразия, общей точки и т. п. Если система многочленов $f_i(x, x')$ является общей, то многообразие $W = f(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'})$ находится в бирациональном соответствии без исключений с произведением $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$; в связи с этим многообразие W называется *проективной моделью* пространства $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$. В частности, если многочлены f_i билинейны, многообразие W представляет собой хорошо известное многообразие Сегре (см., например, Ходж и Пидо [a], стр. 95). Пусть $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n'}$. Подмножество Δ произведения $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$, состоящее из точек вида (P, P), называется *диагональным многообразием* произведения $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$; очевидно, что оно бирационально эквивалентно пространству $\mathbf{P}^n$.

Образ подмногообразия Δ в многообразии W параметризуется одночленами степени $a + a'$ относительно координат (x). Поскольку эти одночлены получаются из всевозможных одночленов от (x) и (y) при подстановке $(x) = (y)$, среди них есть одинаковые. Операция удаления из этой системы одночленов повторяющихся одночленов равносильна проектированию образа подмногообразия Δ в некоторое подпространство пространства $\mathbf{P}^N$. Получающееся многообразие называется *r-кратной моделью пространства* $\mathbf{P}^n$, где $r = a + a'$; она определяется числом r с точностью до бирациональных бирегулярных преобразований. Образ k-множества $H \subset P^n$ при описанном отображении называется *r-кратной моделью множества* H и обозначается через $H^{(r)}$. Обратное отображение переводит сечения множества $H^{(r)}$ гиперплоскостями объемлющего пространства в сечения множества H формами r-й степени пространства $\mathbf{P}^n$ (см. Самюэль [в], стр. 22).

5. Нормальные многообразия

Аффинное (проективное) k-многообразие называется, согласно Зарискому (см. Зариский [2, 4, 8], *аффинно* (*проективно*) *нормальным над полем* k или просто *k-нормальным*, если кольцо аффинных (однородных) координат этого многообразия целозамкнуто.

Кольцо R называется *целозамкнутым*, если любой элемент его поля отношений, целый над R, принадлежит R. *Целым замыканием* кольца R называется множество всех элементов поля отношений кольца R, целых над R.

Ясно, что k-многообразие, проективно нормальное над полем k, является также аффинно k-нормальным при любом выборе бесконечно удаленной гиперплоскости. Для любого k-многообразия V пространства A^n существует его нормальная бирациональная модель, которая определяется целым замыканием кольца $k[x]$. Легко видеть, что это целое замыкание порождается над кольцом $k[x]$ конечной системой элементов. Если оно имеет вид $k[y]$, то геометрическое место V^* точки (y) или точки (x, y) над полем k и представляет собой k-нормальную модель многообразия V, причем в последнем случае многообразие V является *проекцией* многообразия V^*.

В проективном случае целое замыкание $k' = k[y]$ кольца $k[x]$ по-прежнему является областью целостности; кроме того, можно считать, что элементы $y_0, y_1, \ldots, y_n$ однородны по всем x. Наконец, можно показать, что существует такое целое положительное число h, что для каждого целого положительного числа ϱ любой однородный элемент кольца k' степени ϱh представляется формой степени ϱ от элементов $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$, составляющих линейный базис над полем k модуля однородных элементов кольца k' степени h. Отсюда вытекает, что геометрическое место V' точки (ω) является k-многообразием, причем кольцо $k[\omega]$ отличается от своего целого замыкания самое большее на элементы поля $k(\omega)$, которые алгебраичны над полем k, но не принадлежат ему. Если поле k алгебраически замкнуто в поле $k(x)$ (что имеет место для абсолютных многообразий), то многообразие V' проективно k-нормально и совпадает с нормализацией h-кратной модели многообразия V. При $h > 1$ многообразие V не имеет нормальной модели в собственном смысле слова.

Проективно k-нормальные k-многообразия V характеризуются следующим свойством: *ни многообразие V, ни произвольная его h-кратная модель не могут быть проекцией k-многообразия той же размерности и той же степени, собственно содержащегося в пространстве высшей размерности* (см. Самюэль [в], стр, 27).

Говорят, что многообразие *собственно* содержится в пространстве размерности n, если его нельзя вложить в пространство меньшей размерности.

Свойство многообразия V/k быть проективно k-нормальным сохраняется над любым полем определения $k' \subset k$, а также над любым полем определения $k' \supset k$, которое является простым трансцендентным или конечным сепарабельным расширением поля k. Многообразие V *абсолютно нормально*, т. е. k-нормально над любым своим полем определения k, если оно k'-нормально над некоторым совершенным полем k'; в этом случае многообразие V называется также аффинно или соответственно проективно *нормальным*. Произведение двух или нескольких k-нормальных многообразий само k-нормально.

Точка P некоторого k-многообразия V называется *k-нормальной*, если кольцо $\mathfrak{n}_k(P; V)$ целозамкнуто. В этом случае говорят также, что k-многообразие V k-нормально *вдоль* k-подмногообразия W — геометрического места точки P. Если целозамкнуто кольцо $\hat{\mathfrak{n}}_k(W; V)$, то говорят, что k-многообразие V *аналитически нормально* вдоль k-подмногообразия W. Все точки аффинных и проективных k-нормальных многообразий k-нормальны; обратное верно лишь в аффинном случае. Поэтому можно выделить класс проективных k-многообразий, все точки которых k-нормальны. Такие многообразия называются *локально k-нормальными* многообразиями. Проективное k-многообразие тогда и только тогда *локально k-нормально*, когда целое замыкание его кольца однородных координат имеет своим ведущим идеалом *несобственный идеал*, т. е. идеал, содержащий степень идеала $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Ведущим идеалом целого замыкания R' области целостности R называется максимальный идеал области R, остающийся идеалом и в кольце R' (см. Самюэль [а], гл. II).

Зарискому принадлежит следующий важный результат (см. Зариский [15, 19]): *любое k-многообразие, k-нормальное вдоль k-подмногообразия W, аналитически неприводимо и аналитически нормально вдоль W*. Иначе говоря, если кольцо $\mathfrak{n}_k(W; V)$ целозамкнуто, то кольцо $\hat{\mathfrak{n}}_k(W; V)$ также целозамкнуто и не имеет делителей нуля (доказательство этого факта помимо оригинальных работ Зариского, изложено у Самюэля [в], стр. 66). Добавим, что локально нормальные над любым своим полем определения многообразия также называются *нормальными* многообразиями (Зариский называет их *абсолютно нормальными*).

6. Бирациональные преобразования

Пусть F — такое подмногообразие произведения $V \times V'$ проективных многообразий V и V', что $V = \mathrm{pr}_V F$ и $\dim F = \dim V$. Степень максимального сепарабельного расширения поля $k(x)$, содержащегося в поле $k(x, y)$, где (x, y) — общая точка многообразия F над полем $k = \mathrm{def}(V, V', F)$, а (x) — общая точка многообразия V (над тем же полем k), называется *индексом* проекции многообразия F на V. Этот индекс равен числу точек многообразия F, проектирующихся в точку (x) (эти точки определены над полем $\overline{k(x)}$ и сопряжены над полем $k(x)$).

Если $k(x, y) = k(x)$, то каждая точка многообразия V определяет, вообще говоря, одну и только одну точку многообразия V'. Если в этом случае $V' = \mathrm{pr}_V F$, то многообразие F называется графиком *рационального отображения* многообразия V на многообразие V'. Координаты (y) точки многообразия V' можно тогда записать в виде $ty_i = f_i(x)$, где f_i — формы одинаковых степеней над полем k, (x) — координаты соответствующей точки на многообразии V, а t — отличный от нуля множитель. Ясно, что специализация $x \longrightarrow \bar{x}$ над полем k определяет некоторую специализацию точки (y) над полем k и притом единственную, если не все значения $f_i(\bar{x})$ обращаются в нуль одновременно. В этом последнем случае отображение называется *регулярным* в точке (x). Очевидно, что условие регулярности отображения в точке P совпадает с требованием, чтобы отношения форм $f_i(x)$ к одной из них содержались в локальном кольце $\mathfrak{n}_k(P; V)$, т. е. чтобы имело место включение $\mathfrak{n}_k(P'; V') \subset \mathfrak{n}_k(P; V)$, где P' — точка многообразия V', соответствующая точке P. Если, кроме того, $k(x, y) = k(y)$, так что $k(x) = k(y)$, то многообразие F называется графиком *бирационального* соответствия T. Соответствие T называется *регулярным* в паре соответствующих точек (P, P'), если T регулярно в точке P, а T^{-1} — в точке P'; в этом случае $\mathfrak{n}_{i}(P; V) = \mathfrak{n}_{i}(P'; V')$.

Мы будем различать следующие типы свойств многообразия V: (a) *Абсолютные* (*бирациональные*) *свойства*, т. е. свойства, инвариантные относительно любых бирациональных преобразований; эти свойства являются в сущности свойствами поля рациональных функций на многообразии V; (b) *относительные* (*бирациональные*) *свойства*, т. е. свойства, инвариантные относительно всюду бирегулярных бирациональных преобразований; (c) *локальные свойства*, т. е. свойства локального кольца $\mathfrak{n}(P; V)$, и, в частности, *локально аналитические свойства*, т. е. свойства кольца $\hat{\mathfrak{n}}(P; V)$; последние свойства можно формулировать в терминах колец формальных степенных рядов и конечных расширений таких колец (см. А. Вейль [a], стр. 252).

В частности, многообразие V/k будет называться *k-унирациональным*, если оно является k-рациональным образом пространства $\mathbf{P}^n$, и *k-бирациональным*, если оно бирационально эквивалентно над полем k пространству $\mathbf{P}^n$. Разумеется, эти понятия не совпадают (см. Рот [10]).

Описанная выше схема достаточна для изучения бирациональных преобразований лишь при ограничении бирегулярно соответствующими парами точек. В общем случае следует более глубоко вникнуть в положение вещей. Следуя Зарискому (см. Зариский [8]), мы будем говорить, что подмногообразия W и W' многообразий V и V' *соответствуют* друг другу, если существует оценка v общего поля рациональных функций на многообразиях V и V', имеющая своим центром на многообразии V подмногообразие W, а на многообразии V' подмногообразие W'. Очевидно, что это определение шире, чем данное ранее, и совпадает с ним, если многообразия W и W' соответствуют друг другу бирегулярно.

Напомним кратко некоторые общие определения теории оценок, отсылая читателя за ее изложением к работам Зариского [8], стр. 496—504, Самюэля [a], гл. I и Ходжа и Пидо [a], гл. XVII [1]); первая общая трактовка этого вопроса дана Круллем (см. [1] и [a]).

Пусть V — произвольное k-многообразие. *Оценкой* v поля $R_k(V)$ называется такое гомоморфное отображение мультипликативной группы отличных от нуля элементов поля $R_k(V)$ на некоторую упорядоченную аддитивную абелеву группу G, что 1) $v(fg) = v(f) + v(g)$; 2) $v(f+g) \geqslant \min(v(f), v(g))$; 3) $v(f) = 0$ хотя бы для одного элемента $f \in R_k(V)$; 4) $v(c) = 0$ для всех отличных от нуля элементов $c \in k$. При этом удобно считать, что $v(0) = +\infty$.

---

[1]) В русском переводе книги Ходжа, Пидо оценки (valuation) называются *нормированиями*. — *Прим. ред.*

В случае, когда многообразие V является k-кривой, можно считать, что любая оценка v принимает целые значения и с точностью до множителя задается иекоторой ветвью кривой V, причем $v(f)$ представляет собой порядок функции f на этой ветви. При этом $v(f)>0$ и $v(f)<0$ в зависимостн от того, обладает ли функция f нулем или полюсом на соответствующей ветвн; если же $v(f)=0$, то функция f определена и не обращается в нуль в центре ветви.

Кольцом R_v оценки v называется множество всех функций f поля $R_k(V)$, для которых значение $v(f)$ неотрицательно. Очевидно, что элементы поля $R_k(V)$ можно рассматрнвать как функции, принимающие значения в множестве смежных классов кольца R_v по модулю максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца R_v, состоящего из всех функций $f\in R_v$, для которых $v(f)>0$. Ввиду максимальности идеала $\mathfrak{p}$ факторкольцо $R_v/\mathfrak{p}$ является полем; оно иазывается *полем вычетов* оценки v. Заметим, что кольцо R_v является локальным кольцом с максимальным простым идеалом $\mathfrak{p}$. Все эти построения не зависят от размерности многообразия V. Степень трансцеидентности поля вычетов над полем k называется *размерностью* оценки v; эта размерность связана с размерностью многообразия V иеравенством $\dim v\leqslant \dim V-1$, так что для кривой поле вычетов любой оцеики представляет собой конечное алгебраическое расширение поля k. Если $\dim v=0$, то оценка v называется *алгебраической точкой поля*[1] $R_k(V)$. Пусть (x) — общая неоднородная точка многообразия V пространстве $\mathbf{P}^n$. Подходящим образом выбрав бесконечно удаленную гиперплоскость, мы можем добиться выполнения неравенств $v(x_i)\geqslant 0$. Тогда элементы $f\in k[x]$, вычеты которых в поле $R_v/\mathfrak{p}$ равны нулю, образуют в кольце $k[x]$ простой идеал $\mathfrak{J}$. Соответствующее многообразие $W=W_k(\mathfrak{J})$ является подмногообразием многообразия V и иазывается *центром* оценки v на миогосбразии V. Оказывается, что $\dim W\leqslant \dim v$; центром алгебраическсй точки поля является точка многосбразия V. Ранг группы G иазывается *рангом оценки* v; оцеика v называется *дискретной* или *недискретной, архимедовой* или *неархимедовой* в соответствии с характером группы G. Оценка v размерности $r-1$ необходимо является дискретной оцеикой раига 1.

Теория оценок доставляет тонкое средство изучения различных способов приближения к точке или к подмногообразию данного многообразия. При переходе к абстрактным полям теория оценок заменяет обычиые классические методы, основанные на непрерывности (см. Зариский [6], стр. 87).

Замечая, что многообразие V и его локально k-нормальная модель V^*, имея изоморфные поля функций, бирационально эквивалентны, мы можем упростить положение вещей, заменяя данные многообразия V и V' их соответствующими моделями. Разумеется, предварительно следует изучить бирациональное соответствие между

[1] Словссочетанием «точка поля» мы переводим термин «place». — *Прим. перев.*

многообразиями V и V^*; простой ответ здесь состоит в том, что многообразие V всегда можно рассматривать как общую проекцию своей нормальной модели V^*. Соответствующее проектирование p сохраняет размерность и всюду регулярно на V, а обратное отображение p^{-1} ставит в соответствие всякому подмногообразию $W \subset V$ конечное число $\nu \geqslant 1$ подмногообразий многообразия V^*, каждое из которых проектируется на W. Число ν не равно единице для тех (и только тех) подмногообразий многообразия V, которые определяются ведущим идеалом целого замыкания координатного кольца многообразия V. Такие подмногообразия входят в множество кратных подмногообразий многообразия V (доказательства см. в книге Самюэля [в], стр. 65). Таким образом, во многих вопросах с самого начала можно предполагать, что многообразия V и V' локально k-нормальны.

Пусть теперь W/k произвольное подмногообразие многообразия V. Будем различать следующие два случая: а) W определяет относительно соответствия T единственное подмногообразие $W' \subset V'$, причем $\dim W = \dim W'$. В этом случае либо $\mathfrak{n}_k(W; V) = \mathfrak{n}_k(W'; V')$, и тогда соответствие T регулярно вдоль подмногообразий W и W'; либо $\mathfrak{n}_k(W; V) \supset \mathfrak{n}_k(W'; V')$, и тогда соответствие T называется *иррегулярным* вдоль подмногообразия W. b) W определяет относительно соответствия T более одного подмногообразия и, значит, бесконечное множество их, ибо многообразие V k-нормально вдоль W. Тогда W называется *фундаментальным многообразием* соответствия T, и в этом случае $\mathfrak{n}_k(W; V) \underset{\neq}{\not\supset} \mathfrak{n}_k(W'; V')$. Кроме того, $\dim W \leqslant \dim V - 2$, так как иначе существовала бы единственная оценка, имеющая подмногообразие W своим центром на многообразии V (см. Зариский [8], стр. 514).

Иногда оказывается удобным обозначать через $F[W]$ образ многообразия W, рассматриваемый как многообразие, а через $F\{W\}$ — тот же образ, рассматриваемый как множество точек, алгебраичных над полем k. Основная теорема Зариского о бирациональных соответствиях (см. Зариский [8], стр. 522, и [16]) состоит в следующем: *если при рациональном отображении F многообразия V/k в многообразие V'/k, образ $F\{P\}$ k-нор-*

мальной точки P многообразия V нульмерен, то он состоит из единственной точки. Эта теорема (см. Зариский [16]) легко следует из теоремы Зариского об аналитической неприводимости, сформулированной в n° I,5, и является частным случаем более общей теоремы о связности, принадлежащей тому же автору (см. n° VI,4).

7. Простые точки

k-Подмногообразие W k-многообразия V. называется *k-простым на V*, если локальное кольцо $\mathfrak{n}_k(W; V)$ регулярно, т. е. если число элементов, порождающих идеал $\mathfrak{m}_k(W; V)$, равно размерности этого идеала, т. е. числу $d = \dim V - \dim W$.

Эти элементы называются *униформизирующими параметрами* многообразия V вдоль подмногообразия W. Необходимое и достаточное условие регулярности кольца $\mathfrak{n}$ состоит в том, чтобы факторкольцо $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$, имело размерность d. В случае когда подмногообразие W представляет собой рациональную точку над полем k, пространство $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ называется *касательным пространством Зариского* многообразия V в точке P (см. Самюэль [в], стр. 68). Оно тогда и только тогда изоморфно касательному конусу в точке P, когда точка P k-проста (см. Самюэль [в], стр. 71). (*Касательным конусом* называется множество предельных секущих многообразия V, проходящих через точку P; следуя Игуза [5], его можно определить, используя некоторые градуированные кольца; см. также Норткотт [7].)

Из того факта, что всякое регулярное кольцо целозамкнуто (см. Самюэль [б], стр. 29), следует, что многообразие V k-нормально вдоль подмногообразия W, если это подмногообразие k-просто на V. Обратное справедливо лишь в случае, когда $\dim W = \dim V - 1$. Бирегулярные бирациональные преобразования над полем k, индуцируя изоморфизм соответствующих колец $\mathfrak{n}_k(W; V)$ и $\mathfrak{n}_k(W'; V')$ (см. n° I,6), переводят k-простые точки в k-простые.

Зарискому удалось построить по системе уравнений, определяющей многообразие V, некоторую матрицу, обращающуюся в нуль лишь в не k-простых точках многообразия V. Из этого результата Зариского, являющегося обобщением классического критерия Якоби, непосредственно следует, что множество $\mathbf{S}$ не k-простых точек многообразия V представляет собой алгебраическое подмножество многообразия V; если многообразие V k-нормально, то $\dim \mathbf{S} \leqslant \dim V - 2$.

Точка P многообразия V называется *простой*, если она k-проста над любым полем определения k; для этого достаточно, чтобы она была проста над некоторым совершенным полем k. Заметим, кстати, что k-простая точка многообразия V остается простой над любым сепарабельным расширением поля k. Укажем также, что для любых простых точек P и P' многообразий V и V' соответственно точка $P \times P'$ является простой точкой произведения $V \times V'$. Интересно, что для k-простых точек соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно (доказательство см. Самюэль [в], гл. II, 4).

8. Кратность пересечения

В этом пункте мы ограничимся лишь одним частным, но весьма важным случаем. Пусть V и W — многообразия пространства $\mathbf{A}^n$, определенные над полем k. Оказывается, что если алгебраическое k-множество $V \cap W$ непусто, то размерность каждой из его абсолютных компонент не меньше числа $d = \dim V + \dim W - n$; при этом в проективном случае пересечение $V \cap W$ никогда не пусто (если только $d \geqslant 0$).

Это довольно трудно доказать; классическая теория пользовалась здесь аналитическими средствами. Первое алгебраическое доказательство проведено ван дер Варденом [5, I,XII]. Согласно Самюэлю [в], стр. 22—23, его можно связать с так называемой «теоремой о спуске» Коэна—Зейденберга [1]. См. также А. Вейль [а], стр. 86.

Компонента C множества $V \cap W$ называется *собственной* или *несобственной* в соответствии с тем, имеет ли место равенство $\dim C = d$ или неравенство $\dim C > d$; число $e = \dim C - d$ называется *избыточностью* компоненты C. Рассмотрим теперь второй экземпляр $\mathbf{A}'$ пространства $\mathbf{A}$ (т. е. его бирегулярную бирациональную модель) и в нем второй экземпляр W' многообразия W. Пусть Δ — диагональ произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{A}'$, а C^{Δ} — ее подмногообразие, проекцией которого на $\mathbf{A}$ является некоторая компонента C пересечения $V \cap W$. Многообразие C^{Δ} является, очевидно, компонентой пересечения $\Delta \cap (V \times W')$. Поле $R(V \times W')$ содержит локальное кольцо $\mathfrak{n}$ многообразия C^{Δ}, рассматриваемого как подмногообразие произведения $V \times W'$, а также левые части $x_i - x_i'$ уравнений диагонали Δ. Поскольку многообразие C^{Δ} является компонентой пересечения $\Delta \cap (V \times W')$, эти левые части порождают в кольце $\mathfrak{n}$ примарный идеал $\mathfrak{q}$, принадлежащий максимальному идеалу $\mathfrak{m}$. Оказывается, что хотя идеалы $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{q}$ мы определяем над полем $k = \operatorname{def}(V, W, C)$, однако кратность $e(\mathfrak{q})$ идеала $\mathfrak{q}$ не зависит от выбора этого поля. Эта кратность обозначается через $i(C; V \cdot W)$ и называется, согласно Шевалле и Самюэлю (см. Шевалле [3], Самюэль [1] и Самюэль [в], стр. 77), *кратностью пересечения многообразий V и W вдоль компоненты C*. Она инвариантна относительно бирациональных преобразований, бирегулярных вдоль многообразия C. Если компонента C собственная, то $\dim \mathfrak{n} = n$ и элементы $x_i - x_i'$ являются параметрами идеала $\mathfrak{q}$; именно этот случай и рассматривал Шевалле.

Можно доказать, что $i(C; V \cdot W) = i(C^{\Delta}; (V \times W') \cdot \Delta)$. Этим соотношением определение кратности пересечения сводится к случаю, когда одно из двух пересекающихся многообразий линейно (см. Самюэль [в], стр. 83).

Пусть P — собственная компонента пересечения $V \cap L$, где $\dim V = r$, $\dim L = n - r$, и L представляет собой линейное многообразие пространства $\mathbf{A}^n$. Пусть, далее, L' — некоторое линейное многообразие, *общее* над полем определения k многообразия V, т. е. такое, что коэффициенты линейных уравнений, определяющих многообразие, трансцендентны и независимы над полем k. Можно показать, что имеют место следующие факты:

1° Пересечение $V \cap L'$ является полной системой сопряженных точек над полем, получаемым присоединением к полю k коэффициентов линейных уравнений, определяющих многообразие L'.

2° В любой специализации множества $V \cap L'$, продолжающей специализацию $L' \to L$ над полем k, точка P появляется $i(P; V \cdot L)$ раз.

3° Если $k = \operatorname{def} L$, то точка P алгебраична над полем k и число $i(P; V \cdot L)$ делится на степень несепарабельности поля $k(P)$ над полем k.

Если доказать утверждение 2° непосредственно, то фигурирующее в нем число можно принять за определение кратности пересечения. (Как доказал А. Вейль, этот факт равносилен основной теореме Зариского о бирациональных соответствиях (n° I,6); см. А. Вейль [а], стр. 248, Самюэль [в], стр. 87, и Норткотт [4].) Именно это определение было предложено А. Вейлем (см. А. Вейль [а], стр. 116).

С помощью указанной выше формулы это определение легко распространяется на общий случай, по крайней мере если ограничиваться собственными компонентами.

Кратность пересечения однозначно характеризуется некоторыми формальными свойствами (см. Вейль [а], стр. 279, Самюэль [в], стр. 89).

Кроме требования, чтобы символ $i(P; V \cdot L)$ был определен в рассмотренном уже случае, эти свойства сводятся к следующим:

1) *Справедливость так называемых формул ассоциативности и проекции* (см. Самюэль [в], стр. 81, 84).

2) *Справедливость критерия единичной кратности для собственных компонент* (см. Самюэль [в], стр. 79).

Напомним, что, согласно последнему критерию, $i(C; V \cdot W) = 1$ тогда и только тогда, когда 1) касательные пространства к многообразиям V и W пересекаются в общей точке компоненты C собственным образом, 2) компонента C проста на V и на W. Если эта компонента собственна, условие 2) вытекает из условия 1).

В классическом случае (т. е. над полем комплексных чисел) определение Вейля приобретает хорошо известный аналитический смысл: это есть *число тех точек пересечения $V \cdot L'$, которые сливаются в точку P, когда многообразие L' специализируется в многообразие L*. Как это обычно делается, здесь можно заменить специализацию предельным переходом. Тогда получится классическое определение кратности пересечения, принадлежащее Севери (см. Севери [21]; связь между определениями Севери и Вейля была изучена Севери в [33]. Отметим кстати, что некоторая наметка теории Вейля содержится уже в работе Б. Сегре [8]).

Мы не станем описывать здесь, как можно перейти к общему случаю, когда пересечение рассматривается в нелинейном объемлющем многообразии U. Этот случай сводится к предыдущему (см. А. Вейль [а], гл. VI, и Самюэль [в], стр. 98). Заметим лишь, что, как и выше, удается определить число $i_U(C; V\cdot W)$, где C — простая на объемлющем многообразии U компонента пересечения $V \cap W$, а V и W — произвольные подмногообразия многообразия U.

Пусть U — подмногообразие некоторого многообразия V, погруженного в одно из пространств **A** или **P**. Вслед за Самюэлем (см. [в], стр. 94) назовем кратностью многообразия U на многообразии V и обозначим через $m(U; V)$ кратность максимального идеала локального кольца $\mathfrak{n}(U; V)$ (см. n° I,3). Тогда имеют место два важных результата: 1) $m(U; V) = i(U; U_1\cdot V) = i(U; U\cdot V)$, где U_1 — общий конус размерности $n + \dim U - \dim V$, проектирующий многообразие U; 2) для любой точки $P \in U$ выполнено неравенство $m(P; V) \geqslant m(U; V)$; причем для почти всех точек P имеет место равенство.

Свойство ассоциативности остается выполненным лишь для собственных компонент C; кроме того, если компонента C проста на U, то, как доказал Самюэль (см. Самюэль [в], стр. 100), $i_U(C; V\cdot W) = i(C; V\cdot W)$, где последний символ рассматривается как кратность пересечения в пространстве, объемлющем многообразие U.

Очевидно, что в правой части этого равенства C выступает как несобственная компонента. Для таких компонент Самюэль установил (см. [в], стр. 85) следующее важное геометрическое описание кратности пересечения, предложенное Севери: $i(C; V\cdot W) = i(C; V'\cdot W')$, где V' и W' — почти любые конусы, проектирующие соответственно многообразия V и W и такие, что на пересечении $V' \cap W'$ компонента C собственна.

Намеченная теория носит *локальный* характер и приводит к самым общим результатам (см. замечания А. Вейля [а], стр. 197). Для приложений, однако, оказывается более полезным иметь в своем распоряжении *глобальную* теорию пересечений. При жестком ограничении, наложенном на объемлющее многообразие, — *отсутствие особенностей*, такая теория была систематически разработана А. Вейлем и изложена им под названием «исчисление циклов».

9. Исчисление циклов

(По поводу всех вопросов, затронутых в этом пункте, см. А. Вейль [а], стр. 197—214.)

Однородным r-мерным циклом X^r многообразия V, или просто *r-мерным V-циклом*, называется любая формальная целочисленная линейная комбинация r-мерных подмногообразий $V_i \subset V$, т. е. сумма вида $X^r = \sum_i n_i V_i$. Многообразия V_i называются *компонентами* цикла X, а их теоретико-множественное объединение — *носителем* $\|X\|$ цикла X.

Цикл X *равен нулю* тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю: $n_i = 0$. *Порядком* цикла X называется число $\sum_i n_i a_i$, где a_i — порядок подмногообразия V_i. Цикл X называется *положительным* ($X > 0$), или *эффективным*, если все его коэффициенты n_i неотрицательны и хотя бы один из них строго больше нуля. Не положительный и отличный от нуля цикл называется *виртуальным*. Совокупность всех r-мерных циклов на многообразии V образует абелеву группу $\mathbf{G}^r(V)$.

Отбросив условие одинаковой размерности компонент, мы получим абелеву группу $\Gamma(V)$ *неоднородных* циклов многообразия V. Это — градуированная группа: $\Gamma(V) = \sum_r \mathbf{G}^r(V)$ $r = 0, \ldots, \dim V$.

Определим теперь две важные операции над циклами: *произведение* и *алгебраическую проекцию*. Первая из них задается формулой $X \times Y = \sum_{i,j} n_i m_j (V_i \times W_j)$, где $X = \sum_i n_i V_i$ — произвольный V-цикл, а $Y = \sum_j m_j W_j$ — произвольный W-цикл; V и W — два многообразия. Вторая операция определяется лишь для циклов, компоненты которых просты на объемлющем многообразии. Пусть A — простое подмногообразие произведения $U \times V$ многообразий U и V. Его проекция $A' = \mathrm{pr}_U A$ является, очевидно, простым подмногообразием многообразия U. Если его размерность равна размерности подмногообразия A, то U-цикл $\mathrm{pr}_U^* A = [A : A'] \cdot A$, где $[A : A']$ — индекс проекции на многообразие (см. n° I,6) называется *алгебраической* *проекцией* многообразия A на многообразие U; в противном случае считается, что $\mathrm{pr}^*_U A = 0$. Для любого r-мерного цикла $X = \sum n_i A_i$ произведения $U \times V$ мы полагаем $\mathrm{pr}_U X = \sum\limits_i n_i \mathrm{pr}_U A_i$ и $\mathrm{pr}^*_U X = \sum\limits_i n_i \mathrm{pr}^*_U A_i$. Очевидно, что операция pr^*_U определяет некоторый гомоморфизм группы $\mathbf{G}^r(U \times V)$ в группу $\mathbf{G}^r(U)$.

V-цикл $X = \sum\limits_i n_i V_i$ называется *рациональным* над полем определения k многообразия V, если 1) каждое многообразие V_i алгебраично над полем k (т. е. определено над конечным алгебраическим расширением этого поля); 2) цикл X инвариантен относительно любого автоморфизма над полем k алгебраического замыкания $\bar{k}$ поля k; 3) каждый коэффициент n_i делится на степень несепарабельности многообразия V_i над полем k, т. е. на степень несепарабельности поля $k(V_i)$ над полем k. Ясно, что рациональные циклы образуют подгруппу группы $\Gamma(V)$ и что цикл, рациональный над полем k, остается рациональным над любым расширением $k' \supset k$.

V-цикл X называется *простым рациональным* циклом или, короче, *простым* циклом, если он представим в виде $X = \sum\limits_i p^f V_i$, где сумма распространена на все подмногообразия, сопряженные с некоторым простым подмногообразием $V_1 \subset V$, а p^f есть степень несепарабельности многообразия V_1 над полем k. Очевидно, что простое подмногообразие $A \subset V$ тогда и только тогда является рациональным циклом над полем k, когда $k = \mathrm{def}(V, A)$; причем в этом случае подмногообразие A представляет собой простой цикл.

Следует тщательно отличать алгебраическое понятие «цикла» многообразия V от топологического понятия «цикла» на римановом многообразии многообразия V (см. n° IX.2), в особенности в тех случаях, когда эти понятия приходится рассматривать вместе (см., например, n° X.6). Как правило, точное значение этого термина ясно из контекста.

Мы будем говорить, что два V-цикла $X^r = \sum\limits_i n_i A_i$ и $Y^s = \sum m_j B_j$ *пересекаются собственно* в многообразии V, если все простые на V компоненты пересечения любых двух компонент циклов X и Y являются собственными. В этом случае мы полагаем $X \cdot Y = \sum_{i,j} n_i m_j (A_i \cdot B_j)$, где $A_i \cdot B_j = \sum_C i_V (C;\ A_i \cdot B_j) C$, причем последняя сумма распространена на все компоненты C пересечения $A_i \cap B_j$, простые на многообразии V. Цикл $X \cdot Y$ называется *пересечением* циклов X и Y. Операция пересечения, когда она определена, коммутативна и совместна с частичным упорядочением группы $\Gamma(V)$; само многообразие V играет для нее роль единицы. Кроме того, эта операция дистрибутивна относительно сложения определенного в группе $\Gamma(V)$ и ассоциативна.

Укажем теперь два соотношения, связывающие операцию пересечения с операциями, определенными выше. Первое соотношение имеет вид: $(X \times Y) \cdot (X' \times Y') = (X \cdot X') \times (Y \cdot Y')$; здесь все буквы означают циклы и предполагается, что фигурирующие в этом соотношении пересечения определены (для этого достаточно, чтобы пересечения были определены, например, в правой части). Второе соотношение имеет вид: $\mathrm{pr}_U^* (X \cdot (Y \times V)) = (\mathrm{pr}_U^* X) \cdot Y$. Оно справедливо в предположении, что V является неособым проективным многообразием, X — $(U \times V)$-циклом, Y — U-циклом, и что пересечение $X \cdot (Y \times V)$ определено на произведении $U \times V$.

С помощью более общей теории пересечений Самюэля можно связать с двумя (или несколькими) циклами A, B (возможно, неоднородными) в одном из пространств $\mathbf{A}$ или $\mathbf{P}$ некоторый цикл $A \perp B$, который определяется так же, как и цикл $A \cdot B$, но в его определении принимаются в расчет и несобственные компоненты; см. Самюэль [в], стр. 92.

Завершим наш краткий обзор формулировкой одной важной теоремы А. Вейля, лежащей в основе теории алгебраических систем (см. А. Вейль [а], стр. 204).

(I) *Пусть U и V — произвольные многообразия, $n = \dim U$, $k = \operatorname{def}(V, U)$, и пусть P — общая точка многообразия U над полем k. Оказывается, что имеют место следующие утверждения:*

1. *Пусть Q — произвольная простая точка многообразия V, X — простой цикл на произведении $U \times V$,*

общей точкой которого над полем k служит точка $P \times Q$, и $X(P)$ — простой рациональный V-цикл над полем $k(P)$, общей точкой которого над этим полем служит точка Q. Тогда цикл $X \cdot (P \times V)$ определен на произведении $U \times V$ и справедливо равенство $X \cdot (P \times V) = P \times X(P)$.

2. *Для любого рационального $(U \times V)$-цикла X над полем k, размерность которого не меньше n, определен цикл $X \cdot (P \times V)$, причем $X(P \times V) = P \times X(P)$, где $X(P)$ — некоторый рациональный V-цикл над полем $k(P)$. Цикл $X(P)$ тогда и только тогда равен нулю, когда проекции на U всех компонент цикла X имеют размерность, меньшую n.*

3. *Обратно, для любого рационального V-цикла $X(P)$ над полем $k(P)$ существует единственный рациональный $(U \times V)$-цикл X над полем k, для которого $X \cdot (P \times V) = P \times X(P)$ и любая компонента которого проектируется на все многообразие U. Если, кроме того, цикл $X(P)$ положителен, то цикл X тоже положителен.*

Предусмотренный этим утверждением цикл X обозначается символом $\mathfrak{L}_k(X(P) \times P)$.

Приведем некоторые исторические замечания по поводу содержания этой главы.

В классической алгебраической геометрии алгебраические множества назывались многообразиями, а многообразия в нашем смысле — неприводимыми многообразиями (см., например, Бертини [a] и Зариский [a]). Эти понятия были явно сформулированы уже в работе Кронекера [1]. Алгебраическое k-множество — это то же самое, что «интерферентное миогообразие иад полем k» в смысле Севери [38] или «иормально алгебраичный пучок многообразий над полем k» в смысле А. Вейля [a]. Термииом «алгебраическое множество» в абсолютном смысле ($k = \mathrm{K}$) пользовался Шевалле [3], а в нашем относительном смысле этот термин впервые был, по-видимому, употреблен Самюэлем [в]. Различные терминологии, употреблявшиеся в алгебраической геометрии, сравниваются в книге Самюэля [в], стр. 129.

Понятия специализации и общей точки характерны для абстрактной алгебраической геометрии; они появились в ранних работах Э. Нётер [1] и ван дер Вардена [1]. Рассмотрение специализаций до некоторой степеии заменяет те рассуждения классической алгебраической геометрии, которые опираются на иепрерывность. Возможность их полной замены доставляет общая теория оцеиок, основы которой были заложены Круллем (см. [1] и [a]); приложения этой теории к алгебраической геометрии были развиты в основном Зариским.

Значение алгебраической функции f, заданной в общей точке многообразия V, удается определить также и в тех точках, где f явно не определена, с помощью либо понятия непрерывности, либо понятия специализации. В этом заключается фундаментальное значение теоремы ван дер Вардена о продолжении специализаций (см. Зариский [б], стр. 81). Понятие общей точки может показаться чрезмерно широким; методологические преимущества и неудобства сужения этого понятия рассмотрены Зариским ([б], стр. 79).

Введение понятий универсальной области, абсолютного многообразии и т. п. характерно для работ А. Вейля. Теоретико-множественные произведения в алгебраической геометрии уже давно определил Б. Сегре и систематически использовал Севери в теории соответствий. Согласно Севери, «алгебраическим соответствием» между двумя многообразиями V и V' называется любое алгебраическое подмножество их произведения (см., например, Севери [15]). Эта точка зрения в настоящее время общепринята; в частности, ей следовал А. Вейль в книге [а].

Напротив, теоретико-множественная проекция является одним из новейших инструментов алгебраической геометрии. Она представляет собой обобщение на абстрактный случай классической операции проектирования в аффинных и проективных пространствах. Это обобщение было систематически изложено Шевалле [3] и А. Вейлем [а] как метод, дающий абстрактное определение фактор-пространства и особенно удобный для упрощения формулировок теории пересечений. Использование рациональных отображений, многообразий Сегре и r-кратных моделей типично для работ итальянской школы; см. Бертини [а].

Понятие нормального многообразия и процедура нормализации целиком принадлежат Зарискому. Первоначально он хотел добиться устранения особых гиперповерхностей на многообразии в качестве первого шага к разрешению особенностей (см. гл. II этой книги). Впоследствии эти понятия оказались весьма полезным инструментом в теории бирациональных преобразований, в изучении аналитической неприводимости и нормальности. Весь этот круг вопросов, как мы уже имели случай указать, ввел в науку и изучил сам Зариский. К другим важным приложениям относится принцип вырождения (п° VI. 4) и теория линейных систем (гл. III).

Удовлетворительное изложение теории пересечений классическими методами, как мы указывали, было дано Севери [21] (см. также [32] и [в]). Абстрактные теории пересечений принадлежат ван дер Вардену ([2] и [5,XII]), но они пригодны лишь для того случая, когда все компоненты теоретико-множественного пересечения являются собственными. Теорию этого типа с некоторыми усовершенствованиями можно изучить по книге Ходжа и Пидо [a_2], гл. XII. Ключевой пункт в теории Вейля — теорема о кратности специализации (п I°,8)— является усилением и расширением более раннего результата ван дер Вардена (см. А. Вейль [а], стр. 247).

В дальнейшем появились теории Шевалле [3] и Вейля [а] (см. также Б. Сегре [8]). Заметим, что, помимо доказательства единственности, упомянутого в п°I,8, существуют прямые доказательства совпадения определений Шевалле и Вейля, принадлежащие

Игуза [1] и Самюэлю [1]. Последующие результаты Самюэля в локальной алгебре дали возможность распространить определение Шевалле на иррегулярные компоненты и получить много дополнительных геометрических сведений.

Самюэль изучал также возможность распространения теории пересечений на компоненты, которые не являются простыми на объемлющем многообразии. Кроме того, и теория Шевалле, и теория Самюэля применимы к определению кратности пересечений *алгеброидных* многообразий, т. е. многообразий, определяемых простыми идеалами кольца формальных степенных рядов над полем k; все эти вопросы рассмотрены в книге Самюэля [в]. Другие более тонкие варианты теории пересечений развил Барзотти [1, 2, 3]. В последней из этих работ он дал также абстрактное изложение методов Севери, связанных с рассмотрением пересечений классов эквивалентности (см. n° VI. 9).

Итальянская школа называет циклы «виртуальными многообразиями». Под этим названием их ввел в алгебраическую геометрию Севери [8]. Севери определил также понятие кратности пересечения форм в любой точке проективного пространства и на этом пути, усовершенствовав старый метод Кронекера, пришел к определению цикла пересечения данных форм. По поводу этих вопросов см. Севери [30, 33] и Перрон [1]; теория исключения, с абстрактной точки зрения, изложена в книге ван дер Вардена [б], гл. IV.

Укажем, что иногда оказывается полезным понятие «базисного многообразия». Такие многообразия отождествляются с идеалами в кольце многочленов; сведения о них можно найти в работах Севери [38] и Гаэта [а]. В случае кривых и поверхностей можно уточнить геометрическое содержание этого понятия, вводя бесконечно близкие точки и обобщая тем самым предшествующие исследования Энрикеса. Окончательные результаты в этом направлении получил Зариский [1] (над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики), Мьюли [1] (над произвольными полями нулевой характеристики) и Зейденберг [1] (над произвольными полями).

Мы не станем рассматривать здесь интересную и важную проблему классификации многообразий в связи с заданием их идеалами. Укажем лишь на принадлежащее Дюбрейлю [а] понятие многообразия первого вида (prémière espèce), которое Зариский отождествил с понятием проективно нормального многообразия (Дюбрейль [а] и [1]). Дальнейшую информацию читатель может найти в подробном отчете Гаэте [а], в выдающихся работах этого автора [1, 2, 4] и в статье Дюбрейля — Жакотена [1].

Напомним, наконец, что для любых циклов X и Y пространства P^n, пересечение которых определено, имеет место соотношение: порядок $(X \cdot Y)$=(порядок X)$\cdot$ (порядок Y). В этом заключается содержание знаменитой теоремы Безу. Доказательства и обобщения см. в работах: Севери [33], Самюэль [в], стр. 107, ван дер Варден [5, I, XIV], Норткотт [5], Ивасава [1].

II
Разрешение особенностей

Одной из важнейших проблем алгебраической геометрии является отыскание для любого многообразия V его бирациональной модели, свободной от особых точек. Помимо самоочевидного внутреннего интереса, который представляет эта задача, ее полное положительное решение позволило бы нам, не внося дополнительных ограничений, рассматривать бирациональные свойства на неособой модели, когда условия исследования наиболее благоприятны (главным образом за счет того, что глобальная теория пересечений пока построена лишь на неособых моделях и едва ли эту теорему можно распространить на многообразия с особенностями, не изменив коренным образом ее характера).

К сожалению, эта проблема очень трудна. В настоящее время ее положительное решение известно только для многообразий размерности, не больше трех, и к тому же лишь для случая нулевой характеристики. Для кривых и поверхностей над комплексным полем это решение является классическим; в остальном оно всецело принадлежит Зарискому. Настоящая глава в основном посвящена краткому изложению исследования трехмерного случая (см. Зариский [9]).

1. Теорема о локальной униформизации

Полезный метод исследования природы особой точки P на многообразии V/k состоит в построении бирационального преобразования T/k, для которого точка P является *изолированной фундаментальной k-точкой*; построив такое преобразование, следует изучить образ $T\{P\}$, предварительно убедившись, что никакое подмногообразие этого образа не является фундаментальным для обратного преобразования T^{-1}. Еще лучше, если существует такое преобразование T, что образ $T\{P\}$ является *неособым* многообразием, однако неизвестно, всегда ли преобразование существует. Частичный ответ на этот вопрос дает следующая теорема Зариского, известная как «теорема о локальной униформизации» (см. Зариский [5]); в этой теореме, как и во всей этой главе, поле k предполагается полем *нулевой характеристики*:

(I) *Пусть V — произвольное k-многообразие проективного пространства и $R_k(V)$ — поле рациональных функций на нем. Пусть, далее, v — произвольная s-мерная оценка* (см. n° I,8) *поля $R_k(V)$, имеющая своим центром на V некоторое k-подмногообразие C. Тогда существует такой бирациональный образ V' многообразия V, что центром оценки v на многообразии V' является s-мерное простое k-многообразие C', причем $\mathfrak{n}_k(C; V) \subset \subset \mathfrak{n}_k(C'; V')$.*

Доказательство теоремы очень сложно и состоит в прямом и эффективном построении последовательности кремоновых преобразований (т. е. бирациональных преобразований всего пространства, объемлющего данное многообразие); при этом с помощью операции проектирования теорема предварительно сводится к случаю форм. Это приводит к желаемому результату для нульмерных оценок ранга единица; вся конструкция осуществляется с помощью своеобразной индукции, шаги которой отмечаются алгоритмом Перрона. После этой наиболее трудной части доказательство завершается индукцией сначала по рангу, а затем по размерности оценки v; именно здесь и используется кремонов характер бирациональных преобразований. Это доказательство подробно изложено в книге Ходжа и Пидо [a_3], стр. 290—314.

Рассмотрим, в частности, случай, когда поле k является полем комплексных чисел. Пусть v — оценка поля $R(V)$, центром которой является некоторая изолированная особая точка P многообразия V, и пусть V' — модель многообразия V, указанная в теореме (I). Согласно этой теореме, центром оценки v на многообразии V' служит простая точка P', причем $\mathfrak{n}(P; V) \subset \mathfrak{n}(P', V')$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_r$ — униформизирующие параметры в точке P' (см. n° I,7); тогда однородные координаты точки P задаются степенными рядами от $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Эти ряды сходятся в некоторой окрестности $U(v)$ точки $P' \in V'$.

Допустим теперь, что существует такая конечная система оценок $v_1, v_2, \ldots, v_h$ поля $R(V)$ с центром в точке P, что все эти оценки, а также все остальные оценки с центром в точке P обладают простым центром в одной из окрестностей $U(v_i)$. Очевидно, что множество степенных рядов, связанных со всеми этими оценками, представляет полную окрестность особой точки P на многообразие V. Кроме того, это представление является голоморфным. Эти утверждения подсказывают следующую теорему, существенно дополняющую теорему о локальной униформизации:

(II) *Для любого k-многообразия V существует такая конечная система k-многообразий, бирационально эквивалентных многообразию V, что любая оценка поля функций $R_k(V)$ обладает простым центром по крайней мере на одном из многообразий этой системы.*

Такую конечную систему бирациональных моделей Зариский называет (*конечной*) *разрешающей системой*. Теорема о локальной униформизации обеспечивает существование лишь *бесконечной* разрешающей системы. Теорему о существовании конечной разрешающей системы можно доказать либо на основе чисто алгебраических соображений (см. Ходж и Пидо [a_3], стр. 315), либо основываясь на введении в множество $\mathfrak{M}$ всех нульмерных оценок поля $R_k(V)$ так называемой *топологии Зариского*.

Для того чтобы определить эту топологию, рассмотрим произвольную проективную модель поля $R_k(V)$ и некоторую конечную систему k-подмногообразий этой модели. Нульмерные оценки поля с центрами, принадлежащими этой системе, образуют, по определению, замкнутое множество. Варьируя модель и подмногообразия, мы получим некоторый набор замкнутых множеств. Эти замкнутые множества и принимаются за базисные замкнутые множества топологии пространства $\mathfrak{M}$. Получающееся топологическое пространство $\mathfrak{M}$ *компактно*, т. е. обладает тем свойством, что из любого его покрытия можно выбрать *конечное* покрытие. Это пространство называется *абстрактным римановым многообразием многообразия V* (см. Зариский [11]).

2. Моноидальные преобразования

Процедура разрешения особенностей основывается почти исключительно на некоторых преобразованнях, которые подобны классическим моноидальным преобразованиям, но не совпадают с ними. Имея в виду задачу разрешения, Зариский провел глубокое исследование этих преобразований. Мы приведем здесь их важнейшие свойства (доказательства см. в работе Зариского [8], стр. 532, и в книге Ходжа и Пидо [a_3], стр. 244).

Пусть V и V' — проективные локально k-нормальные k-многообразия и T — определенное над полем k бирациональное соответствие между ними, не имеющее на V' фундаментальных точек. Заменяя в случае необходимости многообразие V' графиком соответствия T в многообразии Сегре $V \times V'$, мы можем записать уравнения соответствия T в виде $\varrho y_{ij} = x_i \varphi_j(x)$, где (x) — общая точка многообразия V над полем k, φ_j — формы одной и той же степени, (y) — общая точка многообразия V' над полем k, а ϱ — множитель пропорциональности. Нетрудно показать, что геометрическое место фундаментальных точек соответствия T на многообразии V совпадает с базисным множеством линейной системы $\sum_j \lambda_j \varphi_j(x) = 0$ на V (см. n° III,6), если исключить из последнего неподвижные $(r-1)$-компоненты, где $r = \dim V$. Размерность этого фундаментального множества не может быть выше $r-2$. В случае когда идеал (φ) с точностью до несущественной примарной компоненты является простым идеалом, Зариский называет соответствие T *моноидальным преобразованием*. k-Многообразие W, определенное идеалом (φ), называется тогда *центром* преобразования T. В случае когда центр W является k-точкой, моноидальное преобразование T называется *квадратичным* преобразованием. Моноидальное преобразование раздувает свой центр W до k-гиперповерхности многообразия V'. При этом оно переводит простые k-точки многообразий V и W в простые же точки многообразия V'; этот факт и является основной причиной использования моноидальных преобразований в процессе разрешения особенностей. Более того, оказывается, что моноидальные преобразования, вообще говоря, упрощают особые

k-точки многообразия V, принадлежащие подмногообразию W, *если только эти точки, рассматриваемые как точки многообразия* W, *являются простыми точками.* В связи с этим, прежде чем применять моноидальное преобразование, следует устранить особенности его центра.

Сегре называет моноидальные преобразования *дилатациями* (см. Б. Сегре [11, 13]). Этот термин представляется более предпочтительным, ибо он устраняет возможность смешения с классическим случаем. Читатель может заметить, например, что классическое квадратичное преобразование плоскости не является моноидальным, ибо оно имеет три фундаментальные точки.

3. Теорема Зариского для трехмерных многообразий

Произвольная локально k-нормальная модель k-кривой уже является неособой моделью (см. n° I, 7). Аналогично можно построить неособую модель и для любой поверхности. Наиболее доступное, принадлежащее Зарискому, доказательство этого результата в ясном изложении читатель найдет в книге Ходжа и Пидо (см. Зариский [3, 7] и Ходж и Пидо [a_3], стр. 322). Поэтому мы ограничимся здесь изложением теоремы Зариского для случая *трехмерного многообразия* V над полем k нулевой характеристики. Это изложение и займет весь этот последний пункт настоящей главы. Как правило, будем называть здесь многообразием, кривой и точкой соответственно k-многообразие, k-кривую и k-точку, где k — некоторое фиксированное поле. Заметим, что поскольку характеристика поля k равна нулю, k-простые множества являются и абсолютно простыми (см. n° I, 7).

а) (См. Зариский [9], I.) В первую очередь нам следует установить несколько лемм о действии квадратичного или моноидального преобразования T, заданного на многообразии V/k, в случае когда его центром является кратная k-точка или k-кривая некоторой фиксированной простой k-поверхности $F \subset V$. Если точка P ν-кратна на поверхности F и проста на многообразии V, то квадратичное преобразование с центром P сопоставляет этой точке на поверхности $F' = T[F]$ некоторое алгебраическое, вообще говоря, k-приводимое одномерное множество $T[P]\cap F'$. Однако, если множество $T[P]\cap F'$ обладает k-компонентой, ν-кратной на поверхности F', то оно на самом деле неприводимо и является рациональной неособой k-кривой.

Подобным же образом обстоит дело и с моноидальными преобразованиями. Базисной k-кривой C, ν-кратной на поверхности F и простой на многообразии V, моноидальное преобразование сопоставляет одномерное F'-множество $C' = T[C]\cap F'$, причем, если множество обладает ν-кратной на поверхности F' k-компонентой, то оно неприводимо и бирационально эквивалентно кривой C, в том смысле, что *поля вычетов кривых C и C' совпадают.*

Полем вычетов подмногообразия $W \subset V$ называется поле $\mathfrak{n}_k(W; V)/\mathfrak{m}_k(W; V) = k(z)$, где (z) — общая точка многообразия W над полем $k = \operatorname{def}(V, W)$ (см. n° I, 3 и Самюэль [в], стр. 59).

Кроме того, бирациональное соответствие между кривыми C и C' бирегулярно в каждой простой k-точке $P \in C$, для которой $m(P; F) = m(C; F)$.

Далее, если точка P ν-кратна на поверхности F, а некоторая соответствующая ей при квадратичном преобразовании с центром в этой точке k-точка P' ν-кратна на поверхности F', то либо пересечение $T[P]\cap F'$ является неособой рациональной k-кривой, либо оно состоит из нескольких k-кривых, содержащих точку P'. В последнем случае *поля вычетов точек P и P' совпадают* (см. Зарисский [9], теорема 3).

Мы будем говорить, что квадратичное или моноидальное преобразование *равномерно* понижает кратность своего центра $H \subset F$, если для любых двух соответствующих друг другу k-точек P и P', для которых $m(P; H) = 1$ и $m(P; F) = m(H; F)$ имеет место неравенство $m(P'; F') < m(P; F)$. Очевидно, что преобразование следует считать не вполне удачным, если оно не понижает кратности своего центра равномерно. Тем не менее сформулированные выше свойства показывают, что подобная неудача всегда, за одним исключением, до некоторой степени возмещается *сохранением поля вычетов рассматриваемой k-точки или k-кривой.* В самом деле, как показывает Зарисский, в случае сохранения поля вычетов преобразование T локально действует так же, *как если бы поле k было алгебраически замкнуто*.

Все сказанное Зариский применяет к исследованию *нормального пересечения* двух ν-кратных на поверхности F k-кривых C и D, т. е. такой k-точки P, ν-кратной на поверхности F и простой на кривых C и D, что в ней k-кривые C и D имеют различные касательные. Можно подобрать три униформизирующих параметра многообразия V в точке P таким образом, чтобы первые два из них образовывали базис простого идеала кривой C на многообразии V, а вторые два служили тем же для кривой D. Основываясь на этом, можно далее показать, что квадратичные или моноидальные преобразования с центром на кривой C (или кривой D) *сохраняют нормальное пересечение кривых C и D*; причем моноидальные преобразования, центрами которых служат кривые C и D соответственно, *перестановочны* с точностью до бирегулярного преобразования, ибо такая перестановка сохраняет локальное кольцо в точке P. В этом месте и используется упомянутая выше идея локального понижения. Все изложенные факты доказаны Зариским для случая поля k *любой характеристики*.

b) Дав изящное доказательство известной в классическом случае теоремы о том, что можно устранить особенности проективной k-кривой, используя *лишь* кремоновы квадратичные преобразования (*для любого поля k*), Зариский переходит затем к *теореме локального приведения для случая k-поверхности F на многообразии V* (см. Зариский [9], 11, 13).

Пусть v — произвольная нульмерная оценка поля рациональных функций на поверхности F над полем k и пусть P — ее центр на многообразии V. Предположим, что на многообразии V точка P проста, а на поверхности F является либо изолированной ν-кратной точкой, либо нормальным пересечением некоторых компонент полного ν-кратного одномерного множества поверхности F. Квадратичное преобразование с центром в точке P или моноидальное преобразование с центром в какой-либо ν-кратной k-кривой поверхности F, проходящей через точку P, мы будем называть *допустимым преобразованием*. Пусть T — произвольное допустимое преобразование и $\overline{T}$ — индуцированное им соответствие между поверхностями F и $F' = T[F]$. Пользуясь результатами раздела а), можно показать, что если центр P' преобразования $\overline{T}$ на поверхности F' также ν-кратен, то точка P' является на поверхности F' либо ν-кратной изолированной точкой, либо простой k-точкой ν-кратного одномерного множества, либо, наконец, нормальным пересечением некоторых компонент этого множества.

Теперь можно применить к многообразию $V' = T(V)$ следующее допустимое преобразование T' и получить многообразие V'', k-поверхность F'' и k-точку P''. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока образ точки P еще остается ν-кратным. Рассматриваемая теорема локального приведения обеспечивает *конечность* такой последовательности преобразований. Таким образом существует последовательность допустимых преобразований, понижающая кратность точки P.

Ясно, что эта теорема *сильнее* теоремы о локальной униформизации (n° II, 1), потому что здесь понижение осуществляется лишь с помощью *допустимых преобразований*, действующих в *нелинейном* объемлющем многообразии. Доказательство теоремы получается использованием теории оценок во всей ее полноте. Поскольку в некоторых местах доказательства приходится предполагать, что характеристика поля k равна нулю, то и сам результат верен или, по крайней мере, доказан *лишь* в этом случае.

◀ с) Пусть теперь F — простая k-поверхность на многообразии V.

Особое множество поверхности F состоит из конечного числа особых кривых и изолированных точек. На s-кратной особой кривой поверхности F содержится лишь конечное число точек, кратности которых превосходят s, так что существует максимум кратности особых точек поверхности F. Обозначим его буквой ν; ν-кратные особые точки поверхности F образуют собственное алгебраическое подмножество. Пусть $S_1, \ldots, S_h$ — k-компоненты этого множества. Особенности каждой кривой S_i можно устранить с помощью квадратичных преобразований пространства, объемлющего многообразие V. Эти преобразования, вообще говоря, могут привести к появлению новых кривых или точек, кратных на поверхности F, однако можно показать, что эти новые кривые неособы, а максимум кратностей особых точек не увеличивается. Таким образом, после конечного числа квадратичных преобразований мы придем к случаю, когда все неприводимые кратные поверхности $F \subset V$ наибольшей кратности ν неособы, а пересечение любой пары таких кривых нормально. Будем теперь считать, что эти условия выполнены.

Ограничим понятие допустимого квадратичного преобразования преобразованиями, центры которых являются изолированными ν-кратными точками поверхности F. Любая последовательность допустимых преобразований в этом ограниченном смысле называется *нормальной* (допустимые моноидальные преобразования определяются, как выше; центрами их являются ν-кратные кривые). Оказывается, что имеет место следующая *глобальная теорема редукции особых точек и кривых наибольшей кратности* поверхности $F \subset V$, принадлежащая в классическом случае $V = \mathbf{P}^n$ Беппо Леви: *любая нормальная последовательность допустимых преобразований конечна.*

Для доказательства этой теоремы Зариский сначала подготавливает особое множество так, как это было описано выше, а затем доказывает, что если теорема верна, то две максимальные нормальные последовательности преобразований приводят к одной и той же k-поверхности. Это происходит в основном из-за перестановочности операций в последовательности и частично следует из результатов раздела b). Таким образом, после конечного числа моноидальных преобразований с центрами в ν-кратных k-кривых поверхности F все такие кривые будут устранены.

После этого к новой поверхности, ν-кратные точки которой уже изолированы, мы применим последовательность квадратичных преобразований с центрами в таких точках. Эта последовательность прервется, если некоторое квадратичное преобразование приведет к появлению новой ν-кратной кривой: ее следует устранить с помощью моноидального преобразования и снова начать применять квадратичные преобразования. Теорема Зариского утверждает, что после конечного числа шагов мы придем к бирациональному образу поверхности F, кратность любой точки которого *меньше* ν. Пусть F, F_1, ..., F_i,...—некоторая последовательность бирациональных образов поверхности F, T_i — соответствующие преобразования: $F_{i+1} = T_i[F_i]$ и P, P_1, ... P_i, ... — последовательность соответствующих k-точек $P_i \in F_i$. Последовательность $\{P_i\}$ называется *нормальной последовательностью* ν*-кратных* k*-точек*, если 1) каждая точка P_i является ν-кратной точкой поверхности F_i, причем она является либо изолированной ν-кратной точкой, либо простой точкой некоторой ν-кратной k-кривой, либо нормальным пересечением двух ν-кратных k-кривых; 2) преобразования T_i составляют нормальную последовательность допустимых преобразований.

Очевидно, что сформулированная выше теорема Зариского будет доказана, если нам удастся показать, что *любая нормальная последовательность* k*-точек конечна*. Однако, если это не так, то существует бесконечная последовательность ν-кратных k-точек. Соответствующая последовательность локальных колец $\mathfrak{n}_k(P_i, F_i)$ строго возрастает и содержится в кольце некоторой одномерной оценки v. В силу теоремы о локальном приведении, *существует* некоторая последовательность допустимых преобразований, при которой лишь конечное число центров $P_i' \in F_i'$ имеет кратность ν (кратность остальных — меньше ν). Но Зариский показывает, что если с помощью нормальной последовательности допустимых преобразований нельзя понизить кратность центра любой данной оценки v, то нельзя добиться этого и с помощью какой-либо другой последовательности допустимых преобразований. Полученное противоречие и доказывает обобщенную теорему Беппо Леви. ▶

d) Пусть теперь V' и V^* — две бирациональные k-модели многообразия V, соответствующие преобразованиям T/k и T^*/k. Примем следующие допущения:

1. *Обратное преобразование* T^{*-1} *не имеет фундаментальных* k*-точек на многообразии* V^*.

2. *Все* k*-точки многообразия* V^*, *соответствующие простым* k*-точкам многообразия* V, *не являются фундаментальными точками бирационального соответствия между многообразиями* V^* *и* V'.

Как мы увидим далее, эти допущения весьма удобны при рассмотрении нашей задачи. Мы будем описывать это положение вещей, говоря, что преобразование T^* *устраняет простое фундаментальное множество преобразования T*. Бо́льшая часть дальнейшего изложения (см. Зариский [9], IV) будет посвящена доказательству того, что простое фундаментальное множество можно устранить, пользуясь лишь квадратичными или моноидальными преобразованиями, *преобразующими простые k-точки в простые же k-точки*. Это условие тривиально выполняется для простых k-точек, лежащих *вне* фундаментального множества преобразования T, ибо мы пользуемся *только* теми квадратичными или моноидальными преобразованиями, центры которых лежат на этом множестве или на одном из его образов. Использование моноидальных преобразований обеспечит также *отсутствие* фундаментальных точек на последней модели многообразия V у преобразования, обратного к окончательному.

Зариский продолжает преобразовывать задачу, вводя *линейную систему гиперплоских сечений* многообразия V' в его объемлющем пространстве. Образ L этой системы относительно преобразования T^{-1} является линейной системой на многообразии V. Пусть F — общая поверхность системы L над полем k. Если многообразие V локально k-нормально вдоль точки или кривой H, то H тогда и только тогда фундаментальна для преобразования T, когда она принадлежит базисному множеству системы L, т. е. лежит на F. Известно, что условие нормальности выполнено, если точка (или кривая) H k-проста на V (n° I, 7). Таким образом, *простое фундаментальное множество преобразования T совпадает с базисным множеством системы L вне совокупности k-кривых и базисных k-точек, особых на многообразии V*.

Сформулированная выше теорема становится теперь частным случаем следующего утверждения, которое относится к любой линейной системе на многообразии V:

Какова бы ни была линейная система L/k, без неподвижных компонент на многообразии V/k, можно, пользуясь лишь моноидальными преобразованиями, перевести многообразие V в такое многообразие V^*, что 1) *любая базисная точка не имеющей неподвижных компонент системы L^*, соответствующей системе L, возникает из некоторой особой точки многообразия V;* 2) *простые*

k-точки многообразия V переходят в простые k-точки многообразия V^*.

Допустим сначала, что система L *не имеет особых базисных k-точек вне особого множества многообразия V.* Сначала можно с помощью квадратичных преобразований устранить все те особенности простых базисных k-кривых системы L, которые не являются нормальными пересечениями. После этого, как показывает Зариский, можно, пользуясь лишь квадратичными преобразованиями, *устранить все базисные k-точки каждой линейной системы k-кривых без неподвижных компонент, лежащей на произвольной поверхности.*

Эту теорему можно применить к нашему случаю, основываясь на следующем стандартном приеме. Пусть C — простая базисная кривая системы L. Расширим поле констант k поля рациональных функций $R_k(V)$ на многообразии V, присоединив к k элемент $\xi \in R_k(V)$, C-вычет которого трансцендентен над k. Тогда $V/k(\xi)$ будет представлять собой *поверхность*, $L/k(\xi)$ — *систему кривых* на этой поверхности, а $C/k(\xi)$ — *базисную точку* этой системы.

Любое моноидальное преобразование T/k с центром C, переводящее многообразие V и систему L в многообразие V' и систему L' соответственно, индуцирует на поверхности $V/k(\xi)$ квадратичное преобразование с центром в точке $C/k(\xi)$, переводящее систему $L/k(\xi)$ в систему $L'/k(\xi)$. Поэтому, в силу сформулированной выше теоремы, можно исключить все простые базисные k-кривые системы L/k, если только в образе кривой C при преобразовании T не содержится k-кривой, возникшей из простой точки кривой C. Такая кривая может ускользнуть из нашего рассмотрения, потому что элемент ξ может оказаться алгебраичным над ней. Зариский, однако, доказывает, что это не произойдет, по крайней мере в том случае, когда, как мы предположилн, система L не имеет особых базисных k-точек.

Таким образом, *можно устранить все простые базисные k-кривые.* Эти операции *не меняют природу* тех базисных k-точек системы L, которые лежат *вне* особого множества S любой модели, но зато они могут ввести новые *изолированные* базисные k-точки на образе системы L.

Во всяком случае, отсюда вытекает, что мы можем ограничиться системами L, обладающими лишь *простыми изолированными базисными k-точками*. Действительно, достаточно применить несколько квадратичных преобразований, каждое из которых действует только на одну базисную k-точку. При этом приходится применять описанный выше процесс всякий раз, когда некоторое квадратичное преобразование приведет к новым простым базисным k-кривым. Возникающее при этом осложнение, заключающееся в том, что этот последний процесс может привести к возникновению новых базисных k-точек, преодолевается тем, что *локальные кольца последовательных базисных k-точек строго возрастают, а сами эти точки остаются простыми при каждом преобразовании*.

Допустим теперь, что система L обладает какими-то *особыми k-точками вне особого множества многообразия V*. Рассмотрим систему L как поверхность F^* над полем k^*, получающимся присоединением к полю k коэффициентов уравнений, определяющих общую поверхность F системы L над полем k.

Теорема Бертини (в формулировке Зариского) об особых точках (см. n° III, 7) утверждает, что *особое множество поверхности F^* состоит*: 1) *из подмножества, порожденного особым множеством многообразия V/k*; 2) *из подмножества, порожденного некоторыми подмножествами базисного множества системы L*. Это последнее состоит целиком из особых точек и кривых, порожденных *особыми базисными множествами системы L той же размерности*; при этом исключаются некоторые особые точки, порожденные простыми базисными кривыми системы L, вдоль которых поверхность F имеет переменную особую точку. Кроме того, моноидальное преобразование многообразия V/k с центром на некотором подмногообразии $W/k \subset V/k$ порождает моноидальное преобразование поверхности F^*/k^* с центром на подмногообразии, соответствующем подмногообразию W^*/k^*. Наша теорема немедленно получается отсюда применением обобщенной теоремы Беппо Леви к поверхности F/k^*.

e) В силу теорем, приведенных в n° II, 2, для любой совокупности нульмерных оценок поля $R_k(V)$ на многообразии V существует конечная разрешающая система.

Ясно, что если нам удастся *свести число моделей в разрешающей системе к единице*, то многообразие V будет обладать неособой моделью. Это сведение действительно можно шаг за шагом осуществить, основываясь на следующей теореме:

Если для произвольной совокупности $\mathfrak{N}$ нульмерных оценок поля $R_k(V)$ существует конечная разрешающая система, состоящая из двух моделей V и V', то для $\mathfrak{N}$ существует и разрешающая система, состоящая из одной модели.

Доказательство этой теоремы использует результаты раздела d) и следующую лемму:

Пусть P и P' — соответствующие друг другу простые k-точки на двух бирационально эквивалентных поверхностях F и F', и пусть $\mathfrak{n}_k(P;\ F) \subset \mathfrak{n}_k(P';\ F')$. Тогда либо $\mathfrak{n}_k(P;\ F) = \mathfrak{n}_k(P',\ F')$, либо точку P' можно получить из точки P последовательными квадратичными преобразованиями.

Пусть T/k — преобразование, переводящее многообразие V в многообразие V' (см. формулировку теоремы), и пусть T^*/k — преобразование, устраняющее простое фундаментальное множество преобразования T на многообразии V (см. раздел d)). Положим $V^* = T^*(V)$. Ясно, что многообразия V^* и V также образуют разрешающую систему для совокупности $\mathfrak{N}$, ибо простые точки многообразия V остаются простыми и на многообразии V^*. Более того, то же верно относительно пары V_1 и V', где V_1 — график соответствия между многообразиями V^* и V' на произведении $V^* \times V'$.

Таким образом, мы заменили первоначальную разрешающую систему $(V,\ V')$ разрешающей системой $(V_1,\ V')$. Эта последняя обладает тем свойством, что бирациональное соответствие между входящими в нее моделями не имеет фундаментальных точек на одной из них, именно на V_1. Поэтому мы можем предположить, что таким свойством обладает уже первоначальная система $(V,\ V')$ (фундаментальные точки отсутствуют на многообразии V'). Отсюда вытекает, что для любых соответствующих друг другу относительно преобразования T k-подмножеств H и H' многообразий V и V' будет иметь место включение $\mathfrak{n}_k(H;\ V) \subset \mathfrak{n}_k(H';\ V')$. Кроме того, можно снова с помощью преобразования T^* исключить простое фундаментальное множество на многообразии V. Получающиеся многообразия V^* и V' также будут образовывать разрешающую пару для совокупности $\mathfrak{R}$.

Пусть теперь P, P' и P^* — центры некоторой оценки $v \in \mathfrak{R}$ на моделях V, V' и V^* соответственно, и пусть $\mathfrak{F}$ — простое фундаментальное множество преобразования T на многообразии V, из которого исключены особые k-точки (если таковые существуют) многообразия V, лежащие на простых базисных k-кривых. Нетрудно показать, что одна из k-точек P' и P обязательно проста, в зависимости от того, принадлежит точка P множеству $\mathfrak{F}$ или нет. Локальное кольцо этой простой точки содержит локальное кольцо другой точки, кроме того случая, когда точка P является особой на множестве $\mathfrak{F}$, а точка P', которая тогда проста, есть фундаментальная точка соответствия между многообразиями V' и V. В этом случае точка P' либо изолирована, либо лежит на фундаментальной k-кривой C', причем, как следует из сформулированной выше леммы, $T(C') = P$.

Но такие элементы совокупности $\mathfrak{R}$, если они существуют, должны быть простыми на V', а в силу теоремы раздела d), их можно устранить между бирациональным преобразованием между многообразиями V' и V. Пусть $\overline{V}'$ — модель многообразия V' при таком преобразовании. Можно показать, что центр любой оценки из $\mathfrak{R}$ прост и не является фундаментальным по крайней мере на одной из моделей V, $\overline{V}'$. Но в этом как раз и заключается условие того, чтобы график бирационального соответствия между этими многообразиями был неособым многообразием; этот график и будет, очевидно, разрешающей моделью для совокупности $\mathfrak{R}$.

В классическом случае и в области чисто алгебраических методов разрешение особенностей для поверхностей было достигнуто соединенными усилиями Беппо Леви, К. Сегре, Севери, Альбаиезе и Кизини. Обзор этих работ дан Зариским [a], стр. 17. Наиболее удовлетворительное доказательство было дано Уокером [1] иа основе теоретико-функциональных методов. Впоследствии дю Валь [2] объединил классические предложения Севери и Альбанезе, пытаясь заново построить классическое доказательство. Новые дополнения и точки зрения на общую проблему принадлежат Дервидюэ [1, 2, 3] и Б. Сегре [11, 13]. Отметим, наконец, программу Зариского [22].

III

Линейные системы

1. Дивизоры

(Подробное изложение затронутых в этом пункте вопросов см. в книгах Самюэля [в], стр. 96, и А. Вейля [а], гл. VIII).

Дивизорами пространства $\mathbf{A}^n$ (или $\mathbf{P}^n$) называются $(n-1)$-мерные циклы $X=\sum_i n_i V_i$ этого пространства. Дивизор X однозначно определяется рациональной функцией вида $\prod_i F_i(\xi)^{n_i}$, где $F_i(\xi)=0$ — уравнение формы V_i в пространстве $\mathbf{A}^n$ (или $\mathbf{P}^n$). Обратно, дивизор X определяет такую функцию с точностью до произвольного постоянного множителя, причём порядок цикла X совпадает со степенью соответствующей функции.

Пусть теперь V — произвольное проективное многообразие пространства $\mathbf{P}^n$ и f — однородная рациональная функция на V $(f\neq 0, \infty)$. Обозначая через (x) общую точку многообразия V над полем $k=\operatorname{def}(V, f)$, мы можем записать фуикцию $f(x)$ в виде дроби $F(x)/G(x)$, где $F(\xi)$ и $G(\xi)$ — однородные многочлены одной и той же степени над полем k.

Рассмотрим дивизор X пространства $\mathbf{P}^n$, соответствующий функции $F(\xi)/G(\xi)$. Ясно, что пересечение $Y=X\cdot V$ определено, ибо многообразие V не лежит целиком ни в одной из форм $F(\xi)=0$, $G(\xi)=0$. Следовательно Y является $(r-1)$-мерным циклом (где $r=\dim V$) многообразия V, причем коэффициент при некоторой его компоненте W равен $i(W;\ X\cdot V)$. Легко видеть, что размерность кольца $\mathfrak{n}(W;\ V)$ равна единице, причем в качестве параметра этого кольца можно взять функцию $f(x)$, так что число $i(W; X\cdot V)$ совпадает с кратностью идеала, порожденного функцией $f(x)$ в кольце $\mathfrak{n}(W;\ V)$, и, следовательно, зависит лишь от функции f, а не от выбора ее продолжения $F(\xi)/G(\xi)$ на все пространство P^n. Цикл Y называется *дивизором функции* f на многообразии V и обозначается символом (f). Положительная и отрицательная части дивизора Y обозначаются соответственно символами $(f)_0$ и $(f)_\infty$. На компонентах этих циклов функция f индуцирует постоянные функции со значениями нуль и бесконечность соответственно, причем $(f)=(f)_0-(f)_\infty$.

Напомним теперь одно из определений точки поля $R_k(V)$.

Точкой p поля $R_k(V)$ называется его собственный гомоморфизм $f \to fp$ над полем k на множество (Δ, ∞), где Δ — некоторое подполе фундаментальной области K, *называемое полем вычетов точки p.*

Элементы $f \in R_k(V)$, для которых $fp \neq \infty$, образуют кольцо оценки R_p, максимальный идеал которого совпадает с ядром индуцированного гомоморфизма кольца R_p на поле Δ. Точки, которым соответствуют одинаковые кольца оценок, рассматриваются как эквивалентные и, как правило, отождествляются. Ясно, что поля вычетов эквивалентных точек изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Так как эквивалентные точки отождествлены, то в силу результатов n°1, 6 имеет место взаимно однозначное соответствие между точками поля $R_k(V)$ и оценками этого поля, причем соответствующие друг другу объекты имеют одно и то же кольцо оценки.

Степень трансцендентности d поля Δ над полем k называется *размерностью* точки p. Ясно, что $0 \leqslant d \leqslant r-1$ (где $r=\dim V$). Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неоднородная общая точка многообразия V над полем k. Можно считать, что $x_i p \neq \infty$, в случае необходимости добившись этого с помощью проективного преобразования. Тогда определена точка (xp), лежащая на многообразии V. Эта точка называется *центром* точки поля p. Очевидно, что $0 \leqslant \dim(xp) \leqslant d$. Более того, для любого целого числа h, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant h \leqslant d$, существует проективная модель V' поля $R_k(V)$, на которой размерность центра точки поля p равна h. Точка (xp) является общей (над полем k) точкой центра оценки v, связанной с точкой поля p.

Если $d=r-1$, то точка поля p называется *k-простым дивизором первого или второго рода* в зависимости от того, имеет ли место равенство $\dim(xp)=r-1$ или неравенство $\dim(xp)<r-1$. Число дивизоров первого рода, связанных с $(r-1)$-мерным k-подмногообразием $W \subset V$ в том смысле, что точка (xp) является общей точкой подмногообразия W, конечно. Оно равно единице, если многообразие V локально k-нормально (и, в частности, просто) вдоль подмногообразия W. В этом случае кольцо оценки точки поля совпадает с локальным кольцом подмногообразия W на многообразии V.

Напротив, в случае когда $s=\dim W<r-1$, существует бесконечно много оценок, центры которых совпадают с W, причем локальное кольцо подмногообразия $W \subset V$ совпадает с пересечением всех

колец s-мерных оценок с центром W. Если многообразие V нормально, то существует взаимно однозначное соответствие между его $(r-1)$-мерными подмногообразиями и простыми дивизорами первого рода поля функций на многообразии V, так что в этом случае любой $(r-1)$-мерный цикл можно называть дивизором, что иногда и делается.

Если подмногообразие W просто на V, то оно определяет простой дивизор первого рода поля $R(V)$. Кроме того, локальное кольцо $\mathfrak{n}(W; V)$ является кольцом дискретной оценки v_W. Если оценка v_W нормирована, то $i(W; X\cdot V)=v_W(f(x))$ (см. Самюэль [в], стр. 83).

Напомним, что если k — алгебраически замкнутое поле определения для W, V и f, где W — локально нормальная гиперповерхность многообразия V, а f — произвольная функция, не равная тождественно нулю на V, то $v_W(f)=v_{W,k}(f)$ (см. Зариский [21], стр. 556).

Таким образом, *если многообразие V нормально*, то $(f)=\Sigma\, v_W(f(x))\cdot W$, где сумма берется по всем компонентам W пересечения $X\cdot V$. Рассмотрим теперь график G функции f, т. е. множество точек вида $(x, f(x))$ произведения многообразия V с проективной прямой $\mathbf{P}^1$. Пусть θ — дивизор $(0)-(\infty)$ на прямой $\mathbf{P}^1$. Переходя к аффинному пространству и пользуясь тем, что проекция пересечения $G\cdot(V\times\theta)$ на многообразие V бирегулярна вдоль каждой компоненты, можно без труда показать, что $(f)=\mathrm{pr}_V(G\cdot(V\times\theta))$. Бирегулярность проекции обусловлена инвариантностью локальных колец и, следовательно, коэффициентов при компонентах пересечения $G\cdot(V\times\theta)$.

Дивизор функции на нормальном многообразии *не может быть положительным*. Это станет ясным, если вспомнить, что элемент, принадлежащий каждому аффинному координатному кольцу многообразия V, лежит в основном поле. Из соотношений $(fg)=(f)+(g)$, $(1/f)=-(f)$ следует, что если $(f)=(g)$, то отношение f/g постоянно на V.

2. Определение линейной системы

Пусть V/k — произвольное многообразие пространства $\mathbf{P}^n$ и $X(\lambda)$ — положительный дивизор этого пространства, определенный уравнением $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i F_i(\xi)=0$, где λ_i — величины, трансцендентные над полем k, а $F_i(\xi)$ — формы одной и той же степени (также над полем k). Предположим, что никакой дивизор вида $X(\lambda)$ не содержит многообразие V, т. е. что величины $F_i(x)$, где x — общая точка многообразия V/k, линейно независимы над полем k. Тогда пересечение $Y(\lambda)=X(\lambda)\cdot V$ определено и представляет собой $(r-1)$-мерный цикл, рациональный над полем $k(\lambda)$. Этот цикл является положнтельной частью дивизора функции $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i F_i(x)$ на многообразии V (см. n° III, 1).

Цикл $Y(\lambda)$ является над полем k общим циклом некоторой алгебраической системы на многообразии V (см. n°, n° VI, 1, 2)). Эта система называется *линейной системой*, ибо она параметризована линейным многообразием Λ, общей точкой которого над полем k служит точка (λ).

Предположим, что цикл $Y(\lambda)$ содержит компоненты, алгебраичные над полем k. Тогда легко видеть, что, поскольку поле $k(\lambda)$ является чисто трансцендентным расширением, существует такой рациональный над полем k цикл Y_0, что $Y(\lambda)=Z(\lambda)+Y_0$, где $Z(\lambda)$ — некоторый цикл, *вполне трансцендентный* над полем k, в том смысле, что поле k алгебраически замкнуто внутри некоторого поля, над которым цикл $Z(\lambda)$ рационален. Этот цикл Y_0 называется *неподвижной компонентой* рассматриваемой линейной системы. Система L, общий цикл которой над полем k имеет вид $Z(\lambda)+Z_0$, где Z_0 — произвольный $(r-1)$-мерный цикл, также называется линейной системой. Ясно, что $Z(\lambda)\gg 0$. Таким образом, согласно нашему определению, понятие линейной системы *ограничивается* наложением условия $Z(\lambda)+Z_0\gg 0$, т. е., вообще говоря, рассматриваются лишь линейные системы, каждый элемент которых является положительным или нулевым дивизором[1].

Пусть (λ) — произвольная точка многообразия Λ, а $\overline{P}$ — некоторая точка цикла $Z(\overline{\lambda})$, не лежащая одновременно на всех подмногообразиях $F_i(X)=0$. Тогда система величин $((\overline{\lambda}), \overline{P})$ является специализацией над полем k

[1]) Это соглашение автор соблюдает не всегда. — *Прим. перев.*

системы $((\lambda), P)$ (см. ван дер Варден [6], стр. 182), где P — общая точка цикла $Z(\lambda)$ над полем $k(\lambda)$. Поэтому цикл Z на произведении $V \times \Lambda$, связанный с циклом $Z(\lambda)$ соотношениями $Z(\lambda) \times (\lambda) = (V \times (\lambda)) \cdot Z$ и $\mathrm{pr}_V Z = V$ (см. n° I, 9), является некоторым *кратным* какого-то *k-многообразия*. То же, следовательно, верно и для цикла $Z(\lambda)$. Пусть теперь P — общая точка многообразия V над полем k. Определим цикл $\Lambda(P) = \varphi^{-1}(P)$ равенством $P \times \Lambda(P) = Z \cdot (P \times \Lambda)$ (см. также n° VI, 3), Этот цикл представляет собой линейное $(m-1)$-мерное подмногообразие многообразия Λ ((см. n° I, 9); следует воспользоваться тем фактом, что $\mathrm{pr}_L Z = L$). Отсюда вытекает, что любая совокупность m общих точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ многообразия V, независимых над полем k, принадлежит единственному циклу системы L, и этот цикл рационален над полем $k(P_1, \ldots, P_m)$.

Используемое нами определение линейной системы относится к конкретной *проективной модели* V поля функций $R_k(V)$. В самом деле, это определение существенно использует понятие дивизора, введенное в n° III, 1, и понятие кратности пересечения.

Основная причина этого обстоятельства заключается в том, что на многообразии V могут существовать *кратные* $(r-1)$-мерные подмногообразия. В этом случае геометрическое понятие дивизора как $(r-1)$-мерного цикла бирационально однозначно не определено, так как каждое кратное подмногообразие является центром более чем одной дискретной оценки ранга 1 поля $R_k(V)$ (см. Зарисский [8], стр. 511).

Этот факт связан с некоторыми неприятными последствиями, в особенности при доказательстве *бирациональной инвариантности* понятия линейной системы. Однако, эту трудность можно обойти, заменяя модель V некоторой *нормальной* моделью V' и пользуясь тем, что на многообразии V' геометрическое определение дивизора совпадает с определением в терминах теории оценок. Далее, можно воспользоваться тем фактом, что однородное координатное кольцо многообразия V' *нормально* (оно даже является нётеровым кольцом, целозамкнутым в своем поле отношений), и потому существует взаимно однозначное соответствие между $(r-1)$-мерными дробными идеалами этого кольца и $(r-1)$-мерными циклами многообразия V'. В этом заключается так называемый метод «квазиравенства», принадлежащий ван дер Вардену и Артину (см. ван дер Варден [a_2], стр 93; Ходж и Пидо [a_3], стр. 56—70, Норткотт [a], стр. 76—83; см. также n° III, 6).

Любой результат, полученный для многообразия V', можно перенести теперь на многообразие V, пользуясь бирациональным соответствием между этими многообразиями. Это соответствие является проекцией (см. n° I, 6), и любое кратное подмногообразие многообразия V, имеющее размерность $(r-1)$, следует рассматривать как *конечную систему многообразий, отличающихся соответствующими оценками*, т. е. как систему простых подмногообразий многообразия V', имеющих общую проекцию на многообразие V. Эта интерпретация в основном совпадает с классической, но смысл ее проясняется благодаря понятию нормальности.

Заметим, наконец, что все эти рассуждения излишни, если рассматриваемая линейная система не имеет кратных неподвижных компонент и ее общий элемент прост на многообразии V. В частности, так будет всегда, если само многообразие V неособо. Бирациональная инвариантность системы L в этом случае тривиальна.

3. Линейная эквивалентность

Мы дадим теперь, следуя Зарискому (см. Зариский [21], стр. 555—565), набросок теории линейных систем на произвольном нормальном многообразии V. Этот случай, как мы уже видели, является основным. Начнем с определения линейной эквивалентности в группе $\mathbf{G}^{r-1}(V)$ (кратко $\mathbf{G}(V)$).

Два дивизора X_1, X_2 называются линейно эквивалентными ($X_1 \equiv X_2$), если разность $X_1 - X_2$ представляет собой дивизор некоторой функции на многообразии V.

Подгруппу линейно эквивалентных нулю дивизоров X мы обозначим символом $\mathbf{G}_l(V)$, а факторгруппу $\mathbf{A}(V) = \mathbf{G}(V)/\mathbf{G}_l(V)$ назовем *группой линейной эквивалентности на многообразии V*.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — произвольный подмодуль поля $k(V)$ с конечным числом образующих, т. е. конечномерное k-линейное подпространство поля $k(V)$. Легко видеть, что на многообразии V существует такой дивизор X, что $(f)+X \geqslant 0$ для любой функции $f \in \mathfrak{L}$. (Если $(f)+X \geqslant 0$, то говорят, что функция f *кратна* дивизору X). Определение линейной системы, приведенное в п° III, 2, можно теперь переформулировать следующим образом:

Линейной системой L на нормальном многообразии V называется совокупность всех дивизоров вида $(f)+X$, *где* $f \in \mathfrak{L}$.

Модуль $\mathfrak{L}$ называется *определяющим модулем* линейной системы L. Ясно, что любые два дивизора системы L линейно эквивалентны и, следовательно, принадлежат одному и тому же классу линейной эквивалентности. Дивизор $X_0 \geqslant 0$ называется *неподвижной компонентой* системы L, если для любого дивизора $X \in L$ имеет место соотношение $X \geqslant X_0$. Неподвижную компоненту X_0 можно исключать или не исключать из линейной системы, не меняя определяющего модуля этой системы.

Строение модуля на $\mathfrak{L}$ определяет в системе L некоторое *проективное строение*, инвариантное с точностью до неподвижной компоненты, относительно умножения модуля $\mathfrak{L}$ на любую отличную от нуля функцию $g \in k(V)$. Таким образом, проективное строение системы L *не зависит* от выбора определяющего модуля $\mathfrak{L}$ этой системы. Пусть $X_0=(f_0)+D$ — произвольный цикл системы L. Перейдем от модуля $\mathfrak{L}$ к модулю $\mathfrak{L}'$, состоящему из функций $f'=(1/f_0)f$, где $f \in \mathfrak{L}$. Ясно, что любой дивизор $X=(f)+D$ системы L можно записать в виде $X=(f')+X_0$. Новый модуль $\mathfrak{L}'$ содержит поле **K**, ибо, помимо нулевой функции, он состоит из всех тех функций f' на многообразии V, для которых $(f')=X-X_0$, $X \in L$. Этот модуль, однозначно определенный системой L и дивизором X_0, мы будем обозначать символом $\mathfrak{L}(X_0)$.

4. Полные системы

◀ Рассмотрим теперь две линейные системы L и M. Пусть их определяющие модули имеют базисы (f_i) и (g_i) соответственно. Тогда совокупность всех линейных комбинаций попарных произведений $f_i g_i$ будет определяющим модулем некоторой линейной системы. Легко видеть, что она не зависит от выбора базисов (f_i), (g_j) и содержит все дивизоры вида $X+Y$, где $X \in L$, $Y \in M$. Эта линейная система называется *минимальной линейной суммой* систем L и M. Подобным же образом можно определить минимальную линейную сумму любого конечного числа линейных систем и, в частности, *кратные системы* mL, где m — любое положительное целое число.

Эквивалентные дивизоры имеют равные степени и параметризуются некоторым подмножеством множества Чжоу, соответствующего этой степени (см. n° VI, 1). Отсюда следует, что *множество всех положительных дивизоров, линейно эквивалентных данному положительному дивизору, является линейной системой.* ▶

Этот факт сводится к утверждению, что *множество функций поля* $\mathrm{K}(V)$, *кратных дивизору* $X \geqslant 0$, *включая нуль, является модулем с конечным числом образующих.* Аналогичное утверждение, как показал А. Вейль (см. А. Вейль [4], стр. 885), верно и для аналитических многообразий (см. n° IX, 1). В следующем пункте мы приведем его элементарное доказательство.

Линейную систему, порожденную описанным образом дивизором X, мы будем называть *полной линейной системой* $|X|$. Таким образом, имеет место следующая теорема существования и единственности:

(I). *Любой* V-*дивизор* $X \geqslant 0$ *принадлежит одной и только одной полной линейной системе* $|X|$.

Без труда доказывается также знаменитая *теорема о вычете*:

(II). *Пусть* $X_0 \in L$, *где* L — *некоторая линейная система; тогда дивизоры* $Y \geqslant 0$, *для которых* $Y+X_0 \in L$ (такие дивизоры называются *вычетами* дивизора X_0 относительно системы L), *образуют линейную систему* $L-X_0$. *Эта система полна, если полна система* L.

Мы закончим этот пункт формулировкой одной теоремы А. Вейля (см. А. Вейль [a], стр. 240; Зариский [21], стр. 560), существенно используемой в абстрактной теории линейных систем:

(III). *Для любого рационального над алгебраически замкнутым полем* $k = \operatorname{def} V$ *дивизора* $X \equiv 0$ *многообразия* V *существует такая функция* $f \in k(V)$, *что* $(f) = X$, *и наоборот: дивизоры функций поля* $k(V)$ *рациональны над полем* k.

Говорят, что система L *определена над полем* k, если хотя бы один ее определяющий модуль порожден функциями поля $k(V)$. Из теоремы III следует, что система L тогда и только тогда определена над алгебраически замкнутым полем $k = \mathrm{def}\, V$, когда в системе L *существует такая максимальная система* $Y_0, \ldots, Y_m$ *линейно независимых дивизоров, что циклы* $Y_i - X_0$, *где* X_0 — *неподвижная компонента системы* L, *рациональны над полем* k.

5. Кратные линейные системы

Пусть R_m, $m \geqslant 1$ — множество всех форм степени m в кольце $R = k[x]$, где (x) — общая точка многообразия V/k. Пусть, далее, $\mathfrak{L}_m(f_0) \supset k$ — модуль, состоящий из функций вида $f(y)/f_0(y)$, где $f(y) \in R_m$, $f_0(y) \in R_m$. Линейная система положительных циклов $(g) + (f_0)_\infty$, где $g \in \mathfrak{L}_m(f_0)$, $g \neq 0$, не зависит от выбора формы $f_0(y)$ в R_m и определяется только числом m. Эти циклы, очевидно, являются дивизорами нулей функций g.

Построенную систему мы будем обозначать символом L_m, а ее общий член — символом C_m. Она *не имеет неподвижных* компонент, так как модуль $\mathfrak{L}_m(f_0)$ содержит функции y_i^m/f_0. Согласно n° III, 1, эта система высечена на многообразии V формами m-й степени объемлющего пространства. Так как множество $R_{m+m'}$ является k-модулем, порожденным произведениями ff', где $f \in R_m$, $f' \in R_{m'}$, то система $L_{m+m'}$ является минимальной линейной суммой $L_m + L_{m'}$. В частности, система L_m является минимальной m-кратной системой для системы L_1 гиперплоских сечений многообразия V.

Можно непосредственно доказать, что линейная система L_m содержится в некоторой полной линейной системе. Для этого достаточно показать, что любой неотрицательный дивизор, линейно эквивалентный некоторому дивизору системы L_m, имеет вид $(g/f_0) + (f_0)_0$, где $g \neq 0$ — элемент степени m целого замыкания кольца $k[x]$ в поле $k(x)$. Так как для некоторого h существует h-кратная проективно нормальная модель многообразия V, для которой кольцо $k[x]$ целозамкнуто в поле $k(x)$ (см. n° I, 5), то отсюда вытекает следующая важная теорема:

(I) *Для достаточно большого m множество всех форм степени m объемлющего пространства многообразия V высекает на V полную линейную систему L_m* (см. Зариский [21], стр. 563).

Число $\dim |L| - \dim L$, где $|L|$ — полная система, содержащая систему L, называется *недостаточностью* системы L и обозначается символом $\operatorname{def} L$. Таким образом, для больших m имеет место равенство $\operatorname{def} L_m = \dim I_m - \dim R_m = 0$. Из сказанного выше и из результатов n° I, 5 следует, что

(II) *Многообразие V тогда и только тогда проективно нормально, когда* $\operatorname{def} L_m = 0$ *для всех m* (см. Мьюли [1]).

Теперь мы в состоянии доказать теорему (I) n°, III, 4. Для любого фиксированного дивизора X многообразия V всегда существует форма $F \subset \mathbf{P}^n$ достаточно высокого порядка, которая содержит дивизор X (т. е. удовлетворяет соотношению $V \cdot F \geqslant X$), но не содержит многообразия V.

Пусть $X_0 = V \cdot F - X$. В силу теоремы (I) и теоремы о вычете (II) n° III, 4, система $L_m - X_0$ для достаточно больших m полна и содержит дивизор X. Эта система высечена на многообразии V формами порядка m, содержащими вычет X_0 цикла X. Вместе с замечаниями, сделанными в n° III, 4, это дает как доказательство существования полной линейной системы $|X|$, так и способ ее построения.

Заметим, что *любой* $(r-1)$*-мерный цикл, рациональный над некоторым алгебраически замкнутым полем определения k многообразия V, порождает полную линейную систему, которая определена над полем k* (см. n° III, 4), и именно так обстоит дело с системой $|L_m|$. Напротив, система L с неподвижными компонентами, определенная над алгебраически замкнутым полем k, может порождать полную систему $|L|$, уже не определенную над полем k.

6. Обильные линейные системы

Пусть V — произвольное многообразие пространства $\mathbf{P}^n$, и пусть V' его нормальная модель. Пусть, далее, $k = \operatorname{def} V$ и пусть (x) — общая точка многообразия V над полем k. Пусть, наконец, $f_0(x), \ldots, f_m(x)$ — система $m+1$ элементов поля $k(x)$, линейно независимых над алгебраическим замыканием поля k в поле $k(x)$.

Многочлены $f_i(x)$ однозначно определяют $m+1$ целых дивизоров X_i поля $k(x)$, обладающих следующими свойствами: (1) *каждый дивизор* X_i *является дивизором первого рода относительно многообразия* V; (2) *имеет место соотношение* $f_i/f_0=X_i/X_0$, *причем дивизоры* X_i — *взаимно просты*.

Каждый дивизор X_i определяет на многообразии V некоторый $(r-1)$-мерный цикл X_i (на многообразии V'; обратно, каждый такой цикл определяет некоторый дивизор). Компоненты цикла X_i соответствуют простым делителям дивизора X_i, однако в случае, когда многообразие V локально не k-нормально, два различных делителя дивизора X_i вполне могут соответствовать одной и той же компоненте цикла X_i. На многообразии V' этого случиться не может. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные элементы поля k. Тогда существует единственный дивизор $X(\lambda)$, удовлетворяющий соотношению $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)/f_0(x)=$ $=X(\lambda)/X_0$. Определенный этим дивизором $(r-1)$-мерный цикл многообразия V мы будем обозначать тем же символом. Очевидно, что, когда величины λ меняются в поле k, цикл $X(\lambda)$ пробегает элементы линейной системы L, определенной модулем $(1, f_1/f_0, \ldots, f_m/f_0)$ поля $k(V)$. k-Множество точек многообразия V, лежащих на всех множествах $\|X(\lambda)\|$, называется *базисным множеством* системы L. Легко видеть, что базисное множество определяется радикалом идеала $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$. Кроме того, *если точка* P *является особой на множествах* $\|X_i\|$, $i=0, 1, \ldots, m$, *то она является особой также и на множестве* $\|X(\lambda)\|$ (по поводу всего изложенного см. Зарискнй [8], стр. 528).

Рассмотрим теперь на произведении $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ график W *рационального* соответствия $T:\varrho y_i=f_i(x)$ $(i=0, \ldots, m)$. С помощью данного выше представления можно показать, что *фундаментальное множество* $\mathfrak{F}$ *соответствия* T *на многообразии* V *содержится в базисном множестве* $\mathfrak{B}$ *системы* L. Иначе говоря, если $P\notin\mathfrak{B}$ и $P\in V$, то пересечение $(P\times\mathbf{P}^m)\cdot W$ определено. Обратно, любое базисное множество, вдоль которого многообразие V нормально, принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ (см. Зариский [8], стр. 528). Кроме того, проекция $U = \mathrm{pr}_{P^m} W$ является многообразием, причем $k = \mathrm{def}\, U$, так как точка (x), а значит, и точка (y) регулярна над полем k.

Если соответствие T *бирационально* (в этом случае $\dim U = \dim V$), то система L называется *простой* системой. В противном случае говорят, что система L *составлена из алгебраической инволюторной системы многообразия* V (определение таких систем см. в n° VI, 6). Общим членом этой системы над полем k является многообразие $T^{-1}(Q)$, где Q — общая точка многообразия U над полем k. Прообраз $T^{-1}(Q)$ определен, ибо график W проектируется на все многообразие V. Если базисное множество $\mathfrak{B}$ *пусто* (и у системы L нет неподвижных компонент), то L называется *обильной* системой (этот термин принадлежит Кодаира: см. [5], стр. 89). Ясно, что в этом и только в этом случае соответствие T *бирегулярно*. Другими словами, система L тогда и только тогда обильна, когда она является системой гиперплоских сечений некоторой бирегулярной проективной модели многообразия V.

7. Теоремы Бертини

Следующие утверждения в классическом случае известны как теоремы Бертини:

(I) *Общий элемент любой линейной системы L, не имеющей неподвижных компонент и не составленной из пучка*[1]*, является многообразием.*

(II) *Общий элемент любой линейной системы L не имеет особых точек вне базисного множества этой системы и особого множества многообразия V.*

Эти теоремы были подвергнуты глубокому анализу в работах Зариского; существенный вклад принадлежит также Мацусака и Акицуки (см. Зариский [6, 10]; Мацусака [2], Акицуки [1]). Мы изложим здесь вкратце эти новые результаты.

◀ Прежде всего, *пучком* называется одномерная алгебраическая система дивизоров на многообразии V. Линей-

[1]) Термин «пучок» (pencil) употреблен здесь в классическом смысле; его определение см. ниже. — *Прим. перев.*

ная система L называется *составленной из пучка*, если любой элемент системы L имеет своими компонентами члены некоторого фиксированного пучка.

Пусть сначала $\dim L = 1$. Тогда система L сама является пучком. Зариский (см. Зариский [6], стр. 48) замечает, что любому пучку L на многообразии V естественно сопоставляется некоторое подполе $k(L)$ степени трансцендентности 1 поля функций $k(V)$ многообразия V и что пучок L_1 составлен из пучка L_2 в том и только в том случае, если имеет место включение $k(L_1) \subset k(L_2)$. Таким образом, если система L *не составлена из пучка*, то соответствующее ей поле $k(L)$ алгебраически замкнуто внутри поля $k(V)$. Но общий член линейной системы L является геометрическим местом общей точки многообразия V над полем $k(L)$. Первая теорема Бертини для системы L теперь почти немедленно получается из того факта, что неприводимое алгебраическое многообразие над основным полем $k(L)$ абсолютно неприводимо, если поле $k(L)$ алгебраически замкнуто внутри поля функций. В случае конечной характеристики следует добавить еще условие сепарабельности расширения $k(V)/k(L)$. Общий случай $\dim L = s > 1$ сводится к случаю $\dim L = 1$ с помощью несложного технического приема. ▶

Рассмотрим теперь вторую теорему Бертини. Пусть $k' = k(\lambda)$, где λ — система $m+1$ переменных, алгебраически независимых над полем $k(V)$; тогда $k' = \operatorname{def} V$ (см. Зариский [10], стр. 130). Любое подмногообразие $W/k \subset V/k$ определяет подмногообразие W/k', которое называется *расширением* многообразия W на поле k' и имеет своей общей точкой P над полем k' общую точку P многообразия W над полем k. Величины λ остаются при этом алгебраически независимыми над полем $k(P)$. Наоборот, если величины λ алгебраически независимы над полем $k(P)$, то многообразие W/k' с общей точкой P над полем k' является расширением многообразия W/k с общей точкой P над полем k.

При расширении размерность сохраняется, и *особое множество многообразия V/k' является расширением особого множества многообразия V/k*. Пусть W'/k' — произвольное подмногообразие многообразия V/k' с общей точкой P' над полем k'. Тогда существует одно и только одно такое подмногообразие $W/k \subset V/k$ с общей точкой P, что между полями $k(P')$ и $k(P)$ имеет место изоморфизм, при котором точки P и P' соответствуют друг другу. Многообразие W/k называется *сужением* многообразия W'/k'. Очевидно, что $\dim W'/k' \geqslant \dim W/k$.

Предполагая теперь, что система L *не имеет* неподвижных компонент и *не* составлена из пучка, рассмотрим ее как $(r-1)$-мерное многообразие V' над полем k', определенное общей точкой (z), которая удовлетворяет условиям: (1) $k(x) \cong k(z)$; (2) $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(z) = 0$; здесь сумма $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(z)$ связана с системой L, как в n° III, 6.

Согласно первому условию, многообразие V/k является сужением многообразия V'/k'. Можно показать, что расширение W'/k' многообразия W/k принадлежит многообразию V', если многообразие W/k принадлежит базисному множеству системы L. Кроме того, подмногообразие W'/k' особо на многообразии V'/k' в том и только в том случае, когда подмногообразие W/k является особым базисным многообразием системы L (см. Зариский [10], стр. 135). Отсюда следует, что

(III) *Для любого особого k'-подмногообразия W'/k' многообразия V'/k' суженное k-подмногообразие $W/k \subset V/k$ либо является особым, либо принадлежит базисному множеству системы L.*

В случае когда *характеристика поля k равна нулю*, вторая теорема Бертини немедленно вытекает из этой теоремы и якобиева критерия простоты; следует лишь доказать, что *на множестве, расширением которого является простое подмногообразие многообразия V' над полем k', не может быть переменных особых точек.*

Однако это может быть неверно в случае характеристики, отличной от нуля, как показывает хорошо известный пример кривой $x^p + y^2 - 2\lambda y = 0$ *над совершенным полем характеристики p* (см. Зариский [10], стр. 140). В самом деле, на этой кривой существует переменная двойная точка $x = (\lambda^2)^{1/p}$, $y = \lambda$.

Акицуки продолжил анализ возникающих здесь обстоятельств с целью найти *необходимые и достаточные усло-*

вия того, чтобы теорема была справедлива при любой характеристике.

Следуя классической процедуре более близко, чем Зариский, Акицуки доказывает, что абсолютно простая точка $P' \in V$, не принадлежащая базисному множеству системы L (например, точка, для которой $f_0(P') \neq 0$), тогда и только тогда является особой точкой некоторого элемента системы, когда для любого дифференцирования D_j поля $k(x)$ в точке P' выполнено соотношение $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_j(y_i) = 0$, где $y_i = f_i(x)/f_0(x)$. Пусть C — некоторая абсолютная компонента множества таких точек (это множество алгебраично над полем $\bar{k}$ и называется *критическим множеством*). Пусть, далее, $P' = (x')$ — общая точка многообразия C над полем $\bar{k}$, и $y'_i = f_i(x')/f_0(x')$. Тогда можно показать, что если поле $\bar{k}(x')$ *сепарабельно* порождено над полем $k(y')$, то множество элементов системы L, содержащих некоторую фиксированную точку компоненты C, является *собственным алгебраическим подмножеством* линейного многообразия с общей точкой (λ), параметризующего систему L. Если это условие выполнено для любой компоненты критического множества и для любой аффинной модели многообразия V, то вторая теорема Бертини *остается верной в ее классической формулировке* (см. Акицуки [1], стр. 177).

Таким образом, теоремы Бертини безусловно верны *лишь* в полях нулевой характеристики; в противном случае приходится принимать те или иные дополнительные предположения.

Иногда в приложениях оказываются полезными более частные критерии типа следующего:

(IV) *Пусть X — такой дивизор неособого многообразия V, что дивизор* $|X - C_1|$ (см. n° III, 5) *неотрицателен и система $|X|$ не имеет неподвижных точек. Тогда почти все дивизоры системы $|X + C_1|$ являются неособыми многообразиями* (см. Мацусака [5], стр. 116—120).

Доказательство этой теоремы получается с помощью следующих замечаний: (1) система $|X|$ содержит дивизор C_1 и потому не является пучком; кроме того, $k(L) \not\subset \{k(V)\}^p$; (2) бирациональное соответствие T, связанное с системой

$|X|$ (см. n° III, 6), не имеет фундаментальных точек, и его график W, состоящий из точек $(P, T(P))$, бирационально и бирегулярно эквивалентен многообразию V; (3) общее гиперплоское сечение многообразия W, которое, конечно, неособо, проектируется на многообразии V в некоторый неособый элемент системы $|X+C_1|$, так что эта система обладает неособыми элементами. Сформулированная теорема немедленно следует теперь из того, что общий элемент системы не имеет особенностей, если не имеет особенностей некоторая его специализация.

Мы воспользовались здесь утверждением, что *общее сечение неособого многообразия неособо*. Оно является очевидным следствием теоремы Бертини и частным случаем следующего примечательного факта:

(V) *Почти все элементы системы L_m/k являются нормальными многообразиями, на которых простые точки многообразия V просты.*

В полной общности это утверждение впервые было доказано А. Зейденбергом (см. Зейденберг [2]).

Заметим, что доказательство Зейденберга требует основательной алгебраической работы и считается «трудным» доказательством. Однако тот же результат для общего гиперплоского сечения более элементарен. В самом деле, он был доказан Зариским ([21], стр. 565) с использованием лишь теоремы Бертини, классического критерия Якоби для простых точек и принадлежащей Вейлю характеризации абсолютно нормальных многообразий (см. А. Вейль [a], стр. 270). Прямое элементарное доказательство того факта, что общее гиперплоское сечение неособо, было дано Накан в работе [1].

Таким образом, *почти все* элементы произвольной обильной линейной системы *неособы*.

В заключение напомним еще следующий полезный признак обильности:

(VI) *Минимальная линейная сумма обильной системы и любой другой системы без неподвижных компонент и базисных точек полна. Кроме того, система $|C_m-X|$ (где $X>0$) непременно является обильной, если число m больше, чем порядок положительного дивизора X* (см. Кодаира [5], стр. 91).

Первое утверждение немедленно следует из определения. Для доказательства второго рассмотрим (следуя Севери) в объемлющем пространстве многообразия V конусы, проектирующие дивизор X и высекающие на V

элементы системы L. Очевидно, что при наших предположениях система $|C_m - X|$ не имеет ни неподвижных компонент, ни базисных точек. Для завершения доказательства остается прибавить систему $|C_1|$ и применить первое утверждение (напомним, что система $|C_1|$, по определению (см. n° III, 6), обильна).

Как мы уже отмечали, эта глава в основиом следует работе Зариского [21].

Напомиим, что теория лииейиых систем была основным инструментом в исследоваиниях итальяиской школы, так что почти все понятия этой главы первоиачально принадлежали итальяиским геометрам: см., например, изложение теории линейиых систем в кииге Бертини [a], гл. X. Ван дер Варден дал красивый вариант этой теории, основанный главиым образом иа принципе счета констант (см. n° VI, 3) и теории специализаций; см. [6], гл. VII. Зариский, который получил много результатов, разбросаииых по его работам, широко пользуясь методом квазиравенства (см., например, [6, 8, 10]), пришел в заключение к совсем простой форме этой теории [21]. Отметим также работу [1] Фернандеса Бьярхе.

Укажем еще, что иные доказательства теорем Бертиии были даны ван дер Вардеиом [5,X] и Б. Сегре [9]. Накоиец, классическое поиятие линейной системы на поверхности, которая полиа относительно некоторой системы точек — обычных или бескоиечио близких (см. Зариский [a], стр. 29), было распростраиено на миогообразия высших размериостей ван дер Варденом [10] с помощью теории оцеиок так, чтобы это понятие удовлетворяло осиовиому условию бирациональной инвариантности.

IV

Геометрический род

1. Присоединенные формы

Мы дадим сначала, следуя недавнему изложению Севери (см. Севери [35]), обзор классической теории геометрического рода для многообразий над полем комплексных чисел. Затем мы с другой точки зрения (см. n° IV, 4) изложим эту теорию над любым полем k.

Пусть V — неособое r-мерное многообразие, лежащее в проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ над комплексным полем. Символом $[h]$ мы будем обозначать h-мерные подпространства пространства $\mathbf{P}^n$; напомним, что, проектируя многообразие V почти из каждого подпространства $[n-r-2]$ на дополнительное пространство $\mathbf{P}^{r+1}$ (оба пространства принадлежат $\mathbf{P}^n$), мы получим некоторую гиперповерхность $V' \subset P^{r+1}$. Она обладает двойным $(r-1)$-мерным множеством S, касательный конус к которому почти во всех точках состоит из двух гиперплоскостей; особые подмножества множества S имеют более высокую кратность. Особенности такого типа мы будем называть *обычными особенностями*.

Формы порядка m пространства $\mathbf{P}^{r+1}$, содержащие множество S, называются *присоединенными формами* многообразия V'. Они непременно существуют, *если только число m достаточно велико*. Непосредственно, или с помощью индукции по m и теоремы Безу, или, наконец, с помощью результатов n° III, 5, можно доказать, что

(I) *Для больших m присоединенные формы высекают на многообразии V вне множества S полную линейную систему L_m.*

◀ Эта теорема справедлива и в более общей формулировке. Именно, обозначая символом D дивизор, высеченный некоторой присоединенной формой порядка m на многообразии V' вне множества S, рассмотрим линейную систему, высеченную на V' вне $S+D$ присоединенными формами порядка m, проходящими через D. Оказывается, что такая система полна для достаточно больших m. Кроме того, имеют место следующие утверждения:

(II) *Пусть Φ — общая присоединенная форма порядка m в пространстве $\mathbf{P}^{r+1}$; тогда $i(D, \Phi\cdot V')=1$.*

(III) *Простые точки многообразия V' не являются базисными точками системы L_m.*

Оба эти утверждения получаются с помощью рассмотрения системы конусов, проектирующих дивизор S из точек пространства $\mathbf{P}^{r+1}$. ▶

2. Каноническая система

Мы приступим теперь, следуя Энриквесу, к описанию *канонической системы r-мерного многообразия V*. Первоначальное изложение Энриквеса относилось лишь к случаю поверхностей (см., например, Энриквес [a], гл. III). Приводимое здесь построение принадлежит Севери [35] и представляет собой распространение метода Энриквеса на многообразия высших размерностей.

a) Начнем со следующей теоремы:

(I) *Для любой простой* (см. n° III, 6) *r-мерной линейной системы L на гиперповерхности V' множество особых точек, принадлежащих циклам системы L, является носителем некоторого $(r-1)$-мерного цикла.*

В самом деле, пусть $F(\xi)=0$ — уравнение гиперповерхности V' в пространстве $\mathbf{P}^{r+1}$, а $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i F_i(\xi)=0$ — уравнение такой линейной системы присоединенных форм Φ порядка m, что $\Phi\cdot V'-S-D=C$, где C — произвольный элемент системы L, а D — некоторый фиксированный цикл на гиперповерхности V'. Существование такой системы немедленно следует из теоремы о полноте и теоремы о вычете (см. n° III, 4 и n° IV, 1). Кроме того, можно считать, что цикл D прост и что $i(\Phi\cdot V'; D)=1$.

Точка $P\in V'$ тогда и только тогда является особой точкой алгебраического множества $C+D$, когда в этой точке обращается в нуль якобиан $J(X)=\partial(F_0, \ldots, F_r, F)/\partial(\xi_0, \ldots, \xi_{r+1})$. Этот якобиан тождественно не обращается в нуль на многообразии V', ибо система L

предполагается простой. Следовательно, функции $F_0, \ldots$ $\ldots, F_r, F$ — функционально независимы на многообразии V'. Поэтому уравнения $J(\xi)=0$, $F(\xi)=0$ определяют некоторый цикл; он содержит множества D и S, а дополнение к этим множествам все еще является $(r-1)$-мерным циклом. Тем самым теорема доказана. Построенный цикл называется *циклом Якоби* системы L и обозначается символом L_j. Если элементы системы L обозначаются символом C, то цикл Якоби этой системы обозначается также символом C_j.

b) Докажем теперь следующее утверждение:

(II) *Циклы Якоби всех r-мерных линейных систем $\bar{L}$, содержащихся в простой линейной системе L гиперповерхности V', пронадлежат к одному и тому же классу линейной эквивалентности на V'.*

Доказательство получается без труда, если учесть, что степень формы $J(\xi)=0$ не зависит от выбора подсистемы $\bar{L} \subset L$ и что присоединенные формы данной степени высекают на гиперповерхности V' вне множества S линейную систему циклов. Полная система, содержащая все указанные циклы Якоби, называется *системой Якоби* L_j системы L на гиперповерхности V'.

c) Рассмотрим теперь на гиперповерхности V' некоторый *фиксированный $(r-1)$-мерный неособый простой цикл E.*

(III) *Для любой простой r-мерной линейной системы L имеет место соотношение: $(C+E)_j=(r+1)E+C_j$.*

Для доказательства представим систему L в таком же виде, как в разделе а). Пусть $g(\xi)=0$ — форма степени l, высекающая на V' цикл $E+D'$, где D' — некоторый простой неособый цикл на V'. Тогда система $L+E$ высекается на V' вне цикла $S+D+D'$ линейной системой $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i g(\xi) F_i(\xi)$ форм степени $l+m$ пространства $\mathbf{P}^{r+1}$, а цикл Якоби $(C+E)_j$ высекается на V' некоторой формой Якоби $\bar{J}(\xi)=0$. С помощью простых вычислений (см. Севери [35], стр. 10—13) можно показать, что $\bar{J}(\xi)=$ $=(1+\lambda/l)\,g(\xi)^{r+1}J(\xi)$. Но кратность пересечения формы $g(\xi)=0$ с гиперповерхностью V' вдоль компонент E и D' равна единице, и, следовательно, форма $\bar{J}(\xi)=0$ высекает на гиперповерхности V' вне цикла $S+D+D'$ сумму $(r+1)E+C_j$.

Заметим, что цикл E может входить в цикл $(C+E)_j$ с кратностью, большей, чем $(r+1)$; очевидно, что это имеет место в том и только том случае, когда цикл E сам является компонентой цикла C_j.

d) Следующий результат известен как *теорема сложения* Энриквеса:

(IV) *Для любых двух простых линейных систем* $|C_1|$, $|C_2|$ *размерности* $\geqslant r$ *на гиперповерхности* V' *определена* (*на* V') *полная линейная система* $|(C_1+C_2)_j|$, *причем* $(C_1+C_2)_j \equiv C_{1j}+(r+1)C_2 \equiv C_{2j}+(r+1)C_1$.

Для доказательства теоремы заметим сначала, что, согласно условию, полная система $|C_1+C_2|$ проста, а размерность ее не меньше r, так что система $|(C_1+C_2)_j|$ определена. Пусть L — общая r-мерная линейная подсистема системы $|C_1+C_2|$ и $L^{(1)}$ — произвольная r-мерная подсистема системы $|C_1|$. Тогда линейная система $L^{(1)}+\overline{C}_2$, где $\overline{C}_2$ — простой цикл системы $|C_2|$, является специализацией над комплексным полем общей системы L. Теорема Энриквеса получается отсюда, если принять во внимание определения, результаты раздела b) и тот очевидный факт, что понятие якобиевой системы ковариантно относительно специализаций.

Из этой теоремы следует *формула сложения*: $C_{1j}-(r+1)C_1 \equiv C_{2j}-(r+1)C_2$. Другими словами, линейная система $|K|=|C_{1j}-(r+1)C_1|=|C_{2j}-(r+1)C_2|$, определенная на гиперповерхности V', *не зависит* от выбора систем C_i $(i=1, 2)$. Она называется (*смешанной*) *канонической системой гиперповерхности* V'.

Это определение предполагает, что каноническая система существует, т. е. содержит *неотрицательные* циклы. В противном случае, получается так называемая *виртуальная* каноническая система, состоящая из виртуальных циклов. Каноническая система *многообразия* V определяется как прообраз канонической системы гиперповерхности V' при указанной выше проекции. Циклы, принадлежащие канонической системе, называются (смешанными) *каноническими циклами*.

e) Каноническая система допускает также следующее проективное описание.

Полярной формой точки M пространства $\mathbf{P}^{r+1}$ относительно гиперповерхности V' порядка μ называется присоединенная форма гиперповерхности V' порядка $\mu-1$, содержащая точку M. Эта форма высекает на гиперповерхности V' вне множества S цикл Якоби r-мерной линейной системы, высеченной на V' гиперплоскостями, проходящими через точку M. Поэтому имеет место следующее утверждение:

(V). *Присоединенные формы порядка $\mu-r-2$, если они существуют, высекают на гиперповерхности V' каноническую систему.*

3. Каноническая система как бирациональный инвариант

Изучим поведение смешанной канонической системы при бирациональных преобразованиях.

а) Пусть T — бирациональное соответствие между неособыми многообразиями V и $\overline{V}$, определенными над комплексным полем. Подмножество многообразия $\overline{V}$, соответствующее фундаментальным точкам соответствия T на многообразии V, иррегулярно в смысле n° I, 6 и называется *исключительным* подмножеством. Оно, очевидно, состоит из конечного числа компонент, которые могут иметь произвольную размерность от 1 до $r-1$.

В нашем исследовании мы не будем принимать во внимание исключительные компоненты размерности $< r-1$, ибо они не оказывают влияния на закон преобразования линейных систем $(r-1)$-мерных циклов на многообразии V.

Пусть P и $\overline{P}$ — две T-соответствующие точки, а $(u_1, \ldots, u_r)$ и $(v_1, \ldots, v_r)$ — униформизирующие параметры на многообразиях V и $\overline{V}$ в точках P и $\overline{P}$ соответственно.

Соответствие T локально записывается уравнениями $v_i = f_i(u)$, а обратное соответствие T^{-1} — уравнениями $u_i = g_i(v)$, $i = 1, \ldots, r$. Функции f_i и g_i мероморфны в окрестностях точек P и $\overline{P}$ соответственно; они голоморфны, если соответствие T бирегулярно в точках P и $\overline{P}$. Последнее обстоятельство наверняка имеет место, если обе точки P и $\bar{P}$ не фундаментальны, ибо многообразия V и $\bar{V}$ неособы.

Допустим теперь, что точка P фундаментальна для преобразования T, а точка $\bar{P}$ не фундаментальна для преобразования T^{-1}. Тогда определитель $J(v) = \partial(g)/\partial(v)$ локально голоморфен в точке $\bar{P}$ и равен нулю в ней, так как в противном случае соответствие T было бы бирегулярным в точках P и $\bar{P}$. Поскольку в некоторой окрестности точки $\bar{P}$ никакая точка не является фундаментальной для преобразования T^{-1}, отсюда следует, что *якобиан $J(v)$ обращается в нуль на каждой исключительной гиперповерхности многообразия $\bar{V}$, проходящей через точку $\bar{P}$.*

b) Докажем теперь следующее утверждение:

(I) *Пусть L — простая r-мерная линейная система без базисных точек на многообразии V с циклом Якоби L_j. Тогда цикл Якоби $\bar{L}_j$ образа $\bar{L}$ системы L при преобразовании T определяется формулой $\bar{L}_j = T[L_j] + \bar{E}$, где $\bar{E}$ — некоторый $(r-1)$-цикл многообразия $\bar{V}$, состоящий из исключительных компонент и зависящий лишь от преобразования T.*

Прежде всего ясно, что почти все циклы C системы L не являются ни фундаментальными, ни исключительными для соответствия T. Можно считать, что этим свойством обладают все компоненты якобиева цикла L_j: если это неверно, то систему L следует погрузить в большую линейную систему и затем заменить ее почти любой r-мерной линейной подсистемой этой большей системы. В самом деле, эти операции не изменят класса линейной эквивалентности цикла L_j.

Пусть P — фиксированная точка многообразия V. Можно считать, что вне некоторого подмногообразия $D \subset V$, не содержащего точку P, система L высечена на V линейной системой форм пространства $\mathbf{P}^n$ некоторого достаточно высокого порядка. Поэтому вблизи точки P система L локально задается уравнением вида $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(u) = 0$, где функции $\varphi_i(u)$ голоморфны в точке P. Соответственно этому цикл Якоби L_j задается уравнением $J(u) = 0$, где

$J(u) = \|\varphi_{ih}\|$, $i, h = 0, \ldots, r$, $\varphi_{i0} = \varphi_i$; $\varphi_{ih} = \partial\varphi_i/\partial\varphi_h$, $h \neq 0$.

В наших предположениях якобиан $J(u)$ голоморфен в точке P. Поскольку система L не имеет базисных точек, T-образ $\bar{L}$ системы L состоит из T-образов всех циклов системы L. Очевидно, что система $\bar{L}$ проста, так что ее цикл Якоби $\bar{L}_j$ определен. Кроме того, система $\bar{L}$ в окрестности точки $\bar{P} = T[P]$ задается уравнением $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(g(v)) = 0$, и связанный с этой системой якобиан $\bar{J}(v)$ локально мероморфен в точке $\bar{P}$, причем $\bar{J}(v) = J(u) \cdot \partial(v)/\partial(u)$ (этот известный закон преобразования имеет место в окрестностях любой пары точек P и $\bar{P}$, в которых преобразование T бирегулярно).

Вспоминая результат раздела а), мы немедленно получаем из этого соотношения, что любая аналитическая ветвь исключительной гиперповерхности многообразия $\bar{V}$, проходящая через точку $\bar{P}$, содержится в аналитическом множестве $\bar{J}(v) = 0$, т. е. в некоторой компоненте цикла Якоби $\bar{L}_j$ системы $\bar{L}$. Следовательно, этот цикл содержит все исключительные $(r-1)$-мерные гиперповерхности многообразия $\bar{V}$ относительно соответствия T с кратностью, которая вполне определяется порядком якобиана $\partial(v)/\partial(u)$ в точке $\bar{P}$ и, следовательно, зависит лишь от соответствия T, но не от системы L.

c) Предположим теперь, что система L содержится в большей линейной системе L^*, удовлетворяющей предположениям пункта b). Пользуясь тем фактом, что цикл $\bar{E}$ не зависит от системы L, из утверждения (I) легко вывести, что

(II) *Для простой линейной системы L^* без базисных точек на многообразии V, размерность которой $\geqslant r$, существует полная якобиева линейная система ее T-образа на многообразии $\bar{V}$. Эта система совпадает с полной линейной системой, содержащей цикл $\bar{L}_j = T[L_j] + \bar{E}$, где L_j — цикл Якоби произвольной r-мерной подсистемы $L \subset L^*$.*

d) Пусть C — общий цикл системы L на многообразии V и $\bar{C} = T[C]$ — его образ на многообразии $\bar{V}$. Тогда смешанные канонические системы многообразий V и $\bar{V}$ можно задать формулами

$$|K| = |C_j - (r+1)C|, \quad |\bar{K}^*| = |\bar{C}_j - (r+1)\bar{C}|.$$

Так как, в силу b), $(\bar{C}_j) = (\bar{C})_j + \bar{E}$, то, полагая $\bar{K} = T[K]$, мы получим, что

$$\bar{K}^* = \bar{K} + \bar{E}. \tag{1}$$

Эта формула задает закон преобразования смешанной канонической системы при произвольном бирациональном соответствии T между многообразиями V и $\bar{V}$.

Если $\bar{K} + \bar{E} \geqslant 0$, то очевидно, что $\dim|\bar{K} + \bar{E}| \geqslant \dim|\bar{K}|$ и $\dim|\bar{K}^*| \geqslant \dim|K|$, где системы $|K|$ и $|\bar{K}|$ считаются виртуально свободными от базисных точек (разъяснение этого общепринятого выражения см., например, в книгах Зариского [a], стр. 30, или Энриквеса [a], стр. 33). Определим целое число $p_g(V)$, полагая $p_g(V) = \dim|K| + 1$. Оно называется *геометрическим родом* многообразия V и определено для любого многообразия, обладающего неотрицательным каноническим циклом. Согласно только что сказанному, $p_g(\bar{V}) \geqslant p_g(V)$; по симметрии также $p_g(V) \geqslant p_g(\bar{V})$, так что геометрический род инвариантен при бирациональных преобразованиях. Это утверждение немедленно распространяется и на тот случай, когда система $|K|$ виртуальна, когда, по определению, $p_g(V) = 0$. Собирая воедино все эти результаты, получаем следующую теорему:

(III) *Пусть V, $\bar{V}$ — два неособых, бирационально эквивалентных многообразия. Любой смешанный канонический цикл $\bar{K}^*$ на многообразии $\bar{V}$ является суммой образа соответствующего цикла на многообразии V и некоторого цикла $\bar{E}$, компонентами которого являются $(r-1)$-мерные исключительные подмногообразия соответствия T на многообразии $\bar{V}$. Геометрический род многообразия V является абсолютным инвариантом класса неособых моделей многообразия V.*

e) Из теоремы (III) вытекают некоторые важные следствия. Прежде всего, две системы $|\bar{K}^*|$ и $|K|$, которые одновременно эффективны или виртуальны, имеют, если они эффективны, одинаковую размерность. (Линейная система называется *эффективной* или *виртуальной* в соответствии с тем, содержится ли в ней неотрицательный цикл или таких циклов нет.) Поэтому цикл $\bar{E}$ обязательно является неподвижным циклом системы $|\bar{K}^*|$. Назовем $(r-1)$-мерное подмногообразие *исключительным*, если оно является исключительным для какого-нибудь бирационального преобразования T. Тогда имеет место следствие:

(IV) *Если смешанная каноническая система $|K|$ неособого многообразия V эффективна (так что $p_g(V) > 0$), то она содержит все исключительные $(r-1)$-мерные подмногообразия многообразия V; следовательно, имеется лишь конечное число таких подмногообразий.*

Этот факт уже неверен в случае $p_g(V)=0$. Из теории поверхностей известно, что существуют поверхности с *бесконечным множеством исключительных* кривых, такими поверхностями являются, например, все рациональные и развертывающиеся поверхности. Можно показать, что рациональными и развертывающими поверхностями исчерпываются *все* поверхности, обладающие бесконечным множеством исключительных кривых (это знаменитая теорема Кастельнуово — Энриквеса [1]; см. также Энриквес [a], стр. 127; Зариский [a], стр. 71). Аналогичное описание всех таких многообразий в случае $r > 2$ неизвестно.

При $p_g(V) > 0$ определена линейная система, получающаяся из смешанной канонической системы многообразия V после удаления всех ее неподвижных исключительных компонент. Эта система называется *чистой канонической системой*. Очевидно, что она является абсолютным инвариантом многообразия V. Мы можем резюмировать свойства этой системы в следующей теореме:

(V) *Чистая каноническая система неособого многообразия V, геометрический род $p_g(V)$ которого больше нуля, является абсолютным инвариантом многообразия V; ее размерность равна $p_g(V)-1$. В различных моделях многообразия V эта система может, однако, не меняя* *своей размерности, приобретать или терять базисные многообразия. Кроме того, она может иметь неисключительные неподвижные компоненты.*

Последнее утверждение теоремы проверяется на примерах: очевидный пример дает многообразие геометрического рода $p_g(V)=1$ с ненулевой канонической гиперповерхностью.

Заметим, что при $r=2$ исключительные компоненты смешанной канонической системы (если их конечное число) можно устранить с помощью бирационального преобразования. Для $r>2$ аналогичный результат неизвестен. Кроме того, мы не знаем, обязательно ли при $r>2$ исключительные гиперповерхности многообразия V являются гиперповерхностями *первого рода*, иначе говоря, верно ли, что бирациональные преобразования, соответствующие этим исключительным гиперповерхностям, не могут иметь на них фундаментальных точек. Для $r=2$ это так. (Формальная характеризация таких гиперповерхностей дана в n° VI, 5.)

f) Мы уже видели, что чистая каноническая система $|H|$ эффективна, если эффективна смешанная каноническая система. Поэтому при $p_g(V)>0$ увеличенная на единицу размерность системы $|iK|$ (эта система называется *i-канонической*) также является абсолютным инвариантом многообразия V.

Если же $p_g(V)=0$, а система $|iK|$, $i>1$, эффективна, то, повторяя рассуждения, изложенные в разделе d), и используя соотношение $|i\overline{K}^*|=|i\overline{K}+i\overline{E}|$, вытекающее из равенства (1), мы снова получим, что *целое число* $p_g^i(V)=\dim|iK|+1$ *абсолютно инвариантно*; это число называется *i-родом многообразия* V.

Можно показать, что система $|iK|$ содержит в качестве неподвижных i-кратных компонент все исключительные гиперповерхности многообразия V, которых, следовательно, имеется лишь конечное число. Отсюда, в частности, вытекает, что *если многообразие обладает бесконечной системой исключительных гиперповерхностей, то все кратные роды этого многообразия равны нулю.*

Если полная система $|-K|$ эффективна, она называется, по Севери (см. Севери [35], стр. 38 и исторические замечания) (*сме-*

шанной) антиканонической системой, а ее размерность, увеличенная на единицу,— *антиродом* многообразия V.

Неизвестно, можно ли получить из антиканонической системы, являющейся, очевидно, относительным инвариантом многообразия V, абсолютный инвариант. Этот вопрос, по-видимому, важен, ибо его решение могло бы дать возможность бирационально охарактеризовать унирациональные многообразия, т. е. многообразия, которые являются образами проективного пространства (см. n°I, 6). Для унирациональных и бирациональных многообразий все кратные роды равны нулю, так что антиканоническая система может оказаться эффективной. Если система $|K|$ принадлежит нулевому классу линейной эквивалентности, то это же верно и относительно системы $|-K|$; если система $|K|$ сводится к базисным исключительным компонентам, то система $|-K|$, очевидно, виртуальна.

4. Арифметическое определение канонической системы

Мы изложим теперь, следуя Зарискому (см. Зариский [21], стр. 585), другое определение канонической системы на многообразии V. Не делая никаких предположений о характеристике основного поля, мы будем лишь предполагать, что многообразие V *нормально*. Для классического случая получится хорошо известное трансцендентное определение, которое восходит к Клебшу и М. Нётеру (см. М. Нётер [1]).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — элементы поля $\mathbf{K}(V)$, образующие сепарабельный базис трансцендентности поля $\mathbf{K}(V)/\mathbf{K}$, т. е. такие, что поле $\mathbf{K}(V)$ сепарабельно алгебраично над полем $\mathbf{K}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$; такой базис всегда существует, если поле $\mathbf{K}(V)$ сепарабельно порождено над полем $\mathbf{K}$, (см. Мак-Лейн [1], стр. 384). Определим *r-кратный дифференциал* $fd(x)$ на многообразии V как дифференциал вида $fdx_1\,dx_2 \ldots dx_r$, где $f \in \mathbf{K}(V)$ и $r = \dim V$. Такие дифференциалы преобразуются обычным образом, умножаясь на якобиан при переходе к новому сепарабельному базису (x'): $fd(x) = fJd(x')$, где $J = \partial(x)/\partial(x')$.

Пусть $A \subset V$ — простой $(r-1)$-мерный цикл многообразия V. Поскольку многообразие V нормально, цикл A является неособым. Поэтому существуют такие униформизирующие координаты $x_1, x_2, \ldots, x_r$ цикла A, что поле $\mathbf{K}(A)$ является сепарабельным алгебраическим расширением поля, порожденного над полем $\mathbf{K}$ функциями, индуцированными на A координатами x_i. В этом случае мы будем говорить, что функции $x_1, x_2, \ldots, x_r$ образуют систему *сепарабельных униформизирующих координат цикла A*. Можно показать, что (x) обязательно является сепарабельным базисом трансцендентности поля $\mathbf{K}(V)/\mathbf{K}$, так что любой r-кратный дифференциал ω можно записать в виде $fd(x)$.

Легко видеть, что если функция $g \in \mathbf{K}(V)$ индуцирует на A конечную функцию $(g)_A$, то индуцированные функции $(\partial g/\partial x_i)_A$ также конечны. Поэтому при переходе к другой системе (x') якобиан $J = \partial(x)/\partial(x')$ и обратная к нему величина J^{-1} индуцируют на A конечные функции, так что $v_A(J) = 0$ и потому $v_A(f) = v_A(f')$, где f'—такая функция, что $\omega = f'd(x')$. Таким образом, целое число $v_A(f)$ зависит только от дифференциала ω и цикла A. Мы будем называть его *порядком* дифференциала ω на цикле A и будем обозначать его символом $v_A(\omega)$. Цикл A называется *нулевым* или *полярным* циклом дифференциала ω в соответствии с тем, положителен или отрицателен порядок $v_A(\omega)$.

Обозначим теперь через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неоднородные координаты общей точки многообразия V над полем $\mathbf{K}$, считая, что первые r из этих координат образуют сепарабельный базис трансцендентности поля $\mathbf{K}(V)/\mathbf{K}$. Можно доказать, что эти r координат образуют также систему сепарабельных униформизирующих координат для всех простых циклов многообразия V, за исключением конечного числа их. Поэтому вне исключительных циклов $v_A(\omega) = v_A(f)$ для любого r-кратного дифференциала $\omega = fd(x)$ на многообразии V.

Цикл $\sum v_A(\omega)\cdot A$ (эта сумма, как показано выше, конечна) называется *циклом дифференциала* ω и обозначается символом (ω).

Поскольку r-кратные дифференциалы поля $\mathbf{K}(V)$ образуют над ним одномерное векторное пространство, *циклы любых двух таких дифференциалов линейно эквивалентны и любой $(r-1)$-мерный цикл на многообразии V, принадлежащий к этому классу эквивалентности, является циклом некоторого r-кратного дифференциала*; этот последний определен с точностью до произвольного ненулевого постоянного множителя. Построенный класс эквивалентности называется *каноническим классом много-*

образия V; каноническая система $|K|$ многообразия V определяется как полная линейная система, состоящая из всех неотрицательных канонических циклов.

r-Кратный дифференциал ω называется дифференциалом *первого рода* на многообразии V, если либо $\omega = 0$, либо $\omega \neq 0$ и $(\omega) \geqslant 0$. Число линейно независимых над полем k r-кратных дифференциалов первого рода называется *виртуальным геометрическим родом* многообразия V и обозначается символом $p_g(V)$: ясно, что $p_g(V) \geqslant 0$. Если $p_g(V) > 0$, то система $|K|$ эффективна и $\dim|K| = p_g(V) - 1$.

Пусть V' — нормальное многообразие, бирационально эквивалентное многообразию V и не имеющее фундаментальных точек. Тогда любой r-кратный дифференциал первого рода на многообразии V' соответствует дифференциалу первого рода на многообразии V, так что $p_g(V) \geqslant p_g(V')$.

Поскольку род $p_g(V)$ является неотрицательным целым числом, из этого неравенства следует, что его *наименьшее* значение на бирациональном классе многообразия V равно $p_g(V')$. Это значение называется *геометрическим родом поля* $k(V)$, или *эффективным родом* многообразия V, и обозначается символом p_g. Если многообразие V неособо, то *его виртуальный геометрический род совпадает с его эффективным родом* (см. Коицуми [1]).

Пусть многообразие V, определенное над комплексным полем, проектируется в гиперповерхность объемлющего пространства, приобретая лишь обычные особенности (что имеет место при почти всякой проекции). Пусть уравнение этой гиперповерхности имеет вид $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r+1}) = 0$. Тогда (см., например, Ходж [2]) любой r-кратный дифференциал первого рода на этой гиперповерхности имеет вид $f dx_1 dx_2 \ldots dx_r$, где $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ — общая точка гиперповерхности над полем k и $f = Q/F'$, где Q — присоединенный многочлен к форме F степени $n - r - 2$, а $F' = [\partial F(\xi)/\partial \xi_{r+1}]_{(x)}$. Отсюда немедленно следует, что новое определение канонической системы для неособых многообразий над полем комплексных чисел совпадает с изложенным выше (см. утверждение (V) n° IV, 2).

5. Связь между канонической и присоединенной системами

Пусть ω — произвольный r-кратный дифференциал на многообразии V, и пусть C_m — общий цикл системы L_m/k, где k — алгебраически замкнутое поле определения многообразия V. Пусть, далее, t — униформизирующий параметр цикла C_m, т. е. функция на многообразии V, имеющая в C_m первый порядок. Можно найти еще $r-1$ элементов поля $k(V)$, которые вместе с t образуют систему сепарабельных униформизирующих координат цикла C_m. Положим $\omega = f\,dt\,dz_1, dz_2, \ldots, dz_{r-1}$ и допустим, что C_m не является ни полярным, ни нулевым циклом дифференциала ω.

Пусть $\bar{f}$ и $\bar{z}_i$ — функции, индуцированные на C_m функциями f и z_i соответственно. Пользуясь результатами IV, 4, легко доказать, что выражение $\bar{f}d(\bar{z})$ является отличным от нуля $(r-1)$-кратным дифференциалом на C_m, зависящим лишь от ω и t. Следуя Зарискому, мы будем называть его *C_m-следом* дифференциала ω относительно параметра t и будем обозначать его символом $\mathrm{Tr}^t_{C_m}\omega$.

Изложим теперь набросок принадлежащего Зарискому (см. Зариский [21], стр. 587) доказательства следующей важной формулы:

$$\mathrm{Tr}^t_{C_m}\,\omega = [(\omega) + C_m - (t)]\cdot C_m, \tag{2}$$

где выражение справа, очевидно, определено и является $(r-2)$-мерным циклом на C_m.

Пусть D — произвольный простой $(r-2)$-мерный цикл на C_m. В силу того, что цикл D на V является неособым, на многообразии V существует такая функция u, что никакая простая компонента цикла $(u)-C_m$ не содержит D. Кроме того, поскольку цикл D является неособым также и на C_m, на многообразии V существуют такие функции z_i, $i=1, 2, \ldots, r-1$, что первая из них является униформизирующим параметром цикла D на C_m, а остальные образуют систему сепарабельных униформизирующих координат цикла D на C_m.

Теперь нетрудно видеть, что дифференциал $\omega = f\,dt\,d(z)$ можно записать в виде $g\,du\,d(z)$. Поэтому коэффициент цикла D в цикле $\mathrm{Tr}^t_{C_m}\omega = \bar{f}\,d\bar{z}$, равен $v_D(\bar{f})$, где v_D — оценка поля $k(C_m)/k$, определенная простым циклом D. Таким образом, для доказательства нашего соотношения достаточно показать, что $v_D(\bar{f})$ совпадает с коэффициентом цикла D в цикле, стоящем в правой части формулы (2), который с этой целью можно заменить циклом $[(\omega)+(u/t)]\cdot C_m$.

Далее оказывается, что цикл (ω) можно заменить циклом (g), так что остается лишь доказать равенство:

$$\bar{v}_D(\mathrm{Tr}_{C_m} gu/t) = \bar{v}_D(\bar{f}).$$

Пользуясь одним из приведенных выше выражений для дифференциала ω, Зариский получает, что $g = f\,\partial t/\partial u$, где частные производные берутся по r независимым переменным $u, z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$. Пусть $t/u = \xi$. След функции ξ на цикле C_m конечен, причем $\partial t/\partial u = \xi + u\cdot\partial\xi/\partial u$, откуда следует, что $gu/t = f + (u^2/t)\cdot\partial\xi/\partial u$. Поскольку функция $\partial\xi/\partial u$ индуцирует на C_m конечную функцию, а функция u^2/t — нулевую функцию, формула (2) тем самым доказана.

Полученная формула имеет важное геометрическое значение. Система $L_m \cdot C_m$, высеченная на цикле C_m системой L_m, называется *характеристической системой системы L_m на цикле C_m*. Пусть C — некоторый характеристический цикл на $\bar{C}_m$ так что $C = \bar{C}_m \cdot C_m$, где $\bar{C}_m \in L_m$. Положим $C_m - C_m = (t)$, где t — некоторая функция на многообразии V. При этом частном выборе левая часть формулы (2) окажется каноническим циклом на C_m, а правая часть будет иметь вид $(K + \bar{C}_m)\cdot C_m$, где $K = (\omega)$. Отсюда вытекает следующий результат:

(I) *Пусть K — такой канонический цикл многообразия V, что цикл C_m не является его компонентой, и пусть C — некоторый характеристический цикл на C_m. Тогда цикл $C + K\cdot C_m$ является каноническим циклом на C_m.*

Этот факт можно сформулировать в другом виде, введя понятие *присоединенной системы* $|X'|$ полной линейной системы $|X|$: по определению, $|X'| = |X + K|$. Можно сказать тогда, что *присоединенная система $|C'_m|$ высекает на C_m канонические циклы.*

Это верно и для любой полной линейной системы $|X|$, с помощью которой определяется бирациональное бирегулярное преобразование многообразия V. В частности, если A — произвольный $(r-1)$-мерный цикл неособого многообразия V, то, как следует из n° III, 7, теорема будет верна для системы $|X| = |A + C_m|$, если только m достаточно велико. Позже мы увидим, что эту теорему можно распространить и на еще более общий случай.

Почти все описанные в этой главе результаты, по крайней мере для случая поверхностей, имеют классический характер; см., например, Энриквес [a], гл. III; Зариский [a], гл. III.

Антиканоническая система, определенная в п° III, 3, была введена Севери [19] для установления одного арифметического свойства так называемых многообразий Севери — Брауэра. Они являются многообразиями линейного порядка 1 в смысле Севери (см. [а], стр. 20), т. е. могут быть отображены бирационально без исключений на линейное пространство над некоторым алгебраически замкнутым расширением их поля определения (см. Б. Сегре [б]). Эпизодически антиканоническая система появляется также у Энриквеса и Кастельнуово (см. [а], стр. 454).

Заметим, что антиканоническая система пространства $\mathbf{P}^n$, по определению, эффективна и задается линейной системой гиперповерхностей порядка $n+1$, так что антирод пространства $\mathbf{P}^n$ равен $\binom{2n+1}{n}$ (см. Севери [49], стр. 132).

Предположение о важности антиканонической системы для классификации бирациональных и унирациональных многообразий можно сопоставить с данными интересных работ Рота [8, 9, 14], где приведены также примеры классов многомерных многообразий, антиканонические системы которых эффективны; см. Рот [б], стр. 79.

В работе [40], стр. 140, Севери доказал, что для поверхностей *абсолютный антирод*, определенный как максимум антиродов проективных моделей данного поля функций, почти всегда равен нулю. Исключения представляют, кроме рациональных поверхностей, лишь поверхности с нулевой канонической кривой и некоторые бирациональные модели развертывающихся эллиптических поверхностей. Для первого класса исключительных поверхностей абсолютный антирод равен 10, для второго — 1 и для третьего — 2 или меньше. Тем самым Севери получает новую характеризацию рациональных поверхностей как поверхностей, абсолютный антирод которых равен 10 (см. Севери [40], стр. 140). В сравнении с классической характеризацией Кастельнуово (см., например, Зариский [а], стр. 75) эта теорема имеет то преимущество, что в ней фигурирует единственный инвариант.

По поводу связи родов и антиродов с ковариантными и соответственно контравариантными рациональными тензорами Кэлера (см. Кэлер [2, 4]).

Напомним, что если на поверхности существует такая линейная система, что процесс образования последовательных присоединенных систем оканчивается в конечное число шагов, то, в силу классической теоремы Кастельнуово — Энриквеса [1] (см. Зариский [а], стр. 74), такая поверхность бирационально эквивалентна линейчатой поверхности. Эта теорема была частично распространена на трехмерные многообразия Ротом в его работах [9, 12]. Все эти результаты изложены в книге Рота [б], гл. V, стр. 76. Подчеркнем, что все упомянутые в этом примечании результаты относятся к многообразиям, которые определены над комплексным полем.

V

Арифметический род

1. Определение

Настоящая глава посвящена алгебро-геометрической теории арифметического рода многообразий. Эта теория была недавно пересмотрена Севери (см. Севери [35], стр. 42—81) и Зариским (см. Зариский [21], гл. III); некоторые дополнения были сделаны Мьюли и Зариским (см. Мьюли и Зариский [1]). Нижеследующее изложение построено в основном по образцу изложения Зариского, которое наиболее доступно, ибо относится к *произвольному многообразию над любым основным полем k*. Тем не менее мы будем принимать порой иную, дающую подчас больше, точку зрения Севери в случае, когда многообразие определено над полем комплексных чисел.

Начнем с предложенного Зариским понятия виртуального геометрического рода $(r-1)$-мерного цикла на данном многообразии.

a) Пусть W—*чистое* r-мерное алгебраическое множество в пространстве $\mathbf{P}^n$ (иначе говоря, множество, состоящее из r-мерных компонент). Наибольшее число форм степени m от координат $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ с коэффициентами в поле k, линейно независимых на множестве W, для достаточно больших m задается некоторым многочленом $\varphi(W, m)$ от m, известным как *гильбертова характеристическая функция множества* W (см. Гильберт [a], стр. 233).

Пусть k—бесконечное поле, а R—кольцо $k[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Ясно, что множество всех форм степени m в кольце R является k-модулем ранга $\binom{m+n}{n}$. Пусть $\mathfrak{a}$—произвольный однородный идеал кольца R. Множество форм m степени, принадлежащее идеалу $\mathfrak{a}$, также является k-модулем; ранг этого k-модуля обозначается символом $\chi(\mathfrak{a}, m)$. Разность $\varphi(\mathfrak{a}, m) = \binom{m+n}{n} - \chi(\mathfrak{a}, m)$ и представляет собой характеристическую функцию Гильберта.

Для больших значеиий m эта функция является, как доказал Гильберт (см. [a], стр. 233,) многочлеиом:

$$a_0\binom{m}{r}+a_1\binom{m}{r-1}+\ldots+a_r.$$

Степеиь r этого многочлена равна размерности идеала $\mathfrak{a}$, а коэффициент a_0 — степеии идеала $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{a}=\mathfrak{J}(V)$, где V — некоторое многообразие. Тогда число $\varphi(\mathfrak{a}, m)$ равно числу иезависимых условий, которые нужно иаложить на гиперповерхиость степеии m, чтобы оиа содержала многообразие V (это число называется *постулацией* многообразия V). В этом случае размериость и степень идеала $\mathfrak{a}$ совпадают с одиоименными характеристиками многообразия V (см., например, Гребиер [a], стр. 154).

Все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_r являются проективиыми характеристиками идеала $\mathfrak{a}$; в случае $\mathfrak{a}=\mathfrak{J}(V)$ их можно выразить через арифметические роды миогообразия V и его лииейных сечений; см. ниже формулу Севери (3). (См. Севери [13].)

Шпериер [1] и Дюбрейль [2] исследовали интересиый вопрос о том, при каких условиях данная последовательность положительных чисел представляет собой для всех m соответствующие зиачения фуикции Гильберта. С этим связан вопрос о нахождении явного выражения для фуикцин $\varphi(\mathfrak{a}, m)$, пригодного для всех значений m; ответ иа этот вопрос дал Гаэта [2, 3]. Ои доказал, что эта функция является многочлеиом, коэффициенты которого содержат порядки форм, сбразующих базис идеала $\mathfrak{a}$, а также некоторые характеристики, связанные с гильбертсвой *цепью сизигий*, прииадлежащей идеалу $\mathfrak{a}$ (см. Грёбнер [a], стр. 185). Этот результат согласуется с результатами Севери [2], относящимися к случаю, когда идеал $\mathfrak{a}$ соответствует многообразию V, являющемуся полным пересечеиием иекоторых форм объемлющего пространства.

В частности, при $\mathfrak{a}=\mathfrak{J}(V)$ эти нсследовання дают метод подсчета арифметических родов миогообразия V и его линейных сечений через упомянутые выше характеристики. Для указаиного выше частиого случая соответствующие вычисления проделаиы в работе Севери [2]. Островский заменил цепь первой, второй, третьей и т. д. сизигий идеала $\mathfrak{a}$ некоторыми формами от двух, трех, четырех и т. д. совокупиостей переменных (см. [1] и Гаэта [a]). Обозиачая степени этих форм через d_{1i}, d_{2i}, ..., Гаэта записывает постулационную формулу в виде

$$\varphi(\mathfrak{a}, m)=\binom{m+n}{n}-\sum_{i=1}^{s_1}\binom{m-d_{1i}+n}{n}+\sum_{i=1}^{s_2}\binom{m-d_{2i}+n}{n}-\ldots,$$

где предполагается, что биномиальный коэффициент $\binom{a}{b}$ равен нулю, если $a<b$ (См. Гаэта [3] и [a]).

Развивая один ранний результат Маколея [a], Островский в работе [1] доказал, что ряд $H(\xi)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\varphi(\mathfrak{a}, m)\,\xi^m$ (считаем, что

$\varphi(\alpha, 0)=1$) сходится при $|\xi|<1$ и сумма его равна $g(\xi)/(1-\xi)^{n+1}$, где

$$g(\xi)=1-\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{\alpha}\sum_{i=1}^{s_\alpha}\xi^{d_{\alpha,i}}.$$

Здесь h — число модулей *сизигий*, а $d_{\alpha, i}$ — степени многочленов Островского. Другие замечательные факты того же рода изложены в книге Гаэта [a]. Тодд в работе [13] с помощью принципа вырождения нашел эффективные постулационные формулы для одномерных идеалов кольца R с заданными проективными характеристиками, обобщив тем самым предыдущие результаты Рота [1, 2, 3]. Б. Сегре [7] сделал то же самое прямым подсчетом, не пользуясь никакими недоказанными гипотезами.

Пусть $\mathfrak{a}$ — однородный идеал многообразия W в кольце многочленов $k[\xi]$ и $R=k[x]$ кольцо классов вычетов кольца $k[\xi]$ по модулю идеала $\mathfrak{a}$. Тогда для достаточно больших значений m число $\varphi(W, m)$ равно размерности k-модуля R_m однородных элементов степени m кольца R.

В частности, если многообразие W нормально, то выражение $\varphi(W, m)-1$ для больших значений m равно *размерности полной линейной системы* L_m, высеченной на W формами m-го порядка пространства $\mathbf{P}^n$ (см. (n° III, 5, I)).

Определим *виртуальный арифметический род* $p_a(W)$ многообразия W формулой

$$p_a(W)=(-1)^r(\varphi(W, 0)-1). \tag{1}$$

Он не зависит от выбора поля k. Действительно, для любого алгебраически замкнутого поля определения k многообразия W идеал $\mathfrak{a}$ является расширением идеала, определяющего многообразие W в кольце $k[\xi]$; при этом расширении числа $\varphi(W, m)$ и $p_a(W)$, очевидно, не меняются.

b) Рассмотрим теперь пересечение W^{r-i} многообразия W с общим подпространством $[n-i]\subset\mathbf{P}^n(k)$, где k — произвольное алгебраически замкнутое поле определения многообразия W. Ясно, что пересечение W^{r-i} представляет собой *чистое* $(r-i)$-мерное алгебраическое множество.

Функция Гильберта удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\varphi(W^r, m)-\varphi(W^r, m-1)=\varphi(W^{r-1}, m). \tag{2}$$

Последовательно заменяя в этом уравнении число m на числа $m-1$, $m-2$, ..., 1 и используя формулу (1), можно индукцией по r получить следующее выражение функции $\varphi(W^r, m)$ через виртуальные арифметические роды $p_a(W^i)$, $i=0, \ldots, r$:

$$\varphi(W^r, m) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \{p_a(W^{i-1}) + p_a(W^i)\} \binom{m+r-i}{r-i}, \quad (3)$$

где $p_a(W^{-1}) = 1$.

Индукция основывается на соотношении

$$\sum_{i=s}^{h} \binom{i}{s} = \binom{h+1}{s+1}$$

и том факте, что равенство (3) справедливо для $r=0$, ибо W^0 представляет собой конечное множество точек, так что $\varphi(W^0, m) = 1 + p_a(W^0)$, что равно числу точек, входящих в W^0.

c) Мы обобщим теперь формулу (3), заменив в ней линейную систему гиперплоскостей пространства $\mathbf{P}^n(k)$ ее s-кратной системой (см. Зариский [21]). Обозначая через $W_s^{(i)}$ пересечение многообразия W с $r-i$ общими независимыми членами системы L_s, можно аналогично получить следующую формулу:

$$\varphi(W^r, ms) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \{p_a(W_s^{(i-1)}) + p_a(W_s^{(i)})\} \binom{m+r-i}{r-i},$$

где $W_s^{(r)} = W^r = W$ и $p_a(W_s^{(-1)}) = 1$. (4)

Положив здесь $m=1$ и $s=m$, мы найдем *новое выражение для функции* $\varphi(W, m)$:

$$\varphi(W, m) = r+1+\sum_{i=0}^{r} (-1)^i p_a(W_m^{(i)}), \quad (W_m^{(r)} = W). \quad (5)$$

Пусть теперь $W=V$, где V — произвольное нормальное многообразие. Тогда для больших m имеем $\varphi(V, m) = 1 + \dim L_m$; кроме того, W_m^{r-1} является общим циклом линейной системы L_m/k. Обозначая символом $C_m^{[i]}$ пересечение i независимых общих над полем k циклов системы L_m/k, мы получим формулу:

$$\dim L_m = r + \sum_{i=0}^{r} (-1)^i p_a (C_m^{[r-i]}), \quad (C_m^{[0]} = V). \tag{6}$$

Здесь циклы $C_m^{[i]}$ являются $(r-i)$-мерными *нормальными* многообразиями (см. n° III, 7), а цикл $C_m^{[r]}$ представляет собой систему gm^r различных точек (см. Зариский [21], стр. 579), где g — порядок многообразия V, так что $p_a(C_m^{[r]}) = gm^r - 1$.

2. Модулярное свойство арифметического рода

а) Начнем со следующей леммы:

(I) *Пусть Z и Z' — положительные $(r-1)$-мерные циклы нормального многообразия V. Если $Z \equiv Z'$, то $\varphi(Z, m) = \varphi(Z', m)$, так что $p_a(Z) = p_a(Z')$*; здесь циклы и их носители обозначаются одним и тем же символом.

Для доказательства заметим, что при больших значениях m система $L_m - Z$ существует и высекается на многообразии V гиперповерхностями порядка m, содержащими цикл Z. Следовательно,

$$\dim (L_m - Z) = \dim L_m - \varphi(Z, m). \tag{7}$$

Для больших значеиий m обе системы L_m и $L_m - Z$ полны, причем $L_m - Z \equiv L_m - Z'$. Поэтому для больших значений m, а значит и тождественно, имеет место равенство $\varphi(Z, m) = \varphi(Z', m)$.

b) Пусть теперь k — алгебраически замкнутое поле определения нормального многообразия V и компонент положительного $(r-1)$-мерного цикла Z, не имеющего кратных компонент. Ясно, что род $p_a(Z \cdot C_m)$ определен, ибо $(r-2)$-мерный цикл $Z \cdot C_m$ положителен на C_m и не имеет кратных компонент.

(II) *Если цикл $Z' \equiv Z + C_m$, где C_m — общий цикл линейной системы L_m, не имеет кратных компонент, то*

$$p_a(Z') = p_a(Z) + p_a(C_m) + p_a(Z \cdot C_m). \tag{8}$$

Для доказательства заметим, что цикл $Z+C_m$, который, конечно, положителен, не имеет кратных компонент, ибо цикл C_m не является компонентой цикла Z. С другой стороны, в силу леммы, доказанной в разделе а) для всех i имеет место равенство $\varphi(Z', i) = \varphi(Z+C_m, i)$. Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ — простые однородные идеалы циклов Z и C_m соответственно в кольце $k[\xi]$. Тогда, как хорошо известно,

$$\varphi(\mathfrak{p}, i) + \varphi(\mathfrak{p}', i) = \varphi(\mathfrak{p}+\mathfrak{p}', i) + \varphi(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}', i). \qquad (9)$$

Кроме того, $\varphi(\mathfrak{p}, i) = \varphi(Z, i)$, $\varphi(\mathfrak{p}', i) = \varphi(C_m, i)$, $\varphi(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}', i) = \varphi(Z+C_m, i)$ и $\varphi(\mathfrak{p}+\mathfrak{p}', i) = \varphi(Z \cap C_m, i)$. Последнее из этих равенств вытекает из того, что идеал $\mathfrak{p}+\mathfrak{p}'$ отличается от идеала цикла $Z \cap C_m$ в кольце $K[\xi]$ лишь на несущественную компоненту.

Следовательно, из формулы (9) вытекает соотношение $\varphi(Z', i) = \varphi(Z, i) + \varphi(C_m, i) - \varphi(Z \cdot C_m, i)$, откуда равенство (8) вытекает непосредственно, в силу определения виртуального арифметического рода.

3. Определение виртуального арифметического рода для произвольных циклов

Определение виртуального арифметического рода пока дано лишь для $(r-1)$-мерных циклов многообразия V, не имеющих кратных компонент. Следуя Зарискому (см. Зариский [21], стр. 581), мы распространим теперь это определение на произвольные $(r-1)$-мерные циклы многообразия V.

Пусть сначала $r=1$. Для любого нульмерного цикла $X = \sum a_i - P_i$ на кривой V мы положим $p_a(X) = \sum a_i - 1$. В случае когда все коэффициенты a_i равны единице, это определение согласуется с предыдущим. В частности, виртуальный род нулевого цикла на любой кривой равен -1. Предположим теперь, что *для любого нормального многообразия V размерности s и любого $(s-1)$-мерного цикла X на V при $1 \leqslant s < r$ уже определен род $p_a(X)$, удовлетворяющий следующим условиям*:

I. Если $X \equiv X'$, то $p_a(X) = p_a(X')$.

II. Виртуальный арифметический род нулевого цикла размерности $s-1$ равен $(-1)^s$.

III. Пусть $k=\bar{k}=\operatorname{def}(V, X)$ и пусть C_m — общий цикл системы L_m/k. Тогда справедливо следующее *модулярное свойство*:

$$p_a(X+C_m)=p_a(X)+p_a(C_m)+p_a(X\cdot C_m); \qquad (10)$$

где пересечение $X\cdot C_m$ рассматривается как цикл на C_m.

IV. Число $p_a(X)$ инвариантно относительно любого автоморфизма фундаментальной области **K**.

Очевидно, что для $s=1$ эти условия выполняются, если пересечение $X\cdot C_m$ рассматривать как нулевой цикл размерности -1. Пусть теперь V — произвольное r-мерное многообразие и X — любой $(r-1)$-мерный цикл на V. Если полная система $|X|$ содержит положительный цикл Z без кратных компонент, то мы полагаем $p_a(X)=p_a(Z)$. В силу леммы (I) n° V, 2, это определение не зависит от выбора цикла Z. В общем случае существует такое наименьшее число $j(X)$, что система $|X+L_j|$ определена и содержит положительный цикл без кратных компонент.

Проведем индукцию по $j(X)$. Допустим, что род $p_a(X)$ уже определен для всех $(r-1)$-мерных циклов X, для которых $j(X)$ меньше данного положительного целого числа h, и рассмотрим некоторый $(r-1)$-мерный цикл X многообразия V, для которого $j(X)=h$. Определим род $p_a(X)$, полагая $p_a(X)=p_a(X+C_1)-p_a(C_1)-p_a(X\cdot C_1)$. Здесь, как легко видеть, число $p_a(X+C_1)$ определено по индуктивному предположению, а цикл $X\cdot C_1$ следует рассматривать на C_1.

Как показывает Зариский, это определение не зависит от выбора основного поля k (которое использовалось для определения системы C_1) и удовлетворяет условиям I—IV. Доказательство совершенно автоматично, и мы его здесь не приводим. В классическом случае определение Зариского совпадает с более ранним определением Севери (см. Севери [13, 35]).

4. Бирациональная инвариантность виртуального арифметического рода

Изложим теперь набросок данного Мьюли и Зариским доказательства теоремы об относительной инвариантности числа $p_a(V)$ для r-мерных многообразий V *над произволь-*

ным алгебраически замкнутым полем k (см. Мьюли и Зариский [1]).

Пусть V и $\overline{V}$ — модели некоторого поля Σ степени трансцендентности r над алгебраически замкнутым полем констант k, а (x) и (y) — однородные общие точки многообразий V и $\overline{V}$ соответственно. Гомоморфизм, отображающий ξ_i, в x_i, а η_i в y_i, отображает кольцо $k[\xi, \eta]$ на кольцо $k[x, y]$. Ядром этого гомоморфизма является дважды однородный простой идеал $\mathfrak{a}$ кольца $k[\xi, \eta]$, который, очевидно, представляет в дважды проективном пространстве $\mathbf{P}[\xi, \eta]$ график бирационального соответствия между многообразиями V и $\overline{V}$.

Естественно расширяя определение функции Гильберта для однородного идеала координатного кольца, ван дер Варден (см. ван дер Варден [3]) назвал *характеристической функцией*, или *гильбертовой функцией*, число линейно независимых над полем k по модулю идеала $\mathfrak{a}$ дважды однородных форм от переменных (ξ, η) степени m по (ξ) и n по (η). Обозначим эту функцию через $\varphi(m, n, \mathfrak{a})$: это — числовая функция, однозначно определённая моделями V и $\overline{V}$ поля Σ.

Основной результат ван дер Вардена выражается формулой

$$\varphi(m, n, \mathfrak{a}) = \sum a_{ij} \binom{m}{i} \binom{n}{j}, \quad m \geqslant M, \quad m \geqslant N, \qquad (11)$$

где сумма распространена на все пары целых чисел i, j, для которых $i + j \leqslant r$. Многочлен в левой части, связанный с парой V, $\overline{V}$, мы обозначим символом $\varrho(m, n)$.

Пусть теперь L_m и $\overline{L}_n$ — линейные системы над полем k, высеченные на многообразиях V и $\overline{V}$ формами порядков m и n соответственно. На многообразии Сегре $V \times \overline{V}$ рассмотрим график W бирационального соответствия T между V и $\overline{V}$ и перенесем системы L_m и $\overline{L}_n$, не меняя их обозначений, на W.

Пусть $L_m + \overline{L}_n$ — минимальная линейная сумма этих систем на многообразии W, т. е. наименьшая (не обязательно полная) линейная система, содержащая одновременно L_m и $\bar{L}_n$. Пусть $|C_m+\bar{C}_n|$—соответствующая полная система. Положим

$$r(m, n) = 1 + \dim|C_m + \bar{C}_n|, \tag{12}$$

$$s(m, n) = 1 + \dim(L_m + \bar{L}_n). \tag{13}$$

Из определения идеала $\mathfrak{a}$ следует, что $\varphi(m, n, \mathfrak{a}) = s(m, n)$, так что равенство (11) можно записать в следующем виде:

$$s(m, n) = \varrho(m, n) \quad \text{при} \quad m \geqslant M, \; n \geqslant N. \tag{14}$$

Мы покажем теперь, что при соблюдении некоторых условий относительно T, V и $\bar{V}$ сумма $L_m + \bar{L}_n$ полна для всех значений m и больших n, а также для всех значений n и больших m, так что для таких пар m, n имеет место равенство $r(m, n) = s(m, n) = \varrho(m, n)$.

a) Лемма Кастельнуово (см. Кастельнуово [a], стр. 440, замечания) обеспечивает полноту минимальной суммы двух линейных рядов на алгебраической кривой в том случае, когда первый ряд g_ν, полный, неспециальный и частично содержит второй ряд g_μ, причем ряд g_μ не имеет неподвижных точек, а вычет $g_\nu - g_\mu$ неспециален. Отсюда легко вытекает следующая лемма, являющаяся первым шагом нашего индуктивного доказательства:

(I) *Если в паре V, $\bar{V}$ многообразие $\bar{V}$ является нормальной кривой, то существует такое целое число n_0, что система $L_m + \bar{L}_n$ полна для $n > n_0$ и всех значений m. Пусть μ и ν — порядки кривых V и $\bar{V}$ соответственно, и пусть π — их общий род. Тогда*

$$\varrho(m, n) = m\mu + n\nu - \pi + 1 \tag{15}$$

и $r(m, n) = \varrho(m, n)$, если $m\mu + n\nu > 2\pi - 2$.

Вторая половина леммы немедленно следует из теоремы Римана—Роха, примененной к ряду $|C_m + \bar{C}_n|$.

b) Введем теперь два новых понятия.

Первое из них — многообразия, *нормальные относительно сечений*. Для размерности единица это — неособые кривые; для больших размерностей они определяются по индукции как многообразия, гиперплоские сечения которых нормальны относительно сечений. Второе — понятие *собственного бирационального преобразования* многообразия V: это — бирациональное преобразование, которое переводит почти все сечения многообразия V линейными подпространствами объемлющего пространства в нормальные подмногообразия, причем сам образ многообразия V также предполагается нормальным.

Ясно, что все неособые многообразия нормальны относительно сечений и что регулярные бирациональные преобразования многообразий, нормальных относительно сечений, являются собственными.

Мы можем теперь доказать следующую теорему:

(II) *Если преобразование* $T: V \to \overline{V}$ *собственно, то система* $L_m + \overline{L}_n$ *полна при* $n \geqslant n_0$, $m \geqslant 0$.

Доказательство проводится индукцией по размерности r поля Σ/k.

В силу леммы раздела а), теорема верна при $r=1$. Пусть она верна для полей размерности $r-1$ над k. Мы докажем теорему для случая $\dim \Sigma/k = r$ индукцией по m. В самом деле, при $m=0$ и достаточно большом n система $L_m + \overline{L}_n$ полна, ибо преобразование T собственно, а многообразие V нормально. Допустим, что для больших n система $L_m + \overline{L}_n$ полна. Так как преобразование T собственно, существует такой цикл $C_1 \in L_1$, что многообразие $\overline{C}_1 = T(C_1)$ нормально и индуцированное преобразование $T: C_1 \to \overline{C}_1$ собственно.

Системы L_m и $\overline{L}_n$ высекают на циклах C_1 и $\overline{C}_1$ кратные системы $L_m^{(1)}$ и $\overline{L}_n^{(1)}$. Система $L_m^{(1)} + \overline{L}_n^{(1)}$ полна для $n \geqslant \overline{n}_0$ по индуктивному предположению. Пусть $\overline{r}(m, n) = 1 + \dim(L_m^{(1)} + \overline{L}_n^{(1)})$, и пусть число $n_0 \geqslant \overline{n}_0$ таково, что система $\overline{L}_n$ полна при $n \geqslant n_0$. Тогда обе системы $L_m + \overline{L}_n$ и $|C_m + \overline{C}_n|$ высекают на C_1 полную систему $L_m^{(1)} + \overline{L}_n^{(1)}$, а вычет обеих этих систем относительно C_1 совпадает с минимальной суммой $L_{m-1} + \overline{L}_n$, которая по предположению индукции полна.

Отсюда вытекает, что системы $L_m + \overline{L}_n$ и $|C_m + \overline{C}_n|$ имеют одну и ту же размерность и, следовательно, совпадают. Тем самым теорема доказана. Кроме того, установлено соотношение:

$$r(m, n) = r(m-1, n) + \bar{r}(m, n), \quad n \geqslant n_0. \tag{16}$$

c) Теперь уже нетрудно показать, что $r(m, n) = \varrho(m, n)$ для $n \geqslant n_0$ и всех m.

В самом деле, пусть $\bar{\varrho}(m, n)$ — функция ϱ, связанная с парой $C_1, \bar{C}_1$. Для $r = 1$ утверждение справедливо в силу леммы раздела a). Допустим, что оно справедливо также при $\dim \Sigma/k = r-1$. Тогда $\bar{\varrho}(m, n) = \bar{j}(m, n)$ при $n \geqslant \bar{n}_0$ и $m \geqslant 0$. Поскольку сумма $L_m + \bar{L}_n$ полна, $r(m, n) = s(m, n)$, так что $r(m, n) = \varrho(m, n)$, если числа m, n оба велики.

Из формулы (16) следует, что

$$\varrho(m, n) = \varrho(m-1, n) + \bar{\varrho}(m, n) \tag{17}$$

для больших значений m и n и, значит, для всех значений, так как ϱ-функции являются многочленами. Из равенств (16) и (17) следует теперь, что если $r(m, n) = \varrho(m, n)$, то $r(m-1, n) = \varrho(m-1, n)$.

d) Докажем теперь теорему об относительной инвариантности виртуального арифметического рода:

(III) *Пусть V и $\bar{V}$ — нормальные модели поля Σ, и пусть преобразования $T: V \to \bar{V}$ и $T^{-1}: \bar{V} \to V$ собственные. Тогда $p_a(V) = p_a(\bar{V})$.*

Из этой теоремы немедленно вытекает, что *для любых нормальных относительно сечений моделей V и $\bar{V}$* (в частности, для неособых моделей), *связанных регулярным бирациональным соответствием, имеет место равенство $p_a(V) = p_a(\bar{V})$.*

Доказательство теоремы III проводится совсем просто. Пусть

$$\varrho_1(m) = \varphi(V, m) = \Sigma c_{1i}\binom{m}{i}, \quad \varrho_2(n) = \varphi(\bar{V}, n) = \Sigma c_{2j}\binom{n}{j},$$

$$r_1(m) = r(m, 0) = 1 + \dim|C_m| \quad \text{и} \quad r_2(n) = r(0, n) = $$
$$= 1 + \dim|\bar{C}_n|.$$

Тогда, в силу результатов раздела b) и того, что преобразования T и T^{-1} собственны, существуют такие целые числа m_0, n_0, что $r(m, 0) = \varrho(m, 0)$ при $m \geqslant m_0$ и $r(0, n) = \varrho(0, n)$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно, $\varrho_1(m) = \varrho(m, 0)$ и $\varrho_2(n) = \varrho(0, n)$ для всех значений m и n. Пусть a_{00} — постоянный член многочлена $\varrho(m, n)$. Тогда $c_{10} = a_{00} = c_{20}$, откуда, в силу определения виртуального арифметического рода (см. n° V, 1), вытекает, что $p_a(V) = p_a(\overline{V})$.

5. Абсолютная инвариантность рода $p_a(V)$ при $r \leqslant 3$

Предполагая, что $\dim \Sigma/k = 2,3$, что многообразия V и $\overline{V}$ являются неособыми моделями поля Σ и что основное поле имеет характеристику нуль, Мьюли и Зариский доказали абсолютную инвариантность числа $p_a(V)$ (см. Мьюли — Зариский [1], стр. 83).

Это доказательство основано главным образом на возможности устранить с помощью регулярных преобразований фундаментальные множества бирационального соответствия, связывающего многообразия V и $\overline{V}$. К сожалению, такая возможность доказана лишь при выполнении сформулированных выше предположений. Заметим, что теорема Мьюли и Зариского представляет собой единственное известное нам частичное доказательство абсолютной инвариантности рода $p_a(V)$ над полем комплексных чисел, т. е. в случае, когда имеется полная возможность воспользоваться трансцендентными и топологическими методами.

a) Начнем с одного определения. Пусть задано бирациональное отображение $T: V \to \overline{V}$. Мы будем писать $V < \overline{V}$ ($\overline{V}$ выше V); *если отображение $T^{-1}: \overline{V} \to V$ не имеет фундаментальных точек на многообразии V.* Мы будем предполагать, что многообразия V и $\overline{V}$ неособы; в этом случае преобразование T собственно.

Начиная с этого места и до конца пункта мы будем считать, что $\dim \Sigma/k = 2,3$. Докажем сначала следующую лемму:

(I) *Если отображение $T: V \to \overline{V}$ квадратично с центром в некоторой точке $P \subset V$ или моноидально с центром в некоторой неособой кривой $D \subset V$ (в этом случае*

$\dim V = 3$), *то как оно само, так и обратное преобразование* T^{-1} *собственны.*

В обоих случаях $V < \overline{V}$, так что преобразование T собственно.

Пусть преобразование T квадратично, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал точки P в ее локальном кольце. Пусть, далее, B_1 — система гиперплоских сечений многообразия $\overline{V}$. Тогда уравнение системы $T^{-1}(B_1)$ имеет вид $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_j f_i = 0$, $(\lambda_i \in k)$, где (f) — базис форм идеала $\mathfrak{p}$ настолько высокого порядка, что идеал $\mathfrak{a} = (f_0, f_1, \ldots, f_k)$ отличается от идеала $\mathfrak{p}$ лишь несущественной компонентой. В этом случае (f) является общей точкой многообразия V. По теореме Бертини, общий член системы $T^{-1}(B_1)$, а значит, и почти все ее члены могут иметь особенности лишь в базисной точке P, что, как нетрудно видеть, невозможно. Поэтому почти все члены системы $T^{-1}(B_1)$ нормальны, так что при $r = 2$ лемма справедлива.

При $r = 3$ следует еще доказать, что почти все характеристические кривые системы $T^{-1}(B_1)$ нормальны. Это следует из того факта, что на любом проходящем через точку P подмногообразии многообразия V отображение T индуцирует квадратичное преобразование, если учесть, что почти все члены системы $T^{-1}(B_1)$ проходят через точку P.

Если преобразование T моноидально, доказательство проходит аналогично. Прежде всего, пользуясь тем, что любая точка кривой D проста и на D, и на V, можно показать, что почти все члены системы $T^{-1}(B_1)$ нормальны. После этого остается доказать, что почти все характеристические кривые системы $T^{-1}(B_1)$ нормальны, а для этого достаточно показать, что почти все они неособы.

С этой целью заметим, что характеристическая система системы $T^{-1}(B_1)$ на ее общем члене не имеет базисных точек вне кривой D, если выкинуть неподвижную компоненту. В самом деле, в противном случае любое гиперплоское сечение многообразия V содержало бы хоть одну кривую пучка образов точек кривой D, что явно невозможно. Для завершения доказательства леммы остается применить теорему Бертини.

b) Отсюда и из результатов раздела b) пункта V, 4 теперь следует, что виртуальный арифметический род любой неособой модели поля Σ размерности 2 или 3 над полем k не меняется при квадратичных и моноидальных преобразованиях.

Пусть V, $\overline{V}$ — неособые модели некоторого трехмерного поля. Как показал Зариский (см. Зариский [9], гл. IV), существуют две такие модели V_1 и $\overline{V}_1$, связанные регулярным бирациональным соответствием, что V_1 (соответственно $\overline{V}_1$) получается из V (соответственно $\overline{V}$) с помощью последовательности квадратичных и моноидальных преобразований с неособым центром (см. n° II, 6). Следовательно, $p_a(V) = p_a(V_1) = p_a(\overline{V}_1) = p_a(\overline{V})$. Аналогичное утверждение имеет место и для поверхностей. Таким образом справедлива следующая теорема:

(II) *Любые две неособые модели поля Σ размерности 2 или 3 имеют один и тот же виртуальный арифметический род.*

Для $r = 2$ Зариский и Мьюли доказали весьма интересное дополнение к этой теореме. Именно, *если V и $\overline{V}$ — такие нормальные модели поля Σ, что $V < \overline{V}$, то $p_a(V) \geqslant p_a(\overline{V})$* (см. Мьюли — Зариский [1], стр. 86). Отсюда следует, что виртуальный арифметический род любой нормальной модели поля Σ не меньше рода любой неособой модели. Это последнее число можно считать инвариантом поля и обозначать символом $p_a(\Sigma)$.

6. Виртуальные числовые характеристики циклов

Севери получил широкое обобщение результатов пунктов V, 2 и V, 3 (см. Севери [35], стр. 53—65; Альбанезе [4]), установив важные формальные соотношения между виртуальным арифметическим родом произвольного $(r-1)$-мерного цикла A на r-мерном многообразии V и соответствующим образом определенными виртуальными арифметическими родами характеристических (см. ниже) циклов $A^{[i]}$.

Мы дадим обзор этих результатов в случае, когда многообразие V определено *над комплексным полем*, хотя все они поддаются обобщению на случай произвольного алгебраически замкнутого поля определения. Это обобщение частично содержится в работах Зариского.

а) Пусть L—произвольная линейная система. Определим по индукции линейные системы $L^{[i]}$, полагая $L^{[0]}=L$ и принимая за $L^{[i]}$ систему, высечеиную на общем цикле $A^{[i-1]}$ системы $L^{[i-1]}$ системой L. Системы $L^{[i]}$ при $i>0$ называются *характеристическими системами*, а их циклы—*характеристическими циклами* системы L. (Для частного случая $L=L_m$ эти системы и циклы неоднократно уже нами рассматривались; см., например, формулу (6)). Линейная система L называется *вполне неприводимой*, если почти все ее члены и почти все ее характеристические циклы являются многообразиями. Севери доказывает следующее утверждение (см. Севери [35], стр. 22):

(I) *Система L размерности $\geqslant r$, не имеющая базисных точек, тогда и только тогда вполне неприводима, когда она проста или составлена из инволюторной системы нумерных циклов* (см. n° III, 6).

Очевидно, полная неприводимость равносильна тому, что почти всякий одномерный характеристический цикл C является неприводимой кривой. Допуская, что это так, положим $d=\dim L$. Тогда линейная подсистема $\overline{L}\subset L$, состоящая из тех циклов, носитель которых содержит фиксированную точку $P\in V$, для почти всех P имеет размерность $(d-1)$, а кривая C не является базисной для $\overline{L}$, так как иначе размерность системы L была бы равна $r-2$. Поэтому система L проста или составлена из инволюторной системы нульмерных циклов.

Наоборот, если система L проста или составлена из инволюторной системы нульмерных циклов, то на своем общем члене A она высекает характеристическую систему без базисных точек. Эта характеристическая система также либо проста, либо составлена из инволюторной системы. Поэтому, в силу теоремы Бертини, общий характеристический цикл этой системы является многообразием. Рассматривая характеристическую систему, высеченную на этом многообразии системой L, мы снова получим, что общий цикл ее неприводим; конечное число таких шагов даст утверждение теоремы.

b) Легко проверить, что для вполне неприводимой системы L *почти все характеристические циклы являются неособыми многообразиями*. Для этого достаточно повторить последнее рассуждение раздела а) и воспользоваться теоремой Бертини об особых точках.

В силу результатов n° V, 1, арифметический род определен для любого неособого многообразия. Следовательно, арифметический род определен для общих членов системы L и всех характеристических систем $L^{[i]}$, $i=2, \ldots, r$ над полем комплексных чисел. Поскольку арифметический род любого дивизора на многообразии инвариантен относительно линейной эквивалентности (см. n° V, 3), индукцией по индексу i системы $L^{[i]}$ можно доказать, что при изоморфизмах над полем комплексных чисел род этих общих членов не меняется. Этот род называется *виртуальным арифметическим родом индекса i* линейной системы L. Мы будем обозначать его символом $p_a(L^{[i]})$ (см. также n° X, 9).

Совпадение арифметических родов двух независимых общих над комплексным полем членов любой характеристической системы можно получить также из следующего более сильного результата, который принадлежит Кодаира (см. Кодаира [5], стр. 119, а также n° XI, 3) и Мацусака (см. Мацусака [5], стр. 121, а также n° VII, 5): *виртуальные арифметические роды двух алгебраически эквивалентных дивизоров на нормальном многообразии над любым полем определения k равны*. Позднее (n° VII, 5) мы дадим набросок доказательства этой важной теоремы.

Заметим, что виртуальный арифметический род никакого цикла размерности $< r-1$ не может быть алгебраическим инвариантом многообразия V, ибо такой цикл вполне может принадлежать нескольким максимальным семействам на V, как показывает пример кратной прямой в пространстве $\mathbf{P}^n$.

Нам понадобится также понятие *виртуальной степени* системы L, т. е. порядка общего члена последней характеристической системы $L^{[r]}$.

c) Пусть A, B, C — соответственно общие члены таких вполне неприводимых линейных систем L, M и N, что $N=L+M$. Допустим, что пересечение общих характеристических членов систем L и M определено и представляет собой неособое подмногообразие многообразия V.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$[C^{[r]}]=[(A+B)^{[r]}], \tag{18}$$

$$p_a(C)=p_a(A)+p_a(B)+p_a(A\cdot B), \tag{19}$$

где символом $[C^{[r]}]$ обозначается степень системы N (аналогичное обозначение для A и B).

Первое равенство очевидно, а второе вытекает, согласно Севери, из соотношения (9) между функциями Гильберта идеалов подмногообразий A и B многообразия V и из инвариантности виртуального арифметического рода относительно линейной эквивалентности (см. раздел а) n° V, 2).

Формула (19) допускает следующее обобщение:

$$p_a(C^{[i]})=\pi((A+B+A\cdot B)^{[i]}), \tag{20}$$

где π — *линейный оператор*, определенный формулой $\pi(lX+mY+\dots)=lp_a(X)+mp_a(Y)+\dots$, (имеется в виду, что этот оператор применяется после раскрытия символической степени), при этом, если $h+k>r$, то под $p_a(A^{[h]}\cdot B^{[k]})$ понимается число $(-1)^{\varepsilon-1}$, где $\varepsilon=h+k-r$ (при $h+k=r+1$ это соглашение согласуется со сказанным в n° V, 3).

Доказательство соотношения (20) проводится индукцией по индексу i и основано на линейной эквивалентности:

$$C^{[i]}\equiv A\cdot C^{[i-1]}+B\cdot C^{[i-1]}. \tag{21}$$

Формулу (20) можно также записать в следующем явном виде:

$$p_a(C^{[i]})=\sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{i-\alpha}\binom{i}{\alpha}\binom{i-\alpha}{\beta}p_a(A^{[\alpha+\beta]}\cdot B^{[i-\beta]}),$$

$$(\alpha+\beta\leqslant i). \tag{22}$$

При $i=r$ это соотношение в основном совпадает с соотношением (18), что можно было бы предвидеть заранее, учитывая данное в n° V, I определение виртуального арифметического рода системы точек.

Члены формулы (22) имеют геометрический смысл в том и только том случае, когда $2i\leqslant d$. Для остальных i иногда полезно заменить соответствующие члены в формуле их численными значениями. Несложные вычисления приводят тогда к соотношению

$$p_a(C^{[i]})=\sum_{\alpha=0}^{\delta}\sum_{\beta=0}^{i-\alpha}\binom{i}{\alpha}\binom{i-\alpha}{\beta}p_a(A^{[\alpha+\beta]}\cdot B^{[i-\beta]})+$$

$$+(-1)^{\delta-1}+(-1)^{\delta}\sum_{\alpha=0}^{\delta}(-1)^{\alpha}\binom{i}{\alpha}2^{i-\alpha}, \qquad (23)$$

где $i>\delta=r-i$; в этом соотношении уже все члены имеют геометрический смысл.

Севери обобщает приведенные соотношения также на случай более чем двух систем, но мы не воспроизводим этого обобщения, ибо его можно получить прямой индукцией по числу систем (см. Севери [35], стр. 58).

d) Имея в виду распространить указанные выше соотношения на случай произвольных циклов, докажем следующую лемму:

(II) *Любой $(r-1)$-мерный цикл A многообразия V линейно эквивалентен на V циклу вида $C-B$, где C и B такие неособые гиперповерхности, что их полные линейные системы $|C|$ и $|B|$ вполне неприводимы и не имеют базисных точек.*

Покажем сначала, что для любого неотрицательного цикла X многообразия V система L_m-X при больших значениях m проста и не имеет базисных точек. Доказательство без труда проводится применением так называемого метода конусов Севери.

Рассмотрим конические гиперповерхности Γ проективного пространства, объемлющего многообразие $\mathbf{P}^n$, которые проектируют цикл X из общего подпространства $[n-r-1]\subset P^n$. Эти гиперповерхности образуют линейную систему, содержащуюся в системе L_d (где d — степень цикла X). Ввиду этого система $\Gamma\cdot V-X$ содержится в системе L_d-X. Но меньшая система, очевидно, не имеет базисных точек и является простой, а значит, в силу результатов раздела а), и вполне неприводимой. То же верно, следовательно, и относительно системы L_d-X, а потому и относительно системы L_m-X при любом $m\geqslant d$.

Положим теперь $A = H - K$, где циклы H и K неотрицательны. Для доказательства леммы достаточно применить только что доказанный факт к циклам H, K и воспользоваться линейной эквивалентностью $H - K \equiv \equiv C - B$, где C и B — циклы из систем $L_m - K$ и $L_m - H$ соответственно, удовлетворяющих утверждению леммы при больших m.

e) Пусть теперь A — произвольный $(r-1)$-мерный цикл многообразия V. В силу доказанной леммы, его можно с точностью до линейной эквивалентности представить в виде $C - B$, где C и B — неособые гиперповерхности многообразия V, удовлетворяющие утверждению леммы.

Рассуждая по индукции, мы можем считать, что виртуальный арифметический род уже определен для циклов $X^{[i]}$, соответствующих произвольному циклу X, носителем которого является неособое алгебраическое подмногообразие многообразия V. Действительно, для случая, когда многообразие V является кривой, это понятие уже определено. Определим теперь числа $p_a(A^{[i]})$.

С этой целью мы формально воспользуемся соотношением (20), как если бы цикл A был неособой гиперповерхностью. Тогда для $i = 1, \ldots, r$ каждое из получающихся соотношений можно разрешить относительно члена $p_a(A^{[i]})$, выразив это число через $p_a(C^{[i]})$ и другие характеристики вида $p_a(A^{[h]} \cdot B^{[k]})$ с $h + k > 0$ и $k > 0$. Но значения всех этих характеристик можно считать уже известными. Отсюда мы получаем определение арифметического рода $p_a(A^{[i]})$, если только установим *его независимость от произвола построения*. Севери проделывает это с помощью довольно тонких соображений, которые мы здесь опускаем (см. Севери [35], стр. 63).

Итак, символы $p_a(A^{[i]})$ имеют смысл для *любых* $(r-1)$-мерных циклов на многообразии V. Кроме того, как показывает Севери, *эти вновь определенные виртуальные характеристики по-прежнему удовлетворяют соотношению* (20), где A, B, C — уже произвольные $(r-1)$-мерные циклы, для которых $C \equiv A + B$. В частности, имеет место обобщенное модулярное свойство (19).

7. Виртуальная и эффективная размерности

Применим соотношение (19) к случаю, когда цикл B линейно эквивалентен циклу $-A$, так что $p_a(C)=(-1)^r$. Тогда получится следующее выражение для рода $p_a(-A)$:

$$p_a(-A)=(-1)^r-p_a(A)-p_a(-A^{[2]}). \tag{24}$$

Для обобщения этого соотношения можно рассмотреть формальную эквивалентность $A\cdot C\equiv A\cdot A+A\cdot B$, где B имеет тот же смысл, что и выше, как если бы A было многообразием, и воспользоваться модулярным свойством. В действительности это рассуждение равносильно применению формулы (20), которая в наших предположениях остается справедливой. Еще проще формально применить соотношения (24) к циклу $A^{[i-1]}$ вместо многообразия V. Так или иначе мы получим тогда следующие соотношения:

$$p_a(-A^{[i]})=(-1)^{r-i+1}-p_a(A^{[i]})-p_a(-A^{[i-1]}), \tag{25}$$

где индекс i может принимать значения $1, \ldots, r$. Умножая соотношения (25) для $i=1, \ldots, r$ на $(-1)^{i-1}$ и складывая получившиеся равенства, мы придем к соотношению:

$$p_a(-A)=(-1)^r(r+1)+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i p_a(A^{[i]}). \tag{26}$$

Выражение

$$\delta(A)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-1}p_a(A^{[i]})+(-1)^r p_a(V)+r, \tag{27}$$

которое, в силу соотношения (26), можно записать в следующем более компактном виде

$$\delta(A)=(-1)^r(p_a(V)+p_a(-A))-1, \tag{28}$$

называется *виртуальной размерностью цикла* A. Для случая, когда $A=C_m$, а многообразие V нормально и определено над алгебраически замкнутым полем, эта формула принадлежит Зарискому (см. Зариский [21], стр. 584). Будем теперь считать, что эти предположения выполнены и что *m достаточно велико*. Тогда, в силу равенства (6), *виртуальная размерность полной системы* L_m

совпадает с ее эффективной размерностью. Согласно Севери, системы, обладающие этим свойством, называются *регулярными* (см. Севери [35], стр. 69).

Из соотношения (28) с помощью обобщенного модулярного свойства сразу же получается следующая формула Севери (см. Севери [35], стр. 66):

$$\delta(C) = \delta(A) + \delta_B(B \cdot C) + 1, \tag{29}$$

где $C \equiv A + B$, число $\delta_B(B \cdot C)$ формально определяется равенством

$$\delta_B(B \cdot C) = (-1)^{r-1}(p_a(B) + p_a(-B \cdot C)) - 1, \tag{30}$$

а A, B, C — в остальном произвольные $(r-1)$-мерные циклы.

Если циклы A, B, C являются общими членами трех полных неприводимых линейных систем, причем $C \equiv A + B$, то эффективные размерности этих систем связаны очевидной формулой

$$\dim(B \cdot |C|) = \dim|C| - \dim|A| - 1. \tag{31}$$

Таким образом, виртуальные размерности удовлетворяют тому же соотношению, что и эффективные.

Докажем теперь следующую теорему:

(I) *Для любого $(r-1)$-мерного цикла X многообразия V и любого достаточно большого m система $|X + C_m|$ регулярна.*

Для доказательства рассмотрим такое целое число s, что система $|C_s - X|$ существует и неприводима. Пусть E — произвольный простой цикл этой системы. Тогда $|X + C_m| = |C_{m+s} - E|$, так что для доказательства теоремы остается доказать лишь, что $\dim|C_m - E| = \delta(C_m - E)$. Полагая с этой целью $A = C_m - E$, мы, в силу соотношения (29), получим, что $\delta(C_m) = \delta(A) + \delta_E(E \cdot C_m) + 1$.

Но, как мы уже видели выше, $\dim L_m = \delta(C_m)$ и $\dim E \cdot L_m = \delta(E \cdot C_m)$ для достаточно больших m. Следовательно, $\dim A = \delta(A)$ для тех же значений m. Тем самым теорема доказана.

Как показал Зариский (см. Зариский [21], стр. 584), эта теорема справедлива также для нормальных многообразий над произвольным алгебраически замкнутым полем определения.

8. Другое определение арифметического рода

(См. Севери [35], стр. 76).

Пусть определенное над комплексным полем неособое многообразие V погружено в пространство $\mathbf{P}^n$, причем $n > 2r$. Это предположение в интересующем нас вопросе не накладывает никаких ограничений, ибо для достаточно больших значений m бирегулярное бирациональное соответствие, связанное с системой L_m, преобразует многообразие V в модель нужного нам типа.

Можно доказать тогда, что существуют $n-r$ форм достаточно высоких порядков $d_1, \ldots, d_{n-r}$, которые обладают следующими свойствами. Они содержат многообразие V, неособы и пересекаются вне V по неособому многообразию W, причем $V \cdot W$ представляет собой неособое $(r-1)$-мерное подмногообразие многообразия V (см. Севери [1], стр. 74, или [д], стр. 54). Далее, можно доказать (см. Севери [2] и (VIII, 8)), что *содержащие многообразие W формы порядка $N = \sum\limits_{i=1}^{r} d_i - n - 1$ пространства $\mathbf{P}^n$ высекают на многообразии V вне W виртуальную смешанную каноническую систему* (см. раздел е) n° VIII, 8). *Кроме того, формы порядка $m+N$ пространства $\mathbf{P}^n$ высекают на многообразии V вне W систему $|K+C_m| = |C'_m|$, которая для больших значений m регулярна* (см. теорему I n° V, 71). Поэтому

$$\delta(K+C_m) = \dim|K+C_m| = \dim|C'_m|, \quad m \geqslant m_0. \tag{32}$$

С другой стороны, для больших значений m эффективную размерность системы $|K+C_m|$ можно вычислить, проектируя многообразие V в гиперповерхность V' пространства $\mathbf{P}^n$, имеющую лишь обычные особенности. Тогда формы порядка $m' = m+d-r-2$ (где d — порядок многообразия V'), содержащие особое множество $S \subset V'$, высекут на V' вне S образ системы $|K+C_m| = |C'_m|$. Размерность этой системы для больших значений m задается формулой:

$$\varrho_{m'} = \binom{m'+r+1}{r+1} - \binom{m'-m+r+1}{r+1} - \varphi(S, m') - 1. \tag{33}$$

Обозначим символом $r_{m'}$ многочлен от m, стоящий в правой части равенства (33). Для достаточно больших m и, значит, для всех m имеет место равенство:

$$r_{m'} = \delta(K + C_m). \tag{34}$$

В частности, при $m = 0$, в силу равенства (33), мы получаем, что

$$\begin{aligned} r_{d-r-2} &= \binom{d-1}{r+1} - \varphi(S,\ d-r-2) - \binom{-1}{r+1} - 1 = \\ &= \binom{d-1}{r+1} - \varphi(S,\ d-r-2) + (-1)^r - 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Но из (29) немедленно следует, что $\delta(K + C_m) = \delta(K)$ (достаточно положить $A \equiv K + C_m$ и считать, что $m = 0$). Поэтому, согласно соотношениям (28) и (34), имеет место равенство

$$\delta(K) + 1 - (-1)^r = (-1)^r (p_a(V) + p_a(-K)) - 1. \tag{36}$$

Определив число P_r^a формулой

$$P_r^a = \delta(K) + 1 - (-1)^r, \tag{37}$$

мы можем теперь равенство (36) переписать в следующем виде:

$$P_r^a = (-1)^r (p_a(V) + p_a(-K)) - 1. \tag{38}$$

Целое число P_r^a, определение которого обобщает классическое определение арифметического рода для кривых и поверхностей, *совпадает*, по крайней мере в классическом случае, *с определенным ранее арифметическим родом* $p_a(V)$. Ниже (см. n° X, 8) мы изложим трансцендентное доказательство этого факта, принадлежащее Кодаира и Спенсеру.

9. Виртуальные численные характеристики системы $|K|$

Следуя Севери (см. Севери [35], стр. 78), назовем *виртуальными численными характеристиками смешанной канонической системы* целые числа $\omega_i = p_a(K^{[r-i]})$. Эти характеристики связаны с арифметическим родом соотношением Севери:

$$\begin{aligned} \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \ldots + (-1)^{r-1}\omega_{r-1} + r + (-1)^{r-1} = \\ = P_r^a(V) + (-1)^r p_a(V), \end{aligned} \tag{39}$$

которое непосредственно получается из равенств (27) и (37). Отсюда, в частности, следует, что род $P_r^a(V)$ является относительным бирациональным инвариантом многообразия V, ибо это уже установлено для арифметического рода p_a.

Пусть V — неособая кривая рода $p=p_a(V)$. Тогда степень дивизора $-K$ равна $2-2p$, так что $p_a(-K)=$ $=1-2p$ и, значит, $P_1^a(V)=p_a(V)$, в силу соотиошения (37). Пусть теперь V — неособая поверхность. Рассмотрим полную линейную систему $|X|=|-K+C_m|$, считая число m столь большим, чтобы эта система была неприводимой и определяла некоторое бирегулярное бирациональное преобразование многообразия V. Тогда общий член X системы $|X|$ является неособым многообразием, а система $|C_m|\cdot X$ состоит из канонических циклов на кривой X. Поэтому $p_a(-C_{m'}\cdot X)=1-2p_a(X)$, откуда в силу эквивалентности $X\equiv -K+C_m$ легко получается, что $p_a(-K)=$ $=1$ и, следовательно, $P_2^a(V)=p_a(V)$ (см. формулу (37)).

Это рассуждение принадлежит Зарискому (см. [21], стр. 589). Кроме того, он замечает, что вообще достаточно доказать равенство $P^a(V)=p_a(V)$ для нечетных размерностей r; тогда $p_a(-K)=1-2p_a(V)$ и то же рассуждение, что и выше, показывает, что $p_a(-K)=1$, если $\dim V=r+1$. Таким образом достаточно найти алгебраическое доказательство равенства родов P^a и p_a лишь *для случая нечетных размерностей*.

С другой стороны, Севери доказал (см. Севери [35], стр. 79), что *достаточно проверить справедливость модулярного соотношения для рода* P^a. В самом деле, после этого формально так же, как и в случае рода $p_a(V)$, можно получить соотношение

$$\delta^*(K)=\Omega_0-\Omega_1+\ldots+(-1)^{r-1}\Omega_{r-1}+(-1)^r P^a(V)+r, \tag{40}$$

где $\delta^*(K)$ — виртуальная размерность, определенная формулой (28), исходя из рода $P^a(V)$, а

$$\Omega_0=[K^{[r]}]-1 \text{ и } \Omega_i=P^a(K^{[r-i]}),\ i=1,\ \ldots,\ r-1.$$

Это соотношение аналогично следующему соотношению, непосредственно вытекающему из формулы (27):

$$\delta(K)=\omega_0-\omega_1+\ldots+(-1)^{r-1}\omega_{r-1}+(-1)^r p_a(V)+r. \quad (41)$$

Но, очевидно, что $\delta^*(K+C_m)=\dim|K+C_m|$ для больших значений m, откуда без труда следует равенство $\delta(K)=\delta^*(K)$. Теперь доказательство совпадения родов завершается индукцией по r с помощью соотношений (40) и (41).

Севери дает также набросок метода, с помощью которого можно было бы попытаться доказать модулярное соотношение (19) для рода P^a. Однако, для того чтобы получить полное алгебраическое доказательство совпадения двух арифметических родов, остается еще найти формальное обоснование ряда постулированных им фактов. Например, над полем комплексных чисел с помощью трансцендентных средств можно получить следующее соотношение:

$$\Omega_0-\Omega_1+\ldots+(-1)^{r-1}\Omega_{r-1}+r+(-1)^{r-1}=(1+(-1)^{r-1})p_a(V). \quad (41')$$

Оно было предугадано Севери (см. Севери [13], стр. 87) и является первым примером связи между виртуальными характеристиками и арифметическим родом.

Обобщения этой формулы принадлежат Альбанезе (см. Альбанезе [4], Максвеллу и Тодду (см. Максвелл и Тодд [1], Тодд [18]):

$$\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\Phi_i=2(p_a(V)-1 \quad (r \text{ нечетное}) \quad (42)$$

$$\sum_{i=0}^{r-2k}(-1)^i\left\{\binom{k+i-1}{i}+\binom{k+i}{i}\right\}\Phi_{r-2k-i}=0 \quad (r \text{ нечетное}, \; k=1, \ldots, (r-1)/2) \quad (43)$$

$$\sum_{i=0}^{r-2k-1}(-1)^i\binom{k+i}{i}\Phi_{r-2k-i}=0 \quad (r \text{ четное}, \; k=0, 1, \ldots, r/2-1). \quad (44)$$

Здесь $\Phi_0=\Omega_0$ и $\Phi_i=\Omega_i+(-1)^i$. Заметим, что формулы (42) и (44) при $k=0$ дают соотношение Севери (41), а при наибольшем возможном значении r сводятся к более ранней формуле Б. Сегре (см. Б. Сегре [3]). Эти равенства доказываются по индукции применением их к $(r-1)$-мерной канонической системе.

Сделаем теперь несколько замечаний исторического характера о развитии теории арифметического рода для многомерных многообразий. По поводу поверхностей мы отсылаем читателя к классическим обзорам Энриквеса [а], гл. IV, и Зариского [а], гл. IV.

Теория арифметического рода была начата работой Севери [13] (1909 г.), в которой содержатся почти все основные факты геометрии многомерных многообразий, в частности, определение рода $p_a(V)$ с помощью постулационной формулы, определение рода $P^a(V)$, изложенное в п° V, 8, и модулярное свойство рода $p_a(V)$. Равенство $p_a(V)=P^a(V)$ доказывается в этой работе для трехмерных многообразий с помощью утверждения о полноте характеристической системы полной непрерывной системы (см. п° XI, 4). Это утверждение не всегда верно даже для поверхностей (см. п° XI, 3). Однако доказательство Севери в действительности требует лишь существования *некоторой* полной непрерывной системы, для которой характеристическая система была бы полна. Поскольку Кодаира трансцендентными средствами доказал существование такой системы (см. п° XI, 4), доказательство Севери сохраняет силу.

Это же замечание относится к аналогичному доказательству Альбанезе [2] для случая $\dim V=4$.

В той же работе Севери сводит доказательство равенства родов для произвольной размерности к доказательству утверждения: «любое чистое алгебраическое множество можно рассматривать как специализацию над полем комплексных чисел некоторого неособого многообразия». Отсюда, действительно, следует, что роды $p_a(V)$ и $P^a(V)$ можно представить как линейную комбинацию конечного числа проективных численных характеристик с постоянными (не зависящими от V) коэффициентами. Севери завершает доказательство, проверив совпадение коэффициентов в таких выражениях для $p_a(V)$ и $P^a(V)$ в некотором частном случае.

Кроме того, Севери показывает, что доказательство абсолютной инвариантности арифметического рода $P^a(V)$ можно свести к другому, пока недоказанному, предположению о том, то $(r-1)$-мерная иррегулярность гиперповерхностей на r-мерном многообразии V ограничена. Здесь под *i-мерной иррегулярностью* i-мерного многообразия понимается разность между его геометрическим родом и родом P^a (при $\dim V>2$ эта разность может быть положительной, нулевой или отрицательной).

Впоследствии Тодд [1], пользуясь некоторыми вычислительными формулами Рота [1] для проективных характеристик трехмерного многообразия в пространстве $\mathbf{P}^n$, выразил род $P^a(V^3)$ через проективные характеристики многообразия V^3. Кроме того, Рот в работах [3,4] получил численные выражения для характеристик

Ω_i (определенных в n° V, 9) и для рода P^a при любой размерности многообразия V. Наконец, Тодд [9] дал другое доказательство совпадения и относительной инвариантности двух родов. К сожалению, это доказательство, которое следует основным идеям работ Севери, основано на недоказанном предположении, которое в существенном равносильно гипотезе Севери.

Все же это исследование устанавливает много интересных связей между характеристиками многообразия, и первый набросок Севери здесь уже весьма обогащен. Дальнейшие результаты принадлежат Альбанезе [3, 4]. В работе [4] Альбанезе получает бо́льшую часть результатов n° V, 6, однако в менее точном виде, особенно в том, что относится к случаю произвольных циклов. Там содержатся также формулы Альбанезе — Тодда из n° V, 9, которые впоследствии были независимо получены Максвеллом и Тоддом [1]. То, что эти формулы в действительности равносильны, отнюдь не очевидно; доказательство равносильности принадлежит Тодду [18].

Следующими появляются работы Севери [35], Зариского и Мьюли — Зариского [1], которые были описаны в тексте. Кроме распространения результатов на случай абстрактных полей определения, эти работы решают вопрос об относительной инвариантности рода $p_a(V)$ и его абсолютной инвариантности для случая $\dim V \leqslant 3$. Равенство обоих арифметических родов над полем комплексных чисел доказано Кодаира и Спенсером [1] с помощью принадлежащей Картану (см. n° X, 8) теории когомологий с коэффициентами в пучках. Алгебраическое доказательство этого факта легко следует из некоторых результатов Серра о когерентных алгебраических пучках (см., например, Зариский [1]). Что же касается весьма правдоподобной теоремы об абсолютной инвариантности арифметического рода, то ее алгебраического доказательства пока не существует.

Понятие виртуального арифметического рода для циклов, которое было тщательно изучено Севери [35] и Зариским [21] в случае дивизоров, являлось объектом исследования в более ранней работе Лефшеца [1]. По поводу всех этих вопросов см. также главу X настоящей книги, где мы, в частности, изложим принадлежащую Кодаира теорию родов под комплексным полем, совершенно не зависящую от результатов настоящей главы.

VI

Алгебраическая и рациональная эквивалентность

1. Ассоциированное многообразие

Мы приступаем теперь к обзору теории алгебраических систем и смежных понятий алгебраической и рациональной эквивалентности. Их изучение основано главным образом на теории *точек Чжоу*, и мы начнем с того, что вкратце напомним соответствующие определения.

Пусть U — произвольное r-мерное многообразие, пространства $\mathbf{P}^n$, определенное над некоторым подполем k фундаментальной области $\mathbf{K}$, и пусть P/k — его общая точка. Каждую систему $r+1$ общих и независимых над полем $k(P)$ гиперплоскостей, проходящих через точку P, можно рассматривать как общую точку некоторого многообразия, лежащего в произведении $r+1$ пространств, двойственных пространству $\mathbf{P}^n$. Подсчитав размерность этого многообразия с помощью принципа счета констант, нетрудно убедиться, что оно является гиперповерхностью, т. е. может быть задано одним уравнением $F(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots$ $\ldots, u^{(r)}) = 0$. Это уравнение однородно и, по соображениям симметрии, имеет одну и ту же степень d по каждой совокупности переменных $u^{(i)}$. Легко доказать, что число d совпадает с порядком многообразия U. Форма $F(u^{(0)}, \ldots, u^{(r)})$ называется, по ван дер Вардену и Чжоу, *ассоциированной формой многообразия* U/k.

Можно показать, что с точностью до линейных преобразований над основным полем коэффициенты этой формы совпадают с коэффициентами уравнения проекции U' многообразия U из общего над полем k линейного подпространства $[n-r-1] \subset \mathbf{P}^n$. Поскольку такое проектирование определяет некоторый общий над полем k гиперконус, содержащий многообразие U, это многообразие является пересечением всех таких гиперконусов. Отсюда следует, что между многообразиями пространства $\mathbf{P}^n$

и их ассоциированными формами существует взаимно однозначное соответствие. Точка некоторого проективного пространства, координатами которой являются коэффициенты ассоциированной формы многообразия U, называется *точкой Чжоу* многообразия U. Таким образом, имеет место взаимнооднозначное соответствие между многообразиями в пространстве $\mathbf{P}^n$ и их точками Чжоу.

Вопрос о взаимно однозначном представлении r-мерных многообразий данного порядка формами был решен Чжоу и ван дер Варденом [1]. Их главная цель состояла в том, чтобы дать строгое определение алгебраической системы и доказать, что совокупность всех многообразий V данной размерности и данного порядка в пространстве $\mathbf{P}^n$ представляет собой алгебраическую систему. Ясно, что подобная постановка вопроса весьма естественна; в более или менее явном виде она возникала в работах многих математиков (например, Кэли, Грассмана, Бертини).

Например, для конусов пространства $\mathbf{P}^3$ Кэли построил некоторую форму, в точности совпадающую с формой Чжоу. Бертини [a], используя систему касательных гиперплоскостей многообразия V, построил представление с особенностями, обязанными многообразиям, на которых существуют точки с неопределенными касательными. Б. Сегре [10] детально исследовал форму Бертини и показал, как ее можно применить к решению поставленных выше вопросов. Наконец, объект, двойственный ассоциированной форме в явном виде, появляется в работе Севери [16]. См. также обзор Севери [2].

Наиболее полное изложение теории ассоциированных форм содержится в книге Ходжа и Пидо [a_2,] стр. 32—62, где они называются формами Кэли. См. также Самюэль [b], стр. 44; де Бэр [1]; Пидо [1]; Севери [37] и Годдард [1].

Это соответствие можно распространить на все положительные r-мерные циклы пространства $\mathbf{P}^n$, определяя ассоциированную форму цикла X как произведение ассоциированных форм его компонент, взятых в степенях, равных коэффициентам при этих компонентах. Ясно, что если цикл X рационален над полем k, то его точка Чжоу также рациональна над k. Обратное в случае характеристики, отличной от нуля, вообще говоря, не верно. Для неположительного цикла X можно рассмотреть его разложение $X = X_1 - X_2$, где X_1 и X_2 — неотрицательные циклы без общих компонент, и затем назвать точкой Чжоу цикла X образ пары точек Чжоу циклов X_1 и X_2 в произведении проективных пространств.

Основным результатом Чжоу (см. Чжоу — ван дер Варден [1] и Самюэль [b], стр. 48) является следующее утверждение:

(I) *Совокупность* $\mathbf{C}^{r,\mu}(V)$ *точек Чжоу положительных* r-*мерных циклов степени* μ *многообразия* V *представляет собой алгебраическое множество над алгебраическим замыканием поля* def V.

Эта теорема определяет некоторое *алгебраическо-геометрическое строение* на множестве положительных циклов $\mathfrak{G}^r_+(V) \subset \mathfrak{G}^r(V)$. В дальнейшем мы будем называть *алгебраической системой* положительных r-мерных циклов многообразия V любую совокупность циклов, точки Чжоу которых заполняют некоторое алгебраическое подмножество множества $\mathbf{C}^{r,\mu}(V)$. Аналогичным образом определяются и все другие понятия геометрии на многообразии (неприводимые и абсолютно неприводимые алгебраические системы; циклы систем, общие над полем определения, и т. д.). В частности, алгебраическая система называется *максимальной*, если она параметризуется некоторой абсолютной компонентой множества $\mathbf{C}^{r,\mu}(V)$.

2. Специализация циклов и алгебраических систем

С помощью понятия точки Чжоу немедленно определяется понятие *специализации* X' цикла X над некоторым полем k (вопрос о таком определении поставил А. Вейль [a], стр. 255, дав аксиоматическое описание специализации цикла. Решение вопроса принадлежит Мацусака [1] и Самюэлю [1]; см. также работу Чжоу [3]). Для положительного цикла X это означает, что точка Чжоу P' цикла X' является специализацией над полем k точки Чжоу P цикла X.

Это определение удовлетворяет всем формальным требованиям, которые обычно предъявляются к специализации: транзитивность; инвариантность циклов, рациональных над полем k; совместимость с операциями сложения циклов, алгебраического проектирования, умножения и пересечения. Кроме того, для любого r-мерного цикла X многообразия V и любой специализации P' над полем k его точки Чжоу P соответствующая специализация цикла существует и является циклом на многообразии V. Наконец, для циклов справедлива теорема о продолжении специализации.

Очевидно, что носитель $\|X\|$ цикла X специализируется в носитель $\|X'\|$ цикла X', т. е. для любой точки $Q \in \|X\|$ из того, что цикл (Q', X') является специализацией цикла (Q, X), следует, что $Q' \in \|X'\|$. Во многих вопросах важное значение имеет следующий критерий единственности:

(I) *Пусть U/k — произвольное, а V/k — неособое многообразие. Пусть, далее, P/k — общая точка многообразия U, а P' — такая простая точка многообразия U, что для некоторого рационального $U \times V$-цикла X определен V-цикл $X(P') = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P' \times V))$. Тогда определен цикл $X(P) = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P \times V))$, причем цикл $X(P')$ является его единственной специализацией, продолжающей специализацию $P \to P'$ над полем k.*

Иногда оказывается полезным распространить определение алгебраической системы на *не положительные* циклы. Для этого можно, как мы уже указывали, воспользоваться точками Чжоу в произведении двух проективных пространств, требуя, чтобы эти точки заполняли некоторое алгебраическое множество. А. Вейлю принадлежит другое определение, зачастую более подходящее (см. А. Вейль [а], стр. 204, 208; см. также Самюэль [в], стр. 107). Согласно Вейлю, виртуальная алгебраическая система циклов многообразия V определяется заданием некоторого проективного многообразия U/k и некоторого рационального над полем k $U \times V$-цикла X, каждая компонента которого проектируется на все многообразие U. Согласно предложению (I) n° (I, 9), для цикла X определен цикл $X(P) = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P \times V))$. Совокупность всех специализаций этого цикла над полем k и называется *виртуальной системой*. Из упомянутого предложения и из определения специализации непосредственно следует, что при $X > 0$ это определение совпадает с определением, данным выше.

Упомянем теперь следующую весьма полезную теорему:

(II) *Если общий цикл некоторой алгебраической системы является неособым многообразием, то почти все циклы этой системы обладают этим свойством. Если* *общий цикл алгебраической системы обладает специализацией, являющейся неособым многообразием, то этот общий цикл сам является неособым многообразием.*

Доказательство (см. Нерон [1], стр. 117; Мацусака [5], стр. 118) без труда получается из определения специализации и из того факта, что условие распадения или приобретения особенностей для алгебраического многообразия является алгебраическим, так что точки Чжоу циклов, удовлетворяющих этому условию, образуют алгебраическое множество.

3. Алгебраические соответствия

Пусть U/k и V/k — проективные многообразия размерностей n и m соответственно. Согласно Севери (см., например, Севери [a], стр. 94), *алгебраическое соответствие* T между многообразиями U и V задается некоторым (быть может, неоднородным) циклом X произведения $U \times V$. Этот цикл называется *графиком* соответствия.

Обычно мы будем рассматривать лишь так называемые *чистые* соответствия; график такого соответствия на произведении $U \times V$ является рациональным над полем k однородным циклом. Соответствие T называется *невырожденным*, если каждая компонента графика T проектируется на все многообразие U. Соответствие T называется *неприводимым* (*абсолютно неприводимым*) над полем k, если цикл X прост и рационален над полем k (соответственно, прост над алгебраическим замыканием поля k).

Согласно теореме Вейля [см. теорему (I) n° I, 9], с любым невырожденным соответствием T связана алгебраическая система, общим членом которой является рациональный над полем $k(P)$ цикл $X(P) = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P \times V))$, где P — общая точка многообразия U над полем k.

Геометрическое место носителя цикла $X(P)$ представляет собой алгебраическое подмножество многообразия V, совпадающее с проекцией цикла X на V. Оно называется *носителем* алгебраической системы. Если носителем является все многообразие V, то, в силу той же теоремы Вейля, существует *обратное* соответствие T^{-1}, которое также не вырождено. Оно сопоставляет общей точке Q

многообразия V над полем k простой и рациональный над полем $k(Q)$ цикл $Y(Q)$ многообразия V, определенный формулой:

$$X \cdot (U \times Q) = Y(Q) \times Q.$$

В случае, когда обратное соответствие существует, имеет место соотношение

$$\dim T = \dim X = \dim U + \dim X(P) = \dim V + \dim Y(Q), \quad (1)$$

которое представляет собой знаменитый *принцип счета констант*. (Этот принцип, принадлежащий Шуберту (см. [а], стр. 12), был подвергнут тщательному исследованию в работах Севери [15, 32] и ван дер Вардена [5, VI].) Это соотношение справедливо, если соответствия T и T^{-1} не вырождены.

Читателя, который интересуется дополнительными сведениями о чисто алгебраической теории соответствий, мы можем отослать, помимо уже упомянутой книги Севери [а], к следующим работам: ван дер Варден [б], гл. V; Самюэль [в], стр. 108; Барзотти [1, 2]; Абельянас [1, 2]; Абельянас [2, 3, 4] и Ивасава [2].

Рассмотрим теперь некоторую алгебраическую систему положительных циклов на многообразии V. Предполагая, что она параметризована многообразием Чжоу U с общей точкой P, обозначим символом $X(P)$ общий цикл этой системы. Будем считать, что цикл $X(P)$ прост и рационален над полем $k(P)$ и что носителем системы является многообразие V. Тогда определенный теоремой (I) n° I,9 $U \times V$- цикл X прост и рационален над полем k, так что определенное им соответствие T неприводимо. Кроме того, как соответствие T, так и соответствие T^{-1} не вырождены. Это соответствие T называется *инцидентным соответствием* между многообразиями U и V, определенным рассматриваемой алгебраической системой (см. Самюэль [в], стр. 58). Это название обязано своим происхождением тому обстоятельству, что для любой T-связанной пары точек (P', Q') имеет место включение $Q' \in \| X(P') \|$.

Заметим, что для данного алгебраического соответствия цикл $X \cdot (P' \times V)$ определен для любой точки $P' \in U$, т. е. инцидентное соответствие *не имеет фундаментальных точек на многообразии* U. Это обеспечено свойствами точек Чжоу; термин «фундаментальный» мы используем здесь по аналогии с бирациональными соответствиями. Кроме того, для инцидентного соответствия верна формула (1), в которой $Y(Q)$ обозначает многообразие Чжоу, параметризующее систему циклов, носитель которых содержит точку Q.

4. Принцип вырождения Энриквеса—Зариского

Этот принцип, в классическом случае принадлежащий Энриквесу, гласит:

(I) *Непрерывный образ связного множества связен.*

Очевидно, что он представляет собой простое топологическое замечание, которое оказывается, однако, весьма полезным для приложений (см. Зариский [a], стр. 33).

Б. Сегре [6] сформулировал более глубокое и тонкое утверждение: за одним исключением, специализация C' произвольной кривой C на некоторой поверхности V над комплексным полем тогда и только тогда приводима, когда кривая C' приобретает не менее $1+p_g(V)$ двойных точек. Исключение представляет собой тот случай, когда условия, которые накладывает на канонические кривые поверхности существование новых двойных точек, оказываются зависимыми. Вероятно, эта теорема допускает много обобщений.

В абстрактном случае положение дел совершенно иное. Принадлежащее Зарискому обобщение принципа связности на случай произвольного поля k потребовало создания новой теории голоморфных функций на проективном многообразии V/k. Основная работа Зариского по этому вопросу — статья [20]; ей предшествовало появление алгебраической работы [12], где были введены так называемые кольца Зариского. (См. n° I,3, а также обзор Зариского [18] и работу [17].) Мы ограничимся здесь кратким описанием основных фактов этой теории.

Напомним, что k-множество называется *k-связным*, если оно не является объединением двух непустых непересекающихся k-множеств. Напомним также, что подполе $k' \subset k$ называется *квазиалгебраически замкнутым* внутри поля k, если вне поля k' не существует алгебраических и сепарабельных над полем k элементов поля k.

а) Прежде всего, в абстрактном случае можно придать принципу связности следующую формулировку:

(II) *Если общий цикл некоторой неприводимой алгебраической системы является многообразием, то любой цикл этой системы абсолютно связен.*

Под *абсолютной связностью* мы понимаем здесь связность над алгебраическим замыканием любого поля определения.

Эту теорему можно переформулировать в терминах алгебраических соответствий. Обозначим символом X цикл, являющийся графиком инцидентного соответствия T между многообразиями U и V. Это соответствие связывает носитель V алгебраической системы с параметризующим ее многообразием Чжоу U. Теорема (II) утверждает, что для любой точки $P \in U$ цикл $X(P)$ абсолютно связен. Поскольку для произвольного соответствия это неверно, даже если считать его невырожденным и k-неприводимым (это можно показать на примерах элементарных бирациональных соответствий), для доказательства теоремы следует выявить какое-то свойство, неявно содержащееся в свойстве инцидентности соответствия T.

Для этой цели рассмотрим нормализованную модель $\overline{U}$ многообразия U и цикл F произведения $U \times \overline{U}$, являющийся графиком соответствия между многообразиями U и $\overline{U}$. Подмногообразие $F \times \Delta \subset U \times \overline{U} \times V \times V$ (где Δ — диагональ произведения $V \times V$) при перестановке двух средних сомножителей бирегулярно переходит в некоторое подмногообразие Z произведения $U \times V \times \overline{U} \times V$, т. е. в график некоторого бирационального соответствия между произведениями $U \times V$ и $\overline{U} \times V$. При этом, поскольку соответствие Z бирегулярно вдоль каждой компоненты цикла X, пересечение $Z \cdot (X \times \overline{U} \times V)$ определено. Пусть $\overline{X} = \mathrm{pr}_{\overline{U} \times V} (Z \cdot (X \times \overline{U} \times V))$, и пусть $(P, \overline{P})$ — общая точка многообразия F. Тогда $X(P) = \overline{X}(\overline{P})$. Можно проверить, что то же верно для любой специализации $(P', \overline{P}')$, продолжающей специализацию $P \to P'$ над полем k. Наконец, поскольку многообразие $\overline{U}$ нормально, оно, в силу теоремы n° I,5, аналитически неприводимо. Совокупность этих обстоятельств наводит на мысль о справедливости следующего обобщения теоремы (II):

(III) *Пусть U, V — проективные многообразия, X — простой рациональный $U \times V$-цикл над полем определения k многообразий U* и *V, P — общая точка многообразия U и P' — точка многообразия U, в которой оно аналитически неприводимо. Тогда справедливы следующие утверждения:* (1) *если цикл $X \cdot (P' \times V)$ определен, то носитель цикла $X(P') = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P' \times V))$ k-связен;* (2) *если цикл $X \cdot (P' \times V)$ не определен, то носитель совокупности специализаций цикла $X(P) = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P \times V))$, продолжающих специализацию $P \longrightarrow P'$ над полем k, является k-связным алгебраическим k-подмножеством многообразия V [эта совокупность специализаций, очевидно, образует алгебраическую подсистему системы с общим циклом $X(P)$].*

С помощью этой теоремы нетрудно исследовать и вопрос об абсолютной связности; для этого нужно лишь расширить основное поле до алгебраического замыкания поля определения рассматриваемого цикла, т. е. до поля $\overline{k(P')}$. Заметим, что теорема (III) существенно сильнее утверждения (II), ибо в ней учитывается также случай, когда соответствие, имеющее своим графиком цикл X, обладает фундаментальными точками на многообразии U. Как заметил Зариский, в этом случае связность полного образа представляет собой нетривиальный факт даже в классическом случае.

b) Первый шаг в доказательстве теоремы (II) состоит в отыскании *арифметического критерия связности* k-подмножества W многообразия V/k. В классическом случае известно, что многообразие V тогда и только тогда аналитически неприводимо вдоль W, когда кольцо голоморфных функций на многообразии V вдоль W является областью целостности. Кроме того, имеет место следующий критерий связности: если множество W несвязно, то многообразие V аналитически приводимо вдоль W; если множество W связно, а многообразие V аналитически неприводимо в каждой точке множества W, то оно аналитически неприводимо вдоль W.

Действуя по аналогии, мы в абстрактном случае сначала вводим понятие голоморфной функции, исходя из хорошо известного понятия сходящейся в точке $Q \in V$ последовательности функций $x_i \in R_k(V)$. Заметим, что в топологии Зариского, в которой замкнутыми множествами являются алгебраические множества, многообразие V является компактным топологическим пространством.

Пусть (G_α) — произвольное конечное открытое покрытие подмножества W. Зариский определяет *голоморфную k-функцию на многообразии V вдоль множества W*, как совокупность таких последовательностей (x_{i_α}), $x_{i_\alpha} \in R_k(V)$, что (1) последовательность (x_{i_α}) равномерно сходится на множестве G_α; (2) в локальном кольце любой точки $Q \in G_\alpha \cap G_\beta$ последовательности (x_{i_α}) и (x_{i_β}) эквивалентны, т. е. сходятся к одному и тому же пределу.

Теперь можно доказать приведенный выше критерий связности над любым полем определения k. При этом многообразие V считается аналитически неприводимым вдоль множества W, если кольцо $o_k^*(W)$ голоморфных вдоль W функций на многообразии V является областью целостности. Это определение не совпадает с определением, данным в n° I,3 для случая, когда множество W является многообразием, так как аналитическая неприводимость многообразия V вдоль многообразия W и аналитическая неприводимость многообразия V в общей точке P многообразия W (если таковая имеет место) означают разные вещи и ни одна из них не следует из другой.

Сформулируем теперь основную *теорему об инвариантности* Зариского:

(IV) *Пусть, (P, P') — общая точка алгебраического соответствия T между двумя многообразиями V и V' над полем k. Пусть далее, W — некоторое k-подмножество многообразия V, а $W' = T(W)$ — полный образ множества W в многообразии V'. Предположим, что* (1) *поле $k(P)$ алгебраически замкнуто в поле $k(P, P')$*; (2) *многообразие V нормально в любой точке множества W*; (3) *отображение T^{-1} рационально, т. е. $k(P) \subset k(P')$*; (4) *отображение T^{-1} полурегулярно в каждой точке множества W', т. е. для любой T-соответствующей пары точек (Q, Q'), $Q \in W$, $Q' \in W'$ имеет место включение $\mathfrak{n}_k(Q', V') \supset \mathfrak{n}_k(Q, V)$, из которого, в частности, следует, что точка Q' является единственным образом точки Q. В этих предположениях кольца $o_k^*(W)$ и $o_k^*(W')$ k-изоморфны.*

Доказательство этой теоремы (см. Зариский [20], стр. 59) очень интересно, но, к сожалению, слишком длинно, чтобы его можно было воспроизвести здесь. Из теоремы следует, что k-связность множества W влечет k-связность множества W'. В самом деле, если множество W k-связно, то из условия [2] и приведенного выше критерия следует, что кольцо $\mathfrak{o}_k^*(W)$ является областью целостности. Поэтому, в силу теоремы (IV), кольцо $\mathfrak{o}_k^*(W)$ также является областью целостности, откуда и вытекает, что множество W' k-связно.

Пользуясь тем фактом, что всюду определенное регулярное рациональное соответствие преобразует связное множество в связное, можно показать, что теорема остается верной и *без условий* (3) *и* (4). Наконец, если нас интересует *лишь связность*, то условия (1) и (2) можно заменить следующими: (1′) *поле* $k(P)$ *квазиалгебраически замкнуто в поле* $k(P, P')$, *так что множество* $\mathrm{pr}_V(X\cdot(P'\times V))$ *является абсолютным подмногообразием многообразия* V; (2′) *многообразие* V *аналитически неприводимо в каждой точке множества* W. Теоремы (II) и (III) немедленно следуют из этих утверждений.

5. Фундаментальные и исключительные многообразия

Описанные выше исследования привели Зариского к ряду интересных алгебраических и геометрических утверждений, лишь часть которых ему удалось доказать (см. Зариский [18], стр. 131).

Пусть $\mathfrak{o}_k(W)$ — подкольцо поля $R_k(V)$, состоящее из функций, голоморфных вдоль многообразия W, так что $\mathfrak{o}_k(W)\subset\mathfrak{o}_k^*(W)$. Ясно, что если W представляет собой подмногообразие, то любой элемент кольца $\mathfrak{o}_k(W)$ индуцирует на W некоторую константу. Поэтому в кольце $\mathfrak{o}_k(W)$ существует максимальный идеал, состоящий из элементов, индуцирующих на W нуль. То же остается справедливым, если W является чистым связным алгебраическим k-подмножеством многообразия V; однако если W несвязно, то в кольце $\mathfrak{o}_k(W)$ существует несколько максимальных идеалов, соответствующих связным компонентам множества W. Отсюда можно было бы заключить, что $\mathfrak{o}_k(W)$ представляет собой локальное кольцо в смысле Крулля (см; Крулль [2]; см. также замечание в n° I,3) или, соответственно, полулокальное кольцо (см. n° I,3) в смысле Шевалле (см. Шевалле [1]), если было бы доказано, что $o_k(W)$ является *нётеровым кольцом*. Однако в общем случае это утверждение не доказано. Известно лишь, что оно верно, если *множество W является точкой*. В связи с этим стоит попытаться доказать его для случая, когда множество W можно перевести в точку с помощью некоторого преобразования, не изменяющего свойство кольца $o_k(W)$ быть нётеровым. Так мы приходим к рассмотрению исключительных подмногообразий и подмножеств многообразия V, которые вводятся Зариским с помощью следующего определения:

Алгебраическое подмножество W многообразия V называется *исключительным*, если существует такое рациональное преобразование T многообразия V в некоторое многообразие V', что (1) преобразование T полурегулярно в каждой точке многообразия W; (2) образ $W'_0 = T(W)$ подмножества W представляет собой нульмерное множество; (3) $T^{-1}(W'_0) = W$.

В случае когда многообразие V нормально, можно считать, что многообразие T также нормально, а поле $R_k(V')$ алгебраически замкнуто в поле $R_k(V)$. Из теории оценок следует тогда, что $o_k(W) = o_k(W'_0)$, так что *для исключительных множеств W кольцо $o_k(W)$ полулокально*. Кроме того, могут существовать точки $Q \in V$, не принадлежащие множеству W, и такие, что любая рациональная k-функция на многообразии V, голоморфная и равная нулю вдоль W, также голоморфна и равна нулю в точке Q.

Обозначим совокупность таких точек символом $H(W) \supset W$, а наименьшее алгебраическое k-множество, содержащее множество $H(W)$ — символом $\overline{H(W)}$. Можно показать, что если $H(W) = \overline{H(W)}$, то это множество является *исключительным*. Кроме того, можно доказать следующее утверждение, характеризующее связные подмножества многообразия V: *подмножество W тогда и только тогда связно, когда кольцо $o_k(W)$ содержит непостоянные функции* и $H(W) = W$.

Приведем теперь определение, формализующее еще одно классическое понятие. Пусть L/k — произвольная линейная система на многообразии V. Чистое k-связное подмножество $W \subset V$ называется *фундаментальным множеством системы* L, если любая функция x из поля $R_k(V)$, дивизор которой имеет вид $A_1 - A_2$, где A_1, A_2 — такие циклы системы L, что $W \subset A_1 \cap A_2$ постоянна на множестве W.

Пусть теперь L — линейная система, определенная некоторым подмодулем кольца $o_k(W)$. Ясно, *W является фундаментальным множеством системы L*, а *сама система не имеет на W базисных точек*. Обратное утверждение также верно. Поскольку в такой системе существует цикл, не пересекающийся с множеством W, некоторая система L и ее n-кратная система L_n одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют сформулированным условиям.

Поскольку $o_k(W) = o_k(H(W))$, доказательство нётеровости кольца $o_k(W)$ сводится к доказательству равенства $(H(W) = \overline{H(W)}$, ибо если это равенство имеет место, то, как отмечено выше, множество $H(W)$ исключительно. Это условие можно легко переформулировать в терминах линейных систем. Пусть сначала система L удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда любая k-компонента Z множества $\overline{H(W)}$ является фундаментальной для системы L.

В самом деле, пусть система L определяется базисной системой функций (x_i) кольца $o_k(W)$, а P — общая точка многообразия Z над полем k. Тогда $P \subset H(W)$, так что функции x_i индуцируют на Z константы.

Пусть теперь Z не является компонентой множества $\overline{H(W)}$, а Q — точка, принадлежащая Z, но не $H(W)$. Тогда существует функция x, лежащая в пересечении всех максимальных идеалов кольца $o_k(W)$ и не определенная в точке Q. Тем самым функция x определяет некоторый пучок циклов системы L, который продолжает удовлетворять всем сформулированным выше условиям, но для которого точка Q является базисной. Но тогда точка является базисной и для системы L_n, ибо иначе любой элемент этой системы, содержащий точку Q, содержал бы и многообразие Z, фундаментальное для этой системы. Это приводит к противоречию, так как общий член системы L_n, представляющий собой сумму n членов системы L, не содержит Z.

Итак, *если множество* $H(W)$ *неалгебраично, то существует некоторая линейная система* L, *подмногообразие* $Z \in V$, *фундаментальное для системы* L_n, *и точка* $Q \in Z$, *базисная для системы* L_n *при всех значениях* n.

Здесь Зариский высказывает *предположение* о том, что для достаточно больших n система L_n *не будет иметь базисных точек на многообразии* Z, если оно является *фундаментальным* для *всех* кратных данной системы L. Более смелое предположение: *для любой полной линейной системы* L *без неподвижных компонент на неособом многообразии* V, *для которой* $\dim L \geqslant 1$, *полная система* L_n *для достаточно больших* n *не имеет базисных точек.*

6. Одно свойство многообразий Чжоу

Помимо элементарных свойств, непосредственно вытекающих из определения, об алгебраическом строении конкретных многообразий Чжоу известно мало. Поскольку, как нетрудно видеть, любое многообразие можно считать многообразием Чжоу некоторой алгебраической системы положительных циклов, задача об изучении алгебраического строения многообразий Чжоу должна ставиться в добавочных предположениях или с некоторой особой точки зрения.

Чжоу (см. Чжоу [3]) занимался отысканием свойств, которые характеризовали бы *инцидентное соответствие* T в связи с вопросом о возможности (или невозможности) установить, является ли точка на многообразии Чжоу *неособой*, располагая лишь сведениями, касающимися соответствия T и носителя V алгебраической системы. Точнее, пусть P' — некоторая точка многообразия U и $X(P')$ — соответствующий ей V-цикл. Требуется найти локальное свойство цикла $P' \times X(P')$ на графике соответствия T, которое бирационально и аналитически инвариантно определяет природу точки P'. Напомним, что алгебраическая система называется *инволюторной*, если соответствие, обратное к инцидентному, является рациональным отображением многообразия V на многообразие U. В этом случае, в силу соотношения (1), имеет место равенство $\dim V = \dim X(P) + \dim U$, так что через общую точку многообразия V проходит лишь один цикл системы. Основной результат Чжоу формулируется следующим образом:

(I) *Пусть V — многообразие, на котором дана инволюторная алгебраическая система, параметризованная многообразием Чжоу U. Пусть, далее, $P' \in U$ — некоторая точка, а Z — простая компонента соответствующего цикла $X(P')$, вдоль которой соответствие, обратное к инцидентному, регулярно. Тогда многообразие V вдоль цикла Z аналитически эквивалентно прямому произведению $U \times Z$ вдоль цикла $P' \times Z$.*

Аналитическая эквивалентность означает здесь, что соответствующие локальные кольца изоморфны.

Доказательство этой теоремы использует некоторые структурные соотношения в локальных кольцах произведения двух многообразий и в основном состоит в сведении к нульмерному случаю. Оно основано главным образом на следующих двух алгебраических фактах, легко вытекающих из условий теоремы: (1) локальное кольцо $\mathfrak{n}_k(P', U)$ является подпространством локального кольца $\mathfrak{n}_k(Q', V)$ относительно естественных топологий, определенных в этих кольцах; (2) максимальный простой идеал кольца $\mathfrak{n}_k(Q', V)$ обладает конечным базисом над кольцом $\mathfrak{n}_k(P', U)$.

В качестве немедленного следствия из теоремы Чжоу вытекает следующее *условие простоты: произведение $U \times Z$ тогда и только тогда просто вдоль подмногообразия $P' \times Z$, когда многообразие U просто в точке P'.* Это условие также необходимо и достаточно для того, чтобы *многообразие V было просто вдоль цикла Z.*

7. Алгебраическая эквивалентность

Пусть V — произвольное неособое многообразие и $G^r(V)$ — группа его r-мерных циклов, $r = 0, \ldots, \dim V$. Рассмотрим подгруппу $G^r_a(V)$ группы $G^r(V)$, состоящую из r-мерных циклов многообразия V, *алгебраически эквивалентных нулю*, т. е. из циклов A, для которых на произведении $V \times U$, где U — некоторая неособая кривая, существует на кривой такой нульмерный цикл a нулевой степени, что

$$A = \mathrm{pr}_V (X \cdot (V \times a)).$$

Факторгруппа $\mathrm{G}^r(V)/\mathrm{G}_a^r(V)$ называется *группой алгебраической эквивалентности* r-мерных циклов многообразия V. Два цикла A и A', принадлежащие одному и тому же смежному классу из этой факторгруппы, называются *алгебраически эквивалентными*: $A \equiv A'$.

Докажем теперь следующую теорему:

(I) *Циклы Y_1, Y_2 многообразия V, принадлежащие одной и той же неприводимой алгебраической системе, алгебраически эквивалентны.*

Пусть P/k — общая точка проективного многообразия Чжоу U/k, параметризующего рассматриваемую систему. Мы должны доказать, что разность $Y_1 - Y_2$ любых двух специализаций цикла $X(P)$ принадлежит группе $\mathrm{G}_a^r(V)$. С этой целью заметим, что на многообразии U существуют такие две точки P_1 и P_2, что специализация $X(P) \to Y_i$ продолжает специализацию $P \to P_i$ над полем k ($i = 1, 2$). Отсюда непосредственно вытекает, что если многообразие U является неособой кривой, то теорема справедлива. Действительно, поскольку точки P_1 и P_2 являются простыми точками кривой U, определен цикл $\mathrm{pr}_V[X \cdot (V \times (P_1 - P_2)]$, ибо U есть кривая Чжоу. Этот цикл совпадает с циклом $Y_1 - Y_2$, в силу теоремы о единственности специализаций в простых точках. Случай, когда многообразие U является кривой с особенностями, сводится к предыдущему с помощью известного процесса нормализации многообразий.

Пусть теперь $n = \dim U > 1$. Рассмотрим две независимые общие точки P_1, P_2 многообразия U над полем k и обозначим через $X(P_1)$ и $X(P_2)$ соответствующие циклы. Пусть $u^{(a)}$, $a = 0, 1$ — независимые переменные над полем $k(P_1, P_2)$. Расслоим многообразие U на его пересечения с гиперплоскостями $L^{(a)}$ объемлющего пространства $\mathbf{P}^N$, определенными над полями $k(u^{(a)})$ соответственно. Общая точка пересечения $L^{(a)} \cdot U$, над полем $k(u^{(a)})$ является общей точкой многообразия U/k над полем k, а общая точка пересечения $L^{(0)} \cdot L^{(1)} \cdot U$ над полем $k(u^{(0)}, u^{(1)})$ является общей точкой пересечения $L^{(a)} \cdot U$ над полем $k(u^{(a)})$. Поскольку все пересечения являются многообразиями, доказательство теоремы без труда завершается теперь индукцией по размерности n.

Наконец, в случае когда точки P_1 и P_2 не являются общими, цикл Y_i по-прежнему является единственной специализацией цикла $X(P)$, продолжающей специализацию $P \to P_i$ над полем k, так что можно воспользоваться теоремой Вейля (см. А. Вейль [a], стр. 276), согласно которой существует такая общая специализация Q точки P над полем k и такое поле $K \supset k$, что геометрическое место точки Q над полем K является кривой, содержащей точки P_1 и P_2. Тем самым и этот случай сводится к предыдущему. Изложенное доказательство теоремы (I) принадлежит Игуза (см. Игуза [3]; А. Вейль [6]).

Из основных теорем исчисления циклов и из свойств специализаций немедленно вытекают утверждения:

(II) *Для любых многообразий* V, U *и любого цикла* $A \in \mathfrak{G}_a^r(V)$ *имеет место включение* $A \times U \in \mathfrak{G}_a^{r+m}(V \times U)$, *где* m — *размерность многообразия* U.

(III) *Если для простого подмногообразия* $U^m \subset V^n$ *и цикла* $A \in \mathfrak{G}_a^r(V)$ *определено пересечение* $(A \cdot U)_V$, *то* $A \cdot U \in \mathfrak{G}_a^{r+m-n}(V)$.

(IV) *Пусть* V, U — *два многообразия* $A \in \mathfrak{G}^{r+m}(V \times U)$ *и* $W \subset V \times U$, *причем* $\dim V = \dim W$ *и* $\mathrm{pr}_V W = V$. *Тогда* $\mathrm{pr}_V(A \cdot W) \in \mathfrak{G}_a^r(V)$.

Применяя утверждение (III) к случаю, когда подмногообразие U^m является общим сечением многообразия V линейным подмногообразием размерности $N - \dim A$ объемлющего пространства $\mathbf{P}^N$, определенным над трансцендентным расширением поля определения k-многообразий V и U, мы получим, что порядок цикла A равен нулю. Тем самым доказано, что

(V) *Порядки циклов группы* $\mathfrak{G}_a^r(V)$ *равны нулю. Если* $A - A' \in \mathfrak{G}_a^r(V)$, *то* $\deg A = \deg A'$.

Говорят, что циклы A и A' многообразия V *связаны цепной эквивалентностью*, если существуют такие системы r-мерных циклов $A = A_1, A_2, \ldots, A_{l+1} = A'$, такие неособые кривые $C_1, C_2, \ldots, C_l$ и такие циклы $X_i \subset C_i \times V$, что для любого $i = 1, 2, \ldots, l$ имеет место равенство

$$A_i = \mathrm{pr}_V(X_i \cdot (P_i \times V)),$$
$$A_{i+1} = \mathrm{pr}_V(X_i \cdot (P_i' \times V)), \text{ где } P_i \in C_i,\ P_i' \in C_i.$$

Можно думать, что отношение цепной эквивалентности слабее отношения алгебраической эквивалентности. Однако на самом деле справедливо следующее утверждение.

(VI) *Отношение алгебраической эквивалентности циклов совпадает с отношением цепной эквивалентности.*

Очевидно, достаточно доказать, что циклы A и A', связанные цепной эквивалентностью, алгебраически эквивалентны. С этой целью положим $C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_l$, $P = P_1 \times P_2 \times \ldots P_l$, $P' = P_1' \times P_2' \times \ldots \times P_l'$, $P \in C$, $P' \in C$, $D_i = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times C_l$, $i = 1, 2, \ldots, l$ и $X = \sum_{i=1} X_i \times D_i$ (последний цикл мы рассматриваем на произведении $C \times V$). Легко видеть, что

$$A + \sum_{i=2}^{l} A_i = \mathrm{pr}_V (X \cdot (P \times V)),$$

$$A' + \sum_{i=2}^{l} A_i = \mathrm{pr}_V (X \cdot (P' \times V)),$$

так что, в силу утверждения (I), имеет место включение $A - A' \in G_a^r(V)$.

Рассмотрим теперь два положительных цикла A и A'. Если они алгебраически эквивалентны, то, в силу свойства (V), они имеют одну и ту же степень μ, и потому принадлежат к множеству Чжоу $C^{r,\mu}(V)$. В этом множестве они связаны цепной эквивалентностью, причем предусмотренные определением циклы X_i можно считать положительными. Следовательно, из теоремы (VI) вытекает существование такого цикла $B \in G_+^r(V)$, что циклы $A + B$ и $A' + B$ принадлежат одной и той же неприводимой алгебраической системе положительных циклов. Тем самым доказана следующая теорема:

(VII) *Группа $G_a^r(V)$ совпадает с подгруппой, порожденной в группе $G^r(V)$ разностями положительных циклов, принадлежащих к одной и той же неприводимой алгебраической системе положительных циклов.*

Поскольку множество $C^{r,\mu}(V)$ алгебраично, любой положительный цикл принадлежит к однозначно определенной максимальной алгебраической системе положительных циклов. Другими словами, хотя никакой смежный класс из факторгруппы $G^r(V)/G_a^r(V)$ не является как множество циклов алгебраическим, его подмножество, состоящее из положительных циклов, представляет собой алгебраическую систему (абсолютно связную или несвязную; приводимую или неприводимую).

Алгебраическая эквивалентность в основном исследовалась итальянской школой в ее работах о непрерывных системах на поверхностях (по поводу истории вопроса см. Зариский [a], гл. V). Значительные результаты в этой области принадлежат Альбанезе [1], Севери [10, 12, 14], а также Пуанкаре [4,5] и Лефшецу [a]. Основания теории подробно разработаны Севери [31]. См. также книгу Севери [в]. Аксиоматический подход можно найти в книге А. Вейля [a], стр. 259. Дальнейшие упрощения принадлежат Севери [40].

8. Рациональная эквивалентность

Пусть $G_l^r(V)$ — подгруппа группы $G^r(V)$, состоящая из циклов многообразия V, *рационально эквивалентных нулю*, т. е. из r-мерных циклов A, для которых существует такой цикл $X \subset V \times D$ (где D — проективная прямая) и такой нульмерный цикл a нулевой степени на прямой D, что

$$A = \mathrm{pr}_V (X \cdot (V \times a)).$$

Факторгруппа $G^r(V)/G_l^r(V)$ называется *группой рациональной эквивалентности* r-мерных циклов на многообразии V. Циклы A, A', принадлежащие одному и тому же смежному классу, называются *рационально эквивалентными*: $A \equiv A'$.

Едва ли нужно отмечать, что при $r = \dim V - 1$, т. е. когда цикл A является V-дивизором, *отношение рациональной эквивалентности совпадает с отношением линейной эквивалентности для дивизоров*, определенным в n° III, 3. Это немедленно вытекает из рассмотрения графиков функции поля $k(V)$ на произведении $V \times D$.

Можно показать, что теорема (I) n° VI, 7 остается справедливой и для рациональной эквивалентности, если, конечно, соответствующая алгебраическая система рациональна. Для этого следует лишь перейти к бирациональной модели этой системы, являющейся проективным пространством. Это представление системы должно быть бирегулярным в точках Чжоу циклов Y_1 и Y_2.

Все остальные утверждения n° VI, 7 для рациональной эквивалентности также *остаются справедливыми*; *лишь в формулировке теоремы* IV *следует добавить условие* $[W : V] = 1$. Можно ввести и аналог цепной эквивалентности, заменив кривые C_i проективными прямыми. Поскольку носитель простого цикла C, построенного в доказательстве теоремы (VI), является в этом случае рациональным многообразием (см. n° I,6), *теорема* (VI) *справедлива и для рациональной эквивалентности*. Имеет место очевидное включение

$$G_l^r(V) \subset G_a^r(V) \subset G^r(V),$$

и по аналогии с соответствующим утверждением относительно алгебраической эквивалентности (см. n° VI. 7) можно установить, что множество положительных циклов, содержащихся в произвольном смежном классе фактор-группы $\mathbf{G}^r(V)/\mathbf{G}_l^r(V)$, является алгебраической системой циклов. Отсюда вытекает, что совокупность положительных циклов, рационально эквивалентных некоторому заданному положительному циклу, представляет собой однозначно определенную полную систему циклов. Естественно, что эта система вполне может оказаться приводимой или несвязной.

Однако между рациональной и алгебраической эквивалентностью существует все же заметное различие, которое проявляется в том, что в отличие от случая алгебраической эквивалентности не известно, *рациональны ли абсолютные компоненты рациональных систем*. Основная причина этого заключается в том, что хотя два рационально эквивалентных положительных цикла всегда можно, в силу определения, вложить в некоторую рациональную систему, но мы не знаем, можно ли такую систему выбрать во множестве $\mathbf{G}_+^r(V)$ положительных циклов. Севери многократно ставил этот вопрос (см. Севери [31]), но до сих пор ответ на него неизвестен даже для простейшего случая кривых проективного пространства.

Рассмотрим, например, множество $\mathbf{G}_+^{0,1}(V)$, т. е. совокупность всех точек многообразия V. Нужно выяснить, является ли эта совокупность, т. е. многообразие V, рациональной, если она содержится в некоторой рациональной системе циклов, принадлежащих группе $\mathbf{G}^{0,1}(V)$. В случае $\dim V = 2$ Севери показал, что геометрический род такой поверхности V равен нулю и что на ней нет кручения (см. n° VI, 10) Таким образом, сформулированный выше вопрос сводится к тому, чтобы узнать, будет ли обладающая этими свойствами поверхность рациональной. К сожалению, это тоже неизвестно.

Интересно заметить, что если многообразие V содержит такую алгебраическую систему положительных циклов, что любые два члена этой системы рационально эквивалентны на некотором $(r-1)$-мерном подмногообразии W многообразия V, то, как нетрудно видеть, эта система рациональна; справедливо и обратное утверждение. Отсюда следует, что сформулированный выше вопрос сводится к выяснению того, выполнено ли это условие для пересечения $S \cap \mathfrak{G}_+^r(V)$ любой рациональной системы циклов S с множеством $\mathfrak{G}_+^r(V)$ положительных циклов.

Заметим, наконец, что если $A - A' \in \mathfrak{G}_l^r(U)$ и $U \subset V$, то $A - A' \in \mathfrak{G}_l^r(V)$, но обратное не всегда справедливо, как показывает тривиальный пример двух простых точек на иррациональной плоской кривой.

Рациональная эквивалентность и соответствующее понятие системы рациональной эквивалентности введены Севери, который рассматривал их в ряде работ (например, [18, 20, 23, 28]) и затем частично подвел итоги в книге [а]. См. также критические замечания Севери [31, 41] и обзор истории вопроса в книге Конфорто [а]. Дальнейшие замечания см. ниже.

9.* Пересечение классов эквивалентности

Пусть A^r и B^s — два цикла неособого многообразия V^n. Может оказаться, что пересечение $A \cdot B$ не определено на V, ибо некоторая компонента множества $\|A\| \cap \|B\|$ может иметь размерность большую, чем $r+s-n$. В этом случае возникает важный вопрос, существует ли на многообразии V цикл A', алгебраически эквивалентный циклу A, для которого пересечение $A' \cdot B$ определено на V.

По линейности этот вопрос можно свести к тому случаю, когда A и B являются многообразиями. Пусть $V = \mathbf{P}^n$. Легко доказать, что в этом случае цикл A можно включить в такую алгебраическую систему положительных r-мерных циклов, что будет определено пересечение общего цикла этой системы с циклом B. Такой системой является, например, образ цикла A при некоторой коллинеации, параметры которой представляют собой общие элементы над полем $k = \mathrm{def}(A, B)$. Это было доказано Севери и ван дер Варденом (см. Севери [22] и ван дер Варден [5,XIV]); Ходжу [3] принадлежит более корректное доказательство, воспроизведенное в книге Ходжа и Пидо [a_2], стр. 141.

Если многообразие V^n не является проективным пространством, то подмногообразие A может вообще не принадлежать никакой алгебраической системе положительных V-циклов. Севери преодолел эту трудность, пользуясь виртуальными алгебраическими системами (см. Севери [21] и более полный обзор в книге Севери [в]). Главным инструментом, которым пользуется Севери, является применяемый им последовательно на разных этапах *метод проектирующих конусов*. Ниже следует набросок этого метода; доказательства, которые опираются на принцип счета констант и теорию специализаций, мы опускаем (см. Ходж и Пидо [a_2], гл. XII ван дер Варден [5, XIV]).

Пусть $\mathbf{P}^N$ — объемлющее пространство многообразия V^n и пусть A^r — некоторое подмногообразие многообразия V, определенное над полем k, являющимся также полем определения многообразия V и всех остальных многообразий, которые мы будем рассматривать. Тогда имеют место следующие теоремы, в которых символ W означает конус, проектирующий подмногообразие A из подпространства $[N-n-1] \subset \mathbf{P}^N$, общего над полем k:

(I) *Цикл $W \cdot V$ определен в пространстве $\mathbf{P}^N$.*

(II) *Все компоненты цикла $W \cdot V$, в частности подмногообразие A, просты.*

(III) *Никакая простая точка многообразия A не принадлежит компонентам A_i пересечения $W \cdot V$, отличным от A.*

(IV) *Для любого подмногообразия B многообразия V каждая компонента пересечения $A_i \cap B$, не содержащаяся в $A \cap B$, является собственной, а любая компонента пересечения $A_i \cap B$, содержащаяся в пересечении $A \cap B$, вложена собственным образом.*

Допустим теперь, что некоторая компонента пересечения $A \cap B$ имеет максимальную размерность $d > r+s-n$. В силу утверждения IV, выражение $X = W \cdot V - A$ представляет собой некоторый r-мерный цикл многообразия V, причем все компоненты множества $B \cap \|X\|$ имеют размерность, меньшую d. С другой стороны, в пространстве $\mathbf{P}^N$, согласно сказанному выше, существует такой $(N+r-n-1)$-мерный цикл $\overline{W}$, алгебраически эквивалентный циклу W, что в пространстве $\mathbf{P}^N$ определено пересечение $\overline{W} \cdot B$. Следовательно, в силу формальных свойств пересечения, пересечение $\overline{W} \cdot V \cdot B$ также определено. Так как $W \cdot V - \overline{W} \cdot V \in \mathrm{G}_a^r(V)$ (см. n° VI, 7), то цикл $\overline{W} \cdot V - X$ алгебраически эквивалентен на многообразии V циклу A, причем все компоненты множества $\|\overline{W} \cdot V - X\| \cap B$ имеют размерность, меньшую d. Отсюда вытекает, что, проводя индукцию по наибольшей размерности компонент пересечения $A \cap B$, мы найдем цикл $A' \equiv A$, для которого пересечение $A' \cdot B$ определено на многообразии V.

Кроме того, легко показать (переходя к некоторому алгебраическому расширению k' поля k, если оно конечно), что цикл A' можно считать определенным над полем k'. Для этого вершину конуса W следует взять не общей, а рациональной над полем k'.

Поскольку при специализации циклов пересечение и отношение алгебраической эквивалентности сохраняются (см. n° VI, 2), цикл $A' \cdot B$ принадлежит к смежному классу по подгруппе $\mathfrak{G}_a^r(V)$, однозначно определенному классами циклов A и B на многообразии V. Кроме того, в приведенной выше конструкции мы пользовались лишь рациональными алгебраическими системами (в самом деле, как мы увидим дальше в n° VI, 10, циклы W и $\overline{W}$ рационально эквивалентны в пространстве $\mathbf{P}^N$, а значит, циклы $W \cdot V$ и $\overline{W} \cdot V$ рационально эквивалентны на многообразии V (см. n° VI, 8). Поэтому эти результаты, установленные для алгебраической эквивалентности, справедливы также и для рациональной эквивалентности на многообразии V.

Итак, *любые два класса алгебраической или рациональной эквивалентности однозначно определяют некоторый третий класс, к которому принадлежит цикл-пересечение любых двух циклов из двух данных классов, если это пересечение определено.*

Это третий класс называется *пересечением* данных двух классов. Операция пересечения классов определена всегда. Любую формулу исчисления циклов на неособом многообразии, которая имеет, как правило, смысл лишь при некоторых условиях регулярности, можно заменить соответствующей формулой, относящейся к классам алгебраической эквивалентности и справедливой без всяких ограничений. Таким образом возникает исчисление классов эквивалентности, аналогичное исчислению классов гомологий топологических многообразий.

10. Теорема Севери и ее следствия

Для более глубокого изучения отношения рациональной эквивалентности полезна следующая теорема Севери (см. Севери [а], стр. 62), которая находит важные применения и в других вопросах (например, Самюэль воспользовался ею в теории пересечений; см. [в], стр. 102):

(I) *Для любого r-мерного цикла пространства $\mathbf{P}^n$ существуют такие $(n-r)$-мерные циклы $U_1, U_2, \ldots, U_{n-r}$, что их пересечение определено и*

$$A = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_{n-r}.$$

Доказательство, приведенное в работе Самюэля (см. Самюэль [в], стр. 98), мы опускаем. Заметим, что циклы U_i, существование которых утверждается в теореме (I), как хорошо известно из элементарных примеров, вообще говоря, не положительны. Некоторым уточнением теоремы (I) является следующая теорема (II), по существу и доказываемая Самюэлем.

(II) *Можно считать, что один из дивизоров U_i является конусом, а другие дивизоры имеют степень единица, т. е. представляют собой так называемые виртуальные гиперплоскости Севери. Кроме того, все дивизоры U_i определены над совершенным замыканием поля определения многообразия A.*

Записав каждый дивизор U_i в виде разности двух положительных дивизоров, мы видим также, что

(III) *Компоненты любого r-мерного цикла пространства $\mathbf{P}^n$ являются компонентами пересечений положительных дивизоров этого пространства.*

Рассмотрим теперь произвольное неособое многообразие V^n, определенное над полем k, и на нем рациональную систему V-циклов, определенную над полем k, общим циклом которой является цикл $X(P) = \mathrm{pr}_V(X \cdot (P \times V))$, где X — некоторый однородный $(V \times \mathbf{P}^m)$-цикл, рациональный над полем k, а P — общая над полем k точка пространства $\mathbf{P}^m$.

Может оказаться, что проекция на многообразие V некоторой компоненты цикла X отлична от V. Пусть $\overline{X}$ — цикл, получающийся после удаления таких компонент. Мы будем считать, что он отличен от нуля. Этот цикл рационален над полем k и, кроме того, $\mathrm{pr}_{\mathbf{P}^m} \| \overline{X} \| = \mathbf{P}^m$. Пусть Q — общая точка многообразия V над полем k. Тогда цикл $Y(Q) = \mathrm{pr}_{\mathbf{P}^m}(\overline{X} \cdot (Q \times \mathbf{P}^m))$ определен и рационален над полем $k(Q)$ (см. утверждение (I) n° I,9).

Подходящим образом расширив поле k, можно считать его совершенным. Применяя теоремы (I) и (II) к циклу $Y(Q)$, мы можем считать, что $Y(Q)=U_1\cdot U_2\cdot\ \ldots$ $\ldots\ \cdot U_{m-s}$, где U_i—дивизоры пространства $\mathbf{P}^m$, рациональные над полем $k(Q)$. Подсчетом констант (см. n° VI, 3) легко получить, что $s=r+m-n$. Геометрическое место точки $Q\times U_i(Q)$ на произведении $V\times\mathbf{P}^m$ над полем k представляет собой дивизор, рациональный над полем k. Легко видеть, что пересечение $X_1\cdot X_2\cdot\ \ldots\ \cdot X_{m-s}\cdot(Q\times\mathbf{P}^m)$ определено на произведении $V\times\mathbf{P}^m$ и равно $X\cdot(Q\times\mathbf{P}^m)$. Отсюда вытекает, что проекция на многообразие V разности циклов $\overline{X}$ и $X_1\cdot X_2\cdot\ \ldots\ \cdot X_{m-s}$ отлична от V. Тем самым доказана следующая теорема, которую можно рассматривать как некоторое обобщение теоремы Севери (I):

(IV) *Если для $(m+r)$-мерного цикла X произведения $V\times\mathbf{P}^m$, рационального над совершенным полем определения k многообразия V, имеет место соотношение $\mathrm{pr}_{\mathbf{P}^m}\|X\|=\mathbf{P}^m$, то существуют такие дивизоры $X_1\ldots,X_{n-r}$ многообразия $V\times\mathbf{P}^m$, рациональные над полем k, что*

$$X=X_1\cdot X_2\cdot\ \ldots\ \cdot X_{n-r}+Z,$$

где Z — такой $(m+r)$-мерный цикл многообразия $V\times\mathbf{P}^m$, что $\mathrm{pr}_V\|Z\|\neq V$.

Алгебраическую систему вида

$$\mathrm{pr}_V\,((X_1\cdot X_2\cdot\ \ldots\ \cdot X_{n-r}+Z)\cdot(P\times V)),$$

где $\mathrm{pr}_V\|Z\|\neq V$, а P — общая точка некоторого проективного пространства, Севери, первым рассмотревший такие системы, называет *частичной системой пересечения*.

Заметив, что любой дивизор X_i определяет на многообразии V виртуальную линейную систему $\mathrm{pr}_V(X_i\cdot(P\times V))$, назовем компоненту общего цикла алгебраической системы *полунеподвижной*, если ее геометрическое место на многообразии V является собственным подмножеством этого многообразия. Оказывается, что имеет место следующая важная теорема Севери (см. Севери [a], стр. 112):

(V) *Общий цикл любой рациональной системы, с точностью до полунеподвижных компонент, является пересечением общих циклов некоторых линейных систем многообразия V. Следовательно, он представляет собой некоторую линейную комбинацию общих циклов эффек-*

тивных линейных систем (снова с точностью полунеподвижных компонент).

Системы, обладающие указанными в этой теореме свойствами, Севери назвал *системами рациональной эквивалентности.* Мы видим, что они совпадают с нашими рациональными системами. Если ограничиваться положительными циклами, то такое отождествление рациональных систем с частичными или полными системами пересечения уже места иметь не будет. Это можно показать на примерах, простейший из которых доставляется системой всех пар прямых линий проективного пространства. Эта система, очевидно, является рациональной, но, как легко показать, ее нельзя представить в виде пересечения систем положительных циклов.

При $V=\mathbf{P}^n$, в силу теорем (I) и (IV), цикл Z равен нулю, т. е. *любая рациональная система в пространстве* $\mathbf{P}^n$ *является полным пересечением линейных систем.* Поэтому множество всех r-мерных циклов степени d пространства $\mathbf{P}^n$ представляет собой некоторый смежный класс факторгруппы $\mathbf{G}^r(\mathbf{P}^n)/\mathbf{G}^r_l(\mathbf{P}^n)$. Так как такой смежный класс содержит все циклы вида $d\cdot\mathbf{P}^r$, где $\mathbf{P}^r$ — произвольное подпространство пространства $\mathbf{P}^n$, то любой класс рациональной эквивалентности степени d пространства $\mathbf{P}^n$ является d-кратным некоторого класса первой степени. Из этого факта следует, что в любом классе рациональной эквивалентности существуют циклы, все компоненты которых являются линейными пространствами. Тем самым доказано, что

(VI) *для рационального многообразия V факторгруппа* $\mathbf{G}^r(V)/\mathbf{G}^r_l(V)$ *является бесконечной циклической группой.*

Возвращаясь к теореме (IV), обозначим символом $\mathbf{P}^N$ пространство, объемлющее многообразие V, и рассмотрим каждый дивизор X_i как частичное пересечение некоторого дивизора на произведении $\mathbf{P}^N\times\mathbf{P}^m$ с многообразием V так, чтобы проекция вычета пересечения не совпадала с V. Тогда легко получить следующую теорему:

(VII) *Любая рациональная система на проективном многообразии V вне некоторых своих полунеподвижных компонент может быть высечена на этом многообразии некоторой системой-пересечением объемлющего пространства.*

Представляется вероятным, что если заданная на многообразии V рациональная система эффективна, то высекающую ее систему тоже можно выбрать эффективной. Севери доказал это утверждение вместе с приведенными выше теоремами для случая поверхности над полем комплексных чисел.

Приведем несколько дополнительных замечаний, связанных с принадлежащим Севери понятием рациональной эквивалентности.

Два r-мерных цикла X и $\overline{X}$ на неособом многообразии V Севери называет *рационально эквивалентными*, если $X=\sum_{i=1}^{s} m_i X_i$, $\overline{X}=\sum_{i=1}^{s} m_i \overline{X}_i$, где m_i — целые числа, а X_i, $\overline{X}_i$ — циклы, принадлежащие одной и той же *«системе полного пересечения»* на многообразии V, т. е. совокупности циклов-пересечений дивизоров, принадлежащих к $n-r$ заданным линейным системам на многообразии V.

Таким образом, рационально эквивалентные нулю r-мерные циклы имеют вид $\sum_{i=1}^{s} m_i (X_i - \overline{X}_i)$. В этой форме определение принадлежит Тодду [2]. Севери доказал (см. [a], стр. 83), что любые два цикла, рационально эквивалентные в этом смысле, целиком содержатся в некоторой (быть может, виртуальной) системе полного пересечения и, следовательно, в некоторой рациональной системе.

Обратно, в силу теоремы (V) n° VI, 10 (эта теорема также принадлежит Севери), два цикла, принадлежащие к одной и той же рациональной системе, рационально эквивалентны в смысле Севери. Отсюда следует, что *наше понятие рациональной эквивалентности совпадает с понятием, введенным Севери.* Вместе с Севери мы будем называть *системой эквивалентности* любую алгебраическую подсистему r-мерных циклов, целиком содержащуюся в некоторой рациональной системе. Очевидно, такая система состоит из циклов, рационально эквивалентных друг другу. Вместе с теоремой (VI) n° VI, 10, это определение немедленно позволяет сформулировать следующее утверждение: совокупность всех эффективных r-мерных циклов заданной степени пространства $\mathbf{P}^n$, так же как и любая алгебраическая подсистема такой совокупности, представляет собой систему эквивалентности.

Приведем некоторые более глубокие результаты топологического и трансцендентного характера, полученные Севери в его исследованиях систем эквивалентности (по поводу общих понятий, которыми мы будем пользоваться, см. гл. IX).

Пусть Σ — произвольная неприводимая d-мерная алгебраическая система r-мерных циклов неособого многообразия V, определенного над полем комплексных чисел, и пусть C^d — множество Чжоу системы Σ. Когда переменная точка множества C^d пробегает некоторый (топологический) алгебраический q-мерный цикл Γ^q риманового многообразия этого множества $(0 \leqslant q \leqslant 2d)$, соответствующий элемент системы

Σ заметает некоторый (топологический) цикл $T(\Gamma^q)$ риманового многообразия V. Этот факт позволяет сформулировать следующие определения:

a) Система Σ называется системой *нулевой q-мерной циркуляции*, если $T(\Gamma^q)\sim 0$ для любого q-мерного цикла Γ^q.

b) Система Σ называется системой *алгебраической q-мерной циркуляции*, если для любого q-мерного цикла Γ^q цикл $T(\Gamma^q)$ алгебраичен.

c) Система Σ называется системой *без кручения*, если для любого q-мерного цикла Γ^q из соотношения $\lambda T(\Gamma^q)\sim 0$ (где λ — целое число) следует, что $T(\Gamma^q)\sim 0$ на многообразии V.

Севери доказал ([20,23]; см. также [г]), что любая система эквивалентности удовлетворяет условию c); кроме того, она удовлетворяет условию a), если число q нечетно, и условию b), если число q четно. Неизвестно, являются ли эти условия также достаточными для того, чтобы некоторая алгебраическая система была системой эквивалентности. Севери, однако, предполагает, что это так.

Назовем *системой псевдоэквивалентности* любую алгебраическую систему, некоторое кратное которой представляет собой систему эквивалентности. Эти системы также обладают свойствами a) и b), эти свойства характеризуют системы псевдоэквивалентности. Существование таких систем зависит от существования топологического кручения для многообразий V и C^d. Севери доказал, что если V является многообразием без кручения, то любая система псевдоэквивалентности является системой эквивалентности.

Если многообразие V представляет собой поверхность, то алгебраический ряд Σ тогда и только тогда может быть рядом псевдоэквивалентности, когда поверхность V регулярна, а ее геометрический род равен нулю. Этот ряд в свою очередь тогда и только тогда является рядом эквивалентности, когда поверхность V не имеет кручения (см. Севери [20]). Интересный вопрос о том, является ли такая поверхность рациональной, еще не решен.

Пусть теперь Σ — некоторый алгебраический ряд порядка l на многообразии V, удовлетворяющий условиям a) и b). Из этих условий немедленно следует, что для любой p-формы первого рода ω^p на многообразии V периоды формы $\sum_{j=1}^{l}\omega^p_{(j)}$ равны нулю; здесь $\omega^p_{(j)}$ обозначает форму ω^p, вычисленную в точке P_j общей группы ряда Σ; $\omega^p_{(j)}$ тоже является формой первого рода. В самом деле, все p-мерные циклы на многообразии V либо гомологичны нулю, в силу условия a), либо алгебраичны, в силу условия b) (см., например, Ходж [a], стр. 213).

Следовательно, в силу фундаментальной теоремы о единственности гармонической формы с заданными периодами (см. n° IX, 4), имеет место равенство $\sum_{j=1}\omega^p_{(j)}=0$. Воспользовавшись в случае $r=\dim V=2$ обратным утверждением, в силу которого любой цикл, аннулирующий периоды каждого двойного интеграла первого рода, является алгебраичным (критерий Лефшеца (см. n° X, 6)), Севери [28] весьма просто доказал, что алгебраический ряд на неособой поверхности V тогда и только тогда является рядом псевдоэквивалентности, когда $\sum_{j=1}^{l} \omega_{(j)}^{p}=0$, $p=1, 2$, для всех p-кратиых форм первого ряда на этой поверхности.

Эта теорема представляет собой распространение классической теоремы Абеля, относящейся к случаю линейных рядов иа кривой. Очевидно, что попытка распространить этот результат на многообразие V более высокой размерности требует критерия алгебраичности p-мерных циклов на многообразии V. Этот вопрос пока не решен (см. иекоторые предположения Ходжа в работах [4, 5, 8], см. также n° X, 6).

Заметим в заключенне, что, хотя при современном состоянии теории понятие полной системы эквивалентности эффективных r-мерных циклов доставляет весьма серьезные трудности, Севери удалось доказать, что еслн некоторая положительная группа l точек на поверхности не содержнтся в иррегулярной группе, то она однозначно определяет некоторый полиый ряд иулевой одномерной циркуляции, размерность которого равна $2l-q$, где q — иррегулярность поверхиости. При $2l \leqslant q$ этот ряд состоит лишь из данной группы. Если эта группа принадлежит к ∞^{i-1} иррегулярным группам, то она прииадлежит также некоторому ряду порядка l нулевой одномерной циркуляции, размерность которого не превосходит $2l-q+i$ (см. Севери [28]); это дает теорему Римана—Роха для таких рядов (см. n° X, 9).

VII

Абелевы многообразия с алгебраической точки зрения и смежные вопросы

Теория абелевых многообразий с трансцендентной точки зрения носит вполне классический характер (лишь в недавнее время она подверглась пересмотру в работах Игуза [3], А. Вейля [4] и Чжоу [6]). Выдающиеся результаты принадлежат здесь Пикару, Пуанкаре, Энриквесу, Кастельнуово, Севери и Лефшецу; см., например, обзор Лефшеца [6], а также книгу Зигеля [a]. Абстрактное, чисто алгебраическое исследование абелевых многообразий было проведено только недавно и положило начало новой прекрасной главе алгебраической геометрии. Основные идеи и общие методы этой теории принадлежат главным образом А. Вейлю (см. монографии [b, c]), а приложения связаны в первую очередь с именами Чжоу (см. Чжоу [6, 7, 8, 9]), Мацусака (см. Мацусака [3, 4, 5, 6, 7, 8]), Нерона (см. Нерон [1, 2]) и Самюэля (см. Нерон и Самюэль [1]). В книге Ленга [8] можно найти новое изложение теории, включающее результаты, полученные после выхода в свет монографий Вейля.

Важнейшими приложениями теории абелевых многообразий являются построение якобиева многообразия кривой и, более общо, многообразия Пикара произвольного многообразия, а также доказательство существования конечного базиса группы рациональной эквивалентности на многообразии над любым полем определения. В классическом случае последний результат сводится к теореме Севери (см. Севери [12, 14, 22, 34, 36]). Следует упомянуть еще теоретико-числовые приложения теории: принадлежащее А. Вейлю доказательство гипотезы Римана для дзета-функций алгебраических кривых над конечными полями (именно эта проблема и послужила толчком, побудившим А. Вейля построить абстрактную теорию абелевых многообразий) и наиболее общие известные результаты о диофантовых уравнениях, связанные с именами Морделла, А. Вейля и Зигеля.

1. Общая теория абелевых многообразий. Якобиевы многообразия

Законом композиции на алгебраическом многообразии V называется произвольное рациональное отображение $f: V \times V \rightarrow V$. Если это отображение всюду определено и удовлетворяет групповым аксиомам, то многообразие V называется *алгебраической группой*. Если отображение f не всюду определено, но удовлетворяет групповым аксиомам в общих точках многообразия V, то существует бирациональная модель многообразия V, на которой отображение f индуцирует групповой закон композиции. Эта модель является так называемым *абстрактным многообразием* в смысле А. Вейля: она состоит из конечного числа открытых в топологии Зариского подмножеств U_i проективных моделей одного и того же поля функций. При этом требуется, чтобы бирациональное соответствие между любой парой моделей было бирегулярно во всякой паре соответствующих точек, если каждая из них принадлежит своему множеству U.

О возможности вложения абстрактного многообразия в проективное пространство заранее ничего нельзя сказать. Абстрактное многообразие называется *полным*, если любая точка поля функций на нем имеет своим центром точку, лежащую на одном из открытых множеств, из которых составлено это многообразие.

Любое групповое многообразие V обладает двумя группами бирегулярных автоморфизмов — правых и левых сдвигов. Левый сдвиг на точку $a \in V$ представляет собой рациональное отображение $x \rightarrow f(a, x)$. Подобным же образом определяются правые сдвиги. В дальнейшем закон композиции алгебраической группы мы будем записывать мультипликативно, а если известно, что он абелев, то аддитивно. В последнем случае правый и левый сдвиги на одну и ту же точку совпадают.

Согласно А. Вейлю, *абелевым многообразием* называется алгебраическая группа, которая полна как многообразие. Помимо исторических соображений, это название оправдывается следующей теоремой Шевалле:

(I) *Закон композиции абелева многообразия коммутативен.*

Мы приведем краткое доказательство этой теоремы, принадлежащее А. Вейлю, ибо оно весьма удобно для иллюстрации основных методов рассматриваемой теории. Для простоты будем считать, что абелево многообразие $\mathfrak{A}$ является проективным многообразием; это не является ограничением, так как в ходе развития теории показывается, что любое абелево многообразие обладает неособой бирегулярной проективной моделью (см. теорема (I), n° VII, 3). Пусть x, y — независимые общие точки многообразия $\mathfrak{A}$, и пусть $T \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ — геометрическое место точки (x, yxy^{-1}). Очевидно, что $(x, x) \in T$, так что диагональ Δ принадлежит многообразию T. Коммутативность закона композиции равносильна равенству $x = yxy^{-1}$, т. е. равенству $\Delta = T$. Покажем сначала, что $\dim \Delta = \dim T = \dim \mathfrak{A}$. Для этого достаточно доказать, что $\dim (T \cap (e \times \mathfrak{A})) = \dim (e \times e) = 0$, где e — единица группы $\mathfrak{A}$, ибо точка $(e, e) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, как и всякая точка группового многообразия, проста, так что

$$\dim T \cap (e \times \mathfrak{A}) \geqslant \dim T - \dim \mathfrak{A}.$$

(Здесь мы пользуемся тем, что через простую точку $a \in U \cap V \subset W$ проходит компонента пересечения $U \cap V$, размерность которой не меньше числа $\dim U + \dim V - \dim W$.) С этой целью мы покажем, существенно используя полноту многообразия $\mathfrak{A}$, что $T \cap (e \times \mathfrak{A}) = (e, e)$. Пусть $(e, a) \in T \cap (e \times \mathfrak{A})$, т. е. пусть точка (e, a) является специализацией точки (x, yxy^{-1}). Эту специализацию можно продолжить до некоторой точки поля функций на многообразии $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, которой, в силу полноты многообразия, соответствует некоторая точка $(e, y_0) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. Поэтому $a = y_0 e y_0^{-1} = e$. Тем самым теорема уже почти доказана. В самом деле, поскольку $\dim T = \dim A$, точка yxy^{-1} алгебраична над полем $k(x)$; но она рациональна над полем $k(x, y)$, а точки x, y независимы; поэтому точка yxy^{-1} рациональна над полем $k(x)$, так что $yxy^{-1} = exe^{-1} = x$.

Следующие два утверждения чрезвычайно полезны и постоянно используются в теории абелевых многообразий. Доказательства их основаны на аналогичных принципах.

(II) *Каждое рациональное отображение $f: V \to \mathfrak{A}$ некоторого многообразия V в абелево многообразие $\mathfrak{A}$ определено в любой простой точке многообразия V.*

(III) *Каждое рациональное отображение $f: V \times W \to \mathfrak{A}$ произведения двух многообразий в абелево многообразие распадается, т. е. существуют такие рациональные отображения $f_1: V \to \mathfrak{A}$ и $f_2: W \to \mathfrak{A}$, определенные однозначно с точностью до сдвига, что $f(P, Q) = f_1(P) + f_2(Q)$ для любой точки $(P, Q) \in V \times W$.*

Из теоремы (III) легко следует, что любое рациональное отображение группового многообразия в абелево с точностью до сдвига является гомоморфизмом; в частности, на абелевом многообразии нельзя ввести другое строение алгебраической группы (если не менять единичную точку). Другое важное следствие заключается в том, что рациональное отображение унирационального миогообразия в абелево всегда постоянно, т. е. имеет своим образом точку. Основная причина этого заключается в том, что на прямой существуют два существенно различных групповых закона: аддитивный и мультипликативный.

Нижеследующая теорема принадлежит Вейлю и является абстрактным аналогом теоремы полной приводимости Пуанкаре:

(IV) *Для любого абелева подмногообразия $\mathfrak{B}$, т. е. полного подмногообразия, являющегося подгруппой абелева многообразия $\mathfrak{A}$, существует такое абелево подмногообразие $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, причем пересечение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ конечно.*

Абелево многообразие $\mathfrak{A}$ называется *изогенным* абелеву многообразию $\mathfrak{B}$, если существует эпиморфизм $\lambda: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ с конечным ядром. Такой эпиморфизм называется *изогенией*. Отношение изогенности, очевидно, рефлексивно и транзитивно. Доказательство того факта, что оно также симметрично, опирается на довольно глубокий результат из теории абелевых многообразий, согласно которому степень эндоморфизма $n\delta$ умножения на целое число n для абелева многообразия $\mathfrak{A}$ размерности g конечна и равна n^{2g}. Пусть n — степень изогении λ, v — общая точка многообразия $\mathfrak{B}$ и $\{u_i\}$ — конечное множество точек многообразия $\mathfrak{A}$, являющихся прообразом точки v при изогении λ. Рассмотрим точку $w = p^r \sum_i u_i$, где p — характеристика поля определения k (при $p = 0$ мы считаем, что $p^r = 1$). Нетрудно показать, что для достаточно большого r точка w рациональна над полем $k(v)$, а отображение $\mu: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, определенное формулой $\mu(v) = w$, гомоморфно. Тот факт, что μ является изогенией, следует из того, что $\mu\lambda = p^r n\delta$.

Абелево многообразие называется *простым*, если оно не содержит нетривиальных абелевых подмногообразий. Из теоремы (IV) непосредственно вытекает, что любое абелево многообразие изогенно прямому произведению простых абелевых многообразий, определенных однозначно с точностью до изогении.

С каждой алгебраической кривой C рода $g > 0$ можно связать некоторое специальное абелево многообразие J, называемое якобиевым многообразием этой кривой.

Определение. Пусть C — неособая кривая, определенная над полем k. Многообразие $J(C)$ называется *якобиевым многообразием* кривой C, если выполнены следующие условия: 1) многообразие $J(C)$ представляет собой абелево многообразие, определенное над некоторым полем $k' \supset k$; 2) существует рациональный над полем k' гомоморфизм f группы $\mathbf{G}_a(C)$ на группу $J(C)$, ядро которого совпадает с подгруппой $\mathbf{G}_l(C)$; он называется каноническим гомоморфизмом; 3) гомоморфизм f обладает свойством универсальности.

Предусмотренное условием 2) свойство рациональности гомоморфизма f означает, что этот гомоморфизм переводит рациональные циклы на кривой C в рациональные же циклы и сохраняет отношение специализации циклов над любым расширением поля k', содержащимся в поле $\mathbf{K}$. Условие 3) означает, что любой рациональный гомоморфизм g группы $\mathbf{G}_a(C)$ в произвольное абелево многообразие $\mathfrak{A}$ является композицией гомоморфизма f и некоторого рационального гомоморфизма многообразия $J(C)$ в многообразие $\mathfrak{A}$. Из этого условия непосредственно следует, что если многообразие $J(C)$ существует, то оно единственно с точностью до бирегулярного изоморфизма.

Существование якобиева многообразия впервые было доказано А. Вейлем (см. А. Вейль [в], гл. V), но лишь в виде абстрактного многообразия. Понятие абстрактного многообразия и было предложено Вейлем в основном для решения этой задачи.

Позднее Чжоу доказал следующую теорему (см. Чжоу [8]; в этой работе читатель найдет доказательство всех фактов, упоминаемых в настоящем пункте):

(V) *Для любой кривой C существует проективная модель многообразия $J(C)$. Более того, эту модель и гомоморфизм f можно построить так, чтобы они были определены над полем определения k кривой C.*

Дадим набросок доказательства этой теоремы.

Пусть $D = \mathbf{G}(C)/\mathbf{G}_l(C)$ и $D_0 = \mathbf{G}_a(C)/\mathbf{G}_l(C)$. Таким образом, D_0 представляет собой подгруппу группы D классов линейной эквивалентности, состоящую из классов нулевой степени. В соответствии с этим множество классов эквивалентности степени n образует смежный класс D_n по подгруппе D_0. Рассмотрим, в частности, множество D_g, где g — род кривой C. Как следует из теоремы Римана — Роха, каждый класс линейной эквивалентности из этого множества содержит, вообще говоря, один и только один положительный дивизор. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между почти всеми точками g-кратного симметрического произведения кривой C на себя, которое мы будем обозначать символом $C^{(g)}$, и почти всеми классами из множества D_g. (Симметрическое произведение $C^{(g)}$ строится следующим образом: выбирается g независимых общих точек $P_1, \ldots, P_g$ кривой C и строится композит $k(P_1) \times \ldots \times k(P_g)$. В этом поле выделяется максимальное подполе, инвариантное относительно симметрической группы автоморфизмов, порожденных перестановками точек P_i. Моделью этого инвариантного подполя и является многообразие $C^{(g)}$.)

Обычно (см., например, ван дер Варден [9]) именно этот факт служит отправным пунктом для построения якобиева многообразия. Здесь, однако, необходимо преодолеть возникающую с самого начала трудность, которая заключается в том, что специальные классы из множества D_g содержат бесконечно много положительных дивизоров.

При попытках устранить эти исключения мы можем прийти к модели с особенностями, которая поэтому не годится для построения якобиева многообразия. На этом пути и возникла идея Вейля о введении абстрактных многообразий.

Чжоу рассмотрел более простое образование, а именно, множество классов D_n при $n > 2g-2$. Хорошо известно, что специальных классов в этом множестве нет. Любому классу $B \in D_n$ соответствует на $C^{(n)}$ подмногообразие $F(B)$ размерности, в точности равной $n-g$. Если класс B рационален над полем $k' \supset k$, то многообразие $F(B)$ определено над полем k'.

Пусть теперь P' — общая точка многообразия $C^{(n)}$ над полем k, и $B = B(P')$ — рациональный над полем $k(P')$ класс дивизоров, соответствующий точке p'. В этом случае подмногообразие $F(B)$ рационально над полем $k(P')$, так что его координаты Чжоу определяют рациональную над полем $k(P')$ точку P некоторого проективного пространства P^N. Пусть X — геометрическое место точки P над полем k. Его размерность равна g. Рассмотрим рациональное отображение $P = f(P')$ многообразия $C^{(n)}$ на многообразие X. Оно определено над полем k. Чжоу доказывает, что X представляет собой многообразие Чжоу инволюторной системы (см. n° VI, 6) с общим членом $F(B)$, а f — соответствующее инцидентное соответствие. Далее Чжоу доказывает, что многообразие $C^{(n)}$ неособо. В силу критерия Чжоу (n° VI, 6), отсюда вытекает, что многообразие X также неособо. Кроме того, точки многообразия X взаимно однозначно соответствуют элементам множества D_n, причем равенство $f(P') = f(Q')$, где $P', Q \in C^{(n)}$, имеет место тогда и только тогда, когда C-дивизоры, соответствующие точкам P' и Q', линейно эквивалентны на кривой C.

Очевидно, что для достаточно большого n в множестве D_n существует рациональные над полем k классы. Пусть B^* один из этих классов, и пусть $P^0 \in X$ — соответствующая ему точка. Она также рациональна над k. Для любых точек P^1 и P^2 многообразия X мы определим их *сумму* $P^1 + P^2$ как точку, соответствующую классу $B^1 + B^2 - B^*$, где B^1 и B^2 — классы, соответствующие точкам P^1 и P^2.

Тем самым на многообразии X определяется некоторый закон композиции. Оказывается, что этот закон представляет собой рациональную функцию над полем k, однозначно определенную в каждой точке многообразия $X \times X$. Поскольку многообразие X не имеет особенностей, эта функция регулярна в каждой точке многообразия $X \times X$. Теперь уже легко видеть, что этот закон определяет на X строение абелева многообразия с точкой P^0 в качестве нуля; точкой, обратной к точке P, служит образ класса $2B^* - B$, где B — класс точки P.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_s$ и $q_1, \ldots, q_s$ — дв системы дивизоров n-й степени на кривой C. Отображение $f: C^{(n)} \to X$ индуцирует отображение множества дивизоров n-й степени в многообразие X; мы обозначим его той же буквой f. Тогда равенство $\sum_1^s f(p_i) = \sum_1^s f(q_i)$ (здесь сложение понимается в смысле закона композиции, определенного на многообразии X) имеет место тогда и только тогда, когда $\sum_1^s p_i \equiv \sum_1^s q_i$. Это немедленно следует из того факта, что существует дивизор $p \in B^*$ и два положительных дивизора p_0 и q_{0_s}, удовлетворяющие соотношениям $\sum_1^s p_i \equiv (s-1)p + p_0$, $\sum_1^s q_i = (s-1)q + q_0$, если воспользоваться сделанным выше замечанием, что из равенства $f(p_0) = f(q_0)$ следует эквивалентность $p_0 \equiv q_0$.

Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}$ — независимые общие точки кривой C над полем k, и пусть x — точка кривой C, общая над полем $k(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})$. Для любого нульмерного цикла $p = \sum_1^s n_i(x^{(i)})$, принадлежащего группе $\mathfrak{G}_a(C)$, положим $f(p) = \sum_1^s n_i f(x^{(i)})$. Из сказанного выше следует, что функция f определяет рациональный гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_a(C)$ на многообразие X, ядро которого совпадает с подгруппой $\mathfrak{G}_l(C)$; кроме того, этот гомоморфизм определен над полем k и обладает свойством универсальности. Таким образом, $X = J(C)$.

При $n = 1$ отображение f превращается в так называемую *каноническую функцию Вейля* φ. Она определена над полем, полученным присоединением к полю k координат какой-нибудь точки кривой C.

Обобщением якобиева многообразия на случай многообразий размерности большей, чем единица, является так называемое многообразие Пикара.

Определение. Пусть V — нормальное проективное многообразие. Абелево многообразие $\mathfrak{P}$ называется *много-*

образием Пикара многообразия V, если существует гомоморфизм f группы $\mathfrak{G}_a(V)$ на группу $\mathfrak{P}$, ядро которого совпадает с группой $\mathfrak{G}_l(V)$. При этом гомоморфизм f должен сохранять отношение специализации и свойство рациональности над любым общим полем определения многообразий V, $\mathfrak{P}$ и отображения f.

Ниже мы изложим принадлежащий Мацусака метод построения многообразия Пикара. Этот метод обобщает конструкцию Чжоу якобиева многообразия кривой.

2. Полные и максимальные алгебраические семейства

К числу классических понятий и свойств, исследованных итальянской школой и распространенных теперь на случай абстрактных полей определения, принадлежат, в частности, понятия максимального алгебраического семейства и поверхностной иррегулярности, даже в классическом случае изученные Севери (см. Севери [27]) чисто алгебраическими средствами.

Пусть V — произвольное проективное нормальное многообразие, определенное над полем k. Это поле мы будем считать основным полем, т. е. все рассматриваемые в дальнейшем поля будем предполагать расширениями поля k. Пусть, далее, C — общее одномерное сечение многообразия V некоторым подпространством объемлющего пространства, и пусть $K = \mathrm{def}(V, W, J, \varphi)$, где W — некоторая компонента множества Чжоу $\mathbf{C}$ всех V-дивизоров, J — якобиево многообразие кривой C, а φ — соответствующая каноническая функция (см. n° VII,1). Любой V-дивизор X, точка Чжоу (x) которого принадлежит многообразию W, так же как и пересечение $X \cdot C$, рационален над полем $K(x)$. Положим $h(x) = S(\varphi(C \cdot X))$ где S — гомоморфизм группы дивизоров кривой $\varphi(C)$ в группу точек многообразия J, при котором образ любой точки кривой совпадает с этой точкой. Пользуясь основной теоремой Зариского о бирациональных соответствиях (см. n° I, 6), можно доказать следующее утверждение (см. Мацусака [4, (I)]):

(I) *Функция $h(x)$, принимающая значения в многообразии J, определена в каждой точке, где многообразие W нормально.*

Кроме того, имеет место следующее утверждение:

(II) *Пусть* $\xi = h(x) \in J$, *где* (x) — *общая точка многообразия* W. *Оказывается, что точки любой компоненты прообраза* $h^{-1}(\xi)$ *соответствуют линейно эквивалентным* V-*дивизорам; более того, прообраз* $h^{-1}(\xi)$ *совпадает с ассоциированным многообразием* $T(X)$ *полной линейной системы* $|X|$.

Доказательство утверждения (II) легко вытекает из того, что многообразие W является компонентой множества C, и из следующей леммы, которая представляет собой простейший критерий линейной эквивалентности. Эта лемма принадлежит А. Вейлю и обобщает хорошо известный результат Севери, доказанный им для случая поверхностей над полем комплексных чисел:

(III) *На любом алгебраическом многообразии* V *существует такое конечное множество дивизоров* D_i, *алгебраичных над полем* k *и алгебраически независимых на этом многообразии, что любой дивизор* X, *пересечение которого с общим над полем* k *одномерным сечением многообразия* V *линейно эквивалентно нулю, линейно эквивалентен некоторой линейной комбинации дивизоров* D_i.

По поводу критериев линейной эквивалентности Севери (доказанных в работах [6,11]) см. книгу Севери [a], стр. 191. Эти критерии для случая многомерных многообразий над полем комплексных чисел были получены Севери в работе [1], а для случая абстрактных полей определения—А. Вейлем в работах [5,6]. Последний вместо трансцендентных методов рассматривал отображения многообразия V в его многообразие Альбанезе (см. n° VII,6).

Алгебраическая система дивизоров на многообразии V, параметризованная некоторой компонентой W множества C, называется *максимальным семейством*. Такое семейство мы будем обозначать символом $\{X\}$, где X — общий дивизор семейства.

Пусть $\Lambda(X)$ — геометрическое место рассмотренной в теореме (II) точки $\xi \in J$ над полем K. Когда многообразие W пробегает бесконечное множество всех компонент множества C, многообразие $\Lambda(X)$ пробегает некоторую совокупность S подмногообразий многообразия J, которая, как легко видеть, обладает следующими свойствами:

(IV) *Существует такое абелево подмногообразие* $\mathfrak{B} \subset J$, *определенное над полем* K, *что любое подмногообразие* *многообразия J, принадлежащее к системе $\mathbf{S}$, после сдвига на некоторую точку многообразия J становится подмногообразием многообразия $\mathfrak{B}$. Среди всех таких подмногообразий $\mathfrak{B}$ существует минимальное, в том смысле, что оно само получается в результате сдвига некоторого многообразия, принадлежащего системе $\mathbf{S}$, т. е. имеющего вид $\Lambda(x)$ для некоторого максимального семейства $\{X\}$.*

Этот результат в основном совпадает с теоремой, доказанной впервые Нероном [1].

Положим теперь $K = \mathrm{def}(V, C, J, \varphi, W, U)$, где W — многообразие Чжоу максимального семейства $\{X\}$, указанного в теореме (IV), а U — многообразие Чжоу произвольной неприводимой алгебраической системы $\{Y\}$ положительных V-дивизоров. Пусть x, y — независимые общие точки многообразий W и U над полем K, отвечающие дивизорам X и Y соответственно. Предполагая, что пересечение $Y \cdot C$ определено, положим $h(y \times x) = S(\varphi(C \cdot X + C \cdot Y))$. Тем самым мы получим на многообразии $U \times W$ некоторую функцию, принимающую значения в многообразии J. Поскольку после некоторого сдвига можно считать, что $B = pr_J Z$, где Z — график функции h на произведении $U \times W \times J$, легко видеть, что

(V) *Проекция любой компоненты прообраза $h^{-1}(\zeta)$, где $\zeta = h(y \times x)$, на многообразие U совпадает с U.*

Наконец, Мацусака доказывает, что

(VI) *Максимальное семейство $\{X\}$, описанное в теореме (IV), обладает тем свойством, что произвольный V-дивизор, алгебраически эквивалентный нулю, линейно эквивалентен дивизору вида $X - X'$, где X и X' — общие члены семейства $\{X\}$ над полем $K = \mathrm{def}(V, W) \supset \bar{k}$.*

Доказательство получается следующим образом. Пусть C — общее одномерное сечение многообразия V над полем K, и пусть $K' = \overline{K}' = \mathrm{def}(C, J, \varphi) \supset K$. Тогда $K' = \mathrm{def}\, B$. Пусть $Y = Y_1 - Y_2$, где $Y_1, Y_2 > 0$. В силу результатов n° VI, 7, можно считать, что дивизоры Y_1 и Y_2 принадлежат к одному и тому же максимальному семейству положительных V-дивизоров $\{Y\}$. Пусть U — соответствующее многообразие Чжоу, а y_1 и y_2 — точки Чжоу дивизоров Y_1 и Y_2. Согласно сказанному в n° VI, 1, $\bar{k} = \mathrm{def}\, U \subset K$.

Пусть теперь T — произвольная компонента прообраза $h^{-1}(\zeta)$. В силу теоремы (V), на многообразии T существуют точки, проекции которых на многообразие U совпадают соответственно с точками y_1 и y_2; эти точки можно записать в виде $y_1 \times x_1$ и $y_2 \times x_2$. Поэтому считая, что многообразия U и W нормализованы и пользуясь теоремой (I), мы получим, что $\zeta = h(y_i \times x_i)$, $i = 1, 2$. Отсюда легко следует, что с точностью до сдвига точка $h(y_i \times x_i)$ является общей точкой многообразия $\mathfrak{W}$ над полем K' и, следовательно, точки x_i общими точками многообразия U над полем K'. Теперь остается воспользоваться теоремой (II).

Определение. Семейство дивизоров многообразия V, обладающие свойствами, описанными в теореме (VI), называется *полным*, или *регулярным* семейством.

3. Одно свойство арифметического рода

Мы могли бы теперь пытаться строить многообразие Пикара многообразия U, исходя из геометрического места точки Чжоу многообразия $T(X)$, где $\{X\}$ — полное семейство на многообразии V, т. е. действовать в точности таким же образом, как действовал Чжоу в случае кривых. К сожалению, мы сталкиваемся здесь с той же трудностью, т. е. с тем, что размерность $\dim |X|$, вообще говоря, не остается неизменной при специализациях дивизора X. Поэтому такое представление может обладать исключениями, устраняя которые, мы можем прийти к особым моделям. Ввиду этого и возникает необходимость в абстрактных многообразиях в смысле Вейля. Впрочем, можно обойтись и без них, поставив задачу об отыскании на многообразии V полного семейства, обладающего нужными нам свойствами.

В случае когда многообразие V является кривой, достаточно применить теорему Римана — Роха, чтобы доказать существование неспециального линейного ряда, удовлетворяющего нашим требованиям регулярности.

Прежде чем доказывать существование таких семейств на многообразии V произвольной размерности, укажем, что абстрактное многообразие Пикара (мы предполагаем, что существование такого многообразия уже доказано) всегда обладает проективной моделью. Этот факт непосредственно вытекает из следующей важной теоремы Мацусака (см. Мацусака [6]):

(I) *Любое абстрактное абелёво многообразие, определенное над полем k, бирационально эквивалентно над полем k проективному абелеву многообразию, также определенному над полем k.*

Тем не менее прямое геометрическое построение проективной модели многообразия Пикара сохраняет свое значение, ибо оно дает возможность более глубоко проникнуть в строение групп алгебраической и линейной эквивалентности на многообразии V. Начнем со следующего замечательного факта, доказанного Кодаира в случае комплексного поля (см. n° XI, 3) и Мацусака в случае любого поля определения (см. Мацусака [5]):

(II) *Если дивизоры X и X' на неособом многообразии V алгебраически эквивалентны, то* $p_a(X) = p_a(X')$.

Доказательство проводится индукцией по $r = \dim V$. В самом деле, теорема верна, если $r = 1$. Допустим, что она верна при $\dim V < r$. Тогда, в силу теоремы (VII) n° VI,7, можно считать, что дивизоры X и X' представляют собой положительные V-дивизоры, принадлежащие одному и тому же максимальному семейству $\{X\}$. Пусть $\{A\}$ — произвольное полное V-семейство, и пусть дивизоры X и X' рациональны над полем $K = \operatorname{def}(V, \{A\}, \{X\})$. Пусть, наконец, $\overline{X}$ и A — независимые общие члены семейства $\{X\}$ и $\{A\}$ соответственно над полем K.

Из результатов пункта VII,2 легко следует, что $C_s + X + A \equiv Z$ и $C_s + X' + A \equiv Z'$, где C_s — некоторый член s-кратной системы гиперплоских сечений, а Z, Z' — общие члены над полем $\overline{K}$ некоторого максимального V-семейства, содержащего дивизор $C_s + \overline{X} + A$; как и семейство $\{A\}$, это семейство полно. Отсюда следует, что $p_a(Z) = p_a(Z')$, ибо дивизоры Z и Z' являются общими специализациями друг друга над полем $\overline{K}$. Но для больших значений s существуют такие многообразия Y и Y', что $Y \equiv C_s + X$ и $Y' \equiv C_s + X'$. Поэтому, в силу инвариантности рода p_a по отношению к линейной эквивалентности на многообразии V (см. теорему (I) n° V,2), имеет место равенство $p_a(Y + A) = p_a(Y' + A)$. Пользуясь результатами n° III,7 и тем фактом, что семейство $\{A\}$, а следовательно, и семейство $\{A + C_n\}$ для любого значения n полно, мы можем считать, что многообразие A неособо, а циклы $Y + A$, $Y' + A$ линейно эквивалентны некоторым неособым многообразиям, которые мы обозначим буквами W и W' соответственно. Тогда $p_a(W) = p_a(W')$.

Мы можем, кроме того, предположить, что система $|A|$ обильна (см. n° III,6). Следовательно, применив некоторое бирациональное бирегулярное преобразование, мы можем считать, что семейство $|A|$ представляет собой систему гиперплоских сечений, к которой можно применить модулярное соотношение (II) из n° V,2. Поэтому над некоторым полем определения, над которым дивизор A является общим дивизором, имеют место равенства

$$p_a(W) = p_a(Y + A) = p_a(Y) + p_a(A) + p_a(Y \cdot A),$$
$$p_a(W') = p_a(Y' + A) = p_a(Y') + p_a(A) + p_a(Y' \cdot A).$$

Так как $Y \equiv Y'$ на многообразии V, то в силу теоремы III n° VI,7, на дивизоре A имеет место отношение эквивалентности $\overline{Y} \cdot A \equiv Y' \cdot A$, так что $p_a(Y \cdot A) = p_a(Y' \cdot A)$. Следовательно, $p_a(Y) = p_a(Y')$, или $p_a(C_s + X) = p_a(C_s + X')$, откуда, в силу теоремы I n° V,2 и индуктивного предположения, непосредственно вытекает требуемый результат.

4. Неспециальные полные семейства

Начнем со следующей леммы Кастельнуово (см. Кастельнуово [a], стр. 396), которая была распространена на рассматриваемый здесь случай Мацусака (см. Мацусака [5]).

(I) *Для любого положительного V-дивизора X, рационального над полем k, и всех достаточно больших h пересечение $|X + C_h| \cdot C$, где C — общее гиперплоское сечение C многообразия V над полем k, является полной линейной системой на многообразии C.*

Доказательство немедленно вытекает из подсчета размерностей двух систем $|X + C_n| \cdot C$ и $|X \cdot C + C_h \cdot C|$ на многообразии C (следует воспользоваться соотношением (28) гл. V и теоремой II n° V,2). Доказав эту лемму, мы можем теперь доказать следующее утверждение:

(II) *Для любого полного семейства $\{X\}$ на многообразии V и любого достаточно большого m имеет место равенство* $\dim |X + C_m| = \dim |X' + C_m|$, *где X и X' — произвольные элементы семейства $\{X\}$.*

В случае $\dim V = 1$ это утверждение непосредственно вытекает из теоремы Римана — Роха. Допустим, что оно верно для любого многообразия, размерность которого меньше r.

Пусть X — общий элемент семейства $\{X\}$ над полем $K = \mathrm{def}(\{X\})$. Пусть $x' \in W$, и пусть X' — дивизор, соответствующий точке x'. Очевидно, что $\dim|X| \leqslant \dim|X'|$, причем существует такое собственное подмножество S многообразия W, алгебраичное над полем K, что при $x' \in W - S$ имеет место равенство $\dim|X| = \dim|X'|$, а при $x' \in S$ — строгое неравенство $\dim|X| < \dim|X'|$. Применяя этот факт к полному семейству $\{X + C_m\}$, мы получим некоторую последовательность исключительных подмножеств S_i, $i = 0, 1, \ldots h, \ldots$.

Пусть теперь h_0 — такое целое число, что для всех $h \geqslant h_0$ система $|X + C_h| \cdot C$ полна на многообразии C, а любой дивизор полного семейства C-дивизоров, содержащего дивизор $C \cdot X$, обладает свойством, сформулированным в теореме. Такое число существует, в силу индуктивного предположения. Пусть, далее, $x' \in W - S_h$, и пусть дивизор X', соответствующий точке x', обладает тем свойством, что рассматриваемое ниже пересечение определено. Тогда

$$\dim|X + C_{h+1}| \cdot C = \dim|X + C_{h+1}| - \dim|X + C_h|,$$

$$\dim|X' + C_{h+1}| \cdot C = \dim|X' + C_{h+1}| - \dim|X' + C_h|.$$

В силу нашего выбора числа h имеет место неравенство $\dim|X + C_{h+1}| \cdot C \leqslant \dim|X' + C_{h+1}| \cdot C$, а так как $x' \in W - S_h$, то $\dim|X + C_h| = \dim|X' + C_h|$. Поэтому $\dim|X + C_{h+1}| \leqslant \dim|X' + C_{h+1}|$ и, следовательно, $\dim|X + C_{h+1}| = \dim|X' + C_{h+1}|$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что

$$\dim|X + C_h| = \dim|X' + C_h|$$

для всех $h \geqslant h_0$ и всех $x' \in W - S_h$.

Пусть $S_h = \sum_i U_i^{(h)}$ — разложение множества S_h на его компоненты над полем K, $x_i^{(h)}$ — общая точка компоненты $U_i^{(h)}$ над полем K и $X_i^{(h)}$ — дивизор, соответствующий точке $X_i^{(h)}$. Выберем такое целое число $h_1 > h_0$, что для любого $h \geqslant h_1$, системы $|X+C_h|$ и $|X_i^{(h_1)}+C_h|$ регулярны (см. предложение (I) n° V,7), так что применима формула (28), согласно которой

$$\dim|X+C_h| = (-1)^r\{p_a(V)+p_a(-X-C_h)\}-1,$$

$$\dim|X_i^{(h_1)}+C_h| = (-1)^r\{p_a(V)+p_a(-X_i^{(h_1)}-C_h)\}-1.$$

Отсюда, в силу утверждения (I), следует равенство $\dim|X+C_h| = \dim|X_i^{(h_1)}+C_h|$, так что если точка Чжоу дивизора X' принадлежит множеству $W-S_{h_1}$, то $\dim|X+C_h| = \dim|X'+C_h| = \dim|X_i^{(h_1)}+C_h|$. Следовательно, в силу того, что было доказано выше, каждая компонента множества S_{h_1} является собственным подмножеством некоторой компоненты множества S_{h_0}. Следовательно, для больших h множество S_h пусто, что и доказывает наше утверждение.

Отправным пунктом прямого построения многообразия Пикара, а также результатом некоторого развития понятия полного семейства является следующая теорема Мацусака:

(III) *Если дивизоры X и Y алгебраически эквивалентны, то их полные V-семейства $\{X\}$ и $\{Y\}$ совпадают.*

(IV) *Для любого максимального семейства $\{X\}$ на многообразии V существует максимальное семейство $\{X+C_m\}$, содержащее дивизор $X+C_m$; это семейство полно, если число m больше некоторого целого числа m, не зависящего от выбора семейства $\{X\}$.*

(V) *Существует такое целое число m_0', что указанное в предыдущей теореме полное семейство при $m>m_0'$ неспециально в том смысле, что любой член этого семейства принадлежит некоторой полной линейной системе постоянной размерности.*

Первое утверждение очевидно. В самом деле, пусть X — общий дивизор максимального семейства $\{X\}$, и пусть семейство $\{Y\}$ также полно. Тогда существует такой V-дивизор $Y \in \{Y\}$, что $Y \equiv X$ и, следовательно, $|Y|=|X|$.

Для доказательства второго утверждения следует выбрать число m_0' таким образом, чтобы система $\mathfrak{L}_m$ для $m>m_0'$ была полной и некоторый ее член содержал общий дивизор A произвольного полного семейства $\{A\}$. Тогда семейство $\{X_0+C_m+A-A_0\}$, где $A_0 \in \{A\}$ и $X_0 \in X$, также полно и, очевидно, содержит дивизор X_0+C_m.

Наконец, третье утверждение следует из теоремы (II).

Заметим, что любой V-дивизор, алгебраически эквивалентный некоторому члеиу неспециального семейства, в силу полноты семейства, линейно эквивалентен некоторому, вообще говоря, другому члену этого же семейства. Поскольку размерность $\dim|X|$ не меняется при специализациях общего члена, имеет место следующее утверждение:

(VI) *Любое неспециальное полное семейство на многообразии V полно относительно алгебраической эквивалентности, т. е. содержит все положительные V-дивизоры, алгебраически эквивалентные любому элементу семейства.*

По этой причине такие семейства называются также *алгебраически полными.*

Пусть X — произвольный положительный V-дивизор, рациональный над полем $K=\overline{K}$, и пусть $\{A\}$ — некоторое полное семейство, общим членом которого над полем $K=\operatorname{def}(V, \{A\})$ является дивизор A. Обозначив символом A_0 некоторый рациональный над полем K член системы $\{A\}$ и рассуждая, как в доказательстве утверждения (IV), мы получим следующее предложение:

(VII) *Для того чтобы V-дивизор X принадлежал некоторому полному семейству на многообразии V, необходимо и достаточно, чтобы для любой специализации A' дивизора A над полем K эффективно существовала линейная система $|X+A'-A_0|$.*

Следуя Севери (см. Севери [31]), назовем V-дивизор *линейно эффективным,* если его класс линейной эквивалентности содержит некоторый положительный дивизор. Из сказанного выше легко вытекает следующее условие линейной эффективности.

(VIII) *Дивизор на многообразии V тогда и только тогда линейно эффективен, когда его класс алгебраической эквивалентности содержит некоторое полное семейство.*

По поводу всего содержания этого пункта см. критические замечания Севери в работах [31, 41].

5. Построение многообразия Пикара методом Мацусака

Изложим теперь метод Мацусака построения проективной модели многообразия Пикара для произвольного неособого многообразия V; доказательства мы опустим, так как они довольно длинны (см. Мацусака [4, 11]).

Пусть $\{X\}$ — произвольное полное семейство на многообразии V, и пусть U — его многообразие Чжоу. Пусть, далее, k — основное поле. Тогда, если семейство $\{X\}$ содержит рациональный над полем k дивизор X_0, то $k = \operatorname{def} U$ и многообразие Чжоу $T(X)$ системы $|X|$ над полем k определено над k. Исходя из произвольного семейства $\{X\}$, всегда можно построить неспециальное полное семейство, содержащее такой дивизор X_0. Для этого достаточно рассмотреть семейство, содержащее сумму всех дивизоров, сопряженных к некоторому члену системы $\{X\}$. Это семейство также полно; прибавляя к нему некоторую кратную систему гиперплоских сечений, мы получим, в силу теоремы (V), неспециальное семейство, которое, очевидно, обладает требуемым свойством.

Пусть теперь X_1 и X_2 — два независимых общих дивизора над полем k семейства $\{X\}$, содержащего рациональный над полем k дивизор X_0. Поскольку семейство $\{X\}$ полно, в нем существует такой дивизор X_3, что $X_3 = X_1 + X_2 - X_0$. Пусть M_i — точка Чжоу многообразия $T(X_i)$, $i = 1, 2, 3$. Можно показать, что геометрическое место Z точки $M_1 \times M_2 \times M_3$ над полем k представляет собой некоторое подмногообразие произведения $W \times W \times W$, где $W = T(X)$, причем проекция многообразия Z на произведение любой пары множителей регулярна. Поэтому Z определяет на многообразии W некоторый коммутативный закон композиции, определенный над полем k.

Принимая во внимание, что по самому построению многообразие W однородно, можно думать, что это многообразие неособо. Однако формального доказательства этого факта не имеется. Поэтому Мацусака строит k-нормальную модель $\mathfrak{P}$ многообразия W и доказывает, что эта модель абсолютно нормальна и неособа. Этого достаточно для того, чтобы определенный выше закон композиции, будучи перенесен на модель $\mathfrak{P}$, оказался на ней всюду определенным. Очевидно, что многообразие

$\mathfrak{P}$ как группа изоморфно факторгруппе $\mathbf{G}_a(V)/\mathbf{G}_l(V)$; кроме того, как само многообразие $\mathfrak{P}$, так и его закон композиции определены над полем $k = \operatorname{def} V$. Это проективное многообразие и является проективной моделью многообразия Пикара многообразия V.

6. Многообразие Альбанезе и поверхностная иррегулярность

Говорят, что абелево многообразие $\mathfrak{A}$ порождается многообразием V, если на многообразии V задана такая функция f, принимающая значения в многообразии $\mathfrak{A}$, что для некоторой конечной системы $x_1, x_2, \ldots, x_s$ простых точек многообразия V сумма $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_s)$ является общей точкой многообразия $\mathfrak{A}$ над полем $K = \operatorname{def}(V, \mathfrak{A}, f)$.

Мацусака доказал (см. Мацусака [3]), что в этом случае *абелево многообразие* $\mathfrak{A}$ *порождается также общим одномерным сечением* C *многообразия* V *над полем* K, причем соответствующая функция f_c индуцируется на кривой C функцией f. Отсюда вытекает, что $\dim \mathfrak{A}$ не превосходит рода кривой C, причем этот род остается неизменным для любой общей кривой. Иначе говоря, среди *абелевых многообразий, порожденных многообразием* V, *существует многообразие* $\mathfrak{A}$ *максимальной размерности*. Пусть q — его размерность.

Предполагая, что поле K алгебраически замкнуто, возьмем q независимых общих точек $x_1, x_2, \ldots, x_q$ кривой C над полем K и положим $\xi = \sum_{i=1}^{q} f_c(x_i)$. Пусть $K(z)$ — минимальное расширение поля K, над которым цикл $\sum_{i=1}^{q} x_i$ рационален. Ясно, что $K(\xi) \subset K(z)$, причем поле $K(z)$ алгебраично над полем $K(\xi)$. Пусть $(K(z):K(\xi)) = \alpha$; тогда $\mathrm{pr}_{\mathfrak{A}} Z = d\mathfrak{A}$, где Z — геометрическое место точки $z \times \xi$ над полем K. Это *целое число* d *зависит лишь от функции* f, но не от кривой C. Оно обозначается символом $d(\mathfrak{A}, f)$.

Определение. *Многообразием Альбанезе* многообразия V называется абелево многообразие $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее следующему условию: существует такая функция φ, определенная на многообразии V и принимающая значения в многообразии $\mathfrak{A}$, что для любого абелева многообразия $\mathfrak{B}$ и любой функции f, определенной на многообразии V и принимающей значения в многообразии $\mathfrak{B}$, существует гомоморфизм λ многообразия $\mathfrak{A}$ в многообразие $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий соотношению $f = \lambda\varphi + c$, где c — некоторая постоянная точка.

Очевидно, что среди абелевых многообразий максимальной размерности q, порожденных данным многообразием V, существует многообразие $\mathfrak{A}$, для которого число $d(\mathfrak{A}, g)$ принимает наименьшее возможное значение. Оказывается, что

(I) *Это многообразие $\mathfrak{A}$ является многообразием Альбанезе многообразия V.*

Далее,

(II) *Многообразие Пикара и многообразие Альбанезе многообразия V изогенны; в частности, они имеют одну и ту же размерность q.*

Абсолютный инвариант бирационального класса многообразия V — размерность q этих двух многообразий — в случае комплексного поля констант совпадает с так называемой *поверхностной иррегулярностью* многообразия V (см. n° XI, 3). Мы сохраним это название и в общем случае произвольного поля констант.

Смысл прилагательного «*поверхностный*» объясняется следующей теоремой (см. Мацусака [7]), которая представляет собой абстрактную переформулировку знаменитой теоремы Кастельнуово — Энриквеса, доказанной этими авторами в комплексном случае с помощью трансцендентных методов:

(III) *Многообразие Пикара неособого многообразия V размерности n, большей двух, является также многообразием Пикара его общего подмногообразия размерности $n-1$.*

Довольно легкое алгебраическое доказательство этой теоремы принадлежит Мацусака: оно основано на описанном выше абстрактном методе построения многообразия Пикара и на критериях линейной эквивалентности, распространенных Вейлем на случай абстрактных полей. Отметим, что вытекающее из теоремы (III) совпадение размерностей многообразий Пикара было ранее доказано Севери (см. Севери [27]) над полем комплексных чисел с помощью алгебраических средств, подобных тем, которые позже использовал Мацусака.

Различие между многообразиями Пикара и Альбанезе (выявленное уже в ранних работах Севери) над полем комплексных чисел было до конца изучено в работах Игуза [3] и Андреотти [1]. Андреотти широко использовал универсальное отображение многообразий в их многообразии Альбанезе в задаче изучения и классификации иррегулярных поверхностей; см. Андреотти [1, 2].

В книге Ленга [6] построение абстрактного многообразия Пикара проведено способом, отличным от вышеизложенного. Это построение состоит из двух этапов. На первом, наиболее трудном этапе строятся многообразия Пикара для абелевых многообразий. Это построение опирается на принадлежащую А. Вейлю так называемую «теорему о квадрате», которая позволяет устанавливать линейную эквивалентность нулю широкого класса алгебраически эквивалентных нулю дивизиров. Второй этап построения состоит в сравнительно легком доказательстве того факта, что многообразие Пикара любого алгебраического многообразия V изоморфно многообразию Пикара многообразия Альбанезе $\mathfrak{A}$ многообразия V.

Многообразие Пикара абелева многообразия $\mathfrak{A}$ называется *двойственным* к многообразию $\mathfrak{A}$ и обозначается иногда символом $\hat{\mathfrak{A}}$. Это название оправдывается тем, что, как показал Картье [1, 2], многообразие $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ изоморфно многообразию $\mathfrak{A}$. Согласно только что сказанному, многообразия Пикара и Альбанезе любого алгебраического многообразия двойственны друг другу. Поскольку для алгебраических кривых многообразие Пикара и многообразие Альбанезе изоморфны, любое якобиево многообразие двойственно самому себе.

7. Теорема Нерона — Севери о конечности базиса

Для любого множества геометрических объектов G мы будем символом G_k обозначать его подмножество, состоящее из объектов, рациональных над полем k. В частности, для любого неособого в коразмерности единица проективного многообразия V над алгебраически замкнутым полем k определены группа дивизоров $\mathbf{G}(V)_k$ и две ее подгруппы $\mathbf{G}_l(V)_k$ и $\mathbf{G}_a(V)_k$. Факторгруппа $\mathbf{G}_a(V)_k/\mathbf{G}_l(V)_k$ изоморфна группе рациональных над полем k точек многообразия Пикара многообразия V. Теорема о конечности базиса утверждает, что *факторгруппа* $\mathbf{G}(V)_k/\mathbf{G}_a(V)_k$ *имеет конечное число образующих*. В классическом случае комплексного поля констант Севери предложил доказательства этой теоремы, использующие топологические и трансцендентные средства. Первое абстрактное доказательство, годное для случая произвольной характеристики, принадлежит Нерону [1, 2]. Ниже мы изложим, по возможности кратко, новый вариант доказательства этой теоремы, принадлежащий Ленгу и Нерону [1].

Первый шаг доказательства состоит в сведении теоремы о конечности базиса к некоторому утверждению о группе точек абелева многообразия. Пусть C_u — общая кривая на многообразии V над полем k, где u — линейный параметр. Якобиево многообразие J этой кривой определено над полем $K = k(u)$. Пусть $\mathbf{G}_0(V)$ — подгруппа таких дивизоров X на многообразии V, что степень дивизора кривой $X \cdot C_u$ равна нулю. Поскольку фактор-группа $\mathbf{G}(V)_k/\mathbf{G}_0(V)_k$ является бесконечной циклической группой, достаточно доказать, что конечное число образующих имеет факторгруппа $\mathbf{G}_0(V)_k/\mathbf{G}_a(V)_k$. Определим гомоморфизм $h: \mathbf{G}_0(V)_k \to J_k$, полагая $h(X) = S(\varphi(X \cdot C_u))$. В силу критерия линейной эквивалентности Вейля (предложение III, n° VII, 2), ядро E гомоморфизма h состоит из конечного числа смежных классов по подгруппе $\mathbf{G}_l(V)_k$. Другими словами, факторгруппа $[E + \mathbf{G}_a(V)_k]/\mathbf{G}_a(V)_k$ имеет конечное число образующих, так что достаточно доказать подобный же результат для группы $\mathbf{G}_0(V)_k/[E + \mathbf{G}_a(V)]$. Так как $E + \mathbf{G}_a(V)_k = h^{-1}(h(\mathbf{G}_a(V)_k))$, то последняя группа естественным образом вкладывается в группу $J_k/h\mathbf{G}_a(V)_k$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие Альбанезе многообразия V. Как мы уже упоминали, многообразия Пикара многообразий V и $\mathfrak{A}$ изоморфны, так что $\mathbf{G}_a(V)_k/\mathbf{G}_l(V)_k = \hat{\mathfrak{A}}_k$. Нетрудно показать, что гомоморфизм h индуцирует на $\hat{\mathfrak{A}}_k$ некоторый рациональный гомоморфизм $j: \hat{\mathfrak{A}}_k \to J_k$; более того, многообразие $\hat{\mathfrak{A}}$ вместе с отображением j является K/k — *следом* многообразия J в смысле Чжоу [9], т. е. отображение j универсально в классе отображений в многообразие J алгебраических многообразий, определенных над полем k. Тем самым теорема о конечности базиса будет доказана, если мы докажем следующее утверждение:

(I) *Пусть $K = k(u)$, где u — трансцендентный над полем k элемент. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — произвольное абелево многообразие над полем K, а $j : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — K/k-след этого многообразия. Тогда факторгруппа $\mathfrak{A}_K / j\mathfrak{B}_k$ имеет конечное число образующих.*

Доказательство этой теоремы носит, по существу, арифметический характер и использует идею спуска, впервые придуманную Морделлом и Вейлем для случая числового поля констант. Сначала доказывается так называемая «ослабленная теорема Морделла — Вейля», согласно которой *факторгруппа $\mathfrak{A}_K/m\mathfrak{A}_K$ конечна* для любого целого числа m, взаимно простого с характеристикой поля K. Нетрудно показать, что эта теорема конечности равносильна утверждению о конечности расширения $K(m^{-1}\mathfrak{A}_K)/K$. С другой стороны, это расширение абелево и не разветвлено во всех точках поля K, за исключением конечного числа их (тех, которые соответствуют «особым членам» алгебраической системы $\mathfrak{A}$ абелевых многообразий над полем k); кроме того, порядок любого автоморфизма этого расширения не превосходит m.

Отсюда следует, что поле $K(m^{-1}\mathfrak{A}_K)$ получается присоединением к полю K конечного числа радикалов ограниченной степени и потому конечно над K. Нам понадобиться понятие высоты точки в проективном пространстве. Пусть P — произвольная точка проективного пространства $P^n(K)$, где K — конечное расширение поля k степени трансцендентности единица. Обозначая символом $\deg P$ степень проективной кривой, являющейся геометрическим местом точки P над полем k, положим $h(P) = c^{[K:k(P)] \deg P}$, где $c > 1$ — некоторое фиксированное число; число $h(P)$ называется *высотой* точки P.

(II) *Для любого числа c_1 кривые, являющиеся геометрическими местами точек P с высотой $\leqslant c_1$, принадлежат конечному числу алгебраических семейств над полем k.*

Эта теорема немедленно следует из свойств координат Чжоу. Кроме того, имеет место следующее утверждение:

(III) *Для любой точки a абелева многообразия $\mathfrak{A} \subset P^n$ над полем K и любого целого числа $m > 1$ существует такое число c_2, зависящее только от точки a и числа m, что $h(P)^{m^2-1} \leqslant c_2 h(mP + a)$ для любой точки $P \in \mathfrak{A}_K$,* Пусть теперь $m > 1$ — такое целое число, что факторгруппа $\mathfrak{A}_K/m\mathfrak{A}_K$ конечна, и пусть $a_1, \ldots, a_i$ — представители всех смежных классов этой факторгруппы. Тогда любая точка $P \in \mathfrak{A}_K$ сравнима с одной из точек a_i по модулю подгруппы $m\mathfrak{A}_K$. Начав с любой точки $P_0 \in \mathfrak{A}_K$, построим последовательность точек $P_i \in \mathfrak{A}_K$, полагая $mP_{i+1} = P_i - a_{K_i}$. Из утверждения (III) следует существование такой постоянной c_3, что, независимо от выбора точки P_0, в последовательности P_i найдется точка с высотой, не превосходящей числа c_3. Так как можно считать, что $h(a_i) < c_3$, то отсюда вытекает, что любую точку $P \in \mathfrak{A}_K$ можно представить в виде линейной комбинации точек, высоты которых не превосходят фиксированного числа c_3. Теперь остается воспользоваться теоремой (II), учитывая, что, в силу свойства универсальности K/k-следа, точки группы $\mathfrak{A}_K$, геометрические места которых принадлежат к одному и тому же алгебраическому семейству над полем k, сравнимы по модулю подгруппы $j\mathfrak{B}_K$. Тем самым теорема (I), а вместе с ней и теорема Нерона — Севери полностью доказана.

VIII

Теория и приложения канонических систем

1. Введение

Если бы сходство теории рациональной эквивалентности с теорией линейной эквивалентности было более глубоким, то вероятно, алгебраическая геометрия многомерных многообразий была бы столь же простой, как и классическая геометрия кривых. Однако, если такое упрощение и достижимо, оно все еще остается отдаленной целью.

Тем не менее в теории рациональной эквивалентности сейчас известен ряд методов и результатов, которые и будут изложены в настоящей главе, хотя они не достигли еще уровня общей теории.

Первые примеры инвариантных систем эквивалентности, которые в дальнейшем всегда понимаются в смысле Севери, т. е. как неприводимые алгебраические подсистемы (собственные или несобственные) рациональных систем (см. n° VI, 10), принадлежат самому Севери. К ним относятся, в частности, некоторые ряды групп точек на поверхности, например, так называемые ряды Севери (см. раздел е) n° VIII, 3, а также Севери [a], стр. 236 и обзор Конфорто [a], где читатель найдет много сведений об истории вопроса).

Опираясь на обширную работу по теории трехмерных многообразий, проделанную Б. Сегре (см. Б. Сегре [2, 5]), и некоторые гипотезы Эже, подсказанные трансцендентными соображениями (см. Эже [1, 2, 3, 4]), Тодд (см. Тодд [5, 11, 14]) определил в каждой размерности на любом неособом многообразии над полем комплексных чисел относительно инвариантные системы эквивалентности, известные теперь как канонические системы Тодда. В дальнейшем Б. Сегре (см. Б. Сегре [12, 14]) пересмотрел теорию Тодда с новой точки зрения и выявил ее глубокие связи с некоторыми современными достижениями топологии.

Изложив сначала новое определение канонической системы дивизоров, принадлежащее Севери и Тодду, мы опишем, следуя Тодду, общее понятие канонических систем, затем дадим набросок методов Сегре и, наконец, кратко укажем основные приложения этих теорий. В этой главе, не оговаривая более этого явно, мы будем заниматься лишь неособыми многообразиями, определенными над полем комплексных чисел.

2. Новое определение канонических дивизоров

(Для случая трехмерных многообразий это новое определение принадлежит Сегре [2], а для случая многообразий произвольной размерности его ввел Тодд [11], в предположении, что каноническая система уже определена. Независимое от теории канонических систем определение дал Севери [35]; именно это определение и будет здесь изложено.)

Пусть L_i, $i=0, 1, \ldots, h$ — обильные линейные системы, необязательно различные, на неособом v-мерном многоорбазии V.

Выделив в каждой системе L_i некоторый общий пучок F_i, рассмотрим на многообразии V алгебраическое множество $J_h(F_0, F_1, \ldots, F_h)$, или, короче, $J_h(F)$, состоящее из точек, которые при $h=0$ являются особыми для некоторого члена пучка F_0, а при $h \geqslant 1$ обладают тем свойством, что проходящие через них касательные пространства к членам пучков F_i зависимы. С помощью аналитических средств или геометрическим индуктивным доказательством по h и v легко показать, что множество $J_h(F)$ представляет собой неособое подмногообразие многообразия V (см., например, Севери [a], стр. 200; этот факт можно вывести также из излагаемого ниже доказательства). Это подмногообразие, рассматриваемое как простой цикл, называется *якобиевым циклом* пучков F_i.

Выбрав в пучке F_0 некоторый его элемент A_0 и обозначив базисное многообразие этого пучка символом B_0, положим $D_j = A_0 \cdot F_j$ и $E_j = B_0 \cdot F_j$, $j=1, 2, \ldots, h$. Пусть $J_{h-1}(D)$ и $J_{h-1}(E)$ — якобиевы циклы пучков D_j и E_j на многообразиях A_0 и B_0 соответственно. Тогда

$$A_0 \cdot J_h(F) = B_0 + J_{h-1}(D), \quad h+1=v, \tag{1}$$

$$A_0 \cdot J_h(F) = J_{h-1}(D) + J_{h-1}(E), \quad h+1 < v. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай $h+1=v$.

(I) *При* $h+1=v$ *цикл* $J_h(F)-2(A_0+A_s+\ldots+A_h)$, *где* A_i — *произвольный элемент пучка* F_i, *с точностью до линейной эквивалентности не зависит от выбора пучков* F_i, $i=0, 1, \ldots, h$, *и представляет собой смешанный канонический дивизор многообразия* V.

Для случая $v=1$ эта теорема общеизвестна. Предположим, что она уже доказана для любого неособого многообразия размерности меньше v, и докажем ее для многообразия V. Из формулы (1) и предположения индукции следует, что

$$A_0\cdot J_h(F)\equiv B+2\sum_{i=1}^{h}A_0\cdot A_i+K', \tag{3}$$

где K' — канонический смешанный дивизор многообразия A_0. Таким образом, V-дивизор $J_h(F)-2\sum\limits_{i=1}^{h}A_i$ высекает на многообразии A_0 дивизор, линейно эквивалентный дивизору B_0+K' и потому с точностью до линейной эквивалентности не зависящий от выбора пучков F_i, $i=1, 2, \ldots, v$. Иначе говоря, заменив пучки F_i другими пучками $\overline{F}_i$, удовлетворяющими тем же условиям, мы получим в очевидных обозначениях, что

$$(\overline{J}_h(\overline{F})-2\sum_{i=1}^{h}\overline{A}_i)\cdot A_0\equiv(J_h(F)-2\sum_{i=1}^{h}A_i)\cdot A_0.$$

Отсюда и из известного критерия линейной эквивалентности (см., например, Севери [a], стр. 190) вытекает, что на многообразии V

$$\overline{J}_h(\overline{F})-2\sum_{i=1}^{h}\overline{A}_i\equiv J_h(F)-2\sum_{i=1}^{h}A_i.$$

Таким образом класс дивизора $J_h(F)-2\sum\limits_{i=1}^{h}A_i$ действительно не зависит от выбора пучков F_i, $i=0, 1, \ldots, h$. Кроме того, из соотношения (3) следует, что на многообразии A_0

$$K_1\cdot A_0\equiv K'-A_0\cdot A_0, \tag{4}$$

где $K_1 = J_h(F) - 2\sum_{i=0}^{h} A_i$, а $A_0 \cdot A_0$ — произвольный член системы, характеристической для системы L_0 на многообразии A_0.

Докажем теперь, что цикл K_1 представляет собой смешанный канонический цикл многообразия V. С этой целью мы спроектируем многообразие V на некоторую гиперповерхность V' в $(v+1)$-мерном проективном пространстве, имеющую лишь обычные особенности, и допустим, что наше утверждение справедливо для многообразий размерности, меньшей $v = \dim V$. Рассуждение по индукции законно, так как известно, что доказываемое утверждение справедливо при $v = 1$. Выберем в качестве системы L_0 систему гиперплоских сечений многообразия V; класс дивизора K_1 от этого не изменится. Пусть n — порядок гиперповерхности V'. Тогда, в силу раздела d) n° IV, 2 и предположения индукции, присоединенные формы порядка $n - v - 1$ высекают на общем члене A_0 системы L_0 вне геометрического места S особых точек многообразия V' канонический цикл K'. В силу соотношения (4), отсюда следует, что на многообразии A_0 имеет место эквивалентность $A_0 \cdot C \equiv K_1 \cdot A_0 + A_0 \cdot A_0$, а следовательно, на многообразии V эквивалентность $C \equiv A_0 + K_1$, где C — пересечение многообразия V' с некоторой присоединенной формой вне особого множества S. Для завершения доказательства остается еще раз сослаться на сказанное в разделе d) n° IV,2.

3. Канонические системы Тодда

(На протяжении всего этого пункта мы следуем работе Тодда [11]).

Как и в предыдущем пункте, мы рассматриваем v-мерное неособое многообразие V. Число h мы считаем фиксированным и таким, что $h + 1 < v$.

a) В первую очередь мы определим некоторые операторы X_h и φ_h, первый из которых будет определен на множестве всех простых неособых циклов (т. е. неособых подмногообразий) многообразия V размерности, большей h, а второй будет линейным оператором, определенным на группе всех циклов многообразия V, не имеющих особых компонент.

Эти операторы определяются следующими индуктивными формулами:

$$*X_h(M^{h+i}) = J_h^{(i)}(F^{(i)}) - \varphi_h\left\{\prod_{j=0}^{h}(1+A_j^{(i)})^2 - 1\right\}, \qquad (5i)$$

где $i = 1, 2, \ldots, v-h$

$$\varphi_h(X^k) = X^k \text{ при } k = h, \qquad (6)$$

$$\varphi_h(X^k) = 0 \text{ при } k < h, \qquad (7)$$

$$\varphi_h(M^{h+i}) = *X_h(M^{h+i}), \quad i = 1, 2, \ldots, v-h. \qquad (8i)$$

Здесь требует расшифровки формула (5i). Она относится к произвольному простому неособому циклу M^{h+i} многообразия V. Предполагается, что на этом цикле выбрано $h+1$ обильных линейных систем $L_j^{(i)}$, $j=0, 1, \ldots, h$, а в каждой из этих систем выбран общий пучок $F_j^{(i)}$. Тогда, согласно n° VIII, 2, на M^{h+i} определен цикл $J_h(F_0^{(i)}, \ldots, F_0^{(i)}) = J_h(F^{(i)})$. Тем самым первое слагаемое правой части формулы (5i) расшифровано. Что же касается второго слагаемого, то символами $A_j^{(i)}$ в нем обозначены члены систем $L_j^{(i)}$, выбранные так, чтобы выражение, стоящее под знаком оператора φ_h, являлось бы циклом без особых компонент. Из теорем Бертини легко следует, что за $A_j^{(i)}$ можно принять почти любой цикл системы $L_j^{(i)}$. При раскрытии символического произведения $\prod_{j=0}^{h}(1+A_j^{(i)})^2$ могут появиться члены, не имеющие смысла. Такие члены следует попросту опустить. Наконец, оператор φ_h в формуле (5i) определяется при $i>1$ формулой (8_{i-1}), а при $i=1$ — формулами (6) и (7). Заметим, что при $i=1$ в качестве цикла $*X_h(M^{h+1})$ получается как раз канонический цикл $J_h(F^{(1)}) - 2(A_0^{(1)} + \ldots + A_h^{(1)})$ многообразия M^{h+1}.

Подчеркнем, что формула (5i) не определяет однозначно цикл $*X_h(M^{h+i})$. Для случая $i=1$ мы уже знаем, что при изменении циклов $A_j^{(1)}$ и пучков $F_j^{(1)}$ в своих линейных системах $L_j^{(1)}$ цикл $*X_h(M^{h+1})$ пробегает некоторую линейную систему многообразия M^{h+1}, а именно, его смешанную каноническую систему (см. n° VIII, 2).

В общем же случае такая неоднозначность проистекает из двух обстоятельств: 1) неоднозначность выбора членов $A_j^{(i)}$ систем $L_j^{(i)}$; 2) неоднозначность выбора самих систем $L_j^{(i)}$ и соответствующих пучков $F_j^{(i)}$.

b) Докажем теперь теорему, которая выяснит последствия первого обстоятельства.

(I) *Если пучки $F_j^{(i)}$ фиксированы, то цикл ${}^*X_h(M^{h+i})$ определен на многообразии M^{h+i} с точностью до рациональной эквивалентности.*

Изложим вкратце доказательство этой теоремы, принадлежащее Тодду. Пусть $X_j^{(i)}$, $j=1, 2, \ldots, r$ — простые неособые $(n+i-1)$-мерные циклы на M^{h+i}, пересечение которых определено на M^{h+i} и является простым неособым циклом на M^{h+i}. Тогда определен цикл ${}^*X_h(X_1^{(i)} \cdot X_2^{(i)} \cdot \ldots \cdot X_r^{(i)})$. Поскольку оператор φ_h линеен, наше утверждение, очевидно, будет доказано, если для любого целого числа r мы покажем, что этот последний цикл на M^{h+i} определяется с точностью до рациональной эквивалентности, когда циклы $X_j^{(i)}$ меняются в своих классах линейной эквивалентности на M^{h+i}.

Поскольку случай любого r легко сводится к случаю $r=1$, рассмотрим лишь этот последний. Для этого случая мы докажем, что из линейной эквивалентности $X^{(k)} \equiv \equiv \overline{X}^{(k)}$ на M^{h+k} между простыми неособыми циклами $X^{(k)}$ и $\overline{X}^{(k)}$ вытекает эквивалентность ${}^*X_h(X^{(k)}) \equiv {}^*X_h(\overline{X}^{(k)})$. Для $k=1$ это утверждение справедливо, ибо тогда $\dim X^{(1)} = h$ и, значит, ${}^*X(X^{(1)}) = X^{(1)}$. Предполагая теперь, что это утверждение справедливо для всех $i<k$, докажем его для $i=k$. Полагая $S_j^{(k-1)} = X^{(k)} \cdot F_j^{(k)}$ и $\overline{S}_j^{(k-1)} = \overline{X}^{(k)} \cdot F_j^{(k)}$ и применяя формулу (5_{k-1}), мы получим, что на циклах $X^{(k)}$ и $\overline{X}^{(k)}$ имеют место следующие эквивалентности:

$$ {}^*X_h(X^{(k)}) \equiv J_h^{(k-1)}(S^{(k-1)}) - \varphi_h \left\{ \prod_{j=0}^{h} (1+B_j^{(k-1)})^2 - 1 \right\}, $$

$$ {}^*X_h(\overline{X}^{(k)}) \equiv J_h^{(k-1)}(\overline{S}^{(k-1)}) - \varphi_h \left\{ \prod_{j=0}^{h} (1+\overline{B}^{(k-1)})^2 - 1 \right\}, $$

где $B_j^{(k-1)}$ и $\overline{B}_j^{(k-1)}$ — некоторые циклы обильных линейных систем на циклах $X^{(k)}$ и $\overline{X}^{(k)}$ соответственно, содержащих пучки $S_j^{(k-1)}$ и $\overline{S}_j^{(k-1)}$. В силу предположения индукции, можно считать, что циклы $B_j^{(k-1)}$ и $\overline{B}_j^{(k-1)}$ высечены на циклах $X^{(k)}$ и $\overline{X}^{(k)}$ одним и тем же циклом $A_j^{(k)}$ некоторой обильной линейной системы $L_j^{(k)}$ на многообразии M^{h+k}. Поэтому циклы, которые в выписанных соотношениях получаются с помощью оператора φ_h, рационально эквивалентны на многообразии, являющемся пересечением членов $A_j^{(k)}$, а потому рационально эквивалентны и на многообразии M^{h+k} (см. n° VI, 8). Далее, поскольку $X^{(k)} \equiv \overline{X}^{(k)}$, существует пучок T, содержащий оба этих цикла. Рассмотрим пучок D_j, высеченный пучком $F_j^{(k)}$ на базисном многообразии пучка T. Из сказанного в предыдущем пункте вытекает, что

$$J_h^{(k-1)}(S^{(k-1)}) \equiv X^{(k)} \cdot J_{h+1}(T;\ F^{(k)}) - J_h(D),$$

откуда немедленно следует, что, когда цикл $X^{(k)}$ меняется внутри пучка T, цикл $J_h^{(k-1)}(S^{(k-1)})$ пробегает некоторую систему эквивалентности (см. n° VI, 8). Тем самым теорема полностью доказана.

с) Следующая теорема выясняет последствия второго обстоятельства.

(II) *Цикл* $^*X_h(M^{h+i})$ *на* M^{h+i} *определяется многообразием* M^{h+i} *однозначно с точностью до рациональной эквивалентности.*

Согласно Тодду, это утверждение доказывается индукцией по i. При $i=1$ оно справедливо, в силу результатов n° VIII,2. Предполагая теперь, что оно справедливо при $i<k$, докажем его при $i=k$. (Напомним, что $i = 1, 2, \ldots, v-h$). Пусть $F_{h+1}^{(k)}$ — пучок дивизоров многообразия M^{h+k}, удовлетворяющий тем же условиям, что и пучки $F_j^{(k)}$, $j=0, 1, \ldots, h$. Пусть, далее, $J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)})$ — якобиев цикл $h+2$ пучков $F_j^{(k)}$ на многообразии M^{h+k}; можно считать, что он является простым и неособым циклом.

Пусть, наконец, $D_{jl}^{(k-1)}$ и $E_{jl}^{(k-2)}$ — пучки, высеченные соответственно на некотором неособом члене $A_l^{(k)}$ пучка $F_l^{(k)}$,

$l \neq j$, и на неособом базисном многообразии $B_l^{(k)}$ пучка $F_l^{(k)}$. Будем считать, что соответствующие якобиевы циклы многообразий $A_l^{(k)}$ и $B_l^{(k)}$ также являются простыми неособыми h-мерными циклами.

Простое вычисление, основанное на нашем индуктивном предположении и соотношениях (5_{k-1}) и (5_{k-2}), приводит к следующим отношениям эквивалентности на многообразиях $A_l^{(k)}$ и $B_l^{(k)}$ соответственно и потому также и на многообразии M^{h+k}.

$$J_{h,l}^{(k-1)}(D^{k-1}) \equiv \varphi_h\left[(A_l^{(k)}\cdot \prod_{j=0}^{h}{}' (1+A_j^{(k)})^2\right],$$

$$J_{h,l}^{(k-2)}(E^{(k-2)}) \equiv \varphi_h\left[(B_l^{(k)}\cdot \prod_{j=0}^{h}{}' (1+A_j^{(k)})^2\right].$$

Здесь штрих над символическими произведениями означает, что значение $j=l$ следует пропустить.

Кроме того, из пункта VIII,2 известно, что

$$J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)})\cdot A_l^{(k)} \equiv J_{h,l}^{(k-1)}(D^{(k-1)}) + J_{h,l}^{(k-2)}(E^{(k-2)}).$$

Рассмотрим теперь якобиев цикл J пучков, высеченных на цикле $J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)})$ пучками $F_j^{(k)}$, $j=0, 1, \ldots, h$. Согласно n°VIII,2, для этого h-мерного цикла имеет место соотношение:

$$J \equiv {}^*X_h\left(J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)}) + 2\sum_{j=0}^{h} J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)})\right)\cdot A_j^{(k)}.$$

С другой стороны, как показал Тодд (с помощью тонкого анализа, который мы здесь опускаем), имеет место соотношение

$$J \equiv Z + J_h^{(k)}(F^{(k)}) + 2\sum_{l=0}^{h} J_{h,l}^{(k-2)}(E^{(k-2)}) + J_{h,h+1}^{(k-2)}(E^{(k-2)}),$$

где Z — некоторый h-мерный цикл на $J_{h+1}^{(k)}(F^{(k)})$, симметрично зависящий от пучков $F_j^{(k)}$, $j=0, 1, \ldots, h+1$.

Из этих трех соотношений вытекает, что

$$J_h^{(k)}(F^{(k)}) \equiv J - 2\sum_{l=0}^{h} J_{h,l}^{(k-2)}(E^{(k-2)}) - J_{h,h+1}^{(k-2)}(E^{(k-2)}) - Z \equiv$$

$$\equiv {}^*X_h(J^{(k)}_{h+1}(F^{(k)})+2\sum_{l=0}^{h} J^{(k-1)}_{h,l}(D^{(k-1)})-$$
$$-J^{(k-2)}_{h,h+1}(E^{(k-2)})-Z.$$

Пользуясь теперь выражениями для циклов $J^{(k-1)}_{h,l}(D^{k-1})$ и $J^{(k-2)}_{h,l}(E^{(k-2)})$, мы после некоторых вычислений найдем, что

$$J^{(k)}_h(F^{(k)})-\varphi_h\left\{\prod_{j=0}^{h}(1+A^{(k)}_j)^2-1\right\}\equiv$$
$$\equiv {}^*X_h(J^{(k)}_{h+1}(F^{(k)}))-Z+\varphi_h\left\{2\sum_{j=0}^{h+1}A^{(k)}_j\cdot\prod_{l=0}^{h+1}(1+A^{(k)}_l)^2-\right.$$
$$\left.-\prod_{j=0}^{h+1}(1+A^{(k)}_j)^2+1\right\}.$$

Очевидно, что цикл в правой части этого соотношения симметрично зависит от $h+2$ пучков $F^{(k)}_j$, а цикл в левой части не зависит от пучка $F^{(k)}_{h+1}$ и, значит, не зависит ни от одного из пучков $F^{(k)}_j$.

Тем самым теорема (II) полностью доказана.

d) Из всего сказанного вытекает, что

на любом многообразии V однозначно определены v классов рациональной эквивалентности, представителями которых являются циклы $^*X_h(V)$, $h=0, 1, \ldots, v-1$.

Эти классы называются *каноническими классами Тодда многообразия V.*

Из этого определения непосредственно следует, что классы Тодда являются *относительными инвариантами* на множестве всех неособых моделей поля рациональных функций на многообразии V. Что же касается поведения канонических классов при иррегулярных бирациональных преобразованиях, то по этому вопросу известно мало; мы вернемся к нему в n° VIII,9.

Следуя Тодду, мы можем перенести теперь классическую формулу сложения, известную для дивизоров многообразия V (см. n° IV,5), на случай циклов произвольной размерности. Укажем сначала следующую формулу

$$*X_{h-1}(B) \equiv B(*X_h(B) + *X_h(V)), \tag{9}$$

где B — произвольный простой неособый дивизор многообразия V (см. Макферсон [1]). Цикл

$$A_h(B) = *X_h(B) + *X_h(V) \tag{10}$$

называется *h-мерным присоединенным циклом* дивизора B, а его класс эквивалентности называется *присоединенным классом дивизора* B на многообразии V.

Из формулы (9) непосредственно вытекает, что

$$*X_{h-1}(B) \equiv B \cdot A_h(B). \tag{11}$$

Пусть теперь L — почти произвольная $(h+1)$-мерная линейная подсистема некоторой обильной линейной системы на многообразии V. Заметим, что если рассмотренные выше пучки F_j, $j=0, 1, \ldots, h$, все различны и принадлежат системе L, то якобиев цикл $J_h(F)$ совпадает с якобиевым циклом $J_h(L)$ системы L, определяемым алгебраическим подмножеством многообразия V, состоящим из точек, в которых касательные пространства к членам системы L пересекаются по пространству размерности, не меньшей $v-h$. Отсюда из формулы (5_{v-h}) легко вытекает следующее соотношение (в котором для удобства положено $\varphi_h(1) = *X_h(V)$):

$$J_h(L) \equiv \varphi_h(1+A)^{h+2}) \equiv \sum_{i=0}^{h+2} \binom{h+2}{i} *X_h(A^{[i]}), \tag{12}$$

$$A^{[0]} = V,$$

где A — почти произвольный член системы L.

Из этого соотношения, в частности, следует, что цикл $J_h(L)$ можно обозначать также символом $J_h(A)$, ибо он зависит лишь от класса линейной эквивалентности цикла A. Когда Тодд впервые определял канонические системы, он исходил именно из этого соотношения.

е) Для иллюстрации значения соотношения (12) мы укажем теперь несколько его применений (см. Б. Сегре

[12], стр. 104). Начнем с того, что при $h=0$ формула [12] дает соотношение:

$$J_0^{(0)}(A) \equiv {}^*X_0^0(V) + 2{}^*X_0^0(A) + {}^*X_0^0(A^{[2]}).$$

Обозначая символами δ, c_v, c_{v-1}, c_{v-2} мощности точечных множеств, входящих в это соотношение, мы получим из него следующее числовое соотношение:

$$\delta = c_v + 2c_{v-1} + c_{v-2}. \tag{13}$$

При $v=1$, т. е. когда V является кривой, число c_{v-2} равно нулю, а число c_{v-1} равно степени a дивизора A кривой V. Кроме того, $\delta = 2p + 2a - 2$, где p — род кривой V. Таким образом, в этом случае

$$c_2 = \delta - 4p - a + 4.$$

Если $v=2$, т. е. если V является поверхностью и если дивизор A прост, т. е. является кривой, то число c_0 равно степени a кривой A, а число c_1 выражается формулой $c_1 = 2p - 2$, где p — род кривой A. Таким образом, в этом случае

$$c_2 = \delta - 4p - a + 4.$$

Здесь число $\delta - 4p - a$ представляет собой хорошо известный *инвариант* I_2 Цейтена — Сегре (см. Ч. Сегре [1]), так что имеет место равенство

$$c_2 = I_2 + 4. \tag{14}$$

В этом случае цикл ${}^*X_0^0(V)$ принадлежит некоторому ряду эквивалентности, впервые найденному Севери, который и называется теперь *рядом Севери* (см. Севери [18, 19] и Севери [a], стр. 236). В общем случае формулу (13) можно записать в аналогичном виде

$$c_v = I_v + (-1)^v \cdot 2_v, \tag{15}$$

где $I_v = \delta - 2c_{v-1} - c_{v-2} - (-1)^v \cdot 2v$, по определению представляет собой *инвариант Цейтена — Сегре многообразия* V.

Таким образом, результаты Тодда, по крайней мере для случая нульмерных канонических классов, или классов Севери, обобщают классический факт относительной инвариантности инварианта Цейтена — Сегре (см. Ч. Сегре [1]; Энриквес [a], стр. 167).

f) Укажем теперь следующую теорему, принадлежащую Б. Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 105):

(III) *Пусть h и s — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant h \leqslant v-1$ и $s > v-h$. Тогда*

$$\begin{aligned}{}^*X_h(V) \equiv \sum J_h(A_i) - \sum J_h(A_i+A_j) + \\ + \sum J_h(A_i+A_j+A_l) - \cdots \\ \cdots + (-1)^{s-1} J_h(A_1+A_2+\cdots+A_s),\end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — такие простые неособые циклы, что фигурирующие в этой формуле циклы Якоби определены. Суммирования распространены здесь на все сочетания чисел $1, 2, \ldots, s$.

Эта теорема доказывается непосредственным формальным вычислением с помощью соотношения (12).

Из нее можно вывести формальное определение *h-мерного якобиева цикла $J_h(B)$ для любого дивизора B многообразия V.*

С этой целью рассмотрим некоторое целое число $t \geqslant v-h$ и выберем такой дивизор A на многообразии V, чтобы линейные системы $|iA|$, $|iA+B|$, $i=1, 2, \ldots, t$, обладали h-мерным якобиевым циклом. В частности, любая такая система должна быть эффективной и иметь размерность не меньше, чем $h+1$. Полагая в теореме (III) $s=t+1$, $A_i=A$, $i=1, 2, \ldots, s-1$, $A_s=B$, мы без труда получим для цикла $J_h(B)$ выражение

$$J_h(B) \equiv {}^*X_h(V) + \sum_{i=1}^{t} (-1)^i \binom{t}{i} (J_h(iA) - J_h(iA+B)). \tag{16}$$

Оно определяет цикл $J_h(B)$ с точностью до рациональной эквивалентности, ибо, как нетрудно показать, цикл в правой части не зависит ни от выбора числа t, ни от выбора дивизора A. В частности, при $B \equiv 0$ получается, что

$$J_h(0) \equiv X_h(V). \tag{17}$$

Заметим, что теорему (III) также можно было бы взять в качестве исходного пункта при определении канонических систем.

4. Введение в теорию Сегре

В этом и следующих пунктах мы изложим принадлежащую Б. Сегре теорию канонических классов эквивалентности. Начнем с некоторых общих сведений о группах эквивалентности.

a) Положим

$$\mathbf{A}(V)=\Gamma(V)/\mathbf{G}_l(V)=\sum_{m=0}^{v}\mathbf{A}^m(V), \tag{18}$$

где $v=\dim V$ и

$$\mathbf{A}^m(V)=\mathbf{G}^m(V)/\mathbf{G}_l^m(V). \tag{19}$$

В силу результатов n° I,9 и n° VI,9, группа $\mathbf{A}(V)$ является относительно операции пересечения *коммутативным кольцом*. Единицей этого кольца является образ y многообразия V при гомоморфизме групп

$$f:\Gamma(V)\to\mathbf{A}(V). \tag{20}$$

Однородные элементы кольца $\mathbf{A}(V)$ мы будем обозначать греческими буквами, например μ, размерности этих элементов — соответствующими латинскими буквами, например m. Согласно формуле (18), кольцо $\mathbf{A}(V)$ градуировано размерностью, причем гомоморфизм f однороден и определяется гомоморфизмами

$$f_m:\mathbf{G}^m(V)\to\mathbf{A}^m(V). \tag{21}$$

Элемент μ в k-й степени, т. е. элемент $\mu\cdot\mu\cdot\ldots\cdot\mu$ (k раз), мы будем обозначать символом $\mu[k]$ (ср. n° V,6).

Пусть теперь V' — произвольное неособое подмногообразие многообразия V. Для него можно определить аналогичные группы и кольца, которые будут обозначаться теми же буквами, но со штрихами. Рассмотрим отображения вложения

$$i:\mathbf{A}(V')\to\mathbf{A}(V), \tag{22}$$

$$i_m:\mathbf{A}^m(V')\to\mathbf{A}^m(V),\quad (m\leqslant v'=\dim V'). \tag{23}$$

Если элементы $\mu' \in \mathbf{A}^m(V')$ и $\mu \in \mathbf{A}^m(V)$ связаны соотношением $\mu = i_m(\mu')$, мы будем писать $\mu = \mu'_V$ или $\mu' = \mu_{V'}$. Заметим, что операция $\mu \to \mu_{V'}$, если она определена, вообще говоря, многозначна (см. n° VI, 8). Символом $\mu \cdot V'$, где $\mu \in \mathbf{A}^m(V)$, мы будем обозначать такой элемент $\mu' \in \mathbf{A}^{m'}(V')$, $m' = m + v' - v$, для которого $\mu' = f'_m(M')$, где $M' = M \cdot V'$. Здесь M — произвольный цикл класса μ, для которого пересечение $M \cdot V'$ определено на многообразии V. Очевидно, что элемент μ' не зависит от выбора цикла M. Из формальных свойств операции пересечения вытекает, что соответствие $\mu \to \mu \cdot V'$ представляет собой *гомоморфизм*

$$\varphi_m : \mathbf{A}^m(V) \to \mathbf{A}^{m'}(V'), \quad m' = m + v' - v. \tag{24}$$

Комбинируя описанные отображения и применяя их к пересечениям различных элементов, мы можем написать целый ряд соотношений между элементами кольца $\mathbf{A}(V)$. Поскольку все они легко следуют из формул теории пересечений, мы их здесь опустим.

b) (См. Б. Сегре [12], стр. 13.) Пусть P — произвольное неособое подмногообразие многообразия V. Мы будем рассматривать последовательности $\{\pi\} = \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots$, для которых $\pi_i \in \mathbf{A}(P)$, $P \in \pi_0$ и $\dim \pi_i = p_i = \dim P - i = p - i$, так что $\pi_i = 0$ при $i > p$. Такие конечные последовательности мы будем называть *последовательностями кольца* $\mathbf{A}(P)$ или *последовательностями с носителем* P.

С каждой последовательностью $\{\pi\}$ мы будем связывать элемент $\sum_{i=0}^{p} \pi_i \in \mathbf{A}(P)$ или, что предпочтительнее, *формальный степенной ряд* $(\pi, x) = \sum_{0}^{\infty} \pi_i \cdot x^i$, в действительности являющийся многочленом.

Последовательность $\{\bar{\pi}\}$ с тем же носителем P, соответствующую ряду $(\pi, -x)$, мы будем называть *альтернантой последовательности* $\{\pi\}$, а последовательность $\{\tilde{\pi}\}$, соответствующую ряду $(\pi, x)^{-1}$ (этот ряд определен, ибо свободный член π_0 ряда (π, x) является единицей кольца $\mathbf{A}(P)$), мы будем называть последовательностью, *обратной к последовательности* $\{\pi\}$.

Очевидные соотношения, связывающие все эти последовательности, мы здесь приводить не будем. В дальнейшем свободный член π_0 последовательностей кольца $\mathbf{A}(P)$ мы будем часто обозначать символом 1.

c) (См. Б. Сегре [12], стр. 15.) Во многих вопросах чрезвычайно полезны последовательности $[y]$ кольца $\mathbf{A}(V)$, соответствующие рядам $(y^{(s)}, x) = \prod_{h=1}^{s}(1+\alpha_h x)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — произвольные элементы группы $\mathbf{A}^{v-1}(V)$. Такие последовательности мы будем называть *мультипликативными последовательностями*. Их можно определить также формулой $(y^{(s)}, x) = \sum_{0}^{\infty} y_i^{(s)}(\alpha)\cdot x^i$, где $y_0^{(s)}(\alpha) = V = 1$ и $y_i^{(s)}(\alpha) = \sum \alpha_{j_1}\cdot\alpha_{j_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{j_i}$; суммирование распространено на все сочетания из s элементов по i. При этом $y_i^{(s)}(\alpha) = 0$ при $i > v$ или $i > s$.

Обратная последовательность, соответствующая ряду $(y^{(s)}, x)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} \tilde{y}_i^{(s)}(\alpha)\, x^i$, определяется, как легко видеть, формулами $\tilde{y}_i^{(s)}(\alpha) = \sum \alpha_{j_1}\cdot\alpha_{j_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{j_i}$, где суммирование распространено по всем сочетаниям с повторениями из s элементов по i. Конечно, $\tilde{y}_i^{(s)}(\alpha) = 0$ при $i > v$.

d) (См. Б. Сегре [12], стр. 17.) Рассмотрим теперь две последовательности $\{\pi\}$ и $\{\chi\}$, носителями которых являются неособые подмногообразия P и Q многообразия V, и соответствующие им ряды (π, x) и (χ, x).

Ряд, являющийся формальным произведением рядов (π, x) и (χ, x), определяет некоторую последовательность только тогда, когда на многообразии V определено пересечение $P\cdot Q$. Однако, если применить сначала к последовательностям $\{\pi\}$ и $\{\chi\}$ отображение вложения i, получив тем самым ряды $(\pi, x)_V = (\pi_V, x)$ и $(\chi, x)_V = (\chi_V, x)$ над кольцом $\mathbf{A}(V)$, то их формальное произведение (вычисленное в кольце $\mathbf{A}(V)$) всегда определяет некоторую последовательность кольца $\mathbf{A}(V)$ (ибо всегда определено пересечение $\pi\cdot\chi$ классов многообразий P и Q). Другими словами, совокупность всех последовательностей, элементы которых принадлежат кольцу $\mathbf{A}(V)$ и которые получаются из последовательностей, имеющих своими носителями неособые подмногообразия при вложении их в кольце $\mathrm{A}(V)$, является *мультипликативной полугруппой* с единичным элементом y, 0, 0, ...

При этом очевидно, что для любого фиксированного неособого подмногообразия P многообразия V последовательности кольца $\mathrm{A}(P)$ (вложенные или не вложенные в кольцо $\mathrm{A}(V)$) образуют некоторую мультипликативную группу с единичным элементом π, 0, 0, ...

e) (См. Б. Сегре [12], стр. 19.) Пусть опять P — произвольное неособое подмногообразие многообразия V, и пусть α_i, $i=1, 2, \ldots, s$, — такие элементы кольца $\mathrm{A}(V)$ размерностей a_i соответственно, что $p=\dim P \geqslant r = a_1 + a_2 + \ldots + a_s - (s-1)v$. Предположим, что в классах α_i можно выбрать представителей A_i, которые просто пересекаются на многообразии V вдоль подмногообразия P и регулярно пересекаются вдоль любой другой компоненты своего теоретико-множественного пересечения. В этом предположении в кольце $\mathrm{A}(V)$ определен класс эквивалентности χ пересечения циклов A_i вне подмногообразия P. Мы будем обозначать его символом $(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s)^P$ и называть, следуя Б. Сегре, *символическим произведением* классов α. Было бы интересно выяснить, не зависит ли класс χ лишь от класса эквивалентности π многообразия P и, конечно, классов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и можно ли распространить его определение на любые классы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Элемент $\varepsilon(P; \alpha) \in \mathrm{A}^{v-s}(V)$, определенный формулой

$$\varepsilon^{(s)}(P; \alpha) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s - (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s)^P, \tag{25}$$

называется *рациональной эквивалентностью многообразия P относительно классов α.*

Легко видеть, что символическое произведение обладает следующими свойствами:

(I) *Если* $\mu_i' = \mu \cdot \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, *где* $\mu \in \mathrm{A}^m(V)$, то $(\alpha_1' \cdot \alpha_2' \cdot \ldots \cdot \alpha_s')^P = (\mu \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s)^P$ *при условии, что символическое произведение, стоящее справа, определено.*

(II) *При* $p = v - 1$ *класс* χ *зависит лишь от класса* π *многообразия* P *в кольце* $\mathrm{A}(V)$; *если* $\alpha_i = \pi + \beta_i$, *то* $\chi = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_s$.

Применив к многообразию V моноидальное преобразование с центром P, можно из формулы (II) вывести, что

(III) *Если* $\chi = (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^P$, *то* $\chi \cdot P \in \mathrm{A}^{q-1}(P)$.

5. Ковариантная последовательность

Определим теперь принадлежащее Сегре фундаментальное понятие *ковариантной последовательности* неособого подмногообразия $P \subset V$ (см. Б. Сегре [12], стр. 25, и Б. Сегре [14], стр. 139).

а) Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$ — такие элементы группы $\mathrm{A}^{v-1}(V)$, что символические произведения $(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s)^P$ определены для любого s, удовлетворяющего неравенствам $v - p \leqslant s \leqslant v$. Очевидно, что такие элементы обязательно существуют.

Последовательность $\{\pi(V)\}$, определенная формулой

$$\varepsilon^{(s)}(P; \alpha) = \sum_{i=0}^{s+p-v} \pi_i(V) \cdot y^{(s)}_{s+p-v-i}(\alpha), \quad s = v - p, \ldots, v, \tag{26}$$

имеет своим носителем многообразие P и называется *ковариантной последовательностью* подмногообразия $P \subset V$. Это определение оправдано следующей основной теоремой Сегре (см. Б. Сегре [14], стр. 141):

(I) *Определенная формулой* (26) *последовательность не зависит от выбора элементов* α *и определяется исключительно классом* π.

Изложим вкратце доказательство этой теоремы. Рассмотрим моноидальное преобразование T, имеющее своим центром на многообразии V подмногообразие P и переводящее каждую точку многообразия P в некоторое линейное пространство $L'^{v-p-1} \subset V' = T(V)$. (Согласно Б. Сегре (см. Б. Сегре [11, 13]; см. также n° II, 2), такие преобразования называются *дилатациями*.) Образ $P' = T(P)$ многообразия P при дилатации T является $(v-1)$-мерным подмногообразием многообразия V', представляющим собой геометрическое место ∞^p пространств L'.

Согласно определению, преобразование T регулярно на многообразии V вне подмногообразия P, а обратное преобразование T^{-1}, стягивающее многообразие P' в многообразие P, не имеет фундаментальных точек на многообразии V' и регулярно вне многообразия P'. Кроме того, образ $U'=T(U)$ любого подмногообразия $U \subset P$ является неприводимым подмногообразием многообразий V' и P'. При этом $\dim U' = u' = v-1-p+u$, ибо U' представляет собой геометрическое место ∞^u пространств L'.

Теорема (I) непосредственно вытекает теперь из следующего утверждения:

(II) *Имеет место равенство*

$$\pi_i(V) = (-1)^{v-p+i+1} T^{-1}(\pi'^{[v-p+i]}), \qquad (27)$$

где T — описанная выше дилатация, а $\pi' \in \mathrm{A}(V)$ — класс многообразия P'.

Доказательству этого факта и будут посвящены остальные разделы этого пункта.

b) Если $\pi \in \mathrm{A}^{v-1}(V)$, то из формулы (26) немедленно следует, что $\pi_i(V) = (-1)^i \pi^{[i+1]}$. Таким образом, в этом случае теоремы (I) и (II) справедливы.

Кроме того, ввиду очевидного соотношения $(1+\pi x)^{-1} = \sum_0^\infty (-1)^i \pi^{[i]} x^i$ отсюда также следует, что в рассматриваемом случае последовательность $\{\tilde{\pi}(V)\}$, обратная к последовательности $\{\pi(V)\}$, имеет вид π, $\pi^{[2]}$, $0, \ldots, 0$.

c) Пусть теперь $p < v-1$, так что $v \geqslant 2$ и $l = \dim L' = v-p-1 > 0$. В первую очередь докажем утверждение (II) для первого члена $\pi_0(V)$, т. е. для $i=0$. С этой целью заметим, что так как любые два пространства $L' \subset P'$ скрещиваются, то для любых подпространств $L'^{l-i} \subset L'$ в кольце $\mathrm{A}(V')$ имеет место соотношение $(\lambda'^{l-i} \cdot \lambda'^{l-j}) = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, l$, где λ'^{l-i} — класс пространства L'^{l-i}.

d) Пусть теперь A — произвольное подмногообразие многообразия V, не содержащее многообразия P, и пусть $A' = T(A)$. Выбрав в классе $\alpha^{[k]}$, где α — класс многообразия A, такой цикл $A^{[k]}$, что определено пересечение $P \cdot A^{[k]}$, мы получим, что $T(P \cdot A^{[k]}) = P' \cdot A'^{[k]}$. Отсюда вытекает, что компоненты любого цикла вида $P' \cdot A'^{[k]}$ на многообразии V' являются геометрическими местами пространств L'. Следовательно, при $k > p$ такие циклы обращаются в нуль, ибо в этом случае уже пересечение $P\cdot A^{[k]}$ обращается в нуль.

e) Пусть A и B — подмногообразия многообразия V, принадлежащие одной и той же неприводимой алгебраической системе с общим членом A, и пусть P является простым подмногообразием многообразия B. Тогда специализация цикла $A'=T(A)$, продолжающая специализацию $A\rightarrow B$, порождает на многообразии V' соотношение эквивалентности вида $A'\equiv B'+P'$, где $B'=T(B)$. Отсюда вытекает, что

$$(-1)^s\chi'\cdot\pi'^{[s]}=\chi'\cdot(\beta'-\alpha')^{[s]}, \tag{28}$$

$$(-1)^s\pi'^{[s+1]}=\pi'\cdot(\beta'-\alpha')^{[s]}. \tag{29}$$

f) Так как многообразие B просто в общей точке многообразия P, то $\lambda'^l\cdot\beta'=\lambda'^{l-1}$. По тем же соображениям в аналогичной, само собой понятной ситуации имеет место более общее равенство $\lambda'\cdot\beta_1'\cdot\ldots\cdot\beta_s'=\lambda'^{l-s}$. В частности, $\lambda'\cdot\beta'^{[l]}=\lambda'^0$, где λ'^0 — элемент кольца $A(V)$, соответствующий некоторой точке пространства L'.

Отсюда и из результата раздела c) мы получим, формально разлагая правую часть формулы (28), что $(-1)^s\chi'\cdot\pi'^{[s]}=\chi'\cdot\beta'^{[s]}=\lambda'^{l-s}$. Сопоставляя это равенство со сказанным в разделе d), мы видим, что при применении преобразования T^{-1} к представителям класса $\pi'^{[s+1]}\cdot\alpha'^{[k]}\in \mathrm{A}(V')$, $0\leqslant s<l$, $k>0$, этот представитель стягивается, т. е. определяет элемент кольца $\mathrm{A}(V)$ более низкой размерности.

Рассмотрим теперь формулу (29) при $s=l$. Раскрыв скобки в ее правой части, мы получим выражение, все члены которого, кроме первого, стягиваются. Поэтому, $(-1)^lT^{-1}(\pi'^{[l+1]})=T^{-1}(\pi'\cdot\beta'^{[l]})$. Так как из приведенных выше соображений следует, что пересечение $\pi'\cdot\beta'^{[l]}$ является классом некоторой точки пространства L', то $(-1)^lT^{-1}(\pi'^{[l+1]})=\pi=\pi_0(V)$. Тем самым формула (27) для случая $i=0$ полностью доказана.

g) Для $i>0$ доказательство проводится индукцией по i. Предполагая, что формула (27) уже доказана для $j=0, 1, \ldots, i-1$, докажем его для $j=i\leqslant p$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $s=l+i$, $v-p\leqslant s\leqslant v-1$ — такие элементы группы $\mathrm{A}^{v-1}(V)$, что определено символическое произведение $\chi=(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_s)^P$, и пусть $\alpha'_k\in A(V')$ — класс, содержащий образ некоторого многообразия A_k, принадлежащего классу α_k и не содержащего многообразия P. Пусть, далее, $\beta'_k=-(\pi'-\alpha'_k)$, $k=1, 2, \ldots, s$, и $\varrho=\chi\cdot P$. Тогда $\varrho=T^{-1}(\pi'\cdot\beta'_1\cdot\ldots\cdot\beta'_s)$, так что $\varrho=(-1)^s T^{-1}(\pi'\cdot\pi'-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\pi'-\alpha'_s))$. Из результатов раздела d) вытекает, что в разложении правой части последнего выражения можно опустить члены, содержащие $\pi'^{[h]}$ с $h<l-1$. Отсюда и из индуктивного предположения получается после некоторых вычислений равенство

$$\varrho=(-1)^{l+i}T^{-1}(\pi'^{[l+i+1]})+\sum_{j=0}^{i-1}\pi_j(V)\cdot y^{(s)}_{i-j}(\alpha).$$

Для завершения доказательства остается сравнить это выражение для элемента ϱ с выражением, даваемым следующей теоремой, доказательство которой непосредственно вытекает из определения последовательности $\{\pi(V)\}$:

(III) *Пусть* $\chi=(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_s)^P$ *и* $\varrho=\chi\cdot P$. *Тогда*

$$\varrho=\pi_i(V)+\sum_{j=0}^{i-1}\pi_j(V)\cdot y^{(s)}_{i-j}(\alpha),$$

где $i=s-v+p+1$.

6. Алгебра ковариантных последовательностей

Ковариантные последовательности связаны рядом соотношений (см. Б. Сегре [12], стр. 32), которые можно рассматривать как соотношения, описывающие алгебраическое строение кольца $\mathbf{A}(V)$. В формулируемых ниже теоремах предполагается, что все входящие в их формулировки символы определены. Для любого неособого содержащего многообразие P подмногообразия M многообразия V мы будем символом $\{\pi_V(M)\}$ обозначать последовательность, которая получается из последовательности $\{\pi(M)\}$ вложением всех ее элементов в кольцо $\mathbf{A}(V)$.

(I). *Пусть* $\pi\in\mathbf{A}(M)$, *где* $M\subset V$ — *некоторое неособое подмногообразие класса* μ. *Тогда* $\{\pi(V)\}=\{\pi_V(M)\}\cdot\{\mu(V)\}$.

(II). *Пусть* $\pi' = \pi \cdot y'$, *где* π, $y' \in A(V)$. *Тогда* $\{\pi'(V')\} = \{\pi(V)\} \cdot V'$, *где* V' — *произвольное неособое подмногообразие многообразия* V, *принадлежащее классу* y'.

(III). *Пусть* $\pi = \mu \cdot \nu$, *где* μ, $\nu \in A(V)$. *Тогда* $\{\pi(V)\} = \{\mu(V)\} \cdot \{\nu(V)\}$.

Формулировки и доказательства всех этих теорем принадлежат Б. Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 32, 34, 35).

Б. Сегре получил доказательство утверждения (I), предполагая дополнительно, что существует неособая гиперповерхность многообразия V, содержащая многообразие M класса μ в качестве простого подмногообразия. Впоследствии Везентини [4] устранил это предположение и дал новое определение ковариантных последовательностей Сегре, не пользуясь операцией Сегре, рассмотренной в разделе n° VIII,4. Кроме того, он получил новое доказательство теоремы (I) пункта (VIII,5),

По поводу самого доказательства утверждения (I) заметим лишь, что при $m = \dim \mu = v - 1$ оно немедленно получается из результатов раздела b) пункта VII,5 и соотношений $(\pi_i(M))_V = \pi_i(V) + \pi_{i-1}(V) \cdot \mu$, которые легко вытекают из определения последовательности $\{\pi(V)\}$.

Утверждение (II) без труда доказывается индукцией по номеру члена последовательности, поскольку оно, очевидно, справедливо для первого члена $\pi' = \pi \cdot y'$. Наконец, утверждение (III) немедленно вытекает из первых двух утверждений; разумеется, оно справедливо и для большего числа множителей.

Рассмотрим теперь некоторые важные следствия этих теорем.

a) (См. Б. Сегре [12], стр. 37.) Для последовательности, обратной к последовательности $\{\pi(V)\}$, имеем $\tilde{\pi}_{v-p}(V) = \pi^{[2]}$; кроме того, $\tilde{\pi}_i(V) = 0$, если $p > v/2$ и $v - p < i \leqslant p$. Это следует из определения и из утверждения (I).

b) (См. Б. Сегре [12], стр. 39.) Поскольку определение последовательности $\{\pi(V)\}$ использует объекты, не принадлежащие кольцу $A(V)$, априори не ясно, можно ли вычислить члены этой последовательности, пользуясь лишь операциями, определенными в кольце $A(V)$. Покажем индукцией по номеру члена последовательности, что тем не менее это действительно так. Поскольку для первого члена $\pi_0(V) = \pi$, это утверждение, очевидно, справедливо, мы можем считать уже вычисленными члены $\pi_0(V), \pi_1(V), \ldots$ $\ldots, \pi_{i-1}(V)$.

Тогда 1) в случае $i = v - p$ из a) немедленно следует, что $(\pi_{v-p})_V = -\pi^{[2]} - \sum_{j=1}^{v-p} (\pi_j(V) \cdot \tilde{\pi}_{v-p-j}(V))_V$; 2) в случае

$v-p<i\leqslant p$ из а) следует, что $\widetilde{\pi}_i(V)=0$, так что $(\pi_i(V))_V=$ $=-\sum_{j=1}^{v-p}(\pi_{i-j}(V)\cdot\widetilde{\pi}_j(V))_V$; 3) в случае $i<v-p$ существует $s=v-p-i>0$ таких элементов группы $A^{v-1}(V)$, скажем, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, что класс $\mu=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_s$ содержит подмногообразие M, содержащее многообразие P в качестве простого подмногообразия. Таким образом, многообразие P, погруженное в многообразие M, удовлетворяет условиям случая 1), и потому мы можем считать, что элементы $\pi_i(M)$ уже вычислены в указанном выше смысле. Записав утверждение (I) в виде

$$\{\pi_V(M)\}=(\{\pi_M(V)\}\{\widetilde{\mu}_M(V)\})_V$$

и воспользовавшись формулой $\widetilde{\mu}_i(V)=\mu\cdot y_i^{(s)}(\alpha)$, которую легко получить из утверждения (II) и определения класса $\widetilde{\mu}_i(V)$, мы получим, что $(\pi_i(V))_V=(\pi_i(M))_V-$ $-\sum_{j=1}^{i}\pi_{i-j}(V)\cdot y_j^{(s)}(\alpha)$.

Тем самым доказано, что *последовательность* $\{\pi(V)\}$ *всегда можно построить, пользуясь лишь операциями, определенными внутри кольца* $A(V)$. Пользуясь этим обстоятельством, мы могли бы теперь обобщить понятие ковариантной последовательности на случай, когда P представляет собой произвольный цикл многообразия V, а также получить новое доказательство инвариантности последовательности $\{\pi(V)\}$ относительно рациональной эквивалентности.

c) (См. Б. Сегре [12], стр. 40.) Вопрос, которым мы только что занимались, приводит к следующей более широкой постановке задачи. Пусть N — некоторое подмногообразие многообразия V, полученное из многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_s$ с помощью операций, определенных внутри колец $A(M_i)$ и $A(V)$, и пусть ν и $\mu^{(i)}$ — классы эквивалентности соответственно многообразий N и M_i в кольце $A(V)$. Требуется найти выражение класса $\nu(V)$ как функции элементов последовательностей $\{\mu^i(V)\}$. Б. Сегре решил эту задачу в случае, когда класс $\nu\in A^{v-1}(V)$ имеет вид $\nu=\mu^{(1)}\pm\mu^{(2)}$. Это исследование довольно сложно, и мы не станем им заниматься.

7. Каноническая последовательность

Изложим теперь определение и свойства *канонических систем в смысле Сегре* (см. Б. Сегре [12], стр. 89).

a) (См. Б. Сегре [12], стр. 84.) Пусть $\{y\}$, $\{y'\}$ — две последовательности многообразий V и V' соответственно. Очевидно, что элементы кольца $\mathbf{A}(V\times V')$, имеющие вид $\zeta_j=\sum y_i y'_l$, $i+l=j$, $j=0, 1 \ldots$, составляют некоторую последовательность с носителем $V\times V'$. Эта последовательность называется *произведением данных последовательностей*; аналогично определяется произведение более чем двух множителей.

Очевидно, что *операция умножения перестановочна с операциями альтернирования и обращения.* Кроме того, если $\pi\in\mathbf{A}(V)$, $\pi'\in\mathbf{A}(V')$ и $\eta=\pi\times\pi'\in\mathbf{A}(V\times V')$, то $\{\eta(V\times V')\}=\{\pi(V)\}\times\{\pi'(V')\}$.

b) (См. Б. Сегре [12], стр. 91.) Определив очевидным образом операции проектирования последовательностей, введем следующее

Определение. *Канонической последовательностью* неособого многообразия V называется проекция на многообразие V последовательности $\{\delta(V\times V)\}$, где δ — класс диагонали Δ произведения $V\times V$ в кольце $\mathbf{A}(V\times V)$. Члены канонической последовательности называются *каноническими классами.*

Это определение оправдывается результатами n° VI,8 из которых легко следует относительная инвариантность последовательности $\{y^*\}$ в классе неособых моделей.

Каноническую последовательность многообразия, принадлежащего классу μ, мы будем обозначать символом $\{\mu^*\}$.

Отметим следующие важные свойства канонических последовательностей (см. Б. Сегре [12], стр. 92, 94, 95), доказательства которых легко вытекают из свойств ковариантных последовательностей:

(I) *Для любого элемента* $\pi\in\mathbf{A}(V)$ *имеет место соотношение* $\{\pi^*\}_V=\{\bar{\pi}(V)\}\cdot\{y^*\}$, *где* $\{y^*\}$ — *каноническая последовательность многообразия* V.

(II). *Если* $V=V_1\times V_2\times\ldots\times V_s$, *то* $\{y^*\}=\{y_1^*\}\times\times\{y_2^*\}\times\ldots\times\{y_s^*\}$, *где* $\{y_i^*\}$ — *каноническая последовательность многообразия* V_i.

(III). *Пусть δ — класс диагонали s-кратного произведения $R = V \times V \times \ldots \times V$ в кольце $\mathbf{A}(R)$, и пусть ϱ — единица кольца $\mathbf{A}(R)$. Тогда $\{\delta^*\}^{[s]} = \delta \cdot \{\varrho^*\}$.*

(IV). *Если $\pi = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{v-p}$, где $\alpha_i \in A^{v-1}(V)$, то $\pi_i^* = \pi \times \times \sum_{j=0}^{i} \tilde{\tilde{y}}_j^{(v-p)}(\alpha) \cdot y_{i-j}^*$. В частности, для любого элемента $\alpha \in A^{v-1}(V)$ имеет место равенство $\alpha_i^* = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{i} \alpha^{[j]} \cdot y_{i-j}^* = = \alpha \cdot (y_i^* + \alpha_{i-1}^*)$.*

Утверждение (III) непосредственно вытекает из утверждения (II), а утверждение (IV) — из утверждения (I) и формулы $\tilde{\pi}_j(V) = \pi \cdot \tilde{\tilde{y}}_j^{(v-p)}(\alpha)$.

Класс $\alpha_{(i)} = y_i^* + \alpha_{i-1}^*$, принадлежащий группе $\mathbf{A}^{v-1}(V)$, называется, согласно Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 96), *присоединенным i-мерным классом* $(v-1)$-мерного класса α; при этом предполагается, что этот класс содержит хотя бы одно многообразие. Аналогичная терминология употребляется и для многообразий.

Пользуясь предложением (IV), без труда можно доказать следующую *теорему о присоединенных классах*:

(V) *Присоединенный i-мерный класс простого неособого V-дивизора A на многообразии V высекает на A канонический класс с номером i. Другими словами, $\alpha_i^* = = \alpha \cdot \alpha_{(i)}$.*

Связь теории Сегре с теорией Тодда выясняется следующей теоремой (см. Б. Сегре [12], стр. 113);

(VI). *Каноническая последовательность Сегре $\{y^*\}$ совпадает с последовательностью $\{{}^*y\}$, состоящей из канонических классов Тодда.*

Первый шаг в доказательстве этой теоремы состоит в проверке того, что каноническая последовательность Тодда также удовлетворяет соотношению (1). Затем это соотношение применяется к случаю, когда многообразие V, содержащее неособое многообразие P, представляет собой линейное пространство S.

Из получающихся соотношений $\{\pi^*\}_S = \{\bar{\pi}(s)\} \cdot \{\sigma^*\}$ и $\{{}^*\pi\}_S = = \{\bar{\pi}(S)\} \cdot \{{}^*\sigma\}$, где σ — единица кольца $\mathbf{A}(S)$, немедленно вытекает, что теорему достаточно доказать лишь для случая линейных пространств S (см. Б. Сегре [12], стр. 109). Далее, пользуясь формулой (16), мы получаем, что степень класса ${}^*\sigma_i$ равна $(-1)^i \binom{v+1}{i}$.

Поскольку, в силу предложения IV n° VI, 10 факторгруппа $G^h(S)/G^h_a(S)$ является бесконечной циклической группой, отсюда вытекает, что $^*\sigma_i = (-1)^i \binom{v+1}{i} \sigma^{v-i}$, где σ^{v-i} — класс $(v-i)$-мерного подпространства пространства S. Таким образом, остается лишь доказать, что $\sigma_i^* = (-1)^i \binom{v+1}{i} \sigma^{v-i}$. Это делается с помощью формальных вычислений индукцией по разности $s-i$.

При $s-i=0$ рассматриваемое равенство имеет вид $(-1)^s \sigma_s^* = (s+1)\sigma^0$ и его доказательство сводится к проверке того, что его левая часть представляет собой совокупность из $s+1$ точек, т. е. имеет степень $s+1$. Но, в силу определения последовательности $\{\sigma^*\}$, степень этой совокупности точек совпадает со степенью цикла $\Delta^{[2]}$ произведения $S \times S$. Так как диагональ Δ принадлежит неприводимой алгебраической системе s-мерных циклов произведения $S \times S$, описывающей коллинеации пространства S в себя, и так как общий член этой системы содержит в точности $s+1$ неподвижную точку (причем все эти точки просты), то эта степень действительно равна $s+1$.

Общий шаг индукции основывается на аналогичных соображениях, и мы проводить его здесь не будем.

8. Некоторые приложения

а) Из результатов разделов а) n° VIII, 6 и b) n° VIII, 7 немедленно вытекает, что нульмерный член последовательности $\{y^*\}$ имеет вид $y_v^* = (-1)^v \cdot \mathrm{pr}_V \delta^{[2]}$ (см. Б. Сегре [12], стр. 92).

При $v=1$ это равенство выражает так называемый принцип соответствий на кривой или, точнее, одну из форм этого принципа, относящуюся к случаю соответствий с весом (см., например, Годо [a]).

При $v=2$ это равенство дает некую новую интерпретацию рядов Севери (см. VIII, 3,e)), использующую диагональ Δ произведения поверхности на себя. Эта интерпретация восходит к Комесатти (см. Севери [a], стр. 304—311; Комесатти [1]).

b) (См. Б. Сегре [12], стр. 115.) Поскольку класс $\delta^{[2]}$, рассматриваемый как число, совпадает с характеристикой Эйлера—Пуанкаре многообразия V, из формулы (15) вытекает, что

$$b_v = I_v + 2(-1)^v (v-1) + 2 \sum_{i=1}^{v-1} (-1)^{v-i-1} b_i,$$

где b_i представляет собой i-мерное число Бетти многообразия V. (Следует иметь в виду, что *топологическая размерность* многообразия V равна $2v$, причем $b_{2v-i}=b_i$.)

Это соотношение представляет собой классическую теорему Александера, которая дает топологическую интерпретацию инварианта Цейтена — Сегре (см. Александер [1]). Из него, в частности, следует, что *если размерность v нечетна* и, значит, число b_v, в силу хорошо известного результата Лефшеца, четно (см. раздел a) n° IX, 6a, а также Лефшец [b], стр. 272), *то инвариант I_v и степень C_v канонического ряда четны* (см. Б. Сегре [3]).

c) Из совпадения канонических классов, в смысле Тодда и в смысле Сегре, вытекает, очевидно, что присоединенные классы по Тодду (см. раздел d), n° VIII, 3) совпадают с присоединенными классами по Сегре (см. раздел b), n° VIII, 7).

Заметим еще, что, пользуясь предложением IV, n° VIII, 7, IV, можно распространить понятие канонического класса на случай любого класса $\pi \in A(V)$, даже если в нем нет неособых простых циклов. Мы не будем заниматься этим обобщением; при подробном рассмотрении оно оказывается довольно тонким (см. Б. Сегре [12], стр. 101).

d) (См. Б. Сегре [12], стр. 102.) ◀*Каноническим пополнением* некоторого подкольца B кольца $A(V)$ называется множество B^*, которое получается из множества B присоединением к нему всех канонических классов его элементов. Относительно этого понятия можно поставить ряд интересных вопросов. Например, при каких условиях множество B^* является кольцом и когда оно совпадает с кольцом B. Не разбирая этой проблематики подробно, мы укажем здесь лишь следующий результат (Б. Сегре [2], стр. 512): *при $v=2$ или 3 кольцо B, порожденное каноническими классами многообразия V, обладает тем свойством, что $B^*=B$.*

Что же касается случая любого v, то здесь можно отметить следующий результат, немедленно вытекающий из предложения IV, n° VIII, 7: если $\pi=\xi^{[s]}$, $1 \leqslant s \leqslant v-1$, где $\xi=y_1^*$, то $\pi_i^*=$

$$=\pi \cdot \sum_{j=0}^{i} \binom{s+j-1}{j} \xi^{[j]} \cdot y_{i-j}^*, \quad 0 \leqslant i \leqslant v-s.$$ ▶

В частности, при $i=1$ мы получаем, что $\pi_1^*=(s+1)\,\xi^{[s+1]}$, откуда при $s=v-1$ вытекает, что $\pi_1^*=v\cdot\xi^{[v]}$. Для чисел Ω_0 и Ω_1 (см. n° V, 9) отсюда следует равенство $2(\Omega_1-1)=v\Omega_0$, представляющее собой частный случай формул Максвелла—Тодда, приведенных в n° V, 9. Из этого равенства, в частности, вытекает, что *если размерность v нечетна, то число Ω_0 четно* (см. Б. Сегре [3]). При $v=2, 3$ равенство $2(\Omega_1-1)=v2_0$ совпадает соответственно с классическими формулами Нётера и Панелли.

е) (См. Б. Сегре [12], стр. 115.) Пусть S — некоторое проективное пространство и $\{\sigma_i^*\}$ — его каноническая последовательность. Из сказанного в пункте VIII, 7 легко следует, что $\sigma_i^*=(-1)^i\binom{s+1}{i}\alpha^{[i]}$, где $\alpha\in A(S)$ — класс гиперплоскости A пространства S. Иначе эти формулы можно записать в виде равенства $(\sigma^*, x)=(1-\alpha x)^{s+1}$. Пусть, далее, γ — произвольный элемент группы $A^{s-1}(S)$, где $s=\dim S$. Ясно, что $\gamma=c\alpha$, где c — степень класса γ. С другой стороны, из предложения IV, n° VIII, 7 вытекает, что $\gamma_i^*=\sum_{j=0}^{i}\gamma^{[i+1]}\cdot\sigma_{i-j}^*$, т. е. что $\gamma_i^*=\gamma^{(i)}=\gamma(i)\alpha^{[i+1]}$, где $\gamma(i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{s+1}{i-j}c_*^{j+1}$. Это число $\gamma(i)$ представляет собой *степень* канонических циклов индекса i класса α.

Пусть теперь $\pi=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_s$, где $\alpha_i\in A^{s-1}(S)$. Используя равенство $(\sigma^*, x)=(1-\alpha x)^{s+1}$ и принимая во внимание, что $\pi_i(S)=\pi\cdot\widetilde{\sigma}_i^{(s)}(\alpha)$, мы без труда получим, что

$$(\pi^*, x)=\pi(1-\alpha x)^{s+1}\prod_{h=1}^{s}(1-\alpha_h x)^{-1}=$$

$$=\pi(1-\alpha x)^{s+1}[(1-a_1\alpha x)(1-a_2\alpha x),\ \ldots,\ (1-a_3\alpha x)]^{-1},$$

где $\alpha_i=a_i\alpha$.

Таким образом, мы получили явные формулы для вычисления канонических классов любого элемента $\pi\in A(S)$, являющегося пересечением $(s-1)$-мерных элементов кольца $\mathrm{A}(S)$, а следовательно (в силу теоремы Севери из пункта VI, 10), и любого многообразия пространства S. Конечно, понятие канонической последовательности должно быть при этом предварительно распространено на любые многообразия с особенностями (см. раздел с)).

Из этих формул, в частности, следует классический результат (см. также Годо [1] и Эже [4]), которым мы уже пользовались (см. n° V, 8): *канонические дивизоры подмногообразия P проективного пространства S высекаются формами пространства S степени* $N = \sum_{i=1}^{s} a_i - s - 1$ (в n° V, 8 числа a_i обозначались через α_i).

9. Поведение канонических систем при бирациональных преобразованиях

Вопрос о поведении канонических классов при произвольных бирациональных преобразованиях еще весьма далек от решения. Сейчас известны лишь некоторые частные результаты, принадлежащие Б. Сегре и Тодду (см. Б. Сегре [5, 14], Тодд [7, 10, 15]), относящиеся к случаю, когда преобразование представляет собой дилатацию многообразия V с центром в некотором подмногообразии.

a) (См. Б. Сегре [14], стр. 146.) Пусть T — дилатация многообразия V с центром в неособом подмногообразии $P \subset V$. Из предложения (II), n° VIII, 4 и из определения канонических классов по Сегре без труда следует, что $y_i^* = T(y_i^*) + (\lambda_i')_{V'}$, где $V' = T(V)$, y и y' — единицы колец $\mathbf{A}(V)$ и $\mathbf{A}(V')$ соответственно, а λ_i' — некоторый элемент множества $\mathbf{A}^{v-1}(P')$, $P' = T(P)$. Таким образом, нужно лишь вычислить класс λ_i'.

b) (См. Б. Сегре [14], стр. 147, а также Тодд [7].) Рассмотрим сначала случай $p = \dim P = 0$, когда многообразие P' представляет собой некоторое проективное пространство $S'^{v-1} \subset V'$. В этом случае $\lambda_i' = a_i \sigma'^{v-i}$, где $\sigma'^{v-i} \in \mathbf{A}\ (P')$ — класс подпространства $S'^{v-i} \subset S'^{v-1}$. С другой стороны, в силу предложений VI, n° VIII, 7, и IV, n° VIII, 7, в кольце $A(V')$ имеют место равенства $\pi_i'^* = (-1)^i \binom{v}{i} \sigma'^{v-i-1}$ и $\pi_i'^* = \pi' \cdot \sum_{j=0}^{i} \pi'^{[j]} \cdot y_{i-j}'^*$, где π' — класс многообразия P', так что $(-1)^i \binom{v}{i} \sigma'^{v-i-1} = \pi'^{[i+1]} + \sum_{j=0}^{i-1} \pi'^{[j+1]} y_{i-j}'^*$.

Вычитая из этой формулы соответствующую формулу для $i-1$, умноженную на π', и учитывая очевидное равенство $\pi'^{[i]} = (-1)^{i-1}\sigma'^{v-i}$, мы получим, что $\left(\binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}\right)\pi'^{[i+1]} = \pi' \cdot y_i'^{*}$. Но, легко видеть, что $\pi' \times T(y_i^*) = 0$ и потому $\pi' \cdot y_i'^* = a_i \cdot \pi' \cdot \sigma'^{v-1} = (-1)^{i-1} a_i \cdot \pi'^{[i+1]}$. Следовательно,

$$a_i = (-1)^{i-1}\left\{\binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}\right\}.$$

c) (См. Б. Сегре [14], стр. 148.) Окончательный результат получен также в случае $i = 1$, т. е. для класса $\lambda_1' \in A^{v-1}(P')$. Ясно, что $\lambda_1' = l\pi'$, где l — некоторое целое число. Докажем, что $l = v - p - 1$.

При $p = 0$ это справедливо в силу результатов раздела b), а при $p = v - 1$ это также справедливо, ибо тогда преобразование T бирегулярно. Для остальных значений p мы воспользуемся индукцией по размерности v, считая число p фиксированным:

Пусть $\beta \in A^{v-1}(V)$ — класс, к которому принадлежит некоторое многообразие B, содержащее многообразие P в качестве простого подмногообразия. Положим $\bar\pi' = \pi' \cdot \beta'$. Согласно предположению индукции, $\beta_1'^* = \bar T(\beta_1^*) + (v - p - 2)\bar\pi'$, где $\bar T$ — дилатация многообразия B, индуцированная дилатацией T. С другой стороны, так как $y_1' = {}^*T(y_1^*) + l\pi'$, то $y_1'^* \cdot \beta' = \bar T(y_1^* \cdot \beta) + l\bar\pi'$.

Пусть теперь $\alpha = \beta$ и $\alpha' = \beta' + \pi'$. Применяя теорему о присоединенных классах ((V), n° VIII, 7), мы получим, что $\beta_1'^* = y_1'^* \cdot \beta' + \beta'^{[2]}$ и $\beta_1^* = y_1^* \cdot \beta + \alpha \cdot \beta$. Отсюда следует, что $\bar T(\beta_1^*) = \bar T(y_1^* \cdot \beta) + \alpha' \cdot \beta' = y_1'^* \cdot \beta' - l\bar\pi' + \beta'^{[2]} + \beta' \cdot \pi' = \beta_1'^* - (l-1)\bar\pi'$. Следовательно, $l = v - p - 1$.

d) Для произвольных p и i Тодд (см. Тодд [15], стр. 99), экстраполируя приведенные формулы, предложил в качестве гипотезы следующее выражение для класса λ_i':

$$\lambda_i' = -\sum_{r=t}^{p} \gamma'_{r,i} \cdot (\pi'^{[i-p+r]})_{P'}, \quad t = \max(0,\ p - i + 1),$$

где

$$\gamma'_{r,i} = \sum_{s=0}^{p-r} \lambda^{v-p-s}_{v-i-r-s+1} \tilde{\tilde{\pi}}_s(V) \cdot \pi^*_{p-r-s}$$

и

$$\lambda_n^m = \binom{m}{n} - \binom{m}{n-1} \text{ при } n > 0; \ \lambda_n^m = 0 \text{ при } n \leqslant 0.$$

Заметим, что $\gamma'_{r,i}$ представляет собой геометрическое место ∞^r пространств $L'^{v-p-1} \subset P'$, так что $\gamma'_{r,i} \in \mathrm{A}(P')$.

Тодд доказал эти формулы для случая $i \leqslant v-p$, а также для произвольного i в случае $v-p=2$, а Б. Сегре — для случаев $i=1, 2, 3$ и любых значений v и p, а также для случая $i=v$ и $v>2p$. Как указывает Тодд, доказательство этих формул в общем виде требует распространения на случай рациональной эквивалентности некоторых известных критериев линейной эквивалентности.

Мы рассмотрим здесь, следуя Сегре (см. Б. Сегре [14], стр. 153), лишь случай $i=v$ и $v>2p$. Не исключена возможность, что предложенное Б. Сегре для этого случая доказательство удастся применить и к более общим случаям.

Пусть G — группа из g точек многообразия P, а k — некоторое целое число.

Выбрав в образе L'^{v-p-1} каждой точки из группы G произвольную систему k точек, мы получим на многообразии P' некоторую группу $[kG]$, состоящую из kg точек. Ее класс эквивалентности мы будем обозначать символом $[k\gamma]$, где γ — класс группы G. Пользуясь этим обозначением, мы можем формулу Тодда при $i=v$ переписать в следующем виде:

$$\lambda'_v = (-1)^{v-p}\left[(v-p-1)\,\pi_p^*\right].$$

Пусть $U = P \times P$ и $U' = P' \times P'$, и пусть Δ и Δ' — соответственно диагонали этих двух произведений. Из результатов раздела а) n° VIII,8 немедленно следует, что $\pi'^*_{v-1} = (-1)^{v-1}\,\mathrm{pr}_{P'}\,\delta'^{[2]}$ и $\pi_p^* = (-1)^p\,\mathrm{pr}_P\,\delta^{[2]}$. С другой стороны, преобразование T индуцирует некоторое соответствие F между многообразиями $U \times U$ и $U' \times U'$, сопоставляющее каждой точке $Q \times Q_1 \subset U \times U$ многообразие $A = T(Q) \times T(Q_1) \subset U' \times U'$. Очевидно, что $\delta^{[2]} = F^{-1}(\delta'^{[2]})$, причем каждая точка множества $(\Delta'^{[2]})_U$ является F-образом целой группы ряда $(\Delta_A^{[2]})_A$, где Δ_A —

диагональ произведения A. Но, как известно, последний ряд при $l = v - p - 1$ эквивалентен группе неподвижных точек почти любой коллинеации l-мерного пространства (см. раздел b), n° VIII,7). Сопоставляя все эти факты, мы получаем, что $\pi_{v-1}'^{*} = (-1)^l [(l+1)\pi_p^*]$.

Поскольку $v > 2p$, существует неособое многообразие $B \subset V$ размерности $v - 1$, содержащее многообразие P в качестве простого подмногообразия. Применяя только что полученный результат вместо многообразия V к многообразию B и используя обозначения, введенные в разделе с), мы получим, что $\bar{\pi}_{v-2}'^{*} = (-1)^{v-p} [(v-p-1)\pi_p^*]$.

Теперь остается лишь доказать, что $\bar{\pi}_{v-2}'^{*} = \lambda_v'$. С этой целью погрузим многообразие V в пучок на некотором неособом многообразии C^{v+1} так, чтобы базисное многообразие B пучка было неособым и содержало P в качестве простого подмногообразия. Продолжим дилатацию T до некоторой дилатации T^* многообразия C с тем же центром P. Ясно, что соответствующее многообразие $C' = T^*(C)$ содержит пучок многообразий V' с некоторым базисным многообразием B'.

Многообразия $W' = V' \times V'$ и $N' = \bar{P}' \times \bar{P}'$, где $\bar{P}'$ — произвольный представитель класса $\bar{\pi}'$, лежат на многообразии $R' = C' \times C'$.

Пусть $\bar{V}'$ — общий элемент пучка на многообразии C', и пусть $\bar{\bar{V}}'$ — общий элемент произвольной системы эквивалентности, содержащей на произведении $\bar{W}' = \bar{V}' \times \bar{V}'$ многообразие $\bar{V}'$, вложенное как диагональ. Пусть, далее, $\bar{\bar{P}}' = \bar{\bar{V}}' \cdot N'$. Тогда $\bar{\bar{P}}' \equiv \bar{P}'$, откуда вытекает, что соответствующие классы эквивалентности связаны соотношением $\bar{\pi}_{N'}' \cdot \bar{\bar{\pi}}_{N'}' = \bar{\pi}'^{[2]}_{N'} = (-1)^v \bar{\pi}_{v-2}'^{*}$. Пусть специализация $\bar{\bar{V}}' \rightarrow M'$ продолжает специализацию $\bar{V}' \rightarrow V'$. Тогда $M' \subset W'$ и $M' \equiv V'$. Таким образом, $y_{W'}' \cdot \mu_{W'}' = y_{W'}'^{[2]} = (-1)^v y_v'^{*}$. Для завершения доказательства остается принять во внимание характер соответствия между многообразиями W' и $W = V \times W$, индуцированного соответствием T^{-1},

10. Иррегулярные пересечения

Тодд и Сегре (см. Б. Сегре [2,12], Тодд [8,11]), развивая некоторые результаты Севери (см. Севери [1]), применили изложенную теорию к изучению иррегулярных пересечений $A \perp B$ (см. n° I,9).

Пусть M_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, — произвольные подмногообразия многообразия V, и пусть $M_1 \perp (M_2 \perp (\ldots M_s) \ldots) =$ $= P + Q$, где Q — цикл размерности $q = \sum_{i=1}^{s} m_i - v - 1$, $m_i = \dim M_i$, а P — цикл размерности $p \geqslant q$. Предполагая, что многообразия M_i и P представляют собой неособые подмногообразия многообразия M (так что для них определены ковариантные последовательности), поставим задачу о вычислении в терминах их ковариантных последовательностей следующих двух элементов кольца $\mathbf{A}(V)$: 1) так называемой *рациональной эквивалентности* многообразия P относительно классов μ_i циклов M_i, которая определяется формулой (см. раздел е), n° VIII,4):

$$\varepsilon^{(s)}(P; \mu) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_s - (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_s)^P;$$

2) класса $\varrho = \chi \cdot P$, где χ — символическое произведение $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s) P$ классов μ_i относительно многообразия P.

За исключением некоторых весьма специальных результатов, эти задачи решены сейчас лишь для случая, когда многообразия M_i содержат неособое многообразие P в качестве *простого* подмногообразия, причем объемлющее многообразие V неособо. В этих предположениях имеет место следующая теорема Б. Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 51; более ранние частные случаи указаны в работе Тодда [11]):

(I) *Пусть* $\{\pi^0\} = \pi_P(M_1) \cdot \pi_P(M_2) \ldots \pi_P(M_s) \cdot \tilde{\pi}_P(V)^{[s-1]}$ *и* $t = p - q$. *Тогда* $\varepsilon(P; \mu) = \pi_t^0$ и $\varrho = \pi_{t+1}^0$. Мы докажем здесь лишь первую формулу и лишь для случая $s = 2$. Пусть $M_1 = M$ и $M_2 = N$. Прежде всего легко показать, что $\{\pi^0\} = (\pi_M(V) \cdot \tilde{\mu}(V))_N \cdot \tilde{\nu}(V)$. Поэтому формула $\varepsilon(P; \mu) = \pi_t^0$ (заметим, что при $t = 0$ эта формула очевидна) сводится к любой из следующих трех формул:

$$(\varepsilon(P;\, M,\, N))_N = \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{i} (\pi_i(V))_M \cdot (\tilde{\mu}_{i-j}(V)_M)_N \cdot (\tilde{\nu}_{t-i}(V))_N,$$

$$(\varepsilon(P;\, M,\, N))_N = \sum_{i=0}^{t} (\pi_i(M))_N \cdot (\tilde{\nu}_{t-i}(V))_N,$$

$$(\varepsilon(P;\, M,\, N))_P = \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{t-i} (\pi_i(M))_P \cdot (\pi_j(N))_P.$$

Каждая из этих формул по-своему интересна; вторая формула вытекает из первой, в силу предложения (I), n° VIII,6.

В доказательстве необходимо отдельно рассмотреть следующие четыре случая: 1. $p=m$; 2. $n=v-1$, $p<m$; 3. $n<v-1$, $p=m-1$; 4. $n<v-1$, $p<m-1$. В первом случае $\pi=\mu$, так что $\chi=(\mu\cdot\nu)^P=0$. Кроме того, $\{\pi(M)\}=\{\mu(N)\}=\mu,\ 0,\ \ldots$, так что рассматриваемая формула сводится к равенствам

$$(\mu\cdot\nu)_V=\mu\,(\tilde{\nu}_{v-n}(V))_V \quad \text{и} \quad (\mu\cdot\nu)_N=\mu_N\cdot(\nu_V^{[2]})_N,$$

справедливость которых немедленно вытекает из того, что $\mu=\pi\in A(N)$. Во втором случае $\dim\pi=\dim\chi=m-1$ и $t=0$, так что теорема очевидна. Третий случай можно доказать индукцией по числу $v-n$. В самом деле, утверждение верно при $v-n=1$. Для проведения индукции следует рассмотреть на многообразии V простой дивизор, содержащий многообразие P в качестве простого подмногообразия, и воспользоваться теоремами n° VIII,6. Последний случай доказывается индукцией по числу $m-p$; здесь теорема также справедлива в случае $m-p=1$, а индуктивное рассуждение проводится на основе тех же построений, что и в третьем случае.

Заметим, что теореме (I) можно придать инвариантный вид, если выразить с помощью теорем раздела b) n° VIII,7, ковариантные последовательности, входящие в определение последовательности $\{\pi^0\}$, через соответствующие канонические последовательности.

Задачи 1) и 2) можно обобщить, поставив задачу о вычислении ковариантных последовательностей некоторого представителя Q класса χ и пересечения $R=P\cdot Q$ через канонические циклы многообразий M_i и P. Решение этого вопроса могло бы быть полезным для подсчета некоторых численных характеристик циклов Q и R. Оно было получено Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 62) для класса $\chi(V)$ при $p=q$, а также для некоторых частных случаев при $p>q$. Кроме того, во всех случаях известна красивая формула для класса $\varrho_i(Q)$:

$$\varrho_i(Q)=\overset{0}{\pi}_{i+i+1}.$$

Проблемы, связанные с иррегулярными пересечениями, весьма характерны для алгебраической геометрии, ибо никакой их топологический аналог в настоящее время не известен. Б. Сегре предполагает, что любая проблема рассмотренного в этом пункте вида допускает полное решение в терминах ковариантных последовательностей. Для всех изученных до сих пор случаев это предположение справедливо. Заметим, что эти проблемы никем не были исследованы с абстрактно-алгебраической точки зрения, если не считать некоторых общих работ, посвященных основаниям (см. Барзотти [3]).

11. Отдельные результаты

Изложим в заключение несколько изолированных приложений теории Тодда—Сегре.

а) (См. Б. Сегре [12], стр. 67.)

В некоторых вопросах классы $\pi_i(V)$ удобно рассматривать как символические степени класса $\pi(V)$, полагая $\pi_i(V)=[\pi(V)]^j$, где $j=v-p+i$. Далее, для любого многочлена $f(\pi)=\sum_{j=0}^{n}\mu_j\pi^{[j]}$, коэффициенты μ_j которого принадлежат кольцу $\mathrm{A}(V)$, удобно положить, что $f(\pi(V))=$ $=\sum_{j=0}^{n}\mu_j[\pi(V)]^j$. Заметим, что если $\dim\mu_j=r+j$, где r не зависит от j, то $\dim f(\pi(V))=r$.

В этих обозначениях, полученную в п° VIII,10, формулу для класса $\varepsilon(P;\alpha)$ можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(P;\alpha)=(\alpha_1+\pi)\ \dots\ (\alpha_s+\pi).$$

Пусть в классах α_i существуют такие представители A_i, содержащие многообразие P с кратностью $k_i\geqslant 1$, что пересечение $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_s$ *регулярно* вне компоненты P, В этом случае можно показать, что среди представителей класса $\varepsilon(P; \alpha)$ содержится цикл $E=(A_1+k_1P) \ldots \ldots (A_s+k_sP)$. Это решает задачу нахождения рациональной эквивалентности многообразия P по отношению к элементам α_i с данными кратностями k_i (см. также частные случаи в работах Аркбольда [1] и Баркера [2]).

b) В случае $2p \geqslant v$ Севери показал (см. Севери [1]), что *особое множество $\mathfrak{D}$ двойных точек для почти всех членов P любой алгебраической максимальной системы на многообразии V не смешано и имеет размерность* $\alpha = 2p - v$.

Оказывается, что класс δ цикла $\mathfrak{D}$ в кольце $\mathbf{A}(V)$ выражается формулой $\delta = \pi^{[2]} - \widetilde{\pi}_{v-p}(V)$, доказанной Toддом и Сегре (см. Тодд [11], Б. Сегре [12], стр. 72; частные случаи этой формулы содержатся в работах Туллена [1], Б. Сегре [4], Йоксолла [1]).

Отсюда, в частности, вытекает, что если цикл $\mathfrak{D}$ рационально эквивалентен нулю, то $\pi^{[2]} = \widetilde{\pi}_{v-p}(V)$ (см. раздел а), n° VIII,6). Пользуясь предложением (I) раздела b), n° VIII,7, можно получить также равенство

$$\delta = \pi^{[2]} - (-1)^{v-p} \sum_{i=0}^{v-p} \pi_i^* \cdot y_{v-p-i}^*.$$

c) Пусть $p < m \leqslant 2p-1$ и $m < v$. Тогда каждое подмногообразие многообразия V, содержащее многообразие P, вообще говоря, обладает особым множеством $\mathfrak{S}$, которое, помимо множества $\mathfrak{D}$ двойных на P точек (в общем случае при $2p < v$ множество $\mathfrak{D}$ пусто), содержит некоторое множество $\mathfrak{R}$, простое на многообразии P и имеющее размерность $\dim \mathfrak{R} = 2p - m - 1$. Этот факт доказан Севери и Сегре (см. Севери [1], стр. 74, и [g], стр. 54; а также Б. Сегре [12], стр. 72. Севери рассматривает случай, в котором V представляет собой линейное пространство, а многообразия P и M являются полными пересечениями форм). Оказывается, как показал Сегре, при $m < v-1$ класс ϱ цикла $\mathfrak{R}$ выражается формулой $\varrho = (\widetilde{\pi}_{m-p+1}(M))_V$, а при $2p > m = v-1$ формулой $\varrho = (\widetilde{\pi}_{v-p}(M))_V - \delta$, где δ — рассмотренный в разделе b) класс. Эти соотношения тоже можно перевести на язык канонических последовательностей.

d) (См. Б. Сегре [12], стр. 118.) Пусть $\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_h} = (\pi^*_{i_1} \cdot \pi^*_{i_2}, \ldots, \pi^*_{i_h})$, где π^*_j — как и ранее, канонические классы подмногообразия $P \in V$. Ясно, что при $\sum_{j=1}^{h} i_j = p$ класс $\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_h}$ нульмерен. Пусть $x_{i_1, i_2, \ldots, i_h} = \deg \xi_{i_1, i_2, \ldots, i_h}$. Легко доказать, что если $\sum c_{i_1 i_2 \ldots i_h} \xi_{i_1 i_2 \ldots i_h} = 0$ и, значит, $\sum c_{i_1 i_2 \ldots i_h} x_{i_1 i_2 \ldots i_h} = 0$, где $c_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ — целые числа, не зависящие от выбора многообразия P, а суммы распространены на все разбиения числа p, то $c_{i_1 i_2 \ldots i_h} = 0$; иначе говоря, *классы* ξ *и числа* x *линейно независимы*.

На этом пути, подходящим образом строя пересечения элементов последовательностей $\{\pi^*\}$ и $\{\pi(V)\}$, можно найти много различных независимых рядов эквивалентности. В частности, как показал Сегре (см. Б. Сегре [12], стр. 119), *на любой поверхности имеется в точности пять независимых рядов эквивалентности.*

IX

Алгебраические многообразия как комплексно-аналитические многообразия

1. Комплексные многообразия и теорема Чжоу

В этой главе мы начнем изучение алгебраических многообразий, определенных над полем комплексных чисел, с трансцендентной и топологической точки зрения, опуская, однако, традиционные разделы этих теорий, которые можно найти в хорошо известных книгах (см. Ходж [a]; де Рам — Кодаира [a]; де Рам [a]; Лихнерович [a]; Сегре [b], а также Гарабедян — Спенсер [1,2]; Кодаира [1]; Экман [1,2]; Экман — Гуггенхеймер [1]; Гуггенхеймер [1]; Ходж [10]).

Понятие комплексно-аналитического многообразия (комплексного многообразия) обобщает хорошо известное абстрактное определение римановой поверхности.

Комплексным многообразием $\mathfrak{M}^n$ комплексной размерности n называется хаусдорфово пространство, каждая точка которого, P, обладает окрестностью $U(P)$ гомеоморфной некоторой области эвклидова пространства комплексных переменных $z^1, z^2, \ldots, z^n$ (эти переменные называются *локальными координатами* в окрестности $U(P)$); при этом требуется, чтобы переход от одной системы координат к другой в пересечении соответствующих окрестностей задавался бы комплексно-аналитическими функциями (т. е. псевдоконформным отображением). Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *компактным*, если оно компактно как топологическое пространство; далее все рассматриваемые многообразия предполагаются компактными.

Очевидно, что проективное пространство $\mathbf{P}^n$ обладает естественным комплексным строением. Отсюда легко вывести, что *любое неособое алгебраическое многообразие пространства* $\mathbf{P}^n$ *является компактным комплексным многообразием.*

Чжоу (см. Чжоу [2]) доказал обратную теорему:

(I) *Любое компактное комплексное многообразие, расположенное в проективном пространстве* $\mathbf{P}^n$, *является алгебраическим многообразием.*

На самом деле Чжоу доказал большее, а именно, что любое компактное аналитическое множество E в пространстве $\mathbf{P}^n$, т. е. множество, которое локально задается решениями системы голоморфных уравнений, алгебраично.

Доказательство этой теоремы можно свести к случаю $n=2$ (это упрощение принадлежит Самюэлю [2]). Для этого следует воспользоваться индукцией и тем фактом, что если любое подпространство $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$, содержащее начало координат O, пересекает некоторое алгеброидное многообразие $V \subset \mathbf{P}^n$ по алгебраическому многообразию, то и само многообразие V алгебраично. Пусть теперь существует алгеброидная кривая $C \subset \mathbf{P}$, проходящая через точку O и не алгебраичная. Нетрудно доказать, что тогда для любого целого числа N существует алгебраический цикл Γ порядка n, для которого $i(O; C \cap \Gamma) \geqslant nN$. С другой стороны, можно показать, что если в окрестности точки O кривая C содержится в компактном аналитическом подмножестве пространства $\mathbf{P}$, то для некоторого N выполняется неравенство $i(O; C \cap \Gamma) \leqslant nN$.

Штейн (см. Картан [b], сообщение XIV К. Штейна) и Серр (см. Картан [b], сообщение XIX Ж. П. Серра; см. также Картан [1], где цитированы более ранние работы П. Туллена) предложили иные, более изящные доказательства теоремы Чжоу. Штейн исходит из следующего предложения:

Если конус аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ *аналитичен всюду вне вершины, то он аналитичен и в самой вершине.*

Пространство $\mathbf{P}^n$ Штейн представляет как пространство лучей аффинного пространства $\mathbf{A}^{n+1}$, а заданное аналитическое множество E как конус $O(E)$ с вершиной в точке $O \in \mathbf{A}^{n+1}$. Согласно только что сформулированной теореме, конус $O(E)$ аналитичен в точке O и, следовательно, в некоторой окрестности вершины он задается системой уравнений $f_j(x)=0$, $j=1, 2, \ldots, s$, где $f_j(x)$ — голоморфные функции однородных координат x пространства $\mathbf{P}^n$. Разлагая функции $f_j(x)$ в ряд по однородным многочленам и принимая во внимание строение конуса вблизи вершины, Штейн показывает, что все члены ряда, начиная с некоторого, равны нулю. Следовательно, множество E является пересечением алгебраических гиперповерхностей пространства $\mathbf{P}^n$.

Доказательство Серра основано на теории *когерентных пучков идеалов* (см. [X]), а именно на том факте, что любой такой пучок

над пространством $\mathbf{P}^n$ порождается содержащимися в нем однородными многочленами.

Теорему Чжоу легко распространить на случай аналитического компактного подмножества произведения любого числа проективных пространств. Поскольку график произвольного мероморфного отображения проективного алгебраического подмногообразия в пространство P^n всегда можно рассматривать как компактное аналитическое подмножество произведения пространства $\mathbf{P}^n$ на объемлющее пространство данного многообразия, отсюда вытекает следующее предложение (см. Чжоу [2]).

(II). *Любая мероморфная функция на проективном алгебраическом многообразии алгебраична.*

2. Метрики Эрмита и Кэлера

Пусть $\mathfrak{M}^n$ — компактное комплексное многообразие, и пусть $z^1, z^2, \ldots, z^n$ — локальные координаты в окрестности произвольной его точки.

a) Полагая

$$z^\alpha = x^{2\alpha-1} + \sqrt{-1}\, x^{2\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

мы введем на многообразии $\mathfrak{M}^n$ *действительные* локальные координаты $x^1, x^2, \ldots, x^{2n}$, которые определяют на этом многообразии действительное аналитическое строение.

Поскольку якобиан любого псевдоконформного преобразования локальных координат положителен, многообразие $\mathfrak{M}$ *ориентируемо.* Более того, оно обладает естественной ориентацией, задаваемой координатами $x^1, x^2, \ldots, x^{2n}$.

b) Положительно определенная *эрмитова метрика* на многообразии $\mathfrak{M}^n$ задается формулой вида $ds^2 = 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$, где $g_{\alpha\beta^*} = \bar{g}_{\beta\alpha^*}$.

В дальнейшем всегда неясно предполагается, что на всех рассматриваемых многообразиях задана эрмитова метрика. Это не является ограничением, так как можно показать, что эрмитову метрику можно определить на любом комплексном многообразии.

Переходя к действительным координатам x^i, мы можем записать ds^2 в следующем виде:

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{2n} g_{jk}\, dx^j\, dx^k, \quad g_{jk} = g_{kj}.$$

Таким образом многообразие $\mathfrak{M}^n$ можно рассматривать как действительное $2n$-мерное ориентируемое риманово многообразие с положительно определенной метрикой.

Эрмитова метрика называется *кэлеровой*, если ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial g_{\gamma\beta^*}}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\gamma} = 0, \qquad \frac{\partial g_{\alpha\gamma^*}}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta^*}}{\partial \bar{z}^\gamma} = 0. \tag{2}$$

Как показал Кэлер (см. Кэлер [3]), в этом случае локально существует такая функция $N(z, \bar{z})$, что

$$g_{\alpha\beta^*} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^\alpha\, \partial \bar{z}^\beta}. \tag{3}$$

c) Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — однородные координаты в пространстве $\mathbf{P}^n$, нормализованные соотношением $\sum_{i=0}^{n} \zeta_i \bar{\zeta}_i = 1$. Полагая $X^h = \sqrt{2}\, \zeta_h \bar{\zeta}_h$, $X^{hk} = \zeta_h \bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_h \zeta_k$, $Y^{hk} = i(\zeta_h \bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_h \zeta_k)$, примем величины X^h, X^{hk}, Y^{hk} за прямоугольные декартовы координаты в некотором эвклидовом пространстве $\mathbf{E}^N$, $N = (n+1)^2$. Тем самым мы получим некоторую бирегулярную действительную модель $\mathbf{P}^{*2n} \subset \mathbf{E}^N$ комплексного пространства $\mathbf{P}^n$. Отсюда вытекает, что и любое алгебраическое многообразие $V^r \subset \mathbf{P}^n$ также обладает некоторой действительной бирегулярной моделью $V^{*2r} \subset \mathbf{P}^{*2n}$.

Многообразие V^{*2r} называется *римановым многообразием* многообразия V^r, а также его *моделью Маннури* (см. Ходж [a], стр. 150).

Легко видеть, что метрика многообразия V^{2r}, индуцированная эвклидовой метрикой пространства $\mathbf{E}^N$, удовлетворяет условиям Кэлера (3), причем соответствующая функция N в координатной окрестности, получающейся удалением из пространства P^n гиперплоскости с уравнением $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \zeta_i = 0$, имеет вид

$$N = \frac{1}{2\pi} \log \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\zeta_k}{\zeta} \right|^2, \quad \text{где} \quad \zeta = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \zeta_i. \tag{4}$$

Тем самым доказано, что *неособые алгебраические проективные многообразия являются кэлеровыми многообразиями.*

d) (См., например, Ходж [а], гл. II). *Внешними дифференциальными формами* степени p на комплексном многообразии $\mathfrak{M}^n$ называются выражения вида $\varphi^p = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, где x^1, x^2, ..., x^{2n} — действительные локальные координаты на многообразии $\mathfrak{M}$, а $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — комплекснозначные функции координат x^i класса C^∞. Пользуясь известным условием о суммировании, форму φ^p можно также записать в виде $\varphi^p = \frac{1}{p!} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$.

Известным образом, любой форме φ степени p сопоставляется форма $d\varphi$ степени $p+1$ — ее *дифференциал.* Известно также, что оператор d удовлетворяет соотношениям:

$$d(\varphi + \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi \quad \text{и} \quad d^2\varphi = 0.$$

Так как мы считаем, что на многообразии $\mathfrak{M}$ задана эрмитова метрика, то по отношению к соответствующей действительной римановой метрике для любой формы φ определена *присоединенная* форма $^*\varphi$ степени $n-p$, где p — степень формы φ.

В триангуляции многообразия $\mathfrak{M}$, настолько мелкой, что каждый ее p-мерный симплекс содержится в некоторой координатной окрестности, можно определить операцию интегрирования форм φ по p-мерным симплексам, а потому (по линейности) и по p-мерным цепям C^p. Цепь интегрирования должна быть по меньшей мере гладкой, ее коэффициенты могут быть как комплексны, так и действительны.

Согласно хорошо известной *формуле Стокса*,

$$\int_{bC^{p+1}} \varphi = \int_{C^{p+1}} d\varphi, \tag{6}$$

где φ — произвольная форма степени p, C^{p+1} — произвольная гладкая $(p+1)$-мерная цепь, а bC^{p+1} — ее граница.

Напомним, что *p-мерной коцепью* γ^p называется произвольная линейная функция $\gamma^p(C^p)$, определенная на группе p-мерных цепей. *Кограница* $\beta\gamma^p$ коцепи γ^p определяется при этом формулой $\beta\gamma^p(C^{p+1}) = \gamma^p(bC^{p+1})$, откуда вытекает, что $\beta^2\gamma^p = 0$. В частности, линейный функционал $\int \varphi$ является p-мерной коцепью, кограница которой, в силу формулы Стокса (6), C^p имеет вид $\int\limits_{C^p} d\varphi$.

Последнее замечание указывает на некоторую аналогию между теорией внешних дифференциальных форм и теорией когомологий многообразия $\mathfrak{M}$. Эта аналогия является отправным пунктом принадлежащего де Раму понятия потока на многообразии $\mathfrak{M}$ (см. де Рам — Кодаира [a], гл. II, или де Рам [a], гл. III).

3. Потоки

(См. Кодаира [1], стр. 816.)

Пусть $\mathfrak{D}$ — произвольное фиксированное открытое подмножество многообразия $\mathfrak{M}^n$ и $\{\varphi\}$ — линейное пространство форм степени $n-p$ и класса C^∞, обращающихся в нуль на $\mathfrak{M} - \mathfrak{D}$.

Потоком степени p и размерности $n-p$ на области $\mathfrak{D}$ называется определенный на пространстве $\{\varphi\}$ линейный функционал $T[\varphi]$, сходящийся к нулю, когда φ пробегает такую последовательность $\{\varphi_h\}$, что каждая форма φ_h обращается в нуль вне некоторого фиксированного компактного подмножества области $\mathfrak{D}$, покрытого локальной системой (x), и при $h \to \infty$ каждая последовательность вида $\partial^s\varphi_h/\partial x^p\,\partial x^q \ldots \partial x^r$, $s = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится к нулю.

Для любой локально интегрируемой формы ψ равенство

$$\psi[\varphi] = \int_{\mathfrak{M}} \psi \wedge \overline{\varphi} \tag{7}$$

определяет некоторый поток на многообразии $\mathfrak{M}$, этот поток мы будем отождествлять с формой ψ.

Точно так же можно рассматривать как поток и $(2n-p)$-мерную цепь C, полагая

$$C[\varphi] = \int_{C} \overline{\varphi}. \tag{8}$$

Говорят, что поток обращается в нуль в точке $p \in \mathfrak{D}$, если существует такая окрестность U_p этой точки, что $T[\varphi] = 0$ для всех форм φ, равных нулю вне окрестности U_p. *Носителем* $|T|$ потока T называется дополнение к максимальному открытому подмножеству области $\mathfrak{D}$, на котором $T = 0$.

Легко видеть, что $d\psi[\varphi] = (-1)^{p+1}\psi[d\varphi]$ и $^*\psi[\varphi] = (-1)^p \psi[^*\varphi]$. Обобщая эти формулы, положим $dT[\varphi] = (-1)^{p+1} T[d\varphi]$, $^*T[\varphi] = (-1)^p T[^*\varphi]$. Тем самым для любого потока T определен *внешний дифференциал* dT и *присоединенный поток* $^*T$.

Очевидно, что $ddT = 0$ и $^{**}T = (-1)^p T$, где p — степень потока T. Если поток T представляет собой $(2n-p)$-мерную цепь C, то $dC = (-1)^{p+1} bC$, так что внешний дифференциал цепи с точностью до знака совпадает с ее границей.

Введем теперь операторы δ и Δ, полагая $\delta = -{}^*d^*$ и $\Delta = d\delta + \delta d$. Первый оператор называется *кодифференциалом* и удовлетворяет соотношению $\delta^2 T = 0$, а второй представляет собой *обобщенный оператор Лапласа — Бельтрами*.

Пусть ψ — форма степени q и класса C^∞ на многообразии $\mathfrak{M}$. Определим операцию *внешнего умножения* формулой $(T \wedge \psi)[\varphi] = T[\psi \wedge \varphi]$, а операцию *скалярного произведения* — формулой $(T, \varphi) = \overline{(\varphi, T)} = T(^*\varphi)$. Если поток T представляет собой форму ψ степени p и класса C^∞, то $(\psi, \varphi) = \int_M \psi \wedge {}^*\overline{\varphi}$, так что $(\varphi, \varphi) > 0$.

Поток называется *регулярным* в точке $p \in \mathfrak{D}$, если в некоторой окрестности этой точки он совпадает с формой класса C^∞. Множество $|T|_s$ всех *особых* точек потока T, т. е. точек, в которых он нерегулярен, называется его *особым множеством*.

Скалярное произведение можно определить и для потоков S, T, ни один из которых не является формой. Следует только потребовать, чтобы множество $|S|_s \cap |T|_s$ было пусто. Это произведение определяется формулой $(S, T) = (\varphi, \psi) + (\varphi, T - \psi) + (S - \varphi, \psi)$, где φ и ψ — такие формы класса C^∞, что пересечение $|T - \psi| \cap |S - \varphi|$ пусто. Можно показать, что произведение (S, T) не зависит от выбора форм φ и ψ и что имеют место равенства $(dS, T) = (S, \delta T)$ и $(\Delta S, T) = (S, \Delta T)$.

4. Основные теоремы существования

(См. Ходж [a], гл. II.)

В этом пункте мы напоминаем некоторые аналитические результаты (принадлежащие в основном де Раму и Ходжу), играющие важную роль в алгебраической геометрии.

а) Поток T называется соответственно *замкнутым* или *козамкнутым*, если $dT = 0$ или $\delta T = 0$. Поток T степени p называется *гомологичным нулю*, $T \sim 0$, если существует такой поток S степени $p - 1$, что $T = dS$; поток T называется в этом случае *границей* потока S. Ясно, что если $T \sim 0$, то поток T замкнут. Если $T = \delta S$, то поток T называется *кограницей* потока S и, очевидно, козамкнут.

Определив эти понятия, можно известным образом построить *группы гомологий и когомологий* пространства потоков.

Поток T называется *гармоническим* в области $\mathfrak{D}$, если $\Delta T = 0$ в этой области. Форма h, гармоническая на всем компактном многообразии $\mathfrak{M}$, удовлетворяет на нем соотношениям $dh = \delta h = 0$, — т. е. одновременно замкнута и козамкнута. Такую форму часто называют также *формой первого рода*.

Из теории интегральных уравнений Фредгольма легко следует, что комплексное векторное пространство $\mathbf{H}^p$

гармонических форм степени p, *конечномерно*. Любому потоку T степени p можно отнести гармоническую форму HT степени p, полагая $HT = \sum_i (h_i, T)\, h_i$, где $h_1, h_2, \ldots, h_s$ — некоторый ортонормированный базис пространства H^p. Эта форма называется *гармонической компонентой* потока T. Как легко видеть, $dH = Hd = 0$; $\delta H = H\delta = 0$, $*H = H*$, $(HS, T) = (S, HT)$.

Следующие результаты принадлежат де Раму:

(I) *Существует линейный оператор G, преобразующий любой поток T степени p в такой поток GT* той же *степени p, что* (1) $\Delta G\,T = G\,\Delta T = T - HT$; (2) $HGT = GHT = 0$. *Оператор G этими условиями определен однозначно. Этот оператор действителен, самосопряжен и перестановочен с операторами d и δ.*

(II) *Если поток T в области $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{M}$ обладает тем свойством, что поток ΔT или оба потока dT и δT регулярны в точке $p \in \mathfrak{D}$, то поток T также регулярен в этой точке.*

b) Из утверждения (I) вытекает, что $T = \Delta GT + HT = d\delta GT + \delta dGT + HT$. Это разложение потока T на сумму трех потоков, один из которых гомологичен нулю, другой когомологичен нулю, а третий представляет собой гармоническую форму, однозначно.

Отсюда следует, что *любой замкнутый* (*козамкнутый*) *поток T гомологичен* (*когомологичен*) *единственной гармонической форме HT*. Другими словами, имеет место следующий глубокий результат: *векторные пространства $(2n-p)$-мерных гомологий $\mathrm{H}_{2n-p}(\mathfrak{M}, \mathrm{C})$ и p-мерных гомологий $\mathrm{H}^p(\mathfrak{M}, \mathrm{C})$ многообразия $\mathfrak{M}$ (где C — поле комплексных чисел) изоморфны векторному пространству H^p гармонических форм степени p на этом многообразии.*

В частности, пространства гомологий и когомологий многообразия $\mathfrak{M}$ *конечномерны*. Кроме того, они связаны соотношением двойственности $*\mathrm{H}^p = \mathrm{H}^{2n-p}$, так что, обозначая символом b_p так называемое *p-мерное число Бетти* — размерность пространства H^p, — мы получим, что $b_p = b_{2n-p}$. Это хорошо известное соотношение вытекает также из топологического закона двойственности Пуанкаре.

c) Из формулы разложения следует, кроме того, что если поток T замкнут, то $T \sim HT$, а если $T = dS$, то $S = \delta GT$, причем поток S определен однозначно, ибо замкнутый поток, когомологичный нулю, равен нулю. Таким образом, *замкнутый поток T тогда и только тогда гомологичен нулю, когда $HT = 0$.*

d) *Периодом* замкнутой формы φ степени p по p-мерному циклу Γ^p называется интеграл $\int\limits_{\Gamma} \varphi = \Gamma[\varphi]$. Имеет место следующая теорема Ходжа:

(III) *Для любого набора b_p чисел существует на многообразии $\mathfrak{M}$ одна и только одна гармоническая форма степени p, имеющая эти числа своими периодами по данным гомологически независимым b_p циклам размерности p.*

Единственность такой формы следует из результатов раздела b), а существование можно показать так: возьмем гармоническую форму h, для которой $(H\Gamma_i, h) = p_i$, где Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, b_p$ — данные p-мерные циклы, а p_i — соответствующие периоды. Тогда форма $*h$ гармонична и обладает тем свойством, что $\int\limits_{\Gamma_i} *h = (\Gamma_i, h) = (H\Gamma_i, h) = p_i$.

e) Де Рам показал, что для любых двух цепей C^{2n-p} и C^p, граница одной из которых не пересекается с другой, *индекс Кронекера* $I(C^{2n-p}, C^p)$ совпадает со скалярным произведением $(C^{2n-p}, *C^p)$. В частности, для любых циклов Γ^{2n-p} и Γ^p имеет место равенство $I(\Gamma^{2n-p}, \Gamma^p) = (\Gamma^{2n-p}, *\Gamma^p) = \int\limits_{\Gamma^p} \varphi^p = \Gamma^p[\varphi^p]$, где $\varphi^p = H\Gamma^{2n-p}$, так что $\varphi \sim \Gamma^{2n-p}$.

5. Операторы Ходжа — Вейля

(См. Ходж [a]. гл., IV; А. Вейль [1]; Эккман — Гуггенхеймер [1]; Гуггенхеймер [1]; Гарабедян — Спенсер [2]; Ходж [10].)

a) Полагая $2x^{2\alpha-1} = z^\alpha + \bar{z}^\alpha$, $2x^{2\alpha} = i(\bar{z}^\alpha - z^\alpha)$, мы можем любую форму φ степени p записать в виде

$$\varphi = \sum_{r+s=p} \varphi^{r,s}, \tag{9}$$

где

$$\varphi^{r,s} = \sum_{r+s=p} \frac{1}{r!}\frac{1}{s!} a_{{}_1\alpha_2\ldots\alpha_r\beta_1^*\beta_2^*\ldots\beta_s} dz^{\alpha_1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\beta_s}. \qquad (10)$$

Формы вида $\varphi^{r,s}$ называются *чистыми формами типа* (r, s). Определим теперь комплексный оператор C формулой

$$C\varphi = \sum_{r+s=p} (-1)^{r-s} \varphi^{r,s}. \qquad (11)$$

Пусть

$$\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta^*}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta} \qquad (12)$$

— действительная двумерная форма, отвечающая эрмитовой метрике, заданной на многообразии $\mathfrak{M}$. Определим оператор Λ формулой

$$\Lambda\varphi = (-1)^{p} {}^*(\omega \wedge {}^*\varphi). \qquad (13)$$

Операторы C и Λ называются *операторами Ходжа — Вейля*. Они удовлетворяют соотношениям

$$CC\varphi = (-1)^{p}\varphi, \quad \Lambda d - d\Lambda = C^{-1}\delta C. \qquad (14)$$

Оператор C можно определить и для потоков, полагая

$$CT[\varphi] = (-1)^{p} T[C\varphi], \text{ где } p \text{ — степень потока } T.$$

Поскольку любой поток T можно рассматривать как дифференциальную форму, коэффициенты которой являются распределениями в смысле Л. Шварца, на потоки можно распространить и понятие чистой формы данного типа. Чистый поток типа $(p-t, t)$, являющийся аддитивной составляющей потока T, мы будем обозначать символом $P_t T$. Оператор P_t является так называемым проектирующим оператором. Легко видеть, что он перестановочен с операторами Δ, H и G.

b) Форма типа $(p, 0)$ называется *голоморфной* или *мероморфной* в точке $p \in \mathfrak{M}$, если ее коэффициенты голоморфны или, соответственно, мероморфны в этой точке. Аналогично определяются формы голоморфные или мероморфные в области. Мероморфные замкнутые формы называются также *дифференциалами*. Мероморфная форма называется *регулярной* в точке p, если она голоморфна в этой точке. В противном случае точка p называется *особой*.

Если форма φ голоморфна на всем многообразии $\mathfrak{M}$, то $C_\varphi = i^p\varphi$, $\Lambda\varphi = 0$ и $\delta\varphi = i^{-p}\delta C\varphi = i^{-p}\cdot C(\Lambda d - d\Lambda)\varphi = i^{-p}\cdot C\Lambda d\varphi$. В частности, любой дифференциал, голоморфный на многообразии $\mathfrak{M}$, замкнут и козамкнут на этом многообразии, т. е. представляет собой форму *первого рода*. В связи с этим голоморфные дифференциалы часто называются также *дифференциалами первого рода*.

c) Аналогично можно доказать, что *любой чистый замкнутый поток T типа $(p, 0)$ козамкнут*. Следовательно, в силу предложения II раздела а) n° IX, 4, он представляет собой некоторую, как легко видеть, голоморфную форму, т. е. является дифференциалом первого рода.

6. Теория Ходжа — Экмана

(См. Ходж [а], гл. IV; Ходж [8,9]; Экман [1,2].)

В этом пункте излагаются некоторые важные результаты о многообразиях, на которых задана кэлерова метрика. Они принадлежат в основном Ходжу и Экману, а также А. Вейлю. В случае когда рассматриваемое многообразие представляет собой неособое алгебраическое многообразие, часть этих результатов была значительно ранее получена Лефшецом.

a) Из сказанного в разделе а) n° IX, 5 вытекает, что $\mathbf{H}^p = \sum_{r+s=p} \mathbf{H}^{r,s}$, где $\mathbf{H}^{r,s}$ — пространство чистых гармонических форм типа (r, s). Следовательно, число Бетти b^p выражается формулой $b^p = \sum_{r+s=p} b^{r,s}$, где $b^{r,s}$ — размерность пространства $\mathbf{H}^{r,s}$. Так как для гармонической формы φ типа (r, s) сопряженная форма $\bar{\varphi}$, тоже гармонична и имеет тип (s, r), то справедливо *соотношение симметрии* $b^{r,s} = b^{s,r}$, из которого следует, что *для нечетных p число b^p четно*. Для алгебраических многообразий этот факт был известен еще Лефшецу

Легко видеть, что определенная равенством (12) *форма* ω, *а также любая ее степень* ω^k, $k=1, 2, \ldots, n$, *замкнута и козамкнута и, следовательно, гармонична.* Поскольку для $k \leqslant n$ $\omega^k \neq 0$, и, значит, $\omega^k \not\sim 0$, то $b^{2k} \geqslant 1$.

b) Из топологии известно, что любому классу когомологий φ (мы обозначаем одним и тем же символом φ произвольную замкнутую форму и ее класс когомологий) можно отнести так называемый двойственный класс гомологий $D\varphi$. Этот класс определяется формулой $D\varphi = \varphi \cap \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$—фундаментальный $2n$-мерный цикл ориентированного многообразия $\mathfrak{M}$, а $\cap$ — знак произведения Чеха — Уитни.

В частности, на любом кэлеровом многообразии $\mathfrak{M}$ определены классы гомологий $D\omega^k = \omega^k \cap M = Z_{2(n-k)}$ топологической размерности $2(n-k)$. Мы будем называть их *главными классами гомологий* многообразия $\mathfrak{M}$. Класс $Z_{2(n-1)} = D\omega$ мы будем обозначать символом Z. Очевидно, что класс $Z_{2(n-2)}$ представляет собой пересечение класса Z с самим собой, класс $Z_{2(n-3)}$ — пересечение класса $Z_{2(n-1)}$ с классом Z и так далее.

Если $\mathfrak{M}$ является комплексным проективным пространством $\mathbf{P}^n$, то главные классы Z_{2q} являются классами гомологий проективных подпространств $\mathbf{P}^q \subset \mathbf{P}^n$; это нетрудно вывести из сказанного в разделе с) n° IX, 2.

Пусть теперь $\mathfrak{M}'$ — произвольное комплексное многообразие комплексной размерности $n' < n$, аналитически и регулярно вложенное в многообразие $\mathfrak{M}$. Ясно, что кэлерова метрика на многообразии $\mathfrak{M}$ индуцирует некоторую кэлерову метрику на многообразии $\mathfrak{M}'$, причем связанная с ней форма ω' индуцируется на $\mathfrak{M}'$ формой ω. По определению, $D\omega' = \omega' \cap \mathfrak{M}' = Z(\mathfrak{M}')$. С другой стороны, на многообразии $\mathfrak{M}$ имеют место соотношения $\omega \cap \mathfrak{M}' = D\omega \cdot \mathfrak{M}' = Z(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{M}'$. Следовательно, $Z(\mathfrak{M}') = Z(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{M}'$.

Таким образом, *главные классы многообразия* $\mathfrak{M}'$ *высекаются на этом многообразии главными классами многообразия* $\mathfrak{M}$. Для нас имеет особое значение случай комплексного многообразия, регулярно погруженного в пространство $\mathbf{P}^n$. В силу теоремы Чжоу (см. n° IX, 1), это многообразие алгебраично; его главные классы являются, согласно сказанному, классами гомологий его линейных сечений и потому алгебраичны.

c) Форма φ степени $p \leqslant n$ называется *эффективной*, если $\omega \wedge {*\varphi} = 0$ или, что то же самое, если $\Lambda\varphi = 0$. Форма φ называется *простой формой класса* k, если существует такая эффективная форма ψ, что $\varphi = \omega^k \wedge \psi$. Форма, присоединенная к простой форме φ класса k и степени p, определяется следующей формулой Ходжа

$$*\varphi = u\omega^{n-p} \wedge C\varphi, \tag{15}$$

где u — некоторое отличное от нуля число, зависящее только от n, p и k.

Отсюда вытекает, что при $p \leqslant n-2$ имеет место равенство $\omega \wedge * (\omega \wedge \varphi) = u'\omega \wedge \omega^{n-p-2} \wedge \omega \wedge C\varphi = u''{*\varphi}$, где u' и u'' — отличные от нуля числовые множители. Следовательно,

(I) $\omega \wedge \varphi = 0$ *в том и только том случае, когда* $\varphi = 0$.

Далее, по индукции легко показать, что

(II) *Любая форма степени p однозначно разлагается в сумму простых форм классов* $k = 0, 1, \ldots, q = [p/2]$:

$$\varphi = \sum_0^q \omega^i \wedge \psi_i. \tag{16}$$

Следовательно,

(III) *Оператор $\omega\wedge$ определяет мономорфизм пространства форм степени p в пространство форм степени $p+2$.*

d) Легко видеть что операторы Δ и $\omega^k \wedge$ перестановочны. Поскольку оператор Δ перестановочен также с операторами $*$, C и $\wedge$, отсюда вытекает, что все результаты раздела c) справедливы и для гармонических форм. В частности, при $p \leqslant n$ пространство H^p имеет вид

$$\mathrm{H}^p = \sum_0^q \omega^i \wedge \mathrm{H}_0^{p-2i}, \tag{17}$$

где H_0^{p-2i} — пространство *эффективных гармонических форм степени* $p-2i$. Кроме того, оператор $\omega\wedge$ определяет мономорфизм пространства H^p в пространство H^{p+2}, откуда, в частности, следует, что размерность пространства H_0^p равна $b^p - b^{p-2}$. Вообще, размерность пространства H_k^p гармонических форм класса k и степени p равна $b^{p-2k} - b^{p-2k-2}$.

e) Так как $*\omega^k = u \cdot \omega^{n-k}$, то класс $D^*\omega^k$ совпадает с точностью до постоянного отличного от нуля множителя с главным классом гомологий Z_{2k} многообразия $\mathfrak{M}$. С другой стороны, любой класс гомологий z_p многообразия $\mathfrak{M}$ при $p \leqslant n$ можно записать в виде

$$z_p = D^*\varphi = D^* \left(\sum_{k=0}^{q} \omega^k \wedge \psi_k \right),$$

но с точностью до постоянного отличного от нуля множителя

$$\begin{aligned} D^* (\omega^k \wedge \psi_k) &= D\,(C\,(\omega^k \wedge \psi_k) \wedge \omega^{n-p}) = \\ &= C\,(\omega^k \wedge \psi_k) \wedge \omega^{n-p} \sqcap \mathfrak{M} = \\ &= C\,(\omega^k \wedge \psi_k) \sqcap (\omega^{n-p} \sqcap \mathfrak{M}) = \\ &= C\,(\omega^k \wedge \psi_k) \sqcap D\omega^{n-p} = C\,(\omega^k \wedge \psi_k) \sqcap Z_{2p}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают следующие утверждения:

(IV) *Все классы гомологий размерностей $p \leqslant n$ лежат в главном классе гомологий Z_{2p} в том смысле, что они высекаются на Z_{2p} некоторыми циклами многообразия $\mathfrak{M}$.*

(V) *Любой класс гомологий z_p при $p \leqslant m$ однозначно разлагается в сумму вида*

$$z_p = \sum_{k=0}^{q} z_p^{[k]}, \quad q = [p/2], \tag{18}$$

где класс

$$z_p^{[k]} = D^*\omega^k \wedge \psi_k \tag{19}$$

лежит на $Z_{2(p-k)}$, но, вообще говоря, не лежит на Z_{2l}, $l < p - k$.

Циклы, принадлежащие классу $z_p^{[0]}$, называются *эффективными p-мерными циклами*, а циклы, принадлежащие классу $z_p^{[k]}$, — *простыми p-мерными циклами класса k*.

Эта классификация p-мерных циклов на многообразии $\mathfrak{M}$ была получена Лефшецом для случая алгебраических многообразий с помощью чисто топологических средств. Изложенное выше доказательство, годное для любого кэлерова многообразия, принадлежит Экману.

Результаты Лефшеца на самом деле несколько сильнее, ибо они относятся к гомологиям с целыми, а не комплексными коэффициентами. Это уточнение, однако, можно получить и в рамках теории гармонических форм, пользуясь тем фактом, что на алгебраических многообразиях главный класс гомологий Z содержит целочисленный цикл (а именно, гиперплоское сечение; см. раздел b)). Заметим, кстати, что последнее свойство характеристично для алгебраических многообразий (см. n° X, 10, а также Ходж [9] и Кодаира [6]).

7. Бирациональные инварианты Ходжа

(См. Ходж [8,9]; Ходж [a], гл. IV).

Если на многообразии $\mathfrak{M}$ и вообще можно задать кэлерову метрику, то это можно сделать многими различными способами. Тем самым естественно возникает вопрос, в какой мере результаты n° X, 6, зависят от заданной кэлеровой метрики.

a) Из определения оператора D^* немедленно вытекает следующая важная формула

$$(D^*\psi^p)[\varphi^p] = (\varphi^p, \psi^p) \tag{20}$$

для периода (см. раздел d) n° IX, 4) гармонической формы φ^p по p-мерному циклу $D^*\psi^p$.

С другой стороны, легко видеть, что *гармонические формы различных типов или различных классов ортогональны*, т. е. *их скалярное произведение равно нулю*. Утверждение относительно типов получается с помощью подсчета числа дифференциалов вида dz^α и $d\bar{z}^\alpha$ в произведении $\varphi^p \wedge {}^*\psi^p$, а утверждение относительно классов вытекает из формул приведения Гуггенхеймера (см. Гуггенхеймер [1]):

$$(\varphi^{p-2} \wedge \omega, \psi^p) = (\varphi^{p-2}, \Lambda\psi^p). \tag{21}$$

Сопоставляя эти результаты, мы видим, что период гармонической формы φ степени p по p-мерному циклу Γ^p *может быть отличным от нуля лишь в том случае, если цикл и форма принадлежат к одному и тому же типу и классу*: при этом, по определению, типом и классом цикла Γ^p называются тип и класс формы ψ^p, для которой $\Gamma^p = D^*\psi^p$.

b) Свойство формы быть гармонической зависит от выбора кэлеровой метрики. Лефшецевская классификация циклов на многообразии $\mathfrak{M}$ также зависит от выбора метрики. Однако, как показал Ходж, исходя из классификации Лефшеца, можно получить числовые характеристики многообразия, инвариантные относительно выбора метрики.

Пусть $\varrho^{r,s}$ — размерность пространства $\mathbf{H}_0^{r,s}$ эффективных гармонических форм типа (r, s). В силу сказанного в разделе d) n° IX, 6,

$$\sum_{r+s=p} \varrho^{r,s} = b^p - b^{p-2}. \tag{22}$$

Кроме того, переходя к сопряженным формам, мы получаем, что

$$\varrho^{r,s} = \varrho^{s,r}. \tag{23}$$

Докажем, что *числа $\varrho^{r,s}$ не зависят от выбора кэлеровой метрики*.

Пусть ω и ω' — две различные кэлеровы метрики на многообразии $\mathfrak{M}$, и пусть $\mathfrak{F}'^p$ — произвольный базис форм степени p гармоничных относительно метрики ω'. Пусть, далее, $\mathfrak{G}^p$ — произвольный базис p-мерных гомологий многообразия $\mathfrak{M}$. Как мы знаем, базисы $\mathfrak{G}^p$ и $\mathfrak{F}'^p$ состоят из b^p элементов каждый.

Пусть $\Gamma_i^p \in \mathfrak{G}^p$ и $\varphi_j' \in \mathfrak{F}'^p$, $i, j = 0, 1, \ldots, b^p$. Хотя понятие типа цикла и зависит, по определению, от выбора метрики, можно показать, обобщая результаты раздела а), что если цикл Γ_i^p и форма $\varphi_j'^p$ принадлежат к различным типам, то $\Gamma_i^p[\varphi_j'^p] = 0$. С другой стороны, матрица $\| \Gamma_i^p [\varphi_j'^p] \|$, $i, j = 0, 1, \ldots, b^p$ не вырождена, ибо не вырождена матрица $\| \Gamma_j'^{2n-p} \cdot \Gamma_i^p \|$, где $\Gamma_j'^{2n-p} = D\varphi_j'^p$ (как матрица пересечений двойственных базисов гомологий многообразия $\mathfrak{M}$). Поэтому число форм типа (r, s) в базисе $\mathfrak{F}'^p$ совпадает с числом циклов этого же типа в базисе $\mathfrak{G}^p$.

Тем самым доказано, что

$$\sum_{h=0}^{\min(r,s)} \varrho'^{r-h,\, s-h} = \sum_{h=0}^{\min(r,s)} \varrho^{r-h,\, s-h},$$

где $\varrho'^{r,s}$ есть число $\varrho^{r,s}$, соответствующее метрике ω'.

Аналогичную формулу для типа $(r-1,\ s-1)$ мы можем записать в следующем виде:

$$\sum_{h=1}^{\min(r,\,s)} \varrho'^{\,r-h,\,s-h} = \sum_{h=1}^{\min(r,\,s)} \varrho^{r-h,\,s-h}, \quad r+s=p-2.$$

Вычитая эти два соотношения, мы и получим, что $\varrho'^{\,r,\,s}=\varrho^{r,\,s}$.

В применении к алгебраическим многообразиям отсюда легко следует, что *числа* $\varrho^{r,\,s}$ *являются инвариантами неособого алгебраического многообразия относительно бирегулярных преобразований.*

Поскольку любая гармоническая форма типа $(p,\ 0)$, т. е. любой дифференциал первого рода степени p (см. раздел b) n° IX, 5), очевидно эффективна, *число* $\varrho^{p,\,0}$ *совпадает с геометрическим родом* $p_g(V)$ алгебраического многообразия V (см. n° IV, 4). Тем самым заново доказано, что геометрический род неособого многообразия относительно инвариантен.

8. Некоторые отдельные результаты

a) Рассмотрим интеграл $F(z)=\int^{z}\varphi$, где φ — произвольный дифференциал первой степени на многообразии $\mathfrak{M}$. Если φ является дифференциалом первого рода, то F представляет собой голоморфную, вообще говоря, многозначную функцию, заданную на многообразии $\mathfrak{M}$, и называется *интегралом Пикара первого рода.* В противном случае, интеграл F, а также сам дифференциал φ называется интегралом (соответственно, дифференциалом) *второго или третьего рода* в зависимости от того, является ли он локально однозначной функцией или нет.

Для случая $n=1$, т. е. на комплексной кэлеровой кривой, интегралы Пикара обычно называются *абелевыми интегралами.*

Полагая в формуле (22) предыдущего пункта $p=1$, мы получим, что $b^1=2q$, где $q=\varrho^{1,\,0}=\varrho^{0,\,1}$. Это важное соотношение между одномерным числом Бетти b^1 и числом q линейно независимых дифференциалов первого рода для случая алгебраических многообразий было известно еще Кастельнуово и Севери (см. Кастельнуово — Энриквес [2]; приведенное здесь доказательство принадлежит Ходжу; см. Ходж [а], стр. 201; а также Вейль [1]).

Позже (см. n° XI, 3) мы докажем, что для алгебраических многообразий число q совпадает с поверхностной иррегулярностью (см. n° VII, 8).

b) Пусть $\{\varphi_{h,j}\}$ — произвольный базис гармонических форм некоторого фиксированного класса h и типа $(p-j, j)$, $j=0, 1, \ldots, p$, на алгебраическом многообразии V. Пусть, далее, ω^j — матрица их периодов, а α — матрица пересечений циклов $D^*\varphi$ для всех j. Тогда легко видеть, что имеет место следующее так называемое *матричное соотношение для периодов* (для любой матрицы β символом β^{-1} мы обозначаем обратную матрицу, символом β_{-1} — транспонированную матрицу, а символом $\overline{\beta}$ — комплексно сопряженную матрицу):

$$\omega^j\alpha_{-1}^{-1}\overline{\omega}_{-1}^j=\begin{cases} i^p(-1)^{p+h+j}\mu^j, & \text{если } k=j\\ 0 & \text{если } k\neq j\end{cases}, \tag{24}$$

где μ^i — некоторая *положительно определенная эрмитова матрица* (см. Ходж [а], стр. 195; Ходж [9]).

Особенно важен случай $p=1$, $h=0$ и $j=0$. В этом случае формула (24) утверждает, что матрица $i\omega\alpha_{-1}^{-1}\overline{\omega}_{-1}$, где ω — матрица периодов интегралов Пикара первого рода является положительно определенной эрмитовой матрицей. Поскольку α_{-1}^{-1} представляет собой кососимметрическую целочисленную матрицу, это означает, что *матрица периодов интегралов Пикара первого рода является матрицей Римана.* Это хорошо известный классический результат, обычно доказываемый при трансцендентном построении многообразия Пикара многообразия $\mathfrak{M}$ (см. n° XI, 2).

c) При $h=0$ матрица α представляет собой матрицу пересечений эффективных p-мерных циклов. Эта матрица квадратна, имеет порядок b^p-b^{p-2} и при p четном симметрична. Как доказал Ходж (см. Ходж [а], стр. 201; Ходж [8,9]), для случая алгебраического многообразия $\mathfrak{M}$ положительный индекс инерции этой матрицы равен

$$\varrho^{p,0}+\varrho^{p-2,2}+\ldots+\varrho^{0,p}, \tag{25}$$

а потому отрицательный — равен

$$\varrho^{p-1,1}+\varrho^{p-3,3}+\ldots+\varrho^{1,p-1}.$$

Заметим, что эти индексы являются, очевидно, топологическими инвариантами многообразия $\mathfrak{M}$.

Этот факт легко следует из соотношения (24) при $j=0$. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ является поверхностью, то $\varrho^{p,0}+\ldots+\varrho^{0,p}=2p_g(V)+1$, где $\varrho_g(V)=p^{2,0}$, так что *геометрический род поверхности топологически инвариантен*. Поскольку $2q=b^1$ (см. a)), то же верно и для числа $-q+p_a(V)$, которое, как мы увидим позже (см. n⁰ XI, 3), совпадает с арифметическим родом поверхности.

◀ d) Поскольку у нас уже зашла речь о матрицах Римана, напомним, кстати, основные, связанные с ними факты.

Как уже было сказано, матрица $\omega=\|\omega_{ij}\|$ типа $p\times 2p$ называется *матрицей Римана*, если существует такая кососимметрическая целочисленная матрица J типа $2p\times 2p$, что $\omega J^{-1}\omega_{-1}=0$ и матрица $i\omega J^{-1}\overline{\omega}_{-1}$ является положительно определенной эрмитовой матрицей.

Легко видеть, что столбцы матрицы Римана линейно независимы над полем действительных чисел. Пусть теперь ω — произвольная матрица типа $p\times 2p$, обладающая этим свойством. Тогда ее столбцы, рассматриваемые как векторы p-мерного комплексного пространства, порождают в этом пространстве некоторую дискретную подгруппу, факторгруппа которой является p-мерным комплексным тором $\mathfrak{A}$, т. е. тором топологической размерности $2p$, снабженным инвариантным относительно сдвигов комплексно-аналитическим строением.

В случае когда тор $\mathfrak{A}$ можно определить как алгебраическое многообразие, рациональные функции на нем представляют собой не что иное, как мероморфные функции, определенные на этом торе. Они образуют поле с конечным числом образующих, степень трансцендентности которого равна p. Обратно, если на торе $\mathfrak{A}$ существует p алгебраически независимых мероморфных функций, то его можно определить как алгебраическое многообразие (заметим, кстати, что так возникающие алгебраические многообразия и назывались в классической теории абелевыми многообразиями).

15 Заказ № 924

Оказывается, что описанные обстоятельства имеют место *тогда и только тогда, когда матрица* ω *является матрицей Римана.*

Этот факт проще всего доказывается на основе теоремы Кодаира (см. п° XI, 10), так как эрмитова метрика с матрицей $i\omega J^{-1}\bar{\omega}_{-1}$ удовлетворяет, как легко видеть, условиям этой теоремы. Его классическое доказательство основывается на явном конструктивном построении голоморфных функций, осуществляющих вложение тора $\mathfrak{A}$ в проективное пространство. Эти функции называются *θ-функциями*, связанными с данной матрицей Римана, и удовлетворяют соотношениям вида

$$\theta(u+\omega_j)=\exp\{2\pi\sum_{\nu}\sum_{\lambda}h_{\nu\lambda}\bar{\omega}_{\lambda_j}u_\nu\}\cdot\theta(u),\qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,2p,$$

где $u=(u_1,\ \ldots,\ u_p)$ — произвольная точка p-мерного комплексного пространства, $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{2p}$ — столбцы матрицы Римана ω и $h_{\nu\lambda}$ — элементы матрицы $(i\bar{\omega}J^{-1}\omega_{-1})^{-1}$.

Заметим еще, что по данной матрице Римана ω можно построить другую матрицу Римана π, удовлетворяющую соотношениям

$$\pi\bar{\omega}_{-1}=i,\quad \pi\omega_{-1}=0.$$

Абелево многообразие $\mathfrak{P}$, соответствующее матрице π, называется многообразием, *двойственным* многообразию $\mathfrak{A}$. ▶

9. Классы Чженя как канонические классы

В этом пункте мы рассмотрим соотношения между *ковариантной последовательностью Б. Сегре и топологическими характеристическими классами Чженя.*

По поводу определения классов Чженя см., например, Чжень [1,3]; Стинрод [a], стр. 210; У. Вэнь Цзюнь [a]. Доказательства теорем этого пункта см. в работах Кодаира [2], стр. 319, и Везентини [1,2]. См. также Ходж [11] и Чжень [3]. Заметим, кстати, что, как доказал Эже в работе [2], для каждого p-кратного интеграла, являющегося прямым произведением p интегралов Пикара первого рода, множество, на котором этот интеграл принимает одно и то же значение c почти для всех c является $(p-1)$-мерным каноническим циклом многообразия V. В частности, группа точек, на которой произвольный интеграл Пикара первого рода принимает одно и то же значение c для почти всех c, принадлежит ряду Севери. Именно этим способом ряд Севери и был впервые определен (см. Севери [18]) под названием *ряда иррегулярности* многообразия. Возможно, что и произвольные p-кратные интегралы первого рода на многообразии V как-то связаны с каноническими классами. Кроме случаев $p=1$, $\dim V-1$, об этой связи известно мало. См., впрочем, Ходж [2, 5]. Смежные работы, которые могут оказаться полезными в этом вопросе: де Франкис [2]; Кундерт [1, 2]; Везентини [3, 4, 5].

а) Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольное унитарное расслоение на $2n-1$-мерные сферы над компактным комплексным многообразием $\mathfrak{M}$ (размерность которого, вообще говоря, никак не связана с числом n), и пусть $Y'_h = W_{n,\,n-h}$, $h=0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, — комплексное многообразие Штифеля, точками которого являются ортогональные h-реперы n-мерного комплексного пространства. Напомним, что *$2q$-мерным характеристическим классом Чжения $c_{2q}(\mathfrak{B})$ расслоения $\mathfrak{B}$*, $q=1, 2, \ldots, n$ называется класс когомологий первого препятствия к построению секущей поверхности, присоединенного к $\mathfrak{B}$ расслоения $\mathfrak{B}_{q-1}$, слоем которого является многообразие Y'_{q-1}. Это препятствие представляет собой $2q$-мерный коцикл многообразия $\mathfrak{M}$ с коэффициентами в первой ненулевой гомотопической группе π_{2q-1} многообразия Y'_{q-1}, являющейся, как известно, бесконечной циклической группой. Оно появляется при попытке распространить непрерывную секущую поверхность расслоения $\mathfrak{B}_{q-1}$, построенную над $(2q-1)$-мерным остовом некоторой триангуляции $\mathfrak{R}$ многообразия $\mathfrak{M}$ на ее $2q$-мерный остов. Кроме того, мы условимся считать, что $c_0(\mathfrak{M})=1$, где 1 — образующая нульмерной группы когомологий $\mathbf{H}^0(\mathfrak{M}, \mathbf{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$.

Многочлен

$$c(x) = \sum_{q=0}^{n} c_{2q} x^q = \{c(\mathfrak{B}), x\} \tag{26}$$

называется *характеристическим многочленом Чжения* расслоения $\mathfrak{B}$. Иногда удобно рассматривать его как бесконечный степенной ряд, все коэффициенты которого начиная с $(n+1)$-го равны нулю.

Если $\mathfrak{B}$ представляет собой расслоение на $2n-1$-мерные сферы, присоединенное к касательному расслоению над многообразием $\mathfrak{M}$, то его характеристические классы называются *характеристическими классами Чженя многообразия* $\mathfrak{M}$ и обозначаются через $c_{2q}(\mathfrak{M})$. Наряду с характеристическими классами когомологий c_{2q} можно рассматривать и $(2n-2q)$*-мерные характеристические классы гомологий* C_{2n-2q}, которые определяются равенством

$$C_{2n-2q} = c_{2q} \cap \mathfrak{M}, \tag{27}$$

где $\mathfrak{M}$ — фундаментальный $2n$-мерный цикл многообразия $\mathfrak{M}$.

b) Пусть P — произвольное неособое $v-1$-мерное подмногообразие неособого алгебраического v-мерного многообразия $\mathfrak{M}$, и пусть $\mathfrak{B}_n$ — пространство, состоящее из единичных векторов, нормальных к подмногообразию P на многообразии $\mathfrak{M}$. Пространство $\mathfrak{B}$ естественным образом является унитарным расслоением на одномерные сферы (окружности) над многообразием P, так что для него определены классы Чженя $c_0 = 1$ и c_2. В этом разделе мы, следуя Кодаира, в явном виде вычислим класс c_2.

Пусть f — произвольная мероморфная функция на многообразии $\mathfrak{M}$, в дивизор нулей которой подмногообразие P входит с коэффициентом единица, и пусть

$$D = P - (f).$$

В точках многообразия P, не принадлежащих носителю цикла $D \cdot P$, мы определим непрерывное поле единичных нормальных векторов n^α, полагая

$$n^\alpha = \sum_\beta g^{\alpha\beta^*} \overline{\partial_\beta f} / \Big(\sum_{\gamma,\beta} g^{\gamma\beta^*} \partial_\gamma f \overline{\partial_\beta f}\Big)^{1/2}, \quad \text{где} \quad \partial_\alpha = \partial / \partial z^\alpha.$$

Выбрав в каждой точке $p \in P$ локальные координаты $z^1, \ldots, z^v$ многообразия $\mathfrak{M}$, в которых подмногообразие P имеет уравнение $z^v = 0$, мы получим, что $f = z^v \cdot g_p$, где g_p — такая функция, что $(g_p) = -D$ в окрестности точки p. В этих координатах

$$n^\alpha = (\bar{g}_p / |g_p|) \cdot n_p^\alpha, \quad \text{где} \quad n_p^\alpha = g^{\alpha n^*} / (g^{nn^*})^{1/2}.$$

Построим теперь симплициальное разбиение $\mathfrak{K}$ многообразия P, одномерный остов которого не пересекается с носителем цикла $D \cdot P$ и любой симплекс которого целиком лежит в некоторой координатной окрестности.

Для любого двумерного симплекса T этого разбиения рассмотрим непрерывное отображение

$$\mu : z \to \overline{g_p(z)}/|g_p(z)|;$$

его границы ∂T в единичную окружность комплексной плоскости. Образ одномерного цикла ∂T при отображении μ является некоторым кратным $\nu(T)\cdot u$ одномерного цикла u. Сопоставив с каждым симплексом T целое число $\nu(T)$, мы получим таким образом некоторую двумерную коцепь. Эта коцепь является коциклом и, по определению, принадлежит классу c_2.

С другой стороны, очевидно, что

$$\nu(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} d\log \bar{g}_p = I(D, T),$$

где $I(D,T)$ — индекс Кронекера (индекс пересечения) цепей D и T. Это означает, что класс гомологий, двойственный классу $c_2(\mathfrak{M})$, имеет своим представителем $(2v-2)$-мерный цикл $D\cdot P$.

Пусть теперь π — класс линейной эквивалентности подмногообразия P. Поскольку $D \equiv P$, цикл $D\cdot P$ принадлежит классу $\pi^{[2]}$. Таким образом, обозначая тем же символом $\pi^{[2]}$ класс гомологий многообразия $\mathfrak{M}$, содержащий класс линейной эквивалентности $\pi^{[a]}$, мы видим, что *классу c_2 двойственен класс $\pi^{[2]}$*.

Этот факт можно выразить в более инвариантной форме, заметив, что в рассматриваемом случае $\{\tilde{\pi}(\mathfrak{M})\} = \{\pi, \pi^{[2]}, 0, 0, \ldots\}$ (см. раздел b) n° VIII, 5). Следовательно,

(I) *Формальные степенные ряды $\{\tilde{\pi}(\mathfrak{M}), x\}$ и $\{c(\mathfrak{B}_n), x\}$ топологически двойственны, т. е. их соответствующие коэффициенты представляют собой двойственные друг другу классы гомологий и когомологий.*

c) Как показал Везентини, утверждение (I) справедливо для *любых* (т. е. любой размерности) неособых подмногообразий P многообразия $\mathfrak{M}$. При этом расслоение $\mathfrak{B}_n$ определяется дословно так же, как для многообразий размерности $v-1$. Однако его слоями будут служить уже не одномерные, а $2(v-p)-1$-мерные сферы, где $p = \dim P$.

Мы докажем утверждение (I) при дополнительном предположении, что на многообразии $\mathfrak{M}$ существует неособое подмногообразие A размерности $v-1$, содержащее подмногообразие P. Как показал Везентини (см. Везентини [4]), за счет некоторого усложнения доказательства от этого предположения можно легко освободиться.

Поскольку, как было показано выше, утверждение (I) справедливо при $v-p=1$, мы можем применить индукцию по числу $v-p$. Пусть это утверждение уже доказано для всех положительных целых чисел, меньших $v-p$. Пусть, далее, $\overline{\mathfrak{B}}_n$ и $\mathfrak{B}_n^2$ — расслоения $\mathfrak{B}_n$ для подмногообразия A многообразия $\mathfrak{M}$ и подмногообразия P многообразия A соответственно. Пусть, наконец, $\mathfrak{B}_n^1$ — ограничение расслоения $\overline{\mathfrak{B}}_n$ на многообразии P. Очевидно, что расслоение $\mathfrak{B}_n$ является соединением по Уитни расслоений $\mathfrak{B}_n^1$ и $\mathfrak{B}_n^2$. Поэтому, в силу теоремы двойственности Чженя (см. Чжень [3]),

$$\{c(\mathfrak{B}_n),\ x\} = \{c(\mathfrak{B}_n^1),\ x\}\cdot\{c(\mathfrak{B}_n^2),\ x\}, \tag{28}$$

где коэффициенты перемножаются по Александеру — Колмогорову.

С другой стороны, обозначая через α класс подмногообразия A и полагая

$$\{\widetilde{\alpha}'(\mathfrak{M}),\ x\} = \{\widetilde{\alpha}(\mathfrak{M}),\ x\}\cdot P,$$

мы, в силу утверждения (I), n° VIII, 6, получим, что

$$\{\widetilde{\pi}(\mathfrak{M}),\ x\}_P = \{\widetilde{\pi}(A),\ x\}\cdot\{\widetilde{\alpha}'(\mathfrak{M}),\ x\}, \tag{29}$$

где справа умножение понимается как пересечение классов эквивалентности в кольце $\mathbf{A}(P)$. Кроме того, по предположению индукции,

$$D_P\{c(\mathfrak{B}_n^2),\ x\} = \{\widetilde{\pi}(A),\ x\}, \tag{30}$$

где D_P — оператор топологической двойственности на многообразии P (мы по-прежнему обозначаем одним символом класс линейной эквивалентности и содержащий его класс гомологий). Наконец, согласно доказанному в разделе b),

$$D_A\{c(\overline{\mathfrak{B}}_n),\ x\} = \{\widetilde{\alpha}(\mathfrak{M}),\ x\},$$

где D_A — оператор топологической двойственности на многообразии A, откуда легко следует, что

$$D_P\{c(\mathfrak{B}_n^1),\ x\} = \{\widetilde{\alpha}'(\mathfrak{M}),\ x\}. \tag{31}$$

Из формул (28), (29), (30) и (31) немедленно вытекает, что

$$D_P\{c(\mathfrak{B}_n),\ x\} = \{\widetilde{\pi}(\mathfrak{M}),\ x\}.$$

Тем самым утверждение (I) полностью доказано.

d) Заметим, что касательное расслоение на сферы над многообразием V изоморфно унитарному нормальному расслоению над диагональю произведения $V \times V$. Отсюда, из предложения (I) и определения канонической последовательности $\{\widetilde{y}^*\}$ многообразия $\mathfrak{M} = V$ (см. n° VIII, 7), немедленно вытекает следующая теорема:

(II) *Класс гомологий Чженя C_{2v-2i} размерности $2v-2i$ многообразия V с точностью до знака совпадает с классом гомологий, к которому принадлежит канонический класс y_i^*. Именно:* $C_{2v-2i} = (-1)^i y_i^*$.

Эта теорема была высказана в качестве гипотезы Ходжем (см. Ходж [11]) и доказана им для случая, когда V является полным пересечением неособых гиперплоскостей проективного пространства, а также для случая, когда на V имеются некоторые интегралы с особыми свойствами.

Тот факт, что характеристические классы Чженя многообразия V всегда содержат алгебраические циклы, был также доказан Чженем (см. Чжень [3]).

X

Приложения теории пучков к алгебраической геометрии

1. Комплексные линейные расслоения

(См., например, Кодаира [3] и Серр [3]; понятие комплексного линейного расслоения в связи с понятием дивизора изложено также в лекциях А. Вейля [2].)

Пусть V — произвольное компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n. *Комплексным линейным расслоением* над многообразием V называется аналитическое расслоение F с базой V, слоем которого является комплексная прямая $\mathbf{C}^1$ и которое обладает структурной группой, являющейся мультипликативной группой $\mathbf{C}^*$ отличных от нуля комплексных чисел, естественным образом действующей на $\mathbf{C}^1$. Это расслоение задается некоторым достаточно мелким конечным открытым покрытием $\{U_j\}$ многообразия V и некоторым надъективным отображением $F \to V$—*проекцией* расслоения. При этом предполагается, что для любого j множество $\pi^{-1}(U_j)$ некоторым фиксированным образом отождествлено с произведением $U_j \times \mathbf{C}^1$, причем точка $(z, \zeta_j) \in \pi^{-1}(U_j)$ тогда и только тогда совпадает с точкой $(z, \zeta_k) \in \pi^{-1}(U_k)$, когда $\zeta_j = f_{jk}(z)\zeta_k$, где $f_{jk}(z)$ — некоторая, не обращающаяся в нуль, голоморфная функция, определенная на пересечении $U_j \cap U_k$. Функция f_{jk} (условие ее голоморфности и означает аналитичность расслоения F) называется *функцией перехода*, а число ζ_j — *координатой по слою* точки (z, ζ_j) *над окрестностью* U_j.

По существу, расслоение F полностью определяется заданием функций перехода f_{jk}, которые удовлетворяют соотношениям

$$f_{jk} f_{kj} = 1, \quad f_{jk} f_{kl} f_{lj} = 1. \tag{1}$$

Два расслоения F и F', определенные соответственно функциями f_{jk} и f'_{jk}, называются *аналитически эквивалент-*

ными, если в каждой окрестности U_j существует такая, не обращающаяся в нуль, голоморфная функция f_j, что

$$f'_{jk} = f_j f_k^{-1} f_{jk}. \tag{2}$$

В этом определении мы для простоты предполагали, что оба расслоения задаются одним и тем же открытым покрытием $\{U_j\}$. В общем случае это определение следует соответствующим образом видоизменить. Аналитически эквивалентные расслоения мы, как правило, будем отождествлять.

Любой паре расслоений F и G, определенных соответственно функциями f_{jk} и g_{jk}, можно сопоставить расслоение $F - G$, которое по определению задается функциями $f_{jk}g_{jk}^{-1}$. Тем самым на множестве $\mathfrak{F} = \{F\}$ всех расслоений (точнее, на множестве классов аналитически эквивалентных расслоений) определяется строение аддитивной группы; нулевым элементом этой группы является *тривиальное расслоение* $V \times \mathbf{C}^1$.

Пусть теперь D—произвольный дивизор многообразия V и пусть $\{U_j\}$ — такое открытое покрытие многообразия V, что в области U_j дивизор D является дивизором некоторой мероморфной функции $R_j(D) = R_j(z_j, D)$. Тогда система функций

$$f_{jk}(D) = R_j(D)/R_k(D) \tag{3}$$

определяет над многообразием V некоторое расслоение, которое мы будем обозначать символом $\{D\}$. Легко видеть, что *два таких расслоения тогда и только тогда эквивалентны, когда соответствующие дивизоры линейно эквивалентны*.

Таким образом, любой класс линейно эквивалентных дивизоров можно рассматривать как элемент множества $\mathfrak{F}$, *а группу классов дивизоров — как подгруппу группы* $\mathfrak{F}$.

2. Понятие пучка

(Понятие пучка (faisceau) впервые было введено в работах Ж. Лере [1,2]. Исследование этого понятия, его обобщения и приложения принадлежат Анри Картану и его школе: см. А. Картан [а, б, в]; Картан и Эйленберг [а]; Картан [2].)

Напомним определение пучка по Картану.

Пучком над многообразием V называется множество $\mathfrak{S}$, для которого задано отображение $\pi:\gamma\to V$ (*проекция* пучка), причем:

1) для каждой точки $z\in V$ слой $\pi^{-1}(z)=\mathfrak{S}_z$ является модулем над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$;

2) множество $\mathfrak{S}$ является топологическим пространством, причем: а) сложение, определенное в модуле $\mathfrak{S}_z$, и умножение элементов этого модуля на комплексные числа непрерывно зависят от точки z; б) проекция π представляет собой локальный гомеоморфизм.

Сечением s пучка $\mathfrak{S}$ над открытым множеством $U\subset V$ называется такое непрерывное отображение $U\to\hat{\mathfrak{S}}$, что $\pi\circ s=1$. Множество $\Gamma(\mathfrak{S}, U)$ всех сечений над областью U очевидным образом определяется как $\mathbf{C}$-модуль, причем, если $U'\subset U$, то определен гомоморфизм ограничения $\Gamma(\mathfrak{S}, U)\to\Gamma(\mathfrak{S}, U')$. При этом слой $\mathfrak{S}_z$ является пределом прямого спектра модулей $\Gamma(\gamma, U)$ по системе окрестностей точки z.

Обратно, если с каждым элементом U некоторого базиса открытых множеств многообразия V связан $\mathbf{C}$-модуль $\mathfrak{S}_U$ и для каждой пары $U'\subset U$ задан гомоморфизм $f_{U'U}:\mathfrak{S}_U\to\mathfrak{S}_{U'}$, причем $f_{U''U}=f_{U''U'}\circ f_{U'U}$ при $U''\subset U'\subset U$, то можно построить пучок $\mathfrak{S}$, приняв за слой $\mathfrak{S}_z$ предел прямых спектров модулей $\mathfrak{S}_U$ по системе окрестностей U точек z и введя в объединение $\mathfrak{S}$ слоев $\mathfrak{S}_z$ топологию, определяемую фундаментальной системой открытых множеств, каждое из которых состоит из образов некоторого элемента $\alpha\in\mathfrak{S}_U$ в слоях $\mathfrak{S}_z$ для всех $z\in U$. Тот факт, что построенное множество $\mathfrak{S}$ является пучком, проверяется непосредственно.

В этом построении за $\mathbf{C}$-модуль $\mathfrak{S}_U$ можно, в частности, принять множество всех функций, определенных и голоморфных в U, а также множество функций, определенных и мероморфных в U. Соответствующие пучки обозначаются символами $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{M}$, а модули $\mathfrak{O}_z$ и $\mathfrak{M}_z$ называются *модулями ростков* голоморфных или соответственно мероморфных функций. В дальнейшем изложении встретятся и другие примеры.

Пучок $\mathfrak{S}$ называется *аналитическим*, если слой $\mathfrak{S}_z$ представляет собой $\mathfrak{O}_z$-модуль, а отображение $(f, \alpha)\to f\alpha$, где $f \in \mathfrak{O}_z$ и $\alpha \in \mathfrak{S}_z$, *непрерывно*. Очевидно, что пучок $\mathfrak{O}^p$, $p \geqslant 1$, элементами которого являются системы p ростков голоморфных функций, аналитичен (по определению, считается, что $f(f_1, f_2, \ldots, f_p) = (ff_1, ff_2, \ldots, ff_p)$). Любой подпучок $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{O}$, для которого каждый слой $\mathfrak{J}_z$ представляет собой идеал кольца $\mathfrak{O}_z$ (такие подпучки называются *пучками идеалов*), также аналитичен.

3. Группы когомологий с коэффициентами в пучке

(См., напр., Картан [2].)

Важность понятия пучка в значительной степени определяется тем, что с его помощью можно определить группы когомологий многообразия V с локальными коэффициентами. Напомним определение этих групп $H^q(V, \mathfrak{S})$ для $q \geqslant 0$ (Если $q < 0$, то $H^q(V, \mathfrak{S}) = 0$.)

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ — произвольное конечное открытое покрытие многообразия V и $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ — его нерв. Сопоставим каждому симплексу $u = (U_{j_0}, U_{j_1}, \ldots, U_{j_q}) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ открытое множество $X(u) = U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_q}$. По определению нерва, оно непусто. *Коцепью* f с коэффициентами в пучке $\mathfrak{S}$ называется функция, определенная на симплексах нерва $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, значение которой на симплексе u принадлежит модулю $\Gamma(\mathfrak{S}, X(u))$, т. е. модулю сечений пучка $\mathfrak{S}$ над открытым множеством $X(u)$.

На множестве коцепей естественным образом определяется строение градуированного модуля, снабженного кограничным оператором; мы будем обозначать этот модуль символом $\mathbf{C}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Поскольку модуль $\mathbf{C}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ снабжен кограничным оператором, для него определен подмодуль коциклов $\mathbf{Z}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ и подмодуль кограниц $\mathbf{B}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Положим

$$\mathbf{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) = \mathbf{Z}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})/\mathbf{B}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}). \tag{4}$$

Говорят, что покрытие $\mathfrak{V} = \{V_j\}$ *вписано* в покрытие $\mathfrak{U}$, если каждое множество V_j содержится в некотором множестве U_i; в этом случае пишут $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Легко видеть, что при $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ определен естественный гомоморфизм $\mathbf{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to \mathbf{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Поэтому можно говорить о пределе модулей $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ по системе всех конечных открытых покрытий многообразия V. Этот предел и называется модулем когомологий $\mathbf{H}(V, \mathfrak{S}) = \sum \mathbf{H}^q(V, \mathfrak{S})$ многообразия V

с коэффициентами в пучке $\mathfrak{S}$. Очевидно, что *модуль* $\mathrm{H}^0(V, \mathfrak{S})$ *можно естественным образом отождествить с модулем сечений* $\Gamma(V, \mathfrak{S})$.

Любой гомоморфизм $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ пучков над многообразием V (непрерывное отображение $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$, индуцирующее гомоморфизм $\mathfrak{S}_z \to \mathfrak{S}_{z'}$ каждого слоя) определяет естественный гомоморфизм $\mathrm{H}^q(V, \mathfrak{S}) \to \mathrm{H}^q(V, \mathfrak{S}')$. Другими словами, модули когомологий $\mathrm{H}^q(V, \mathfrak{S})$ являются ковариантными функторами пучка $\mathfrak{S}$.

Кроме того, для любого подпучка $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ можно определить естественный гомоморфизм

$$\mathfrak{d}^q : \mathrm{H}^q(V, \mathfrak{S}/\mathfrak{T}) \to \mathrm{H}^{q+1}(V, \mathfrak{T}), \tag{5}$$

где *факторпучок* $\mathfrak{S}/\mathfrak{T}$ определяется как объединение модулей $\mathfrak{S}_z/\mathfrak{T}$, снабженное индуцированной топологией.

Теперь мы уже можем сформулировать основное свойство пучков:

(I) *Для любого подпучка* $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ *имеет место точная последовательность групп и гомоморфизмов:*

$$0 \to \mathrm{H}^0(V, \mathfrak{T}) \to \mathrm{H}^0(V, \mathfrak{S}) \to \mathrm{H}^0(V, \mathfrak{S}/\mathfrak{T}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(V, \mathfrak{T}) \to \ldots$$
$$\ldots \to \mathrm{H}^q(V, \mathfrak{T}) \to \mathrm{H}^q(V, \mathfrak{S}) \xrightarrow{\delta^q} \mathrm{H}^{q+1}(V, \mathfrak{S}/\mathfrak{T}) \to \ldots .$$

Напомним, что последовательность групп и гомоморфизмов называется *точной*, если образ каждого гомоморфизма этой последовательности совпадает с ядром следующего.

4. Теорема Дольбо

(Эта теорема содержится в работе Дольбо [1]; мы следуем работе Кодаира [3].)

Пусть F — произвольное комплексное линейное расслоение над многообразием V (см. n° X, 1). *Формой* φ *типа* (r, s) *и класса* C^∞ *с коэффициентами в расслоении* F называется система $\{\varphi_j\}$ таких внешних дифференциальных форм φ_j типа (r, s) и класса C^∞, определенных соответственно в областях U_j, что в пересечении $U_j \cap U_k$ имеет место равенство $\varphi_j = f_{jk} \cdot \varphi_k$. Пусть $\Gamma^{r,s}(F)$ — линейное пространство всех таких форм. Положив $a_{jk} = |f_{jk}|^2$, рассмотрим главное расслоение над многообразием V, заданное системой функций перехода $\{a_{jk}\}$, структурной группой которого является мультипликативная группа положительных действительных чисел. Легко видеть, что это расслоение топологически тривиально, так что существует такая система $\{a_j\}$ положительных действительных функций a_j класса C^∞, определенных соответственно в областях U_j, что на пересечении $U_j \cap U_k$ имеет место равенство $|f_{jk}|^2 = a_j/a_k$.

Определим теперь для любой формы $\varphi = (\varphi_j) \in \Gamma^{r,s}(F)$ формы $\bar\partial\varphi = \{(\bar\partial\varphi)_j\} \in \Gamma^{r,s+1}_{(F)}$ и $\mathfrak{d}\varphi = \{(\mathfrak{d}\varphi)_j\} \in \Gamma^{r,s-1}(F)$, полагая

$$\left.\begin{aligned} (\bar\partial_\varphi)_j &= \bar\partial\varphi_j \\ (\mathfrak{D}_\varphi)_j &= -{*a_j}\partial\left(\frac{1}{a_j}{*\varphi_j}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где $\bar\partial$ и ∂ — операторы внешнего дифференцирования по переменным $\bar z^\alpha$ и z^α соответственно. Кроме того, положим

$$\Box = \mathfrak{d}\bar\partial + \bar\partial\mathfrak{d}. \tag{7}$$

Оператор $\Box$ называется *комплексным оператором Лапласа — Бельтрами*. Естественным образом определив скалярное произведение (φ, ψ), мы получим, что операторы $\mathfrak{D}$ и $\bar\partial$ сопряжены друг другу и что пространство $\Gamma^{r,s}(F)$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных пространств

$$\Gamma^{r,s}(F) = \bar\partial\Gamma^{r,s-1}(F) \oplus \mathfrak{d}\Gamma^{r,s+1} \oplus \mathrm{H}^{r,s}(F), \tag{8}$$

где $\mathrm{H}^{r,s}(F)$ — подпространство пространства $\Gamma^{r,s}(F)$, состоящее из всех решений уравнения $\Box\varphi = 0$, т. е. из *гармонических форм типа* (r, s) *с коэффициентами в расслоении* F. Доказательство этой *формулы разложения* является непосредственным обобщением известного доказательства аналогичной формулы для операторов ∂ и δ см. раздел b), n° IX, 4).

Поскольку уравнение $\Box\varphi = 0$, являющееся дифференциальным уравнением в частных производных эллиптического типа со старшими членами $-\sum g^{\alpha\beta^*}\partial^2/\partial z^\alpha \partial\bar z^\beta$ имеет на многообразии V лишь конечное число линейно независимых решений, мы получаем, что *линейное пространство* $\mathrm{H}^{r,s}(F)$ *конечномерно*.

Рассмотрев для любого открытого множества $U \subset V$ модуль всех голоморфных в U форм степени p с коэффициентами в расслоении F и применив процесс, описанный в n° X, 2, мы получим некоторый пучок $\Omega^p(F)$, называемый пучком *ростков голоморфных форм степени p с коэффициентами в расслоении F.* Как показывает Дольбо, имеет место естественный изоморфизм

$$\mathbf{H}^q(V, \Omega^p(F)) \cong \mathbf{Z}^{p,q}(F)/\bar{\partial}\,\Gamma^{p,q-1}(F), \tag{9}$$

где $\mathbf{Z}^{p,q}(F)$ — подпространство коциклов пространства $\Gamma^{p,q}(F)$ по отношению к оператору $\bar{\partial}$, а $\bar{\partial}\,\Gamma^{p,q-1}(F)$ — соответствующее подпространство кограниц. С другой стороны, из формулы разложения (8) следует, что $\mathbf{Z}^{p,q}(F) = \bar{\partial}\,\Gamma^{p,q-1}(F) \oplus \mathbf{H}^{p,q}(F)$, т. е. что

$$\mathbf{Z}^{p,q}(F)/\bar{\partial}\,\Gamma^{p,q-1} \cong \mathbf{H}^{p,q}(F). \tag{10}$$

Тем самым доказана следующая теорема Дольбо:

(I) *Группы* $\mathbf{H}^q(V;\ \Omega^p(F))$ *и* $\mathbf{H}^{p,q}(F)$ *изоморфны.*

Сам Дольбо доказал эту теорему лишь для случая $F = \mathbf{C}^1 \times V$. Интересное доказательство этой теоремы предложил также Серр (см. Серр [3], стр. 15).

Из теоремы (I), в частности, следует, что *пространство* $\mathbf{H}^q(V; \Omega^p(F))$ *конечномерно.* Кроме того, поскольку отображение

$$\{\varphi_j\} \to \left\{\frac{1}{a_j} * \bar{\varphi}_j\right\} \tag{11}$$

является изоморфизмом группы $\mathbf{H}^{p,q}(F)$ на группу $\mathbf{H}^{n-p,\,n-q}(-F)$, из этой теоремы вытекает также следующий *изоморфизм Серра* (см. Серр [3], стр. 22):

$$\mathbf{H}^q(V; \Omega^p(F)) \cong \mathbf{H}^{n-q}(V; \Omega^{n-p}(-F)). \tag{12}$$

◀ Из изоморфизма (11) можно получить и другие интересные следствия. Например, при $p = n$ мы получаем, что

$$H^{n,q}(F) \cong H^{0,\,n-q}(-F).$$

Если расслоение F тривиально, то $-F = F$ и, кроме того, $H^{0,\,n-q} \cong H^{n-q,\,0}$. Следовательно,

$$H^{n,q}(V) \cong H^{n-q,\,0}(V).$$

В частности,

$$\dim H^{n,q}(V) = \dim H^{n-q,\,0}(V), \quad n = \dim V. \ ▶$$

5. Положительные расслоения

(Это понятие принадлежит Кодаира [4]; там же читатель найдет дальнейшие подробности.)

Из соотношения (1) следует, что на пересечении $U_j \cap U_k \cap U_l$ имеет место равенство

$$\log f_{jk} + \log f_{kl} + \log f_{lj} = 2\pi i c_{jkl}, \tag{13}$$

где c_{jkl} — некоторое целое число. Легко видеть, что числа c_{jkl} определяют некоторый двумерный коцикл нерва $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ и, значит, некоторый элемент c_N группы когомологий $H^2(\mathfrak{N}; \mathbf{Z})$ с целыми коэффициентами $\mathbf{Z}$. Переходя к пределу, мы получим, следовательно, некоторый однозначно определенный элемент $c(F) \in H^2(V; \mathbf{Z})$.

Этот элемент называется *характеристическим классом* расслоения F; он совпадает с топологическим характеристическим классом главного расслоения, получающегося удалением в каждом слое точки $\zeta_j = 0$. Легко видеть, что отображение $F \to c(F)$ представляет собой гомоморфизм группы $\mathfrak{F}$ в группу $H^2(V; \mathbf{Z})$.

Кодаира и Спенсер доказали следующее утверждение:

(I) *Образ гомоморфизма c состоит из тех классов когомологий группы* $H^2(V; \mathbf{Z})$, *которые, будучи рассмотрены как элементы группы* $H^2(V; \mathbf{R})$ (*где* $\mathbf{R}$ — *группа действительных чисел*), *содержат некоторую замкнутую действительную форму γ типа* (1.1).

Разумеется, что в этой теореме группа когомологий $H^2(V; \mathbf{R})$ рассматривается, в силу теоремы де Рама (см. n° IX, 4), как группа классов d-замкнутых форм.

Любая действительная форма γ типа (1,1) на многообразии V имеет вид

$$\gamma = i \sum \gamma_{\alpha\beta^*}(z, \bar{z})\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \tag{14}$$

где $\overline{\gamma_{\alpha\beta^*}} = \gamma_{\beta\alpha^*}$. Такая форма γ называется *положительной*, $\gamma > 0$, если соответствующая эрмитова форма $\sum \gamma_{\alpha\beta^*}(z, \bar{z})\, u^\alpha \bar{u}^\beta$ от n переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$ положительно определена в каждой точке z многообразия V. Расслоение F называется *положительным*, $F > 0$, если его характеристический класс (точнее, соответствующий класс $c_R(F)$ с действительными коэффициентами) содержит замкнутую положительную форму типа (1,1). Кодаира доказал, что

(II) *Если* $F>0$, *то при* $1 \leqslant q \leqslant n$ *группы* $\mathrm{H}^q(V;\ \Omega^n(F))$ *и* $\mathrm{H}^{n-q}(V;\ \Omega^0(-F))$ *тривиальны.*

Рассмотрим теперь над многообразием V так называемое *каноническое расслоение* K, определяемое каноническим классом линейной эквивалентности. Функциями перехода этого расслоения являются, как легко видеть, якобианы $J_{jk}=\partial(z_k^1, \ldots, z_k^n)/\partial(z_j^1, \ldots, z_j^n)$, где $(z_j^1, \ldots, z_j^n)$ — локальные координаты в окрестности U_j. Без труда проверяется, что имеет место изоморфизм:

$$\Omega^0(F) \cong \Omega^n(F-K). \tag{15}$$

Поэтому из утверждения (II) вытекает, что

(III) *Если* $F-K>0$, *то при* $1 \leqslant q \leqslant n$ *группа* $\mathrm{H}^q(V;\ \Omega^0(F))$ *тривиальна.*

Заметим, кстати, что пучок $\Omega^0(F)$ совпадает с пучком $\mathfrak{O}$ ростков голоморфных сечений расслоения F.

На этом мы закончим обзор основных фактов теории пучков и перейдем к применениям этой теории в алгебраической геометрии.

6. Многообразие Пикара в теории пучков

(См. Кодаира и Спенсер [2]).

В этом пункте излагается изящное определение многообразия Пикара любого кэлерова многообразия V, принадлежащее Кодаира и Спенсеру. В n° XI, 4 будет показано, что для случая алгебраических многообразий оно приводит к тому же результату, что и определение, изложенное в гл. VIII.

a) Пусть $\mathrm{H}^2_{1,1}(V;\ \mathbf{Z})$ и $\mathfrak{P}$ — соответственно образ и ядро рассмотренного в предыдущем пункте гомоморфизма $F \longrightarrow c(F)$. Таким образом,

$$\mathfrak{F}/\mathfrak{P}=\mathrm{H}^2_{1,1}(V;\ \mathbf{Z}). \tag{16}$$

Определим строение группы $\mathfrak{P}$. Если $F \in \mathfrak{P}$, то существуют такие целые числа c_{jk}, что функции $h_{jk}=\log f_{jk}+2\pi i c_{jk}$ на пересечении $U_j \cap U_k \cap U_l$ удовлетворяют соотношению:

$$h_{jk}+h_{kl}+h_{lj}=0: \tag{17}$$

Другими словами, функции h_{ji} определяют некоторый элемент группы $\mathbf{H}^1(\mathfrak{U}, \Omega^0)$, где $\Omega^0 = \Omega^0(\mathbf{C}\times V)$. Переходя к пределу, мы получим, следовательно, некоторый элемент $h \in \mathbf{H}^1(V, \Omega^0)$.

◀ Этот элемент h зависит, конечно, от выбора чисел c_{ji}. Однако, обращая это построение, мы можем любому элементу $h \in H^1(V, \Omega^0)$ сопоставить вполне определенное расслоение $F \in \mathfrak{P}$. Тем самым определяется некоторое, очевидно гомоморфное, отображение группы $\mathbf{H}^1(V, \Omega^0)$ *на* группу $\mathfrak{P}$. С другой стороны, согласно теореме Дольбо, примененной к тривиальному расслоению $\mathbf{C}^1\times V$), имеет место изоморфизм $H^1(V, \Omega^0) \simeq H^{0,1}(V)$, где $\mathbf{H}^{0,1}(V)$ — пространство (обыкновенных) гармонических форм типа (0, 1) на многообразии V. Тем самым мы получаем некоторое эпиморфное отображение $\mathbf{H}^{0,1}(V) \to \mathfrak{P}$. Ядро $\mathfrak{J}$ этого отображения, т. е. множество гармонических форм, которым соответствует тривиальное расслоение $\mathbf{C}^1\times V$, состоит, как легко видеть, из форм вида

$$2\pi i \pi_{0,1}\, \mathbf{H}c, \quad \text{где} \quad c \in \mathbf{H}^1(V; Z). \tag{18}$$

(Символом $\pi_{0,1}$ мы обозначаем здесь проектирующий оператор P_1 (см. раздел а), n° IX, 5).) ▶

Комплексное векторное пространство $\mathbf{H}^{0,1}(V)$ имеет, как мы знаем, размерность q (см. раздел а) n° IX, 8), а $\mathfrak{J}$ представляет собой его дискретную подгруппу, порожденную $2q$ вещественно линейно независимыми векторами. Следовательно, факторгруппа

$$\mathbf{H}^{0,1}(V)/\mathfrak{J} \simeq \mathfrak{P} \tag{19}$$

представляет собой q-мерный комплексный тор.

Пусть $\{\alpha_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$, — базис пространства одномерных дифференциалов первого рода на многообразии V. Тогда любой элемент $\bar{\alpha} \in H^{0,1}(V)$ имеет вид $\bar{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{q} t_\nu \alpha_\nu$. Легко видеть, что расслоение $F \in \mathfrak{P}$ аналитически зависит от параметров $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$, т. е. что отождествление группы $\mathfrak{P}$ с факторгруппой $\mathbf{H}^{0,1}(V)/\mathfrak{J}$ определяет на $\mathfrak{P}$ комплексно-аналитическое строение. Построенное групповое комплексное многообразие $\mathfrak{P}$

и называется *многообразием Пикара кэлерова многообразия* V.

b) До сих пор мы считали, что V представляет собой компактное кэлерово многообразие. Пусть теперь многообразие V алгебраично.

Если $F = \{D\}$, то соответствие (см. n° X, 1)

$$\zeta_j(z) \times z \to \zeta_j(z)/R_j(z, D) \tag{20}$$

определяет изоморфизм пучка $\Omega^0(F) = \Omega(\{D\})$ на пучок $\mathfrak{M}_D^0 = \mathfrak{M}^0(D)$ ростков мероморфных функций, кратных дивизору $-D$. Поэтому

$$\mathrm{H}^q(V;\ \Omega(\{D\})) \cong \mathrm{H}^q(V,\ \mathfrak{M}_D^0) \tag{21}$$

и

$$\dim \mathrm{H}^0(V;\ \Omega(\{D\})) = \dim|D| + 1. \tag{22}$$

Если $|D - K| = |S|$, где $|S|$ — система гиперплоских сечений многообразия V, то условия теоремы (III), n° X, 5, очевидно, выполнены так, что в этом случае

$$\mathrm{H}^q(V;\ \mathfrak{M}_D^0) = 0 \quad \text{при} \quad q \geqslant 1. \tag{23}$$

Докажем теперь следующую основную теорему Кодаира и Спенсера:

(I) *Для любого расслоения* $F \in \mathfrak{F}$ *существует такой дивизор* D, *что* $F = \{D\}$.

Другими словами:

Группа расслоений $\mathfrak{F}$ *естественно изоморфна группе классов линейной эквивалентности* G/G_l.

Доказательство этой теоремы проводится индукцией по размерности n многообразия V. Так как имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega(F - \{S\}) \xrightarrow{i} \Omega(F) \xrightarrow{r} \Omega(F_S) \to 0, \tag{24}$$

где S — общее гиперплоское сечение, F_S — ограничение расслоения F на сечении S, а i и r — соответственно отображения вложения и ограничения, то, полагая

$$F_m = F + \{S_m\} = F_{m-1} + \{S\}, \tag{25}$$

где $|S_m|$ — m-кратная система для системы $|S|$, мы получим точную последовательность

$$0 \to \Omega(F_{m-1}) \xrightarrow{i} \Omega(F_m) \xrightarrow{r} \Omega(F_{m,S}) \to 0. \qquad (26)$$

Пусть

$$0 \to \mathrm{H}^0(V; \Omega(F_{m-1})) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^0(V; \Omega(F_m)) \xrightarrow{r^*} \mathrm{H}^0(S; \Omega(F_{m,S})) \xrightarrow{\delta^*}$$
$$\xrightarrow{\delta^*} \mathrm{H}^1(V, \Omega(F_{m-1})) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^1(V; \Omega(F_m)) \xrightarrow{r^*}$$
$$\to \mathrm{H}^1(S; \Omega(F_{m,S})) \to \ldots \qquad (27)$$

— точная последовательность когомологий, соответствующая последовательности (26).

По предположению индукции, на многообразии S существует такой дивизор $\overline{D}$, что $\{\overline{D}\} = F_S$. Следовательно,

$$F_{m,S} = F_S + \{S_m\}_S = \{\overline{D} + S_m \cdot S\}. \qquad (28)$$

Поскольку для больших значений m система $|\overline{D} + S_m \cdot S|$ удовлетворяет условиям, при которых имеет место равенство (23), существует такое целое число m_0, что при $m \geqslant m_0$

$$\mathrm{H}^1(S; \Omega(F_{m,S})) = \mathrm{H}^1(S; \mathfrak{M}^0(\overline{D} + S_m \cdot S)) = 0. \qquad (29)$$

Поэтому из точности последовательности (27) вытекает, что при $m \geqslant m_0$

$$\dim \mathrm{H}^0(S; \Omega(F_{m,S})) = \dim \mathrm{H}^0(V; \Omega(F_m)) - \dim \mathrm{H}^0(V, \Omega(F_{m-1})) +$$
$$+ \dim \mathrm{H}^1(V; \Omega(F_{m-1})) - \dim \mathrm{H}^1(V; \Omega(F_m)).$$

(Напомним, что, согласно n°X, 4, пространства $\mathrm{H}^q(V; \Omega(F_m))$ конечномерны.)

Складывая эти равенства для всех значений m, от m_0 до некоторого m_1, мы получим соотношение, из которого непосредственно вытекает, что $\dim \mathrm{H}^0(V; \Omega(F_m)) \to \infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших m эта размерность больше нуля, так что расслоение F_m обладает над всем многообразием V отличным от нуля аналитическим сечением. Пусть в окрестности U_j это сечение задается соответствием $z \to \zeta_j(z) \times z$.

Рассмотрим на многообразии V дивизор D_m, локально заданный уравнениями $\zeta_j(z)=0$. Ясно, что $F_m=\{D_m\}$. Следовательно, полагая $D=D_m-S_m$, мы получим, что $F=\{D\}$.

В случае $n=1$ доказательство проводится аналогично, только несколько проще. Действительно, в этом случае равенство $\mathbf{H}^1(S;\ \Omega(F_m, \mathfrak{s}))=0$ очевидным образом имеет место для любого значения m, а размерность линейного пространства $\mathbf{H}^0(S;\ \Omega(F_m, \mathfrak{s}))=\Omega(F_m, \mathfrak{s})=\Omega(S)$ равна степени дивизора S и потому больше нуля.

c) Отождествление для любого алгебраического многообразия V группы расслоений $\mathfrak{F}$ с группой классов линейной эквивалентности $\mathbf{G}/\mathbf{G}_l$ немедленно позволяет получить ряд важных результатов. Пусть $\mathbf{G}_0$ — подгруппа группы $\mathbf{G}$, состоящая из всех дивизоров, целочисленно гомологичных нулю. Поскольку, как легко видеть, *класс гомологий V-дивизора D двойствен классу когомологий $c(\{D\})$*, включение $D\in\mathbf{G}_0$ равносильно включению $\{D\}\in\mathfrak{P}$. Другими словами,

(II) *Многообразие Пикара $\mathfrak{P}$ в смысле Кодаира и Спенсера алгебраического многообразия V может быть отождествлено с факторгруппой $\mathbf{G}_0/\mathbf{G}_l$.*

Это утверждение известно как *первая теорема двойственности* Игуза (см. Игуза [3]; А. Вейль [4]). Из него непосредственно вытекает, что для доказательства совпадения двух определений многообразия Пикара достаточно доказать равенство $\mathbf{G}_0=\mathbf{G}_a$. Это будет сделано в n° XI, 4.

Пусть $\mathbf{H}^{1,1}_{2n-2}(V;\ \mathbf{Z})$ — подгруппа группы $\mathbf{H}_{2n-2}(V;\ \mathbf{Z})$, состоящая из классов гомологий, гармонические части которых являются формами типа (1,1). Так как

$$\mathbf{H}^2_{1,1}(V;\ \mathbf{Z})\cong\mathbf{H}^{1,1}_{2n-2}(V;\ \mathbf{Z}),\tag{30}$$

то

$$\mathbf{G}/\mathbf{G}_0\cong\mathbf{H}^{1,1}_{2n-2}(V;\ \mathbf{Z}),\tag{31}$$

откуда немедленно вытекает следующий критерий алгебраичности $(2n-2)$-мерных циклов, принадлежащий Лефшецу и Ходжу (см. Ходж [a], стр. 213; Ходж ([4, 6, 7, 8]; Лефшец [a], стр. 82):

(III) *Целочисленный $(2n-2)$-мерный цикл Γ алгебраического многообразия V тогда и только тогда гомологичен алгебраическому дивизору, когда периоды всех замкнутых форм типа $(n, n-2)$ по этому циклу равны нулю.*

В частности, *любой $(2n-2)$-мерный цикл конечного порядка алгебраичен.* Таким образом, обозначая символом $\mathbf{T}_q(V)$ группу кручения многообразия V в размерности q, мы видим, что

$$\mathbf{T}_{2n-2}(V) \subset \mathbf{H}^{1,1}_{2n-2}(V; \mathbf{Z}) \tag{32}$$

и

$$\mathbf{G}_r/\mathbf{G}_0 \cong \mathbf{T}_{2n-2}(V), \tag{33}$$

где $\mathbf{G}_r$ — подгруппа группы $\mathbf{G}$, состоящая из всех дивизоров, рационально гомологичных нулю. Поскольку, как известно, группа $\mathbf{T}_{2n-2}$ двойственна группе $\mathbf{T}_1$, из изоморфизма (33) вытекает, что

(IV) *Факторгруппа $\mathbf{G}_r/\mathbf{G}_0$ двойственна одномерной группе кручения $\mathbf{T}_1(V)$ многообразия V.*

Это утверждение известно как *вторая теорема двойственности* Игуза (см. Игуза [3]; А. Вейль [4]).

7. Теорема Римана — Роха для присоединенных систем

Теоремами Римана — Роха принято называть любые предложения, позволяющие вычислять размерности тех или иных линейных систем алгебраического многообразия V в терминах некоторых численных характеристик этого многообразия и самой системы. В этом пункте мы изложим принадлежащую Кодаира и Спенсеру теорему такого типа для присоединенных систем на многообразии V.

Первые теоремы Римана — Роха для многомерных многообразий принадлежат Севери [13] и Сегре [5]. В недавнее время они стали предметом глубоких исследований Кодаира [1, 2, 5], Спенсера [2], Хирцебруха [1], Ходжа [13], а также Серра [3,4]. Заметим, кстати, что в статье [4] Серр, пользуясь топологией Зариского и теорией пучков, излагает теорию, представляющую собой синтез абстрактных и топологических методов. Изложение здесь этой бесспорно чрезвычайно интересной работы, к сожалению, заняло бы слишком много места.

В этом пункте мы излагаем работу Спенсера [1]; результатом Хирцебруха будет посвящен п° X, 9. По поводу определений вычетов Пуанкаре и Севери см. соответственно работы Пуанкаре [1] и Севери [4]. Теорема Лефшеца, на которую мы ниже ссылаемся, изложена в книге [a], стр. 88—91; см. также Экман [1,2] и Кодаира [5], стр. 91—96.

◀ Рассмотрим на n-мерном неособом алгебраическом многообразии V пучок Ω^r ростков голоморфиых форм степени r и подпучок $\mathfrak{M}^r_D$ пучка ростков мероморфных форм степени r, состоящий из ростков, кратных дивизору $-D$, т. е. таких ростков τ_p, что при $p \in U_j$ росток $R_j(z; D)\cdot\tau_p$ голоморфен в точке p. Так как в обозначениях п° X, 4 $\Omega^r = \Omega^r(\mathbf{C}^1 \times V)$ и $\mathfrak{M}^r_D \cong \Omega^r(\{D\})$, то, согласно следствию из теоремы Дольбо, все группы когомологий $\mathbf{H}^s(V; \Omega^r)$ и $\mathbf{H}^s(V; \mathfrak{M}^r_D)$ представляют собой конечномерные векторные пространства. Кроме того, они равны нулю, если $s < 0$ или если $s > n$. В частности, мы можем говорить об *эйлеровой характеристике* многообразия V относительно каждого из этих пучков:

$$\chi^r(V) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \dim \mathbf{H}^s(V; \Omega^r)$$

и (34)

$$\chi^r_D(V) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \dim \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{M}^r_D).$$

Хотя понятие эйлеровой характеристики в этом пункте нам и не понадобится, но, учитывая, что в дальнейшем оно будет неоднократно использоваться, мы все же изложим здесь некоторые ее свойства.

В силу изоморфизма (12),

$$\dim \mathbf{H}^s(V; \Omega^r) = \dim \mathbf{H}^{n-s}(V; \Omega^{n-r}).$$

Следовательно,

$$\chi^r(V) = (-1)^n \chi^{n-r}(V).$$

Далее, обозначая символом $g_p(V)$ размерности пространства $\mathbf{H}^{p,0}(V)$, т. е. максимальное число линейно независимых p-кратных дифференциалов первого рода на многообразии V (по условию $g_0(V)=1$), мы получим, учитывая сказанное в конце n° X, 4, что

$$\chi^n(V)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s g_{n-s}(V),$$

т. е. что

$$\chi^0(V)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s g_s(V).$$

Характеристика $\chi^0(V)$ называется также *родом Тодда* многообразия V. Вернемся теперь к теореме Римана—Роха. ▶

Пусть S — произвольный простой неособый дивизор многообразия V, и пусть в некоторой окрестности U_p каждой точки $p\in V$ выбраны такие локальные координаты $z_p^1, z_p^2, \ldots, z_p^n$, что дивизор S в окрестности U_p задается уравнением $z_p^1=0$. Полагая $z_p^i=\bar{z}_p^{i-n}$, $i=n+1, \ldots, 2n$, мы можем любую форму степени s, определенную в окрестности U_p, записать в следующем виде:

$$\varphi=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_s}\varphi_{i_1i_2\ldots i_s}dz_p^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_p^{i_s}. \tag{35}$$

Каждой такой форме φ мы сопоставим форму $\nu_p\varphi$ степени $s-1$, полагая

$$\nu_p\cdot\varphi=\sum_{1<i_2<\ldots<i_s}\varphi_{1i_2\ldots i_s}dz_p^{i_2}\wedge\ldots\wedge dz_p^{i_s}. \tag{36}$$

Теперь легко видеть, что любой росток $\tau_p\in\mathfrak{M}_S^r$, рассматриваемый как $(r, 0)$-поток, удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}\tau_p[\psi]=2\pi i\int_S\{\nu_p(z_p^1\tau_p)\cdot\psi+(-1)^r(z_p^1\tau_p)\cdot\nu_p\psi\}, \tag{37}$$

где ψ — произвольная форма типа $(n-r,\ n-1)$ и класса C^∞ с компактным иосителем, принадлежащим координатной окрестности U_p точки p.

Очевидно, что функции $z_p^1|z_q^1$, рассматриваемые на пересечении $U_p\cap U_q$, где p, $q\in S$, определяют над V некоторое расслоение. Дивизор C, соответствующий этому расслоению, совпадает, как нетрудно видеть, с характеристическим дивизором подмногообразия $S \subset V$. Пусть в окрестности u_p дивизор C задается уравнением $h_p = 0$. Полагая

$$\mathfrak{P}(\tau_p) = (\nu_p(z_p^1 \tau_p))_S, \quad \mathfrak{S}(\tau_p) = (z_p^1 \tau_p)_S / h_p \tag{38}$$

(эти ростки называются соответственно *вычетами Пуанкаре и Севери* ростка τ_p) и

$$\mathfrak{R}_S(\tau_p)[\psi] = \int\limits_S \{\mathfrak{P}(\tau_p) \cdot \psi + (-1)^r \mathfrak{S}(\tau_p) h_p \cdot \nu_p \psi\}, \tag{39}$$

мы можем формулу (37) переписать в следующем виде:

$$\bar{\partial}\tau_p[\psi] = 2\pi i \mathfrak{R}_S(\tau_p)[\psi]. \tag{40}$$

Поток $\mathfrak{R}_S(\tau_p)$ называется *полным вычетом ростка* τ_p *на дивизоре* S.

Согласно формуле (40), пучок вычетов $\mathfrak{R}_S^r$ можно рассматривать как образ пучка $\mathfrak{M}_S^r$ при гомоморфизме $\bar{\partial}$, так что имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^r \xrightarrow{i} \mathfrak{M}_S^r \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{R}_S^r \to 0, \tag{41}$$

где i — отображение вложения. С другой стороны, из формулы (38) и (39) вытекает, что имеет место естественный изоморфизм

$$\mathfrak{R}_S^r \cong \Omega^{r-1}(S) + \mathfrak{M}_C^r(S). \tag{42}$$

Из точной когомологической последовательности, соответствующей последовательности (41),

$$\ldots \to \mathbf{H}^s(V; \Omega^r) \xrightarrow{i^*} \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{M}_S^r) \xrightarrow{\partial^*} \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{R}_S^r) \xrightarrow{\delta^*} \\ \to \mathbf{H}^{s+1}(V; \Omega^r) \to \ldots \tag{43}$$

следует, что

$$\dim \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{M}_S^r) = \dim \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{R}_S^r) - \dim \mathbf{H}^{s+1}(V; \Omega^r) + \\ + \dim\{\mathbf{H}^s(V; \Omega^r)/\delta^*\mathbf{H}^{s-1}(V; \mathfrak{R}_S^r)\} + \\ + \dim\{\mathbf{H}^{s+1}(V; \Omega^r)/\delta^*\mathbf{H}^s(V; \mathfrak{R}_S^r)\}, \tag{44}$$

а из изоморфизма (42), что

$$\dim \mathbf{H}^s(V; \mathfrak{R}_S^r) = \dim \mathbf{H}^s(S; \Omega^{r-1}) + \dim \mathbf{H}^s(S; \mathfrak{M}_C^r). \tag{45}$$

Полагая в равенстве (44) $s=0$, $r=n$, мы получим, что

$$\dim \mathbf{H}^0(V;\ \mathfrak{M}_S^n) = \dim \mathbf{H}^0(V;\ \mathfrak{R}_S^r) - \dim \mathbf{H}^1(V;\ \Omega^n) + \\ + \dim \mathbf{H}^0(V;\ \Omega^n) + \dim \{\mathbf{H}^1(V;\ \Omega^n)/\delta^* \mathbf{H}^0(V;\ \mathfrak{R}_S^n)\}. \quad (46)$$

Но $\dim \mathbf{H}^0(V; \mathfrak{M}_S^n) = \dim \mathbf{H}^0(V; \mathfrak{M}_{K+S}^0) = \dim |K+S| + 1$, а $\dim \mathbf{H}^0(V; \mathfrak{R}_S^n) = \dim \mathbf{H}^0(S; \Omega^{n-1}) = \dim \mathbf{H}^{n-1, 0}(S) = g_{n-1}(S)$, ибо $\mathfrak{M}_C^n = 0$. Аналогично $\dim \mathbf{H}^1(V;\ \Omega^n) = \dim \mathbf{H}^{n, 1}(V) = \dim \mathbf{H}^{n-1, 0}(V) = g_{n-1}(V)$ и $\dim \mathbf{H}^0(V;\ \Omega^n) = g_n(V)$. Наконец, можно доказать, что при $n \geqslant 2$ факторпространство $\mathbf{H}^1(V;\ \Omega^n)/\delta^* \mathbf{H}^0(S;\ \Omega^{n-1})$ изоморфно пространству $(n-1)$-кратных дифференциалов первого рода на многообразии V, равных нулю на дивизоре S. Обозначая буквой l размерность этой группы и подставляя найденные значения размерностей в формулу (46), мы получим, что при $n \geqslant 2$

$$\dim |K+S| = g_n(V) - g_{n-1}(V) + g_{n-1}(S) - 1 + l. \quad (47)$$

Это равенство и представляет собой теорему Римана — Роха для присоединенной системы любого простого неособого дивизора S.

Если полная линейная система $|S|$ *обильна*, то любой k-кратный дифференциал первого рода, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, обращающийся в нуль на многообразии S, *тождественно равен нулю*. Этот классический результат Лефшеца нетрудно получить из соображений, изложенных в n° IX, 6. Таким образом, в этом случае $l=0$ и формула (47) превращается в следующее более простое соотношение:

$$\dim |K+S| = g_n(V) - g_{n-1}(V) + g_{n-1}(S) - 1. \quad (48)$$

Известно, что *цикл размерности* $\leqslant n-2$ *многообразия* S *гомологичен нулю на* S, *если он гомологичен нулю на многообразии* V (см. n° XI, 3). Поэтому $g_k(V) = g_k(S)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-2$, так что, полагая

$$a(V) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r g_{n-r}(V), \quad (49)$$

мы можем переписать соотношение (48) в виде

$$\dim |K+S| = a(V) + a(S) - 1. \quad (50)$$

Заметим в заключение, что аналогичным образом можно доказать, что *если для простого неособого дивизора* ϱ *и простого неособого дивизора* T, *содержащегося в обильной линейной системе, пересечение* $T\cdot S$ *представляет собой простой неособый* S*-дивизор, то при* $n\geqslant 3$ *имеет место равенство*

$$\dim|K+S+T|=a(V)+a(S)+a(T)+a(T\cdot S)-1. \quad (51)$$

8. Арифметический род

Мы можем теперь получить ряд новых свойств арифметических родов, определенных в гл. V. Во всем этом пункте через S, T, U, ... обозначаются произвольные простые неособые дивизоры n-мерного многообразия V.

а) Так как при $n=1$ число $a(V^1)$ совпадает с родом кривой V^1, то при $n=2$ из результатов n° IV, 5 вытекает, что

$$2a(S)-2=I(S,\ K+S). \quad (52)$$

Индукцией по n, используя соотношение (51), нетрудно доказать, что при $n\geqslant 2$ из эквивалентности $S\equiv T$ вытекает равенство

$$a(S)=a(T) \quad (53)$$

[при $n=2$ это равенство непосредственно следует из формулы (52)]. Далее, если пересечение $S\cdot T$ является простым неособым T-дивизором и $U\equiv S+T$, то

$$a(U)=a(S)+a(T)+a(S\cdot T). \quad (54)$$

Доказательство в случае $n=2$ очевидно (следует иметь в виду, что для нульмерного дивизора D число $a(D)$ равно уменьшенной на единицу его степени). Предположим, что эта формула справедлива для $n\leqslant m-1$ и докажем ее для случая $n=m$.

Если системы $|U|$ и $|S|$ обильны, то равенство (54) немедленно следует из формул (50) и (51). В противном случае следует ввести в рассмотрение произвольную обильную систему $|E|$. Пусть E_h и S_h — общие члены систем $|hE|$ и $|hE+S|$ соответственно, где h — достаточно большое число. Согласно предложению VI, n° III, 7, дивизоры E_h и S_h являются простыми неособыми дивизорами многообразия V.

◀Так как $|E_h+U|=|S_h+T|$, то из формулы (51) вытекает, что

$$a(E_h)+a(U)+a(E_h\cdot U)=a(S_h)+a(T)+a(S_h\cdot T).$$

Но, на многообразии E_h имеет место эквивалентность $E_h\cdot U\equiv E_hS+E_h\cdot T$, откуда, в силу предположения индукции, вытекает, что

$$a(E_h\cdot U)=a(E_h\cdot S)+a(E_h\cdot T)+a(E_h\cdot S\cdot T).$$

С другой стороны, так как $S_h\equiv E_h+S$, а системы $|S_h|$ и $|E_h|$ обильны, то

$$a(S_h)=a(E_h)+a(S)+a(E_h\cdot S).$$

Аналогично

$$a(S_h\cdot T)=a(E_h\cdot T)+a(S\cdot T)+a(E_h\cdot S\cdot T).$$

Тем самым соотношение (54) полностью доказано.▶

b) Из доказанного равенства легко следует, что для системы $|E|$ гиперплоских сечений многообразия V имеет место равенство

$$a(E_h)=\sum_{k=1}^{n}\binom{h}{k}\{a(E^{[k]})+(-1)^{n-k}\}+(-1)^n, \qquad (55)$$

где под $a(E^{[h]})$ понимается уменьшенная на единицу степень системы точек $E^{(h)}$, т. е. уменьшенная на единицу степень многообразия V.

Если система $|U|$ обильна, то общий член U_l обильной системы $|U+lE|$, $l\geqslant 0$, является неособым простым дивизором, так что число $a(U_l)$ определено. Оно является *многочленом от l степени n*. В самом деле, так как $U_l\equiv U+E_l$, то из формулы (54) следует, что $a(U_l)=$ $=a(U)+a(E_l)+a(E_l\cdot U)$, откуда, ввиду равенства (55), сформулированное утверждение вытекает непосредственно.

c) Для любого дивизора D существует такое целое число $h_0(D)$, что при $h\geqslant h_0(D)$ система $|D+hE|$ обильна (см. предложение (VI), n° III, 7). Поэтому, при $h\geqslant h_0$ число $a(D_h)$ определено. Поскольку $D_1\equiv U+lE$, где

$l = h - h_0$ и $U = D_{h_0}$, мы можем применить результаты раздела b). Следовательно, существует такой многочлен $a(h;\ D,\ V)$ степени n от переменной h, что

$$a(D_h) = a(h;\ D,\ V) \quad \text{при } h \geqslant h_0. \tag{56}$$

Оказывается, что значение многочлена $a(h;\ D,\ V)$ при $h = 0$ *не зависит* от выбора обильной системы $|E|$ и определяется исключительно дивизором D. Тем самым каждому дивизору D мы можем отнести число

$$a_V(D) = a(0;\ D,\ V). \tag{57}$$

Ясно, что для простого и неособого дивизора D число $a_V(D)$ совпадает с числом $a(D)$. Кроме того,

$$a(h;\ D,\ V) = a_V(D + hE), \tag{58}$$

ибо, как легко видеть,

$$a(l + h;\ D,\ V) = a(l;\ D + hE,\ V).$$

Заметим еще, что при $D \equiv D'$

$$a_V(D) = a_V(D'). \tag{59}$$

d) Пусть теперь D — произвольный дивизор, не содержащий простого неособого дивизора S. Оказывается, что для этого случая имеет место следующее соотношение, обобщающее соотношение (54):

$$a_V(D + S) = a_V(D) + a(S) + a_S(D \cdot S). \tag{60}$$

Для доказательства этого соотношения следует рассмотреть общий член U_h системы $|D + S + h + E|$, воспользовавшись тем, что для больших значений h дивизоры D_h и U_h просты и неособы, и применить формулу (54) к дивизору $U_h \equiv D_h + S$.

Пусть теперь S — общий член обильной системы вида $|D - K|$. Согласно формуле (49) Римана — Роха, $\dim|D| = \dim|K + S| = a(V) + a(S) - 1$. С другой стороны, в силу равенства (59), $a(S) = a_V(D - K)$. Следовательно,

$$\dim|D| = a(V) + a_V(D - K) - 1. \tag{61}$$

Так как система $|D+hE-K|=|D_h-K|$ для больших значений h обильна, то из равенств (61) и (58) вытекает, что

$$\dim|D+hE|=a(V)+a(h;\ D-K,\ V)-1, \text{ при } h\geqslant h_0. \tag{62}$$

Таким образом, существует такой многочлен $v(h;\ D,\ V)$ от переменной h, что для больших значений h

$$\dim|D+hE|=v(h;\ D,\ V). \tag{63}$$

Этот многочлен выражается формулой

$$v(h;\ D,\ V)=a(V)+a(h;\ D-K,\ V)-1. \tag{64}$$

В частности,

$$v(0;\ D,\ V)=a(V)+a_V(D-K)-1, \tag{65}$$

так что число $v(0;\ D,\ V)$ не зависит от выбора системы $|E|$. Оно называется *виртуальной размерностью* системы $|D|$. Из предложения (I), n° V, 7 немедленно вытекает, что так определенная виртуальная размерность совпадает с виртуальной размерностью $\delta(D)$ в смысле Севери. (Как показал Ходж [11], этот факт легко доказывается и непосредственно.) Отсюда и из формулы (37) гл. V следует, что

$$P^a(V)=v(0;\ K,\ V)+1-(-1)^n. \tag{66}$$

Поскольку $a_V(0)=(-1)^n$, из равенств (49), (65), (66) вытекает следующая важная теорема Кодаира, высказанная в качестве гипотезы Севери (см. [13], стр. 87; наше доказательство воспроизводит доказательство Кодаира):

(I) *Арифметический род $P^a(V)$ неособого алгебраического многообразия, определенного над полем комплексных чисел, равен числу $a(V)=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r g_{n-r}(V)$, где $g_s(V)$ — число линейно независимых s-кратных дифференциалов первого рода на многообразии V.*

e) С другой стороны, полагая в соотношении (28) гл. V $A\equiv 0$, мы получим, что

$$p_a(V)=(-1)^n v(0;\ 0,\ V), \tag{67}$$

где второй нуль в символе $v(0;\ 0,\ V)$ обозначает нулевой дивизор многообразия V. Отсюда и из формулы (65) следует, что

$$p_a(V) = (-1)^n \{a(V) + a_V(-K) - 1\}. \tag{68}$$

Пусть теперь $K+S$ — общий член линейной системы $|K+S|$, где S — произвольный простой неособый дивизор. Поскольку, как мы знаем (см. n° IV, 5), пересечение $K_S = (K+S)\cdot S$ представляет собой канонический дивизор многообразия S, из равенства (68) вытекает, что

$$p_a(S) = (-1)^{n-1} \{a(S) + a_S(-K_S) - 1\}. \tag{69}$$

С другой стороны, из равенства (60) следует, что

$$a_S(-K_S) = a_S((-K-S)\cdot S) = a_V(-K) - \\ - a_V(-K-S) - a(S). \tag{70}$$

Таким образом,

$$p_a(S) = (-1)^{n-1} \{a_V(-K) - a_V(-K-S) - 1\}. \tag{71}$$

Эта формула наводит на мысль определить арифметический род любого дивизора D многообразия V равенством

$$p_a(D) = (-1)^{n-1} \{a_V(-K) - a_V(-K-D) - 1\}. \tag{72}$$

Из формулы (59) легко следует, что $p_a(D) = p_a(D')$, если $D \equiv D'$. Если дивизор D не содержит простого неособого дивизора S, то имеет место соотношение

$$p_a(D+S) = p_a(D) + p_a(S) + p_a(D\cdot S). \tag{73}$$

Эти свойства функции $p_a(D)$ показывают, что она совпадает с арифметическим родом в смысле Севери и Зариского (см. n° V.3).

f) Докажем теперь, что *для любого неособого многообразия V над полем комплексных чисел имеет место равенство*

$$P^a(V) = p_a(V). \tag{74}$$

При доказательстве удобно вместо числа $a(V)$ рассматривать число

$$\alpha(V) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s g_s(V), \tag{75}$$

т. е. род Тодда $\varkappa^0(V)$ многообразия V (см. n° X, 7). Сравнивая формулы (49) и (75), мы немедленно получаем, что

$$a(V)=(-1)^n\{\alpha(V)-1\}. \tag{76}$$

В целях единообразия введем еще число $\alpha_V(-K)$, определив его формулой

$$a_V(-K)=(-1)^{n-1}\{\alpha_V(-K)-1\}. \tag{77}$$

Отсюда и из формулы (68) следует, что

$$p_a(V)=\alpha(V)-\alpha_V(-K)-(-1)^n, \tag{78}$$

а из предложения (I), что

$$P^a(V)=(-1)^n\{\alpha(V)-1\}. \tag{79}$$

Тем самым доказательство равенства (74) сводится к доказательству формулы

$$\alpha_V(-K)=[1-(-1)^n]\,\alpha(V). \tag{80}$$

Умножив обе части равенства (44) на $(-1)^s$, просуммируем получившиеся соотношения от 0 до n. Легко видеть, что при $r=n$ получится формула (см. формулы (34)):

$$\chi_S^n(V)=\chi^n(V)+\chi^{n-1}(S)+\chi_C^n(S). \tag{81}$$

С другой стороны, в силу предложения (II), n° X, 5 характеристика $\chi_C^n(S)$ равна нулю, а $\chi^{n-1}(S)=(-1)^{n-1}\alpha(S)$. Отсюда и из формулы (81) вытекает, что

$$\alpha_V(S)=(-1)^{n-1}\{\chi_S^n(V)-\chi^n(V)\}. \tag{82}$$

Оказывается, что это соотношение имеет место не только для простых неособых дивизоров S, но и для любого дивизора D многообразия V, т. е.

$$\alpha_V(D)=\overline{\alpha}(D), \tag{83}$$

где, по определению,

$$\overline{\alpha}(D)=(-1)^{n-1}\{\chi_D^n(V)-\chi^n(V)\}. \tag{84}$$

Поскольку $\mathfrak{M}^r_D \cong \Omega^r(\{D\})$ (см. n° X, 7), из эквивалентности $D \equiv D'$ вытекает изоморфизм

$$\mathbf{H}^s(V, \mathfrak{M}^n_D) \cong \mathbf{H}^s(V, \mathfrak{M}^n_{D'}), \tag{85}$$

так что

$$\bar{\alpha}(D) = \bar{\alpha}(D'). \tag{86}$$

Пусть теперь S — произвольный простой неособый дивизор многообразия V, не являющийся компонентой дивизора D. Тогда для любого $n > 1$ имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{M}^n_D \xrightarrow{i} \mathfrak{M}^n_{D+S} \xrightarrow{\mathfrak{P}} \mathfrak{M}^{n-1}_{D \cdot S}(S) \to 0, \tag{87}$$

где $\mathfrak{P}$ — отображение Пуанкаре $\tau_p \to \mathfrak{P}(\tau_p)$, определенное равенством (38). Аналогично, при $n = 1$ для любого дивизора S, состоящего из простых компонент, имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{M}^1_D \xrightarrow{i} \mathfrak{M}^1_{D+S} \xrightarrow{\mathfrak{P}} \Omega^0(S) \to 0, \tag{88}$$

где $\Omega^0(S)$ — линейное пространство комплексных функций, определенных на множестве S.

Из соответствующих точных когомологических последовательностей вытекает, что

$$\left.\begin{array}{ll} \chi^n_{D+S}(V) = \chi^n_D(V) + \chi^{n-1}_{D \cdot S}(S), & n > 1, \\ \chi^1_{D+S}(V) = \chi^1_D(V) + m, & n = 1 \end{array}\right\}, \tag{89}$$

где m — число точек дивизора S (т. е. его степень). Отсюда и из равенства (84) следует, что при $n > 1$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(D + S) &= (-1)^{n-1}\{\chi^n_{D+S}(V) - \chi^n(V)\} = \\ &= (-1)^{n-1}\{\chi^n_D(V) - \chi^n(V) + \chi^{n-1}_{D \cdot S}(S) - \chi^{n-1}(S)\} + \\ &+ (-1)^{n-1}\chi^{n-1}(S) = \bar{\alpha}(D) + \alpha(S) - \bar{\alpha}(D \cdot S), \end{aligned} \tag{90}$$

а при $n = 1$

$$\bar{\alpha}(D+S) = \bar{\alpha}(D) + m. \tag{91}$$

Теперь мы можем доказать равенство (83) индукцией по числу n, заметив, что при $n = 1$ достаточно представить дивизор D в виде разности двух положительных дивизоров и воспользоваться формулами (86) и (91). Пусть утверждение (83) уже доказано для любого неособого многообразия размерности, меньшей $n \geqslant 2$. Докажем его для многообразия V размерности n.

Используя обозначения раздела b), положим $S = E_h$ и рассмотрим общий член T системы $|D+S|$. Из формулы (90) следует, что

$$\bar{\alpha}(T) = \bar{\alpha}(D) + \bar{\alpha}(S) - \bar{\alpha}(D \cdot S),$$

а из формул (60) и (76), что

$$\alpha(T) = \alpha(D) + \alpha(S) - \alpha_S(D \cdot S).$$

Так как многообразие T неособо, то, согласно доказанному ранее, $\alpha(T) = \bar{\alpha}(T)$. С другой стороны, из предположения индукции следует, что $\alpha_S(D \cdot S) = \bar{\alpha}(D \cdot S)$. Формула (83) следует отсюда непосредственно (ибо $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$). Остается заметить, что формула (80) непосредственно вытекает из формулы (83). Действительно, из изоморфизма (15) вытекает, что $\Omega^0 \cong \mathfrak{M}^n_{-K}$ и, значит $\mathbf{H}^s(V, \mathfrak{M}^n_{-K}) \cong \mathbf{H}^s(V, \Omega^0)$, так что $\chi^n_{-K}(V) = \chi^0(V)$. Поэтому

$$a_V(-K) = \bar{\alpha}(-K) = (-1)^{n-1}\{\chi^n_{-K}(V) - \chi^n(V)\} =$$
$$= (-1)^{n-1}\{\chi^0(V) - \chi^n(V)\} = [-1-(-1)^n]\,\alpha(V).$$

Тем самым формула (74) полностью доказана.

Заметим, что из формулы (74) и предложения (I) еще раз вытекает относительная инвариантность арифметического рода многообразия V, ибо этим свойством обладают числа $g_s(V)$.

9. Теорема Римана — Роха

В этом пункте будут изложены замечательные результаты Хирцебруха, касающиеся общей теоремы Римана — Роха. Их доказательства можно найти в монографии Хирцебруха [а].

а) Пусть $\mathfrak{W}$ — *векторное аналитическое расслоение* над неособым алгебраическим многообразием V, слоем которого является комплексное векторное пространство $\mathbf{C}^q$, а структурной группой — комплексная линейная q-мерная группа $GL(q, C)$. Расслоение $\mathfrak{W}$ локально изоморфно прямому произведению $V \times C^q$, а переход от одной координатной окрестности к другой осуществляется с помощью обратимых голоморфных матриц порядка q.

Для любого голоморфного сечения $s(z)$ расслоения $\mathfrak{W}$ над некоторой областью $U \subset V$ и любой голоморфной функции $f(z)$ на U определено их произведение $f(z) \cdot s(z)$, также являющееся голоморфным сечением расслоения $\mathfrak{W}$ над областью U. Поэтому пучок $\mathfrak{S}(\mathfrak{W})$ ростков голоморфных сечений расслоения $\mathfrak{W}$ представляет собой аналитический пучок. Более того, поскольку расслоение локально тривиально, пучок $\mathfrak{S}(\mathfrak{W})$ локально изоморфен пучку $\mathfrak{O}^q$ (см. n° X, 2).

Это построение нетрудно обратить, т. е., исходя из некоторого аналитического пучка $\mathfrak{T}$, локально изоморфного пучку $\mathfrak{O}^q$, получить расслоение $\mathfrak{W}$, для которого $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{S}(\mathfrak{W})$.

Таким образом, *имеет место взаимно однозначное соответствие между аналитическими пучками, локально изоморфными пучку $\mathfrak{O}^q$, и аналитическими векторными расслоениями $\mathfrak{W}$.*

В частности, при таком соответствии друг другу сопоставляются следующие объекты: 1) расслоение ковариантных p-векторов и пучок голоморфных Ω^p-форм степени p; 2) линейное расслоение F, соответствующее дивизору D (см. n° X, 1), и пучок $\Omega^0(\{D\}) \cong \mathfrak{M}_D^0$; 3) тривиальное расслоение $F = C^1 \times V$ и пучок Ω^0.

b) Пусть $c_i \in H^{2i}(V; Z)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, — классы Чженя многообразия V (см. n° IX, 9), и пусть $d_j \in H^{2j}(V; Z)$ — классы Чженя расслоения $\mathfrak{W}$ $0 \leqslant j \leqslant q$.

Введем в рассмотрение формальные величины γ_i, δ_j, определяющиеся формулами

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \prod_{i=1}^{n} (1 + \gamma_i x), \quad \sum_{j=0}^{q} d_j x^j = \prod_{j=1}^{q} (1 + \delta_j x). \qquad (92)$$

Любой формальный степенной ряд, симметрично зависящий от величин γ_i и δ_j, можно рассматривать как степенной ряд от классов Чженя c_i и d_j и, значит, как элемент кольца когомологий $H^*(V; Q)$ многообразия V над полем рациональных чисел Q. С другой стороны, каждому элементу $u \in \mathbf{H}^*(V; Q)$ можно отнести рациональное число $k_n[u] = \bar{u} \cap V$, где $\bar{u}$ — компонента элемента u, имеющая топологическую размерность $2n$, а V — фундаментальный цикл многообразия V.

c) С помощью введенных понятий мы можем теперь сформулировать следующую основную теорему Хирцебруха:

(I) *Для любого векторного расслоения* $\mathfrak{W}$ *имеет место равенство*

$$\chi(V, \mathfrak{S}(\mathfrak{W})) = k_n\left[\sum_{j=1}^{q} e^{\delta_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{-\gamma_i}{e^{-\gamma_i}-1}\right] =$$

$$= k_n\left[e^{c_1/2} \sum_{j=1}^{q} e^{\delta_j} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right], \tag{93}$$

где

$$\chi(V; \mathfrak{S}(\mathfrak{W})) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim \mathbf{H}^i(V; \mathfrak{S}(\mathfrak{W})). \tag{94}$$

Таким образом, характеристика $\chi(V, \mathfrak{S}(\mathfrak{W}))$ является многочленом от характеристических классов Чженя многообразия V и расслоения $\mathfrak{W}$. Это утверждение можно усилить, введя в рассмотрение *классы Понтрягина* $p_i \in \mathbf{H}^{4i}(V, \mathbf{Z})$, $i = 0, 1, \ldots, [n/2]$, многообразия V, определяемые соотношением

$$\sum_{j=0}^{[i/2]} (-1)^j p_j = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j c_j \sum_{j=0}^{i} c_j. \tag{95}$$

Замечая, что имеет место формальное разложение $\sum_{i=0}^{[n/2]} p_i x^{2i} = \prod_{i=1}^{n} (1+\gamma_i^2 x)$ и что степенной ряд $x/\operatorname{sh} x$ зависит лишь от x^2, мы видим, что справедливо следующее более сильное утверждение: *характеристика* $\chi(V, \mathfrak{S}(\mathfrak{W}))$ *является многочленом от класса* c_1, *понтрягинских классов* многообразия V *и классов Чженя расслоения* $\mathfrak{W}$.

d) Рассмотрим теперь случай тривиального расслоения $\mathfrak{W} = V \times C^1$. Поскольку, согласно результатам n° X, 8,

$$\alpha(V) = (-1)^n p_a(V) + 1 = \sum_{i=0}^{n^*} (-1)^i g^i = \chi(V, \mathfrak{S}(C^1 + V)) = \\ = \chi(V, \Omega^0), \quad (96)$$

то из теоремы (I) (для случая $q = 1$ и $\delta_1 = 0$) вытекает, что

$$\alpha(V) = k_n \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{-\gamma_i}{e^{-\gamma_i} - 1} \right]. \quad (97)$$

Эта формула выражает *род Тодда*, $\alpha(V)$, *многообразия через характеристические классы этого многообразия и тем самым через канонические классы Сегре—Тодда* (см. n° IV, 9). Очевидно, что *арифметический род многообразия V также можно выразить через классы Сегре—Тодда.*

Простое вычисление дает для случаев $n=1, 2, 3$ следующие формулы:

$$\alpha(V^1) = \frac{1}{2} c_1 [V], \quad \alpha(V^2) = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) [V^2], \quad \alpha(V^3) = \frac{1}{24} c_1 c_2 [V^3], \quad (98)$$

которые, по существу, хорошо известны. В самом деле, при $n=1$ имеем $c_1[V^1] = 2 - 2p$ и $p_a(V^1) = p$, где p—род кривой V^1. При $n=2$ имеем $c_1^2[V^2] = K^{[2]}$ и $c_2[V^2] = \chi(V^2)$, так что $p_a(V) = \frac{1}{12}(K^{[2]} + \chi) - 1$; эта формула давно известна в теории поверхностей (см. Зариский [a], стр. 62, 113; напомним, что $\chi = I + 4$, где I—инвариант Цейтена—Сегре. Наконец, третью формулу можно подобным же образом записать в виде $24(p_a(V^3) - 1) = KC$, где C—каноническая кривая многообразия V; в этой форме она была доказана Toддом (см. Тодд [9], стр. 215)).

Отметим, что *род Тодда неособого подмногообразия $A^{n-r} \subset V$, являющегося полным пересечением V-дивизоров $U_1, U_2, \ldots, U_r$, выражается через классы когомологий $u_1, u_2, \ldots, u_r \in H^r(V; \mathbf{Z})$, двойственные этим дивизорам, по формуле*

$$\alpha(A^{n-r}) = k_n \left[\prod_{i=1}^{r} (1 - e^{-u_i}) \cdot \sum_{j=0}^{n-r} \alpha_j(c_1, c_2, \ldots, c_j) \right], \quad (99)$$

где

$$\alpha_j(c_1, c_2, \ldots, c_j) = k_j \left[\prod_{i=1}^{j} \frac{-\gamma_i}{e^{-\gamma_i} - 1} \right]. \quad (100)$$

e) Рассмотрим теперь более общий случай линейного расслоения $\mathfrak{W}=F$, $q=1$. В этом случае определена лишь формальная величина δ_1, совпадающая, очевидно, с характеристическим классом $c(F)\in\mathbf{H}^2(V, \mathbf{Z})$ расслоения F. Мы будем обозначать ее символом f. В рассматриваемом случае теорема (I) утверждает, что

$$\chi(V, \mathfrak{S}(F))=k_n\left[e^{f+c_1/2}\prod_{i=2}^{n}\frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right]. \tag{101}$$

Правая часть этой формулы представляет собой многочлен от $f+c_1/2$ и понтрягинских классов многообразия V.

Пусть $F=\{D\}$ (см. предложение (I), n° X, 6), так что $\mathfrak{S}(F)\cong\Omega^0(\{D\})$. Так как из изоморфизмов (12), (15) и формулы (22) вытекает, что $\dim|K-D|+1=$ $=\dim\mathbf{H}^n(V; \Omega^0(\{D\})$, то

$$\dim|D|+1+(-1)^n(\dim|K-D|+1)=$$

$$=k_n\left[e^{f+c_1/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_{i/2}}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right]+\delta, \tag{102}$$

где

$$\delta=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\dim\mathbf{H}^i(V; \Omega^0(\{D\})). \tag{103}$$

Равенство (102) *представляет собой наиболее общую форму теоремы Римана — Роха.*

Теореме Римана — Роха можно придать и другую форму, выясняющую геометрический смысл слагаемых правой части формулы (102). Этот вариант принадлежит Ходжу (см. Ходж (13)). В первую очередь заметим, что из равенств (76), (77), (83) и (96) следует, что

$$a(V)+a_V(D-K)=\chi^n_{D-K}(V). \tag{104}$$

В силу формулы (65) и изоморфизма (12), это соотношение равносильно формуле

$$\delta(D)=\chi^0_D-1, \tag{105}$$

где $\delta(D) = v(0{:}D,\ V)$ — виртуальная размерность в смысле Севери. Но, согласно формуле (22),

$$\dim|D| + 1 = \dim \mathbf{H}^0(V;\ \mathfrak{M}_D^0), \tag{106}$$

так что

$$\dim|D| + 1 = \delta(D) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\mathbf{H}^i(V; \mathfrak{M}_D^0). \tag{107}$$

Отсюда и из формулы (102), вытекает следующая формула, дающая когомологическую интерпретацию виртуальной размерности в смысле Севери

$$\delta(D) = k_n\left[e^{f+c_1/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right] - 1. \tag{108}$$

Пусть теперь $|X|$ — такая обильная линейная система на многообразии V, что система $|X+D-K|$ также обильна. Как доказал Ходж, в этом случае имеет место формула (см. n° III,5)

$$\operatorname{def}(|D+iX|\cdot X^{[i]}) = \dim \mathbf{H}^i(V;\ \mathfrak{M}_D^0),\ i = 1,2,\ \ldots\ n-1. \tag{109}$$

Таким образом, формула Римана — Роха приобретает следующий вид:

$$\dim|D| = \delta(D) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\operatorname{def}(|D+iX|\cdot X^{[i]}) + (-1)^{n-1}s, \tag{110}$$

где

$$s = \dim|K-D| + 1 \tag{111}$$

— так называемый *индекс специальности* системы $|D|$.

Число $\operatorname{def}(|D+iX)\cdot X^{[i]})$, которое, в силу формулы (109), не зависит от выбора системы $|X|$, называется i-м *индексом иррегулярности* системы $|D|$ на многообразии V, а число $\delta = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\operatorname{def}(|D+iX|$ — *избыточностью* системы $|D|$. Если система $|D-K|$ обильна, то, в силу формулы (23), числа δ и s равны нулю и мы снова получаем уже известные соотношения Севери, Зариского и Кодаира.

Заметим, наконец, что, полагая $D=0$ или $D=K$, мы получим из формулы (109) следующие выражения для числа линейно независимых i-кратных дифференциалов первого рода на многообразии V (см. n° X,7):

$$g_i = \operatorname{def}(|iX|\cdot X^{[i]}), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \tag{112}$$

$$g_{n-i} = \operatorname{def}(|K+iX|\cdot X^{[i]}), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{113}$$

f) Рассмотрим формулу (102) при $n=1$, 2 и 3.

При $n=1$ немедленно получается, что

$$\dim|D| - \dim|K-D| = (f + c_1/2)[V^1]. \tag{114}$$

Поскольку $f[V^1] = \deg D = m$ и $c_1[V^1] = \chi(V^1) = 2-2p$, эта формула равносильна известной формуле Римана — Роха для кривых

$$\dim|D| = m - p + s. \tag{115}$$

g) При $n=2$

$$k_2\left[e^{f+c_1/2}\prod_{i=1}^{2}\frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right] = \frac{1}{2}(f^2+fc_1)[V^2] + \alpha(V^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(D^{[2]} - D\cdot K) + p_a(V^2) + 1. \tag{116}$$

Полагая $D^{[2]} = m = \deg|D|$ и учитывая, что $D\cdot K = -m + 2\pi - 2$, где π — род кривой D, мы получаем окончательно

$$\dim|D| = n - \pi + p_a(V) + 1 - s + \delta. \tag{117}$$

При этом $\delta \geqslant 0$, ибо в этом случае $\delta = \mathrm{H}^1(V;\ \Omega^0(\{D\}))$. Это неравенство можно считать классическим (см. Зариский [a], стр. 66).

h) При $n=3$

$$g = k_3\left[e^{f+c_1/2}\prod_{i=1}^{3}\frac{\gamma_{i/2}}{\operatorname{sh}\gamma_{i/2}}\right] =$$
$$= \left[\frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{4}f^2c_1 + \frac{1}{12}f(c_1^2+c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2\right][V^3]. \tag{118}$$

Замечая, что в этом случае c_1 и c_2 двойственны соответственно дивизорам $-K$ и C (где C — каноническая кривая многообразия V^3), а класс f двойственен дивизору D, мы получаем отсюда, в силу результатов раздела d), что

$$g=\frac{1}{6}D^{[3]}-\frac{1}{4}KD^{[2]}+\frac{1}{12}D(K^{[2]}+C)-\frac{1}{24}KC=$$
$$=\frac{1}{6}D^{[3]}-\frac{1}{4}KD^{[2]}+\frac{1}{12}D(K^{[2]}+C)-p_a(V^3)+1. \tag{119}$$

Но

$$p_a(D)=\alpha(D)-1=\frac{1}{6}D^{[3]}+\frac{1}{4}KD^{[2]}+\frac{1}{12}(K^{[2]}+C)D-1 \tag{120}$$

и

$$p_a(D^{[2]})=-\alpha(D^{[2]})+1=D^{[3]}+\frac{1}{2}KD^{[2]}+1. \tag{121}$$

Таким образом, окончательно

$$\dim|D|=D^{[3]}-p_a(D^{[2]})+p_a(D)-p_a(V^3)+2+s+\delta. \tag{122}$$

В этом случае число

$$\delta=\dim \mathrm{H}^1(V,\ \Omega^0(\{D\}))-\dim \mathrm{H}^2(V,\ \Omega^0(\{D\})) \tag{123}$$

может, как показывают простые примеры, иметь любой знак. Если $\dim|S|\geqslant 1$ и $|D|=|K+S|$, то $i=0$, и, следуя Севери (см. Севери [13], стр. 63; Кодаира [2], стр. 323), можно показать, что $\delta\geqslant 0$. Если система $|S|$ обильна, то $\delta=0$, откуда несложными вычислениями можно заново (и притом в более явном виде) получить результаты n° X,7.

10. Некоторые отдельные результаты

Сформулируем без доказательства следующую теорему Кодаира (см. Кодаира [6]).

(I) *Любое компактное комплексное аналитическое многообразие V, обладающее метрикой Ходжа, т. е. такой кэлеровой метрикой $2\sum g_{\alpha\beta^*}(dz^\alpha d\bar{z}^\beta)$, что соответствующая внешняя форма $\omega=i\sum g_{\alpha\beta^*}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta$ когомоло-*

гична некоторому целочисленному двумерному коциклу (см. n° IX,6), *бирегулярно эквивалентно неособому алгебраическому подмногообразию проективного пространства.*

Доказательство этой теоремы основано на теории пучков, в частности, на результатах n° X,5, на некоторых свойствах локальных квадратичных преобразований и, наконец, на соображениях о вложении алгебраических многообразий в проективное пространство, подсказанных классическим методом Кастельнуово — Энриквеса в теории поверхностей (об этом методе см. Кастельнуово — Энриквес [1], гл. III, а также Зариский [a], стр. 72). Эта теорема представляет собой весьма полезный критерий алгебраичности многообразия. С ее помощью Кодаира доказал, что следующие классы многообразий обладают неособыми проективными алгебраическими моделями:

(II) *Комплексные торы, соответствующие матрицам Римана,* (см. раздел d), n° IX,8).

(III) *Компактные комплексные многообразия, обладающие эрмитовой метрикой, кривизна Риччи которых всюду положительно или отрицательно определена.*

(IV) *Компактные факторпространства вида $\mathfrak{B}/\Delta$, где $\mathfrak{B}$ — ограниченная область пространства $(z^1, z^2, \ldots, z^n)$, а Δ — дискретная группа автоморфизмов этой области, действующая на $\mathfrak{B}$ без неподвижных точек.*

(V) *Многообразия, являющиеся конечными разветвленными накрытиями алгебраических многообразий.*

(VI) *Проективные расслоения над алгебраическими многообразиями, слоями которых служат проективные пространства, а структурными группами — группы проективных преобразований.*

Тот факт, что многообразия типа V обладают проективными моделями, был высказан в качестве гипотезы А. Вейлем [4]. По поводу этого утверждения см. также Кодаира [5] и Чжоу — Кодаира [1].

XI

Поверхностная иррегулярность и непрерывные системы

1. Дефект линейной системы

В этой главе мы излагаем работу Кодаира (см. Кодаира [5], стр. 108—128), в которой некоторые классические результаты относительно поверхностей обобщаются на случай многообразий более высокой размерности. Эти результаты относятся к понятиям дефекта линейной системы, иррегулярности многообразия, а также к вопросу об условиях, при которых справедлива теорема о полноте характеристического ряда непрерывной системы. Основным инструментом исследования является теория потоков (см. n° IX, 3), хотя кое-где можно было бы воспользоваться и методами предыдущей главы (см. Кодаира — Спенсер [3]).

а) Пусть S — произвольный простой неособый дивизор неособого алгебраического многообразия V, определенного над полем комплексных чисел. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{A}(S)$ всех аддитивных мероморфных функций F на многообразии V, кратных дивизору S. Под *аддитивной* функцией мы понимаем здесь функцию, которая при аналитическом продолжении вдоль замкнутой кривой γ изменяется на аддитивную константу. Ясно, что *пространство* $\mathfrak{A}(S)$ *совпадает с линейным пространством интегралов Пикара первого и второго рода* (см. раздел а), n° IX,8).

Пусть теперь F_0 — произвольная мероморфная функция на многообразии V, имеющая *простой полюс* в дивизоре S, и пусть $D=(F_0)+S$. Очевидно, что для любой функции $F\in\mathfrak{A}(S)$ отношение F/F_0 индуцирует на S *однозначную мероморфную функцию* $f=(F/F_0)_S$, кратную дивизору $-\Gamma=-D\cdot S$, высеченному на многообразии S дивизором D. Функция f называется *вычетом Севери* (см. n° X,7) функции F в дивизоре S.

Пусть в окрестности точки $p \in S$ дивизоры S и Γ локально совпадают с дивизорами функций R_p и h_p соответственно. Пусть, далее, L — общее одномерное сечение многообразия V, и пусть A_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, g_1$ — базис простых дифференциалов первого рода на многообразии V. Наконец, пусть $A_{\nu L}$ — дифференциал, индуцированный на L дифференциалом A_ν.

Основываясь на теории гармонических интегралов, можно доказать (см. Кодаира [5], стр. 110), что отображение $F \to f$ пространства $\mathfrak{A}(S)$ в пространство $f(\Gamma)$ мероморфных функций на многообразии S, кратных дивизору $-\Gamma$, *эпиморфно* и что *образ в пространстве* $f(\Gamma)$ *подпространства* $\mathfrak{M}(S) \subset \mathfrak{A}(S)$ *однозначных функций состоит из функций* $f \in f(\Gamma)$, *для которых система уравнений*

$$\sum_{p \in S \cap L} a_{\nu p} \xi_p = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, g_1, \tag{1}$$

где

$$a_{\nu, p} = \mathrm{Res}_p (A_{\nu L}/R_p), \tag{2}$$

обладает решением вида $\xi_p = (fh_p)_p$.

b) Пусть теперь D — произвольный дивизор многообразия V, не содержащий дивизора S, и пусть $\mathfrak{F}(D)$ — пространство мероморфных функций на многообразии V, кратных дивизору $-D$, а $f(\Gamma)$ — пространство мероморфных функций на многообразии S, кратных дивизору $-\Gamma = -D \cdot S$.

Основываясь на результате, сформулированном в разделе a), можно доказать, что *если* $S \equiv D$ *или если система* $|S - D|$ *содержит некоторый связный член* T, *не имеющий многообразия* S *своей компонентой, то для того чтобы в пространстве* $\mathfrak{F}(D)$ *существовала функция* F, *индуцирующая на многообразии* S *заданную функцию* $f = F_S \in f(\Gamma)$, *достаточно, чтобы система* (1) *имела решение вида* $\xi_p = (fh_p)_p$, *где* $h_p = (R_p F_0)_S$, причем функция F_0 определяется в первом случае из равенства $(F_0) = D - S$, а во втором — из равенства $(F_0) = D + T - S$.

В самом деле, если $D \equiv S$, то соответствие $F \to F/F_0$ определяет взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{F}(S)$ на пространство $\mathfrak{F}(D)$, причем равенство $f = (F/F_0)_S$ равносильно равенству $f = F_S$. Другими словами, в этом случае мы, по существу, находимся в условиях предыдущего раздела.

Во втором случае можно считать, что $T \not\equiv 0$. Пусть $D_1 = D + T$ и $\Gamma_1 = D_1 \cdot S$. Тогда $D_1 \equiv S$ на многообразии V и $\mathfrak{F}(D) \subset \mathfrak{F}(D_1)$, $f(\Gamma) \subset f(\Gamma_1)$. Пусть $f_0(\Gamma_1)$ — подпространство пространства $f(\Gamma_1)$, состоящее из функций, для которых уравнение (1) имеет решение требуемого вида. Мы должны доказать, что если $f \in f_0(\Gamma_1) \cap f(\Gamma)$, то существует такая функция $F \in \mathfrak{F}(D)$, что $F_S = f \cdot H_0$, но это легко следует из предположения о том, что T связно.

c) Поскольку ядром отображения $F \longrightarrow F_S$ является пространство $\mathfrak{F}(D - S)$, размерность линейной системы $|D| \cdot S$, состоящей из S-дивизоров вида $(M_S) + D \cdot S$, где $M \in \mathfrak{F}(D) - \mathfrak{F}(D - S)$, т. е. высеченной на многообразии S системой $|D|$, выражается формулой

$$\dim |D| \cdot S = \dim |D| - \dim |D - S| - 1. \tag{3}$$

Определим теперь *дефект* $\operatorname{def}(D/S)$ *дивизора* D *на дивизоре* S, полагая

$$\operatorname{def}(D/S) = \dim |D \cdot S|_S - \dim (|D| \cdot S). \tag{4}$$

Если $D \equiv D'$, то $\operatorname{def}(D/S) = \operatorname{def}(D'/S)$, так что число $\operatorname{def}(D/S)$ можно рассматривать также как *дефект линейной системы* $|D|$ на дивизоре S.

Наложенное на дивизор D ограничение, согласно которому дивизор D не должен содержать дивизора S, можно снять, заменяя в случае необходимости дивизор D линейно эквивалентным дивизором D'. Тем самым, в частности, определено (если, конечно, система $|S| \cdot S$ непуста) число $\operatorname{def}(S/S)$, которое называется *характеристическим дефектом* дивизора S. Число $\operatorname{def}(D/S)$ можно, очевидно, определить также формулой

$$\operatorname{def}(D/S) = \dim f(D \cdot S) - \dim \mathfrak{F}(D)_S, \tag{5}$$

где $\mathfrak{F}(D)_S$ — образ пространства $\mathfrak{F}(D)$ при отображении $F \longrightarrow F_S$. Следовательно, если дивизоры D и S удовлетворяют дополнительным предположениям, сформулированным в разделе b), то дефект $\operatorname{def}(D/S)$ равен числу линейно независимых условий, накладываемых системой (1) на функции f. Но это число равно $g_1(V) - j_S(D)$, где $j_S(D)$ —

размерность пространства дифференциалов A первого рода, удовлетворяющих для любой функции $f \in f(D \cdot S)$ уравнению

$$\sum_{p \in L \cap S} (fh_p)_p \operatorname{Res}_p (A_L/R_p) = 0. \tag{6}$$

Таким образом,

$$\operatorname{def}(D/S) = g_1(V) - j_S(V). \tag{7}$$

В частности, эта формула справедлива для $D = S$ откуда вытекает, что

$$\operatorname{def}(S/S) \leqslant g_1(V). \tag{8}$$

d) Если система $|S - D|$ обильна, то ее можно рассматривать как систему гиперплоских сечений некоторой бирегулярной модели многообразия V; можно считать, что само V является такой моделью. Тогда равенство (7) справедливо, ибо общий элемент T системы $|D - S|$ является неособым многообразием. Кроме того, можно считать, что кривая L принадлежит T.

Так как $(h_p) = D \cdot S + T \cdot S$ в любой точке $p \in S$, то для любой функции $f \in f(D \cdot S)$ произведение fh_p на пересечении $T \cdot S$ равно нулю, так что $(fh_p)_p = 0$ для каждой точки $p \in S \cap L$, ибо $S \cap L \subset T \cdot S$. Отсюда вытекает, что $j_S(D) = g_1(V)$ и, значит, $\operatorname{def}(D/S) = 0$. Тем самым доказана следующая теорема:

(I) *Если для дивизора D и простого неособого дивизора S система $|S - D|$ обильна, то дефект дивизора D на дивизоре S равен нулю, т. е. линейная система $|D|$ высекает на многообразии S полную систему.*

e) Из этой теоремы непосредственно вытекает следующая лемма Энриквеса — Севери — Зариского (см. Энриквес [a], стр. 129; Севери [a], стр. 372; Зариский [a], стр. 67. Доказательство Зариского изложенное в его работе [21], стр. 570—578, проходит для любого многообразия V, которое определено и нормально над полем k произвольной характеристики):

(II) *Для любой полной линейной системы $|D|$ на многообразии V существует такое целое число $h(D)$, что при $h \geqslant h(D)$ система $|D|$ высекает на общем члене h-кратной системы гиперплоских сечений многообразия V некоторую полную систему.*

f) Легко видеть, что число r линейно независимых простых интегралов Пикара второго рода на многообразии V, кратных дивизору $-S$ по модулю интегралов первого рода, равно $\dim \mathfrak{A}(S) - \dim \mathfrak{F}(S)$. Из сказанного в разделе a) следует, что

$$\dim \mathfrak{A}(S) = \dim f(\Gamma) + g_1(V) + 1, \tag{9}$$

а из сказанного в разделе b), что

$$\operatorname{def}(S/S) = \dim f(\Gamma) - \dim \mathfrak{F}(S) + 1. \tag{10}$$

Отсюда вытекает интересная формула

$$r = g_1(V) + \operatorname{def}(S/S), \tag{11}$$

справедливая для любого неособого простого дивизора многообразия V.

2. Многообразия Альбанезе

В главе VII для любого неособого алгебраического многообразия V мы уже определили с абстрактной точки зрения многообразие Пикара $\mathfrak{P}$ и многообразие Альбанезе $\mathfrak{A}$. Независимо от этого в гл. X мы с помощью теории пучков определили многообразие Пикара для любого неособого многообразия V над полем комплексных чисел. Оставляя пока в стороне вопрос об равносильности над комплексным полем этих двух определений многообразия Пикара, мы, следуя Кодаира (см. Кодаира [5], стр. 115), изложим сейчас трансцендентное определение многообразия Альбанезе. Кроме того, мы изложим наиболее важные факты, связанные с этим вопросом, которые отчасти носят классический характер, а отчасти принадлежат Игуза, Вейлю и Чжоу (см. Игуза [3]; А. Вейль [4]; Чжоу [6]), а также Андреотти [1, 2]. Читателю, интересующемуся недавними обобщениями понятия абелева многообразия, следует ознакомиться также с важными работами Севери [29] и Рота [13]; см. также Рот [6] стр. 106.

a) Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2q}$, где $2q = b^1(V)$ — базис целочисленных одномерных гомологий многообразия V, а $A_1, A_2, \ldots, A_q$ — такой базис простых дифференциалов первого рода на этом многообразии, что $\int\limits_V A_\lambda \cdot {}^*\overline{A}_\nu = \delta_{\lambda\nu}$, где $\delta_{\lambda\nu}=0$, если $\lambda\neq 0$, и $\delta_{\lambda\nu}=1$, если $\lambda=\nu$. Пусть, далее, $\omega_j=\int\limits_{\gamma_j} A_\nu$.

Векторы $\omega_j=(\omega_{1j}, \omega_{2j}, \ldots, \omega_{\nu j}, \ldots, \omega_{qj})$, $j=1, 2, \ldots, 2q$, порождают некоторую дискретную подгруппу Δ комплексного q-мерного векторного пространства $\mathbf{C}^q$. Соответствующая факторгруппа $\mathfrak{A}=\mathbf{C}^q/\Delta$ является комплексным тором, с которым связана матрица Римана $\omega=(\omega_{\nu j})$.

Согласно n° X, 10, факторгруппа $\mathfrak{A}$ аналитически бирегулярно эквивалентна неособому проективному алгебраическому многообразию. Таким образом, $\mathfrak{A}$ представляет собой абелево многообразие, которое и называется *многообразием Альбанезе* многообразия V.

Выбрав в многообразии V некоторую точку P_0, рассмотрим отображение φ многообразия V в многообразие $\mathfrak{A}$, сопоставляющее произвольной точке $P\in V$ смежный класс, содержащий вектор $\bar{\varphi}(P)=(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_q(P))$, где $\varphi_\nu(P)=$ $=\int\limits_{P_0}^{P} A_\nu$, $\nu=1, \ldots, q$. Очевидно, что *это отображение не зависит от выбора точки P_0 и голоморфно.*

b) Многозначная мероморфная функция на многообразии V, не обращающаяся тождественно в нуль или бесконечность, называется *мультипликативной*, если ее абсолютное значение $|F(z)|$ является однозначной функцией на этом многообразии. При аналитическом продолжении вдоль любой замкнутой кривой γ, мультипликативная функция $F(z)$ умножается на некоторый постоянный множитель $\chi(\gamma)$, $|\chi(\gamma)|=1$, зависящий от класса гомологий цикла γ.

Пусть G — фундаментальная группа многообразия V, а G' — ее коммутант. Как хорошо известно, факторгруппа $H=G/G'$ изоморфна одномерной целочисленной группе гомологий многообразия V. Пусть, далее, $\hat{V}$ — накрытие многообразия V, соответствующее подгруппе $G'\subset G$. Любой элемент $\sigma\in H$ определяет некоторый автоморфизм накрывающего многообразия $\hat{V}$, переводящий каждую точку $\hat{M}\in\hat{V}$ в некоторую точку $\sigma\hat{M}$, лежащую над той же точкой $M\in V$, что и точка $\hat{M}$, причем точки вида $\sigma\hat{M}$, при фиксированной точке $\hat{M}$ исчерпывают все точки многообразия $\hat{V}$, лежащие над точкой M.

Любую многозначную мероморфную функцию на многообразии V можно рассматривать как *однозначную* функцию на многообразии $\hat{V}$. (Строго говоря, это утверждение представляет собой не что иное, как *определение* понятия многозначной мероморфной функции.) С этой точки зрения мультипликативные функции можно определить как многозначные функции F, которые на многообразии $\hat{V}$ удовлетворяют соотношению

$$|F(\sigma\hat{M})| = |F(\hat{M})|$$

для любой точки $\hat{M} \in \hat{V}$ и любого элемента $\sigma \in H$.

Пользуясь этим соображением, можно следующим образом определить *дивизор* (F) любой мультипликативной функции F на многообразии V (см. Кодаира и де Рам [a], стр. 110):

Пусть $\check{P}$ — произвольная точка многообразия V, и пусть (z) — локальные координаты многообразия V в окрестности точки P. Координаты (z) являются также локальными координатами многообразия $\hat{V}$ в некоторой окрестности произвольной точки $\hat{P} \in \hat{V}$, накрывающей точку P. Так как функция F на многообразии $\hat{V}$ однозначна, то в окрестности точки $\hat{P}$ ее можно представить в виде произведения $F(z) \cdot \prod\limits_j F_j(z)^{m_j}$ некоторой обратимой локально голоморфной функции $F(z)$ и степеней неприводимых локально голоморфных функций $F_j(z)$. Поскольку множители $F_j(z)$ и степени m_j, в силу мультипликативности функции F, не меняются при замене точки $\hat{P}$ точкой $\sigma\hat{P}$, дивизор многообразия V, имеющий в окрестности точки P вид $\sum\limits_j m_j W_j$, где W_j — неприводимое алгеброидное многообразие комплексной размерности $n-1$, заданное уравнением $F_j(z) = 0$, определяется исключительно функцией F. Этот дивизор и называется дивизором фуикции F.

c) Рассмотрим теперь группу $\mathfrak{G}_0$ гомологичных нулю дивизоров многообразия V. Оказывается, что дивизор D тогда и только тогда принадлежит группе G_0, когда он является дивизором некоторой мероморфной мультипликативной функции. С точностью до мультипликативной постоянной эта функция определяется дивизором D однозначно. При аналитическом продолжении вдоль замкнутой кривой γ функция, соответствующая дивизору D, умножается на число $\chi(\gamma, D) = \exp 2\pi i \int\limits_Q H\gamma$, где Q — целочисленная $(2n-1)$-мерная цепь, имеющая своей границей цикл D.

С помощью теоремы Стокса нетрудно показать, что это утверждение равносильно теореме Лефшеца, согласно которой на многообразии V тогда и только тогда существует дифференциал Пикара третьего рода с заданным «вычетом» D, когда $D \in \mathbf{G}_0$ (см. Лефшец [a], стр. 146; А. Вейль [1], а также Атийя — Ходж [1], стр. 66). В этой форме теорема была получена А. Вейлем как следствие одной более общей теоремы существования.

Полагая

$$\eta_j(D) \equiv \int\limits_Q H\gamma_j \pmod 1, \quad \partial Q = D, \tag{12}$$

мы отнесем каждому дивизору $D \in \mathbf{G}_0$ некоторую точку $2q$-мерного действительного тора $\mathfrak{P}$, являющегося фактор-группой $2q$-мерного действительного векторного пространства по подгруппе векторов с целыми координатами. Тем самым определяется некоторый гомоморфизм группы $\mathbf{G}_0$ в группу $\mathfrak{P}$, ядро которого, очевидно, совпадает с подгруппой $\mathbf{G}_l \subset \mathbf{G}_0$ линейно эквивалентных нулю V-дивизоров, ибо только для таких дивизоров $\eta_j(D) \equiv 0 \pmod 1$. Это означает, что факторгруппа G_0/G_l изоморфна тору $\mathfrak{P}$.

Можно показать, что тор $\mathfrak{P}$ определяется матрицей π, двойственной матрице ω, и потому (см. раздел d), n° IX, 8) является *абелевым многообразием*, двойственным многообразию $\mathfrak{A}$. Это многообразие совпадает с построенным в n° X, 6 многообразием $\mathfrak{P}$.

Далее можно показать, что для любого комплексного вектора t существует такая θ-функция $\theta(u)$, связанная с матрицей Римана ω, что функция $\theta(\overline{\varphi}(P) + t)$ не обращается в нуль тождественно при $P \in V$. Тогда дивизор

$$\Delta_t = (\theta(\overline{\varphi}(P) + t)) \tag{13}$$

является неособым алгебраическим подмножеством многообразия V, причем $\Delta_t - \Delta_0 \sim 0$ для любого вектора t. Отображение $[t] \to [\eta(\Delta_t - \Delta_0)]$ является *аналитическим гомоморфизмом* λ *многообразия* $\mathfrak{A}$ *на многообразие* $\mathfrak{P}$.

Заметим, что система дивизоров $\Delta_t - \Delta_0$, $t \in C^q$ является *семейством Пуанкаре на многообразии* V (в том смысле, что для любого смежного класса из факторгруппы $\mathbf{G}_0/\mathbf{G}_l$ в этой системе содержится один и только один его представитель).

3. Поверхностная иррегулярность

Как мы уже знаем (см. формулу (8) и раздел а) n° IX, 8), для любого простого неособого дивизора S многообразия V имеет место неравенство $\operatorname{def}(S/S) \leqslant q$, где $q = g_1$ — число линейно независимых простых дифференциалов первого рода на многообразии V. В этом пункте мы, следуя Кодаира (см. Кодаира [5], стр. 119), дополним этот результат, доказав теорему (хорошо известную для случая поверхностей), которая дает важное геометрическое описание числа q. Как было показано в предыдущем пункте, это число совпадает с размерностью многообразий $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{A}$, построенных на основе трансцендентных соображений; в следующем пункте мы покажем, что оно совпадает также с поверхностной иррегулярностью многообразия V в смысле n° VII, 8.

(I) *Для любого неособого алгебраического многообразия V поверхностная иррегулярность q равна наибольшему значению характеристических дефектов* $\operatorname{def}(S/S)$ *неособых простых V-дивизоров S.*

Изложим вкратце доказательство Кодаира.

а) Прежде всего Кодаира доказывает, что *арифметический род дивизора D зависит лишь от его класса гомологий.*

С помощью модулярного свойства арифметического рода общий случай легко сводится к случаю гомологичного нулю дивизора D. Оказывается, что в этом случае $p_a(D) = (-1)^n$. Доказательство проводится индукцией по размерности многообразия V с помощью следующих двух лемм: 1. Для любого дивизора D существует дивизор вида $\Delta_t - \Delta_0$, линейно эквивалентный дивизору D (см. конец предыдущего пункта); 2. Для всех $t \in C^q$ числа $p_a(\Delta_t - \Delta_0)$ равномерно ограничены сверху.

Заметим, что в этой части доказательство Кодаира по существу совпадает с доказательством Мацусака (n° VII, 5) инвариантности арифметического рода относительно отношения алгебраической эквивалентности (ср. n° XI, 4).

b) Для доказательства предложения (I) достаточно показать, что для некоторого дивизора s существует $2q$ линейно независимых мероморфных аддитивных функций, кратных дивизору $-S$. В самом деле, поскольку вообще $\operatorname{def}(S/S) \leqslant q$, в этом случае обязательно $\operatorname{def}(S/S) = q$. Кодаира строит такие функции следующим образом.

Пусть a и t — некоторые достаточно близкие векторы пространства C^n, и пусть дивизор S обладает тем свойством, что системы $|S - K + \Delta_a - \Delta_t|$ и $|S + \Delta_a - \Delta_t|$ обильны. Тогда система $|S + \Delta_a|$ также обильна, так что ее можно отождествить с системой $|E_\sigma|$, высеченной на некоторой бирегулярной модели многообразия V (мы будем обозначать ее той же буквой V) гиперплоскостями объемлющего пространства $\mathbf{P}^d$.

Пусть $\sigma \cdot \zeta = \sum_{i=0}^{d} \sigma^i \zeta_i = 0$ — уравнение общей гиперплоскости σ пространства $\mathbf{P}^d$, и пусть $\overline{\mathbf{P}}^d = \{\sigma^0, \sigma^1, \ldots; \sigma^d\}$ — проективное пространство, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с гиперплоскостями пространства $\mathbf{P}^d$. Легко видеть, что система $|E - \Delta_t|$ состоит из всех положительных дивизоров вида $E_\sigma - \Delta_t$ и нулевого дивизора. Пусть $\overline{\mathbf{P}}_t^r \subset \overline{\mathbf{P}}^d$ — подпространство, соответствующее гиперплоскостям σ, содержащим дивизор Δ_t. Тогда

$$r = \dim |E - \Delta_t| = p_a(V) + p_a(E - K - \Delta_t) - 1. \tag{14}$$

Так как $\Delta_t \sim \Delta_a$, то, согласно доказанному в разделе a),

$$r = p_a(V) + p_a(E - K - \Delta_a) - 1. \tag{15}$$

Можно показать, что (в понятном смысле) пространство $\overline{\mathbf{P}}_t^r$ зависит от t голоморфно. Следовательно, система $|S + \Delta_a - \Delta_t|$ также голоморфно зависит от вектора t, откуда вытекает, что для векторов t, достаточно, близких к вектору a, размерность этой системы не зависит от t.

c) Пусть $\overline{\mathbf{P}}^{d-r}$ — общее подпространство пространства $\overline{\mathbf{P}}^{d}$, содержащее такую точку α, что $S = E_\alpha - \Delta_a$. Обозначая через $\sigma(t)$ точку пересечения пространств $\overline{\mathbf{P}}_t^r$ и $\overline{\mathbf{P}}^{d-r}$, нормализуем координаты α^i и $\sigma^i(t)$ условием $\alpha^0 = \sigma^0(t) = 1$. Ясно, что так нормализованные функции $\sigma^j(t)$ голоморфно зависят от t, достаточно близкого к a, причем $\sigma^j(a) = \alpha^j$.

Пусть $U(a)$ — достаточно малая окрестность вектора a и $U(p)$ — достаточно малая окрестность на многообразии V некоторой точки p, гиперплоского сечения E_α. Очевидно, что для любой системы голоморфных функций $\zeta = \{\zeta_j(z)\}$ точки $z \in U(p)$ выражение $\sigma(t)\cdot\zeta(z) = \sum_{i=0}^{d} \sigma^i(t)\,\zeta_i(z)$ при $t \in U(a)$ и $z \in U(p)$ является голоморфной функцией точки (t, z). Пусть теперь $\zeta_0(z), \ldots, \zeta_d(z)$ — координаты точки z. Тогда для любого фиксированного вектора t имеет место равенство $(\sigma(t)\cdot\zeta(z)) = E_{\sigma(t)}$, причем дивизор $S_t = E_{\sigma(t)} - \Delta_t$ положителен и $S_a = S$. Поэтому полагая

$$\theta(P(z)+t)\cdot R_p(z, t) = \sigma(t)\cdot\zeta(z), \tag{16}$$

мы получим, что при $t \in U(a)$ и $z \in U(p)$ функция $R_p(z, t)$ голоморфна, причем для любого фиксированного $t \in U_a$ в окрестности точки p имеет место равенство

$$(R_p(z, t)) = S_t. \tag{17}$$

С другой стороны, функция

$$F_\nu(z) = \partial_\nu \log\theta(P(z)+a), \quad \partial_\nu = \partial/\partial t_\nu, \tag{18}$$

как легко видеть, является аддитивной мероморфной функцией, кратной дивизору $-\Delta_a$, а функция

$$G_\nu(z) = \partial_\nu \log \sum \alpha^j \zeta_j(z) \tag{19}$$

мероморфна и однозначна на многообразии V, причем

$$(G_\nu) \geqslant -E_\alpha = -S_a - \Delta_a. \tag{20}$$

Следовательно, разность $F_\nu - G_\nu$ является мероморфной аддитивной функцией на многообразии V и $(F_\nu - G_\nu) \geqslant$ $\geqslant -S_a - \Delta_a$. Дифференцируя по t формулу (16), мы получим, что для любой точки $p \in E_a = S_a + \Delta_a$ имеет место соотношение

$$F_v(z) - G_v(z) = -\partial_v \log R_p(z, a). \qquad (21)$$

Поскольку в окрестности $U_{(p)}$ имеет место равенство $(R_p(z, a)) = S_a$, разность $F_v - G_v$ кратна дивизору $-S_a = -S$.

Наконец, вычисляя периоды, легко можно доказать, что q функций $F_v - G_v$ и q простых независимых дифференциалов первого рода на многообразии V линейно независимы. Таким образом, для завершения доказательства теоремы (I) остается лишь доказать существование дивизора S, обладающего сформулированными выше свойствами. Легко видеть, что за такой дивизор можно принять любой простой неособый дивизор системы $|hE|$, т. е. некоторой кратной системы гиперплоских сечений. Тем самым теорема (I) полностью доказана.

Отметим, что из теоремы (I) и формулы (11) немедленно вытекает, что

(II) *На неособом многообразии V существует ровно $2q$ линейно независимых простых интегралов Пикара второго рода, где q — поверхностная иррегулярность многообразия V.*

Сравним теперь изложенную теорию Кодаира с классической теорией поверхностной иррегулярности.

Пусть F — произвольная поверхность, определенная над полем комплексных чисел, p_g и p_a — ее геометрический и арифметический род, а g_1 и g_1^* — числа линейно независимых интегралов первого и второго рода соответственно. В этом классическом случае *иррегулярность* q поверхности F определяется как разность $p_g - p_a$.

Известны следующие классические результаты (литературные ссылки можно найти в книге Зариского [a], и мы их опускаем):

a) $b^1(F) = g_1^*$. Это равенство было доказано Пикаром на основе трансцендентных методов. Недавно Атийя и Ходж ([1], стр. 64) с помощью теории пучков доказали аналогичный результат для многообразий произвольной размерности.

b) Для любой неособой кривой C на поверхности F имеет место неравенство $\operatorname{def} C/C \leqslant q$. Чисто алгебраическое доказательство этого неравенства принадлежит Кастельнуово; дальнейшие усовершенствования можно найти в работах Севери.

c) $q = g_1$ и $2q = g_1^*$. Доказательство этих равенств было получено в несколько этапов:

c$_1$) $g_1^* - g_1 \leqslant q$. Севери доказал это неравенство с помощью неравенства b) и соображений, связанных с рассмотрением вычетов Севери простых интегралов второго рода.

c_2) $g_1 \leqslant q$ и $g_1^* \leqslant 2q$. Севери доказал эти неравенства с помощью равенства a), основываясь на установленных Пикаром свойствах приводимых абелевых интегралов; доказательство Севери конструктивно.

c_3) $q_1 \geqslant q$. Это неравенство было доказано Кастельнуово и Севери прямым построением q интегралов первого рода (Кастельнуово пользуется с этой целью многообразием Пикара, а Севери — более простым трансцендентным критерием линейной эквивалентности).

Прямое трансцендентное доказательство равенств $g_1 = q$ и $g_1^* = 2q$ дал также Лефшец, который пользовался теоремой Пуанкаре о приводимых интегралах и одним классическим свойством так называемых нормальных функций Пуанкаре (см. Зариский [a], гл. VII).

Заметим еще, что для любого неособого многообразия V произвольной размерности, определенного над полем комплексных чисел, имеет место следующее утверждение, впервые доказанное Кастельнуово и Энриквесом (см. Кастельнуово — Энриквес [1]):

d) Число линейно независимых дифференциалов первого рода на многообразии V совпадает с числом таких дифференциалов на любом неособом двумерном плоском сечении F многообразия V.

Свойства a), b) и c) числа q можно сформулировать в виде следующей теоремы:

e) С любой неособой поверхностью F связано число q, которое можно охарактеризовать любым из равенств:

e_1) $q = p_g - p_a$.

e_2) $q = g_1$.

e_3) $q = \frac{1}{2} b^1(F)$.

e_4) $q = \frac{1}{2} g_1^*$.

e_5) q равно наибольшему значению характеристического дефекта неособой кривой на поверхности F.

Кодаира определяет иррегулярность любого неособого многообразия V над полем комплексных чисел равенством e_2) и непосредственно доказывает равенства e_4) и e_5). Как мы видели в тексте, он пользуется теоремой (I) n° XI, 1, решающей вопрос о существовании простых интегралов второго рода, гомологической инвариантностью арифметического рода, формулой Севери — Зариского, выражающей размерность обильной линейной системы через арифметические роды, и, наконец, результатами предыдущего пункта.

Доказательство Кодаира значительно совершеннее классических: даже для случая поверхностей оно проще и короче, хотя в этом случае оно явно несколько напоминает трансцендентные доказательства Севери и Лефшеца.

Заметим, что в изложении Кодаира равенство e_1) вытекает из теоремы b) с помощью утверждения e_5).

Теорему d) лучше всего доказывать, основываясь на равенстве e_3) (изящное доказательство Ходжа этого равенства для многомерного случая см. в разделе a) n° IX, 8) и равенстве $g_1(V) = g_1(F)$, которое непосредственно вытекает из теоремы Лефшеца ([a], стр. 88—91), утверждающей, что одномерный цикл поверхности F гомологичен нулю на этой поверхности, если он гомологичен нулю на многообразии V. Следуя Кодаира [5], стр. 93, можно также непосредственно доказать равенство $g_1(V)=g_1(F)$ с помощью теории Ходжа—Экмана (n° IX, 6), что, впрочем, равносильно использованию другой классической теоремы Лефшеца, согласно которой любой одномерный цикл с рациональными коэффициентами многообразия V рационально гомологичен некоторому одномерному циклу поверхности F (см. [a], стр. 88—91).

Как мы видим, положение дел в трансцендентно-топологической теории можно оценить как удовлетворительное. Несколько хуже обстоят дела в абстрактном случае, несмотря на важные результаты гл. VII. Очевидно, об интегралах уже не может быть речи, однако ввиду существования абстрактных многообразий Пикара и Альбанезе мы можем заменить число $g_1(V)$ размерностью q^* любого из этих многообразий. Результат, соответствующий теореме d), в абстрактном случае также остается справедливым (см. n° VIII, 6). То же относится и к утверждению об ограниченности характеристических дефектов кривых на поверхности, представляющему собой чисто алгебраическую часть утверждения b).

Однако вопрос о справедливости равенства $q^*=p_g-p_a$ остается открытым. Для его решения необходимо доказать, что число q^* удовлетворяет утверждению e_5). Этот вопрос важен; быть может, его удастся решить с помощью абстрактной теории абелевых многообразий по А. Вейлю.

К рассматриваемым вопросам имеют отношение некоторые работы Мьюли [3, 4, 5], а также одна работа Б. Сегре ([5], стр. 76), в которой получено интересное чисто алгебраическое описание иррегулярности q для трехмерных многообразий.

Севери удалось недавно существенно обобщить теорию поверхностной иррегулярности (см. Севери [42, 43]). Любому неособому многообразию V^r Севери относит число $q_r=p_g(V)-p_a(V)$, которое он называет старшей или *r-мерной иррегулярностью*; оно может быть любого знака (см. также Севери [13]. Неособое подмногообразие $V^h\subset V^r, 2\leqslant h\leqslant r-1$, Севери называет *обыкновенным*, если число линейно независимых форм любой степени s, $1\leqslant s\leqslant h-1$, на этом подмногообразии равно числу соответствующих форм на всем многообразии. Можно показать, что старшая иррегулярность q^h обыкновенного подмногообразия V^h не зависит от выбора V^h и является абсолютным инвариантом многообразия V^r. Это число Севери называет *h-мерной иррегулярностью многообразия* V^r. Одномерная иррегулярность q_1 всегда считается равной нулю. Многообразие V^r называется *h-иррегулярным*, если $q_h\neq 0$, и *вполне регулярным*, если $q_h=0$ для всех $h=1, 2, \ldots, r$.

Севери доказал, что число линейно независимых дифференциальных форм степени s, $1\leqslant s\leqslant r-1$, на многообразии V^r равно q_s+q_{s+1}. При $s=r$ это число, конечно, совпадает с геометрическим родом $p_g(V^r)$ (см. n° IX, 7). Кроме того, он доказал, что

Многообразие V^r, поверхностная иррегулярность которого отлична от нуля, тогда и только тогда содержит некоторую инволюторную систему ω^{r-h}, где $1\leqslant h\leqslant r-1$, *поверхностная* *иррегулярность которой не меньше $h+1$ (при $h=1$ имеется в виду пучок дивизоров с отличным от нуля родом), когда на многообразии V^r существует такая система $h+1$ линейно независимых форм первого рода, что произведение этих форм равно нулю, а никакое произведение h из этих форм не обращается в нуль* (см. Севери [42], где можно найти целый ряд следствий этой теоремы).

4. Характеристические системы полных непрерывных систем

Результаты этого пункта, принадлежащие Кодаира (см. Кодаира [5], стр. 123), относятся к важнейшим теоремам алгебраической геометрии над комплексным полем и представляют собой обобщение на многомерные многообразия наиболее глубоких фактов, полученных в теории поверхностей объединенными усилиями французской и итальянской школ.

a) Пусть $|D_0|$ — такая полная линейная система многообразия V, что системы $|D_0-K+\Delta_0-\Delta_t|$ и $|D_0+\Delta_0-\Delta_t|$ обильны при всех t. Тогда система $|E|=|D_0+\Delta_0|$ тоже обильна, а ее размерность $r=\dim|E-\Delta_t|$ не зависит от t (см. раздел b), n° XI, 3). Пусть $\mathfrak{C}$ — система всех положительных дивизоров многообразия V, гомологичных дивизору D_0. Ясно, что эта система содержит все линейные системы вида $|E-\Delta_t|$. Вспоминая определение эпиморфизма $\lambda:\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}$ (см. раздел d), n° XI, 2), мы видим, что отображение $\mu:\mathfrak{C}\to\mathfrak{P}$, определенное формулой $\mu(D)=[\eta(D-D_0)]$, эпиморфно.

Пусть α — произвольная точка многообразия $\mathfrak{P}$, а $\mathfrak{a}$ — такая точка многообразия $\mathfrak{A}$, что $\alpha=\lambda(\mathfrak{a})$. Пусть, далее, $U(\mathfrak{a})$ — окрестность точки $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}$, которую гомоморфизм λ бирегулярно отображает на некоторую окрестность $U(\alpha)$ точки $\alpha\in\mathfrak{P}$. Можно считать, что для некоторой тэта-функции $\theta^{(\alpha)}(u)$ дивизор Δ'_a, где $\mathfrak{a}=[a]$, является простым и неособым дивизором. Тогда дивизор $\Delta_\tau^{(\alpha)}=\Delta_t^{(\alpha)}$, где $\tau=\lambda(t)$ и $t\in U(\mathfrak{a})$, является простым и неособым дивизором, голоморфно зависящим от параметра t и, значит, также от параметра $\tau\in U(\alpha)$.

Рассмотрим подсистему $\mathfrak{C}_\alpha$ системы $\mathfrak{C}$, состоящую из дивизоров вида $D=\mu^{-1}(\tau)$, где $\tau\in U(\alpha)$. Для любого такого дивизора $\mu(D)=[\eta(\Delta_0-\Delta_\tau^{(\alpha)})]$ и, значит, $D\in|E-\Delta_\tau^{(\alpha)}|$. Таким образом,

(I) *На многообразии V существует система дивизо-*

ров, локально состоящая из ∞^q-линейных систем, где q — поверхностная иррегулярность многообразия V.

b) Рассуждая так же, как в разделе с) n° XI, 3, и используя аналогичные обозначения, мы получим, что любой дивизор системы $\mathfrak{C}_\alpha$ имеет вид $E_\sigma - \Delta_\tau^{(\alpha)}$, где $\sigma \in \overline{\mathbf{P}}^r_{\alpha, t}$ и $\tau \in U(\alpha)$. Рассмотрим точки

$$\sigma_{\alpha k}(\tau) = \overline{\mathbf{P}}^r_{\alpha, t} \cdot \overline{\mathbf{P}}^{d-r}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, r+1, \tag{22}$$

координаты которых мы нормализуем условием

$$\sum_{k=0}^{r+1} \sigma^j_{\alpha k}(\tau) = 0. \tag{23}$$

Принимая эти точки за репер системы координат, мы введем в множество $\overline{\mathbf{P}}^r_{\alpha, t}$ однородные проективные координаты $(\xi^0_\alpha, \xi^1_\alpha, \ldots, \xi^r_\alpha)$.

Пусть $\mathbf{P}^r$ — проективное пространство с координатами $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^r)$. Из только сказанного непосредственно вытекает существование взаимно однозначного соответствия между точками произведения $\mathbf{P}^r \times U(\alpha)$ и элементами системы $\mathfrak{C}_\alpha$. Кроме того, легко видеть, что если $U(\alpha) \cap U(\beta) \neq 0$, где $\alpha, \beta \in \mathfrak{P}$, то два представителя $\xi_\alpha \times \tau \in \mathbf{P}^r \times U(\alpha)$ и $\xi_\beta \times \tau \in \in \mathbf{P}^r \times U(\beta)$ произвольного дивизора $D \in \mathfrak{C}_\alpha \cap \mathfrak{C}_\beta$ связаны друг с другом некоторой коллинеацией пространства $\mathbf{P}^r$, голоморфно зависящей от параметра τ.

Это означает, что система $\{\mathbf{P}^r \times U(\alpha)\}$, $\alpha \in \mathfrak{P}$ определяет некоторое аналитическое расслоение Λ над многообразием $\mathfrak{P}$, слоем которого является проективное пространство $\mathbf{P}^r$, а структурной группой — соответствующая проективная группа. Следовательно, согласно продолжению VI n° X, 10, расслоение Λ можно рассматривать как проективное неособое алгебраическое многообразие.

Отсюда легко вытекает, что *система $\mathfrak{C}$ алгебраична*. В самом деле, пусть p — произвольная точка многообразия V, и пусть λ_0 — точка расслоения Λ, имеющая вид $0_\alpha \times \alpha$, где $0_\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Для любой точки $\lambda = \xi_\alpha \times \tau$ некоторой окрестности $U(\lambda_0) \ni \lambda_0$ положим

$$R_p(z, \lambda) = \sum_{K=0}^{r} \xi^k_\alpha R^{(\alpha)}_{p, k}(z, t), \tag{24}$$

где голоморфные функции $R_{p,k}^{(\alpha)}(z, t)$ определены, как в разделе с), n° XI, 3, и где мы считаем, что $\xi_\alpha^0 = 1$.

Функция $R_p(z, \lambda)$ голоморфна в некоторой области $U(p) \times U(\lambda_0) \subset V \times \Lambda$, причем для любого фиксированного λ имеет место равенство $(R_p(z, \lambda)) = D_\lambda$, где D_λ — дивизор системы $\mathfrak{C}$, соответствующий точке λ.

Пусть $\mathfrak{R}$ — дивизор многообразия $V \times \Lambda$, локально определяемый функциями $R_p(z, \lambda)$. Тогда в окрестности любой точки $p \in V$ имеет место равенство

$$D_\lambda \times \lambda = \mathfrak{R} \cdot (V \times \lambda). \qquad (25)$$

Это означает, что система $\mathfrak{C}$ параметризуется дивизором $\mathfrak{R} \subset V \times \Lambda$. Но в силу теоремы Чжоу (n° IX, 1) этот дивизор алгебраичен. Поэтому система $\mathfrak{C}$ также алгебраична. Ясно, что система $\mathfrak{C}$ полна и как система дивизоров, и как система полных линейных систем.

Из доказанного немедленно следует, что для дивизоров многообразия V *отношение алгебраической эквивалентности совпадает с отношением целочисленной гомологичности*. Для случая поверхностей это хорошо известный результат Лефшеца.

Таким образом, *группы* $\mathbf{G}_0$ *и* $\mathbf{G}_a$ (см. n° VI, 7, и раздел с), n° X, 6) *совпадают*, и все результаты, справедливые для одной из них, справедливы также для другой. В частности, изложенное в гл. VIII *алгебраическое определение многообразия Пикара приводит к тому же результату, что и трансцендентные определения*, изложенные в настоящей главе и в гл. X. То же относится к двойственному понятию многообразия Альбанезе.

с) Введем теперь понятие характеристической линейной системы алгебраической системы $\mathfrak{C}$ на любом ее простом неособом члене. Пусть $S = D_{\lambda_0}$ — простой неособый член системы $\mathfrak{C}$, и пусть $\partial_j R_p(z, \lambda_0)_S$ — голоморфная функция, индуцированная на S частной производной

$$\partial_j R_p(z, \lambda_0) = [\partial R_p(z, \lambda)/\partial \lambda^j]_{\lambda=\lambda_0}, \qquad (26)$$

где $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{r+q})$ — локальные координаты в некоторой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 расслоения Λ.

Нетрудно видеть, что для любого набора величин μ^j формула

$$\overline{D}_\mu = \left(\sum_j \mu^j \partial_j R_p(z, \lambda_0)\, s\right)$$

однозначно определяет некоторый дивизор многообразия S, если только функция в правой части этого равенства не обращается тождественно в нуль на S.

Полученная линейная система $\{\overline{D}_\mu\}$ и называется *характеристической линейной системой системы* $\mathfrak{C}$ на многообразии S; она однозначно определяется системой $\mathfrak{C}$ и многообразием S.

d) Докажем теперь, следуя Кодаира, что система $\{\overline{D}_\mu\}$ полна.

Пусть, как и выше, $\lambda_0 = 0_\alpha \times \alpha$, где $0_\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. В качестве локальных координат точки (λ), $\lambda = \xi_\alpha \times \tau$, где $\xi_\alpha = (1, \xi^1, \ldots, \xi^r)$ и $\tau = \varphi(t)$, возьмем величины $\lambda^1 = \xi^1, \ldots, \lambda^r = \xi^r$, $\lambda^{r+1} = t^1, \ldots, \lambda^{r+q} = t^q$. Из определения функции $R_p(z, \lambda)$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{r+q} \mu^j \partial_j R_p(z, \lambda_0) = \sum_{j=1}^{r} \mu^j R_{pj}^{(\alpha)}(z, \alpha) + \sum_{\nu=1}^{q} \mu^{r+\nu} \partial_\nu R_{p0}^{(\alpha)}(z, \alpha), \tag{27}$$

где

$$\partial_\nu = [\partial/\partial t_\nu R_{p0}^{(\alpha)}(z, \tau)]_{\tau=\alpha}. \tag{28}$$

Поскольку $S = (R_{p0}^{(\alpha)}(z, \alpha))$, легко видеть, что функция

$$M(z) = \left[\sum_{k=1}^{r} \mu^K R_{pk}^{(\alpha)}(z, \alpha) \mid R_{p,0}(z, \alpha)\right] \tag{29}$$

мероморфна и однозначна на многообразии V, причем $(M) \geqslant -S$, а функции $M_\nu = -\partial_\nu \log R_{p0}^{(\alpha)}$ мероморфны и аддитивны на многообразии V, причем $(M_\nu) \geqslant -S$ (см. раздел c) n° XI, 3).

Если бы функция $\sum \mu^j \partial_j R_p(z, \lambda_0)\, s$ обращалась тождественно в нуль на S, то из равенства (27) следовало бы, что функция $M - \sum_{\nu=1}^{q} \mu^{r+\nu} M_\nu$ голоморфна всюду на V и, значит, является интегралом Пикара первого рода на этом многообразии. Это возможно лишь в том случае, если она постоянна, и, значит, $\mu^{r+1} = \ldots = \mu^{r+q} = 0$; ибо, в силу сказанного в разделе с) n° XI, 3, функции $M_1, M_2, \ldots, M_q$, $P_1, P_2, \ldots, P_q$ линейно независимы. Таким образом, $M = c_0$, и потому из определения функции M вытекает, что все коэффициенты μ, а вместе с ними и величина c_0, равны нулю. Следовательно, $\dim\{\overline{D}_\mu\} = r + q - 1$.

С другой стороны, ясно, что $\{\overline{D}_\mu\} \supset |S| \cdot S$. Поэтому, если $T \in |S| \cdot S$, то $\{D_\mu\} \subset |T|_S$. Но так как $\dim |T|_S = \dim |S| - 1 + \operatorname{def}(S/S)$, причем $\dim |S| = r$ и $\operatorname{def}(S/S) \leqslant q$, то $\dim |T|_S \leqslant \dim\{\overline{D}_\mu\}$. Поэтому $\{\overline{D}_\mu\} = |T|_S$ и, следовательно, характернстическая система системы $\mathfrak{C}$ полна.

Сформулируем еще раз этот важнейший результат Кодаира:

(II) *Пусть $|D_0|$ — такая полная система на многообразии V, что системы $|D_0 - K + \Delta_0 - \Delta_t|$ и $|D_0 + \Delta_0 - \Delta_t|$ обильны для всех t, и пусть $\mathfrak{C}$ — «алгебраическая система, состоящая из всех положительных дивизоров D, гомологичных дивизору D_0. Тогда характеристическая линейная система системы $\mathfrak{C}$ на любом ее простом неособом дивизоре S полна.*

Заметим, что для любого V-дивизора D_1 линейная система $|D_0| = |D_1 + hE|$ при больших значениях h удовлетворяет предположениям этой теоремы.

Напомним теперь для полноты изложения классическую постановку вопроса о полноте характеристической системы полной непрерывной системы.

Как мы знаем, на любом простом неособом дивизоре S неособого многообразия V над полем комплексных чисел, независимо от существования линейной или алгебраической системы дивизоров, содержащей дивизор S, определена полная лииейная система $|S|^{[2]}$ (см. n° VI, 9). Спрашивается, можио ли иа миогообразии V построить максимальное семейство $[S]$, которое содержало бы дивизор S и характеристическая система Γ_S которого на дивизоре S (определенная, как выше) совпадала бы с системой $|S|^{[2]}$. Когда Севери вводил понятие характеристического ряда поверхности, он как раз имел в виду решить этот вопрос.

Было известно, что если поверхность F регулярна (т. е. если $p_g = p_a$), то семейство $\{S\}$ представляет собой полиую линейную систему, характеристический ряд которой полон (Энриквес, Кастельнуово; см. Зариский [a], гл. IV). Последующие доказательства утверждения о полиоте системы Γ_S при условии полноты системы $\{S\}$, принадлежащие Энриквесу и Севери, оказались неверны, иа что указал сам Севери [17] (см. также Зариский [a], гл. V). Кроме того, как было показано на примерах, и самый результат в такой формулировке может быть неверен (см. Цаппа [1,2,3]).

После этого математики заняли несколько более осторожную позицию, желая по крайней мере спасти уже полученные следствия (например, теорию иррегулярности; см. n° XI, 3). На этом пути большую пользу оказала теорема, доказанная Пуанкаре [4] с помощью введенного им понятия нормальных функций и затем усовершенствованная Лефшецем [a] и Севери [17]. Согласно этой теореме, на поверхности F иррегулярности q существует q-мерное алгебраическое семейство, кривые которого линейно неэквивалентны друг другу (см. n° XI, 2; такие семейства получили название *семейств Пуанкаре*).

Пользуясь теоремой Пуанкаре и теоремой Римана — Роха, Севери доказал существование полных непрерывных семейств с полным характеристическим рядом. Этим свойством обладает, в частности, любое неспециальное полное семейство в смысле n° VII, 4, составленное из арифметически эффективных кривых в смысле Севери (см. n° VII, 4, и Зариский [a], стр. 86].

Изложенное в тексте доказательство Коданра (для случая поверхности см. также Андреотти [1], стр. 17) представляет собой усовершенствование доказательства Пуанкаре. Оно годится для любой размерности и попутно с решением нашего вопроса доказывает совпадение алгебраической эквивалентности с целочисленной гомологичностью, что для случая поверхностей было доказано еще Лефшецем (см. Лефшец [a], стр. 80—82; Зариский [a], стр. 143). Отыскание чисто алгебраического доказательства этих результатов остается важной задачей абстрактной алгебраической геометрии.

5. Отдельные результаты

a) Поскольку группа дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю, совпадает с группой дивизоров, целочисленно гомологичных нулю, группа дивизоров, рационально гомологичных нулю, совпадает с подгруппой $\mathbf{G}_s \subset \mathbf{G}$ дивизоров D, имеющих конечный порядок относительно алгебраической эквивалентности, то есть удовлетворяющих соотношению $\lambda D \equiv 0$, где λ — некоторое целое число.

Поэтому группа $\mathbf{G}_s/\mathbf{G}_a$, которая называется *группой кручения* или *группой Севери* многообразия V (ее ввел Севери [12,14]; см. также Зариский [a], стр. 95), совпадает с группой $\mathbf{G}_r/\mathbf{G}_0$, рассмотренной в разделе с) n° X, 6, т. е. в силу предложения IV, n° X, 6, — с топологической группой кручения $T_{2n-2}(V)$.

Интересные примеры многообразий с кручением построил Рот (см. Рот [10]); для случая поверхностей сформулированная теорема была доказана Лефшецом ([a], стр. 80—82; см. также Зариский [a], стр. 143).

b) Дивизор многообразия V называется *арифметически эквивалентным нулю*, если его индекс пересечения с любым алгебраическим одномерным циклом равен нулю (см. Севери [22], стр. 247).

Можно доказать, что *группа* $\mathbf{G}_r(V)$ *совпадает с совокупностью дивизоров, арифметически эквивалентных нулю*, так что факторгруппа $\mathbf{G}/\mathbf{G}_r$ представляет собой группу арифметической эквивалентности на многообразии V.

Для доказательства следует перейти от дивизора D к рационально гомологичному ему дивизору вида $\sum_{i=1}^{\varrho} a_i D_i$, где $\{D_i\}$ — некоторый базис группы $\mathbf{G}(V)/\mathbf{G}_r(V)$, и заметить, что если дивизор D арифметически эквивалентен нулю, то дивизор $\sum_{i=1}^{\varrho} a_i D_i$ также арифметически эквивалентен нулю и потому $\sum_{i=1}^{\varrho} a_i (D_i, \gamma_k) = 0$, где γ_k — пересечение дивизора D_k с общим двумерным плоским сечением L многообразия V. Поскольку $\operatorname{Det} |(D_i, \gamma_k)| \neq 0$, отсюда следует, что $a_i = 0$ и, значит, дивизор D рационально гомологичен нулю (см. Игуза [3], стр. 20).

В силу хорошо известных топологических результатов, доказанное утверждение равносильно следующему: если индекс пересечения дивизора D с алгебраическими кривыми на многообразии V равен нулю, то его индекс пересечения с трансцендентными двумерными циклами также равен нулю (см. Севери [22], стр. 248).

Для случая *поверхностей* Севери доказал следующую теорему: если две кривые A и B поверхности V высекают одно и то же число точек на одномерном цикле C, индекс самопересечения которого равен нулю, то кривые A и B алгебраически псевдоэквивалентны, т. е. $\lambda A \equiv \lambda B$ для некоторого λ.

Из этого чисто алгебраического критерия, можно, следуя Альбанезе и Севери, также получить совпадение алгебраической эквивалентности с рациональной гомологичностью (см. Севери [34]; при первом рассмотрении

Севери накладывал некоторые проективные условия; см., например, Зариский [a], стр. 90, а также Тодд [12]).

c) Ранг группы $\mathbf{G}(V)/\mathbf{G}_r(V)$ совпадает с «числом Бетти» группы V-дивизоров, т. е. с так называемым *алгебраическим рангом* многообразия V. Это число ϱ называют также *числом Пикара* многообразия V. Согласно результатам раздела c) n° XI, 2, число ϱ допускает трансцендентную интерпретацию в терминах простых дифференциалов первого рода на многообразии V, вполне подобную той, которую установил Пикар для случая поверхностей (см., например, Зариский [a], стр. 114).

d) Ясно, что $\varrho \leqslant b^{2n-2}(V)$. Число $\varrho_0 = b^{2n-2}(V) - \varrho$ называется *числом Лефшеца* многообразия V. Очевидно, оно представляет собой *максимальное число линейно независимых трансцендентных циклов*.

Естественно предположить, что это число абсолютно инвариантно, ибо бирациональные преобразования переводят алгебраические циклы в алгебраические же. Это действительно так. Формальное доказательство этого факта можно получить, пользуясь критерием Лефшеца—Ходжа алгебраичности цикла (см. предложение III n° X, 6).

Отсюда следует, что число ϱ представляет собой относительный инвариант такого же характера, как число Бетти. Заметим, кстати, что порядок группы кручения, или число Севери σ является, напротив, абсолютным инвариантом (см. Зариский [a], стр. 93).

Число ϱ_0 совпадает с числом линейно независимых форм второй степени и второго рода на многообразии V. Эта классическая теорема Лефшеца была недавно пересмотрена в рамках теории пучков Атийя и Ходжем [1]. В их работе дается глубокий анализ теории интегралов на алгебраическом многообразии; к сожалению, привести здесь даже краткое ее изложение не представляется возможным.

e) Понятие арифметической эквивалентности, весьма важное в численной геометрии, можно распространить на k-мерные циклы многообразия V, $k = 0, 1, \ldots, n$. Именно k-мерный цикл Y^k называется *арифметически эквивалентным нулю*, если индекс пересечения $Y^k \cdot Z^{n-k}$ равен нулю для любого $(n-k)$-мерного цикла Z^{n-k} многообразия V, для которого это пересечение определено.

Существование *конечного базиса* у соответствующей группы классов эквивалентности, как заметил Севери, сразу же следует из того факта, что если цикл гомологичен нулю, то он также арифметически эквивалентен нулю. С помощью этого соображения Севери показал, что *ранги групп классов k-мерных и $(n-k)$-мерных циклов совпадают, а матрица пересечений их базисов не вырождена* (см. Севери [22], стр. 248—249).

Заметим, что вопрос о существовании конечного базиса в группе классов алгебраической эквивалентности циклов произвольной размерности многообразия V остается открытым. Как показал Севери, положительный ответ на этот вопрос сводится к доказательству возможности сформулировать в терминах некоторых числовых характеристик многообразия V конечную систему условий того, чтобы цикл X многообразия V был положительным (см. Севери [22], стр. 251).

f) Укажем в заключение две следующие теоремы Чжоу (см. Чжоу [5]), выясняющих поведение фундаментальной группы (группы Пуанкаре) многообразия V. Важность этих теорем обусловлена их многочисленными приложениями.

(I) *Пусть V — произвольное неособое многообразие, и пусть M — член неприводимой алгебраической системы Σ с носителем V* (см. n° VI, 3). *Пусть, далее, $f(z)$ — такое непрерывное отображение единичного интервала I в многообразие V, что $f(0)=f(1)=P_0 \in M$. Тогда существует такое целое число k, что путь kf гомотопен непрерывному отображению $I \rightarrow M$. Если система Σ инволюторна, то $k=1$.*

(II) *Пусть φ — рациональное отображение неособого многообразия V в неособое многообразие V', обладающее следующими свойствами:* 1) *прообраз общей точки многообразия V' является многообразием;* 2) *размерность системы H' точек многообразия V', которые либо фундаментальны для отображения φ^{-1}, либо обладают тем свойством, что их прообраз на многообразии V' содержит кратные компоненты, не превосходит* $\dim V'-2$. *Тогда отображение φ определяет некоторый гомоморфизм $\lambda: \mathfrak{G}(V) \rightarrow \mathfrak{G}(V')$ фундаментальной группы многообразия V на фундаментальную группу многообразия V'.*

Его ядром является фундаментальная группа $\mathfrak{G}_V(\varphi^{-1}(P'_0))$ *прообраза достаточно общей точки* $P'_0 \in V'$, *вложение которой в группу* $\mathfrak{G}(V)$ *определяется вложением* $\varphi^{-1}(P'_0) \subset V$.

Отметим, что первая теорема частично обобщает трансцендентный критерий Севери, относящийся к случаю поверхностей, а вторая содержит как частный случай также классическую (см., например, Зариский [a], стр. 144) теорему, согласно которой на поверхности существует ровно $2p$ независимых одномерных циклов, негомологичных одномерным циклам, принадлежащим общей кривой рода p некоторого пучка. (Эта теорема немедленно получается из теоремы (II), если за многообразие V' принять многообразие Чжоу кривых пучка.)

Заметим еще, что если преобразование φ бирационально, то получается хорошо известная теорема Эресмана (см. Эресман [1]), согласно которой *группы* $\mathfrak{G}(V)$ *и* $\mathfrak{G}(V')$ *изоморфны*. Этот результат мы уже неявно использовали в разделе d).

ЛИТЕРАТУРА

1. МОНОГРАФИИ И ОБЗОРЫ

Bertini E. [a] Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Principato, Messina 1923; [б] Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien, 1924.

Bochner S., Martin W. T. [a] Several complex variables, Princeton, Princeton Press, 1948. (Бохнер С., Мартин Т., Теория функций нескольких переменных, ИЛ, 1951.)

Cartan H. [a] Séminaire E. N. S., 1950—1951; [б] Séminaire E. N. S., 1951—1952; [в] Séminaire E. N. S., 1953—1954.

Cartan H., Eilenberg S. [a] Homological algebra, Princeton, University Press, 1955. (Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.)

Castelnuovo G. [a] Memorie Scelte, Bologna, Zanichelli, 1937.

Castelnuovo G., Enriques F. [a] Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus, Enzyklop. d. math. Wiss., III 6b, 1914.

Conforto F. [a] Lo stato attuale della teoria dei sistemi di equivalenza e delle corrispondenze algebriche tra varietà, Atti Congresso U. M. L., pp. 49—83, Roma, 1942; [б] Funzioni abeliane e matrici di Riemann, Roma, Libreria Università, 1942.

De Rham G. [a] Variétés différentiables, Act. Sci. Ind., 1222, Paris, Hermann 1955. (Де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1950.)

De Rham G., Kodaira K. [a] Harmonic Integrals, Princeton, Inst. for Advanced Study, 1950.

Dubreil P. [a] Quelques propriétés des variétés algébriques, Act. Sci. Ind., 210, Paris, Hermann, 1935.

Gaeta M. F. [a] Quelques progrès récents dans la classification des variétés algébriques d'un espace projectif, Coll. de Géom. Alg., pp. 145—183, Liège, 1952.

Godeaux L. [a] Correspondances entre deux courbes algébriques, Mémor. Sci. Math., **111**, Paris, Gauthier—Villars, 1949.

Gröbner W. [a] Moderne algebraische Geometrie, Wien, Springer, 1949.

Hilbert D. [a] Gesammelte Abhandlungen, 2 Bd. Berlin, Julius Springer, 1933.

Hirzebruch F. [a] Arithmetische Geschlechter und der Satz von Riemann—Roch, Erg. Math., Berlin, Julius Springer, 1956.
Hodge W. V. D. [a] The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge, University Press, 1941.
Hodge W. V. D., Pedoe D. [a] Methods of algebraic geometry, I, II, III, Cambridge, University Press, 1952—1954 (quoted as a_1, a_2, a_3). (Ходж и Пидо, Методы алгебраической геометрии, т. 1, 2, 3, ИЛ, 1955.)
Krull W. [a] Idealtheorie, Erg. Math. Berlin, Julius Springer, 1935.
Lefschetz S. [a] L'Analysis situs et la géométrie algébrique, Paris, Gauthier—Villars, 1924; [б] Hyperelliptic functions and Abelian varieties, Bull, Nat. Res. Counc., **63**, Washington, 1928; [в] Topology, Coll. Publ., New York, 1930 (Лефшец С., Алгебраическая топология, М., 1949); [г] Algebraic Geometry, Princeton, University Press, 1953.
Lichnerowicz A. [a] Gruppo d'olonomia e omologia, Pubbl. Istituto Mat, Roma, 1954.
Maculay F. S. [a] The algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts, 19, Cambridge, 1916.
Northcott D. G. [a] Ideal theory, Cambridge, University Press, 1953.
Roth L. [a] Algebraic threefolds, Rend. mat. Roma (5), **10** (1951), 1—50; [б] Algebraic threefolds (with special regard to problems of rationality), Erg. Math. Berlin, Julius Springer, 1955.
Samuel P. [a] Commutative algebra, Cornell University, 1953; [б] Algèbre locale, Mém. Sci. Math., **123**, Paris, Gauthier—Villars, 1953; [в] Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Erg. Math. Berlin, Julius Springer, 1955.
Schiffer M., Spencer D. C. [a] Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton, University Press, 1953. (Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957.)
Schubert F. [a] Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, B. G. Teubner, 1879.
Schwartz L. [a] Théorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind., 1091, 1122, Paris, Hermann, 1950—1951.
Segre B. [a] Geometria algebrica nei paesi anglosassoni (dal 1939 al 1945), Relat. Pont. Acad. Sci., **11**, 1—52 (1946); [б] Questions arithméthiques sur les variétés algébriques, Coll. Int. d'algèbre et théorie des nombres, pp. 83—94, Paris, 1949; [в] Forme differenziali e loro integrali, Roma, Docet, 1951.
Segre C. [a] Mehrdimensionale Räume, Enzyklop. d. math. Wiss. III, 7, 1912, 1921.
Severi F. [a] Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche, I. Roma, Cremonese, 1942; [б] Fondamenti di geometria algebrica, Cedam, Padova, 1948; [в] Introduzione alla geometria algebrica (Geometria numerativa), I, II, Roma, Docet, 1948—1949 (Севери Ф., Итальянская алгебраическая геометрия, ее строгость, методы и проблемы, Математика, 3 : 1 (1959), 111—142.)

[г] La géométrie algébrique Italienne, Coll. de Géom. Alg., pp. 9—55, Liège, 1949; [д] Memorie scelte, Bologna, Zuffi, 1950.

Steenrod N. [a] The topology of fibre bundles, Princeton, University Press, 1951. (Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, 1953.)

Waerden B. L. van der [a] Moderne Algebra, I, II (quoted as a_1, a_2). Berlin, Julius Springer, 1955; [б] Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, Julius Springer, 1939. (ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, тт. I, II, ИЛ, 1947.)

Weil A. [a] Foundations of algebraic geometry, Colloquium Publ., New York, 1946; [б] Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Act. Sci. Ind., 1041, Paris, Hermann, 1948; [в] Variétés abéliennes et courbes algébriques, Act. Sci. Ind., 1064, Paris, Hermann, 1948.

Wu Wen—Tsun [a] Sur les classes charactéristiques des structures fibrées sphériques, Act. Sci. Ind., 1183, Paris, Hermann, 1952.

Zariski O. [a] Algebraic surfaces, Erg. Math., Berlin, Julius Springer, 1935; [б] The fundamental ideas of abstract algebraic geometry, Proc. of the Int. Congress of Math., Cambridge, Mass., II, 1950, pp. 77—89.

2. СТАТЬИ

Abellanas P. F. [1] Dimension of an algebraic variety, Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4), **2** (1942), 13—21; [2] On the geometrical theory of algebraic surfaces for a perfect coefficient field of characteristic p. Rev. Accad. Ci. Madrid, 36 (1942), 482—499; [3] Théorie arithmétique des correspondances algébriques Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4), **9** (1949), 175—233; (4), **11** (1951), 159—179; [4] Fundamental subvariety for an algebraic correspondence, Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4), **10** (1950), 207—232; [5] Orientation of algebraic varieties, Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4), **12** (1952), 79—101; [6] Primals of an algebraic variety, Rev. Mat. Hisp. Amer. (4), **13** (1953), 255—282.

Akizuki Y. [1] Theorems of Bertini on linear systems, J. Math. Soc. Jap., 3 (1951), 170—180.

Albanese G. [1] Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica, Ann. di Mat. (3), **24** (1915), 159—233; [2] Sul genere aritmetico delle varietà a quattro dimensioni, Rend. Accad. Linc. (5), **33** (1924), 179—182; [3] Invarianza del genere P_a d'una varieta algebrica a quattro dimensioni, Rend. Accad. Linc. (5), **33** (1924), 210—214; [4] Formule fondamentali della geometria sopra una varietà algebrica, Ann. di Mat., **4** (1927), 154—184; [5] Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve algebriche d'una superficie algebrica, Rend. Accad. Linc. (6), 5 (1927), 481—488; [6] Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche, Boll. Un Mat. Ital., **11** (1932), 131—138.

Andreotti A. [1] Recherches sur les surfaces irrégulières, Acad. Roy. Belg., **27**, n. 4 (1952); 1—56; Recherches sur les surfaces irrégulières, Acad. Roy. Belg., **27**, n. 7 (1952), 1—36.

Archbold J. A. [1] Multiple intersections on an algebraic V_4, Proc. London Math. Soc. (2), **47** (1941), 101—122.

Atiyah M. F., Hodge W. V. D. [1] Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math. (2), **62** (1955), 56—91.

Barker C. C. H. [1] Intersections and contacts of surfaces on a V_3, J. London Math. Soc., **26** (1951), 125—131; [2] Contacts of surfaces on an algebraic fourfold, J. London Math. Soc., **30** (1955), 343—350.

Barsotti I. [1] Algebraic correspondences between algebraic varieties. Ann. of Math. (2), **52** (1950), 427—464; [2] Local properties of algebraic correspondences, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1951), 349—378; [3] Intersection theory for cycles of an algebraic variety, Pacific J. Math., **2** (1952), 473—521; [4] A note on Abelian varieties, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **2** (1953), 236—257; [5] Structure theorems for group-varieties, Ann. di Mat. (4), **38** (1955), 77—119.

Behrens E. A. [1] Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie, Math. Z., **55** (1952), 199—215.

Bidal P., De Rham G. [1] Les formes différentielles harmoniques, Comm. Math. Helvet., **19** (1946), 1—49.

Bochner S. [1] Vectors fields and Ricci curvature, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 776—797; [2] Curvature and Betti numbers, Ann. of Math., **49** (1948), 379—390; **50** (1949), 587—665.

Brauer R. [1] A note on Hilbert's Nullstellensatz, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 894—896.

Cartan H. [1] Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. Int. Congress of Math. Cambridge, Mass., **1** (1950), 152—164; [2] Variétés analytiques complexes et cohomologie, Coll. de Bruxelles, 1953, 41—55.

Cartan H., Serre J. P. [1] Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. r. Acad. Sci. (Paris), **237** (1953), 128—130.

Castelnuovo G. [1] Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica, Ann. di Mat. (2), **25** (1897), 235—318; [2] Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare, Rend. Accad. Linc. (5), **14** (1905) (3 notes).

Castelnuovo G., Enriques F. [1] Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, Ann. di Mat. (3), **6** (1901), 165—225; [2] Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions, Ann. Ec. Norm Sup. (5), **23** (1906), 339—366.

Chern S. S. [1] Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math., **47** (1948), 85—121; [2] On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Ann. of Math., **49** (1948), 362—372; [3] On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties, Amer. J. Math., 75 (1953), 565—597.

Chevalley C. [1] On the theory of local rings, Ann. of Math., 44 (1943), 690—708; [2] On the notion of the ring of quotients of a prime ideal, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 93—97; [3] Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. Math. Soc., **57** (1945), 1—85.

Chow W. L. [1] On the genus of curves of an algebraic system, Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949), 137—140; [2] On compact complex analytic varieties, Amer. J. Math., **71** (1949), 893—914; [3] Algebraic systems of positive cycles in an algebraic variety, Amer. J. Math., **72** (1950), 247—274; [4] On the defining field of a divisor in an algebraic variety, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 797—799; [5] On the fundamental group of an algebraic variety, Amer. J. Math., **74** (1952), 726—736; [6] On Picard varieties, Amer. J. Math., **74** (1952), 895—909; [7] On the quotient variety of an Abelian variety, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38** (1952), 1039—1044; [8] The Jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. Math., **76** (1954), 453—476; [9] Abelian varieties over function fields, Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), 253—275.

Chow W. L., Kodaira K. [1] On analytic surfaces with two independent meromorphic functions, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **38** (1952), 319—325.

Chow W. L., van der Waerden B. L. [1] Zur algebraischen Geometrie, IX. Math. Ann., **113** (1937), 692—704.

Cohen I. S. [1] On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. Math. Soc., **59** (1946), 54—106; [2] Commutative rings with restricted minimum condition, Duke Math. J., **17** (1950), 27—42.

Cohen I. S., Seidenberg A. [1] Prime ideals and integral dependence, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 252—261.

Comessatti A. [1] Sulla serie canonica d'una superficie algebrica, Rend. Accad. Linc. (6), **16** (1932), 555—560.

Dantoni G. [1] Sulle singolarità della Jacobiana e su quelle della varietà delle ipersuperficie con punto doppio di un generico sistema lineare ∞^r di V_{r-1} di S^r, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa (3), **3** (1949), 1—17.

De Baer J. H. [1] The relation between the Cayley form and the Barsotti form of an algebraic chain, Ind. Math., **15** (1953), 158—161.

Dedekind R., Weber H. [1] Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. f. Math., **92** (1882), 181—290.

De Rham G. [1] Sur la théorie des formes différentielles harmoniques, Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), 135—152; [2] Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire, Comm. Math. Helvet., **28** (1954), 346—352.

Derwidué L. [1] Essai sur le problème générale de la réduction des singularitiés d'une variété algébrique, Acad. Roy. Belg. (5), **34** (1948), 399—412 and 432—444; [2] Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique, Math. Ann., **123** (1951), 302—330; [3] Sur la réduction des singularités d'une variété algébrique, Mém. Soc. Roy. Sci., Liège (4), **13** (1953), 1—41.
Dolbeault P. [1] Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C. r. Acad. Sci. (Paris), **236** (1953), 175—177.
Dubreil P. [1] Variétés arithmétiquement normales et variétés de première espèce, C. r. Acad. Sci. (Paris), **226** (1948), 548—550; [2] La fonction charactéristique de Hilbert, Coll. Int. d'algèbre et théorie des nombres, Paris, 1950, 109—114.
Dubreil P., Jacotin M. L. [1] Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique, Coll. de Géom. Alg. Liège, 1949, 57—78.
Du Val P. [1] Removal of singular points from an algebraic surface, Coll. Memoirs, Istanbul, 1948, 21—25; [2] On absolute and nonabsolute singularities of algebraic surfaces, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul (A), **11** (1944), 159—215.
Eckmann B. [1] Quelques propriétés globales des variétés Kähleriennes, C. r. Acad. Sci. (Paris), **229**, (1949), 577—579; [2] Sur les variétés presque complexes, Proc. Int. Congress of Math., Cambridge, Mass., **1** (1950), 412—419.
Eckmann B., Guggenheimer H. [1] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion, C. r. Acad. Sci. (Paris), **229** (1949), 464—466 et 489—491.
Eger M. [1] Dezerminazione del gruppo di punti doppi acquisiti da una forma dell'S_{2k} passante per una data V_k, Boll. Un. Mat. Ital. (1), **15** (1936), 56—61; [2] Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique, C. r. Acad. Sci. (Paris), **204** (1937), 92—94 et 217—219; [3] Sur la Jacobienne d'un système de Pfaff, C. r. Acad. Sci. (Paris), **209** (1939), 82—84; [4] Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3), **60** (1943), 143—172.
Ehresmann C. [1] Sur la topologie de certains espaces homogènes (Thesis), Ann. of Math. (2), **35** (1934), 396—443.
Fernandez Biarge J. [1] Arithmetical investigation of linear systems of divisors of an algebraic variety, Mem. Inst. «Jorge Juan», **11** (1950), 1—80.
Franchis B. de [1] Intorno al significato di alcuni caratteri delle varietà algebriche, Rend. Circ. Mat., Palermo, **56** (1932), 223—227; 60 (1936), 161—168; [2] I sistemi canonici e pluricanonici e le forme algebrico-differenziali di prima specie, Ann. di Mat. (4), **19** (1940), 243—249.
Gaeta F. [1] Sulle curve algebriche di residuale finito, Ann. di Mat. (4), **27** (1948), 177—241; [2] Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito, Ann. di Mat. (4), **31** (1950), 1—64; [3] Sur la limite inférieure des valeurs de l pour la validité de la postulation régulière d'une variété algébrique, C. r. Acad. Sci. (Paris), **234** (1952), 1121—1123;

[4] Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r, Rend. Accad. Linc. (8), **12** (1952), 270—273; [5] Sui sistemi lineari appartenenti al prodotto di più varietà algebriche, Ann. di Mat. (4), **33** (1952), 91—118; [6] Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker, Rend. Accad. Linc (8), **18** (1955), 148—150.

Garabedian P. R., Spencer D. C. [1] Complex boundary value problems, Office of Naval Research, Technical Report, **16** (1951); [2] A complex tensor calculus for Kähler manifolds, Acta Math., **89** (1953), 279—331.

Godeaux L. [1] Sur les surfaces algébriques intersections complètes d'hypersurfaces, Rev. de Tucuman, **2** (1941), 211—216.

Goddard L. S. [1] Bases for the prime ideals associated with certain classes of algebraic varieties, Proc. Cambridge Phil. Soc., **39** (1943), 35—48; [2] Prime ideals and postulation formulae, Proc. Cambridge Phil. Soc., **44** (1948), 43—49.

Goldman O. [1] Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z., **54** (1951), 136—140.

Gröbner W. [1] Über den Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie, Math. Nachr., **4** (1951), 193—201; [2] L'ideale aggiunto di una varietà algebrica, Rend. Mat. Roma (5), **10** (1951), 57—63; [3] Die birationalen Transformationen der Polynomideale, Mh. Math., **58** (1954), 266—286.

Guggenheimer H. [1] Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik, Comm. Math. Helvet., **25** (1951), 257—297; [2] Interpretazione topologica dei covarianti di B. Segre, Rend. Acc. Linc. (8), **16** (1954), 331—334; [3] Omologia delle dilatazioni, Rend. Acc. Linc. (8), **18** (1955), 13—15.

Hilbert D. [1] Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann., **36** (1890), 473—534, or «Gesammelte Abhandlungen», 2. Bd., 199—258.

Hirzebruch F. [1] Arithmetic genera and the theorem of Riemann—Roch, for algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **40** (1954), 110—114; [2] Some problems on differentiable and complex manifolds, Ann. of Math., **60** (1954), 213—236; [3] Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann, **126** (1953), 1—22.

Hodge W. V. D. [1] Further properties of Abelian integrals attached to algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **17** (1931), 643—650; [2] On the stationary points of integrals attached to algebraic varieties, J. London Math. Soc., **58** (1937), 280—290; [3] Note on the degeneration of algebraic varieties, Proc. Cambridge Phil. Soc., **38** (1942), 217—219; [4] Note on the condition for a p-cycle of an algebraic manifold to be of rank k, Proc. Cambridge Phil. Soc., **43** (1947), 577—580; [5] A new set of relative birational invariants of algebraic varieties, Accad. d'Ital., Fondaz. Volta 9 (1943); [6] Harmonic integrals on algebraic varieties, Proc. Cambridge Phil. Soc., **44** (1948), 37—42; [7] On the topology of three-folds whose hyperplane sections have geometric genus zero, Ann. di Mat. (4), **29** (1949), 115—119; [8] The topological invariants of algebraic varieties, Proc. Int. Congress of Math., Cambridge, Mass., **1** (1950), 182—192; [9] A special type of Kähler manifold, Proc. London Math. Soc., **1** (1951), 104—117; [10] Differential forms on Kähler manifolds, Proc. Cambridge Phil. Soc., **47** (1951), 504—517; [11] The characteristic classes on algebraic varieties, Proc. London Math. Soc. (3), **1** (1951), 138—151; [12] Tangent sphere-bundles and canonical models of algebraic varieties, J. London Math. Soc., **27** (1952), 152—159; [13] A note on the Riemann-Roch theorem, J. London Math. Soc., **30** (1955), 291—296.

Hopf H. [1] Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays pr. to R. Courant, 1948, 167—185; [2] Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, Rend. Mat. Roma, **10** (1951), 169—182.

Igusa J. [1] On the algebraic geometry of Chevalley and Weil, J. Math. Soc. Japan, **1** (1949), 198—201; [2] Algebraic correspondences between algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 215—219; [3] On the Picard variety attached to algebraic varieties, Amer. J. Math., **74**, (1952), 1—22; [4] Some remarks on the theory of Picard varieties, J. Math. Soc. Japan, **3** (1952), 345—348; [5] Normal point and tangent cone of an algebraic variety, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **A 27** (1951), 189—201.

Iwasawa K. [1] Der Bezoutsche Satz in zweifach projektiven Räumen, Proc. Japan Acad., **21** (1949), 213—222; [2] Zur Theorie der algebraischen Korrespondenzen, Proc. Japan Acad., **21** (1949), 204—212 and 411—418.

Kähler E. [1] Sui periodi degli integrali multipli sopra una varietà algebrica, Rend. Circ. Mat. Palermo, **56** (1932), 69—74; [2] Forme differenziali e funzioni algebriche, Mem. Acc. Ital., **3** (1932), 1—19; [3] Über eine bemerkenswerte Hermitische Metrik, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., **9** (1933), 173—186; [4] Tensori razionali di prima specie sopra una varietà algebrica, Rend. Acc. Linc. (8), 18 (1955), 151—154.

Kawahara Y. [1] On the differential forms on algebraic varieties, Nagoya Math. J., **4** (1952), 73—78.

Kneser H. [1] Die Integralen erster Gattung einer algebraischen Mannigfaltigkeit, Math. Ann., **107** (1932), 83—86; [2] Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum, Math. Nachr., **4** (1951), 382—391.

Kodaira K. [1] The theorem of Riemann—Roch on compact analytic surfaces, Amer. J. Math., **73** (1951), 813—875; [2] The theorem of Riemann—Roch for adjoint systems on threedimensional algebraic varieties, Ann. of Math., **56** (1952), 288—342 (Кодаира К., Спенсер Д., Цикл статей по некоторым вопросам современной алгебраической геометрии, Математика, **2** : 6 (1958), 115—136.) [3] On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39** (1953), 865—868; Кодаира К., Спенсер Д., Цикл статей по некоторым вопросам современной алгебраической геометрии, Математика, 2 : 6 (1958), 115—136; [4] On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, Proc. Nat. Acad., USA, **39** (1953), 1268—1273; [5] Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, Ann. of Math., **53** (1954); 86—134; [6] On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math., **60** (1954), 28—48.

Kodaira K., Spencer D. C. [1] On arithmetic genera of algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39** (1953), 641—649; Кодаира К., Спенсер Д., Цикл статей по некоторым вопросам современной алгебраической геометрии, Математика, 2 : 6 (1958), 115—136; [2] Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties. Кодаира К., Спенсер Д., Цикл статей по некоторым вопросам современной алгебраической геометрии, Математика, 2 : 6 (1958), 115—136; Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39** (1953), 868—877; Кодаира К., Спенсер Д., Цикл статей по некоторым вопросам современной алгебраической геометрии, Математика, 2 : 6 (1958), 115—136; [3] On a theorem of Lefschetz and the lemma of Enriques—Severi—Zariski, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39** (1953), 1273—1278.

Koizumi S. [1] On the differential forms of the first kind on algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan, **1** (1949), 273—280.

Kronecker L. [1] Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, J. f. Math., **92** (1881).

Krull W. [1] Allgemeine Bewertungstheorie, J. f. Math., **167** (1931), 160—196; [2] Dimensionstheorie in Stellenringen, J. f. Math., **179** (1938), 204—226.

Kundert E. G. [1] Über Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und complexer Linienelemente, Ann. of Math., **54** (1951), 215—246; [2] A relation between poles and zeros of a simple meromorphic differential form and a calculation of Chern's characteristic classes of an algebraic variety, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **38** (1952), 893—895.

Lefschetz S. [1] The arithmetic genus of an algebraic manifold immersed in another, Ann. of Math., **17** (1916), 197—212; [2] On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties, Trans. Amer. Math. Soc., **22** (1921), 327—482.

Leray J. [1] L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact, J. de Math., **29** (1950), 1—139; [2] L'homologie d'un espace fibré, dont la fibre est connexe, J. de Math., **29** (1950), 169—213.

Levi B. [1] Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche, Atto Accad. Sci Torino, **33** (1897), 66—86.

Longhi A. [1] Sulla intersezione di due o più varietà algebriche, Comm. Math. Helvet., **18** (1946), 45—51.

M a c P h e r s o n R. E. [1] Canonical systems on a reducible variety, Proc. Cambridge Phil. Soc., 35 (1939), 389—393.

M a r t i n e l l i E. [1] Sulla varietà delle fassette p-dimensionali di S_r, Mem. Accad. Ital., 16 (1941), 917—943; [2] Sulla immagine proiettiva delle serie e dei sistemi di equivalenza elementari sopra una varietà, Comm. Pont. Acad. Sci., 6 (1942), 147—151; [3] Geometria algebrica e geometria riemanniana, Rend. Mat. Roma (5), 8 (1950), 1—25; [4] Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa, Atti Accad. Ligure, 9 (1952), 1—10; [5] Alla ricerca di nuovi integrali invarianti sulle varietà algebriche, Atti IV Congresso U. M. I., pp. 1—9, Taormina 1951.

M a t s u s a k a T. [1] Specialisation of cycles on a projective model, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A 26 (1951), 167—173; [2] The theorem of Bertini on linear systems in modular fields, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A 26 (1951), 51—62; [3] On a generating curve of an Abelian variety, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 3 (1951), 1—4; [4] On the algebraic construction of the Picard variety, Jap. J. Math. (I), 21 (1951), 217—236; (II), 22 (1952), 51—62; [5] On algebraic families of positive divisors, J. Math. Soc. Jap., 5 (1953), 113—136; [6] Some theorems on Abelian varieties, Nat. Rep. Ochanomizu Univ., 4 (1953), 22—35; [7] On the theorem of Castelnuovo-Enriques, Nat. Rep. Ochanomizu Univ., 4 (1953), 164—171; [8] A remark on my paper (6), Nat Rep. Ochanomizu Univ., 4 (1953), 172—174.

M u'h l y H. T. [1] A remark on normal varieties, Ann. of Math., 42 (1941), 921—925; [2] Valuations and infinitely near loci, Amer. J. Math., 64 (1942), 457—487; [3] Independent integral bases and a characterisation of regular surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 340—360; [4] The irregularity of an algebraic surface and a theorem on regular surfaces, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 940—947; [5] Integral bases and varieties multiply of the first species, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 576—580.

M u h l y H. T., Z a r i s k i O. [1] Hilbert's characteristic function and the arithmetic genus of an algebraic variety, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 78—88.

N a k a i Y. [1] Note on the intersection of an algebraic variety with the generic hyperplane, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A 26 (1951), 185—187.

N é r o n A. [1] Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps, Bull. Soc. Math. France, 80 (1952), 101—166; [2] La théorie de la base pour les diviseurs sur les variétés algébriques, Coll. Géom. Alg. Liège, 1952, 119—128.

N o e t h e r E. [1] Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann., 90 (1923), 229—261.

N o e t h e r M. [1] Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen, Math. Ann., 2 (1870), 293—316; 8 (1875), 495—533.

Northcott D. G. [1] The number of analytic branches of a variety, J. London Math. Soc., **25** (1950), 275—279; [2] An application of local uniformisation to the theory of divisors, Proc. Cambridge Phil. Soc., **47** (1951), 279—285; [3] Some properties of analytically irreducible geometric quotient rings, Proc. Cambridge Phil. Soc., **42** (1951), 662—667; [4] Specialisations over a local domain, Proc. London Math. Soc. (3), **1** (1951), 129—137; [5] On integrally closed geometric quotient rings and their extensions, Proc. London Math. Soc. (3), **2** (1952), 385—405; [6] Some results concerning the local analytic branches of an algebraic variety, Proc. Cambridge Phil. Soc., **49** (1953), 386—396; [7] On the local cone of a point of an algebraic variety, J. London Math. Soc., **29** (1954), 326—333.

Oehlert M. [1] Über die Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante, J. f. Math., **171** (1934), 42—54.

Okugawo K. [1] Linear conditions at a point, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **A 25** (1949), 99—102; [2] Base conditions for hypersurfaces at a point, J. Math. Soc. Japan, **1** (1950), 242—250.

Ostrowski A. [1] Über ein algebraisches Übertragungsprinzip, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **1** (1922), 281—326.

Pannelli M. [1] Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni, Rend. Accad. Linc. (5), **15** (1906), 483; [2] Sopra gli invarianti birazionali, Rend. Accad. Linc. (5), **15** (1906), 619.

Pedoe D. [1] On a new analytical representation of curves in spaces, Proc. Cambridge Phil. Soc., **43** (1947), 455—458.

Perron O. [1] Studien über den Vielfachkeitsbegriff und den Bezoutschen Satz, Math. Z., **49** (1944), 654—680.

Poincaré H. [1] Sur la réduction des intégrales abéliennes, Bull. Soc. Math. France, **12** (1884), 124—143; [2] Sur les fonctions abéliennes, Amer. J. Math., **8** (1886), 289—342; [3] Sur les résidus des intégrales doubles, Acta math., **9** (1886—1887), 321—380; [4] Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques, Ann. Ec. Norm. Sup. (3), **27** (1910), 55—108.

Rabinowitsch S. [1] Zum Hilbertschen Nullstellensatz, Math. Ann., **102** (1929), 520.

Rosenlichit M. [1] Equivalence relations on algebraic curves, Ann. of Math., **56** (1952), 169—191; [2] Differentials of the second kind for algebraic function fields of one varibale, Ann. of Math. (2), **57** (1953), 517—523; [3] Generalized Jacobian varieties, Ann. of Math., **59** (1954), 505—530.

Roth L. [1] Some formulae for primals in four dimensions, Proc. London Math. Soc. (2), **35** (1933), 540—550; [2] Adjoint primals in four dimensions, Proc. London Math. Soc. (2), **40** (1936), 217—234; [3] Projective characters and invariants of algebraic varieties, Proc. Cambridge Phil. Soc., **33** (1937), 188—198; [4] Sulle forme che contengono una data varietà algebrica, Rend. Accad. Linc. (8), **3** (1947), 541—545; [5] Some arithmetical questions in the theory of the base, Ann. di

Mat. (4), 27 (1948), 115—134; [6] Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue, Rend. Accad. Linc. (8), 9 (1950), 246—250; [7] Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni, Rend. Accad. Linc. (8), 10 (1951), 468—472; [8] Sulle V_3 algebriche che possiedono un sistema anticanonico, Atti IV Congr. U. M. I., Taormina 1951 II, 434—439; [9] Some threefolds on which adjunction terminates, Proc. Cambridge Phil. Soc., 48 (1952), 233—242; [10] Alcune V_3 irrazionali a generi nulli, Rend. Accad. Linc. (8), 12 (1952), 265—269; [11] On threefolds of linear genus unity, Ann. di Mat. (4), 34 (1953), 247—276; [12] Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo—Humbert, Rend. Accad. Linc. (8), 15 (1953), 376—380; [13] Some properties of pseudo-Adelian varieties, Ann. di Mat. (4), 38 (1955), 281—302; [14] Irregular threefolds which possess anticanonical systems, Proc. Cambridge Phil. Soc., 52 (1956).

Samuel P. [1] La notion de multiplicités en algèbre et en géometrie algébrique, J. Math. (9), 30 (1951), 159—205, 207—274; [2] Sur les variétés algébroides, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 2 (1950), 147—160; [3] Singularités des variétés algébriques, Bull. Soc. Math. France, 79 (1951), 121—129.

Scott D. B. [1] Point-curve correspondences, Proc. Cambridge Phil. Soc., 41 (1945), 135—145; 42 (1946), 229—239; 45 (1949), 342—353; [2] The united curve of a point-curve correspondence on an algebraic surface, Proc. London Math. Soc. (2), 51 (1950), 308—324; [3] On the fundamental theorem for point-point correspondences with valency on an algebraic surface, Pont. Acad. Sci. Acta, 14 (1950), 57—61; [4] Correspondences of dimension two and three between algebraic surfaces, Proc. London Math. Soc. (3), 2 (1952), 1—21.

Segre B. [1] Sulla serie caratteristica d'una superficie sopra una varietà algebrica a quattro dimensioni, Rend. Accad. Linc. (6), 17 (1933), 917—918; [2] Nuovi contributi alla geometrica sulle varietà algebriche, Mem. Accad. Ital., 5 (1934), 479—576; [3] Intorno alla parità di alcuni caratteri di una varietà di dimensione dispari, Boll. Un. Mat. Ital. (1), 13 (1934), 93—95; [4] Un problema di geometria numerativa, Boll. Un. Mat. Ital. (1), 15 (1936), 49—55; [5] Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une V_3 algébrique, Mem. Acad. Roy. Belgique (2), 14 (1936), 3—99; [6] Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento, Ann. di Mat. (4), 27 (1938), 107—126; [7] The postulation of a multiple curve, Proc. Cambridge Phil. Soc., 38 (1942), 368—377; [8] On limits of algebraic varieties, in particular of their intersections and tangential forms, Proc. London Math. Soc. (2), 47 (1942), 351—403; [9] Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche, Rend. Accad. Linc. (8), 1 (1946), 564—570; [10] Bertini forms and Hessian matrices, J. London Math. Soc., 26 (1951), 164—176; [11] Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche, Ann. di Mat. (4), 33 (1952), 5—48; [12] Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche, Ann. di Mat. (4), 35 (1953), 1—128; [13] Dilatazioni e comportamenti associàti nel campo analitico, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 1 (1952), 373—379; [14], Dilatazioni e varietà canoniche nelle varietà algebriche, Ann. di Mat. (4), 37 (1954), 139—155.

Segre C. [1] Intorno ad un carattere delle superfie e delle varietá algebriche superiori, Atti Accad. Sci. Torino, 31 (1896), 485—501.

Seidenberg A. [1] Valuation ideals in polynomial rings, Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), 387—425; [2] The hyperplane sections of normal varieties, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 357—386.

Serre J. P. [1] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll. sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, 57—68; [2] Groups d'homotopie et classes de groups abéliennes, Ann. of Math., 58 (1953), 258—294; [3] Un theorème de dualité, Comm. Math. Helvet., 29 (1955), 9—26; [4] Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., 61 (1955), 197—278.

Severi F. [1] Sulle intersezioni delle varietà algebriche e soprà i loro caratteri e singolarità proiettive, Mem. Accad. Sci. Torino (2), 52 (1902), 61—118; [2] Su alcune questioni di postulazione, Rend. Circ. Mat. Palermo, 17 (1903), 73—103; [3] Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica, Rend. Accad. Linc (5), 12 (1903), 250—257; [4] Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie, Math. Ann., 61 (1905), 20—49; [5] Sulla differenza fra i numeri degli integrali di Picard della prima e della seconda specie appartenenti ad una superficie irregolare, Atti Accad. Sci. Torino, 40 (1905), 288—296; [6] Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche, Ann. di Mat. (3), 12 (1905), 55—79; [7] Sul teorema di Riemann—Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica, Rend. Ist. Lombardo Sci. (2), 38 (1905), 859—865; [8] Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica, Rend. Ist. Lombardo (2), 38 (1905), 859—865; [9] Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli, Rend. Accad. Linc. (5), 15 (1906), 691—696; [10] Sulla totalità di curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, Math. Ann., 62 (1906), 194—225; [11] Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà, Atti Ist. Veneto Sci., 65 (1906), 625—643; [12] La base minima pour la totalitè des courbes tracées sur une surface algébrique, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris (3), 25 (1908), 449—468; [13] Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo, 28 (1909), 33—87; [14] Complementi alla teoria della base per la totalita delle curve di una superficie algebrica, Rend. Circ. Mat Palermo, 30 (1910), 265—288; [15] Sul principio della conservazione del numero, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1912), 313—327; [16] Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare, Ann. di Mat. (3), 24 (1915), 89—120; [17] Sulla teoria degli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica, Rend. Accad. Naz. Linc. (5), 30 (1921), 163—167, 204—208, 231—235, 273—280, 296—301, 328—332, 365—367; [18] La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica, Comm. Math. Helvet., 4 (1932), 268—326; [19] Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, Mem. Accad. Ital., 3 (1932), 1—52; [20] La teoria delle serie di equivalenza e delle corrispondenza a valenza sopra una superficie algebrica, Rend. Accad. Linc. (6), 17 (1933), 419—425, 491—497, 597—600, 681—685, 759—764, 869—876, 876—881; [21] Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie, Abh. Math. Sem. Hans. Univ., 9 (1933), 335—364; [22] La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche, Mem. Accad. Ital., 5 (1934), 239—283; [23] Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza, Rend. Accad. Linc. 20 (1934), 287—293, 395—397; [24] La teoria generale delle corrispondenze fra varietà algebriche, Rend. Accad. Linc. (6), 23 (1936), 818—823, 921—925; [25] Complementi alla teoria generale delle corrispodenze tra varietà algebriche, Rend. Accad. Linc. (6), 24 (1936), 493—497; (6), 25 (1937), 3—9; [26] La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche e i sistemi di equivalenza, Abh. Math. Sem. Hans. Univ, 13 (1939), 101—112; [27] Sulla irregolarità superficie d'una varietà algebrica, Rend. Accad. Ital. (7), 3 (1942), 547—555; [28] Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche, Comm. Pont. Acad. Sci., 6 (1942), 977—1029; [29] Funzioni quasi abeliane, Pont. Accad. Sci., Scripta varia, no. 4 (1947), 327; [30] Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione, Ann. di Mat. (4), 26 (1947), 221—270; [31] Il punto di vista gruppale nei vari tipi di equivalenza sulle varieta algebriche, Comm. Math. Helvet., 21 (1948), 189—224; [32] Grundlagen der abzählenden Geometrie, S. 1—123. Wolfenbütteler Verlagsanstalt 1949; [33] Sulla molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche, Math. Z., 52 (1950), 827—851; [34] Legami tra certe proprietá aritmetiche delle superficie e la teoria della base, Rend. Mat. Roma (5), 9 (1950), 59—69; [35] Fondamenti per la geometria sulle varieta algebriche, Ann. di Mat. (4), 32 (1951), 31—81; [36] Ulteriori complementi alla teoria della base, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 1 (1952), 71—87; [37] Fondamenti per una teoria generale dei connessi, Acta Salamenticensia, no. 3, 28 pp. (1950); [38] Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica, Mem. Accad. Naz. IXL (4), 2 (1951), 1—27; [39] Sugli antigeneri d'una varietà algebrica, Rend. Accad. Linc. (8), 18 (1955), 131—140; [40] Le equivalenze

20*

algebriche, Rend. Accad. Linc. (8), **18** (1955), 357—361; [41] Le equivalenze razionali, Rend. Accad. Linc. (8), **18** (1955), 443—451; [42] Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica, Rend. Accad. Linc. (8), **20** (1956), 7—16; [43] Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche, Ann. di Mat. (4), **41** (1956), 161—199.

Spencer D. C. [1] Cohomologie and the Riemann—Roch theorem, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39** (1953), 660—669.

Sperner E. [1] Über einen kombinatorischen Satz von Maculay, Abh. Hamburg. Univ.,7 (1930), 149—163.

Thullen P. [1] Determinazione della serie di equivalenza individuata dal gruppo dei punti doppi impropri d'una superficie dell'S_4, Rend. Circ. Mat. Palermo, **59** (1935), 256—260.

Todd J. A. [1] The arithmetic genus of a V_3 in S_4, J. London Math. Soc., **9** (1934), 205—210; [2] Some group-theoretic considerations in algebraic geometry, Ann. of Math., **35** (1934), 702—704; [3] Algebraic correspondences between algebraic varieties, Ann. of Math., **36** (1935), 325—335; [4] On double integrals of the first kind attached to an algebraic variety, J. London Math. Soc., **11** (1936), 35—37; [5] The geometrical invariants of algebraic loci, Proc. London Math. Soc. (2), **43** (1937), 127—138; [6] Note on the canonical series of a V_d, Proc. London Math. Soc. (2), **43** (1937), 139—141; [7] Birational transformations with isolated fundamental points, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **2** (1937), 117—124; [8] Intersection of loci on an algebraic V_3, Proc. Cambridge Phil. Soc., **33** (1937), 425—437; [9] The arithmetical invariants of algebraic loci, Proc. London Math. Soc. (2), **43** (1937), 190—225; [10] Birational transformations possessing fundamental curves, Proc. Cambridge Phil. Soc., **34** (1938), 144—155; [11] The geometrical invariants of algebraic loci, Proc. London Math., Soc. (2), **45** (1939), 410—424; [12] A remark on a theorem of Severi, Proc. Cambridge Phil. Soc., **35** (1939), 516—517; [13] The postulation of a multiple variety, Proc. Cambridge Phil. Soc., **36** (1940), 27—33; [14] Invariant and covariant systems on an algebraic variety, Proc. London Math. Soc. (2), **46** (1940), 199—230; [15] Birational transformations with a fundamental surface, Proc. London Math. Soc. (2), **47** (1941), 81—100; [16] On algebraic curve branches, J. London Math. Soc., **21** (1946), 233—240; [17] On the overlap of an algebraic surface, J. London Math., Soc., **26** (1951), 73—74; [18] On the invariants of the canonical system of a V_d, Proc. Cambridge Phil. Soc., **49** (1953), 410 to 412.

Todd J. A., Maxwell E. A. [1] Note on the invariants of the canonical systems of an algebraic variety, Proc. Cambridge Phil. Soc., **33** (1937), 438—443.

Torelli L. [1] Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche, Ann. di Mat. (3), **18** (1911), 81—98.

Vesentini E. [1] Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione, Rend. Accad. Linc. (8), **16** (1954), 199—204;

[2] Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietá covarianti d'immersione, Rend. Accad. Linc. (8), 17 (1954), 196—203; [3] Campi di vettori dotati di peso sopra una varietà complessa compatta, Rend. Mat. Roma (5), 14 (1955), 1—17; [4] Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza, Rend. Accad. Linc. (8), 18 (1955), 38—43; [5] Sui punti stazionari di forme differenzialli meromorfe sopra una varietà complessa compatta, Rend. Accad. Linc. (8), 18 (1955), 486—494.

Waerden B. L. van der [1] Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Ann., 96 (1925), 183—208; [2] Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Ann., 97 (1926), 756—774; [3] On Hilbert's fonction, series of composition of ideals, Proc. Kon. Acad. Amsterdam, 31 (1928), 749—770; [4] Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann., 102 (1929), 337—362; [5] Zur algebraischen Geometrie, Notes in Math. Ann., [I] 108 (1933), 113—125; [III] 108 (1933), 694—698; [V] 110 (1934) 128—133; (VI] 110 (1934), 134—160; [VII] 111 (1935), 432—437; [X] 113 (1937), 705 to 712; [XI] 114 (1937), 683—699; [XII] 115 (1938), 310—332; [XIII] 115 (1938), 359—378; [XIV] 115 (1938), 619—642; [6] The foundation of the invariant theory of linear systems of curves on an algebraic surface, Indag. Math., 8 (1946), 120—123; [7] Birational invariants of algebraic manifolds, Acta Salamanticensia, no. 2, 1—57 (1947); [8] Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., 51 (1948), 497—501; [9] Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern, Comm. Math. Helvet., 20 (1947), 68—109; [10] Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., 51 (1948), 502—523; [11] Zur algebraischen Geometrie, Math. Ann. [XVI] 125 (1952), 314—324; [XVII] 128 (1954), 128—134; [XVIII] 128 (1954), 135—137; [12] Zur Konstruktion des Resultantensystems für homogene Gleichungen, Arch. Math., 5 (1954), 371—375.

Walker R. J. [1] Reduction of singularities of an algebraic surface, Ann. of Math. (2), 36 (1935), 336—365.

Weil A. [1] Sur la théorie des formes différentielles attachées a une variété analytique complexe, Comm. Math. Helvet., 20 (1947), 110—116; [2] Fibrespaces in algebraic geometry, Univ. of Chicago, Notes by A. Wallace, 1949; [3] Varietés abéliennes, Coll. Int. d'Alg. et théorie des nombres, pp. 125—127, Paris, 1950; [4] On Picard varieties, Amer. J. Math., 74 (1952), 865—894; [5] Criteria for linear equivalence, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 38 (1952), 258—260; [6] Sur les critéres d'équivalence en géometrie algébrique, Math. Ann., 128 (1954), 95—127.

Yoxall A. L. [1] Note on a paper by J. A. Todd, Proc. Cambridge Phil. Soc., 35 (1939), 125—126.

Zappa G. [1] Sull'esistenza di curve algebriche non isolate a serie caratteristica non completa sopra una rigata algebrica, Pont. Accad. Sci. Acta 7 (1943), 1—4; [2] Su alcuni contributi alla conoscenza della struttura delle superficie algebriche, Pont. Accad. Sci. Acta 7 (1943), 4—8; [3] Sui sistemi continui di curve sopra una rigata algebrica, Giorn. Mat. Battaglini (4), 77 (1947), 172—183; [4] Alla ricerca di nuovi significati topologici dei generi geometrico ed aritmetico di una superficie algebrica, Ann. di Mat. (4), **30** (1949), 123—146.

Zariski O. [1] Polynomial ideals defined by infinitely near base points, Amer. J. Math., **60** (1938), 151—204; [2] Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties, Amer. J. Math., **61** (1939), 249—294; [3] The reduction of the singularities of an algebraic surface, Ann. of Math., **40** (1939), 639—689; [4] Algebraic varieties over a groundfield of characteristic zero, Amer. J. Math., **62** (1940), 187—221; [5] Local uniformisation, Ann. of Math., (2), **41** (1940), 852—896; [6] Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini, Trans. Amer. Math. Soc., **50** (1941), 48—70; [7] A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface, Ann. of Math., **43** (1942), 583 to 593; [8] Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 490—542; [9] Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties, Ann. of Math., **45** (1944), 472—542; [10] The theorems of Bertini on the variables singular points of a linear system of varieties, Trans. Amer. Math. Soc., **56** (1944), 130—140; [11] The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 683—691; [12] Generalized semi-local rings, Summa Bras. Math., **1** (1946), 169—195; [13] The concept of a simple point of an abstract algebraic variety, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 1—52; [14] A new proof of Hilbert's Nullstellensatz, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 362—368; [15] Analytical irreducibility of normal varieties, Ann. of Math., **49** (1948), 352—361; [16] A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations, Proc. Nat. Acad., USA, **35** (1949), 62—66; [17] A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety, Ann. di Mat. (4), **29** (1949), 187—198; [18] Quelques questions concernant la théorie des fonctions holomorphes sur une variété algébrique, Coll. Int. Alg. et théorie des nombres, pp. 129—133, Paris 1950; [19] Sur la normalité analytique des variétés normales, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **2** (1951), 161—164; [20] Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary groundfields, Mem. Amer. Math. Soc., no. 5 (1951), 1—90; [21] Complete linear systems on normal varieties and a generalisation of a lemma of Enriques—Severi, Ann. of Math., **55** (1952), 552—592; [22] Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique, Bull. Sci. Math. France, (2), **78** (1954), 31—40.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Lang S. [a] Introduction to algebraic geometry, Interscience Tracts, № 5, New York, 1958. [б] Abelian varieties, Interscience Tracts, № 7, New York, 1959.

Hirzebruch F. [a] Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin, 1956.

Chevalley [a] Fondements de la Géometrie algébrique, Paris, 1958.

Borel A., Serre J.—P., [I] Le theoréme de Riemann—Roch, Bulletin de la Société Math. de France, 86 (1958).

Borel A. [1] Groupes linéaires algébriques, Ann. of Math., 64 (1956), 20—82.

Cartier P. [2] Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bull. de la Société Math. France, 86 (1958), F. III, 177—251.

Chow W. L. [1] Projective embedding of an abelian variety, Proc. Nat. Acad. of Sci. USA, 38 (1952), 1039—1044. [2] On the principle of degeneration in algebraic geometry, Ann. of Math., 66 (1957), 70—79.

Igusa J. I. [1] On some problems in abstract algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. of Sci. USA, 41 (1955), № 11, 964—967.

Lang S., Néron A. [1] Rational points on abelian varieties over function fields, Amer. Journ. of Math., 85 (1958), 116—131.

Matsusaka T. [1] Polarized varieties, Amer. Journ. of Math., 80 (1958), № 1, 45—82.

Nagata M. [1] On the embedding problem of abstract varieties in projective varieties, Mem. Kyoto, 30 (1956), 71—82.

Rosenlicht M. [1] Basic theorems on algebraic groups, Amer. Journ. of Math., 78 (1956), № 2, 401—433.

Serre J. P. [1] Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Tourier, 6 (1955—1956), 1—42. [2] Sur la cohomologie des variétés algébriques. Journ. de Mathem. pureset appliqués, 36 (1957), 1—16.

Weil A. [1] Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachrichten der Akad. Wiss. Göttingen (1957), 33—53. [2] The field of defenition of a variety, Amer. Journ. of Math., 78 (1956), 509—524.

Zariski O. [1] Algebraic sheaf theory, Bull. Amer. Math. Soc., 62 (1956), 117—141.

Grothendieck A. [1] The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Prac. Intern. Congress of Math. Edinburgh, 1960. (готовится русский перевод).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. Бальдассарри

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Редактор *В. Б. Орлов.*
Переплет художника *Л. А. Рабенау*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. А. Белева.*
Корректор *А. В. Шатская*

Сдано в производство 22/III 1961 г.
Подписано к печати 28/VII 1961 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$=4,9 бум. л.
16,2 печ. л.
Уч.-изд. л. 16,4. Изд. № 1/5474.
Цена 1 р. 35 к. Зак. № 924.

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

*

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9