

Юмез

А. М. БАЛДИН, В. И. ГОЛЬДАНСКИЙ,
И. Л. РОЗЕНТАЛЬ

КИНЕМАТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1959

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена одному из главных методов обработки экспериментальных данных в современной ядерной физике и является первой попыткой обобщить и систематизировать сведения по кинематике ядерных реакций. В книге подробно анализируются кинематические соотношения между различными величинами, характеризующие ядерные реакции с участием двух и более частиц. Рассматриваются следствия как из классических, так и из квантовых законов сохранения.

Книга снабжена богатыми справочными материалами (таблицами, графиками и числовыми примерами).

Рассчитана на физиков, работающих в области атомного ядра и элементарных частиц.

*Балдин Александр Михайлович, Гольданский Виталий Иосифович,
Розенталь Иосиф Леонидович*
Кинематика ядерных реакций

Редактор *Е. Е. Жаботинский*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов*

Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 28/II 1959 г. Подписано к печати 6/VII 1959 г. Бумага 84×108^{1/32}.
Физ. печ. л. 9,25. Условн. печ. л. 15,17. Уч.-изд. л. 13,15.
Тираж 8000 экз. Т-06318. Цена книги 8 р. 60 к. Заказ № 189.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

е дис л о в и е	5
---------------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

а в а I. Общие принципы релятивистской кинематики	9
§ 1. Интегралы движения. Законы сохранения	9
§ 2. Основные системы координат	11
§ 3. Некоторые формулы релятивистской механики	12
§ 4. Релятивистские преобразования углов и импульсов	15
§ 5. Вычисление коэффициента γ релятивистских преобразований при взаимном переходе от Ц-системы к Л-системе	17
а в а II. Эффективные сечения и их преобразование при изменении системы координат	19
§ 6. Интегральные и дифференциальные сечения	19
§ 7. Релятивистское преобразование углового и импульсного распределений (элементов фазового пространства)	20
а в а III. Кинематика взаимодействий с образованием двух частиц	28
§ 8. Взаимодействие в общем релятивистском случае	28
§ 9. Основные формулы для нерелятивистского случая	40
§ 10. Графическое представление кинематических соотношений	44
§ 11. Распад на две частицы	63
§ 12. Связь угловых и энергетических распределений в Ц- и Л-системах частиц, образованных при распаде	72
а в а IV. Взаимодействия с образованием трех частиц	81
§ 13. Экстремальные соотношения	81
§ 14. Энергетический спектр вторичных частиц	85

Глава V. Множественные процессы	90
§ 15. Предельные соотношения	90
§ 16. Энергетические и угловые распределения при множественных процессах	96
§ 17. Определение энергии быстрых нуклонов	103

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Глава VI. Матрица рассеяния и ее свойства	111
§ 18. S -матрица	111
§ 19. Унитарность S -матрицы	114
§ 20. Интегралы движения	116
§ 21. Обращение времени	118
§ 22. Функции преобразования	124
§ 23. Связь S -матрицы с эффективным поперечным сечением	127
Глава VII. Применения общей теории S -матрицы	132
§ 24. Связь эффективных поперечных сечений упругих и неупругих процессов	132
§ 25. Связь эффективных поперечных сечений прямых и обратных реакций	141
Глава VIII. Столкновения частиц, обладающих спином	144
§ 26. Постановка вопроса. Примеры. Параметризация S -матрицы	144
§ 27. Коэффициенты векторного сложения	150
§ 28. Некоторые примеры	154
§ 29. Коэффициенты W , X , Z и Z_1	158
§ 30. Угловые распределения в ядерных реакциях (случай, когда частицы имеют массу покоя, отличную от нуля)	166
Глава IX. Поляризация частиц в ядерных реакциях	173
§ 31. Общая формула	173
§ 32. Основные закономерности возникновения поляризованных частиц в ядерных реакциях	178
Глава X. Реакции с участием фотонов	181
§ 33. Общие формулы	181
§ 34. Связь процессов фоторождения, рассеяния π -мезонов и комптон-эффекта на нуклоне	188
<i>Приложение I</i> (к первой части)	193
<i>Приложение II</i> (ко второй части)	221
Литература	295

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга носит название «Кинематика ядерных реакций». Мы понимаем под кинематикой совокупность соотношений, основанных на законах сохранения, которые вытекают из свойств симметрии пространства — времени в их классической и квантовой форме.

Книга состоит из двух частей. В открывающих первую часть двух вводных главах читателю кратко напоминаются некоторые основные характеристики движения с релятивистскими скоростями, а также излагаются важнейшие для дальнейшего изложения релятивистские преобразования. Здесь же определяются две широко используемые далее системы координат — лабораторная система и система, связанная с центром тяжести, и даются формулы для перехода от одной из этих систем к другой.

Последующие главы первой части посвящены классической кинематике взаимодействий (столкновений и распадов) с образованием двух, трех и многих частиц. При наличии в конечном состоянии лишь двух частиц существует вполне определенная связь между углами их вылета или углом вылета частицы и ее энергией. Характеризующие такую связь соотношения приводятся как в аналитическом, так и в графическом виде. Отдельно рассматриваются частные случаи нерелятивистских взаимодействий и превращений с участием фотонов. При образовании в конечном состоянии трех или многих частиц связь углов их вылета и энергий не является однозначной, и в этих случаях приходится ограничиться нахождением различных экстремальных соотношений. Рассмотрение угловых и энергетических распределений при множественном образовании частиц производится на основе статистической теории Ферми. Оправданием включения этого раздела в книгу по кинематике может служить

то обстоятельство, что в соответствии с первоначальной концепцией Ферми угловые и энергетические распределения множественных процессов основываются на законах сохранения энергии и импульса.

Вторая часть книги посвящена квантовомеханическому рассмотрению кинематики ядерных реакций.

В этой части анализируется одно из фундаментальных понятий, роль которого в интерпретации ядерных взаимодействий все возрастает, именно матрица рассеяния (S -матрица), и рассматриваются основные свойства этой матрицы. На основании теории матрицы рассеяния и теории преобразований Дирака излагаются связанные с законами сохранения свойства поперечных сечений ядерных реакций. Используемая в книге теория преобразований Дирака дает возможность простого введения — без использования теории групп — различных коэффициентов векторного сложения, применяемых в теории ядерных реакций (коэффициенты Клебша—Жордана, коэффициенты Рака, коэффициенты Z , коэффициенты X).

Мы уделили сравнительно большое место проблеме отражения времени в квантовой механике (§ 21). Это обусловлено тем, что большинство работ (включая классические работы) по общей теории S -матрицы содержит ряд ошибок, связанных с неаккуратным рассмотрением этого вопроса. Эти ошибки настолько прочно вошли в теорию, что в настоящее время для избежания недоразумений при использовании формул, имеющих в литературе, необходимо хорошо знать этот вопрос.

Отдельно рассматривается специальный важный случай ядерных реакций, происходящих с участием фотонов.

Вторая часть книги ограничена рассмотрением собственно ядерных реакций. Сюда не включены проблема распада частиц (например, вопросы корреляции при распаде) и реакции с поляризованными частицами (разбирается лишь вопрос о возникновении поляризованных частиц в ядерных реакциях и основные связанные с этим закономерности). Для изложения опущенных вопросов понадобилось бы значительно расширить круг привлекаемых математических представлений, а это существенно увеличило бы объем книги (рассчитанной, в основном, на экспериментаторов) и трудность ее восприятия.

Отнюдь не преследуя цели создания справочника по кинематике ядерных реакций, мы, тем не менее, сочли целесообразным включить в книгу ряд таблиц, графиков, числовых данных и примеров. Так, в приложении I даны графики связи углов и энергий для нескольких широко исследуемых взаимодействий с участием легких ядер или элементарных частиц. В приложении II приводятся таблицы значений коэффициентов Клебша—Жордана и Рака, а также числовые таблицы коэффициентов Z , Z_γ и X .

Первая часть книги написана В. И. Гольданским и И. Л. Розенталем, а вторая часть — А. М. Балдиным.

Необходимо отметить большую работу В. А. Петрунькина и А. И. Лебедева по составлению приложения II. Ими были сверены между собой и переработаны таблицы коэффициентов W , Z , X и Z_γ .

Мы отлично сознаем, что в этой книге, являющейся первой попыткой обобщить и систематизировать сведения по кинематике ядерных реакций, будет много упущений и недостатков. Мы заранее благодарны читателям, которые возьмут на себя труд ознакомиться с книгой и прислать нам все возникшие при чтении книги замечания.

В заключение авторы приносят благодарность В. Б. Берестецкому и Г. Н. Копылову, сделавшим ряд ценных замечаний.

*А. М. Балдин
В. И. Гольданский
И. Л. Розенталь*

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. This includes the use of surveys, interviews, and focus groups to gather qualitative information, as well as the application of statistical techniques to quantitative data.

3. The third part of the document addresses the challenges and limitations of data collection and analysis. It highlights the potential for bias and error in data collection, as well as the complexity of interpreting and drawing conclusions from the data.

4. The fourth part discusses the ethical considerations surrounding data collection and analysis. It emphasizes the need to protect the privacy and confidentiality of individuals whose data is being collected, and to ensure that the data is used only for the purposes for which it was collected.

5. The fifth part of the document provides a summary of the key findings and conclusions of the study. It highlights the main insights gained from the data and discusses the implications of these findings for the organization's operations and decision-making.

6. The sixth part of the document provides a list of references and sources used in the study. This includes books, articles, and other publications that have informed the research and analysis.

7. The seventh part of the document provides a list of appendices and supplementary materials. This includes raw data, survey instruments, and other documents that provide additional information and detail about the study.

8. The eighth part of the document provides a list of contact information for the researchers and other individuals involved in the study. This includes names, titles, and contact details for those who may have questions or need further information about the study.

9. The ninth part of the document provides a list of acknowledgments and thanks. This includes expressions of gratitude to those who have supported the study, provided assistance, or contributed to the research in other ways.

10. The tenth part of the document provides a list of other relevant information and resources. This includes links to websites, databases, and other sources that may be useful for those interested in the study or its findings.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

§ 1. Интегралы движения. Законы сохранения

Как известно из классической механики, систему из N частиц в случае пренебрежения их пространственной структурой (т. е. когда частицы рассматриваются как материальные точки) можно описать при помощи $3N$ дифференциальных уравнений, которым соответствуют $6N$ интегралов движения, т. е. величин, сохраняющихся при изменениях, происходящих в системе. Полное число интегралов движения, естественно, задается тем, что в каждый момент времени система определяется $3N$ координатами и $3N$ импульсами частиц (см., например, [1]). Среди $6N$ интегралов движения *) не все играют одинаковую роль. Чтобы выяснить эту роль, рассмотрим изолированную систему, т. е. систему, которая не подвержена действию внешних сил (**). Для такой системы имеется десять интегралов движения, которые соответствуют физическим величинам, всегда сохраняющимся при любом произвольном взаимодействии между частицами системы во время движения. Эти величины, по крайней мере, в принципе можно измерить на опыте в рамках классической механики. 10 интегралов движения можно представить, в соответствии с их физическим смыслом, следующим образом: $10 = 4 + 3 \cdot 2$. Цифра 4 соответствует закону сохранения

*) Более точно число независимых интегралов движения равно $6N - 1$.

***) Хотя такой подход и несколько абстрактен, однако он дает отличное приближение во всех интересующих нас случаях.

энергии — импульса, которые в релятивистской механике образуют единый четырехмерный вектор. Эти четыре величины (энергия и три компоненты импульса) и являются в данном случае интегралами движения. Шесть остальных интегралов движения соответствуют образованию «моментов» при попарных комбинациях четырех осей (трех пространственных и временной). Три величины, полученные при комбинировании лишь пространственных осей, соответствуют обычным моментам импульсов, которые также являются интегралами движения. Три других величины, полученные комбинированием временной и каждой из пространственных осей, выражают прямолинейность и равномерность движения центра тяжести системы. В ньютоновской механике последние утверждения есть следствие закона сохранения импульса.

Остановимся теперь на важном для нас случае столкновения двух частиц. Выберем в качестве одной из координатных плоскостей плоскость, проходящую через траектории обеих частиц перед столкновением. В этом случае четыре интеграла движения тождественно обращаются в нуль (две компоненты моментов импульса и по одной компоненте импульса и скорости движения центра тяжести). Остаются, таким образом, шесть интегралов, которые, однако, еще в некоторых отношениях существенно неравноправны. Действительно, как мы увидим далее, скорость системы координат, связанной с центром тяжести, целиком определяется энергией и импульсами сталкивающихся частиц, и поэтому оставшиеся интегралы не независимы.

Мы вели наше рассмотрение, ограничиваясь рамками классической механики. Это ограничение вполне разумно в случаях, пока речь идет об энергии или импульсе. Однако при анализе величин, связанных с моментами, уже существенны квантовые представления. В то время как энергии и импульсы элементарных частиц можно складывать классически, моменты их импульсов складываются в соответствии с правилами квантовой механики. Поскольку в первых пяти главах мы будем пользоваться классическими представлениями, остановимся здесь на трех остающихся интегралах энергии и импульса. Некоторые следствия из анализа сохранения моментов импульса будут рассмотрены во второй части книги,

§ 2. Основные системы координат

Хотя с точки зрения релятивистской механики все системы координат равноправны, однако для практических целей особую роль играют две системы: лабораторная и система центра тяжести. Лабораторная система (Л-система) связана с землей, а значит и с наблюдателем, поэтому все условия непосредственного наблюдения задаются именно в лабораторной системе и по этой причине ее удобно использовать для описания результатов исследований. Если мы интересуемся процессом столкновения двух частиц, то в лабораторной системе считаем, что одна из них, которую мы обозначим далее индексом II, покоится, т. е. имеет импульс $p_{II} = 0$ (и в частном случае распада движущейся частицы I и $m_{II} = 0$). Отметим здесь попутно, что это условие характерно для процессов, в которых в начальном состоянии имеются одна или две частицы.

Другая важная система координат связана с центром тяжести системы взаимодействующих частиц, который в этой системе покоится (Ц-система). Эта система удобна тем, что в ней процессы распада и процессы столкновений двух частиц обладают максимальной степенью симметрии. Так, например, распад частицы на две другие характеризуется сферически симметричным распределением образующихся частиц, если не учитывать поляризационные эффекты. Существование последних сводит симметрию к осевой. В случае столкновений двух одинаковых частиц в Ц-системе, помимо тривиальной оси симметрии, совпадающей с относительным направлением движения обеих частиц, имеется также плоскость симметрии, перпендикулярная этому направлению и проходящая через точку, где произошло столкновение.

При столкновении двух неодинаковых частиц существует только осевая симметрия, однако и в этом случае можно высказать обычно некоторые суждения о распределении частиц относительно указанной плоскости. Заметим, что релятивистские преобразования величин из Ц-системы в Л-систему и обратно имеют особенно простой вид сравнительно с преобразованиями в другие системы (см. § 5). Отметим еще некоторые особенности Ц-системы. Основное ее свойство (по существу — определение Ц-системы) заключается в том, что суммарный импульс всех взаимодействующих

частиц в этой системе равен нулю:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i = 0. \quad (2,1)$$

Следовательно, направления движения двух взаимодействующих частиц в Ц-системе всегда образуют угол в 180° : $\tilde{\vartheta}_1 + \tilde{\vartheta}_2 = \pi$, т. е. они летят навстречу друг другу до столкновения и разлетаются в противоположные стороны после столкновения. Благодаря этому элементы телесных углов для обеих взаимодействующих частиц в Ц-системе всегда одинаковы (т. е. $|d \cos \tilde{\vartheta}_1| = |d \cos \tilde{\vartheta}_2|$), а их угловые распределения не изменяются при замене углов вылета одной частицы на дополнительные углы вылета другой частицы, что зачастую сильно упрощает интерпретацию результатов. Заметим далее, что взаимодействие частиц определяется величиной энергии их относительного движения, независимо от того, какова энергия движения каждой из частиц относительно наблюдателя. Поэтому энергия, которая может быть выделена в том или ином ядерном превращении, прежде всего выражается через полную (или кинетическую) энергию частиц именно в Ц-системе, а не в какой-либо иной. Использование значений энергии частиц в Ц-системе существенно облегчает, в частности, вычисление энергетических порогов эндотермических ядерных превращений, в которых сумма масс продуктов превышает сумму масс исходных ядер.

§ 3. Некоторые формулы релятивистской механики

Остановимся вкратце на некоторых следствиях теории относительности (см., например, [2]). В нерелятивистской механике основную роль играют трехмерные векторы в обычном пространстве (например, импульс, сила и т. д.). Теория относительности внесла фундаментальное изменение в это представление, связав пространство и время в единый четырехмерный континуум, в котором основные механические величины образуют уже не трехмерные, а четырехмерные векторы. Таким образом, длина этих векторов будет инвариантна уже относительно поворотов четырехмерных систем координат, в частности относительно перехода от одной инерциальной системы к другой. Мы рассмотрим в этой книге только последнее преобразование.

Обозначим постоянную скорость движения одной системы координат относительно другой через V и примем для простоты, что ее направление совпадает с осями x_1 и x_2 обеих систем. Пусть в обеих системах задан четырехмерный вектор ρ с компонентами ρ_{x1} , ρ_{y1} , ρ_{z1} и ρ_{t1} (система 1) и ρ_{x2} , ρ_{y2} , ρ_{z2} и ρ_{t2} (система 2). В рассматриваемом нами случае пространственные компоненты вектора ρ по осям y и z не будут меняться при переходе от одной системы к другой, т. е.

$$\rho_{y1} = \rho_{y2}, \quad \rho_{z1} = \rho_{z2}. \quad (3,1)$$

Тогда из условия инвариантности длины четырехмерного вектора следует:

$$|\rho_{x1}|^2 + |\rho_{t1}|^2 = |\rho_{x2}|^2 + |\rho_{t2}|^2. \quad (3,2)$$

Наиболее общее линейное преобразование, связывающее координаты ρ_{x2} , ρ_{t2} , ρ_{x1} и ρ_{t1} , можно записать в форме

$$\rho_{x2} = a\rho_{x1} + b\rho_{t1}, \quad \rho_{t2} = c\rho_{x1} + d\rho_{t1}, \quad (3,3)$$

где a , b , c , d — постоянные.

Подставляя (3,3) в (3,2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_{x1} и ρ_{t1} , получаем

$$a = d, \quad (3,4)$$

$$b = -c, \quad (3,5)$$

$$b = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}, \quad (3,6)$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}, \quad (3,7)$$

где

$$A = \frac{\rho_{x2}}{\rho_{t2}}. \quad (3,8)$$

При выводе (3,4) — (3,8) мы использовали уравнения (3,3) при $\rho_{x1} = 0$. Величина A имеет простой физический смысл, к выяснению которого мы сейчас приступим.

Рассмотрим два четырехмерных вектора, которые широко используются в дальнейшем: пространственно-временной вектор (x, y, z, it) и вектор энергии-импульса (p_x, p_y, p_z, iE) *). Подставляя значения компонент векторов в (3,8), получаем

$$A = \frac{x}{it} = -iV, \quad (3,9)$$

*) Здесь и в дальнейшем мы полагаем скорость света $c = 1$.

где V — скорость первой системы относительно второй. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \rho_{x_2} &= \gamma(\rho_{x_1} - iV\rho_{t_1}), \\ \rho_{t_2} &= \gamma(\rho_{t_1} - iV\rho_{x_1}) \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \rho_{x_2} &= \gamma(\rho_{x_1} + E_1V), \\ E_2 &= \gamma(E_1 + p_{x_1}V), \end{aligned} \right\} \quad (3,11)$$

где так называемый коэффициент релятивистского преобразования

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (3,12)$$

Пусть одна из систем координат связана со свободной частицей. Тогда для нее можно переписать (3,8) в следующей форме:

$$A = -i\beta = -i \frac{p}{E}, \quad (3,13)$$

где β — скорость движения частицы в рассматриваемой системе координат, p и E — здесь и далее импульс и полная энергия частицы. Следовательно

$$\beta = \frac{p}{E}. \quad (3,14)$$

Из условия инвариантности квадрата модуля четырехмерного вектора энергии-импульса получаем

$$E^2 - p^2 = \text{Inv.} \quad (3,15)$$

Комбинируя с (3,14), находим

$$E = \frac{\text{Inv}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3,16)$$

Рассмотрим случай, когда $\beta \ll 1$; тогда

$$E = \text{Inv} \cdot \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (3,17)$$

Для определения входящей в (3,17) постоянной потребуем, чтобы это равенство переходило в правильное выражение для кинетической энергии в механике Ньютона:

$$E = m \frac{\beta^2}{2}.$$

Поскольку в этом случае энергия определяется с точностью до несущественной постоянной, то

$$I\nu = m, \quad (3,18)$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3,19)$$

Если частица покоится, то отсюда следует, что

$$E = m. \quad (3,20)$$

То обстоятельство, что энергия и импульс являются компонентами единого четырехмерного вектора, несколько меняет формулировку законов сохранения сравнительно с ее классической нерелятивистской формой*). В то время как в классической механике законы сохранения энергии и импульса выступают как два независимых друг от друга, — теория относительности связывает их воедино в закон сохранения четырехмерного вектора энергии-импульса. Это в свою очередь приводит к важнейшему заключению об инвариантности его абсолютного значения [уравнение (3,15)].

§ 4. Релятивистские преобразования углов и импульсов

В этом параграфе мы рассмотрим две задачи, решения которых будут неоднократно использоваться в дальнейшем:

1. Пусть система 1 движется вдоль оси x со скоростью V относительно системы 2. В системе 1 частица движется со скоростью β_1 под углом ϑ_1 к оси x . Требуется определить угол ϑ_2 между направлением движения частицы и осью x в системе 2.

Пусть скорость β_1 лежит в плоскости xu . Полагая, что dx, dy, dz, dt образуют вектор и учитывая (3,10), легко получить

$$\beta_{x2} = \frac{\beta_{x1} + V}{1 + \beta_{x1}V}, \quad \beta_{y2} = \frac{\beta_{y1}}{\gamma(1 + \beta_{x1}V)}, \quad \beta_{z2} = \beta_{z1} = 0.$$

*) Строго говоря, векторный характер энергии-импульса имеет место для системы невзаимодействующих частиц (или в случаях, рассматриваемых нами в дальнейшем, когда частицы находятся на очень большом удалении друг от друга (см., например, [3]).

Так как $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\beta_{y1}}{\beta_{x1}}$ и $\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{\beta_{y2}}{\beta_{x2}}$, то

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \frac{V}{\beta_1}}. \quad (4,1)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда

$$\frac{V}{\beta_1} \sim 1, \quad 1 + \cos \vartheta \gg 1 - \frac{V}{\beta_1}. \quad (4,2)$$

Из (4,1) тогда получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 \approx \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2}. \quad (4,3)$$

Если $\gamma \gg 1$, то

$$\vartheta_2 \approx \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2}. \quad (4,4)$$

Заметим также, что, используя (3,14), уравнение (4,1) можно переписать в форме

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{p_1 \sin \vartheta_1}{p_1 \cos \vartheta_1 + VE_1}. \quad (4,5)$$

2. Пусть теперь вместо скоростей частицы задается ее энергия E в системе I . Требуется определить, как изменяется величина E при переходе от системы I к системе 2 . Остальные условия остаются прежними.

Вначале допустим, что частица движется перпендикулярно направлению V ; тогда вследствие инвариантности поперечных составляющих импульса

$$p_1 \sin \vartheta_1 = p_2 \sin \vartheta_2$$

энергия при переходе от одной системы к другой не изменяется. Если частица движется под углом к направлению V , то мы разложим ее импульс на две составляющие: перпендикулярную и параллельную V . Первая составляющая не изменяется при переходе, вторая — трансформируется в соответствии с (3,11) поскольку ее направление совпадает с направлением V . Поэтому

$$E_2 = \gamma (E_1 + p_1 V \cos \vartheta_1). \quad (4,6)$$

Воспользовавшись (3,15) и (3,18), легко получить

$$p_2 = \gamma \sqrt{(E_1 + p_1 V \cos \vartheta_1)^2 + \frac{m^2}{\gamma^2}}. \quad (4,7)$$

§ 5. Вычисление коэффициента γ релятивистских преобразований при взаимном переходе от Ц-системы к Л-системе

Для Л- и Ц-систем коэффициент релятивистского преобразования в интересующих нас случаях особенно просто выражается через важнейшую характеристику процессов — полную энергию системы.

В случае распада частицы I

$$\gamma = \frac{E_I}{m_I}. \quad (5,1)$$

Рассмотрим далее столкновение двух частиц. Как уже отмечалось, в этом случае обычно считают, что одна из частиц (масса m_{II}) в Л-системе покоится. Тогда скорость этой частицы в Ц-системе совпадает со скоростью перемещения Ц-системы относительно Л-системы V . Поэтому можно написать

$$\gamma = \frac{\tilde{E}_I}{m_I}. \quad (5,2)$$

Иногда целесообразно выразить коэффициент γ через энергию движущейся частицы в Л-системе. Для этого воспользуемся равенством импульсов двух взаимодействующих частиц в Ц-системе:

$$\tilde{p}_I = \tilde{p}_{II}.$$

Отсюда получаем

$$\tilde{E}_{II}^2 = \tilde{E}_I^2 - m_I^2 + m_{II}^2 \quad (5,3)$$

и

$$\left(\frac{E_I + m_I}{\gamma} - m_I \gamma \right)^2 = m_I^2 (\gamma^2 - 1) + m_{II}^2. \quad (5,4)$$

Разрешая это уравнение относительно γ , найдем

$$\gamma = \frac{E_I + m_I}{\sqrt{2(E_I + m_I)m_I + m_{II}^2 - m_I^2}}. \quad (5,5)$$

Установим далее связь между значениями энергий сталкивающихся частиц в обеих системах. Комбинируя (3,11), (5,2) и (5,3), получаем

$$\tilde{E}_I = \frac{(E_I + m_I)m_I}{\sqrt{2(E_I + m_I)m_I + m_{II}^2 - m_I^2}}. \quad (5,6)$$

енно простую форму принимают выражения (5,5) и в некоторых частных случаях. Если $m_I = m_{II}$, то

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_I + m_I}{2m_I}}, \quad (5,7)$$

$$\tilde{E}_I = \sqrt{\frac{(E_I + m_I)m_I}{2}}. \quad (5,8)$$

вдобавок $\gamma \gg 1$ (что эквивалентно условию $E_I \gg m_I$),

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{E_I}{2m_I}}, \quad (5,9)$$

$$\tilde{E}_I \approx \sqrt{\frac{E_I m_I}{2}}. \quad (5,10)$$

ГЛАВА II

ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 6. Интегральные и дифференциальные сечения

При исследовании ядерных взаимодействий весьма распространены задачи, которые можно сформулировать следующим образом: заданный поток j бомбардирующих частиц I пронизывает некоторую площадку, на которой покоится ядро (частица) — мишень II; какова при этом вероятность $\frac{dw}{dt}$ того, что в единицу времени вообще осуществится превращение $I + II \rightarrow I + 2$ или вероятность осуществления этого превращения при условии, что частица 1 (или 2) приобретает импульс, лежащий в интервале $p, p + dp$, т. е. испускается в интервале углов $\vartheta, \vartheta + d\vartheta$ к направлению движения бомбардирующей частицы I. Очевидно, что вероятность превращения в единицу времени пропорциональна потоку j бомбардирующих частиц: $\frac{dw}{dt} = \sigma j$. Коэффициент пропорциональности σ , имеющий размерность площади ($см^2$), называется эффективным поперечным сечением (или просто сечением) рассматриваемого взаимодействия. Принято различать сечения на интегральные и дифференциальные. Интегральные сечения характеризуют полную вероятность какого-либо превращения безотносительно к направлению испускания вторичных частиц. Мы будем обозначать их буквой σ^* . Дифференциальные сечения характеризуют вероятность того же превращения, но уже при определенных углах разлета

*) В ядерной физике за единицу сечения принят *барн*, равный $10^{-24} см^2$.

вторичных частиц. Для дифференциальных сечений принято обозначение $d\sigma(\vartheta)$. Очевидно, что

$$\int_0^\pi d\sigma(\vartheta) = \int_0^\pi \sigma(\vartheta) d \cos \vartheta = \sigma. \quad (6,1)$$

Отметим, что определенное таким образом сечение релятивистски инвариантно, поскольку оно выражено через трехмерный ток и площадь. Однако мы рассматриваем в этой книге лишь такие взаимодействия, в которых в начальном состоянии имеются две частицы, причем производим преобразования лишь между L -системой, в которой одна из начальных частиц покоилась, и C -системой. В этом случае определенное выше сечение инвариантно. Если в начальном состоянии имеется больше двух частиц, или осуществляется переход к системе координат, движущейся под углом к направлению относительного движения частиц, инвариантное сечение должно быть выражено через четырехмерные величины (например, четырехмерный ток).

§ 7. Релятивистское преобразование углового и импульсного распределений (элементов фазового пространства)

В теории элементарных частиц и их столкновений встречается следующая постановка задачи. Пусть в одной из систем координат угловое и импульсное (или энергетическое) распределения частиц задаются функцией

$$n_1(p_1, \cos \vartheta_1) dp_1 d \cos \vartheta_1 d\varphi_1^*)$$

причем

$$\int \int n_1 dp_1 d \cos \vartheta_1 d\varphi_1 = N,$$

где N — полное число частиц определенного сорта в системе в конечном состоянии.

Требуется определить соответствующую функцию

$$n_2(p_2, \cos \vartheta_2) dp_2 d \cos \vartheta_2 d\varphi_2$$

*) Представление n_1 в такой форме удобно, поскольку здесь сразу дается зависимость от телесного угла, элемент которого равен $\sin \vartheta d\vartheta$.

в другой системе координат. Очевидно, что подобная постановка вопроса совершенно эквивалентна решению следующей задачи: пусть дифференциальное сечение дано в форме

$$d\sigma = \frac{\sigma}{N} n_1(p_1, \cos \vartheta_1) dp_1 d \cos \vartheta_1 d\varphi_1; \quad (7,1)$$

нужно найти выражение для преобразованного дифференциального сечения, которое в этом случае определяется (с точностью до постоянного множителя) характером преобразования функции n_1 . По существу переход от n_1 к n_2 есть переход от системы переменных p_1, ϑ_1 к p_2, ϑ_2 , который осуществляется, как известно, при помощи якобиана

$$J = \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \frac{\partial \cos \vartheta_1}{\partial \cos \vartheta_2} = \frac{\partial p_1}{\partial \cos \vartheta_2} \frac{\partial \cos \vartheta_1}{\partial p_2}. \quad (7,2)$$

Таким образом при переходе от одной системы координат к другой функции распределения по импульсам и углам преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_1(p_1, \cos \vartheta_1) dp_1 d \cos \vartheta_1 d\varphi_1 &= \\ &= n_2(p_2, \cos \vartheta_2) J dp_2 d \cos \vartheta_2 d\varphi_2. \end{aligned} \quad (7,3)$$

Используя (4,5), (4,7) и равенство $d\varphi_1 = d\varphi_2$, можно получить

$$J = \gamma \frac{p_2^2}{p_1^2 E_2} (E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2) = \frac{p_2^2 (E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2)}{\gamma E_2 \left[(E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2} \right]}. \quad (7,4)$$

Особенно просто якобиан выражается в энергетическом представлении, когда в качестве переменных использованы величины E и $\cos \vartheta$. Для вычисления якобиана J в этом случае воспользуемся инвариантностью величины $\frac{dp_x dp_y dp_z}{E}$ *) и представим элемент фазового объема в форме

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 dp d \cos \vartheta d\varphi. \quad (7,5)$$

Поскольку число частиц в заданном элементе фазового объема есть инвариант, то

$$\frac{n_1(E_1, \cos \vartheta_1) p_1^2 dp_1 d \cos \vartheta_1}{E_1} = \frac{n_2(E_2, \cos \vartheta_2) p_2^2 dp_2 d \cos \vartheta_2}{E_2}, \quad (7,6)$$

*) Доказательство инвариантности достигается непосредственно простым вычислением (см., например, [1, 2]).

откуда следует

$$J = \frac{p_2^2 E_1}{p_1^2 E_2}. \quad (7,7)$$

В системе координат (p_1, ϑ_1) область, в которой заключены величины p_1, ϑ_1 для каждого данного процесса, ограничивается кривыми

$$p_{1 \max} = \Phi_1(\vartheta_1) \quad (7,8)$$

и

$$p_{1 \min} = \Phi_2(\vartheta_1), \quad (7,9)$$

где Φ_1, Φ_2 — некоторые функции, определяемые конкретными физическими процессами и законами сохранения.

Так, при реакциях, в результате которых в конечном состоянии имеются три или более частиц, их импульсы могут принимать любые значения от 0 до p_{\max} , определяемого значением масс этих частиц. При реакциях с участием в конечном состоянии двух частиц их импульс в Ц-системе может принимать строго определенное значение, зависящее только от значений \tilde{E}, m_1, m_2 . (Более подробно об этом см. следующие разделы.)

Подставляя в (7,8) и (7,9) значения величин ϑ_1, p_1 , определенные в соответствии с (4,1) и (4,7), получаем следующие уравнения для кривых, которые ограничивают области изменения координат p_2, ϑ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma \sqrt{(E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}} &= \\ &= \Phi_1 \left[\arctg \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2 \sin \vartheta_2}{p_2 \cos \vartheta_2 - V E_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7,10)$$

$$\begin{aligned} \gamma \sqrt{(E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}} &= \\ &= \Phi_2 \left[\arctg \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2 \sin \vartheta_2}{p_2 \cos \vartheta_2 - V E_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7,11)$$

Уравнения (7,10) и (7,11) на практике сильно упрощаются. Так, например, при распаде $\Phi_1 = p_{1 \max} = \text{const}$; в случае распада на две частицы $\Phi_1 = \Phi_2$; при распаде на три — $\Phi_2 = 0$. В этих случаях кривая, соответствующая (7,10), описывается уравнением второго порядка. Исследование показывает, что эта кривая всегда является эллипсом. Таким образом, если в системе координат (p_1, ϑ_1) кривая, ограничивающая неко-

торую область, является окружностью, то преобразование в систему координат (p_2, ϑ_2) трансформирует ее в эллипс *).

Разрешая уравнение (7,10) относительно p_2 при условии $\Phi_1 = p_{1 \max} = \text{const}$, получаем

$$p_2 = \frac{E_1 V \cos \vartheta_2 \pm \sqrt{m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta_2 - m^2 \gamma^2 + E_1^2}}{\gamma (1 - V^2 \cos^2 \vartheta_2)}. \quad (7,12)$$

Знак перед радикалом в формуле (7,12) выбирается следующим образом:

1) Если выражение под радикалом всегда положительно, то следует выбрать знак $+$. Действительно, в данном случае при изменении импульса от 0 до $p_{1 \max}$ знак перед радикалом не может изменяться, так как функция должна быть непрерывной. Поэтому во всем интервале должен быть либо знак $+$, либо знак $-$. Но так как всегда существуют положительные значения p_2 (например, при $\vartheta_2 = 0$), то в данном случае следует выбрать знак $+$ для всего интервала $(0 - p_{1 \max})$. Таким образом, первым критерием для выбора знака является положительная определенность выражения

$$D(\vartheta_2) = m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta_2 - m^2 \gamma^2 - E_1^2. \quad (7,13)$$

Легко показать, что $D(\vartheta_2) > 0$, если $\beta_1 > V$, т. е. скорость частицы в системе 1 больше, чем скорость V перемещения системы 1 относительно системы 2. Следовательно, если скорость частицы $\beta_1 > V$, то всегда выбирается знак $+$.

2) Если $\beta_1 < V$, то при некотором значении $\vartheta_2 = \vartheta_{2 \max}$ $D(\vartheta_2) = 0$ и необходимо учитывать оба знака. При $\vartheta_2 > \vartheta_{2 \max}$ *) имеем $D(\vartheta_2) < 0$ ($2\vartheta_{2 \max}$ — угол под которым виден из начала координат эллипс, определяемый уравнением (7,10)).

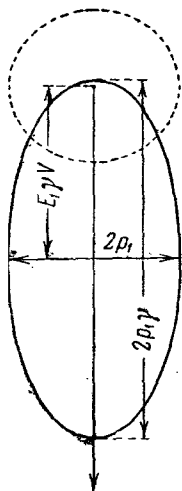
Из условия $D(\vartheta_{2 \max}) = 0$ можно получить

$$\sin \vartheta_{2 \max} = \sqrt{\frac{1 - V^2}{\frac{V^2}{\beta_1^2} - V^2}}. \quad (7,14)$$

*) Исследование эллипса для случая упругого столкновения было проведено в [2]; общий случай проанализирован Блэтоном [4]. Общие правила построения таких эллипсов и ряд конкретных примеров будут рассмотрены в § 10.

**) Наличие максимального угла при условии $\beta_1 < V$ отражает тот факт, что в этом случае частицы в Л-системе движутся только вперед.

На рис. 1 изображена схема трансформации окружностей $\rho_1 = \text{const}$ при преобразовании Лоренца для случая $\beta_1 > V$. Между радиусами-векторами окружности и эллипса имеется взаимно-однозначное соответствие. Эллиптическая кривая вычислялась по формуле (7,12) при следующих значениях параметров: $m = 1$; $E_1 = 3$; $V = 0,9$.



Описанный метод преобразований целесообразно использовать для получения угловых и энергетических зависимостей в Л-системе (см. § 13).

Другая форма анализа была использована Брадтом, Каплоном и Петерсом [5], применившими смешанную систему координат (ρ_1, ϑ_2) .

Для того чтобы вычислить в этом случае якобиан, воспользуемся формулой (4,5), из которой следует

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \\ &= \frac{-E_1 V \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 \pm \sqrt{p_1^2 + [p_1^2 - V^2 E_1^2] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2}}{p_1 [\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 + 1]} \end{aligned} \quad (7,15)$$

Рис. 1. Преобразование $\rho_1, \vartheta_1 \rightarrow \rho_2, \vartheta_2$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &> V; \\ E_1 &= 3; \\ V &= 0,9. \end{aligned}$$

Знак в формуле (7,15) выбирается из соображений, аналогичных приведенным ранее:

1) Если выражение, стоящее под радикалом, всегда положительно, то следует выбрать знак $+$ во всем интервале изменения угла ϑ_2 (от 0 до π).

Критерием для выбора знака является положительная определенность выражения

$$f(\vartheta_2) = p_1^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 [p_1^2 - V^2 E_1^2], \quad (7,16)$$

что также имеет место при условии $\beta_1 > V$.

2) Если $\beta_1 < V$, то всегда существует максимально допустимый угол $\vartheta_{2 \max} < \pi$. Из соображений непрерывности следует, что в интервалах $0 < \vartheta_1 < \vartheta_{1 \max}$ и $\vartheta_{1 \max} < \vartheta_1 < \pi$ ($\vartheta_{1 \max}$ — угол, соответствующий $\vartheta_{2 \max}$) перед радикалом нужно выбирать постоянный знак. Так как при значении $\vartheta = 0$, $\cos \vartheta > 0$, то во всем интервале $0 < \vartheta_1 < \vartheta_{1 \max}$ следует

выбирать знак $+$; аналогично в интервале $\vartheta_{1 \max} < \vartheta_1 < \pi$ выбирается знак $-$.

Из условия $f[\vartheta_2(\vartheta_1)] = 0$ можно записать

$$\cos \vartheta_{1 \max} = -\frac{\beta_1}{V}. \quad (7,17)$$

В системе 2 угол $\vartheta_{2 \max}$ определяется формулой (7,14). Таким образом, если $\beta_1 < V$ и $\vartheta_1 < \vartheta_{1 \max}$, выбирается знак $+$, при $\vartheta_1 > \vartheta_{1 \max}$ — знак $-$.

Из (7,15) можно вычислить $J_1 = \left. \frac{\partial \cos \vartheta_1}{\partial \cos \vartheta_2} \right|_{p_1} = \text{const}$

$$J_1 = \frac{\gamma^2 [VE_1 \pm \sqrt{p_1^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 (p_1^2 - V^2 E_1^2)}]^2}{p_1 \cos^3 \vartheta_2 (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 + 1)^2 \sqrt{p_1^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 (p_1^2 - V^2 E_1^2)}} \quad (7,18)$$

знак $+$ выбирается, если $\beta_1 > V$ или если $\beta_1 < V$ и $0 < \vartheta_1 < \vartheta_{1 \max}$; знак $-$, если $\beta_1 < V$ и $\vartheta_{1 \max} < \vartheta_1 < \pi$.

На рис. 2а представлено преобразование области, ог-

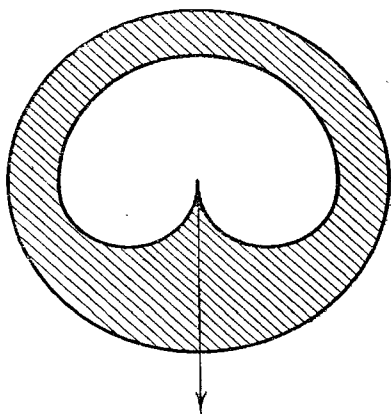


Рис. 2а. Преобразование $p_1, \vartheta_1 \rightarrow p_1, \vartheta_2$:
 $\beta_1 > V$; $E_1 = 3$, $V = 0,9$.

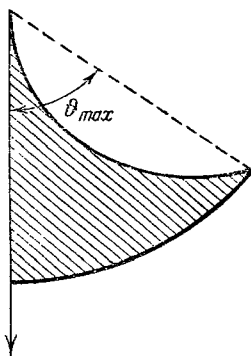


Рис. 2б. Преобразование $p_1, \vartheta_1 \rightarrow p_1, \vartheta_2$:
 $\beta_1 < V$; $E_1 = 2$; $V = 0,9$.

раниченной в системе 1 уравнениями $p_{1 \max} = \text{const}$; $p_{1 \min} = 0$ для случая $\beta_1 > V$. Естественно, что поскольку импульс не преобразуется, то окружность $p_{1 \max} = \text{const}$ не изменяется. Однако для малых импульсов, в соответствии с формулой (7,14),

появляются запрещенные области. Заштрихованная область соответствует разрешенным значениям импульсов и углов в системе 2. На рис. 2б представлено преобразование

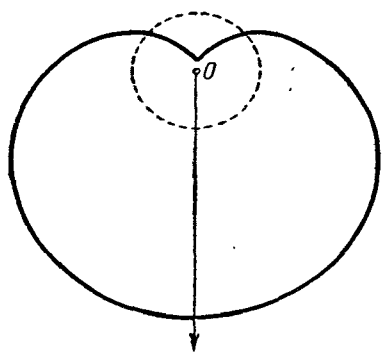


Рис. 3. Преобразование

$$p_1, \vartheta_1 \rightarrow p_2, \vartheta_1; \\ E_1 = 3; V = 0,9.$$

соответствующий преобразованию из системы (p_1, ϑ_1) в систему (p_2, ϑ_1) , необходимо вычислить явное выражение $p_1(p_2, \vartheta_1)$. Воспользовавшись формулой (7,12), получаем

$$J_2 = \left. \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \right|_{\vartheta_1 = \text{const}} = \\ = \frac{p_2}{\gamma(1 - V^2 \cos^2 \vartheta_2)} \left[\frac{1}{\sqrt{p_2^2 - \gamma^2 V^2 m^2 \sin^2 \vartheta_1}} - \frac{V \cos \vartheta_2}{\sqrt{p_2^2 + m^2}} \right]. \quad (7,19)$$

Интервалы изменений величины $p_2(\vartheta_1)$ легко определить из уравнений:

$$p_{2 \min} = \gamma \sqrt{(E_{1 \min} + p_{1 \min} V \cos \vartheta_1)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}}, \quad (7,20)$$

$$p_{2 \max} = \gamma \sqrt{(E_{1 \max} + p_{1 \max} V \cos \vartheta_1)^2 - \frac{m^2}{\gamma^2}}. \quad (7,21)$$

Особенно простую форму принимают величины $p_{2 \min}$ и $p_{2 \max}$ в интересующем нас случае, когда $p_{1 \min} = 0$; $p_{1 \max} = \text{const}$.

Трансформация области, ограниченной окружностью, при преобразовании $(p_1, \vartheta_1) \rightarrow (p_2, \vartheta_1)$ схематически изображена на рис. 3.

аналогичной области для случая $\beta_1 < V$. Масштаб и значение параметров на обоих рисунках одинаковы.

В том случае, если импульс в системе 1 имеет строго определенное значение (например, при распаде на две частицы), то при $\beta_1 > V$ окружность $p_{1 \max} = \text{const}$ переходит в дугу.

В отдельных случаях для получения импульсного распределения удобно пользоваться системой (p_2, ϑ_1) . Для того чтобы получить якобиан J_2 ,

получения импульсного распределения удобно пользоваться системой (p_2, ϑ_1) . Для того чтобы получить якобиан J_2 ,

Необходимо подчеркнуть, что в крайнем релятивистском случае основные приведенные выше формулы для вычисления якобианов существенно упрощаются. Если $p_2 \gg m$, $\gamma \gg 1$, то

$$J \approx \frac{p_2}{\gamma(E_2 - p_2 V \cos \vartheta_2)}. \quad (7,22)$$

При дополнительном условии

$$1 - \cos \vartheta_2 \gg \frac{m^2}{p_2^2},$$

$$J \approx \frac{1}{\gamma(1 - V \cos \vartheta_2)}. \quad (7,23)$$

Если $\gamma \gg 1$ и $\vartheta_2 \gg 1$, то

$$\cos \vartheta_1 \approx \frac{-V\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 \pm 1}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 + 1} \quad (7,24)$$

и

$$J_1 \approx \frac{\pm \gamma^2 (V \pm 1)^2}{\cos^3 \vartheta_2 (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_2 + 1)^2}. \quad (7,25)$$

Если дополнительно $\vartheta \ll \frac{1}{\gamma}$, то

$$\cos \vartheta_1 \approx 1 - 2\gamma^2 \vartheta_2^2 \quad (7,26)$$

и

$$J_1 \approx 4\gamma^2 (1 - \gamma^2 \vartheta_2^2). \quad (7,27)$$

Если $p_2 \gg \gamma m$, то

$$J_2 \approx \frac{1}{\gamma(1 + V \cos \vartheta_1)}. \quad (7,28)$$

В заключение этой главы следует отметить, что все выведенные в ней соотношения описывали преобразования импульсов и углов для двух любых систем координат. Однако в том случае, когда рассматривается переход от Ц-системы к Л-системе, формулы существенно упрощаются, так как в этом случае коэффициент преобразования γ непосредственно выражается через важнейшую характеристику интересующих нас процессов (распад, столкновение) — энергию первичной частицы (см. § 5).

ГЛАВА III

КИНЕМАТИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ДВУХ ЧАСТИЦ

§ 8. Взаимодействие в общем релятивистском случае

Наиболее распространенными в лабораторной практике являются ядерные взаимодействия с образованием двух частиц. К таким взаимодействиям относятся упругое и неупругое рассеяние и огромное большинство ядерных реакций в области энергий до нескольких сот *Мэв*. Две частицы образуются и в ряде изученных в последние годы превращений элементарных частиц — мезонов, гиперонов, нуклонов и антинуклонов (например, $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$, $p + \tilde{p} \rightarrow n + \tilde{n}$ и т. д.), осуществляющихся в космических лучах и на ускорителях сверхвысоких энергий.

К числу ядерных взаимодействий с образованием трех частиц при малых энергиях относятся лишь рождение пар e^- , e^+ и β -распад (причем третьей частицей, участвующей в процессе, в том и другом случае является ядро отдачи). При высоких энергиях взаимодействия с образованием большого числа частиц становятся все более вероятными. Как известно, при сверхвысоких энергиях наблюдаются и такие ядерные процессы, в которых образуются подчас десятки элементарных частиц.

В задачу кинематического анализа ядерного взаимодействия из законов сохранения энергии и импульса прежде всего входит установление (при заданных массах и энергиях взаимодействующих частиц) связи между углами вылета различных продуктов реакции и между углом вылета и энергией для каждого из них. Сравнение расчетных и найденных на опыте данных о связи между углами вылета и

энергией продуктов ядерного взаимодействия способствует правильной их идентификации, тем самым помогая сделать верный выбор между различными предполагаемыми механизмами этого взаимодействия.

Зачастую возникает и другая задача, связанная с кинематикой ядерных взаимодействий — задача перевода значений углов вылета, энергий частиц и эффективных сечений процессов из Л-системы в Ц-систему, для которой обычно выводятся все теоретические формулы вида угловых распределений. Иногда ставится и обратная задача — переход от Ц-системы к Л-системе. Обе эти задачи могут быть решены до конца только в случае, когда в рассматриваемом процессе образуются две частицы. При возникновении трех или большего числа частиц можно получить, как это показано ниже, лишь некоторые экстремальные соотношения для предельных случаев, связанных с различными дополнительными предположениями. Эти предельные случаи сводятся, по сути дела, к различным вариантам замены одноактного образования многих частиц несколькими актами, в каждом из которых образуется по две частицы.

Таким образом, процессы ядерных взаимодействий с образованием двух частиц, рассмотрению которых посвящена эта

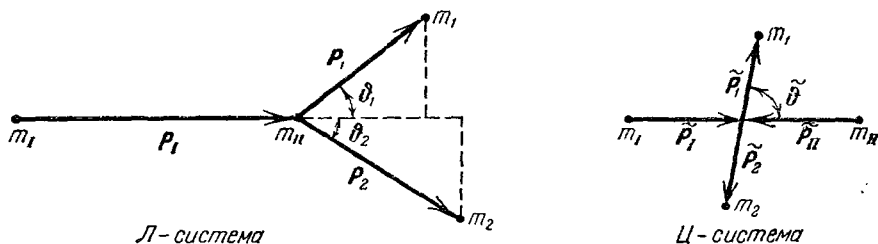


Рис. 4. Реакция $I + II \rightarrow I + 2$ в Л- и Ц-системах.

глава, являются не только наиболее распространенными, но и представляют из себя наиболее общий случай, расчеты для которого применяются и к процессам других типов.

Перейдем теперь к конкретному рассмотрению ядерного взаимодействия вида: $I + II \rightarrow I + 2$ (см. рис. 4) *).

*) Здесь и далее индексы 1 и 2 относятся к конечным продуктам реакции, а не к системам координат, как это было ранее.

Как обычно, будем предполагать, что в Л-системе движется лишь одна из взаимодействующих частиц (I), а частица-мишень (II) покоится. Тогда релятивистские выражения законов сохранения энергии и импульса примут вид:

$$E_1 + m_{II} = E_1 + E_2 = E_n, \quad (8,1)$$

$$p_1 = p_1 \cos \vartheta_1 + p_2 \cos \vartheta_2, \quad (8,2)$$

$$0 = p_1 \sin \vartheta_1 - p_2 \sin \vartheta_2, \quad (8,3)$$

где E_n — суммарная энергия частиц. Отсюда получаем следующую связь между углами вылета и энергиями частиц I и 2:

$$E_1 = \frac{A_1 E_n \pm p_1 \cos \vartheta_1 \sqrt{A_1^2 - 4m_1^2 (E_n^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_1)}}{2 (E_n^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_1)}, \quad (8,4)$$

$$E_2 = \frac{A_2 E_n \pm p_1 \cos \vartheta_2 \sqrt{A_2^2 - 4m_2^2 (E_n^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_2)}}{2 (E_n^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_2)}, \quad (8,4')$$

где

$$A_1 = E_n^2 - p_1^2 + m_1^2 - m_2^2 = M_n^2 + 2m_{II}W_I + m_1^2 - m_2^2, \quad (8,5)$$

$$A_2 = E_n^2 - p_1^2 + m_2^2 - m_1^2 = M_n^2 + 2m_{II}W_I + m_2^2 - m_1^2, \quad (8,5')$$

W_I — кинетическая энергия частицы I.

Суммарная масса покоя системы в начальном состоянии

$$M_n = m_1 + m_{II}. \quad (8,6)$$

Требование положительности подкоренных выражений в (8,4) и (8,4') приводит, как уже отмечалось в § 7, к условиям для предельных углов вылета частиц I и 2:

$$\sin^2 \vartheta_1 \leq \frac{A_1^2 - 4m_1^2 (M_n^2 + 2m_{II}W_I)}{4m_1^2 p_1^2}, \quad (8,7)$$

$$\sin^2 \vartheta_2 \leq \frac{A_2^2 - 4m_2^2 (M_n^2 + 2m_{II}W_I)}{4m_2^2 p_1^2}. \quad (8,8)$$

Очевидно, что полагая ϑ_1 и ϑ_2 в (8,7) и (8,8) равными нулю, мы должны получить величину W_I порог, отвечающую порогу исследуемой реакции в том случае, когда ее тепловой эффект

$$Q = M_n - (m_1 + m_2) = M_n - M_{\kappa} \quad (8,9)$$

отрицателен. (M_{κ} — масса покоя системы в конечном состоянии.) Исходя из соотношения

$$A_1^2 = 4m_1^2 (M_{\kappa}^2 + 2m_{II} W_{I \text{ порог}}) \quad (8,10)$$

или

$$A_2^2 = 4m_2^2 (M_{\kappa}^2 + 2m_{II} W_{I \text{ порог}}) \quad (8,10')$$

мы получаем

$$M_{\kappa}^2 + 2m_{II} W_{I \text{ порог}} = M_{\kappa}^2, \quad (8,11)$$

откуда

$$2m_{II} W_{I \text{ порог}} = M_{\kappa}^2 - M_{\kappa}^2 = |Q| (|Q| + 2M_{\kappa}) \quad (8,12)$$

или

$$W_{I \text{ порог}} = |Q| \left\{ \frac{M_{\kappa} + \frac{1}{2}|Q|}{m_{II}} \right\}. \quad (8,13)$$

Итак, мы установили две основные кинематические зависимости: $E_1 = f(\vartheta_1)$ и $E_2 = f(\vartheta_2)$. Ясно, что третья основная зависимость $\vartheta_2 = f(\vartheta_1)$ может быть получена из них с учетом закона сохранения энергии. Для получения этой зависимости в аналитическом виде проще, однако, воспользоваться формулами перехода от Л- к Ц-системе. По определению Ц-системы, скорость ее перемещения в Л-системе — переносная скорость

$$V = \frac{p_I + p_{II}}{E_I + E_{II}}, \quad (8,14)$$

а в случае, когда частица II покоится,

$$V = \frac{p_I}{E_I + m_{II}} = \frac{p_I}{E_{\kappa}}. \quad (8,14')$$

Очевидно отсюда, что скорости частиц I и II в Ц-системе равны:

$$\tilde{\beta}_{II} = V = \frac{\sqrt{E_I^2 - m_I^2}}{E_I + m_{II}} = \frac{\sqrt{W_{II}(W_{II} + 2m_I)}}{W_{II} + M_{\kappa}}, \quad (8,15)$$

$$\tilde{\beta}_I = \frac{\beta_I - V}{1 - \beta_I V} = \frac{m_{II} \sqrt{E_I^2 - m_I^2}}{m_I^2 + m_{II} E_I}. \quad (8,15')$$

Импульсы сближающихся частиц I и II в Ц-системе будут

$$\tilde{p}_I = \tilde{p}_{II} = \tilde{p}_{\kappa} = m_{II} \sqrt{\frac{E_I^2 - m_I^2}{m_I^2 + m_{II}(2E_I + m_I^2)}}, \quad (8,16)$$

а их энергии

$$\tilde{E}_I = \frac{m_I^2 + m_{II} E_I}{\sqrt{m_I^2 + m_{II} (2E_I + m_{II})}}, \quad \tilde{E}_{II} = \frac{m_{II} (E_I + m_{II})}{\sqrt{m_I^2 + m_{II} (2E_I + m_{II})}}. \quad (8,17)$$

Отсюда получаем выражение для суммарной энергии двух сближающихся частиц в Ц-системе

$$\tilde{E}_\Pi = \tilde{E}_I + \tilde{E}_{II} = \sqrt{m_I^2 + m_{II} (2E_I + m_{II})} = \sqrt{M_\Pi^2 + 2m_{II} W_I}, \quad (8,18)$$

т. е.

$$\tilde{E}_\Pi^2 = E_\Pi^2 - p_I^2 = p_I^2 \frac{1 - V^2}{V^2} = E_\Pi^2 (1 - V^2). \quad (8,19)$$

Равенство (8,19) есть частный случай записи (3,15). Действительно, так как по определению Ц-системы — суммарный импульс $p_\Pi = 0$, то из (3,15) следует

$$E_\Pi^2 - p_\Pi^2 = \text{Inv} = \tilde{E}_\Pi^2. \quad (8,20)$$

Из равенства (8,18), характеризующего полную энергию в Ц-системе, мы можем получить выражение для порога реакции

$$\tilde{E}_{\Pi, \text{порог}} = \sqrt{M_\Pi^2 + 2m_{II} W_I \text{порог}} = M_\kappa, \quad (8,21)$$

из которого следует уже полученное выше соотношение (8,13).

Из условий

$$\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = \tilde{E}_\Pi \quad (8,22)$$

и

$$\tilde{p}_1 = \sqrt{\tilde{E}_1^2 - m_1^2} = \tilde{p}_2 = \sqrt{\tilde{E}_2^2 - m_2^2} \quad (8,23)$$

легко получаем выражение для импульсов и энергий двух разлетающихся частиц-продуктов реакции в Ц-системе:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_\kappa &= \frac{\sqrt{A_{1(2)}^2 - 4\tilde{E}_\Pi^2 m_{1(2)}^2}}{2\tilde{E}_\Pi} = \\ &= \frac{\sqrt{[\tilde{E}_\Pi^2 - (m_1 + m_2)^2][\tilde{E}_\Pi^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{2\tilde{E}_\Pi}, \quad (8,24) \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{1(2)} = \frac{A_{1(2)}}{2\tilde{E}_\Pi} = \frac{\tilde{E}_\Pi + m_{1(2)}^2 - m_{2(1)}^2}{2\tilde{E}_\Pi}. \quad (8,25)$$

Перейдем теперь к установлению связи углов в Л- и Ц-системах. Примем за угол $\tilde{\vartheta}$ отклонения в Ц-системе угол $\tilde{\vartheta}_1$ между направлением векторов $\tilde{\mathbf{p}}_1$ и $\tilde{\mathbf{p}}_1$. Тогда, очевидно, угол между направлениями векторов $\tilde{\mathbf{p}}_1$ и $\tilde{\mathbf{p}}_2$ будет равен $\tilde{\vartheta}_2 = \pi - \tilde{\vartheta}_1$. Ввиду такой простой связи между углами $\tilde{\vartheta}_1$ и $\tilde{\vartheta}_2$ будем в дальнейшем выводить все основные формулы лишь для одного угла $\tilde{\vartheta}_1 = \tilde{\vartheta}$, т. е. только для одного из продуктов реакции — частицы 1. При необходимости получить соответствующие формулы для частиц 2 следует лишь заменить

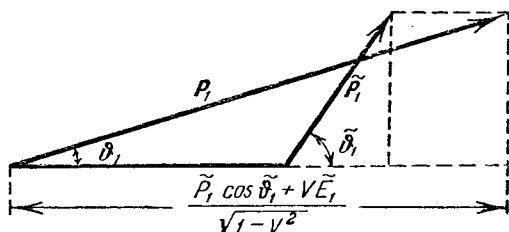


Рис. 5. Иллюстрация связи Л- и Ц-систем (релятивистский случай) — сложение скоростей.

всюду индекс 1 на индекс 2 и $\cos \tilde{\vartheta}$ на $-\cos \tilde{\vartheta}$. В тех случаях, когда формулы совершенно идентичны для частиц 1 и 2, мы будем писать обобщенный индекс n .

Из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cos \vartheta_1 &= \frac{\tilde{p}_x \cos \tilde{\vartheta} + V \tilde{E}_1}{\sqrt{1 - V^2}}, \\ p_1 \sin \vartheta_1 &= \tilde{p}_x \sin \tilde{\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (8,26)$$

иллюстрируемых для рассматриваемого случая рис. 5, следует

$$\operatorname{ctg} \vartheta_1 = \frac{\cos \tilde{\vartheta} + \rho_1}{\sqrt{1 - V^2} \sin \tilde{\vartheta}}, \quad (8,27)$$

причем

$$\rho_n = \frac{V}{\tilde{\rho}_n} = \frac{p_1 \tilde{E}_n}{\tilde{p}_n E_n} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 + m_1} \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 - 4 \tilde{E}_n^2 m_n^2}}. \quad (8,28)$$

Используя еще равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \gamma = \frac{E_{II}}{\tilde{E}_{II}} = \frac{E_I + m_{II}}{\sqrt{m_I^2 + m_{II}(2E_I + m_{II})}}, \quad (8,29)$$

из (8,27) получаем обратную зависимость $\tilde{\vartheta}$ от ϑ_1 в виде

$$\cos \tilde{\vartheta} = \frac{-\gamma^2 \rho_1 \pm \operatorname{ctg} \vartheta_1 \sqrt{\gamma^2(1-\rho_1^2) + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1}}{\gamma^2 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1} \quad (8,30)$$

или

$$\cos \tilde{\vartheta} = \frac{-\rho_1 \sin^2 \vartheta_1 \pm (1-V^2) \cos \vartheta_1 \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2 - V^2}{1-V^2} \sin^2 \vartheta_1}}{1 - V^2 \cos^2 \vartheta_1}, \quad (8,30')$$

а также

$$\sin \tilde{\vartheta} = \frac{\gamma \left[\rho_1 \operatorname{ctg} \vartheta_1 \pm \sqrt{\gamma^2(1-\rho_1^2) + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1} \right]}{\gamma^2 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1} \quad (8,31)$$

или

$$\sin \tilde{\vartheta} = \frac{\sqrt{1-V^2} \sin \vartheta_1 \left[\rho_1 \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2 - V^2}{1-V^2} \sin^2 \vartheta_1} \right]}{1 - V^2 \cos^2 \vartheta_1}. \quad (8,31')$$

Формулы, связывающие угол $\tilde{\vartheta}$ с углом ϑ_2 , получаются совершенно аналогично. Условие предельных углов ϑ_1 и ϑ_2 определено равенством (7,14). При $\rho_n \geq 1$ данному углу ϑ_n в Л-системе отвечают два значения угла $\tilde{\vartheta}$ в Ц-системе, и лишь при $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$ решение для $\tilde{\vartheta}$ однозначно, а именно

$$\cos \tilde{\vartheta}_0 = -\frac{1}{\rho_n}. \quad (8,32)$$

При $\rho_n \leq 1$ подкоренное выражение в равенствах (8,4), (8,30) и (8,31) положительно при любых ϑ_n и перед корнями следует всегда брать знак $+$. Поэтому каждому значению ϑ_n соответствует лишь одно значение $\tilde{\vartheta}$.

Используя (8,26) и (8,30'), мы получаем следующее выражение для зависимости импульса вторичной частицы от угла ее вылета:

$$p_n(\vartheta_n) = \frac{\tilde{p}_k \sqrt{1-V^2}}{1-V^2 \cos^2 \vartheta_n} \left\{ \rho_n \cos \vartheta_n \pm \sqrt{1 - \frac{\rho_n^2 - V^2}{1-V^2} \sin^2 \vartheta_n} \right\}. \quad (8,33)$$

Исключая из (8,27) угол отклонения частицы l в Ц-системе $\tilde{\vartheta}$, находим следующее соотношение для связи углов ϑ_1 и ϑ_2 в Л-системе:

$$\operatorname{ctg} \vartheta_2 = \frac{-(1 + \rho_1 \rho_2) \operatorname{ctg} \vartheta_1 \pm (\rho_1 + \rho_2) \sqrt{\gamma^2 (1 - \rho_1^2) + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1}}{1 - \rho_1^2}. \quad (8,34)$$

И в этом случае при $\rho_{1(2)} > 1$ мы сталкиваемся с двузначной зависимостью $\vartheta_{1(2)}$ от угла вылета другой частицы $\vartheta_2(1)$. При $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ (8,34) переходит в

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta = \frac{\gamma^2 (\rho_1 + \rho_2)^2 [1 - \rho_{1(2)}^2]}{[(1 - \rho_1^2(2)) + (1 + \rho_1 \rho_2)]^2 - (\rho_1 + \rho_2)^2}. \quad (8,34')$$

Из (8,27) можно получить также соотношение между дифференциальными угловыми сечениями испускания частиц l и 2 в Ц-системе ($\sigma(\tilde{\vartheta})$) и Л-системе ($\sigma(\vartheta_1)$ и $\sigma(\vartheta_2)$). Исходя из условий *)

$$\sigma(\tilde{\vartheta}) d \cos \tilde{\vartheta} = \sigma(\vartheta_n) d \cos \vartheta_n,$$

имеем

$$\sigma(\tilde{\vartheta}) = \sigma(\vartheta_1) \gamma (1 + \rho_1 \cos \tilde{\vartheta}) \frac{\sin^3 \vartheta_1}{\sin^3 \tilde{\vartheta}}, \quad (8,35)$$

причем в правой части (8,35) мы можем либо выразить угол $\tilde{\vartheta}$ через ϑ_1 , либо наоборот, ϑ_1 через $\tilde{\vartheta}$. В первом случае мы опять встречаемся с выражениями, содержащими при $\rho_n > 1$ два знака (\pm) перед радикалом (при $\rho_n < 1$ надо брать лишь знак $+$, поскольку $\cos \tilde{\vartheta}$, равно как и $\frac{d \cos \tilde{\vartheta}}{d \cos \vartheta}$, являются двузначными функциями углов ϑ_n [см. (7,18)]).

*) Здесь и далее мы считаем рассеяние азимутально изотропным, т. е. не учитываем эффектов, связанных с поляризацией частиц.

Очевидно, что при $\vartheta_n = \vartheta_{n \max}$ (т. е. $\cos \vartheta_n = \min$) величина $\frac{d \cos \tilde{\vartheta}}{d \cos \vartheta_n} = \infty$; а для двух ветвей зависимости $\tilde{\vartheta}(\vartheta_n)$ производная $\frac{d \cos \tilde{\vartheta}}{d \cos \vartheta_n}$ имеет различные знаки, а именно знак $+$, если частица, движущаяся под углом ϑ_n , обладает большим (и знак $-$ в случае меньшего) из возможных значений импульса. Используя для выражения $\tilde{\vartheta}(\vartheta_n)$ формулы (8,26), (8,30) и (8,33), мы получаем для $\sigma(\vartheta_n)$ соотношение

$$\sigma(\vartheta_n) = \sigma(\tilde{\vartheta}) \left(\frac{p_n}{\tilde{p}_k} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho_n^2 - V^2}{1 - V^2} \sin^2 \vartheta_n}}, \quad (8,36)$$

которое в частном случае упругого рассеяния для первоначально покоившейся частицы 2 ($\rho_2 = 1$) обращается в

$$\sigma(\vartheta_2) = \sigma(\tilde{\vartheta}) \frac{4(1 - V^2) \cos \vartheta_2}{(1 - V^2 \cos^2 \vartheta_2)^2}. \quad (8,36')$$

Используя подстановку $\tilde{\vartheta}(\vartheta_1)$, из (8,35) получаем

$$\sigma(\vartheta_1) = \sigma(\tilde{\vartheta}) \frac{[\sin^2 \tilde{\vartheta} + \gamma^2 (\rho_1 + \cos \tilde{\vartheta})^2]^{\frac{3}{2}}}{\gamma (1 + \rho_1 \cos \tilde{\vartheta})}, \quad (8,37)$$

причем ϑ_n есть всегда однозначная функция $\tilde{\vartheta}$. Непосредственная связь между дифференциальными угловыми сечениями испускания двух продуктов реакции — частиц 1 и 2 имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta_1) &= \sigma(\vartheta_2) \frac{d \cos \vartheta_2}{d \cos \vartheta_1} = \\ &= \left[-(1 + \rho_1 \rho_2) \pm \frac{(\rho_1 + \rho_2) \operatorname{ctg} \vartheta_1}{V \gamma^2 (1 - \rho_1^2) + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_1} \right] \frac{\sin^3 \vartheta_1}{\sin^3 \vartheta_2} = \\ &= \frac{\frac{\sin^3 \vartheta_1}{\sin^3 \vartheta_2}}{\left[-(1 + \rho_1 \rho_2) \pm \frac{(\rho_1 + \rho_2) \operatorname{ctg} \vartheta_2}{V \gamma^2 (1 - \rho_1^2) + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_2} \right]}. \quad (8,38) \end{aligned}$$

Часто оказывается также необходимым связать энергетический спектр частиц-продуктов реакции с их угловым распределением в Ц- и Л-системах. Здесь мы сделаем некоторые

предварительные замечания, откладывая более подробное рассмотрение до § 12.

Особенно проста связь энергетического спектра с угловым распределением в Ц-системе. В самом деле, из соотношений (8,26) легко получаем

$$E_1 = \frac{\tilde{E}_1 + V\tilde{p}_k \cos \tilde{\vartheta}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (8,26')$$

откуда якобиан

$$\frac{dE_1}{d \cos \tilde{\vartheta}} = \left| \frac{dE_2}{d \cos \tilde{\vartheta}} \right| = \frac{V\tilde{p}_k}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (8,39)$$

т. е. при заданной энергии первичных частиц является постоянной величиной, не зависящей от E_1 или E_2 . Поэтому дифференциальные энергетические сечения испускания (т. е. спектры) вторичных частиц 1 и 2 имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(E_1) = \sigma(E_2 = E_n - E_1) &= 2\pi\sigma(\tilde{\vartheta}) \left| \frac{d \cos \tilde{\vartheta}}{dE_n} \right| = \\ &= 2\pi\sigma(\tilde{\vartheta}) \frac{\sqrt{1 - V^2}}{V\tilde{p}_k}. \end{aligned} \quad (8,40)$$

Очевидно, что изотропии углового распределения в Ц-системе всегда отвечает прямоугольное энергетическое распределение частиц 1 и 2 от минимальной энергии

$$(E_n)_{\min} = \gamma(\tilde{E}_n - V\tilde{p}_k). \quad (8,41)$$

до максимальной энергии

$$(E_n)_{\max} = \gamma(\tilde{E}_n + V\tilde{p}_k). \quad (8,41')$$

Надо лишний раз подчеркнуть, что все формулы для углового и энергетического распределения вторичных частиц 1 и 2 даны здесь для заданной энергии бомбардирующих частиц I. Если в реальных условиях имеется какой-нибудь спектр бомбардирующих частиц, то общий вид угловых и энергетического распределений продуктов реакции определяется как видом всего спектра, так и зависимостью полных и дифференциальных угловых сечений от энергии первичных частиц. В таких случаях интерпретация наблюдаемых на опыте спектров и угловых распределений существенно усложняется и зачастую оказывается неоднозначной,

В дальнейшем мы еще рассмотрим отдельные частные случаи, а пока остановимся еще на одном вопросе, существенном для расчетов по методу детального баланса.

Не останавливаясь здесь на обосновании этого метода (о чем сказано в гл. VII) и на выводе приводимой ниже формулы, укажем, что между дифференциальными (в Ц-системе) и полными сечениями ядерной реакции $I + II \rightarrow I + 2$ и обратного ей процесса $I + 2 \rightarrow I + II$ существует такое соотношение:

$$\frac{\sigma_{I II}}{\sigma_{12}} = \frac{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)}{(2J_I + 1)(2J_{II} + 1)} \frac{\tilde{p}_1^2}{\tilde{p}_I^2}, \quad (8,42)$$

где J — механические моменты (спины) взаимодействующих частиц. Импульсы частиц I и II в прямой и частиц I и 2 в обратной реакциях в Ц-системе должны отвечать, естественно, одной и той же полной энергии взаимодействующих частиц. Из условия равенства полной энергии в Ц-системе непосредственно вытекает соотношение между кинетической энергией в Л-системе бомбардирующих частиц в прямой и обратной реакциях. Так, если в прямой реакции в Л-системе движутся частицы I , а покоятся II , а в обратной реакции в Л-системе движутся частицы I , а покоятся 2 , то из (8,18) и (8,8) следует условие соответствия кинетических энергий:

$$W_1 = \frac{m_{II}}{m_2} W_I + \frac{M_{II} + M_{II}}{2m_2} Q = \frac{m_{II} W_I + M Q}{m_2}, \quad (8,43)$$

$$\text{где } M = \frac{1}{2}(M_{II} + M_{II}) = M_{II} - \frac{Q}{2}. \quad (8,44)$$

Ясно, что во всех случаях, кроме упругого рассеяния, либо прямая реакция, либо обратная является эндотермической, с тепловым эффектом $-Q$. Поэтому соотношение (8,43) всегда можно записать в виде

$$W_1 = \frac{m_{II}}{m_2} (W_I - W_{I \text{ порог}}) \quad (8,45)$$

(если эндотермична прямая реакция) или

$$W_1 = \frac{m_2}{m_{II}} (W_1 - W_{1 \text{ порог}}) \quad (8,45')$$

(при эндотермичности обратной реакции). Далее с учетом

(8,5), (8,16) и (8,24) получаем, что

$$\frac{\sigma_{I\text{II}}(W_I)}{\sigma_{12}(W_I)} = \frac{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)A_1^2 - 4m_1^2(M_\pi^2 + 2m_{\text{II}}W_I)}{(2J_I + 1)(2J_{\text{II}} + 1)m_{\text{II}}^2W_I(2m_I + W_I)}. \quad (8,46)$$

Приведем теперь несколько конкретных примеров применения приведенных выше формул:

1) Реакция фоторождения π -мезонов на нуклонах (например, $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$). Энергия γ -квантов (ε_γ), масса π -мезонов (π), их кинетическая энергия ω_π и полная энергия системы $\tilde{\varepsilon}_\pi$ выражены в единицах массы нуклонов.

$$V = \frac{\varepsilon_\gamma}{1 + \varepsilon_\gamma}, \quad \gamma = \frac{1 + \varepsilon_\gamma}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_\gamma}}, \quad \tilde{\varepsilon}_\pi = \sqrt{1 + 2\varepsilon_\gamma},$$

$$\rho_1(\pi) = \frac{\pi^2 + 2\varepsilon_\gamma}{\sqrt{(\pi^2 - 2\varepsilon_\gamma)^2 - 4\pi^2}} \frac{\varepsilon_\gamma}{1 + \varepsilon_\gamma},$$

$$\rho_2(n) = \frac{2 + 2\varepsilon_\gamma + \pi^2}{\sqrt{(2 + 2\varepsilon_\gamma + \pi^2)^2 - 4\pi^2(1 + 2\varepsilon_\gamma)}} \frac{\varepsilon_\gamma}{1 + \varepsilon_\gamma}.$$

Условие соответствия кинетических энергий для обратной реакции радиационного захвата π -мезонов нуклонами:

$$\omega_\pi = \varepsilon_\gamma - \pi \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

2) Реакция фоторасщепления дейтерия: $\gamma + d \rightarrow p + n$ (пренебрегаем здесь различием масс двух протонов, двух нейтронов и дейтона, поскольку в релятивистском случае речь идет об энергиях, сильно превышающих эти различия)

$$V = \frac{\varepsilon_\gamma}{2 + \varepsilon_\gamma}, \quad \gamma = \frac{2 + \varepsilon_\gamma}{2\sqrt{1 + \varepsilon_\gamma}}, \quad \tilde{\varepsilon}_\pi = 2\sqrt{1 + \varepsilon_\gamma},$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_\gamma(1 + \varepsilon_\gamma)}}{2 + \varepsilon_\gamma}.$$

Условие соответствия прямой и обратной реакций:

$$\omega_p(n) = 2\varepsilon_\gamma - \left(2 + \frac{q}{2}\right)|q|, \quad \text{где} \quad q = \frac{Q}{m_p(n)}.$$

3) Реакция рождения π^+ -мезона при столкновении протонов:

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d,$$

Здесь $m_I = m_{II} = m$, $m_1 = \pi m$, $m_2 = 2m$, $\omega_i = \frac{W_i}{m}$,

$$V = \sqrt{\frac{\omega_p}{2 + \omega_p}}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\omega_p}{2}},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\omega_p}{2 + \omega_p} \frac{2\omega_p - \pi^2}{\sqrt{(2\omega_p - \pi^2)^2 - 16\pi^2}}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\omega_p}{8 + \omega_p} \frac{8 + 2\omega_p - \pi^2}{\sqrt{(8 + 2\omega_p - \pi^2)^2 - 32(2 + \omega_p)}}} \approx \frac{4 + \omega_p}{\sqrt{\omega_p(2 + \omega_p)}} \\ (\text{ибо } \pi^2 \ll \omega_p).$$

Условие соответствия прямой и обратной реакций:

$$\omega_\pi = \omega_p - \pi \left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Сопоставление сечений прямой и обратной реакций $p + p \rightleftharpoons \pi^+ + d$ позволило, как известно, в свое время [6] установить, что спин π -мезона равен нулю. В этом случае справедливо соотношение $\frac{\sigma_{pp}(\omega_p)}{\sigma_{\pi+d}(\omega_\pi)} = \frac{3}{2} \frac{(2\omega_p - \pi^2)^2 - 16\pi^2}{\omega_p(2 + \omega_p)}$,

в котором множитель $\frac{3}{2}$ заменился бы на $\frac{9}{2}$ и $\frac{15}{2}$ при спине π -мезона равном, соответственно, 1 и 2.

4) Упругое рассеяние протонов: $m_I = m_{II} = m_1 = m_2 = m$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad V = \sqrt{\frac{\omega_p}{2 + \omega_p}}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\omega_p}{2}}.$$

В данном случае вместо (8,34) получаем

$$\text{ctg } \vartheta_1 \text{ ctg } \vartheta_2 = \gamma^2 = 1 + \frac{\omega_p}{2}.$$

§ 9. Основные формулы для нерелятивистского случая

Поскольку ядерные реакции, в которых как бомбардирующие частицы, так и продукты движутся со скоростями, много меньшими скорости света, чрезвычайно распространены в лабораторной практике, мы повторим выводы основных формул предыдущего параграфа для нерелятивистского случая.

Подчеркивая малость тепловых эффектов реакций по сравнению с массами взаимодействующих частиц, мы положим теперь $m_I + m_{II} = m_1 + m_2 = M$ и будем рассматривать не полные, а кинетические энергии частиц. Тогда законы сохранения энергии и импульса (при неподвижности частицы II) запишутся в виде

$$W_I = W_1 + W_2 - Q, \quad (9,1)$$

$$\sqrt{2m_1 W_1} = \sqrt{2m_1 W_1} \cos \vartheta_1 + \sqrt{2m_2 W_2} \cos \vartheta_2, \quad (9,2)$$

$$0 = \sqrt{2m_1 W_1} \sin \vartheta_1 - \sqrt{2m_2 W_2} \sin \vartheta_2, \quad (9,3)$$

откуда

$$\sqrt{W_1} = \frac{\sqrt{m_1 m_1 W_1} \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{m_1 m_1 W_1 \cos^2 \vartheta_1 + M [m_2 Q + (m_2 - m_1) W_1]}}{M}. \quad (9,4)$$

Аналогичное выражение — с заменой индекса 1 на 2 — получается для $\sqrt{W_2}$ (в дальнейшем мы в ряде случаев будем ограничиваться лишь формулами для частицы I).

Зачастую оказывается удобнее применить выражение (9,4) в другом виде, именно:

$$Q = \frac{M}{m_2} W_1 - \frac{m_2 - m_I}{m_2} W_I - \frac{2 \sqrt{m_1 m_1 W_1 W_1}}{m_2} \cos \vartheta_1. \quad (9,5)$$

Из (9,4) легко получаем условие для предельного угла испускания частиц:

$$\sin^2 \vartheta_1 \leq \frac{m_2}{m_1} \left\{ \frac{M}{m_I} \left[1 - \frac{|Q|}{W_I} \right] - 1 \right\} = \frac{m_2}{m_1} \left\{ \frac{m_{II}}{m_I} - \frac{|Q|}{W_I} \left(1 + \frac{m_{II}}{m_I} \right) \right\}, \quad (9,6)$$

которое в случае упругого рассеяния ($Q = 0$, $m_I = m_1$ и $m_{II} = m_2$) дает

$$\sin \vartheta_1 \leq \frac{m_{II}}{m_I}. \quad (9,7)$$

Полагая в (9,6) $\vartheta_{1 \text{ пред}} = 0$, находим выражение для порога эндотермической ядерной реакции:

$$W_I \text{ порог} = \frac{M}{m_I} |Q|. \quad (9,8)$$

Для получения зависимости $\vartheta_2 = f(\vartheta_1)$ и в этом случае проще предварительно установить связь углов испускания

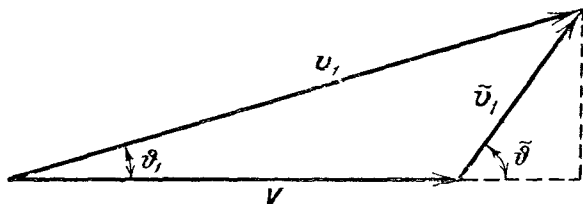


Рис. 6. Иллюстрация связи Л- и Ц-систем (нерелятивистский случай) — сложение скоростей.

частиц в Ц- и Л-системах. Эта связь находится из простого закона сложения скоростей (рис. 6):

$$\left. \begin{aligned} v_1 \cos \vartheta_1 &= V + \tilde{v}_1 \cos \tilde{\vartheta}, \\ v_1 \sin \vartheta_1 &= \tilde{v}_1 \sin \tilde{\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (9,9)$$

причем переносная скорость

$$V = \frac{\mu_{\text{н}}}{m_{\text{II}}} v_1, \quad (9,10)$$

где $\mu_{\text{н}} = \frac{m_{\text{I}} m_{\text{II}}}{m_{\text{I}} + m_{\text{II}}}$ — приведенная масса системы в начальном состоянии. Очевидно, что импульсы сближающихся частиц $\tilde{p}_{\text{I}} = m_{\text{I}} \tilde{v}_{\text{I}} = m_{\text{I}} (v_1 - V)$ и $\tilde{p}_{\text{II}} = m_{\text{II}} \tilde{v}_{\text{II}} = m_{\text{II}} V$ удовлетворяют равенству

$$\tilde{p}_{\text{I}} = \tilde{p}_{\text{II}} = \tilde{p}_{\text{н}} = \frac{m_{\text{II}}}{M} p_{\text{I}}, \quad (9,11)$$

а их кинетические энергии —

$$\tilde{W}_{\text{I}} = \frac{m_{\text{II}}^2}{M^2} W_{\text{I}} \quad \text{и} \quad \tilde{W}_{\text{II}} = \frac{m_{\text{I}} m_{\text{II}}}{M^2} W_{\text{I}}. \quad (9,12)$$

Отсюда следует, что суммарная кинетическая энергия исходных частиц в Ц-системе равна

$$\tilde{W}_{\text{н}} = \frac{m_{\text{II}}}{M} W_{\text{I}} = \frac{\mu_{\text{н}}}{m_{\text{I}}} W_{\text{I}}. \quad (9,13)$$

Из (9,13) непосредственно вытекает условие порога (9,8).

Исходя из равенств: $\tilde{W}_H = \tilde{W}_K - Q$ и $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_K$, получаем

$$\tilde{p}_K = \sqrt{2 \frac{\mu_K}{M} (m_{II} W_I + MQ)} \quad (9,14)$$

и

$$\tilde{W}_I = \frac{m_2}{m_1} \tilde{W}_2 = \frac{m_2}{M^2} (m_{II} W_I + MQ), \quad (9,15)$$

где $\mu_K = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса системы в конечном состоянии.

Возвращаясь теперь к соотношениям (9,9), преобразуем их следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \vartheta_1 = \frac{\rho_1 + \cos \tilde{\vartheta}}{\sin \tilde{\vartheta}} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \vartheta_2 = \frac{\rho_2 - \cos \tilde{\vartheta}}{\sin \tilde{\vartheta}} \quad (9,16)$$

или

$$\sin(\tilde{\vartheta} - \vartheta_1) = \rho_1 \sin \vartheta_1 \quad (9,17)$$

и

$$\sin(\tilde{\vartheta} + \vartheta_2) = \rho_2 \sin \vartheta_2, \quad (9,17')$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{m_1 m_I W_I}{m_2 (m_{II} W_I + MQ)}}, \quad (9,18)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{m_2 m_I W_I}{m_1 (m_{I} W_I + MQ)}}. \quad (9,18')$$

Обратная зависимость $\tilde{\vartheta}$ от ϑ_1 и ϑ_2 имеет в данном случае вид

$$\sin \tilde{\vartheta} = \rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \pm \sin \vartheta_1 \sqrt{1 - \rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1}, \quad (9,19)$$

$$\cos \tilde{\vartheta} = -\rho_1 \sin^2 \vartheta_1 \pm \cos \vartheta_1 \sqrt{1 - \rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1}. \quad (9,19')$$

Связь углов ϑ_1 и ϑ_2 можно найти, пользуясь соотношением (8,34) при $\gamma = 1$.

Отметим особо частные случаи $\rho_2 = 1$ (упругое рассеяние: $m_I = m_1$, $m_{II} = m_2$) и $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (упругое рассеяние частиц равных масс: $m_I = m_1 = m_{II} = m_2 = 1$). При $\rho_2 = 1$

$$\operatorname{ctg} \vartheta_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \operatorname{tg} \vartheta_2 - \frac{m_1 - m_2}{2m_2} \operatorname{ctg} \vartheta_2, \quad (9,20)$$

а при $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\operatorname{ctg} \vartheta_1 = \operatorname{tg} \vartheta_2$, т. е. $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$.

На основании (9,16) получается вполне идентичная соотношениям (8,36) и (8,37) (при $\gamma = 1$) связь дифференциальных угловых сечений в Л- и Ц-системах.

Связь спектра вторичных частиц по их кинетическим энергиям в Л-системе с угловым распределением в Ц-системе имеет в нерелятивистском случае вид*):

$$\begin{aligned} \sigma(W_1) = \sigma(W_2) &= 2\pi\sigma(\tilde{\vartheta}) \left| \frac{d \cos \tilde{\vartheta}}{dW_{1,2}} \right| = \\ &= 2\pi\sigma(\tilde{\vartheta}) \frac{M^2}{2\sqrt{m_1 W_1 m_1 m_2 (m_{II} W_1 + MQ)}}. \end{aligned} \quad (9,21)$$

Преобразуя (9,5), получаем

$$\cos \vartheta_1 = \frac{MW_1 + m_2 Q + (m_2 - m_1) W_1}{2\sqrt{m_1 m_1 W_1 W_1}} \quad (9,22)$$

и

$$\frac{d \cos \vartheta_1}{dW_1} = \frac{MW_1 + m_2 Q + (m_2 - m_1) W_1}{4W_1 \sqrt{m_1 m_1 W_1 W_1}} = \frac{\cos \vartheta_1}{2W_1} \quad (9,23)$$

и аналогичное выражение — с заменой индексов 1 на 2 — для якобиана $\frac{d \cos \vartheta_2}{dW_2}$. В результате соотношение энергетических спектров и угловых распределений в Л-системе можно записать в форме

$$\sigma(W_n) = \sigma(\vartheta_n) \frac{\cos \vartheta_n}{2W_n} \quad (9,24)$$

с последующей заменой $\cos \vartheta_n$ согласно (9,22) или W_n — согласно (9,4).

§ 10. Графическое представление кинематических соотношений

Приведенные в предыдущих параграфах формулы дают возможность точных расчетов кинематических соотношений, необходимых для анализа опытов. Зачастую, однако, в точных расчетах нет надобности, и поэтому очень полезным оказывается графическое представление, при котором расчету подлежат лишь два исходных параметра, а все основные кинематические соотношения являются функциями этих параметров.

*) Более подробно этот вопрос рассматривается в § 12.

матические характеристики получаются из графика при помощи измерительной линейки и транспортира. Двумя исходными параметрами (конечно, при известных массах m_1 , m_2 , m_1 и m_2) служат скорость движения центра тяжести в Л-системе (переносная скорость) V и импульсы продуктов реакции в Ц-системе: $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_k$.

Подробное описание графического представления кинематических соотношений дано в статье Блэтона [4], изложению которой и посвящен, в основном, этот параграф.

а) Эллипс импульсов

В качестве исходных соотношений перепишем (8,26) в виде

$$p_{1x} = \gamma(\tilde{p}_x + V\tilde{E}_1), \quad p_{1y} = \tilde{p}_y, \quad (10,1)$$

считая, что вектор полного импульса системы $p_n = p_1 + p_2$ направлен по оси x .

Из (10,1) следует

$$\tilde{p}_k^2 = p_{1y}^2 + \left(\frac{p_{1x}}{\gamma} - V\tilde{E}_1\right)^2 \quad (10,2)$$

или

$$\frac{p_{1y}^2 + \frac{1}{\gamma^2} (p_{1x} - \gamma V\tilde{E}_1)^2}{\tilde{p}_k^2} = 1. \quad (10,3)$$

Легко видеть, что (10,3) представляет собой уравнение эллипса

$$\frac{p_{1y}^2}{b^2} + \frac{(p_{1x} - \alpha_1)^2}{a^2} = 1 \quad (10,4)$$

с малой полуосью

$$b = \tilde{p}_k \quad (10,5)$$

и фокусным расстоянием

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{b^2(\gamma^2 - 1)} = \gamma V\tilde{p}_k. \quad (10,6)$$

Центр эллипса смещен на расстояние

$$\alpha_1 = \gamma V\tilde{E}_1 = \frac{f}{b} \tilde{E}_1 \quad (10,7)$$

от начала вектора p_n полного импульса.

Рассмотрение соотношений для частицы 2, аналогичных (10,1), приводит к выводу, что конец вектора \mathbf{p}_n находится по другую сторону от центра эллипса на расстоянии

$$\alpha_2 = \gamma V \tilde{E}_2 = \frac{f}{b} \tilde{E}_2. \quad (10,8)$$

Из перечисления всех характеристик эллипса ясно, что для его построения нужно знать лишь величины \tilde{p}_k и V , определяемые энергией бомбардирующих частиц и уравнением ядерной реакции. Построение одной из величин α_n по известным \tilde{p}_k и V иллюстрируется рис. 7. По главной оси

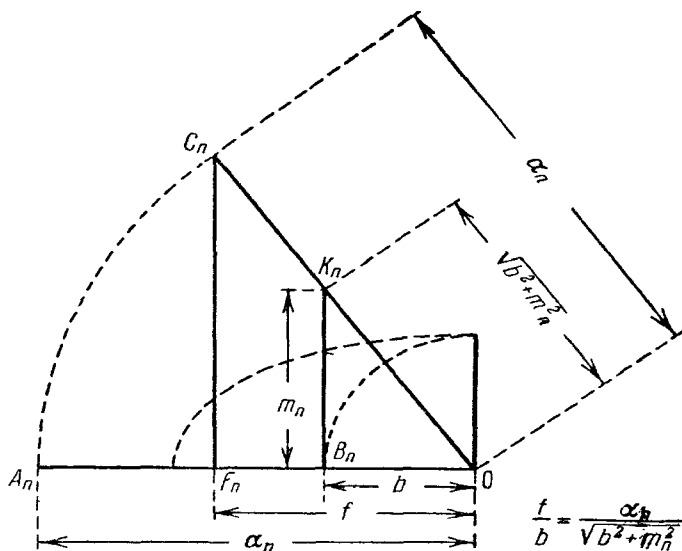


Рис. 7. Схема построения эллипса импульсов.

эллипса влево от его центра откладывается величина $\tilde{p}_k = b$, и в точке B_n восстанавливается перпендикуляр $B_n K_n$ длиной m_n . Затем центр эллипса соединяется с точкой K_n прямой $O K_n$, продолжаемой дальше пересечения с $B_n K_n$. На главной оси откладывается также величина $f = \gamma V b$, и в точке F_n также восстанавливается перпендикуляр до пересечения

в точке C_n с продолжением прямой OK_n . Очевидно, что $\frac{OC_n}{OF_n} = \frac{OK_n}{OB_n}$, т. е. $\frac{OC_n}{f} = \frac{\sqrt{b^2 + m_n^2}}{b}$, следовательно,

$$OC_n = \frac{f}{b} \sqrt{b^2 + m_n^2} = \gamma V \tilde{E}_n = \alpha_n.$$

Остается перенести циркулем отрезок OC_n на главную ось (OA_n). Сам эллипс проводится на основе заданных значений полуосей b и $a = \gamma b$ каким-либо из общеизвестных способов построения.

Заметим, что все параметры, необходимые для построения эллипса импульсов, определены в общем виде, независимо от того, образуется ли вектор полного импульса системы p_n в результате движения обеих первоначально имевшихся частиц ($p_n = p_I + p_{II}$) или только одной из них ($p_n = p_I$). Однако во всех конкретных примерах, иллюстрирующих графическое построение, мы будем рассматривать случаи, когда одна из первичных частиц (частица II, причем $m_I \leq m_{II}$) покоилась. Для каждой из частиц следует различать два случая: $\alpha_n > a$, т. е. точка A_n лежит вне эллипса, и $\alpha_n < a$, т. е. точка A_n лежит внутри эллипса. Поскольку $\frac{\alpha_n}{a} = \frac{V}{\beta_n} = \rho_n$, то случаи $\rho_n > 1$ или $\rho_n < 1$ отвечают превышению переносной скорости над скоростью данной частицы в Ц-системе или, наоборот, превышению скорости частицы в Ц-системе над переносной скоростью. Заметим, что всегда $\rho_n \geq V$, причем лишь для продуктов реакции с нулевой массой $\rho_n = V$. При $\rho_n < 1$ частицы, соответствующие индексу n , могут испускаться под любыми углами, причем эти углы однозначно связаны с энергиями. Если же $\rho_n > 1$, испускание частиц возможно лишь в интервале углов $0 \leq \vartheta_n \leq \vartheta_{n \max}$, причем при каждом угле, кроме $\vartheta_{n \max}$, возможны два значения энергии частиц.

Исходя из (8,32), (10,6) и (10,8), получаем

$$\sin \vartheta_{n \max} = \frac{b}{\sqrt{\alpha_n^2 - f^2}}. \quad (10,9)$$

На рис. 8 показан пример графического построения кинематических характеристик (для реакции $p + d \rightarrow \pi^+ + T$, имеющей тепловой эффект $Q = -135,5$ Мэв, при

$W_p = 660$ Мэв) при помощи эллипса импульсов. Очевидно, что возможные значения и направления векторов p_1 и p_2

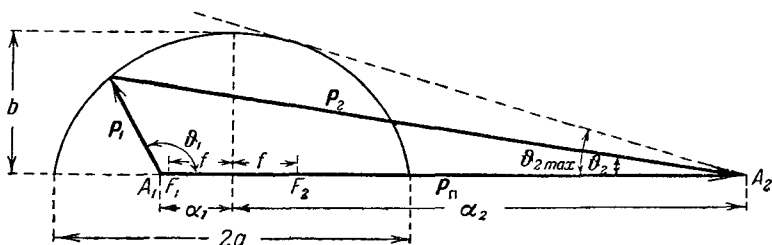


Рис. 8. Эллипс импульсов для реакции $p + d \rightarrow \pi^+ + T$ ($1 - \pi^+$, $2 - T$) для $W_p = 660$ Мэв.

Здесь $V = 0,373$, $\gamma = 1,078$, $b = 365$ Мэв, $a = 393,5$ Мэв,

$\alpha_1(\pi^+) = 157$ Мэв ($\alpha_1 < a$), $\alpha_2(T) = 1138$ Мэв ($\alpha_2 > a$),

$$f = 146,8 \text{ Мэв}, \quad \sin \vartheta_{2 \max} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - f^2}} = 0,324 \quad (\vartheta_{2 \max} = 18^\circ 50').$$

определяются положением пересечения проводимых из точек A_1 и A_2 прямых с эллипсом.

б) Соотношения между Л- и Ц-системами

При помощи эллипса импульсов можно очень просто графически построить взаимосвязь углов и импульсов частиц 1 и 2 в Л- и Ц-системах. В самом деле, соотношения (8,26) могут, очевидно, быть переписаны в виде

$$p_1 \cos \vartheta_1 = a \cos \tilde{\vartheta} + \alpha_1 \quad \text{и} \quad p_1 \sin \vartheta_1 = b \sin \tilde{\vartheta}. \quad (10,10)$$

Изобразив на графике две окружности с радиусами a и b и эллипс импульсов с этими полуосями, как показано на рис. 9, можно легко установить связь \tilde{p} и p_1 , ϑ_1 и $\tilde{\vartheta}$. Очевидно, в частности, что (как это уже говорилось выше) в случае $p_n > 1$ двум возможным — при данном ϑ_n — значениям p_n отвечают и два возможных угла $\tilde{\vartheta}_n$ в Ц-системе. Весьма просто могут быть получены из эллипса импульсов также энергии частиц 1 и 2 в Л-системе. Согласно (8,26')

$$E_1 = \frac{\alpha_1}{V} + f \cos \tilde{\vartheta}, \quad (10,11)$$

т. е.

$$E_{1 \min} = \frac{\alpha_1}{V} - f \quad (10,12)$$

и

$$E_{1 \max} = \frac{\alpha_1}{V} + f, \quad (10,13)$$

$$E_{n \max} - E_{n \min} = 2f. \quad (10,14)$$

Исходя из (10,5), (10,7), (10,10) и (10,11), можно представить E_n в форме

$$E_n = \frac{b^2 \alpha_n}{af} + V p_n \cos \vartheta_n. \quad (10,15)$$

Первый член в (10,15) является константой, и следовательно, полная энергия частицы, испускаемой под углом ϑ_n , определяется произведением эксцентриситета эллипса $\varepsilon = f/a$ на составляющую импульса p_n по оси p_n .

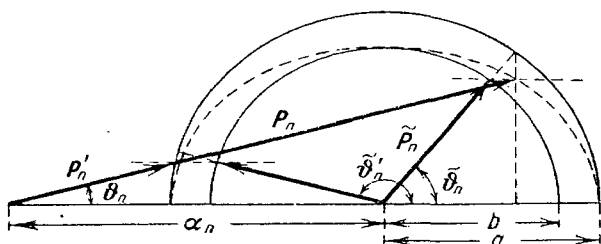


Рис. 9. Иллюстрация связи углов и импульсов частиц в Л- и Ц-системах (релятивистский случай) при помощи эллипса импульсов.

Наконец, надо отметить особенно простое выражение связи спектра вторичных частиц в Л-системе с их угловым распределением в Ц-системе через параметры эллипса импульсов. В самом деле (8,40) можно переписать в виде

$$\sigma(E_n) = \frac{2\pi}{f} \sigma(\tilde{\vartheta}), \quad (10,16)$$

где $E_n(\tilde{\vartheta})$ определяется формулой (10,11). При изотропии рассеяния в Ц-системе

$$\sigma(E_n) = \frac{\sigma_{\text{полн}}}{2f}. \quad (10,17)$$

в) Упругое рассеяние

Переходя к рассмотрению эллипсов импульсов для различных частных случаев, мы примем теперь, что частица II первоначально покоится. Тогда мы можем, преобразуя (8,24)

и при учете (8,9) и (8,43), записать следующее общее выражение для малой полуоси эллипса импульсов:

$$b = \tilde{\rho}_k = \sqrt{\frac{(MQ + m_{II} W_I)(MQ + m_{II} W_I + 2m_1 m_2)}{M_H^2 + 2m_{II} W_I}}. \quad (10,18)$$

Для последующих постановок запишем также, исходя из (8,15), равенства:

$$\frac{\sqrt{M_H^2 + 2m_{II} W_I}}{W_I + M_H} = \frac{1}{\gamma}, \quad (10,19)$$

$$\sqrt{\frac{W_I(W_I + 2m_1)}{M_H^2 + 2m_{II} W_I}} = \gamma V, \quad (10,20)$$

$$\frac{(W_I + M_H) \sqrt{W_I(W_I + 2m_1)}}{M_H^2 + 2m_{II} W_I} = \gamma V. \quad (10,21)$$

Очевидно, что большая полуось эллипса

$$a = \frac{(W_I + M_H) \sqrt{(MQ + m_{II} W_I)(MQ + m_{II} W_I + 2m_1 m_2)}}{M_H^2 + 2m_{II} W_I}. \quad (10,22)$$

Обратимся теперь к упругому рассеянию, когда $m_I = m_1$, $m_{II} = m_2$ и $m_I + m_{II} = M_H = m_1 + m_2 = M_H = M$ и, кроме того, $\tilde{\beta}_{II} = \tilde{\beta}_2 = V$, т. е. $\rho_2 = 1$. В этом случае

$$b = m_2 \gamma V = \sqrt{\frac{m_2 W_I (m_2 W_I + 2m_1 m_2)}{M^2 + 2m_2 W_I}}, \quad (10,23)$$

$$a = m_2 \gamma^2 V = \frac{(W_I + M) \sqrt{m_2 W_I (m_2 W_I + 2m_1 m_2)}}{M^2 + 2m_2 W_I} \quad (10,24)$$

и согласно (8,25), (8,18) и (10,7)

$$\alpha_1 = a \frac{W_I + \frac{m_1}{m_2} M}{W_I + M}, \quad (10,25)$$

$$\alpha_2 = a. \quad (10,26)$$

Очевидно, что при $m_1 \geq m_2$ для упругого рассеяния $\rho_n \geq 1$, а при $m_1 < m_2$ $\rho_1 < 1$, т. е. предельный угол рассеяния наблюдается лишь при рассеянии тяжелой частицы на легкой.

Три возможных случая упругого рассеяния: 1) $m_1 = m_2$ (pp -рассеяние при $W_p = 660$ Мэв), 2) $m_1 > m_2$ (dp -рассеяние при $W_a = 1$ Бэв) и 3) $m_1 < m_2$ (pd -рассеяние при $W_p = 660$ Мэв) иллюстрируются, соответственно, рис. 10, 11, 12. Анализируя графики, представленные на этих рисунках, и соответствующие формулы, можно сделать ряд выводов:

1) Импульс первоначально покоившейся частицы после рассеяния, согласно (8,33) и (10,23), равен

$$p_2 = \frac{2m_2 V \cos \vartheta_2}{1 - V^2 \cos^2 \vartheta_2}, \quad (10,27)$$

т. е. ее максимальный импульс равен главной оси эллипса

$$p_{2\max} = 2a. \quad (10,28)$$

2) Кинетическая энергия первоначально покоившейся частицы после рассеяния есть согласно (10,15)

$$W_2 = \frac{b^2 a_2}{af} + V p_2 \cos \vartheta_2 - m_2 = V p_2 \cos \vartheta_2, \quad (10,29)$$

поскольку при упругом рассеянии

$$\frac{b^2}{f} = m_2. \quad (10,30)$$

Таким образом, кинетическая энергия определяется произведением горизонтальной составляющей импульса p_2 на эксцентриситет эллипса. Очевидно, что

$$W_{2\max} = V p_2 (\vartheta_2 = 0) = 2m_2 \gamma^2 V^2 = 2f. \quad (10,31)$$

3) Как следует далее из (10,27) и (10,29)

$$\cos \vartheta_2 = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{W_2}{W_2 + 2m_2}}, \quad (10,32)$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta_2 = \frac{W_2}{2m_2 V^2 - \frac{W_2^2}{\gamma^2}},$$

и при данной величине кинетической энергии W_2 , передаваемой покоящейся частице, всегда $\vartheta_2 (W_2) < \theta_2$, причем

$$\operatorname{ctg} \theta_2 = \sqrt{\frac{W_2}{2m_2}}. \quad (10,33)$$

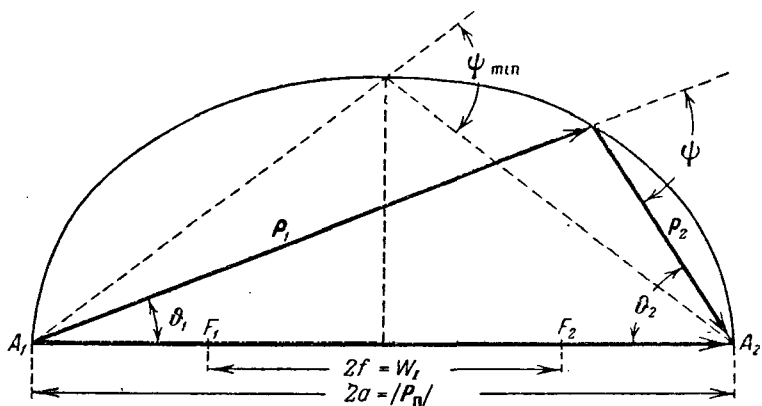


Рис. 10. Эллипс импульсов для упругого pp -рассеяния при $W_p = 660$ Мэв.

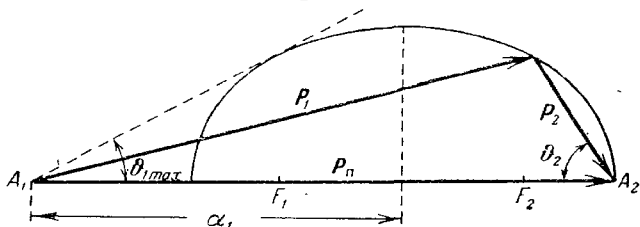


Рис. 11. Эллипс импульсов для упругого dp -рассеяния при $W_d = 1$ Бэв. Здесь 1 — дейтрон, 2 — протон ($m_1 > m_2$).

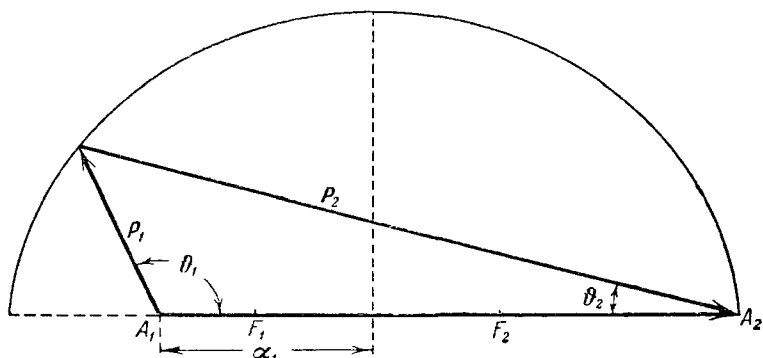


Рис. 12. Эллипс импульсов для упругого pd -рассеяния при $W_p = 660$ Мэв. Здесь 1 — протон, 2 — дейтрон ($m_1 < m_2$).

Следовательно, предельный угол, под которым может быть испущена частица-мишень 2 с заданной кинетической энергией не зависит ни от массы, ни от энергии бомбардирующей частицы 1. Поэтому, в частности, направления частиц, получающих в упругом столкновении релятивистскую энергию ($W_2 \gg m_2$), образуют всегда весьма малые углы с направлениями первичных частиц. При заданном угле вылета вторичной частицы ϑ_2 всегда, очевидно, выполняется неравенство

$$\frac{W_2}{m_2} < 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_2. \quad (10,34)$$

4) Зная направление вылета, массу и импульс вторичной частицы 2, легко можно установить массу первичной частицы m_1 по известному начальному импульсу p_1 .

В самом деле, полная энергия в Л-системе

$$E_n = \frac{p_1}{V} = \frac{p_1 p_2 \cos \vartheta_2}{W_2},$$

так что

$$m_1^2 = \left(\frac{p_1 p_2 \cos \vartheta_2}{W_2} - m_2 \right)^2 - p_1^2. \quad (10,35)$$

5) Как уже указывалось выше (§ 8), при упругом рассеянии релятивистских частиц, имеющих равные массы покоя, кинетическая энергия первичной частицы однозначно определяется по заданным углам ϑ_1 и ϑ_2 , ибо

$$\operatorname{ctg} \vartheta_1 \operatorname{ctg} \vartheta_2 = 1 + \frac{W_1}{2m}. \quad (10,36)$$

Угол ψ между направлениями вылета частиц после рассеяния при $m_1 > m_2$ может принимать любые значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (причем $\sin \vartheta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}$), при $m_1 < m_2$ — любые значения от $\frac{\pi}{2}$ до π . В случае $m_1 = m_2$ этот угол заключен в пределах от ψ_{\min} до $\frac{\pi}{2}$, причем при угле $\psi_{\min} = 2\vartheta$ выполняется равенство $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, а

$$\cos \psi_{\min} = \frac{1}{1 + \frac{4m}{W_1}}. \quad (10,37)$$

Если одна из частиц-продуктов реакции имеет массу покоя, равную нулю, то для нее $E_n = \tilde{p}_n = b$ и поэтому,

согласно (10,7), $\alpha_n = f$. Таким образом точка A_n , от которой отсчитывается импульс соответствующей частицы, при нулевой массе покоя оказывается расположенной в одном из фокусов эллипса, а абсолютная величина импульса при разных углах описывается уравнением эллипса в полярных координатах.

В рассматриваемой здесь задаче упругого рассеяния случай $m_1 = 0$ отвечает эффекту Комптона, т. е. рассеянию γ -квантов с первоначальным импульсом (и энергией) p_I частицами с массой m_2 . При этом, очевидно,

$$V = f = \frac{p_I}{m_2 + p_I} \quad (10,38)$$

и

$$p_1 = \frac{m_2 V}{1 - V \cos \vartheta_2}. \quad (10,39)$$

Из этих равенств получаем известную формулу

$$p_1 = \frac{p_I}{1 + \frac{p_I}{m_2} (1 - \cos \vartheta_2)}. \quad (10,40)$$

Как явствует из (10,28) и (10,31), при комптоновском рассеянии

$$p_1 = a + f = \frac{1}{2} (p_{2 \max} + W_{2 \max}). \quad (10,41)$$

г) Ядерные реакции (нерелятивистский случай)

Графическое построение для нерелятивистского ядерного взаимодействия значительно проще, чем в общем случае, ибо эллипс импульсов обращается в окружность с радиусом $r = a = b$, определяемым формулой (9,14).

Величины ρ_n для этого случая также определены выше выражениями (9,18), (9,18'), а предельный угол испускания n -й частицы при $\rho_n \geq 1$ задается, согласно (7,14), равенством $\sin \vartheta_{n \max} = \frac{1}{\rho_n}$. Для определенности положим, что $m_1 \leq m_2$. Очевидно, что

$$\sqrt{\frac{m_2^2 W_1}{m_{II} W_1 + MQ}} < 1$$

для экзотермических и больше 1 для эндотермических реакций, причем в первом случае это выражение растет, а во втором падает с ростом W_I , стремясь в пределе к единице. Поскольку почти во всех реакциях $m_I \leq m_{II}$, то в экзотермических реакциях практически всегда $\rho_n < 1$, т. е. для направления вылета легкой частицы вообще не существует никаких ограничений. Направление же вылета тяжелой частицы может быть ограничено лишь, если $m_I > m_I$ и добавок

$$W_I \geq \frac{m_I}{m_I - m_1} Q. \quad (10,42)$$

Несколько сложнее обстоит дело в случае эндотермических реакций. Для этих реакций у порога ($W_I = W_{I \text{ порог}}$) окружность импульсов обращается в точку ($a = 0$ и $\rho_1 = \rho_2 = \infty$), а обе частицы движутся вперед с импульсами:

$$\begin{aligned} p_{1(2) \text{ порог}} &= m_{1(2)} \sqrt{\frac{2m_I Q}{m_{II} M}} = \\ &= \frac{1}{M} \sqrt{2m_1 m_2 \frac{m_{1(2)} m_I}{m_{2(1)} m_{II}}} MQ. \end{aligned} \quad (10,43)$$

Если

$$W_I - W_{I \text{ порог}} \geq \frac{m_1 m_I W_{I \text{ порог}}}{M(m_2 - m_I)},$$

то $\rho_1 \leq 1$, так что ограничение углов вылета легкой частицы (I) имеет место лишь в узком интервале энергий W_I :

$$\frac{M}{m_{II}} Q < W_I < \frac{M}{m_{II}} Q \frac{1 - \frac{m^I}{M}}{1 - \frac{m_I}{m_2}}. \quad (10,44)$$

Как явствует из (10,44) и (9,14), при $\rho_1 = 1$ максимально возможный импульс легкой частицы равен

$$p_{1 \text{ max}} = 2a = \frac{2}{M} \sqrt{2m_1 m_2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{M} \frac{M - m}{m_2 - m_I} \right\}} MQ, \quad (10,45)$$

что близко к $2p_{1 \text{ порог}}$.

Условие $\rho_2 \leq 1$ возможно лишь при $m_1 > m_I$ (например, в nd , $n\alpha$ и т. п. реакциях) и при выполнении неравенства

$$W_I - W_{I \text{ порог}} \geq \frac{m_2 m_I W_{I \text{ порог}}}{M(m_1 - m_I)}.$$

Таким образом, ограничение углов вылета тяжелой частицы (2)

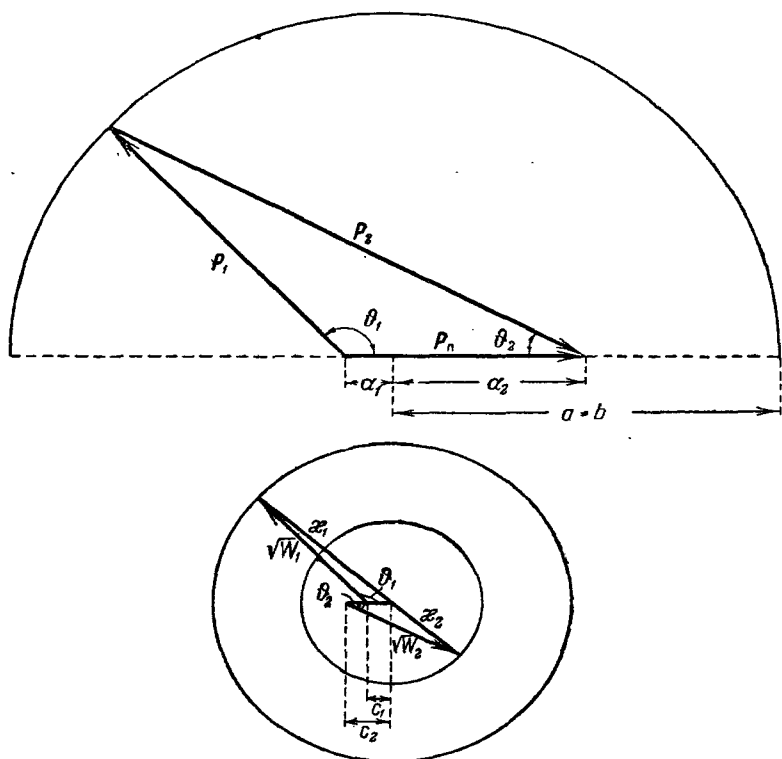


Рис. 13. Два способа графического построения кинематических характеристик реакции $T^3(dn)He^4$ при $W_d = 3$ Мэв. Здесь 1 — нейтрон, 2 — α -частица. Тепловой эффект $Q = 17,6$ Мэв.

происходит в несколько более широком интервале энергий W_I , а именно:

$$\frac{M}{m_{II}} Q < W_I < \frac{M}{m_{II}} Q \frac{1 - \frac{m_1}{M}}{1 - \frac{m_I}{m_1}}. \quad (10,46)$$

На рис. 13 и 14 показано графическое представление кинематики экзотермической реакции $T^3(nd)He^4$ и обратной ей эндотермической реакции $He^4(nd)T^3$. Наряду с уже описанными выше методами построения эллипса (здесь — окружности) импульсов, показан еще один, основанный на простом

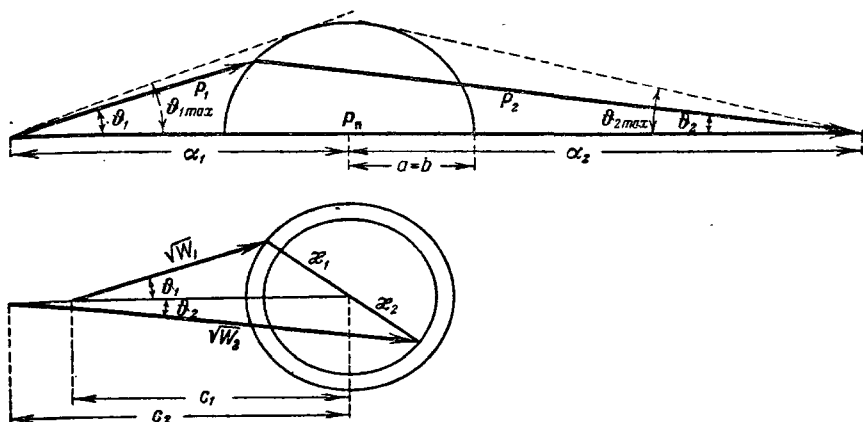


Рис. 14. Два способа графического построения кинематики реакции $He^4(nd)T^3$ при $W_I - W_{I\text{порог}} = 0,5$ Мэв. Здесь 1 — нейтрон, 2 — тритий.

законе сложения скоростей. В этом методе построения проводятся две окружности с радиусами

$$x_n = \frac{\sqrt{m_n m_{II}}}{M} \sqrt{W_I - W_{I\text{порог}}}, \quad (10,47)$$

пропорциональными скорости продуктов реакции в Ц-системе ($x_n = \sqrt{\frac{m_n}{2}} \tilde{v}_n$). Если прибавить к x_n векторы $c_n = \sqrt{\frac{m_n}{2}} V$, пропорциональные переносной скорости и равные по абсолютной величине $c_n = \frac{\sqrt{m_n m_I W_I}}{M}$, то получаются векторы, равные по абсолютной величине квадратному корню из кинетической энергии продуктов реакции в Л-системе,

д) Процессы фотоядерного взаимодействия

В этом частном случае $m_I = 0$, а $p_I = W_\gamma = E_\gamma = h\nu$. Поэтому $m_{II} = M_{II}$, и условие порога реакции (8,13) приобретает вид:

$$W_{\gamma \text{ порог}} = |Q| \left\{ 1 + \frac{|Q|}{M_{II}} \right\}. \quad (10,48)$$

Малая ось эллипса

$$b = \tilde{p}_k = \sqrt{\frac{(W_\gamma - W_{\gamma \text{ порог}}) \left(W_\gamma - W_{\gamma \text{ порог}} + 2 \frac{m_1 m_2}{M} \right)}{1 + 2 \frac{W_\gamma}{M}}}, \quad (10,49)$$

где

$$M = M_{II} - \frac{|Q|}{2}. \quad (10,50)$$

При $M_\gamma \ll M$ (10,49) преобразуется в обычное нерелятивистское соотношение (9,14), причем $a = b$. Запишем при этом (9,18) в виде

$$\rho_{1(2)} = \frac{\alpha_{1(2)}}{a} = \sqrt{\frac{m_{1(2)} W_{\gamma \text{ порог}}}{2m_{2(1)} M x}} (x + 1), \quad (10,51)$$

где безразмерный параметр

$$x = \frac{W_\gamma - W_{\gamma \text{ порог}}}{W_{\gamma \text{ порог}}}. \quad (10,52)$$

Легко видеть, что при $x = 0$, т. е. у порога, $\rho_n = \infty$; затем ρ_n быстро падает с ростом x и становится близко к 1 при

$$x_{1(2)} \approx \frac{m_{1(2)} W_{\gamma \text{ порог}}}{2m_{2(1)} M}.$$

Минимальные значения ρ_1 и ρ_2 достигаются при $x = 1$, т. е. при $W_\gamma = 2W_{\gamma \text{ порог}}$, причем

$$\rho_{1(2) \text{ min}} \approx \sqrt{\frac{2m_{1(2)} W_{\gamma \text{ порог}}}{m_{2(1)} M}} \ll 1, \quad (10,53)$$

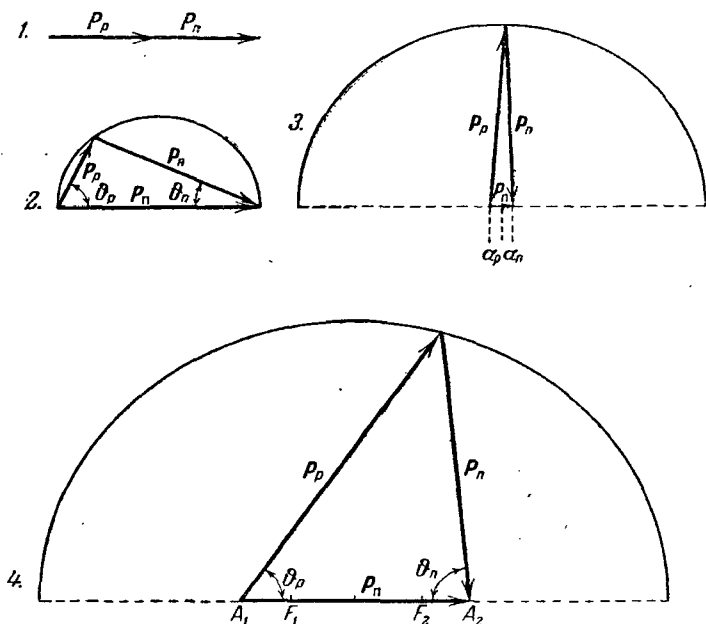


Рис. 15. Кинематика реакции фоторасщепления дейтерия
 $\gamma + d \rightarrow p + n$.

- 1) $W_\gamma = |p_n| = W_{\text{порог}}$, $a = b = 0$, $p_p = p_n = \frac{p_n}{2}$, $\vartheta_p + \vartheta_n = 0$;
- 2) $W_\gamma = W_{\text{порог}} \left(1 + \frac{2W_{\text{порог}}}{m} \right)$, $\alpha_p = \alpha_n = \frac{|p_n|}{2} \approx \frac{W_{\text{порог}}}{2}$,
 $\vartheta_p + \vartheta_n = 90^\circ$;
- 3) $W_\gamma = 2W_{\text{порог}}$, $\alpha_p = \alpha_n = \frac{|p_n|}{2} \approx W_{\text{порог}}$, $\vartheta_p + \vartheta_n \approx 180^\circ$;
- 4) $W_\gamma = 500 \text{ Мэв}$.

ибо $m_1 \sim m_2$, тогда как $W_\gamma \text{ порог} \ll M$. Примеры графического построения для фотоядерных взаимодействий при

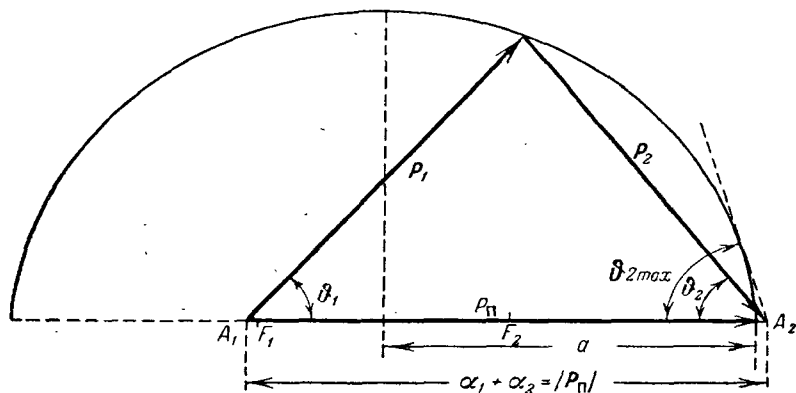


Рис. 16. Эллипс импульсов для реакции фоторождения π^+ -мезонов на протонах $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ (1 — π^+ , 2 — n) при $W_\gamma = 500$ Мэв.

разных энергиях γ -квантов приведены на рис. 15 (фоторасщепление дейтрона) и рис. 16 (фоторождение π^+ -мезонов).

е) Распад одной частицы на две

Кинематика такого распада будет подвергнута специальному подробному рассмотрению в следующем разделе. Здесь мы остановимся лишь на общих методах построения кинематических характеристик этого процесса.

В этом частном случае $m_{II} = |p_{II}| = 0$ и полная энергия в Ц-системе $\tilde{E}_{II} = M_I = M_{II} = M$. Ясно, что кинематика распада определяется соотношением между кинетической энергией распадающейся частицы в Л-системе и ее энергией связи, определяемой массами и энергиями вторичных частиц в Ц-системе.

Малая полуось эллипса импульсов в данном случае равняется

$$b = \tilde{p}_k = \frac{1}{2M} \sqrt{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{M^2 - (m_1 - m_2)^2\}}, \quad (10,54)$$

а большая полуось

$$a = b \frac{E_1}{M}. \quad (10,54')$$

Кроме того, для энергии вторичных частиц в Ц-системе имеем

$$\tilde{E}_{1(2)} = \frac{M^2 + m_{1(2)}^2 - m_{2(1)}^2}{2M} \quad (10,55)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_{1(2)} &= \frac{f}{b} \sqrt{b^2 + m_{1(2)}^2} = \frac{p_1}{M} \tilde{E}_{1(2)} = \\ &= \frac{p_1}{M} \left\{ \frac{M^2 + m_{1(2)}^2 - m_{2(1)}^2}{2M} \right\}. \end{aligned} \quad (10,56)$$

Из последнего равенства получаем

$$\rho_{1(2)} = \frac{\alpha_{1(2)}}{a} = \frac{M^2 + m_{1(2)}^2 - m_{2(1)}^2}{\sqrt{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{M^2 - (m_1 - m_2)^2\}}}. \quad (10,57)$$

Предельный угол испускания n -й частицы появляется лишь при достаточно больших энергиях распадающейся частицы I, а именно:

$$\begin{aligned} E_1 &\geq E_{1 \text{ пред}} = \\ &= \frac{1}{2m_n} \sqrt{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{M^2 - (m_1 - m_2)^2\}} = b \frac{M}{m_n}, \end{aligned} \quad (10,58)$$

причем

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_{n \text{ max}} &= \\ &= \frac{1}{2m_n p_1} \sqrt{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\} \{M^2 - (m_1 - m_2)^2\}}. \end{aligned} \quad (10,59)$$

На рис. 17 и 18 даны два примера распада одной частицы на две, причем в первом случае ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$) масса покоя обоих продуктов, а во втором ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$) одного из них равняется нулю. Очевидно, что в первом из этих примеров

$$b = \frac{M}{2}, \quad a = \frac{E_1}{2}, \quad (10,60)$$

и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \sqrt{E_1^2 - M^2} = \frac{1}{2} p_1 = f. \quad (10,61)$$

В самом деле, уже из (10,8) ясно, что для частиц с нулевой массой покоя, когда $\tilde{E}_n = b$, всегда $\alpha_n = f$. Таким

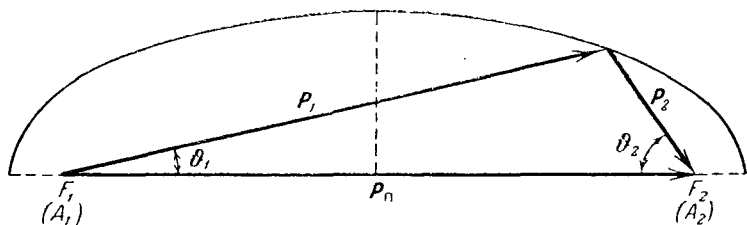


Рис. 17. Эллипс импульсов для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ при $W_{\pi^0} = m_{\pi^0}$.

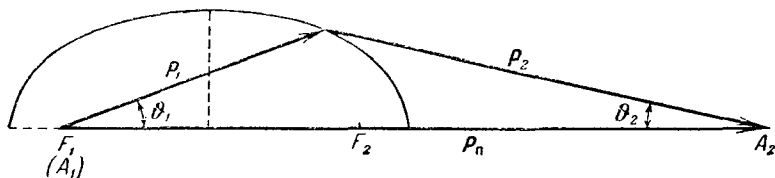


Рис. 18. Эллипс импульсов для распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu(1 - \nu, 2 - \mu^+)$ при $W_{\pi^+} = \frac{3}{2} m_{\pi^+}$.

образом, при распаде π^0 -мезонов всегда имеет место равенство

$$\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \frac{p_1}{E_1} < 1,$$

т. е. предельных углов испускания γ -квантов в Л-системе нет. Во втором примере

$$b = \frac{M^2 - \mu^2}{2M}, \quad (10,62)$$

где μ — масса μ -мезона,

$$a = \frac{E_1}{2} \left(1 - \frac{\mu^2}{M^2} \right), \quad (10,63)$$

$$f = \frac{p_1}{2} \left(1 - \frac{\mu^2}{M^2} \right). \quad (10,64)$$

В этом случае

$$\alpha_{\mu} = f \frac{M^2 + \mu^2}{M^2 - \mu^2}, \quad (10,65)$$

а кинетическая энергия μ -мезона

$$\tilde{W}_{\mu} = \frac{(M - \mu)^2}{2M} = 4,04 \text{ Мэв};$$

при $E_I \geq \frac{M^2 + \mu^2}{2\mu}$, т. е. $\tilde{W}_I \geq 5,2 \text{ Мэв}$ появляется предельный угол испускания μ -мезона. Заметим, наконец, что, согласно (8,33), для частицы с нулевой массой покоя

$$p_n(\vartheta_n) = \frac{b}{\gamma(1 - V \cos \vartheta_n)} = \frac{b^2}{a - f \cos \vartheta_n}. \quad (10,66)$$

Отсюда, используя (8,36), мы получаем для углового распределения n -х частиц в L -системе:

$$\sigma(\vartheta_n) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2(1 - V \cos \vartheta_n)^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{b^2}{(a - f \cos \vartheta_n)^2}. \quad (10,67)$$

При этом вероятность испускания n -й частицы в переднюю полусферу есть, очевидно,

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \beta). \quad (10,68)$$

§ 11. Распад на две частицы

Уже указывалось, что кинематические характеристики распада на две частицы определяются только величинами масс первичной и вторичных частиц и двумя параметрами, независимыми от типа взаимодействий (например, импульсом первичной частицы и углом вылета вторичной в Σ -системе).

При экспериментальном изучении распада на две частицы обычно возникают следующие задачи:

а) установление критерия, которому должны подчиняться наблюдаемые при помощи фотоэмульсии или камеры Вильсона случаи, если они действительно обусловлены распадом.

б) Определение массы первичной частицы, если известны массы и импульсы обеих вторичных частиц.

в) Определение массы вторичной частицы, если известны массы и импульсы первичной и другой вторичной частиц.

г) Установление связи угловых и энергетических распределений в Ц- и Л-системах.

д) Исследование критерия правильности интерпретации различных наблюдаемых случаев как следствий распада.

При анализе распадных процессов нет практических методов, которые позволили бы однозначно показать, что данный индивидуальный случай следует интерпретировать как распад. При рассмотрении отдельных случаев обычно стремятся доказать, что их нельзя приписать другим известным процессам (упругие или неупругие взаимодействия разных типов *).

Вследствие отмеченного обстоятельства исследование существования распадных процессов основывается обычно на статистическом подходе. Вначале, основываясь на небольшом числе случаев, которые интерпретируются как распад, приблизительно определяются его основные динамические характеристики (тип распада, масса первичной и вторичных частиц). Затем для анализа большой совокупности случаев распада по предполагаемой схеме используются полученные ранее приближенные значения характеристик. Согласие наблюдаемых особенностей исследуемой совокупности случаев с выводами, которые следуют из предполагаемой схемы распада, подтверждает ее правильность. Естественно, что при таком статистическом подходе нельзя исключить того, что небольшая часть случаев, не сказывающихся на общей картине, была ошибочно включена в исследуемую совокупность.

Разумеется, описанный метод применяют не только для проверки факта наличия распада, но и для контроля правильности выбранной схемы распада.

В этом разделе мы применим статистический подход к анализу распада на две частицы. При этом, естественно, предполагается, что массы первичной и вторичных частиц и тип распада являются заданными **). Для дальнейшего целесообразно подразделить все виды распадов на два типа: первый тип, который мы назовем Н-распадом, представляет собой превращение нейтральной частицы в две заряженные;

*) В дальнейшем (как это принято в работах по физике высоких энергий) мы называем неупругим взаимодействием, при котором часть энергии расходуется на образование новых частиц.

***) Некоторые методы определения масс частиц, участвующих в распаде, приводятся ниже.

второй тип (З-распад) характеризует распад заряженной частицы на заряженную и нейтральную (рис. 19)*.

Переходя к исследованию существования тех или иных распадных процессов, мы рассмотрим вначале простейший случай — распад остановившейся частицы. Из формулы (10,55) следует, что в этом случае вторичные частицы обладают постоянной энергией, а следовательно, и пробегом. Таким образом, существование изломов с постоянной величиной отрезка от точки излома до конца следа (З-распад) или наличие характерных «вилок» с постоянными величинами обеих ветвей (Н-распад) определенно свидетельствуют в пользу того, что в этих случаях произошел распад остановившихся частиц. Именно это обстоятельство послужило первым основанием для утверждения о наличии π -распада.

Более сложным является исследование распада движущихся частиц на две. Основанием для одного из способов проверки того, что наблюдаемые случаи обусловлены именно этим процессом, является инвариантность поперечных компонент импульсов p_T относительно преобразования Лоренца.

Действительно, так как частицы движутся в Ц-системе изотропно, с одним и тем же импульсом \tilde{p}_k , то вероятность вылета частицы в интервале $\cos \tilde{\vartheta}$, $\cos \tilde{\vartheta} + d \cos \tilde{\vartheta}$

$$\tilde{N}(\tilde{p}, \cos \tilde{\vartheta}) d\tilde{p} d \cos \tilde{\vartheta} = \frac{1}{2} \delta(\tilde{p} - \tilde{p}_k) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{p} \quad (11,1)$$

(δ — дельта-функция).

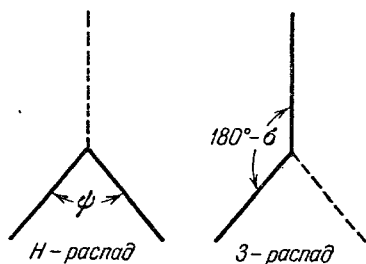


Рис. 19. Схема распада нейтральной частицы на две заряженные частицы (Н-распад) и заряженной — на одну нейтральную и одну заряженную частицы (З-распад).

*) Мы не останавливаемся здесь на распадах нейтральной частицы на две нейтральных. Заметим, что на практике этот случай сводится к двум определенным ранее, поскольку в нашем распоряжении нет иных методов наблюдения нейтральных частиц, кроме исследования продуктов их взаимодействия или распада.

Так как

$$\sin \tilde{\vartheta} = \frac{\tilde{p}_T}{\tilde{p}_K},$$

то

$$\tilde{N}(\tilde{p}_T) d\tilde{p}_T \sim \frac{\tilde{p}_T d\tilde{p}_T}{\tilde{p}_K \sqrt{\tilde{p}_K^2 - \tilde{p}_T^2}}, \quad (11,2)$$

где \tilde{p}_K определяется соотношением (10,54).

Таким образом, если исследуемая совокупность случаев обуславливается распадом на две частицы, то распределение поперечных компонент импульсов подчиняется соотношению (11,2). Из этого соотношения следует, что особенно велика вероятность значений импульсов \tilde{p}_T , близких к \tilde{p}_K .

Несколько иная идея анализа основана на введении величины α^* , среднее значение которой зависит лишь от инвариантов. Определим величину α^* следующим образом:

$$\alpha^* = \frac{p_{1\parallel} - p_{2\parallel}}{p_{1\parallel} + p_{2\parallel}}, \quad (11,3)$$

где $p_{1\parallel}$ и $p_{2\parallel}$ — продольные компоненты импульсов обеих частиц в Л-системе. Поскольку $p_{1\parallel} + p_{2\parallel} = p_I$, то

$$\alpha^* = \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_I^2}. \quad (11,4)$$

Используя (4,7), можно получить, что

$$\alpha^* = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2} + f(\tilde{p}_K, p_I) \cos \tilde{\vartheta}^*. \quad (11,5)$$

Усредняя по всем направлениям в Ц-системе, получаем окончательно

$$\alpha^* = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2}. \quad (11,6)$$

Измеряя на опыте α^* в соответствии с (11,3), мы можем получить зависимость между массами частиц, участвующих

*) В данном случае $M = m_I (m_{II} = 0)$.

в реакции. Этот метод был успешно применен для анализа V -случаев распада [6].

Другой метод анализа распада на две частицы базируется на существовании экстремальных значений углов вылета частиц в L -системе. Вообще говоря, экстремальные значения углов ϑ определяются двумя параметрами (например, величинами импульса первичной частицы в L -системе и импульса вторичной частицы в C -системе). Однако, поскольку при распаде на две частицы импульс \tilde{p}_K полностью определяется значением масс (см. 10,54), в данном случае можно вычислить функциональную зависимость $\vartheta_{\text{extr}}(p_I)$ и, следовательно, определить пределы, в которых должны заключаться углы вылета вторичных частиц, образованных при распаде частицы с импульсом p_I .

В одном аспекте анализа, который применим к обоим типам распада (Z - и H -распаду), воспользуемся формулой (7,14). Подставляя (в 7,14) значения $\tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{p}_K}{\sqrt{\tilde{p}_K^2 + m_1^2}}$ и

$V = \frac{p_I}{\sqrt{p_I^2 + M^2}}$, получаем

$$\vartheta_{1 \max} = \text{arctg} \frac{\tilde{p}_K M}{\sqrt{p_I^2 m_1^2 - \tilde{p}_K^2 M^2}}, \quad (11,7)$$

если

$$p_I^2 m_1^2 > \tilde{p}_K^2 M^2,$$

и

$$\vartheta_{1 \max} = \frac{\pi}{2},$$

если

$$p_I^2 m_1^2 < \tilde{p}_K^2 M^2.$$

Следовательно, при распаде частицы с массой M и импульсом p_I на две вторичные частицы с массой m_1 не может отклониться от направления вектора p_I на угол, больший чем $\vartheta_{1 \max}$, определяемый формулой (11,7).

Другой метод использования экстремальных значений углов применим только к H -распаду и заключается в

нахождении функциональной зависимости $\vartheta_{\text{extr}}(p_I)$ (рис. 20). Данные на этом рисунке получены для распада частицы с массой $1000 m_e$ на две с массами $280 m_e$.

Дело в том, что при определенных численных значениях параметров угол между направлениями вылета вторичных частиц заключен в определенных интервалах. Поэтому если в боль-

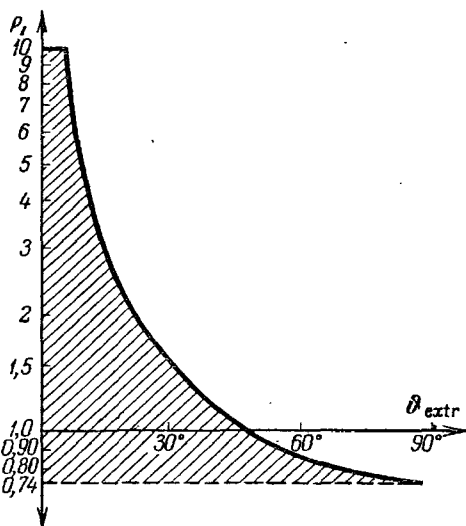


Рис. 20. Зависимость $\theta_{\text{extr}}(p_I)$ для случая распада частицы с массой $1000 m_e$ на две с массами $280 m_e$.

шом числе случаев этот угол лежит в вычисленных пределах, то это является важным дополнительным доказательством, что исследуемая совокупность случаев обусловлена распадом определенного типа.

В соответствии с (4,1) можно написать:

$$\psi = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \text{arctg} \frac{1}{\gamma} \times \\ \times \frac{\tilde{p}_1 \sin \tilde{\vartheta}_1}{\tilde{p}_1 \cos \tilde{\vartheta}_1 + V\tilde{E}_1} + \\ + \text{arctg} \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{p}_2 \sin \tilde{\vartheta}_2}{\tilde{p}_2 \cos \tilde{\vartheta}_2 + V\tilde{E}_2}. \quad (11,8)$$

Имея в виду, что $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$ и ограничиваясь для простоты анализом случая, когда $m_1 = m_2 = m$, можно переписать (11,8) в следующей форме:

$$\psi = \text{arctg} \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{p}_k \sin \tilde{\vartheta}_1}{\tilde{p}_k \cos \tilde{\vartheta}_1 + V\tilde{E}_k} + \text{arctg} \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{p}_k \sin \tilde{\vartheta}_1}{V\tilde{E}_k - \tilde{p}_k \cos \tilde{\vartheta}_1}, \quad (11,9)$$

где $\tilde{p}_k = \sqrt{\frac{M^2 - 4m^2}{4}}$. Функция $\psi(\cos \tilde{\vartheta}_1)$ имеет экстремальные значения при $\cos \tilde{\vartheta}_1 = 0$ (максимум), а также (минимум) при

$$\cos \tilde{\vartheta}_1 = \frac{1}{p_I} \sqrt{\frac{p_I^2 M^2 - 8p_I^2 m^2 + M^4 - 4m^2 M^2}{M^2 - 4m^2}}. \quad (11,10)$$

В зависимости от знака выражения $M^2 - 8m^2$ уравнение (11,10), определяющее минимальное значение ψ_{\min} , имеет решения в действительной области ($0 < \cos \psi < 1$) в разных интервалах изменения p_I :

$$\text{а) } M^2 - 8m^2 > 0.$$

Уравнение (11,10) имеет решение при

$$p_I^2 > \frac{M^2(M^2 - 4m^2)}{4m^2}$$

$$\text{б) } M^2 - 8m^2 < 0.$$

Уравнение (11,10) имеет решение при

$$\frac{M \sqrt{M^2 - 4m^2}}{2m} < p_I < M \sqrt{\frac{M^2 - 4m^2}{8m^2 - M^2}}.$$

На рис. 21 представлены кривые $\psi_{\text{extr}}(p_I)$ для случая N -распада частиц с массой $1000 m_e$ на два заряженных π -мезона (m_π принималась равной $280 m_e$). Заштрихованная область соответствует разрешенным значениям углов ψ .

Описанный метод был использован Батлером [7] для анализа схемы распада Λ^0 - и θ^0 -частиц.

Следует остановиться еще на одном критерии анализа (метод компланарности), который, однако, обладает тем недостатком, что он применим не только к распадным процессам, но и к упругому рассеянию причем поскольку в рассмотрение не входят значения масс, его нельзя рекомендовать для доказательства распадного характера процессов. Наоборот, если уже установлено, что данная совокупность случаев обуславливается распадом, то условие компланарности может служить критерием для

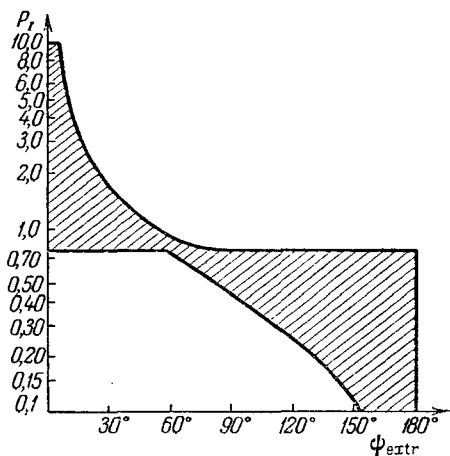


Рис. 21. Зависимость $\psi_{\text{extr}}(p_I)$ для распада частиц с массой $1000 m_e$ на две с массами $280 m_e$.

установления числа вторичных частиц, т. е. позволяет решить вопрос о том, сколько частиц образуется при распаде.

Критерий компланарности основан на простом соотношении

$$\mathbf{p}_I = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (11,11)$$

Умножая это векторное уравнение скалярно на \mathbf{n} (\mathbf{n} — вектор, нормальный к плоскости, образованной двумя из трех векторов, например \mathbf{p}_I и \mathbf{p}_1), получаем $(\mathbf{n}\mathbf{p}_2) = 0$, т. е. что и третий вектор лежит в той же плоскости.

Необходимо отметить, что в некоторых частных случаях, например, когда масса одной из вторичных частиц близка к массе первичной, указанные выше методы могут привести к ошибочной интерпретации исследуемых случаев как распада на две частицы, в то время как в действительности в процессах будет участвовать большее число частиц. Более подробно эти особые случаи разобраны в [8].

Приведем еще некоторые формулы, служащие для определения масс взаимодействующих частиц.

а) *Определение массы M первичной частицы по кинематическим характеристикам.* Из уравнений сохранения:

$$\mathbf{p}_I = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (11,12)$$

$$E_I = E_1 + E_2 \quad (11,13)$$

получаем

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \{ [(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)]^{1/2} - p_1 p_2 \cos \psi \}. \quad (11,14)$$

Если рассматривается распад остановившейся частицы ($p_1 = p_2 = p_K$ и $\psi = \pi$), то формула (11,14) сильно упрощается:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 [(p_K^2 + m_1^2)(p_K^2 + m_2^2)]^{1/2}. \quad (11,15)$$

Уравнение (11,14) упрощается также, если $p_1 \ll m_1$ или $p_2 \ll m_2$, тогда член $p_1 p_2 \cos \psi \ll [(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)]^{1/2}$, и им можно пренебречь.

Иногда возникает задача об определении массы первичной частицы, если известно значение энергии одной из вто-

ричных частиц и угол ее вылета [9]. В соответствии с (4,7) можно записать

$$M = \gamma \left\{ (E_1 - p_1 V \cos \vartheta_1) + \sqrt{(E_1 - p_1 V \cos \vartheta_1)^2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{\gamma^2}} \right\}. \quad (11,16)$$

В частности, если $m_2 = 0$, то

$$M = \tilde{E}_1 + |\tilde{p}_1|. \quad (11,17)$$

В этом случае, если $\cos \vartheta_1 = \pm 1$, то

$$M = \gamma \{ E_1 \mp p_1 V + |p_1 \mp E_1 V| \}. \quad (11,18)$$

Если $\cos \vartheta_1 = 1$, то в зависимости от знака выражения $p_1 + E_1 V$ формулы (11,17), (11,18) можно переписать следующим образом:

$$M = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} [E_1 + p_1] \quad \left(\text{при } \frac{p_1}{E_1} > V \right), \quad (11,19)$$

$$M = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} [E_1 - p_1] \quad \left(\text{при } \frac{p_1}{E_1} < V \right). \quad (11,20)$$

Если $\cos \vartheta_1 = -1$, то всегда

$$M = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} [E_1 + p_1]. \quad (11,21)$$

б) *Определение массы вторичной частицы (3-распад).*
Из уравнений (11,12), (11,13) следует

$$m_2^2 = M^2 + m_1^2 - 2 \left\{ [(M^2 + p_1^2)(m_1^2 + p_1^2)]^{1/2} - p_1 p_1 \cos \vartheta_1 \right\}. \quad (11,22)$$

Так же как и ранее, если $p_1 \ll M$ или $p_1 \ll m_1$, то членом $p_1 p_1 \cos \vartheta_1$ можно пренебречь. В частности, если распадаются остановившиеся частицы, то

$$m_2^2 = M^2 + m_1^2 - 2M\sqrt{m_1^2 + p_1^2}. \quad (11,23)$$

§ 12. Связь угловых и энергетических распределений в Ц- и Л-системах частиц, образованных при распаде *)

В этом параграфе мы рассмотрим ряд задач, решение которых основано на характерной особенности двухчастичного распада, когда импульсы \tilde{p}_1 и \tilde{p}_2 равны: $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_x$ и определяются из уравнения (10,54). Поэтому, используя формулы, полученные в предыдущей главе, можно получить общие выражения для углового и энергетического распределений.

Начнем с рассмотрения углового распределения вторичных частиц для простейшего случая, когда первичные частицы имеют определенную энергию и движутся в одном направлении.

В Ц-системе угловое распределение вторичных частиц считаем изотропным; частицы обладают постоянным импульсом. Поэтому вероятность вылета частицы под углом, конус которого заключен в интервале между $\cos \vartheta$ и $\cos \vartheta + d \cos \vartheta$, определяется уравнением (11,1). Следовательно, угловое распределение $N(\vartheta) d \cos \vartheta$ имеет следующий вид

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{1}{2} d \cos \vartheta \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta[\tilde{p}(p) - \tilde{p}_x] J dp, \quad (12,1)$$

где J определено формулой (7,2). Воспользовавшись формулой

$$\delta[\tilde{p}(p) - \tilde{p}_x] = \sum_m \frac{\delta(p - p_m)}{m \left| \frac{d\tilde{p}}{dp} \right|_{p=p_m}} \quad (12,2)$$

(p_m — корни уравнения $\tilde{p}(p) = \tilde{p}_x$ в интервале, в котором проводится интегрирование) и принимая во внимание уравнения (4,7), (7,4) и (7,12), можно записать (12,1) следующим образом:

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{p_m^2 d \cos \vartheta}{2\gamma_{\tilde{p}_x} [p_m - E_m V \cos \vartheta]}, \quad \text{если } \tilde{\beta} > V, \quad (12,3)$$

*) Мы рассмотрим трансформацию изотропного распределения при постоянном импульсе в общем виде, так как этот простой случай играет важную роль при анализе столкновений (см. гл. V).

где E_m — энергия, соответствующая импульсу p_m и

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{d \cos \vartheta}{2\gamma \tilde{p}_K} \left[\frac{p_{m_1}^2}{p_{m_1} - E_{m_1} V \cos \vartheta} + \frac{p_{m_2}^2}{E_{m_2} V \cos \vartheta - p_{m_2}} \right], \quad (12,4)$$

если $\tilde{\beta} < V$. Причем здесь $p_{m_1} > p_{m_2}$.

Используя правую часть соотношения (7,12) в качестве решения уравнения $\tilde{p}(p) - \tilde{p}_K = 0$, получаем

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{[\tilde{E}_K V \cos \vartheta + \sqrt{m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \tilde{E}_K^2 - m^2 \gamma^2}]^2 d \cos \vartheta}{2\tilde{p}_K \gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \tilde{E}_K^2 - m^2 \gamma^2}}, \quad (12,5)$$

если $\tilde{\beta} > V$. ϑ изменяется в интервале от 0 до π . Под \tilde{E}_K здесь и далее понимается энергия той или иной вторичной частицы в Ц-системе (в конечном состоянии). Причем \tilde{E}_K связано с массой частицы и ее импульсом \tilde{p}_K (одинаковым для обеих вторичных частиц) соотношением $\tilde{E}_K = \sqrt{\tilde{p}_K^2 + m^2}$, имея в виду, что \tilde{E}_K и m относятся к одной и той же частице, мы опускаем здесь и далее индексы 1, 2 или n .

В частности, при упругих соударениях, когда $m_1 = m_2$, $\tilde{E}_K = \gamma m$, получаем

$$N(\vartheta) = \frac{2 \cos \vartheta}{\gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2}. \quad (12,6)$$

Если $\tilde{\beta} < V$, то

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{[\tilde{E}_K^2 V^2 \cos^2 \vartheta + m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \tilde{E}_K^2 - m^2 \gamma^2] d \cos \vartheta}{\tilde{p}_K \gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{m^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \tilde{E}_K^2 - m^2 \gamma^2}}. \quad (12,7)$$

В последнем случае ϑ изменяется в интервале от 0 до ϑ_{\max} [ϑ_{\max} определяется соотношением (7,14)].

Формула (12,5) упрощается, если $\tilde{E}_K \gg m\gamma$; тогда

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{d \cos \vartheta}{2\gamma^2 (1 - V \cos \vartheta)^2}. \quad (12,8)$$

Для этого случая легко определить средний угол $\bar{\vartheta}$:

$$\bar{\vartheta} = -\frac{1}{2\gamma^2} \int_0^\pi \frac{\vartheta d \cos \vartheta}{(1 - V \cos \vartheta)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma^2 V} \left[\gamma - \frac{1}{1+V} \right]. \quad (12,8')$$

Если $\gamma \gg 1$, то $\bar{\vartheta} = \frac{\pi}{2\gamma}$.

Применим приведенные в этом разделе формулы для анализа распада на две частицы. При этом для определения параметра распределения \tilde{p}_κ следует воспользоваться формулой (10,54). Угловое распределение частиц с массой m_1 можно записать в форме

$$N(\vartheta_1) d \cos \vartheta_1 = \frac{[(M^2 + m_1^2 - m_2^2)V \cos \vartheta_1 + \sqrt{4M^2 m_1^2 V^2 \gamma^2 \cos^2 \vartheta_1 + (M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2 \gamma^2}]^2}{2\gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta_1)^2 \sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2(M^2 m_1^2 + M^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2)}} \times \frac{d \cos \vartheta_1}{\sqrt{4M^2 m_1^2 V^2 \gamma^2 \cos^2 \vartheta_1 + (M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2 \gamma^2}}. \quad (12,9)$$

если $\tilde{\beta} > V$ и аналогично для случая $\tilde{\beta} < V$. Особенно простой вид принимает формула (12,9) в случае распада на две релятивистские частицы. Например, при распаде частицы на два фотона (такой случай осуществляется при распаде нейтрального π^0 -мезона) следует для углового распределения пользоваться формулой (12,6).

В качестве примера на рис. 22 показано угловое распределение вторичных частиц, образованных при распаде Λ -частицы на две по схеме $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$.

Остановимся далее на вычислении энергетического распределения для того же простейшего случая моноэнергетического потока первичных частиц.

Импульсное распределение $N(p) dp$ определяется интегралом

$$N(p) dp = \frac{dp}{2} \int_0^{\vartheta_{\max}} \delta[\tilde{p}(\vartheta) - \tilde{p}_\kappa] J \sin \vartheta d\vartheta,$$

где J — якобиан, вычисляемый по формуле (7,2). Используя

формулы (4,7), (7,4) и (12,6), легко получить

$$N(p) dp = \frac{p dp}{2E\tilde{p}_k\gamma V}. \quad (12,10)$$

Интервал изменения p определится границами:

$$\gamma |\tilde{p}_k - \tilde{E}_k V| \leq p \leq \gamma (\tilde{p}_k + \tilde{E}_k V). \quad (12,11)$$

Последние формулы приобретают весьма наглядный смысл, если перейти от импульсного распределения к энергетическому. Используя соотношение $p dp = E dE$, получаем

$$N(E) dE = \frac{dE}{2\tilde{p}_k\gamma V}. \quad (12,12)$$

Таким образом, как уже упоминалось (см. § 10), в рассматриваемом случае двухчастичного распада энергетическое распределение равномерно в интервале

$$\gamma |\tilde{E}_k - \tilde{p}_k V| \leq E \leq \gamma (\tilde{E}_k + \tilde{p}_k V). \quad (12,13)$$

Вне этого интервала $N(E) = 0$. Это свойство имеет существенное значение для различных часто встречающихся задач нахождения связи между характеристиками энергетических спектров первичных и вторичных частиц. Весьма важно также, что поскольку в (12,13) входит значение \tilde{E}_k , то можно установить некоторые общие закономерности спектров в зависимости от значений масс первичной и вторичных частиц.

Начнем с исследования простейшего случая распада на две частицы с нулевой массой покоя [10] (например, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$). Эти частицы с одинаковой вероятностью могут иметь любую энергию, заключенную в интервале от $\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1-V}{1+V}}$

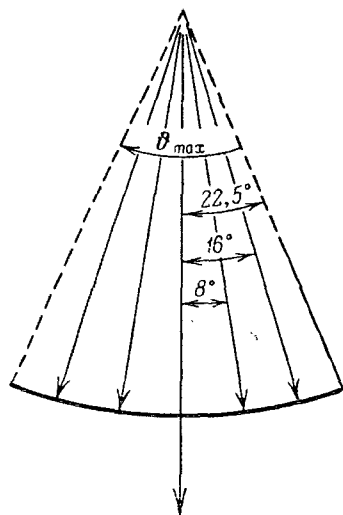


Рис. 22. Зависимость $N(\vartheta)$ для распада Λ -частицы по схеме $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$;
 $m_\Lambda = 2230 m_e$;
 $m_p = 1830 m_e$;
 $m_\pi = 280 m_e, V = 0,6$.

до $\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$. Все остальные значения энергий оказываются запрещенными.

Из выражений, определяющих границы интервала, следует, что какой бы энергией ни обладала первичная частица, вторичные частицы всегда могут иметь энергию, равную $\frac{M}{2}$. Рассмотрим спектр первичных частиц, простирающийся от 0 до ∞ . При любой определенной энергии первичной частицы вторичные частицы распределены равномерно в пределах соответствующего интервала и могут иметь энергию $\frac{M}{2}$. Поэтому при этом значении, независимо от формы бесконечного спектра первичных частиц, будет наблюдаться максимум энергетического спектра вторичных частиц. Рассмотрим далее два значения энергии E_1 и E_2 , обладающих тем свойством, что $N(E_1) = N(E_2)$. Поскольку спектр вторичных частиц имеет максимум при любом распределении первичных, то всегда имеется бесконечное количество таких пар значений энергии, расположенных по обе стороны от максимума. Ясно, что E_1 и E_2 должны совпадать с границами интервала, соответствующего какой-то определенной величине энергии первичной частицы $\frac{M}{\sqrt{1-V^2}}$.

Поэтому можно написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{2} \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} &= E_1, \\ \frac{M}{2} \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} &= E_2 \end{aligned} \right\} \quad (12,14)$$

и, следовательно,

$$M = 2 \sqrt{E_1 E_2}. \quad (12,15)$$

Рассмотрим далее общий случай распада на две частицы произвольной массы. Здесь сразу же можно показать, что в случае произвольного спектра первичных частиц закономерности, подобной описанной выше, не существует. Действительно, если $V \rightarrow 0$, то граничные значения энергии $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \tilde{E}_x$. Следовательно, возможное положение макси-

муна в спектре вторичных частиц должно находиться в окрестности значения $E = \tilde{E}_x$. Устремим далее V к единице. Тогда всегда найдется такое значение V_1 (а следовательно, и γ), при котором левая граница интервала $\gamma(\tilde{E}_x - \tilde{p}_x V)$ делается больше величины \tilde{E}_x^*). Следовательно, при некоторых $V > V_1$ значение E_x будет лежать вне допустимого интервала, и поэтому не будет ни одного значения энергии, находящегося внутри всех возможных интервалов, определяемых неравенствами (12,13). Для иллюстрации мы остановимся на крайнем случае, когда \tilde{p}_x пренебрежимо мало сравнительно с величиной \tilde{E}_x (в известных пределах такой случай, например, осуществляется при анализе спектра протонов, возникающих при распаде Λ^0 -частиц). Тогда всегда $E_1 \approx E_2 \approx \gamma \tilde{E}_x$, и поэтому спектр вторичных частиц является повторением спектра первичных.

Однако иная ситуация возникает в случае, когда энергетический спектр первичных частиц ограничен со стороны больших энергий. Этот случай, представляющий значительный интерес при работе на ускорителях, был рассмотрен Г. И. Копыловым [11]. Разберем этот случай подробно.

Из предыдущего ясно, что для анализа свойств ограниченного энергетического спектра нужно найти такое значение скорости V_1 первичной частицы, чтобы при любом $V < V_1$ значение E_x было больше левой границы энергетического интервала (12,13). Чтобы решить эту задачу, исследуем поведение функции $\rho(V) = \gamma(\tilde{E}_x - \tilde{p}_x V)$ при различных значениях V .

Если $V \rightarrow 0$, то $\frac{\partial \rho}{\partial V} < 0$ и, следовательно, $\rho(V)$ — убывающая функция. Поэтому при достаточно малых V $\rho(V) < \tilde{E}_x$. Как мы уже отмечали, при достаточно больших V $\rho(V) > \tilde{E}_x$. Поэтому общий ход функции $\rho(V)$ таков: вначале она убывает, проходит через некоторый минимум, а затем постоянно возрастает, достигая при некотором V значения \tilde{E}_x . Ясно, что в пределах $0 < V < V^*$ значение E_x будет всегда

*) Напомним, что рассматривается случай $\tilde{E}_x \neq \tilde{p}_x$.

находиться внутри энергетического интервала (12,13). Таким образом, искомое $V_1 = V^*$. Найдем V^* из уравнения

$$\gamma_1^* (\tilde{E}_K - \tilde{p}_K V^*) = \tilde{E}_K. \quad (12,16)$$

Это уравнение, помимо тривиального решения $V^* = 0$, имеет также и второе решение:

$$V^* = \frac{2\tilde{p}_K \tilde{E}_K}{\tilde{E}_K^2 + \tilde{p}_K^2}. \quad (12,17)$$

Следовательно, если энергия первичных частиц

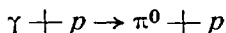
$$E_1 < \frac{M(\tilde{E}_K^2 + \tilde{p}_K^2)}{m_1}, \quad (12,18)$$

то в спектре вторичных частиц с массой m_1 будет всегда наблюдаться характерный максимум. Из (12,18) сразу же следуют приведенные ранее общие соображения: если $m_1 \rightarrow 0$, то $E_1 \rightarrow \infty$; в противоположном случае $m_1 \approx M$, $E_{1 \max} \approx M$. Определив по положению максимума значения \tilde{E}_{K_1} и \tilde{E}_{K_2} , можно сразу же вычислить величину M .

Перейдем далее к некоторым задачам восстановления вторичного (первичного) энергетического спектра по виду первичного (вторичного) спектра. Приведенные ранее общие формулы (см. § 7) позволяют решить эту задачу для двухчастичного распада полностью. Однако сам ход решения требует подчас довольно громоздких вычислений, и поэтому мы приведем лишь результаты решения некоторых задач.

Вначале мы остановимся на более простом случае построения спектра вторичных частиц.

Пусть, например, π^0 -мезоны образуются в результате реакции



и угловое распределение π^0 -мезонов в Ц-системе имеет вид

$$\tilde{N}_{\pi^0}(\tilde{\vartheta}) = A + B \cos^2 \tilde{\vartheta}^* \quad (12,19)$$

*) Определение в общем случае энергетического и углового распределений вторичных частиц, если первичные движутся по одному направлению, было произведено ранее [см. (12,8), (12,10), (12,12)].

В этом случае угловое и энергетическое распределение вторичных γ -квантов, образующихся при распаде π^0 -мезонов, в L -системе имеет вид [12]:

$$N_{\gamma}(E, \vartheta) = \frac{1}{2q_{\gamma}(1 - V \cos \vartheta)} \left\{ A + \frac{B \sin^2 \vartheta}{2\gamma^2(1 - V \cos \vartheta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} B \left[\frac{1}{\delta} \frac{m_{\pi}^2}{2q_{\gamma}(1 - V \cos \vartheta) E} \right]^2 \left[\left(\frac{\cos \vartheta - V}{1 - V \cos \vartheta} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \right\}, \quad (12,20)$$

где

$$q = V \sqrt{\varepsilon^2 - m_{\pi}^2}, \quad \varepsilon = \frac{2m_p E_{\gamma} + m_{\pi}^2}{2\sqrt{2m_p E_{\gamma} + m_p^2}}, \quad \delta = \frac{q}{\varepsilon},$$

$V = \frac{E_{\gamma}}{E_{\gamma} + m_p}$, E_{γ} — энергия первичного кванта, E — энергия вторичных квантов. Угловое распределение π^0 -мезонов, представленное функцией (12,19), обладает еще одним свойством [13] *). Спектр вторичных γ -квантов, регистрируемых под углом $\vartheta_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, симметричен относительно зна-

чения энергии $E_{\gamma} = \frac{m_{\pi}}{2}$, так же как в случае, когда π^0 -мезоны движутся вдоль одного направления или же если их угловое распределение изотропно. Таким образом, к γ -квантам, возникающим при распаде π^0 -мезонов с угловым распределением (12,19), применимо соотношение (12,15) **).

Проблема восстановления энергетического спектра первичных частиц, распадающихся по двухчастичной схеме, по спектру вторичных рассматривалась в работах [11—16]. Для достаточно больших энергий, а именно когда выполняется условие $\text{arch } E \geq \text{arch } \tilde{E}_x$, решение было получено в виде ряда [11]

$$N(E_I) = - \frac{2\tilde{p}_x}{M} \sum_{\Lambda} (\varepsilon_{\Lambda} p_I + \rho_{\Lambda} E_I) N'_1(\varepsilon_{\Lambda} E + \rho_{\Lambda} p), \quad (12,21)$$

*) Безотносительно к характеру генерации π^0 -мезонов.

***) Об особенностях угла ϑ_n см. также [14, 15].

где

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{m_1}{M} \operatorname{ch} \Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1},$$

$$\rho_{\Lambda} = \frac{m_1}{M} \operatorname{sh} \Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1},$$

$$(\Lambda = 1, 3, 5, \dots);$$

N'_1 — производная от энергетического спектра частиц с массой m_1 . Когда $E_1 \approx p_1$, выражение (12,21) несколько упрощается:

$$N(E_1) = -\frac{2m_1 \tilde{p}_{\kappa}}{M^2} E \sum_{\Lambda} e^{\Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1}} N'_1(E e^{\Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1}}). \quad (12,22)$$

В частности [16], при распаде $\theta^0 \rightarrow 2\pi$:

$$N(E_1) = -0,83E [0,91N'(0,91E) + 9,7N'(9,7E) + \dots]. \quad (12,23)$$

ГЛАВА IV

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОБРАЗОВАНИЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Реакции, в которых в конечном состоянии образуется три и более частиц, кардинально отличаются от двухчастичных реакций числом параметров. В то время как реакции с двумя частицами характеризуются двумя параметрами, реакциям с многими частицами свойственно большее число параметров и, в частности, поэтому нет фиксированного значения импульса \tilde{p}_k , который существенно определял выводы, сделанные в предыдущей главе. Поэтому для реакции с образованием многих частиц можно ставить лишь ограниченные задачи, не рассчитывая на решающую роль кинематических факторов. В этом случае существуют три основных класса задач: 1) нахождение экстремальных соотношений, 2) вычисление энергетических распределений, исходя из представлений о существенной роли фазовых факторов и 3) нахождение общих закономерностей в крайнем релятивистском случае, когда можно в большей или меньшей степени рассчитывать на успешное применение формулы (4,3), в которую не входят импульсные распределения вторичных частиц.

§ 13. Экстремальные соотношения

Если в результате какого-либо взаимодействия образуются три частицы, то законы сохранения энергии и импульса записываются в следующем виде:

$$E_n = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2} + \sqrt{m_3^2 + p_3^2}, \quad (13,1)$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3. \quad (13,2)$$

где

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{m_1}{M} \operatorname{ch} \Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1},$$

$$\rho_{\Lambda} = \frac{m_1}{M} \operatorname{sh} \Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1},$$

$$(\Lambda = 1, 3, 5, \dots);$$

N'_1 — производная от энергетического спектра частиц с массой m_1 . Когда $E_1 \approx p_1$, выражение (12,21) несколько упрощается:

$$N(E_1) = -\frac{2m_1 \tilde{p}_{\kappa}}{M^2} E \sum_{\Lambda} e^{\Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1}} N'_1(E e^{\Lambda \operatorname{arch} \tilde{E}_{\kappa_1}}). \quad (12,22)$$

В частности [16], при распаде $\theta^0 \rightarrow 2\pi$:

$$N(E_1) = -0,83E [0,91N'(0,91E) + 9,7N'(9,7E) + \dots]. \quad (12,23)$$

ГЛАВА IV

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОБРАЗОВАНИЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Реакции, в которых в конечном состоянии образуется три и более частиц, кардинально отличаются от двухчастичных реакций числом параметров. В то время как реакции с двумя частицами характеризуются двумя параметрами, реакциям с многими частицами свойственно большее число параметров и, в частности, поэтому нет фиксированного значения импульса \tilde{p}_k , который существенно определял выводы, сделанные в предыдущей главе. Поэтому для реакции с образованием многих частиц можно ставить лишь ограниченные задачи, не рассчитывая на решающую роль кинематических факторов. В этом случае существуют три основных класса задач: 1) нахождение экстремальных соотношений, 2) вычисление энергетических распределений, исходя из представлений о существенной роли фазовых факторов и 3) нахождение общих закономерностей в крайнем релятивистском случае, когда можно в большей или меньшей степени рассчитывать на успешное применение формулы (4,3), в которую не входят импульсные распределения вторичных частиц.

§ 13. Экстремальные соотношения

Если в результате какого-либо взаимодействия образуются три частицы, то законы сохранения энергии и импульса записываются в следующем виде:

$$E_n = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2} + \sqrt{m_3^2 + p_3^2}, \quad (13,1)$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3. \quad (13,2)$$

Траектории этих частиц уже не лежат в общем случае в одной плоскости, и связь между углами вылета частиц-продуктов или между энергией и углом вылета для каждой из них утрачивает свою определенность. Легко установить, что даже при рассмотрении образования трех частиц в Ц-системе, когда векторы импульсов частиц лежат в одной плоскости, каждый из векторов уже не характеризуется определенным значением $\tilde{p}_x = f(\tilde{E}_n)$ [согласно (8,24)], но может принимать в любом направлении все значения — от нуля до некоторого \tilde{p}_{\max} . При этом максимальный импульс данной частицы (например, I) соответствует вылету двух других частиц как единого целого в противоположном направлении. Очевидно, что $\tilde{p}_{1\max}$ и $\tilde{E}_{1\max}$ характеризуются в данном случае формулами (8,24) и (8,25) с заменой m_2 на $(m_2 + m_3)$. Итак, при образовании трех частиц величина малой полуоси эллипса импульсов, являющаяся исходной при его построении, теряет определенный смысл и можно говорить лишь о ее максимальном значении. Наличие только верхнего (но не нижнего, равного нулю) предела для импульса каждой из частиц в Ц-системе отнюдь не означает, конечно, что и в Л-системе при любом угле вылета возможны любые — вплоть до некоторого максимального значения — импульсы. В каждом конкретном случае возможные интервалы углов испускания частиц и их импульсов в Л-системе определяются соотношением параметров эллипса b и V , согласно установленным выше правилам. Надо отметить, кроме того, частный механизм процессов с образованием трех частиц, дающий возможность для ряда более определенных выводов — это механизм двух последовательных актов с испусканием в каждом из них двух частиц, например, $I + II \rightarrow I + (2, 3) \rightarrow 2 + 3$. При таком механизме для одной из трех частиц (в данном случае I) импульс в Ц-системе максимален и потому сохраняется определенная связь между углом ее вылета и энергией в Л-системе, а по наличию такой связи можно сделать вывод о возникновении в ходе рассматриваемого превращения промежуточного состояния (2, 3).

В общем же случае для возвращения к простым уравнениям типа (8,1 — 8,3) необходимо задать импульс одной из трех частиц, например 3, и тогда для $E' = E_{\pi} - \sqrt{m_3^2 + p_3^2}$

и $p' = p_{\pi} - p_3$ будут справедливы все приведенные выше соотношения и можно построить эллипс импульсов p_1 и p_2 при фиксированном p_3 . При этом, конечно, Ц-система уже является системой не общего центра тяжести, а лишь центра тяжести частиц 1 и 2.

Рассмотрим конкретный случай распада на три частицы, а именно β -распад покоящегося ядра $M(p_{\pi} = 0)$, и будем искать возможные значения импульсов электрона (p_e) и нейтрино (p_{ν}) при заданном импульсе ядра отдачи $p_{\text{я}}$ (который может меняться от $p_{\text{я min}} = 0$ до некоего $p_{\text{я max}}$). Очевидно, что здесь $p' = -p_{\text{я}}$ и $E' = \Delta - W_{\text{я}}$, где $\Delta = M - m_{\text{я}}$, а $m_{\text{я}}$ и $W_{\text{я}}$ — масса и кинетическая энергия ядра отдачи. В системе центра тяжести электрона и нейтрино полная энергия этих двух частиц $\tilde{E}' = \sqrt{(E')^2 - (p')^2} = \sqrt{\Delta^2 - 2MW_{\text{я}}}$, а малая полуось эллипса — согласно (8,24)

$$b = \frac{\Delta^2 - m_e^2 - 2MW_{\text{я}}}{2\sqrt{\Delta^2 - 2MW_{\text{я}}}}. \quad (13,3)$$

Поскольку $b > 0$, ясно, что $W_{\text{я max}} = \frac{\Delta^2 - m_e^2}{2M}$, и поэтому величина разности энергий начального и конечного ядер Δ может быть определена по максимальной энергии отдачи ядра. При $W_{\text{я}} = W_{\text{я max}}$, $b = 0$, а также $a_{\nu} = f = 0$, так что нейтрино не получает при этом никакой энергии. Поскольку $p_{\text{я}}^2 \approx 2MW_{\text{я}}$, то (13,3) можно переписать в виде

$$b = \frac{p_{\text{я max}}^2 - p_{\text{я}}^2}{2\sqrt{\Delta^2 - p_{\text{я}}^2}}. \quad (13,4)$$

Ядро отдачи забирает лишь малую часть энергии β -распада, и потому эксцентриситет эллипса импульсов

$$V = \frac{p'}{E'} \approx \frac{p_{\text{я}}}{\Delta}, \quad (13,5)$$

а его большая полуось

$$a \approx \frac{b\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - p_{\text{я}}^2}} = \Delta \frac{p_{\text{я max}}^2 - p_{\text{я}}^2}{2(\Delta^2 - p_{\text{я}}^2)}. \quad (13,6)$$

При $p_{\text{я}} = 0$ эллипс импульсов обращается в окружность, а при $p_{\text{я max}}$ — в точку. С ростом $p_{\text{я}}$, таким образом, убывают

обе величины: a и b . По определению величин α_n согласно (10,7) мы легко получаем

$$\alpha_e = \frac{p_{\pi}}{\sqrt{\Delta^2 - p_{\pi}^2}} \sqrt{m_e^2 + \frac{p_{\pi \max}^2 - p_{\pi}^2}{4(\Delta^2 - p_{\pi}^2)}}. \quad (13,7)$$

Поскольку

$$p_{\pi \max}^2 = \Delta^2 - m_e^2, \quad (13,8)$$

то

$$\alpha_e = \frac{p_{\pi}}{2} \left[1 + \frac{m_e^2}{\Delta^2 - p_{\pi}^2} \right] = f \frac{(\Delta^2 - p_{\pi}^2) + m_e^2}{(\Delta^2 - p_{\pi}^2) - m_e^2}. \quad (13,9)$$

Аналогичным образом для нейтрино получаем

$$\alpha_{\nu} = f = \frac{p_{\pi}}{2} \left[1 - \frac{m_e^2}{\Delta^2 - p_{\pi}^2} \right]. \quad (13,10)$$

Верхний и нижний пределы кинетической энергии электрона при заданном импульсе ядра отдачи получаются из (10,12) и (10, 13) в виде

$$W_{e \min} = \frac{(\Delta - p_{\pi} - m_e)^2}{2(\Delta - p_{\pi})} \quad (13,11)$$

и

$$W_{e \max} = \frac{(\Delta + p_{\pi} - m_e)^2}{2(\Delta + p_{\pi})}. \quad (13,12)$$

Приведенное рассмотрение является типичным примером анализа кинематики взаимодействий с образованием трех частиц путем сведения к разным частным случаям попарных комбинаций двух частиц. В данном случае мы получили подобным способом максимальную энергию ядра отдачи и пределы для кинетической энергии β -частиц при данной энергии ядра. В дальнейшем мы еще вернемся к анализу взаимодействий с образованием трех и многих частиц, а пока перейдем к определению экстремальных углов.

Из формулы (7,14) следует, что максимальный угол, на который отклоняется частица с массой m_1 , возрастает с ее импульсом в Ц-системе. Поэтому максимально допустимый угол ϑ_{\max} определяется формулой (11,7), где вместо \tilde{p}_x необходимо подставить величину \tilde{p}_{\max} .

Если масса одной из частиц пренебрежимо мала сравнительно с массой других вторичных частиц, то \tilde{p}_{\max} перехо-

дит в \tilde{p}_x . Поэтому описанный в § 11 метод анализа не позволяет сделать однозначного заключения о том, обусловлена ли исследуемая совокупность случаев распадом на две частицы, или распадом на три частицы, из которых, по крайней мере, одна обладает массой, пренебрежимо малой сравнительно с массами других частиц.

Известную осмотрительность необходимо также проявлять при анализе допустимых углов ψ (см. § 11).

Аналогичная неоднозначность может возникнуть при анализе компланарности следов первичной и двух заряженных вторичных частиц (см. § 11).

Действительно, можно доказать следующее положение. Пусть частица распадается на две заряженных и одну нейтральную. Тогда если масса одной из двух вторичных заряженных частиц (например, m_2) близка к массе первичной частицы M и скорость последней $V \approx 1$, то пути обеих заряженных и первичной частиц почти компланарны. В L -системе выполняется соотношение (13,2).

Умножим обе части равенства (13,2) скалярно на единичный вектор n , нормальный к векторам p_1 ($p_1 = p_n^*$) и p_2 ; мы получим

$$(np_2) = -(np_3). \quad (13,13)$$

Так как в данном случае

$$p_2 \approx \gamma V \tilde{E}_2 \gg \gamma (\tilde{p}_3 + V \tilde{E}_3) \approx p_3,$$

то

$$|\cos \vartheta_2| = \frac{p_3}{p_2} |\cos \vartheta_3| \ll 1 \quad (13,14)$$

(ϑ_2 и ϑ_3 , соответственно, углы между векторами p_2 и n и p_3 и n); следовательно, вектор n близок к нормали к импульсу p_2 . Таким образом, если частица распадается на две заряженных (причем $m_2 \approx M$) и одну нейтральную, то векторы p_1 , p_1 , p_2 почти компланарны.

§ 14. Энергетический спектр вторичных частиц

Для строгого вычисления энергетического спектра вторичных частиц, образованных при распаде на три частицы, надо знать вид взаимодействия частиц с полем. Однако до сих пор ни в одном случае не удалось однозначно установить

тип таких взаимодействий. Поэтому целесообразно при получении оценок энергетического спектра пожертвовать для большей общности строгостью вычислений. Наиболее простой общий метод вычислений характеристик распада основывается на предположении, что они определяются только статистическим весом конечных состояний и не зависят от формы взаимодействий. Следует ожидать, что такой подход, во всяком случае, оправдывает себя при не очень сильных взаимодействиях. Так, вычисленные при этом предположении формы энергетических спектров электронов, образованных при распаде μ -мезонов и при β -распаде, приближенно согласуются с опытными данными [17]. Аналогичный метод с успехом был применен к исследованию множественных процессов при высоких энергиях взаимодействующих частиц [18] (см. глава V).

Вычисления энергетических спектров при таком предположении были проведены в работах [19, 20]. Оказалось, что в Ц-системе вероятность $d\omega$ того, что частица с массой m_1 будет иметь импульс, заключенный между \tilde{p}_1 , $\tilde{p}_1 + d\tilde{p}_1$, определяется выражением

$$d\omega \propto \frac{B^{1/2} \tilde{p}_1^2}{A^2 - \tilde{p}_1^2} \left[\left(1 - \frac{4A^2}{A^2 - \tilde{p}_1^2} \right) B + AC \right] d\tilde{p}_1, \quad (14,1)$$

где

$$A = M - \sqrt{\tilde{p}_1^2 + m_1^2},$$

$$B = (\tilde{p}_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - A^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2,$$

$$C = 6A [A^2 - (\tilde{p}_1^2 + m_2^2 + m_3^2)].$$

Естественно, что распределение (14,1) определяется только значениями масс. Для того чтобы перейти к энергетическому представлению, нужно в (14,1) заменить \tilde{p}_1 на

$$\sqrt{\tilde{E}_1^2 - m_1^2} \quad \text{и} \quad d\tilde{p}_1 \quad \text{на} \quad \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{p}_1} d\tilde{E}_1.$$

Рассмотрим отдельные частные случаи соотношения (14,1):

$$1) \quad m_i \ll \tilde{p}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$d\omega_1 \propto (3M^2 - 6M\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_1^2) \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1; \quad (14,2)$$

$$2) \quad m_i \gg \tilde{p}_i, \\ d\omega_1 \propto \left[2(m_2 + m_3) \tilde{W}_x - \frac{M}{m_1} \tilde{p}_2^2 \right]^{1/2} \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1, \quad (14,3)$$

где \tilde{W}_x — суммарная кинетическая энергия вторичных частиц в Ц-системе;

$$3) \quad m_1 \ll \tilde{p}_1, \quad m_2 \gg \tilde{p}_2, \quad m_3 \gg \tilde{p}_3, \\ d\omega_1 \propto (\tilde{W}_x - \tilde{p}_1)^{1/2} \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1; \quad (14,4)$$

$$4) \quad m_1 \gg \tilde{p}_1, \quad m_2 \ll \tilde{p}_2, \quad m_3 \gg \tilde{p}_3, \\ d\omega_1 \propto (\tilde{W}_x^2 + \tilde{p}_1^2) \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1, \quad (14,5)$$

$$5) \quad m_1 \ll \tilde{p}_1, \quad m_2 \ll \tilde{p}_2, \quad m_3 \gg \tilde{p}_3, \\ d\omega_1 \propto (\tilde{W}_x^2 - \tilde{p}_1^2) \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1. \quad (14,6)$$

Вычислим далее энергетические и угловые распределения вторичных частиц при распаде на лету. Эти расчеты позволят нам также проследить некоторые довольно общие закономерности в крайнем релятивистском случае.

Мы вычислим энергетические и угловые распределения в Л-системе, если распределение в Ц-системе соответствует функции (14,2).

В этом случае в Ц-системе

$$\tilde{N}(\tilde{p}_1) d\tilde{p}_1 d \cos \tilde{\vartheta} \propto (3M^2 - 6M\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_1^2) \tilde{p}_1^2 d\tilde{p}_1 d \cos \tilde{\vartheta}. \quad (14,7)$$

Для функции $J(\vartheta)$ и $\tilde{p}(p)$ воспользуемся приближенными выражениями (7,23) и $\tilde{p} = \gamma E (1 - V \cos \vartheta)$. Тогда импульсное распределение

$$\begin{aligned} N(p_1) dp_1 &\propto dp_1 \int_{\cos \vartheta_{\max}(p)}^1 \frac{(3M^2 - 6M\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_1^2) \tilde{p}_1^2}{1 - V \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= dp_1 \int_{\cos \vartheta_{\max}(p)}^1 [3M^2 - 6Mp_1(1 - V \cos \vartheta) + \\ &+ 2p_1^2(1 - V \cos \vartheta)^2] p_1^2 (1 - V \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (14,8) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\cos \vartheta_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\tilde{p}_{1\max}}{\gamma p_1}\right) & \text{при } \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\tilde{p}_{1\max}}{\gamma p_1}\right) > -1, \\ -1 & \text{при } \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\tilde{p}_{1\max}}{\gamma p_1}\right) < -1. \end{cases} \quad (14,9)$$

После интегрирования получаем

$$N(p_1) dp_1 \propto p_1^2 \{3M^2 [\chi^2 - (1-V)^2] - 4\gamma M p_1 [\chi^3 - (1-V)^3] + \gamma^2 p_1^2 [\chi^4 - (1-V)^4]\}; \quad (14,10)$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{M}{2p_1\gamma} & \text{при } p_1 > \frac{M}{2\gamma(1+V)}, \\ 1+V & \text{при } p_1 < \frac{M}{2\gamma(1+V)}. \end{cases}$$

Значения импульса p_1 заключены в интервале от 0 до $\gamma \frac{M}{2} (1+V)$.

В интересующем нас случае (релятивистские частицы) можно установить весьма общие соотношения для средних импульсов. В соответствии с (12,10) средний импульс \bar{p}_1 в Л-системе, соответствующий фиксированному импульсу \tilde{p}_1 , равен: $\bar{p}_1 \approx \tilde{\gamma} \tilde{p}_1$, откуда в случае произвольного распределения в Ц-системе

$$\bar{p}_1 \approx \gamma \int_0^{\frac{M}{2}} \tilde{N}(\tilde{p}_1) \tilde{p}_1 d\tilde{p}_1 = \tilde{\gamma} \tilde{p}_1. \quad (14,11)$$

Перейдем к вычислению углового распределения

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta \propto d \cos \vartheta \int_0^{p_{\max}(\vartheta)} [3M^2 - 6Mp_1(1 - V \cos \vartheta) + 2p_1^2(1 - V \cos \vartheta)^2] p_1^2 (1 - V \cos \vartheta) dp_1, \quad (14,12)$$

причем

$$p_{\max}(\vartheta) = \frac{M}{2\gamma(1 - V \cos \vartheta)}.$$

После интегрирования получаем

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta \propto \frac{d \cos \vartheta}{(1 - V \cos \vartheta)^2}. \quad (14,13)$$

Это выражение совпадает, если его нормировать, с угловым распределением ультрарелятивистских частиц, возникших при распаде на две частицы [см. (12,9)]. Такое совпадение отнюдь неслучайно. Характерной особенностью выражения (12,9) является его независимость от энергии вторичных частиц (лишь бы они обладали достаточно большими скоростями). Поэтому при любом импульсном распределении ультрарелятивистских частиц в Ц-системе их угловое распределение в Л-системе будет определяться соотношением (12,3).

Г Л А В А V

МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

При увеличении энергии сталкивающихся частиц возникает возможность образования многих частиц в одном акте столкновения. Особенно интересны множественные процессы с участием мезонов. В этой главе мы остановимся на кинематике таких процессов. К ним в еще большей степени, чем к случаю с тремя частицами, относится замечание о невозможности чисто кинематического описания процессов. Поэтому так же, как и в предыдущей главе, будут рассматриваться некоторые частные задачи.

§ 15. Предельные соотношения

В общем случае возможно получение двух предельных соотношений: для максимального импульса данной частицы с массой m_1 в Ц-системе и для максимального угла вылета этой частицы в Л-системе. Ясно, что второе соотношение в значительной степени определяется первым.

Определение предельных импульсов в Ц-системе. Импульс некоторой частицы будет иметь максимальное значение, если все остальные частицы 2, 3... N движутся в противоположном направлении.

Это обстоятельство существенно упрощает последующее рассмотрение, поскольку вместо векторных величин можно рассматривать скалярные.

Так как энергия и импульс частицы 1 имеют следующие значения:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1 + m_{\Pi} - \sum_{i=2}^N \tilde{E}_i = \tilde{E}_{\Pi} - \sum_{i=2}^N E_i,$$

$$\tilde{p}_1 = \sum_{i=2}^N \tilde{p}_i,$$

то ее скорость

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{E}_1} = \frac{\sum_{i=2}^N \tilde{p}_i}{\tilde{E}_n - \sum_{i=2}^N \tilde{E}_i}. \quad (15,1)$$

Нам необходимо найти максимальное значение этой величины при условии

$$\sum_{i=1}^N \tilde{E}_i = \tilde{E}_n, \quad (15,2)$$

т. е. решить задачу на нахождение условного экстремума. Следуя методу Лагранжа, будем искать абсолютный экстремум выражения

$$K = \tilde{\beta}_1 + Q \sum_{i=1}^N \tilde{E}_i, \quad (15,3)$$

где Q — множитель, который будет определен впоследствии. Экстремум функции K определяется системой уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_j} = 0, \quad j = 2 \dots N. \quad (15,4)$$

Поскольку $\frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial \tilde{p}_j} = \tilde{\beta}_j$, то эту систему можно переписать в форме

$$\frac{1}{\tilde{E}_n - \sum_{i=2}^N \tilde{E}_i} + \frac{\sum_{i=2}^N \tilde{\beta}_j \tilde{p}_i}{\left(\tilde{E}_n - \sum_{i=2}^N \tilde{E}_i \right)^2} + Q \frac{\sum_{i=2}^N \tilde{p}_i}{\tilde{E}_n - \sum_{i=2}^N \tilde{E}_i} = 0, \quad (15,5)$$

$$j = 2 \dots N.$$

Здесь величина Q должна удовлетворять всем $N - 1$ уравнениям. Это возможно лишь в том случае, если все уравнения тождественны, т. е. если выполняется условие

$$\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \dots = \tilde{\beta}_N. \quad (15,6)$$

Приведенный метод доказательства соотношения (15,6) принадлежит Штернхеймеру [21]. Далее следует, что для

экстремального случая частицы $2 \dots N$ эквивалентны одной частице с массой $\sum_{i=2}^N m_i$.

Тогда определение максимального импульса частицы сводится к задаче двух частиц. Соответственно формуле (10,55)

$$E_{1 \max} = \frac{\tilde{E}_{\Pi}^2 + m_1^2 - \left(\sum_{i=2}^N m_i \right)^2}{2\tilde{E}_{\Pi}} \quad (15,7)$$

и

$$p_{1 \max} = \frac{\sqrt{\tilde{E}_{\Pi}^4 + m_1^4 + \left(\sum_{i=2}^N m_i \right)^4 - 2 \left\{ \tilde{E}_{\Pi}^2 m_1^2 + \tilde{E}_{\Pi}^2 \left(\sum_{i=2}^N m_i \right)^2 + m_1^2 \left(\sum_{i=2}^N m_i \right)^2 \right\}}}{2\tilde{E}_{\Pi}} \quad (15,8)$$

В более общей форме эта задача формулируется для случая, когда импульсы первых частиц $1, 2, \dots, d$ заданы. Тогда максимальный импульс $(d+1)$ -й частицы направлен противоположно суммарному импульсу: $\tilde{p}_2 = \sum_{i=1}^d \tilde{p}_i$, а его величина определяется из соотношений:

$$\tilde{p}_{d+1} = \tilde{p}_2 + \sum_{i=d+2}^N \tilde{p}_i, \quad (15,9)$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{E}_i = \tilde{E}_{\Pi}. \quad (15,10)$$

Переходя к вычислению экстремальных углов ϑ_{\max} в Л-системе, заметим, прежде всего, что ϑ_{\max} увеличивается при возрастании \tilde{p} (исключая случай, когда этот угол достигает своего предельного значения $\frac{\pi}{2}$). Поэтому экстремальный угол соответствует \tilde{p}_{\max} и определяется соотношением (7,14). Подставляя значение скорости $\tilde{\beta}_1$ из уравнения (15,1), окончательно получаем

$$\vartheta_{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{(1 - V^2) A}{4\tilde{E}_{\Pi}^2 m_1^2 V^2}}, \quad (15,11)$$

где

$$A = \left[\left(\tilde{E}_\pi + \sum_{i=2}^N m_i \right)^2 - m_1^2 \right] \left[\left(E_\pi - \sum_{i=2}^N m_i \right)^2 - m_1^2 \right]. \quad (15,12)$$

На рис. 23—27 приведены максимальные углы для πN - и NN -столкновений различных энергий.

При выводе (7,14), а следовательно, и (15,11) предполагалось, что в Σ -системе частицы могут двигаться под

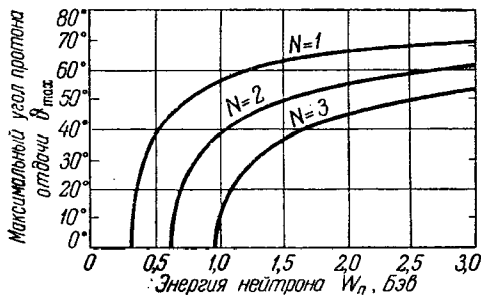


Рис. 23. Зависимость максимального угла φ_{\max} протона отдачи в pr -столкновениях с образованием N π -мезонов от кинетической энергии W_n падающего нейтрона в L -системе [21].

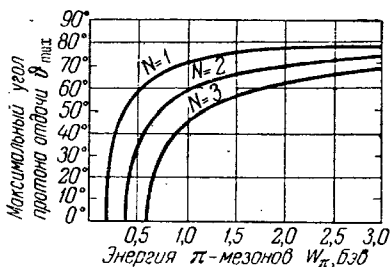


Рис. 24. Зависимость максимального угла φ_{\max} протона отдачи в πr -столкновениях с образованием N π -мезонов от кинетической энергии W_π падающего π -мезона [21].

любыми углами; однако в принципе возможен случай (он осуществляется при столкновении частиц достаточно больших энергий E_π), когда угловое распределение вторичных частиц в Σ -системе существенно анизотропно и, следовательно, в Σ -системе также есть некий экстремальный угол $\tilde{\varphi}_{\text{extr}}$. Выпишем соответствующий угол L -системе, предполагая, что в Σ -системе разлет осуществляется симметрично относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения частиц. В этом случае φ_{\max} соответствует частицам, движущимся под экстремальным углом в задней полусфере в Σ -системе:

$$\varphi'_{\max} = \text{arctg} \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \tilde{\varphi}_{\text{extr}}}{\cos \tilde{\varphi}_{\text{extr}} + \frac{V}{\sqrt{\frac{A}{A + 4\tilde{E}_\pi^2 m_1^2}}}}, \quad (15,13)$$

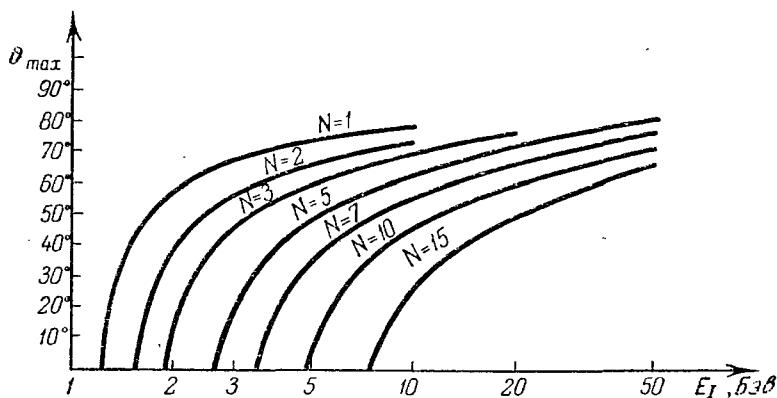


Рис. 25. Зависимость максимального угла ϑ_{max} нуклона отдачи в нуклон-нуклонных столкновениях больших энергий с образованием N π -мезонов от полной энергии падающего нуклона. Кривые вычислены Н. Г. Бригер.

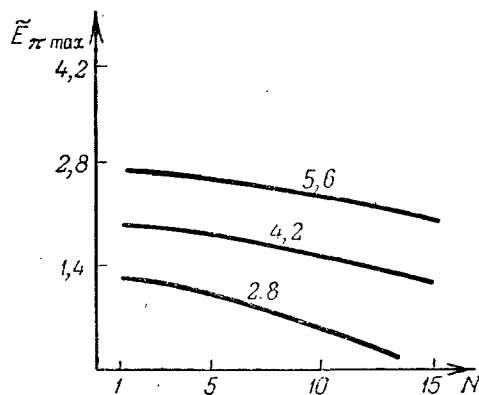


Рис. 26. Максимальная энергия $\tilde{E}_{\pi max}$ π -мезона, образованного при мезон-нуклонных столкновениях с образованием N π -мезонов [33]. Энергия измеряется в $Бэв$. Числа около кривых обозначают энергию первичных π -мезонов в Ψ -системе.

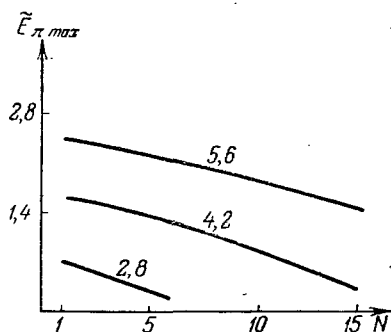


Рис. 27. Максимальная энергия $\tilde{E}_{\pi max}$ π -мезона, образованного при нуклон-нуклонных столкновениях с образованием N π -мезонов [33]. Энергия измеряется в $Бэв$. Числа около кривых обозначают энергию первичных π -мезонов в Ψ -системе.

если ϑ'_{\max} больше угла ϑ_{\max} , определяемого (15,11). В противном случае нужно использовать (15,11).

Несколько иная задача возникает в том случае, если изменены импульсы многих вторичных частиц. Рассмотрим случай, когда известны импульсы всех вторичных частиц, кроме одной (I), для которой необходимо определить максимальный угол [22].

Уравнение сохранения можно для этого случая записать в форме

$$[E_I - p_I] + m_{II} = \sum_{i=2}^N (E_i - p_i \cos \vartheta_i) + E_1 - p_1 \cos \vartheta_1. \quad (15,14)$$

Если $m_{II} \neq 0$ и энергия E_I достаточно велика, то член $E_I - p_I \ll m_{II}$, и им можно пренебречь. Тогда

$$p_1 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} [B \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{B^2 - m_1^2 \sin^2 \vartheta_1}], \quad (15,15)$$

где

$$B = m_{II} - \sum_{i=2}^N (E_i - p_i \cos \vartheta_i) \quad (15,16)$$

и, следовательно,

$$\vartheta_{1 \max} = \arcsin \frac{B}{m_1}. \quad (15,17)$$

Как и обычно, если $\frac{B}{m_1} \geq 1$, то $\vartheta_{1 \max} = \frac{\pi}{2}$. Остановимся в заключение на определении порогов образования новых частиц в процессах столкновений. Наименьшая энергия, необходимая для образования новых частиц, соответствует случаю, когда все частицы после реакции покоятся в Ц-системе. Это соответствует условию

$$\sqrt{m_1^2 + \tilde{p}^2} + \sqrt{m_{II}^2 + \tilde{p}^2} = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (15,18)$$

где \tilde{p} — импульс сталкивающихся частиц. Отсюда следует

$$\tilde{p} = \sqrt{\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 + m_I^2 - m_{II}^2}{2 \sum_{i=1}^N m_i} \right]^2 - m_I^2}, \quad (15,19)$$

$$\tilde{E}_I = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^2 + m_I^2 - m_{II}^2}{2 \sum_{i=1}^N m_i}, \quad (15,20)$$

$$\tilde{E}_{II} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^2 + m_{II}^2 - m_I^2}{2 \sum_{i=1}^N m_i} \quad (15,21)$$

и

$$E_{I \text{ порог}} = \gamma (\tilde{E}_I + V\tilde{p}), \quad (15,22)$$

где

$$V = \frac{\tilde{p}}{\tilde{E}_{II}}. \quad (15,23)$$

В частности, если $m_I = m_{II} = m$, то

$$\tilde{E}_I = \tilde{E}_{II} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{2} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{2m}.$$

§ 16. Энергетические и угловые распределения при множественных процессах

Уже упоминалось, что при множественных процессах нельзя из чисто кинематических соображений получить характеристики этих процессов. Однако в известной степени близко к кинематике подходит высказанная Ферми идея о том, что характеристики множественных процессов, приводящих к образованию ядерно-активных частиц, определяются статистическим весом конечных состояний. Некоторое сходство между этими методами можно найти в том, что оба они не учитывают деталей взаимодействия между частицами, хотя сам факт установления статистического равновесия является следствием этого взаимодействия (и в этом есть конечно существенное различие между статистической концепцией и кинематикой). Подробный обзор статистической теории выходит за рамки этой книги. Упомянем лишь, что в области энергий порядка нескольких *Бэв* эта теория, учитывающая изобарные состояния нуклонов, правильно

предсказывает энергетическое распределение и распределение по числу образованных π -мезонов*) при энергиях $\tilde{E}_\pi = 1-6$ Бэв.

Формально содержание статистической теории можно записать в виде простых соотношений:

$$W_N(\tilde{E}_\pi) \propto \rho_{\tilde{E}_\pi}^{**} \quad (16,1)$$

и

$$\begin{aligned} w_N(\tilde{E}_\pi, \tilde{p}_1) d\tilde{p}_1 = \\ = 4\tilde{\pi} p_1^2 w_{N-1}(\tilde{E}_\pi - \sqrt{m_1^2 + \tilde{p}_1^2}, \tilde{p}_1) d\tilde{p}_1 \quad (16,2) \end{aligned}$$

где W_N — вероятность образования N -частиц, если полная энергия равна \tilde{E}_π , а полный импульс равен нулю; $\rho_{\tilde{E}_\pi}$ — плотность состояний, а $w_N(\tilde{E}_\pi, \tilde{p}_1) d\tilde{p}_1$ — вероятность того, что в рассматриваемой системе одна из частиц имеет импульс, заключенный в интервале $\tilde{p}_1, \tilde{p}_1 + d\tilde{p}_1$. Запишем в общем виде выражение для плотности состояния системы с энергией \tilde{E}_π и импульсом \tilde{p}_π в форме

$$\left(\frac{V}{8\pi^3}\right)^{N-1} \frac{dQ_N(\tilde{E}_\pi, \tilde{p}_\pi)}{d\tilde{E}_\pi} q_{N,T} \sim w_N(\tilde{E}_\pi, \tilde{p}_\pi), \quad (16,3)$$

где V — некоторый характеристический объем (для случая столкновения двух нуклонов этот объем по порядку величины равен $\left(\frac{1}{\mu_\pi}\right)^3$); показатель степени равен $N-1$ (а не N) вследствие закона сохранения импульса, и $q_{N,T}$ — фактор, учитывающий сохранение обычного и изотропического спинов; он вычисляется по известным квантовомеханическим прави-

*) Подробный обзор статистической теории см. в [23]. Здесь мы заметим дополнительно, что при очень больших энергиях ($E_\pi \gg \gg 10$ Бэв) статистическая теория, не учитывающая взаимодействие между мезонами, не оправдана. Для описания этого взаимодействия Л. Д. Ландау предложил использовать релятивистскую гидродинамику идеальной жидкости [24].

***) Обычно процесс рассматривают в Ц-системе.

****) Отметим, что при вычислении импульсного распределения системы N частиц рассматривается функция

$$w_{N-1}(\tilde{E}_\pi - \sqrt{m_1^2 + \tilde{p}_1^2}, \tilde{p}_1),$$

где m_1, \tilde{p}_1 — масса и импульс некоторой фиксированной частицы.

лам (см. [25] и глава VI). Множитель $\frac{dQ_N(\tilde{E}_n, \tilde{p}_n)}{d\tilde{E}_n}$, равный объему, занимаемому системой в импульсном пространстве, при условии

$$\sum_{i=1}^N \tilde{E}_i = \tilde{E}_n, \quad (16,4)$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i = \tilde{p}_n \quad (16,5)$$

равен $3N$ -мерному интегралу

$$\int \dots \int_{3N} \delta \left[\tilde{E}_n - \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i^2 + \tilde{p}_i^2} \right] \delta \left[\tilde{p}_n - \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i \right] \prod_{i=1}^N d^3 \tilde{p}_i. \quad (16,6)$$

В общем случае вычисление этого интеграла затруднительно; оно было проведено недавно в [26]. Результат был получен в виде сложного нестепенного разложения. Мы здесь ограничимся двумя полезными на практике крайними случаями: ультрарелятивистским (все $m_i = 0$) и нерелятивистским ($\tilde{E}_i = \frac{\tilde{p}_i^2}{2m_i}$) [27, 28].

В этих случаях

$$\begin{aligned} \frac{dQ_N(\tilde{E}_n, \tilde{p}_n)}{d\tilde{E}_n} &= \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}(N-1)}}{\left[\frac{3}{2}(N-1) - 1 \right]!} \left[\frac{m_1 m_2 \dots m_N}{\sum_{i=1}^N m_i} \right]^{\frac{3}{2}} \left[\tilde{W}_n - \frac{\tilde{p}_n^2}{2 \sum_{i=1}^N m_i} \right]^{\left[\frac{3}{2}(N-1) - 1 \right]}, \end{aligned} \quad (16,7)$$

где W_n — полная кинетическая энергия частицы (нерелятивистский случай) и

$$\begin{aligned} \frac{dQ_N(\tilde{E}_n, \tilde{p}_n)}{d\tilde{E}_n} &= \frac{\pi^{N-1}}{2^{N-2}} \frac{(\tilde{E}_n^2 - \tilde{p}_n^2)^{N-2}}{\tilde{p}_n} \times \\ &\times \sum_{i=1}^N C_N^i \frac{(\tilde{E}_n - \tilde{p}_n)^i (\tilde{E}_n + \tilde{p}_n)^{N-i}}{(N+i-2)! (2N-i-2)!} \left[\frac{\tilde{E}_n + \tilde{p}_n}{2N-i-1} - \frac{\tilde{E}_n - \tilde{p}_n}{N+i-1} \right] \end{aligned} \quad (16,8)$$

(ультрарелятивистский случай).

Соответственно (16,7) и (16,8) получаем

$$\frac{dQ_N(\tilde{E}_n, 0)}{d\tilde{E}_n} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}(N-1)}}{\left[\frac{3}{2}(N-1) - 1\right]!} \left(\frac{\prod_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right)^{3/2} \tilde{W}_n^{\frac{3}{2}(N-1)-1}, \quad (16,9)$$

$$\frac{dQ_N(\tilde{E}_n, 0)}{d\tilde{E}_n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{N-1} E_n^{3N-4} \frac{(4N-4)! (2N-1)}{(3N-4)! [(2N-1)!]^2}. \quad (16,10)$$

Опуская несущественные множители (которые далее следует учесть нормировкой), можно написать

$$\omega_N(\tilde{E}_n, p_1) = p_1^2 \left\{ \tilde{W}_n - \frac{\tilde{p}_1^2}{2} \left[\frac{\sum_{i=1}^N m_i}{m_1 \sum_{i=2}^N m_i} \right] \right\} \quad (16,11)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_N(\tilde{E}_n, \tilde{p}_1) &= \tilde{p}_1 (\tilde{E}_n - 2\tilde{p}_1)^{N-3} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{N-1} \frac{C_{N-1}^i \tilde{E}_n^{N-i-1} (\tilde{E}_n - 2\tilde{p}_1)^i}{(N+i-3)! (2N-i-4)!} \left[\frac{\tilde{E}_n}{2N-i-3} - \frac{\tilde{E}_n - 2\tilde{p}_1}{N+i-2} \right]. \end{aligned} \quad (16,12)$$

На рис. 28 приведено импульсное распределение π -мезонов, образованных при аннигиляции покоящихся антинуклонов; на рис. 29 — зависимость средней множественности π -мезонов от кинетической энергии сталкивающихся нуклонов. Импульсные распределения в соответствии с (16,2), (16,11) и (16,12) задаются в Ц-системе. Для того чтобы определить их в Л-системе, необходимо опираться на угловое распределение этих частиц в Ц-системе. К сожалению, теория в ее настоящей форме не позволяет вычислить точно это распределение, так как для этой цели нужно принять во внимание закон сохранения момента количества движения, что не было сделано до сих пор. Однако для сравнительно умеренных энергий (≤ 5 Бэв) экспериментальные данные показывают, что угловое распределение вторичных частиц в Ц-системе близко к изотропному. Считая распределение изотропным, мы можем при переходе от Ц- к Л-системе воспользоваться формулами (7,4) или (7,18), а затем произвести интегрирование по импульсам.

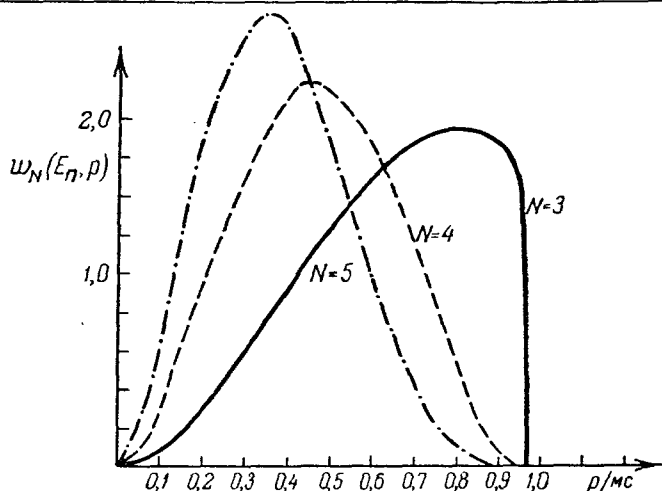


Рис. 28 Импульсное распределение π -мезонов, образованных при аннигиляции покоящихся анти-нуклонов. Распределение было вычислено В. М. Максименко [34] по точным формулам статистической теории.

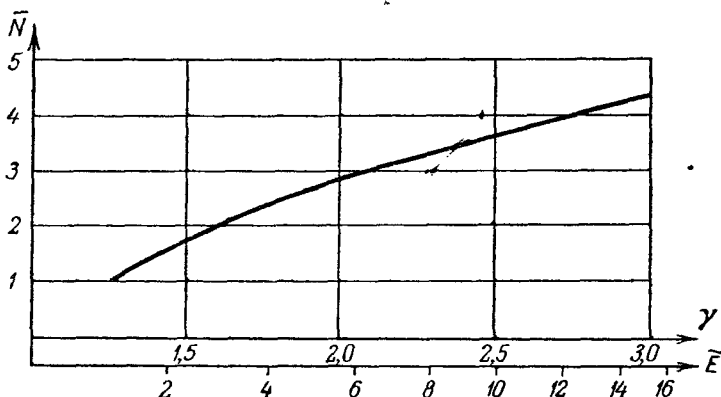


Рис. 29. Зависимость средней множественности π -мезонов, образованных при нуклон-нуклонных столкновениях от кинетической энергии падающего нуклона. Вычисления проводились по формулам статистической теории с учетом изобарных состояний [23].

Можно ожидать, что подобный подход к решению задачи не будет справедлив для очень больших энергий, когда в Ц-системе начинает заметно проявляться отклонение от изотропии (см., например, [24]). Имея в виду такой случай, мы получим здесь формулы перехода от Ц- к Л-системе, когда угловое распределение в первой системе задается косинусоидальной функцией, а импульсное — δ -функцией [5]

$$\tilde{N}(\tilde{\vartheta}, \tilde{p}) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{p} = \frac{(2k+1)}{4\pi} \cos^{2k} \tilde{\vartheta} \delta(\tilde{p} - \tilde{p}_1) \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} d\tilde{p}_1, \quad (16,13)$$

где $k = 1, 2, 3 \dots$. Используя (7,18) и интегрируя по импульсам, можно получить

$$N(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{(2k+1)}{2} \frac{(\gamma \operatorname{tg} \vartheta)^2}{(\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1)^{2k+2} \cos \vartheta} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left[\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} + \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]^2 \left[-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]^{2k}}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} - \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]^2 \left[-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta - \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]^{2n}}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}} \right\} \quad (16,14)$$

(когда $\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \geq 1$) или

$$N(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2k+1}{2} \frac{(\gamma \operatorname{tg} \vartheta)^2}{(1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{2k+2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left[\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} + \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right] \left[-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right]}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \right)^2 - 1} \right] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}} \right\} \quad (16,15)$$

(когда $\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} \leq 1$).

Если $\gamma \gg 1$, $\vartheta \ll 1$, то

$$N(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 2(2k+1) \frac{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{[\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta - 1]^{2k}}{[\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1]^{2k+2}}. \quad (16,16)$$

На рис. 30 представлены угловые распределения $N(\vartheta)$ частиц в Л-системе для разных k и $\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{V}} = 1,01$. Характерной особенностью

этого распределения является наличие двух максимумов в случае, когда $k \neq 0$. Это обстоятельство является простым следствием того, что угловое распределение в этом

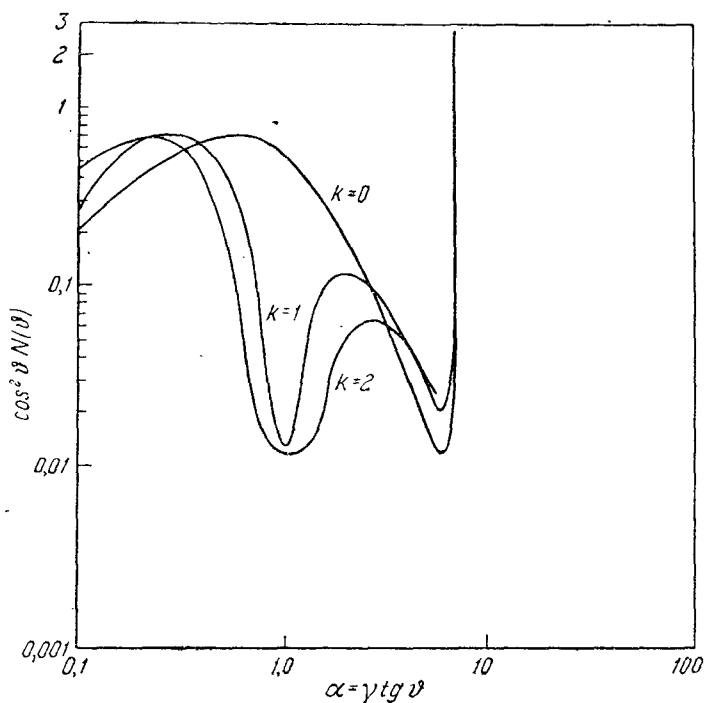


Рис. 30. Угловое распределение частиц в Л-системе, если в Ц-системе их угловое распределение представляется косинусоидальной функцией (16,13), а импульсное — δ -функцией.

$$\text{Параметр } \frac{\tilde{\beta}}{V} = 1,01.$$

случае в Ц-системе также характеризуется двумя максимумами при $\tilde{\vartheta} = 0$ и $\tilde{\vartheta} = \pi$. При переходе от Ц- к Л-системе направления распространения частиц, движущихся в передней полусфере в Ц-системе, располагаются близко к оси, образуя так называемый узкий конус, в то время как частицы, движущиеся в Ц-системе назад, в Л-системе (при достаточно больших энергиях) также распространяются вперед. Однако

их скорости заключены в значительно более широком конусе. Подобную картину уместно проиллюстрировать простыми оценками. Пусть в Ц-системе угловое распределение симметрично относительно плоскости, перпендикулярной к оси движения, но анизотропно таким образом, что все частицы лежат в интервалах углов $0, \tilde{\vartheta}$ и $\pi - \tilde{\vartheta}, \pi$. Тогда в соответствии с (4,3) при $\gamma \gg 1$ половинный угол при вершине узкого конуса

$$\vartheta_1 = \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2}, \quad (16,17)$$

а половинный угол при вершине широкого конуса —

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2}. \quad (16,18)$$

Отсюда видно, что узкие и широкие конусы могут быть резко разграничены в Л-системе, причем это разграничение должно проявляться наиболее сильно при малых $\tilde{\vartheta}$. Рассматриваемая здесь особенность распределения наблюдается часто при исследовании ливней большой энергии, зарегистрированных в фотоэмульсии, что доказывает анизотропность углового распределения в Ц-системе вторичных частиц, возникших при столкновении.

§ 17. Определение энергии быстрых нуклонов

Энергия и импульс первичных частиц являются важнейшими характеристиками ядерных реакций. При сравнительно умеренных энергиях имеется ряд разработанных методов определения этих величин для заряженных частиц (измерение отклонения в магнитном поле, счет зерен в фотоэмульсии, измерение рассеяния). Однако при увеличении энергии трудности измерения резко возрастают, а при энергиях $5 \cdot 10^{10} - 10^{11}$ эв обычные методы становятся непригодными. Но как раз для столь быстрых частиц был разработан приближенный метод определения энергии, основанный на кинематическом подходе. Он заключается в том, что измеряется угловое распределение вторичных частиц, образованных при столкновении частиц, энергию которых нужно определить [29—31]. Большим преимуществом этого метода является возможность измерять энергию нейтральных первичных частиц. В этом случае нужно определить дополнительно направление

их движения, отождествляя его с осью ливня. Определение оси ливня естественно вносит дополнительную ошибку в величину энергии (сравнительно с определением энергии заряженных частиц).

В основе метода лежит соотношение (5,5), которое мы запишем в форме

$$\gamma^2 = \frac{(E_I + m_{II})^2}{(m_I^2 + 2E_I m_{II} + m_{II}^2)}. \quad (17,1)$$

Если $E_I \gg m_I$ и $E_I \gg m_{II}$, то

$$\gamma^2 = \frac{E_I}{2m_{II}}. \quad (17,2)$$

С другой стороны, величина γ входит в соотношение (4,1), определяющее преобразование углов вылета при переходе от Ц-системы к Л-системе.

Для определения значения γ из (17,1) и (4,1) необходимо, вообще говоря, определить $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\vartheta}$ (величина ϑ определяется на опыте), что является едва ли выполнимой задачей. Однако в наиболее важном случае очень быстрых частиц можно положить $\frac{V}{\tilde{\beta}} = 1$, и тогда соотношение (4,4) уже не будет зависеть от скоростей частиц в Ц-системе. Именно в этой замене и состоит сущность рассматриваемого метода.

Из (17,2) и (4,4) следует

$$E_I \approx \frac{2m_{II}}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\vartheta}}{2}. \quad (17,3)$$

Формула (17,3) является основой для определения энергии по угловому распределению. Обычно ее применяют к частицам, образовавшим ливни с малым ($< 3,4$) числом медленных частиц (так называемые струи). Хотя есть некоторые основания сомневаться в том, что эти ливни образуются в результате столкновений нуклонов с нуклонами, однако, обычно масса m_{II} принимается равной массе нуклона, т. е. $m_I = m_{II} = m$. Мы примем пока это допущение*), а в дальнейшем оценим возможную погрешность, связанную с ним. Таким образом, остается определить угол $\tilde{\vartheta}$. При столкновении двух частиц естественно предположить, что имеет место аксиальная сим-

*) Кинематические критерии нуклон-нуклонных столкновений см. [35].

метрия, в том смысле, что функция $\tilde{\Phi}(\tilde{\vartheta})$ углового распределения не зависит от азимутального угла.

Как уже упоминалось, в случае столкновения двух нуклонов можно допустить еще более высокую степень симметрии:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\vartheta}) = \tilde{\Phi}(\pi - \tilde{\vartheta}).$$

Предположим вначале, что каждой частице с импульсом \tilde{p} соответствует частица с импульсом $-\tilde{p}$. Тогда легко получить соотношение, которым пользуются весьма часто.

Пусть ϑ_f и ϑ_{1-f} — углы, в пределах которых находятся f и $1-f$ доли всех частиц. Тогда из предположения о симметрии в Ц-системе $\vartheta_{1-f} = \pi - \vartheta_f$ и, следовательно, на основании соотношения (4,4):

$$\gamma^2 \approx \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_f \operatorname{tg} \vartheta_{1-f}} \quad (17,4)$$

или

$$E_{\pi} \approx \frac{2m}{\vartheta_f \vartheta_{1-f}}. \quad (17,5)$$

В частности, если $f = \frac{1}{2}$, то

$$E_{\pi} \approx \frac{2m}{\vartheta_{1/2}^2}.$$

Примем теперь во внимание, что условие существования двух частиц, движущихся под дополнительными углами ($\tilde{\vartheta}$ и $\pi - \tilde{\vartheta}$), выполняется только в среднем. В этом случае необходимо уже задаваться некоторой конкретной формой функции Φ и функции корреляции углов испускания частиц. Найдем наиболее вероятное значение энергии при заданной функции Φ , предполагая, что углы испускания частиц статистически независимы [30, 31]. В настоящее время нет экспериментальных данных, которые бы подтвердили справедливость этого предположения. Мы примем его как наиболее простое, имея в виду необходимость опытной проверки результатов *).

В этом случае вероятность Φ вылета частиц, под углами $\vartheta_1 \dots \vartheta_N$, равна [30]

$$\Phi(\vartheta_1 \dots \vartheta_N) = \prod_{i=1}^N \Phi(\vartheta_i) d\vartheta_i, \quad (17,6)$$

*) Это предположение довольно естественно, если число частиц велико и среди них нет существенно выделенных вторичных.

где ϑ_i , $d\vartheta_i$ связаны с $\tilde{\vartheta}_i$, $d\tilde{\vartheta}_i$ следующими соотношениями (см. (4,4)):

$$\cos \tilde{\vartheta} = \frac{1 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}, \quad (17,7)$$

$$d\tilde{\vartheta} = \frac{2\gamma \sec^2 \vartheta}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} d\vartheta. \quad (17,8)$$

Тогда наиболее вероятное значение величины $\gamma = \gamma_{\text{в}}$ (следовательно и энергии) определяется уравнением

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \Phi(\vartheta_1 \dots \vartheta_N) \right\}_{\vartheta_i = \text{const}} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \Phi(\vartheta_i) \right\}_{\vartheta_i = \text{const}}. \quad (17,9)$$

Дилуорс и другие [30] вычисляли $\gamma_{\text{в}}$, предполагая, что

$$\Phi(\tilde{\vartheta}_i) = a |\cos \tilde{\vartheta}|^k \sin \tilde{\vartheta} \quad (k = \text{const}).$$

В этом случае $\gamma_{\text{в}}$ можно найти из уравнения

$$\frac{N}{2\gamma_{\text{в}}^2} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\cos^2 \vartheta_i + \gamma_{\text{в}}^2} - \frac{k}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \gamma_{\text{в}}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_i} - \frac{1}{1 - \gamma_{\text{в}}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_i} \right\} \right]. \quad (17,10)$$

Найдем далее дисперсию величины γ .

Перепишем (4,4) в форме

$$\ln \gamma = -\ln \operatorname{tg} \vartheta + \ln \frac{\operatorname{tg} \tilde{\vartheta}}{2}. \quad (17,11)$$

Усредняя по следам всех вторичных заряженных частиц, получаем

$$\ln \gamma = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \operatorname{tg} \vartheta_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \quad (17,12)$$

(в данном случае N — число вторичных заряженных частиц в ливне).

Для дальнейшего существенного упрощения воспользуемся основной предельной теоремой теории вероятности, согласно которой сумма N одинаковых случайных величин при $N \rightarrow \infty$ является также случайной величиной, распределение которой представляется функцией Гаусса с дисперсией $\sigma^2 N$, где

σ^2 — дисперсия первичной случайной величины *). Поэтому (17,12) можем представить в форме

$$\ln \gamma = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \operatorname{tg} \vartheta_i \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (17,13)$$

где

$$\sigma^2 = \int \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right)^2 J \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) d \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right), \quad (17,14)$$

а функция J есть нормированное распределение величин $\ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{\vartheta}}{2}$ в Ц-системе.

Естественно, что величина σ зависит от степени анизотропии углового распределения в Ц-системе, однако, для ориентировочных расчетов значение σ можно принять равным 1.

Как указывалось, описанные здесь методы определения энергии пригодны для случая, когда отношение $\frac{\tilde{\beta}}{V}$ близко к 1. Практически это означает, что энергия первичной частицы велика, а следовательно, как правило, и число вторичных частиц велико сравнительно с 1. Точную границу метода определить нельзя, однако, можно надеяться, во всяком случае, что при энергиях $E_n > 10^{11}$ эв он дает правильный порядок величины энергии первичной частицы.

Оценку ошибки, обусловленную тем, что скорости вторичных частиц не удовлетворяют отмеченному выше условию, можно произвести несколькими путями, однако, все равно остается трудность, связанная с малостью числа вторичных частиц. Отметим здесь некоторые из этих путей. Так, можно использовать метод последовательных приближений, положив в первом приближении $\frac{\tilde{\beta}}{V} = 1$, и определить, таким образом, некоторое γ_0 , затем по формуле (4,7) оценить $\tilde{\beta}$ и снова проделать все вычисления. Естественно, что при этом нужно

*) При выводе этой теоремы предполагается, что дисперсия σ^2 существует. Кроме того, вообще говоря, получающаяся функция Гаусса смещена относительно нуля; эта функция симметрична относительно нуля в одном важном частном случае, когда функция $\Phi(\vartheta)$ симметрична, т. е. выполняется условие $\Phi(\vartheta) = \Phi(\pi - \vartheta)$. Это и является вторым условием применимости (17,13).

независимо определить импульс и массу некоторых вторичных частиц. Другим способом определения энергии для случая, когда известны импульс и массы некоторых вторичных частиц, является симметризация углового распределения [22]. Этот метод сводится к определению в соответствии с формулой (17,1) такого значения γ , при котором в соответствующей ему системе координат угловое распределение обладает наибольшей симметрией относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения.

Дополнительным существенным источником ошибок может быть распределение первичных частиц по энергии. В этом случае (как это имеет место в космических лучах), когда энергетический спектр частиц, вызывающих ливни, представляется быстро падающей функцией, даже незначительные флуктуации в ливнях определенной энергии могут привести к большой ошибке. Причина заключается в том, что первичные частицы малых энергий представлены в спектре гораздо богаче и, следовательно, регистрируются с большей вероятностью, чем частицы больших энергий. Поэтому метод в описанной выше форме дает заведомо хорошие результаты лишь в случае, когда спектр первичных частиц постоянен или почти постоянен. Для исследования в космических лучах нужно помимо влияния спектра принять во внимание связь между полным числом частиц в звезде и величиной энергии. Подробно этот вопрос разобран в работе [32].

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В этой части книги мы будем рассматривать следствия общих свойств пространства — времени для ядерных реакций при помощи квантовой механики. Эти следствия, как мы увидим ниже, оказываются значительно богаче, чем в классической механике. Существенно с самого начала подчеркнуть, что нашей задачей является выделение среди всех свойств реакций тех, которые обусловлены очень общими и надежно установленными законами природы. Такое выделение оказывается очень полезным. Оно позволяет свести изучение сложных характеристик реакции к определению необходимого числа действительных параметров (обобщенный фазовый анализ), связать, на первый взгляд, совершенно различные процессы строгими соотношениями. Кроме того, оно дает возможность контролировать и уточнять данные опыта и, наконец, позволяет устанавливать важнейшие характеристики частиц (их спин, четность, изотопический спин).

В основном мы будем оперировать понятиями нерелятивистской квантовой механики. Наше изложение предполагает знание читателем квантовой механики в объеме университетского курса или книги Д. И. Блохинцева «Основы квантовой механики», на которую мы будем часто ссылаться, и не потребует знания теории групп. В некоторых местах мы все же вынуждены будем использовать результаты теории групп, но это несколько не осложнит понимания физического смысла излагаемой ниже теории и применения общих формул к анализу экспериментальных данных. В связи с этим небольшое число результатов будет приведено без доказательств. Читателя, интересующегося этой стороной дела, мы будем отсылать к соответствующим разделам книги Л. Ландау и Е. Лифшица «Квантовая механика» или специальным обзорным статьям периодической литературы.

Свое изложение мы строим на основе фундаментального понятия S -матрицы *), значение которого становится все более важным как в теории элементарных частиц, так и в ядерной физике. Поэтому умение свободно оперировать с этим понятием становится необходимым каждому квалифицированному экспериментатору, на которого и рассчитана настоящая книга. В этой части книги мы будем пользоваться формулировкой квантовой механики в терминах теории представлений Дирака **). Эта терминология и обозначения, наиболее соответствующие духу квантовой механики, все шире используются в теоретических работах и, главное, позволяют в очень краткой форме пояснить смысл различных коэффициентов, встречающихся в теории угловых распределений, корреляций и других задачах, что существенно облегчает работу с этими коэффициентами.

*) Этот метод рассмотрения формальной теории ядерных реакций использован в [23 и 24].

***) У читателя предполагается знание теории представлений квантовой механики в объеме гл. VII из [1].

ГЛАВА VI

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

§ 18. S-матрица

Обычная постановка задачи в случае ядерной реакции заключается в сопоставлении свойств частиц и параметров, которыми описывается состояние их движения до реакции, с параметрами и свойствами продуктов реакции. В случае, когда взаимодействие и движение частиц можно описать при помощи классической механики, говорят о сопоставлении начальных и конечных координат, импульсов частиц и каких-либо переменных, характеризующих их внутреннее состояние. В квантовой механике мы должны говорить о сопоставлении начального и конечного состояний системы. Состояние же, как известно, задается набором квантовых чисел. Таким образом, нам нужно найти правило, по которому сопоставляются квантовые числа, описывающие начальное и конечное состояния системы. Например, в задаче рассеяния бесспиновой частицы силовым полем мы можем говорить о правиле, связывающем квантовые числа, которые характеризуют орбитальный момент l , его проекцию m на некоторое направление и энергию E в начальном и конечном состояниях. Отметим, что состояние движения бесспиновой частицы можно задавать также ее импульсом p .

В случае взаимодействия двух бесспиновых частиц можно задавать следующие наборы квантовых чисел $(l_1, l_2, m_1, m_2, E_1, E_2)$ или (p_1, p_2) . Если частицы обладают спином, то в соответствующие наборы необходимо включить числа s и μ , характеризующие величину спина и его проекцию. Если в результате столкновения могут рождаться другие частицы или изменяться внутреннее состояние сталкивающихся частиц (такие столкновения принято называть неупругими), то в число

Свое изложение мы строим на основе фундаментального понятия S -матрицы *), значение которого становится все более важным как в теории элементарных частиц, так и в ядерной физике. Поэтому умение свободно оперировать с этим понятием становится необходимым каждому квалифицированному экспериментатору, на которого и рассчитана настоящая книга. В этой части книги мы будем пользоваться формулировкой квантовой механики в терминах теории представлений Дирака **). Эта терминология и обозначения, наиболее соответствующие духу квантовой механики, все шире используются в теоретических работах и, главное, позволяют в очень краткой форме пояснить смысл различных коэффициентов, встречающихся в теории угловых распределений, корреляций и других задачах, что существенно облегчает работу с этими коэффициентами.

*) Этот метод рассмотрения формальной теории ядерных реакций использован в [23 и 24].

***) У читателя предполагается знание теории представлений квантовой механики в объеме гл. VII из [1].

ГЛАВА VI

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

§ 18. S-матрица

Обычная постановка задачи в случае ядерной реакции заключается в сопоставлении свойств частиц и параметров, которыми описывается состояние их движения до реакции, с параметрами и свойствами продуктов реакции. В случае, когда взаимодействие и движение частиц можно описать при помощи классической механики, говорят о сопоставлении начальных и конечных координат, импульсов частиц и каких-либо переменных, характеризующих их внутреннее состояние. В квантовой механике мы должны говорить о сопоставлении начального и конечного состояний системы. Состояние же, как известно, задается набором квантовых чисел. Таким образом, нам нужно найти правило, по которому сопоставляются квантовые числа, описывающие начальное и конечное состояния системы. Например, в задаче рассеяния бесспиновой частицы силовым полем мы можем говорить о правиле, связывающем квантовые числа, которые характеризуют орбитальный момент l , его проекцию m на некоторое направление и энергию E в начальном и конечном состояниях. Отметим, что состояние движения бесспиновой частицы можно задавать также ее импульсом p .

В случае взаимодействия двух бесспиновых частиц можно задавать следующие наборы квантовых чисел ($l_1, l_2, m_1, m_2, E_1, E_2$) или (p_1, p_2). Если частицы обладают спином, то в соответствующие наборы необходимо включить числа s и μ , характеризующие величину спина и его проекцию. Если в результате столкновения могут рождаться другие частицы или изменяться внутреннее состояние сталкивающихся частиц (такие столкновения принято называть неупругими), то в число

переменных необходимо включить еще квантовые числа, характеризующие структуру частиц, их внутреннее состояние. Так как в нашу задачу не входит изучение структуры частиц, то все эти последние характеристики нашей системы будем обозначать одним индексом α .

Согласно квантовой механике, состояние системы описывается волновой функцией $\Psi_n(x)$, где n — индекс состояния, т. е. краткое обозначение набора упомянутых выше квантовых чисел, задающих состояние системы, а x — индекс представления, т. е. набор переменных, от которых зависит волновая функция. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера *)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (18,1)$$

Уравнение (18,1), определяющее приращение Ψ за некоторый малый интервал времени Δt , можно записать следующим образом:

$$\Psi(t + \Delta t) = \Psi(t) - i \int_t^{t+\Delta t} \hat{H} \Psi(t) dt. \quad (18,2)$$

Основываясь на этом равенстве, введем оператор $\hat{U}(t + \Delta t, t) = 1 - i \hat{H} \Delta t$, который переводит значение волновой функции от момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$. Можно ввести и интегральный оператор $\hat{U}(t, t_0)$, преобразующий $\Psi(t_0)$ в $\Psi(t)$, где $t - t_0$ — конечная величина. Нетрудно показать, что **)

$$i \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}. \quad (18,3)$$

Пусть мы рассматриваем реакцию типа

$$I + II \rightarrow 1 + 2, \quad (18,4)$$

т. е. в результате столкновения частицы I с частицей II возникают частицы 1 и 2, имеющие, вообще говоря, совсем другие характеристики и даже другую природу.

Уравнение (18,1) описывает весь интересующий нас процесс, т. е. существует такое его решение Ψ , которое при

*) Шляпки над буквами означают, что соответствующие величины являются операторами. Здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$.

***) См., например, [3].

$t \rightarrow -\infty$ переходит в волновую функцию $\Psi_i(x)$, описывающую две невзаимодействующие частицы I и II с заданными характеристиками движения и внутреннего состояния $-i$, а при $t \rightarrow +\infty$ — в волновую функцию Ψ_f двух невзаимодействующих частиц 1 и 2. Так как на опыте регистрируются состояния невзаимодействующих частиц до и после столкновения, т. е. при $t = -\infty$ и $t = +\infty$, то нас будет интересовать оператор, превращающий $\Psi(-\infty)$ в $\Psi(+\infty)$

$$\lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \hat{U}(t, t_0) = \hat{S},$$

$$\Psi_f(+\infty) = \hat{S}\Psi_i(-\infty). \quad (18,5)$$

Оператор \hat{S} называется S-матрицей.

Для нахождения \hat{U} или \hat{S} , как видно из наших рассуждений, необходимо, вообще говоря, не только знать \hat{H} (обычно оператор \hat{H} для взаимодействия ядерных частиц, конечно, неизвестен), но и уметь решать с этим \hat{H} уравнение Шредингера. На первый взгляд мы несколько не упростили задачу. Целесообразность введения оператора \hat{S} заключается в том, что матричные элементы \hat{S} с одной стороны очень просто связаны с наблюдаемой характеристикой процесса — вероятностью перехода, а с другой стороны следствия общих законов природы непосредственно выражаются в виде свойств оператора \hat{S} . То есть при помощи S-матрицы мы можем решить задачу, сформулированную во введении — выделить среди всех свойств реакций те свойства, которые являются следствиями уже установленных законов природы.

Займемся установлением общих свойств S-матрицы.

Покажем, что квадраты матричных элементов S-матрицы определяют вероятность обнаружить то или иное значение динамических переменных в конечном состоянии, если они заданы для начального состояния.

Разложим $\Psi_i(-\infty)$ и $\Psi_f(+\infty)$ по собственным функциям оператора \hat{Q} , описывающего какую-нибудь динамическую переменную (момент, спин и т. п.):

$$\hat{Q}\Psi_q = q\Psi_q, \quad q \text{ — собственные значения } \hat{Q}.$$

$$\Psi_i(-\infty) = \sum_q C_q^i \Psi_q; \quad \Psi_f(+\infty) = \sum_q C_q^f \Psi_q.$$

Подставляя эти разложения в равенство (18,5), получим

$$C_{q'}^f = \sum_q S_{q'q} C_q^i.$$

Пусть в начальном состоянии величина q имела определенное значение q_0 , т. е. $C_q^i = \delta_{qq_0}$ *), тогда

$$C_{q'}^f = S_{q'q_0}.$$

Но, согласно общим положениям квантовой механики, $|C_{q'}^f|^2$ есть вероятность обнаружить величину $q = q'$ в состоянии f ; поэтому $|S_{q'q_0}|^2$ определяет вероятность перехода из состояния q_0 в состояние q' .

§ 19. Унитарность S -матрицы

Напомним, что матрица называется унитарной, если она обладает свойствами

$$\sum_n S_{n\alpha}^* S_{n\beta} = I_{\alpha\beta}; \quad \sum_\alpha S_{m\alpha} S_{n\alpha}^* = I_{mn},$$

или короче, в символической записи:

$$\hat{S}^+ \hat{S} = \hat{I} \quad \text{и} \quad \hat{S} \hat{S}^+ = \hat{I}; \quad (19,1)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение, плюс — эрмитовское сопряжение); \hat{I} — здесь и в дальнейшем единичная диагональная матрица. Это свойство вытекает из ортогональности и нормированности волновых функций:

$$(\Psi_m, \Psi_n) = I_{mn}. \quad (19,2)$$

*) δ_{qq_0} — как обычно означает символ Кронекера:

$$\delta_{qq_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } q = q_0 \\ 0 & \text{при } q \neq q_0 \end{cases}.$$

Для простоты мы здесь рассматриваем величину с дискретным спектром. Рассмотрение случая непрерывного спектра величины q является очевидным обобщением.

Под скалярным произведением мы понимаем (как обычно) суммирование и интегрирование по всем индексам, от которых зависит волновая функция — x (индексам представления); I_{mn} — сокращенная запись произведения δ -функций от квантовых чисел с непрерывным спектром и символов Кронекера от квантовых чисел с дискретным спектром. Соотношение (19,2) сохраняется с течением времени*):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi, \Psi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \Psi\right) + \left(\Phi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = i(\Phi, \hat{H}\Psi) - i(\Phi, \hat{H}\Psi) = 0.$$

Рассмотрим следствия, вытекающие из (19,2), для введенного выше оператора $\hat{U}(t, t_0)$:

$$\Psi_\alpha(t) = \sum_n U_{\alpha n}(t, t_0) \Psi_n(t_0),$$

$$\Psi_\beta^*(t) = \sum_m U_{\beta m}^*(t, t_0) \Psi_m^*(t_0),$$

$$(\Psi_\beta, \Psi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} = \sum_n U_{\beta n}^* U_{\alpha n} = \sum_n U_{n\beta}^+ U_{\alpha n} = (\hat{U} \hat{U}^+)_{\alpha\beta}.$$

При $t_0 \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ мы получаем очень важный результат

$$\hat{S} \hat{S}^+ = \hat{I}.$$

Это равенство имеет простой физический смысл. Действительно, беря диагональные элементы от обеих его частей, получаем

$$\sum_n |S_{\alpha n}|^2 = 1. \quad (19,3)$$

Так как $|S_{\alpha n}|^2$ характеризует вероятность перехода из состояния n в состояние α , то равенство (19,3) просто означает, что сумма вероятностей всех переходов равна 1. Отсюда ясно, что пропуская в сумме (19,3) какое-либо состояние, мы занижаем ее значение. Уравнения (19,1) накладывают строгие ограничения на S -матрицу различных процессов. Из этих ограничений вытекает целый ряд соотношений между сечениями различных процессов, изучением которых мы займемся ниже.

*) Подчеркнем, что здесь мы использовали эрмитовость \hat{H} .

§ 20. Интегралы движения

Интегралами движения в квантовой механике называются динамические переменные, операторы которых \hat{Q} удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial t} + [\hat{H}\hat{Q}] = 0.$$

Если \hat{Q} явно не зависит от времени, то это уравнение сведется к условию коммутативности \hat{Q} с гамильтонианом. Нетрудно понять, что такие операторы \hat{Q} коммутируют и с оператором \hat{S} . В самом деле \hat{S} , согласно нашему определению, состоит из бесконечно большого числа бесконечно малых операторов, каждый из которых пропорционален \hat{H} , т. е.

$$[\hat{S}\hat{Q}] = 0. \quad (20,1)$$

Но коммутирующие операторы могут быть одновременно приведены к диагональному виду*). Поэтому если в качестве индексов α и n мы выберем интегралы движения (момент, импульс, энергия, изотопический спин и т. д.), то S -матрица будет диагональной по этим индексам:

$$(q'\gamma' | S | \gamma q) = (\gamma' | S^q | \gamma) \delta_{q'q}^{**}, \quad (20,2)$$

где γ — все прочие квантовые числа за исключением q . Это соотношение лежит в основе теории корреляций в угловых распределениях и других важных явлений. Индекс q означает, что $(\gamma' | S^q | \gamma)$, вообще говоря, зависит от q .

Следует подчеркнуть, что не все интегралы движения коммутируют между собой (например, момент и импульс, различные проекции момента). Это означает, с одной стороны, что нельзя одновременно выбрать в качестве индексов n все интегралы движения. С другой стороны это означает, что \hat{S} просто не зависит от некоторых квантовых чисел. Покажем, например, что S -матрица не зависит от квантового числа, характеризующего проекцию полного мо-

*) См. [1], стр. 94.

**) Мы будем записывать матричные элементы согласно обозначениям Дирака: $S_{q'q} \equiv (q' | S | q)$.

мента. \hat{S} коммутирует со всеми операторами проекции полного момента:

$$[\hat{J}_x \hat{S}] = 0, \quad [\hat{J}_y \hat{S}] = 0, \quad [\hat{J}_z \hat{S}] = 0. \quad (20,3)$$

Обозначим квантовое число проекции момента на ось z через M и запишем первое из равенств (20,3) в матричном виде. Учитывая, что $\hat{J}_x \Psi_M \neq \text{const} \Psi_M$, получим

$$\sum_{M''} (M' | J_x | M'') (M'' \gamma' | S | \gamma M) = \sum_{M''} (M' \gamma' | S | \gamma M'') (M'' | J_x | M).$$

Но согласно равенству (20,2) S -матрица диагональна по M :

$$(M' | J_x | M) (\gamma' | S^M | \gamma) = (\gamma' | S^{M'} | \gamma) (M' | J_x | M), \quad M' \neq M.$$

Отсюда следует, что $(\gamma' | S^M | \gamma)$ от M не зависит. Этот результат непосредственно вытекает из свойства изотропии пространства (следствием которой является закон сохранения момента). В самом деле, как было показано выше, $|S_{\alpha n}|^2$ характеризует вероятность перехода и не может зависеть от выбора системы отсчета, а квантовое число M (проекция момента) изменяется простым поворотом системы координат.

Аналогичным образом $(\gamma' | S^q | \gamma)$ не может зависеть от полного импульса системы, от проекции полного изотопического спина системы и т. п. Короче говоря, \hat{S} не зависит от тех квантовых чисел, которые изменяются при преобразованиях, оставляющих неизменным гамильтониан системы. Следует подчеркнуть глубокую связь между преобразованиями, оставляющими неизменным гамильтониан системы и интегралами движения. Подробное обсуждение этой связи выходит за рамки настоящей книги*).

Ниже соотношение (20,2) применяется для рассмотрения следующих интегралов движения: энергии, импульса, момента количества движения, его проекции, четности. Предполагается, что основные свойства этих интегралов движения читателю известны**). Кроме того, при разборе примеров мы применяем аппарат сложения моментов к еще одному важному

*) О связи существующей между преобразованиями системы координат, оставляющими неизменным гамильтониан системы, и такими интегралами движения, как момент и импульс, см. [2] § 13 и 24.

***) См. [1] § 25, 103 и [2] § 24—28.

интегралу движения — изотопическому спину. С этим понятием читатель может ознакомиться по книге [9]. Необходимо отметить, что в литературе широко используются применения (20,2) и к другим интегралам движения (зарядовая четность, странность и др.), рассмотрение которых лежит несколько в стороне от нашей темы. Мы не рассматриваем также слабых, ответственных за распад, взаимодействий частиц, изучение которых привело к открытию нарушения законов сохранения четности и зарядовой четности.

§ 21. Обращение времени *)

Если система не находится во внешнем поле, то все моменты времени для такой системы равноправны так же, как и все направления пространства. В классической и квантовой механике из этого обстоятельства вытекает закон сохранения энергии. Кроме того, в классической механике уравнения движения инвариантны по отношению к замене $t \rightarrow -t$. Пусть, например, мы имеем решение уравнений Ньютона, описывающих движение системы материальных точек. В момент времени $t = t_1$ радиусы-векторы точек и их скорости равны $r_i(t_1)$, $v_i(t_1)$ и по истечении некоторого промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ в момент t_2 эти величины принимают значения $r_i(t_2)$, $v_i(t_2)$. Инвариантность уравнений по отношению к замене $t \rightarrow -t$ означает, что существует также решение, характеризующееся тем, что радиусы-векторы и скорости материальных точек, равные $r_i(t_2)$, $-v_i(t_2)$, переходят за тот же произвольно выбранный промежуток времени в $r_i(t_1)$, $-v_i(t_1)$. Такой симметрией обладают не все системы. Примером может служить система заряженных частиц в магнитном поле. В этом случае, как известно (см., например, [11]), в операцию обращения времени необходимо включить изменение направления магнитного поля на противоположное. Если же этого не сделать, то для системы обратимости во времени не существует. Поскольку классическая механика является предельным случаем квантовой механики, то следует ожидать, что обратимость во времени найдет свое

*) Этот параграф рассчитан на более подготовленного читателя, чем остальной текст книги. Для его изучения следует ознакомиться с § 22 и § 27. При первом чтении § 21 можно опустить без особого ущерба для понимания дальнейшего,

отражение и в квантовой механике. Пусть рассматриваемая квантовомеханическая система консервативна, т. е. гамильтониан не зависит от времени. Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(t) \quad (21,1)$$

при замене $t \rightarrow -t$ переходит в

$$-i \frac{\partial \Psi(-t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(-t) \quad (21,2)$$

(21,2) не совпадает с (21,1). Это не позволяет нам назвать $\Psi(-t)$ обращенным во времени решением уравнения (21,1). Для нахождения последнего рассмотрим уравнение, комплексно сопряженное с (21,2):

$$i \frac{\partial \Psi^*(-t)}{\partial t} = \hat{H}^* \Psi^*(-t). \quad (21,3)$$

Из эрмитовости \hat{H} следует, что \hat{H} и \hat{H}^* имеют одни и те же собственные значения (но, вообще говоря, различные собственные функции); это означает, что существует такой унитарный оператор \hat{V} , что

$$\hat{V} \hat{H}^* \hat{V}^+ = \hat{H}. \quad (21,4)$$

Из (21,3) при помощи соотношения (21,4) получим

$$i \frac{\partial [\hat{V} \Psi^*(-t)]}{\partial t} = \hat{H} [\hat{V} \Psi^*(-t)]. \quad (21,5)$$

Сравнивая (21,5) с (21,1), видим, что $\hat{V} \Psi^*(-t)$ естественно назвать решением, обращенным во времени. Таким образом, преобразование обращения времени носит необычный для квантовой механики характер — оно содержит комплексное сопряжение

$$\hat{T} \Psi(t) = \hat{V} \hat{K} \Psi(-t); \quad (21,6)$$

здесь \hat{T} — оператор обращения времени, а \hat{K} — оператор комплексного сопряжения.

Рассмотрим закон преобразования операторов при обращении времени, причем будем считать, что волновые функции при таком преобразовании сохраняют свой вид, а изменяются операторы динамических величин (ср. с переходом от представления Шредингера к представлению Гейзенберга [1]).

Такой переход следует из общей формулы квантовой механики

$$(\hat{T}\Psi(t), \hat{Q}\hat{T}\Psi(t)) = (\Psi(-t), \tilde{Q}\Psi(-t)),$$

где \tilde{Q} — преобразованный (обращенный во времени) оператор. Итак, для не зависящих от времени операторов имеем

$$\hat{V}^+ \hat{Q} \hat{V} = \tilde{Q}^{\tau}. \quad (21,7)$$

Значок «т» означает, что соответствующий оператор транспонированный. Если $\tilde{Q} = \hat{Q}$, как это имеет место для \hat{H} согласно (21,4) и свойству эрмитовости \hat{H} , то мы будем говорить, что этот оператор инвариантен по отношению к обращению времени ($t \rightarrow -t$).

Нетрудно показать, что из инвариантности \hat{H} по отношению к операции $t \rightarrow -t$ следует также инвариантность S -матрицы:

$$\hat{V}^+ \hat{S} \hat{V} = \hat{S}^{\tau}. \quad (21,8)$$

Соотношение (21,8) называют теоремой взаимности. Оно отражает очень общее свойство S -матрицы. Однако (21,8) представляет собой мало содержательное утверждение, пока неизвестен явный вид оператора \hat{V} . Для нахождения \hat{V} необходимо задать трансформационные свойства операторов динамических переменных, составляющих полный набор величин, характеризующих систему. Это определит трансформационные свойства любой другой динамической переменной. Источниками наших знаний об операторах квантовой механики являются только принцип соответствия и опыт. Поэтому наложим на \hat{V} требование, чтобы величины, не меняющие знака при преобразовании $t \rightarrow -t$ в классической механике (координата, энергия и т. п.), имели операторы, инвариантные по отношению к преобразованию (21,7). Величины же, меняющие знак при преобразовании $t \rightarrow -t$ в классической механике (скорость, импульс, момент, векторный потенциал электромагнитного поля и т. п.), должны иметь операторы, подчиняющиеся условию

$$\hat{V}^+ \hat{Q} \hat{V} = -\hat{Q}^{\tau}. \quad (21,9)$$

Операторы спина, будучи величинами, аналогичными моменту количества движения, также должны преобразовываться согласно (21,9). Если существует оператор \hat{V} , обладающий перечисленными свойствами, то по определению движение системы обратимо во времени.

Найдем явный вид матрицы оператора \hat{V} для состояний, заданных квантовыми числами любого момента l, l' (например, орбитального момента одной из частиц системы) и его проекции m и m' :

$$(l' m' \alpha' | V | l m \alpha),$$

здесь α и α' — остальные квантовые числа.

Воспользуемся условиями, накладываемыми на \hat{V} , требованием обратимости во времени и эрмитовости рассматриваемых операторов:

$$\hat{V}^+ \hat{i}^2 \hat{V} = \hat{i}^2, \quad (21,10)$$

$$\hat{V}^+ \hat{l} \hat{V} = -\hat{l}^*. \quad (21,11)$$

Из (21,10) вытекает, что \hat{V} диагонально по квантовому числу l . Зависимость \hat{V} от квантовых чисел m и m' можно установить, решив уравнение (21,11) с использованием явного выражения для матриц проекций оператора момента (см. [2], § 25):

$$(l' m' \alpha' | V | l m \alpha) = (\alpha' | V^l | \alpha) \delta_{l'l} \delta_{-m'm} e^{i\pi m}. \quad (21,12)$$

Если пользоваться представлением, где все остальные динамические переменные — инварианты преобразования (21,7) (квадраты моментов, спинов, импульсов и т. п.), то, учитывая унитарность \hat{V} , можно записать (21,12) в виде

$$(l' m' \alpha' | V | l m \alpha) = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{l'l} \delta_{-m'm} e^{i\pi [\beta(\alpha, l) + m]},$$

где фаза β произвольна; ее можно выбрать, руководствуясь соображением удобства расчетов. Обычно β выбирают так:

$$(l' m' \alpha' | V | l m \alpha) = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{l'l} \delta_{-m'm} e^{i\pi(l+m)}. \quad (21,13)$$

Первое преимущество нашего выбора β заключается в том, что матрица \hat{V} действительна; второе преимущество вытекает из рассмотрения сложения моментов (см. § 27):

$$\Psi_{AJM} = \sum_{\mu_1 \mu_2} (JM | j_1 \mu_1 j_2 \mu_2) \Psi_{\alpha_1 j_1 \mu_1} \Psi_{\alpha_2 j_2 \mu_2},$$

Ψ_{AJM} — волновая функция полного момента. В индекс A этой функции входят $j_1, \alpha_1, j_2, \alpha_2$. Если каждое из состояний $\Psi_{\alpha_1 j_1 \mu_1}$ и $\Psi_{\alpha_2 j_2 \mu_2}$ преобразуются при замене $t \rightarrow -t$ при помощи (21,13), то используя свойство коэффициентов векторного сложения (см. § 27):

$$(J - M | j_1 - \mu_1 j_2 - \mu_2) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} (JM | j_1 \mu_1 j_2 \mu_2),$$

можно показать, что Ψ_{AJM} также преобразуется согласно (21,13).

Таким образом при нашем выборе β нет необходимости заботиться о преобразовании фаз — все волновые функции моментов и спинов преобразуются одинаково.

Рассмотрим S -матрицу в представлении, которое определяется полным моментом J , его проекцией M и динамическими переменными, инвариантными по отношению к преобразованию $t \rightarrow -t$. Например, для реакций типа $a + X \rightarrow b + Y$, согласно предыдущему параграфу, будем иметь

$$(s'l'\alpha' | S^J | sl\alpha) \delta_{JJ'} \delta_{MM'},$$

здесь s, s' — суммарный спин частиц, l', l — орбитальный момент относительного движения. Подставляя это выражение в (21,8) и используя явный вид матрицы оператора \hat{V} (21,13), найдем, что S -матрица в таком представлении симметрична:

$$(B | S^J | A) = (A | S^J | B). \quad (21,14)$$

Этот результат отражает одно из фундаментальных свойств S -матрицы, имеющее большое значение в приложениях.

Совершенно аналогично доказывается столь же важное соотношение:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_f j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 \alpha' | S | \mathbf{p}_i j_{I1} \mu_{I1} j_{II} \mu_{II} \alpha) = \\ = (-1)^{j_{I1} + \mu_{I1} + j_{II} + \mu_{II} + j_1 + \mu_1 + j_2 + \mu_2} \times \\ \times (-\mathbf{p}_i j_I - \mu_I j_{II} - \mu_{II} \alpha | S | -\mathbf{p}_f j_1 - \mu_1 j_2 - \mu_2 \alpha'), \quad (21,15) \end{aligned}$$

здесь j_i, μ_i — спины частиц и их проекции, \mathbf{p}_i и \mathbf{p}_f — импульс относительного движения в начальном и конечном состояниях.

Если над функцией Ψ совершается унитарное преобразование \hat{W}_i :

$$\Psi' = \hat{W}_i \Psi, \quad (\hat{T}\Psi)' = \hat{W}_i \hat{T}\Psi,$$

то из (21,6) и равенства

$$(\hat{T}\Psi)' = \hat{V}'\Psi'^*$$

находим

$$\hat{V}' = \hat{W}\hat{V}\hat{W}^r, \quad (21,16)$$

т. е. \hat{V} преобразуется из одного представления в другое (см. § 22) не как обычная унитарная матрица, а при помощи транспонированного преобразования.

Поскольку вид \hat{V}' может следовать из соображений инвариантности, то выбор фаз у \hat{V} означает однозначный выбор фаз у матрицы преобразования \hat{W} .

Приведем пример. Пусть \hat{V} задается (21,13) и пусть \hat{W} преобразует от представления lm в представление, задаваемое единичным вектором n :

$$W = e^{i\gamma_l} Y_{lm}(n), \quad (21,17)$$

где γ_l — фазовый множитель.

Вектор n может быть направлен по r (радиусу-вектору частицы) или по p (импульсу частицы). Из требования обратимости во времени ($\hat{V}^+ \hat{p} \hat{V} = -\hat{p}^*$; $\hat{V}^+ \hat{r} \hat{V} = \hat{r}$) имеем

$$(\rho' | V | \rho) = \delta(\rho' + \rho); \quad (r' | V | r) = \delta(r' - r). \quad (21,18)$$

Сделаем преобразование (21,17) над \hat{V} , имеющим вид (21,13), согласно формуле (21,16):

$$\begin{aligned} (n' | V | n) &= \sum_{lm'l'm'} e^{i\gamma_{l'}} Y_{l'm'}(n') \delta_{l'l} \delta_{-m'm} e^{i\pi(l+m)} e^{i\gamma_l} Y_{lm}(n) = \\ &= \sum_{lm} e^{2i\gamma_l + i\pi l} Y_{lm}^*(n') Y_{lm}(n) = \begin{cases} \delta(n' + n) & \text{при } \gamma_l = 0 \\ \delta(n' - n) & \text{при } \gamma_l = -\frac{\pi l}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Сравнивая это с (21,18), видим, что нашему выбору фаз в (21,13) отвечают волновые функции орбитального момента в p -представлении $Y_{lm}\left(\frac{p}{r}\right)$, а в r -представлении $-e^{-i\frac{\pi l}{2}} \times \times Y_{lm}\left(\frac{r}{r}\right) \equiv i^{-l} Y_{lm}\left(\frac{r}{r}\right)$,

§ 22. Функции преобразования

Мы выяснили важнейшие свойства S -матрицы. Теперь нам необходимо установить, каким образом эти свойства связаны с экспериментально наблюдаемыми величинами, например, поперечными сечениями, угловыми распределениями и т. п.

Выше было показано, что квадраты матричных элементов S -матрицы определяют вероятности переходов из определенного начального состояния, заданного набором квантовых чисел l , в определенное конечное состояние, характеризуемое набором f . Это означает, что, если в качестве квантовых чисел мы выберем углы θ , φ , определяющие направление полета частицы, то квадрат S -матрицы будет давать плотность вероятности обнаружить частицы летящими в данном направлении. Если же мы выберем квантовые числа l , m , то мы получим вероятность обнаружить частицы с данными величиной и проекцией момента количества движения.

Займемся теперь преобразованием S -матрицы, заданной через один набор квантовых чисел в S -матрицу, заданную через другой набор. Такие преобразования нам будут чрезвычайно полезны в дальнейшем. Приведем пример. Законы сохранения накладывают ряд ограничений на вид S -матрицы. Если в наборы квантовых чисел α и n входят квантовые числа интегралов движения, то по ним S -матрица диагональна. Если нас будут интересовать ограничения, накладываемые законами сохранения, например, на угловые распределения, то мы должны перевести S -матрицу из представления, заданного квантовыми числами интегралов движения, в представление, задаваемое углами.

Согласно общим принципам квантовой механики [1—3], для того, чтобы найти вероятность обнаружения в заданном состоянии величины q , надо разложить $\Psi_n(x)$ по собственным функциям оператора этой величины \hat{Q} ,

$$\Psi_n(x) = \sum_q C_q^n \Psi_q(x) \quad (22,1)$$

и взять квадрат модуля коэффициента разложения C_q^n . Набор коэффициентов C_q^n является волновой функцией в « q -представлении».

Выражение (22,1) в обозначениях Дирака запишется так:

$$(x|n) = \sum_q (x|q)(q|n). \quad (22,2)$$

Отсюда следует, что собственная функция оператора \hat{Q} $\Psi_q(x) \equiv (x|q)$ является функцией преобразования из представления q в представление x .

Удобство обозначений Дирака заключается в том, что они наиболее точно и в наиболее общем виде отражают основные законы квантовой механики. В частности, обозначение функций преобразования $(x|q)$ подчеркивает некоторую симметрию между индексами представления x и индексами состояния q . Кроме того, эта система обозначений позволит нам в простой форме пояснить смысл различных коэффициентов, встречающихся в теории угловых распределений, корреляций и в других задачах.

Нетрудно показать, что $(x|q)^*$ равно $(q|x)$, т. е. функции, совершающей обратное преобразование. В самом деле, умножим $(x|n)$ на $(x|q')^*$ и проинтегрируем по x . Тогда в силу ортогональности и нормировки функций $(x|q)$ получим

$$\int (x|q')^*(x|n) dx = (q'|n),$$

откуда по определению функции преобразования $(x|q')^* = (q'|x)$. Из изложенного ясно, что, например, в случае дискретных спектров величин x и q $|(x|q)|^2$ является одновременно вероятностью найти величину q в состоянии x и вероятностью найти x в состоянии q .

Приведем примеры хорошо известных волновых функций квантовой механики, которые играют большую роль как функции преобразования. Собственная функция оператора импульса в координатном представлении есть плоская волна:

$$\Psi_p(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipr} \equiv (r|p).$$

А комплексно сопряженная функция $(r|p)^* = (p|r)$ есть собственная функция r в p — представлении.

Собственная функция оператора момента в импульсном представлении имеет вид:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv (\vartheta \varphi | lm),$$

ϑ, φ — полярные углы импульса.

Известно следующее разложение:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(pr)}{\sqrt{pr}} t^l Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где ϑ и φ — полярные углы вектора \mathbf{r} , $J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя. Его можно записать так:

$$(\mathbf{r} | \mathbf{p}) = \sum_{l, m} (\Theta\Phi | lm) (r | p)_l (lm | \vartheta\varphi).$$

Здесь мы положили согласно § 21:

$$(lm | \Theta\Phi) = t^l Y_{lm}^*(\Theta, \Phi),$$

$$(r | p)_l = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(pr)}{\sqrt{pr}}.$$

Эти функции ортогональны и нормированы и являются важными примерами функций преобразования:

$$\sum_{l, m} (n' | lm) (lm | n) = (n' | n) = \delta(n - n').$$

Здесь \mathbf{n} и \mathbf{n}' — единичные векторы, направление которых определяется соответственно углами $\vartheta\varphi$ и $\vartheta'\varphi'$:

$$\int (l'm' | \mathbf{n}) d\Omega_{\mathbf{n}} (\mathbf{n} | lm) = \delta_{l'l} \delta_{m'm},$$

$$\int (p' | r)_l r^2 dr (r | p)_l = \frac{1}{p^2} \delta(p' - p).$$

Заметим, что $\delta(p' - p) = \delta(n' - n) \frac{1}{p^2} \delta(p' - p)$.

Преобразование матриц операторов из одного представления в другое является очевидным следствием изложенного:

$$(\eta' | P | \eta) = \sum_{\xi, \xi'} (\eta' | \xi') (\xi | P | \xi) (\xi | \eta),$$

т. е. переход осуществляется при помощи тех же функций преобразования. Это, очевидно, относится и к оператору \hat{S} .

Зная вид S -матрицы в представлении, где за переменные ξ и ξ' приняты интегралы движения, и зная функции

преобразования от этого представления в представление, соответствующее условиям опыта, $(\xi | \eta)$, нетрудно получить S -матрицу в нужном представлении, а, следовательно, и связанные с ней экспериментально наблюдаемые величины.

§ 23. Связь S -матрицы с эффективным поперечным сечением

Как уже отмечалось, квадрат матричного элемента S -матрицы определяет вероятность обнаружить в конце процесса то или иное состояние системы. Зная эту вероятность, можно вычислить эффективное поперечное сечение процесса. До сих пор мы рассматривали задачу о столкновении частиц в очень общем виде, понимая под начальным i и конечным f состояниями разнообразные состояния многих частиц.

Рассмотрим теперь задачу о столкновении двух частиц. Пусть до столкновения (при $t \rightarrow -\infty$) частица I имела спин j_I , проекцию спина μ_I , частица II имела спин j_{II} и проекцию спина μ_{II} ; частицы двигались, не взаимодействуя, с импульсом p в системе центра инерции. Зададим также так называемый индекс канала*) α — величину, определяющую тип частиц I и II (мезоны, нейтроны, протоны и т. п.). Под состоянием f пока можно понимать любое состояние любого числа частиц, которые могут возникнуть в результате столкновения частиц I и II. Эффективное поперечное сечение определяется как отношение числа событий данного типа в единицу времени, приходящееся на одну частицу мишени, к потоку налетающих частиц через единицу поверхности. Согласно этому определению, необходимо найти не просто вероятность осуществления в результате взаимодействия состояния f , а вероятность возникновения этого состояния в единицу времени.

Выделим для этой цели среди индексов S -матрицы в явном виде энергию начального состояния и воспользуемся

*) Мы придерживаемся обычной в ядерной физике терминологии. Каналами реакций называют различные пути (в смысле свойств продуктов реакции), которыми может идти реакция. В понятие канала часто включают не только квантовые числа, характеризующие внутреннее состояние частиц, но и суммарный спин частиц и орбитальный момент.

тем, что энергия является одним из интегралов движения:

$$(f|S|i) = (f_0|S^E|i_0)\delta(E_f - E_i), \quad (23,1)$$

где f_0 и i_0 обозначают квантовые числа, характеризующие начальные и конечные состояния, исключая энергию E .

Возводя в квадрат, получаем:

$$\begin{aligned} |(f|S|i)|^2 &= |(f_0|S^E|i_0)|^2 \cdot |\delta(E_f - E_i)|^2 = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |(f_0|S^E|i_0)|^2 \delta(E_f - E_i) \int_{-t}^t \frac{1}{2\pi} e^{i(E_f - E_i)t} dt. \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение по всем E_f , найдем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} |(f_0|S^E|i_0)|^2 \Delta t.$$

Откуда следует, что вероятность перехода в единицу времени равна

$$\frac{1}{2\pi} |(f_0|S^E|i_0)|^2. \quad (23,2)$$

О матрице $(f_0|S^E|i_0)$ иногда говорят как о заданной на поверхности энергии. Найдем поток частиц в состоянии $|i_0\rangle$. Начальное состояние мы задавали набором $|\alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} p\rangle$. Так как в этом состоянии импульс имеет определенное значение, то поток, как известно [1], равен $v/(2\pi)^3$. Состояние же $|i_0\rangle$ задается не квантовым числом p , а квантовым числом энергии относительного движения частиц E .

Нетрудно показать, что волновые функции $|\alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} p\rangle$ и $|i_0\rangle$ этих состояний связаны простым соотношением:

$$|i_0\rangle = |\alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} p\rangle \frac{p}{\sqrt{v}}^* \quad (23,3)$$

*) Докажем это соотношение.

Пусть $\Psi_p \equiv \Psi_{pn}$ есть волновая функция, нормированная согласно условию:

$$\begin{aligned} \int \Psi_{pn}^* \Psi_{p'n'} d\tau &= \delta(p - p') = \frac{1}{p^2} \delta(p - p') \delta(n - n') = \\ &= \frac{1}{p^2 \left(\frac{dp}{dE}\right)} \delta(E - E') \delta(n - n'), \end{aligned}$$

Отсюда находим выражение для потока частиц в состоянии $|l_0\rangle$:

$$\frac{p^2}{(2\pi)^3}. \quad (23,4)$$

Таким образом, выражение для эффективного поперечного сечения примет вид:

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2} |(f_0 | \bar{S}^E | \alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} \mathbf{n})|^2. \quad (23,5)$$

σ_{f_0} — можно выразить и через матричные элементы S -матрицы в представлении, где за переменные взяты lm , вместо \mathbf{n} :

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2} \left| \sum_{lm} (f_0 | S^E | \alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} lm) (lm | \mathbf{n}) \right|^2. \quad (23,6)$$

Согласно предыдущему параграфу, $(lm | \mathbf{n}) = Y_{lm}^*(\mathbf{n})$. Выберем в качестве оси z направление падающего пучка, тогда

$$Y_{lm}^*(0, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{-m0},$$

и выражение (23,6) примет вид

$$\sigma_{f_0} = \pi \lambda^2 \left| \sum_l \sqrt{2l+1} (f_0 | S^E | \alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} l 0) \right|^2, \quad (23,7)$$

где λ — длина волны де'Бройля.

Покажем, что найденное нами выражение для сечения совпадает в предельном случае с выражением, получаемым в классической механике. Пусть система обладает такими свойствами, что реакцию вызывают только частицы с определенным орбитальным моментом $l=l'$. Пусть, кроме того, реакция идет с максимальной интенсивностью, т. е.

здесь \mathbf{n} — единичный вектор по направлению \mathbf{p} . Сравнивая это с условием нормировки для Ψ_{En}^*

$$\int \Psi_{En}^* \Psi_{E'n'} d\tau = \delta(E - E') \delta(\mathbf{n}' - \mathbf{n}),$$

находим

$$\Psi_{En} = p \sqrt{\frac{dp}{dE}} \Psi_{pn}.$$

Замечая, что $\frac{dE}{dp} = v$ получим формулу (23,3).

соответствующий квадрат матричного элемента S -матрицы равен 1.

В этом случае из (23,7) находим

$$\sigma_l = \pi\lambda^2 (2l' + 1).$$

Получим этот результат из квазиклассических соображений. Пусть на мишень падает параллельный пучок частиц. Момент частицы относительно центра мишени равен pr , где p — импульс, а r — прицельный параметр, но, с другой стороны, момент количества движения может принимать только дискретные значения $\sqrt{l(l+1)}$, поэтому для $l \gg 1$ будет выполняться приближенное равенство

$$pr \approx l$$

или $r \approx l/\lambda$, т. е. частицы с данной длиной волны и орбитальным моментом l пролетают на довольно определенном расстоянии от начала координат. Найдем площадь кольца в плоскости, перпендикулярной направлению потока, на которую попадают частицы с заданным l :

$$\sigma_l = \pi r_{l+1}^2 - \pi r_l^2 = \pi\lambda^2 [(l+1)^2 - l^2] = \pi\lambda^2 (2l + 1).$$

Отсюда видно, что определенно выше эффективное поперечное сечение при больших l переходит в сечение, определяемое в классической механике, как площадь кольца в плоскости, перпендикулярной потоку частиц.

Найденное выражение (23,7) не является наиболее общим выражением поперечного сечения любого процесса, идущего при столкновении двух частиц. Мы нашли сечение перехода σ_f из состояния Ψ_i в состояние Ψ_f , беря квадрат матричного элемента оператора \hat{S} . В случае упругого рассеяния частиц задача ставится таким образом, что интересуются не просто вероятностью остаться системе в первоначальном канале, а вероятностью того, что в результате взаимодействия система возвратится в исходный канал. Это означает, что из волновой функции Ψ_f надо вычесть волновую функцию Ψ_i :

$$\Psi_f' = \Psi_f - \Psi_i = (\hat{S} - \hat{I}) \Psi_i,$$

где \hat{I} — единичная матрица, и для вычисления сечения упругого рассеяния брать квадрат матричного элемента оператора $\hat{S} - \hat{I}$. Матрица \hat{I} , как известно (см. [1]), во всех предста-

влениях остается единичной. Поэтому общее выражение сечения (включая и упругие процессы) примет вид:

$$\sigma_{f_0} = \pi\lambda^2 \left| \sum_l V^{2l+1} [(f_0 | \hat{S} - \hat{I} | \alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} l 0)] \right|^2. \quad (23,8)$$

Если пучки сталкивающихся частиц не поляризованы, то это выражение надо усреднить по проекциям спинов начальных частиц. Это дает

$$\bar{\sigma}_{f_0} = \frac{1}{(2j_I + 1)(2j_{II} + 1)} \sum_{\mu_I \mu_{II}} \sigma_{f_0}. \quad (23,9)$$

Общее выражение для сечения через матричные элементы S -матрицы в представлении, где за переменные вместо lm взяты n , имеет вид

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2} |(f_0 | \hat{S} - \hat{I} | \alpha j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}} n)|^2. \quad (23,10)$$

ГЛАВА VII

ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ S-МАТРИЦЫ

§ 24. Связь эффективных поперечных сечений упругих и неупругих процессов

На основании формулы (23,8) можно сделать ряд общих выводов о свойствах эффективных поперечных сечений.

1) Допустим, что взаимодействие частиц осуществляется только в состоянии с определенным орбитальным моментом l_1 (т. е. специфика взаимодействия такова, что отличны от нуля элементы S -матрицы с $l = l_1$); тогда

$$\sigma_{f_0}^{l_1} = \pi \lambda^2 (2l_1 + 1) |(f_0 | S | \alpha j_{I_1} \mu_{I_1} j_{II} \mu_{II} l_1 0)|^2.$$

Эту величину называют парциальным сечением.

Из (19,1) вытекает, что $|(f_0 | S | l_0)|^2 \leq 1$, т. е. парциальное сечение любого неупругого процесса не может превышать $\pi \lambda^2 (2l + 1)$. Это хорошо согласуется с обсуждавшимся выше результатом классической механики. Унитарность S -матрицы (19,1) при этом выражает тот простой факт, что число актов, в которых возникает состояние f_0 , не может превышать число частиц, попадающих на мишень.

2) Не существует неупругих процессов, которые не сопровождались бы одновременно процессом упругого рассеяния. В самом деле, если хотя бы один элемент S -матрицы $(f_0 | S | l_0)$ отличен от нуля, то в силу свойства унитарности диагональные элементы S -матрицы по модулю меньше единицы, а это означает, что сечение упругого рассеяния, согласно (23,8), отлично от нуля.

3) Столкновение бесспиновых частиц. Из полученных выше общих результатов можно очень просто вывести известные выражения эффективных поперечных сечений рассеяния

бесспиновых частиц. В этом случае, используя (20,1) и (20,2), представим S -матрицу в виде

$$S^l_{\delta_{ll'} \delta_{mm'}} \delta(E' - E). \quad (24,1)$$

Из требования унитарности при отсутствии неупругих процессов следует

$$S^l S^{l*} = 1,$$

или

$$S^l = e^{2i\delta_l}. \quad (24,2)$$

Подставляя это выражение в формулу (23,8), конечное состояние в которой теперь характеризуется определенным моментом l , получим парциальное сечение

$$\sigma^l = \pi \lambda^2 | \sqrt{2l+1} (e^{2i\delta_l} - 1) |^2 = 4\pi \lambda^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l,$$

а суммарное сечение найдем суммированием по всем l :

$$\sigma = 4\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (24,3)$$

здесь δ_l — фаза рассеяния.

Для получения дифференциального сечения рассеяния надо перевести S -матрицу в представление углов θ и φ :

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left| \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \right|^2 d\Omega^*. \quad (24,4)$$

Интегрирование (24,4) по углам, как известно, дает (24,3). Из проделанного вывода формул (24,3) и (24,4) видно, что мы использовали только общие свойства S -матрицы**).

*) Элемент телесного угла возникает как обычно в выражениях, связанных с квантовыми числами, имеющими непрерывный спектр. Если волновые функции нормированы на δ -функцию, то квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности; вероятность же получается умножением квадрата модуля волновой функции на дифференциал спектра. Например, если $\Psi(x)$ — волновая функция в координатном представлении, то вероятность иметь координату x записывается $|\Psi(x)|^2 dx$. Если имеется функция для n частиц в импульсном представлении, то для получения вероятности надо квадрат модуля функции умножить на произведение дифференциалов импульсов частиц: $dp_1 dp_2 dp_3 \dots dp_n$. Это произведение обычно называют «элементом фазового объема».

***) Кроме того, здесь, конечно, использовано предположение, что при $t \rightarrow \pm \infty$ частицы можно рассматривать как свободные. Для потенциалов взаимодействия, спадающих на бесконечности как $1/r$ и медленнее, необходимо, вообще говоря, особое рассмотрение.

Рассмотрим теперь случай, когда возможны и неупругие процессы при столкновении бесспиновых частиц. В этом случае из условия унитарности уже нельзя получить простого выражения для S -матрицы, и под l в формуле (24,1) следует понимать суммарный момент частиц, образовавшихся в результате столкновения.

Для упругого рассеяния l — по-прежнему орбитальный момент. Поэтому сечение упругого рассеяния получится из (24,4) заменой $e^{i\delta_l}$ комплексным числом S^l с модулем, меньшим единицы

$$d\sigma_s = \frac{\lambda^2}{4} \left| \sum_l (2l+1) (S^l - 1) P_l(\cos\theta) \right|^2 d\Omega.$$

Интегрируя по углам, получим полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_s = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1) |S^l - 1|^2. \quad (24,5)$$

Полное сечение всех неупругих процессов найдем при помощи формулы (23,8), выбрав в качестве f_0 набор квантовых чисел, включающий полный момент разлетающихся частиц:

$$\sigma_r = \pi\lambda^2 \sum_{n,l} (2l+1) |(n | S^l | 0)|^2.$$

Под суммированием по n понимаем, как обычно, суммирование по всем дискретным переменным (включая перечисление всех типов реакций) и интегрирование по всем непрерывным переменным.

Используем условие унитарности

$$\sum_n |(n | S^l | 0)|^2 + |(0 | S^l | 0)|^2 = 1, \quad (0 | S^l | 0) \equiv S^l;$$

откуда

$$\sigma_r = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1) (1 - |S^l|^2). \quad (24,6)$$

Пусть $S^l = B_l e^{i\delta_l}$. Тогда парциальное сечение рассеяния можно записать в виде

$$\frac{\sigma_s^l}{\pi\lambda^2 (2l+1)} = 1 - 2B_l \cos \delta_l + B_l^2,$$

а парциальное сечение неупругих процессов — в виде

$$\frac{\sigma_r^l}{\pi\lambda^2(2l+1)} = 1 - B_l^2.$$

Из этих выражений особенно отчетливо видно, что неупругие процессы всегда сопровождаются упругими. При заданной величине сечения упругого рассеяния существует максимально возможная величина сечения неупругих процессов σ_r^{\max} , причем, когда $\sigma_r = \sigma_r^{\max}$, σ_s тоже равно σ_r^{\max} ; максимально возможное сечение упругого рассеяния $\sigma_s^{\max} = 4\sigma_r^{\max}$.

4) Рассмотрим предельный случай, когда неупругие процессы играют очень большую роль. То есть пусть имеется очень много открытых каналов и все матричные элементы S -матрицы примерно одного порядка величины, но так как $\sum_{f_0} |(f_0|S|i_0)|^2 = 1$, то каждый элемент $|(f_0|S|i_0)| \ll 1$. Возможным реальным примером *) рассматриваемого случая может служить столкновение мезонов и нуклонов при высоких энергиях

$$\pi + N \rightarrow \begin{cases} \pi + N' \\ 2\pi + N' \\ 3\pi + N' \\ \dots \end{cases}$$

Сечение каждого отдельного неупругого процесса очень мало. Однако, согласно (24,6), сумма сечений всех неупругих процессов примерно равна

$$\sigma_r \approx \sum_l \pi\lambda^2(2l+1).$$

При суммировании по состояниям f_0 мы воспользовались соотношением $\sum_{f_0 \neq i_0} |(f_0|S|i_0)|^2 = 1 - |(i_0|S|i_0)|^2$ и пренебрегали $|(i_0|S|i_0)|^2$ по сравнению с 1. Сделаем аналогичное пренебрежение и в сечении упругого рассеяния (24,5):

$$\sigma_s = \sum_l \pi\lambda^2(2l+1).$$

*) С некоторыми видоизменениями эти представления широко используются в ядерной физике.

Использованное нами выражение для матрицы оператора $\hat{S} - \hat{I}$ справедливо не для всех l . Как отмечалось выше, при больших значениях l задачу можно рассматривать квазиклассически, и этим значениям l отвечают большие прицельные параметры $\rho = \lambda l$. Если радиус взаимодействия сталкивающихся частиц равен R (это, очевидно, некоторая эффективная величина, а не обязательно строго определенная), то наибольшее значение l , при котором взаимодействие еще осуществляется, равно $l_0 \approx \frac{R}{\lambda}$. Это означает, что при $l > l_0 \approx \frac{R}{\lambda}$

частицы не взаимодействуют и $\hat{S} = \hat{I}$. То есть, суммирование по l идет от нуля до l_0 . Отсюда нетрудно получить, что $\sigma_r = \sigma_g = \pi R^2$. Иначе говоря, сечение упругого рассеяния будет очень велико — равно суммарному сечению всех неупругих процессов. Наш результат носит на первый взгляд парадоксальный характер. Действительно, суммарное сечение взаимодействия равно $2\pi R^2$, тогда как в классической механике максимальное сечение взаимодействия вдвое меньше — πR^2 . Этот парадокс разрешается, если рассмотреть угловое распределение упруго рассеянных частиц. Для этого надо оператор $\hat{S} - \hat{I} \approx -\hat{I}$ перевести в представление углов рассеяния. Функция этого преобразования, как отмечалось выше, имеет вид:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (\theta\varphi | lm),$$

$$\sum_{l'm'} I_{l'm'm}(l'm' | \theta\varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (24,7)$$

Подставим (24,7) в общую формулу для сечения рассеяния (23,8); в результате получим

$$d\sigma = \pi\lambda^2 \left| \sum_{l=0}^{l_0 - \frac{R}{\lambda}} \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} P_l(\cos\theta) \right|^2 d\Omega. \quad (24,8)$$

Можно показать (см. [2], стр. 495), что сумма в (24,8) равна

$$\frac{J_1\left(\frac{R}{\lambda}\theta\right)}{\left(\frac{\lambda}{R}\right)\theta},$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Таким образом, в том случае, когда интенсивно идут неупругие процессы (происходит интенсивное выбывание частиц из пучка), угловое распределение упруго рассеянных частиц имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2 \left| \frac{J_1\left(\frac{R}{\lambda} \theta\right)}{\theta} \right|^2. \quad (24,9)$$

Но $J_1\left(\frac{R}{\lambda} \theta\right)$ существенно отлично от нуля только при $\frac{R}{\lambda} \theta \sim 1$, или при $\theta \sim \frac{\lambda}{R}$. Отсюда следует разрешение парадокса: при переходе к классической механике сохраняется соотношение $\sigma_t = \sigma_r + \sigma_s = 2\pi R^2$, однако рассеяние частиц происходит на очень малые углы $\sim \frac{\lambda}{R}$, рассмотрение которых подразумевает применение квантовой механики. Критерий применимости классической механики заключается как раз в том, чтобы можно было пренебречь отношением длины волны частиц к размерам системы. А это означает, что следует вообще пренебречь σ_s , и σ_t переходит в

$$\sigma_t = \pi \lambda^2 \sum_l (2l + 1) = \pi R^2.$$

Выражение (24,9) в точности совпадает с выражением для дифракции Фраунгофера на абсолютно черном шарике. Это совпадение носит, очевидно, не случайный характер, а является следствием волновой природы частиц. В связи с этой оптической аналогией упругое рассеяние частиц, вызванное сильными неупругими процессами, называют дифракционным рассеянием. Как видно из изложенного, для этого рассеяния характерно резко вытянутое вперед угловое распределение, полуширина которого определяется соотношением между длиной волны де-Бройля и эффективным радиусом взаимодействия сталкивающихся частиц.

5) *Оптическая теорема.* В приведенном примере мы использовали свойство унитарности S -матрицы для доказательства тесной связи упругих и неупругих процессов. Покажем, что между этими процессами существует точное соотношение, не зависящее от тех предположений, которыми мы пользовались при рассмотрении нашего примера. Это

соотношение также является следствием фундаментального свойства унитарности S -матрицы.

Выше мы видели, что $\hat{S} - \hat{I}$ является оператором, квадраты матричных элементов которого определяют сечения различных процессов. Вместо оператора $\hat{S} - \hat{I}$ часто вводят оператор \hat{R} , определяемый как $i\hat{R} = \hat{S} - \hat{I}$. \hat{R} и $\hat{S} - \hat{I}$ отличаются лишь несущественным фазовым множителем. Запишем свойство унитарности S -матрицы через оператор \hat{R}

$$\hat{S}\hat{S}^+ = (\hat{I} + i\hat{R})(\hat{I} - i\hat{R}^+) = \hat{I}, \quad (24,10)$$

откуда

$$i\hat{R} - i\hat{R}^+ + \hat{R}\hat{R}^+ = 0. \quad (24,11)$$

Рассмотрим матричный элемент операторного равенства (24,11), когда в качестве волновых функций приняты функции $\Psi = |\alpha\mu_1\mu_2 n E\rangle \frac{2\pi}{p}$. Мы имеем

$$(\Psi', \hat{R}\Psi) = \frac{2\pi}{p'} (n'\mu_1\mu_2\alpha' | \hat{R} | n\mu_1\mu_2\alpha) \frac{2\pi}{p} \delta(E' - E). \quad (24,12)$$

Как видно из формулы (23,10), квадрат модуля выражения

$$\frac{2\pi}{p'} (n'\mu_1\mu_2\alpha' | \hat{R} | n\mu_1\mu_2\alpha), \quad (24,12')$$

входящего в (24,12), дает дифференциальное сечение упругого рассеяния. Эта величина называется амплитудой упругого рассеяния. Матричный элемент третьего члена в (24,11) запишется

$$\begin{aligned} (\Psi', \hat{R}\hat{R}^+\Psi) &= \\ &= \sum_N (n'\mu_1\mu_2\alpha' | \hat{R} | N) (N | \hat{R}^+ | n\mu_1\mu_2\alpha) \frac{(2\pi)^2}{p'p} \delta(E' - E), \end{aligned} \quad (24,13)$$

\sum_N , как обычно, обозначает суммирование по всем дискретным и интегрирование по всем непрерывным индексам состояний, которые могут возникнуть в результате столкновения частиц I и II. Подстановка (24,12) и (24,13) в (24,11) дает систему интегральных уравнений для амплитуд процессов. Существование такой системы, как видно из вывода,

следует только из требования унитарности S -матрицы. Эти интегральные уравнения имеют особенно простой вид, когда в силу закона сохранения энергии возможен только процесс упругого рассеяния. Нетрудно показать, что при помощи найденной системы интегральных уравнений можно определить фазы амплитуд рассеяния, если известны их модули. Таким образом, измеряя эффективные сечения, мы находим квадраты модулей амплитуд рассеяния и затем при помощи интегральных уравнений — их фазы. В частности, для упругого рассеяния бесспиновых частиц найдем

$$i \left[(n' | \hat{R}^+ | n) \frac{2\pi}{p} - (n' | \hat{R} | n) \frac{2\pi}{p'} \right] \frac{2\pi}{p'} = \\ = \int \frac{(2\pi)^2}{pp'} (n' | \hat{R} | n'') d\Omega'' (n'' | \hat{R}^+ | n)$$

или, вводя обозначение амплитуды рассеяния f , получим

$$\frac{4\pi}{p} \text{Im} f [(n', n)] = \int f [(n', n'')] d\Omega'' f^* [(n'', n)], \quad (24,14)$$

где (n', n) — скалярное произведение единичных векторов.

Соотношения типа (24,14) были использованы, например, в [8] при определении полного набора опытов *) по упругому рассеянию нуклонов нуклонами. Мы рассмотрим только частный случай, когда интегральные уравнения сводятся к простому соотношению. Пусть $n' = n$; $\mu_1 = \mu_1$; $\mu_2 = \mu_1$; $\alpha' = \alpha$. Тогда выражение (24,12') будет амплитудой для рассеяния вперед без изменения проекций спинов (обозначим ее через $f(0)$), а (24,13) превратится в следующее простое выражение:

$$\delta(E' - E) \sigma,$$

где σ — полное сечение всех процессов, которые могут произойти при столкновении двух частиц с заданными проекциями спинов μ_1 и μ_2 . На основе (24,14) найдем

$$\frac{4\pi}{p} \text{Im} f(0) = \sigma. \quad (24,15)$$

Или, иначе говоря, мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному эффективному сечению.

*) См. ниже.

Просуммируем левую и правую части (24,14) по проекциям спинов сталкивающихся частиц. Тогда получим

$$\frac{4\pi}{p} \text{Sp Im } f(0) = (2j_I + 1)(2j_{II} + 1) \bar{\sigma}, \quad (24,16)$$

где $\bar{\sigma}$, согласно (23,9) — полное сечение столкновения неполяризованных частиц. Соотношения (24,15) и (24,16) составляют содержание так называемой оптической теоремы и часто используются при теоретическом рассмотрении различных процессов столкновения и при анализе экспериментальных данных. В качестве примера можно указать процесс рассеяния γ -квантов в кулоновском поле. С точки зрения квантовой электродинамики это процесс высокого порядка по e^2 , однако, ввиду того, что в кулоновском поле происходит довольно интенсивное образование пар (неупругий процесс), будет происходить заметное рассеяние γ -квантов (так называемое дельбрюкковское рассеяние). Причем при помощи (24,14), зная сечение образования пар, нетрудно оценить нижнюю границу сечения рассеяния вперед. Важное применение оптическая теорема находит в анализе дисперсионных соотношений [7]. Ее можно также использовать для уточнения фазового анализа различных процессов рассеяния, особенно в тех случаях, когда трудно измерить поперечное сечение рассеяния под малыми углами.

Из оптической теоремы можно строго без привлечения использованных выше модельных представлений получить основные черты углового распределения упруго рассеянных частиц при высоких энергиях.

Рассмотрим для простоты случай рассеяния бесспиновых частиц; тогда из (24,14) следует [34]

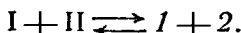
$$|f(0)|^2 \geq \left(\frac{p\sigma_t}{4\pi} \right)^2,$$

но это означает, что угловое распределение упругого рассеяния частиц при больших p резко вытянуто вперед и в основном сосредоточено в телесном угле:

$$\Delta\Omega = \pi\theta^2 \leq \left(\frac{4\pi}{p\sigma_t} \right)^2 \sigma_s.$$

§ 25. Связь эффективных поперечных сечений прямых и обратных реакций

Рассмотрим две реакции:



Сечение прямой реакции, согласно (23,10), запишется

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega_f} = \frac{4\pi^2}{p_i^2} |(-n_f \mu_1 \mu_2 | S^E | n_i \mu_I \mu_{II})|^2. \quad (25,1)$$

Знак минус при единичном векторе n_f означает, что в состоянии f частицы движутся от начала системы координат. Сечение обратной реакции имеет вид

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_i} = \frac{4\pi^2}{p_f^2} |(-n_i \mu_I \mu_{II} | S^E | n_f \mu_1 \mu_2)|^2. \quad (25,2)$$

Сравнивая (25,1) и (25,2) с (21,15), видим, что простой связи между сечениями прямых и обратных реакций нет. Существует лишь связь между сечениями прямой реакции и такой обратной реакции, в которой спины начального и конечного состояний ориентированы в противоположном направлении по отношению к ориентации спинов в прямой реакции. Рассмотрим, однако, случай, когда пучки частиц не поляризованы. Тогда нам необходимо просуммировать сечение по проекциям спинов в конечном состоянии и усреднить по проекциям в начальном состоянии; это дает

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega_f}} &= \frac{4\pi^2}{p_i^2} \frac{1}{(2j_I + 1)(2j_{II} + 1)} \times \\ &\quad \times \sum_{\mu_I \mu_{II} \mu_1 \mu_2} |(-n_f \mu_1 \mu_2 | S^E | n_i \mu_I \mu_{II})|^2 \\ \overline{\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_i}} &= \frac{4\pi^2}{p_f^2} \frac{1}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \times \\ &\quad \times \sum_{\mu_I \mu_{II} \mu_1 \mu_2} |(-n_i \mu_I \mu_{II} | S^E | n_f \mu_1 \mu_2)|^2. \end{aligned}$$

Если теперь мы воспользуемся соотношением (21,15) и учтем, что суммирование производится по всем проекциям

спинов, то получим равенство

$$\frac{\overline{d\sigma_{if}}}{p_f^2 d\Omega_f} (2j_I + 1)(2j_{II} + 1) = \frac{\overline{d\sigma_{fi}}}{p_i^2 d\Omega_i} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \quad (25,3)$$

Как видно из вывода последнего равенства, сравнивать сечения прямого и обратного процессов необходимо строго при одной и той же энергии E . Кроме того, необходимо помнить, что (25,3) справедливо лишь для случая, когда сталкивающиеся частицы не поляризованы. В общем случае имеется более сложная связь прямых и обратных процессов, определяемая формулой (21,15). Для реакций с поляризованными пучками частиц можно также вывести ряд полезных соотношений между сечениями прямых и обратных реакций.

Равенство (25,3) часто называют соотношением детального баланса. Это название неточно, так как в классической физике под соотношением детального баланса обычно понимают равенство вероятностей прямого и обратного процессов, а это равенство, как было отмечено выше, отнюдь не имеет места. (О различии между взаимностью и детальным равновесием см. [6].)

Приведем примеры использования соотношения (25,3).

1) Определение спина π -мезона. Спин π -мезона был с большой определенностью установлен при изучении реакций



Применение к ним соотношения (25,3) дает

$$\frac{\overline{d\sigma_{if}}}{d\Omega_f} = \frac{3}{4} \frac{p_f^2}{p_i^2} (2s + 1). \quad (25,5)$$

Здесь введен множитель $\frac{1}{2}$, учитывающий тождественность двух протонов; s — спин π -мезона.

Из формулы (25,5) видно, что случаи $s=0$ и $s=1$ дают отношения сечений, различающиеся между собой в 3 раза. Таким образом, уже довольно грубые измерения дифференциальных сечений реакций (25,4) только под одним углом дают возможность убедиться в том, что спин π -мезона равен нулю.

Ввиду своей общности соотношение (25,3) может послужить и для определения спинов других частиц. Соотношения между сечениями прямых и обратных реакций часто применяются и для реакций с участием фотонов. Однако в этом случае их необходимо несколько видоизменить*). В самом деле, хотя спин фотона и равен 1, число различных его проекций равно не $2j + 1 = 3$, а только 2 (возможны только две различные поляризации фотона). Отсюда следует, что видоизменение (25,3) носит тривиальный характер: множитель $(2j + 1)$ для фотона заменяется на 2.

2) Большое принципиальное значение имеет измерение сечения фоторождения π^- -мезонов на нейтронах:

$$\gamma + n \rightarrow p + \pi^- \quad (25,6)$$

Однако нейтронных мишеней не существует, и этот процесс приходится изучать при помощи довольно сложной интерпретации процесса $\gamma + d \rightarrow 2p + \pi^-$. Но, очевидно, вместо процесса (25,6) можно изучать обратный ему процесс, а для определения сечения прямого процесса применить соотношение (25,3), с учетом сделанного выше замечания:

$$\frac{\overline{d\sigma}_{\gamma\pi}}{d\Omega_{\pi}} = \frac{\overline{d\sigma}_{\pi\gamma}}{d\Omega_{\gamma}} \frac{p_{\pi}^2}{p_{\gamma}^2} \frac{1}{2}.$$

3) В теоретических расчетах реакции фоторасщепления дейтона

$$\gamma + d \rightarrow p + n \quad (25,7)$$

иногда оказывается удобным вычислить сечение обратного процесса, а затем при помощи (25,3) получать сечение процесса (25,7).

В этом случае (25,3) запишется

$$\frac{\overline{d\sigma}_{d, pn}}{d\Omega_p} = \frac{\overline{d\sigma}_{pn, d}}{d\Omega_{\gamma}} \frac{2}{3} \frac{p_p^2}{p_{\gamma}^2}.$$

*) Подробнее о реакциях с участием фотонов речь будет идти ниже.

Г Л А В А VIII

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ, ОБЛАДАЮЩИХ СПИНОМ

§ 26. Постановка вопроса. Примеры. Параметризация S -матрицы

Как было показано выше, из общих свойств матрицы рассеяния можно получить довольно много сведений о сечениях взаимодействия бесспиновых частиц. В частности, из унитарности S -матрицы и законов сохранения следует возможность описать процесс набором действительных параметров — фаз. Специфика взаимодействия сказывается на величине фаз и их зависимости от энергии. Например, в том случае, когда радиус взаимодействия сравним с длиной волны частиц, сечение с большой точностью описывается небольшим числом фаз (это утверждение непосредственно вытекает из проделанного выше перехода к классической механике).

Таким образом, при изучении свойств частиц и их взаимодействий подлежат изучению (теоретическому и экспериментальному) именно эти параметры. Такой подход существенно упрощает дело. Производя фазовый анализ экспериментальных данных, разделяют свойства процессов, которые связаны с общими, хорошо установленными законами природы, и свойства, которые связаны со спецификой столкновения частиц данного сорта.

Всегда ли возможно провести фазовый анализ? Каковы особенности столкновения частиц, обладающих спином? Эти вопросы являются предметом обсуждения настоящей главы. Рассмотрим для начала упругое столкновение частиц со спинами:

$$I + II \rightarrow I + 2. \quad (26,1)$$

Отличие этого случая от упругого рассеяния бесспиновых частиц заключается в том, что состояние системы задается не только направлением полета частиц (углами θ , φ), но также еще и значениями проекций спинов частиц μ . S -матрица теперь имеет вид

$$(\theta' \varphi' \mu_1 \mu_2 | S^E | \theta \varphi \mu_1 \mu_2) \delta(E' - E), \quad (26,2)$$

а для бесспиновых частиц она имела вид

$$(\theta' \varphi' | S^E | \theta \varphi) \delta(E' - E). \quad (26,3)$$

В случае бесспиновых частиц мы вводили вместо переменных θ , φ переменные l и m и использовали законы сохранения (20,2). Это привело к тому, что S -матрица имела вид

$$S^l \delta_{l'l'} \delta_{m'm} \delta(E' - E). \quad (26,4)$$

Связь выражений (26,3) и (26,4) осуществлялась при помощи функций преобразования $(\theta \varphi | lm) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} (\theta' \varphi' | S^E | \theta \varphi) &= \sum_{lm} Y_{lm}(\theta', \varphi') S^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \omega) S^l, \end{aligned}$$

ω — угол между направлениями (θ, φ) и (θ', φ') , S^l — комплексные параметры, зависящие от энергии. Использование унитарности давало возможность ввести один действительный параметр — фазу.

В случае частиц со спином использование законов сохранения дает

$$S^J \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta(E' - E), \quad (26,5)$$

но S^J — теперь уже не число, а матрица. В самом деле состояние мы задавали четырьмя квантовыми числами θ , φ , μ_1 , μ_2 (не считая энергии), а законы сохранения дают возможность делать заключения только о двух квантовых числах J и M . Следовательно, по остальным двум квантовым числам S является матрицей и ее зависимость от этих чисел

определяется спецификой взаимодействия *). Отсюда уже ясно, что в случае частицы со спином, вообще говоря, нельзя так сильно упростить выражение для сечения, как в случае рассеяния бесспиновых частиц (введение фаз). Однако в частных случаях введение фаз все же оказывается возможным. Рассмотрим рассеяние бесспиновых частиц на частицах со спином $1/2$ (например, рассеяние π -мезонов на нуклонах или нейтронов на He^4). Состояние характеризуется заданием чисел (E, l, m, μ) , причем μ может принимать два значения: $\pm 1/2$. Если мы сложим орбитальный момент l и спин частицы и введем полный момент системы J и его проекцию M вместо квантовых чисел m и μ , то наша система будет характеризоваться числами (E, l, J, M) . Причем из закона сложения моментов $J = l \pm \frac{1}{2}$. С учетом законов сохранения момента и энергии S -матрица имеет вид

$$S^J \delta_{J' J} \delta_{M' M} \delta(E' - E),$$

где S^J — двухрядная матрица:

$$\begin{pmatrix} \left(J + \frac{1}{2} \mid S^J \mid J + \frac{1}{2} \right) & \left(J + \frac{1}{2} \mid S^J \mid J - \frac{1}{2} \right) \\ \left(J - \frac{1}{2} \mid S^J \mid J + \frac{1}{2} \right) & \left(J - \frac{1}{2} \mid S^J \mid J - \frac{1}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (26,6)$$

Учтем еще один закон — закон сохранения четности (см. [2] § 29):

$$\pi_i = (-1)^l \Pi_I \Pi_{II} = (-1)^{l'} \Pi_1 \Pi_2 = \pi_f,$$

*) Количество квантовых чисел, входящих в набор, который задает состояние, определяется числом степеней свободы системы и, очевидно, не зависит от представления. Так, например, для бесспиновых частиц это три числа (E, θ, φ) , либо (E, l, m) и т. д., а для двух частиц со спином — пять чисел $(E, \theta, \varphi, \mu_1, \mu_2)$, либо (E, l, m, μ_1, μ_2) . Если сложить спины частиц в один суммарный спин, то вместо μ_1 и μ_2 войдут два новых квантовых числа — суммарный спин s и его проекция μ . При этом состоянии будет задаваться числами (E, l, m, s, μ) . Можно сложить суммарный спин с орбитальным моментом, введя вместо проекций m и μ квантовые числа J — полного момента и M — его проекции: (E, J, M, l, s) — новый набор пяти квантовых чисел. В тексте речь идет, например, о квантовых числах l и s .

где π_i — полная четность начального состояния и π_f — полная четность конечного состояния, а Π_I, Π и $\Pi_{1,2}$ — внутренние четности частиц *); таким образом, в нашем случае $l' = l + 2n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Но, как следует из закона сохранения полного момента, l' может отличаться от l не больше чем на 1; следовательно, недиагональные члены в (26,6) равны нулю, и S -матрица диагональна:

$$S_l^J \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{l'l'} \delta(E' - E).$$

Требование унитарности дает

$$S_l^J * S_l^J = 1 \quad \text{и} \quad S_l^J = e^{2i\delta_l^J},$$

т. е. в случае, когда одна из частиц бесспиновая, а другая частица имеет спин $1/2$, понятие фазы сохраняет свой обычный смысл. Однако фаза зависит не только от l , но еще и от J .

Рассмотрим другой важный пример — упругое рассеяние частиц со спином $1/2$ (например, рассеяние нейтронов на протонах). Система характеризуется квантовыми числами (E, l, m, μ_1, μ_2) . Введем квантовые числа интегралов движения J и M и квантовое число суммарного спина частиц s (оно может принимать значения 0 и 1)

$$(J' M' E' s' l' | S | J M E s l) = (s' l' | S^J | s l) \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta(E' - E).$$

Согласно закону сохранения момента

$$l = \begin{cases} J-1 \\ J \\ J+1 \end{cases} \quad \text{при } s=1 \quad \text{и} \quad l=J \quad \text{при } s=0.$$

Учет закона сохранения четности дает правило отбора $l' = l + 2n$, где n — целое число. Это означает, что возможны переходы только между $l = J + 1$ и $l = J - 1$ и

*) Мы занимаемся изучением ядерных реакций, и в основном речь идет о сильных взаимодействиях. Нарушения закона сохранения четности обнаружены только в слабых взаимодействиях, обуславливающих распад. В сильных же взаимодействиях четность сохраняется.

переходы без изменения l . При заданном полном моменте и заданной четности состояния S -матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

где индексы 1 и 2 нумеруют соответственно состояния ($l=J-1; s=1$) и ($l=J+1; s=1$), либо состояния ($l=J; s=0$) и ($l=J; s=1$). Матричные элементы $S_{\mu\nu}$ являются, очевидно, комплексными параметрами и могут быть выражены через действительные параметры $r_{\mu\nu}$ и $\delta_{\mu\nu}$:

$$S_{\mu\nu} = r_{\mu\nu} e^{i\delta_{\mu\nu}}.$$

Условие унитарности с учетом теоремы взаимности ($S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$) можно записать в виде матричного равенства

$$SS^+ = \begin{pmatrix} r_{11}e^{i\delta_{11}} & r_{12}e^{i\delta_{12}} \\ r_{12}e^{i\delta_{12}} & r_{22}e^{i\delta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}e^{-i\delta_{11}} & r_{12}e^{-i\delta_{12}} \\ r_{12}e^{-i\delta_{12}} & r_{22}e^{-i\delta_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (26,7)$$

Это равенство является краткой записью системы уравнений, которая дает возможность выразить одни параметры через другие. В результате решения этой системы найдем

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{1-r^2}e^{2i\delta} & ire^{i(\delta+\eta)} \\ ire^{i(\delta+\eta)} & \sqrt{1-r^2}e^{2i\eta} \end{pmatrix}. \quad (26,8)$$

Здесь мы ввели три новых параметра: δ , η и r ; связь их со старыми параметрами очевидна из сопоставления формул (26,7) и (26,8).

Таким образом, в рассматриваемом случае введение понятия фазы в обычном смысле этого слова оказалось невозможным. Однако использование общих свойств S -матрицы резко сократило число параметров, которое необходимо определять на опыте. В самом деле, даже после использования законов сохранения момента и четности мы получили S -матрицу при данных J и четности в виде таблицы, в которую входит четыре комплексных параметра, т. е. восемь независимых действительных параметров. Использование унитарности и теоремы взаимности привело к тому, что при данных J и четности S -матрица выражается всего через три действительных параметра.

При применении полученных выше результатов к упругому рассеянию нуклонов необходимо принять во внимание тождественность частиц (для np -рассеяния — изотопическую инвариантность). Это приводит, как легко видеть, к запрету синглет-триплетных ($s = 1 \rightleftharpoons s = 0$) переходов и дополнительному упрощению структуры матрицы рассеяния. Из изложенных примеров видно, что чем выше спины сталкивающихся частиц, тем сложнее структура матрицы рассеяния. Усложнение структуры матрицы рассеяния является простым следствием того обстоятельства, что в нашем распоряжении имеется лишь небольшое число ограничений на S -матрицу, а с ростом спина увеличивается количество квантовых чисел, от которых зависит S -матрица.

Исследование структуры матрицы рассеяния имеет большое практическое значение. В результате параметризации S -матрицы выделяют небольшое число действительных параметров, величина которых определяется спецификой взаимодействия частиц. Затем исследуют возможные постановки опытов по столкновению частиц, при помощи которых можно получить полную информацию о параметрах S -матрицы. При этом оказывается, что очень многие опыты оказываются излишними — они дают информацию, которую можно получить из данных по другим опытам.

В качестве примера такого исследования можно привести работу [8], где исследованы все возможные поляризационные опыты при упругом столкновении нуклонов и выделены наиболее целесообразные и независимые. В этой работе применен другой способ параметризации S -матрицы по сравнению с использованным нами выше.

Необходимо также отметить, что все изложенные соображения применимы, очевидно, не только к упругому рассеянию, а являются весьма общими. В § 34 мы применим изложенную выше теорию для установления связи процессов рассеяния, фоторождения π -мезонов и комптон-эффекта на нуклоне. Эта связь вытекает из тех же соображений, что и были изложены выше, если в число переменных индексов S -матрицы μ и ν включить, как независимые индексы открытых каналов.

Можно показать [14, 6], что использование фундаментальных свойств S -матрицы — унитарности и теоремы взаимности для S -матрицы, заданной в виде квадратной таблицы

из N комплексных элементов, — сокращает число независимых действительных параметров с $2N^2$ до $\frac{1}{2}N(N+1)$ параметров.

§ 27. Коэффициенты векторного сложения

Из приведенных примеров видно, что в случае столкновений частиц, обладающих спином, так же как и в случае столкновений бесспиновых частиц, можно сделать ряд заключений о структуре S -матрицы, исходя из самых общих свойств пространства — времени и законов квантовой механики.

Теперь нам предстоит выяснить ограничения, которые накладывают эти свойства матрицы рассеяния на наблюдаемые величины — сечения. Для этого необходимо уметь переводить S -матрицу, заданную в одном представлении, в другие представления, в частности в то, которое соответствует конкретному опыту.

В случае рассеяния бесспиновых частиц достаточно было одной функции преобразования $(\theta\varphi | lm)$ — шаровой функции. Как видно из приведенных выше примеров, нам нужны функции преобразования, которые осуществляют переход от представления полного момента (в котором S -матрица имеет наиболее простой вид) к представлению составляющих моментов (спинов частиц, орбитальных моментов). От этого представления уже можно перейти к представлению углов и, воспользовавшись общими формулами для сечений (23,8), получить угловые распределения и другие характеристики.

Пусть нам известны собственные функции $\Psi_{j_1\mu_1}$ и $\Psi_{j_2\mu_2}$ операторов моментов j_1 и j_2 и требуется найти собственные функции Ψ_{JM} оператора момента, который является их суммой. Функцию Ψ_{JM} , очевидно, можно представить в виде разложения по полной системе функций, составленных из произведений $\Psi_{j_1m_1}$ и $\Psi_{j_2m_2}$,

$$\Psi_{JM} = \sum_{m_1, m_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM} \Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2}. \quad (27,1)$$

Если бы Ψ_{JM} нам было известно, то $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM}$ нетрудно было бы найти, воспользовавшись ортогональностью функ-

ций. В принятых нами обозначениях Дирака равенство (27,1) можно записать так:

$$(x_1 x_2 | j_1 j_2 JM) = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 JM) (x_1 | j_1 m_1) (x_2 | j_2 m_2).$$

Из этой записи видно, что $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 JM)$ являются как раз теми функциями преобразования, которые мы ищем, — они осуществляют переход от представления слагающих моментов в представление суммарного момента. Своеобразие этих функций заключается в том, что у них как индекс состояния, так и индекс представления являются дискретными величинами, принимающими конечное число значений. Поэтому коэффициенты $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 JM)$ представляют собой элементы конечных матриц. Несмотря на простой физический смысл этих коэффициентов, получение их в явном виде связано с довольно сложными математическими расчетами. Впервые общее выражение для этих коэффициентов было дано Вигнером [12]. Для вывода Вигнер использовал изящный математический аппарат теории групп. Позднее Рака в важной работе [13] показал, что коэффициенты можно вывести алгебраическим путем без применения методов теории групп. Коэффициенты $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ играют очень большую и все возрастающую роль в различных приложениях квантовой механики. Для них существуют разнообразные названия и обозначения. Наиболее употребительное название: «коэффициенты Клебша — Жордана» (по имени авторов важной теоремы в теории неприводимых представлений группы вращений). Называют их также коэффициентами Вигнера, коэффициентами векторного сложения (vector addition coefficients). Мы будем придерживаться последнего названия. Укажем употребляемые в литературе обозначения коэффициентов векторного сложения:

$$\begin{array}{lll} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM); & (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM); & C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}; \\ C_{j_1 m_1 m_2}^J; & C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2}; & (-1)^{-J+M} \sqrt{2J+1} S_{j_1 m_1 j_2 m_2 J-M}. \end{array}$$

Наиболее употребительны первые три. Мы будем пользоваться первым.

Читателю, интересующемуся выводами общих выражений для $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$, следует ознакомиться с соответствующими работами [12, 2], где излагается теория

неприводимых представлений группы вращений. Для узко практических целей (расчетов угловых распределений, исследования свойств матрицы рассеяния, проблем корреляции частиц и явлений поляризации частиц в ядерных реакциях и др.) достаточно понимать физический смысл коэффициентов $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$, как функций преобразования Дирака, знать их общие свойства и уметь пользоваться таблицами этих коэффициентов. К изложению этого вопроса мы и переходим.

Формулы прямого $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ и обратного преобразований $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$, как мы уже отмечали, связаны простым соотношением

$$(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)^* = (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM).$$

Обычно используемое в литературе представление таково, что коэффициенты $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ действительны. Это означает, что коэффициенты прямого и обратного преобразований просто равны. Очевидно, что физические результаты не должны зависеть от порядка, в котором мы складывали моменты j_1 и j_2 , т. е. коэффициенты $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ и $(JM | j_2 m_2 j_1 m_1)$ отличаются только фазовым множителем (так как коэффициенты преобразования, или что то же самое, волновые функции, описывающие одно и то же физическое состояние, могут различаться лишь фазовыми множителями).

Можно показать, что

$$(JM | j_1 m_1 j_2 m_2) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} (JM | j_2 m_2 j_1 m_1). \quad (27,2)$$

В курсах квантовой механики доказывается, что при сложении моментов квантовые числа J и M могут принимать значения:

$$J = |j_1 - j_2|, \quad |j_1 - j_2 + 1|, \quad \dots, \quad j_1 + j_2, \quad M = m_1 + m_2. \quad (27,3)$$

Из последнего равенства следует, что по одному из индексов m_1, m_2 сумма в (27,1) носит формальный характер, так как при заданных m_1 и m_2 M уже определено равенством (27,3).

Из записи $(j_1 M - m_2 j_2 m_2 | JM)$ видно, что коэффициенты векторного сложения можно представить в виде матрицы, строки которой нумеруются числом J , а столбцы — числом m_2 .

Число строк равно $2j+1$, где j — наименьшее из значений j_1 и j_2 . Легко видеть, что число столбцов равно тому же числу. Таким образом, число коэффициентов векторного сложения равно $(2j+1)^2$. (В приложении II приводятся таблицы коэффициентов векторного сложения.) Операторы \hat{J} , \hat{j}_1 и \hat{j}_2 связаны соотношением $\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2$, но это соотношение можно записать и так:

$$\hat{j}_1 = \hat{J} - \hat{j}_2; \quad \hat{j}_2 = \hat{J} - \hat{j}_1.$$

т. е. любой из векторов, входящих в тройку $(\hat{J}, \hat{j}_1, \hat{j}_2)$ (тройки складываемых векторов часто называют триадами — triads), можно представить как результирующий вектор. Этим соотношениям соответствуют такие свойства коэффициентов векторного сложения:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{J-M}}{\sqrt{2J+1}} \cdot (JM | j_1 m_1 j_2 m_2) &= \frac{(-1)^{j_1-m_1}}{\sqrt{2j_1+1}} (j_1 m_1 | JM j_2 - m_2) = \\ &= \frac{(-1)^{2j_1} (-1)^{j_2-m_2}}{\sqrt{2j_2+1}} (j_2 m_2 | j_1 - m_1 JM). \end{aligned} \quad (27,4)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) &= (-1)^{j_1+j_2-J} (j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M) = \\ &= (-1)^{j_1+j_2-J} (j_2 m_2 j_1 m_1 | JM) = (j_2 - m_2 j_1 - m_1 | J - M). \end{aligned} \quad (27,5)$$

Кроме перечисленных свойств, коэффициенты векторного сложения, как и любые другие функции преобразования, обладают свойствами ортогональности и нормировки:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} (J' M' | j_1 m_1 j_2 m_2) (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) &= \delta_{J' J} \delta_{M' M}, \\ \sum_{JM} (j_1 m'_1 j_2 m'_2 | JM) (JM | j_1 m_1 j_2 m_2) &= \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}, \end{aligned} \right\} \quad (27,6)$$

и, согласно свойству симметрии,

$$\sum_{m, M} (JM | j_1 m_1 j_2 m_2) (JM | j_1 m_1 j'_2 m'_2) = \frac{2J+1}{2j_2+1} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (27,7)$$

Приведем, наконец, полученное Вигнером [12] явное выражение коэффициентов векторного сложения для произвольных j_1 и j_2

$$(JM | j_1 m_1, j_2 m_2) =$$

$$= \sqrt{\frac{(J+j_1-j_2)! (J-j_1+j_2)! (j_1+j_2-J)! (J+M)! (J-M)! (2J+1)}{(J+j_1+j_2+1)! (j_1-m_1)! (j_1+m_1)! (j_2-m_2)! (j_2+m_2)!}} \times \\ \times \sum_k \frac{(-1)^{k+j_2+m_2} (J+j_2+m_1-k)! (j_1-m_1+k)!}{(J-j_1+j_2-k)! (J+M-k)! k! (k+j_1+j_2-M)!} \quad (27.8)$$

§ 28. Некоторые примеры

В качестве примера применения таблиц и свойств коэффициентов векторного сложения рассмотрим простейший, но важный случай рассеяния частиц со спином $1/2$ на частицах со спином, равным нулю.

Согласно общим свойствам S -матрицы (19,1) и (20,1) в рассматриваемом случае она будет иметь вид

$$e^{2i\delta} \hat{l}^J \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{l'l} \delta (E' - E). \quad (28,1)$$

Для того чтобы можно было воспользоваться формулой (23,8) и получить сечение, необходимо перевести S -матрицу из представления $JMIE$ в представление $\rho, m l E$. Соответствующая функция преобразования $(JMsl | l\rho m)$ есть не что иное, как коэффициент векторного сложения векторов спина \hat{s} и орбитального момента \hat{l} в полный момент \hat{J} . Совершая это преобразование над (28,1), получаем

$$\sum_{J'M'} e^{2i\delta} \hat{l}^J \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{l'l} \delta (E' - E) (J'M' | s\rho l m) = \\ = e^{2i\delta} \hat{l}^J \delta_{ll'} \delta (E' - E) (JM | s\rho l m). \quad (28,2)$$

Если мы не будем преобразовывать к другим переменным конечное состояние, а подставим (28,2) в (23,8), то получим сечение столкновения частиц с определенными орбитальным моментом, полным моментом и его проекцией в конечном состоянии и с определенной проекцией спина в начальном состоянии,

Это сечение запишется следующим образом:

$$\sigma_{l', \mu, l}^{JM} = \pi \lambda^2 (2l' + 1) \left| 1 - e^{2i\delta} \hat{l}^{J'} \right|^2 \left| (JM | s\rho l' 0) \right|^2, \quad (28,3)$$

Просуммируем (28,3) по $l'M$ и усредним по начальным поляризациям частиц. Последнее означает операцию $\frac{1}{2} \sum_{P_1}$.

В силу свойства (27,7) коэффициентов векторного сложения в результате получим

$$\sigma^J = \sum_l \pi \lambda^2 4 \sin^2 \delta_l^J (2J+1) \frac{1}{2}.$$

Полное сечение будет иметь вид

$$\sigma = \sum_J \sigma^J = 4\pi \lambda^2 \sum_l \left[(l+1) \sin^2 \delta_l^{l+\frac{1}{2}} + l \sin^2 \delta_l^{l-\frac{1}{2}} \right]. \quad (28,4)$$

Если фаза не зависит от спина, то $\delta_l^{l+\frac{1}{2}} = \delta_l^{l-\frac{1}{2}}$ и (28,4) переходит в полное сечение рассеяния бесспиновых частиц.

Допустим, что фаза состояния $J = \frac{3}{2}$, $l = 1$ проходит через $\frac{\pi}{2}$ (иначе говоря, это состояние резонирует при тех энергиях, при которых мы рассматриваем столкновение). Выбранные квантовые числа соответствуют резонансному, или как его иначе называют, изобарному состоянию взаимодействия π -мезонов с нуклонами. В этом случае парциальное сечение достигает своего максимального значения (геометрического предела):

$$8\pi \lambda^2.$$

Если мы хотим найти угловые распределения, то надо функцию конечного состояния перевести в представление углов. Для этого сначала необходимо перейти к представлению lms_μ в левой части матрицы рассеяния, применив функцию преобразования $(lm s_\mu | JM)$, а затем при помощи функции $(\theta\phi | lm)$ найти S -матрицу в представлении $\theta\phi$.

Мы не будем здесь проделывать соответствующих выкладок, так как ниже мы получим общие формулы для угловых распределений при ядерных реакциях.

Если интересоваться применением полученных соотношений к рассеянию π -мезонов, то в число переменных надо включить изотопический спин. Но, как известно, законы сложения изотопических спинов полностью совпадают с за-

конами сложения обычных моментов. Поэтому обобщение изложенной теории на рассеяние частиц, обладающих изотопическим спином, не представляет труда.

Воспользуемся тем, что изотопический спин является интегралом движения, и, следовательно, S -матрица имеет вид

$$S_l^{JT} \delta_{J'J} \delta_{l'l} \delta_{M'M} \delta_{T'T} \delta_{T_3 T_3} \delta(E' - E),$$

здесь T и T_3 —, соответственно, полный изотопический спин системы и его проекция. Требование унитарности дает

$$S_l^{JT} = e^{2i\delta_l^{JT}}.$$

При $l=0$ возможно только значение $J=1/2$, при $l \neq 0$ возможны два значения: $J=l \pm \frac{1}{2}$. Изотопический спин для системы мезон — нуклон может принимать значения $3/2$ и $1/2$. Отсюда ясно, что s -рассеяние мезонов всех трех знаков, как на нейтроне, так и на протоне, описывается всего двумя фазами: $\delta_0^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$ и $\delta_0^{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}$. Рассеяние в состояниях с $l \neq 0$ описывается четырьмя фазами:

$$\delta_l^{l+\frac{1}{2} \frac{3}{2}}, \quad \delta_l^{l+\frac{1}{2} \frac{1}{2}}, \quad \delta_l^{l-\frac{1}{2} \frac{3}{2}}, \quad \delta_l^{l-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}.$$

Все преобразования, которые мы проделывали выше, остаются в силе. Необходимо еще проделать дополнительные преобразования S -матрицы в представление, соответствующее опыту. А именно, на опыте задается, что рассеивается мезон определенного знака заряда (положительный, отрицательный, нейтральный) на нуклоне в определенном состоянии по изотопическому спину (на протоне, нейтроне), т. е. в опыте мы имеем состояние, где заданы изотопические спины обеих частиц $t=1$ и $\tau=\frac{1}{2}$ и их проекции $t_3=\pm 1$ и 0 , $\tau_3=\pm \frac{1}{2}$, а свойства S -матрицы известны в представлении, где задан суммарный изотопический спин и его проекция. Функциями преобразования $(TT_3 | 1t_3 \frac{1}{2} \tau_3)$, очевидно, являются те же коэффициенты векторного сложения, ибо $\hat{T} = \hat{t} + \hat{\tau}$, а законы сложения изотопических спинов в точности совпадают с законами сложения обычных спинов,

Для процесса рассеяния π^+ -мезонов на протонах $(TT_3 | 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$ согласно таблице в приложении II равен

$$\begin{cases} 1 & \text{при } T = T_3 = \frac{3}{2} \\ 0 & \text{при всех остальных } T \text{ и } T_3. \end{cases}$$

Отсюда видно, что рассмотренный выше пример (без учета изотопического спина) полностью относится к этому случаю. Амплитуда рассеяния процесса $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ выразится следующим образом через амплитуды рассеяния в состояниях изотопического спина $T = 3/2$ и $1/2$:

$$\begin{aligned} (\pi^- p \alpha' | R | \pi^- p \alpha) = & \sum_{T' T T_3' T} \left(1 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | T' T_3' \right) \times \\ & \times (\alpha' | R | \alpha) \delta_{T' T} \delta_{T_3' T_3} \left(T T_3 | 1 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Здесь α' и α означают все остальные переменные, кроме переменных изотопического спина. Пользуясь таблицей коэффициентов векторного сложения, найдем

$$(\pi^- p \alpha' | R | \pi^- p \alpha) = \frac{1}{3} (\alpha' | R^{\frac{3}{2}} | \alpha) + \frac{2}{3} (\alpha' | R^{\frac{1}{2}} | \alpha).$$

В качестве упражнения предлагаем читателю выразить полные сечения и угловые распределения реакций $\pi + p \rightarrow \begin{cases} p + \pi^- \\ p + \pi^0 \end{cases}$ через фазы рассеяния. Для полных сечений должны получиться выражения:

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^- \rightarrow \pi^-) = & \\ = \frac{3\pi}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \left[\sin^2 \delta_{l^+}^{\frac{3}{2}} + 2 \sin^2 \delta_{l^+}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\delta_{l^+}^{\frac{3}{2}} - \delta_{l^+}^{\frac{1}{2}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + l \left[\sin^2 \delta_{l^-}^{\frac{3}{2}} + 2 \sin^2 \delta_{l^-}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\delta_{l^-}^{\frac{3}{2}} - \delta_{l^-}^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^- \rightarrow \pi^0) = & \\ = \frac{8\pi}{9k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \sin^2 \left(\delta_{l^+}^{\frac{3}{2}} - \delta_{l^+}^{\frac{1}{2}} \right) + l \sin^2 \left(\delta_{l^-}^{\frac{3}{2}} - \delta_{l^-}^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь верхние значки у фаз означают изотопический спин, а δ_{l+} и δ_{l-} означают фазы, относящиеся к данному l и моментам соответственно $l + 1/2$ и $l - 1/2$. Формулы для угловых распределений получаются слишком громоздкими, чтобы их здесь приводить.

§ 29. Коэффициенты W, X, Z, Z_{γ}^*)

В теории спектров сложных атомов, в теории угловых корреляций частиц при распаде, в теории угловых распределений ядерных реакций возникают громоздкие суммы произведений нескольких коэффициентов векторного сложения. Мы непосредственно убедимся в этом, когда будем получать общие выражения для полных и дифференциальных сечений реакций типа: $I + II \rightarrow I + 2$. Для упрощения расчетов и получения более компактных выражений в одной из работ Рака [13] по теории спектров были введены коэффициенты W , названные впоследствии коэффициентами Рака. Эти коэффициенты нашли широкое применение и в ряде других задач. В последующих работах Рака и других авторов [13, 19, 27] был введен с теми же целями и ряд других коэффициентов.

Коэффициенты W , подобно коэффициентам векторного сложения, с точностью до множителя могут быть определены как функции преобразования, позволяющие переходить от одного представления к другому. Но если коэффициенты векторного сложения возникают в задаче, связанной со сложением двух операторов момента \hat{j}_1 и \hat{j}_2 , то коэффициенты W возникают в задаче сложения трех операторов \hat{j}_1, \hat{j}_2 и \hat{j}_3 . Найдем волновую функцию, являющуюся собственной функцией операторов $\hat{J}^2 = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2$ и \hat{J}_z . Эта задача легко решается при помощи коэффициентов векторного сложения, если известны функции $(x_1 | j_1 m_1)$, $(x_2 | j_2 m_2)$ и $(x_3 | j_3 m_3)$. Собственная функция операторов $\hat{J}_{12} = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2$ и \hat{J}_{12z} запишется так:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 | J_{12} M_{12}) &= \\ &= \sum_{m_1, m_2} (x_1 | j_1 m_1) (x_2 | j_2 m_2) (j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{12} M_{12}), \end{aligned} \quad (29, 1)$$

*) Этот параграф написан В. А. Петрунькиным.

а собственную функцию операторов \hat{J}^2 и \hat{J}_z можно получить, применяя аналогичную формулу к функциям $(x_1 x_2 | J_{12} M_{12})$ и $(x_3 | j_3 m_3)$. Тогда найдем

$$(x_1 x_2 x_3 | J_{12} j_3 J M) = \sum_{M_{12} m_3} (x_1 x_2 | J_{12} M_{12}) (x_3 | j_3 m_3) (J_{12} M_{12} j_3 m_3 | J M)$$

или

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 x_3 | J_{12} j_3 J M) &= \\ &= \sum_{m_1 m_3} (x_1 | j_1 m_1) (x_2 | j_2 M - m_1 - m_3) (x_3 | j_3 m_3) \times \\ &\times (j_1 m_1 j_2 M - m_1 - m_3 | J_{12} M - m_3) (J_{12} M - m_3 j_3 m_3 | J M). \end{aligned} \quad (29,2)$$

Здесь мы заменили $(x_1 x_2 | J_{12} M_{12})$ его выражением (29,1) и воспользовались тем, что коэффициент $(\alpha \alpha \beta \beta | c \gamma)$ отличен от нуля только при условии, что $\alpha + \beta = \gamma$. Можно было бы получить собственную функцию операторов \hat{J}^2 и \hat{J}_z , спаривая функции $(x_i | j_i m_i)$ в другом порядке, например сначала вторую с третьей, а результат — с первой. В этом случае мы получили бы

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 x_3 | j_1 J_{23} J M) &= \sum_{m_1 m_2} (x_1 | j_1 m_1) (x_2 | j_2 m_2) (x_3 | j_3 M - m_1 - m_2) \times \\ &\times (j_2 m_2 j_3 M - m_1 - m_2 | J_{23} M - m_1) (j_1 m_1 J_{23} M - m_1 | J M). \end{aligned} \quad (29,3)$$

Так как функции $(x_i | j_i m_i)$ ортонормированы и представляют полную систему, то и функции $(x_1 x_2 x_3 | J_{12} j_3 J M)$, $(x_1 x_2 x_3 | j_1 J_{23} J M)$ будут ортонормированными и также представляют собой полную систему. Это следует из рассмотрения коэффициентов векторного сложения, как функций преобразования, дающих переход от одного представления к другому. В случае (29,2) состояние характеризуется следующими шестью квантовыми числами: $j_1, j_2, j_3, J_{12}, J, M$; в случае (29,3) имеем $j_1, j_2, j_3, J_{23}, J, M$. Напишем разложение функции (29,3) по функциям (29,2):

$$(x_1 x_2 x_3 | j_1 J_{23} J M) = \sum_{J_{12}} (x_1 x_2 x_3 | J_{12} j_3 J M) (J_{12} j_3 J | j_1 J_{23} J). \quad (29,4)$$

Для получения явного вида коэффициента $(J_{12} j_3 J | j_1 J_{23} J)$ мы воспользуемся тем, что функции (29,2) ортонормированы. Умножая слева и справа ряд (29,4) на функцию $(x_1 x_2 x_3 | J_{12} j_3 J M)$

и интегрируя по $x_1 x_2 x_3$, получим выражение для искомого коэффициента:

$$(J_{12} j_3 J | j_1 J_{23} J) = \sum_{m m_2} (j_1 M - m j_2 m_2 | J_{12} M - m + m_2) \times \\ \times (j_2 m_2 j_3 m - m_2 | J_{23} m) (j_1 M - m J_{23} m | J M) \times \\ \times (J_{12} M - m + m_2 j_3 m - m_2 | J M). \quad (29,5)$$

Из (29,4) нетрудно видеть, что выражение $(J_{12} j_3 J | j_1 J_{23} J)$ есть не что иное, как волновая функция состояния $|j_1 J_{23} J\rangle$ в представлении $(J_{12} j_3 J |$ и, следовательно, согласно Дираку, ее можно использовать для перехода от представления $(j_1 J_{23} J |$ к представлению $(J_{12} j_3 J |$. Именно соотношение (29,4) было использовано Рака для определения коэффициентов W . В его обозначениях мы имеем

$$(2e + 1)^{\frac{1}{2}} (2f + 1)^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) = (e_{ab} dc | a f_{ba} c). \quad (29,6)$$

Рака вычислил суммы по m, m_2 в (29,5) и получил общее выражение для W , но ввиду его громоздкости оно здесь не приводится. Следует лишь отметить, что после суммирования зависимость от M исчезает. Это фактически нами было уже использовано раньше в разложении (29,4). Из определения W видно, что они имеют смысл только для целых и полуцелых значений: a, b, c, d, e, f — со следующими ограничениями:

а) сумма каждой из нижеперечисленных троек чисел

$$(abe), \quad (edc), \quad (bdf), \quad (afc) \quad (29,7)$$

должна быть целым числом;

б) для того чтобы коэффициент W был отличен от нуля, каждая из троек чисел должна удовлетворять правилу треугольника, т. е. длина любой стороны треугольника должна быть меньше или равна сумме длин двух других сторон.

Происхождение обоих ограничений ясно из определения W . Коэффициенты Рака обладают высокой степенью симметрии по отношению к перестановкам их аргументов. Приведенные ниже соотношения характеризуют основные свойства симметрии коэффициентов Рака (эти свойства легко получить, исходя из общего выражения для W , которое мы

опустили):

$$\begin{aligned} W(abcd; ef) &= W(badc; ef) = W(cdab, ef) = \\ &= W(acbd; fe) = (-1)^{e+f-a-d} W(ebcf; ad) = \\ &= (-1)^{e+f-b-c} W(aefd; bc). \end{aligned} \quad (29,8)$$

Нетрудно получить и ряд других свойств коэффициентов W . Так как коэффициенты $(e_{ab} dc | af_{bad} c)$ являются функциями преобразования от одного представления к другому, то соответствующие им преобразования должны быть унитарными. Это свойство запишется так:

$$\begin{aligned} \sum_e (e_{ab} dc | af_{bad} c) (e_{ab} dc | ag_{bad} c) &= \\ &= \sum_e (2e+1)(2f+1)^{\frac{1}{2}}(2g+1)^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) \times \\ &\quad \times W(abcd; eg) = \delta_{fg}. \end{aligned}$$

Используя ортонормированность функций $(x_i | j_i m_i)$ и подставляя (29,2) и (29,3) в (29,4), можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} (aab\beta | e\alpha + \beta) (e\alpha + \beta d\delta | c\alpha + \beta + \delta) &= \\ &= \sum_f (2e+1)^{\frac{1}{2}} (2f+1)^{\frac{1}{2}} (b\beta d\delta | f\beta + \delta) \times \\ &\quad \times (aaf\beta + \delta | c\alpha + \beta + \delta) W(abcd; ef). \end{aligned} \quad (29,9)$$

Это выражение может быть использовано для получения формулы суммирования произведений из трех коэффициентов векторного сложения по одному индексу:

$$\begin{aligned} \sum_\beta (aab\beta | e\alpha + \beta) \times \\ \times (e\alpha + \beta d\gamma - \alpha - \beta | c\gamma) (b\beta d\gamma - \alpha - \beta | f\gamma - \alpha) &= \\ &= (2e+1)^{\frac{1}{2}} (2f+1)^{\frac{1}{2}} (aaf\gamma - \alpha | c\gamma) W(abcd; ef). \end{aligned} \quad (29,9a)$$

Формула (29,9a) получается из выражения (29,9), если воспользоваться унитарностью коэффициентов векторного сложения. Это основная формула для упрощения сумм произведений коэффициентов векторного сложения. В частном случае, когда $e=0$, значение коэффициента Рака можно

получить из простого выражения:

$$W(abcd; 0f) = (-1)^{b+c-f} (2b+1)^{-\frac{1}{2}} (2c+1)^{-\frac{1}{2}} \delta_{ab} \delta_{cd}. \quad (29,10)$$

Эта формула получается из общего выражения для коэффициентов W , которое мы не приводим. Мы не будем обсуждать здесь методов получения рекуррентных формул и табулирования коэффициентов Рака. В приложении II даны численные таблицы W для различных значений a, b, c, d, e, f .

В одной из последующих работ Рака, написанной совместно с Фано [16], а также в работе [17] были введены коэффициенты X . Эти коэффициенты вводятся в полной аналогии с коэффициентами W . Только в этом случае мы имеем дело со сложением четырех операторов момента. Коэффициент X так же, как и W , просто связан с некоторой функцией, осуществляющей преобразование от одного представления к другому:

$$\begin{aligned} [(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)]^{\frac{1}{2}} X \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{pmatrix} = \\ = (J_{12}J_{34}J | J_{13}J_{24}J). \end{aligned} \quad (29,11)$$

Здесь $\hat{J}_{12} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2$, $\hat{J}_{34} = \hat{j}_3 + \hat{j}_4$, $\hat{J}_{13} = \hat{j}_1 + \hat{j}_3$, $\hat{J}_{24} = \hat{j}_2 + \hat{j}_4$ и $\hat{J}_{12} + \hat{J}_{34} = \hat{J}$ или $\hat{J}_{13} + \hat{J}_{24} = \hat{J}$. Коэффициент X является функцией девяти аргументов, могущих принимать только целые или полуцелые значения. На каждую из троек чисел

$$(j_1 j_2 J_{12}), \quad (j_3 j_4 J_{34}), \quad (j_1 j_3 J_{13}), \quad (j_2 j_4 J_{24}), \quad (J_{12} J_{34} J), \quad (J_{13} J_{24} J)$$

накладываются такие же ограничения, что и на тройки чисел из (29,7). Если написать соответствующие волновые функции, как это делалось в предыдущем случае, то нетрудно найти явное выражение коэффициента X . Оно будет представлять собой сумму из произведений шести коэффициентов векторного сложения по магнитным квантовым числам. В дальнейшем часть соотношений и свойств коэффициентов X будут приведены без доказательств. За подробностями можно обратиться к работе [17]. Упомянутое выше выражение для коэффициента X можно преобразовать к более простому виду, если воспользоваться коэффициентами Рака.

Окончательно получается

$$\begin{aligned} X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} &= \\ &= \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) W(fgbd; f'\lambda) W(egcd; e'\lambda) W(fcbe; a\lambda). \end{aligned} \quad (29,12)$$

Нетрудно показать, что коэффициенты Рака являются частным случаем коэффициентов X . В самом деле, если мы положим один из шести аргументов b, c, d, e, f или g , встречающихся дважды справа в (29,12), равным 0 и воспользуемся свойствами симметрии для W (29,8) и формулой (29,10), то получим простую связь X с W . Например, если положить $g=0$ и соответственно $e=e'$ и $f=f'$, то получим

$$X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e \\ f & f & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{e+f-a-d} (2e+1)^{-\frac{1}{2}} (2f+1)^{-\frac{1}{2}} W(abcd; ef). \quad (29,13)$$

На основании этого коэффициенты X иногда называют обобщенными коэффициентами Рака. Обобщение основной формулы Рака (29,9а) очень полезное в приложениях, имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 m_2 \mu_1 \mu_2} (j_1 m_1 l_1 \mu_1 | s_1 \sigma_1) \times \\ &\times (j_2 m_2 l_2 \mu_2 | s_2 \sigma_2) (j_1 m_1 j_2 - m_2 | j m_j) (l_1 \mu_1 l_2 - \mu_2 | l m_l) = \\ &= (-1)^{s_1 - j_1 - l_2} [(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)(2j + 1)(2l + 1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{g m_g} (s_1 \sigma_1 s_2 - \sigma_2 | g m_g) (j m_j l m_l | g m_g) X \begin{pmatrix} j_1 & j & j_2 \\ s_1 & g & s_2 \\ l_1 & l & l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29,14)$$

Перечислим ряд свойств коэффициентов X , которые могут быть получены из свойств коэффициентов W .

1) Транспозиция строк и столбцов

$$X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a & c & f \\ b & d & f' \\ e & e' & g \end{pmatrix}. \quad (29,15)$$

2) Перестановка двух строк или двух столбцов

$$X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} = (-1)^\sigma X \begin{pmatrix} c & d & e' \\ a & b & e \\ f & f' & g \end{pmatrix} = (-1)^\sigma X \begin{pmatrix} f & f' & g \\ c & d & e' \\ a & b & e \end{pmatrix}, \quad (29,15a)$$

где $\sigma = a + b + c + d + e + e' + f + f' + g$ равно целому числу. Комбинируя (29,15) и (29,15a), мы можем получить 72 различные перестановки девяти аргументов X . Например, мы можем переписать формулу (29,13) в более симметричном виде

$$X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} = (-1)^\sigma \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) W(bcef; \lambda a) \times \\ \times W(bcf'e'; \lambda d) W(efe'f'; \lambda g), \quad (29,16)$$

где диагональные элементы X являются последними аргументами трех W коэффициентов. Эта формула обычно используется как стандартная формула для связи X с W . Можно написать еще два полезных соотношения:

$$\sum_{ff'} (2f + 1)(2f' + 1) X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & b & e_1 \\ c & d & e'_1 \\ f & f' & g \end{pmatrix} = \\ = [(2e + 1)(2e' + 1)]^{-1} \delta_{ee_1} \delta_{e'e'_1}$$

$$\sum_{ff'} (-1)^{e' - f' - 2c + h'} (2f + 1) \times \\ \times (2f' + 1) X \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & c & f \\ d & b & f' \\ h & h' & g \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a & b & e \\ d & c & e' \\ h & h' & g \end{pmatrix}.$$

Как было показано в работах [18, 19], для случая ядерных реакций более удобно вместо W вводить коэффициенты Z и Z_{γ} . Коэффициент Z определяется следующей формулой:

$$Z(abcd; ef) = i^{f-a+c} [(2a + 1)(2b + 1)(2c + 1)(2d + 1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times W(abcd; ef)(a0c0|f0). \quad (29,17)$$

Существует простая формула для вычисления коэффициента $(a0c0|f0)$, которая дается в приложении II. Таким образом, вычисление коэффициента Z сводится к вычислению соответствующего ему коэффициента W . Коэффициент $(a0c0|f0)$ равен нулю, когда $a + c + f$ равно нечетному числу. Поэтому для Z имеем дополнительное соотношение

$$Z = 0, \text{ если } a + c + f \text{ нечетно.}$$

Используя формулу (29,10), а также свойства симметрии (29,8), легко получить выражения для двух частных случаев:

$$\begin{aligned} Z(abcd; 0f) &= \\ &= \delta_{ab}\delta_{cd} (-1)^{2f} i^{f-a+c} [(2a+1)(2c+1)]^{\frac{1}{2}} (a0c0|f0), \end{aligned} \quad (29,18)$$

$$Z(abcd; e0) = \delta_{ac}\delta_{bd} (-1)^{b-e} (2b+1)^{\frac{1}{2}}. \quad (29,18a)$$

Здесь мы воспользовались формулой для коэффициента $(a0b0|00)$

$$(a0b0|00) = \delta_{ab} (-1)^a (2a+1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (29,19)$$

Как будет показано в § 30 и 33, более целесообразно определять коэффициенты Z без множителя i^{f-a+c} . Но так как во всех старых работах и таблицах коэффициентов Z принято определение (29,17), мы не сочли целесообразным изменить его. Коэффициент Z_γ мы определяем так:

$$\begin{aligned} Z_\gamma(abcd, ef) &= [(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times W(abcd, ef) (a-1c1|f0). \end{aligned} \quad (29,20)$$

Формула значительно упрощается для случая $e=0$.

$$\begin{aligned} Z_\gamma(abcd, 0f) &= \\ &= (-1)^{b+c-f} [(2a+1)(2c+1)]^{\frac{1}{2}} (a-1c1|f0) \delta_{ab}\delta_{cd}. \end{aligned} \quad (29,21)$$

Наше определение Z_γ несколько отличается от определения коэффициентов, употребляющихся в аналогичных случаях другими авторами.

§ 30. Угловые распределения в ядерных реакциях (случай, когда частицы имеют массу покоя, отличную от нуля)

Изложенный выше математический аппарат позволяет получить общее выражение дифференциального сечения произвольной реакции типа *):

$$I + II \rightarrow I + 2. \quad (30,1)$$

Согласно сказанному выше, в этом выражении будут явно выделены свойства сечения, связанные с общими законами (законы сохранения, общие законы квантовой механики), и свойства, связанные со спецификой реакции (эти свойства будут выражены параметрами типа фаз рассеяния).

В § 28 мы рассмотрели простейшие примеры. Теперь перейдем к общему случаю.

Из (20,2) следует, что S -матрица в представлении интегралов движения (в системе центра инерции) имеет следующий вид:

$$(s'l'\alpha' | S^J | sl\alpha) \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta(E' - E), \quad (30,2)$$

где α и α' — обозначение квантовых чисел, характеризующих природу и внутреннюю структуру, соответственно, сталкивающихся и разлетающихся частиц. Например, если бы мы применяли нашу теорию к столкновению атомов водорода, то в (30,2) вошли бы квантовые числа, характеризующие состояния электрона в этих атомах. В дальнейшем мы конкретизируем не α и α' , а только те переменные S -матрицы, о поведении которых мы можем делать определенные суждения. В α мы также включили квантовые числа спинов частиц, но не их проекции. s и s' в (30,2) — полные спины каналов, векторная сумма спинов, соответственно, сталкивающихся $\hat{s} = \hat{i}_I + \hat{i}_{II}$ и разлетающихся $\hat{s}' = \hat{i}_1 + \hat{i}_2$ частиц. l и l' — орбитальные моменты (в системе центра инерции) сталкивающихся и разлетающихся частиц.

Наша цель получить дифференциальное сечение реакции (30,1). Связь S -матрицы с сечением дается общей формулой (23,8). Дифференциальное сечение $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ получится в том

*) См. работы [19, 22, 27].

случае, если в число переменных, обозначенных через f_0 , будут включены углы рассеяния θ и φ . Преобразуем (30,2) к этим переменным. Для этого сначала совершим преобразование к переменным $s'l'm'_s m'$ (m'_s — квантовое число проекции s' , а m' — проекции l'). Функциями такого преобразования будут, очевидно, коэффициенты векторного сложения $(JM' | s'l'm'_s m')$. Затем перейдем к переменным θ и φ при помощи функций преобразования $(\theta\varphi | l'm') = Y_{l'm'}(\theta, \varphi)$.

В качестве переменных начального состояния, согласно (23,8), нам надо взять $lm\mu_I\mu_{II}$. Для этого преобразуем (30,2) при помощи $(JM | sm_s lm)$, а затем — при помощи $(sm_s | i_{I\mu_I} i_{II\mu_{II}})$.

В результате мы получим, что в (23,8) вместо $[(f_0 | S | l_0 i_{I\mu_I} i_{II\mu_{II}}) M_{II}] - I$ надо подставить выражение

$$\sum_{JM'l'm'_s} Y_{l'm'}(\theta, \varphi) (s'l'm'_s m' | JM) (s'l'\alpha' | R^J | sl\alpha) \times \\ \times (JM | sm_s l_0) (sm_s | i_{I\mu_I} i_{II\mu_{II}}). \quad (30,3)$$

Наша задача в сущности уже решена, необходимо лишь преобразовать и упростить окончательный результат.

Во-первых, наша формула относится к практически мало осуществимому случаю, когда падающие частицы и частицы мишени имеют строго определенную ориентацию спинов в пространстве; в конечном состоянии мы также зафиксировали определенные значения величин s' и m'_s . Наиболее часто встречаются задачи, в которых как падающие частицы, так и частицы мишени не поляризованы, причем поляризацией частиц в конечном состоянии не интересуются. Таким образом, нам надо после подстановки (30,3) в (23,8) усреднить по начальным и просуммировать по конечным состояниям спинов частиц. Используя ортогональность коэффициентов $(sm_s | j_{I\mu_I} j_{II\mu_{II}})$, найдем

$$\frac{d\sigma_{\alpha'\alpha}}{d\Omega} = \frac{\lambda_\alpha^2}{(2j_I + 1)(2j_{II} + 1)} \sum (l'_1 s' \alpha' | R^{J_1} | l_1 s \alpha)^* \times \\ \times (l'_2 s' \alpha' | R^{J_2} | l_2 s \alpha) K(J_1 l'_1 l_1; J_2 l'_2 l_2; s' s; \theta). \quad (30,4)$$

Суммирование ведется по $J_1 l_1 l'_1 J_2 l_2 l'_2 s s'$.

В величину K мы выделили сомножители, определяющиеся только кинематикой столкновения. Спецификой

столкновения (природой каналов) определяются матричные элементы оператора \hat{R} .

Выражение для K :

$$\begin{aligned}
 K(J_1 l_1' l_1; J_2 l_2' l_2; s' s; \theta) = & \\
 = (2l_1 + 1)^{\frac{1}{2}} (2l_2 + 1)^{\frac{1}{2}} \pi \sum_{m_1 m_2 m_s m_s'} (l_0 s m_s | J_1 M_1) \times & \\
 \times (l_2 0 s m_s | J_2 M_2) (l_1 m_1 s' m_s' | J_1 M_1) (l_2' m_2' s' m_s' | J_2 M_2) \times & \\
 \times Y_{l_1 m_1}^*(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) &
 \end{aligned}$$

можно подвергнуть существенному дальнейшему упрощению, сведя его к комбинациям коэффициентов Z и полиномов Лежандра. Используя формулу

$$\begin{aligned}
 Y_{l_1 m_1}^*(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = & \\
 = \sum_{LM} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2L + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (L 0 | l_1 0 l_2 0) \times & \\
 \times (LM | l_1 - m_1 l_2 m_2) (-1)^{m_1} Y_{LM}(\theta, \varphi). & \quad (30.5)
 \end{aligned}$$

получим K в виде суммы произведений коэффициентов векторного сложения. Эти суммы можно преобразовать при помощи формулы (29,9а). Суммы по m_s' , m_1' и m_2' объединяются в сумму Рака. Затем суммы по m_s , M_1 и M_2 тоже объединяются в сумму Рака. Эта сумма Рака пропорциональна коэффициенту $(LM | l_1 0 l_2 0)$, откуда следует, что $M = 0$. Окончательный результат после простых преобразований запишется в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{(2j_I + 1)(2j_{II} + 1)} \sum_{L=0}^{\infty} B_L P_L(\cos \theta), \quad (30.6)$$

где $P_L(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, а

$$\begin{aligned}
 B_L = \sum \frac{(-1)^{s'-s}}{4} Z(l_1 J_1 l_2 J_2; sL) Z(l_1' J_1' l_2' J_2'; sL) \times & \\
 \times \left\{ i^{l_2' - l_1' + l_1 - l_2} \operatorname{Re} [(l_1' s' x' | R^{J_1} | l_1 s x)^* (l_2' s' \alpha' | R^{J_2} | l_2 s x)] \right\}. & \quad (30.7)
 \end{aligned}$$

Суммирование идет по $J_1 J_2 l_1 l_2 l'_1 l'_2 s$ и s' . Нетрудно видеть, что выражение (30,7) удовлетворяет теореме взаимности*).

Суммирование по всем квантовым числам формально распространяется неограниченно от 0 до ∞ . Однако неограниченной является только сумма по одному из чисел (например, по J_1). Остальные ограничены правилами отбора для коэффициентов W , через которые выражаются коэффициенты Z . Отметим, что все члены в сумме (30,7) являются, очевидно, действительными.

Для практических вычислений более удобным является следующее выражение для B_L :

$$\begin{aligned}
 B_L = & \sum_{ss'} \frac{(-1)^{s'-s}}{4} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{l'=|J-s'|}^{J+s'} Z(lJlJ; sL) \times \\
 & \times Z(l'Jl'J; s'L) |(l's'\alpha' | R^J | l s \alpha)|^2 + \\
 & + \sum_{s=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{s'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \frac{(-1)^{s'-s}}{4} \sum_{J_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=|J_1-s|}^{J_1+s} \\
 & \sum_{l'_1=|J_1-s'|}^{J_1+s'} \left\{ \sum_{J_2=J_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=|J_2-s|}^{J_2+s} \sum_{l'_2=|J_2-s'|}^{J_2+s'} Z(l_1 J_1 l_2 J_2; sL) \times \right. \\
 & \times Z(l'_1 J_1 l'_2 J_2; s'L) \operatorname{Re} [\quad] + \sum_{l_2=l_1+1}^{J_1+s} \sum_{l'_2=|J_1-s'|}^{J_1+s'} Z(l_1 J_1 l_2 J_1; sL) \times \\
 & \times Z(l'_1 J_1 l'_2 J_1; s'L) \operatorname{Re} [J_2 = J_1] + \sum_{l'_2=l_1+1}^{J_1+s'} Z(l_1 J_1 l_1 J_1; sL) \times \\
 & \left. \times Z(l'_1 J_1 l'_1 J_1; s'L) \operatorname{Re} [J_2 = J_1, l_2 = l_1] \right\}.
 \end{aligned}$$

В квадратные скобки следует подставить выражение, заключенное в фигурные скобки в (30,7). В этом выражении

*) Формула (30,7) отличается от аналогичной формулы работы [19] фазовым множителем $i^{l'_2 - l'_1 + l_1 - l_2}$. Различие связано с тем, что S -матрица работы [19] не удовлетворяет требованию инвариантности по отношению к обращению времени (см. § 21 и работу [21]).

каждый член встречается только один раз. Наряду с ограничением предела отдельных суммирований, число членов в (30,7) уменьшают также следующие условия: $(l_1 + l_2 - L)$ и $(l'_1 + l'_2 - L)$ — четные числа; $(l_1 + l'_1)$ и $(l_2 + l'_2)$ — четные (нечетные) числа, если каналы α и α' имеют одинаковые (противоположные) четности. Четность канала определяется как произведение внутренних четностей сталкивающихся (или разлетающихся) частиц. Кроме того, существуют ограничения на L , известные под названием теорем о сложности углового распределения [28], которые легко получить из свойств коэффициентов Рака (см. § 29): $L \leq 2l^{\max}$, $2J^{\max}$, $2l'^{\max}$. В правых частях этих неравенств, которые должны выполняться одновременно, стоят наибольшие значения моментов, участвующих в процессе.

Обычно приходится применять формулу (30,6), либо когда входят только малые значения орбитальных моментов, либо когда реакция идет через определенное состояние по полному моменту, либо когда малы спины сталкивающихся частиц: 0, 1/2 или 1. В этих случаях приведенные формулы очень сильно упрощаются. Ограниченное число коэффициентов Z , входящих в полученные таким образом выражения, берется из таблиц, приведенных в приложении II.

Одно из важнейших применений формулы (30,6) заключается в проведении обобщенного фазового анализа экспериментальных данных. Этот анализ заключается в следующем. Экспериментально измеренное угловое распределение разлагается по полиномам Лежандра. Из сравнения результата этого разложения с формулой (30,6) определяются матричные элементы S -матрицы $(l's'\alpha' | S | l\alpha)$, т. е. находятся те параметры в угловом распределении, которые определяются не кинематикой, а специфическими особенностями процесса.

В общем случае такой анализ неоднозначен. Как было показано выше, величины $(l's'\alpha' | S | l\alpha)$ являются матрицами, содержащими большое число действительных параметров, а исследование угловых распределений дает число уравнений, значительно меньшее числа неизвестных параметров. Для полного определения параметров, вообще говоря, необходимы исследования столкновений поляризованных частиц, дающие дополнительные уравнения для определения параметров.

Даже в случае упругого рассеяния частиц со спином $1/2$ на частицах со спином, равным нулю, анализ угловых распределений не дает полной информации о параметрах S -матрицы — фазах. В этом случае, как было показано в § 26, S -матрица имеет вид

$$e^{2i\delta_l^J} \delta_{l' l} \delta_{s' s}, \quad (30,8)$$

причем $l = J \pm 1/2$, откуда следует, что при заданных J_1, J_2 и L в коэффициенты B_L будут входить коэффициенты Z четырех типов:

$$\begin{aligned} Z\left(J_1 - \frac{1}{2} J_1 J_2 - \frac{1}{2} J_2; \frac{1}{2} L\right) &= Z_{11}, \\ Z\left(J_1 + \frac{1}{2} J_1 J_2 - \frac{1}{2} J_2; \frac{1}{2} L\right) &= Z_{12}, \\ Z\left(J_1 - \frac{1}{2} J_1 J_2 + \frac{1}{2} J_2; \frac{1}{2} L\right) &= Z_{21}, \\ Z\left(J_1 + \frac{1}{2} J_1 J_2 + \frac{1}{2} J_2; \frac{1}{2} L\right) &= Z_{22}. \end{aligned}$$

Согласно § 29, Z_{11} и Z_{22} отличны от нуля, когда $J_1 + J_2 - L$ четно, а Z_{12} и Z_{21} отличны от нуля, когда $J_1 + J_2 - L$ нечетно. Отсюда следует, что в формулу для угловых распределений войдут только комбинации $Z_{11}Z_{11}, Z_{22}Z_{22}, Z_{11}Z_{22}$ и $Z_{12}Z_{21}$. Но эти коэффициенты обладают двумя свойствами симметрии: $Z_{11} = Z_{22}$ и $Z_{12} = -Z_{21}$.

Из этих результатов нетрудно усмотреть, что величина B_L не меняется, если произвести замену $\delta_{J+\frac{1}{2}}^J \leftrightarrow \delta_{J-\frac{1}{2}}^J$ для всех J одновременно. Иначе говоря, определение коэффициентов B_L из анализа экспериментальных данных не дает однозначного определения величин фаз. Эта неоднозначность [32] существенна для анализа данных по рассеянию π -мезонов на нуклонах; она имеет простой физический смысл [33].

При помощи (30,6) и (30,8) легко показать, что при рассеянии мезон — нуклон существует также неоднозначность фазового анализа, связанная с выбором знаков фаз — изменение всех знаков фаз не меняет величин коэффициентов B_L . Эти неоднозначности можно устранить путем анализа опытов по измерению поляризации нуклонов после рассеяния мезо-

нов, а также по анализу интерференции кулоновского и ядерного рассеяний.

Предоставляем читателю в качестве упражнения получить из общей формулы (30,6) дифференциальные сечения рассеяния для бесспиновых частиц и сечения рассеяния частиц со спином $1/2$ на частицах со спином 0 и выразить эти сечения через фазы рассеяния для низших значений орбитального момента $l=0,1$. Последний результат важен для фазового анализа рассеяния π -мезонов на нуклонах. Предлагаем также доказать, что угловое распределение частиц сферически симметрично, если реакция идет только через состояние полного момента 0 или $1/2$.

ГЛАВА IX

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

§ 31. Общая формула

В связи с развитием экспериментальной техники все большее значение приобретают опыты с поляризованными частицами. По сути дела в этих опытах измеряется зависимость матрицы рассеяния от переменных, характеризующих новые степени свободы. Опыты по измерению только угловых распределений дают лишь усредненные по этим переменным данные. Ряд закономерностей возникновения поляризации и особенностей реакций с поляризованными частицами можно получить, исходя только из общих свойств S -матрицы, рассмотренных нами в первой главе. Поэтому обсуждаемые ниже закономерности являются совершенно общими, не зависящими от природы участвующих в реакции частиц и деталей их взаимодействий. Мы ограничимся рассмотрением закономерностей возникновения поляризованных частиц при столкновении пучка неполяризованных падающих частиц с неполяризованными частицами мишени. Рассмотрение общего случая*) реакций с поляризованными частицами, а также корреляций при кратных процессах связано с расширением круга используемых понятий и существенным увеличением объема книги.

Поляризацией по определению называется среднее значение оператора спина:

$$(\Psi, \hat{j}\Psi) = \bar{J} \quad (31, 1)$$

Это, очевидно, векторная величина.

*) См. работы [18 и 24]. Рассмотрению корреляций при распадах частиц посвящен большой обзор [27].

Мы будем интересоваться поляризацией частиц, возникающих в результате процесса столкновения. Для определенности речь будет идти о поляризации частиц, обозначенных индексом l . При этом в качестве Ψ надо взять волновую функцию образованных в результате реакции частиц. Эта волновая функция, согласно § 23, имеет вид

$$\Psi_l' = V\sqrt{2\pi} \sum_l V\sqrt{\pi\lambda^2(2l+1)} (f_0 | R | \alpha j_{I_1} \mu_{I_1} j_{II} \mu_{II} l 0). \quad (31,2)$$

Если в это выражение вместо матричного элемента \hat{R} подставить формулу (30,3), то получится волновая функция с индексами представления (индексами, на которые действуют операторы) $\vartheta \varphi s' m'_s$. Отсюда видно, что для вычисления поляризации (31,1) необходим явный вид оператора \hat{j}_1 в представлении $s' m'_s$:

$$(s'_1 m'_{s_1} | \hat{j}_1 | s'_2 m'_{s_2}). \quad (31,3)$$

Вычислив матрицу (31,3), а затем образовав произведение (31,1), т. е. просуммировав по $s'_1 s'_2 m'_{s_1} m'_{s_2}$ и проинтегрировав по углам, мы получим среднее значение вектора поляризации (причем, полученная нами величина будет иметь смысл поперечного сечения). Это так называемая полная поляризация. Если же в произведении (31,1) не проводить интегрирования по углам θ, φ , то получится так называемая дифференциальная поляризация, представляющая наибольший интерес. Она имеет смысл дифференциального сечения; а именно, она является средним значением оператора спина частиц, попадающих в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, если поток падающих частиц единичный. Для дифференциальной поляризации мы будем использовать обозначение $\frac{dP}{d\Omega}$.

Часто вводят понятие относительной поляризации:

$$f = \frac{1}{j_1} \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}},$$

где $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ — дифференциальное сечение.

Перейдем к вычислению матрицы (31,3). В [2] (§ 25) приведены общие выражения для матриц операторов проек-

ций момента количества движения. Эти выражения получены только из одних условий коммутации и поэтому применимы также и к оператору спина:

$$\begin{aligned}(\mu | \hat{j}_x + i\hat{j}_y | \mu') &= \sqrt{(j + \mu)(j - \mu + 1)} \delta_{\mu' \mu - 1}, \\(\mu | \hat{j}_x - i\hat{j}_y | \mu') &= \sqrt{(j - \mu)(j + \mu + 1)} \delta_{\mu' - 1, \mu}, \\(\mu | \hat{j}_z | \mu') &= \mu \delta_{\mu' \mu}.\end{aligned}$$

Сопоставляя эти выражения с таблицей коэффициентов векторного сложения для $j=1$, можно усмотреть следующую объединяющую их общую формулу*):

$$(\mu' | \hat{j}_\nu | \mu) = \sqrt{(j+1)j} (j\mu' | 1\nu j\mu), \quad \nu = 0, \pm 1, \quad (31,4)$$

где

$$\hat{j}_0 = \hat{j}_z, \quad \hat{j}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{j}_x \pm i\hat{j}_y).$$

Переведем эту матрицу в нужное нам представление:

$$\begin{aligned} & (s'_1 m'_{s'_1} | \hat{j}_\nu | s'_2 m'_{s'_2}) = \\ &= \sum_{\mu_1 \mu_2} (s'_1 m'_{s'_1} | j_1 \mu_1 j_2 \mu_2) \sqrt{j_1(j_1+1)} (j_1 \mu'_1 | 1\nu j_1 \mu_1) (j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | s'_2 m'_{s'_2}). \end{aligned}$$

Упрощая это выражение при помощи формулы Рака (29,9а), найдем

$$\begin{aligned} & \sqrt{j_1(j_1+1)} \left[\frac{1}{3} (2s'_1+1)(2s'_2+1)(2j_1+1) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times (-1)^{j_2-j_1+m'_{s'_1}-\nu} (s'_1 - m'_{s'_1} s'_2 m'_{s'_2} | 1-\nu) W(j_1 s'_1 j_1 s'_2; j_2 1). \end{aligned} \quad (31,5)$$

Умножим справа (31,5) на Ψ'_r , а слева — на Ψ_r^* и просуммируем по $s'_1 m'_{s'_1} s'_2 m'_{s'_2}$. Кроме того, так как частицы I и II

*) Полученная нами формула (31,4) является частным случаем известной в приложениях теории групп теоремы Вигнера — Эккерта:

$$(j_2 \mu_2 | \hat{T}_q^k | j_1 \mu_1) = (j_2 | T_q | j_1) (j_2 \mu_2 | qk j_1 \mu_1).$$

Здесь \hat{T}_q^k — оператор, преобразующийся при поворотах системы координат как $Y_{qk}(\theta\varphi)$, $(j_2 | T_q | j_1)$ — приведенный матричный элемент, не зависящий от проекций моментов (см. [2], стр. 409).

не поляризованы, усредним по спидам начального состояния

$$\begin{aligned}
 dP_\nu = & \frac{\pi\lambda^2}{(2j_1+1)(2j_{II}+1)} \sqrt{j_1(j_1+1)} \frac{(2j_1+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \times \\
 & \times \sum [(2l_1+1)(2l_2+1)]^{\frac{1}{2}} [(l'_1 s'_1 \alpha' | R^{J_1} | l s \alpha)]^* [(l'_2 s'_2 \alpha' | R^{J_2} | l_2 s \alpha)] \times \\
 & \times \sum_{m'_1 m'_2 m'_3} (l_1 0 s m_s | J_1 m_s) (l_2 0 s m_s | J_2 m_s) (l'_1 m'_1 s'_1 m'_s | J_1 m_s) \times \\
 & \times (l'_2 m'_2 s'_2 m'_s | J_2 m_s) Y_{l_1 m_1}^* Y_{l_2 m_2} \times \\
 & \times (-1)^{j_2 - j_1 + m'_s} [(2s'_1+1)(2s'_2+1)]^{\frac{1}{2}} (s'_1 - m'_s s'_2 m'_s | 1 - \nu) \times \\
 & \times W(j_1 s'_1 j_1 s'_2; j_2 s) d\Omega. \quad (31,6)
 \end{aligned}$$

Суммы по магнитным квантовым числам можно упростить аналогично тому, как это было сделано для угловых распределений. Кроме использования формулы Рака, здесь еще целесообразно привести при помощи формулы (29,16) сумму произведений трех коэффициентов Рака к коэффициентам X , определенным в § 29. Детали этих несколько громоздких, но простых вычислений содержатся в работе [29], которую мы существенно использовали в этом параграфе. Окончательная формула для циклических проекций вектора поляризации имеет вид

$$\frac{dP_\nu}{d\Omega} = \sum A_L (L 0 1 \nu | L \nu) Y_{L\nu}(\theta, \varphi).$$

Сложное выражение для A_L не зависит от ν .

Из таблиц коэффициентов векторного сложения следует, что

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dP_z}{d\Omega} = \frac{dP_0}{d\Omega} = 0, \\
 \frac{dP_x}{d\Omega} = \left(\frac{dP_{-1}}{d\Omega} - \frac{dP_1}{d\Omega} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{1}{2} (Y_{L-1} + Y_{L1}) \sim \\
 \sim -i \sin \varphi \overline{P}_L^1(\cos \theta), \\
 \frac{dP_y}{d\Omega} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{dP_1}{d\Omega} + \frac{dP_{-1}}{d\Omega} \right) \sim -\frac{i}{2} (Y_{L1} - Y_{L-1}) \sim \\
 \sim i \cos \varphi \overline{P}_L^1(\cos \theta).
 \end{aligned} \right\} (31,7)$$

\bar{P}_L^1 — нормированные присоединенные функции Лежандра. Напомним, что ось z мы выбрали вдоль направления движения сталкивающихся частиц. Положение осей x и y пока не связано с физически выделенным направлением. Выберем теперь ось x так, чтобы она была расположена в плоскости реакции (это, очевидно, означает, что угол рассеяния $\varphi = 0$). В этой системе координат $\frac{dP_z}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} = 0$, откуда следует очень общее утверждение, что вектор поляризации частиц всегда направлен перпендикулярно плоскости реакции. Это ясно и из простых геометрических соображений: вектор поляризации является, очевидно, псевдовектором, а единственный псевдовектор, который может быть образован из единичных векторов \mathbf{n}_α и $\mathbf{n}_{\alpha'}$ — это векторное произведение $[\mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_{\alpha'}]$, откуда ясно, что вектор поляризации должен быть направлен вдоль этого вектора. Обозначим этот единичный вектор через $\mathbf{k} = [\mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_{\alpha'}]$, тогда общее выражение для вектора дифференциальной поляризации можно записать в виде *)

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\alpha'\alpha}}{d\Omega} = & \mathbf{k} \frac{\lambda^2}{4} \frac{[2j_1(j_1+1)(2j_1+1)]^{1/2}}{(2j_{I1}+1)(2j_{II}+1)} \times \\ & \times \sum \operatorname{Re} \{ i [(l'_1 s'_1 \alpha' | R_{\pi_1}^{j_1} | l_1 s \alpha)]^* [(l'_2 s'_2 \alpha' | R_{\pi_2}^{j_2} | l_2 s \alpha)] \} \times \\ & \times (-1)^{j_2 - j_1 - s + J_2 + s'_2 + l'_2} (-i)^{-l_1 + l_2 + L} Z(l_1 J_1 l_2 J_2; sL) \times \\ & \times W(j_1 s'_1 j_1 s'_2; j_2 1) [(2J_1+1)(2l'_1+1)(2s'_1+1)(2J_2+1)(2l'_2+1) \times \\ & \times (2s'_2+1)]^{1/2} (l'_1 0 l'_2 0 | L0) X(J_1 l'_1 s'_1; J_2 l'_2 s'_2; LL1) \bar{P}_L^1(\cos \theta). \quad (31,8) \end{aligned}$$

Суммирование идет по $J_1 J_2 \pi_1 \pi_2 l_1 l'_1 l_2 l'_2 s'_1 s'_2$, s и L . Все величины, входящие в $\frac{dP_{\alpha'\alpha}}{d\Omega}$, действительны.

*) Наша формула отличается от формулы (3,2) работы [29] мало существенным множителем. Различие обусловлено неудачной нормировкой тензорных моментов, использованной в работе [29] (см. [25]). Кроме того, имеется различие в фазовом множителе $i^{l'_2 - l_2 + l'_1 - l_1}$, связанное с ошибкой в работе [29], аналогичной отмеченной выше ошибке в работе [19].

§ 32. Основные закономерности возникновения поляризованных частиц в ядерных реакциях

Обсудим основные закономерности возникновения поляризованных частиц.

1) Как было показано, вектор поляризации всегда направлен перпендикулярно плоскости реакции.

2) Поляризация есть существенно интерференционное явление.

Это видно из выражения, стоящего в фигурных скобках формулы (31,8). Оно имеет вид $\sum_{l'l''} \text{Re}[if_l^* f_{l''}]$, где f_l — амплитуды переходов в отдельные каналы; члены с $l=l''$ обращаются в нуль. Таким образом, если специфика реакции такова, что отличен от нуля только один матричный элемент S -матрицы, то поляризация должна быть равна нулю.

Ряд закономерностей непосредственно вытекает из свойств коэффициентов Рака и коэффициентов векторного сложения.

3) Если в реакции эффективно участвует S -волна (в начальном и в конечном состояниях), то поляризация отсутствует.

4) Если реакция идет через уровень составного ядра определенной четности и $J = \frac{1}{2}$ (или $J = 0$, а четность любая), то поляризация также отсутствует.

5) Если в конечном состоянии суммарный спин оказывается равным нулю, то поляризация равна нулю.

6) В случае отсутствия спин-орбитальной связи поляризация равна нулю.

7) Если специфика взаимодействия такова, что значения орбитального момента начального и конечного состояний или полного момента J , принимающих участие в реакции, ограничены, то можно указать верхнюю границу для L :

$$L \leq 2l_1, 2l'_1, 2J.$$

L — должно быть четным, если интерферирующие состояния обладают одинаковой четностью. Анизотропия углового распределения реакции, очевидно, исключает применение правил третьего и четвертого. Несимметрия углового распределения относительно 90° означает, что есть интерференцион-

ные эффекты, а следовательно, возможно возникновение поляризации.

8) Можно сделать некоторые предсказания об угловом распределении поляризации. Для $\theta = 0^\circ$ и 180° \bar{P}_L^1 равны нулю и поляризация отсутствует. Если в реакции участвуют орбитальные состояния не выше $l = 1$, то зависимость поляризации будет определяться функциями $\bar{P}_1^1(\cos \theta)$ и $\bar{P}_2^1(\cos \theta)$, т. е. следует ожидать, что она будет максимальна для углов θ в областях 45 и 135° .

Полученная нами формула для поляризации очень громоздка. Однако этот недостаток связан с ее чрезвычайной общностью. Если в реакции участвуют частицы с низкими спинами и существенно только небольшое число значений орбитального момента, то формулу можно быстро упростить и в каждом конкретном случае при помощи таблиц представить коэффициенты в виде числовых множителей. Особенно просто использовать полученные выше формулы для угловых распределений и поляризаций, если применять числовые таблицы типа приведенных в приложении II для коэффициентов W , Z и X .

Приведем в качестве примера использования формулы (31,8) анализ реакции $\text{Li}^6(n\alpha)\text{H}^3$. Интерпретация [31] данных по этой реакции показывает, что в области энергий 270 кэв угловое распределение и энергетическую зависимость для нее можно объяснить, если принять, что отличны от нуля следующие элементы S -матрицы: левая часть равенства в наших обозначениях и правая — в обозначениях работы [31]:

$$\left(1 \frac{1}{2} \left| S_-^{\frac{3}{2}} \right| 1 \frac{1}{2} \right) = \frac{\tau}{\sqrt{2}}, \quad \left(2 \frac{1}{2} \left| S_+^{\frac{3}{2}} \right| 0 \frac{3}{2} \right) = a,$$

$$\left(0 \frac{1}{2} \left| S_+^{\frac{1}{2}} \right| 0 \frac{1}{2} \right) = b.$$

На основании этих данных и сформулированных выше общих закономерностей можно сделать некоторые предсказания о поляризации ядер трития, возникающих в результате реакции. Поскольку состояния с различными спинами начальных состояний не интерферируют [см. формулу (31,8)], то поляризация может быть обусловлена только интерференцией состояний τ и b , и сумма по L в (31,8) для этого случая

сводится к одному члену с $L = 1$. Используя свойства коэффициентов W и X и таблицы, нетрудно найти, что

$$W\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 01\right) = \frac{1}{2}, \quad W\left(1 \frac{3}{2} 0 \frac{1}{2}; \frac{1}{2} 1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$X = \left(\frac{3}{2} 1 \frac{1}{2}; \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}; 111\right) = \frac{1}{\sqrt{216}},$$

а формула (31,8) дает

$$\frac{dP}{d\Omega} = k\lambda^2 (864)^{-\frac{1}{2}} [i(\tau b^* - \tau^* b)] \bar{P}_1^1(\cos \theta) =$$

$$= k\lambda^2 \frac{2}{\sqrt{864}} |\tau^* b| \sin \eta \bar{P}_1^1(\cos \theta).$$

Угловое распределение не дает возможности определить величину фазы η , от которой существенно зависит величина поляризации. Однако на основе данных по угловому распределению легко оценить наибольшее значение поляризации, которое можно ожидать для этой реакции.

Из рассмотренного примера видно, что сформулированные общие закономерности позволяют сделать довольно определенные суждения об угловой зависимости поляризации и ее величине, т. е. позволяют выбрать наиболее благоприятные условия для измерения поляризации. Измерение поляризации дает возможность получить сведения о фазах матричных элементов S -матрицы.

Г Л А В А X

РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ ФОТОНОВ

§ 33. Общие формулы

Изложенный выше математический аппарат можно обобщить и на случай, когда в реакции участвуют фотоны *). Для того чтобы понять, какие особенности возникают в этом случае, нам, вообще говоря, необходимо рассмотреть квантовую механику фотона. Однако это увело бы нас несколько в сторону, так как для наших узкопрактических целей нужно лишь несколько результатов этой теории. Читателю, желающему изучить вопрос более глубоко, следует ознакомиться, например, с первой главой монографии [20], где квантовая механика фотона изложена доступно для широкого круга физиков.

Мы используем в дальнейшем следующие результаты квантовой механики фотона:

1) Фотон, как любая другая частица, имеет волновую функцию f . Она очень просто связана с вектор-потенциалом и является векторной величиной. Последнее означает, что спин фотона равен единице. f_z является собственной функцией оператора проекции спина фотона с собственным значением $\mu = 0$; комбинации $-\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x + if_y)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x - if_y)$ являются собственными функциями оператора проекции спина фотона с собственными значениями, соответственно, $+1$ и -1 .

2) Волновая функция фотона удовлетворяет условию поперечности: $(\mathbf{n}, \mathbf{f}(\mathbf{n})) = 0$, где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения фотона.

*) См. [22, 18, 26].

Из этого последнего результата и вытекают особенности общих формул, описывающих реакции с фотонами.

Нашей задачей является придать условию поперечности такой вид, чтобы оно позволяло нам простым видоизменением общих формул, полученных для частиц с массой покоя, отличной от нуля, получать аналогичные формулы для фотонов.

Для частицы со спином 1 волновая функция с определенными орбитальным моментом l , его проекцией m и проекцией спина μ имеет вид

$$(\theta\varphi\mu' | lm\mu) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \delta_{\mu'\mu}, \quad (33,1)$$

где θ и φ — углы, определяющие направления импульса частицы. Волновая функция частицы в том же представлении, но также с определенным полным моментом g и его проекцией m_g получается из функций (33,1) по правилам векторного сложения моментов

$$(\theta\varphi\mu' | lgm_g) = \sum_{m\mu} (\theta\varphi\mu' | lm\mu) (lm\mu | gm_g). \quad (33,2)$$

При заданных g и m_g имеется три линейно независимые функции с $l = \hat{g}$ и $l = g \pm 1$. Собственной функцией полного момента \hat{g} в общем случае является любая линейная комбинация этих трех функций.

В случае фотона (в отличие от обычной частицы со спином 1) волновая функция еще должна удовлетворять условию поперечности. Поэтому для получения волновой функции фотона, описывающей состояние с определенным полным моментом и его проекцией, надо построить линейные комбинации функций (33,2), удовлетворяющие этому дополнительному условию. Отсюда следует, что для фотона будет не три различных состояния с заданными квантовыми числами g и m_g , а только два.

Если мы найдем такие комбинации

$$\sum_l C^l(p) (\theta\varphi\mu' | lgm_g) = (\theta\varphi\mu' | pgm_g)$$

(индекс p может принимать два значения), то коэффициент $C^l(p)$ можно рассматривать как преобразование $(l | p)$, превращающее формулы, справедливые для обычных частиц,

в формулы, справедливые для фотонов. Таким образом наша задача сведена к отысканию $(l|p)$.

Найдем $C^l(p) = (l|p)$ из следующих условий:

1) Функции $(\theta\varphi\mu'|pgm_g)$ должны удовлетворять условию поперечности. Сформулируем это условие в том представлении, которым мы пользуемся,

$$\begin{aligned} (n, f(n)) &= \cos \theta f_z(n) + \cos \varphi \sin \theta f_x(n) + \sin \varphi \sin \theta f_y(n) = \\ &= \cos \theta f_z(n) + \frac{1}{2} (f_x + if_y) \sin \theta e^{i\varphi} + \frac{1}{2} (f_x - if_y) \sin \theta e^{-i\varphi} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (Y_{10}f_0 + Y_{11}f_1 + Y_{1-1}f_{-1}) = 0, \end{aligned}$$

где f_μ — собственные функции оператора проекции спина в собственном представлении. Таким образом, условие поперечности можно записать в виде

$$\sum_{\mu'} Y_{1\mu'}(\theta, \varphi) (\theta\varphi\mu'|pgm_g) = 0. \quad (33,3)$$

2) Функции $(\theta\varphi\mu'|pgm_g)$ должны быть собственными функциями оператора четности.

3) Функции $(\theta\varphi\mu'|pgm_g)$ должны быть ортогональными и нормированными.

Заметим, что $(\theta\varphi\mu'|pgm_g)$, согласно перечисленным их свойствам, описывают электромагнитную волну с определенным полным моментом и четностью. Такие состояния в классической теории электромагнитного поля называются мультиполями.

Функции $(\theta\varphi\mu'|lgm_g)$ являются собственными функциями оператора четности:

$$P(\theta\varphi\mu'|lgm_g) = (-1)^{l+1} (\theta\varphi\mu'|lgm_g). \quad (33,4)$$

Множитель $(-1)^l$ получается за счет преобразования $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ орбитальной части функции, (-1) — за счет спиновой части волновой функции. Так как $l = g \pm 1$, g , то состояние $l = g$ принадлежит одной четности, а $l = g \pm 1$ — другой. Согласно второму условию, в отыскиваемую комбинацию может входить либо только $(\theta\varphi\mu'|ggm_g)$, либо только $(\theta\varphi\mu'|g \pm 1gm_g)$. Отсюда мы найдем одну из искомым комбинаций

$$(\theta\varphi\mu'|ggm_g) = (\theta\varphi\mu'|0gm_g). \quad (33,5)$$

В (33,5) мы, следуя обозначениям, принятым в литературе, положим индекс p равным нулю. Такие состояния называются состояниями магнитного типа; их четность равна $(-1)^{g+1}$. В частности, при $g=1$ говорят о магнитном дипольном состоянии, при $g=2$ — о магнитном квадрупольном состоянии и т. п.

Функция (33,5), согласно ее определению (33,2), удовлетворяет нашему третьему условию. Нетрудно проверить, что она также удовлетворяет и первому условию

$$\begin{aligned} \sum_{\mu'} Y_{1\mu'}(\theta, \varphi) \sum_{m\mu} Y_{gm}(\theta, \varphi) \delta_{\mu'\mu}(gm1\mu | gm_g) = \\ = \sum_{\mu} Y_{gm_g - \mu} Y_{1\mu}(gm_g - \mu 1\mu | gm_g). \end{aligned}$$

Заменяя произведение шаровых функций при помощи формулы (30,5), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \sum_{L=I-1}^{I+1} \sum_{M=-L}^L \left[\frac{(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{\frac{1}{2}} (10g0 | L0) \times \\ \times (LM | 1\mu gm_g - \mu) (1\mu gm_g - \mu | gm_g) Y_{LM}. \end{aligned}$$

Два последних коэффициента векторного сложения при суммировании по μ дадут произведение $\delta_{Lg} \delta_{Mm_g}$, и так как коэффициент $(10g0 | g0)$ равен нулю, то первое условие будет выполнено.

Найдем вторую функцию, обладающую четностью $(-1)^g$ (в литературе принято этим состояниям, носящим название состояния электрического типа, приписывать индекс $p=1$):

$$\begin{aligned} (\theta\varphi\mu' | 1gm_g) = C^{g-1}(1) (\theta\varphi\mu' | g-1gm_g) + \\ + C^{g+1}(1) (\theta\varphi\mu' | g+1gm_g). \end{aligned}$$

Используя условие поперечности (33,3) и проделывая аналогичные выкладки, найдем

$$C^{g-1}(1) = \sqrt{\frac{g+1}{g}} C^{g+1}(1),$$

а из условия нормировки получим окончательно выражение

для волновой функции состояний электрического типа:

$$(\theta\varphi\mu' | 1gm_g) = \sqrt{\frac{g}{2g+1}} (\theta\varphi\mu' | g-1gm_g) + \\ + \sqrt{\frac{g+1}{2g+1}} (\theta\varphi\mu' | g+1gm_g).$$

Коэффициенты $C^l(p)$ можно записать в общем виде:

$$C^l(p) = (l | p) = -\sqrt{2} (g-111 | l0) \delta(l, p) (-1)^p, \quad (33,6)$$

где символ $\delta(l, p)$ имеет следующий смысл:

$$\delta(l, p) = \begin{cases} 1 & \text{при } l = g \\ 0 & \text{при } l \neq g \end{cases} \quad \text{для } p = 0, \\ \delta(l, p) = \begin{cases} 0 & \text{при } l = g \\ 1 & \text{при } l \neq g \end{cases} \quad \text{для } p = 1. \quad (33,7)$$

Преобразование (33,6) имеет большое значение, так как с его помощью обобщение очень многих результатов, справедливых для реакции с частицами, на реакции с участием фотонов носит почти тривиальный характер.

При помощи (33,6) осуществляется преобразование от переменной l к переменной, характеризующей тип электромагнитного излучения (электрическое, магнитное), причем (и это необходимо подчеркнуть) состояния фотона задаются полным моментом (орбитальный момент плюс спин), тогда как состояния сталкивающихся или разлетающихся частиц задавались суммарным спином. Это означает, что для получения формул, справедливых для реакций с участием фотонов, из соответствующих формул для реакции с частицами надо еще сделать преобразование, меняющее порядок сложения моментов:

$$(\hat{j}_I + \hat{j}_{II} = \hat{s}) + \hat{l} \rightarrow \hat{j}_I + (\hat{j}_{II} + \hat{l} = \hat{g}) = \hat{J} \text{ и т. п.}$$

Но согласно результатам § 29, этим преобразованием является

$$\sqrt{(2g+1)(2s+1)} W(l1Jj_{II} | gs) = (s | g).$$

Здесь мы положили $j_I = 1$, т. е. рассматривается случай, когда фотоном является частица I.

Сформулируем теперь окончательный рецепт для перехода от формул для реакций с частицами, записанными в переменных спина канала s , к формулам, описывающим реакции с фотонами. Причем состояния фотонов задаются в виде мультиполей электрических и магнитных.

1) Над амплитудой процесса надо проделать преобразование

$$(l' s' \alpha' | R_{\pi}^J | l s \alpha) \rightarrow \sum_{gp} (l' s' \alpha' | R_{\pi}^J | p g \alpha) (p g | s l),$$

$$(s l | g p) = (s | g) (l | p) =$$

$$= -\sqrt{2} (-1)^p \sqrt{(2g+1)(2s+1)} W(l1j_{II}; gs) \times \\ \times (g-111 | l0) \delta(l, p),$$

смысл обозначений указан выше.

2) При суммировании по начальным состояниям (когда усредняются сечения) необходимо учесть, что фотон с данным g имеет не 3 состояния, а только 2. Таким образом получаем из формулы (30,6) общие формулы для угловых распределений в ядерных реакциях с участием фотонов [26] *).

а) Фотореакции (падает фотон, вылетает частица)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{2(2j_{II}+1)} \sum \frac{(-1)^{s'-j_{II}-1}}{4} \times \\ \times \operatorname{Re} \{ (l'_1 s'_1 \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | p_1 g_1 \alpha)^* (l'_2 s'_2 \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | p_2 g_2 \alpha) \} \times \\ \times (-1)^{p_1+p_2} (i)^{-l'_2+l'_1-L} Z(l'_1 J_1 l'_2 J_2; s' L) \times \\ \times Z_{\gamma}(g_1 J_1 g_2 J_2; j_{II} L) P_L(\cos \theta). \quad (33,8)$$

Здесь сумма берется по $J_1 J_2 g_1 g_2 p_1 p_2 l'_1 l'_2 s'$ и L .

*) Наши формулы отличаются от формул работы [26] фазовым множителем, выбранным из условия инвариантности S -матрицы по отношению к обращению времени (см. § 21).

б) Испускание фотонов (падает частица, вылетает фотон)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{(2j_1 + 1)(2j_{II} + 1)} \times$$

$$\times \sum \frac{(-1)^{j_2 - s + 1}}{4} \operatorname{Re} \{ (p'_1 g'_1 \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | l s \alpha)^* (p'_2 g'_2 \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | l_2 s_2 \alpha) \} \times$$

$$\times (-1)^{p'_1 + p'_2} Z_{\gamma} (g'_1 J_1 g'_2 J_2; j_2 L) (i)^{-l_2 + l_1 - L} \times$$

$$\times Z(l_1 J_1 l_2 J_2; sL) P_L(\cos \theta). \quad (33,9)$$

Здесь сумма берется по $J_1 J_2 g_1 g_2 p_1 p_2 l'_1 l'_2 s'$ и L .

в) Рассеяние фотонов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{2(2j_{II} + 1)} \times$$

$$\times \sum \frac{(-1)^{j_2 - j_{II}}}{4} \operatorname{Re} \{ (p'_1 g'_1 \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | p_1 g \alpha)^* (p'_2 g'_2 \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | p_2 g_2 \alpha) \times$$

$$\times (-1)^{p'_1 + p'_2 + p_1 + p_2} Z_{\gamma} (g'_1 J_1 g'_2 J_2; j_{II} L) Z_{\gamma} (g_1 J_1 g_2 J_2; j_2 L) P_L(\cos \theta) \}.$$

$$(33,10)$$

Здесь сумма берется по $J_1 J_2 g_1 g_2 g'_1 g'_2 p'_1 p'_2 p_1 p_2$ и L .

Нетрудно получить и выражение для поляризации частиц, возникающих при фотореакциях. Преобразование формулы (31,8) дает

$$\frac{dP}{d\Omega} = k \frac{\lambda^2}{4} \frac{[2j_1(j_1 + 1)(2j_1 + 1)]^{1/2}}{2(2j_{II} + 1)} \times$$

$$\times \sum \operatorname{Re} \{ i (l'_1 s'_1 \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | p_1 g_1 \alpha)^* (l'_2 s'_2 \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | p_2 g_2 \alpha) \} \times$$

$$\times (-1)^{j_2 - j_1 - j_{II} + J_2 + s'_2 + l'_2 - 1} Z_{\gamma} (g_1 J_1 g_2 J_2; j_{II} L) (-1)^{p_1 + p_2} \times$$

$$\times W(j_1 s'_1 j_1 s'_2; j_2 1) \times$$

$$\times [(2J_1 + 1)(2l'_1 + 1)(2s'_1 + 1)(2J_2 + 1)(2l'_2 + 1)(2s'_2 + 1)]^{1/2} \times$$

$$\times (l'_1 0 l'_2 0 | L 0) X(J_1 l'_1 s'_1; J_2 l'_2 s'_2; LL1) \bar{P}_L^1(\cos \theta). \quad (33,11)$$

Суммирование идет по $J_1, J_2, g_1, g_2, p_1, p_2, l'_1, l'_2, s'_1, s'_2$ и L .

Свойства выражений (33,8), (33,9), (33,10) и (33,11) аналогичны обсужденным выше свойствам соответствующих выражений для столкновений частиц.

В качестве упражнения предлагаем читателю, применяя приведенные здесь формулы и таблицы в приложении II, получить:

1. Угловое распределение в реакции фоторождения π -мезонов на нуклонах, предполагая, что отличны от нуля амплитуда E_{11} фоторождения мезонов в S -состоянии в результате поглощения фотона в электрическом дипольном состоянии ($g = 1, p = 1, J = 1/2$) и амплитуды M_{11} и M_{13} фоторождения мезонов в P -состоянии при поглощении фотонов в магнитном дипольном состоянии, соответственно, ($g = 1, p = 0, J = 1/2$) и ($g = 1, p = 0, J = 3/2$).

Ответ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8k^2} \{ |E_{11}|^2 + |M_{11}|^2 + 2|M_{13}|^2 \} P_0(\cos \theta) + \\ + \operatorname{Re} [-2E_{11}^* M_{11} + 2E_{11}^* M_{13}] P_1(\cos \theta) + \\ + [-|M_{13}|^2 - 2\operatorname{Re}(M_{11}^* M_{13})] P_2(\cos \theta) \} .$$

2. Угловое распределение для комптон-эффекта на нуклоне, считая, что фотоны рассеиваются только в электрическом и магнитном дипольных состояниях.

Ответ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32k_Y^2} \{ [4|E_{1/2}|^2 + 7|E_{3/2}|^2 + 4|M_{1/2}|^2 + 7|M_{3/2}|^2 - \\ - 2\operatorname{Re}(E_{1/2}^* E_{3/2} + M_{1/2}^* M_{3/2})] + \\ + 4\operatorname{Re}[E_{1/2}^*(2M_{1/2} + M_{3/2}) + E_{3/2}^*(M_{1/2} + 5M_{3/2})] \cos \theta + \\ + 3[|E_{3/2}|^2 + |M_{3/2}|^2 + 2\operatorname{Re}(E_{1/2}^* E_{3/2} + M_{1/2}^* M_{3/2})] \cos^2 \theta \} ,$$

где $E_{1/2}$ и $E_{3/2}$ — амплитуды электрического дипольного рассеяния в состояниях с полным моментом, соответственно, $1/2$ и $3/2$, а $M_{1/2}$ и $M_{3/2}$ — то же самое для магнитного дипольного рассеяния.

§ 34. Связь процессов фоторождения, рассеяния π -мезонов и комптон-эффекта на нуклоне

В § 26 кратко обсуждалась параметризация S -матрицы, причем было указано, что приведенные там рассуждения носят очень общий характер. Они, в частности, применимы и для реакций, в которых происходит изменение природы частиц.

В этом параграфе мы проведем параметризацию S -матрицы, описывающей фундаментальные процессы π -мезонной физики, и установим связь между этими процессами, исходя только из общих свойств S -матрицы, приведенных в главе VI.

Рассмотрим совокупность реакций:

$\gamma + N \rightarrow \gamma' + N'$ — комптон-эффект на нуклоне,

$\gamma + N \rightarrow \pi + N'$ — фоторождение мезонов,

$\pi + N \rightarrow \gamma + N'$ — радиационный захват,

$\pi + N \rightarrow \pi' + N'$ — рассеяние мезонов.

Здесь символы N , N' означают нуклоны (это могут быть как протоны так и нейтроны), π и π' -мезоны (положительные, отрицательные, нейтральные), γ -фотоны. Все начальные и конечные состояния мы будем рассматривать как различные состояния одной квантовомеханической системы.

Если ограничиться энергией фотонов ниже 300 Мэв , то переходы между состояниями (γN) , $(\gamma' N')$, $(N\pi)$, $(N'\pi')$ практически исчерпывают возможные процессы. Учет остальных каналов слабо повлияет на обсуждаемые ниже результаты. Особой оговорки требует канал с образованием электронных пар. Матричный элемент S -матрицы, описывающий переход в этот канал, отнюдь не мал, что, согласно § 24, приводит к дифракционному рассеянию γ -квантов на нуклонах. Однако можно показать [35], что если не рассматривать области углов рассеяния фотонов на нуклонах, меньших $\sim \frac{m_e c^2}{E_\gamma}$, то этим эффектом можно пренебречь.

Запишем S -матрицу перечисленных процессов:

$$(k' \alpha' | S^{J\pi} | k \alpha) \delta_{J' J} \delta_{M' M} \delta_{\pi' \pi} \delta_{T_3' T_3}.$$

Здесь J — полный момент системы, M — его проекция, π — четность состояния, T_3 — проекция полного изотопического спина системы, k — все остальные квантовые числа, характеризующие канал α ; α принимает два значения, отвечающие (γN) и (πN) .

В случае, когда α соответствует каналу (πN) , индекс k учитывает следующие квантовые числа: орбитальный момент l и изотопический спин системы. При заданной четности π

и моменте J l определено однозначно, так как $l = J \pm \frac{1}{2}$ и $\pi = (-1)^{l+1}$. Изотопический же спин системы может принимать два значения $T = \frac{1}{2}$ и $T = \frac{3}{2}$. В случае, когда α соответствует каналу (γN), согласно результатам предыдущего параграфа, индекс k учитывает квантовые числа g и p , характеризующие мультипольность фотона. И так как $\pi = (-1)^{g+p+1}$ и в то же время $l = J \pm \frac{1}{2}$, то при заданных J и π возможны только два состояния фотона.

Таким образом, $(k' \alpha' | S^{J\pi} | k \alpha)$ представляет собой четырехрядную квадратную матрицу. Запишем ее в виде $S_{\mu\nu}$, где индексы μ и ν пробегает четыре значения, соответствующие следующим состояниям:

- μ или $\nu = 1$ — нуклон + фотон в состоянии магнитного типа с $g = l$ (четность состояния задаем квантовым числом l орбитального момента системы мезон — нуклон).
- μ или $\nu = 2$ — нуклон + фотон в состоянии электрического типа с $g = l + 1$ ($p = 1$).
- μ или $\nu = 3$ — нуклон + мезон в состоянии с изотопическим спином, равным $1/2$.
- μ или $\nu = 4$ — нуклон + мезон в состоянии с изотопическим спином $3/2$.

Без дальнейшего использования свойств S -матрицы при заданных полном моменте и четности мы имеем 32 действительных параметра, через которые выражается S -матрица.

Используем унитарность и симметрию S -матрицы

$$\sum_{\nu} S_{\mu\nu}^* S_{\nu\mu'} = \delta_{\mu\mu'}, \quad S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \quad (34,1)$$

Симметрия следует из свойства обратимости во времени и того обстоятельства, что среди квантовых чисел k и α нет таких, которые меняли бы знак при замене $t \rightarrow -t$. Представив $S_{\mu\nu}$ в виде $r_{\mu\nu} e^{i\varphi_{\mu\nu}}$ и подставив это выражение в соотношения (34,1), найдем систему трансцендентных уравнений, связывающих введенные параметры $r_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$. Эту систему можно решить методом последовательных приближений, используя простейшее предположение, фактически являющееся следствием опыта, что матричные элементы отно-

сятся друг к другу как

$$(S_{11} - 1 \sim S_{12} \sim S_{22} - 1) :$$

$$: (S_{13} \sim S_{14} \sim S_{23} \sim S_{24} \sim S_{34}) : (S_{33} \sim S_{44}) = \\ = \frac{e^2}{\hbar c} : \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} : 1, \quad (34,2)$$

где $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры. Соотношение (34,2), очевидно, нарушается совсем вблизи порога фоторождения. Эту малую область мы здесь рассматривать не будем. Ниже порога отличны от нуля только элементы S_{11} , S_{12} , S_{21} и S_{22} , и рассмотрение параметризации не отличается от проведенного в § 26. Поэтому мы рассмотрим область энергий выше порога фоторождения π -мезонов.

В первом приближении по $\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}$ сохраним в каждом из уравнений (34,1) только члены одного порядка по этому параметру. При μ и μ' , равных 3 или 4, найдем

$$S_{33}^* S_{33} = 1 \quad \text{и} \quad S_{44}^* S_{44} = 1,$$

откуда

$$S_{33} = e^{2i\gamma_3}, \quad S_{44} = e^{2i\gamma_4}. \quad (34,3)$$

Введенные здесь действительные параметры γ_3 и γ_4 являются не чем иным, как фазами рассеяния π -мезонов на нуклонах в состояниях с определенным и изотопическим спином, полным моментом и четностью.

Когда один из индексов μ или μ' равен 3 или 4, а другой равен 1 или 2, найдем

$$\left. \begin{aligned} S_{13} + S_{13}^* S_{33} &= 0, & S_{14} + S_{14}^* S_{44} &= 0, \\ S_{23} + S_{23}^* S_{33} &= 0, & S_{24} + S_{24}^* S_{44} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34,4)$$

Из (34,4) и (34,3) получим

$$\left. \begin{aligned} S_{13} &= ir_{13} e^{i\gamma_3}, & S_{14} &= ir_{14} e^{i\gamma_4}, \\ S_{23} &= ir_{23} e^{i\gamma_3}, & S_{24} &= ir_{24} e^{i\gamma_4}, \end{aligned} \right\} \quad (34,5)$$

где $r_{\mu\nu}$ — действительные параметры.

Соотношения (34,5) выражают важную связь процессов фоторождения и рассеяния π -мезонов [9]. Они сильно упрощают анализ экспериментов по фоторождению мезонов.

Например, используя формулы предыдущего параграфа, можно сделать ряд заключений об интерференционных членах, зная энергетическую зависимость фаз рассеяния мезонов. И, наоборот, изучая фоторождение мезонов, можно проверить правильность результатов фазового анализа рассеяния.

Когда индексы μ и μ' равны 1 или 2, то уравнения (34, 1) в первом приближении запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^* - 1 + S_{11} - 1 &= -S_{13}^* S_{31} - S_{14}^* S_{41}, \\ S_{12}^* + S_{12} &= -S_{13}^* S_{32} - S_{14}^* S_{42}, \\ S_{22}^* - 1 + S_{22} - 1 &= -S_{23}^* S_{32} - S_{24}^* S_{42}. \end{aligned} \right\} \quad (34,6)$$

Введем амплитуду рассеяния: $iR_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}$ и используем соотношения (34,5); тогда соотношения (34,6) можно кратко записать:

$$\text{Im } R_{ab} = \frac{1}{2} (r_{a3} r_{3b} + r_{a4} r_{4b}), \quad (34,7)$$

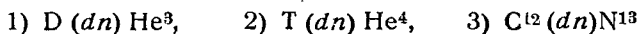
где a и b пробегает значения 1 и 2, т. е. мнимая часть амплитуды комптон-эффекта выражается через модули амплитуд фоторождения π -мезонов.

Соотношение (34,7) существенно облегчает анализ опытов по рассеянию фотонов на нуклонах. Используя общие свойства коэффициентов W , Z и векторного сложения, нетрудно показать, что замена индексов $1 \rightleftharpoons 2$ под знаком суммы в формуле (33,10) не меняет величины $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Отсюда вытекает возможность поставить символ Re перед произведением $(p_1' g_1' \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | p_1 g_1 \alpha)^* (p_2' g_2' \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | p_2 g_2 \alpha)$. Если теперь записать $R_{\mu\nu}$ в виде $R_{\mu\nu}^I + iR_{\mu\nu}^{II}$, где $R_{\mu\nu}^I$ и $R_{\mu\nu}^{II}$ — действительные величины, то $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ разобьется на два слагаемых; в одно войдут только элементы $R_{\mu\nu}^I$, а в другое — только $R_{\mu\nu}^{II}$. Согласно (34,7), это означает, что первое слагаемое выражается только через параметры, подлежащие определению в экспериментах по комптон-эффекту, а второе — только через модули амплитуд фоторождения мезонов. Из этого результата можно получить ряд конкретных следствий относительно свойств дифференциального сечения комптон-эффекта без использования детальной теории явления.

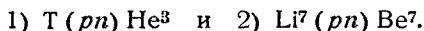
ПРИЛОЖЕНИЕ I
(К ПЕРВОЙ ЧАСТИ)

В главе II были даны методы расчета и графического построения кинематических соотношений, характеризующих ядерные взаимодействия с образованием двух частиц. Число таких взаимодействий — даже, если ограничиться лишь превращениями элементарных частиц — весьма велико, и к тому же эти взаимодействия изучаются в весьма широких интервалах энергии бомбардирующих частиц. Поэтому мы не имеем возможности привести здесь конкретные данные для всех подобных взаимодействий и ограничимся в приложении лишь несколькими довольно распространенными примерами.

В качестве примеров ядерных реакций при малых энергиях мы приводим несколько реакций, используемых для получения моноэнергетических нейтронов, а именно dn -реакции:



и pn -реакции:



На рис. 1*) показаны максимальная и минимальная энергии нейтронов (отвечающие их испусканию под углами 0 и 180°) при различных энергиях бомбардирующих частиц в названных реакциях. На рис. 2 и 3 приведены некоторые характеристики реакции $T (dn) He^4$ для энергии бомбардирующих дейтронов $W_d = 0,5 - 3 \text{ Мэв}$.

На рис. 2 дана зависимость угла испускания α -частиц от угла испускания нейтрона: $\vartheta_\alpha = f(\vartheta_n)$, а также отношение дифференциальных сечений испускания нейтронов и α -частиц при разных ϑ_α :

$$k_{\alpha n} = \frac{\sigma_n(\vartheta_n)}{\sigma_\alpha(\vartheta_\alpha)} = f(\vartheta_\alpha).$$

*) Рис. 1—8 в приложении взяты из статьи Ханзена, Ташека и Вильямса (A. O. Hansen, R. F. Taschek, J. H. Williams, Rev. Mod. Phys. 21, 635, 1949).

Например, используя формулы предыдущего параграфа, можно сделать ряд заключений об интерференционных членах, зная энергетическую зависимость фаз рассеяния мезонов. И, наоборот, изучая фоторождение мезонов, можно проверить правильность результатов фазового анализа рассеяния.

Когда индексы μ и μ' равны 1 или 2, то уравнения (34,1) в первом приближении запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^* - 1 + S_{11} - 1 &= -S_{13}^* S_{31} - S_{14}^* S_{41}, \\ S_{12}^* + S_{12} &= -S_{13}^* S_{32} - S_{14}^* S_{42}, \\ S_{22}^* - 1 + S_{22} - 1 &= -S_{23}^* S_{32} - S_{24}^* S_{42}. \end{aligned} \right\} \quad (34,6)$$

Введем амплитуду рассеяния: $iR_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}$ и используем соотношения (34,5); тогда соотношения (34,6) можно кратко записать:

$$\text{Im } R_{ab} = \frac{1}{2} (r_{a3} r_{3b} + r_{a4} r_{4b}), \quad (34,7)$$

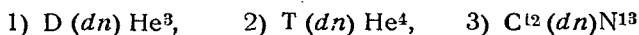
где a и b пробегает значения 1 и 2, т. е. мнимая часть амплитуды комптон-эффекта выражается через модули амплитуд фоторождения π -мезонов.

Соотношение (34,7) существенно облегчает анализ опытов по рассеянию фотонов на нуклонах. Используя общие свойства коэффициентов W , Z и векторного сложения, нетрудно показать, что замена индексов $1 \rightleftharpoons 2$ под знаком суммы в формуле (33,10) не меняет величины $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Отсюда вытекает возможность поставить символ Re перед произведением $(p_1' g_1' \alpha' | R_{\pi_1}^{J_1} | p_1 g_1 \alpha)^* (p_2' g_2' \alpha' | R_{\pi_2}^{J_2} | p_2 g_2 \alpha)$. Если теперь записать $R_{\mu\nu}$ в виде $R_{\mu\nu}^I + iR_{\mu\nu}^{II}$, где $R_{\mu\nu}^I$ и $R_{\mu\nu}^{II}$ — действительные величины, то $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ разобьется на два слагаемых; в одно войдут только элементы $R_{\mu\nu}^I$, а в другое — только $R_{\mu\nu}^{II}$. Согласно (34,7), это означает, что первое слагаемое выражается только через параметры, подлежащие определению в экспериментах по комптон-эффекту, а второе — только через модули амплитуд фоторождения мезонов. Из этого результата можно получить ряд конкретных следствий относительно свойств дифференциального сечения комптон-эффекта без использования детальной теории явления.

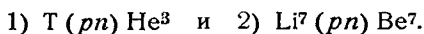
ПРИЛОЖЕНИЕ I
(К ПЕРВОЙ ЧАСТИ)

В главе II были даны методы расчета и графического построения кинематических соотношений, характеризующих ядерные взаимодействия с образованием двух частиц. Число таких взаимодействий — даже, если ограничиться лишь превращениями элементарных частиц — весьма велико, и к тому же эти взаимодействия изучаются в весьма широких интервалах энергии бомбардирующих частиц. Поэтому мы не имеем возможности привести здесь конкретные данные для всех подобных взаимодействий и ограничимся в приложении лишь несколькими довольно распространенными примерами.

В качестве примеров ядерных реакций при малых энергиях мы приводим несколько реакций, используемых для получения моноэнергетических нейтронов, а именно dn -реакции:



и pn -реакции:



На рис. 1*) показаны максимальная и минимальная энергии нейтронов (отвечающие их испусканию под углами 0 и 180°) при различных энергиях бомбардирующих частиц в названных реакциях. На рис. 2 и 3 приведены некоторые характеристики реакции $T(dn)He^4$ для энергии бомбардирующих дейтронов $W_d = 0,5 - 3 \text{ Мэв}$.

На рис. 2 дана зависимость угла испускания α -частиц от угла испускания нейтрона: $\vartheta_\alpha = f(\vartheta_n)$, а также отношение дифференциальных сечений испускания нейтронов и α -частиц при разных ϑ_α :

$$k_{\alpha n} = \frac{\sigma_n(\vartheta_n)}{\sigma_\alpha(\vartheta_\alpha)} = f(\vartheta_\alpha).$$

*) Рис. 1—8 в приложении взяты из статьи Ханзена, Ташека и Вильямса (A. O. Hansen, R. F. Taschek, J. H. Williams, Rev. Mod. Phys. 21, 635, 1949).

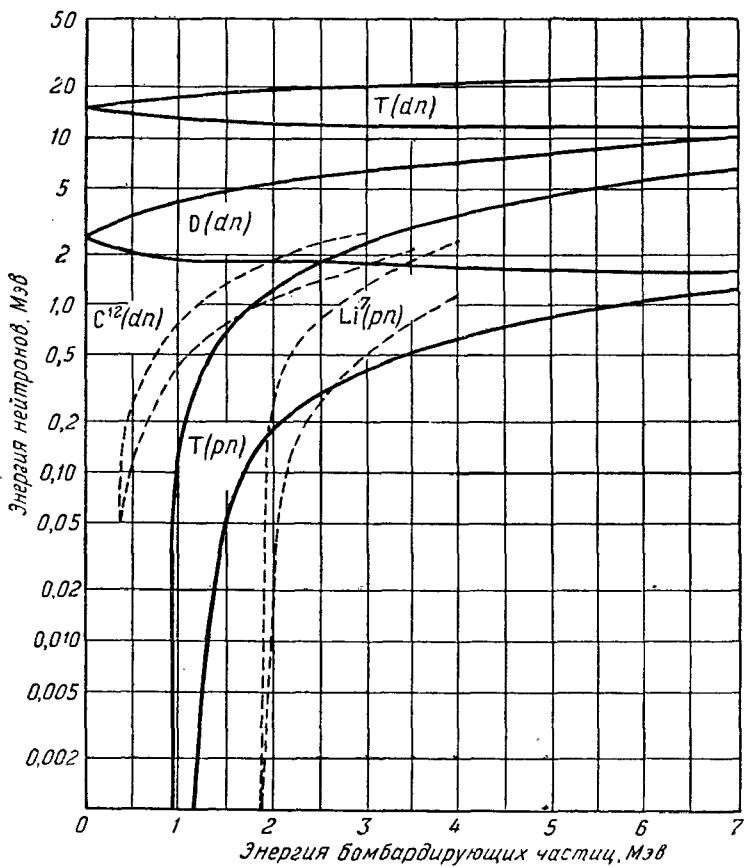


Рис. 1.

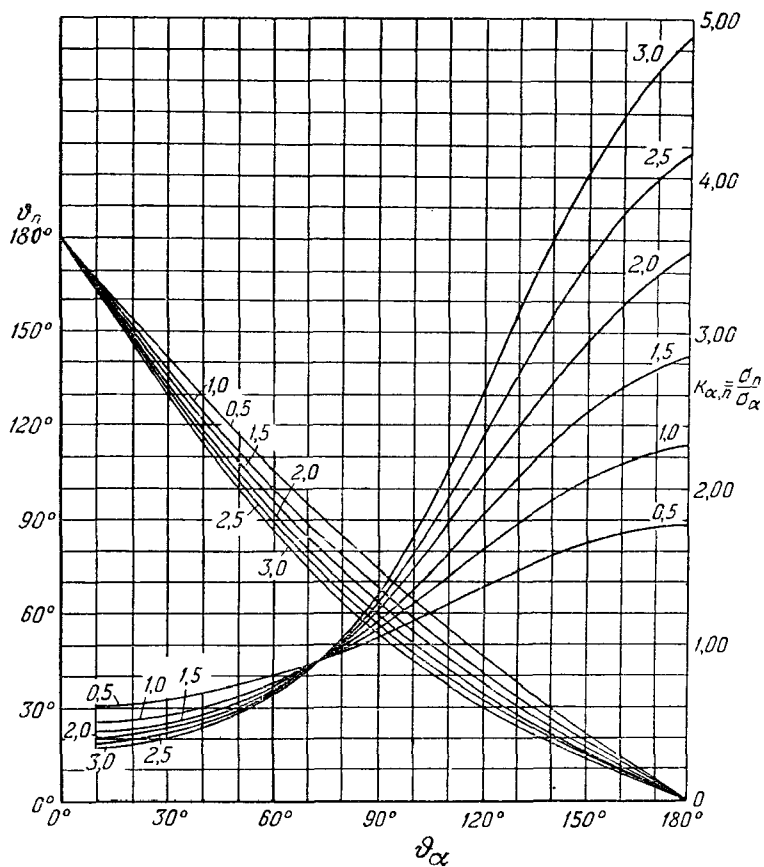


Рис. 2.

На рис. 3 дана зависимость кинетической энергии нейтронов от угла их испускания: $W_n = f(\vartheta_n)$. Числа около кривых на этих рисунках соответствуют энергии бомбардирующих дейтронов.

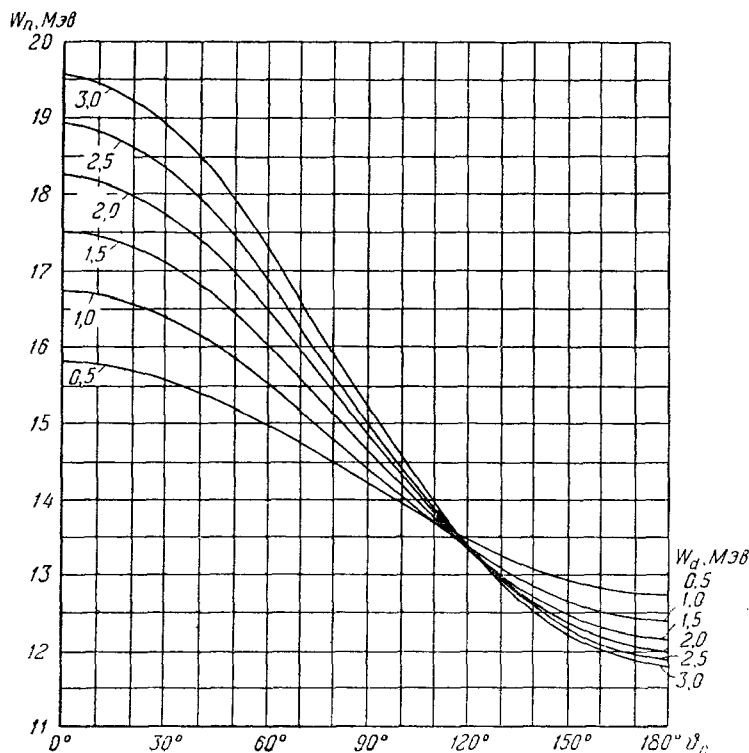


Рис. 3.

Взаимосвязь энергии нейтронов, испускаемых в перечисленных выше реакциях, с углами их вылета в Л- и Ц-системах и с энергией бомбардирующих частиц можно охарактеризовать при помощи номограмм, изображенных на рис. 4—8. На этих номограммах сплошные концентрические полуокружности радиусом $\sqrt{W_n}$ задают ряд значений энергии нейтронов W_n в Л-системе. Углы ϑ_n в Л-системе показаны сплошными радиальными линиями, пересекающими полуокружности энергии. Центры пунктирных (неконцентрических) полуокружностей с тем же радиусом $\sqrt{W_n}$ смещены вправо на величину $\sqrt{\frac{m_n}{2}} V$ от центра

сплошных полуокружностей и пересекают горизонтальную ось при разных значениях энергии бомбардирующих частиц — W_d или W_p . Угловые координаты точек на пунктирных полуокружностях дают значения углов ϑ_n в Ц-системе, а пунктирные радиальные линии задают геометрическое место точек с данным значением ϑ_n .

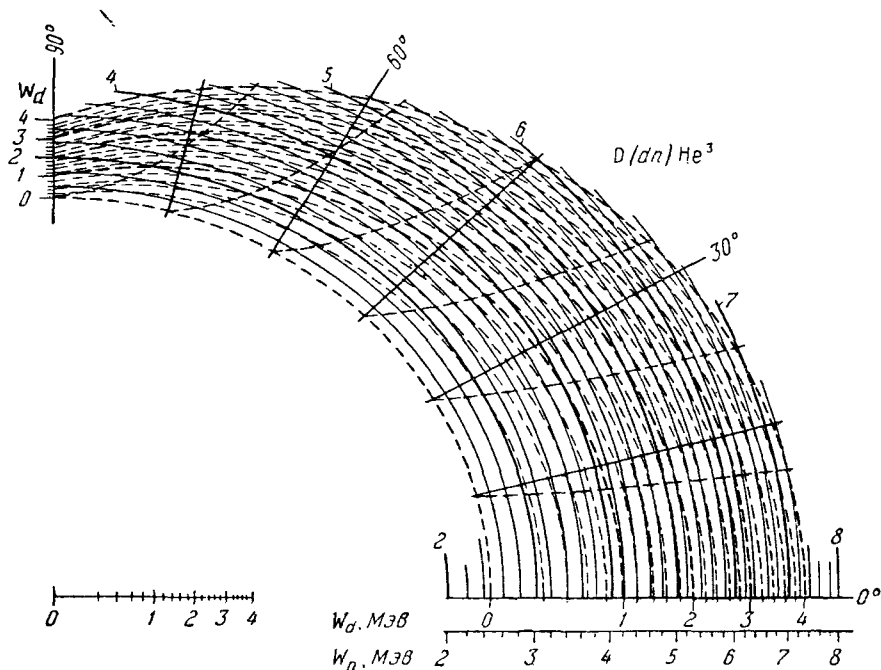


Рис. 4.

Приведем пример пользования номограммой. Пусть нам нужно найти энергию нейтрона W_n , испускаемого в реакции $D(d,n)He^3$ под углом $\vartheta_n = 60^\circ$, если энергия бомбардирующего дейтрона $W_d = 2$ Мэв. Находим на рис. 4 на горизонтальной шкале W_d величину 2 Мэв и следуем по соответствующей этой отметке пунктирной дуге вверх — до пересечения со сплошной радиальной прямой 60° . Из точки пересечения опускаемся вниз по сплошной дуге. Точка ее пересечения с горизонтальной осью энергии нейтронов дает $W_n = 4$ Мэв.

Последующие графики посвящены нескольким простейшим примерам взаимодействия элементарных частиц при более высоких энергиях. На рис. 9—13 приведены данные о рассеянии γ -квантов с энергией до 1000 Мэв на водороде (эффект Комптона

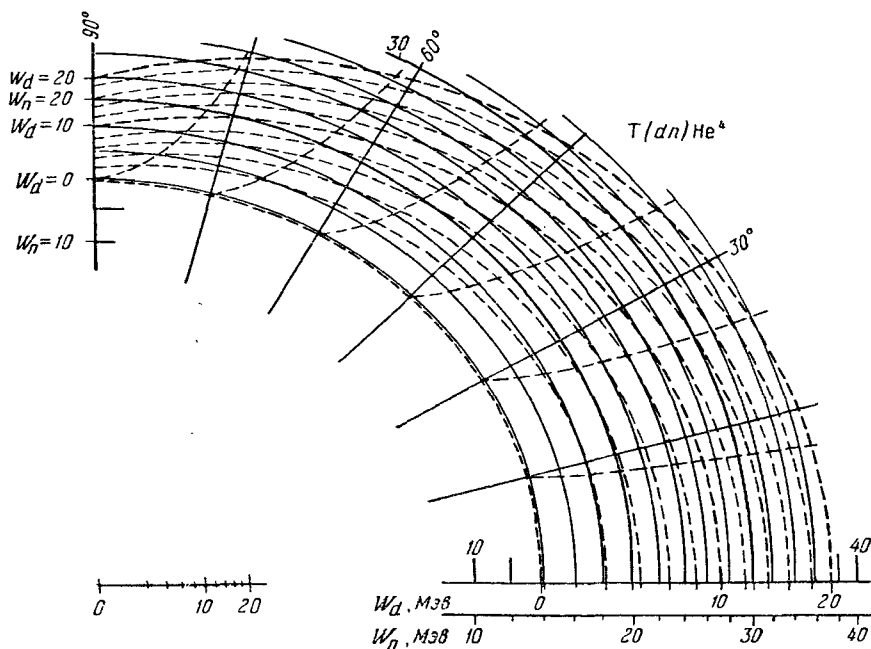


Рис. 5.

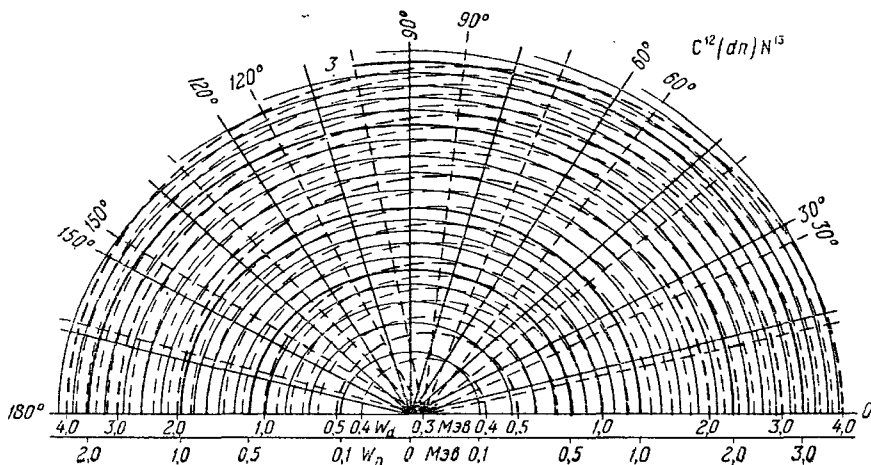


Рис. 6.

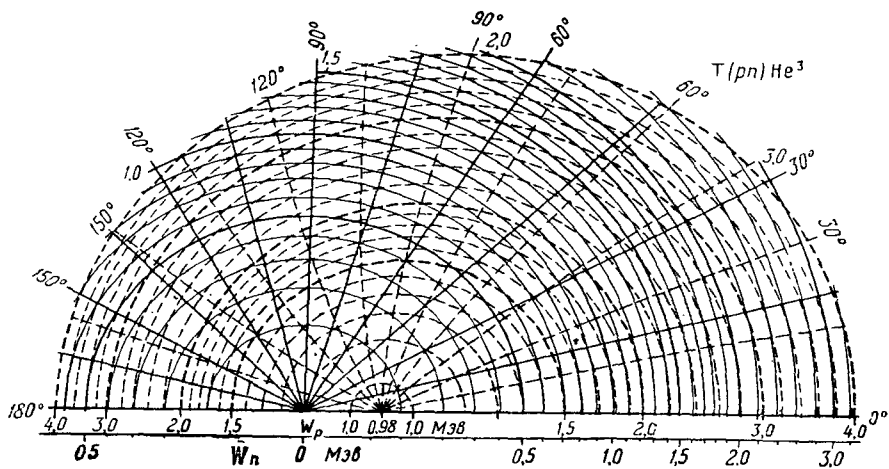


Рис. 7.

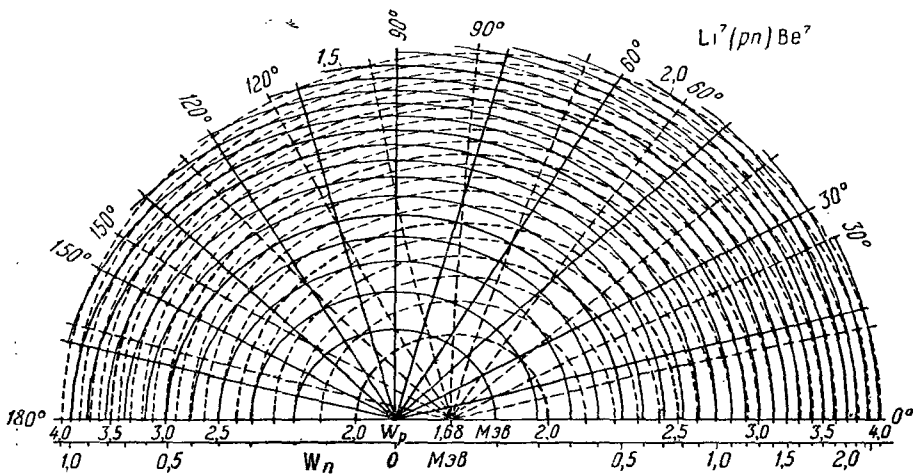


Рис. 8.

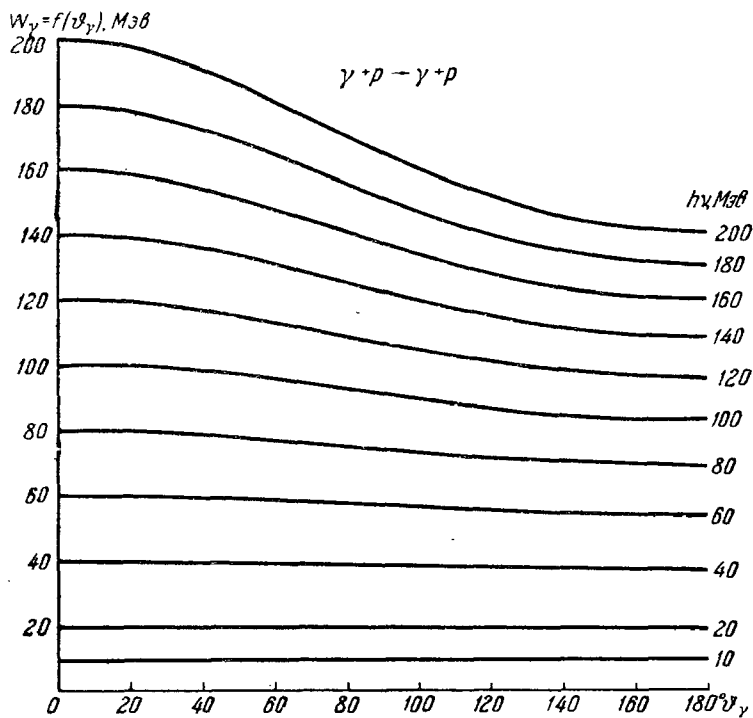


Рис. 9.

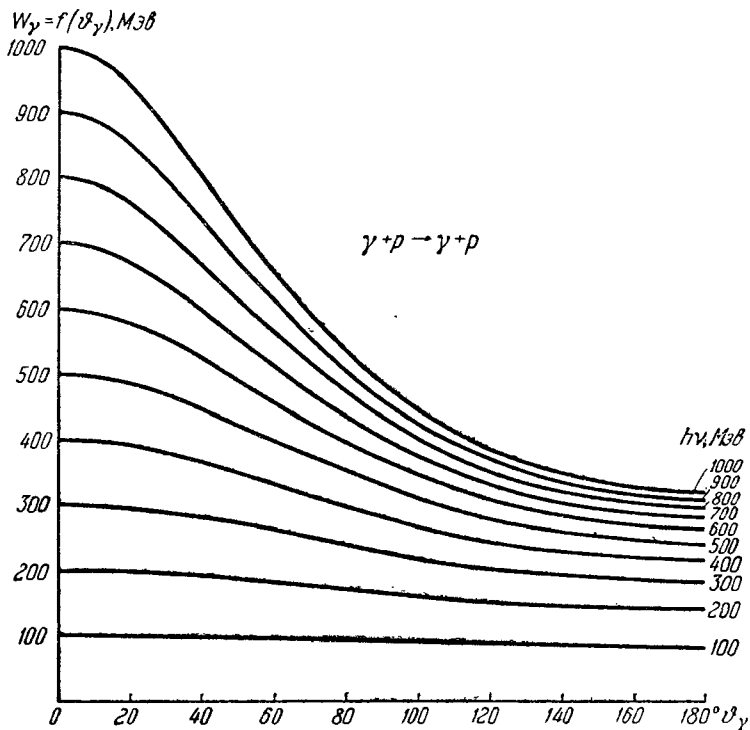


Рис. 10.

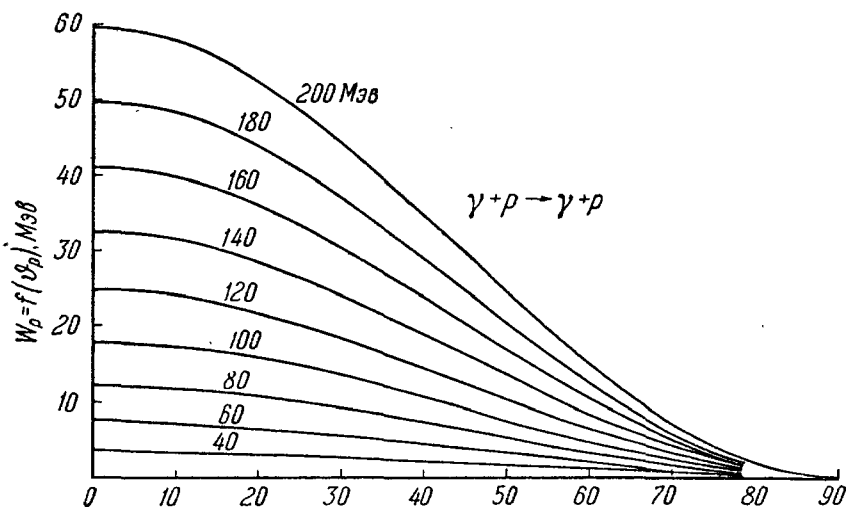


Рис. 11.

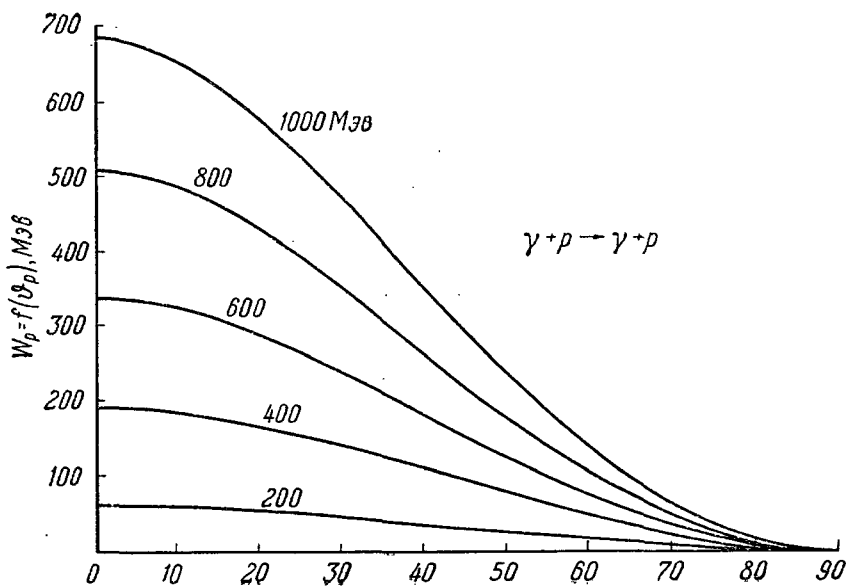


Рис. 12.

на протоне) — на первых двух графиках изображена зависимость энергии γ -квантов от угла их рассеяния, на следующих двух графиках — зависимость энергии протонов отдачи от угла их вылета и, наконец, на рис. 13 — связь углов вылета рассеянных γ -квантов и протонов отдачи. Числа около кривых на этих рисунках обозначают энергию первичных γ -квантов в Мэв. Ясно, что

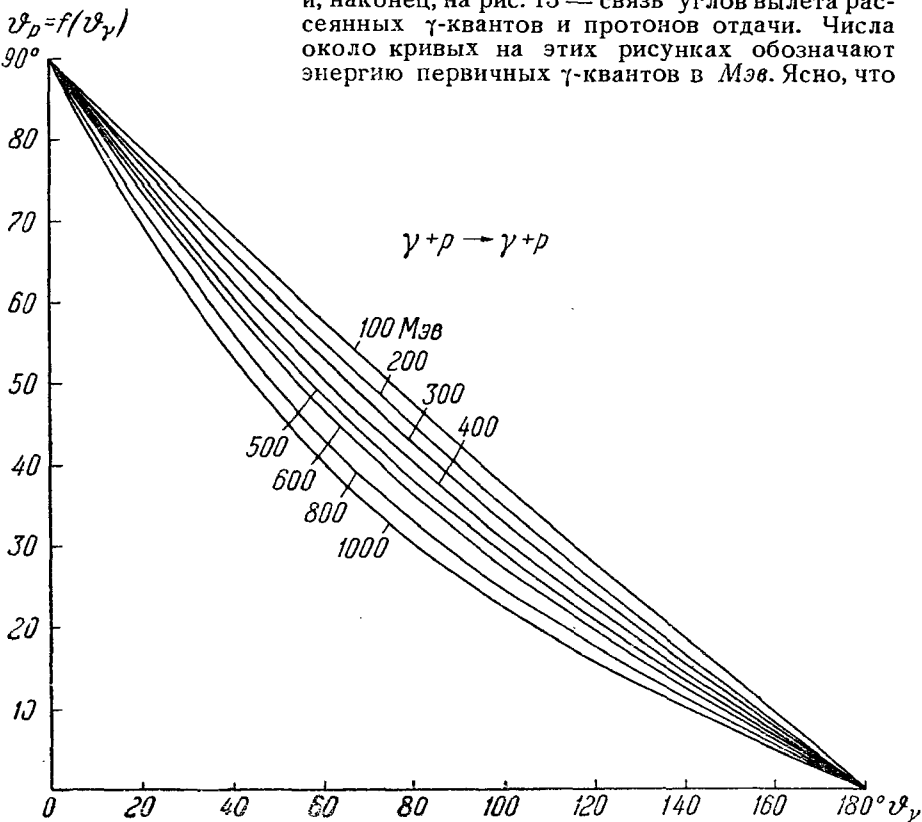


Рис. 13.

графики на рис. 9—13 применимы и к комптоновскому рассеянию на электронах, если уменьшить все значения энергии γ -квантов и протонов отдачи в $\frac{M}{m} \approx 1839$ раз.

На рис. 14—18 изображены аналогичные данные для реакции фоторождения π^+ -мезонов: $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$. Эти графики могут быть использованы и для кинематического анализа других реакций фоторождения мезонов ($\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$ и $\gamma + N \rightarrow \pi^0 + N$, где N — символ нуклона). На рис. 14 и 15 дана зависимость кинетической энергии π -мезонов от углов их испускания при

$$W_{\pi^+} = f(\vartheta_{\pi^+}), \text{ МэВ}$$

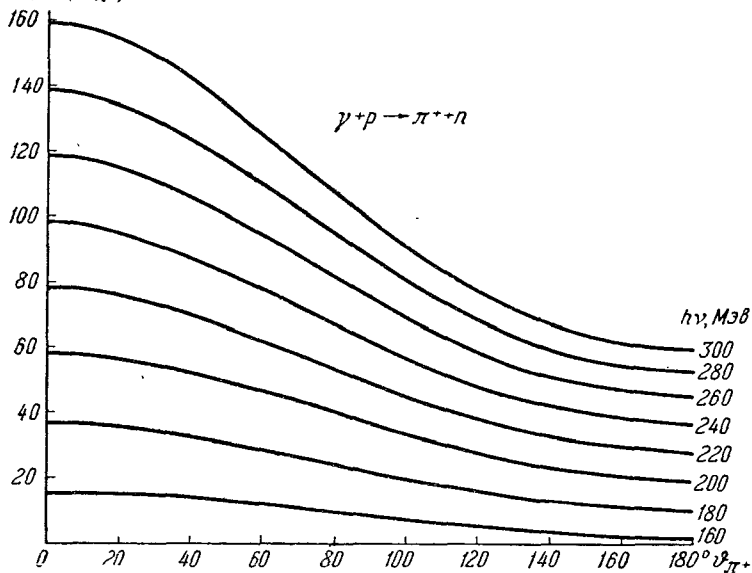


Рис. 14.

$$W_{\pi^+} = f(\vartheta_{\pi^+}), \text{ МэВ}$$

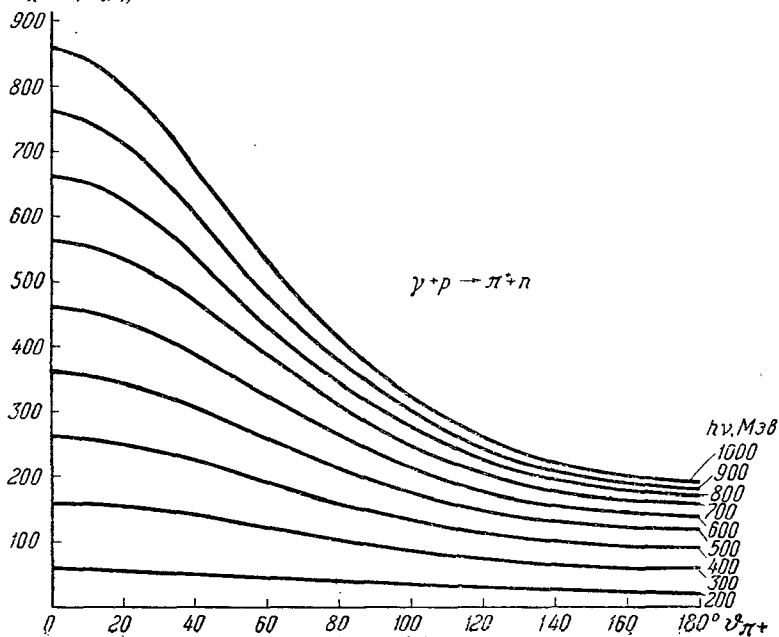


Рис. 15.

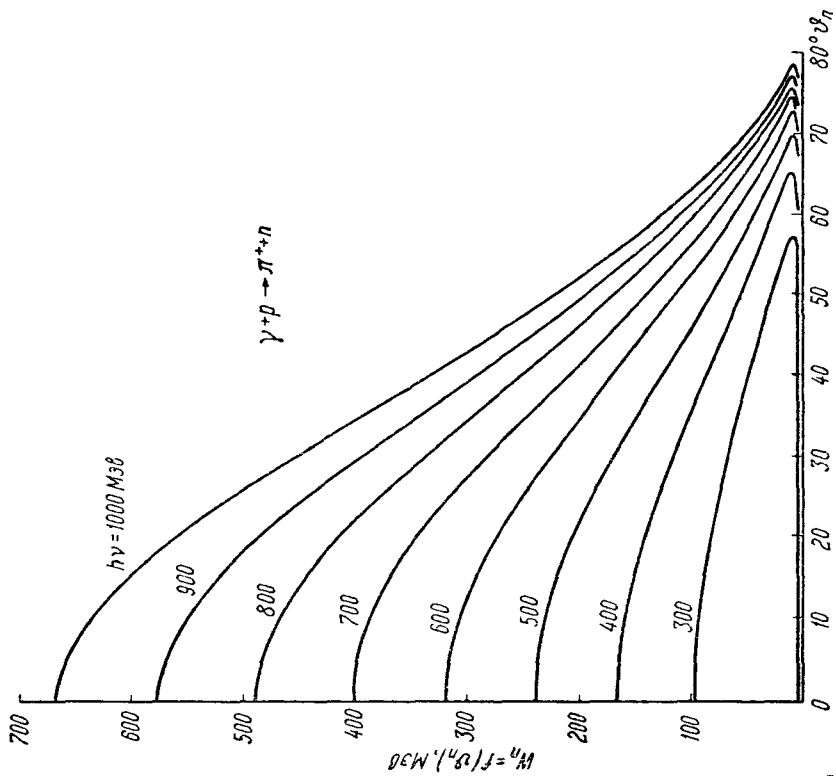


Рис. 17.

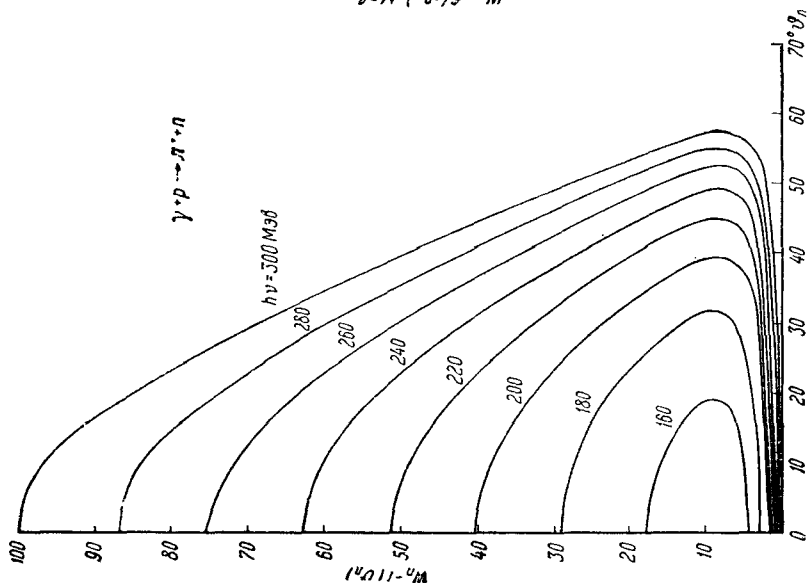


Рис. 16.

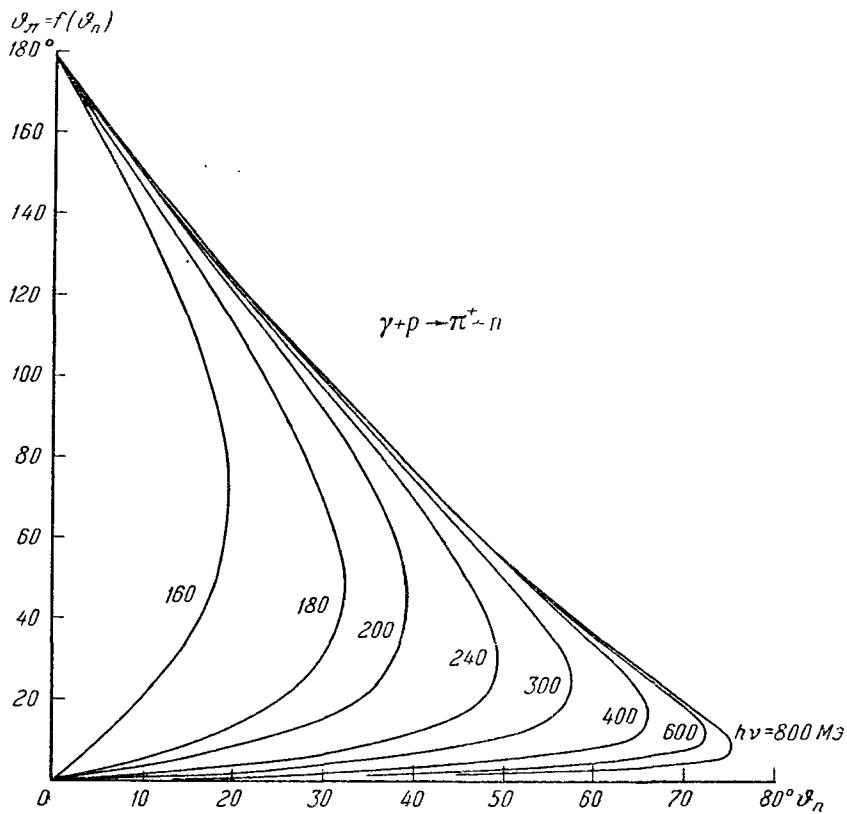


Рис. 18.

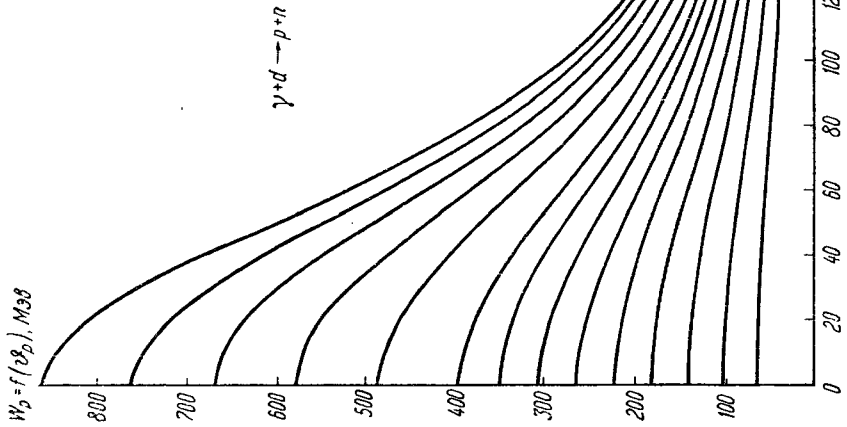


Рис. 20.

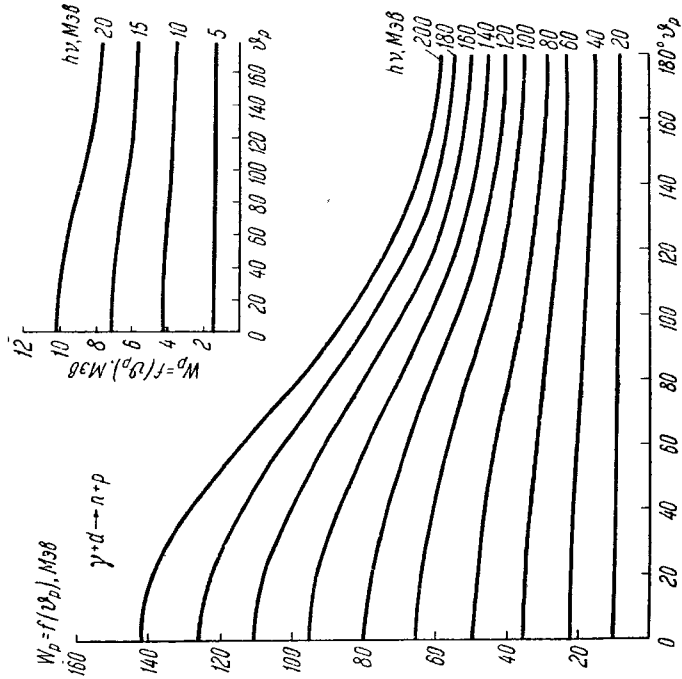


Рис. 19.

$h\nu = E_\gamma = 160 - 1000$ Мэв. Аналогичная зависимость энергии нуклонов от углов их вылета дана на рис. 16 и 17. На рис. 18 изображена связь углов испускания π -мезонов и нуклонов в процессах фоторождения π -мезонов.

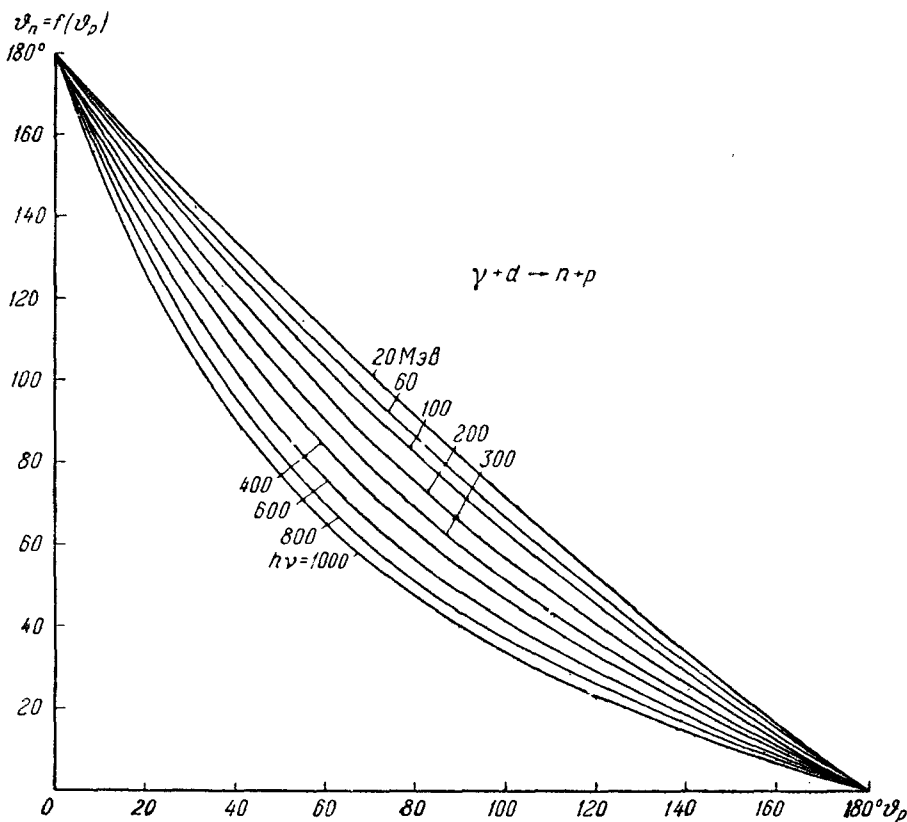


Рис. 21.

Следующие три рисунка (рис. 19—21) посвящены кинематике процесса фоторасщепления дейтрона при энергии γ -квантов, заключенной в пределах от 5 до 1000 Мэв.

Рис. 22—30 иллюстрируют упругое рассеяние нуклонов нуклонами (на примере pp -рассеяния — рис. 22—25) и упругое рассеяние π -мезонов нуклонами. Данные для pp -рассеяния приводятся в интервале энергий протонов от 20 Мэв до 10 Бэв, данные о πN -рассеянии — для π -мезонов с энергией от 20 Мэв

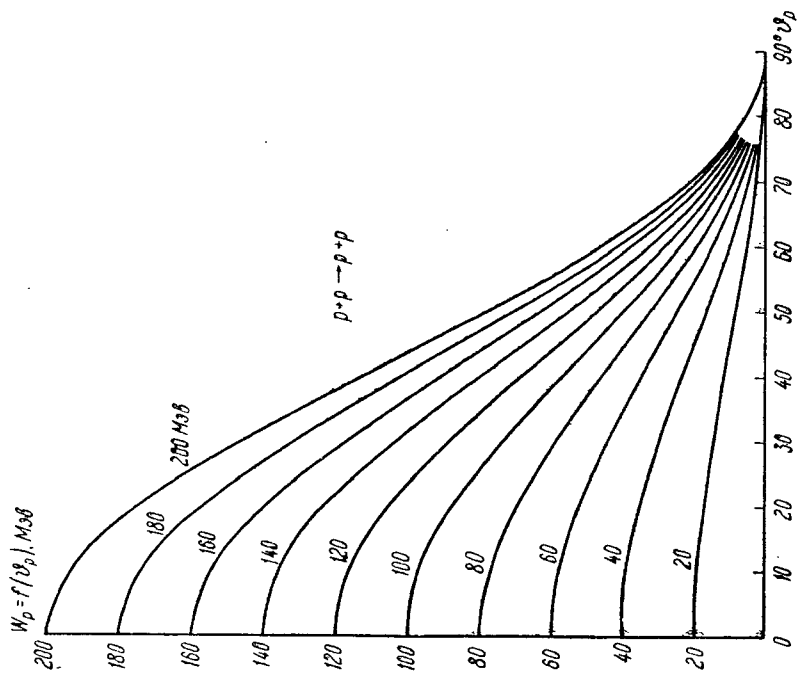


Рис. 22.

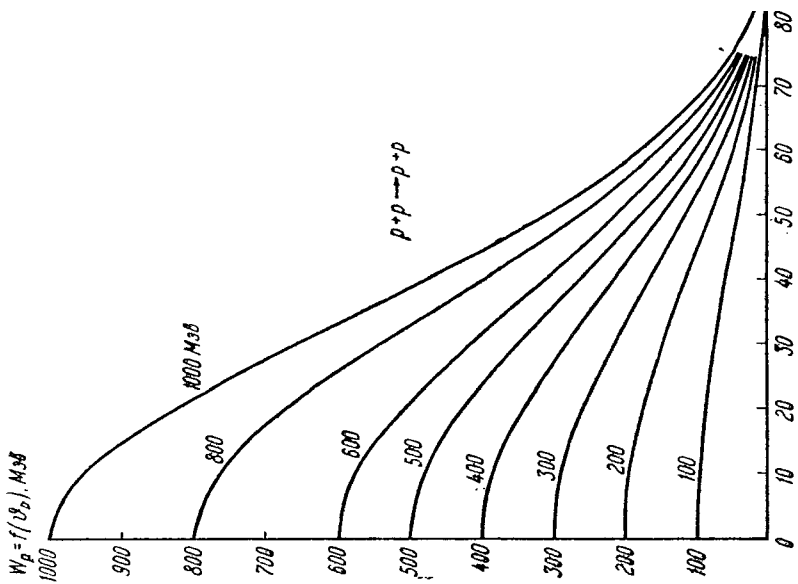


Рис. 23.

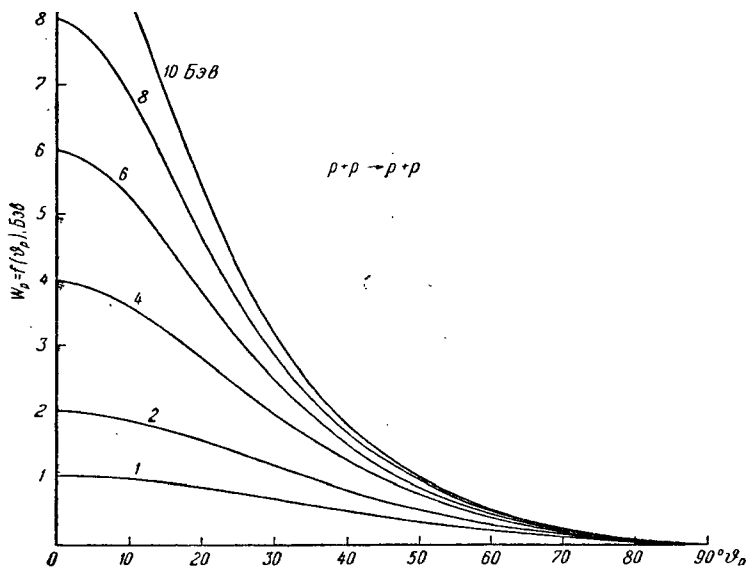


Рис. 24.

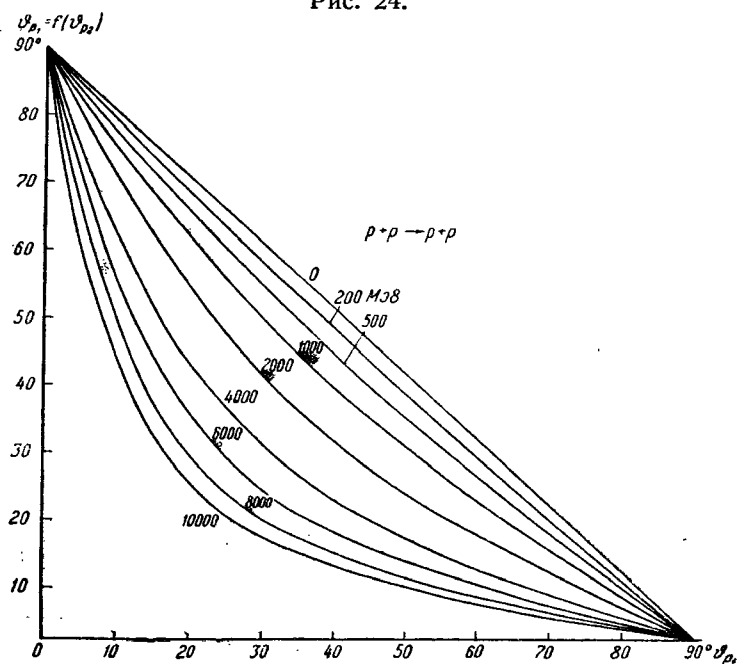


Рис. 25.

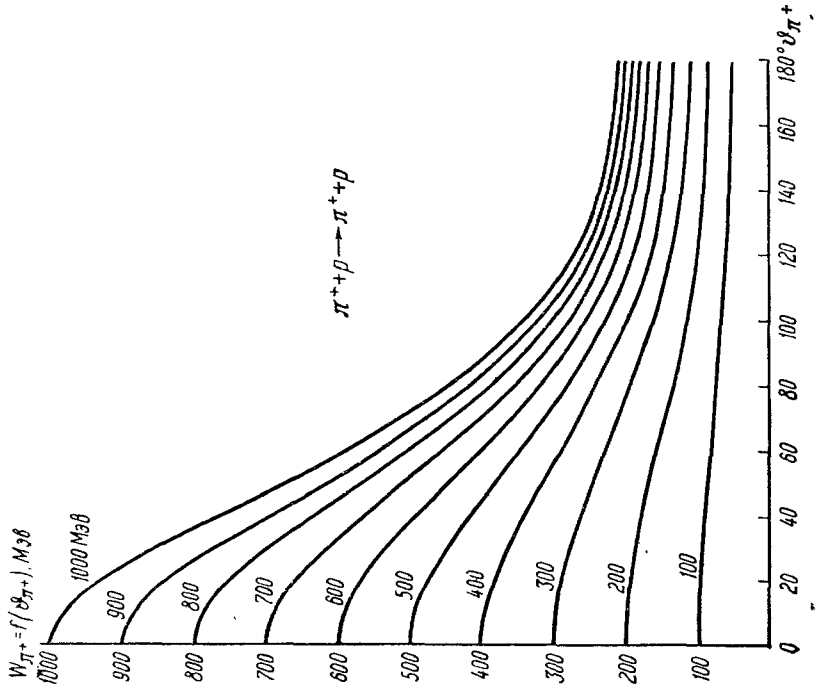


Рис. 27.

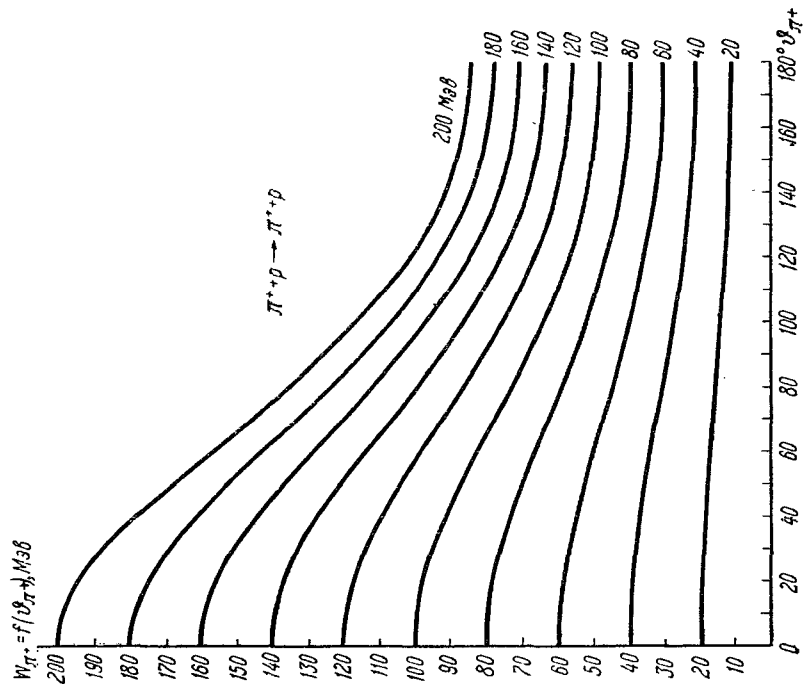


Рис. 26.

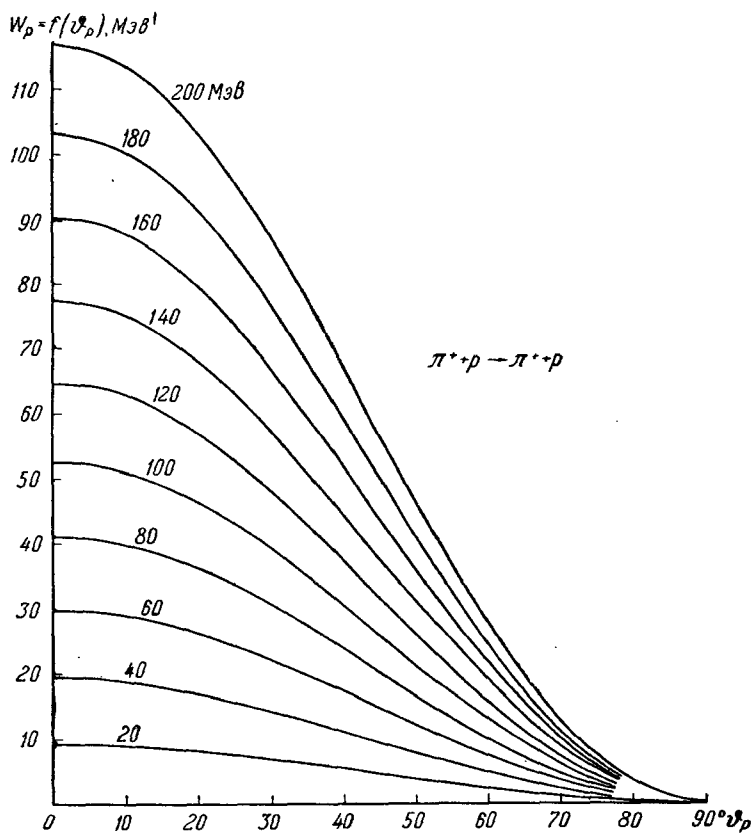


Рис. 28.

$W_p = f(\vartheta_p), \text{ МэВ}$

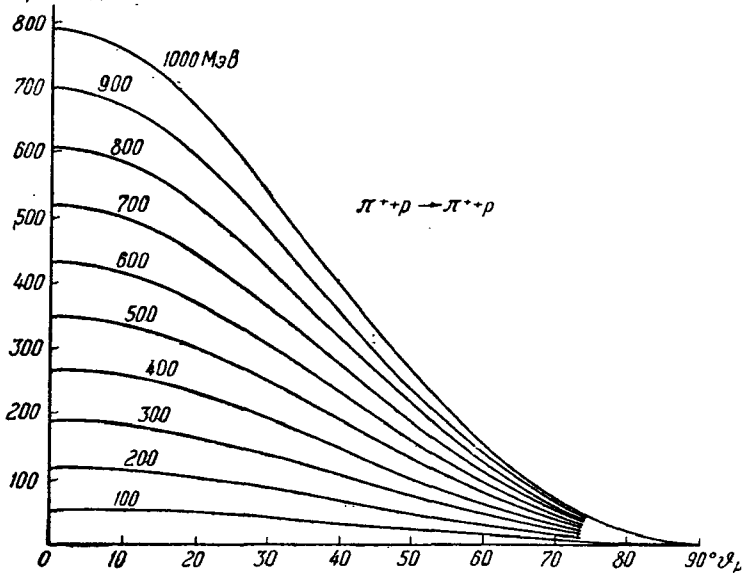


Рис. 29.

$\vartheta_{\pi^+} = f(\vartheta_p)$

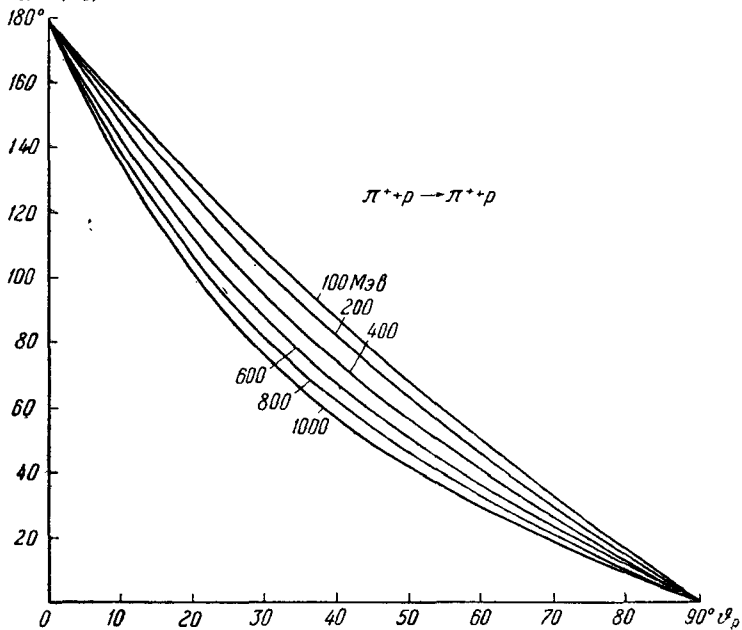


Рис. 30.

до 1 Бэв. Как и в предыдущих примерах, приводятся зависимости энергии каждой из частиц-продуктов взаимодействия от угла ее испускания и связь между углами вылета двух частиц. Числа у кривых на этих рисунках обозначают энергию падающих частиц.

На рис. 31 и 32*) изображены кинематические соотношения для реакции $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ в интервале энергий π^+ -мезонов 50—500 Мэв.

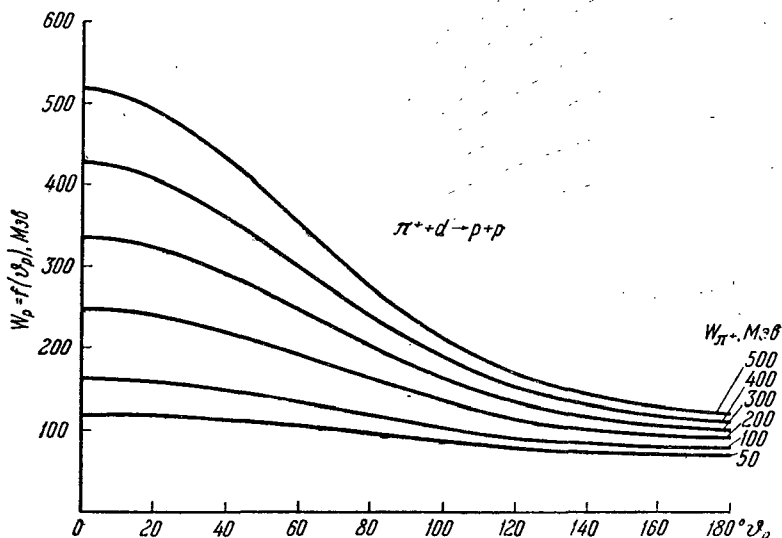


Рис. 31.

Следующие шесть рисунков (рис. 33—38) заимствованы из статьи Пердетти (Perdetti, Nuovo Cimento, III, № 5, 1956) и относятся к взаимодействию K -мезонов с протонами**).

*) Графики на рис. 9—32 построены специально для этой книги Б. Говорковым.

***) Кинематике взаимодействия K -мезонов с нуклонами посвящены подробные таблицы, изданные в 1958 г. в виде приложения к журналу «Nuovo Cimento» (VIII, Suppl. № 1, 1958). В них рассматривается кинематика реакций $K^- + p \rightarrow \Sigma^\pm + \pi^\mp$ и упругого рассеяния $K + p \rightarrow K + p$. Дана связь углов и энергии в Л-системе для обоих продуктов реакции при разных углах вылета π и K -мезонов в Ц-системе. Интервал изменения энергии первичных K -мезонов в этих таблицах от 5 до 200 Мэв (через 5 Мэв), а углов вылета $\tilde{\theta}$ от 0 до 180° (через 2,5°).

рис. 33—35 приведены кинематические характеристики упругого рассеяния $K + p \rightarrow K + p$, а именно — связь углов испускания K -мезонов и протонов в Л-системе с соответствующими углами в Ц-системе при энергии K -мезонов в Л-системе 50, 125 и 200 Мэв

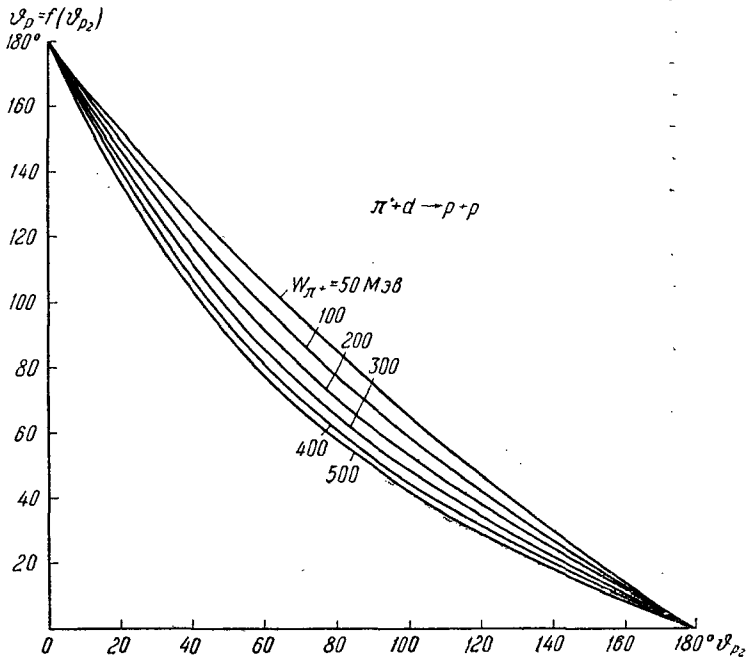


Рис. 32.

(рис. 33) и зависимость кинетической энергии K -мезонов и протонов от углов их испускания в Л-системе (рис. 34, 35) при первичной энергии 10—200 Мэв.

Рис. 36—38 иллюстрируют кинематику реакции $K + p \rightarrow \pi + \Sigma$ в области энергий K -мезонов от 60 до 160 Мэв, причем рис. 36 и 37 аналогичны рис. 33 и 34, а на рис. 38 кинетическая энергия Σ -гиперонов дана как функция углов вылета не этих частиц, а других продуктов реакции — π -мезонов.

Наконец на рис. 39, взятom из статьи Джемса и Салмерона (G. James, R. Salmeron, Phil. Mag. 46, 576, 1955), дана зависимость угла вылета Λ -частиц (сверху) и K -мезонов (внизу) в реакции $\pi + N \rightarrow K + \Lambda$ от обратного импульса этих частиц. Интервал импульсов первичных π -мезонов на этом рисунке от 1

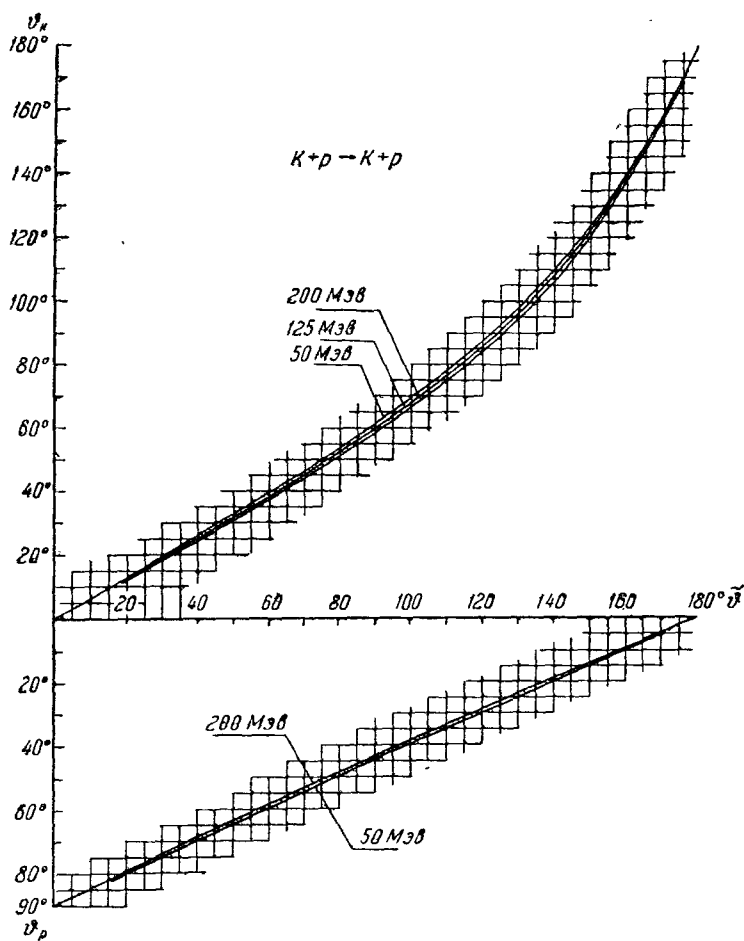


Рис. 33.

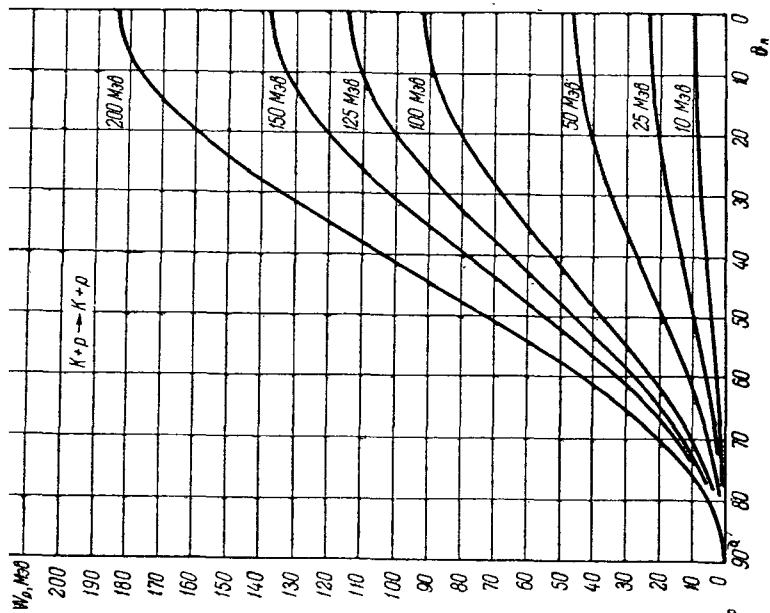


Рис. 35.

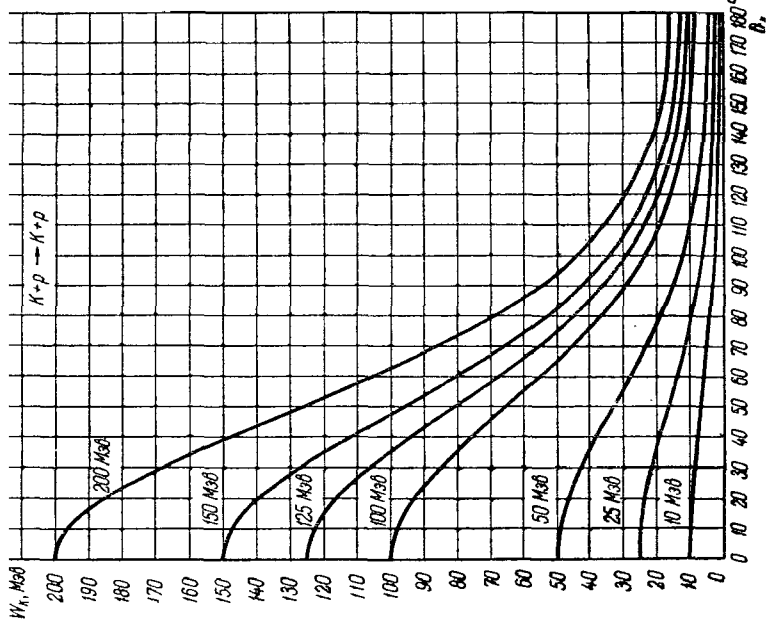


Рис. 34.

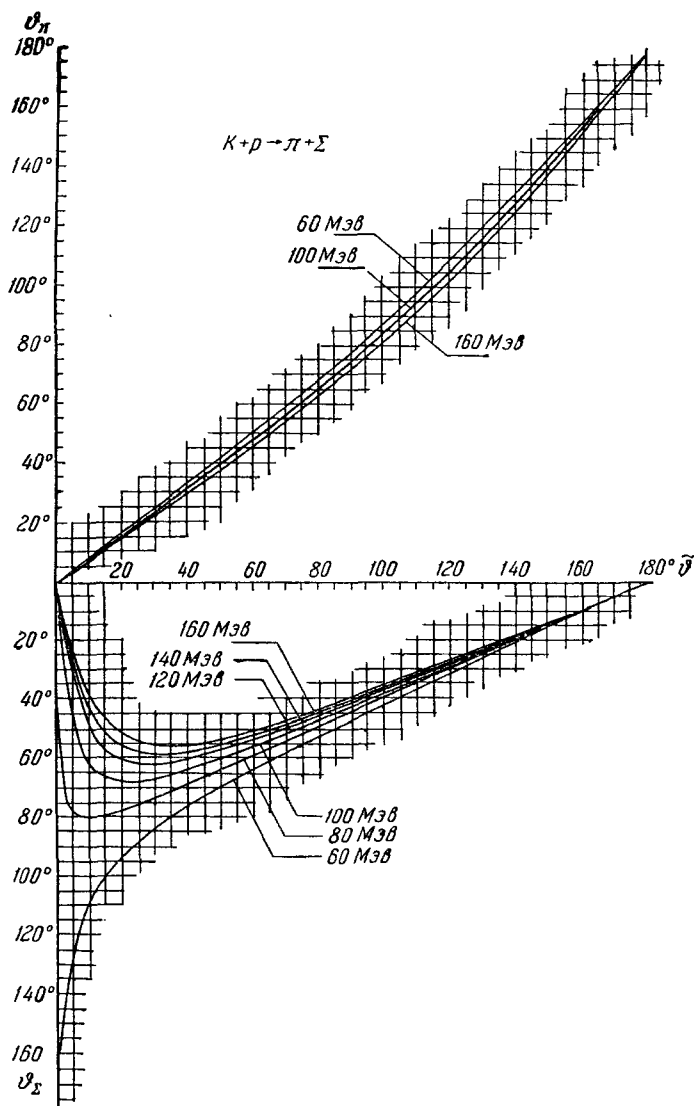


Рис. 36.

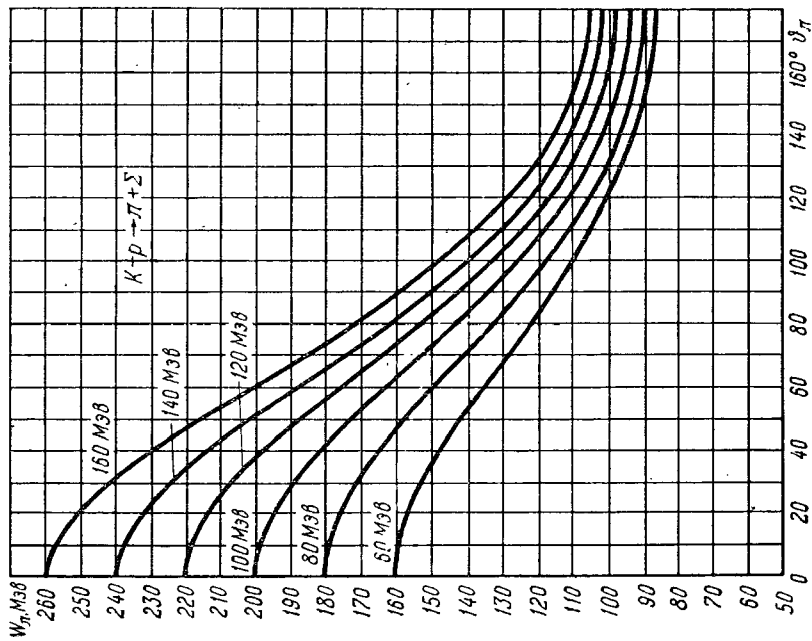


Рис. 37.

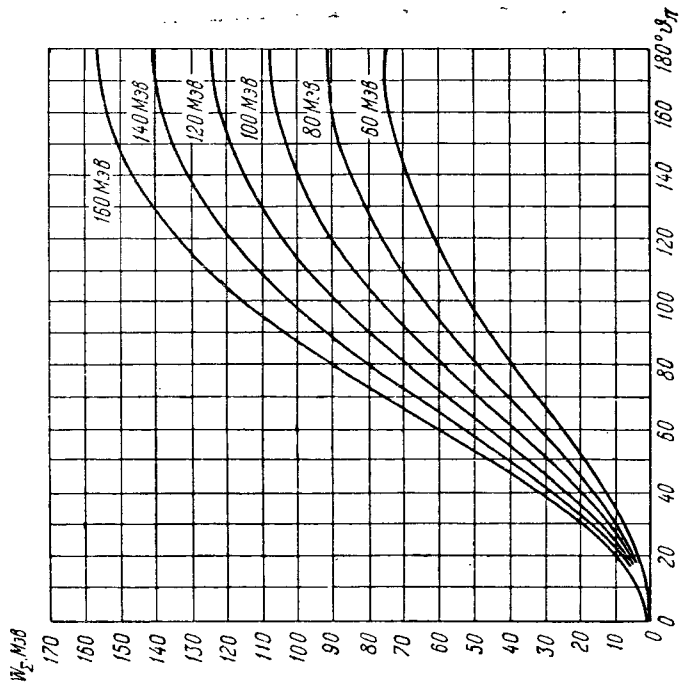


Рис. 38.

до 10 Бэв (числа у сплошных тонких кривых). Пунктирными линиями на этом рисунке обозначены различные значения углов вылета частиц — продуктов реакции в Ц-системе.

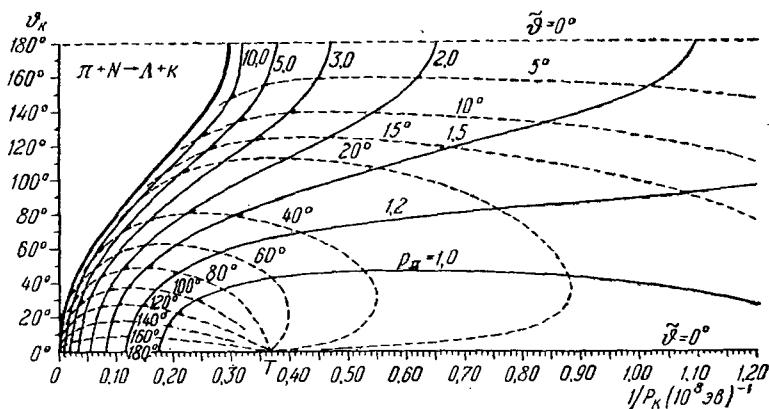
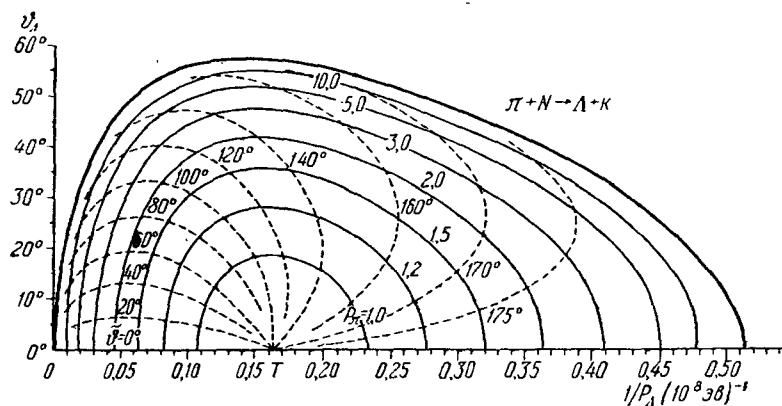


Рис. 39.

В заключение целесообразно снова повторить, что наша книга не претендует на роль полного справочника по кинематике ядерных взаимодействий, и поэтому приведенные в приложении примеры далеко не исчерпывают того, что необходимо в повседневной практике работ с космическим излучением или на ускорителях. Однако необходимые соотношения могут быть легко получены во всех случаях при помощи приводимых в основном тексте формул.

ПРИЛОЖЕНИЕ II *)
(КО ВТОРОЙ ЧАСТИ)

Таблицы коэффициентов W , Z , Z_γ и X

а) Вводные замечания

Ниже приведены таблицы коэффициентов W , Z , Z_γ и X и даны краткие пояснения к ним, касающиеся в основном интервалов изменения аргументов и принятого способа записи численного значения коэффициента. Все необходимые сведения, связанные с определением и свойствами коэффициентов W , Z , Z_γ и X , имеются в основном тексте книги.

Приводимые здесь числовые таблицы составлены на основании работ [30, 36, 37, 38]. Таблицы коэффициентов Z_γ составлены заново. Все таблицы были тщательно сверены, когда имелась такая возможность, с существующими таблицами. В сомнительных случаях коэффициенты вычислялись еще раз.

При подборе таблиц мы ставили перед собой задачу привести значения коэффициентов для наиболее важных и вместе с тем простейших случаев ядерных реакций, которые бы тем не менее охватывали широкий круг явлений (ядерные реакции со спином канала, не превышающим $3/2$, фотоядерные реакции и рассеяние фотонов на частицах со спином $1/2$, образование мезонов при столкновении частиц с суммарным спином, не превышающим $3/2$, фотообразование мезонов на частицах со спином $1/2$ и др.). К сожалению, нам не удалось обеспечить этими таблицами, главным образом из-за их значительного объема, весь материал книги. В ряде случаев (это в основном относится к возникновению поляризации частиц в ядерных реакциях и к реакциям с участием фотонов) при применении общих формул основного текста читателю придется воспользоваться более полными таблицами необходимых коэффициентов**), либо вычислить их самому. Для облегчения последней задачи в этом приложении, кроме основных таблиц коэффициентов W , Z , Z_γ и X , приведены некоторые вспомогательные таблицы и формулы. Сюда относятся таблицы коэффициентов векторного сложения $(1_1 0 | 1_2 0 | L_0)$ и $(1_1 - 1 | 2_0 | L_0)$, которые необходимы

*) Это приложение составлено А. И. Лебедевым и В. А. Петрунькиным.

**) Из более полных таблиц коэффициентов W и Z мы прежде всего укажем на обширные таблицы, составленные в лаборатории Ок-Ридж [30]. Таблицы коэффициентов W , Z и X имеются в отчетах лаборатории Чок-Ривер [37]; эти таблицы, к сожалению, приспособлены главным образом для анализа корреляций в ядерных реакциях. Область изменения переменных в них иная, чем в приводимых здесь. Коэффициенты W и X для довольно широкой области изменения аргументов можно найти соответственно в работах [38, 36] японских авторов. Коэффициенты, близкие к Z_γ , протабулированы в обзоре Биденхарна и Роуза [27] и в отчетах лаборатории Чок-Ривер [37].

до 10 Бэв (числа у сплошных тонких кривых). Пунктирными линиями на этом рисунке обозначены различные значения углов вылета частиц — продуктов реакции в Ц-системе.

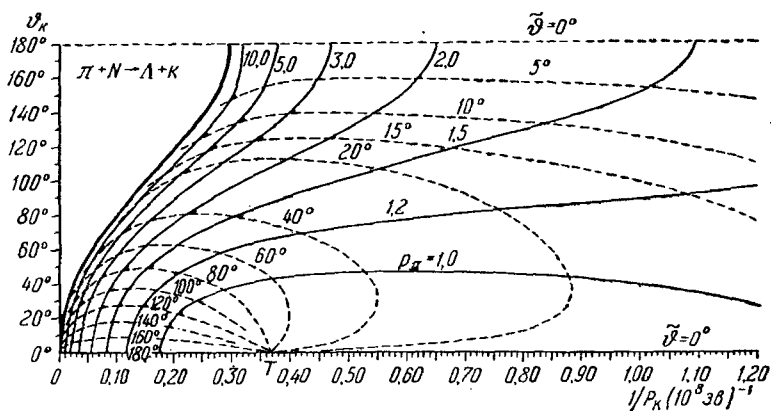
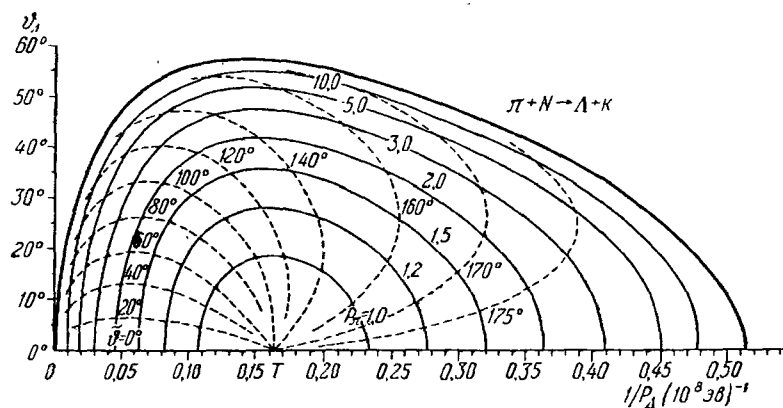


Рис. 39.

В заключение целесообразно снова повторить, что наша книга не претендует на роль полного справочника по кинематике ядерных взаимодействий, и поэтому приведенные в приложении примеры далеко не исчерпывают того, что необходимо в повседневной практике работ с космическим излучением или на ускорителях. Однако необходимые соотношения могут быть легко получены во всех случаях при помощи приводимых в основном тексте формул.

ПРИЛОЖЕНИЕ II *)
(КО ВТОРОЙ ЧАСТИ)

Таблицы коэффициентов W , Z , Z_{γ} и X

а) Вводные замечания

Ниже приведены таблицы коэффициентов W , Z , Z_{γ} и X и даны краткие пояснения к ним, касающиеся в основном интервалов изменения аргументов и принятого способа записи численного значения коэффициента. Все необходимые сведения, связанные с определением и свойствами коэффициентов W , Z , Z_{γ} и X , имеются в основном тексте книги.

Приводимые здесь числовые таблицы составлены на основании работ [30, 36, 37, 38]. Таблицы коэффициентов Z_{γ} составлены заново. Все таблицы были тщательно сверены, когда имелась такая возможность, с существующими таблицами. В сомнительных случаях коэффициенты вычислялись еще раз.

При подборе таблиц мы ставили перед собой задачу привести значения коэффициентов для наиболее важных и вместе с тем простейших случаев ядерных реакций, которые бы тем не менее охватывали широкий круг явлений (ядерные реакции со спином канала, не превышающим $\frac{3}{2}$, фотоядерные реакции и рассеяние фотонов на частицах со спином $\frac{1}{2}$, образование мезонов при столкновении частиц с суммарным спином, не превышающим $\frac{3}{2}$, фоторождение мезонов на частицах со спином $\frac{1}{2}$ и др.). К сожалению, нам не удалось обеспечить этими таблицами, главным образом из-за их значительного объема, весь материал книги. В ряде случаев (это в основном относится к возникновению поляризации частиц в ядерных реакциях и к реакциям с участием фотонов) при применении общих формул основного текста читателю придется воспользоваться более полными таблицами необходимых коэффициентов**), либо вычислить их самому. Для облегчения последней задачи в этом приложении, кроме основных таблиц коэффициентов W , Z , Z_{γ} и X , приведены некоторые вспомогательные таблицы и формулы. Сюда относятся таблицы коэффициентов векторного сложения $(l_1 0 l_2 0 | l 0)$ и $(l_1 - l_2 0 | l 0)$, которые необходимы

*) Это приложение составлено А. И. Лебедевым и В. А. Петрунькиным.

**) Из более полных таблиц коэффициентов W и Z мы прежде всего укажем на обширные таблицы, составленные в лаборатории Ок-Ридж [30]. Таблицы коэффициентов W , Z и X имеются в отчетах лаборатории Чок-Ривер [37]; эти таблицы, к сожалению, приспособлены главным образом для анализа корреляций в ядерных реакциях. Область изменения переменных в них иная, чем в приводимых здесь. Коэффициенты W и X для довольно широкой области изменения аргументов можно найти соответственно в работах [38, 36] японских авторов. Коэффициенты, близкие к Z_{γ} , протабулированы в обзоре Биденхарна и Роуза [27] и в отчетах лаборатории Чок-Ривер [37].

для вычисления коэффициентов Z и Z_γ по формулам (29.17) и (29.20) основного текста, таблица факториалов чисел, таблицы формул для вычисления коэффициентов векторного сложения и коэффициентов W . Во вспомогательных таблицах протабулирована также величина $\Delta(abc)$, которая определяется соотношением

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!(b+c-a)!(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}},$$

причем a , b и c удовлетворяют условию треугольника, и их сумма есть целое число. Очевидно, что величина $\Delta(abc)$ симметрична по отношению к любым перестановкам ее аргументов. С ее помощью можно записать явный вид коэффициента W :

$$W(abcd; ef) = \Delta(abe) \Delta(cde) \Delta(acf) \Delta(bdf) \omega(abcd; ef),$$

$$\omega(abcd; ef) =$$

$$= \sum_z \frac{(-1)^{a+b+c+d+z} (z+1)!}{(z-a-b-e)!(z-c-d-e)!(z-a-c-f)!(z-b-d-f)!} \times \\ \times \frac{1}{(a+b+c+d-z)!(a+d+e+f-z)!(b+c+e+f-z)!},$$

где z принимает лишь такие целые значения, которые не приводят к отрицательным аргументам факториалов в знаменателе. Коэффициент векторного сложения $(a0b0|c0)$ для целых a , b , c с четной суммой $a+b+c=2g$ также выражается через $\Delta(abc)$:

$$(a0b0|c0) = (-1)^{g+c} \cdot (2c+1)^{\frac{1}{2}} \Delta(abc) \frac{g!}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!}.$$

Для a , b , c , не удовлетворяющих этому условию, коэффициент $(a0b0|c0)$ обращается в нуль. В таблицах приведена величина $[\Delta(abc)]^{-2}$.

Наконец, для облегчения нахождения различных угловых распределений в пункте д) мы приводим явный вид полиномов Лежандра $P_L(\cos \theta)$ и нормированных присоединенных функций Лежандра с $M=1$ $\overline{P}_L^M(\cos \theta)$, которые входят соответственно в выражения для дифференциальных сечений и поляризации.

б) Расположение таблиц и область изменения аргументов

Все коэффициенты приведены в виде 57 таблиц.

Первые 15 таблиц (с I по XV включительно) содержат коэффициенты $W^2(l_1 J_1 l_2 J_2; sL)$, у которых s принимает значения $1/2$, 1 и $3/2$, а L пробегает целые значения от 0 до 4. В таблицах с $s=$

$= 1/2, 3/2, l_1$ и l_2 принимают целые значения от 0 до 5, а J_1 и J_2 изменяются от $1/2$ до $9/2$. В таблицах с $s = 1$ l_1 и l_2 принимают целые значения от 0 до 5, а J_1 и J_2 изменяются от 0 до 4.

Таблицы коэффициентов $Z^2(l_1 J_1 l_2 J_2; sL)$ имеют порядковые номера от XVI до XXXIII. Область изменения переменных такая же, как в случае коэффициентов W за исключением того, что L принимает дополнительное значение $L = 5$.

Коэффициенты $Z_7^2(l_1 J_1 l_2 J_2; sL)$, которые необходимы для анализа фотоядерных реакций, вычислены лишь для случая $s = 1/2$. Они содержатся в таблицах XXXIV—XXXVIII, в которых l_1, l_2 принимают целые значения от 0 до 3, а J_1, J_2 изменяются от $1/2$ до $5/2$. L пробегает целые значения от 0 до 4.

Коэффициенты W, Z и Z_7 представлены в виде отдельных таблиц для каждого значения s и L , причем для l_1, l_2, J_1 и J_2 приводятся значения, при которых соответствующие коэффициенты определены. Таблицы расположены в порядке возрастания сначала L (при данном s), а потом — s . Мы не приводим в таблицах коэффициенты W, Z и Z_7 с $s = 0$, так как обращение s в нуль существенно упрощает общие выражения для этих коэффициентов [см. формулы (29.10), (29.18) и (29.21) основного текста], и читатель без большой затраты труда сможет вычислить их сам.

Значения коэффициентов $X^2(abc, def, ghk)$ приведены в виде 6 таблиц. В первых четырех таблицах с XXXIX по XLII $g = h, c = f = 1/2, k = 1, a$ и d принимают полуцелые значения от $1/2$ до $7/2, b$ и e — целые значения от 0 до 4. Таблицы расположены в порядке возрастания g , которое изменяется от 1 до 4, принимая целые значения. Таблицы XLIII и XLIV, соответственно, содержат коэффициенты $X^2(ab1, ab2, kk1)$ и $X^2(alc, a3c, kk1)$, где a и b изменяются от 1 до 3, принимая целые и полуцелые значения, c пробегает целые и полуцелые значения от 1 до $5/2, k$ принимает значения 2 и 4.

Вспомогательные таблицы начинаются с таблиц величины $[\Delta(abc)]^{-2}$. В таблице XLV a, b и c являются целыми числами, причем a и b принимают значения от 1 до 8, а c изменяется от 0 до 6. В таблице XLVI a и b являются полуцелыми и изменяются в пределах от $1/2$ до $11/2; c$ принимает все возможные значения. Коэффициенты векторного сложения $(l_1 0 l_2 0 | L 0)^2$ для l_1, l_2 , принимающих значения от 0 до 6, помещены в таблице XLVII. Таблица XLVIII содержит коэффициенты $(l_1 - 1 l_2 1 | L 0)^2$ для l_1 и l_2 , равных 1, 2 и 3. В таблице XLIX приведены факториалы чисел от 1 до 24 включительно.

Иногда для получения значений коэффициентов $X, (l_1 0 l_2 0 | L 0), (l_1 - 1 l_2 1 | L 0)$ и величины $\Delta(abc)$, которых нет в приводимых здесь таблицах, достаточно воспользоваться свойствами симметрии этих коэффициентов.

Наконец, таблицы L—LIII и LIV—LVII, соответственно, содержат формулы для вычисления коэффициентов векторного сложения $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j m)$ и коэффициентов $W(l_1 J_1 l_2 J_2; sL)$ для j_2 и s , принимающих значения $1/2, 1, 3/2$ и 2.

в) Способ записи численных значений коэффициентов

Обращаем особое внимание читателя на то обстоятельство, что во всех численных таблицах, за исключением таблицы факториалов чисел, приводятся квадраты значений коэффициентов. Если сам коэффициент является отрицательной величиной, то перед его квадратом стоит значок \ast .

Вычисленные значения квадратов коэффициентов являются рациональными дробями, которые за редким исключением для рассмотренных пределов изменения аргументов содержат только простые множители, не больше чем 19. Обычно в приложениях необходимо умножить несколько таких рациональных дробей, чтобы найти численный коэффициент при полиноме Лежандра $P_L(\cos \theta)$ или при нормированной присоединенной функции Лежандра $\overline{P}_L^1(\cos \theta)$. Эта операция упрощается, если вместо самой дроби писать лишь показатели степеней тех простых чисел, на которые раскладывается числитель и знаменатель последней. Показатели степеней простых чисел записываются в следующем порядке: на первом месте пишется степень двойки, на втором — степень тройки, на третьем — степень пятерки и т. д. Если следующее по порядку простое число отсутствует в разложении, то вместо него пишется нуль. Отрицательные степени простых чисел отмечаются подчеркиванием снизу. Для более быстрой ориентации показатели степени простых чисел первого десятка отделяются запятой от остальных показателей. Если в разложении встречается простое число, большее 19, то оно записывается справа в скобках в явной форме в соответствующей степени. Если показатель превышает десять, то пишется только величина превышения вместе с черточкой над ней. Для единицы принято обозначение в виде e . Такую запись мы будем называть представителем числа. Например, представителем числа 30 будет $1\bar{1}1$, так как $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \rightarrow 1\bar{1}1$. Приведем еще ряд примеров:

$$198 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \rightarrow 1300,1$$

$$65/7056 = 2^{-4} \cdot 3^{-2} \cdot 5^1 \cdot 7^{-2} \cdot 11^0 \cdot 13^1 \rightarrow \underline{4212},01$$

$$1 \rightarrow e$$

$$6144 = 2^{11} \cdot 3^1 \rightarrow \bar{1}1$$

$$50410/17787 = 2^1 \cdot 3^{-1} \cdot 5^1 \cdot 7^{-2} \cdot 11^{-2} \cdot (71)^2 \rightarrow \underline{1112},2 \cdot (71)^2.$$

Умножение чисел выполняется посредством сложения их представителей:

$$1260 \cdot 1/7 \cdot 1/210 \rightarrow 2211 + \underline{0001} + \underline{1111} = + \begin{array}{r} 2211 \\ 0001 \\ 1111 \\ \hline 1101 \end{array} \rightarrow 6/7$$

$$2/7 \cdot 252 \cdot 1/18 \longrightarrow 100\underline{1} + 2201 + \underline{12} = + \frac{1001}{\frac{12}{2} \longrightarrow 4}$$

Незаполненные ячейки и пропуски в таблицах означают, что соответствующие коэффициенты либо не существуют (то есть нарушены какие-либо условия определения коэффициента), либо равны нулю.

г) Краткое правило для получения из таблиц численного значения коэффициента

Чтобы получить численное значение самого коэффициента, нужно число из таблицы перевести в обычное представление согласно правилу $abcd, e \dots = 2^a \cdot 3^{-b} \cdot 5^{10+c} \cdot 7^d \cdot 11^e \dots$ и из полученного числа извлечь корень квадратный; если перед числом в таблице стоит значок *, то для корня берется отрицательное значение.

д) Функции Лежандра

Для удобства читателей мы приведем здесь несколько формул для функций, через которые выражаются различные угловые распределения в ядерных реакциях.

Нормированная сферическая гармоника определяется соотношением

$$Y_{LM}(\theta, \varphi) = \overline{P}_L^M(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iM\varphi},$$

где $\overline{P}_L^M(x)$ — нормированная присоединенная функция Лежандра. Она следующим образом связана с присоединенной функцией $P_L^M(x)$:

$$\overline{P}_L^M(x) = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{2} \frac{(L-M)!}{(L+M)!}} P_L^M(x),$$

которая в свою очередь определяется формулой

$$P_L^M(x) = (1-x^2)^{\frac{M}{2}} \frac{1}{2^L L!} \frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}} (x^2-1)^L.$$

Для $M > 0$ $P_L^M(x)$ выражается через обычный полином Лежандра $P_L(x)$

$$P_L^M(x) = (1-x^2)^{\frac{M}{2}} \frac{d^M}{dx^M} P_L(x),$$

причем

$$P_L(x) = \frac{1}{2^L L!} \frac{d^L}{dx^L} (x^2 - 1)^L.$$

Обращаем внимание на сделанный при определении $\overline{P_L^M}(x)$ выбор фазы нормировочного множителя. В обычной теории сферических функций нормировочный множитель не содержит $(-1)^M$. Здесь же мы отнесли $(-1)^M$ к $\overline{P_L^M}(\cos \theta)$, чтобы наше определение сферической гармоники находилось в согласии с определением Вигнера [12]. $\overline{P_L^M}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{P_L^M}(x) = (-1)^M \overline{P_L^{-M}}(x),$$

откуда

$$Y_{LM}^*(\theta, \varphi) = (-1)^M Y_{L, -M}(\theta, \varphi).$$

Выпишем явный вид $P_L(x)$ и $\overline{P_L^1}(x)$ для L , принимающих целые значения от 0 до 4 включительно ($x = \cos \theta$):

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x = \cos \theta,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9),$$

$$\overline{P_1^1}(x) = -\sqrt{\frac{3}{4}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta,$$

$$\overline{P_2^1}(x) = -\sqrt{\frac{15}{4}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x = -\sqrt{\frac{15}{16}} \sin 2\theta,$$

$$\overline{P_3^1}(x) = -\sqrt{\frac{21}{32}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} (5x^2 - 1) = -\sqrt{\frac{21}{512}} (5 \sin 3\theta + \sin \theta),$$

$$\begin{aligned} \overline{P_4^1}(x) &= -\sqrt{\frac{45}{32}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} (7x^3 - 3x) = \\ &= -\sqrt{\frac{45}{2048}} (7 \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta). \end{aligned}$$

Таблица I

$$W^2(l_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 0)$$

J_2	l_2	J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5		
$1/2$	0												
	1		$*11$										
$3/2$	1												
	2			21	$*201$								
$5/2$	2												
	3							111	$*1101$				
$7/2$	3												
	4									3001	$*32$		
$9/2$	4												
	5											121	$*1010,1$

$$W^2(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} \ 1)$$

J_2	J_1	$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		l_1	l_2	0	1	2	3	2	3	4	5
$1/2$	0										
	1	11	02		11	$*21$					
$3/2$	1	11	$*22$		$*321$	311	201				
	2		$*21$		311	322	$*212$	$*111$			
$5/2$	2				201	$*212$	$*0221$	1211	1101		
	3					$*111$	1211	1212	$*3102$	$*3001$	
$7/2$	3						1101	$*3102$	$*5302$	5201	32
	4							$*3001$	5201	$*341$	$*121$
$9/2$	4								32	$*341$	$*1420,1$
	5									$*121$	$1220,1$ $0320,2$

$$W^2(l_1 l_2 J_3; \frac{1}{2} 2)$$

J_2	J_1	$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$1/2$	0				101	101					
	1		21	201	*021	*021	*12				
$3/2$	1		21	*301	*2211	*2211	1201	2001			
	2	101	*201	*301	*3021	202	0011	*3011	*301		
$5/2$	2	101	*021	*2211	202	112	*1111	*2111	231	13	
	3		*12	1201	0011	*1111	*0002	3002	3321	*0311	*1011
$7/2$	3			2001	*3011	*2111	3002	5022	*5101	*3111,1	2011,1
	4				*301	231	3321	*5101	*5300,1	331	2111,1
$9/2$	4					13	*0311	*3111,1	331	0321	*1120,1
	5						*1011	2011,1	2111,1	*1120,1	*1020,21

$$W^3 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 3 \right)$$

J_2	l_2	J_1	$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
			0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$1/2$	0						1001		1001			
	1					12	1201		*3001		*31	
$3/2$	1				201	021	*2211	4101	4101	42	22	
	2		201		102	*102	*2111	4001	4001	41	*212	*102
$5/2$	2			12	*102	*102	0111	3001	3001	*33	*0320,1	1020,1
	3	1001		1201	*2111	0111	1112	*2002	*2002	*2301,1	1301	0001,1
$7/2$	3	1001		*3001	4101	4001	*2002	*4002,1	*4002,1	4101	2101	*3001,1
	4			*31	42	41	*2301,1	4101	4101	431	*231	*3110,11
$9/2$	4				*212	*0320,1	1301	2101	2101	*231	*1320,01	0120,1
	5				*102	1020,1	0001,1	*3001,1	*3001,1	*3110,11	0120,1	1022,2

W² (I₁J₁I₂J₂; 11)

J ₂ \ J ₁ I ₂	0		1		2		3		4	
	I ₁	I ₂	0	1	2	3	1	2	3	4
0	1	02̄	02̄	02̄	02̄	02̄				
1	0	02̄	02̄	02̄	02̄	02̄	02̄			
	1	02̄	02̄	*22̄	*22̄	*201̄	*22̄			
	2	02̄	02̄	*22̄	*201̄	202̄	202̄	002̄		
2	1		02̄	*22̄	222̄	202̄	*201̄	002̄		
	2			*201̄	202̄	22̄	202̄	*022̄	002̄	
	3				002̄	*022̄	*3211̄	0222̄	0202̄	0002̄
3	2				*022̄	*022̄	*3211̄	*3211̄	0202̄	0002̄
	3				*3211̄	0202̄	0202̄	0202̄	4202,2̄	*4002̄
	4					0002̄	*0002̄	*4002̄	*4111̄	4402̄
4	3							0002̄	*4111̄	*4111̄
	4								44̄	4420,0002̄
	5							04̄	*042̄	*3120,1̄

$W^2(I_1, I_2, J_2; 12)$

$J_1 \backslash J_2$		1		2			3				4		
		0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	
J_2	I_1												
	I_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	4	5
0	1				011	011	011						
1	0			011		011	011						
	1		22	201	201	221	*021	*021	*1201				
	2		201	2121	*202	*2121	*112	0121	0111	0011			
2	1	011	201	*202	2121	*2121	0121	*112	0111		0011		
	2	011	011	*2121	*2121	*202	1021	1021	1011	*1111	*1111	*13	
	3	011	*021	*112	0121	1021	3122	*0022	*1112	*1112	1212	1301	0201
3	2		011	*021	0121	1021	*0022	3122	*1112	1212	*1112	1301	
	3		*1201	0111	0111	1011	*1112	*1112	*4202	4222	4222	4311,01	*1211
	4			0011		*1111	*1112	1212	4222	4322,1	*4202	*4211,1	*121
4	3				0011	*1111	1212	*1112	4222	*4202	4322,1	*4211,1	1311,1
	4				*13		1301	1301	4311,01	*4211,1	*4211,1	4420,002	1221,1
	5				0201		0201		*1211	*121	1311,1	1221,1	3321,21

$W^2(L_1, L_2, J_2; 13)$

$J_2 \backslash J_1$	0		1		2			3			4			
	l_1	l_2	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1						0101	0101	0101	0101				
1	0					0101		0101		0101		0101		
	1					021	1201	3201	*3001	*3001	*3001	*3001	*331	
	2				002	112	*0111	1021	*3001	*3001	*3001	3201	311	021
2	1				002	112	*0111	1021	*3001	3201	*3001	*3001	311	
	2		021	112	112	*0121	*0121	*3011	*3011	3211	3211	3211	3322	*022
	3		0101	1201	1021	*0111	*0121	*0112	2022	1002	1202,1	*1202	*1311,1	*2211
3	2	0101		1201	*0111	1021	*0121	2022	*0112	1002	*1202	1202,1	*1311,1	0211,1
	3	0101	0101	3201	*3001	*3001	*3011	1002	1002	2002	*2202,1	*2202,1	*2311	1211,1
	4	0101		*3001	*3001	3201	3211	1202,1	*1202	*2202,1	*2312,1	2202	2201	1201,11
	3		0101	*3001	3201	*3001	3211	*1202	1202,1	*2202,1	2202	*2312,1	2201	1201,11
4	3		0101	*3001	3201	*3001	3211	*1202	1202,1	*2202,1	2202	*2312,1	2201	*1301,1
	4			*331	311	311	3322	*1311,1	*1311,1	*2311	2201	2201	2492	*1220,11
	5				021	*022	*2211	0211,1	1211,1	1201,11	1201,11	*1301,1	*1220,11	*0322,21

$W^2(I_1, I_2, J_2; 14)$

J_2	J_1		2			3			4			
	0	1	1	2	3	2	3	4	3	4	5	
	l_1		0	1	2	3	2	3	4	3	4	5
	l_2									03	03	03
0	1											
	0							03		03		
1	1						3001	331	331	331	331	*131
	2					0011	3001	3301,1	3301,1	*311	*3321,1	*012
2	1				0011		3001	*311	3301,1	*3321,1		1321,1
	2			222	0201		*3211	*3111,1	*3111,1	*312		0121,1
	3		0011	0201	0212,1	*2202	*1202,1	*1112,1	1102	1121		2121,11
3	2		0011	0201	*2202	0212,1	*1202,1	1102	*1112,1	1121		*0120,1
	3	3001	3001	*3211	*1202,1	*1202,1	*2202	2112	2112	2111		*1111,11
	4	331	3301,1	*3111,1	*1112,1	1102	2112	2202,01	*2422	*2401,01		*1400,11
4	3	331	3301,1	*3111,1	1102	*1112,1	2112	*2422	*2202,01	*2401,01		1201,1
	4	331	*3321,1	*312	1121	1121	2111	*2401,01	*2401,01	*24		1401,1
	5	*131	1321,1	0121,1	2121,11	*0120,1	*1111,11	1201,1	1201,1	1401,1		0201,2

$$W^2 \left(l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 l_7 l_8 l_9 \right)$$

$J_1 \backslash J_2$		$1/2$		$3/2$			$5/2$			$7/2$			$9/2$			
		l_1	l_2	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$1/2$	1	$1\bar{1}$	$*10\bar{1}$													
	2															
$3/2$	0															
	1			$2\bar{2}$	$*21\bar{1}$											
	2					$20\bar{1}$										
	3						$*200\bar{1}$									
$5/2$	1															
	2							$12\bar{2}$								
	3							$*11\bar{1}$								
	4								$110\bar{1}$			$*13\bar{1}$				
$7/2$	2												$30\bar{1}$			
	3												$*300\bar{1}$			
	4													$32\bar{2}$		
	5														$*3000,1\bar{1}$	
$9/2$	3															$101\bar{1}$
	4															$*12\bar{1}$
	5															$1010,1\bar{1}$

Таблица XI

4	7/2				9/2		
	2	3	4	5	3	4	5
* <u>1101</u>							
<u>3002</u> <u>3321</u>	<u>111</u> * <u>1111</u> <u>3112</u>	* <u>0002</u> <u>5012</u> * <u>5202</u>	<u>5022</u> * <u>5101</u>	* <u>32</u>			
* <u>5202</u> * <u>5101</u> * <u>32</u>	* <u>2111</u> <u>3002</u>	<u>3002</u> <u>1102</u> * <u>1312</u>	* <u>1312</u> * <u>5411</u> <u>331</u>	<u>331</u> <u>2111,1</u>	<u>3001</u> * <u>5101</u> <u>5311</u>	* <u>5300,1</u> <u>5421,1</u> * <u>3320,1</u>	<u>0321</u> * <u>1120,1</u>
	<u>3001</u>	* <u>5101</u> * <u>5300,1</u>	<u>5311</u> <u>5421,1</u> <u>0321</u>	* <u>3320,1</u> * <u>1120,1</u>	* <u>3111,1</u> <u>331</u>	<u>331</u> <u>3420,1(41)²</u> * <u>6320,2</u>	* <u>6320,2</u> * <u>2120,202</u>

Таблица XII

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
<u>021</u> * <u>102</u>	* <u>111</u>							
* <u>5221</u>		<u>201</u> * <u>102</u>	* <u>2111</u>					
* <u>0021</u>	<u>0111</u>	<u>1021</u>	<u>3111</u>	<u>3001</u>				
<u>1322</u>	<u>1112</u>	* <u>3022</u>	* <u>2012</u>	* <u>2002</u>	* <u>3001</u>			
<u>1021</u>		* <u>102</u>	<u>0111</u>			<u>1101</u>		
<u>2122,02</u>	* <u>2012</u>	<u>1322</u>	<u>1012</u>	* <u>3302</u>		* <u>2002</u>	* <u>2301,1</u>	
<u>4022,2</u>	* <u>4012</u>	* <u>4322</u>	* <u>5112,02</u>	* <u>5302,0002</u>	<u>4101</u>	<u>4102</u>	<u>4301,1</u>	<u>2101</u>
* <u>4012</u>	* <u>4322,1</u>	<u>4212</u>	<u>5322</u>	<u>5212,1</u>	<u>431</u>	* <u>4312</u>	* <u>4211</u>	* <u>231</u>
* <u>4322</u>	<u>4212</u>	<u>2102</u>	* <u>4012</u>	<u>4102</u>		* <u>4002,1</u>	<u>4101</u>	
* <u>5112,02</u>	<u>5322</u>	* <u>4012</u>	* <u>3222</u>	<u>3212</u>	* <u>4211</u>	<u>5212,1</u>	<u>5211</u>	* <u>3211,1</u>
* <u>5302,0002</u>	<u>5212,1</u>	<u>4102</u>	<u>3212</u>	<u>3322,12</u>	* <u>402</u>	* <u>5022,1</u>	* <u>5321,1(71)²</u>	* <u>1020,1</u>
<u>4101</u>	<u>431</u>		* <u>4211</u>	* <u>402</u>	* <u>2221,11</u>	<u>4221,1</u>	<u>4021,2</u>	<u>1221,21</u>
<u>4102</u>	* <u>4312</u>	* <u>4002,1</u>	<u>5212,1</u>	* <u>5022,1</u>	<u>4221,1</u>	<u>4201,1</u>	* <u>402</u>	<u>2220,1</u>
<u>4301,1</u>	* <u>4211</u>	<u>4101</u>	<u>5211</u>	* <u>5321,1(71)²</u>	<u>4021,2</u>	* <u>402</u>	* <u>4303,2</u>	<u>2000,2</u>
<u>2101</u>	* <u>231</u>		* <u>3211,1</u>	* <u>1020,1</u>	<u>1221,21</u>	<u>2220,1</u>	<u>2000,2</u>	<u>1200,21</u>

$$W^2(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 3)$$

J_1		$1/2$		$3/2$				$5/2$	
		1	2	0	1	2	3	1	2
l_2	l_1								
	1								
2								<u>111</u>	<u>0011</u>
0							<u>2001</u>		
1						<u>202</u>	<u>0011</u>		<u>5221</u>
2					<u>202</u>	<u>102</u>	<u>0121</u>	<u>112</u>	<u>0021</u>
3				<u>2001</u>	<u>0011</u>	<u>0121</u>	<u>1112</u>	<u>*1111</u>	<u>*1322</u>
1						<u>112</u>	<u>*1111</u>		<u>0121</u>
2		<u>1201</u>	<u>0011</u>		<u>5221</u>	<u>0021</u>	<u>*1322</u>	<u>0121</u>	<u>*1022</u>
3		<u>2211</u>	<u>2111</u>	<u>2001</u>	<u>4211</u>	<u>*4121</u>	<u>*3312</u>	<u>*3111</u>	<u>*3122,002</u>
4		<u>2001</u>	<u>2101</u>		<u>*4001</u>	<u>*4111</u>	<u>*3102,1</u>	<u>3301</u>	<u>*3112</u>
2		<u>2001</u>	<u>*3011</u>		<u>2111</u>	<u>*3111</u>	<u>2012</u>	<u>2011</u>	<u>*3312</u>
3		<u>4101</u>	<u>*4001</u>	<u>2001</u>		<u>*2101</u>	<u>3112</u>	<u>*4111</u>	<u>*4102</u>
4		<u>4111</u>	<u>*4211</u>		<u>*0201</u>	<u>*2111</u>	<u>3102,1</u>	<u>4101</u>	<u>4312 (31)²</u>
5			<u>*301</u>			<u>311</u>	<u>2101</u>		<u>*3111</u>
3				<u>2001</u>	<u>*4211</u>	<u>4101</u>	<u>*3112</u>	<u>*3111,1</u>	<u>3102,1</u>
4					<u>*4210,1</u>	<u>4120,1</u>	<u>*3111</u>	<u>311</u>	<u>3321,02</u>
5						<u>012</u>	<u>*1111</u>		<u>*5121,1</u>

Таблица XIV

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
<u>2211</u>	<u>2001</u>	<u>2001</u>	<u>4101</u>	<u>4111</u>				
<u>2111</u>	<u>2101</u>	* <u>3011</u>	* <u>4001</u>	* <u>4211</u>	* <u>301</u>			
<u>2001</u>			<u>2001</u>			<u>2001</u>		
<u>4211</u>	* <u>4001</u>	<u>2111</u>		* <u>0201</u>		* <u>4211</u>	* <u>4210,1</u>	
* <u>4121</u>	* <u>4111</u>	* <u>3111</u>	* <u>2101</u>	* <u>2111</u>	<u>311</u>	<u>4101</u>	<u>4120,1</u>	<u>012</u>
* <u>3312</u>	* <u>3102,1</u>	<u>2012</u>	<u>3112</u>	<u>3102,1</u>	<u>2101</u>	* <u>3112</u>	* <u>3111</u>	* <u>1111</u>
* <u>3111</u>	<u>3301</u>	<u>2011</u>	* <u>4111</u>	<u>4101</u>		* <u>3111,1</u>	<u>311</u>	
* <u>3122,002</u>	<u>3112</u>	* <u>3312</u>	* <u>4102</u>	<u>4312 (31)²</u>	* <u>3111</u>	<u>3102,1</u>	<u>3321,02</u>	* <u>5121,1</u>
* <u>3112</u>	<u>3102,1</u>	<u>3212</u>	<u>2112</u>	<u>2302,1</u>	* <u>3101</u>	* <u>3112,1</u>	* <u>3311,1(23)²</u>	* <u>3112,1</u>
<u>3102,1</u>	<u>3422,1</u>	* <u>3202</u>	* <u>2302,1</u>	* <u>2202,1</u>	* <u>3301,01</u>	<u>3302</u>	<u>3211,1</u>	<u>3311,11</u>
<u>3212</u>	* <u>3202</u>	* <u>4112,1</u>	<u>3102,1</u>	* <u>3112,1</u>	<u>4111,1</u>	<u>31C2,1</u>	* <u>3101</u>	<u>3101,1</u>
<u>2112</u>	* <u>2302,1</u>	<u>3102,1</u>	<u>4202,1</u>	* <u>4012</u>	<u>3211,1</u>	* <u>2202,1</u>	* <u>2001,1</u>	<u>4201,1</u>
<u>2302,1</u>	* <u>2202,1</u>	* <u>3112,1</u>	* <u>4012</u>	* <u>4312,002</u>	<u>3011,11</u>	<u>2012</u>	<u>2321,1(31)²</u>	<u>4221,11</u>
* <u>3101</u>	* <u>3301,01</u>	<u>4111,1</u>	<u>3211,1</u>	<u>3011,11</u>	<u>4212,21</u>	* <u>3211,1</u>	* <u>3020,21</u>	* <u>3222,21</u>
* <u>3112,1</u>	<u>3302</u>	<u>3102,1</u>	* <u>2202,1</u>	<u>2012</u>	* <u>3211,1</u>	* <u>3212,11</u>	<u>3011,11</u>	* <u>3211,11</u>
* <u>3311,1(23)²</u>	<u>3211,1</u>	* <u>3101</u>	* <u>2001,1</u>	<u>2321,1(31)²</u>	* <u>3020,21</u>	<u>3011,11</u>	<u>3320,23</u>	* <u>3420,2</u>
* <u>3112,1</u>	<u>3311,11</u>	<u>3101,1</u>	<u>4201,1</u>	<u>4221,11</u>	* <u>3222,21</u>	* <u>3211,11</u>	* <u>3420,2</u>	* <u>1222,2</u>

$$W^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 4 \right)$$

J_1	$1/2$		$3/2$				$5/2$		
	l_1	1	2	0	1	2	3	1	2
1									
2									
0									
1									
2									<u>0111</u>
3								<u>1101</u>	<u>1112</u>
1							<u>1101</u>		
2						<u>0111</u>	<u>1112</u>		<u>5212</u>
3				<u>4001</u>	<u>4111</u>	<u>3102,1</u>	<u>3001</u>		<u>3212</u>
4			<u>22</u>	<u>41</u>	<u>4201,1</u>	<u>3202,1</u>	<u>*33</u>		<u>*3102,1</u>
2		<u>301</u>				<u>3001</u>	<u>*2002</u>		<u>3102,1</u>
3	<u>42</u>	<u>41</u>		<u>0201</u>	<u>2111</u>	<u>*3102,1</u>	<u>4201,1</u>		<u>*4012,1</u>
4	<u>4301</u>	<u>4210,1</u>	<u>22</u>	<u>232</u>	<u>*2221,1</u>	<u>*3222,1</u>	<u>*4120,1</u>		<u>*4122,0002</u>
5	<u>22</u>	<u>311</u>		<u>*2221</u>	<u>311</u>	<u>*2121,01</u>	<u>2221,1</u>		<u>3220,1</u>
3	<u>22</u>	<u>*212</u>		<u>4210,1</u>	<u>*4120,1</u>	<u>3111</u>	<u>3211,1</u>		<u>*3222,1</u>
4	<u>2310,1</u>	<u>*2221</u>	<u>22</u>	<u>*432</u>	<u>*4223,1</u>	<u>3220,1</u>	<u>*3121</u>		<u>*3121,1</u>
5	<u>121</u>	<u>*012</u>		<u>*5220,1</u>	<u>*0120,1</u>	<u>1120,11</u>	<u>0221,1</u>		<u>1020,1</u>

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
			<u>42</u>	<u>4301</u>	<u>22</u>	<u>22</u>	<u>2310,1</u>	<u>121</u>
		<u>301</u>	<u>41</u>	<u>4210,1</u>	<u>311</u>	* <u>212</u>	* <u>2221</u>	* <u>012</u>
	<u>22</u>			<u>22</u>			<u>22</u>	
<u>4001</u>	<u>41</u>		<u>0201</u>	<u>232</u>	* <u>2221</u>	<u>4210,1</u>	* <u>432</u>	* <u>5220,1</u>
<u>4111</u>	<u>4201,1</u>	<u>3001</u>	<u>2111</u>	* <u>2221,1</u>	<u>311</u>	* <u>4120,1</u>	* <u>4223,1</u>	* <u>0120,1</u>
<u>3102,1</u>	<u>3202,1</u>	* <u>2002</u>	* <u>3102,1</u>	* <u>3222,1</u>	* <u>2121,01</u>	<u>3111</u>	<u>3220,1</u>	<u>1120,11</u>
<u>3001</u>	* <u>33</u>		<u>4201,1</u>	* <u>4120,1</u>	<u>2221,1</u>	<u>3211,1</u>	* <u>3121</u>	<u>0221,1</u>
<u>3212</u>	* <u>3102,1</u>	<u>3102,1</u>	* <u>4012,1</u>	* <u>4122,0002</u>	<u>3220,1</u>	* <u>3222,1</u>	* <u>3121,1</u>	<u>1020,1</u>
* <u>3202,1</u>	* <u>3102,1</u>	* <u>3102,1</u>	* <u>2002</u>	<u>2122</u>	<u>3221,11</u>	<u>3212</u>	<u>3121,101</u>	<u>3021,11</u>
* <u>3102,1</u>	* <u>3402,11</u>	<u>3212</u>	<u>2322</u>	<u>2202,01</u>	<u>3300,11</u>	* <u>3312</u>	* <u>3201,11</u>	* <u>3300,11</u>
* <u>3102,1</u>	<u>3212</u>	<u>4012,1</u>	* <u>3102,1</u>	<u>3212</u>	* <u>4110,1</u>	* <u>3122,11</u>	<u>3221,11</u>	* <u>3120,11</u>
* <u>2002</u>	<u>2322</u>	* <u>3102,1</u>	<u>4202</u>	<u>4302,2</u>	* <u>3201,11</u>	<u>3202,01</u>	<u>2311,11</u>	* <u>4211,101</u>
<u>2122</u>	<u>2202,01</u>	<u>3212</u>	<u>4302,2</u>	<u>4402,01</u>	* <u>3300,11</u>	* <u>2302,01</u>	* <u>2431,1</u>	* <u>4310,1</u>
<u>3221,11</u>	<u>3300,11</u>	* <u>4110,1</u>	* <u>3201,11</u>	* <u>3300,11</u>	* <u>4201,21</u>	<u>3201,1</u>	<u>3311,2</u>	<u>3211,2</u>
<u>3212</u>	* <u>3312</u>	* <u>3122,11</u>	<u>3202,01</u>	* <u>2302,01</u>	<u>3201,1</u>	<u>3211,01</u>	* <u>3300,11</u>	<u>3200,1</u>
<u>3121,101</u>	* <u>3201,11</u>	<u>3221,11</u>	<u>2311,11</u>	* <u>2431,1</u>	<u>3311,2</u>	* <u>3300,11</u>	* <u>3413,2</u>	<u>3310,2(23)²</u>
<u>3021,11</u>	* <u>3300,11</u>	* <u>3120,11</u>	* <u>4211,101</u>	* <u>4310,1</u>	<u>3211,2</u>	<u>3200,1</u>	<u>3310,2(23)²</u>	<u>3210,2</u>

Таблица XVI

$$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 0\right)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		l_2	l_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$1/2$	0		1										
	1			1									
$3/2$	1					*2							
	2						*2						
$5/2$	2							11					
	3								11				
$7/2$	3									*3			
	4										*3		
$9/2$	4											101	
	5												101

Таблица XVII

$$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 1\right)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		l_2	l_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$1/2$	0		1	2									
	1	*1			2								
$3/2$	1	*2			*201	*221							
	2		*2	201			*221						
$5/2$	2			221			1211	3201					
	3				221	*1211			3201				
$7/2$	3						*3201			*3101	*311		
	4							*3201	3101				*311
$9/2$	4								311				1110,1
	5									311	*1110,1		

$$Z^2 \left(l_1 l_2 l_3, \frac{1}{2} \ 3 \right)$$

$J_3 \quad l_2$		$J_1 \quad l_1$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$9/2$	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$1/2$	0						11	3			
	1				*11			3	3		
$3/2$	1				*221		*311		*31		*311
	2			221				31			
$5/2$	2		11	311			401	3	3		2010,1
	3	*11			*311		*401				*2010,1
$7/2$	3	*3			*31		*3		*3100,1		*3110,1
	4		*3	31				3100,1			
$9/2$	4			311			*2010,1	3110,1			4110,11
	5				311		*2010,1		3110,1		*4110,11

$Z^2 (I_1 I_2 J_2, 11)$

$J_1 \backslash J_2$		0		1		2			3			4			
		l_1	l_2	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1		$*e$		$*1$										
1	0	e	$*01$	01	$1\bar{1}$	001	$1\bar{2}$								
1	1			$*01$	$*1\bar{1}$	$10\bar{1}$	$03\bar{1}$								
1	2	1													
2	1		$*001$	$*10\bar{1}$	$*1\bar{1}$	$1\bar{1}$	$*11\bar{1}$	$*111\bar{1}$							
2	2			$*1\bar{2}$	e		$*e$	$*3$							
2	3			$*03\bar{1}$				$*001\bar{1}$	$*211\bar{1}$						
3	2					$111\bar{1}$	$001\bar{1}$	e	$040\bar{1}$	$2\bar{1}$	$040\bar{1}$	$2\bar{2}$	$011\bar{1}$		
3	3						3	$*e$	$2\bar{1}$	$*21$	$210\bar{1}$	$22\bar{1}$			
3	4						$211\bar{1}$	$*2\bar{1}$	$*21\bar{1}$	$*21\bar{1}$	$210\bar{1}$	$011\bar{1}$			
4	3							$*040\bar{1}$	$*210\bar{1}$	$*22\bar{1}$	$*21\bar{1}$	$*011\bar{1}$			
4	4										$2\bar{1}$	$*21\bar{1}$	$*011\bar{1}$		
4	5								$*011\bar{1}$	011					

$Z^2(l_1, l_2, J_2; 12)$

$J_1 \backslash J_2$		0		1		2			3			4		
		l_1	l_2	0	1	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1					*1		*01						
1	0				01		001	01	0001					
1	1			*11		*12	*101		1001	11	1301			
1	2		01		11									
2	1	*1		*12		*1001	*0101	*0101	2011	*01	*0111	*0401	*0121	*1131
2	2	001		*101		*1021	*5001			1		*1101		
2	3	*01		01		*0101								
3	2		0001		1001		2011	1	4101	2101	0001	0111	0111	011
3	3			11		*01	*0111		0001		2141	*212	*2211	
3	4			1301										
4	3					*0401	*0121	*1101	0111	*212	*2211	*2021,1	*2201,102	*0011,1
4	4									011				
4	5						*1131			011		*0011,1		*4001,1

$Z^2(l_1, l_2, l_3; 13)$

$J_2 \backslash J_1$	1			2			3			4		
	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0												
1	0	1	2	031	*01	001	*11	*001	12	02	111	101
2	1	2										
3	*001	01	*031	11	*11	*2	*121	*1101	*111	112	*12	*111
4					2		*411		*001		01	
5												
6	01	11	1001	121	1101	411	*1101	1101	1001	1100,1	1111,1	1110,1
7	*0001	*12		111		001		*1001		1200,1		1210,1
8												
9	*02	*111	*1	12	*112	*01	*1100,1	*1111,1	*1200,1	1400,1	*1400,1	*1410,1
10			*101	111	111		*1110,1		*1210,1		1410,1	

$Z^2(I_1, I_2, J_2; 15)$

$J_2 \backslash J_1$	1			2			3			4			
	0	1	2	0	1	2	1	2	3	2	3	4	5
0	1												
1	0												02
2	1											*11	1
3	2											*02	*211
4	3											11	012
5	4											*0111	012
6	5											*1011	11
7	6											012	012
8	7											*1131	*211
9	8											1131	012
10	9											*012	012
11	10											0111	*202
12	11											*012	012
13	12											*111,01	0111,01
14	13											2100,01	2100,01
15	14											*2231,01	2231,01
16	15											*2410,01	*2410,01
17	16											*2100,01	2410,01
18	17											*0201,01	*0201,01
19	18											*0111,01	*2410,01
20	19											*4101,01	*0400,01
21	20											*101	*2410,01
22	21											11	2410,01
23	22											*02	*0400,01
24	23											*01	0400,01

$$Z^2(L_1 J_1 L_2 J_2; \frac{3}{2} 0)$$

J_2 \ J_1		$1/2$		$3/2$			$5/2$			$7/2$			$9/2$				
		l_2	l_1	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4	5	2	3	4
$1/2$	1		*1														
	2		*1														
$3/2$	0			2													
	1				2												
	2					2											
	3						2										
$5/2$	1									*11							
	2										*11						
	3											*11					
	4												*11				
$7/2$	2													3			
	3														3		
	4															3	
	5																3
$9/2$	3																*101
	4																*101
	5																*101

Таблица XXIX

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
422 _	4101 _							
8222 _	*1302 _	*411 _	*4302 _					
1302 _		*1212 _	*1002 _	*1222 _	*101			
1212 _	1002 _	*3202 _	3202 _	7212 _		1211 _	1210,1	
1222 _	101		*7212 _	*32 _	32 _	1201 _	1200,1 _	4201 _
		*1211 _	*1210,1 _	*1201 _	*1200,1 _	121 _	*121 _	*8210,2 _
				*4201 _			8210,2 _	

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
*211	*2201							
8121	4202	3 5002	3311 5111	3212	3121			
*4321								
*1421	*1403	4403	*4211	*8013		*1211	*1022,1	
*0121,2	*0143	1103	1111,02	1133	*1121	*0111	*0122,1	*1131
	1103	5123		3113			1122	
1111,02	1133	3113	5321	5103,02	3311	*1321,1	*1112,2(71) ^a	8321,1
*1121			3311		5301	*1311,1		*4311,1
*0111	*0122,1	1122	*1321,1	*1112,2(71) ^a	*1311,1	*0320,1	*0142,3	*1320,1
*1131			8321,1		*4311,1	*1320,1		*2340,1

$$Z^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 3 \right)$$

J_1		$1/2$		$3/2$				$5/2$	
		l_1	l_2	0	1	2	3	1	2
1	2							$\underline{121}$	$\times \underline{1101}$
0	1						2		
1	2					$\times \underline{222}$			$\times \underline{8121}$
2	3			$\times 2$	$\underline{222}$	$\times \underline{602}$	$\underline{602}$	$\underline{422}$	$\underline{4321}$
1	2		$\times \underline{121}$			$\times \underline{422}$			$\times \underline{2521}$
2	3	1001			$\underline{8121}$		$\times \underline{4321}$	$\underline{2521}$	
3	4		$\times \underline{211}$	$\times 11$		$\underline{112}$			$\underline{1021, 002}$
4		$\underline{2201}$			$\times \underline{1201}$		$\times \underline{1201}$	$\underline{1001}$	
2	3	$\underline{2201}$			$\underline{3311}$		$\underline{5111}$	$\underline{2311}$	
3	4		$\underline{21}$	$\times 3$		$\underline{52}$			$\underline{2101}$
4	5	$\underline{2011}$			$\times \underline{7101}$		$\underline{3101}$	$\underline{2101}$	
5			$\underline{211}$			$\times \underline{321}$			$\underline{2111}$
3	4			$\times 101$		$\times \underline{121}$			$\times \underline{1111, 1}$
4	5				$\times \underline{1100, 1}$		$\times \underline{1100, 1}$	11	
5						$\times \underline{421}$			$\underline{811, 1}$

Таблица XXXI

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
211	*2201	*2201	*21	*2011	*211			
11	1201	*3311	3	7101		101	1100,1	
*112	1201	*5111	*52	*3101	321	121	1100,1	421
*1021,002	*1001	*2311	*2101	*2101	*2111	1111,1	*11	*8111,1
0301	*0301	*3211	*3001	*3001	*3011	0011,1	0000,2(23) ²	1031,1
3211	3001	*5201,1	5201,1	3211,1	3211,1	3211,1	3210,2	2231,1
3001	3011	*3211,1	*3211,1	*5201,1	5201,1	3201,1	3200,2	2401,1
*0000,2(23) ²	*0011,1	*3211,1	*3210,2	*3201,1	*3200,2	0210,21	*0210,21	*1610,21
	*1031,1	*2231,1		*2401,1			1610,21	

$$Z^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 4 \right)$$

J_1		$1/2$		$3/2$				$5/2$	
		1	2	0	1	2	3	1	2
l_2	l_1								
	1	1							
2	2								
0	1								
2	2								4202
3	3							*4101	
1	1						*4101		
2	2					4202			8203
3	3				*1201		*1201	*1301	
4	4			11		1122			*1323
2	2		2201			3212			2213,1
3	3	*21			*7101		3101	*2001,1	
4	4		2011	3		*5002			*2203,1002
5	5	*211			3111		5111	*2011,1	
3	3	*211			*1100,1		*1100,1	*1001,1	
4	4		*2010,1	101		*1012,2			*1212,2
5	5	*111			8100,1		*4100,1	*2001,1	

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
		2201	*21	2011	*211	*211	*2010,1	*111
*1201	11		*7101	3	3111	*1100,1	101	8100,1
*1201	1122	3212	3101	*5002	5111	*1100,1	*1012,2	*4100,1
*1301	*1323	2213,1	*2001,1	*2203,1002	*2011,1	*1001,1	*1212,2	*2001,1
0201	*0603	3133,1	3301,1	3703,1	*3511,1	*0501,1	*0712,2	*1301,1
3301,1	3133,1	3203,1	*3001,1	5413,1	5011,1	*3011,11	3412,21	2011,112
*3511,1	3703,1	5413,1	5011,1	3403,1	3001,1	*3021,11	*3442,21	*2021,11
*0501,1	*0712,2	3412,21	*3011,11	*3442,21	*3021,11	*0010,11	*0412,31	*1030,11
*1301,1			2011,112		*2021,11	*1030,11		*6010,11

$$Z^2(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 5)$$

J_1		$1/2$		$3/2$				$5/2$	
		l_1	l_2	0	1	2	3	1	2
1	2								
0	1								
2	3								
1	2								
3	4							101	*1032
2	3						3121		
4	5				3111	*321	5111	411	*8112
				*3		*52			41
3	4		*211			*421			*1111,01
5	2010,1				8100,1		*4100,1	1100,11	
		*111		*101		121			2111,01

Таблица XXXIII

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
						211	*2010,1	111
			321	*3111 *5111	3 52	421	*8100,1 4100,1	101 *121
1032 0312	*101 *0312	*1222	8112 *1032	*411 1012,002	*41 *1	1111,01 0031,01	*1100,11 0000,1102	*2111,01 1011,01
1222 *1012,002	1032 1	*3222,01 *5210,01	3222,01 *5212,01	5212,01 *3200,01	5210,01 3200,01	1211,01 1221,01	*1210,11 1220,11	4211,01
*0000,1102	*0031,01 *1011,01	*1211,01 *4211,01	1210,11	*1221,01	*1220,11	0230,11	*0230,11 1410,11	*1410,11

Таблица XXXIV

$$Z_Y^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 0 \right)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$	
				0	1	1	2	2	3
J_2	l_2	l_1							
$1/2$	0								
	1		*1						
$3/2$	1				2				
	2					2			
$5/2$	2						*11		
	3							*11	

Таблица XXXV

$$Z_Y^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 1 \right)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$	
				0	1	1	2	2	3
J_2	l_2	l_1							
$1/2$	0								
	1		*1	e	*01				
$3/2$	1		e	001	011	031			
	2		*01	011	021	*001	501		
$5/2$	2			031	*001	*1011	*4011		
	3				501	*4011	*1011		

$$Z_{\Gamma}^2(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 2)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$	
				0	1	1	2	2	3
J_2	$l_2 \backslash l_1$								
$1/2$	0								
	1					e	$*01$	1	$*2$
$3/2$	1			e	e	01	0001	3001	
	2			$*01$	01	$*e$	0101	3101	
$5/2$	2			1	0001	0101	2101	$*1101$	
	3			$*2$	3001	3101	$*1101$	0301	

$$Z_{\Gamma}^2(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 3)$$

		J_1		$1/2$		$3/2$		$5/2$	
				0	1	1	2	2	3
J_2	$l_2 \backslash l_1$								
$1/2$	0								
	1							1	$*2$
$3/2$	1						211	301	001
	2					211	$*401$	311	$*011$
$5/2$	2			1	301	311	221	101	
	3			$*2$	001	$*011$	101	001	

Таблица XXXVIII

$$Z_{\gamma}^2 \left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2} 4 \right)$$

		J_1	$1/2$		$3/2$		$5/2$	
			$l_2 \setminus l_1$	0	1	1	2	2
$1/2$	0							
	1							
$3/2$	1							0301
	2						5001	*0021
$5/2$	2					5001	4001	1021
	3				0301	*0021	1021	*0001

Таблица XXXIX

$$X^2 \begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
$1/2$	1	$1/2$	0	<u>13</u>	$3/2$	1	$5/2$	2	* <u>421</u>
$3/2$	1	$1/2$	0	<u>33</u>	$3/2$	2	$5/2$	2	<u>43</u>
$1/2$	0	$1/2$	1	<u>13</u>	$5/2$	3	$5/2$	2	<u>1211</u>
$3/2$	1	$1/2$	1	<u>42</u>	$7/2$	3	$5/2$	2	<u>3301</u>
$3/2$	2	$1/2$	1	* <u>43</u>	$3/2$	2	$5/2$	3	<u>331</u>
$1/2$	0	$3/2$	1	* <u>33</u>	$5/2$	2	$5/2$	3	<u>1211</u>
$1/2$	1	$3/2$	1	<u>42</u>	$7/2$	3	$5/2$	3	<u>53</u>
$3/2$	2	$3/2$	1	<u>131</u>	$7/2$	4	$5/2$	3	* <u>5201</u>
$5/2$	2	$3/2$	1	<u>421</u>	$5/2$	2	$7/2$	3	* <u>3301</u>
$1/2$	1	$3/2$	2	<u>43</u>	$5/2$	3	$7/2$	3	<u>53</u>
$3/2$	1	$3/2$	2	<u>131</u>	$7/2$	4	$7/2$	3	<u>1401</u>
$5/2$	2	$3/2$	2	<u>43</u>	$5/2$	3	$7/2$	4	<u>5201</u>
$5/2$	3	$3/2$	2	* <u>331</u>	$7/2$	3	$7/2$	4	<u>1401</u>

$$X^2 \begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
$3/2$	2	$1/2$	0	$\frac{302}{122}$	$3/2$	1	$5/2$	0	$\frac{*4421}{421}$
$5/2$	2	$1/2$	0	$\frac{411}{*422}$	$3/2$	2	$5/2$	2	$\frac{421}{1121}$
$3/2$	1	$1/2$	1	$\frac{242}{*141}$	$5/2$	3	$5/2$	2	$\frac{4121}{4522}$
$3/2$	2	$1/2$	1	$\frac{411}{122}$	$7/2$	3	$5/2$	2	$\frac{141}{3411}$
$5/2$	2	$1/2$	1	$\frac{4421}{3411}$	$5/2$	1	$5/2$	3	$\frac{2221}{1121}$
$1/2$	1	$3/2$	1	$\frac{2211}{302}$	$3/2$	2	$5/2$	3	$\frac{521}{*5511}$
$3/2$	2	$3/2$	1	$\frac{422}{122}$	$5/2$	2	$5/2$	3	$\frac{*2211}{3021}$
$3/2$	1	$3/2$	2	$\frac{421}{*2221}$	$3/2$	2	$7/2$	3	$\frac{*4121}{521}$
$5/2$	2	$3/2$	2	$\frac{3021}{*322}$	$5/2$	3	$7/2$	3	$\frac{1311}{322}$
$1/2$	3	$3/2$	2	$\frac{*322}{*122}$	$7/2$	4	$7/2$	4	$\frac{4522}{5511}$
$3/2$	4	$3/2$	2	$\frac{*122}{242}$	$5/2$	2	$7/2$	4	$\frac{1311}{1311}$
$1/2$	0	$5/2$	2		$5/2$	3	$7/2$	4	
$1/2$	1	$5/2$	2		$7/2$	3	$7/2$	4	

$$X^2 \begin{pmatrix} ab & 1/2 \\ de & 1/2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
$5/2$	3	$1/2$	0	0202	$7/2$	4	$5/2$	2	6501
$7/2$	3	$1/2$	0	4002	$1/2$	0	$5/2$	3	0202
$5/2$	2	$1/2$	1	0401	$1/2$	1	$5/2$	3	0402
$5/2$	3	$1/2$	1	$*0402$	$3/2$	1	$5/2$	3	5432
$7/2$	3	$1/2$	1	6222	$3/2$	2	$5/2$	3	5112
$7/2$	4	$1/2$	1	$*6101$	$5/2$	2	$5/2$	3	1112
$3/2$	2	$3/2$	1	1211	$7/2$	3	$5/2$	3	5201
$5/2$	2	$3/2$	1	3411	$7/2$	4	$5/2$	3	$*5502,1$
$5/2$	3	$3/2$	1	5432	$1/2$	0	$7/2$	3	$*4002$
$7/2$	3	$3/2$	1	5102	$1/2$	1	$7/2$	3	6222
$7/2$	4	$3/2$	1	5201	$3/2$	1	$7/2$	3	$*5102$
$3/2$	1	$3/2$	2	1211	$3/2$	2	$7/2$	3	5002
$5/2$	2	$3/2$	2	4201	$5/2$	2	$7/2$	3	$*6202$
$5/2$	3	$3/2$	2	$*5112$	$5/2$	3	$7/2$	3	5201
$7/2$	3	$3/2$	2	5002	$7/2$	4	$7/2$	3	1302
$7/2$	4	$3/2$	2	$*5301$	$1/2$	1	$7/2$	4	6101
$1/2$	1	$5/2$	2	0401	$3/2$	1	$7/2$	4	5201
$3/2$	1	$5/2$	2	$*3411$	$3/2$	2	$7/2$	4	5301
$3/2$	2	$5/2$	2	4201	$5/2$	2	$7/2$	4	6501
$5/2$	3	$5/2$	2	1112	$5/2$	3	$7/2$	4	$5502,1$
$7/2$	3	$5/2$	2	6202	$7/2$	3	$7/2$	4	1302

$$X^2 \begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
$7/2$	4	$1/2$	0	$\frac{451}{-}$	$5/2$	2	$5/2$	3	$\frac{1311}{-}$
$7/2$	3	$1/2$	1	$\frac{641}{-}$	$7/2$	3	$5/2$	3	$\frac{54}{-}$
$7/2$	4	$1/2$	1	*64	$7/2$	4	$5/2$	3	*5411
$5/2$	3	$3/2$	1	$\frac{5311}{-}$	$1/2$	1	$7/2$	3	$\frac{641}{-}$
$7/2$	3	$3/2$	1	$\frac{5401}{-}$	$3/2$	1	$7/2$	3	*5401
$7/2$	4	$3/2$	1	$\frac{5411}{-}$	$3/2$	2	$7/2$	3	$\frac{5121}{-}$
$5/2$	2	$3/2$	2	$\frac{44}{-}$	$5/2$	2	$7/2$	3	*6421,1
$5/2$	3	$3/2$	2	*5411	$5/2$	3	$7/2$	3	$\frac{54}{-}$
$7/2$	3	$3/2$	2	$\frac{5121}{-}$	$7/2$	4	$7/2$	3	$\frac{1501}{-}$
$7/2$	4	$3/2$	2	*5520,1	$1/2$	0	$7/2$	4	$\frac{451}{-}$
$3/2$	2	$5/2$	2	$\frac{44}{-}$	$1/2$	1	$7/2$	4	$\frac{64}{-}$
$5/2$	3	$5/2$	2	$\frac{1311}{-}$	$3/2$	1	$7/2$	4	$\frac{5411}{-}$
$7/2$	3	$5/2$	2	$\frac{6421,1}{-}$	$3/2$	2	$7/2$	4	$\frac{5520,1}{-}$
$7/2$	4	$5/2$	2	$\frac{6422}{-}$	$5/2$	2	$7/2$	4	$\frac{6422}{-}$
$3/2$	1	$5/2$	3	$\frac{5311}{-}$	$5/2$	3	$7/2$	4	$\frac{5411}{-}$
$3/2$	2	$5/2$	3	$\frac{5411}{-}$	$7/2$	3	$7/2$	4	$\frac{1501}{-}$

Таблица XLIII

$$X^2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & e & f \\ k & k & l \end{pmatrix}$$

a	b	c	a	e	f	X ²	
						k=2	k=4
1	1	1	1	1	2	*223	
1	2	1	1	2	2	2141	
3/2	1	1/2	3/2	1	3/2	612	
3/2	1	3/2	3/2	1	5/2	*612	
3/2	2	1/2	3/2	2	3/2	6031	
3/2	2	3/2	3/2	2	5/2	612	
2	1	1	2	1	2	2141	
2	2	1	2	2	2	2121	*1421
5/2	1	3/2	5/2	1	5/2	322	
5/2	2	1/2	5/2	2	3/2	3131	4301
5/2	2	3/2	5/2	2	5/2	0122	*5312
3	2	1	3	2	2	0242	2412,1

Таблица XLIV

$$X^2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & e & c \\ k & k & l \end{pmatrix}$$

a	b	c	a	e	c	X ²	
						k=2	k=4
1	1	2	1	3	2	222	
3/2	1	3/2	3/2	3	3/2	322	
3/2	1	5/2	3/2	3	5/2	1321	
2	1	1	2	3	1	2311	3301
2	1	2	2	3	2	1221	*4411
5/2	1	3/2	5/2	3	3/2	2221	5301
5/2	1	5/2	5/2	3	5/2	1123	*2603
3	1	2	3	3	2	0222	4502,1

$[\Delta(abc)]^{-2}$; a, b, c — целые числа

a	b	$c=0$	1	2	3	4	5	6
1	1	01	31	111				
2	1	001	111	311				
2	2	001	311	121		1211		
3	2	0001	0111	5011		4211	1111,1	
3	3	0001	4101	2311		1221,1	4301,1	2101,11
4	2		1211	1211		2211,1	5210,1	0210,11
4	3		4211	4211		5211,1	2211,11	4201,11
4	4	02	2201	2211,1		1221,11	4202,11	2212,11
4	4		421	1111,1		2211,11	5111,11	0321,11
5	3			4301,1		4202,11	1222,11	7211,11
5	4		0210,1	5210,1		2211,11	6302,11	4112,111
5	5	0000,1	3110,1	1310,11		1222,11	0321,11	6021,11
6	3					4201,11		2211,11
6	4			0210,11		2212,11	7211,11	6021,11
6	5		1100,11	3011,11		7211,11	4112,111	6401,111
6	6	0000,01	3101,01	1211,11		2221,111	6401,111	4202,1111
7	4					7210,11	3211,111	5211,111
7	5			0111,11		3211,111	7310,111	2311,1111
7	6		0111,01	6111,01		5211,111	2311,1111	7311,1111
7	7	011	5111	3111,011		2211,1111	5211,1111	3312,1111
8	4					1210,111	5210,111	3201,1111
8	5			3001,111		5210,111	1410,1111	6120,1111
8	6		3110,001	5301,011		3201,1111	6120,1111	1421,1111
8	7		5200,001	2211,0111		6211,0111	3212,1111	5211,2111
8	8	0000,001		3310,0011		2222,0111	5302,1111	3102,2111,1

$[\Delta(abc)]^{-2}$; a, b — полуцелые числа

a, b	$c=0$	1	2	3	4	5	6
$1/2 \ 1/2$	1	11					
$3/2 \ 1/2$		21	201				
$3/2 \ 3/2$	2	211	221	2011			
$5/2 \ 1/2$			111	1101			
$5/2 \ 3/2$		211	2111	3111	3201		
$5/2 \ 5/2$	11	1111	4111	4211	2221	2201,1	
$7/2 \ 1/2$				3001	32		
$7/2 \ 3/2$			3011	3301	3211	3110,1	
$7/2 \ 5/2$		3101	3211	3221	3211,1	3211,1	3200,11
$7/2 \ 7/2$	3	3201	3311	3121,1	3221,1	3301,11	3102,11
$9/2 \ 1/2$					121	1010,1	
$9/2 \ 3/2$				3111	3210,1	2310,1	2010,11
$9/2 \ 5/2$			2211	2211,1	4211,1	4210,11	1211,11
$9/2 \ 7/2$		321	3111,1	3311,1	3211,11	3112,11	3311,11
$9/2 \ 9/2$	101	1210,1	4310,1	4111,11	2212,11	2312,11	6112,11
$11/2 \ 1/2$						2100,1	2100,01
$11/2 \ 3/2$					2210,1	2110,11	2101,11
$11/2 \ 5/2$				3201,1	3210,11	2211,11	2121,11
$11/2 \ 7/2$			3210,1	3201,11	3202,11	3221,11	4221,11
$11/2 \ 9/2$		2110,1	2210,11	3211,11	3212,11	5212,11	5211,111
$11/2 \ 11/2$	21	2100,11	2111,11	2221,11	5221,11	5202,111	5302,111
	$c=7$		8	9	10	11	
$7/2 \ 7/2$		3210,11					
$9/2 \ 5/2$		1111,11					
$9/2 \ 7/2$		4211,11	4010,111				
$9/2 \ 9/2$		6210,111	2410,111	2010,1111			
$11/2 \ 3/2$		2111,01					
$11/2 \ 5/2$		4111,11	4101,011				
$11/2 \ 7/2$		4111,111	4201,111	4200,0111			
$11/2 \ 9/2$		4311,111	4210,1111	3210,1111	3111,0111		
$11/2 \ 11/2$		5310,1111	3320,1111	3121,1111	3101,2111	3101,0111,1	

$(L_1 0 L_2 0 | L_0)^2$

$l_1 l_2$	$L=0$	2	4	6	8	10	12
0 0	e						
1 1	$\times 01$	11					
2 2	001	$\times 1001$	1211				
3 3	$\times 0001$	2101	$\times 1201,1$	$2121,1$			
4 4	02	$\times 2221,1$	$1401,11$	$\times 2210,1$	$1212,11$		
5 5	$\times 0000,1$	$1120,11$	$\times 1200,11$	$\times 4110,101$	$\times 1012,1101$	$2402,1111$	
6 6	$0000,01$	$\times 1001,11$	$2201,111$	$\times 4020,1011$	$1021,1101$	$\times 2402,0111,1$	$2201,2111,1$
0 2	e						
0 4			e				
0 6				e			
1 2		$\times 0101$	2001				
1 5			$\times 0010,1$	$1100,1$			
2 4		1001	$\times 2011,1$	$0010,1$			
2 6			$0210,11$	$\times 1011,1$	$2011,01$		
3 5		$\times 1121,1$	$2211,11$	$\times 0101,1$	$3001,11$		
4 6		$0020,11$	$\times 2010,11$	$2001,101$	$\times 3201,1101$	$1112,0111$	
$l_1 l_2$	$L=1$	3	5	7	9	11	
0 1	e						
0 3		e					
0 5			e				
1 2	$\times 101$	011					
1 4		$\times 22$	021				
1 6			$\times 1100,01$	$0001,01$			
2 3	0211	$\times 211$	1111				
2 5		$1110,1$	$\times 1110,01$	$0201,11$			
3 4	$\times 2101$	$1000,1$	$\times 2011,01$	$0121,11$			
3 6		$\times 2120,11$	$0101,01$	$\times 3201,111$	$2101,011$		
4 5	$0110,1$	$\times 2010,11$	$1000,01$	$\times 3121,111$	$1202,111$		
5 6	$\times 1200,11$	$0102,11$	$\times 4110,011$	$2221,1111$	$\times 2111,111$	$1201,1111$	

Таблица XLVIII

$$(l_1 - l_2 | L_0)^2$$

$l_1 \ l_2$	$L=0$	1	2	3	4	5	6
1 1	<u>01</u>	* <u>1</u>	<u>11</u>				
2 2	* <u>001</u>	<u>101</u>	<u>1001</u>	* <u>101</u>	<u>3011</u>		
3 3	<u>0001</u>	* <u>2001</u>	* <u>2101</u>	<u>11</u>	<u>1001,1</u>	* <u>2121</u>	<u>2121,1</u>
1 2		<u>111</u>	* <u>1</u>	<u>001</u>			
1 3			<u>1001</u>	* <u>1</u>	<u>1101</u>		
2 3		* <u>3011</u>	<u>0001</u>	<u>111</u>	* <u>1011</u>	<u>0111</u>	

Таблица XLIX

Факториалы

$1! = e$	$7! = 4211$	$13! = \bar{0}521,11$	$19! = \bar{6}832,1111$
$2! = 1$	$8! = 7211$	$14! = \bar{1}522,11$	$20! = \bar{8}842,1111$
$3! = 11$	$9! = 7411$	$15! = \bar{1}632,11$	$21! = \bar{8}943,1111$
$4! = 31$	$10! = 8421$	$16! = \bar{5}632,11$	$22! = \bar{9}943,2111$
$5! = 311$	$11! = 8421,1$	$17! = \bar{5}632,111$	$23! = \bar{9}943,2111,1$
$6! = 421$	$12! = \bar{0}521,1$	$18! = \bar{6}832,111$	$24! = \bar{2}043,2111,1$

Таблица L

$$(j_1 m_1 \frac{1}{2} m_2 | jm)$$

$j =$	$m_2 = \frac{1}{2}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 - m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_1 - m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}}$

Таблица LI

$$(j_1 m_1 m_2 | jm)$$

$j =$	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m)(j_1 + m + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m + 1)(j_1 + m + 1)}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1 + m)(j_1 - m + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 + m + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}}$
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)}{2j_1(2j_1 + 1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 + m)}{j_1(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m + 1)(j_1 + m)}{2j_1(2j_1 + 1)}}$

$$(j_1 m_1 \quad \frac{3}{2} m_2 \quad j m)$$

$j =$	$m_2 = \frac{3}{2}$	$m_3 = \frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{3}{2})}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{3}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{2j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 3)}}$	$-(j_1 - 3m + \frac{3}{2})\sqrt{\frac{1}{2j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 3)}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$-(j_1 + 3m - \frac{1}{2})\sqrt{\frac{1}{(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$
$j_1 - \frac{3}{2}$	$-\sqrt{\frac{(j_1 - m - \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{2j_1(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 - m - \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})}{2j_1(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)}}$

$j =$	$m_3 = -\frac{1}{2}$	$m_3 = -\frac{3}{2}$
$j_1 + \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m + \frac{3}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m - \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{3}{2})}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$(j_1 + 3m + \frac{3}{2}) \sqrt{\frac{j_1 - m + \frac{1}{2}}{2j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m + \frac{3}{2})(j_1 - m - \frac{1}{2})(j_1 - m + \frac{1}{2})}{2j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 3)}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-(j_1 - 3m - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{j_1 + m + \frac{1}{2}}{(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{3}{2})(j_1 - m - \frac{1}{2})}{(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$
$j_1 - \frac{3}{2}$	$-\sqrt{\frac{3(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 - m - \frac{1}{2})}{2j_1(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{1}{2})(j_1 + m + \frac{3}{2})}{2j_1(2j_1 - 1)(2j_1 + 1)}}$

$(j_1 m_1 2 m_2 | j m)$

$j =$	$m_2 = 2$	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$
$j_1 + 2$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - 1)(j_1 + m)(j_1 + m + 1)(j_1 + m + 2)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)(2j_1 + 4)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m + 2)(j_1 + m + 2)(j_1 + m + 1)(j_1 + m)}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)(2j_1 + 3)(j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 - m + 2)(j_1 - m + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)(j_1 + 2)}} \times V(j_1 + m + 2)(j_1 + m + 1)$
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - 1)(j_1 + m)(j_1 + m + 1)(j_1 - m + 2)}{2j_1(j_1 + 1)(j_1 + 2)(2j_1 + 1)}}$	$-U_1 - 2m + 2 \sqrt{\frac{(j_1 + m + 1)(j_1 + m)}{2j_1(2j_1 + 1)(j_1 + 1)(j_1 + 2)}}$	$m \sqrt{\frac{3(j_1 - m + 1)(j_1 - m + 1)}{j_1(2j_1 + 1)(j_1 + 1)(j_1 + 2)}}$
j_1	$\sqrt{\frac{3(j_1 + m - 1)(j_1 + m)(j_1 - m + 1)(j_1 - m + 2)}{(2j_1 - 1)2j_1(j_1 + 1)(2j_1 + 3)}}$	$(1 - 2m) \sqrt{\frac{3(j_1 - m + 1)(j_1 + m)}{(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$	$\frac{3m^2 - j_1(j_1 + 1)}{V(2j_1 - 1)j_1(j_1 + 1)(2j_1 + 3)}$
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - 1)(j_1 - m)(j_1 - m + 1)(j_1 - m + 2)}{2(j_1 - 1)j_1(j_1 + 1)(2j_1 + 1)}}$	$(j_1 + 2m - 1) \sqrt{\frac{(j_1 - m + 1)(j_1 - m)}{(j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$-m \sqrt{\frac{3(j_1 - m)(j_1 + m)}{(j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)(j_1 + 1)}}$
$j_1 - 2$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m - 1)(j_1 - m)(j_1 - m + 1)(j_1 - m + 2)}{(2j_1 - 2)(2j_1 - 1)2j_1(2j_1 + 1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1 - m + 1)(j_1 - m)(j_1 - m - 1)(j_1 + m - 1)}{(j_1 - 1)(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 - m)(j_1 - m - 1)(j_1 + m)(j_1 + m - 1)}{(2j_1 - 2)(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)}}$

$j =$	$m_2 = -1$	$m_2 = -2$
$j_1 + 2$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m + 2)(j_1 - m + 1)(j_1 - m)(j_1 + m + 2)}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)(2j_1 + 3)(j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m - 1)(j_1 - m)(j_1 - m + 1)(j_1 - m + 2)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)(2j_1 + 4)}}$
$j_1 + 1$	$(j_1 + 2m + 2) \sqrt{\frac{(j_1 - m + 1)(j_1 - m)}{j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)(j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m - 1)(j_1 - m)(j_1 - m + 1)(j_1 + m + 2)}{j_1(2j_1 + 1)(j_1 + 1)(2j_1 + 4)}}$
j_1	$(2m + 1) \sqrt{\frac{3(j_1 - m)(j_1 + m + 1)}{(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1 - m - 1)(j_1 - m)(j_1 + m + 1)(j_1 + m + 2)}{(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 2)(2j_1 + 3)}}$
$j_1 - 1$	$-(j_1 - 2m - 1) \sqrt{\frac{(j_1 + m + 1)(j_1 + m)}{(j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m - 1)(j_1 + m)(j_1 + m + 1)(j_1 + m + 2)}{(j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$
$j_1 - 2$	$-\sqrt{\frac{(j_1 - m - 1)(j_1 + m + 1)(j_1 + m)(j_1 + m - 1)}{(j_1 - 1)(2j_1 - 1)j_1(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m - 1)(j_1 + m)(j_1 + m + 1)(j_1 + m + 2)}{(2j_1 - 2)(2j_1 - 1)2j_1(2j_1 + 1)}}$

$$W\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{1}{2}; L\right)$$

	$l_1 = J_1 + \frac{1}{2}$	$l_1 = J_1 - \frac{1}{2}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L} \left[\frac{(J_1 + J_2 + L + 2)(J_1 + J_2 - L + 1)^{\frac{1}{2}}}{(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)} \right]$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L} \left[\frac{(L - J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 - J_2)^{\frac{1}{2}}}{(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)} \right]$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L} \left[\frac{(L + J_1 - J_2 + 1)(L - J_1 + J_2)^{\frac{1}{2}}}{(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2)(2J_2 + 1)} \right]$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L - 1} \left[\frac{(J_1 + J_2 + L + 1)(J_1 + J_2 - L)^{\frac{1}{2}}}{(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_2)(2J_2 + 1)} \right]$

Таблица LV

$$W(l_1 J_1 l_2 J_2; 1, L)$$

	$l_2 = J_2 + 1$
$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L} \left[\frac{(L + J_1 + J_2 + 3)(L + J_1 + J_2 + 2)(-L + J_1 + J_2 + 2)(-L + J_1 + J_2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{4(2J_1 + 3)(J_1 + 1)(2J_1 + 1)(2J_2 + 3)(J_2 + 1)(2J_2 + 1)} \right]$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1 + J_2 - L} \left[\frac{(L + J_1 + J_2 + 2)(-L + J_1 + J_2 + 1)(L - J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 - J_2)^{\frac{1}{2}}}{4J_1(2J_1 + 1)(J_1 + 1)(2J_2 + 1)(J_2 + 1)(2J_2 + 3)} \right]$

$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{4(2J_1+1)(2J_1-1)(J_1)(J_2+1)(2J_2+1)(2J_2+3)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2$	
$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(J_1+J_2-L+1)(L-J_1+J_2)}{4(2J_1+1)(J_1+1)(2J_1+1)(2J_1+3)(J_2)(J_2+1)(2J_2+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{J_1(J_1+1) + J_2(J_2+1) - L(L+1)}{[4J_1(J_1+1)(2J_1+1)(J_2)(J_2+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}}} \right]$
$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2+1)}{4(2J_1+1)(J_1)(2J_1-1)(J_2)(2J_2+1)(J_2+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 1$	
$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{4(2J_1+1)(J_1+1)(2J_1+1)(2J_1+3)(J_2)(2J_2+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2+1)(L+J_2-1)(J_1+J_2-L)}{4J_1(2J_1+1)(J_1+1)(J_2)(2J_2+1)(2J_2-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)}{4(2J_1+1)(J_1)(2J_1-1)(2J_2+1)(J_2)(2J_2-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$W\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} L\right)$$

$$l_1 = J_1 + 1/2$$

$l_2 = J_2 + \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+3)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \right] \frac{1}{2}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(L-J_1+J_2)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right] \frac{1}{2}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(J_1+J_2-L+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)} \right] \frac{1}{2}$
$l_2 = J_2 - \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L-J_1+J_2-2)(L+J_1-J_2+3)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)} \right] \frac{1}{2}$

$$I_1 = J_1 + \frac{1}{2}$$

$$I_2 = J_2 + \frac{3}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_3 = J_3 + \frac{1}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L-1} \frac{\frac{1}{2} [(L+J_1+J_2+1)]^2 [(L+J_1+J_2+3)(-L+J_1+J_2)-2(L-J_1+J_2)(L+J_1+J_2)]}{[(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)]^{1/2}}$$

$$I_4 = J_4 - \frac{1}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L-1} \frac{\frac{1}{2} [(L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2)]^2 [2(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2)-(L-J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2)]}{[(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)]^{1/2}}$$

$$I_5 = J_5 - \frac{3}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)]^{\frac{1}{2}}}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)} \right]$$

$$l_1 = J_1 - \frac{1}{2}$$

$$l_2 = J_2 + \frac{3}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)}{(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$l_2 = J_2 + \frac{1}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L} \frac{[(L-J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L+J_1-J_2-1)-2(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2)]}{[(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)]^{1/2}}$$

$$l_2 = J_2 - \frac{1}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L} \frac{[(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)]^2 [(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2-1)-2(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2)]}{[(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)]^{1/2}}$$

$$l_2 = J_2 - \frac{3}{2} \quad (-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L-J_1+J_2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2-1)}{(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_1 = J_1 - \frac{3}{2}$$

$$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)(L-J_1+J_2+3)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_1-3)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_2 = J_2 + \frac{3}{2}$$

$$(-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_3 = J_3 + \frac{1}{2}$$

$$(-1)^{J_1+J_2-L} \left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_4 = J_4 - \frac{1}{2}$$

$$(-1)^{J_1+J_2-L-1} \left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2-2)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_5 = J_5 - \frac{3}{2}$$

$$W(l_1 J_1 l_2 J_2; 2L)$$

$$l_1 = J_1 + 2$$

$$l_2 = J_2 + 2 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1) \cdot (2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \right. \\ \left. \times \frac{(L+J_1+J_2+5)(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2) \times}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \right] \frac{1}{2}$$

$$l_2 = J_2 + 1 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right. \\ \left. \times \frac{4(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1+J_2+1) \times}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right] \frac{1}{2}$$

$$l_2 = J_2 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right. \\ \left. \times \frac{6(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2) \times}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right] \frac{1}{2}$$

$$l_2 = J_2 - 1 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right. \\ \left. \times \frac{4(L+J_1+J_2+2)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2-2)(L+J_1+J_2+3) \times}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right] \frac{1}{2}$$

$$l_2 = J_2 - 2 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2)} \right. \\ \left. \times \frac{(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2-2)(L+J_1+J_2-3) \times}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2)} \right] \frac{1}{2}$$

$$I_1 = J_1 + 1$$

$$I_2 = J_2 + 2 \quad \left[4 \frac{(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1) \times}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_2 = J_2 + 1 \quad \left[\frac{(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 4 \cdot (J_1+1)(J_1-J_2) - L(L+1) + J_2(J_2+2)$$

$$I_2 = J_2 \quad \left[\frac{6(L+J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 2 \cdot [J_1(J_1+2) + J_2(J_2+1) - L(L+1)]$$

$$I_2 = J_2 - 1 \quad \left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1-2)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 4 [J_1(J_1+2) + J_2(J_2+1) + J_1J_2 - L(L+1)]$$

$$I_2 = J_2 - 2 \quad \left[\frac{4(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1) \times}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_1-3)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$l_3 = J_3 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{6(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times (L+J_1-J_2)(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$l_3 = J_3 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1} \left[\frac{6(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 2 \cdot [J_1(J_1+1) + J_2(J_2+2) - L(L+1)]$
$l_3 = J_3$	$(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{1}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 6 \cdot \left[A(A+1) - \frac{4}{3} J_1(J_1+1) J_2(J_2+1) \right], \text{ rre } A \equiv L(L+1) - J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1)$
$l_3 = J_3 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{6(L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2)}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times 2 \cdot [J_1(J_1+1) - L(L+1) + J_2^2 - 1]$
$l_3 = J_3 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{6(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1) \times (L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)(2J_2-3)} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$l_1 = J_1 - 1$$

$$l_2 = J_2 + 2 \quad \left[\frac{4(L + J_1 + J_2 + 2)(-L + J_1 + J_2 + 1)(L - J_1 + J_2 + 3)(L - J_1 + J_2 + 2) \times (L - J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 - J_2 - 1)(L + J_1 - J_2 - 2)}{(2J_1 - 2)(2J_1 - 1)(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)(2J_2 + 3)(2J_2 + 4)(2J_2 + 5)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$l_2 = J_2 + 1 \quad \left[\frac{(L - J_1 + J_2 + 2)(L - J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 - J_2)(L + J_1 - J_2 - 1)}{(2J_1 - 2)(2J_1 - 1)(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)(2J_2 + 3)(2J_2 + 4)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times 4 \cdot [(J_1 - 1)(J_1 + J_2 + 2) - (L + J_2 + 2)(L - J_2 - 1)]$$

$$l_2 = J_2 \quad \left[\frac{6(L + J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 - J_2)(-L + J_1 + J_2)(L - J_1 + J_2 + 1)}{(2J_1 - 2)(2J_1 - 1)(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 - 1)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)(2J_2 + 3)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times 2 \cdot [J_1^2 - 1 - (L + J_2 + 1)(L - J_2)]$$

$$l_2 = J_2 - 1 \quad \left[\frac{(L + J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 + J_2)(-L + J_1 + J_2)(-L + J_1 + J_2 - 1)}{(2J_1 - 2)(2J_1 - 1)(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 - 2)(2J_2 - 1)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times 4 \cdot [(J_1 - 1)(J_1 - J_2 + 1) - (L + J_2)(L - J_2 + 1)]$$

$$l_2 = J_2 - 2 \quad \left[\frac{4(L + J_1 + J_2 + 1)(L + J_1 + J_2)(L + J_1 + J_2 - 1)(L + J_1 - J_2 + 1) \times (L + J_1 + J_2 - 1)(L + J_1 + J_2 - 2)(L - J_1 + J_2)}{(2J_1 - 2)(2J_1 - 1)(2J_1)(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)(2J_2 - 2)(2J_2 - 1)(2J_2 + 1)(2J_2 + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

	$l_1 = J_1 - 2$	
$l_2 = J_2 + 2$	$\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)} \times \right.$	$\left. \frac{(L+4-J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)(L+J_1-J_2-3)} \right]$
$l_2 = J_2 + 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2-1}}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \times \right.$	$\left. \frac{4(L+1+J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)(-L+J_1+J_2)} \right]$
$l_2 = J_2$	$\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \times \right.$	$\left. \frac{6(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)} \right]$
$l_2 = J_2 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)} \times \right.$	$\left. \frac{4(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+1-J_1+J_2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+1)(2J_2-1)(2J_2-2)} \right]$
$l_2 = J_2 - 2$	$\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2}}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1) \cdot (2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)} \times \right.$	$\left. \frac{(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2-2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_2-1)(2J_2-2)(-L+J_1+J_2-3)} \right]$

ЛИТЕРАТУРА

К части I

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1941.
- [3] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955.
- [4] J. Blaton, Det Kgl. Vidensk. Selsk. Mat-fys. Medd. **24**, № 20 (1950).
- [5] H. Bradt, M. Karlon, B. Peters, Helv. Phys. Acta **23**, 26 (1950).
- [6] R. Armenteros, K. H. Barker, C. C. Butler, A. Sahn, Phil. Mag. **42**, 1113 (1951).
- [7] С. С. Батлер, УФН **43**, 389 (1952).
- [8] И. Л. Розенталь, УФН **54**, 405 (1954).
- [9] Д. В. Скобельцин, Сборник «Памяти С. И. Вавилова», стр. 292 (1952).
- [10] A. G. Carlson, J. E. Hooper, D. T. King, Phil. Mag. **41**, 701 (1950).
- [11] Г. И. Копылов, ЖЭТФ **33**, 430 (1957).
- [12] G. Cossion, A. Silverman, Phys. Rev. **88**, 1230 (1952).
- [13] А. А. Тяпкин, ЖЭТФ **30**, 1150 (1956).
- [14] А. Н. Rosenfeld, Phys. Rev. **96**, 139 (1954).
- [15] Ю. Д. Прокошин, ЖЭТФ **31**, 732 (1956).
- [16] R. Sternheimer **99**, 277 (1955).
- [17] Э. Ферми, Элементарные частицы, ИЛ, 1952.
- [18] E. Fermi, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
- [19] O. Kofoed Hansen, Phil. Mag. **42**, 1411 (1951).
- [20] М. И. Подгорецкий, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **26**, № 8 (1954).
- [21] R. Sternheimer, Phys. Rev. **93**, 642 (1954).
- [22] Н. Г. Биргер, Н. Л. Григорьев, В. В. Гусева, Г. Б. Жданов, С. А. Славатинский, Г. М. Сташков, ЖЭТФ **31**, 971 (1956).
- [23] С. З. Беленький, В. М. Максименко, А. И. Никишов, И. Л. Розенталь, УФН **62**, № 2 (1957).
- [24] Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физич. **17**, 51 (1953).
- [25] А. И. Никишов, Диссертация, ФИАН, 1957.
- [26] В. М. Максименко, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **32**, № 4 (1957).
- [27] C. V. Leroque, R. N. Stuart, Phys. Rev. **94**, 1724 (1954).
- [28] И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **28**, 118 (1955).
- [29] R. G. Glasser, M. Schein, Phys. Rev. **90**, 218 (1953).
- [30] C. C. Dilworth, S. J. Goldsack, T. F. Huang, L. Scara, Nuovo Cimento, **X** 1261 (1953).
- [31] C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini, D. Mogeno, Nuovo Cimento, **X** 1539 (1953).
- [32] А. И. Никишов, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **35**, 165 (1958).
- [33] Л. Г. Яковлев, ЖЭТФ **31**, 142 (1956).
- [34] В. М. Максименко, ЖЭТФ **33**, 232 (1957).
- [35] Н. Г. Биргер, Ю. А. Смородин, ЖЭТФ **36**, 1159 (1959).

К части II

1. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1949.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.
3. В. А. Фок, Начала квантовой механики.
4. E. Wigner, Göttingen Nachrichten **31**, 546 (1932).
5. S. Watanabe, Rev. Mod. Phys. **27**, 26 и 40 (1953).

$$l_1 = J_1 - 2$$

$$l_3 = J_3 + 2 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{(L+4-J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)} \cdot (2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1) \right]}{2} \right]$$

$$l_3 = J_3 + 1 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2-1} \left[\frac{4(L+1+J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)} \cdot (2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2) \right]}{2} \right]$$

$$l_3 = J_3 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{6(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)} \cdot (2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1) \right]}{2} \right]$$

$$l_3 = J_3 - 1 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{4(L+1+J_2+J_3)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+1-J_1+J_2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)} \cdot (2J_2+1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2-1)(2J_2-2) \right]}{2} \right]$$

$$l_3 = J_3 - 2 \quad \left[\frac{(-1)^{L-J_1-J_2} \left[\frac{(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2-2) \times}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)} \cdot (2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)(2J_2-3) \right]}{2} \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

К части I

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1941.
- [3] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955.
- [4] J. Biaton, Det Kgl. Vidensk. Selsk. Mat-fys. Medd. **24**, № 20 (1950).
- [5] H. Bradt, M. Karlon, B. Peters, Helv. Phys. Acta **23**, 26 (1950).
- [6] R. Armenteros, K. H. Barker, C. C. Butler, A. Sahn, Phil. Mag. **42**, 1113 (1951).
- [7] С. С. Батлер, УФН **43**, 389 (1952).
- [8] И. Л. Розенталь, УФН **54**, 405 (1954).
- [9] Д. В. Скобельцин, Сборник «Памяти С. И. Вавилова», стр. 292 (1952).
- [10] A. G. Carlsson, J. E. Hooper, D. T. King, Phil. Mag. **41**, 701 (1950).
- [11] Г. И. Копылов, ЖЭТФ **33**, 430 (1957).
- [12] G. Cossioni, A. Silverman, Phys. Rev. **88**, 1230 (1952).
- [13] А. А. Тяпкин, ЖЭТФ **30**, 1150 (1956).
- [14] А. Н. Rosenfeld, Phys. Rev. **96**, 139 (1954).
- [15] Ю. Д. Прокошин, ЖЭТФ **31**, 732 (1956).
- [16] R. Sternheimer **99**, 277 (1955).
- [17] Э. Ферми, Элементарные частицы, ИЛ, 1952.
- [18] E. Fermi, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
- [19] O. Kofoed Hansen, Phil. Mag. **42**, 1411 (1951).
- [20] М. И. Подгорецкий, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **26**, № 8 (1954).
- [21] R. Sternheimer, Phys. Rev. **93**, 642 (1954).
- [22] Н. Г. Биргер, Н. Л. Григорьев, В. В. Гусева, Г. Б. Жданов, С. А. Блаватинский, Г. М. Сташков, ЖЭТФ **31**, 971 (1956).
- [23] С. З. Беленький, В. М. Максименко, А. И. Никишов, И. Л. Розенталь, УФН **62**, № 2 (1957).
- [24] Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физич. **17**, 51 (1953).
- [25] А. И. Никишов, Диссертация, ФИАИ, 1957.
- [26] В. М. Максименко, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **32**, № 4 (1957).
- [27] C. V. Leroque, R. N. Stuart, Phys. Rev. **94**, 1724 (1954).
- [28] И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **23**, 118 (1955).
- [29] R. G. Glasser, M. Schein, Phys. Rev. **90**, 218 (1953).
- [30] C. C. Dilworth, S. J. Goldsack, T. F. Huang, L. Scara, Nuovo Cimento, **X** 1261 (1953).
- [31] S. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini, D. Moreno, Nuovo Cimento, **X** 1539 (1953).
- [32] А. И. Никишов, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **35**, 165 (1958).
- [33] Л. Г. Яковлев, ЖЭТФ **31**, 142 (1956).
- [34] М. В. Максименко, ЖЭТФ **33**, 232 (1957).
- [35] Н. Г. Биргер, Ю. А. Смородин, ЖЭТФ **36**, 1159 (1959).

К части II

1. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1949.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.
3. В. А. Фок, Начала квантовой механики.
4. E. Wigner, Göttingen Nachrichten **31**, 546 (1932).
5. S. Watanabe, Rev. Mod. Phys. **27**, 26 и 40 (1953).

6. Д. Блатти В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.
7. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1957.
8. Р. М. Рындин, Диссертация ОЯИ (1957).
9. Э. Ферми, Лекции о π -мезонах и нуклонах, ИЛ, 1956.
10. А. М. Балдин и В. А. Петрунькин, ЖЭТФ **32**, 1570 (1957).
11. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948.
12. E. Wigner. Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, 1931.
13. G. Racah, Phys. Rev. **61**, 186 (1942); **62**, 438 (1942), **63**, 367 (1943).
14. G. Morgurgo, L. A. Radicati and B. F. Touschek, Nuovo Cimento **XII**, 675 (1954).
15. L. Biedenharn, J. Blatt and M. Rose. Rev. Mod. Phys. **24**, 249 (1952).
16. G. Racah and V. Fano (не опубликовано).
17. A. Arima, H. Horie and Y. Tanabe, Prog. Theor. Phys. **11**, 143 (1954).
18. A. Simon, Phys. Rev. **92**, 1050 (1953)
19. J. Blatt and L. Biedenharn, Rev. Mod. Phys. **24**, 258 (1952).
20. А. Хиззери В. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, 1952.
21. F. Coester, Phys. Rev. **89**, 619 (1953); R. Huby. Proc. Phys. Soc. **67A**, 1103 (1954).
22. К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ **21**, 894 (1950).
23. А. М. Балдин, М. И. Широков, ЖЭТФ **30**, 784 (1956).
24. М. И. Широков, ЖЭТФ **32**, 1022 (1957).
25. A. Simon, Phys. Rev. **93**, 1435 (1954).
26. M. Morita, A. Sugie, S. Yoshido, Prog. Theor. Phys. **12**, 713 (1954).
27. L. C. Biedenharn, M. E. Rose. Rev. Mod. Phys. **25**, 735 (1953).
28. C. N. Yang, Phys. Rev. **74**, 764 (1948).
29. A. Simon and T. Welton, Phys. Rev. **90**, 1037.
30. L. C. Biedenharn, Oak Ridge National Laboratory Reports, 1098 (1952); 1501 (1953); 1679 (1954).
31. M. Peshkin and A. I. E. Siegert, Phys. Rev. **87**, 735 (1952).
32. S. Minami, Prog. Theor. Phys. **11**, 213 (1954), S. Hayaakawa, M. Kawaguchi, S. Minashi, Prog. Theor. Phys. **11**, 332 (1954).
33. Р. Рындин и Я. Смородинский, ДАН **103**, 69 (1955).
34. G. Wick, Phys. Rev. **75**, 1459 (1949); Л. И. Лапидус, ЖЭТФ **31**, 1099 (1956).
35. H. Bethe, F. Rohrlich, Phys. Rev. **86**, 10 (1952).
36. H. Matsunobu, H. Takebe, Prog. Theor. Phys. **14**, 589 (1955).
37. W. T. Sharp, J. M. Kennedy, B. J. Sears, M. G. Hoyle, Chalk River Report, CRT-556 (1953), J. M. Kennedy, B. J. Sears, W. T. Sharp, Chalk River Report, CRT-569 (1954).
38. S. Obi, T. Ishidzu, H. Horie, S. Yanagawa, V. Tanabe, M. Sato, An. Tokyo Astr. Observ., Second Series., III, 3 (1953); IV, 1 (1954); IV, 2 (1955).

