ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

М. Б. БАЛК, В. А. ПЕТРОВ, А. А. ПОЛУХИН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ПРОСВЕЩЕНИЕ

1976

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

М. Б. БАЛК, В. А. ПЕТРОВ, А. А. ПОЛУХИН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие для студентов-заочников педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1976

Одобрено кафедрой математического анализа
Государственного заочного педагогического института

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Б $\frac{60602-513}{103(03)-76}$ зак изд.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник-практикум предназначен для студентов-математиков заочных отделений педагогических институтов. Он составлен в соответствии с действующей программой курса «Математический анализ и теория функций» и охватывает раздел «Теория аналитических функций».

Значительно большее внимание по сравнению с другими сборниками подобного рода здесь уделено упражнениям, которые могут быть использованы на факультативных занятиях в школе, и упражнениям, позволяющим учителю более глубоко осмыслить отдельные вопросы школьного курса математики.

В начале каждого параграфа указана литература, в которой читатель найдет необходимый минимум теоретических сведений. Студенту-заочнику достаточно воспользоваться одной (любой) из трех книг [1] — [3].

[1] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. Изд. 3-е, испр. и доп. М., «Наука», 1966.

[2] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 11-е. М., «Наука», 1967.

[3] Хапланов М. Г. Теория функций комплексного переменного. (Краткий курс). Изд. 2-е. М., «Просвещение», 1965.

По каждой теме указаны соответствующие параграфы (или страницы) этих книг. При отсутствии основных источников студент может воспользоваться и другой литературой, в частности:

[4] Евграфов М. А. Аналитические функции. Изд. 2-е, испр. и доп. М., «Наука», 1968.

[5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е, испр. М., «Наука», 1973.

[6] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Изд. 2-е. Т. 1, 2. М., «Наука», 1967—1968.

[7] Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Изд. 2-е, стереотип. М., «Наука», 1970.

[8] Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Изд. 3-е. М., «Наука», 1964.

[9] Цыркин М. Я. Краткий курс теории функций комплексного переменного. Пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1964.

[10] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969.

После ознакомления с теоретическими сведениями по материалу того или иного параграфа студент может приступить к решению задач. При этом можно ограничиться лишь некоторым минимумом задач. В такой минимум рекомендуем включить следующие задачи: 4, 6, 7, 10, 14, 17, 27, 36, 38, 46, 53, 54, 61, 69, 81, 86, 95, 104, 105, 114, 127, 132, 145, 151, 161, 166, 170, 174, 180, 185, 202, 204, 205, 207, 208, 214, 222, 228, 234, 248, 258, 267, 273, 274, 276 (д), 277, 285, 298, 315 (а), 328, 339, 353, 360, 366, 372, 384, 393, 399, 403, 408, 416, 423, 432, 438, 444, 448, 458, 462, 476, 480, 488, 504, 519, 522, 526, 538, 545, 578, 580.

Задачи минимума желательно решать в том порядке, в котором они расположены в параграфе, учитывая приведенные в тексте методические указания и замечания. Некоторые из указанных задач даны вместе с решениями; однако желательно, чтобы студент попытался их решить самостоятельно, обращаясь к решениям лишь в случае, когда у него возникнут затруднения. Самостоятельно полученное решение целесообразно сравнить с тем, которое приведено в тексте. Почти все задачи снабжены ответами.

Некоторые задачи (189—201, 316—320, 548—570, 588—598) студент-заочник может не решать. Включение этих задач продиктовано желанием дать материал для курсовых работ, спецсеминаров и спецкурсов по теории аналитических функций.

Авторы благодарят кафедры математического анализа МГЗПИ и Смоленского педагогического института за ряд ценных советов.

Авторы

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИСТОЛКОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], гл. I, п. 1, 2; [2], гл. I, § 1, 2; [3], Введение.

Как известно из курса алгебры, всякое комплексное число можно записать в виде $a + bi$ (a и b — действительные числа); при этом a называется вещественной (или действительной) частью числа и обозначается $\operatorname{Re} z$, b — *мнимой* частью и обозначается $\operatorname{Im} z$. Два комплексных числа z_1 и z_2 считаются равными тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Для числа $z = a + bi$ *сопряженным* называется число $\overline{z} = a - bi$. Легко убедиться в том, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы тождества:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Комплексное число $z = a + bi$ может быть истолковано как точка Z на декартовой координатной плоскости xOy с координатами $(a; b)$. Число z называется комплексной координатой[1] точки Z. Расстояние r от точки Z, изображающей число z, до начала координат называется модулем z и обозначается через $|z|$; угол α наклона вектора $\overrightarrow{OZ}$ к оси Ox называется аргументом числа z и обозначается через $\operatorname{Arg} z$. У каждого числа $z \neq 0$ имеется бесконечно много аргументов. Тот из них, который заключен между $-\pi$ и π, называется главным значением аргумента (короче, главным аргументом) и обозначается так: $\arg z$. Точнее говоря, по определению

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Справедливы следующие зависимости:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\quad |z|^2 = z \cdot \overline{z},\quad z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

(тригонометрическая форма комплексного числа).

---

[1] Вместо выражения «точка с комплексной координатой z» часто говорят: «точка z», «число z».

Полезно учесть, что выражение $|z_2 - z_1|$ (z_1 и z_2 — комплексные числа) можно истолковать геометрически как расстояние между точками с комплексными координатами z_1 и z_2 и что справедливы соотношения

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_2 - z_1| > ||z_2| - |z_1||,$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Напомним еще так называемую **ф о р м у л у М у а в р а**

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

и формулу для извлечения корня n-й степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Из этой формулы видно, что выражение $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ имеет n различных значений. Геометрически эти значения изображаются как вершины некоторого правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ радиуса $\sqrt[n]{r}$.

1. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно квадрату другого?

Р е ш е н и е. Обозначим искомые числа через z и z_1, $z \neq z_1$. Для них должны выполняться условия

$$\begin{cases} z = z_1^2, \\ z_1 = z^2, \end{cases}$$

откуда $z = z^4$ или $z(z^3 - 1) = 0$. Решая последнее уравнение, найдем четыре возможных значения z:

$$z = 0, \quad z = 1, z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь из системы найдем соответствующие значения z_1:

$$z_1 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, пару чисел (и притом единственную), удовлетворяющую условию задачи, образуют числа $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Доказать, что для любых вещественных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\left|\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right| \leqslant |c - b|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{a^2 + c^2}$ можно рассматривать как модули комплексных чисел $z_1 = b + ai$ и $z_2 = c + ai$ соответственно. В силу неравенства $|z_2 - z_1| \geqslant ||z_2| - |z_1||$ имеем:

$$|c - b| \geqslant \left|\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right|.$$

3. Найти целое число n, если $(1+i)^n = (1-i)^n$.

4. Вычислить:

а) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1002}$; б) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$; в) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

5. Решить уравнение:

а) $z^2 + |z| = 0$; б) $|z| + z = 2 + i$.

6. Может ли случиться, что:

а) модуль разности двух комплексных чисел окажется равным сумме модулей этих чисел?

б) модуль суммы двух комплексных чисел окажется равным разности модулей этих чисел?

в) модуль разности двух комплексных чисел окажется большим, чем сумма модулей этих чисел?

Ответы обосновать.

7. Вычислить все значения следующих корней:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{i}$; в) $\sqrt{1-i}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Полученные значения корней изобразить в виде точек на комплексной плоскости.

8. «Очевидно, что $i^{21} = (i^4)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$; с другой стороны, $i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1^5 i = i$. Следовательно, $i = 1$». В чем ошибка?

Указание. Внимательно прочтите последний абзац п. 2, гл. I книги [1].

9. «Пусть требуется решить уравнение $\sqrt{6-x} + xi = (x-6) + 7i$ в действительных числах. Так как для равенства двух комплексных чисел необходимо равенство их мнимых частей, то заключаем, что $x = 7$. Но данное уравнение можно, очевидно, привести к виду

$$6 - x = (7-x)i - i\sqrt{x-6}.$$

Подставив найденное значение x, получим $i = 1$.» Где ошибка?

10. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно кубу другого? Сколько таких пар чисел имеется?

11. Пусть $z = a + bi$. Верно ли, что $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$? Ответ обосновать.

12. Доказать, что $\arg z = 2\operatorname{arctg}\frac{b}{a+|z|}$, если $z = a + bi$ не является вещественным отрицательным числом или нулем.

Указание. Обозначить $\arg z = \theta$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a+|z|} = \varphi$ и сравнить $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ и $\operatorname{tg}\varphi$.

В математике и ее приложениях часто встречается выражение вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$ (φ — вещественное число). Для него используют различные сокращенные обозначения. Например, в картографии его обозначают знаком 1_φ, в электротехнике — знаком $\angle\varphi$, а в работах по математике — через $\exp(i\varphi)$ или $e^{i\varphi}$. Таким образом, по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.1}$$

Через $e^{-i\varphi}$ обозначают число

$$e^{i(-\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{1.2}$$

Обозначение (1.1) оправдано сходством свойств выражений вида $e^{i\varphi}$ со свойствами показательной функции. Например, при любых вещественных α, β и φ справедливы следующие формулы[1]:

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \tag{1.3}$$

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}, \tag{1.4}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i(n\varphi)} \quad (n \text{ — любое целое число}). \tag{1.5}$$

Последняя формула представляет собой формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{1.6}$$

Из (1.1) и (1.2) легко выводятся формулы:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \tag{1.7}$$

Соотношение (1.1) называется *формулой Эйлера*[2]. Оно позволяет каждое комплексное число z записать в виде (*показательная форма*)

$$z = re^{i\varphi},$$

где φ — аргумент числа z, а r — его модуль.

13. Пусть $z_1 = Re^{i\alpha}$, $z_2 = Re^{i\beta}$ $(0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi)$. Доказать[3], что

$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1|\cdot ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{1.8}$$

Доказательство. С помощью формул (1.3) и (1.7) можем записать:

$$z_2 - z_1 = R(e^{i\beta} - e^{i\alpha}) = 2Rie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}}}{2i} =$$

$$= 2Ri\sin\frac{\beta-\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

---

[1] В этом можно убедиться, пользуясь формулами сложения тригонометрических функций.

[2] С более общим видом формулы Эйлера мы еще встретимся ниже (см. гл. II, § 8).

[3] z_1 и z_2 можно рассматривать как комплексные координаты двух точек, расположенных на окружности радиуса R с центром в нулевой точке.

Так как $\left| e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right| = 1$, то из полученного соотношения вытекает:

$$|z_2 - z_1| = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Сравнение найденных выражений для $z_2 - z_1$ и $|z_2 - z_1|$ доказывает справедливость формулы (1.8). Эта формула удобна при переходе от модуля разности двух комплексных чисел к самой разности и обратно. Ею можно воспользоваться при решении ряда приведенных ниже геометрических задач.

14. Какие комплексные числа заданы выражениями:

а) $e^{i\cdot 0}$; б) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $e^{i\frac{\pi}{6}}$; г) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$; д) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$?

15. С помощью формулы Муавра выразить $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$ через тригонометрические функции аргумента φ.

16. Доказать, что число $p = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$, где a, b, c — целые числа, можно представить в виде суммы двух точных квадратов. Единственно ли такое представление числа p?

Решение. Число a^2+1, являющееся суммой двух точных квадратов, можно представить как квадрат модуля некоторого комплексного числа z_1 (например, числа $z_1 = a+i$), т. е. $a^2+1 = |z_1|^2$.

Аналогично, полагая $z_2 = b+i$, $z_3 = c+i$, имеем:

$$b^2+1 = |z_2|^2 \text{ и } c^2+1 = |z_3|^2.$$

Тогда

$$p = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = |z_1|^2|z_2|^2|z_3|^2 = \\ = |z_1z_2z_3|^2 = |A+Bi|^2 = A^2+B^2,$$

где $A+Bi = z_1z_2z_3$.

Так как A и B получаются из целых чисел a, b, c и 1 лишь с помощью сложения, вычитания и умножения, то A и B — целые числа. Ясно, что такое представление числа p не единственно, хотя бы потому, что число a^2+1 можно представить как квадрат модуля различных комплексных чисел, например:

$$a^2+1 = |a+i|^2 = |1+ai|^2.$$

17. Вычислить сумму

$$S = 1 + C_n^1\cos\alpha + C_n^2\cos 2\alpha + \ldots + C_n^n\cos n\alpha.$$

Решение. Введем в рассмотрение еще одну сумму:

$$T = C_n^1\sin\alpha + C_n^2\sin 2\alpha + \ldots + C_n^n\sin n\alpha.$$

Очевидно, что S является вещественной частью следующей суммы:

$$S + iT = 1 + C_n^1(\cos\alpha + i\sin\alpha) + C_n^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + \\ + C_n^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

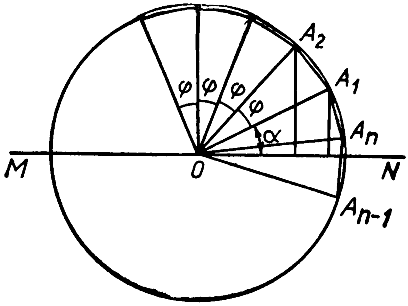


Рис. 1

Преобразуем эту сумму, используя формулы (1.1) — (1.7), и затем выделим ее вещественную и мнимую части:

$$S + iT = 1 + C_n^1 e^{i\alpha} + C_n^2 e^{2i\alpha} + \ldots + C_n^n e^{ni\alpha} = (1 + e^{i\alpha})^n = \left[e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\right]^n = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n \cdot \cos^n\frac{\alpha}{2}\, e^{ni\frac{\alpha}{2}} = 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2} + i\,2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$S = \mathrm{Re}(S + iT) = 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}.$$

18. Через центр правильного n-угольника проведем какую-либо прямую и подсчитаем сумму (S) квадратов расстояний от всех вершин многоугольника до этой прямой. Будет ли эта сумма зависеть от выбора прямой?

Р е ш е н и е. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — данный многоугольник (рис. 1), R — радиус описанной окружности, O — ее центр, MN — какая-либо прямая, проходящая через O.

Пусть $\widehat{NOA_1} = \alpha$, $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Тогда интересующая нас сумма

$$S = R^2\{\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\varphi) + \sin^2(\alpha + 2\varphi) + \ldots + \sin^2[\alpha + (n-1)\varphi]\} = \frac{1}{2}R^2[n - T],$$

где

$$T = \cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 2\varphi) + \ldots + \cos[2\alpha + (2n-2)\varphi].$$

Вычислим T. Согласно формуле Эйлера T является вещественной частью комплексной суммы (сравните с задачей 17):

$$P = e^{i2\alpha} + e^{i(2\alpha+2\varphi)} + \ldots + e^{i[2\alpha+(2n-2)\varphi]}.$$

Сначала найдем P:

$$P = e^{i2\alpha}\left[1 + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{i(2n-2)\varphi}\right] = e^{i2\alpha}\cdot\frac{1 - e^{i2n\varphi}}{1 - e^{i2\varphi}} = 0,$$

так как $2n\varphi = 2n\frac{2\pi}{n} = 4\pi$, а $e^{i\cdot 4\pi} = 1$. Но тогда и $T = 0$, т. е. $S = \frac{1}{2}R^2 n$ и не зависит от выбора прямой MN.

19. Доказать утверждение: если каждое из натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ представимо в виде суммы двух точных квадратов, то их произведение также представимо в виде суммы двух точных квадратов.

В задачах 20—26 вычислить суммы.

20. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots + \cos 99\alpha$.

21. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots + \sin 99\alpha$.

22. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$.

23. $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \ldots + \cos 100\alpha$.

24. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$.

25. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha}$.

26. $\sin^4\frac{\pi}{32} + \sin^4\frac{3\pi}{32} + \sin^4\frac{5\pi}{32} + \ldots + \sin^4\frac{15\pi}{32}$.

Если проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка A — начало вектора — может и не совпасть с началом координат O) на оси координат Ox и Oy равны соответственно a и b, то комплексное число $z = a + bi$ называется комплексной координатой этого вектора. Понятно, что на координатной плоскости точка Z и вектор $\overrightarrow{OZ}$ имеют одинаковые комплексные координаты. Заметим также, что если число $z = a + bi$ — комплексная координата какого-либо вектора $\overrightarrow{AB}$, то длина r этого вектора равна модулю числа z, а угол α между осью Ox и вектором $\overrightarrow{AB}$ есть $\operatorname{Arg} z$. При решении задач полезно учесть следующее:

1) *при сложении двух векторов их комплексные координаты складываются*;

2) *комплексная координата вектора равна разности между комплексными координатами его конца и начала.*

Каждое комплексное число $c \neq 0$ можно истолковать геометрически как оператор поворота и растяжения. Это значит: если вектор $\overrightarrow{AB}$ был подвергнут операциям поворота (на угол α) и растяжения (с коэффициентом растяжения ρ), то его комплексная координата z умножилась на число $c = \rho e^{i\alpha}$; и наоборот, если комплексную координату z какого-либо вектора $\overrightarrow{AB}$ умножить на комплексное число $c = \rho e^{i\alpha}$, то новое число $w = cz$ представляет собой комплексную координату вектора $\overrightarrow{CD}$, который может быть получен из вектора $\overrightarrow{AB}$ путем поворота (на угол α) и растяжения (с коэффициентом растяжения ρ).

27. Концы отрезка Z_1Z_2 (рис. 2) имеют соответственно комплексные координаты z_1 и z_2. Какова комплексная координата z середины этого отрезка?

Решение. Векторы $\overrightarrow{Z_1Z}$ и $\overrightarrow{ZZ_2}$ имеют одну и ту же комплексную координату, которую обозначим буквой c. Так как

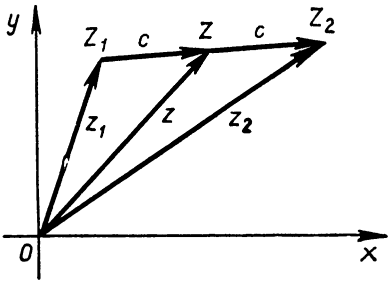


Рис. 2

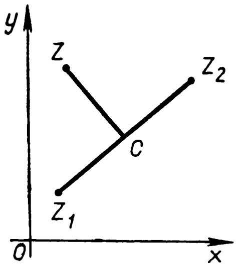


Рис. 3

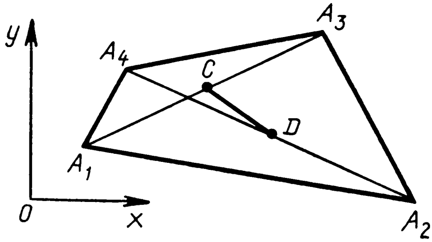


Рис. 4

$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{Z_1Z}$ и $\overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{ZZ_2}$, то $z = z_1 + c, \quad z_2 = z + c$. Исключая c, найдем:

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Итак, *комплексная координата середины какого-либо отрезка равна полусумме комплексных координат его концов.*

28. Известны комплексные координаты z_1 и z_2 точек Z_1 и Z_2; $|Z_1C| = |Z_2C| = |CZ|$, $(CZ) \perp (Z_1Z_2)$ (рис. 3). Вычислить комплексную координату z точки Z.

Решение. Задача сводится к нахождению комплексной координаты вектора $\overrightarrow{OZ}$. Имеем:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CZ}. \tag{1.9}$$

Вектор $\overrightarrow{OC}$ имеет комплексную координату $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ (см. задачу 27). Вектор $\overrightarrow{CZ}$ получается из $\overrightarrow{CZ_2}$ поворотом на $\frac{\pi}{2}$ радиан, вектор $\overrightarrow{CZ_2}$ имеет комплексную координату

$$z_2 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1).$$

Поэтому комплексная координата вектора $\overrightarrow{CZ}$ равна $i \cdot \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$. В силу равенства (1.9)

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2}i(z_2 - z_1).$$

29 (задача Эйлера). Известно, что в каждом параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов его диагоналей. Насколько отличаются те же суммы в случае произвольного четырехугольника?

Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник (рис. 4). Нас интересует величина

$$\sigma = |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A_4|^2 + |A_1A_4|^2 - (|A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2).$$

Выберем на плоскости декартову систему координат xOy. Обозначим комплексные координаты вершин соответственно z_1, z_2, z_3, z_4. Тогда

$$\sigma = |z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2 + |z_4 - z_3|^2 + \\ + |z_1 - z_4|^2 - (|z_3 - z_1|^2 + |z_4 - z_2|^2).$$

С помощью равенства

$$|z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)\overline{(z_2 - z_1)} = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = \\ = (z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$$

получим:

$$\sigma = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + \\ + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 - (z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2) + \\ + z_3\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_4 - (z_3\bar{z}_4 + z_4\bar{z}_3) + \\ + z_4\bar{z}_4 + z_1\bar{z}_1 - (z_4\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_4) - \\ - [z_1\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_3 - (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)] - \\ - [z_2\bar{z}_2 + z_4\bar{z}_4 - (z_2\bar{z}_4 + z_4\bar{z}_2)].$$

Сгруппируем члены, содержащие сомножитель z_1, затем члены, содержащие z_2, и т. д. Получим:

$$\sigma = (z_1 - z_2 + z_3 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + \bar{z}_3 - \bar{z}_4) = |z_1 - z_2 + z_3 - z_4|^2.$$

Каков геометрический смысл этого выражения? Мы знаем, что $\frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ (см. задачу 27) — это комплексная координата середины C отрезка A_1A_3, а число $\frac{1}{2}(z_2 + z_4)$—комплексная координата середины D отрезка A_2A_4. Положим:

$$c = \frac{1}{2}(z_1 + z_3), \quad d = \frac{1}{2}(z_2 + z_4).$$

Тогда

$$\sigma = 4\,|c - d|^2 = 4\,|CD|^2,$$

так как $|c - d|$ — длина отрезка CD.

Мы пришли к следующему выводу, который называется теоремой Эйлера о четырехугольнике: сумма квадратов сторон любого четырехугольника больше суммы квадратов его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

30. Точка A на комплексной плоскости имеет комплексную координату z. Найти комплексные координаты: 1) точки B, симметричной A относительно действительной оси; 2) точки C, симметричной A относительно мнимой оси; 3) точки D, симметричной A относительно нулевой точки; 4) точки E, симметричной A относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

31. Четырехугольник $OABC$ — квадрат. Вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет комплексную координату $z = 3 - i$. Вычислить комплексные коорди-

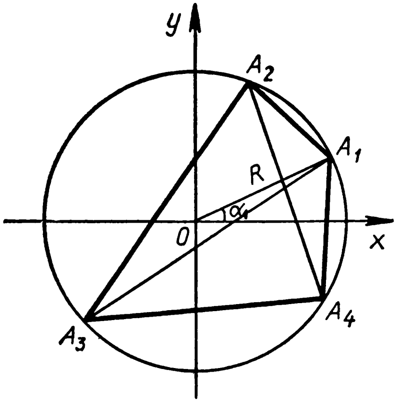


Рис. 5

наты w_1 и w_2 векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно.

32. При обходе против часовой стрелки контура правильного треугольника, расположенного на комплексной плоскости, встречаются последовательно вершины z_1, z_2, z_3. Зная, что $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, вычислить z_3.

Комплексные числа весьма плодотворно могут быть использованы для решения задач чисто геометрического характера. Рассмотрим несколько примеров решения планиметрических задач с помощью комплексных чисел.

33. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 5). Требуется выразить сумму произведений противоположных сторон четырехугольника через его диагонали.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром данной окружности. Обозначим через z_1, z_2, z_3, z_4 комплексные координаты вершин A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Эти числа можно записать так:

$$z_k = Re^{i\alpha_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Составим сумму произведений противоположных сторон и преобразуем ее (применяя формулу (1.8)):

$$|A_1A_2| \cdot |A_3A_4| + |A_2A_3| \cdot |A_4A_1| =$$
$$= |z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + |z_3 - z_2|\, |z_4 - z_1| =$$
$$= \frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}} \cdot \frac{z_4 - z_3}{ie^{i\frac{\alpha_4+\alpha_3}{2}}} + \frac{z_3 - z_2}{ie^{i\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}} \cdot \frac{z_4 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}}} =$$
$$= \frac{z_2z_4 - z_2z_3 - z_1z_4 + z_1z_3}{i^2e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}} + \frac{z_3z_4 - z_3z_1 - z_2z_4 + z_2z_1}{i^2e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}} =$$
$$= \frac{-z_2z_3 - z_1z_4 + z_3z_4 + z_2z_1}{i^2e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}} = \frac{(z_4 - z_2) \cdot (z_3 - z_1)}{ie^{i\frac{\alpha_4+\alpha_2}{2}} \cdot ie^{i\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}}} =$$
$$= |z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| = |A_2A_4| \cdot |A_1A_3|.$$

Итак, в каждом вписанном выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей. Мы установили известную теорему Птолемея.

34. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 6) как на основаниях построены квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек. Доказать, что отрезок, соединяющий центры квадратов, построенных на боковых сторонах треугольника, и отрезок, соединяющий вершину треугольника с центром третьего квадрата, конгруэнтны. Под каким углом они пересекаются?

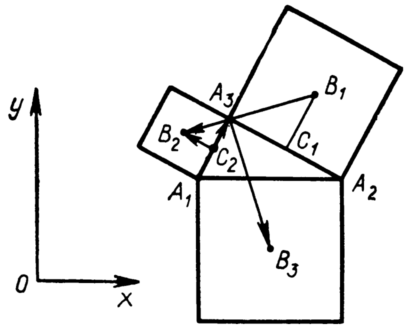


Рис. 6

Решение. Выберем в плоскости треугольника декартову систему координат xOy. Комплексные координаты точек A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 и векторов $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ обозначим соответственно a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 и z, w. Выразим z и w через a_1, a_2, a_3: $z = b_2 - b_1$, $w = b_3 - a_3$. Пусть C_2 — середина стороны A_1A_3. Точка C_2 имеет координату $\frac{a_3 + a_1}{2}$, тогда у вектора $\overrightarrow{C_2A_3}$ комплексная координата равна:

$$a_3 - \frac{a_3 + a_1}{2} = \frac{a_3 - a_1}{2}.$$

Координата вектора $\overrightarrow{C_2B_2}$ получается умножением на i координаты вектора $\overrightarrow{C_2A_3}$, поэтому она равна $i\frac{a_3 - a_1}{2}$.

Тогда координата конца B_2 вектора $\overrightarrow{C_2B_2}$ равна:

$$b_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} + i\frac{a_3 - a_1}{2}.$$

Совершив в этой формуле круговую замену индексов (1 заменяется на 2, 2 — на 3, 3 — на 1), получим выражение для b_3:

$$b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i\frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Аналогично

$$b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} + i\frac{a_2 - a_3}{2}.$$

Теперь нетрудно подсчитать, что

$$z = \frac{a_1 - a_2}{2} + i\frac{2a_3 - a_1 - a_2}{2},$$

$$w = \frac{a_2 + a_1 - 2a_3}{2} + i\frac{a_1 - a_2}{2}.$$

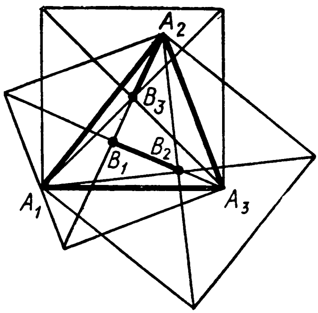


Рис. 7

Отсюда видно, что $w = iz$. Это означает, что при повороте вектора $\overrightarrow{B_1B_2}$ на угол 90° против часовой стрелки получают вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_3B_3}$. Но в таком случае

$$|A_3B_3| = |B_1B_2| \text{ и } (A_3B_3) \perp (B_1B_2).$$

35. Решить задачу 34 в предположении, что каждый из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника, перекрывается с этим треугольником (рис. 7).

36. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2, перекрывающиеся с этим треугольником. Доказать, что медиана AM перпендикулярна прямой A_1A_2; вычислить отношение $|A_1A_2| : |AM|$.

37. Сформулировать и решить задачу 36 в предположении, что ни один из двух квадратов, построенных на сторонах треугольника, не перекрывается с этим треугольником.

38. Пусть $A_1A_2A_3$ — треугольник на плоскости, C — какая-либо точка той же плоскости. Построим точку C_1, симметричную точке C относительно A_1, точку C_2, симметричную точке C_1 относительно A_2, точку C_3, симметричную точке C_2 относительно A_3, точку C_4, симметричную точке C_3 относительно A_1, и т. д. Доказать, что не более чем через шесть таких отражений получим точку, которая совпадет с исходной точкой C.

39. Вершины каждого из двух правильных треугольников, лежащих на плоскости, пронумерованы против часовой стрелки; вершины с одинаковыми номерами соединены отрезками. Доказать, что середины этих отрезков также являются вершинами некоторого правильного треугольника (случай вырождения этого треугольника в одну точку не исключается).

40. На плоскости имеются два параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ (вершины указаны в том порядке, в котором они встречаются при обходе параллелограммов против часовой стрелки). Вершины с одинаковыми номерами (A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д.) соединены отрезками, на каждом из которых отмечена середина. Проверить, будут ли образовавшиеся таким образом четыре точки вершинами параллелограмма (случай вырождения параллелограмма в отрезок или точку не исключается).

В задачах 41—49 все решения указанных уравнений требуется изобразить на комплексной плоскости.

41. $z^8 = i$.	**42.** $z^2 = 3 - 4i$.	**43.** $z^3 = 1$.
44. $z^3 = -1$.	**45.** $z^7 + 1 = 0$.	**46.** $z^8 = 1 + i$.
47. $z^6 = -8$.	**48.** $z^5 = -4 + 3i$.	**49.** $z^8 = 1$.

50. Пусть a, b, c — комплексные координаты трех точек A, B, C на комплексной плоскости. Каков геометрический смысл равенства

$$\operatorname{Im} \frac{a-b}{a-c} = 0?$$

§ 2. КОМПЛЕКСНАЯ ЧИСЛОВАЯ СФЕРА И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Литература: [2], гл. I, § 4; [1], гл. I, п. 4.

Комплексные числа можно наглядно изобразить в виде точек некоторой сферы, которая называется комплексной *числовой сферой* (или сферой Римана). В качестве таковой выбирается сфера σ единичного диаметра, касающаяся комплексной плоскости в нулевой точке (ее наглядно можно представить в виде земного глобуса). Обычно глобус располагается так, что точка касания является Южным полюсом S глобуса, причем вещественная ось касается нулевого меридиана.

Каждому комплексному числу z сопоставляется точка Z' пересечения поверхности сферы с лучом, исходящим из Северного полюса N глобуса и проходящим через ту точку Z комплексной плоскости, которая имеет комплексную координату z. При этом число z называется *комплексной координатой точки* Z' *на сфере*.

Установленное соответствие является взаимно однозначным соответствием между точками комплексной плоскости и точками сферы σ с выколотым полюсом N. В теории аналитических функций полезно рассматривать соответствие между полной сферой и комплексной плоскостью, дополненной символической точкой, которая называется *бесконечно удаленной точкой* и обозначается знаком ∞. При этом будем полагать, что бесконечно удаленной точке соответствует на сфере Северный полюс N.

Комплексная плоскость, дополненная точкой ∞, называется *расширенной* (или полной) *комплексной плоскостью*. Описанное выше взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы называется *стереографической проекцией*.

Для перехода от географических координат (φ, λ) точки Z' (φ — широта, λ — долгота) к ее комплексной координате $z = \rho e^{i\theta}$ можно воспользоваться формулами

$$\theta = \lambda, \quad \rho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{2.1}$$

Отметим два важных свойства стереографической проекции, которые часто используют при решении задач.

1. *Круговое свойство.* При стереографической проекции каждая окружность γ сферы σ преобразуется либо в окружность (если γ не проходит через центр проекции N), либо в прямую (если γ проходит через N).

2. *Свойство сохранения углов*[1]. Если при стереографической проекции точка P' и линии γ_1' и γ_2', взятые на сфере и выходящие из точки P', изображаются на плоскости в виде точки P и линий γ_1 и γ_2, то

$$\widehat{\gamma_1' P' \gamma_2'} = \widehat{\gamma_1 P \gamma_2}.$$

[1] Напомним, что углом между двумя линиями в точке P их пересечения называется угол между касательными к этим линиям, проведенными в точке P.

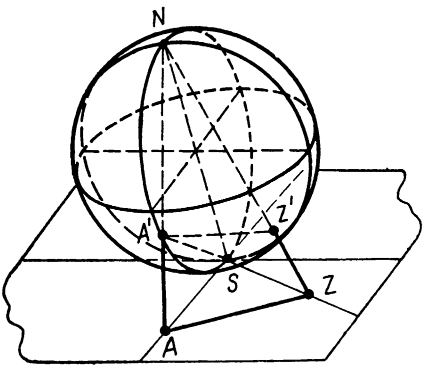


Рис. 8

51. Отрезок $A_1' A_2'$ является диаметром комплексной числовой сферы, причем A_1' и A_2' не совпадают с полюсами N и S. Известно, что точка A_1' имеет комплексную координату z_1. Вычислить комплексную координату точки A_2'.

Решение. Обозначим географические координаты точки A_2' через φ_1 и λ_1, а точки A'_2 через φ_2 и λ_2. Так как точки A_1' и A_2' диаметрально противоположны, то $\varphi_2 = -\varphi_1$ и $\lambda_2 = \lambda_1 - \pi$. Используя формулы (2.1), можно записать:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

где $\theta_1 = \lambda_1$, $\rho_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)$;

$$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

где $\theta_2 = \lambda_2$, $\rho_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)$.

Выражая θ_2 и ρ_2 через θ_1 и ρ_1, получим:

$$\theta_2 = \lambda_1 - \pi = \theta_1 - \pi;\quad \rho_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) = \frac{1}{\rho_1}.$$

Поэтому

$$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} = \frac{1}{\rho_1} e^{i(\theta_1 - \pi)} = \frac{e^{-i\pi}}{\rho_1 e^{-i\theta_1}} = \frac{-1}{\bar{z}_1}.$$

Итак, комплексная координата точки A_2' равна $-\frac{1}{\bar{z}_1}$.

52. Точки A' и Z', расположенные на комплексной числовой сфере, имеют комплексные координаты a и z. Чему равна длина хорды $A'Z'$ (хордальное расстояние между точками A' и Z')?

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда $a \neq \infty$ и $z \neq \infty$. Обозначим (рис. 8) через A и Z точки на комплексной плоскости с координатами a и z. Тогда

$$|SA| = |a|,\quad |SZ| = |z|,\quad |AZ| = |z - a|,\quad |NS| = 1,$$

$$|NA| = \sqrt{1 + |a|^2},\qquad |NZ| = \sqrt{1 + |z|^2}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников ANS и SNA' следует, что

$$\frac{|AN|}{|NS|} = \frac{|NS|}{|A'N|},$$

откуда

$$|NA'| = \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}. \qquad (2.2)$$

Аналогично

$$|NZ'| = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \qquad (2.2')$$

Обозначим расстояние $|A'Z'|$ через $k(a, z)$ или k. Из треугольника $A'NZ'$ по теореме косинусов получаем:

$$k^2 = |NA'|^2 + |NZ'|^2 - 2|NA'||NZ'|\cos\varphi,$$

где $\varphi = \widehat{A'NZ'}$. Или с учетом (2.2) и (2.2′)

$$k^2(1+|a|^2)(1+|z|^2) = (1+|z|^2) + (1+|a|^2) -$$
$$- 2\sqrt{1+|a|^2}\cdot\sqrt{1+|z|^2}\cos\varphi. \qquad (2.3)$$

С другой стороны, из $\triangle ANZ$ (по теореме косинусов) следует, что

$$|z-a|^2 = (1+|a|^2) + (1+|z|^2) - 2\sqrt{1+|a|^2}\cdot\sqrt{1+|z|^2}\cos\varphi. \qquad (2.4)$$

Сравнивая формулы (2.3) и (2.4), найдем:

$$k(a, z) = \frac{|z-a|}{\sqrt{1+|a|^2}\cdot\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Пусть теперь $a = \infty$. Тогда расстояние $|A'Z'|$ оказывается равным $|NZ'|$, и поэтому (см. формулу (2.2′))

$$k(\infty, z) = |NZ'| = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

53. Описать положение (найти географические координаты) тех пунктов на комплексной числовой сфере, которые имеют комплексные координаты: 1, -1, i, $-i$, $1-i$.

54. Какова комплексная координата точки Z' на земном глобусе, если ее географические координаты: 60° северной широты, 45° восточной долготы.

55. Решить задачу 54 в предположении, что географические координаты точки Z' таковы: 30° южной широты, 60° западной долготы.

56. Точка P на комплексной числовой сфере имеет комплексную координату z. Как располагаются (по отношению к точке P) на этой сфере точки с координатами: а) $\bar{z}$; б) $-\bar{z}$; в) $i\bar{z}$; г) $\frac{1}{\bar{z}}$?

57. Выяснить, во что преобразуются при стереографической проекции следующие фигуры на плоскости: а) семейство параллельных прямых; б) полоса между двумя параллельными прямыми; в) полуплоскость; г) угол с вершиной в точке касания сферы и плоскости.

58*. У полярной экспедиции имеется карта Антарктиды, полученная с помощью стереографической проекции (с центром проекции в Северном полюсе Земли). Экспедиция должна пройти от станции A_1 к станции A_2, географические координаты которых известны. Каким образом можно найти на карте кратчайший путь, соединяющий (на поверхности Земли) эти пункты?

59. Комплексная числовая плоскость π касается земного глобуса (его диаметр принят равным 1) в точке P пересечения экватора с нулевым меридианом, причем ось Ox направлена по касательной к экватору на восток, а ось Oy — по касательной к меридиану на север. Глобус проецируется на плоскость π из точки Q, симметричной точке P относительно центра глобуса. Найти связь между географическими координатами (φ, λ) какой-либо точки глобуса и комплексной координатой ее проекции на плоскость π.

§ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Литература: [1], гл. I, п. 3, гл. IV, п. 1; [2], гл. I, § 3, § 6, пп. 1—4; [3], гл. II, § 2.

Окрестностью конечной точки c на комплексной плоскости называется всякий открытый круг (круг без границы) с центром в этой точке (иными словами, множество всех точек z, для которых $|z-c| < \varepsilon$; число $\varepsilon > 0$ называется радиусом окрестности, круг $|z-c| < \varepsilon$ называют обычно ε-окрестностью точки a). Окрестностью бесконечно удаленной точки называется внешность каждого круга с центром в точке $z = 0$ (иными словами, множество всех точек z, для которых $|z| > R$).

Говорят, что последовательность точек комплексной плоскости (или, что то же самое, последовательность комплексных чисел) $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ (короче, $\{z_n\}$) имеет пределом[1] точку c, если каждая окрестность точки c содержит все точки последовательности, начиная с некоторого номера N; при этом, вообще говоря, число N зависит от выбора окрестности. Заметим, что это определение пригодно и в случае $c = \infty$.

При решении задач полезно учесть следующие свойства пределов последовательностей.

1) Последовательность $\{z_n\}$ тогда и только тогда имеет конечный предел $c = a + bi$, когда существуют конечные пределы:

$$\lim \operatorname{Re} z_n = a \quad \text{и} \quad \lim \operatorname{Im} z_n = b.$$

2) Если $\lim z_n = c$, то $\lim |z_n| = |c|$; если $\lim z_n = \infty$, то $\lim |z_n| = \infty$; $\lim z_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim |z_n| = 0$.

3) Известные из курса анализа теоремы о пределах последовательностей остаются в силе и для последовательностей комплексных чисел. В частности, если

$$\lim z'_n = c', \qquad \lim z''_n = c'' \qquad (c' \neq \infty,\ c'' \neq \infty),$$

[1] Или сходится к c; обозначим это так: $c = \lim z_n$ (иногда $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$) или $z_n \to c$.

то

$$\lim\left(z_n' \pm z_n''\right) = c' \pm c''; \quad \lim\left(z_n' \cdot z_n''\right) = c' \cdot c'';$$

$$\lim \frac{z_n'}{z_n''} = \frac{c'}{c''} \quad (z_n'' \neq 0, \quad c'' \neq 0).$$

60. Пользуясь определением, доказать, что последовательность $\{z_n\}$ с общим членом $z_n = \dfrac{n + in + 1 - i}{n}$ имеет пределом точку $c = 1 + i$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Рассмотрим ε-окрестность точки $c = 1 + i$. Нам надо показать, что найдется такой номер N, что при $n > N$ все точки z_n рассматриваемой последовательности окажутся в ε-окрестности точки c; иными словами, выполняется неравенство

$$|z_n - (1 + i)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Так как

$$|z_n - (1 + i)| = \left|\frac{n + in + 1 - i}{n} - (1 + i)\right| = \left|\frac{1 - i}{n}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

то неравенство (3.1) имеет вид:

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Пусть теперь N — целая часть числа $\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ (если $\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} < 1$, то возьмем $N = 1$). Тогда для каждого $n > N$ выполняется неравенство $n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, а следовательно, неравенства (3.2) и (3.1). Этот факт в силу произвольности выбора окрестности точки $1 + i$ и означает, что число $1 + i$ является пределом последовательности $\{z_n\}$.

В задачах 61—65, пользуясь определением, доказать, что данные последовательности $\{z_n\}$ имеют указанные пределы c.

61. $z_n = \dfrac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i}; \quad c = 1.$

62. $z_n = \dfrac{3in - n - 1}{1 + ni}; \quad c = 3 + i.$

63. $z_n = \dfrac{(2i)^n - 1}{(2i)^n}; \quad c = 1.$

64. $z_n = \dfrac{in^3 + 3}{2n^3 - i}; \quad c = \dfrac{i}{2}.$

65. $z_n = \dfrac{in^2 + 2n^2 + 1}{n^2 + i}; \quad c = 2 + i.$

66. Вычислить предел последовательности

$$z_n = \frac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i}.$$

Решение (*первый способ*). Преобразуем z_n, выделяя действительную и мнимую части:

$$z_n = \frac{(n^2 + 3i)(n^2 + 2i)}{n^4 + 4} = \frac{(n^4 - 6) + i \cdot 5n^2}{n^4 + 4} = \frac{n^4 - 6}{n^4 + 4} + i\frac{5n^2}{n^4 + 4}.$$

Рассмотрим две последовательности действительных чисел:

$$x_n = \operatorname{Re} z_n = \frac{n^4 - 6}{n^4 + 4} \text{ и } y_n = \operatorname{Im} z_n = \frac{5n^2}{n^4 + 4}.$$

Так как $\lim x_n = 1$ и $\lim y_n = 0$, то (см. свойство 1) последовательность $\{z_n\}$ имеет предел, причем

$$\lim z_n = 1 + 0 \cdot i = 1.$$

Второй способ. Преобразуя z_n и пользуясь теоремами о пределах последовательностей, можем записать:

$$\lim z_n = \lim \frac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i} = \lim \frac{1 + i\frac{3}{n^2}}{1 - i\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\left(1 + i\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\left(1 - i\frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1 + i\lim\frac{3}{n^2}}{1 - i\lim\frac{2}{n^2}} = \frac{1 + i \cdot 0}{1 - i \cdot 0} = 1.$$

67. Вычислить предел последовательности

$$z_n = \left(\frac{2 + i}{5}\right)^n.$$

Решение. Рассмотрим последовательность из положительных действительных чисел:

$$|z_n| = \left|\frac{2 + i}{5}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n.$$

Так как $\lim |z_n| = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$, то это означает, что и $\lim z_n = 0$.

68. Выяснить, имеет ли последовательность $z_n = i^n$ предел.

Решение. Запишем несколько первых членов последовательности z_n:

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots$$

Пусть c — какое-нибудь конечное комплексное число, отличное от $i, -1, -i, +1$, а ρ — какое-либо положительное число, которое меньше расстояния от точки c до каждой из точек i, -1, $-i$, 1. Тогда вне ρ-окрестности точки c окажутся все точки данной последовательности, и, значит, точка c не является пределом последовательности.

Если точка c совпадает с одной из точек: i, -1, $-i$, 1, то вне окрестности точки c радиуса $\frac{1}{2}$ содержится бесконечное множество точек последовательности z_n, и поэтому и в этом случае точка c не может быть пределом последовательности.

Пусть теперь $c = \infty$. Рассмотрим область $|z| > 2$ — окрестность точки $z = \infty$. Она не содержит ни одной точки последовательности z_n. Следовательно, точка $c = \infty$ также не является пределом последовательности z_n. Итак, указанная последовательность предела не имеет.

В задачах 69—75 требуется относительно каждой из указанных последовательностей выяснить, имеет ли она предел (конечный или бесконечный), и, если предел существует, найти его. Изобразить (приблизительно) на комплексной плоскости первые пять членов последовательностей.

69. $z_n = \left(\frac{e^{in}}{2}\right)^n$.

70. $z_n = i^{(-1)^n}$.

71. $z_n = \left(2 + \frac{i}{n}\right)^n$.

72. $z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3} - i}\right)^{n^2}$.

73. $z_n = \arg\left(-1 + \frac{i^n}{n}\right)$.

74. $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}$.

75. $z_n = i^n + \frac{1}{n}$.

76. Пусть $\lim z_n = c \neq 0$. Следует ли отсюда существование предела у последовательности $\{\arg z_n\}$? Ответ обосновать.

Пусть E — произвольное множество точек комплексной плоскости. Точка c называется *предельной* для множества E, если существует последовательность $\{c_n\}$ различных точек из E, сходящаяся к c.

Точка c будет предельной для множества E тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки c содержит бесконечное множество точек, принадлежащих E. Заметим, что сама предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

77. Найти все предельные точки множества E, состоящего из точек $z_n = i^n \cdot \frac{n+1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Решение. 1) Выясним сначала, является ли точка ∞ предельной для E. Так как $|z_n| = \frac{n+1}{n} \leqslant 2$, то в области $|z| > 2$ (которая представляет собой окрестность точки ∞) вовсе нет точек из E, следовательно, точка ∞ не является предельной для E.

2) Рассмотрим точку $c = 1$ и произвольно выбранную ε-окрестность этой точки. Выделим те точки из E, для которых $n = 4k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Имеем:

$$|z_{4k} - 1| = \frac{1}{4k} < \varepsilon,$$

если $k > \frac{1}{4\varepsilon}$. Отсюда видно, что в ε-окрестности 1 имеется бесконечно много точек множества E (все точки z_{4k}, для которых $k > \frac{1}{4\varepsilon}$). Следовательно, точка 1 — предельная для E. Аналогично можно показать (сделайте это!), что точки -1, i, $-i$ также являются предельными для E.

3) Пусть теперь c — какая-либо конечная точка, отличная от $1, -1, i, -i$. Обозначим через ρ наименьшее из расстояний от этих точек до точки c. Тогда

$$|c - z_n| = \left|c - \frac{n+1}{n} i^n\right| = \left|(c - i^n) - \frac{i^n}{n}\right| \geqslant |c - i^n| - \\ - \frac{1}{n} > \rho - \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что для всех n, для которых $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\rho$ (т. е. если $n > \frac{2}{\rho}$), выполнится неравенство

$$|c - z_n| > \frac{1}{2}\rho.$$

Это означает, что внутри ε-окрестности $\left(\varepsilon = \frac{\rho}{2}\right)$ точки c имеется лишь конечное число точек множества E; следовательно, точка c не является предельной для множества E. Итак, множество E имеет всего четыре предельные точки: $1, -1, i, -i$.

78. Какие предельные точки на расширенной комплексной плоскости имеет множество всех целочисленных узлов, т. е. точек комплексной плоскости с координатами $z = m + ni$, где m и n — любые целые числа?

79. Какие предельные точки на расширенной комплексной плоскости имеет множество всех рациональных узлов, т. е. точек комплексной плоскости с координатами $z = r_1 + ir_2$, где r_1 и r_2 — любые рациональные числа?

В задачах 80—83 выяснить, какие предельные точки на расширенной комплексной плоскости имеют указанные множества точек.

80. $z = -1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

81. $z = (-1)^n + \frac{i}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

82. $z = \arg\left(-2 + \frac{i^n}{n}\right)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

83. $z = \frac{1}{m} + \frac{i}{n}$ (m и n — произвольные целые числа, $m \neq 0$, $n \neq 0$).

Ряд с комплексными членами

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{3.3}$$

(короче, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$) называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел. Этот предел называется **суммой** ряда.

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходился и имел своей суммой число $c = a + bi$, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} c_n$$

и имели суммы a и b соответственно.

Ряд (3.3) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \ldots . \tag{3.4}$$

Сходимость ряда (3.4) влечет за собой сходимость ряда (3.3) (но не наоборот), т. е. всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. Так как ряд (3.4) — это числовой ряд с действительными неотрицательными членами, то для исследования рядов (3.3) на абсолютную сходимость можно использовать известные признаки сходимости знакоположительных рядов (сравнение рядов, признаки Даламбера, Коши и др.).

84. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^3}$ сходящимся?

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^{in}}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Этот ряд сходится (его сходимость можно установить, например, с помощью интегрального признака — сделайте это!). Поэтому данный в условии ряд с комплексными членами сходится, и притом абсолютно.

85. Выяснить, при каких неотрицательных значениях r ряд

$$1 + r^2 e^{2i\alpha} + r^4 e^{4i\alpha} + \ldots + r^{2n} e^{2ni\alpha} + \ldots$$

(где α — любое действительное число) сходится, и вычислить сумму ряда.

Р е ш е н и е. Данный ряд представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = r^2 e^{2i\alpha}$, причем $|q| = r^2$. Отсюда следует, что при $r \geqslant 1$ ряд расходится, а при $r < 1$ — сходится. По формуле суммы членов бесконечной геометрической прогрессии находим сумму S данного ряда:

$$S = \frac{1}{1 - r^2 e^{2i\alpha}}.$$

В з а д а ч а х 86—94 требуется выяснить, являются ли указанные ряды сходящимися, абсолютно сходящимися.

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^{3n}}{i + n^2}$.

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3i)^n}$.

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2}}{n!}$.

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}$.

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}}$.

91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{(2n)!}$.

92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{(n!)^2}$.

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2i)^n}$.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(5in-4)(4in+1)}$.

В з а д а ч а х 95—100 требуется вычислить суммы указанных рядов.

95. $1 + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 4\alpha + \frac{1}{8}\cos 6\alpha + \ldots$

96. $\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{4}\sin 4\alpha + \frac{1}{8}\sin 6\alpha + \ldots$

97. $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{9}\cos 3\alpha + \frac{1}{27}\cos 5\alpha + \ldots$

98. $\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{9}\sin 3\alpha + \frac{1}{27}\sin 5\alpha + \ldots$

99. $r\sin\alpha + r^2\sin 2\alpha + \ldots + r^n \sin n\alpha + \ldots, \ 0 \leqslant r < 1.$

100. $r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots + r^n \cos n\alpha + \ldots, \ 0 \leqslant r < 1.$

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 4. КРИВЫЕ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], гл. I, § 5, гл. II, § 4; [2], гл. II, § 1, п. 2; [3], гл. I, § 1.

В курсе вещественного анализа линии на плоскости обычно задаются с помощью уравнения вида $F(x, y) = 0$ (x и y — декартовы координаты) или $F(r, \varphi) = 0$ (r и φ — полярные координаты), а также параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

В комплексном анализе все эти формы задания линий часто встречаются в несколько ином виде. Параметрически линию задают одним уравнением $z = z(t)$; уравнение вида $F(x, y) = 0$ (или $F(r, \varphi) = 0$) заменяют уравнением $F(z) = 0$. Студенту необходимо получить некоторые навыки чтения этих уравнений[1].

Изучая кривую по ее уравнению

$$z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{4.1}$$

иногда приходится выяснять, является ли она замкнутой и имеет ли она кратные точки. Кривая (4.1) называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Расположенная на кривой (4.1) точка z_0 считается *кратной*, если существуют по крайней мере два таких значения параметра t_1 и t_2 ($\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$), что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = z_0$ и хотя бы одно из чисел t_1, t_2 отлично от α и от β.

101. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением $z = t + it^2$ $(-\infty < t < \infty)$.

Решение. Полагая $z = x + iy$, запишем комплексное уравнение данной линии параметрически в виде двух вещественных уравнений

$$x = t, \ y = t^2 \ (-\infty < t < \infty),$$

откуда находим, что

$$y = x^2 \ (-\infty < x < \infty).$$

Следовательно, данная линия — парабола.

---

[1] Для определения вида кривых полезно обращаться к различным справочникам, например, к книге Бронштейна И. Н. и Семендяева К. А. «Справочник по математике» (изд. 11, стереотип. М., 1967, раздел «Важнейшие кривые»). В дальнейшем будем называть ее кратко: «Справочник».

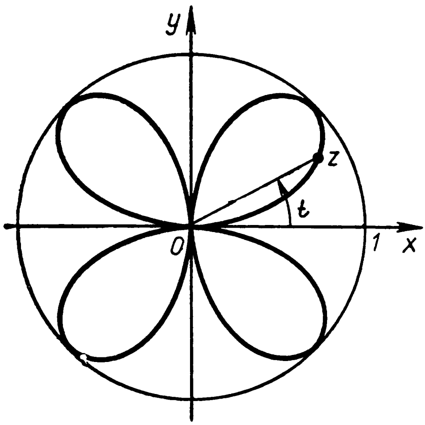


Рис. 9

102. Изобразить линию, задаваемую уравнением

$$z = e^{it}\sin 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Запишем уравнение данной линии в виде двух вещественных уравнений

$$x = \cos t \sin 2t,$$

$$y = \sin t \sin 2t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда найдем:

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t.$$

Рассматривая угловой параметр t, находим уравнение линии в полярных координатах (полагаем: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$):

$$r = \sin 2t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

При изменении параметра t от 0 до 2π получается так называемая четырехлепестковая роза (рис. 9), а при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ один ее лепесток.

103. Какие линии заданы уравнениями:

а) $z = it$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$; б) $z = i\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$?

Выяснить, являются ли они замкнутыми и имеют ли кратные точки.

Решение. Обозначая z через $x + iy$, из уравнения $z = it$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ получаем:

$$x = 0, \ y = t \ (-1 \leqslant t \leqslant 1).$$

Итак, уравнение $z = it$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ определяет линию, изображаемую отрезком мнимой оси $-1 \leqslant y \leqslant 1$ на комплексной плоскости xOy. Для направления, соответствующего возрастанию параметра t, начальной является точка $z = -i$, конечной — точка $z = i$. Кривая не замкнута, так как начальному и конечному значениям параметра t соответствуют разные точки кривой. Она не имеет кратных точек, так как двум любым различным значениям параметра t соответствуют разные точки кривой.

Рассмотрим теперь уравнение $z = i\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. При изменении параметра t от 0 до 2π $\sin t$ принимает все вещественные значения, заключенные между -1 и 1. Поэтому кривая $z = i\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ изображается тем же отрезком мнимой оси $-1 \leqslant y \leqslant 1$, что и кривая $z = it$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, но тем не менее эти линии отличаются друг от друга. В самом деле, кривая $z = i\sin t$ $(0 \leqslant$

$\leqslant t \leqslant 2\pi$) замкнутая, ибо значениям параметра $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответствует одна и та же точка $z = 0$. Кроме того, эта кривая имеет кратные точки, а именно значениям параметра t_0 и $\pi - t_0$ ($0 < t_0 < \pi$) соответствует одна и та же точка комплексной плоскости $z = i \sin t_0$, так как $\sin(\pi - t_0) = \sin t_0$; аналогично значениям параметра t_0' и $3\pi - t_0'$ ($\pi < t_0' < 2\pi$) соответствует одна и та же точка $z = i \sin t_0'$.

Различие между линиями $z = it$ ($-1 \leqslant t \leqslant 1$) и $z = i \sin t$ ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) заключается в том, что при изменении параметра t в соответствующих промежутках в первом случае точка z «пробегает» отрезок мнимой оси $-1 \leqslant y \leqslant 1$ однократно, а во втором случае — дважды.

104. Какая линия задана уравнением

$$z = \sin c \operatorname{ch} t + i \cos c \operatorname{sh} t \ (-\infty < t < \infty),$$

где c — число из $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

Решение. Полагая $z = x + iy$, найдем вещественные уравнения линии в параметрической форме:

$$x = \sin c \operatorname{ch} t, \ y = \cos c \operatorname{sh} t. \tag{4.2}$$

При $c \neq 0$ и $c \neq \pm \frac{\pi}{2}$ из (4.2) далее получаем:

$$\frac{x^2}{\sin^2 c} - \frac{y^2}{\cos^2 c} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Но, как известно[1], $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Поэтому

$$\frac{x^2}{\sin^2 c} - \frac{y^2}{\cos^2 c} = 1. \tag{4.3}$$

Это уравнение гиперболы. Так как уравнение (4.3) получено из системы (4.2) с помощью операции возведения в квадрат, то гипербола может содержать и посторонние для исходной кривой (4.2) точки. Чтобы выяснить, совпадает ли кривая (4.2) со всей гиперболой (4.3) или является ее частью, проанализируем уравнения (4.2).

Пусть $-\frac{\pi}{2} < c < 0$. Тогда $x = \sin c \operatorname{ch} t < 0$, так как $\operatorname{ch} t > 0$ при любом t. Это означает, что точки кривой (4.2) могут находиться лишь на левой ветви гиперболы.

Так как, далее, при $-\infty < t < \infty$ x пробегает все значения от 0 до $-\infty$, а y — от $-\infty$ до $+\infty$, то ясно, что кривая (4.2) совпадает со всей левой ветвью гиперболы. Аналогично проверяем, что при $0 < c < \frac{\pi}{2}$ кривая (4.2) представляет собой правую ветвь гиперболы (4.3).

---

[1] О гиперболических функциях $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ см., например, «Справочник».

Теперь рассмотрим случаи $c = 0$, $c = \frac{\pi}{2}$, $c = -\frac{\pi}{2}$. Из (4.2) при $c = 0$ получаем уравнение данной линии в виде

$$x = 0,\ y = \operatorname{sh} t.$$

Так как при $-\infty < t < \infty$ $\operatorname{sh} t$ пробегает промежуток $]-\infty, +\infty[$, то эта линия есть мнимая ось z-плоскости.

При $c = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = 0.$$

Эти уравнения определяют луч вещественной оси $x \geqslant 1$ (так как $\operatorname{ch} t \geqslant 1$).

Если $c = -\frac{\pi}{2}$, то находим, что $x = -\operatorname{ch} t$, $y = 0$; в этом случае заданная линия — луч вещественной оси $x \leqslant -1$.

В задачах 105—115 требуется выяснить, какие линии заданы указанными уравнениями, и изобразить эти линии на чертеже.

105. $z = i + 2e^{it}$ $(3\pi \leqslant t \leqslant 5\pi)$.

106. $z = it + 2$ $(-\infty < t < \infty)$.

107. $z = (1 - i)t + i$ $(-\infty < t < \infty)$.

108. $z = at + b$ $(-\infty < t < \infty)$, где $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ — комплексные числа.

109. $z = (1 + i)t^2 + 1$ $(-\infty < t < \infty)$.

110. $z = \frac{1}{t} + it\,(-\infty < t < \infty)$.

111. $z = t^2 - \frac{i}{t}\,(0 < t < \infty)$.

112. $z = \frac{4}{(1 + e^{it})^2}\,(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$.

113. $z = \mathrm{R}e^{it} + re^{-it}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

114. $z = e^t(\cos c + i \sin c)$ $(-\infty < t < \infty$, c — вещественное число).

115. $z = t^2 - c^2 + 2tci$ $(-\infty < t < \infty$, c — вещественное число).

116. Выяснить, какая линия задана уравнением

$$\left|\frac{z-3}{z+1}\right| = 2.$$

Решение (*геометрическое*). Данное уравнение можно переписать в виде $\frac{|z-3|}{|z+1|} = 2$, или $|z-3| = 2|z+1|$. Но $|z-3|$ — это расстояние от точки z до точки 3. Аналогично $|z+1| = |z-(-1)|$ — расстояние от точки z до точки -1. Таким образом, речь идет о таких точках z, для которых расстояние от точки 3 вдвое больше расстояния от точки -1. Значит, искомая линия представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний которых от двух данных точек 3 и -1 постоянно и равно 2. Как известно из геометрии (см. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., «Просвещение», 1966, с. 52—53), это множество точек является окружностью (ее называют окружностью Аполлония). В указанном пособии описан и способ геометрического построения окружности Аполлония.

Р е ш е н и е (*аналитическое*). Перепишем данное уравнение в виде

$$|x + yi - 3| = 2\,|x + yi + 1|,$$

откуда находим:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части полученного уравнения в квадрат[1] и выполнив некоторые элементарные преобразования, получим уравнение

$$\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

Следовательно, заданная в условии задачи линия — окружность радиуса $\frac{7}{3}$ с центром в точке $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$.

117. Пусть $|a| < 1$. Какую линию образует множество всех таких точек комплексной плоскости, чьи комплексные координаты z удовлетворяют соотношению

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1?$$

Р е ш е н и е (*аналитическое*). Данное соотношение запишем в виде

$$|z - a|^2 = |1 - \bar{a}z|^2,$$

что в силу известных свойств сопряженных чисел (см. с. 5) равносильно условию

$$(\bar{z} - \bar{a})(z - a) = (1 - \bar{a}z)(1 - \overline{\bar{a}z}),$$

или после несложных преобразований

$$(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) = 0.$$

Так как по условию $|a| < 1$, то $1 - |a|^2 \neq 0$, и мы имеем $|z^2| - 1 = 0$, или, что то же, $|z| = 1$. Итак, искомая линия представляет собой единичную окружность на комплексной плоскости.

В з а д а ч а х 118—128 найти и изобразить на чертеже линии, заданные указанными уравнениями[2].

---

[1] Здесь возведение в квадрат не приведет к появлению посторонних решений (см. № 104).

[2] При этом полезно использовать геометрические истолкования комплексных чисел и операций над ними.

118. $\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = 1.$

119. $|z-2| + |z+2| = 4.$

120. $|z-2| + |z+2| = 6.$

121. $|z-2| - |z+2| = 1.$

122. $z^2 + \bar{z}^2 = 1.$

123. $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{R}$ $(R > 0)$.

124. $\bar{z} = e^{i\alpha} z$ (α — вещественная константа).

125. $\operatorname{Im}\frac{z-z_0}{z_1-z_0} = 0$ (здесь z_0 и z_1 — фиксированные комплексные числа, $z_1 \neq z_0$).

126. $\operatorname{Re}\frac{z}{z_0} = 0$ $(z_0 \neq 0)$.

127. $|z-2| + |z+2| = 1.$

128. $|z-a| + |z-b| = c$
(a и b — комплексные постоянные, c — положительное число).

Указание. Рассмотреть случаи: $c > |a-b|$, $c = |a-b|$, $0 < c < |a-b|$.

Для задания на плоскости различных фигур (в частности, областей) нередко используют неравенства: фигура задается как множество всех точек, чьи комплексные координаты удовлетворяют некоторому неравенству вида

$$\Phi(z) < 0 \text{ или } \Phi(z) \leqslant 0,$$

где $\Phi(z)$ — вещественнозначная функция комплексного переменного z. Понятно, что каждую такую функцию можно представить как вещественнозначную функцию двух вещественных переменных, так что мы можем свести задачу к неравенствам вида

$$F(x, y) < 0, \; F(x, y) \leqslant 0.$$

В приведенных ниже задачах функция $F(x, y)$ обычно оказывается непрерывной на всей плоскости (за исключением, возможно, отдельных точек). При решении неравенств указанного типа удобно сначала искать множество L таких точек, для которых имеет место равенство

$$\Phi(z) = 0 \text{ (т. е. } F(x, y) = 0).$$

Множество L обычно разбивает плоскость на несколько областей D_1, D_2, ..., D_m, в которых уже нет ни одной точки из L. *В каждой из этих областей функция* $\Phi(z)$ (т. е. $F(x, y)$) *сохраняет знак* (это следует из свойства непрерывности функции $F(x, y)$: непрерывная вещественная функция может изменить знак только при переходе через точки, в которых она обращается в нуль). Поэтому для выяснения знака неравенства в каждой из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$ можно воспользоваться приемом «пробной точки»: если в какой-нибудь конкретной точке $(x_k; y_k)$ из области D_k $F(x, y) < 0$, то $F(x, y) < 0$ и во всех точках этой области.

Следует иметь в виду, что иногда решение неравенства значительно упрощается, если исходить из геометрических соображений.

129. Найти множество точек комплексной плоскости, задаваемых неравенством

$$\left|\frac{z-3}{z+1}\right| > 2.$$

Р е ш е н и е. Сначала найдем множество таких точек, для которых имеет место равенство

$$\left|\frac{z-3}{z+1}\right| = 2.$$

Как показано в задаче 116, это множество представляет собой окружность

$$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2,$$

которая разбивает плоскость на две области D_1 и D_2 (внутренность и внешность соответствующего круга). Для выяснения знака неравенства возьмем в области D_1, например, точку $z = 0$, а в области D_2 — точку $z = 2$. Так как

$$\left|\frac{0-3}{0+1}\right| = 3 > 2, \text{ а } \left|\frac{2-3}{2+1}\right| = \frac{1}{3} < 2,$$

то заключаем, что искомое множество есть открытый круг радиуса $\frac{8}{3}$ с центром в точке $z = -\frac{7}{3}$.

130. Каково множество тех точек z, для которых сходится ряд

$$1 + (z^2+1) + (z^2+1)^2 + \ldots + (z^2+1)^n + \ldots ?$$

Р е ш е н и е. Рассматривая при каждом фиксированном z данный ряд как бесконечную геометрическую прогрессию, можно заключить, что ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$|z^2+1| < 1.$$

Для выяснения его геометрического смысла найдем множество тех точек $z = x + iy$, для которых

$$|z^2+1| = 1,$$

или, что то же,

$$\sqrt{(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2} = 1.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, после несложных преобразований (проделайте их) получим равносильное (объясните почему) уравнение:

$$(x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) = 0.$$

Перейдем к полярным координатам r и φ. Получим:

$$r^2 = -2\cos\varphi.$$

Эта кривая — лемниската (см. «Справочник»). Плоскость разбивается на три области D_1, D_2, D_3 (рис. 10). Возьмем в областях D_1, D_2, D_3 соответственно точки $z = i$, $z = -i$, $z = 1$. Так как $|i^2+1| = 0 < 1$, $|(-i)^2+1| = 0 < 1$, а $|1^2+1| = 2 > 1$, то искомое множество точек сходимости ряда представляет собой заштрихованные на рисунке 10 внутренние области лемнискаты.

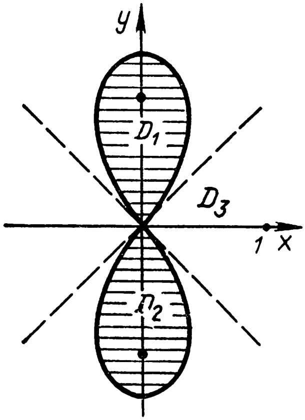


Рис. 10

В задачах 131—142 требуется найти и изобразить на чертеже множества точек комплексной плоскости, заданных неравенствами.

131. $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1.$

132. $\left|\frac{1}{z}+1\right| > 2.$

133. $\operatorname{Im}(z^2) < 1.$

134. $\operatorname{Re}(z^2) > 1.$

135. $|z| + \operatorname{Im} z \leqslant 1.$

136. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| > 2.$

137. $|z-1| > 3|z-3|.$

138. $\left|\frac{z+2}{z-1}\right| \geqslant 2.$

139. $|z-i| + |z+i| \geqslant 4.$

140. $|z| + \operatorname{Re} z > 1.$

141*. $|z^2+z| < 1.$

142*. $\left|z+\frac{1}{z}\right| \geqslant 2.$

143*. Каково множество точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^2-1|^n?$$

§ 5. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ. ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Литература: [1], гл. II, п. 1, 3, 2; [2], гл. II, § 1, п. 3; [3], гл. I, § 2, 3, гл. II, § 1, 3.

Всякую функцию $w = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ можно представить в виде

$$w = u(x, y) + iv(x, y),$$

где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ уже являются вещественнозначными функциями двух вещественных переменных x и y. При этом функцию $u = u(x, y)$ называют *действительной* (или вещественной) *частью* $f(z)$, а $v = v(x, y)$ — *мнимой*.

Понятно, что действительную и мнимую части каждой функции комплексного переменного $z = x + iy$ можно также рассматривать как функции от двух других вещественных переменных, а именно модуля и аргумента числа z. Для этого, естественно, используется показательная форма комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

144. Выделить действительную и мнимую части функции $w = \bar{z} - \frac{1}{z}$, выразив их: а) через вещественную и мнимую части переменного z; б) через модуль и аргумент этого переменного.

Решение. а) В формулу, задающую функцию, вместо w подставим $u + iv$, а вместо z подставим $x + yi$. Имеем:

$$u + iv = x - yi - \frac{1}{x + yi}.$$

В результате преобразований находим:

$$u + iv = x - yi - \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = $$
$$= x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Отсюда, выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$u = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -y + \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

б) Взяв z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и выполнив необходимые преобразования, найдем:

$$u + iv = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) - \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= r(\cos\varphi - i\sin\varphi) - \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r},$$

откуда

$$u = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \left(-r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

В задачах 145—149 требуется выделить действительную и мнимую части каждой из указанных функций.

145. $w = \frac{z + i}{z - i}$.

146. $w = \bar{z}^2 + |z|^2$.

147. $w = e^{i\alpha}z + e^{i\beta}\bar{z}$ (α и β — действительные числа).

148. $w = z^2 - \frac{1}{z^2}$.

149. $w = z^2 + az + b$ (a, b — действительные числа).

150. Выразить $w = \frac{x(ix - 1) + iy(y + 1)}{x^2 + y^2}$ в виде функции от переменного $z = x + iy$.

Решение. $w = \frac{ix^2 - x + iy^2 + iy}{x^2 + y^2} = \frac{i(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{x - yi}{x^2 + y^2} =$

$$= i - \frac{1}{x + yi} = i - \frac{1}{z} = \frac{iz - 1}{z}.$$

В задачах 151—154 требуется указанные функции от x и y записать как функции от переменного $z = x + yi$.

151. $w = \dfrac{y - ix}{x^2 + y^2}$.

152 $w = y^3 - 3x^2y + y + i(x^3 - 3xy^2 - x)$.

153. $w = \dfrac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25} + \dfrac{i \cdot 2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}$.

154. $w = \dfrac{x^2 + y^2 + x + i(x^2 + y^2 - y)}{x^2 + y^2}$.

С геометрической точки зрения функция $w = f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ задает отображение множества E z-плоскости на некоторое множество E' точек w-плоскости. Множество E' называют *образом* множества E при отображении $w = f(z)$.

155. Найти образ окружности $|z| = 1$ при отображении $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Решение. Запишем уравнение единичной окружности $|z| = 1$ в параметрическом виде:

$$z = e^{i\varphi} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Тогда уравнение ее образа имеет вид:

$$w = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{-i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Снова получили окружность $|w| = 1$.

156. Найти образ единичной окружности при отображении, осуществляемом функцией Жуковского:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Решение. $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ — уравнение единичной окружности в z-плоскости. Она преобразуется в линию с уравнением

$$w = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi$$

(см. формулы 1.1—1.7).

Линия $w = u + iv = \cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ является отрезком действительной оси $-1 \leqslant u \leqslant 1$ (дважды пробегаемым при изменении параметра φ от 0 до 2π — см. задачу 103). Итак, функция $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ «сжимает» единичную окружность z-плоскости в отрезок $[-1; 1]$ действительной оси w-плоскости.

157. Выяснить, в какие фигуры w-плоскости преобразует функция $w = \bar{z} + i$ следующие фигуры z-плоскости: 1) оси координат; 2) декартову координатную сетку z-плоскости; 3) единичную окружность.

158. Ответить на те же вопросы, что и в задаче 157, относительно отображения $w = i\bar{z}$.

159. На какие линии w-плоскости отображает функция $w = \frac{1}{z}$ следующие кривые z-плоскости:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $x^2 + y^2 = 1$;
3) $y = x$; 4) $y = 0$;
5) $x = 1$; 6) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$?

160. В какую фигуру преобразует комплексную плоскость функция $w = z^2 + \bar{z}^2$?

161. В какую фигуру деформируется единичный круг $|z| < 1$ следующими функциями:

1) $w = |z|$; 2) $w = |z - 1|$;
3) $w = \frac{1}{2}|z - \bar{z}|$; 4) $w = z - \bar{z}$?

162. а) В какую фигуру преобразуется контур квадрата с вершинами ± 1, $\pm i$ при отображении $w = \arg z$?

б) В какую фигуру преобразуется квадрат с вершинами 0, 1, $1 + i$, i при отображении $w = z^2$?

163. а) В какие линии преобразует функция $w = z^2$ сетку прямых, параллельных биссектрисам координатных углов?

б) Какие линии z-плоскости преобразуются в сетку прямых, параллельных биссектрисам координатных углов w-плоскости, при отображении $w = z^2$?

В курсе анализа рассматриваются два эквивалентных определения предела функции в точке: «на языке ε — δ» и «на языке последовательностей». Оба эти определения переносятся и в комплексный анализ. Приведем их.

I. Число c называют пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность точки z_0, что для всех значений z, отличных от z_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(z) - c| < \varepsilon$.

II. Число c называется пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ (z_n принадлежат области определения функции, $z_n \neq z_0$), сходящейся к z_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится, и притом к числу c[1].

Из второго определения следует такой признак *«несуществования предела»*: если для данной функции $w = f(z)$ и точки z_0 возможно найти такие две последовательности $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$, сходящиеся к z_0, что соответствующие последовательности значений функции $\{f(z_n)\}$ и $\{f(z'_n)\}$ имеют различные пределы, то функция $f(z)$ в точке z_0 предела не имеет. При решении задач можно пользоваться и тем и другим определением.

Заметим, что известные из анализа теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций также сохраняются в комплексном анализе.

---

[1] Это определение пригодно и в случае $z_0 = \infty$.

164. Имеет ли функция $f(z) = \frac{(\mathrm{Re}\, z)^2}{\mathrm{Im}\, z}$ предел в точке $z = 0$?

Решение. Рассмотрим сначала последовательность точек $z_n = \frac{i}{n} \to 0$. Так как $\mathrm{Re}\, z_n = 0$, то $f(z_n) = 0$ и соответствующая последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к 0. Возьмем теперь последовательность точек $z'_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}$, также сходящуюся к 0. $\mathrm{Re}\, z'_n = \frac{1}{n}$ и $\mathrm{Im}\, z'_n = \frac{1}{n^2}$, поэтому $f(z'_n) = 1$, и последовательность $\{f(z'_n)\}$ сходится уже к 1. Так как для двух последовательностей $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$, сходящихся к 0, соответствующие последовательности значений функции $\{f(z_n)\}$ и $\{f(z'_n)\}$ имеют различные пределы, то заключаем, что $f(z)$ в точке $z = 0$ предела не имеет.

В задачах 165—168 требуется установить, имеют ли данные функции предел в указанных точках; если предел существует, найти его.

165. $w = \frac{\mathrm{Re}\, z}{z}$, $z = 0$.

166. $w = \frac{|z|}{z}$, $z = 0$.

167. $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z = 0$.

168. $w = \frac{z}{z - i}$, $z = \infty$.

Как и в действительном анализе, функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если:

1) $f(z)$ определена в этой точке, т. е. существует $f(z_0)$;
2) существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$;
3) выполняется равенство $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Заметим, что функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна в в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда в точке (x_0, y_0) непрерывны ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$.

169. Доказать, что функция $w = f(z) = \bar{z}^2$ непрерывна в каждой конечной точке плоскости.

1-е решение. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная конечная точка комплексной плоскости. Функция $f(z)$ определена на всей плоскости и $f(z_0) = \bar{z}_0^2$. Для нахождения $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ докажем предварительно, что $\lim\limits_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и будем искать такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|z - z_0| < \delta$ вытекало неравенство $|\bar{z} - \bar{z}_0| < \varepsilon$. Так как $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что для всех z, для которых $|z - z_0| < \delta = \varepsilon$, выполнится неравенство $|\bar{z} - \bar{z}_0| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. По теореме о пределе произведения двух функций, имеющих пределы, находим:

$$\lim_{z\to z_0} \bar{z}^2 = \lim_{z\to z_0} \bar{z} \cdot \lim_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0^2.$$

Итак, имеем $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, т. е. функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0. Так как z_0 — произвольная точка плоскости, то отсюда заключаем, что $f(z) = \bar{z}^2$ непрерывна на всей плоскости.

2-е решение. Так как $z = x + iy$, то $f(z) = (x - yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$. Откуда действительная ($u(x, y)$) и мнимая ($v(x, y)$) части функции $f(z)$ равны соответственно

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = -2xy.$$

В силу того что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны как функции двух действительных переменных в любой точке $(x; y)$, приходим к выводу о непрерывности функции $w = \bar{z}^2$ в каждой точке z-плоскости.

170. Показать, что функция $w = |z|^2 z$ непрерывна в каждой точке z комплексной плоскости.

171. Доказать, что если функция $w = f(z)$ непрерывна в какой-либо точке z, то и функции $|f(z)|$ и $\mathrm{Re}\,\overline{f(z)}$ непрерывны в этой же точке.

172. Будет ли функция $w = \arg z$ непрерывной в точке $z = +1$; в точке $z = -1$?

Указание. Можно воспользоваться формулой задачи 12 и непрерывностью функции $\mathrm{arctg}\, x$.

§ 6. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. ПОНЯТИЕ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ. ПОНЯТИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ

Литература: [1], гл. II, § 5—9, 13; [2], гл. II, § 4, пп. 1—5; [3], гл. II, § 4, гл. III, § 1, 3.

Говорят, что функция $w = f(z)$ имеет в точке z_0 производную, если вспомогательная функция комплексного переменного h:

$$\varphi_{z_0}(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

которая представляет собой отношение приращения функции $f(z)$ в точке z_0 к приращению аргумента, имеет предел в точке $h = 0$. Этот предел называют производной от функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

173. Имеет ли функция $w = z\bar{z}$ производную в точке $z_0 = i$? Имеет ли она производную в какой-нибудь точке плоскости?

Р е ш е н и е. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента в точке i:

$$\varphi_i(h) = \frac{(i+h)\overline{(i+h)} - i\bar{i}}{h} = \frac{(i+h)(\bar{i}+\bar{h}) - i\bar{i}}{h} = i\frac{\bar{h}}{h} - i + \bar{h}.$$

Нас интересует вопрос, имеет ли функция $\varphi_i(h)$ предел в точке $h = 0$. С первого взгляда это неясно, так как неясно, имеет ли при $h \to 0$ предел функция $\frac{\bar{h}}{h}$. Рассмотрим две различные последовательности значений h_n, сходящиеся к нулю, и найдем пределы соответствующих последовательностей значений функции $\varphi_i(h_n)$. Имеем:

$$h_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad \varphi_i(h_n) = i\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - i + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$h'_n = \frac{i}{n} \to 0, \quad \varphi_i(h'_n) = i\frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} - i - \frac{i}{n} = -2i - \frac{i}{n} \to -2i.$$

Значит, $\varphi_i(h)$ в точке $h = 0$ предела не имеет (см. § 5). Поэтому функция $w = z\bar{z}$ в точке i производной не имеет.

Пусть теперь z — произвольная точка плоскости, тогда, рассуждая аналогично, получим:

$$\varphi_z(h) = \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} = z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h};$$

$$h_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad \varphi_z(h_n) = z + \bar{z} + \frac{1}{n} \to z + \bar{z};$$

$$h'_n = \frac{i}{n} \to 0, \quad \varphi_z(h'_n) = -z + \bar{z} - \frac{i}{n} \to \bar{z} - z.$$

Для существования предела необходимо (но недостаточно!), чтобы $\bar{z} + z = \bar{z} - z$, что справедливо лишь при $z = 0$.

Итак, функция $\varphi_z(h)$ при $z \neq 0$ предела не имеет. Это означает, что в любой точке $z \neq 0$ функция $w = z\bar{z}$ не имеет производной.

Рассмотрим точку $z = 0$.

$$\varphi_0(h) = \frac{(0+h)(\bar{0}+\bar{h}) - 0\bar{0}}{h} = \bar{h}.$$

Так как $\varphi_0(h) = \bar{h} \to 0$ при $h \to 0$, то функция $w = z\bar{z}$ имеет производную (она равна нулю) в точке $z = 0$.

В з а д а ч а х 174—177 требуется определить, имеют ли указанные функции производную в каких-нибудь точках плоскости.

174. $w = z^2$.

175. $w = z \operatorname{Re} z$.

176. $w = \operatorname{Im} z$.

177. $w = \bar{z} + \operatorname{Re} z$.

Рассмотренные примеры показывают, что решение вопроса о существовании производной — довольно кропотливый процесс. Результат достигается значительно проще с помощью так называемого *критерия Коши — Римана* (иногда его называют критерием Даламбера — Эйлера).

Для того чтобы комплексная функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в заданной точке $z = x + iy$ имела производную, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были в точке $(x; y)$ дифференцируемы (как функции двух вещественных переменных) и чтобы в этой точке выполнялись следующие равенства (условия Коши — Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этом производная функции $f(z)$ в указанной точке $z = x + iy$ может быть вычислена по формуле

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Полезно учесть, что наличие непрерывных частных производных у функций u и v по x и y гарантирует дифференцируемость u и v как функций двух переменных x, y. Поэтому при решении задач можно поступить так: найти частные производные u и v по x и y, убедиться в их непрерывности в интересующей нас точке, а затем проверить, выполняются ли в этой точке условия Коши — Римана.

Необходимо четко различать понятие функции, дифференцируемой в заданной точке, и функции, аналитической в этой точке. *Дифференцируемость* комплексной функции $f(z)$ в некоторой точке z_0 означает, что $f(z)$ имеет в этой точке производную, а аналитичность функции в этой точке означает, что $f(z)$ имеет производную не только в точке z_0, но и в каждой точке некоторой окрестности точки z_0.

Аналитичность фунции $f(z)$ в заданной области означает дифференцируемость $f(z)$ в каждой точке этой области.

178. В каких точках комплексной плоскости функция $w = f(z) = z\,|z|^2$ имеет производную?

Решение. $f(z) = u + iv = (x + yi)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + iy^3 + ix^2y$. Действительная и мнимая части этой функции таковы: $u = x^3 + xy^2$, $v = x^2y + y^3$.

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

Найденные частные производные непрерывны на всей плоскости. Теперь ищем точки, в которых выполняются условия Коши— Римана. Получим систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2, \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$. Итак, функция $w = z|z|^2$ имеет производную лишь в единственной точке $z = 0$. При этом

$$f'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = (3x^2 + y^2 + i2xy)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$$

179. В каких точках комплексной плоскости функция $w = f(z) = \cos x + i \sin y$ имеет производную? Чему равна производная функции $f(z)$ в этих точках? Является ли $f(z)$ аналитической хотя бы в одной точке z?

Решение. Так как $w = u + iv = \cos x + i \sin y$, то $u = \cos x$, $v = \sin y$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ непрерывны на всей плоскости. Одно из условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняется во всех точках плоскости. Будем искать точки $(x;\ y)$, в которых выполняется второе условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow -\sin x = \cos y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos y \Leftrightarrow y = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x + (4k \pm 1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = \pm x + (2m + 1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Этими уравнениями задается бесконечная совокупность прямых.

В каждой точке z этих прямых данная функция имеет производную, причем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x.$$

Функция $f(z) = \cos x + i \sin y$ не является аналитической ни в одной точке плоскости, ибо каждый круг на z-плоскости содержит точки, в которых $f(z)$ не имеет производной.

В задачах 180—185 требуется выяснить, в каких точках комплексной плоскости имеют производную указанные функции. Чему равна производная в каждой из этих точек? Являются ли данные функции аналитическими в каких-нибудь точках плоскости?

180. $w = z^2 + i|z|^2$.

181. $w = x^2 + iy^2$.

182. $w = yx + i(x^2 - y^2)$.

183. $f(z) = \bar{z} + \frac{z}{|z|^2} + z^3$.

184. $w = \operatorname{tg} y - i \operatorname{tg} x$.

185. $w = \frac{1}{z}$.

186. Будет ли аналитической в некоторой области функция $f(z) = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 3x^2y)$? Если да, то найти ее производную в этой области.

187. Пусть $f(z)$ в каждой точке области D удовлетворяет условию $f'(z) = 0$. Доказать, что $f(z)$ есть постоянная в этой области.

188. У одной аналитической функции $f_1(z)$ в некоторой области D вещественная часть постоянна, у другой $f_2(z)$ постоянна ее мнимая часть, у третьей $f_3(z)$ постоянный модуль. Можно ли утверждать, что каждая из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ является константой в D?

Замечание. Иногда вопрос о дифференцируемости комплексной функции можно решить проще, без применения критерия Коши—Римана, если помнить, что теоремы о дифференцируемости (и правила отыскания производной) суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций справедливы и для комплексных функций.

Так, например, из дифференцируемости функции $w = z$ следует, что функция

$$w = \frac{5z^3 - 4z^2 + z}{z - 1}$$

дифференцируема на всей плоскости, кроме точки $z = 1$, и

$$w' = \frac{(5z^3 - 4z^2 + z)'(z - 1) - (z - 1)'(5z^3 - 4z^2 + z)}{(z - 1)^2} = \frac{10z^3 - 19z^2 + 8z - 1}{(z - 1)^2}.$$

Аналитические функции тесно связаны с *гармоническими функциями*, возникающими при решении уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

которое кратко записывают так:

$$\Delta \Phi = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функция $\Phi(x, y)$, которая в некоторой области имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа, называется *гармонической. Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.*

Функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где u и v — гармонические функции в некоторой области D, вообще говоря, не является аналитической. Она окажется аналитической лишь тогда, когда u и v связаны условиями Коши — Римана. В этом случае u и v называются *сопряженными гармоническими функциями*. Для любой гармонической в некоторой области D функции существует ей сопряженная. Другими словами, для любой гармонической в некоторой области функции $u(x, y)$ можно построить аналитическую функцию, действительная (мнимая) часть которой совпадает с $u(x, y)$.

189. Проверить, является ли функция $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ гармонической в своей области определения.

Решение. Функция $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ определена всюду, кроме прямой $x = 0$. Последовательно находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Частные производные существуют и непрерывны в области определения функции $\varphi(x, y)$ и удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, функция $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ гармоническая.

В задачах 190—195 проверить, являются ли указанные функции гармоническими.

190. $x^2 - y^2$. **191.** xy. **192.** $\ln(x^2 + y^2)$. **193.** $x^2 + y^2$. **194.** $\frac{y}{x}$.

195. $\frac{x}{x^2+y^2}$.

196. Существует ли такая аналитическая функция, у которой действительная часть равна $x^3 + y^3$?

Решение. Для ответа на поставленный вопрос прежде всего проверим, является ли функция $u(x, y) = x^3 + y^3$ гармонической. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$$

Составив уравнение Лапласа для функции $u(x, y)$, получим: $6x + 6y = 0$. Отсюда ясно, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа лишь в точках прямой $y = -x$ и поэтому не является гармонической ни в какой области. Следовательно, не существует аналитической функции, у которой вещественная часть равна $x^3 + y^3$.

197. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$;

б) $\operatorname{Im} f(z) = xy^2$;

в) $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$?

198. Удовлетворяет ли функция $v = \sin x \sin y$ в каких-либо точках плоскости уравнению Лапласа? Существует ли аналитическая функция, имеющая мнимой частью данную функцию v?

Одно из замечательных свойств аналитической функции $f(z)$ состоит в том, что она может быть восстановлена (с точностью до постоянного слагаемого), если известна одна лишь действительная (или мнимая) ее часть $u(x, y)$. Покажем на примере, как это делают.

199. Выяснить, существует ли такая аналитическая функция $f(z)$, что $\operatorname{Im} f(z) = e^y \cos x$. Если существует, то найти ее. Сколько имеется таких аналитических функций?

Решение. Требуется найти действительную часть $u(x, y)$ искомой аналитической функции $f(z)$. Прежде всего проверим, является ли функция $v(x, y) = e^y \cos x$ гармонической (в противном случае она не может быть мнимой частью аналитической функции). Вычисляем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y \sin x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^y \cos x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^y \cos x$$

и устанавливаем, что $\Delta v = 0$; следовательно, $v(x, y)$ является гармонической функцией на всей плоскости. Определим теперь $u(x, y)$, пользуясь тем, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — сопряженные гармонические функции, т. е. они связаны условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos x, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin x. \tag{6.2}$$

Будем искать функцию $u(x, y)$ в виде

$$u = \int e^y \cos x \, dx + \varphi(y). \tag{6.3}$$

Здесь интегрирование производится по переменной x; y выполняет роль параметра. $\varphi(y)$ — неизвестная функция, зависящая только от y, но не от x. Для такой функции $u(x, y)$, очевидно, выполняется условие (6.1). Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось еще и условие (6.2).

Так как из (6.3)

$$u = e^y \sin x + \varphi(y),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin x + \varphi'(y).$$

Но мы хотим, чтобы $\frac{\partial u}{\partial y}$ удовлетворяла условию (6.2). Тогда

$$\varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = c = \text{const},$$

$$u(x, y) = e^y \sin x + c,$$

$$f(z) = u + iv = e^y \sin x + c + ie^y \cos x.$$

Придавая c произвольные действительные значения, получаем бесконечное множество аналитических функций[1] с заданной мнимой частью $e^y \cos x$.

200. Найти аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x$; $f(0) = i$.

Р е ш е н и е. Как и в предыдущей задаче, сначала надо убедиться, что функция $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ гармоническая (проделайте это самостоятельно!). Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда u и v связаны условиями Коши—Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1.$$

Ищем функцию $v(x, y)$ в виде

$$v = \int 2y\, dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — функция, зависящая только от y, но не от x.

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, найдем:

$$\varphi'(y) = 1,\ \varphi(y) = \int \varphi'(y)\, dy = y + c\ (c = \text{const}),$$
$$v(x, y) = 2xy + y + c,$$
$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + c).$$

Учитывая, что по условию $f(0) = i$, получим: $c = 1$.

Итак, функция $f(z)$ восстанавливается однозначно:

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + 1) =$$
$$= (x^2 - y^2 + 2xyi) + (x + yi) + i = z^2 + z + i.$$

201. Найти аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x, y) = e^x \sin y$;

б) $v(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$;

в) $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$;

г) $v(x, y) = 3x^2y - y^3$, $f(0) = 0$;

д) $u(x, y) = \dfrac{x^2 - x + y^2}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 0$;

е) $v(x, y) = -e^{-2y} \cos 2x + x$.

Как уже отмечалось, функция комплексного переменного $w = f(z)$ задает отображение некоторого множества z-плоскости на некоторое множество w-плоскости. Пусть $w = f(z)$ — гладкое отображение некоторой окрестности D точки z_0. Это означает, что функция $f(z)$ определена в D и функции $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$ имеют в области D н е п р е р ы в н ы е частные производные. Пусть Γ — некоторая гладкая кривая, проходящая через точку z_0, и Γ' — ее образ на w-плоскости при данном отображении. Линия Γ' проходит через точку $w_0 = f(z_0)$.

Обозначим через φ_Γ угол, образуемый касательной к кривой Γ в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а через $\varphi_{\Gamma'}$ — угол,

---

[1] Функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = e^y(\sin x + i\cos x) + c = ie^{y-ix} + c = ie^{-iz} + c$ (см. § 8).

образуемый касательной к кривой Γ' в точке w_0. Величина $\alpha_\Gamma = \varphi_{\Gamma'} - \varphi_\Gamma$ называется *углом поворота кривой* Γ *в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$.

Пусть z — произвольная точка кривой Γ, принадлежащая D. В силу гладкости отображения $w = f(z)$ существует

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in\Gamma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = k_\Gamma.$$

Число k_Γ называется *коэффициентом растяжения кривой* Γ *в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$.

202. Найти коэффициент растяжения и угол поворота лучей $\Gamma\ \{\arg z = 0\}$ и $\gamma\left\{\arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$ в точке $z_0 = 0$ при отображении $w = 2z + i\bar{z}$.

Решение. Данное отображение является, очевидно, гладким на всей плоскости. Поэтому искомые величины существуют. Найдем образ Γ' луча Γ. Так как $y = 0$ на луче Γ, то для точек Γ' имеем: $w = 2x + ix$ или $u = 2x$, $v = x$.

Отсюда находим уравнение линии Γ': $u = 2v$. Учитывая еще, что $x \geqslant 0$ на луче Γ, заключаем, что Γ' представляет собой луч: $v = \frac{1}{2}u$ $(u \geqslant 0)$. Поскольку касательные совпадают с самими лучами, то

$$\varphi_\Gamma = 0,\ \varphi_{\Gamma'} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \alpha_\Gamma = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Найдем коэффициент растяжения k_Γ кривой Γ в точке O:

$$k_\Gamma = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in\Gamma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{\substack{x\to 0, \\ x>0}} \frac{|2x + ix|}{x} = |2 + i| = \sqrt{5}.$$

Для луча γ аналогично находим, что его образом γ' является луч $u = v$ $(v \geqslant 0)$ и поэтому

$$\varphi_\gamma = \frac{\pi}{4},\ \varphi_{\gamma'} = \frac{\pi}{4},\ \alpha_\gamma = 0,$$

а

$$k_\gamma = \lim_{\substack{x\to 0, \\ x>0}} \frac{|3x + i3x|}{|x + ix|} = 3.$$

В предыдущей задаче коэффициент растяжения и угол поворота в данной точке при данном отображении зависит от выбора кривой Γ.

Если для некоторого отображения угол поворота в точке z_0 не зависит от выбора кривой, то угол между любыми двумя кривыми Γ_1 и Γ_2, пересекающимися в точке z_0, равен по величине и направлению углу между их образами (Γ'_1 и Γ'_2). По этой причине говорят, что такое отображение обладает в точке z_0 свойством сохранения углов. В этом случае $\alpha_\Gamma = \text{const} = \alpha$ называют *углом поворота отображения в точке* z_0.

Если для некоторого отображения $w = f(z)$ коэффициент растяжения кривой в точке z_0 не зависит от выбора кривой, то говорят, что данное отображение в точке z_0 обладает свойством *постоянства растяжений*. В этом случае $k_\Gamma = \text{const} = k$ называют коэффициентом растяжения данного отображения в точке z_0.

Отображение, обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и свойством постоянства растяжений, называется *конформным в точке* z_0. Отображение, конформное в каждой точке области, называется **конформным в области**.

Аналитические функции находят широкое применение в силу того, что они осуществляют (в точках, где $f'(z) \neq 0$) конформное отображение. Об этом свидетельствует следующая теорема:

Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение, осуществляемое ею, конформно в точке z_0, причем коэффициент растяжения данного отображения в точке z_0 равен $|f'(z_0)|$, а угол поворота равен $\operatorname{Arg} f'(z_0)$.

203. В каких точках плоскости угол поворота отображения $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ равен нулю? В каких точках коэффициент растяжения этого отображения равен 1?

Решение. Условие задачи предполагает прежде всего отыскание тех точек, где заданное отображение конформно, ибо только в таких точках можно говорить об угле поворота и коэффициенте растяжения (не линии, а отображения!). Данная функция как частное двух дифференцируемых функций дифференцируема в любой точке плоскости кроме $z = -i$, где она не определена, причем

$$w' = \frac{(1+iz)'(1-iz)-(1-iz)'(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{-2i}{(z+i)^2}.$$

Поскольку $w'(z) \neq 0$ ни при одном z, то заданное отображение конформно на всей плоскости с выколотой точкой $z = -i$.

Для ответа на первый вопрос задачи вспомним, что угол поворота α отображения $w = w(z)$ в точке z равен $\operatorname{Arg} w'(z)$. Так как у нас $\alpha = 0$, то это означает, что $w'(z)$ должно быть положительным действительным числом. Найдем, для каких z это так. Имеем:

$$w' = \frac{-2i}{(z+i)^2} = \frac{-2i\,[x-i(y+1)]^2}{[x^2+(y+1)^2]^2} = \frac{-4x(y+1)-2i\,[x^2-(y+1)^2]}{[x^2+(y+1)^2]^2}.$$

Число $w'(z)$ будет действительным, если $\operatorname{Im} w'(z) = 0$, и положительным, если к тому же $\operatorname{Re} w'(z) > 0$:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w'(z) = 0, \\ \operatorname{Re} w'(z) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 = x^2, \\ x(y+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x-1 \ (x \neq 0).$$

Итак, угол поворота данного отображения равен нулю в точках прямой (с выколотой точкой $z = -i$) $y = -x - 1$.

Для ответа на второй вопрос задачи вспомним, что коэффициент растяжения k отображения $w = f(z)$ в точке z равен $|w'(z)|$. Найдем, при каких z коэффициент $k = 1$:

$$|w'(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z+i| = \sqrt{2}.$$

Получилось комплексное уравнение окружности, центр которой находится в точке $-i$ и радиус равен $\sqrt{2}$.

204. Является ли конформным отображение, осуществляемое с помощью функции $w = z^3$, в точках $z_1 = i$ и $z_2 = 0$?

205. Найти угол поворота и коэффициент растяжения отображения $w = z^3$ в точке $1 + i$.

206. Какая часть плоскости сжимается при отображении, осуществляемом функцыей:

а) $w = z^2$; б) $w = z^2 + 2z$; в) $w = \frac{1}{z}$?

207. В каких точках плоскости коэффициент растяжения следующих отображений равен 1:

а) $w = z^2$; б) $w = z^3$; в) $w = z^2 - 2z$?

208. В каких точках плоскости угол поворота следующих отображений равен нулю:

а) $w = iz^2$; б) $w = -z^3$; в) $w = z^2 - 2z$?

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Литература: [1], гл. II, пп. 10—11, гл. III, пп. 1—9; [2], гл. III, § 1; [3], гл. VII, § 1—4.

Функция вида

$$w = az + b, \tag{7.1}$$

где a и b — комплексные константы, $a \neq 0$, называется **линейной функцией**. Записав a в показательной форме $a = re^{i\varphi}$, замечаем, что линейное отображение

$$w = re^{i\varphi} z + b$$

является композицией следующих геометрических преобразований:

$w_1 = ze^{i\varphi}$ — поворот на угол φ вокруг точки O;
$w_2 = rw_1$ — гомотетия (центральное подобие) с центром в точке O и коэффициентом r;
$w = w_2 + b$ — параллельный перенос на вектор $\vec{b}$.

Линейную функцию (7.1) (при $a \neq 1$) можно записать также в виде

$$w - c = a(z - c),$$

а потому отображение, осуществляемое линейной функцией, можно свести либо к одному параллельному переносу (при $a = 1$), либо к повороту вокруг точки c с последующей гомотетией, центром которой является точка c.

Линейная функция — аналитическая на всей плоскости, и поскольку $w' = a \neq 0$, то осуществляемое ею отображение конформно в любой точке.

209. Квадрат Q с центром в начале координат, имеющий стороны, параллельные осям координат, подвергается линейному отображению $w = iz - 3$. В какую фигуру он преобразуется?

Решение. Отображение $w = iz - 3$ получается в результате двух последовательных преобразований $w_1 = iz$, $w = w_1 - 3$. Первое из этих преобразований представляет собой поворот вокруг точки $z = 0$ на угол, равный $\arg i = \frac{\pi}{2}$. Квадрат Q при этом преобразуется в себя (здесь z-плоскость и w_1-плоскость считаем совмещенными). Второе преобразование — это параллельный перенос на вектор, комплексная координата которого равна —3. Оно отображает квадрат Q на конгруэнтный квадрат Q' с центром в точке —3 и сторонами, параллельными осям координат. Это и есть образ квадрата Q при отображении $w = iz - 3$.

210. Найти общий вид линейной функции, отображающей полосу $1 < y < 3$ на себя.

Решение. Мы знаем, что всякую линейную функцию можно записать в виде

$$w = z + b \tag{7.2}$$

или

$$w - c = re^{i\varphi}(z - c), \tag{7.2'}$$

где $a = re^{i\varphi} \neq 1$, b, c — произвольные комплексные числа.

Посмотрим вначале, могут ли отображать на себя данную полосу функции вида (7.2). Каждая такая функция представляет собой параллельный перенос, а полоса $1 < y < 3$ отображается, очевидно, на себя при параллельном переносе тогда и только тогда, когда перенос совершается на вектор, параллельный действительной оси. Функция (7.2) в таком случае имеет вид:

$$w = z + t,$$

где t — любое действительное число.

Рассмотрим теперь функции вида (7.2'). Они задают поворот вокруг точки c на угол φ с последующей гомотетией (центр — точка c, коэффициент r). Полоса $1 < y < 3$ может отобразиться на себя при преобразовании поворота, очевидно, в том и только том случае, когда поворот совершается вокруг точки $c = t + 2i$ (t — какое-нибудь действительное число) на угол $\varphi = \pi$. Далее ясно, что никакое гомотетичное преобразование (с центром в точке $c = t + 2i$), коэффициент (растяжения) которого $r \neq 1$, не может рассматриваемую полосу перевести на себя. Поэтому среди функций (7.2') искомыми являются функции вида:

$$w - (t + 2i) = e^{i\pi}[z - (t + 2i)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow w = -z + 2t + 4i,$$

и только они.

Итак, искомые линейные функции имеют вид:

$$w = z + t \quad \text{или} \quad w = -z + 2t + 4i,$$

где t — любое действительное число.

211. Найти линейное отображение, при котором точка $1 + i$ неподвижна[1], а точка 1 переводится в точку i.

212. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами i, $1 + 2i$, $3i$ на подобный ему треугольник с вершинами $1 - i$, $2 - 2i$, $3 - i$.

---

[1] Неподвижной точкой отображения $w = f(z)$ называется такая точка z_0, что $f(z_0) = z_0$.

213. Написать общий вид линейной функции, отображающей верхнюю полуплоскость на себя.

214. Найти общий вид линейной функции, отображающей верхнюю полуплоскость на нижнюю.

215. Каков общий вид линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на левую полуплоскость?

216. Написать общий вид линейной функции, отображающей левую полуплоскость на себя.

217. Найти общий вид линейной функции, отображающей полосу $0 < x < 2$ на себя.

218. Каков общий вид линейной функции, отображающей полосу, ограниченную прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$, на себя?

Дробно-линейные функции имеют вид:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{7.3}$$

где $ad - bc \neq 0$. Дробно-линейное отображение z-плоскости в w-плоскость, т. е. отображение, производимое функцией вида (7.3), может быть сведено к следующим геометрическим преобразованиям: поворот, перенос, гомотетия, осевая симметрия и инверсия.

При решении задач полезно учесть следующие факты.

1. На расширенной комплексной плоскости это отображение является взаимно-однозначным.

2. Дробно-линейное отображение вполне определяется тремя парами соответственных точек:

$$z_1 \to w_1, \; z_2 \to w_2, \; z_3 \to w_3.$$

По этим данным проще всего найти искомую функцию (7.3), используя формулу

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \tag{7.4}$$

Эта формула пригодна и в том случае, когда некоторые из чисел z_k и w_k обращаются в ∞, если воспользоваться формальным правилом: разность, в которой встретится знак ∞, следует заменить на 1.

3. Круговое свойство. При дробно-линейном отображении каждая «окружность в широком смысле слова» (т. е. прямая или окружность) переходит также в «окружность в широком смысле слова»[1].

4. Свойство сохранения симметричных точек. При дробно-линейном отображении каждая пара симметричных относительно некоторой окружности[2] γ точек p_1 и p_2 преобразуется в пару точек p_1' и и p_2', симметричных[3] относительно окружности[2] γ' — образа γ.

5. Дробно-линейная функция (7.3) является аналитической в каждой точке плоскости, кроме точки $z = -\frac{d}{c}$, производная ее всюду отлична от 0, и поэтому производимое ею отображение обладает свойством конформности.

---

[1] Вместо слов «окружность в широком смысле слова» обычно в комплексном анализе говорят: окружность.

[2] Окружность здесь понимается в широком смысле слова.

[3] Две точки z_1 и z_2 считаются симметричными относительно окружности $|z - a| = r$, если они инверсны относительно этой окружности, т. е. точки z_1 и z_2 лежат на одном луче, исходящем из точки a, и $|z_1 - a|\,|z_2 - a| = r^2$. Точка $z = \infty$ считается симметричной центру окружности a.

6. Если при дробно-линейном отображении окружность γ преобразуется в окружность γ', то область D, для которой γ является границей, преобразуется в одну из двух областей, для которых γ' является границей. При этом имеет место принцип соответствия обхода границ, а именно если при каком-то обходе линии γ область D оказывается слева (справа), то при соответствующем обходе линии γ' область D', которая соответствует области D тоже должна оказаться слева (справа).

219. Найти дробно-линейную функцию, которая переводит точки 0, 1, ∞ плоскости z соответственно в точки —1, 0, 1 плоскости w. Во что переходит при этом отображении верхняя полуплоскость? Какие линии z-плоскости переходят при этом в окружности $|w| = c = \text{const}$ $(c > 0)$?

Решение. Введем обозначения: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ и соответственно $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$. Для нахождения функции w воспользуемся формулой (7.4). Имеем:

$$\frac{w+1}{w} : \frac{1+1}{1} = \frac{z}{z-1} : \frac{1}{1};$$

$$\frac{w+1}{w} = \frac{2z}{z-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{w} = \frac{2z}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{w} = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Выясним теперь, во что переходит при этом отображении верхняя полуплоскость. С этой целью используем отмеченный выше принцип соответствия обхода границ. Согласно условию вещественная ось z-плоскости переходит в вещественную ось w-плоскости. Задание трех точек (0, 1, ∞) определяет на вещественной оси z-плоскости направление обхода, при котором верхняя полуплоскость оказывается слева. Тогда при соответствующем обходе вещественной оси w-плоскости (от точки -1 через 0 к точке 1) образ верхней полуплоскости должен также оказаться слева. В нашем случае слева оказывается верхняя полуплоскость. Итак, верхняя полуплоскость плоскости z преобразуется в верхнюю полуплоскость плоскости w. Если условиться, что плоскости z и w совпадают, то можно сказать, что при отображении $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ верхняя полуплоскость переходит в себя.

Окружности $|w| = c$ $(c > 0)$ плоскости w являются образами тех линий z-плоскости, уравнения которых имеют вид:

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = c \Leftrightarrow |z-1| = c|z+1|.$$

Выясним, какая линия z-плоскости задается этим уравнением.

Положим сначала $c = 1$. Линия $|z-1| = |z+1|$ — это прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему точки $z = 1$ и

$z = -1$, и проходящая через его середину[1], т. е. мнимая ось z-плоскости.

Если $c \neq 1$, то уравнения

$$|z - 1| = c\,|z + 1|$$

задают в плоскости z окружности, называемые окружностями Аполлония (см. задачу 116).

Итак, окружности $|w| = c$ $(c \neq 1)$ являются образами окружностей z-плоскости, а единичная окружность $|w| = 1$ является образом мнимой оси z-плоскости.

220. Написать какую-либо дробно-линейную функцию, которая переводит круг $|z - (1 - i)| \leqslant \sqrt{2}$ в нижнюю полуплоскость.

Решение. На границе данного круга выберем три точки, например, $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2i$. На окружности задается направление обхода, при котором круг оказывается справа.

Выберем теперь в плоскости w на действительной оси (которая является границей нижней полуплоскости) три точки w_1, w_2, w_3 таким образом, чтобы при соответствующем обходе границы нижняя полуплоскость оставалась справа. Можно взять, например, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$. По выбранным трем парам соответственных точек $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$, используя формулу (7.4), запишем искомую дробно-линейную функцию:

$$\frac{w - 0}{w - 1} : \frac{1}{1} = \frac{z - 0}{z - 2} : \frac{-2i - 0}{-2i - 2} \Leftrightarrow w = \frac{(1 + i)\,z}{z + 2i}.$$

Замечание. Так как точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 выбирались произвольно, то понятно, что задача имеет не единственное решение: существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих указанное отображение.

221. Найти дробно-линейную функцию, которая единичный круг $|z| \leqslant 1$ отображает на круг $|w| \leqslant 2$, причем так, что точка $z_1 = -\frac{i}{2}$ переходит в точку $w_1 = 0$, а точка $z_2 = i$ — в точку $w_2 = 2$.

Решение. Для определения дробно-линейной функции достаточно знать три пары соответственных точек, а по условию нам даны лишь две такие пары. Так как круг $|z| \leqslant 1$ отображается на круг $|w| \leqslant 2$, то согласно принципу соответствия границ, окружность $|z| = 1$ переходит в окружность $|w| = 2$. Согласно принципу сохранения симметричных точек точки, симметричные относительно первой окружности, переходят в точки, симметричные относительно второй окружности. Точка, симметричная точке $z_1 = -\frac{i}{2}$ относительно единичной окружности, имеет комплексную коорди-

[1] См. ответ к задаче 118.

нату $z_3 = -2i$ (убедитесь в этом самостоятельно!). Точкой, симметричной точке $w_1 = 0$ относительно окружности $|w| = 2$, является $w_3 = \infty$. Таким образом, мы нашли третью пару соответственных точек: $z_3 = -2i \to w_3 = \infty$. Используя формулу (7.4), можем теперь найти искомую функцию:

$$\frac{w-0}{w-2} : \frac{1}{1} = \frac{z+\frac{i}{2}}{z-i} : \frac{-2i+\frac{i}{2}}{-2i-i} \Leftrightarrow w = \frac{2(2z+i)}{z+2i}.$$

222. Построить функцию, осуществляющую конформное отображение плоскости переменного z на плоскость переменного w, которое переводит точки 1, i, ∞ в точки -1, 0, 1.

223. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки 1, 0, i в точки 0, 1, ∞. Какую область z-плоскости преобразует эта функция в верхнюю полуплоскость w-плоскости?

224. Написать дробно-линейную функцию, преобразующую точки 1, i, -1 в точки i, -1, $-i$. В какую линию преобразует эта функция вещественную ось? Какую линию преобразует эта функция в вещественную ось?

225. Написать линейную функцию, конформно преобразующую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$. Написать какую-либо дробно-линейную, но не линейную функцию, осуществляющую требуемое отображение.

226. Написать какую-либо дробно-линейную (но не линейную) функцию, преобразующую верхнюю полуплоскость в себя. Ответ обосновать.

227. В какую область преобразуется единичный круг z-плоскости при отображении $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$? В какую точку преобразуется центр этого круга? Какие линии z-плоскости преобразуются в окружности $|w| = c$?

228. В какую область функция $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ преобразует левую полуплоскость плоскости переменного z? Какие линии z-плоскости при этом переходят в окружности с центром в нулевой точке плоскости переменного w?

229. Проверить, отображает ли функция $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ верхнюю полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$. Какие линии преобразуются при этом отображении в окружности, концентрические единичной окружности?

230. Рассмотреть отображение $w = \dfrac{z-1}{z+1}$. Во что преобразуются при этом отображении окружности $|z| = \text{const}$? Во что преобразуется нижняя полуплоскость?

231. Рассмотреть отображение $w = \dfrac{1}{z}$.

1) В какие линии преобразуются лучи, исходящие из точки $z = 0$ и окружности с центром в точке $z = 0$? 2) Какие линии преобразуются в декартову координатную сетку плоскости переменного w? 3) В какие линии преобразуется семейство окружностей с центром в точке i?

232. Найти общий вид дробно-линейной функции, преобразующей верхнюю полуплоскость в единичный круг, и притом так, чтобы точка i перешла в центр круга.

233. Найти общий вид дробно-линейной функции, преобразующей единичный круг в себя, и притом так, что заданная точка p единичного круга преобразуется в точку $w = 0$.

Указание. В задачах 232—233 воспользуйтесь свойством сохранения симметричных точек.

§ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Литература: [1], гл. III, пп. 11—15; [2], гл. II, п. 7; [3], гл. VI, § 1.

Один из наиболее простых способов введения показательной функции e^z $(z = x + iy)$ состоит в том, что она определяется по формуле

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Если $z = x$ — действительное число, то мы приходим к известной из вещественного анализа функции e^x. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо соотношение

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного могут быть определены с помощью следующих формул:

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}),$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Отметим, что известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области. При переходе от тригонометрических функций к гиперболическим полезно учесть зависимости:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

В дальнейшем свойства тригонометрических и гиперболических функций вещественного аргумента предполагаются известными[1].

Отображения, осуществляемые с помощью функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, являются конформными на всей плоскости.

---

[1] См., например, «Справочник».

В задачах 234—239 доказать, что для любого комплексного z имеют место указанные формулы.

234. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$ **237.** $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$

235. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$ **238.** $\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$

236. $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z.$ **239.** $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$

В задачах 240—244, исходя из определения, доказать справедливость указанных формул.

240. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$

241. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$

242. $\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}.$

243. $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1.$

244. $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$

245. Доказать, что число $2\pi i$ является периодом функции e^z.

246. Найти мнимую часть функции $\operatorname{tg} z$, если $z = x + iy$.

Решение. Используя формулу тангенса суммы (задача 242), можем записать:

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} iy}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} iy}.$$

Так как $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$, то

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} x + i \operatorname{th} y}{1 - i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y} = \frac{\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{th}^2 y) + i \operatorname{th} y (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{th} y (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}.$$

Переходя к функциям $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} y$, после несложных преобразований получим:

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

247. Найти действительную и мнимую части числа $\sin(1 + i)$. Вычислить приближенно $\sin(1 + i)$.

Решение. Применяя формулу синуса суммы, получим:

$$\sin(1 + i) = \sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i.$$

Так как $\cos i = \operatorname{ch} 1$ и $\sin i = i \operatorname{sh} 1$, то

$$\sin(1 + i) = \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1,$$

откуда

$$\operatorname{Re} \sin(1 + i) = \sin 1 \operatorname{ch} 1, \quad \operatorname{Im} \sin(1 + i) = \cos 1 \operatorname{sh} 1.$$

Находя по таблицам приближенные значения $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{ch} 1$, получим:

$$\sin(1 + i) \approx 1{,}2985 + i \cdot 0{,}6350.$$

В задачах 248—253 найти действительную и мнимую части, а также модуль и аргумент каждого из указанных чисел.

248. $\cos i\frac{\pi}{2}$. **249.** $\operatorname{tg}(1-i)$. **250.** e^{1+i}. **251.** $e^{-1+\frac{i\pi}{2}}$. **252.** $\sin i$.

253. $\cos(2-3i)$.

254. Найти приближенно (с тремя десятичными знаками) модуль числа $\operatorname{ctg}(1-i)$.

В задачах 255—257 требуется выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительную и мнимую части и модуль указанных функций.

255. $\sin z$. **256.** $\operatorname{ch} z$. **257.** $\operatorname{sh} z$.

258. Вычислить приближенно $\sin(1-2i)$.

259. Вычислить приближенно $\cos(1+2i)$.

260. Вычислить приближенно $\operatorname{ch}(-2+i)$.

Указание. Использовать формулу задачи № 244.

261. Может ли при каком-либо комплексном z оказаться, что $\sin z$ по модулю больше 1? Ответ обосновать.

262. Начертить графики указанных функций:

а) $y=|\sin ix|$; б) $y=|e^{ix}|$;
в) $y=|\cos ix|$; г) $y=|\operatorname{th} ix|$.

263. Имеет ли функция $w=\sin z$ хотя бы один мнимый корень?

1-е решение. Полагая $z=\alpha+\beta i$, имеем:

$$\sin z=0\Leftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz}\Leftrightarrow e^{2iz}=$$
$$=1\Leftrightarrow e^{i2(\alpha+\beta i)}=1\Leftrightarrow e^{-2\beta}e^{2i\alpha}=1.$$

В последнем равенстве справа стоит 1, а слева — комплексное число, записанное в показательной форме, причем модуль его равен $e^{-2\beta}$, а аргумент 2α. Но у равных комплексных чисел модули равны, а аргументы могут отличаться лишь на $2k\pi$. Поэтому

$$e^{-2\beta}e^{2i\alpha}=1\Leftrightarrow\begin{cases}e^{-2\beta}=1,\\2\alpha=2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0,\\\alpha=k\pi\end{cases}\Leftrightarrow z=k\pi\ \ (k=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Итак, каждый корень функции $\sin z$ имеет вид $z=\pi k$, где k — целое число, так что $\sin z$ не имеет ни одного мнимого корня.

2-е решение. Пусть $z=x+iy$. Выделим действительную и мнимую части функции $\sin z$:

$$\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y.$$

Нас интересуют те точки $z=x+iy$, в которых $\sin(x+iy)=0$. Это будет тогда и только тогда, когда

$$\sin x\operatorname{ch} y=0\ \text{ и }\ \cos x\operatorname{sh} y=0.$$

Так как $\operatorname{ch} y>0$ (см. «Справочник», с. 100), то первое из указанных равенств возможно лишь в том случае, когда $\sin x=0$; но так как при этом $\cos x\neq0$, то необходимо, чтобы $\operatorname{sh} y=0$.

Следовательно, корнями функции $\sin z$ будут лишь те числа $z = x + iy$, для которых одновременно $\sin x = 0$ и $\operatorname{sh} y = 0$. Отсюда имеем: $x = k\pi$, $y = 0$ или $z = k\pi$. Итак, все корни — числа действительные.

264. Решить уравнение $\sin z = 2$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Как и в предыдущей задаче, находим:

$$\sin (x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Данное уравнение можно переписать в виде

$$\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y = 2.$$

Исходя из условия равенства двух комплексных чисел, получим систему

$$\begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y = 2, \\ \cos x \operatorname{sh} y = 0. \end{cases}$$

Предположение, что $\operatorname{sh} y = 0$ (или $y = 0$), приводит к тому, что $\operatorname{ch} y = \operatorname{ch} 0 = 1$, и тогда из первого уравнения системы следовало бы, что $\sin x = 2$, чего для действительных x быть не может. Поэтому $\operatorname{sh} y \neq 0$, и, следовательно (в силу второго уравнения системы), $\cos x = 0$, а из первого уравнения следует, что $\sin x = 1$. Поэтому $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k — целое). При этом окажется, что $\operatorname{ch} y = 2$. Заменяя $\operatorname{ch} y$ на $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ и решая полученное уравнение, найдем:

$$y = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad y = \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, уравнение имеет следующие комплексные решения:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

265. Из z-плоскости удалены круги заданного радиуса $\varepsilon \left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$, имеющие своими центрами точки $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Доказать, что в оставшейся части плоскости функция $\operatorname{ctg} \pi z$ является ограниченной.

Решение. Так как функция $\operatorname{ctg} \pi z$ имеет своим периодом число 1 (проверить самостоятельно!), то достаточно рассмотреть ее значения в замкнутой полосе S, ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = 1$, причем из этой полосы удалены внутренние области полукругов радиуса ε с центрами в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Во всякой ограниченной части полосы S функция $\operatorname{ctg} \pi z$ непрерывна, а следовательно, ограничена по модулю. Поэтому нам остается лишь показать, что $|\operatorname{ctg} \pi z|$ остается ограниченным, когда точка $z = x + iy$ любым образом удаляется в бесконечность, оставаясь в полосе S, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $y \to \pm \infty$.

Будем исходить из формулы:

$$\operatorname{ctg}\pi z = \frac{\cos\pi z}{\sin\pi z} = i\,\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = i\,\frac{e^{-\pi y}e^{\pi i x} + e^{\pi y}e^{-\pi i x}}{e^{-\pi y}e^{\pi i x} - e^{\pi y}e^{-\pi i x}}.$$

Заменяя здесь модуль числителя суммой модулей, а модуль знаменателя абсолютной величиной разности модулей, получаем:

$$|\operatorname{ctg}\pi z| \leqslant \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}.$$

Отсюда непосредственно усматриваем, что при $y \to \pm\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к пределу, равному 1. Поэтому при достаточно больших по абсолютной величине значениях y можно считать, что, например, $|\operatorname{ctg}\pi z| < 2$.

Итак, теперь полностью доказано, что в части плоскости, указанной в задаче, функция $\operatorname{ctg}\pi z$ является ограниченной.

266. Действительные корни уравнения $\cos x = 0$ известны из курса математики средней школы. Имеет ли функция $\cos z$ ($z = x + iy$) еще какие-либо корни? Ответ обосновать.

267. Выяснить, в каких точках плоскости, кроме точек действительной оси, данные функции $w = f(z)$ принимают действительные значения:

а) $w = e^z$; б) $w = \cos z$; в) $w = \sin z$.

268. В каких точках плоскости переменного z функция: а) $w = \cos z$; б) $w = \sin z$ принимает чисто мнимые значения?

269. Какая часть плоскости при отображении $w = e^z$ сжимается?

270. Выяснить, во что преобразуется полоса $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ при отображении $w = \sin z$.

Решение. Рассмотрим вначале, во что преобразуется при данном отображении произвольная прямая $x = c\ \left(\frac{\pi}{2} < c < \pi\right)$. Для точки $w = u + iv$, являющейся образом произвольной точки $z = c + iy$ этой прямой, имеем (см. № 263):

$$w = \sin z \Leftrightarrow u + iv = \sin c\operatorname{ch} y + i\cos c\operatorname{sh} y \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sin c\operatorname{ch} y \\ v = \cos c\operatorname{sh} y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{\sin c} = \operatorname{ch} y \\[2ex] \dfrac{v}{\cos c} = \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1. \qquad (8.1)$$

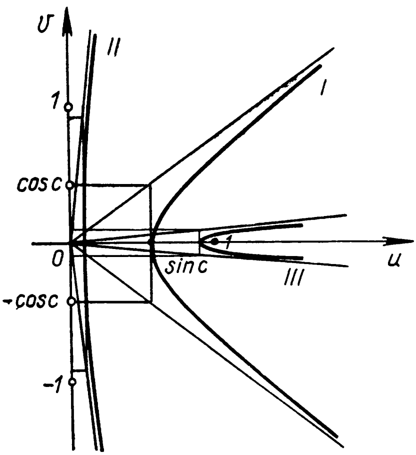


Рис. 11

Мы получили, что точка $w = u + iv$ — образ точки $z = c + iy$ — удовлетворяет уравнению (8.1), которое определяет гиперболу (начертите ее!). Однако, когда точка z пробегает прямую $x = c$, ее образ w может и не описать всей гиперболы, так как при выводе уравнения (8.1) применялись такие преобразования, которые могут привести к приобретению посторонних решений. Выясним, вся ли гипербола (8.1) является образом прямой $x = c$. Для этого рассмотрим полученные в процессе решения параметрические уравнения

$$u = \sin c \operatorname{ch} y,$$
$$v = \cos c \operatorname{sh} y,$$

которые при $-\infty < y < +\infty$ в точности определяют искомый образ. Так как $\operatorname{ch} y > 0$ при любом y, а $\sin c > 0$ при рассматриваемых c, то $u > 0$. Это означает, что образ прямой лежит лишь на правой ветви гиперболы (8.1). Из того же, что при изменении y от $-\infty$ до $+\infty$ функция $\operatorname{sh} y$ также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, следует, что v изменяется (так как $\cos c < 0$) от $+\infty$ до $-\infty$. Это означает, что искомый образ с о в п а д а е т с правой ветвью гиперболы (8.1) (рис. 11, линия I).

Для нахождения образа заданной полосы представим себе, что она как бы «замощена» прямыми $x = c \left(\frac{\pi}{2} < c < \pi\right)$. Тогда образы этих прямых «замостят» образ полосы. Что же «замостят» правые ветви гипербол (8.1)? Прежде всего заметим, что вершина любой гиперболы вида (8.1) лежит на $]0, 1[$. Если $c \to \pi$, то гипербола (рис. 11, линия II) приближается к оси Ov (ее вершина приближается к началу координат), распрямляясь (действительная полуось $\sin c \to 0$, мнимая $|\cos c| \to 1$). Если $c \to \frac{\pi}{2}$, то правая ветвь гиперболы, сжимаясь (действительная полуось $\sin c \to 1$, мнимая $|\cos c| \to 0$), приближается (рис. 11, линия III) к лучу $[1, +\infty[$. Приходим к выводу, что рассматриваемые ветви гипербол «замостят» правую полуплоскость с разрезом по лучу $[1, +\infty[$ оси Ou.

271. Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = e^z$ (полученный образ и заданный прообраз начертить):

а) прямая $x = c$; б) прямая $y = c$; в) прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$; г) полоса $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{3}$; д) полуполоса $x < 0$, $0 < y < \frac{\pi}{4}$; е) прямоугольник $0 < x < 1$, $\frac{\pi}{6} < y < \frac{\pi}{3}$.

272. Выяснить, во что преобразуются (данный прообраз и полученный образ изобразить на рисунках) при отображении $w = \cos z$: а) прямая $x = c$; б) прямая $y = c$; в) полуполоса $0 < x < \pi$, $y < 0$; г) полуполоса $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$; д) полуполоса $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$; е) полоса $0 < x < \pi$; ж) прямоугольник $0 < x < \pi$, $-h < y < h$ $(h > 0)$.

273. Найти образ прямоугольника $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$ при отображении $w = e^{iz}$. Сделать чертеж.

274. Найти образ полуполосы $0 < x < 1$, $y > 0$ при отображении $w = \cos \pi z$. Сделать чертеж.

§ 9. ЛОГАРИФМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. СТЕПЕНЬ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Литература: [1], п. 19 и 20; [3], гл. VI, § 2, 4.

Логарифмом (натуральным) числа z (обозначается $\operatorname{Ln} z$) называется такое число w, что $e^w = z$. Оказывается, что в комплексной области логарифм существует не только для действительных положительных чисел (как это было в действительной области), но и для отрицательных и даже мнимых. Больше того, в силу периодичности показательной функции в комплексной области каждое число $z \neq 0$ имеет бесконечно много логарифмов. Находить их можно по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{9.1}$$

где $\ln |z|$ — действительное значение натурального логарифма от положительного числа $|z|$, известное из элементарной алгебры.

275. Вычислить $\operatorname{Ln}(1 + i)$.

Решение. $\operatorname{Ln}(1 + i) = \ln |1 + i| + i[\arg(1 + i) + 2k\pi] = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

При $k = 0$ получим $w_0 \approx 0{,}3645 + 0{,}7854i$, при $k = 1$ $w_1 \approx 0{,}3645 + 7{,}0686i$. Все значения находятся на прямой $x = \ln \sqrt{2}$. Расстояние между соседними значениями равно 2π.

276. Вычислить логарифмы следующих чисел и изобразить на чертеже несколько значений логарифма:

а) i; б) -5; в) $-1 + i\sqrt{3}$; г) $-3 - i\sqrt{3}$; д) $1 - i\sqrt{3}$; е) $-i$; ж) 5; з) $1 + i\sqrt{3}$; и) $3 + i\sqrt{3}$; к) $-1 - i\sqrt{3}$.

277. Доказать, что для любого положительного действительного числа x одно и только одно значение $\operatorname{Ln} x$ является действительным, а для любого отрицательного или мнимого числа z все значения натурального логарифма мнимые.

Известные правила о логарифме произведения и частного сохраняются и в комплексной области[1]:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \tag{9.2}$$

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \tag{9.3}$$

278. Вычислить $\operatorname{Ln}[(1-i)(1+i\sqrt{3})]$.

Решение. Пользуясь формулами (9.1) и (9.2), получаем:

$$\operatorname{Ln}[(1-i)(1+i\sqrt{3})] = \operatorname{Ln}(1-i) + \operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3}) =$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) =$$
$$= \ln 2\sqrt{2} + i\left[\frac{\pi}{12} + 2\pi(k+n)\right] = \frac{3}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi m\right),$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Здесь использован тот факт, что $k+n$ принимает все целые значения, когда k и n пробегают независимо друг от друга все возможные целые значения. Это позволяет упростить ответ, положив $k + n = m$.

279. Вычислить логарифмы следующих чисел:

а) $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$; в) $(3+i\sqrt{3})^2$; г) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

280. «Положив в формуле (9.2) $z_1 = z_2 = z$, получаем:

$$\operatorname{Ln}(z \cdot z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z,$$

т. е. $\operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z$». Верно ли это?

Решение. Возьмем $z = 2$. Тогда

$$\operatorname{Ln} 4 = \operatorname{Ln} 2^2 = 2\operatorname{Ln} 2 = 2(\ln 2 + 2i\pi k) =$$
$$= \ln 4 + 4k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

С другой стороны, по формуле (9.1):

$$\operatorname{Ln} 4 = \ln 4 + 2n\pi i.$$

Но числовые множества $\{\ln 4 + 4k\pi i\}$ и $\{\ln 4 + 2n\pi i\}$ не равны. Второе множество содержит, например, число $\ln 4 + 2\pi i$ $(n = 1)$, в то время как первое его не содержит (ни при каком целом k выражение $\ln 4 + 4k\pi$ не даст $\ln 4 + 2\pi i$).

Итак, полученная формула неверна. Это означает, что $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2\operatorname{Ln} z$, и в этом нет ничего удивительного: ведь мы оперируем с множествами, а не с числами.

---

[1] Равенство (9.2) лишь по внешнему виду вполне аналогично известному равенству элементарной алгебры! Между ними имеется существенная разница. Равенство (9.2) понимается в следующем смысле: каждое значение $\operatorname{Ln}(z_1 \times z_2)$ равно сумме некоторого значения $\operatorname{Ln} z_1$ и некоторого значения $\operatorname{Ln} z_2$, и наоборот, сумма любых двух значений $\operatorname{Ln} z_1$ и $\operatorname{Ln} z_2$ равна некоторому значению $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2)$. Аналогично следует понимать и равенство (9.3).

Выражение $w = \operatorname{Ln} z$ не является функцией в общепринятом смысле — данному z оно ставит в соответствие не единственное w. Это так называемая многозначная функция. Но если в выражении (9.1) для логарифма фиксировать k, то для любого $z \neq 0$ получаем единственное значение логарифма. Возникающая при этом функция называется однозначной ветвью многозначной функции $\operatorname{Ln} z$. Значение $\operatorname{Ln} z$, которое получается при $k = 0$, называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z$. Итак,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Любая однозначная ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ определена на всей плоскости с выколотой точкой $z = 0$, но не является непрерывной во всей своей области определения (она терпит разрыв в точках действительной отрицательной полуоси, так как в этих точках разрывна функция $\arg z$). Однако любая ветвь логарифма является не только непрерывной, но и аналитической в области D, представляющей собой плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси[1]. Все ветви имеют своей производной одну и ту же функцию $\frac{1}{z}$. Отображение, осуществляемое любой ветвью логарифма, конформно в каждой точке указанной области D.

281. Верна ли формула

$$\ln (z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2?$$

282. Найти образы окружностей $|z| = c$ и лучей $\arg z = \alpha$ при отображении той ветвью функции $w = \operatorname{Ln} z$, которая при $z = 1$ имеет значение $w = 0$. Во что при этом отображении переходит плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси; угол D $\{\alpha < \arg z < \beta \quad (\alpha > -\pi, \beta \leqslant \pi)\}$?

Решение. Так как $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i = 0$ при $k = 0$, то имеется в виду главное значение логарифма, т. е. $\ln z$. Для точек окружности L $\{|z| = c\}$ имеем:

$$w = \ln z = \ln c + i\varphi,$$

т. е. $u = \ln c = \text{const}$, $v = \varphi$ $(-\pi < \varphi \leqslant \pi)$. Это означает, что образ L' окружности L является отрезком прямой, параллельной оси v (открытым снизу и замкнутым сверху; см. рис. 12).

Для точек луча T $\{\arg z = \alpha\}$ имеем:

$$w = \ln z = \ln |z| + i\alpha, \tag{9.4}$$

т. е. $u = \ln |z|$, $v = \alpha = \text{const}$. Так как $\ln |z|$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, когда z пробегает луч T, то уравнение (9.4) определяет прямую, параллельную действительной оси u (см. рис. 12).

Плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси будет «замощена» лучами $\arg z = \alpha$, когда α изменяется от $-\pi$ до π. Тогда их образы — прямые $v = \alpha$ — «замостят» на w-плоскости полосу $-\pi < v < \pi$. Аналогично замечаем, что угол D отображается на полосу $\alpha < \operatorname{Im} w < \beta$.

[1] Тот факт, что рассматривается именно такая область, носит случайный характер. Это вызвано тем, что в формуле (9.1) фигурирует главное значение аргумента, а оно нами выбрано из промежутка $[-\pi, \pi]$.

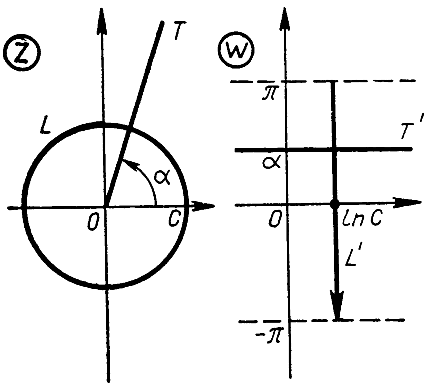


Рис. 12

В задачах 283—289 требуется выяснить, во что преобразуется указанное множество при отображении ветвью функции $w = \operatorname{Ln} z$, выделяемой ее значением в указанной точке. Сделать чертеж.

283. Виток спирали $r = e^{\varphi}$ $(-\pi < \varphi < \pi)$; $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

284. Проколотый круг $0 < |z| < 1$; $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

Указание. Эту область можно «замостить» окружностями $|z| = c$, $0 < c < 1$.

285. Кольцо $2 < |z| < 4$; $\operatorname{Ln} 1 = -2\pi i$.

286. Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$; $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

287. Правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Ln}(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

288. Угол $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; $\operatorname{Ln} i = -\frac{3}{2}\pi i$.

289. Область $D\left\{-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ 1 < |z| < e\right\}$; $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

290. Найти образ угла $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ при отображении произвольной однозначной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$.

291. Какая часть плоскости при отображении $w = \ln(z - 1)$ сжимается?

292. Около 400 лет назад голландский ученый Меркатор предложил следующий способ построения географических карт. Земную сферу отображают на плоскость с помощью стереографической проекции, а затем плоскость подвергают отображению $w = i \ln z$. Такие карты нашли широкое распространение в навигации, благодаря тому, что они получены конформным отображением и локсодромии[1] на них изображаются прямыми линиями.

Какие линии будут изображать на карте Меркатора параллели и меридианы, в частности экватор и нулевой меридиан? Какая область будет изображать часть земной поверхности, находящуюся между 30 и 60° восточной долготы и между 40 и 60° северной широты?

С помощью понятия натурального логарифма вводят понятие **комплексной степени** любого комплексного числа. При этом используют так называемое «основное логарифмическое тождество» $a^x = e^{x \ln a}$, считая его важнейшим свойством, которое должно сохраниться и в комплексной области. А именно по определению полагаем:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \tag{9.5}$$

---

[1] Локсодромии — пути на поверхности Земли, вдоль которых стрелка компаса сохраняет неизменное направление.

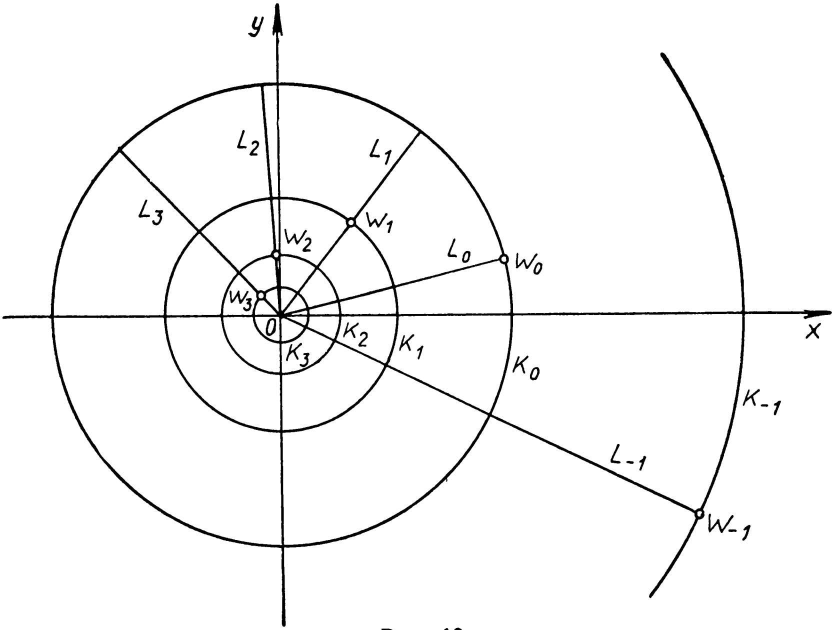


Рис. 13

293. Вычислить $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

Решение. Согласно формулам (9.5) и (9.1):

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln}\frac{1-i}{\sqrt{2}}}=e^{(1+i)\,i\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\,e^{i\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

В частности, при $k=0$ имеем:

$$e^{\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)\simeq 1{,}55\,(1-i).$$

В задачах 294—300 требуется найти все значения указанных степеней. Ответ записать в показательной форме. Значение, отвечающее $k=0$, записать в алгебраической форме, вычислив действительную и мнимую части с двумя верными десятичными знаками.

294. 1^{-i}. **295**. i^i. **296**. $(1+i)^i$. **297**. 1^i. **298**. $(1-i)^{i-1}$. **299**. $(-1)^i$. **300**. $(1+i)^{1-i}$.

301. Доказать, что все значения w_k $(k=0,\ \pm1,\ \ldots)$ степени a^b $(b=\alpha+i\,\beta,\ \alpha\neq0,\ \beta\neq0)$ можно построить следующим образом. Строим w_0. Проводим окружность K_0 $\{|z|=r=|w_0|\}$ и луч L_0 $\{\arg z=\arg w_0\}$. Уменьшив[1] радиус окружности K_0 в $e^{2\pi\beta}$ раз,

[1] Ниже для конкретности ограничимся случаем, когда $|e^{2\pi\beta}|>1$.

получим окружность K_1 и, повернув луч L_0 на угол $2\pi\alpha$, получим луч L_1. Пересечение линий L_1 и K_1 дает точку w_1. Уменьшив радиус окружности K_1 в $e^{2\pi\beta}$ раз и повернув луч L_1 на угол $2\pi\alpha$, получим окружность K_2 и луч L_2, которые в пересечении дадут точку w_2, и т. д. Точка w_{-1} — точка пересечения окружности K_{-1} (она получается растяжением в $e^{2\pi\beta}$ раз окружности K_0) и луча L_{-1} (он получается поворотом луча L_0 на угол $-2\pi\alpha$). Растяжением окружности K_{-1} в $e^{2\pi\beta}$ раз и поворотом луча L_{-1} на угол $-2\pi\alpha$ получаем окружность K_{-2} и луч L_{-2}, пересечение которых дает точку w_{-2}, и т. д. (см. рис. 13).

Решение. Положив $a = re^{i\varphi}$, по формуле (9.5) получаем:

$$a^b = e^{(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} a} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi+2k\pi)}\, e^{i[\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta \ln r]}.$$

Это показательная форма значения w_k искомой степени. Обозначим модуль w_k через r_k и аргумент через φ_k. Имеем:

$$r_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi}\, e^{-2\pi\beta k} = \frac{r_0}{(e^{2\pi\beta})^k},$$

$$\varphi_k = \alpha\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha = \varphi_0 + (2\pi\alpha)k.$$

Этими формулами и определяется описанный способ построения чисел w_k.

302. Доказать, что при $b = \alpha + \beta i$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) всевозможные значения a^b лежат на логарифмической спирали, уравнение которой в полярных координатах имеет вид:

$$r = ce^{-\frac{\beta}{\alpha}\varphi}.$$

Опишите способ построения значений a^b с помощью спирали.

303. Как располагаются на комплексной плоскости значения степени a^b, если b — чисто мнимое число?

304. Может ли мнимое число при возведении в мнимую степень дать действительные значения? Привести пример.

305. Пусть a, b_1, b_2 — произвольные комплексные числа. Справедливо ли соотношение

$$a^{b_1}\, a^{b_2} = a^{b_1+b_2}?$$

306. Справедливо ли в общем случае соотношение

а) $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$; б) $(a^{b_1})^{b_2} = (a^{b_2})^{b_1}$?

307. Доказать, что при действительном $b = \alpha$ формула (9.5) приобретает вид (обобщение формулы Муавра):

$$a^\alpha = r_+^\alpha\, e^{i\alpha(\varphi+2k\pi)}, \qquad (9.6)$$

где $k = 0, \pm 1, \ldots$, $r = |a|$, $\varphi = \arg a$, а r_+^α означает единственное действительное положительное значение степени положительного числа r.

308. Найти значения:

а) 1^π; б) $(-1)^\pi$; в) i^π.

309. Может ли при возведении мнимого числа в иррациональную степень получиться действительное число?

310. Доказать, что при любом целом $n \neq 0$ и для любого комплексного числа $a \neq 0$ выражение a^n имеет одно значение.

311. Доказать, что любое комплексное число $a \neq 0$ при возведении в дробную степень $\frac{p}{q}$ (дробь несократима) дает q различных значений, расположенных на окружности $|z| = \underset{+}{|a|}^{\frac{p}{q}}$ и делящих эту окружность на q конгруэнтных частей. Сколько среди значений $a^{\frac{1}{q}}$ действительных чисел, если: 1) $a > 0$, q — четное; 2) $a > 0$, q — нечетное; 3) $a < 0$, q — четное; 4) $a < 0$, q — нечетное? Согласуются ли ответы на последние вопросы с ответами, известными из элементарной алгебры?

312. Доказать, что при возведении любого комплексного числа $a \neq 0$ в иррациональную степень α получается бесконечно много значений и все они лежат на окружности $|z| = \underset{+}{|a|^{\alpha}}$. Сколько среди значений a^{α} действительных чисел, если: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$?

Решение. Значения a^{α} можно находить по формуле (9.6). Докажем, что при различных значениях k ($k = 0, \pm 1, \ldots$) получаются различные значения степени. Допустим противное:

$$\underset{+}{r^{\alpha}}\, e^{i\alpha(\varphi + 2k_1\pi)} = \underset{+}{r^{\alpha}}\, e^{i\alpha(\varphi + 2k_2\pi)}.$$

Но если два комплексных числа равны, то их аргументы отличаются на $2\pi n$, т. е.

$$\alpha(\varphi + 2k_1\pi) - \alpha(\varphi + 2k_2\pi) = 2n\pi,$$

где n — целое. Отсюда

$$\alpha = \frac{n}{k_2 - k_1},$$

а это означает, что α — число рациональное (вопреки условию). Итак, a^{α} при иррациональном α имеет бесконечно много значений. У всех этих значений (см. формулу 9.6) одинаковый модуль $\underset{+}{r^{\alpha}}$, значит, они располагаются на окружности $|z| = \underset{+}{r^{\alpha}}$.

313. При решении в действительной области степенно-показательных уравнений вида

$$[\varphi(x)]^{f(x)} = [\varphi(x)]^{g(x)}$$

часто пользуются таким «очевидным» утверждением[1]: если

$$a^b = a^c \qquad (9.7)$$

---

[1] См., например, Ваховский Е. Б. и Рывкин А. А. Задачи по элементарной математике. М., 1969, с. 56.

и $b \neq c$, то либо $a = 0$, либо $a = 1$, либо $a = -1$. Доказать это утверждение.

Доказательство. Ясно, что при $a = 0$ и $a = \pm 1$ равенство (9.7) действительно может выполняться ($0^2 = 0^3$, $1^5 = 1^4$, $(-1)^2 = (-1)^6$). При $a > 0$ и $a \neq 1$ это равенство не может выполняться в силу монотонности показательной функции $y = a^x$.

Пусть $a < 0$. Рассмотрим данное равенство в комплексной области. Здесь оно понимается так: одно из значений a^b равно одному из значений a^c (и эти значения являются действительными числами). С помощью формулы (9.6) преобразуем равенство (9.7) к виду

$$\underset{+}{|a|^b}\, e^{ib(\pi + 2k\pi)} = \underset{+}{|a|^c}\, e^{ic(\pi + 2n\pi)}.$$

Слева и справа записаны числа в показательной форме. Значит, $\underset{+}{|a|^b}$ и $\underset{+}{|a|^c}$ — их модули. Но если два комплексных числа равны, то равны их модули:

$$\underset{+}{|a|^b} = \underset{+}{|a|^c}.$$

Получилось равенство вида (9.7) с положительным основанием $|a|$. Оно возможно, как отмечалось выше, только при $|a| = 1$. А так как a — действительное отрицательное число, то это и означает, что $a = -1$.

Функция $w = z^\alpha$ лишь при целом действительном α является однозначной функцией; если $\alpha > 0$, она будет определена и аналитична на всей плоскости, если $\alpha < 0$, функция является аналитической на всей плоскости, кроме точки $z = 0$. При остальных показателях α это многозначная функция[1]. Фиксировав в определении степени z^α (см. формулу (9.5)) какую-нибудь однозначную ветвь логарифмической функции, можно выделить однозначные ветви показательной функции. Как и ветви логарифмической функции, они являются аналитическими в плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси (см. сноску на с. 63), и осуществляемое ими отображение конформно во всех точках рассматриваемой области.

314. Найти образ угла $-\vartheta < \arg z < \vartheta$ при отображении той однозначной ветвью функции $w = \sqrt{z}$, которая в точке $z = i$ принимает значение $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решение. По формуле (9.6)

$$\sqrt{z} = \underset{+}{\sqrt{r}}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + k\pi\right)}.$$

---

[1] При $\alpha = \frac{1}{n}$ выражение $z^{\frac{1}{n}}$ записывают также в виде $\sqrt[n]{z}$ (n—натуральное).

Так как $\sqrt{z}$ имеет два значения, которые можно найти, давая параметру k значения 0 и 1, то $\sqrt{z}$ порождает две однозначные функции:

$$w = \underset{+}{\sqrt{r}}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \text{ и } w = \underset{+}{\sqrt{r}}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}.$$

Найдем, какая из них в точке i принимает заданное значение $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Для первой ветви имеем:

$$w(i) = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Итак, требуется рассмотреть функцию (главная ветвь $\sqrt{z}$)

$$w = \underset{+}{\sqrt{r}}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Данный угол можно «замостить» лучами l $\{\arg z = \alpha\}$ $(-\vartheta < \alpha < \vartheta)$. Найдем образ луча l. Любая точка этого луча имеет вид:

$$z = re^{i\alpha}\ (0 < r < \infty,\ \alpha = \text{const}).$$

Тогда образ w этой точки выглядит так:

$$w = \underset{+}{\sqrt{r}}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

При изменении r от 0 до $+\infty$ точка z опишет луч l, а точка w, очевидно, опишет луч L $\{\arg w = \frac{\alpha}{2}\}$. При изменении α от $-\vartheta$ до ϑ луч l опишет заданный угол, а его образ L — угол

$$-\frac{\vartheta}{2} < \arg w < \frac{\vartheta}{2}.$$

315. Найти образ заданного множества E при отображении ветвью указанной функции, выделяемой ее значением в указанной точке:

а) $E\left\{-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$; $w = \sqrt{z}$; $w(1) = -1$;

б) $E\{\operatorname{Im} z > 0\}$; $w = z^{\frac{3}{2}}$; $w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1-i}{4}$;

в) $E\{\operatorname{Re} z > 0\}$; $w = z^{-\frac{3}{2}}$; $w(9) = -\frac{1}{27}$;

г) $E\{|z| < 4,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(1) = 1$.

Сделать чертеж.

После того как показано, что произвольное комплексное число a ($a \neq 0$) можно возвести в любую комплексную степень, можно перенести обычное определение логарифма и на случай комплексного основания a. При этом вычисление логарифма при любом основании $a \neq 0$ сводится к вычислению натурального логарифма по обычной (на внешний вид) формуле перехода:

$$\mathrm{Log}_a z = \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, a} = \frac{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)}{\ln|a| + i(\arg a + 2n\pi)}, \tag{9.8}$$

где k и n пробегают независимо друг от друга множество целых чисел.

Для выделения однозначной ветви функции $\mathrm{Log}_a z$ нужно выделить какую-нибудь ветвь функции $\mathrm{Ln}\, z$ и фиксировать одно из возможных значений $\mathrm{Ln}\, a$.

316. Можно ли число 1 возвести в такую степень, чтобы получить 100?

Решение. Искомая степень является логарифмом 100 при основании 1. Такая степень существует и может быть найдена по формуле (9,8):

$$\mathrm{Log}_1 100 = \frac{\mathrm{Ln}\ 100}{\mathrm{Ln}\ 1} = \frac{\ln 100 + 2k\pi i}{2n\pi i}.$$

Положив здесь $k = 0$ и $n = 1$, приходим к выводу, что, например, при возведении 1 в степень $b = \dfrac{\ln 100}{2\pi i} = \dfrac{\ln 10}{\pi i}$ получим (среди многих других значений) число 100. Действительно,

$$1^b = e^{b\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{b\cdot 2k\pi i} = e^{\frac{\ln 10}{\pi i}2k\pi i} = e^{k\ln 100} = 100^k = 100$$

при $k = 1$.

317. Можно ли, возведя 1 в какую-то степень, получить число -1; число i; число 0?

318. Доказать, что действительными логарифмами при основании, равном единице, обладают те и только те числа, которые изображаются точками единичной окружности.

319. Вычислить $\mathrm{Log}_{-2}(-8)$. Сколько имеется среди найденных значений действительных чисел?

320. Найти комплексные десятичные логарифмы числа 10, т. е. вычислить $\mathrm{Log}_{10}\ 10$. Имеется ли среди найденных значений число $\lg 10 = 1$?

§ 10. ПРИМЕРЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ДАВАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Отображение, осуществляемое аналитической функцией (в тех точках, где $f'(z) \neq 0$), является конформным. Благодаря этому факту, аналитические функции находят применение при решении большого числа практических задач. В таких задачах часто требуется найти взаимно-однозначное конформное отображение данной односвязной области D на каноническую область (полуплоскость или круг[1]).

В простейших случаях конформное отображение[2] может быть найдено с помощью элементарных функций. При решении конкретных задач опираются на ряд «стандартных» результатов (см. таблицу на следующей странице), которые устанавливаются при изучении соответствующих элементарных функций.

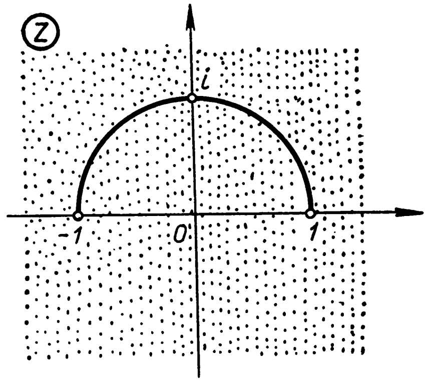


Рис. 14

321. Найти конформное отображение плоскости с вырезанной полуокружностью (см. рис. 14) на верхнюю полуплоскость.

Решение. Просматривая таблицу простейших отображений, ищем, какой из рисунков левого столбца может дать плоскость с каким-нибудь разрезом, а его образ (рисунок справа) — какую-нибудь полуплоскость. Это рисунок 21, который при $\theta = \pi$ изображает плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, а его образ (рис. 22)—правую полуплоскость $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Верхняя полуплоскость получается из правой поворотом на 90° вокруг точки $z = 0$. Итак, если с помощью конформного отображения удастся преобразовать полуокружность в отрицательную полуось, то поставленная задача будет решена. Полуокружность же можно распрямить в луч с помощью дробно-линейного отображения. Найдем, например, дробно-линейную функцию, переводящую точки 1 в 0, i в -1 и -1 в ∞. С помощью известной формулы (7.4) находим эту функцию:

$$t = i\,\frac{z-1}{z+1}.$$

Эта функция дает конформное отображение плоскости z с разрезом по полуокружности (см. рис. 14) на плоскость t с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 23).

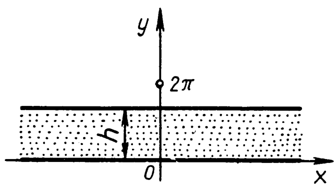
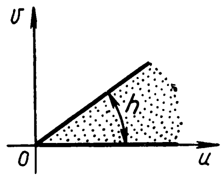
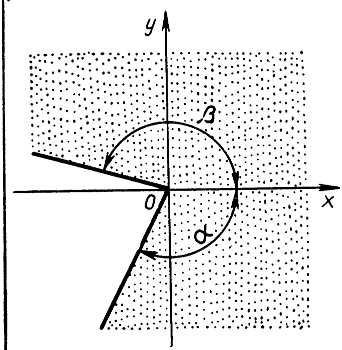
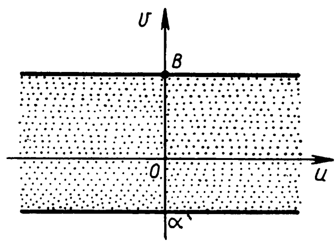
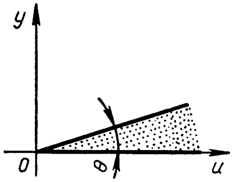
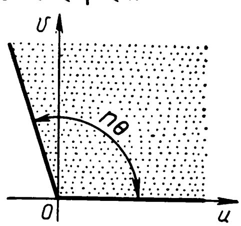
Функция $s = \sqrt{t}$ (главная ветвь) дает конформное отображение этой области на правую полуплоскость плоскости вспомога-

---

[1] Если граница односвязной области D состоит более чем из одной точки, то такое отображение существует (теорема Римана, [1], гл. X, п. 6), и оно не единственное.

[2] Ниже для краткости под конформным отображением понимается взаимно-однозначное конформное отображение.

Простейшие конформные отображения

№ п/п	Функция	Осуществляет (взаимно-однозначное) конформное отображение	
		области	на область
1	$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ([I], с. 68)	Полуплоскость или круг	Полуплоскость или круг
2	$w = e^z$ ([I], с. 86)	Полоса $0 < y < h$ $(h < 2\pi)$  Рис. 15	Угол величины h с вершиной в начале координат  Рис. 16
3	$w = \ln z$ (Задача 282)	Угол $\alpha < \varphi < \beta$ $(\alpha > -\pi,$ $\beta \leqslant \pi)$  Рис. 17	Полоса $\alpha < v < \beta$  Рис. 18
4	$w = z^n$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ ([I], с. 55)	Угол $0 < \varphi < \theta \left(\theta < \dfrac{2\pi}{n}\right)$  Рис. 19	Угол $0 < \varphi < n\theta$  Рис. 20

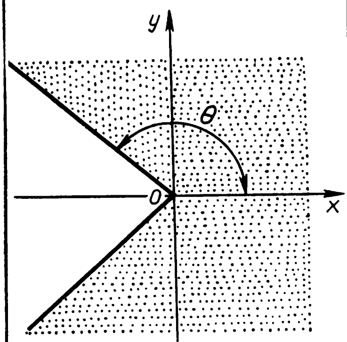
<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">Функция</th><th colspan="2">Осуществляет (взаимно-однозначное) конформное отображение</th></tr>
<tr><th>области</th><th>на область</th></tr>
<tr><td>5</td><td>$w = \sqrt{z}$ (главное значение; $w(1) = 1$; задача 314)</td><td>Угол $-\theta < \varphi < \theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$


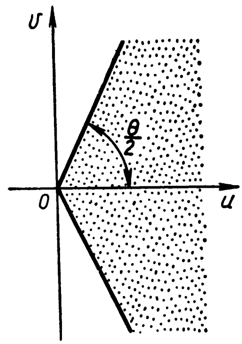
Рис. 21.</td><td>Угол $-\frac{\theta}{2} < \varphi < \frac{\theta}{2}$


Рис. 22</td></tr>
</table>

тельного комплексного переменного s (рис. 24). Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, который достигается умножением чисел s на i, приводит к искомому отображению на верхнюю полуплоскость. Итак, искомое отображение дает, например, функция

$$w = i\sqrt{i\frac{z-1}{z+1}}.$$

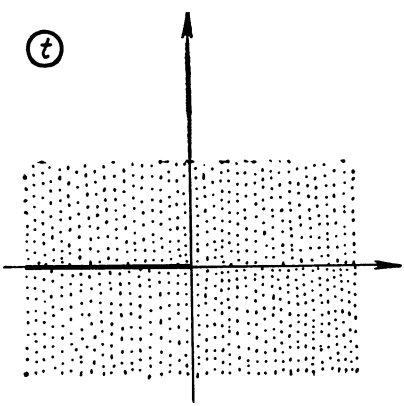


Рис. 23

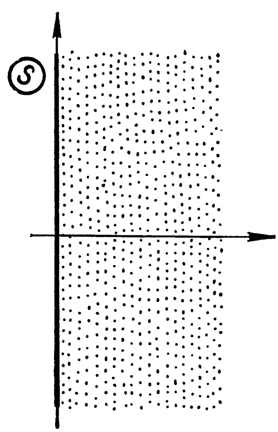


Рис. 24

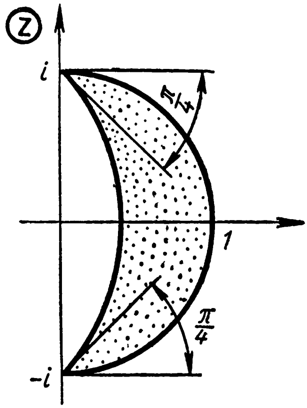


Рис. 25

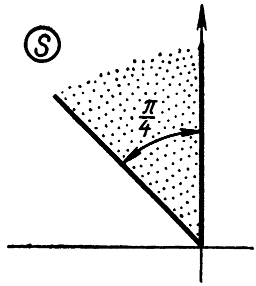


Рис. 26

322. Найти конформное отображение круговой луночки (рис. 25) на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$.

Р е ш е н и е. Известно, что полосы получаются при конформном отображении углов с помощью функции $w = \ln z$. Луночку же легко перевести в угол с помощью дробно-линейной функции. Такой функцией может быть, очевидно, функция

$$s = \frac{z+i}{z-i}.$$

При этом луночка отображается на угол величины $\frac{\pi}{4}$ (рис. 26) (такой угол образуют окружности — границы луночки — в точке $-i$, а углы при конформных отображениях сохраняются). Положение сторон угла можно уточнить с помощью точки $z_1 = 1$, которая переходит в точку $s_1 = i$. С помощью отображения $t = \ln s$ этот угол отобразим на полосу $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} t < \frac{3\pi}{4}$ вспомогательной комплексной плоскости t (рис. 27). Функция $v = t - \frac{\pi}{2} i$

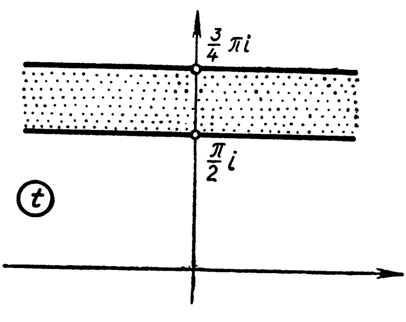


Рис. 27

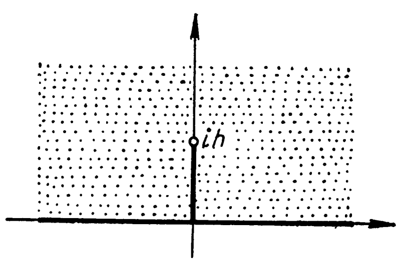


Рис. 28

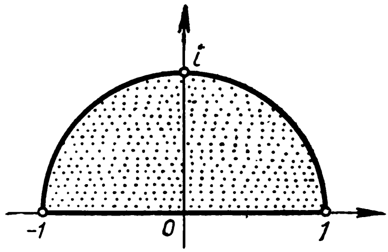


Рис. 29

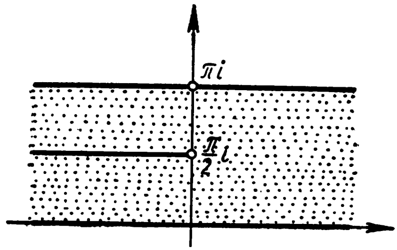


Рис. 30

переведет данную полосу на полосу $0 < \operatorname{Im} v < \frac{\pi}{4}$, а тогда искомая полоса получается с помощью функции $w = \frac{4}{\pi} v$. Окончательно находим, что искомое отображение может иметь вид:

$$w = \frac{4}{\pi}\left(\ln\frac{z+i}{z-i} - \frac{\pi}{2} i\right).$$

В задачах 323—332 требуется найти взаимно-однозначное конформное отображение[1] данной области на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Выполнить чертеж.

323. Верхняя полуплоскость с разрезом вдоль отрезка мнимой оси $[0, ih]$ (рис. 28).

324. Полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 29).

325. Полоса с вырезом (рис. 30).

326. Луночка (рис. 31).

327. Верхняя полуплоскость с вырезанным полукругом (рис. 32).

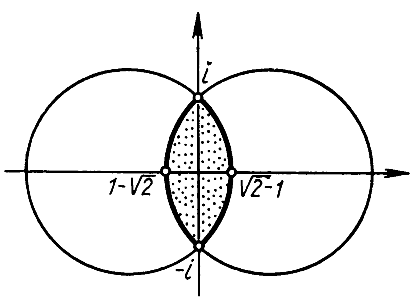


Рис. 31

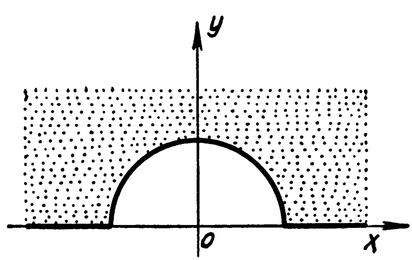


Рис. 32

[1] В ответе указано одно из возможных отображений.

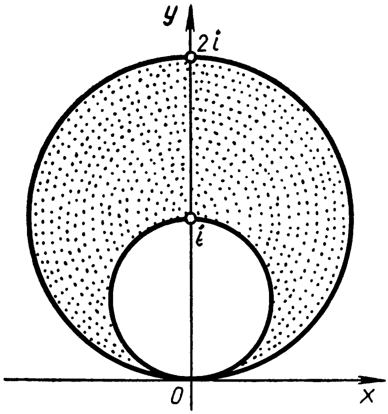


Рис. 33

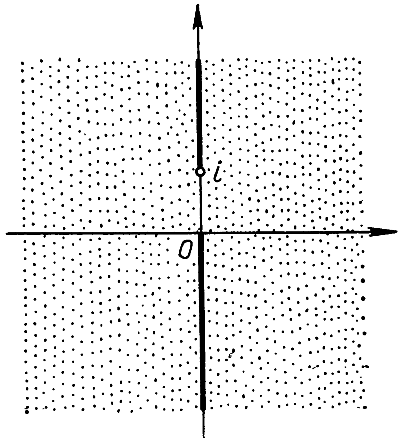


Рис. 34

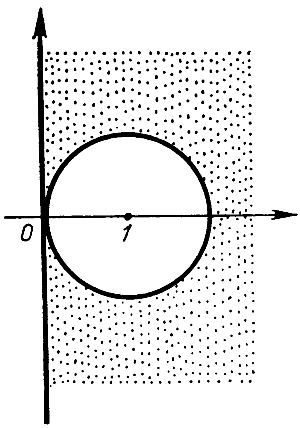


Рис. 35

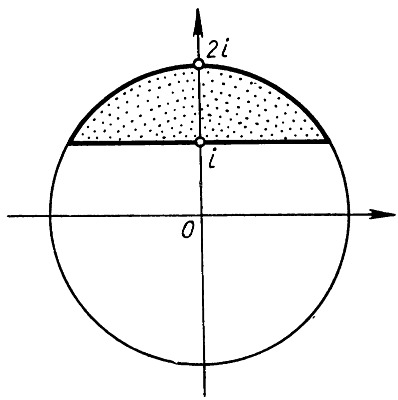


Рис. 36

328. Часть плоскости, заключенная между окружностями $\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ и $|z-i|=1$ (рис. 33).

329. Плоскость с вырезанным отрезком действительной оси $[0, 1]$.

330. Плоскость с разрезами по мнимой оси (рис. 34).

331. Правая полуплоскость с вырезанным кругом $|z-1|=1$ (рис. 35).

332. Область $|z|<2$, $\operatorname{Im} z>1$ (рис. 36).

ГЛАВА III

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

§ 11. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Литература: [1], гл. IV, пп. 2—4; [2], гл. II, § 3; [3], гл. V, § 2.

Пусть имеется некоторый ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

и M — множество всех тех точек, в которых этот ряд сходится.

Совокупность всех внутренних точек множества M называется **областью сходимости** данного ряда.

Степенным рядом называется ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots. \tag{11.1}$$

Областью сходимости ряда (11.1) является некоторый круг (**круг сходимости**; в нем ряд сходится абсолютно): $|z - z_0| < R$ (при $R = 0$ круг вырождается в точку z_0, а при $R = \infty$ — во всю плоскость). Для нахождения радиуса этого круга (**радиуса сходимости** ряда (11.1)) можно пользоваться известными из действительного анализа формулами, которые приведены в решенных ниже задачах.

333. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n} z^n.$$

Решение. Воспользуемся формулой Коши

$$R = \frac{1}{L}, \text{ где } L = \lim \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Имеем:

$$|c_n| = \left|\frac{i^n}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n}, \quad L = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \; R = 3.$$

334. Каков круг сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+i)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1}}?$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$R=\lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Имеем:

$$c_n=\frac{(-1)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}},\quad c_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}\cdot 2^n},$$

$$R=\lim\left|\frac{3^{n+2}\cdot 2^n\cdot(-1)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}}\right|=6.$$

Следовательно, $|z+i|<6$ — круг сходимости данного ряда.

335. Какова область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{z^{2n}}{n^2}?$$

Решение. В данном ряде коэффициенты при нечетных степенях z равны нулю. Поэтому в этом случае нельзя воспользоваться ни одной из применявшихся в предыдущих задачах формул — соответствующие пределы не существуют. Введем новую переменную $t=z^2$. Тогда получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{t^n}{n^2},$$

и его радиус сходимости найдем с помощью формулы

$$R=\lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\frac{2^n\cdot(n+1)^2}{n^2\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, областью сходимости вспомогательного ряда является круг $|t|<\frac{1}{2}$, а областью сходимости исходного ряда — круг $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

В задачах 336—346 требуется найти круг сходимости каждого из данных степенных рядов.

336. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(2+i)^n}$.

337. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot z^n}{n^n}$.

338. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{5^{n-1}\cdot 3^{1-n}}$.

339. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$.

340. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{e^{in}}$.

341. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{1-i}\right)^n\cdot n$.

342. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n$.

343. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{(2i)^n}$.

344. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

345. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (z-1+0{,}5i)^n}{n!}$.

346. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+ni}$.

347. Какова область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}?$$

348. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1}.$$

§ 12. КОМПЛЕКСНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Литература: [1], гл. V, пп. 1—3; [2], гл. IV, пп. 1—3; [3], гл. VIII, § 1.

Пусть $f(z) = u + iv$ $(z = x + iy)$ — непрерывная в некоторой области D комплексная функция и Γ — кусочно-гладкая кривая, принадлежащая области D. Если линия Γ задается уравнением $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, то вычисление комплексного интеграла[1] от функции $f(z)$ по кривой Γ (в направлении возрастания параметра) сводится к вычислению определенного интеграла от комплексной функции действительного переменного[2] по формуле

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,z'(t)\,dt. \qquad (12.1)$$

Формально правая часть этой формулы получается, если в левой части ее в подынтегральном выражении заменить z на $z(t)$.

---

[1] Т. е. интеграла от комплекснозначной функции действительного переменного. Мы полагаем, что читатель предварительно ознакомился с определением этого понятия по литературе, рекомендованной в начале параграфа.

[2] Интеграл от функции $u(t) + iv(t)$ понимается в следующем смысле:

$$\int_a^b [u(t) + iv(t)]\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Для таких функций справедливы все формулы интегрального исчисления вещественного анализа.

349. Вычислить $\int\limits_{\Gamma}|z|\,dz$, если путем интегрирования Γ является: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точки -1 и 1; б) нижняя половина единичной окружности $|z|=1$. Начальная точка пути интегрирования $z=-1$.

Решение. а) Уравнение отрезка, соединяющего точки -1 и 1, параметрически можно записать следующим образом:

$$z=t,\ -1\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда по формуле (12.1)

$$\int\limits_{\Gamma}|z|\,dz=\int\limits_{-1}^{1}|t|\,dt=\int\limits_{-1}^{0}(-t)\,dt+\int\limits_{0}^{1}t\,dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1}=1.$$

б) Уравнение нижней половины окружности запишем в виде

$$z=e^{it},\quad \pi\leqslant t\leqslant 2\pi$$

(если $t=\pi$, то $z=-1$, а если $t=2\pi$, то $z=1$). Получаем:

$$\int\limits_{\Gamma}|z|\,dz=\int\limits_{\pi}^{2\pi}|e^{it}|\,ie^{it}\,dt=e^{it}\Big|_{\pi}^{2\pi}=2.$$

350. Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}$, где Γ—верхняя половина окружности $|z|=1$ (выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1}=1$). Начальная точка пути интегрирования $z=1$.

Решение. Уравнение контура Γ можно записать в виде

$$z=e^{i\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

Далее, $\sqrt{e^{i\varphi}}$ имеет два различных значения, а именно $e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и $e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. Но так как выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1}=1$, то

$$\sqrt{e^{i\varphi}}=e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}=2\int\limits_{0}^{\pi}e^{i\frac{\varphi}{2}}d\left(i\frac{\varphi}{2}\right)=2e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{0}^{\pi}=2(i-1).$$

351. Вычислить $\int\limits_{\Gamma}z\,dz$, если Γ — замкнутый контур, образованный дугой параболы $y=-x^2+1$ и отрезком оси абсцисс; контур Γ обходится против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Контур Γ разобьем на две части Γ_1 и Γ_2, где Γ_1 — прямолинейный отрезок $[-1, 1]$, а Γ_2 — дуга параболы от 1 до -1. Уравнение контура Γ_1: $z = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда

$$\int_{\Gamma_1} z\,dz = \int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Уравнение контура Γ_2: $z = -t + i(-t^2 + 1)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$; при этом начальной точке 1 соответствует значение параметра $t = -1$, а конечной точке -1 — значение $t = 1$. Поэтому

$$\int_{\Gamma_2} z\,dz = \int_{-1}^{+1} [-t + i(-t^2 + 1)](-1 - 2it)\,dt = 0.$$

Следовательно[1],

$$\int_{\Gamma} z\,dz = \int_{\Gamma_1} z\,dz + \int_{\Gamma_2} z\,dz = 0 + 0 = 0.$$

352. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,dz,$$

если Γ: 1) ломаная с вершинами в точках 0, 1, $1 + 2i$; 2) отрезок с концами в точках 0, $1 + 2i$. Начало линий в точке 0.

353. Вычислить[2] $\int_{\Gamma} (z - |z|)\,dz$, если Γ — контур, состоящий из правой половины единичной окружности и вертикального диаметра.

354. Вычислить $\int_{\Gamma} \frac{\bar z}{z}\,dz$, если Γ — контур, изображенный на рисунке 37.

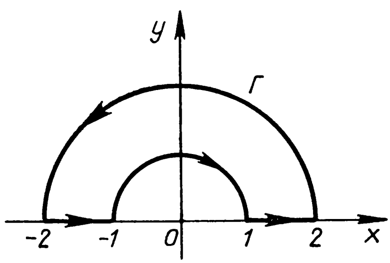


Рис. 37

355. Решить предыдущую задачу в предположении, что Γ — контур квадрата с вершинами 1, i, -1, $-i$.

356. Вычислить $\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar z}\,dz$, если Γ — контур квадрата с вершинами в точках ± 1, $\pm i$.

---

[1] После ознакомления с **интегральной теоремой Коши** (которая утверждает, что *интеграл по замкнутому контуру C от функции, аналитической в замкнутой области, ограниченной кривой C, равен нулю*) ответ к этой задаче можно получить сразу без вычислений.

[2] Здесь и ниже, если не оговорено противное, интеграл по замкнутому контуру берется в положительном направлении.

357. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \bar{z}\, dz$, если Γ — астроида $z = \cos^3 t + i \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

358. Решить задачу 357 в предположении, что Γ — замкнутый контур, состоящий из одной арки синусоиды $y = \sin x$ и отрезка оси абсцисс.

359. Решить задачу 357 в предположении, что Γ — замкнутый контур, состоящий из одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и отрезка оси абсцисс.

360. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, если контур Γ — правая половина окружности $|z| = 1$; выбирается та ветвь многозначной функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-1} = i$. Начальная точка пути интегрирования — точка $z = i$.

361. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, если контур Γ — нижняя полуокружность $|z| = 1$; выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = -1$. Начальная точка пути интегрирования — точка $z = 1$.

§ 13. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Литература: [1], гл. VI, пп. 1 и 3; [2], гл. IV, § 3, пп. 1 и 4; [3], гл. VIII, § 3, 4.

Пусть D — область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой замкнутой линией C, и $f(z)$ — функция, аналитическая в замкнутой области D. Одно из замечательных свойств аналитической функции состоит в том, что для определения ее значений в любой точке a области D достаточно знать, какие значения она принимает на границе. Делается это с помощью формулы

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(z)\, dz}{z - a},$$

которая называется интегральной формулой Коши. Интеграл берется вдоль границы C в положительном направлении, т. е. так, что при обходе контура C область D остается слева. С помощью этой формулы доказывается, что аналитическая в замкнутой области D функция $f(z)$ имеет в каждой внутренней точке a этой области производную любого порядка n, причем значение производной также можно вычислить, зная значения функции на границе, по формуле

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{G} \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}.$$

362. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{C} \frac{z^2 - 5z + 8}{z - 2}\, dz,$$

где C — окружность $|z| = 3$.

Решение. Данный интеграл похож по внешнему виду на интеграл, стоящий в правой части формулы Коши. Здесь $a = 2$, $f(z) = z^2 - 5z + 8$. Так как функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leqslant 3$ и точка $a = 2$ лежит внутри круга, то выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2 - 5z + 8}{z - 2}\,dz,$$

дает нам значение этой функции в точке $a = 2$. Но это значение можно найти непосредственно:

$$f(2) = (z^2 - 5z + 8)_{z=2} = 2.$$

Итак, получили:

$$2 = \frac{1}{2\pi i} I; \quad I = 4\pi i.$$

363. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1},$$

где C — окружность: а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z - i| = 1$; в) $|z + i| = 1$; г) $|z| = 3$.

Решение. а) Подынтегральная функция $\frac{1}{z^2 + 1}$ является аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant \frac{1}{2}$. Данный интеграл равен нулю в силу интегральной теоремы Коши (см. сноску на с.81).

б) В круге $|z - i| \leqslant 1$ подынтегральная функция не является аналитической, так как в точке $z = i$ она не определена. Теоремой Коши воспользоваться нельзя. Запишем интеграл в таком виде

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_C \frac{dz}{(z - i)(z + i)}$$

и сравним его с интегралом в формуле Коши. Так как функция $\frac{1}{z + i}$ в рассматриваемой области аналитична, то можно полагать $f(z) = \frac{1}{z + i}$, $a = i$. Тогда искомый интеграл равен:

$$2\pi i f(a) = 2\pi i \frac{1}{i + i} = \pi.$$

в) Здесь уже в качестве $f(z)$ функцию $\frac{1}{z + i}$ брать нельзя: в круге $|z + i| \leqslant 1$ она не является аналитической. Но здесь можно положить $f(z)=\frac{1}{z-i}$, $a=-i$. Поэтому искомый интеграл равен:

$$2\pi i\frac{1}{-i-i}=-\pi.$$

г) Ни функция $\frac{1}{z+i}$, ни функция $\frac{1}{z-i}$ не являются аналитическими в круге $|z|\leqslant 3$. Поэтому непосредственно формулой Коши в этом случае воспользоваться нельзя.

Преобразуем подынтегральную функцию так:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right).$$

Тогда

$$\int\limits_C\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\int\limits_C\frac{dz}{z-i}-\frac{1}{2i}\int\limits_C\frac{dz}{z+i}.$$

Каждый из полученных интегралов вычисляется с помощью формулы Коши, если положить $f(z)=1$, $a=i$ в одном случае и $a=-i$ в другом:

$$\int\limits_C\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}2\pi i f(i)-\frac{1}{2i}2\pi i f(-i).$$

Так как $f(z)=1$, то $f(i)=f(-i)=1$ и интеграл равен нулю.

364. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz,$$

где C — окружность $|z-i|=4$.

Решение. Для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой для производных аналитической функции. Так как $\sin z$ аналитична в круге $|z-i|\leqslant 4$ и точка $\frac{\pi}{3}$ лежит внутри этого круга, то можно положить $f(z)=\sin z$, $a=\frac{\pi}{3}$, $n=3$.

Тогда

$$\int\limits_C\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\sin''' z\Big|_{z=\frac{\pi}{3}}=\frac{-2\pi i\cos\frac{\pi}{3}}{6}=-\frac{\pi i}{6}.$$

В задачах 365—376 требуется вычислить указанные интегралы.

365. $\int\limits_C \frac{z^2}{(z-2)(z+i)}\,dz$, где: а) C — окружность $|z+i|=1$; б) C — окружность $|z-3|=2$.

366. $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+4}$, где C — прямоугольник с вершинами в точках 1, $1+3i$, $-1+3i$, -1.

367. $\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$, где C — окружность $|z+1|=\frac{1}{2}$.

368. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$, где C — окружность $|z|=2$.

369. $\int\limits_C \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$, где C — треугольник с вершинами в точках 4, $-4+i$, $-4-i$.

370. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} z}{z\left(z+\frac{\pi}{4}i\right)}\,dz$, где C — окружность $|z|=1$.

371. $\int\limits_C \frac{z^3+5z-4}{(1-z)^3}\,dz$, где C — эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

372. $\int\limits_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,dz$, где C—окружность $|z-1|=\frac{1}{2}$.

373. $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, где: 1) точка $3i$ лежит внутри замкнутого контура C, а точка $-3i$ — вне его; 2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ — вне его; 3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

374. $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z-2)^{100}}\,dz$, где C—окружность $|z|=3$.

375. $\int\limits_C \frac{dz}{z^m}$ (m — целое число, $m \neq 1$), где C: а) квадрат с вершинами 1, $2+i$, $1+2i$, i; б) квадрат с вершинами 1, i, -1, $-i$.

376. $\int\limits_C \frac{dz}{z^2-5z+4}$, где C — окружность $|z-1|=2$.

§ 14. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Литература: [1], гл. VI, п. 2; [2], гл. I, § 2 (2); [3], гл. IX, § 1.

Если в точке a функция $f(z)$ аналитична, то в некотором круге с центром в этой точке она разлагается в степенной ряд:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \tag{14.1}$$

Такой ряд единственный. Круг сходимости ряда (14.1) таков, что его граница проходит через ближайшую к a особую точку функции $f(z)$ (точку, в которой функция не является аналитической). Коэффициенты ряда можно вычислить по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{14.2}$$

Ряд (14.1) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности точки a.

377. Разложить функцию e^{2z} в ряд по степеням $z - i$.

Решение. Воспользуемся формулой (14,2). В данном случае

$$c_n = \frac{2^n e^{2i}}{n!}.$$

Поэтому

$$e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i} \frac{2^n}{n!} (z-i)^n.$$

Так как e^{2z} не имеет особых точек, то этот ряд сходится на всей плоскости.

378. Разложить функцию $\sin 5z$ в ряд: а) по степеням z; б) по степеням $z - \frac{\pi}{2}$.

Разложение функции в ряд путем определения коэффициентов по формуле (14.2) не всегда является удобным, так как вычисление производных весьма кропотливый процесс. Поэтому часто используют различные косвенные способы, не требующие применения формулы (14.2). Перечислим наиболее употребительные из них.

а) Использование готовых известных разложений в ряд Тейлора некоторых наиболее часто встречающихся функций:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \ |z| < \infty; \tag{14.3}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \ |z| < \infty. \tag{14.4}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \ |z| < \infty; \tag{14.5}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \ |z| < 1; \qquad (14.6)$$

$$\ln(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{z^n}{n} - \ldots, \ |z| < 1; \qquad (14.7)$$

и др.

б) Почленное дифференцирование и интегрирование рядов, что в случае степенных рядов возможно.

в) Метод неопределенных коэффициентов.

В каждой из задач 379—390 требуется разложить указанную функцию в ряд Тейлора по степеням $z - a$, где a — заданное число. Определить круг сходимости каждого из рядов.

379. $\frac{1}{z+4}$, $a = -1$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{(z+1)+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z+1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{3}\right)}.$$

Обозначим $-\frac{z+1}{3} = t$ и воспользуемся разложением (14. 6) для функции $\frac{1}{1-t}$. Получим:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{z+1}{3} + \frac{(z+1)^2}{9} - \ldots + (-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n} + \ldots\right].$$

Так как точка $z = -4$ для данной функции особая и притом единственная, то этот ряд сходится в круге $|z+1| < 3$.

380. $\sin^2 z$, $a = 0$.

Решение. Преобразуем $\sin^2 z$ и воспользуемся разложением для $\cos z$:

$$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1-\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\ldots\right]}{2} =$$

$$= \frac{2^1}{2!}z^2 - \frac{2^3}{4!}z^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n} + \ldots .$$

Ряд сходится на всей комплексной плоскости, поскольку $\sin^2 z$ не имеет особых точек.

381. $\dfrac{1}{z+1}$, $a=i$.

382. $\dfrac{2}{z-1}$, $a=i$.

383. $\dfrac{1}{z^2+4}$, $a=0$.

384. $\dfrac{z}{z+2}$, $a=1$.

385. $\cos(3z-i)$, $a=0$.

386. $\sin z\cos z$, $a=0$.

387. e^z, $a=-1$.

388. $\cos^2 z$, $a=0$.

389. $\cos z$, $a=\dfrac{\pi}{4}$.

390. e^{z+3}, $a=-1$.

В задачах 391—396 требуется разложить указанные функции в ряд Тейлора по степеням z, используя разложения (14.3) — (14.7) и применяя почленное дифференцирование и интегрирование рядов. Определить круг сходимости.

391. $\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Решение. Рассмотрим ряд (14.6):

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,$$

который сходится в единичном круге. Дифференцируя этот ряд почленно, получаем искомый ряд:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n+\ldots,$$

который, как и исходный ряд, сходится в круге $|z|<1$.

392. $\ln(1+z)$.

393. $\dfrac{2}{(1-z)^3}$.

394. $(z+1)\ln(z+1)-z$.

395. $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$.

396. $\dfrac{z^2}{(1-z^3)^2}$.

В задачах 397—401 требуется найти три первых отличных от нуля члена разложения указанных функций в ряд Тейлора по степеням z, а также круг сходимости каждого ряда.

397. $\operatorname{tg} z$.

Решение. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как функция $\operatorname{tg} z$ аналитическая в точке $z=0$, то ее можно разложить в степенной ряд:

$$\operatorname{tg} z=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\ldots.$$

Положив в этом равенстве $z=0$, найдем: $c_0=0$. Для определения других коэффициентов воспользуемся соотношением $\operatorname{tg} z\times\cos z=\sin z$. Ряды для синуса и косинуса нам известны. Поэтому

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)(c_1z+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\ldots),$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=c_1z+c_2z^2+\left(c_3-\frac{c_1}{2!}\right)z^3+\left(c_4-\frac{c_2}{2}\right)z^4+\left(c_5-\frac{c_3}{2}+\frac{c_1}{24}\right)z^5+\ldots.$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд должны выполняться соотношения

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6}, \quad c_4 - \frac{c_2}{2} = 0, \quad c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{5!},$$

откуда получаем, что $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_4 = 0$, $c_5 = \frac{2}{15}$,

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \ldots .$$

Так как ближайшей к точке 0 особой точкой функции $\operatorname{tg} z$ является $\frac{\pi}{2}$, то этот ряд сходится в круге $|z| < \frac{\pi}{2}$.

398. $\dfrac{z}{\sin z}$. **399.** $\dfrac{z}{\cos z}$. **400.** $\dfrac{z}{\ln(1-z)}$. **401.** $\dfrac{z}{(1-z^2)\sin z}$.

§ 15. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Литература: [1], гл. VI, пп. 6—7 и гл. IX, пп. 1—3; [2], гл. V, § 2, пп. 4, 6, 7 и гл. X; [3], гл. IX, § 3, 4 и гл. XII, § 1—3.

Одно из замечательнейших свойств, которым обладают аналитические функции, выражается следующей теоремой единственности.

Пусть две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, аналитические в некоторой области D, имеют равные значения на бесконечном множестве точек E из этой области. Если множество E имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую D, то эти функции равны между собой всюду в этой области.

В задачах 402—406 требуется определить, существует ли функция, аналитическая в единичном круге и принимающая в точках $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ указанные значения.

402. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{при } n \neq 1, \\ 0 & \text{при } n = 1. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $w = z^2$. Предположим, что искомая аналитическая функция существует; обозначим ее $f(z)$. Сравним значения этих двух функций на множестве E, состоящем из точек $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Их значения здесь одинаковы. А так как E имеет предельной точкой $z = 0$, то согласно теореме единственности $f(z) \equiv z^2$ всюду в круге $|z|<1$. Однако по условию $f(1)=0$, а по только что доказанному $f(1)=z^2|_{z=1}=1$. Полученное противоречие доказывает, что искомой аналитической функции не существует.

403. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin^2\frac{n\pi}{2}$.

404. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}$.

405. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } n=1,\\ \frac{1}{2n} & \text{при } n\neq 1.\end{cases}$

406. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$.

В задачах 407—411 требуется определить, существует ли функция, аналитическая в точке $z=0$ и принимающая в точках $z_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ указанные значения.

407. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+\cos^2\frac{n\pi}{2}}$.

Решение. Пусть такая функция $f(z)$ существует. По определению функции, аналитической в точке, эта функция будет аналитична в некотором круге $K\ \{|z|<r\}$. Рассмотрим аналитическую в этом круге функцию $w=z$. Так как последовательность точек $z_n=\frac{1}{n}\to 0$, то, начиная с некоторого номера N, все эти точки будут принадлежать кругу K. Рассмотрим множество E, состоящее из точек $\frac{1}{n}$, где n нечетно. На множестве E функции $w=f(z)$ и $w=z$ принимают равные значения. В силу теоремы единственности $f(z)=z$ на K. Выберем теперь такое четное число m, что $\frac{1}{m}\in K$. Тогда $f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}$ по только что полученному тождеству. С другой стороны, по условию $f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m+1}$. Полученное противоречие показывает, что искомая функция не существует.

408. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin^2\frac{n\pi}{2}$.

409. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\cos^2\frac{n\pi}{2}$.

410. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } n=1,\\ \frac{1}{2n} & \text{при } n\neq 1.\end{cases}$

411. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cos n\pi$.

412. Существует ли функция (отличная от константы), аналитическая в точке $z=0$ и удовлетворяющая условию $f(z)=f(2z)$?

413. Как будет показано в задаче 471, функция $e^{\frac{1}{z}}$ принимает значение $w = 1$ на бесконечном множестве точек, предельной точкой которого является $z = 0$. В то же время эта функция отлична от тождественной единицы. Почему это не противоречит теореме единственности?

Любое комплексное число a, для которого $f(a) = 0$, называется н у л е м ф у н к ц и и $f(z)$. Другими словами, нули функции $f(z)$ — это корни уравнения $f(z) = 0$.

Если точка a является нулем аналитической в этой точке функции $f(z)$, не равной тождественно нулю ни в какой окрестности точки a, то существует такое натуральное число n, что

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \tag{15.1}$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке a и отлична от нуля в некоторой окрестности этой точки. Это число n называется п о р я д к о м н у л я a (или его к р а т н о с т ь ю). При $n = 1$ нуль называется п р о с т ы м. Число n будет тогда и только тогда порядком нуля a функции $f(z)$, аналитической в этой точке, когда

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0. \tag{15.2}$$

414. Может ли уравнение $f(z) = 0$ иметь в области D бесконечно много решений, если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$?

415. Доказать, что функция $f(z)$, аналитическая в области D, может иметь в этой области только изолированные нули[1].

В з а д а ч а х 416—418 требуется определить порядок нуля $a = 0$ для указанных функций:

416. $z^2 (e^{z^2} - 1)$.

Р е ш е н и е. Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням z. Для этого воспользуемся известным разложением для e^t, положив $t = z^2$. Получим:

$$z^2 (e^{z^2} - 1) = z^2\left(\frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots\right) = z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \ldots\right) = z^4 \varphi(z),$$

где $\varphi(0) \neq 0$ и функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке $a = 0$ (как сумма степенного ряда). Итак, мы получили для данной функции формулу (15.1) при $n = 4$; точка $a = 0$ —нуль четвертого порядка. Задачу можно решить и пользуясь соотношениями (15.2), но это будет сопряжено с более громоздкими вычислениями.

417. $6 \sin z^3 + z^3 (z^6 - 6)$.

418. $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

В з а д а ч а х 419—421 требуется найти все нули данных функций и определить их порядки.

---

[1] Т. е. у каждого нуля имеется окрестность, свободная от других нулей функции $f(z)$.

419. $\frac{(z^2+9)^2}{z^4}$.

420. $z\sin z$.

421. $\frac{(z^2-\pi^2)\sin z}{z^2}$.

Пусть функция $f(z)$ определена на некотором множестве Δ, а функция $F(z)$ определена и аналитична в некоторой области D, содержащей множество Δ. Если на множестве Δ $f(z) = F(z)$, то функция $F(z)$ называется **аналитическим продолжением функции** $f(z)$ с множества Δ на область D. Если множество Δ имеет предельную точку в D, то для $f(z)$ возможно не более одного аналитического продолжения.

422. Доказать, что функция

$$F(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^n}$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}.$$

На какую область будет аналитически продолжена $f(z)$, если ее разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $a=-3-i$?

Решение. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1.$$

Положив в нем $t=-\frac{z}{4}$, получаем первый ряд, который в своем круге сходимости D $\{|z|<4\}$ представляет собой функцию

$$F(z)=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{z+4}.$$

Положив $t=-\frac{z+1}{3}$, получаем второй ряд, который в круге Δ $\{|z+1|<3\}$ представляет собой функцию

$$f(z)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z+1}{3}}=\frac{1}{z+4}.$$

Области D и Δ имеют общую часть Δ, на которой функции совпадают (так как их значения вычисляются по одной и той же формуле $\frac{1}{z+4}$). Следовательно (см. определение) $F(z)$ действительно аналитическое продолжение $f(z)$ на область D и $F(z)$—единственно возможное аналитическое продолжение $f(z)$ на D (поскольку множество Δ, на котором их значения совпадают, удовлетворяет условию теоремы единственности).

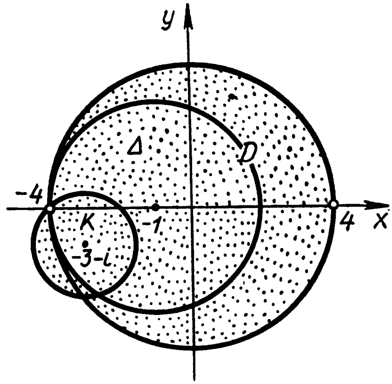


Рис. 38

Переходим ко второй части задачи. Точка $a = -3 - i$ лежит в области определения Δ функции $f(z)$, так как $|a + 1| = |-2-i| = \sqrt{5} < 3$. Следовательно, $f(z)$ можно разложить в ряд в окрестности этой точки. Но в своей области определения $f(z)$ совпадает с $\frac{1}{z+4}$. Значит, разложить $f(z)$ в окрестности точки a все равно, что разложить $\frac{1}{z+4}$ в окрестности этой точки. Поскольку граница круга сходимости проходит через ближайшую к центру круга особую точку функции и особой точкой функции является $z = -4$, то радиус сходимости искомого ряда равен расстоянию между точками $-3 - i$ и -4, т. е. $r = |1 - i| = \sqrt{2}$. Значит, мы продолжим $f(z)$ на круг K $\{|z + 3 + i| < \sqrt{2}\}$ (см. рис. 38).

В задачах 423—424 требуется доказать, что функция $F(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$.

423. $F(z) = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

424. $F(z) = \ln\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^n}{n}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

425. Функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ разложили в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 2i$. На какую область будет при этом аналитически продолжена $f(z)$?

426. Функцию $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ разложили в ряд Тейлора в окрестности точки $a = -\frac{1}{2}$. На какую область будет при этом аналитически продолжена функция $f(z)$?

427. Функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n z^n}{3^{n+1}}$ разложили в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 1$. На какую область будет при этом аналитически продолжена функция $f(z)$?

428. Можно ли действительную функцию $f(x) = \sqrt{x^2}$, определенную на всей действительной оси, аналитически продолжить в комплексную область?

429. Будут ли функции: а) $5\bar{z} + 3$; б) $5z + 3$; в) $5|z| + 3$ — аналитическими продолжениями с положительной действительной полуоси функции $5x + 3$?

ГЛАВА IV

ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 16. РЯД ЛОРАНА

Литература: [1], гл. VII, пп. 1 и 2; [2], гл. VI, § 1; [3], гл. X, § 1.

Среди функциональных рядов наряду со степенными рядами в комплексном анализе часто встречаются функциональные ряды следующего вида:

$$c_0 + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots .$$

Эти ряды по своим свойствам близки к степенным рядам. Областью сходимости такого ряда является внешность круга с центром в точке a и радиусом[1] R, где R, как и в случае степенных рядов, может быть найдено (если существуют соответствующие пределы) по формулам

$$R = \lim \left| \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} \right| \text{ или } R = \lim \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Суммой данного ряда является функция, аналитическая в области его сходимости.

Обобщением степенного ряда является ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{16.1}$$

который понимается как сумма двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Первый из этих рядов называют *правильной частью ряда* (16.1), второй — *главной частью*. Ряд (16.1) считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся оба эти ряда. Областью сходимости правильной части ряда (16.1) является некоторый круг $|z-a| < R$, а главной части — внешность некоторого круга $|z-a| > r$. Будем предполагать[2], что $r < R$. В таком случае область сходимости ряда (16.1) представляет собой кольцо $r < |z-a| < R$. Сумма ряда является функцией аналитической в кольце сходимости, причем граничные окружности кольца проходят через особые точки функции.

---

[1] При $R = \infty$ эта область вырождается в несобственную точку $z = \infty$, а при $R = 0$ — во всю плоскость, за исключением, возможно, $z = a$.

[2] Случаи $r = 0$ и $R = \infty$ не исключаются.

430. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}.$$

Решение. Найдем круг сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1},$$

представляющего собой правильную часть данного ряда. Так как

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{n+1}}{1+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}+3}{\frac{1}{3^n}+1} = 3,$$

то это круг $|z| < 3$. Для ряда

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^n+1},$$

представляющего собой главную часть данного ряда,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{-n}}{1+3^{-n-1}} = 1,$$

а потому его область сходимости $|z| > 1$. Исходный ряд сходится в кольце $1 < |z| < 3$.

431. Найти область сходимости ряда

$$\ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots$$

и определить его сумму.

Решение. Правильная часть

$$\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots$$

является геометрической прогрессией с знаменателем $\frac{z}{2}$ и сходится, как известно, при $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, т. е. в круге $|z| < 2$, представляя собой функцию

$$\frac{1/2}{1-z/2} = \frac{1}{2-z}.$$

Главная часть

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots$$

является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{z}$, сходится при $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т. е. вне единичного круга, и представляет функцию

$$\frac{1/z}{1-{}^1/_z}=\frac{1}{z-1}.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда есть кольцо $1 < |z| < 2$, и сумма его равна:

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}=\frac{-1}{z^2-3z+2}.$$

В задачах 432—436 требуется найти области сходимости следующих рядов.

432. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^n$.

433. $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} (z-i)^n$.

434. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$.

435. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^n z^n$.

436. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$.

В задачах 437—441 требуется найти области сходимости следующих рядов и определить их суммы:

437. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!z^n}$.

438. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n-1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{z^n}$.

439. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-i^{n-1}}{z^n}$.

440. $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{5^{n+2}}$.

441. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$.

Значение рядов вида (16.1) выясняется из такой теоремы.

Теорема Лорана. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z-a| < R$, представляется в этом кольце сходящимся рядом

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{16.2}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$, γ — окружность $|z-a| = \rho$, $r < \rho < R$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Этот ряд называется рядом Лорана для функции $f(z)$.

В условиях этой теоремы кольцо может вырождаться в круг[1] или в круг с выколотым центром ($r = 0$, $R < \infty$), во внешность круга с выколотой точкой ∞ ($0 < r$, $R = \infty$) и во всю плоскость с выколотыми точками a и ∞ ($r = 0$, $R = \infty$).

Выписанные выше формулы для коэффициентов ряда Лорана мало удобны. На практике, как и в случае рядов Тейлора, часто применяют различные искусственные приемы. При этом используется тот факт, что разложение в ряд вида (16.2) данной функции в данном кольце является единственным (и этот ряд будет рядом Лорана). Часто поступают так: заданную функцию в кольце $r < |z-a| < R$ стараются представить в виде суммы (или произведения) двух функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, из которых $f_1(z)$ аналитична внутри большего круга $|z-a| < R$, а $f_2(z)$ — вне меньшего $|z-a| > r$. Первую разлагают по положительным степеням $z-a$, вторую — по отрицательным. Полученные ряды складывают (или перемножают).

442. а) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$$

в ряд Лорана в кольце $2 < |z+1| < 3$.

б) Можно ли эту функцию разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$; в кольце $2 < |z| < 4$? Где будет сходиться последний ряд?

Решение. а) Записав функцию в виде

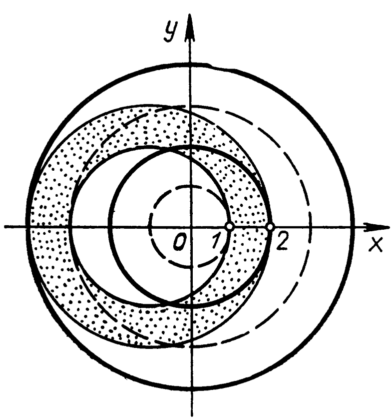


Рис. 39

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

замечаем, что ее особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$ лежат на границе данного кольца $2 < |z+1| < 3$ (рис. 39). Это означает, что в самом кольце функция аналитическая; по теореме Лорана ее можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n.$$

[1] И в этом случае ряд Лорана обращается в ряд Тейлора.

Для получения этого разложения представим функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Первая функция аналитична в большем круге $|z+1| < 3$. Ее здесь можно разложить в ряд Тейлора по степеням $z+1$. Преобразуем $\frac{1}{z-2}$ следующим образом:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1)-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}.$$

Положив в формуле (14.6) $t = \frac{z+1}{3}$, получаем:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}.$$

Область сходимости ряда — круг $|z+1| < 3$.

Функция $\frac{1}{z-1}$ также разлагается в ряд по положительным степеням $z+1$, но этот ряд сходится лишь в круге $|z+1| < 2$, а мы хотим разложить функцию вне этого круга. Попытаемся получить разложение данной функции по отрицательным степеням $z+1$. Имеем:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}.$$

Положим $t = \frac{2}{z+1}$ и снова воспользуемся разложением (14.6):

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n.$$

Откуда

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^n}{2^{n-1}}.$$

Ряд сходится при $|t| < 1$, т. е. при $|z+1| > 2$.

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^n}{2^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}},\quad 2<|z+1|<3.$$

б) В кольце $1 < |z| < 3$ лежит точка $z = 2$, в которой данная функция не определена. Сходящимся всюду в этом кольце рядом она представлена быть не может.

В кольце $2 < |z| < 4$ функция аналитическая; здесь ее можно разложить в ряд Лорана. Однако вне круга $|z| < 4$ у функции нет особых точек. Поэтому данный ряд будет сходиться при всех z, удовлетворяющих условию $|z| > 2$.

443. Можно ли функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

разложить в ряд по положительным и отрицательным степеням z? Сколькими способами? Найти эти разложения.

Решение. Функцию, аналитическую в каком-нибудь кольце с центром в точке $a = 0$, по теореме Лорана можно разложить в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Данная функция является аналитической в трех различных кольцах такого вида: а) $|z| < 1$; б) $1 < |z| < 2$; в) $2 < |z| < \infty$. В каждом из них функция разлагается в ряд Лорана. Найдем эти разложения.

а) Функция аналитична в круге $|z| < 1$. Ряд Лорана сводится к ряду Тейлора, который получается следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}; \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (|z| < 2);$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (|z|<1).$$

Поэтому

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \ (1 < |z| < 2).$$

б) В этом случае решение вполне аналогично решению задачи 442. Запишем его коротко:

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z| < 2);$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \ (|z| > 1);$$

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \ (1 < |z| < 2).$$

в) В этой области придется уже обе функции-слагаемые разлагать по отрицательным степеням z. Для $\frac{1}{1-z}$ такое разложение уже получено (при $|z| > 1$). Найдем разложение для $\frac{1}{z-2}$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{z}{2^{n-1}} \quad (|z| > 2).$$

Окончательно имеем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)z^n \quad (|z| > 2).$$

Отметим, что для одной и той же функции мы получили три разных ряда Лорана, но это не противоречит единственности лорановского разложения, так как эти ряды представляют функцию в разных областях.

В задачах 444—447 требуется разложить данные функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

444. $\frac{z}{(z-i)(z+3)}$, $1 < |z| < 3$.

445. $\frac{1}{z(1-z)}$, $0 < |z| < 1$.

446. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $0 < |z| < \infty$.

447. $\frac{3}{z^2+z-2}$, $1 < |z| < 2$.

В задачах 448—453 требуется найти все возможные разложения в ряд Лорана по степеням $z-a$ следующих функций.

448. $\frac{1}{z^2-4z+3}$, $a = 1$.

449. $\frac{1}{z^2-4z+3}$, $a = 0$.

450. $\frac{1}{z^2-z}$, $a = 0$.

451. $\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$, $a = 0$.

452. $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $a = -1$.

453. $\frac{1}{(z-i)(z-2)(z+3)}$, $a = 0$.

§ 17. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Литература: [1], гл. VII, пп. 3, 4; [2], гл. VI, § 2; [3], гл. X, § 2.

Если вокруг точки a можно описать такой круг $|z-a|<R$, что (однозначная) функция $f(z)$ не является аналитической в самой точке a, но аналитична в «проколотом» круге $0<|z-a|<R$, то точку a называют изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$.

454. Является ли точка $z=1$ изолированной особой точкой для функций: а) $\cos\frac{1}{z-1}$; б) $\sec\frac{1}{z-1}$?

Решение. а) Так как функция $t=\frac{1}{z-1}$ аналитична всюду, кроме $z=1$, а $w=\cos t$ аналитична для всех t, то сложная функция $w=\cos\frac{1}{z-1}$ является аналитической всюду, кроме $z=1$, и, следовательно, в любой «проколотой» окрестности точки $z=1$. Это изолированная особая точка.

б) $\sec\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\frac{1}{z-1}}$.

Функция не определена при $z=1$ и в тех точках, где $\cos\frac{1}{z-1}=0$, т. е. когда $\frac{1}{z-1}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, или $z=1+\frac{1}{\pi/2+k\pi}$ $(k=0, \pm1, \ldots)$. Последовательность этих точек имеет точку $a=1$ предельной, а значит, особые точки содержатся в любой окрестности точки $a=1$. Поэтому мы не можем выбрать такой «проколотый» круг $0<|z-a|<R$, чтобы данная функция была в нем аналитической. Особая точка $a=1$ для данной функции не является изолированной.

Так как «проколотый» круг $0<|z-a|<R$ можно рассматривать как частный случай кольца, то $f(z)$ в нем разлагается в ряд Лорана по степеням $z-a$. В зависимости от вида этого ряда различают три типа изолированных особых точек.

Изолированная особая точка a для функции $f(z)$ называется

1) устранимой, если указанный ряд Лорана содержит только правильную часть:

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots;$$

2) полюсом, если главная часть ряда Лорана содержит лишь конечное число членов:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots,$$

причем $c_{-m} \neq 0$, $m \geqslant 1$ (число m называют **порядком** полюса, при $m = 1$ полюс называется **простым**);

3) **существенно особой**, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем $c_n \neq 0$ для бесконечного числа отрицательных номеров n.

На практике при определении вида особых точек часто бывает полезен следующий простой факт. Если точка a — нуль кратности k аналитической функции $\psi(z)$, а функция $\varphi(z)$ аналитична в a и $\varphi(a) \neq 0$, то a — полюс порядка k функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

В задачах 455—465 требуется найти изолированные особые точки функции и определить их вид.

455. $\dfrac{\cos z}{z - z^3}$.

Решение. Найдем нули знаменателя. Это точки $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_3 = -1$, причем они являются простыми нулями.

Так как числитель ни в одной из этих точек не обращается в нуль, то эти точки являются простыми полюсами исходной функции. Никакие другие точки комплексной плоскости особыми быть не могут (по теореме о частном аналитических функций).

456. $\dfrac{\sin z}{z}$.

Решение. Поскольку данная функция представляет собой отношение двух аналитических на всей плоскости функций, то особой точкой является лишь нуль знаменателя $a = 0$. Однако здесь мы не можем сразу определить вид особенности — в особой точке обращается в нуль и числитель.

Разложим функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots .$$

Ряд не содержит z в отрицательных степенях, поэтому $z = 0$ — устранимая особая точка.

457. $ze^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Данная функция, очевидно, определена и имеет производную на всей комплексной плоскости, кроме точки $a = 0$. Это изолированная особая точка. Для определения ее вида найдем разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $a = 0$. С помощью известного ряда для e^t при $t = \dfrac{1}{z}$ получаем:

$$ze^{\frac{1}{z}} = z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots .$$

Ряд содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями. Поэтому точка $a = 0$ — существенно особая.

458. $\frac{1-\cos z}{z^2}$. **459.** $\frac{\cos z}{z^2}$. **460.** $\frac{z}{1-\cos z}$. **461.** $\frac{z+1}{z^2}$.

462. $z^2\cos\frac{\pi}{z}$. **463.** $\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$. **464.** $\frac{z^4}{1+z^4}$. **465.** $\frac{z^4+z}{z^3}$.

В задачах 466—469 установить, является ли точка $a=0$ изолированной особой точкой указанных функций, и если да, то определить вид особенности.

466. $\frac{\cos z}{z^2}$. **467.** $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$. **468.** $\frac{1}{z-\sin z}$. **469.** $z^2\sin z$.

Вид изолированной особенности характеризует поведение функции в окрестности этой особенности. Именно если $z=a$ — устранимая особая точка для функции $f(z)$, то существует конечный предел $f(z)$ при $z\to a$; если $z=a$ — полюс, то $f(z)\to\infty$ при $z\to a$; если же $z=a$ — существенно особая точка, то указанного предела не существует. Больше того, *в случае существенно особой точки a для любого комплексного числа A* (*в том числе* $A=\infty$) *существует такая последовательность* $z_n\to a$, *что* $f(z_n)\to A$ (теорема Сохоцкого).

Эти свойства являются характеристическими (т. е. верны и обратные утверждения).

470. Решить задачи 455, 457, используя характеристические свойства особых точек.

Решение. Для функции $f(z)=\frac{\cos z}{z-z^3}$ замечаем, что $f(z)\to\infty$ и при $z\to 0$, и при $z\to 1$, и при $z\to -1$. Значит, все эти точки — полюсы.

В задаче 457 рассматривалась функция $w=ze^{\frac{1}{z}}$. У нее особая точка $a=0$. Будем приближаться к $a=0$ по действительной оси справа. Тогда $w=xe^{\frac{1}{x}}$, $x>0$. С помощью правила Лопиталя находим:

$$\lim_{x\to 0+0} xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty.$$

Будем приближаться к $a=0$ по действительной оси слева. Тогда

$$w=xe^{\frac{1}{x}},\ x<0,$$

и

$$\lim_{x\to 0-0} xe^{\frac{1}{x}}=0.$$

Итак, приближаясь к точке $a = 0$ по разным направлениям, мы получаем разные предельные значения. Это говорит о том, что данная функция в точке $a = 0$ предела не имеет, и поэтому точка $a = 0$ для нее существенно особая.

471. Проверить справедливость теоремы Сохоцкого для функции $w = e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Единственной (изолированной) особой точкой функции является $z = 0$. Так как

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \ldots,$$

то это существенно особая точка.

Пусть A — любое комплексное число, причем $A \neq 0$, $A \neq \infty$. Найдем точки, в которых данная функция принимает значение A:

$$e^{\frac{1}{z}} = A \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A.$$

Таких точек бесконечно много:

$$z_n = \frac{1}{\ln|A| + i(\arg A + 2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$\{z_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеет точку $z=0$ своим пределом. Так как $w(z_n)=A$, то и $\lim w(z_n) = A$.

Если $A = 0$, то рассмотрим последовательность $z_n = -\frac{1}{n}$, сходящуюся к 0. Тогда $w(z_n) = e^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $A = \infty$, то возьмем $z_n = \frac{1}{n} \to 0$. Имеем: $w(z_n) = e^n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Итак, действительно для любого A удается подобрать такую последовательность $z_n \to 0$, что $w(z_n) \to A$, в чем и состоит утверждение теоремы Сохоцкого.

В задачах 472—477 требуется найти особые точки указанных функций и определить с помощью характеристических свойств их вид.

472. $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$. **473.** $\sin\frac{\pi}{z}$. **474.** $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$. **475.** $e^{-\frac{1}{z^2}}$. **476.** $e^{\frac{z}{1-z}}$.

477. $\sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

478. Проверить справедливость теоремы Сохоцкого для функций:

а) $\sin\frac{1}{z}$; б) $\cos\frac{1}{z}$.

§ 18. ПОВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ. ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Литература: [1], гл. VII, пп. 6 и 7 (до с. 219); [2], гл. VI, § 3 и 4.

Как уже отмечалось ранее (см. § 2), во многих вопросах комплексного анализа удобно рассматривать расширенную комплексную плоскость, т. е. плоскость, дополненную символической точкой $z = \infty$. Будем в этом параграфе рассматривать функции $f(z)$, которые определены и аналитичны в некоторой окрестности $|z| > R$ точки ∞ (в самой точке ∞ они не заданы). В таких случаях говорят, что точка ∞ является для функции $f(z)$ *изолированной особой точкой* (или изолированной особенностью).

479. Является ли точка ∞ изолированной особенностью для функций: а) $\frac{\sin z}{z^5-1}$; б) $\frac{1}{\sin z}$?

Решение. а) Конечные особые точки данной функции — корни уравнения $z^5 = 1$. Они лежат на окружности $|z| = 1$. Значит, область $|z| > 1$ (внешность круга $|z| \leqslant 1$), являющаяся окрестностью точки ∞, особых точек не содержит. Поэтому для данной функции точка ∞ — изолированная особенность.

б) Конечные особые точки функции $\frac{1}{\sin z}$ — корни уравнения $\sin z = 0$, т. е. точки $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Их нельзя заключить ни в какой круг. Поэтому для данной функции ∞ не является изолированной особенностью.

В задачах 480—485 требуется определить, является ли точка ∞ изолированной особенностью для указанных функций.

480. e^z. **481.** $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$. **482.** $\operatorname{tg} z$. **483.** $\operatorname{th} z$. **484.** $\sin\frac{1}{z}$.

485. $\frac{1}{e^z-1}$.

«Проколотую» окрестность точки ∞ можно рассматривать как кольцо $R < |z| < \infty$. Поэтому функцию, аналитическую в окрестности точки ∞, можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad R < |z| < \infty. \qquad (18.1)$$

Это разложение позволяет выделить те же виды особенности в бесконечности, что и в случае конечных точек, только здесь оказывается целесообразным «главной частью» ряда считать совокупность членов с положительными степенями z. А именно точку ∞ называют для функции $f(z)$ *существенно особой*, если разложение (18.1) содержит бесконечное число членов с положительными степенями z; *полюсом*, если в разложении (18.1) имеется конечное число членов с положительными степенями z (причем наивысшая из имеющихся степеней называется *порядком полюса*); *устранимой особой точкой*, если в (18.1) совсем нет положительных степеней z.

В зависимости от вида особенности в ∞ поведение функции при $z \to \infty$ характеризуется теми же свойствами, что и в случае конечных точек.

486. Какого вида особенность имеет в точке ∞ функция $\frac{1}{1-z}$?

Решение. Данная функция, очевидно, аналитична вне единичного круга. Разложим ее в этой окрестности точки $z=\infty$ в ряд Лорана:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\dots .$$

Отсюда видно, что для данной функции точка ∞ — устранимая особенность. Это можно было заметить и сразу, поскольку при $z\to\infty$ рассматриваемая функция имеет предел, равный нулю.

487. Определить вид особенности функции $\sin z$ в точке ∞.

Решение. Разложим $\sin z$ в ряд по степеням z:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots .$$

Известно, что этот ряд сходится на всей плоскости, в частности, вне любого круга $|z|\leqslant R$. Значит, это разложение является одновременно и разложением $\sin z$ в ряд Лорана в окрестности точки ∞. Из него видно, что точка ∞ для $\sin z$ — существенная особенность. В этом можно убедиться и с помощью характеристического свойства существенной особенности, заметив, что $\sin z$ при $z\to\infty$ предела не имеет. Действительно, взяв $z_n=\pi n\to\infty$, имеем: $f(z_n)\equiv\equiv 0\to 0$, а взяв $z_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi\to\infty$, получим: $f(z_n)=1\to 1$.

В задачах 488—495 требуется определить вид особенности в бесконечности для данных функций.

488. $\frac{z}{1+z^2}$. **489.** e^z. 490. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$. **491.** $3z^2+\frac{4}{z}$. **492.** $\frac{\cos z}{z^2}$.

493. $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$. **494.** $\frac{(z^2+1)^2}{z^2+4}$. **495.** $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

В задачах 496—497 требуется проверить справедливость теоремы Сохоцкого для указанных функций и особой точки $z=\infty$.

496. $\sin z$. **497.** e^z.

Если функция $f(z)$ не имеет конечных особых точек, ее называют *целой* функцией (если при этом ∞ является существенной особенностью, функцию называют целой трансцендентной); если функция не имеет конечных особых точек, кроме полюсов, ее называют мероморфной.

В задачах 498—504 требуется выяснить, являются ли указанные функции мероморфными. Какие из них целые, целые трансцендентные?

498. $e^{\frac{1}{z}}$ **499.** z^3. **500.** $\sin z$. **501.** $\frac{\cos z}{z}$. **502.** e^z. **503.** $\operatorname{tg} z$.

504. $\frac{z^2-2z+1}{3z^3+4z-5}$.

505. Может ли быть точка $z = \infty$ для мероморфной функции неизолированной особенностью? Ответ обосновать и проиллюстрировать примерами.

506. а) Доказать, что всякая целая функция $f(z)$, имеющая точку $z = \infty$ устранимой особенностью, является константой.

б) Доказать, что всякая целая функция, имеющая точку $z = \infty$ полюсом, является многочленом.

Указание. Запишите разложение целой функции в ряд Тейлора в окрестности нуля и убедитесь, что оно является и разложением в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$.

507. Доказать, что дробно-рациональная функция

$$\Phi(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_0}$$

является мероморфной. Каков вид особенности у этой функции в точке ∞?

508. Пусть $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ взаимно-простые многочлены степени m и n соответственно $(m < n)$. Доказать, что рациональную дробь $\Phi(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ можно разложить на простейшие дроби:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{A_{\beta_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{\beta_k}} + \ldots + \frac{A_1^{(k)}}{z-z_k} \right], \tag{18.2}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — корни многочлена $Q_n(z)$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — их кратности, а выражение

$$G_k(z) = \frac{A_{\beta_k}^{(k)}}{(z-z_n)^{\beta_k}} + \ldots + \frac{A_1^{(k)}}{z-z_k}$$

представляет собой главную часть лорановского разложения функции $\Phi(z)$ в окрестности полюса z_k.

Решение. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{n} G_k(z).$$

Любой полюс z_j функции $\Phi(z)$ не будет особой точкой для $\varphi(z)$. Действительно, в окрестности точки z_j функцию $\Phi(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$\Phi(z) = \frac{A_{\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \frac{A_1^{(j)}}{z-z_j} + \psi_j(z),$$

где $\psi_j(z) = c_0^{(j)} + c_1^{(j)} z + c_2^{(j)} z^2 + \ldots$. Тогда для $\varphi(z)$ здесь имеем представление

$$\varphi(z) = \psi_j(z) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} G_k(z).$$

Каждая из функций $\psi_j(z)$, $G_k(z)$ $(k \neq j)$ определена и аналитична в точке z_j, значит, в этой точке аналитична и функция $\varphi(z)$. Итак, $\varphi(z)$ — целая функция. С другой стороны, поскольку

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} \Phi(z) - \lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{n} G_k(z) =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{a_m + \ldots + \frac{a_0}{z^m}}{b_n z^{n-m} + \ldots + \frac{b_0}{z^m}} - \sum_{k=1}^{n} \left[\lim_{z\to\infty} \frac{A_{\beta_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{\beta_k}} + \ldots + \lim_{z\to\infty} \frac{A_1^{(k)}}{z-z_k} \right] = 0,$$

то в бесконечной точке $\varphi(z)$ имеет устранимую особенность, а значит, $\varphi(z) \equiv c = 0$ (см. задачу 506). Этим наше утверждение доказано.

Одно из часто используемых свойств целых функций выражено в теореме Лиувилля: *целая функция, ограниченная по модулю на всей открытой комплексной плоскости, является константой.*

509. Пусть на всей комплексной плоскости мнимая часть целой функции $f(z)$ ограничена сверху некоторой константой m. Доказать, что эта функция $f(z)$ — константа.

1-е решение. Из условия следует, что функция $w = f(z)$ отображает всю плоскость в полуплоскость $\operatorname{Im} w < m$. Подберем дробно-линейную функцию

$$t = \frac{aw+b}{cw+d},$$

которая переводит данную полуплоскость в единичный круг $|t| < 1$. Это сделать возможно. Достаточно в формуле, определяющей дробно-линейное отображение по трем парам соответствующих точек, положить, например, $w_1 = 1 + mi$, $t_1 = 1$; $w_2 = mi$, $t_2 = i$; $w_3 = -1 + mi$, $t_3 = -1$. При этом единственная особая точка — полюс найденной дробно-линейной функции — не принадлежит полуплоскости $\operatorname{Im} w < m$, иначе бы образ этой точки $t = \infty$ принадлежал единичному кругу, что невозможно. Это означает, что $cw + d \neq 0$ ни при каком z. Рассмотрим теперь функцию

$$t = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d}.$$

Так как $cw + d = cf(z) + d \neq 0$, то она имеет производную в любой точке плоскости z. Таким образом, эта функция является целой и отображает всю плоскость в единичный круг. Это означает, что ее модуль ограничен числом 1. Но тогда по теореме Лиувилля она константа:

$$\frac{af(z)+b}{cf(z)+d} = \text{const},$$

откуда следует, что и $f(z) = \text{const}$.

2-е решение. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$. Рассмотрим вспомогательную целую функцию:

$$\varphi(z) = e^{-if(z)} = e^{v(z)-iu(z)}.$$

Так как $|\varphi(z)| = e^{v(z)}$ и $v(z) < m$ (по условию), то целая функция $\varphi(z)$ ограничена по модулю числом e^m на всей плоскости. Это согласно теореме Лиувилля означает, что $\varphi(z) = \text{const}$, т. е.

$$e^{-if(z)} \equiv C.$$

Отсюда следует, что и $f(z)$ — константа.

510. Пусть у целой функции $f(z)$ действительная часть ограничена (некоторой константой) сверху, а у $\varphi(z)$ — снизу. Будут ли эти функции константами?

511. Пусть целая функция $w = f(z)$ не принимает значений, принадлежащих некоторому кругу плоскости w. Доказать, что $f(z)$ — константа.

512. Про целую функцию $f(z)$ известно, что ни при каком комплексном z значение $f(z)$ не равно ни вещественному отрицательному числу, ни нулю. Доказать, что $f(z)$ — константа.

Указание. Рассмотрите функцию $\ln f(z)$ и воспользуйтесь задачей 510.

513. Доказать, что целая функция $w = f(z)$, не принимающая значений из некоторого угла плоскости w, является константой.

514. Доказать, что целая функция, не принимающая ни одного значения из отрезка $[0;\ 1]$, является константой.

Указание. С помощью конформного отображения данный отрезок переведите в луч $[0;\ -\infty[$ и воспользуйтесь задачей 512.

§ 19. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Литература: [1], гл. VIII, п. 1—3; [2], гл. VII, § 1 и 2 (до примера 2); [3], гл. XI (но следует иметь в виду, что в книге [3] нет понятия о логарифмическом вычете и нет теоремы Руше).

Пусть a — изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$ и C — окружность $|z - a| = r$ такая, что в замкнутом круге $|z - a| \leqslant r$ нет других особых точек функции $f(z)$, кроме a. Интеграл от функции $f(z)$ по такой окружности[1] C, деленный на $2\pi i$, называется *вычетом функции* $f(z)$ в точке a и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

Таким образом, по определению

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

Вычислять вычеты, исходя из определения, довольно трудно. Практически вычисление основывается на том факте, что вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке a равен коэффициенту при $(z - a)^{-1}$ в лорановском разложении функции в окрестности точки a:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \qquad (19.1)$$

515. Вычислить:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} ze^{\frac{1}{z}}.$$

[1] Таких окружностей, конечно, существует бесконечно много, но как следует из теоремы Коши, интегралы по ним от $f(z)$ равны.

Р е ш е н и е. Для данной функции $ze^{\frac{1}{z}}$ в задаче 457 было получено разложение в ряд Лорана в окрестности точки $a = 0$:

$$ze^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \ldots .$$

Отсюда следует, что $z = 0$ — существенно особая точка функции и искомый вычет равен $\frac{1}{2}$.

Если точка a — полюс, то для определения вычета иногда можно и не находить разложения в ряд Лорана. Имеются более простые способы. Если a является для $f(z)$ простым полюсом, то можно пользоваться формулой

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z - a) f(z). \tag{19.2}$$

Вычисление вычета в простом полюсе еще более упрощается, если $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{19.3}$$

В случае, когда a — полюс кратности k,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}. \tag{19.4}$$

516. Вычислить:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

Р е ш е н и е. Преобразовав функцию

$$\frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1 - z^2)},$$

замечаем, что точка $z = 0$ для нее полюс третьего порядка. Вычет найдем по формуле (19.4):

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2\left[\frac{z^3}{z^3(1-z^2)}\right]}{dz^2} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{2(1+3z^2)}{(1-z^2)^3} = 1.$$

517. Вычислить:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

Решение. Записав функцию в виде

$$\frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1-z)(1+z)},$$

замечаем, что точка $z = 1$ для нее простой полюс. По формуле (19.2) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \to 1} \frac{-1}{z^3(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Можно воспользоваться и формулой (19.3):

$$\varphi(z) = 1, \ \varphi(1) = 1, \ \psi(z) = z^3 - z^5, \ \psi'(z) = 3z^2 - 5z^4,$$

$$\psi'(1) = -2, \ \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = -\frac{1}{2}.$$

518. Вычислить:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\pi} \frac{e^{2zi} - 1}{(z+\pi)^2}.$$

Решение. В данном случае при $z = -\pi$ наряду с знаменателем обращается в нуль и числитель. Поэтому с первого взгляда неясно, к какому типу относится данная особая точка. Найдем для функции $e^{2zi} - 1$ коэффициенты ряда Тейлора по степеням $z + \pi$:

$$a_0 = f(-\pi) = 0; \ a_1 = f'(-\pi) = 2ie^{-2\pi i} = 2i; \ a_2 = \frac{f''(-\pi)}{2} = -2.$$

Теперь можно записать разложение Лорана для данной функции:

$$\frac{e^{2zi} - 1}{(z+\pi)^2} = \frac{2i(z+\pi) - 2(z+\pi)^2 + \ldots}{(z+\pi)^2} = \frac{2i}{z+\pi} - 2 + \ldots .$$

По формуле (19.1) получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z) = 2i.$$

В задачах 519—528 требуется вычислить вычеты указанных функций относительно каждой из их особых точек.

519. $\frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z}$. **520.** $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$. **521.** $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.

522. $\operatorname{tg} z$. **523.** $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$. **524.** $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$.

525. $\frac{\cos \pi z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$. **526.** $\frac{z}{e^z - 1}$ **527.** $\frac{\sin \pi z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$

528. $\frac{z^2}{e^z - 1}$.

Пусть $z = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ можно разложить в окрестности точки ∞ в ряд Лорана. Коэффициент этого ряда c_{-1} при $\frac{1}{z}$, взятый со знаком минус, называют **вычетом** $f(z)$ **в точке** ∞:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

529. Вычислить:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^4+1}{z^6-1}.$$

Решение. Преобразуем функцию:

$$\frac{z^4+1}{z^6-1} = \frac{z^4}{z^6-1} + \frac{1}{z^6-1} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z^6}} + \frac{1}{z^6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z^6}}.$$

Теперь воспользуемся известным рядом (14.6), заменив в нем z на $\frac{1}{z^6}$. Получим:

$$\frac{z^4+1}{z^6-1} = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\ldots\right) + \frac{1}{z^6}\left(1+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} + \ldots .$$

Ряд сходится при $|z| > 1$. Это разложение в окрестности точки ∞. Коэффициент при z^{-1} равен нулю. Искомый вычет равен нулю.

В задачах 530—535 требуется вычислить вычет указанных функций в бесконечности.

530. $\frac{z^2+z-1}{z^3-z}$. **531.** $\frac{z^2 \sin\frac{1}{z}}{z-1}$. **532.** $\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

533. $z\cos^2\frac{\pi}{z}$. **534.** $\frac{z^2\sin\frac{\pi}{z}}{z-1}$. **535.** $\frac{2z^7+1}{z^6(z^2+1)}$.

Теория вычетов находит широкое применение благодаря следующей теореме.

Теорема о вычетах. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D всюду, за исключением конечного множества особых точек. Пусть замкнутый контур C содержится в области D и не проходит через особые точки. Тогда интеграл от $f(z)$ по контуру C равен сумме вычетов функции относительно всех особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, заключенных внутри C, умноженной на $2\pi i$:*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

536. Вычислить интеграл

$$I = \int_C \frac{z+1}{(z-1)\sin z}\,dz,$$

где C — окружность $|z| = 2$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции $f(z)$ являются точки $z = 1$ и $z = k\pi$. Из них внутри C лежат только две: $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$. Поэтому

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\right).$$

Обе эти точки являются для данной функции простыми полюсами, причем можно воспользоваться формулой (19.3). Имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \left[\frac{z+1}{(z-1)\cos z + \sin z}\right]_{z=0} = -1;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{2}{\sin 1}.$$

Отсюда искомый интеграл I равен:

$$I = 2\pi i\left(\frac{2}{\sin 1} - 1\right) \approx 8{,}65\, i.$$

Иногда может случиться, что внутри контура интегрирования C находится довольно много особых точек интегрируемой функции, в то время как вне его их значительно меньше. Тогда лучше подсчитать сумму вычетов в особых точках (включая и ∞), лежащих вне контура C. Возможность такого подхода вытекает из следующего факта: *если аналитическая функция имеет в расширенной плоскости только изолированные особые точки, то сумма вычетов относительно всех особых точек (включая и бесконечность) равна нулю.* Отсюда ясно, что сумма вычетов относительно особых точек функции $f(z)$, лежащих вне контура C, умноженная на $2\pi i$ и взятая со знаком минус, также даст интеграл от $f(z)$ по контуру C.

537. Вычислить:

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^8 + \frac{1}{2}\right)^2 (z-i)},$$

где C — окружность $|z| = \frac{3}{4}$.

Решение. Внутри C лежат восемь полюсов второго порядка, а вне C — простой полюс $z = i$ и $z = \infty$. Найдем вычет в точке i:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{\left(z^8 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Для определения вычета в точке ∞ найдем несколько членов разложения данной функции в ряд Лорана в окрестности этой точки. С этой целью введем новую переменную $t = \frac{1}{z}$. Тогда

$$f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = t^{17} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} t^8\right)^2 (1 - it)} = t^{17} \varphi(t).$$

Но функция $\varphi(t)$ аналитична в круге $|t| < 1$. Поэтому ее в данном круге можно разложить в степенной ряд:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \ |t| < 1.$$

Тогда

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = t^{17}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots), |t| < 1,$$

или

$$f(z) = \frac{1}{z^{17}}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots\right), |z| > 1.$$

В полученном разложении коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен нулю, т. е. $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Значит, искомый интеграл равен $-\frac{8}{9}\pi i$.

В задачах 538—547 требуется вычислить указанные интегралы.

538. $\int\limits_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где C — окружность $|z| = 3$.

539. $\int\limits_C \frac{dz}{z^4-1}$, где C — прямоугольник с вершинами $2+2i$, $-2+2i$, $2-\frac{i}{2}$, $-2-\frac{i}{2}$.

540. $\int\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, где C — окружность $|z| = 2$.

541. $\int\limits_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, где C — окружность $|z| = 1$.

542. $\int\limits_C \frac{dz}{z^8(z^{10}-2)}$, где C — окружность $|z| = 2$.

543. $\int\limits_C \frac{dz}{e^z-1}$, где C — окружность $|z-3i| = 4$.

544. $\int\limits_C \operatorname{tg} \pi z\,dz$, где C — окружность $|z| = 100$.

545. $\int\limits_C \frac{z^3}{z^4-1}\,dz$, где C — окружность $|z| = 2$.

546. $\int\limits_C \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}}\,dz$, где C — окружность $|z| = 2$.

547. $\int\limits_C \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}}\,dz$, где C — окружность $|z| = 4$.

Теория вычетов иногда с успехом используется и для вычисления интегралов в действительной области.

548. Вычислить:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{13+12\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Решение. Перейдем к комплексной переменной z по формуле $e^{i\varphi}=z$. Тогда

$$d\varphi=\frac{dz}{iz},\quad \cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}.$$

Интегрирование по отрезку $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ сводится к интегрированию по окружности $C\ \{|z|=1\}$:

$$I=\frac{1}{4i}\int_C\frac{(z^2+1)^2dz}{z^2(6z^2+13z+6)}.$$

Подынтегральная функция имеет особыми точками такие: $z_1=0$ — полюс второго порядка; $z_2=-\frac{2}{3}$ и $z_3=-\frac{3}{2}$ — простые полюсы. Внутри контура интегрирования лежат лишь две из них: z_1 и z_2. Находим вычеты (см. 19.4 и 19.3):

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{(z^2+1)^2}{6z^2+13z+6}\right]'=-\frac{13}{36};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{2}{3}}f(z)=\left[\frac{\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2}{12z+13}\right]_{z=-\frac{2}{3}}=\frac{169}{180}.$$

Окончательно получаем:

$$I=\frac{2\pi i}{4i}\left(\frac{169}{180}-\frac{13}{36}\right)=\frac{13\pi}{45}.$$

В задачах 549—558 требуется вычислить указанные определенные интегралы.

549. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi-\cos\varphi}{2\sin\varphi+3}\,d\varphi.$ **550.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\frac{1}{3}\cos\varphi}.$

551. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{3+\sin\varphi}.$ **552.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{3+2\sin\varphi}.$

553. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(5+3\sin\varphi)^2}.$ **554.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4+\cos\varphi}.$ **555.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}.$

556. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}$. **557.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}\, d\varphi$.

558. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi$.

Большую пользу оказывает теория вычетов при вычислении некоторых несобственных интегралов в действительной области. Приведем три формулы (см. [1], гл. VIII, п. 3).

Пусть

$$F(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$$

— дробно-рациональная функция, принимающая на действительной оси действительные значения, не имеющая полюсов на действительной оси и такая, что степень n знаменателя $Q_n(z)$ по крайней мере на две единицы превышает степень m числителя $P_m(z)$. Тогда[1]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{a_j} F(z), \tag{19.5}$$

где a_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — полюсы $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Пусть $\Phi(z)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, за исключением конечного числа полюсов, не лежащих на действительной оси. Если функция $\Phi(z)$ на действительной оси принимает действительные значения и стремится к нулю при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости, то

$$\int\limits_0^{\infty} \cos\mu x\, \Phi(x)\, dx = \pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{a_j} [e^{\mu i z}\Phi(z)] \tag{19.6}$$

при условии, что $\varphi(z)$ — четная функция, и

$$\int\limits_0^{\infty} \sin\mu x\, \Phi(x)\, dx = \pi \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{a_j} [e^{\mu i z}\Phi(z)] \tag{19.7}$$

при условии, что $\Phi(z)$ — нечетная функция. В формулах (19.6) и (19.7) $\mu > 0$, a_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — полюсы $\Phi(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

559. Вычислить:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

---

[1] Заметим, что в курсах действительного анализа интегралы такого вида также изучаются с помощью комплексных чисел и для их вычисления получается по существу формула (19.5). См. пункт 496 «Курса дифференциального и интегрального исчисления» Г. М. Фихтенгольца.

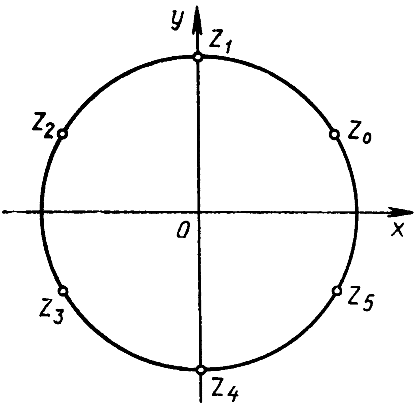


Рис. 40

Решение. Под знаком интеграла находится дробно-рациональная функция, удовлетворяющая всем условиям, при которых можно пользоваться формулой (19.5). Найдем полюсы подынтегральной функции. Это точки $z_k = \sqrt[6]{-1} = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{6}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Из них (рис. 40) в верхней полуплоскости лежат только три:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Это простые полюсы. Вычеты в них можно найти по формуле (19.3):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{6\,z_k^5} \quad (k = 0,1,2).$$

По формуле (19.5) имеем:

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5}\right) = \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{z_0}{z_0^6} + \frac{z_1}{z_1^6} + \frac{z_2}{z_2^6}\right).$$

А так как $z_0^6 = z_1^6 = z_2^6 = -1$, то

$$I = -\frac{\pi i}{3}(z_0 + z_1 + z_2) = \frac{2}{3}\pi.$$

560. Вычислить:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega x}{1 + x^2}\,dx.$$

Решение. В силу четности подынтегральной функции

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{1 + x^2}\,dx.$$

Функция $\frac{1}{1+z^2}$ удовлетворяет всем условиям, при которых можно использовать формулу (19.6). Так как у этой функции в верхней полуплоскости один простой полюс $z = i$, то

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{1 + x^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{i\omega z}}{1 + z^2} = 2\pi i\left(\frac{e^{i\omega z}}{2z}\right)_{z=i} = \pi e^{-\omega}.$$

Заметим, что неопределенный интеграл

$$\int \frac{\cos \omega x}{1+x^2}\, dx$$

не выражается через элементарные функции, так что нахождение интеграла I по стандартному методу невозможно, а его вычисление каким-нибудь искусственным способом без привлечения комплексных чисел весьма затруднительно.

В задачах 561 — 568 требуется вычислить несобственные интегралы, используя сведения из теории вычетов.

561. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. **562.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ **563.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx$.

564. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$. **565.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **566.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{9+x^2}\, dx$.

567. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2+1)^2}$. **568.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{4+x^2}\, dx$.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D и не имеющая в этой области особых точек, кроме, возможно, полюсов; $\varphi(z)$ — функция, аналитическая всюду в D, и C — замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в D и не проходящая ни через полюсы, ни через нули $f(z)$. Если с помощью теории вычетов вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

то получается такой результат: интеграл равен разности между суммой тех значений, которые функции $\varphi(z)$ принимает в нулях функции $f(z)$, лежащих внутри C, и суммой тех значений, которые принимает та же функция в полюсах $f(z)$, лежащих внутри C. При этом в перечне нулей и полюсов каждая точка выписывается в количестве, равном ее кратности:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi(a_k) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(b_j). \tag{19.8}$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — нули функции $f(z)$, лежащие внутри C, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — их кратности; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — полюсы функции $f(z)$, лежащие внутри C; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ - кратности этих полюсов.

569. Вычислить интеграл

$$I = \int_C \frac{z^5}{z^4+16}\, dz,$$

где C — окружность $|z-1| = \sqrt{6}$.

Решение. $I = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_C z^2 \frac{4z^3}{z^4+16}\, dz.$

Получили интеграл вида (19.8), где $\varphi(z) = z^2$, $f(z) = z^4 + 16$. Функция $f(z)$ полюсов не имеет, а имеет лишь четыре простых нуля: 2, —2, $2i$, $-2i$, один из которых (—2) лежит вне C.

Искомый интеграл равен:

$$I = \frac{2\pi i}{4}[2^2 + (2i)^2 + (-2i)^2] = -2\pi i.$$

В задачах 570—574 требуется вычислить указанные интегралы по контуру C, который представляет собой окружность $|z| = 4$, с помощью формулы (19.8).

570. $\int\limits_C z^2 \operatorname{ctg} z\, dz.$

571. $\int\limits_C \frac{4z^2}{z^2+9}\, dz.$

572. $\int\limits_C \frac{\sec^2 z}{\operatorname{tg} z}\, dz.$

573. $\int\limits_C \frac{3 \operatorname{tg} z + z \sec^2 z}{z \operatorname{tg} z}\, dz.$

574. $\int\limits_C z^2 \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$, где $f(z) = \frac{(z^3+1)^2}{z^4 \sin z}$.

Если в формуле (19.8) в качестве $\varphi(z)$ взять функцию $\varphi(z) \equiv 1$, то получается интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

который называется логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура C. Формула (19.8) в этом случае принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P, \tag{19.9}$$

где N — количество нулей, а P — количество полюсов функции $f(z)$ внутри контура C (с учетом кратности и тех и других).

575. Найти логарифмический вычет функции

$$f(z) = \frac{(z^3 - i)^2}{(z^3+8)^3 \cos z}$$

относительно окружности $|z| = 5$.

Решение. Внутри данной окружности функция $f(z)$ имеет три нуля (значения $\sqrt[3]{i}$), каждый кратности 2, три полюса (значения $\sqrt[3]{-8}$) третьего порядка и четыре полюса $a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0$, 1, —1, —2). Это простые полюсы, так как точки a_k — однократные нули $\cos z$. Действительно, $\cos a_k = 0$, а $\cos' a_k = -\sin a_k \neq 0$. Всего получилось 6 нулей, а полюсов 13. Следовательно, логарифмический вычет равен: $6 - 13 = -7$.

В задачах 576—578 требуется найти логарифмические вычеты данных функций относительно указанных окружностей C.

576. $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$, $|z-1| = 0{,}999$.

577. $\frac{e^z+1}{e^z-1}$, $\left|z - \frac{\pi}{2}\right| = 5$.

578. $\operatorname{th} z$, $|z+\pi| = 7$.

С помощью теории вычетов доказывается ряд предложений, имеющих как теоретическое, так и практическое значение. Приведем одно из них.

Теорема Руше. *Пусть две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические на замкнутой спрямляемой кривой C и в области, ограниченной ею, удовлетворяют в точках линии C условию $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$; тогда внутри C функция $\varphi(z) + \psi(z)$ имеет столько же нулей, сколько их имеет функция $\varphi(z)$ (с учетом кратности нулей).*

Эта теорема иногда позволяет определить число корней уравнения в той или иной области.

579. Сколько корней имеет уравнение $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ внутри кольца $1 < |z| < 2$?

Решение. Найдем вначале число корней уравнения в круге $|z| < 1$. Представим левую часть уравнения в виде $\varphi(z) + \psi(z)$, положив $\varphi(z) = -5z^5 + 1$ и $\psi(z) = z^8 - 2z$. На окружности $|z| = 1$ имеем:

$$|\varphi(z)| = |-5z^5 + 1| = |-5z^5 - (-1)| \geqslant |-5z^5| - 1 = 4,$$
$$|\psi(z| = |z^8 - 2z| \leqslant |z^8| + |2z| = 3,$$

т. е. $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Но $\varphi(z)$ имеет в единичном круге пять нулей (значения $\sqrt[5]{1/5}$) — значит, по теореме Руше столько же корней имеет здесь и данное уравнение. Из выполняющегося на единичной окружности неравенства $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ вытекает, что $\varphi(z) + \psi(z) \neq 0$ на окружности $|z| = 1$. А это означает, что данное уравнение имеет пять корней и в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Теперь найдем число корней данного уравнения, лежащих внутри круга $|z| < 2$. Для этого представим левую часть уравнения в виде $\varphi(z) + \psi(z)$, положив $\varphi(z) = z^8$, $\psi(z) = -5z^5 - 2z + 1$. На окружности $|z| = 2$ имеем:

$$|\varphi(z)| = |z|^8 = 256,$$
$$|\psi(z)| = |-5z^5 - 2z + 1| \leqslant 5|z|^5 + 2|z| + 1 = 165.$$

Снова $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Поэтому данное уравнение имеет в круге $|z| < 2$ столько же корней, сколько их имеет там уравнение $z^8 = 0$, т. е. 8. Чтобы получить количество корней, находящихся в кольце $1 < |z| < 2$, достаточно от их числа в круге $|z| < 2$ отнять их число в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, что дает нам 3.

В задачах 580—589 требуется найти число корней данных уравнений в областях, указанных в скобках.

580. $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0 \quad (|z| < 1)$.

581. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0 \quad (|z| < 1)$.

582. $z^4 - 3z + 1 = 0 \quad (|z| < 1)$.

583. $2z^4 - 5z + 2 = 0 \quad (|z| < 1)$.

584. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0 \quad (|z| < 1)$.

585. $z^3 - 12z + 2 = 0 \quad (|z| < 2)$.

586. $z^4 - 9z + 1 = 0 \quad (|z| < 2)$.

587. $z^4 - 8z + 10 = 0 \quad (1 < |z| < 3)$.

588. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0 \quad (|z| < 1)$.

589. $z^4 - 5z + 1 = 0 \quad (1 < |z| < 2)$.

В задаче 508 было установлено, что всякую правильную рациональную дробь $\Phi(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ можно разложить на простейшие дроби:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{n} G_k(z). \tag{19.10}$$

Так как выражение

$$G_k(z) = \frac{A^{(k)}_{\beta_k}}{(z-z_k)^{\beta_k}} + \ldots + \frac{A^{(k)}_1}{z-z_k}$$

представляет собой главную часть лорановского разложения функции $\Phi(z)$ в окрестности точки z_k, то для коэффициентов $A^{(k)}_j$, очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$A^{(k)}_j = \operatorname*{Res}_{z=z_k} [(z-z_k)^{j-1}\Phi(z)], \quad j = 1, 2, \ldots, \beta_k. \tag{19.11}$$

В частности,

$$A^{(k)}_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_k} \Phi(z). \tag{19.12}$$

Таким образом, в комплексном анализе не только легко и естественно доказывается возможность разложения рациональных дробей на простейшие, но и само разложение с помощью теории вычетов часто получается проще, чем применяемый в таких случаях в действительном анализе метод неопределенных коэффициентов.

590. Разложить дробь

$$\Phi(z) = \frac{3z^2 - 5z + 12}{(z-1)(z-2)(z+3)}$$

на простейшие дроби.

Решение. Так как числа $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ и $z_3 = -3$ — простые нули знаменателя и не являются нулями числителя (проверьте!), то они служат простыми полюсами данной функции. Поэтому по формуле (19.10) $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+3}.$$

По формуле (19.12)

$$A = \operatorname*{Res}_{z=1} \Phi(z) = \lim_{z\to 1} [(z-1)\Phi(z)] = \lim_{z\to 1} \frac{3z^2-5z+12}{(z-2)(z+3)} = -\frac{5}{2}.$$

Аналогичные вычисления дают $B = \frac{14}{5}$, $C = \frac{27}{10}$.

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{3z^2-5z+12}{(z-1)(z-2)(z+3)} = \frac{-\frac{5}{2}}{z-1} + \frac{\frac{14}{5}}{z-2} + \frac{\frac{27}{10}}{z+3}.$$

В задачах 591—594 требуется указанные рациональные дроби разложить на простейшие.

591. $\dfrac{3z+5}{z^4-1}$.

592. $\dfrac{z-5}{z^3-3z^2+4}$.

593. $\dfrac{z-3}{z^3-z}$.

594. $\dfrac{3z^2+8}{z^3+4z^2+4z}$.

Теория вычетов может быть использована и для определения сумм числовых рядов. Рассмотрим один прием, который применяется для этой цели.

595*. Пусть $\Phi(z)$ — рациональная функция с полюсами z_1, z_2, ..., z_m, среди которых нет действительных целых чисел и степень числителя функции $\Phi(z)$ ниже степени знаменателя по крайней мере на две единицы. Доказать, что в таком случае

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Phi(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} [\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \tag{19.13}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_{C_n} \Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz,$$

где C_n — окружность $|z| = n + \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Оценим $|\Phi(z)|$ на окружности $|z| = R$. Имеем:

$$|\Phi(z)| = \left|\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right| = \left|\frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_0}\right| = \left|\frac{a_m}{b_n z^{n-m}}\right| \left|\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right|,$$

где

$$\alpha = \frac{a_{m-1}}{a_m z} + \ldots + \frac{a_0}{a_m z^m}, \quad \beta = \frac{b_{n-1}}{b_n z} + \ldots + \frac{b_0}{b_n z^n}.$$

Так как $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $z \to \infty$, то

$$\left|\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right| = \left|1 + \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\right| < 2$$

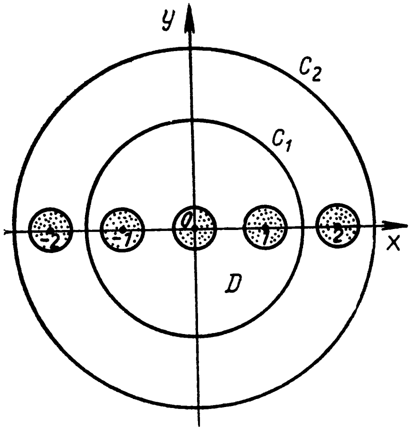


Рис. 41

при достаточно большом $|z|$. А поскольку еще известно, что $n - m \geqslant 2$, то на окружности $|z| = R$ при достаточно большом R

$$|\Phi(z)| < \frac{2|a_m|}{|b_n| R^2}.$$

Обозначив $\frac{2|a_m|}{|b_n|}$ через K, получаем, что на окружности $|z| = R$ справедливо неравенство

$$|\Phi(z)| < \frac{K}{R^2}. \tag{19.14}$$

В задаче 265 было показано, что функция $\operatorname{ctg} \pi z$ ограничена по модулю некоторой константой M в области D, представляющей собой всю плоскость, из которой удалены кружки $|z - k| < \varepsilon$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). Взяв $\varepsilon = \frac{1}{4}$, замечаем, что окружности C_n принадлежат области D (рис. 41), и поэтому на них

$$|\operatorname{ctg} \pi z| < M. \tag{19.15}$$

Воспользовавшись известной оценкой $\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz\right| \leqslant HL$ ($H = \max\limits_{z \in \Gamma} |f(z)|$, L — длина Γ), с помощью (19.14) и (19.15) получим неравенство

$$|I_n| \leqslant 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{K}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} M,$$

справедливое для всех достаточно больших n. Из этого неравенства вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0. \tag{19.16}$$

С другой стороны, интеграл I_n можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. При достаточно большом n в круге $|z| < n + \frac{1}{2}$ лежат все полюсы функции $\Phi(z)$ и полюсы $z = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$) функции $\operatorname{ctg} \pi z$. Так как

$$\operatorname*{Res}_{z=k} [\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z] = \left[\frac{\Phi(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right]_{z=k} = \frac{1}{\pi} \Phi(k),$$

то

$$I_n = 2\pi i \left\{\frac{1}{\pi} \sum_{-n}^{n} \Phi(k) + \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} [\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z]\right\}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (19.16), получаем формулу (19.13).

596. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\Phi(z) = \frac{1}{(2z+1)^2}$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n).$$

Заметим далее, что $\Phi(0) = \Phi(-1)$, $\Phi(1) = \Phi(-2)$ и т. д., т. е. $\Phi(n) = \Phi(-n-1)$. Действительно,

$$\Phi(-n-1) = \frac{1}{(1-2n-2)^2} = \frac{1}{(-2n-1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} = \Phi(n).$$

Поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n). \tag{19.17}$$

Но левую часть этого выражения мы можем найти по формуле (19.13):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) = -\pi \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} [\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \tag{19.18}$$

Точка $z = -\frac{1}{2}$ для функции $\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z$ — полюс второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} [\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z] = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left[\frac{\operatorname{ctg} \pi z \left(z + \frac{1}{2}\right)^2}{(2z+1)^2} \right]' = \frac{1}{4} \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \operatorname{ctg}' \pi z =$$

$$= -\frac{\pi}{4} \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin^2 \pi z} = -\frac{\pi}{4}.$$

Из (19.17) и (19.18) находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

В задачах 597—600 требуется найти суммы указанных рядов.

597. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$.

598. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$.

599. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)(n^2+b^2)}$, $a \neq b$.

600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - 2}$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

§ 1. **3.** $n = 4k$ (k — любое целое число). **4.** б) $-2 + \frac{3}{2}i$; в) 2. **5.** а) $z = 0$; $z = i$; $z = -i$: б) $z = \frac{3}{4} + i$. **6.** а) Да; б) да; в) нет. **7.** а) 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{4}$, $n = 0,1,2,3$; в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi}{2}\right)$, $n = 0,1$; г) $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi}{3}\right)$, $n = 0,1,2$. **10.** 3 пары: 1) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $z_1 = i$, $z_2 = -i$; 3) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. а) 1; б) i; в) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$; $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$; $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$; $\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$.

20. $\frac{\cos 50\alpha\cdot\cos 49{,}5\alpha}{\cos 0{,}5\alpha}$. **21.** $\frac{\sin 50\alpha\cdot\cos 49{,}5\alpha}{\cos 0{,}5\alpha}$. **22.** $\frac{\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

23. $\frac{\cos 51\alpha\sin 50\alpha}{\sin\alpha}$. **24.** $\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, **25.** $1 - \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}$.

26. 3. **30.** 1) $\bar{z}$; 2) $-\bar{z}$; 3) $-z$; 4) $i\bar{z}$. **31.** $w_1 = 1 + 3i$, $w_2 = 4 + 2i$. **32.** $z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. **36.** $|A_1A_2| : |AM| = 2 : 1$. Указание. Введите комплексные координаты данных точек A_1, A_2, A_3, C и выразите через них координаты точек C_1, C_2, и т. д. **50.** Точки A, B, C лежат на одной прямой.

§ 2. 53. (0°, 0°); (0°, 180° в. д.); (0°, 90° в. д.); (0°, 90° з. д.); $\left((2 \operatorname{arctg} \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ с. ш., 45° з.д. 54. $z' = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(1+i)}{2}$. 55. $z' = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{i}{2}$.
57. а) Пучок окружностей с вершиной в Северном полюсе N; б) часть сферической поверхности между двумя окружностями с единственной общей точкой N; в) сегментная поверхность; г) двуугольник на сфере.

§ 3. 69. 0. 70. Не имеет. 71. ∞. 72. 0. 73. Не имеет. 74. Не имеет. 75. Не имеет. 76. Указание. Используйте, например, задачу 73. 78. $z = \infty$. 79. Все точки расширенной комплексной плоскости. 80. $z = 0$ и $z = -2$. 81. $z = 1$ и $z = -1$. 82. $z = \pi$ и $z = -\pi$. 83. $z = 0$, $z = \frac{1}{m}$, $z = \frac{i}{n}$ (m и n — любые целые числа, $m \neq 0$, $n \neq 0$). 86. Сходится абсолютно. 87. Сходится абсолютно. 88. Сходится абсолютно. 89. Сходится абсолютно. 90. Сходится абсолютно. 91. Сходится абсолютно. 92. Сходится абсолютно. 93. Сходится абсолютно. 94. Сходится абсолютно. 95. $\frac{2(2-\cos 2\alpha)}{5-4\cos 2\alpha}$.
96. $\frac{2\sin 2\alpha}{5-4\cos 2\alpha}$. 97. $\frac{\cos\alpha}{2(1+3\sin^2\alpha)}$. 98. $\frac{\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$. 99. $\frac{r\sin\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}$.
100. $\frac{r\cos\alpha - r^2}{1-2r\cos\alpha + r^2}$.

ГЛАВА II

§ 4. 105. Окружность $x^2 + (y-1)^2 = 4$. 106. Прямая $x = 2$. 107. Прямая $x + y = 1$. 108. Прямая $y = \frac{a_2}{a_1}(x - b_1) + b_2$ при $a_1 \neq 0$; если $a_1 = 0$, то прямая $x = b_1$. 109. «Двойной» луч $y = x - 1$ ($x \geqslant 1$). 110. Гипербола $y = \frac{1}{x}$. 111. Кривая $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$. 112. Парабола. 113. Эллипс $\frac{x^2}{(R+r)^2} + \frac{y^2}{(R-r)^2} = 1$ ($R \neq r$); если $R = r$, то отрезок $[-2R, 2R]$ действительной оси. 114. Прямая $y = x \operatorname{tg} c \left(c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; при $c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ — положительный луч мнимой оси; при $c = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$ — отрицательная часть мнимой оси. 115. Парабола $x = \frac{y^2}{4c^2} - c^2$ при $c \neq 0$; если $c = 0$, то положительный луч действительной оси. 118. Прямая $x = -1$. 119. Отрезок $[-2, 2]$ действительной оси. 120. Эллипс с фокусами в точках 2 и -2 и полуосями 3 и $\sqrt{5}$. 121. Левая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = 1$. 122. Гипербола $\frac{x^2}{0{,}5} - \frac{y^2}{0{,}5} = 1$. 123. Окружность $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$. 124. Прямая. 125. Прямая. 126. Прямая, проходящая через начало координат. 127. Пустое множество. 128. Если $c > |a-b|$, то эллипс; если $c = |a-b|$, то отрезок действительной оси; при $0 < c < |a-b|$ — пустое множество. 131. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$. 132. Круг $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$. 133. Область, заключенная между двумя ветвями гиперболы $y = \frac{1}{2x}$. **134.** «Внутренности» обеих ветвей гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. **135.** «Внутренность» параболы $y = \frac{1-x^2}{2}$. **136.** Круг $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 < \frac{8}{9}$. **137.** Круг $\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{9}{16}$.

138. Круг $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 2$. **139.** «Внешность» эллипса с фокусами i и $-i$ и полуосями 2 и $\sqrt{3}$. **140.** «Внешность» параболы $x = \frac{1-y^2}{2}$. **141.** «Внутренность» лемнискаты. **142.** Пересечение кругов $|z+i| \leqslant \sqrt{2}$, $|z-i| \leqslant \sqrt{2}$ и «внешность» их объединения (включая границы кругов). **143.** «Внутренность» лемнискаты Бернулли (см. «Справочник», с. 107).

§ 5. 145. $\operatorname{Re} w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$, $\operatorname{Im} w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$. **146.** $\operatorname{Re} w = 2x^2$, $\operatorname{Im} w = -2xy$. **147.** $\operatorname{Re} w = 2\rho\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta+2\varphi}{2}$, $\operatorname{Im} w = 2\rho\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times\sin\frac{\alpha-\beta+2\varphi}{2}$, где $z = \rho e^{i\varphi}$. **148.** $\operatorname{Re} w = \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi$, $\operatorname{Im} w = \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi$, где $z = \rho e^{i\varphi}$. **149.** $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + ax + b$, $\operatorname{Im} w = 2xy + ay$. **151.** $w = -\frac{i}{z}$. **152.** $w = iz\ (z^2-1)$. **153.** $w = \frac{z+3}{z+5}$. **154.** $w = 1 + i + \frac{1}{z}$. **157.** 1) Ось Ox преобразуется в прямую $\operatorname{Im} w = 1$, ось Oy — в себя; 2) координатная сетка z-плоскости преобразуется в себя; 3) единичная окружность преобразуется в окружность $u^2 + (v-1)^2 = 1$ плоскости w. **158.** 1) Ось Ox преобразуется в мнимую ось плоскости w, ось Oy — в действительную ось плоскости w; 2) координатная сетка преобразуется в себя; 3) единичная окружность преобразуется в себя. **159.** 1) На окружность $|w| = \frac{1}{2}$; 2) на окружность $|w| = 1$; 3) на прямую $u = -v$; 4) на прямую $v = 0$; 5) на окружность $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$; 6) на прямую $u = \frac{1}{2}$. **160.** В прямую $\operatorname{Im} w = 0$. **161.** 1) В полусегмент $[0, 1[$ действительной оси; 2) в интервал $[0, 2[$ действительной оси; 3) в полусегмент $[0, 1[$ действительной оси; 4) в интервал $]-2, 2[$ мнимой оси. **162.** а) В промежуток $]-\pi, \pi]$ действительной оси; б) сектор параболы с вершиной в точке $2i$, ограниченный отрезком $[-1, 1]$ действительной оси. **163.** См. любую из книг [1] — [3]. **165.** Нет. **166.** Нет. **167.** ∞. **168.** 1. **172.** Непрерывна в точке $z = 1$; в точке $z = -1$ не является непрерывной.

§ 6. 174. Имеет производную в каждой точке плоскости. **175.** Имеет производную в точке $z = 0$. **176.** Производная не существует ни в одной точке. **177.** Производная не существует ни в одной точке. **180.** $w'(0) = 0$, аналитической нигде не является. **181.** Имеет производную в точках прямой $y = x$, причем в каждой из них $w' = 2x$; аналитической нигде не является. **182.** $w'(0) = 0$ **183.** Производная не существует ни в одной точке. **184.** Имеет производную $w' = -\frac{i}{\cos^2 x}$ в точках прямых $y = \pm x + \pi m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; не является аналитической ни в одной точке. **185.** Аналитическая всюду, кроме точки $z = 0$; $w'(z) = -\frac{1}{z^2}$. **186.** Аналитическая на всей плоскости, $f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi$. **188.** Да. **190.** Да. **191.** Да. **192.** Да. **193.** Нет. **194.** Нет. **195.** Нет. **197.** а) Нет; б) нет; в) да. **198.** Удовлетворяет уравнению Лапласа в точках прямых $x = n\pi$ и $y = k\pi$ $(n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; не существует.

201. а) $f(z)=e^x \sin y - ie^x \cos y + ic = -ie^z + ic$ (c — действительная постоянная); б) $f(z)=-e^{-2y}\sin 2x + ie^{-2y}\cos 2x + c = ie^{2iz}+c$ (c —действительная постоянная); в) $f(z)=(y^3-3x^2y+c)+i(x^3-3xy^2)=$ $= iz^3+c$ (c — действительная постоянная); г) $f(z)=z^3$; д) $f(z)=\dfrac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}+$ $+i\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{z-1}{z}$; е) $f(z)=e^{-2y}\sin 2x-y+i(-e^{-2y}\cos 2x+x)+c=-ie^{2iz}+iz+c$ (c — действительная постоянная). **206.** а) $|z|<\dfrac{1}{2}$; б) $|z+1|<\dfrac{1}{2}$; в) $|z|>$ >1. **207.** а) $|z|=\dfrac{1}{2}$; б) $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; в) $|z-1|=\dfrac{1}{2}$. **208.** а) $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{Re} z=$ $=0$; в) $\operatorname{Im} z=0$, $\operatorname{Re} z>1$.

§ 7. **211.** $w=-iz+2i$. **212.** $w=-i(z+1)$. **213.** $w=az+b$ (a и b— действительные числа, $a>0$). **214.** $w=-az+b$ (a и b — действительные числа, $a>0$). **215.** $w=i(az+b)$ (a и b — действительные числа, $a>0$). **216.** $w=az+bi$ (a и b — действительные числа, $a>0$). **217.** $w=\pm(z-1)+$ $+1+bi$ (b — действительное число). **218.** $w=\pm z+b(1+i)$ (b — действительное число). **222.** $w=\dfrac{z-i}{z-2+i}$. **223.** $w=\dfrac{i(z-1)}{z-i}$; в верхнюю полуплоскость w-плоскости преобразуется «внешность» окружности, проходящей через точки 1, 0, i. **224.** $w=iz$; вещественная ось z-плоскости преобразуется в мнимую ось w-плоскости; в вещественную ось w-плоскости преобразуется мнимая ось z-плоскости. **225.** $w=iz$; $w=\dfrac{(z+1)i}{1-z}$. Указание. Использовать принцип соответствия границ. **226.** Например, $w=\dfrac{z+1}{1-z}$. Указание. Использовать принцип соответствия границ. **227.** В единичный круг; $z=0$ преобразуется в $w=\dfrac{1}{2}$; в окружности $|w|=c$ ($c\neq 2$) преобразуются окружности $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{c}{2}\left|z-2\right|$, а в окружность $|w|=2$ преобразуется прямая $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=|z-2|$. **228.** В единичный круг; в окружности $|w|=c$ преобразуются окружности $|z+1|=c\,|z-1|$ ($c\neq 1$) и прямая $|z+1|=|z-1|$ ($c=1$). **229.** Окружности Аполлония $|z-i|=c\,|z+i|$ ($0<c<1$). **230.** Окружность $|z|=1$ преобразуется в мнимую ось w-плоскости; окружности $|z|=c\neq 1$ преобразуются в окружности $|w+1|=$ $=c\,|w-1|$; нижняя полуплоскость преобразуется в себя. **231.** 1) В лучи, симметричные данным относительно действительной оси; в окружности $|w|=\dfrac{1}{c}$; 2) оси координат и системы окружностей $\left(x+\dfrac{1}{2c}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4c^2}$ и $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2c}\right)^2=\dfrac{1}{4c^2}$; 3) окружности $|z-i|=c$ преобразуются в окружности $u^2+\left(v+\dfrac{1}{1-c}\right)^2=\dfrac{c}{(1-c)^2}$ при $0<c\neq 1$, при $c=1$ в прямую $v=-\dfrac{1}{2}$.

232. $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-i}{z+i}$. **233.** $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-p}{1-\bar{p}z}$. Указание. Точке с комплексной координатой p симметрична относительно единичной окружности точка $\dfrac{1}{\bar{p}}$.

§ 8. 248. $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$; $\operatorname{Im} z=0$; $|z|=\cos i\frac{\pi}{2}$; $\arg z=0$. 250. $\operatorname{Re} z=e\cos 1$; $\operatorname{Im} z=e\sin 1$; $|z|=e$; $\arg z=1$. 251. $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Im} z=\frac{1}{e}$, $|z|=\frac{1}{e}$, $\arg z=\frac{\pi}{2}$. 252. $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Im} z=\frac{e^2-1}{2e}$, $|z|=\frac{e^2-1}{2e}$, $\arg z=\frac{\pi}{2}$. 253. $\operatorname{Re} z=\cos 2\operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Im} z=\sin 2\cdot\operatorname{sh} 3$. 255. $\operatorname{Re}\sin z=\sin x\operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\sin z=\cos x\operatorname{sh} y$. 256. $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z=\operatorname{ch} x\cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{ch} z=\operatorname{sh} x\sin y$. 257. $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z=\operatorname{sh} x\cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{sh} z=\operatorname{ch} x\sin y$. 258. $3{,}1659-1{,}9596i$. 259. $2{,}0327-3{,}0520i$. 260. $2{,}0327-3{,}0520i$. 261. Да, см. № 252. 266. Нет. 267. а) $z=x+ik\pi$ (k — целое); б) $z=k\pi+iy$ (k — целое); в) $z=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+iy$ (k — целое). 268. а) $z=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+iy$ (k — целое, $y\neq 0$); б) $z=k\pi+iy$ (k — целое, $y\neq 0$). 269. $\operatorname{Re} z<0$. 271. а) Окружность; б) луч; в) спираль $r=e^{\frac{\varphi-b}{k}}$; г) угол; д) круговой сектор. 272. а) Ветвь гиперболы; б) половина эллипса; в) верхняя полуплоскость; г) четвертый квадрант; д) правая полуплоскость с разрезом по отрезку $[0, 1]$; е) вся плоскость с разрезами по действительной оси вдоль лучей $]-\infty, -1]$ и $[1, \infty[$; е) «внутренность» эллипса с разрезами по $[-\operatorname{ch} h, 1]$ и $[1, \operatorname{ch} h]$.

§ 9. 281. Нет. В этом можно убедиться на частных примерах. 283. Отрезок, соединяющий точки $\pi(1+i)$ и $-\pi(1+i)$, без концов. 284. Полуполоса $\pi<v\leqslant 3\pi$, $u<0$. 285. Прямоугольник $-3\pi<v\leqslant-\pi$, $\ln 2<u<\ln 4$. 286. Полоса $0<v<\pi$. 287. Полоса $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$. 288. Полоса $-\frac{3\pi}{2}<v<-\frac{\pi}{2}$. 289. Прямоугольник $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{3\pi}{4}$, $0<u<1$. 290. Полоса $2k\pi<v<2k\pi+\frac{\pi}{4}$. 292. Прямоугольник. 303. На луче, выходящем из начала координат и образующем с действительной осью угол $\operatorname{Im} b\cdot\ln|a|$. 304. Может. 305. Нет. 306. а) Нет; б) нет. 309. Да. 315. а) Угол $\frac{7\pi}{8}<\operatorname{Arg} w<\frac{9\pi}{8}$; б) угол $-\pi<\arg w<\frac{\pi}{2}$; в) угол $\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{7\pi}{4}$; г) круговой сектор: $|w|<2$, $-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}$. 319. Одно действительное число 3.

§ 10. 323. $w=i\sqrt{-z^2-h^2}$. 324. $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 325. $w=i\sqrt{-e^{2z}-1}$. 326. $w=i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2$. 327. $w=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. 328. $w=e^{-2\pi\left(\frac{1}{z}+\frac{i}{2}\right)}$. 329. $w=i\sqrt{\frac{z-1}{z}}$. 330. $w=i\sqrt{i\left(\frac{1}{z}+i\right)}$. 331. $w=e^{\frac{2\pi i}{z}}$. 332. $w=\left(\frac{z-\sqrt{3}-i}{z+\sqrt{3}-i}\right)^3$.

ГЛАВА III

§ 11. 336. $|z|<\sqrt{5}$. 337. $|z|<e$. 338. $|z-2i|<\frac{5}{3}$. 339. $|z|<\infty$. 340. $|z|<1$. 341. $|z-1|<\sqrt{2}$. 342. Сходится лишь при $z=0$ 343. $|z+i|<2$. 344. $|z|<\infty$. 345. $|z|<\infty$. 346. $|z|<1$. 347. $|z|<\infty$. 348. $|z|<\infty$.

§ 12. **352.** 1) $\frac{1}{2}+4i$; 2) $\frac{3}{2}+3i$. **353.** $-i$. **354.** 4. **355.** 0. **356.** 0. **357.** $\frac{3}{4}\pi i$. **358.** $4i$. **359.** $2\pi^2(1-a^2)+4\pi a^2 i$. **360.** $-2i\sqrt{2}$. **361.** $2(1+i)$.

§ 13. **365.** а) $\frac{2\pi i(2-i)}{5}$; б) $\frac{8\pi i(2-i)}{5}$. **366.** $\frac{\pi}{2}$. **367.** πi. **368.** $\frac{2\pi i(e^2-1)}{e}$. **369.** 0. **370.** $8\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi i}{4}=4i\sqrt{2}$. **371.** $-6\pi i$. **372.** 0. **373.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) 0. **374.** $-\frac{2\pi i\cos 2}{99!}$. **375.** а) 0; б) 0. **376.** $-\frac{2\pi i}{3}$.

§ 14. **378.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$. **381.** $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$ при $|z-i|<2$. **382.** $\frac{2}{i-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ при $|z-i|<\sqrt{2}$. **383.** $\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^{2n}$ при $|z|<2$. **384.** $1-\frac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n$ при $|z-1|<3$. **385.** $\cos i\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\sin i\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ при $|z|<\infty$. **386.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$ при $|z|<\infty$.

387. $\frac{1}{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ при $|z|<\infty$. **388.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n}}{(2n)!}$ при $|z|<\infty$.

389. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$ при $|z|<\infty$.

390. $e^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ при $|z|<\infty$. **393.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n$ при $|z|<1$.

394. $z^2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{z^{n+1}}{n}+\frac{z^n}{n}\right)$ при $|z|<1$. **395.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{2n-2}$ при $|z|<1$. **396.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{3n-1}$ при $|z|<1$. **399.** $z+\frac{1}{2}z^3+\frac{5}{24}z^5+\ldots$ при $|z|<\frac{\pi}{2}$. **400.** $-1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2+\ldots$ при $|z|<1$. **401.** $1+\frac{7}{6}z^2+\frac{179}{180}z^4+\ldots$ при $|z|<1$.

§ 15. **403.** Нет. **404.** Нет. **405.** Нет. **406.** Да, $f(z)=\frac{1}{z+1}$. **408.** Нет.

409. Нет. **410.** Да, $f(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}, & z\neq 1.\\ 0, & z=1\end{cases}$ **411.** Нет. **412.** Нет. **414.** Нет. **417.** $n=$ $=15$. **418.** $n=3$. **419.** $z=3i$ и $z=-3i$ — нули второго порядка. **420.** $z=0$ — нуль второго порядка и $z=k\pi$ ($k=\pm1, \pm2, \ldots$) — нули первого порядка. **421.** $z=\pm\pi$ — нули второго порядка, $z=k\pi$ ($k=\pm2$, $\pm3, \ldots$) — нули первого порядка. **425.** $|z-2i|<\sqrt{5}$. **426.** $\left|z+\frac{1}{2}\right|<$ $<\frac{3}{2}$. **427.** $|z-1|<\frac{5}{2}$. **428.** Нет. **429.** а) Нет; б) да; в) нет.

ГЛАВА IV

§ 16. 432. $\frac{1}{2}<|z|<2$. **433.** $|z-i|>1$. **434.** $0<|z+1|<\infty$.

435. Ряд расходится. **436.** $|z|>1$. **437.** $0<|z|<\infty; e^{\frac{2}{z}}$. **438.** $1<|z|<2$; $\frac{5z-4i-2}{(2-z)(z-i)}$. **439.** $|z|>2$; $\frac{2-i}{(z-2)(z-i)}$. **440.** $0<|z+2|<5$; $\frac{-1}{z^2-z-6}$.

441. $2<|z|<3$; $-\frac{5}{6+z-z^2}$. **444.** $\frac{1+3i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+\frac{9-3i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$.

445. $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$. **446.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\ z^{n-3}}$. **447.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2^{n+1}}$.

448. $-\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$ при $0<|z-1|<2$; $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$ при $|z-1|>2$.

449. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ при $|z|<1$; $\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n\right]$ при $1<|z|<3$; $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(3^n-1)$ при $|z|>3$. **450.** $-\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ при $0<|z|<$ <1; $\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$ при $|z|>1$. **451.** $-\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^{2n}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ при $|z|<1$; $-\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^{2n}}+\frac{i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}}{z^{2n+2}}$ при $1<|z|<2$; $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{z^{2n+2}}+$ $+\frac{i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}}{z^{2n+2}}$ при $|z|>2$. **453.** $-\frac{(7+i)i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}-\frac{2+i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+$ $+\frac{3-i}{150}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^n}$ при $|z|<1$; $-\frac{7+i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-\frac{2+i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+$

$+\frac{3-i}{150}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^n}$ при $1<|z|<2$; $-\frac{7+i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+\frac{2+i}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+$
$+\frac{3-i}{150}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^n}$ при $2<|z|<3$; $-\frac{7+i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+\frac{2+i}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+$
$+\frac{3-i}{50}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}}$ при $|z|>3$.

§ 17. **458.** $z=0$—устранимая особая точка. **459.** $z=0$ — полюс второго порядка. **460.** $z=2k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ — полюса второго порядка, $z=0$ — полюс первого порядка. **461.** $z=0$ — полюс второго порядка. **462.** $z=0$ — существенно особая точка. **463.** $z=k\pi$ (k — четное) — устранимые особые точки; $z=k\pi$ (k — нечетное) — полюса второго порядка. **464.** $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$ — четыре полюса первого порядка. **465.** $z=0$ — полюс второго порядка. **466.** Полюс второго порядка. **467.** Неизолированная особенность. **468.** Полюс третьего порядка. **469.** Нет. **472.** $z=0$ — устранимая особая точка; $z=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ (k — целое) — полюса первого порядка. **473.** $z=0$ — существенно особая точка. **474.** $z=0$ — существенно особая точка. **475.** $z=0$ — существенно особая точка. **476.** $z=1$ — существенно особая точка. **477.** $z=0$ — существенно особая точка.

§ 18. **480.** Да. **481.** Да. **482.** Нет. **483.** Нет. **484.** Да. **485.** Нет. **488.** Устранимая особая точка. **489.** Существенно особая точка. **491.** Полюс второго порядка. **492.** Существенно особая точка. **494.** Полюс. **495.** Существенно особая точка. **498.** Не является мероморфной. **499.** Целая. **500.** Целая трансцендентная. **501.** Мероморфная. **502.** Целая трансцендентная. **503.** Мероморфная. **504.** Мероморфная. **505.** Да. **510.** Да.

§ 19. **519.** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1$; $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{2}$; $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=-\frac{1}{2}$. **520.** $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=0$. **521.** $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=-5\frac{23}{24}$. **522.** $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z)=-1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **523.** $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=-\sin 1$. **524.** $\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)=-1$. **525.** $\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=-\pi$. **526.** $\operatorname*{Res}_{z=2k\pi i} f(z)=2k\pi i$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **527.** $\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=0$. **528.** $\operatorname*{Res}_{z=2k\pi i} f(z)=-4k^2\pi^2$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **530.** -1. **531.** -1. **532.** -1. **533.** π^2. **534.** $-\pi$. **535.** -2. **538.** 0. **539.** $-\frac{\pi}{2}$. **540.** $\frac{3}{64}\pi i$. **541.** πi. **542.** 0. **543.** $4\pi i$. **544.** $-400i$. **545.** $2\pi i$. **546.** $-\frac{2\pi i}{3}$. **547.** $-\frac{16}{3}\pi i$. **550.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$. **551.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **553.** $\frac{5\pi}{32}$. **554.** $\frac{2\pi\sqrt{15}}{15}$. **555.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. **556.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$. Указание. Воспользоваться четностью подынтегральной функции, ввести подстановку $e^{2i\varphi}=z$. **557.** $2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$. Подстановка $e^{2i\varphi}=z$. **558.** $\pi(2-\sqrt{2})$. **561.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **562.** $\frac{\pi}{4}$. **563.** $\frac{5\pi}{12}$. **564.** $\pi\sqrt{2}$.

565. $\frac{\pi}{4}$. **566.** $\frac{\pi}{3e^9}$. **567.** $\frac{\pi}{4e}$. **568.** $\frac{\pi}{2e^6}$. **570.** $4\pi^3 i$. **571.** 0. **572.** $2\pi i$. **573.** $8\pi i$. **576.** 0. **577.** 1. **578.** 1 **580.** 1. **581.** 0. **582.** 1. **583.** 1. **584.** 5. **585.** 1. **586.** 1. **587.** 4. **588.** 4. **589.** 3. **591.** $\Phi(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{5i-3}{4(z-i)} - \frac{3+5i}{4(z+i)}$.

592. $\Phi(z) = -\frac{\frac{2}{3}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2}$. **593.** $\Phi(z) = \frac{3}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z+1}$.

594. $\Phi(z) = \frac{2}{z} + \frac{1}{z+2} - \frac{10}{(z+2)^2}$. **597.** $\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}(1+\pi\sqrt{2}) + (\pi\sqrt{2}-1)}{4(e^{2\pi\sqrt{2}}-1)}$

598. π^2. **599.** $\pi\left[\frac{a \operatorname{cth} \pi b - b \operatorname{ctg} \pi a}{ab(a^2-b^2)}\right]$. **600.** $-\pi\left[\frac{\operatorname{ctg} \pi \sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{8}} + \frac{\operatorname{cth} \pi \sqrt[4]{2}}{4\sqrt[4]{8}}\right] + \frac{1}{4}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Марк Беневич БАЛК

Виктор Алексеевич ПЕТРОВ

Антон Андреевич ПОЛУХИН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Редактор *А. И. Юдина*

Технический редактор *М. М. Широкова*

Корректор *К. А. Иванова*

Сдано в набор 14/XI 1975 г. Подписано к печати 7/V 1976 г. 60×90 $^1/_{16}$. Бумага типограф. № 3. Печ. л. 8,50. Уч.-изд. л. 7,58. Тираж 35 тыс. экз. А 05624.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ 411

Цена 21 коп.