Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

Е. А. БАРБАШИН

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
Б24
УДК 517.91

Функции Ляпунова. Барбашин Е. А., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970.

Изложен курс лекций по методу функций Ляпунова, прочитанный в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени университете им. В. И. Ленина. Основное внимание уделено методам построения функций Ляпунова для нелинейных систем. Приводятся методы оценки области притяжения, оценки решений, времени регулирования, интегральных критериев качества регулирования. Излагаются достаточные критерии асимптотической устойчивости в целом, критерии абсолютной устойчивости. Приведено большое количество функций Ляпунова для нелинейных систем второго и третьего порядков. Рассмотрен случай, когда нелинейности зависят от двух координат точек фазового пространства. Исследуется также проблема построения векторных функций Ляпунова для сложных систем.

Для понимания материала необходимо знать курс математики в объеме втузовской программы.

Книга может быть рекомендована всем интересующимся конкретными приложениями теории устойчивости.

Библ. назв. 7

Евгений Алексеевич Барбашин

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

М., 1970 г., 240 стр.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 25/XI 1969 г. Подписано к печати 25/V 1970 г. Бумага № 1 84×108 1/32. Физ. печ. л. 7,5. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 11,8. Тираж 9500 экз. Т-07897. Цена книги 74 коп. Заказ № 3305

«Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

2-2-3
46-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод функций Ляпунова является одним из наиболее эффективных методов исследования систем автоматического управления.

Значение этого метода далеко не исчерпывается возможностью установления факта устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. Удачно построенная функция Ляпунова для конкретной нелинейной системы автоматического управления позволяет решить целый комплекс задач, имеющих важное прикладное значение. К таким задачам относятся: оценки изменения регулируемой величины, оценка времени протекания переходного процесса (времени регулирования), оценка интегральных критериев качества регулирования и т. д.

С помощью функций Ляпунова можно оценить область притяжения, т. е. многообразие всех начальных возмущений, исчезающих во времени, получить оценку влияния постоянно действующих возмущений. Знание функции Ляпунова позволяет решать задачи устойчивости в «большом», т. е. оценивать область начальных возмущений, не выходящих с течением времени за пределы заданной заранее области. С помощью функций Ляпунова можно решать также проблему существования или отсутствия периодических решений. Функции Ляпунова широко используются и в теории оптимального управления.

Проблема обращения теорем об устойчивости А. М. Ляпунова была одной из самых трудных и интересных проблем рассматриваемой теории. Однако методы построения функций Ляпунова, разработанные для получения необходимых условий устойчивости и неустойчивости, хотя и позволили установить факт существования таких функций, но не были настолько эффективными, чтобы ими можно было воспользоваться при исследовании конкретных систем.

Следует заметить, что способ построения функций Ляпунова для линейных автономных систем был указан еще самим А. М. Ляпуновым. При наличии свойства асимптотической устойчивости у системы линейного приближения легко строится функция Ляпунова в достаточно малой окрестности положения равновесия соответствующей нелинейной системы.

Проблему построения функций Ляпунова в заданной области фазового пространства нелинейной системы нельзя считать в настоящее время полностью решенной. Имеется лишь некоторый набор приемов, дающих в ряде случаев положительный результат. Описанию этих приемов и посвящена предлагаемая вниманию читателя книга.

В самом начале работы над книгой автор предполагал создать справочник, в котором были бы перечислены все наиболее интересные функции Ляпунова. В процессе работы пришлось отказаться от этого замысла, так как обилие примеров грозило затопить ведущие идеи описываемых методов.

Почти все приводимые в книге функции Ляпунова привлекаются для формулировки достаточных условий асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях (устойчивости в целом). Однако главная цель монографии состоит не в формулировке таких условий, а в том, чтобы продемонстрировать на конкретных примерах существующие в настоящее время приемы построения функций Ляпунова.

В первой главе, имеющей вводный характер, даны основы метода функций Ляпунова, главным образом, для автономных систем. Здесь, в частности, приводятся теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости, в формулировке которых отсутствует требование знакоопределенности производной функции Ляпунова. Теоремы указанного типа, как будет видно из дальнейшего изложения, являются наиболее удобными при решении задач устойчивости в большом.

Вторая глава посвящена линейным системам. Здесь рассматриваются вопросы построения функций Ляпунова в виде квадратичных форм. Даются методы оценки решений и методы вычисления интегральных квадратичных критериев качества регулирования. Здесь же дано краткое изложение вопроса построения функций Ляпунова для линейных интегро-дифференциальных уравнений. Для полноты изложения следовало бы рассмотреть аналогичный вопрос и для уравнений с запаздываниями, однако этот материал исчерпывающе изложен в монографии [53] и в статье [99].

В третьей главе, посвященной нелинейным системам, показано на примере, как с помощью функций Ляпунова можно оценить область притяжения решения нелинейных систем, время регулирования, а также приводятся некоторые общие свойства функций Ляпунова и дано общее описание методов построения этих функций. В этой же главе изложена методика построения векторных функций Ляпунова для сложных систем, подсистемы которых связаны между собой линейной и нелинейной зависимостью.

В четвертой главе дается понятие о методах построения функций Ляпунова, развитых в теории абсолютной устойчивости. Однако здесь в основном рассмотрены только основные и простейшие критические случаи, когда матрица линейной части системы имеет один или (в случае системы прямого управления) два нулевых собственных значения. Весь этот материал привлечен, главным образом, для полноты описания. Читателей, желающих более подробно познакомиться с развиваемой здесь теорией, следует адресовать к монографиям [2], [63], [61], [66].

В пятой главе строятся функции Ляпунова для некоторых нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков. Наибольший интерес здесь представляют рассуждения, снимающие и ослабляющие ограничения, наложенные на поведение функции Ляпунова в бесконечности.

В шестой главе приведены функции Ляпунова для нелинейных систем третьего порядка с одной, двумя и тремя нелинейностями. Здесь в основном изложены результаты Н. Н. Красовского, В. А. Плисса, А. П. Тузова.

В последней, седьмой, главе строятся функции Ляпунова для систем третьего порядка с нелинейностью, зависящей от двух координат точек фазового пространства.

Автор приносит свою глубокую благодарность А. М. Лётову за ценные замечания и советы и И. В. Гайшуну, проверившему все выкладки и взявшему на себя нелегкий труд изложения материала двух последних глав книги.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Определение устойчивости. Вывод уравнений возмущенного движения

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.1)$$

Предположим, что правые части системы (1.1), т. е. функции X_i (x_1, x_2,..., x_n, t), непрерывны в некоторой открытой области D, которая может совпадать со всем пространством. Предположим, кроме того, что функции X_i (x_1, x_2,... ..., x_n, t) удовлетворяют в любой замкнутой области G, лежащей в D, условиям Липшица по переменным x_1, x_2,... ..., x_n. Известная теорема гарантирует в этом случае существование единственного решения $x_i = x_i$ (t, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), $i = 1$, 2,..., n, удовлетворяющего начальным условиям x_i (t_0, x_1^0, x_2^0,..., x_n^0) $= x_i^0$.

Правые части системы (1.1) мы будем трактовать в дальнейшем как проекции переменного вектора скорости X(X_1, X_2,..., X_n), а величину t — как время. Тогда система (1.1) задает закон движения начальной точки M (x_1^0, x_2^0,... ...,x_n^0, t) ($n + 1$)-мерного фазового пространства по траектории $x_i = x_i$ (t, x_1^0, x_2^0,..., x_n^0).

В дальнейшем систему (1.1) мы часто будем записывать в векторной форме, т. е. в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t). \qquad (1.2)$$

Решением этой системы будем считать векторную функцию x (t) с проекциями x_1 (t), x_2 (t),..., x_n (t).

Через $\|x\|$ обозначим норму вектора x. В простейшем случае норма вектора совпадает с евклидовой длиной вектора, т. е. определяется по формуле

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Норма может быть определена и другими способами, например,

$$\|x\| = \max_i |x_i|,$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Очевидно, введение нормы в фазовом пространстве дает возможность ввести понятие близости точек пространства и. следовательно, понятие предельного перехода. Легко видеть, что если последовательность векторов x^m сходится к вектору x в смысле одной из указанных норм, то она сходится и в смысле любых двух других норм. Принято говорить в этом случае, что указанные нормы *топологически эквивалентны*.

В дальнейшем нам понадобится понятие нормы матрицы. Допустим, в конечномерных линейных пространствах R_1 и R_2 введены понятия нормы вектора и пусть матрица T осуществляет линейное преобразование пространства R_1 в пространство R_2. Таким образом, имеем $y = Tx$, где $x \in R_1$, $y \in R_2$. Тогда по определению *нормой матрицы* T будем называть наименьшее положительное число α, для которого справедливо неравенство

$$\|Tx\|_{R_2} \leqslant \alpha \|x\|_{R_1}.$$

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, t). \tag{1.3}$$

Выделим некоторое движение $y = f(t)$ системы (1.3) и назовем его *невозмущенным* движением. Обозначим через $y(t)$ любое другое решение системы (1.3), определяемое начальными условиями $y(t_0) = y_0$.

Невозмущенное движение назовем *устойчивым в смысле Ляпунова, если для всякого* $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$

такое, что из неравенства $\|y(t_0) - f(t_0)\| < \delta$ следует при всех $t \geqslant t_0$ неравенство $\|y(t) - f(t)\| < \varepsilon$.

Движение $y = f(t)$ называется *асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова*, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если существует такое положительное число h, что при $\| y(t_0) - f(t_0) \| < h$ будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} \| y(t) - f(t) \| = 0. \tag{1.4}$$

Если решение $y(t)$ стремится к $f(t)$ при $t \to \infty$ равномерно по отношению к t_0, то асимптотическая устойчивость называется *равномерной относительно* t_0. Если равномерность стремления к пределу имеет место по отношению к начальным условиям $y(t_0)$, то говорят, что решение $y = f(t)$ *равномерно асимптотически устойчиво по отношению к начальным условиям*. Если система (1.3) автономна, т. е. правые части не зависят от t, то асимптотическая устойчивость будет всегда равномерной относительно начальных данных. Этот факт был установлен в работе [162].

Если движение $y = f(t)$ устойчиво по Ляпунову и соотношение (1.4) справедливо для решений $y(t)$, определяемых любыми начальными данными, то говорят, что движение $y = f(t)$ *асимптотически устойчиво при любых начальных данных* или *асимптотически устойчиво в целом*.

Проведем в системе (1.3) замену переменных $x = y - f(t)$, новая система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = Y(x + f(t), t) - Y(f(t), t).$$

Вводя обозначение $X(x, t) = Y(x + f(t), t) - Y(f(t), t)$, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{1.5}$$

где $X(0, t) = 0$ при $t \geqslant t_0$.

Система (1.5) определяет *дифференциальные уравнения возмущенного движения*. Движение $y = f(t)$ перешло при рассматриваемой замене переменных в положение равновесия $x = 0$ новой системы. Задача устойчивости движения $y = f(t)$ переходит, таким образом, в задачу устойчивости нулевого решения $x = 0$ системы (1.5).

Сформулируем теперь определение устойчивости нулевого решения $x = 0$ системы (1.5).

Решение $x = 0$ системы (1.5) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если для любого положительного числа ε можно указать положительное число δ такое, что из неравенства $\|x(t_0)\| < \delta$ следует при $t > t_0$ неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$. Если же, кроме того, всякое решение $x(t)$, начальные данные которого определяются условием $\|x(t_0)\| < h$, обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова*. Аналогично вводятся понятия *равномерной асимптотической устойчивости и устойчивости в целом*.

§ 2. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости

1. Рассмотрим функцию $v(x_1, \ldots, x_n)$, определенную в фазовом пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, непрерывную в некоторой области D, включающей в себя начало координат. Предположим также, что функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ обладает в области D непрерывными частными производными.

Функцию $v(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *определенно положительной* в области D, если всюду в области D, кроме точки $O(0, 0, \ldots, 0)$, имеет место неравенство $v > 0$. Если же выполняется неравенство $v < 0$, то функция v называется *определенно отрицательной*. В том и другом случае функция может называться также *знакоопределенной*.

Если в области D всюду имеет место неравенство $v \geqslant 0$ или неравенство $v \leqslant 0$, то функция v называется *знакопостоянной*, причем в первом случае функция v может быть также названа *знакоположительной*, а во втором — *знакоотрицательной*.

Если функция v принимает в области D значения как положительного знака, так и отрицательного, то в этом случае v назовем *знакопеременной* функцией. Например, функция $v = x^2 + y^2 - z^2$ будет знакопеременной функцией в пространстве переменных x, y, z, а функция $v = x^2 + y^2 + z^2$ — определенно положительной в этом пространстве. Функция $v = x^2 + y^2$ будет, однако, знакопостоянной в пространстве переменных x, y, z (так как она обращается в нуль на оси Oz) и знакоопределенной в пространстве переменных x, y.

Чаще всего мы будем иметь дело только с квадратичными формами переменных $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, любую квадратичную форму можно записать в виде

$$v = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k, \text{ где } b_{ik} = b_{ki}.$$

Составим матрицу коэффициентов этой формы

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} \ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots\ldots b_{nn} \end{Vmatrix}$$

и рассмотрим определители

$$\Delta_1 = b_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{k1} \ldots b_{kk} \end{vmatrix},$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Если имеют место неравенства $\Delta_k > 0$ при $k = 1, \ldots, n$, то форма v будет определенно положительной.

Справедлива и обратная теорема, т. е. условия $\Delta_k > 0$, называемые *критерием Сильвестра* (см. [31]), являются необходимыми и достаточными для определенной положительности формы v. Из критерия Сильвестра легко выводится необходимое и достаточное условие определенной отрицательности формы v. Это условие записывается в виде неравенств

$$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 < 0, \ldots,$$

т. е. определители Δ_k должны последовательно чередовать знак, причем знак Δ_1 должен быть отрицательным.

Заметим, что любая квадратичная форма v удовлетворяет неравенству

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant v(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad (2.0)$$

где λ_1, λ_n — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы B.

В дальнейшем мы будем изучать поведение функций $v(x_1, \ldots, x_n)$ вдоль траекторий рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и на основании этого изучения будем делать вывод о поведении траекторий этой системы. Функции $v(x_1, \ldots, x_n)$, имеющие указанное сейчас назначение, принято называть *функциями Ляпунова*.

Сформулируем теорему о структуре поверхности уровня знакоопределенной функции Ляпунова.

Назовем поверхность $v = c$ *замкнутой относительно точки O*, если на любой непрерывной линии, соединяющей точку O с точкой границы области D, имеется, по крайней мере, одна точка, в которой $v = c$.

Теорема 2.1. *Если функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ знакоопределенна, то существует такое положительное число h, что все поверхности уровня $v = c$, где $|c| < h$, являются замкнутыми относительно точки O поверхностями.*

Для доказательства теоремы предположим для определенности $v > 0$ и рассмотрим шар I_R с центром в начале координат и радиусом, равным R. Предположим, что функция v определена на этом шаре (включая и его границу S_R). Таким образом, в качестве области D мы возьмем шар $\bar{I}_R = I_R \cup S_R$. Так как функция v непрерывна, то на замкнутом ограниченном множестве S_R — границе шара, эта функция достигает свое минимальное значение, которое обозначим через h.

Соединим теперь точку O с какой-либо точкой P, лежащей на границе S_R, некоторой непрерывной линией $x = x(s)$. Так как в точке O функция v равна нулю, а $v(P) \geqslant h$, и так как функция v меняется непрерывно вдоль непрерывной кривой $x = x(s)$, то функция v необходимо в некоторой точке этой кривой примет значение $v = c$.

Таким образом, внутри шара $\bar{I}_R$ лежит замкнутая часть поверхности $v = c$; не исключается возможность, что другие части поверхности расположены за пределами этого шара. Такая возможность реализуется, например, для функции

$$v = \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{y^2}{(1 + y^2)^2}.$$

С другой стороны, функция $v = y^2 + \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ даст нам пример функции, линии уровня которой $y^2 + \dfrac{x^2}{1 + x^2} = c$ при $c \geqslant 1$

неограничены, а при $0 < c < 1$ замкнуты и ограничены.

2. Дадим теперь ряд достаточных признаков устойчивости, в основе которых лежит понятие функции Ляпунова.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.1)$$

правые части которой $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица в некоторой области D фазового пространства, включающей точку $O(0, \ldots, 0)$ вместе с ее некоторой окрестностью. Предположим выполненными условия $X_i(0, \ldots, 0) = 0$, тогда точка O будет *особой точкой* системы (2.1) или, что то же, *положением равновесия* этой системы. Правые части системы (2.1) в рассматриваемом случае мы полагаем не зависящими явно от t, т. е. считаем систему автономной.

Теорема 2.2 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для системы* (2.1) *существует в области D знакоопределенная функция v, производная которой по времени $\dot{v}$, взятая в силу системы* (2.1), *является знакопостоянной функцией, знака, противоположного знаку функции v, то положение равновесия устойчиво в смысле Ляпунова.*

Доказательство. Будем обозначать через I_ε внутренность шара радиуса ε с центром в точке O, через S_ε — сферическую поверхность этого шара.

Пусть, для определенности, v будет определенно положительной функцией. Предположим ε таким, что I_ε лежит в области D, и пусть l — минимальное значение функции v на сфере S_ε. Выберем положительное число δ таким, чтобы в точках шара I_δ выполнялось неравенство $v < l$, и пусть x_0 — произвольная точка из I_δ. Рассмотрим траекторию $x = x(t, x_0)$, выходящую из точки x_0, и допустим, что она пересечет сферу S_ε в некоторой точке $x(t_1)$. Так как

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \leqslant 0,$$

то функция v не возрастает вдоль траектории, и поэтому будем иметь $v(x(t_1)) \leqslant v(x_0) < l$. С другой стороны, так как l — минимум функции v на S_ε, то должно выполняться неравенство $v(x(t_1)) \geqslant l$. Полученное противоречие доказывает, что точка $x(t)$ не выйдет с ростом времени за пределы сферы S_ε. Теорема доказана.

Покажем теперь, как можно использовать схему доказательства теоремы для оценки области допустимых возмущений (см. [34]). *Областью допустимых возмущений* данной области G называется такая область E, что все траектории, выходящие из ее точек, не выходят за пределы области G. В данном случае, очевидно, область I_δ будет областью допустимых возмущений для области I_ε. Таким образом, для определения области допустимых возмущений необходимо найти минимум l функции v на границе области G и в качестве области E взять область, в которой выполняется неравенство $v < l$.

Теорема 2.3 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений* (2.1) *существует знакоопределенная функция* v, *полная производная которой по времени, найденная в силу системы* (2.1), *будет также знакоопределенной, знака, противоположного с* v, *то положение равновесия будет асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Пусть для определенности функция v будет определенно положительной функцией. Пусть число R таково, что $\bar{I}_R$ лежит в области D.

Так как из предыдущей теоремы следует, что положение равновесия будет устойчивым, то существует такое $r > 0$, что если точка x_0 лежит в I_r, то точка $x(t, x_0)$ траектории, выходящей из x_0, не выйдет из шара I_R при $t > 0$. Пусть ε — положительное как угодно малое число. Согласно предыдущей теореме снова можем указать число $\delta > 0$ такое, что из $x_0 \in I_\delta$ будет следовать $x(t, x_0) \subset I_\varepsilon$ при $t > 0$. Пусть точка x_0 лежит в I_r. Предположим, что точка $x(t, x_0)$ не попадет при $t > 0$ в шар I_δ. Тогда полутраектория $x(t, x_0)$ при $t > 0$ будет лежать в шаровом слое $\bar{I}_R \setminus I_\delta$. Так как в этом шаровом слое имеем $\dot{v} < 0$ всюду, то существует постоянная $m > 0$ такая, что будем иметь $\dot{v} < -m$ во всех точках указанного слоя. Из равенства

$$v(x(t, x_0)) = v(x_0) + \int_0^t \dot{v}\,dt$$

мы немедленно выводим неравенство

$$v(x(t, x_0)) < v(x_0) - mt. \tag{2.2}$$

Если t растет неограниченно, то правая часть неравенства становится отрицательной, что и приводит к противоречию, так как в левой части этого неравенства стоит значение функции Ляпунова, которое не может стать отрицательным. Таким образом, чтобы уничтожить противоречие, мы должны допустить, что точка $x(t, x_0)$ попадет в некоторый момент времени в шар I_δ, но число δ выбрано так, что, попав в I_δ, точка $x(t, x_0)$ не сможет уже выйти за пределы I_ε. Так как ε было взято произвольным сколь угодно малым числом, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$. Теорема доказана.

Покажем теперь, как можно использовать схему доказательства последней теоремы для оценки времени переходного процесса (см. [34]). *Временем переходного процесса* назовем наименьшее время $t(x_0, \varepsilon)$, необходимое для того, чтобы точка x_0, двигаясь по траектории $x(t, x_0)$, попала в заданную окрестность I_ε точки O и при $t > t(x_0, \varepsilon)$ там оставалась.

Пусть число l будет минимумом функции v на сфере S_δ. Если $x(t_0, x_0) \in I_\delta$, то при $t \geqslant t_0$ будем иметь $x(t, x_0) \subset \subset I_\varepsilon$. Но, очевидно, число t_0 можно найти из равенства $v(x_0) - mt_0 = l$, так как при $t_0 = \frac{v(x_0) - l}{m}$ левая часть неравенства (2.2) заведомо будет меньше l. Таким образом, получаем оценку

$$t(x_0, \varepsilon) \leqslant \frac{v(x_0) - l}{m}. \tag{2.3}$$

В теории регулирования время переходного процесса часто называют *временем регулирования*.

Как первая, так и вторая теорема Ляпунова имеет простой геометрический смысл. Неравенство

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i < 0$$

означает, что траектории системы (2.1) направлены в сторону убывания функции v, т. е. пересекают поверхности уровня этой функции в направлении, противоположном направлению вектора grad v.

§ 3. Теоремы об асимптотической устойчивости в целом

1. Рассмотрим сначала некоторые предельные свойства траекторий.

Определение 3.1. *Точка y фазового пространства называется ω-предельной для точки x_0, если существует последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$. Если же $t_n \to -\infty$, то точка $y = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$ называется α-предельной точкой точки x_0.*

Так, например, асимптотически устойчивое положение равновесия является ω-предельной точкой для всех точек, лежащих в достаточно малой окрестности этого положения. Точки предельного цикла, на который навиваются спиралевидные кривые, также являются ω-предельными для точек, принадлежащих этим кривым. В обоих примерах ω-предельные точки составляют целые траектории (в первом случае — особая точка, во втором — предельный цикл). Этот факт не случаен. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Множество ω-предельных (α-предельных) точек данной точки есть замкнутое множество, состоящее из целых траекторий.*

Прежде всего заметим, что замкнутость множества ω-предельных точек есть следствие одной известной теоремы из теории множеств. Эта теорема утверждает, что предельная точка для предельных точек множества снова является предельной точкой этого множества. Допустим теперь, что точка y является ω-предельной точкой для точки x_0, и покажем, что точки $x(\tau, y)$ (число τ может иметь как положительный, так и отрицательный знак) также является ω-предельной для точки x_0. В самом деле, если $y = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$, то из свойства непрерывности $x(t, x_0)$ как функции x_0 получим

$$x(\tau, y) = \lim_{n\to\infty} x(t_n + \tau, x_0).$$

Это и означает, что точка $x(\tau, y)$ является ω-предельной точкой точки x_0, т. е. все точки траектории, выходящей из y, являются ω-предельными точками для x_0. Теорема доказана.

Лемма 3.1. *Если существует функция Ляпунова v, ограниченная снизу (сверху) в области D, и если производная по времени этой функции знакоотрицательна (знакоположительна) в этой области, то все ω-предельные точки данной траектории, не выходящей при $t \to \infty$ из области D, лежат на одной и той же поверхности уровня функции v.*

В самом деле, пусть точка x_0 лежит в области D, и пусть точка $y = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$ является ω-предельной для x_0. Прежде всего заметим, что функция $v(x(t, x_0))$ при $t \to \infty$ не возрастает и ограничена снизу, следовательно, существует предел $v_0 = \lim\limits_{t\to\infty} v(x(t, x_0))$. В силу непрерывности функции v имеем также $v(y) = \lim\limits_{n\to\infty} v(x(t_n, x_0))$, но так как $v(x(t, x_0))$ монотонно меняется, то имеем, очевидно, $v(y) = v_0$, что и доказывает лемму.

Теорема 3.2. *Если существует определенно положительная функция v такая, что $\dot{v} \leqslant 0$, причем множество $\dot{v} = 0$ не содержит целых траекторий, кроме точки O, то положение равновесия асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.*

Доказательство. Очевидно, положение равновесия, точка O, устойчиво в смысле Ляпунова, так как выполняются условия теоремы 2.2. В силу устойчивости существует для заданного положительного числа ε положительное число δ такое, что если $x_0 \in I_\delta$, то $x(t, x_0) \subset I_\varepsilon$ при $t > 0$.

Так как траектория $x(t, x_0)$ не выходит при $t > 0$ за пределы шара $\bar{I}_\varepsilon$, то множество Ω ω-предельных точек точки x_0 не пусто. Если Ω совпадает с точкой O, то теорема доказана, так как будем иметь $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$. Допустим, что множество Ω содержит, по крайней мере, одну точку y, отличную от точки O. Из леммы 3.1 следует что

$$v(y) = v(x(t, y)) = \lim_{t\to\infty} v(x(t, x_0)) \neq 0.$$

Таким образом, все ω-предельные точки точки x_0 лежат на одной и той же поверхности уровня $v = v(y)$. Из теоремы 3.1 следует, что множество Ω замкнуто и состоит из целых траекторий. Таким образом, так как v вдоль этих траекторий остается постоянной, то имеем $\dot{v} = 0$ на всем множестве Ω. По условию теоремы множество Ω должно содержаться в множестве $\dot{v} = 0$, но множество $\dot{v} = 0$ не содержит целых траекторий. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что из теоремы 3.2 следует справедливость теоремы 2.3, таким образом, теорема 3.2 является усилением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема 3.2 позволяет решить вопрос об асимптотической устойчивости, с помощью функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную. В конкретных примерах именно такие функции Ляпунова удается чаще всего построить для нелинейных систем.

Следует заметить, что требование теоремы об отсутствии на множестве $\dot{v} = 0$ целых траекторий легко проверяется. В самом деле, если, например, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ является уравнением поверхности $\dot{v} = 0$, то выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i \neq 0 \qquad (3.0)$$

на этой поверхности является, очевидно, достаточным условием отсутствия целых траекторий на множестве $\dot{v} = 0$, так как при выполнении условия (3.0) интегральные кривые «прошивают» поверхность $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

2. Рассмотрим теперь условия, обеспечивающие устойчивость нулевого положения равновесия системы (2.1) при любых начальных возмущениях.

Напомним, что нулевое решение системы (2.1) называется *устойчивым в целом* или *устойчивым при любых начальных возмущениях*, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если всякое другое решение $x(t)$ системы таково, что $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Функцию Ляпунова v назовем *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A существует положительное число R такое, что вне сферы $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R$ имеет место неравенство $v > A$.

Так, например, определенно положительная квадратичная форма будет бесконечно большой, так как в силу (2.0) $\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant v$, где $\lambda_1 > 0$.

Функция $v = x^2 + \frac{y^2}{1+y^2}$ определенно положительная, но не является бесконечно большой, так как при $x = 0$ и $y \to \infty$ функция не стремится к бесконечности.

Поверхности уровня бесконечно большой функции являются ограниченными.

В самом деле, рассмотрим какую-либо поверхность уровня $v = c$. Для данного c можно указать шар радиуса R, вне которого будем иметь $v > c$, и, следовательно, поверхность $v = c$ будет лежать внутри этого шара.

Теорема 3.3 (об асимптотической устойчивости в целом). *Если существует определенно положительная бесконечно большая функция v, имеющая определенно отрицательную производную во всем пространстве, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Эта теорема является частным случаем следующей более общей теоремы.

Теорема 3.4 (теорема Барбашина — Красовского). *Пусть существует бесконечно большая определенно положительная функция v такая, что $\dot{v} \leqslant 0$, причем $\dot{v} = 0$ на множестве, не содержащем целых траекторий (кроме нулевого положения равновесия). Нулевое решение системы (2.1) будет устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка фазового пространства. Из точки x_0 выпустим полутраекторию $x(t, x_0)$, $(t > 0)$. Так как $\dot{v} \leqslant 0$ по условию теоремы, то имеем $v(x(t, x_0)) \leqslant v(x_0)$. Поскольку множество $v(x) \leqslant v(x_0)$ является ограниченным, то полутраектория $x(t, x_0)$ лежит в ограниченной области и, следовательно, имеет ω-предельные точки.

Далее ведем доказательство точно так же, как доказательство теоремы 3.2. Так как существенным моментом в доказательстве является наличие непустого множества ω-предельных точек, вытекающее из ограниченности множества $v(x) \leqslant v(x_0)$, то, очевидно, можно дать и другой вариант теоремы 3.4 (см. [53], стр. 81), в котором не налагаются дополнительные требования на поведение функции v в бесконечности.

Теорема 3.5. *Если существует определенно положительная функция v такая, что $\dot{v}$ знакоотрицательна во всем фазовом пространстве и множество $\dot{v} = 0$*

не содержит целых траекторий, кроме точки O, и если все положительные полутраектории системы (2.1) *ограничены (устойчивы по Лагранжу), то нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Наконец, заметим, что если множество $\dot{v} = 0$ содержит целые траектории, то при выполнении всех прочих условий теорем 3.4 и 3.5 все точки фазового пространства будут асимптотически приближаться с ростом времени к некоторому инвариантному множеству (множеству, состоящему из целых траекторий), лежащему на множестве $\dot{v} = 0$. Это последнее обстоятельство было отмечено Ла-Саллем ([58], стр. 75).

3. В заключение приведем пример, показывающий, что наличие определенно положительной функции v, имеющей определенно отрицательную производную $\dot{v}$ во всем пространстве, не обеспечивает устойчивость в целом (см. [12]).

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ \dot{y} &= -\frac{2y}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Функция $v = \dfrac{x^2}{1+x^2} + y^2$, очевидно, будет определенно положительной, а ее производная, взятая в силу системы (3.1), имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -4\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}\right),$$

т. е. будет определенно отрицательной во всем пространстве.

Рассмотрим теперь кривую

$$y = 2 + \frac{1}{1+x^2}. \tag{3.2}$$

На кривой (3.2) дифференциальные уравнения (3.1) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(4 + \frac{2}{1+x^2}\right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}\right\}$$

откуда получаем выражение для углового коэффициента траектории системы (3.1) в точках кривой (3.2)

$$K_{\text{тр}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2(1+x^2)}\left(\frac{1+\frac{1}{x}\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right)}{1+\frac{1}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2(1+x^2)^2}}\right). \quad (3.3)$$

С другой стороны, угловой коэффициент касательной кривой (3.2) может быть найден по формуле

$$K = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \quad (3.4)$$

Очевидно, при достаточно больших положительных x будем иметь

$$K < K_{\text{тр}}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим, далее, область G, определенную неравенствами $x \geqslant x_0$, $y \geqslant 2+\frac{1}{1+x^2}$, где x_0 настолько большое, что при $x > x_0$ выполняется неравенство (3.5), а также неравенство

$$\frac{2x_0}{(1+x_0^2)^2} < 4.$$

Тогда в точках прямой $x = x_0$ в силу системы (3.1) будем иметь $\dot{x} > 0$ и траектории системы (3.1) не будут выходить из области G, так как они пересекают границу этой области снаружи внутрь.

§ 4. Теоремы о неустойчивости

Рассмотрим теперь теоремы о неустойчивости.

Теорема 4.1 (см. [52]). *Если существует функция v, не являющаяся знакоотрицательной в произвольной окрестности точки O, причем производная $\frac{dv}{dt}$ знакоположительна и не обращается в нуль на множестве, содержащем целые траектории (кроме точки O), то положение равновесия системы (2.1) неустойчиво.*

Для доказательства в произвольно малой окрестности I_δ выберем точку x_0, в которой $v(x_0) = v_0 > 0$, и выберем затем шар I_η, во всех точках которого имеет место неравенство $|v| < v_0$. Допустим теперь, что точка $x(t, x_0)$ не выйдет за пределы некоторого шара $\bar{I}_\varepsilon$. Так как $x(t, x_0)$ не может попасть и в I_η, то эта точка при всех $t > 0$ будет лежать в шаровом слое $\bar{I}_\varepsilon \setminus I_\eta$ и, следовательно, непустое множество Ω ω-предельных точек точки x_0 также будет лежать в этом шаровом слое. Но по лемме 3.1 множество Ω лежит на поверхности $v = c$, а по теореме 3.1 множество Ω является замкнутым и состоит из целых траекторий. Таким образом, на Ω имеем $\dot{v} = 0$, а это противоречит предположению теоремы.

Теорема 4.2 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если существует функция v, имеющая знакоопределенную производную по времени, и такая, что в любой окрестности точки O функция v не является знакопостоянной, знака, противоположного знаку $\dot{v}$, то нулевое решение системы* (2.1) *неустойчиво.*

Если $\dot{v}$ определенно положительна, то теорема 4.2 есть прямое следствие теоремы 4.1. Если же $\dot{v}$ определенно отрицательна, то замена v на $-v$ снова сведет вопрос к применению теоремы 4.1.

Теорема 4.3. *Если существует функция v такая, что ее производная по времени имеет вид*

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + w, \tag{4.1}$$

где λ — положительная постоянная, а w или тождественно обращается в нуль или является знакопостоянной, и если в последнем случае функция v не является в любой окрестности точки O знакопостоянной, знака, противоположного знаку w, то решение системы (2.1) *неустойчиво.*

Полагая для определенности $w \geqslant 0$, в произвольно малой окрестности I_δ выберем точку x_0, в которой $v(x_0) = v_0 > 0$, и покажем, что точка $x(t, x_0)$ с ростом t выйдет за пределы любой окрестности I_ε, в которой выполнены условия теоремы. Рассматривая функции $v(x(t, x_0))$ и $w(x(t, x_0))$ как функции времени, из дифференциального уравнения (4.1) можем определить $v(x(t, x_0))$ по известной формуле Коши

$$v(x(t, x_0)) = \exp(\lambda t)\left[v_0 + \int_0^t w \exp(-\lambda t)\,dt\right].$$

Из условия $w \geqslant 0$ имеем

$$v(x(t, x_0)) \geqslant v_0 \exp(\lambda t).$$

Так как $\lambda > 0$, то с ростом t функция $v(x(t, x_0))$ растет неограниченно, а это значит, что точка $x(t, x_0)$ выйдет за пределы области I_ε.

§ 5. Неавтономные системы

Ниже будут приведены теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости для неавтономной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{5.1}$$

где $X(0, t) = 0$ при любых t.

В качестве функций Ляпунова здесь будут служить функции $v(x, t)$, непрерывно дифференцируемые в некоторой области фазового пространства и обращающиеся в нуль в начале координат.

Функцию $v(x, t) = v(x_1, \ldots, x_n, t)$ назовем *знакопостоянной*, если всюду в области при $t > 0$ имеет место неравенство $v(x, t) \geqslant 0$ (или $v(x, t) \leqslant 0$).

Функция $v(x, t)$ называется *знакоопределенной*, если существует определенно положительная функция $w(x) = w(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что имеет место при $t > 0$ неравенство $v(x, t) \geqslant w(x)$ (или $v(x, t) \leqslant -w(x)$).

Будем говорить, что функция $v(x, t)$ допускает в области *высший предел, бесконечно малый в точке* $x = 0$ (или, просто, *бесконечно малый высший предел*), если существует непрерывная функция $w(x)$, удовлетворяющая условию $|v(x, t)| \leqslant w(x)$ при $t > 0$, $w(0) = 0$.

Теперь теоремы Ляпунова можно сформулировать следующим образом (см. [69]).

Теорема 5.1. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию v, производная которой $\dot{v}$ в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с v или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Теорема 5.2. *Если функция v, удовлетворяя условиям предыдущей теоремы, в то же время допускает* *бесконечно малый высший предел, а производная ее представляет знакоопределенную функцию, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 5.3. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию v, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной $\dot{v}$, причем допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_k, численно сколь угодно малых, ее можно было бы сделать величиною одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Теорема 5.4. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию v, производная которой в силу этих урвнений приводилась бы к виду*

$$\dot{v} = \lambda v + w,$$

где λ — положительная постоянная, а w или тождественно равна нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция v такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_k, сколь угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с w, то невозмущенное движение неустойчиво.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Существование функций Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных систем

1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (1.1), т. е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2}$$

Справедливы следующие утверждения.

1. *Если все корни уравнения* (1.2) *имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво.*

2. *Если среди корней уравнения* (1.2) *есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы* (1.1) *неустойчиво.*

3. *Если уравнение* (1.2) *не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеется часть корней с нулевой вещественной частью, то может иметь место как устойчивость* (*неасимптотическая*), *так и неустойчивость.*

Таким образом, вопрос об устойчивости нулевого решения системы (1.1) сводится к исследованию характера корней уравнения (1.2). Раскрывая определитель (1.2), получим уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1.3)$$

Из коэффициентов полинома $f(\lambda)$ составим матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Здесь полагаем $a_m = 0$, если $m > n$. Рассмотрим определители

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}.$$

Для того чтобы все корни уравнения (1.3) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\Delta_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.4)$$

Это утверждение носит название *теоремы Гурвица*; доказательство теоремы Гурвица имеется, например, в монографии [116]. Условия (1.4) часто называют *условиями Рауза — Гурвица.*

Для уравнения второй степени

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

условия Рауза — Гурвица имеют вид

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

или, что то же самое,

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

Для уравнения третьей степени

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

условия Рауза — Гурвица запишутся в виде

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_3\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

Очевидно, эти условия эквивалентны условиям

$$a_1 > 0,\ a_1 a_2 > a_3,\ a_3 > 0.$$

2. Запишем систему (1.1) в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1.5}$$

и найдем производную квадратичной формы $v = x'Bx$ в силу этой системы. Имеем *)

$$\frac{dv}{dt} = x'(A'B + BA)x. \tag{1.5'}$$

Потребуем теперь, чтобы форма v удовлетворяла уравнению

$$\frac{dv}{dt} = w, \tag{1.6}$$

где $w = x'Cx$ — заданная квадратичная форма.

Сравнивая (1.5′) и (1.6), получим матричное уравнение для определения матрицы B:

$$A'B + BA = C. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) позволяет найти матрицу формы v по заданной матрице формы w. Исследование уравнения (1.7) представляет большой интерес, так как это уравнение позволяет найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы по заданной производной. Уравнение (1.7) ставит в соответствие всякой симметричной матрице B матрицу C, причем это соответствие линейно. Таким образом, в пространстве квадратичных матриц n-го порядка может быть определен линейный оператор $F(B) = A'B + BA$. Задача о разрешимости уравнения (1.7) сводится к задаче определения оператора, обратного оператору F, так как $B = F^{-1}(C)$. Так как оператор F действует в конечномерном пространстве ($\frac{n(n+1)}{2}$ измерений), то для существования обратного оператора необходимо и достаточно, чтобы среди собственных чисел оператора F не было нулевых.

---

*) Здесь x' — означает вектор-строку, A' — матрицу, транспонированную к A.

Теорема 1.1. *Если корни характеристического уравнения системы (1.5) таковы, что $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль ни при каких i, k, то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма w, существует единственная квадратичная форма v, удовлетворяющая уравнению* (1.6).

Доказательство. По определению собственным числом оператора F называется число μ такое, что уравнение $F(B) = \mu B$ имеет в качестве решения ненулевую матрицу B. Покажем теперь, что все собственные числа оператора F исчерпываются числами вида $\lambda_i + \lambda_k$ $(1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n)$, где λ_i — собственные числа матрицы A.

Сначала покажем, что любое число вида $\lambda_i + \lambda_k$ является собственным числом оператора F. В самом деле, обозначим через x^k собственный вектор-столбец матрицы A', соответствующий собственному числу λ_k. Это значит, что справедливо соотношение

$$A'x^k = \lambda_k x^k.$$

Рассмотрим, далее, матрицу

$$B_{ik} = x^i (x^k)' = \left\| \begin{matrix} x_1^i x_1^k & x_1^i x_2^k & \ldots & x_1^i x_n^k \\ x_2^i x_1^k & x_2^i x_2^k & \ldots & x_2^i x_n^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^i x_1^k & x_n^i x_2^k & \ldots & x_n^i x_n^k \end{matrix} \right\|.$$

Имеем, очевидно,

$$F(B_{ik}) = A'x^i (x^k)' + x^i (x^k)' A = \lambda_i x^i (x^k)' + x^i (A'x^k)' =$$
$$= (\lambda_i + \lambda_k) B_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда и следует требуемый результат.

Если теперь все величины $\lambda_i + \lambda_k$ различны между собой, то общее количество таких величин равно $N = \frac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, так как симметричная матрица тоже задается N элементами, то общее количество различных собственных чисел оператора F не превышает N. Таким образом, в этом случае все собственные числа оператора F исчерпываются числами вида $\lambda_i + \lambda_k$ и, так как среди них нет равных нулю, оператор F имеет обратный оператор, что и доказывает утверждение теоремы.

Если же среди чисел $\lambda_i + \lambda_k$ есть одинаковые, то, незначительно изменив элементы матрицы A, можно добиться, чтобы все эти числа, изменившись как угодно мало, снова стали различными, что и дает возможность использовать предыдущие рассуждения. Теорема доказана.

3. Докажем теперь ряд теорем о существовании функций Ляпунова для линейных систем. Приводимые ниже результаты были получены А. М. Ляпуновым, который строил функции в виде однородных форм m-го порядка. Однако мы, ограничиваясь для простоты квадратичными формами, несколько усиливаем формулировки А. М. Ляпунова. Это усиление состоит в том, что, рассматривая уравнения (1.6), мы отказываемся от требования знакоопределенности функции w (см. [5]). Алимов -61г.

Теорема 1.2. *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то какова бы ни была наперед заданная знакоотрицательная квадратичная форма w, обращающаяся в нуль на множестве M, не содержащем целых траекторий, кроме точки O, существует одна и только одна квадратичная форма v, удовлетворяющая уравнению* (1.6), *и эта форма обязательно будет определенно положительной.*

В самом деле, по теореме 1.1, так как величина $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль, существует форма v, удовлетворяющая уравнению (1.6). Остается показать, что v является определенно положительной. Допустим, в некоторой точке $x_0\,(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ выполнено неравенство $v\,(x_1^0, \ldots, x_n^0) < 0$. В силу однородности функции v будем иметь $v\,(kx_1^0, \ldots, kx_n^0) < 0$ при любом положительном k; это означает, что в любой окрестности точки O имеются точки, в которых v отрицательна. Множество M, где $w = 0$, не содержит целых траекторий. Из теоремы 4.1 гл. I (при замене v на $-v$ и w на $-w$) следует неустойчивость положения равновесия, что противоречит предположению, так как при выполнении условий теоремы обеспечивается асимптотическая устойчивость. Допустим теперь, что в некоторой точке имеем $v\,(x_0) = 0$. Так как $\dot{v} \leqslant 0$ и вдоль траектории $x\,(t, x_0)$ не может выполняться тождественное равенство $\dot{v} = 0$, то найдется точка $y = x\,(t, x_0)$, в которой $v\,(y) < 0$, что снова приводит к противоречию.

Таким образом, всюду, кроме точки O, имеем $v\,(x_0) > 0$, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а 1.3. *Если среди корней характеристического уравнения системы* (1.1) *имеется хотя бы один с положительной вещественной частью и если ни при каких i, k величина $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль, то, какова бы ни была знакоположительная форма w, обращающаяся в нуль на множестве M, не содержащем целых траекторий, существует одна и только одна квадратичная форма v, удовлетворяющая уравнению* (1.6), *причем эта форма не будет знакоотрицательной.*

В самом деле, по теореме 1.1 форма v существует. Остается лишь доказать, что форма v принимает положительные значения. Допустим, что всюду, кроме точки O, выполнено неравенство $v < 0$, но в таком случае мы находимся в условиях применения теоремы 3.2 гл. I (снова заменяя v на $-v$ и w на $-w$), из которой следует, что нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Однако из предположения теоремы о корнях характеристического уравнения системы (1.1) мы имеем неустойчивость. Если же в какой-либо точке $v(x_0) = 0$, то, так как $\dot{v}$ не может равняться нулю вдоль всей траектории точки x_0, приходим к заключению, что на этой траектории найдется точка y, в которой $v(y) > 0$, что согласуется с утверждением теоремы. Теорема доказана, так как последняя возможность существования точек, в которых $v(y) < 0$, и является утверждением нашей теоремы.

З а м е ч а н и е. Покажем, что теорема 1.3 становится неверной, если не выполнено условие $\lambda_i + \lambda_k \neq 0$. Рассмотрим случай, когда среди корней уравнения (1.2) есть нулевой корень. Тогда определитель $|A|$, составленный из коэффициентов системы (1.1), равен нулю, и система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

будет иметь ненулевое решение $Q(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Какова бы ни была функция v, получим в точке Q

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k^0 = 0,$$

поэтому $\dot{v}$ не будет знакоопределенной, более того, множество, где $\dot{v}=0$, содержит целые траектории, так как точка Q является особой.

Теорема 1.4. *Если среди корней характеристического уравнения системы* (1.1) *существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то какова бы ни была знакоположительная квадратичная форма w, обращающаяся в нуль на множестве M, не содержащем целых траекторий, всегда найдется квадратичная форма v и положительное число α такие, что будет выполняться соотношение*

$$\frac{dv}{dt}=\alpha v+w, \tag{1.8}$$

причем функция v не будет знакоотрицательной.

Для доказательства рассмотрим наряду с системой (1.5) систему

$$\frac{dx}{d\tau}=\left(A-\frac{\alpha}{2}E\right)x. \tag{1.9}$$

Характеристическое уравнение этой системы будет иметь вид

$$\left|A-\left(\frac{\alpha}{2}+\rho\right)E\right|=0. \tag{1.10}$$

Очевидно, корни характеристического уравнения системы (1.5) и системы (1.9) связаны между собой соотношением $\lambda_i=\rho_i+\frac{\alpha}{2}$. Выберем α настолько малым, чтобы выполнялись условия:

1) из $\operatorname{Re}\lambda_i>0$ следует $\rho_i>0$.

2) $\rho_i+\rho_k\neq 0$ ни при каких целых i и k.

Очевидно, первому условию легко удовлетворить, выбирая α достаточно малым. Замечая, что $\rho_i+\rho_k=\lambda_i+\lambda_k-\alpha$, можно выбрать α, не совпадающим ни с одним из конечного множества чисел $\lambda_i+\lambda_k$, следовательно, можно удовлетворить и второму условию.

По теореме 1.3 существует функция v, принимающая положительные значения и такая, что в силу системы (1.9) $dv/d\tau=w$. Так как

$$\frac{dv}{d\tau}=\left[\left(A-\frac{\alpha}{2}E\right)x\right]'\operatorname{grad}v=[Ax]'\operatorname{grad}v-\frac{\alpha}{2}x'\operatorname{grad}v$$

и так как по теореме Эйлера об однородных функциях

$$x' \operatorname{grad} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} x_i = 2v,$$

то

$$w = \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt} - \alpha v,$$

где через dv/dt обозначена производная функции v, взятая в силу системы (1.5). Таким образом, соотношение (1.8) доказано.

§ 2. Оценки решений линейных систем. Вычисление интегральных критериев качества регулирования

1. Введем сначала одно важное неравенство из теории квадратичных форм. Рассмотрим квадратичную форму $v = x'Bx$ и поставим задачу отыскания наименьшего и наибольшего значений этой квадратичной формы на сфере $x'x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$. Согласно известным правилам решения задач на относительный экстремум следует искать экстремум квадратичной формы $v - \lambda(x'x - r^2)$.

В точках экстремума должно выполняться условие

$$\operatorname{grad} w = \operatorname{grad} v - 2\lambda x = 0.$$

Так как $\operatorname{grad} v = 2Bx$, то необходимые условия экстремума приводят нас к уравнению

$$Bx = \lambda x. \tag{2.1}$$

Это уравнение имеет ненулевое решение только в том случае, когда λ является корнем уравнения

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{2.2}$$

Так как матрица B является симметричной, то ее собственные значения вещественны. Обозначим через λ_1 наименьшее собственное число матрицы B, а через λ_n — ее наибольшее собственное число.

Умножая правую и левую части уравнения (2.1) на x, получим

$$v = (Bx)'x = \lambda x'x, \quad \text{т. е.} \quad v = \lambda r^2.$$

Таким образом, беря в качестве λ наибольшее и наименьшее собственные числа, выводим неравенство

$$\lambda_1 r^2 \leqslant v \leqslant \lambda_n r^2, \tag{2.3}$$

справедливое для всех точек пространства.

Принимая $r^2 = 1$, приходим к выводу, что λ_1 есть минимальное значение функции v на единичной сфере, а λ_n — максимальное значение.

2. Перейдем теперь к задаче оценки решений системы линейных дифференциальных уравнений (см. [115]). Четаев

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.5) и предположим, что все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. По теореме 1.2 существует определенно положительная квадратичная форма $v = x'Bx$ такая, что в силу системы (1.5) будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{2.4}$$

С другой стороны, из неравенства (2.3) следует неравенство

$$-\frac{v}{\lambda_n} \geqslant -r^2 \geqslant -\frac{v}{\lambda_1}, \tag{2.5}$$

где $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, λ_1, λ_n — соответственно наименьшее и наибольшее собственное число формы v. Таким образом, из соотношений (2.4) и (2.5) следует неравенство

$$-\frac{v}{\lambda_1} \leqslant \frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{v}{\lambda_n},$$

которое можно записать в виде

$$-\frac{dt}{\lambda_1} \leqslant \frac{dv}{v} \leqslant -\frac{dt}{\lambda_n}. \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6) от нуля до t и обозначая через v_0 значение функции v в начальной точке траектории x_0, получим

$$v_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \leqslant v \leqslant v_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right).$$

Используя неравенство (2.5), получаем окончательную оценку вдоль решения системы (1.5)

$$\frac{v_0}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \leqslant r^2 \leqslant \frac{v_0}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right). \qquad (2.7)$$

3. Неравенства (2.7) могут быть использованы для оценки времени переходного процесса.

В самом деле, разрешая относительно t уравнение

$$\frac{v_0}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) = \varepsilon^2,$$

получим

$$t = -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}.$$

Таким образом, время переходного процесса $t(x_0, \varepsilon)$, т. е. время, необходимое для того, чтобы величина r стала и оставалась в дальнейшем меньше ε, удовлетворяет неравенству

$$t(x_0, \varepsilon) \leqslant -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}.$$

4. Покажем теперь, что если нулевое положение равновесия системы (1.5) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то оно будет асимптотически устойчивым в целом.

В самом деле, нулевое решение будет асимптотически устойчивым только тогда, когда все корни характеристического уравнения системы (1.5) имеют отрицательные вещественные части. По теореме 1.2 для любой определенно отрицательной квадратичной формы w можно указать определенно положительную форму v такую, что имеет место $\dot{v} = w$.

Так как форма v в силу неравенств (2.3) является бесконечно большой, то мы находимся в условиях применения теоремы 3.4 гл. I.

5. Решим теперь следующую задачу. Для траектории (t, x_0), определяемой системой (1.5), найти величину

$$J = \int_0^\infty w(x(t, x_0))\,dt, \tag{2.8}$$

це $w = x'(t, x_0)\,Bx(t, x_0)$ является квадратичной фор-ой.

Обычно величину J называют *интегральным крите-ием качества регулирования.*

Для решения задачи (см. [113]) предположим, что си-гема (1.5) асимптотически устойчива, и найдем квадратич-ую форму v, удовлетворяющую уравнению $\dot{v} = w$. Сог-асно (2.8) получим

$$J = \lim_{t\to\infty} v(x(t, x_0)) - v(x_0),$$

о так как

$$\lim_{t\to\infty} v(x(t, x_0)) = 0,$$

о имеем

$$J = -v(x_0). \tag{2.9}$$

Таким образом, величина J также является функцией япунова, удовлетворяющей условию

$$\frac{dJ}{dt} = -w.$$

3. Построение функций Ляпунова для линейных систем

1. Покажем теперь, как можно построить функцию Іяпунова для линейной системы второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Зададимся квадратичной формой

$$w = w_{11}x_1^2 + 2w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2$$

попытаемся найти такую квадратичную форму

$$v = v_{11}x_1^2 + 2v_{22}x_1x_2 + v_{22}x_2^2, \tag{3.2}$$

чтобы в силу системы (3.1) выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dt} = 2w. \tag{3.3}$$

Дифференцируя v в силу системы (3.1) и приравнивая коэффициенты в (3.3) при x_1^2, x_1x_2, x_2^2, получим систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}v_{11} + a_{21}v_{12} &= w_{11}, \\ a_{12}v_{11} + (a_{11} + a_{22})\, v_{12} + a_{21}v_{22} &= 2w_{12}, \\ a_{12}v_{12} + a_{22}v_{22} &= w_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22})\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \tag{3.5}$$

Решая систему (3.4) по формуле Крамера и подставляя найденные коэффициенты v_{ik} в (3.2), получим

$$v = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix} w_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} x_1^2 + 2\begin{vmatrix} a_{11} & w_{11} & 0 \\ a_{12} & 2w_{12} & a_{21} \\ 0 & w_{22} & a_{22} \end{vmatrix} x_1x_2 + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & w_{11} \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & 2w_{12} \\ 0 & a_{12} & w_{22} \end{vmatrix} x_2^2 \right\},$$

откуда сразу следует

$$v = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Удобно в качестве функции Ляпунова брать функцию $v = \Delta v$. В этом случае будем иметь

$$\dot{v} = 2\Delta w. \tag{3.7}$$

2. Попробуем получить аналогичную формулу для системы третьего порядка

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

адав квадратичную форму $w = \sum\limits_{i,\,k=1}^{3} w_{ik}x_ix_k,\ w_{ik} = w_{ki},$

айдем квадратичную форму $v = \sum\limits_{i,\,k=1}^{3} v_{ik}x_ix_k,\ v_{ik} = v_{ki},$

довлетворяющую уравнению

$$\dot{v} = 2w.$$

Соответствующая система для определения коэффициен-
ов будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}v_{11} + a_{21}v_{12} + a_{31}v_{13} &= w_{11},\\
{}_2v_{11} + (a_{11} + a_{22})\, v_{12} + a_{32}v_{13} + a_{21}v_{22} + a_{31}v_{23} &= 2w_{12},\\
{}_3v_{11} + a_{23}v_{12} + (a_{11} + a_{33})\, v_{13} + a_{21}v_{23} + a_{31}v_{33} &= 2w_{13},\\
a_{12}v_{12} + a_{22}v_{22} + a_{32}v_{23} &= w_{22},\\
{}_{13}v_{12} + a_{12}v_{13} + a_{23}v_{22} + (a_{22} + a_{33})\, v_{23} + a_{32}v_{33} &= 2w_{23},\\
a_{13}v_{13} + a_{23}v_{23} + a_{33}v_{33} &= w_{33}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

пределитель этой системы запишется в форме

$$\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0\\
a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0\\
a_{13} & a_{23} & a_{11} + a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31}\\
0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0\\
0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22} + a_{33} & a_{32}\\
0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33}
\end{vmatrix} = |\, a\,(ik,\ jl)\,|. \quad (3.10)$$

десь через $a\,(ik,\ jl)$ обозначены коэффициенты при v_{ik}
уравнении системы (3.9), полученном уравниванием ко-
ффициентов при x_jx_l. Легко видеть, что справедливы
ледующие соотношения:

$$a\,(ik,\ jl) = a\,(ki,\ jl) = a\,(ki,\ lj) \quad (3.11)$$

$$(ik,\ jl) = \begin{cases}
0 & \text{при } i \neq j,\ k \neq l,\ k \neq j,\ i \neq l,\\
a_{kl} & \text{при } i = j,\ k \neq l,\\
a_{ii} + a_{kk} & \text{при } i = j,\ k = l,\ i \neq k,\\
a_{ii} & \text{при } i = j = k = l.
\end{cases} \quad (3.12)$$

Решая систему (3.9) по формулам Крамера, получим $v_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$ и

$$v = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,\, k=1}^{3} \Delta_{ik} x_i x_k,$$

где через Δ_{ik} обозначен определитель, полученный из Δ заменой коэффициентов при v_{ik} в системе (3.9) правыми частями этой системы.

Нетрудно убедиться, что и в данном случае справедлива формула, аналогичная формуле (3.6),

$$v = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ 2w_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 2w_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ w_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Если взять, как и ранее, квадратичную форму $v = \Delta v$, то получим

$$\dot{v} = 2\Delta w. \tag{3.14}$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \tag{3.15}$$

эквивалентное системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_1 - bx_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Нетрудно подсчитать, что в этом случае $\Delta = c(ab - c)$. Будем искать такую квадратичную форму v, чтобы она удовлетворяла условию $\dot{v} = 2\Delta x_2^2$.

Очевидно, в силу (3.13) получим

$$v=\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -b & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$v=-c\,(acx_1^2+2cx_1x_2+bx_2^2+x_3^2).$$

Более удобно рассматривать в этом случае форму

$$v=\frac{ac}{2}x_1^2+cx_1x_2+\frac{b}{2}x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2, \tag{3.17}$$

для которой справедливо

$$\dot v=(c-ab)\,x_2^2.$$

3. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot x_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k, \qquad i=1,\dots,n. \tag{3.18}$$

Рассматривая снова квадратичные формы $w=\sum\limits_{i,\,k=1}^{n}w_{ik}x_ix_k$ и $v=\sum\limits_{i,\,k=1}^{n}v_{ik}x_ix_k$, удовлетворяющие уравнению

$$\dot v=2w,$$

и проводя аналогичные рассуждения, нетрудно получить формулу

$$v=-\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \dots & 2x_ix_k & \dots & x_n^2 \\ w_{11} & a_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2w_{jl} & a(11,\,jl) & \dots & a(ik,\,jl) & \dots & a(nn,\,jl) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{nn} & a(11,\,nn) & \dots & a(ik,\,nn) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.19}$$

где элементы $a(ik, jl)$ полностью определяются соотношениями (3.11) и (3.12).

Интересное объяснение структуре матрицы $K = \{a(ik, jl)\}$ дает Р. Беллман (см. [132]).

Оказывается, если составить сумму Кронекера для транспонированных матриц A' и A', то получим матрицу порядка n^2, соответствующую n^2 уравнений относительно v_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$. Если учесть при этом, что $v_{ik} = v_{ki}$, то получим уже систему $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений, а соответствующая матрица становится равной матрице указанного выше вида.

4. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{3.20}$$

предполагая, что матрица A симметрична. В этом случае уравнение

$$A'B + BA = 2C \tag{3.21}$$

легко разрешимо, если положить $C = f(A)$, где

$$f(A) = \sum_{i=-m}^{k} c_i A^i.$$

Решение уравнения (3.21) может быть записано в виде

$$B = f(A)\, A^{-1}.$$

В частности, функцией Ляпунова в данном случае может служить функция $v = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, соответствующая единичной матрице. Если все собственные числа матрицы A отрицательны, то эта функция полностью решает задачу устойчивости.

Другие способы построения функций Ляпунова для линейных систем даны в работах [75], [67], [70], [22], [182].

§ 4. Функции Ляпунова для линейных итерационных систем

Рассмотрим итерационную линейную систему

$$x_{m+1} = Px_m. \tag{4.1}$$

Здесь P — квадратная $(n \times n)$-матрица, элементы которой постоянны, x_m — векторная величина, которая явяется функцией целочисленного переменного m. Вопросы еории устойчивости решений линейных итерационных истем достаточно хорошо разработаны, так как здесь меет место полная аналогия с теорией устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений.

В частности, нулевое решение системы (4.1) будет симптотически устойчиво в целом, если все собственные сла μ матрицы P удовлетворяют условию $|\mu| < 1$.

Для систем (4.1) можно строить функции Ляпунова в иде квадратичных форм

$$u = x' Rx.$$

Вводя обозначение $u_m = x_m' R x_m$, получим

$$u_{m+1} - u_m = x_{m+1}' R x_{m+1} - x_m' R x_m = x_m' (P'RP - R) x_m.$$

Если мы хотим, чтобы $\Delta u = u_{m+1} - u_m$ — приращение функции u равнялось заданной квадратичной форме $'Cx$, то получим матричное уравнение

$$P'RP - R = C. \tag{4.2}$$

казывается, решения уравнений (4.2) и матричного уравения Ляпунова (1.7) связаны между собой простой зависимостью.

Если матрица R удовлетворяет уравнению (4.2), то атрица

$$B = (P' - E) R (P - E) \tag{4.3}$$

где E — единичная матрица) удовлетворяет уравнению

$$A'B + BA = 2C, \tag{4.4}$$

де

$$A = (P + E)(P - E)^{-1} \tag{4.5}$$

В самом деле, нетрудно видеть, что имеют место тождетва

$$\left.\begin{aligned} (P - E)(A + E) &= 2P, \\ (P - E)(A - E) &= 2E. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Далее, имеем

$$2(A'B + BA) = \\ = (A' + E) B (A + E) - (A^{-1} - E) B (A - E).$$

Iодставляя в правую часть этого тождества выражение B із (4.3) и учитывая (4.6), получим

$$2(A'B + BA) = 4(P'RP - R) = 4C.$$

Собственные числа μ матрицы P и λ матрицы A согласно (4.5) связаны соотношением

$$\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}. \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re} \lambda < 0$ тогда и только тогда, когда $|\mu| < 1$.

Условие разрешимости уравнения (4.2) легко выводится из теоремы 1.1.

В самом деле, чтобы уравнение (4.4) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы сумма $\lambda_i + \lambda_k$ не обращалась в нуль ни при каких индексах i и k. Но из (4.7) следует, что последнее условие эквивалентно требованию $\mu_i \mu_k \neq 1$ ни при каких значениях i и k.

В частности, если выполнено условие асимптотической устойчивости $|\mu_i| < 1$, то уравнение (4.2) будет всегда разрешимо. Почти все теоремы метода функций Ляпунова без существенных изменений очевидным образом переносятся на итерационные системы (см. [25]).

§ 5. Функционалы Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s) \varphi(s, t)\, ds. \tag{5.1}$$

Пусть ядро $K(x, s)$ будет непрерывной функцией x, s в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, тогда можно ставить задачу отыскания решения уравнения (5.1), удовлетворяющего условию $\varphi(x, 0) = \psi(x)$.

Уравнение (5.1) можно рассматривать как континуальный аналог линейной системы (1.1). Исследованию вопросов устойчивости решений уравнений типа (5.1) и более сложных посвящен ряд работ [15], [17]. Мы здесь ограничимся чисто формальной теорией построения функционалов Ляпунова для уравнения (5.1).

Аналогом квадратичной формы в данном случае будет функционал

$$I = \int_a^b \int_a^b T(x, s) \varphi(x) \varphi(s)\, dx\, ds. \tag{5.2}$$

Беря производную от I в силу уравнения (5.1), получим

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b \int_a^b W(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds, \tag{5.3}$$

где

$$W(x, s) = \int_a^b [T(x, s_1)\,K(s_1, s) + T(s, s_1)\,K(s_1, x)]\,ds_1. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) можно рассматривать как аналог уравнения (1.7).

Пусть λ_i — собственные числа ядра $K(x, s)$, т. е. полюсы резольвенты $R(x, s, \lambda)$, можно показать, что уравнение (5.4) имеет тогда и только тогда решение $T(x, s)$, когда ни при каких значениях i и k

$$\lambda_i + \lambda_k \neq 0. \tag{5.5}$$

2. Если ядро $K(x, s)$ симметрично, то задачу устойчивости решает функционал

$$I = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

В этом случае получим

$$\frac{dI}{dt} = 2\int_a^b \int_a^b K(x, s)\,\varphi(x, t)\,\varphi(s, t)\,dx\,ds.$$

Если все собственные числа ядра $K(x, s)$ отрицательны, то получаем неравенство

$$\frac{dI}{dt} < 0.$$

Функционалом Ляпунова в данном случае может служить также функционал

$$I = \int_a^b \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi(s)\,\varphi(x)\,dx\,ds,$$

где $K_n(x, s)$ — итерированное ядро, т. е. ядро, определяемое по следующему правилу:

$$K_1(x, s) = K(x, s), \qquad K_n(x, s) = \int_a^b K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, s)\, d\tau.$$

3. В общем случае, когда ядро $K(x, s)$ не симметрично, функционал Ляпунова может быть построен по правилу

$$I = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds\right]^2 dx.$$

Получим

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b\int_a^b (K(x, s) + K(s, x)) \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}\frac{\partial\varphi(s, t)}{\partial t}\, ds\, dx. \quad (5.6)$$

В данном случае $\frac{dI}{dt}$ является квадратичным функционалом от производных $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varphi(s, t)}{\partial t}$, поэтому задача устойчивости решается, если симметризованное ядро $K(x, s) + K(s, x)$ имеет только отрицательные собственные числа.

4. Функционалы Ляпунова могут быть построены и для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s) F(s, \varphi(s, t))\, ds. \quad (5.7)$$

Здесь в качестве функционала Ляпунова можно взять

$$I = \int_a^b ds \int_0^{\varphi(s)} F(s, \tau)\, d\tau.$$

Нетрудно получить для производной I, взятой в силу уравнения (5.7), следующее выражение:

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b\int_a^b R(x, s) F(s, \varphi(s)) F(x, \varphi(x))\, ds\, dx,$$

где $R(x, s) = \frac{1}{2}[K(x, s) + K(s, x)]$. Если ядро $R(x, s)$ имеет только отрицательные собственные числа, то получим, что $\frac{dI}{dt}$ будет отрицательным квадратичным функционалом.

5. Отметим теперь следующее обстоятельство. Фазовым пространством интегро-дифференциального уравнения является бесконечномерное функциональное пространство (например, гильбертово пространство). Некомпактность шара в таких пространствах не позволяет получить теоремы об устойчивости в таком виде, как они сформулированы в первой главе. В этом случае может, например, выручить установление факта компактности положительных полутраекторий, что дает возможность пользоваться теоремой 3.5 гл. I. Кроме того, собственные числа λ_n ядра $K(x, s)$ в общем случае неограниченно возрастают по модулю с ростом номера n. Это значит, что обратные числа $\frac{1}{\lambda_n}$, которые являются аналогами собственных чисел конечномерной линейной системы дифференциальных уравнений, неограниченно убывают по модулю с ростом номера n. Таким образом, поведение решений уравнения (5.1) даже в благоприятном случае устойчивого ядра, т. е. в случае, когда вещественные части всех λ_n отрицательны, может отличаться от поведения решений, которое мы наблюдали в конечномерном случае. Поэтому часто вместо уравнения (5.1) рассматривают уравнение

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s)\varphi(s, t)\,ds + \lambda\varphi(x, t), \tag{5.8}$$

где λ — постоянное отрицательное число.

Для уравнения (5.8) в случае устойчивого ядра уже легко можно получить свойство экспоненциальной устойчивости и другие оценки, подобные тем, которые были получены в § 2 настоящей главы.

ГЛАВА III

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Теоремы об устойчивости по первому приближению. Оценка области притяжения

1. Наряду с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + X_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Предположим, что X_i $(0, \ldots, 0) = 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 (x_1, \ldots, x_n) \leqslant A^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1+\alpha}, \tag{1.3}$$

где $\alpha > 0$, A — положительная постоянная.

Систему (1.2) будем называть *системой первого приближения*. Поставим задачу выяснения условий, при выполнении которых из устойчивости или неустойчивости системы первого приближения вытекает соответственно устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (1.1).

Лемма 1.1. *Пусть w — знакоопределенная квадратичная форма, v — произвольная квадратичная форма. Функция* $w + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ *будет знакоопределенной, совпа-*

дающей по знаку с w в некоторой окрестности начала координат.

Согласно (2.3) гл. II имеем

$$\rho_1 r^2 \leqslant w \leqslant \rho_n r^2,$$

где ρ_1 — наименьшее, ρ_n — наибольшее собственные числа формы w, $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Так как $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$ тоже квадратичная форма, то имеем

$$\Delta_1^2 r^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \leqslant \Delta_n^2 r^2,$$

где Δ_1^2, Δ_n^2 — собственные числа указанной формы. Из неравенства Буняковского — Шварца и (1.3) следует

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \right| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right\}^{1/2} \leqslant A \Delta_n r^{\alpha+2}.$$

Предположим, что w — определенно отрицательная форма. Имеем

$$w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \leqslant (\rho_n + A \Delta_n r^\alpha)\, r^2;$$

если выбрать такую окрестность, в которой

$$A \Delta_n r^\alpha < |\rho_n|,$$

то получим требуемое неравенство

$$w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i < 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Если w — определенно положительная форма, то получим

$$w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i > (\rho_1 - A \Delta_n r^\alpha)\, r^2 > 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0,$$

если только $A \Delta_n r^\alpha < \rho_1$.

Т е о р е м а 1.1 (об устойчивости по первому приближению). *Если корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво.*

В самом деле, согласно теореме 1.2 гл. II существует определенно положительная квадратичная форма v, производная которой в силу системы (1.2) равна $-r^2$. Производная функции v в силу системы (1.1) имеет вид $\dot{v} = -r^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ и согласно лемме 1.1 будет также определенно отрицательной. Асимптотическая устойчивость теперь следует из теоремы 2.3 гл. I.

Т е о р е м а 1.2 (о неустойчивости по первому приближению). *Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы* (1.1) *неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1.4 гл. II существует квадратичная форма v, принимающая положительные значения и удовлетворяющая соотношению

$$\frac{dv}{d\tau} = r^2 + \lambda v, \qquad \lambda > 0,$$

где $\frac{dv}{d\tau}$ означает производную функции v, взятую в силу системы (1.2). Беря производную функции v в силу системы (1.1), получим

$$\frac{dv}{dt} = r^2 + \lambda v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i,$$

но из леммы 1.1 следует, что $r^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ будет определенно положительной функцией. Неустойчивость теперь вытекает из теоремы 4.3 гл. I.

2. В качестве примера рассмотрим уравнение колебаний маятника в среде, сопротивление которой пропорционально угловой скорости маятника. Предположим, что на маятник, помимо силы тяжести, действует некоторая постоянная сила, направленная по касательной к траектории движения. Как известно (см. [21]), колебания маятника в этом случае описываются уравнением

$$I\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = N, \qquad (1.4)$$

где I — момент инерции, $n\dot{\varphi}$ — момент силы трения, $mgl \sin \varphi$ — момент силы тяжести, N — вращающий момент, m — масса, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от центра массы маятника до оси вращения, φ — угол отклонения маятника от вертикали.

Разделив на I и введя новые обозначения $a = \frac{n}{I}$, $b = \frac{mgl}{I}$, $L = \frac{N}{I}$, запишем уравнение (1.4) в виде

$$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b \sin \varphi = L.$$

Рассмотрим случай, когда $|L| < b$; тогда можно положить $L = b \sin \varphi_0$ и с помощью замены $x = \varphi - \varphi_0$ привести последнее уравнение к виду

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b(\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0) = 0. \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.5) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b(\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0) - ay, \qquad (1.6)$$

особые точки которой определяются уравнениями

$$\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0 = 0, \quad y = 0.$$

Таким образом, координаты особых точек будут иметь вид

$$x_k = -\varphi_0 + (-1)^k \varphi_0 + k\pi, \quad y_k = 0.$$

Используя разложение $\sin(x + \varphi_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_k, запишем систему первого приближения

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx \cos(x_k + \varphi_0) - ay. \qquad (1.7)$$

После переноса начала координат в точку $(x_k, 0)$ получим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b(x - x_k) \cos(x_k + \varphi_0) - ay, \qquad (1.8)$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b \cos(x_k + \varphi_0) = 0. \qquad (1.9)$$

Так как $a > 0$, $b > 0$, то условие асимптотической устойчивости точки $(x_k, 0)$ запишется в виде неравенства

$$\cos(x_k + \varphi_0) > 0.$$

Если же $\cos(x_k + \varphi_0) < 0$, то имеем, очевидно, неустойчивость положения равновесия.

В частности, точка $(x_0, 0)$ будет асимптотически устойчивой для системы (1.8) (при $k = 0$), а следовательно, и для полной системы (1.6).

3. Рассмотренный сейчас подход к решению задачи об устойчивости носит несколько формальный характер. В самом деле, мы удовлетворились, получив условия устойчивости положения равновесия нелинейной системы из условий устойчивости соответствующей системы первого приближения. Однако устойчивость положения равновесия системы линейного приближения есть, как мы видели в главе II, всегда устойчивость при любых начальных возмущениях. Заметим, что теорема 1.1 об устойчивости по первому приближению не гарантирует устойчивости в целом. Множество точек, притягиваемых при $t \to \infty$ к положению равновесия (это множество впредь мы будем называть *областью притяжения*), может оказаться весьма ограниченным. Во всяком случае, соответствующие оценки области притяжения, которые можно получить из анализа доказательства леммы 1.1 данной главы, дают почти непригодный, с точки зрения практики, результат.

Отыскание области притяжения является весьма важной и в то же время трудной задачей. Особенно часто такая задача возникает в теории синхронных электрических машин. В применении к маятнику эта задача может ставиться следующим образом.

Допустим, произошло внезапное изменение величины N вращающего момента и эта величина получила значение N_1. Ясно, что в этом случае устойчивое положение равновесия системы (1.6) перестанет быть положением равновесия и в процессе протекания переходного процесса либо пойдет по траектории новой системы к новому положению равновесия (если оно лежит в области притяжения нового положения равновесия), либо уйдет по траектории прочь от нового положения равновесия. Последний случай чаще всего весьма нежелателен, и поэтому всегда важно знать предельную величину изменения нагрузки, обеспечивающую наличие первой из рассмотренных ситуаций.

Если область притяжения, вообще говоря, трудно найти (эта область, согласно теореме Н. П. Еругина [38], ограничена поверхностями, состоящими из целых траекторий), то с помощью функций Ляпунова можно получить оценку этой области.

4. В самом деле, допустим мы нашли определенно положительную функцию v такую, что область $v < c$, где c — некоторое фиксированное число, либо ограничена, либо из всех точек области выходят ограниченные (устойчивые по Лагранжу) положительные полутраектории. Допустим, далее, что в области $v < c$ производная $\dot{v}$ знакоотрицательна, причем множество $\dot{v} = 0$ не содержит в этой области целых траекторий, кроме исследуемого положения равновесия. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 3.2 и 3.3 гл. I, приходим к выводу, что в этом случае область $v < c$ лежит в области притяжения исследуемого положения равновесия.

5. Вернемся снова к маятнику. Функция Ляпунова для системы (1.6) может быть построена, например, с помощью следующего рассуждения. В случае отсутствия сопротивления $n = 0$ уравнение (1.4) обладает первым интегралом (интегралом энергии)

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + mgl\,(1 - \cos\varphi) - N\varphi = c. \qquad (1.10)$$

Этот первый интеграл находится при $n = 0$ из уравнения (1.4) подстановкой $\omega = \dot{\varphi}$. Физический смысл первого интеграла состоит в том, что он дает полную энергию маятника, причем эта энергия остается в процессе колебаний маятника постоянной, так как рассеивания энергии не происходит. Если же в рассматриваемой системе имеется трение (в точке подвеса маятника, сопротивление среды и т. д.), то происходит рассеивание энергии и величина E уже не будет постоянной вдоль траектории, а будет убывать, т. е. будет вести себя как функция Ляпунова системы (1.6).

Произведя в (1.10) замену переменных $x = \varphi - \varphi_0$, $y = \omega$, рассмотрим новую функцию

$$v = \frac{y^2}{2} + b\,(\cos\varphi_0 - \cos(x + \varphi_0) - x\sin\varphi_0), \qquad (1.11)$$

которая с точностью до постоянного множителя I совпадает с E. Эта функция и будет функцией Ляпунова для системы (1.6).

Попробуем теперь оценить область притяжения точки (0, 0) с помощью найденной функции в случае $L \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Для этого найдем линию уровня функции v, проходящую через ближайшую к точке (0, 0) справа особую точку $(x_1, 0)$. Нетрудно видеть, что $x_1 = \pi - 2\varphi_0$, и уравнение искомой линии будет иметь вид

$$\frac{y^2}{2} + b\left[\cos\varphi_0 - \cos(x + \varphi_0) + (\pi - 2\varphi_0 - x)\sin\varphi_0\right] = 0. \tag{1.12}$$

Так как

$$v = \frac{y^2}{2} + b\int_0^x (\sin(x + \varphi_0) - \sin\varphi_0)\, dx$$

и подынтегральная функция удовлетворяет условию $(\sin(x + \varphi_0) - \sin\varphi_0)\, x \geqslant 0$ при $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_1$ и так как линия (1.12) пересекает ось Ox слева от оси Oy в точке x_2', где $x_{-1} \leqslant x_2' < 0$ (в чем нетрудно убедиться, проверив знак правой части (1.12) в точках $x = 0$ и $x = x_{-1}$), то приходим к выводу, что функция v является определенно положительной в области

$$\frac{y^2}{2} + b\left[\cos\varphi_0 - \cos(x + \varphi_0) + (\pi - 2\varphi_0 - x)\sin\varphi_0\right] < 0. \tag{1.13}$$

С другой стороны, в силу системы (1.6) получим

$$\frac{dv}{dt} = -ay^2.$$

Область (1.13) ограничена замкнутой линией, и на множестве $\dot{v} = 0$ в ней нет целых траекторий, кроме нулевого положения равновесия. Поэтому область (1.13) лежит заведомо внутри области притяжения нулевого положения равновесия системы (1.6).

В самом деле, обсуждаемая область притяжения является неограниченной, она ограничена либо сепаратрисами, выходящими из точек $(x_1, 0)$, либо сепаратрисами, выходящими из точек $(x_1, 0)$ и $(x_{-1}, 0)$. Более подробные исследования по этому поводу можно найти в книге [21].

§ 2. Оценка решений нелинейных систем с помощью функций Ляпунова. Оценки интегральных критериев качества регулирования

1. Следуя методу Н. Г. Четаева, изложенному в § 2 гл. II, рассмотрим сейчас один способ оценки решений нелинейных систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{2.1}$$

где $X(0, t) = 0$, и предположим, что найдена определенно положительная функция Ляпунова $v(x, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dv}{dt} = w \tag{2.2}$$

и неравенствам

$$\lambda_1(t)\, v \leqslant r^2 \leqslant \lambda_2(t)\, v, \tag{2.3}$$

где $r^2 = x'x$, а $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — непрерывные функции t.

Предположим, далее, что функция $w(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$w \leqslant -\rho(t)\, r^2, \tag{2.4}$$

где $\rho(t)$ — неотрицательная непрерывная функция t.

Согласно (2.2), (2.3) и (2.4) получим

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\rho(t)\lambda_1(t)\, v,$$

откуда следует

$$v(x, t) \leqslant v(x(t_0), t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\rho(t)\lambda_1(t)\,dt\right).$$

Используя второе из неравенств (2.3), окончательно получим

$$r^2(x) \leqslant v(x(t_0), t_0)\lambda_2(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\rho(t)\lambda_1(t)\,dt\right). \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) дает оценку изменения решения вдоль траекторий, оно справедливо на том промежутке времени, на котором справедливы неравенства (2.3) и (2.4).

Время переходного процесса можно, очевидно, оценить сверху так же, как и в § 2 гл. II, находя t из равенства

$$v(x(t_0),\, t_0)\lambda_2(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\rho(t)\lambda_1(t)\,dt\right) = \varepsilon^2.$$

Заметим, что методу оценок решений с помощью функций Ляпунова посвящено много работ; отметим среди них [97] и [53].

2. Укажем теперь способ оценки интегрального критерия качества регулирования (см. § 2 гл. II). Предположим, нам следует оценить интеграл

$$I = \int_{t_0}^{\infty} u(x(t))\,dt, \tag{2.6}$$

предполагая, что известна функция Ляпунова $v(x,\ t)$, удовлетворяющая уравнению (2.2), причем функция $w(x, t)$, стоящая в правой части уравнения (2.2), обладает свойством

$$w(x,\ t) \geqslant u(x) \tag{2.7}$$

для всех значений $t \geqslant t_0$.

Если нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво, то, очевидно, справедлива оценка

$$I \leqslant \int_{t_0}^{\infty} w(x,\ t)\,dt = \lim_{t\to\infty} v(x(t),\ t) - v(x(t_0),\ t_0).$$

Но так как $\lim\limits_{t\to\infty} v(x(t),\ t) = 0$, то окончательно имеем

$$I \leqslant -v(x(t_0),\ t_0).$$

Ряд примеров применения указанного здесь приема оценки интегральных критериев приведен в работе [92].

§ 3. О некоторых свойствах функций Ляпунова

1. Наряду с линейной системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + Fx_k, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

рассмотрим нелинейную систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f(x_k),\\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 2, \ldots, n, \quad f(0) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Пусть нам известно, что нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво для всех F, удовлетворяющих условию

$$\alpha < F < \beta.$$

Будет ли нулевое решение системы (3.2) устойчивым в целом, если выполнено условие

$$\alpha < \frac{f(x_k)}{x_k} < \beta, \qquad (x_k \neq 0)? \tag{3.3}$$

Иными словами, если график кривой $y = f(x)$ расположен между прямыми $y = \alpha x$ и $y = \beta x$, то достаточно ли этого для обеспечения устойчивости в целом нулевого решения системы (3.2)? Эта проблема была сформулирована М. А. Айзерманом (см. [1]) и явилась источником многочисленных исследований по устойчивости в целом.

2. Первый пример, показывающий, что выполнения обобщенного условия (3.3) недостаточно для наличия устойчивости в целом, построил Н. Н. Красовский (см. [47]). Он рассмотрел систему

$$\dot{x} = x + y + f(x), \quad \dot{y} = -x - y, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}f(x) &= -e^{-2x}(1 + e^{-x})^{-1} \quad \text{при} \quad x \geqslant 1,\\ f(x) &= -e^{-2}(1 + e^{-1})^{-1} \quad \text{при} \quad x < 1,\end{aligned}$$

соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{x} = x + y + ax, \qquad \dot{y} = -x - y. \tag{3.5}$$

Чтобы нулевое решение этой системы было устойчивым, в силу условий Рауза — Гурвица необходимо и достаточно выполнение неравенства $-\infty < a < 0$.

Соответствующее неравенству (3.3) условие имеет вид $xf(x) < 0$ и в данном случае выполняется.

Легко видеть, что $y = e^{-x} - x$ есть часть интегральной кривой системы (3.4) на интервале $1 \leqslant x < \infty$. Очевидно, имеем вдоль указанной кривой

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} > 0.$$

Интегрируя последнее равенство вдоль траектории и учитывая начальные данные: при $t = 0$ $x = 1$, $y = e^{-1} - 1$, получим $x + e^x - (1 + e) = t$. Таким образом, рассматриваемая положительная полутраектория уходит в бесконечность при $t \to \infty$. Следовательно, выполнение обобщенного условия Рауза — Гурвица не обеспечивает в данном случае устойчивость в целом.

Заметим, что в приведенном примере график функции $f(x)$ при $x \to \infty$ имеет своей асимптотой ось Ox. Таким образом, здесь кривая $y = f(x)$ асимптотически приближается к одной из сторон гурвицева сектора, ограниченного в общем случае прямыми $y = \alpha x$ и $y = \beta x$, а в данном случае прямыми $x = 0$, $y = 0$.

Возникает естественный вопрос: если условие (3.3) выполнено в более жесткой форме, т. е. в форме

$$\alpha_1 < \frac{f(x_k)}{x_k} < \beta_1, \quad \text{где } \alpha_1 > \alpha, \ \beta_1 < \beta,$$

то будет ли нулевое решение системы (3.2) устойчивым в целом? Оказывается, как показал В. А. Плисс (см. [91]), ответ на этот вопрос также является отрицательным.

3. В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы, доказанные В. А. Плиссом (см. [91]).

Теорема 3.1. *Если квадратичная форма*

$$v = w(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\mu}{2} F x_k^2, \tag{3.6}$$

где F — постоянное число, w — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, не зависящими от F, определенно положительна при любых F, где $\gamma < F < \delta$, то функция

$$v_1 = w(x_1, \ldots, x_n) + \mu \int_0^{x_k} f(x)\,dx \tag{3.7}$$

также определенно положительна при любых непрерывных $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$f(0)=0, \quad \gamma<\frac{f(x)}{x}<\delta \quad \textit{при} \quad x\neq 0. \tag{3.8}$$

В самом деле, нужно показать, что в любой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, отличной от начала координат, функция v_1 принимает только положительные значения. Если $x_k^0=0$, то $v_1=w=v$, и теорема доказана. Если $x_k^0\neq 0$, то из условия (3.8) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\gamma(x_k^0)^2<\int_0^{x_k^0} f(x)\,dx<\frac{1}{2}\delta(x_k^0)^2. \tag{3.9}$$

Положим

$$F=\frac{2}{(x_k^0)^2}\int_0^{x_k^0} f(x)\,dx.$$

Из (3.9) следует, что $\gamma<F<\delta$.

По условию теоремы имеем

$$v(x_1^0, \ldots, x_n^0)=w(x_1^0, \ldots, x_n^0)+\frac{1}{2}\mu F(x_k^0)^2>0,$$

но так как $\frac{1}{2}\mu F(x_k^0)^2=\mu\int_0^{x_k^0} f(x)\,dx$, то имеем

$$v_1(x_1^0, \ldots, x_n^0)=v(x_1^0, \ldots, x_n^0)>0.$$

Предположим далее, что в записи функций v и v_1 квадратичная форма w зависит только от коэффициентов a_{ij} системы (3.1).

Через $\dot{v}$ и $\dot{v}_1$ будем обозначать производные по времени функций v и v_1, взятые, соответственно, в силу системы (3.1) и (3.2).

Теорема 3.2. *Если при любых F, удовлетворяющих неравенству $\gamma<F<\delta$, имеем $\dot{v}\leqslant 0$, то при любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству (3.8), имеем также $\dot{v}_1\leqslant 0$.*

В самом деле, снова зафиксируем точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и покажем, что в этой точке $\dot{v}_1\leqslant 0$. Если $x_k^0=0$, то получим

$$\dot v_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \dot v.$$

Если же $x_k^0 \neq 0$, то полагаем $F_0 = \frac{f(x_k^0)}{x_k^0}$, откуда следует $\gamma < F_0 < \delta$. Таким образом, в рассматриваемой точке выполняется неравенство $\dot v \leqslant 0$, но так как $f(x_k^0) = F_0 x_k^0$, то

$$\dot v_1 = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} a_{ij} x_j^0 + \frac{\partial v}{\partial x_1} f(x_k^0) = \dot v(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3 (см. [83]). *Пусть для системы* (3.2) *построена функция Ляпунова* v_1 *вида* (3.7) *и такая, что* $\dot v_1 \leqslant 0$ *и множество* $\dot v_1 = 0$ *не содержит целых траекторий. Пусть, далее, система* (3.1) *асимптотически устойчива, а функция* $f(x_k)$ *удовлетворяет неравенствам* (3.3), *где* α *и* β *определяются из* (3.2). *Тогда функция* v_1 *будет определенно положительной.*

В самом деле, рассмотрим функцию v вида (3.6), множество $\dot v = 0$, где $\dot v$ — производная функции v, взятая в силу системы (3.1), очевидно, не содержит целых траекторий, поэтому по теореме 1.2 гл. II функция v будет определенно положительной. По теореме 3.1 будет определенно положительной и функция v_1. Теорема доказана.

4. В § 3 гл. I был приведен пример, показывающий, что, вообще говоря, помимо обычных требований, накладываемых на функцию Ляпунова и ее производную с целью обеспечения свойства асимптотической устойчивости, необходимо потребовать еще выполнения некоторых свойств, связанных с поведением функции Ляпунова на бесконечности. Одним из таких свойств является, например, свойство равномерного стремления функции v к ∞ при удалении точки фазового пространства к бесконечно удаленной точке. Такие функции мы назвали бесконечно большими они определяются требованием, чтобы множество $v \leqslant c$ было ограниченным множеством.

Однако теорема 3.5 гл. I дает возможность установить асимптотическую устойчивость в целом без указанного выше дополнительного требования, если только при этом удастся каким-либо образом установить ограниченность всех положительных полутраекторий рассматриваемой динамической системы.

Ниже мы приводим некоторые общие результаты, полученные в этом направлении А. И. Огурцовым (см. [83]), который использовал при исследовании вопроса некоторые идеи С. Н. Шиманова (см. [118]).

По-прежнему рассматривается система (3.2), причем предполагается, что непрерывная функция $f(x_h)$ удовлетворяет условию $f(x_k)\,x_k > 0$ при $x_k \neq 0$. Будем рассматривать только случай $k \neq 1$, так как пример системы (3.4) показывает, что при $k = 1$ дополнительное требование на бесконечности может входить в число необходимых условий асимптотической устойчивости в целом.

Предположим, что в k-м уравнении системы (3.2), по крайней мере, один из коэффициентов, отличных от a_{kk}, не равен нулю, обозначим его через a_{ks}. Введем новые координаты $x_r = y_r$ $(r = 1, 2, \ldots, s-1,\ s+1, \ldots, n)$:

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{ks}x_s + \ldots + a_{kn}x_n = y_s.$$

Тогда, сохраняя для коэффициентов новой системы прежние обозначения, запишем эту систему в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j + f(y_k),\\
\frac{dy_2}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_s}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{sj}y_j + a_{k1}f(y_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_k}{dt} &= y_s,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}y_j.
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Допустим, удалось для системы (3.10) построить опре деленно положительную функцию Ляпунова вида

$$v = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j + 2c \int_0^{y_k} f(\xi)\, d\xi,$$

где b_{ij} и c — постоянные, $c > 0$. Пусть производная $\dot{v}$ взятая в силу системы (3.10), знакоотрицательна и мно жество $\dot{v} = 0$ не содержит целых траекторий, кроме на чала координат.

Из доказательства критерия Сильвестра знакоопре деленности квадратичных форм (см. [30]) следует, что может быть представлена в виде

$$v = \sum_{p=1}^{n-2} \lambda_p \eta_p^2 + \mu_1 y_k^2 + 2\mu_2 y_k y_s + \mu_3 y_s^2 + 2c \int_0^{y_k} f(\xi)\, d\xi,$$

где η_p — некоторые линейные формы переменных $y_1, \ldots, y$

Вводя обозначения $\lambda_{n-1} = \frac{1}{\mu_3}$, $\lambda_n = \mu_1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_3}$, получи

$$v = \sum_{p=1}^{n-2} \lambda_p \eta_p^2 + \lambda_{n-1} (\mu_2 y_k + \mu_3 y_s)^2 + \lambda_n y_k^2 + 2c \int_0^{y_k} f(\xi)\, d\xi.$$

Из определенной положительности функции v имее $\lambda_p > 0$ при $p = 1, \ldots, n-2$,

$$\lambda_{n-1} > 0, \qquad I = \int_0^{y_k} \left(f(\xi) + \frac{\lambda_n}{c} \xi \right) d\xi > 0.$$

Если $I \to \infty$ при $y_k \to \infty$, то асимптотическая устойчи вость нулевого решения системы (3.2) будет следовать і теоремы 3.4 гл. I. Однако если $\mu_2 > 0$, то асимптотиче кая устойчивость в целом будет иметь место и в том сл чае, когда I является ограниченной величиной.

В самом деле, следуя С. Н. Шиманову ([см. 118] рассмотрим область

$$v \leqslant l, \quad |y_k| \leqslant N, \qquad (3.1$$

где l, N — постоянные. Очевидно, область (3.11) буд ограниченной, так как из первого неравенства $v \leqslant l$ сл дует ограниченность всех координат y_i, $i \neq k$.

Пусть $y_0(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ — произвольная точка фазового пространства, выберем постоянные l и N настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$v(y_1^0, \ldots, y_n^0) < l, \quad |y_k^0| < N.$$

Рассмотрим траекторию $y(t, y_0)$, выходящую из точки y_0. Если точка $y(t, y_0)$ выходит из области (3.11), то одно из неравенств (3.11) либо оба сразу должны превратиться в равенства. Но так как $\dot{v} \leqslant 0$, то равенство $v(y(t, y_0)) = l$ не может иметь места при $t > 0$. Допустим, при некотором $t = T$ выполняется равенство $|y_k(T)| = N$. Имеем в этом случае

$$\lambda_{n-1}(\mu_2 y_k + \mu_3 y_s)^2 < l.$$

Пусть $y_k(T) = N$, тогда справедливо неравенство

$$\mu_3 y_s < \left(\frac{l}{\lambda_{n-1}}\right)^{1/2} - \mu_2 N$$

и при N достаточно большом получаем $y_s(T) < 0$ или в силу системы (3.10) $\frac{dy_k}{dt} < 0$.

Если же $y_k(T) = -N$, то получим

$$\mu_3 y_s > -\left(\frac{l}{\lambda_{n-1}}\right)^{1/2} + \mu_2 N$$

и при N достаточно большом получим $y_s(T) > 0$ или $\dot{y}_k > 0$.

Таким образом, траектории прошивают плоские границы области (3.11) снаружи внутрь, и траектория $y(t, y_0)$ не может при этом выйти из этой области.

Асимптотическая устойчивость в целом теперь вытекает из теоремы 3.5 гл. I.

5. Пусть построена для системы (3.10) определенно положительная функция Ляпунова вида

$$v = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq k,\, j\neq k}}^{n} b_{ij} y_i y_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} b_{kj} f(y_k) y_j + 2c \int_0^{y_k} f(\xi)\, d\xi,$$

где $c > 0$. Пусть, далее, множество $\dot{v} = 0$ не содержит целых траекторий системы (3.10), а функция $f(y_k)$ непрерывно дифференцируема и $f'(y_k) > 0$ при всех значениях аргумента.

Следуя А. И. Огурцову (см. [83]), покажем, что и данном случае асимптотическая устойчивость в целом мс жет иметь место в некоторых случаях и тогда, когда не является бесконечно большой функцией.

В самом деле, представим функцию v в виде

$$v = \sum_{p=1}^{n-2} \lambda_p \eta_p^2 + \mu_1 f^2(y_k) + 2\mu_2 f(y_k) y_s + \mu_3 y_s^2 + 2c \int_0^{y_k} f(\xi) d\xi =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-2} \lambda_p \eta_p^2 + \lambda_{n-1} (\mu_2 f(y_k) + \mu_3 y_s)^2 +$$

$$+ 2 \int_0^{y_k} f(\xi) [c + \lambda_n f'(\xi)] d$$

Здесь η_p — некоторые линейные формы переменных $(i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ и

$$f(y_k), \ \lambda_{n-1} = \frac{1}{\mu_3} > 0, \ \lambda_n = \mu_1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_3} < 0.$$

Если функция $f(y_k)$ ограничена, то функция v буд бесконечно большой и можно применить для доказател ства асимптотической устойчивости в целом теорему 3 гл. I.

Если же $f(y_k)$ не ограничена, то при $\mu_2 > 0$ устойч вость в целом будет следовать из рассуждений, аналоги ных предыдущим.

§ 4. Общий обзор методов построения функций Ляпуно для нелинейных систем

1. Заметим, что для всякой системы дифференциа ных уравнений любая определенно положительная фу ция v может служить функцией Ляпунова. В самом де требуя, чтобы в силу данной системы производная $\dot{v}$ бы знакоотрицательной, можно выписать какие-то услов устойчивости нулевого решения системы. При неосторо ном выборе функции v эти условия могут оказаться п тиворечивыми, т. е. невыполнимыми. Кроме того, ес встать на такой путь рассуждений, то мы неизбежно у нем в океане малоценных достаточных условий устой вости, весьма далеких от того, чтобы быть необходимы

Хорошо проверенным критерием оценки полученной функции Ляпунова является следующее требование: достаточные условия, полученные с помощью этой функции в нелинейном случае, должны быть и необходимыми в линейном случае.

Дело в том, что даже в линейном случае не всякая определенно положительная форма дает необходимые и достаточные условия устойчивости, это значит, что, задав наперед, например, определенно положительную квадратичную форму v и требуя выполнение неравенства $\dot{v} \leqslant 0$, мы не получим в общем случае условия Рауза — Гурвица.

Однако если задаться определенно отрицательной формой w, то в устойчивом случае получим, согласно теореме 1.2 гл. II, определенно положительную функцию v, удовлетворяющую уравнению $\dot{v} = w$. Это значит, что условия определенной положительности функции v должны совпадать в этом случае с условиями Рауза — Гурвица.

Таким образом, построение функции Ляпунова по заданной производной, по-видимому, представляет некоторые преимущества с методами, в которых структура функции Ляпунова оговаривается с самого начала исследования.

Опыт показывает, что наиболее удачные функции Ляпунова получаются в том случае, когда им можно дать физическую интерпретацию. А это возможно сделать тогда, когда исследуемая динамическая система имеет в качестве прообраза определенную физическую модель. Такую модель всегда легко представить, например, в случае, когда порядок исследуемой системы равен двум. Если порядок системы больше двух, то на этом пути мы можем встретить определенные трудности.

Нужно заметить, что в настоящее время нет каких-либо универсальных приемов построения функций Ляпунова для нелинейных систем. До сих пор построение ценной функции Ляпунова является делом удачи. Степень хитроумности рассуждений в данном случае не всегда соответствует ценности получаемых результатов.

Ниже мы приводим описание наиболее употребительных приемов построения функций Ляпунова, дающих в ряде случаев хороший результат.

2. Остановимся прежде всего на э н е р г е т и ч е с к о м м е т о д е построения функций Ляпунова.

В неявной форме этот метод используется, по-видимом с момента зарождения аналитической механики (см. [76 стр. 346). Для консервативной системы отыскивается ка функция обобщенных координат полная энергия H, ра ная сумме кинетической и потенциальной энергии это системы. Затем в систему вводятся элементы, соотве ствующие поглощению или рассеиванию механическо энергии, и для этой системы прежде найденная функці H будет, соответственно, функцией Ляпунова.

В качестве простого примера рассмотрим диффере циальное уравнение

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \qquad (4.$$

где $\varphi(0) = f(0) = 0$.

Это уравнение, очевидно, эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - \varphi(y). \qquad (4.$$

Уравнение (4.1) допускает простую интерпретацию точки зрения механики, а именно можно считать, что о описывает колебания материальной точки под действи нелинейной восстанавливающей силы $f(x)$ в среде с со ротивлением, нелинейно зависящим от скорости y.

Принимая массу материальной точки равной 1, м жем записать полную энергию в виде

$$v = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x)\,dx, \qquad (4.$$

где первое слагаемое в правой части соответствует кине ческой энергии, а второе слагаемое — потенциальн энергии.

Если бы сопротивление среды отсутствовало ($\varphi(y) = 0$), то система (4.2) допускала бы первый интегр $v = \mathrm{const}$, что соответствует известному закону сохра ния энергии. Но так как механическая энергия в п цессе колебания, вследствие наличия сопротивления, і реходит в тепловую энергию, то функция v должна уб вать вдоль траекторий системы (4.2). В самом деле, лег подсчитать, что в силу системы (4.2) имеем $\dot{v} = -\varphi(y)$

Если выполнено условие $\varphi(y)\,y > 0$ при $y \neq 0$, получим $\dot{v} \leqslant 0$.

Чтобы функция v была определенно положите ной, необходимо потребовать выполнение неравенс $f(x)\,x > 0$.

Для применения теорем 3.4 и 3.5 гл. I надо убедиться, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \int\limits_0^x f(x)\,dx = \infty$ или наложить какие-либо условия, обеспечивающие ограниченность траекторий системы (4.2).

Наконец, нужно еще убедиться, что на прямой $y = 0$, где функция $\dot{v}$ обращается в нуль, нет целых траекторий, кроме нулевого положения равновесия. Но если вдоль траектории $y \equiv 0$, то и $\dot{y} \equiv 0$, из второго уравнения системы (4.2) следует тогда, что $f(x) = 0$, но так как в силу выполнения условия $f(x)\,x > 0$ $x = 0$ является единственным нулем функции $f(x)$, то получаем $x \equiv 0$.

Проведенные выше рассуждения о функции v являются типичными для случая, когда имеется физическая модель исследуемой системы дифференциальных уравнений.

В качестве другого примера рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_i = m_i y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\dot{y}_i = -\lambda_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x_i - x_k), \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

где $\lambda_i(y_i)\,y_i > 0$ при $y_i \neq 0$, $f_i(x)\,x > 0$, $\varphi_{ik}(x)\;x > 0$ при $x \neq 0$, $\varphi_{ik}(x) = -\varphi_{ik}(-x)$, $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{ki}(x)$, $\lambda_i(0) = f_i(0) = \varphi_{ik}(0) = 0$, m_i — положительные постоянные. Очевидно, функция

$$v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{x_i} f_i(x)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\int\limits_0^{x_i - x_k} \varphi_{ik}(x)\,dx$$

будет определенно положительной функцией, причем

$$\frac{dv}{dv} = -\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i(y_i)\,y_i < 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0.$$

Конструкция функции v становится совершенно ясной, если в качестве механической модели системы (4.4) принять систему, описывающую колебания n материальных точек P_i с массой m_i. Если предположить, что точка P_i подвергается действию восстанавливающей силы $f_i(x_i)$, а также действию сил вида $\varphi_{ik}(x_i - x_k)$, выражающих влияние других точек системы на движение точки P_i, то функция v будет просто функцией Гамильтона для системы (4.4). Очевидно, dV/dt будет диссипативной функцией, так как функции $\lambda_i(y_i)$ в системе (4.4) определяют силы, способствующие рассеиванию механической энергии. Другой механической моделью системы (4.4) может служить система, описывающая колебания группы связанных маятников (см. [21]).

3. При рассмотрении консервативных систем более глубокие соображения приводят к необходимости отыскания функции Ляпунова в виде связки первых интегралов. На этом пути Н. Г. Четаевым (см. [116], стр. 26) получены важные результаты по устойчивости вращательного движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Дальнейшее развитие метода Н. Г. Четаева дано в монографии [77] для исследования устойчивости движения твердого тела с полостями, наполненными жидкостью.

4. Мы уже указывали выше, что одним из плодотворных приемов построения функций Ляпунова явился прием, основанный на поиске этой функции в виде

$$v = F + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma,$$

где F — квадратичная форма.

Чтобы функция v имела определенно отрицательную производную по времени, необходимо наложить некоторые ограничения в виде неравенств на параметры системы.

Функции, построенные А. И. Лурье (см. [66]) и его последователями, позволили решить задачу об абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования, т. е. об устойчивости при наличии любой функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию $f(\sigma)\sigma > 0$ при $\sigma \neq 0$. Эта задача будет подробно рассмотрена нами в следующей главе.

5. Дальнейшие результаты по построению функции Ляпунова были получены в связи с проблемой М. А. Айзермана, приведенной нами в предыдущем параграфе. Сама формулировка этой проблемы подводит к мысли построения функций Ляпунова для нелинейных систем по аналогии с линейными системами. И. Г. Малкин (см. [71]) построил таким образом функции Ляпунова для систем второго порядка с одной нелинейностью. Метод построе-

ния состоял в отыскании функции Ляпунова в виде квадратичной формы для соответствующей линейной системы и в последующем подборе по аналогии функции Ляпунова для нелинейной системы. Большинство функций Ляпунова, приведенных в пятой и шестой главах, можно получить именно таким образом.

В качестве простого примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0. \tag{4.5}$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -f(x) - \varphi(x)\, y. \tag{4.6}$$

Соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -bx - ay. \tag{4.7}$$

Для нее может быть построена функция Ляпунова

$$\dot{v} = \frac{y^2}{2} + b\frac{x^2}{2},$$

причем $\dot{v} = -2ay^2$.

Замечаем теперь, что v не содержит в своей записи параметра a, поэтому эта же функция пригодна для исследования системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - \varphi(x)\, y,$$

но непригодна для системы (4.6).

Чтобы получить функцию Ляпунова для системы (4.6), необходимо как-то найти аналог члена bx^2 в записи v. Но из описания энергетического приема построения функций Ляпунова мы уже знаем, что с точки зрения механики величина bx (или $f(x)$) характеризует восстанавливающую силу, а величина $bx^2/2$ соответствует потенциальной энергии. Поэтому естественно принять за функцию Ляпунова для системы (4.6) функцию

$$v = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x)\, dx. \tag{4.8}$$

Очевидно, получим в силу системы (4.6)

$$\dot{v} = -\varphi(x) y^2.$$

Условия устойчивости в целом запишутся следующим образом:

a) $f(x)\,x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\varphi(x) > 0$,

c) $\int\limits_0^x f(x)\,dx \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Легко проверить, что множество $\dot{v} = 0$, т. е. прямая $y = 0$ не содержит целых траекторий, кроме начала координат.

Если условие c) не выполнено, то, вообще говоря, получаем только устойчивость в большом. Область притяжения при этом может не совпасть со всей плоскостью и требуется дополнительное исследование формы этой области.

Укажем другой подход к задаче. Производя в уравнении (4.5) замену переменной $y = \dot{x} + \int\limits_0^x \varphi(x)\,dx$, получим систему

$$\dot{x} = y - \int\limits_0^x \varphi(x)\,dx, \qquad \dot{y} = -f(x). \tag{4.9}$$

Используя снова прежнюю функцию Ляпунова (4.8), получим в силу системы (4.9)

$$\dot{v} = -f(x)\int\limits_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Условия устойчивости в целом в данном случае улучшаются, так как условие b) заменяется менее ограничительным условием

$$x\int\limits_0^x \varphi(x)\,dx > 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0.$$

6. Наряду с системой

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

рассмотрим систему (см. [71], [39])

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + by, \\ \dot{y} &= cx + dy,\ f(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Используя результаты гл. II, построим для системы (4.10) функцию Ляпунова в виде квадратичной формы, исходя из условия

$$\dot{v} = -2(a + d)(bc - ad)\,x^2.$$

Полагая $v = v_{11}x^2 + 2v_{12}xy + v_{22}y^2$, легко найдем неопределенные коэффициенты v_{11}, v_{12}, v_{22}. В результате выкладок получим функцию

$$v = (dx - by)^2 + (ad - bc)\,x^2. \tag{4.12}$$

Условия Рауза — Гурвица для системы (4.10) имеют вид $a + d < 0$, $ad - bc > 0$, очевидно, эти условия обеспечивают знакоопределенность функции v и знакоотрицательность $\dot{v}$.

Беря за основу функцию (4.12), построим теперь функцию Ляпунова для системы (4.11). Система (4.11) отличается от системы (4.10) тем, что вместо функции ax стоит нелинейная функция $f(x)$. В выражении (4.12) коэффициент a комбинируется с x^2. Если рассматривать выражение ax^2 как интеграл $2\int\limits_0^x ax\,dx$, то естественной кажется мысль принять по аналогии в качестве функции Ляпунова для системы (4.11) функцию

$$v = (dx - by)^2 + 2d\int\limits_0^x f(x)\,dx - bcx^2. \tag{4.13}$$

Беря производную функции v в силу системы (4.11), получим

$$\dot{v} = -2\left(\frac{f(x)}{x} + d\right)\left(bc - \frac{f(x)}{x}d\right)x^2.$$

Так как

$$v = (dx - by)^2 + 2\int\limits_0^x (df(x) - bcx)\,dx,$$

то условие знакоопределенности функции v имеет вид

$$\text{a)}\quad d\frac{f(x)}{x} - bc > 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0.$$

Условие a) вместе с условием

$$\text{b)}\quad \frac{f(x)}{x} + d < 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0$$

обеспечивает знакоотрицательность $\dot{v}$.

Очевидно, множество $x = 0$, где $\dot{v} = 0$, не содержит целых траекторий. Чтобы функция v была бесконечно большой, достаточно потребовать выполнение условия

$$\text{c)}\quad \int_0^x [df(x) - bcx]\,dx \to \infty \qquad \text{при} \qquad |x| \to \infty.$$

Условия a), b), c) обеспечивают на основании теоремы 3.4 гл. I устойчивость в целом нулевого решения системы (4.11).

Красовский Н. Н. (см. [47]) показал, что невыполнение условия c) может повести к потере свойства устойчивости при любых начальных возмущениях (см. § 3 настоящей главы).

Наряду с системой (4.10) рассмотрим далее систему (см. [47])

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + by, \\ \dot{y} &= f_2(x) + dy, \; f_1(0) = f_2(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Беря функцию Ляпунова в виде

$$v = (dx - by)^2 + 2\int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\,dx$$

и учитывая, что в силу системы (4.14) будем иметь

$$\dot{v} = -2\left(\frac{f_1(x)}{x} + d\right)(bf_2(x) - df_1(x))\,x,$$

получим достаточные условия устойчивости в виде

$$\text{a)}\quad (bf_2(x) - df_1(x))x > 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0,$$

$$\text{b)}\quad \frac{f_1(x)}{x} + d < 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0,$$

$$\text{c)}\quad \int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\,dx \to \infty \qquad \text{при} \qquad |x| \to \infty.$$

Н. Н. Красовским [49] показано, что при выполнении условий a) и b) условие

$$\lim_{|x|\to\infty}\left\{(f_1(x)+dx)\operatorname{sgn}x-\int_0^x[df_1(x)-bf_2(x)]\,dx\right\}=-\infty$$

является необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (4.14).

7. Наряду с системой (4.10), рассмотрим систему (см. [71])

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=ax+f(y),\\ \dot{y}&=cx+dy,\ \ f(0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.15}$$

Построим для системы (4.10) функцию v, производная которой, взятая в силу этой системы, имеет вид

$$\dot{v}=2(a+d)(ad-bc)\,y^2.$$

После несложных подсчетов получим

$$v=(cx-ay)^2+(ad-bc)\,y^2.$$

Запишем теперь функцию Ляпунова для системы (4.15)

$$v=(cx-ay)^2+2\int_0^y(a\,dy-cf(y))\,dy,\tag{4.16}$$

получим в силу системы (4.15)

$$\dot{v}=2(a+d)\left[ad-c\frac{f(y)}{y}\right]y^2.\tag{4.17}$$

Условия асимптотической устойчивости в целом имеют вид

a) $a+d<0$,

b) $ad-c\dfrac{f(y)}{y}>0$ при $y\neq 0$,

c) $\displaystyle\int_0^y(a\,dy-cf(y))\,dy\to\infty$ при $|y|\to\infty$.

8. Н. Н. Красовский [47] исследовал систему

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x)+by,\\ \dot{y}&=cx+f_2(y),\ \ f_1(0)=f_2(0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.18}$$

В качестве функции Ляпунова для системы (4.18) берется функция

$$v = (c_2^2 - bc)\,x^2 + \left(b^2 - \frac{b^3c}{c_1^2}\right) y^2 + 2c_2 \int_0^x f_1(x)\,dx +$$
$$+ 2\frac{b^3}{c_1} \int_0^y f_2(y)\,dy - 2bc_2xy \quad (c_1c_2 = bc), \tag{4.19}$$

производная которой, взятая в силу систему (4.18), имеет вид

$$\dot v = 2\,(f_1(x)\,c_2 - bcx)\,(f_1(x) + c_2x) +$$
$$+ 2\,(f_2(y) + c_1y)\,(f_2(y)\,c_1 - bcy)\,\frac{b^2}{c_1^2}\,.$$

Условия асимптотической устойчивости записываются здесь в виде

a) $\dfrac{f_1(x)}{x} + c_2 < 0, \quad \dfrac{f_1(x)}{x}\,c_2 - bc > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\dfrac{f_2(y)}{y} + c_1 < 0, \quad \dfrac{f_2(y)}{y}\,c_1 - bc > 0$ при $y \neq 0$,

c) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \displaystyle\int_0^x (f_1(x)\,c_2 - bcx)\,dx = \infty$,

d) $\lim\limits_{|y| \to \infty} \displaystyle\int_0^y (f_2(y)\,c_1 - bcy)\,dy = \infty$.

9. Перейдем теперь к обзору других приемов построения функций Ляпунова.

Рассмотрим уравнение (см. [12])

$$\ddot x + \varphi(\dot x) + g(\dot x)\,f(x) = 0, \tag{4.20}$$

эквивалентное системе

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= y, \\ \dot y &= -\,g(y)\,f(x) - \varphi(y). \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Используем для построения функции Ляпунова метод деления переменных (см. [17]). Будем искать функцию v

в виде $v = F(x) + \Phi(y)$. Имеем в силу системы (4.21)

$$\dot v = F'(x)y - \Phi'(y)[g(y)f(x) + \varphi(y)].$$

Потребует теперь, чтобы $\dot v$ имела такую же структуру, что и функция v, т. е. потребуем тождественного выполнения условия

$$F'(x)y - \Phi'(y)\,g(y)f(x) = 0.$$

Деля переменные, получим

$$\frac{F'(x)}{f(x)} = \frac{\Phi'(y)\,g(y)}{y},$$

что может имоть место, если каждое из выражений в обеих сторонах равенства является постоянным, например, равным 1. Отсюда сразу следует, что

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \qquad \Phi(y) = \int_0^y \frac{y\,dy}{g(y)},$$

т. е.

$$v = \int_0^x f(x)\,dx + \int_0^y \frac{y\,dy}{g(y)}, \qquad \dot v = -y\frac{\varphi(y)}{g(y)}.$$

Условия устойчивости в целом нулевого решения запишутся в виде

a) $f(x)\,x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $g(y) > 0$ при $y \neq 0$,

c) $\varphi(y)y > 0$ при $y \neq 0$,

d) $\int_0^x f(x)\,dx \to \infty$ при $|x| \to \infty$,

e) $\int_0^y \frac{y\,dy}{g(y)} \to \infty$ при $|y| \to \infty$.

10. Следующий метод является дальнейшим развитием метода деления переменных (см. [17]).

Рассмотрим систему

$$\dot x_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} f_k(\sigma_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.22)$$

где $f_k(\sigma_k)\sigma_k > 0$ при $\sigma_k \neq 0$, $\sigma_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m$, $k = 1, \dots, n$, a_{km} — постоянные, p_{ik} могут быть функциями координат, параметров и времени.

Определенно положительная функция

$$v = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\sigma_i} f_i(\sigma)\, d\sigma$$

имеет производную в силу системы (4.22) в следующем виде:

$$\dot{v} = 2 \sum_{m,k=1}^{n} b_{km} f_k(\sigma_k) f_m(\sigma_m),$$

где

$$b_{km} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_{ki}p_{im} + a_{mi}p_{ik}).$$

Таким образом, $\dot{v}$ будет определенно отрицательной или знакоотрицательной, если этим же свойством обладает форма

$$\sum_{m,k=1}^{n} b_{km}u_k u_m.$$

Как известно, критерий Сильвестра и критерий знакоотрицательности ([30], стр. 47) легко переносятся па случай квадратичных форм с переменными коэффициентами, и поэтому эти критерии с успехом могут быть использованы.

В качестве примера построим функцию Ляпунова для системы уравнений переходного процесса синхронного двигателя (см. [122])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\theta}{dt} = s, \\ &\frac{ds}{dt} = \sin\theta_0 - \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \eta\Delta i \sin(\theta_0 + \Delta\theta) + \\ &\qquad\qquad + \xi(\sin 2\theta_0 - \sin 2(\theta_0 + \Delta\theta)), \\ &\frac{d\Delta i}{dt} = \eta s \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \alpha\Delta i. \end{aligned}\right\} \quad (4.23)$$

Здесь η, ξ — постоянные, $\Delta\theta$ — возмущение рабочего угла, Δi — возмущение силы тока, возникающее в результате наброса нагрузки на двигатель.

В данном случае получаем

$$\|p_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\eta\sin(\theta_0+\Delta\theta) \\ 0 & \eta\sin(\theta_0+\Delta\theta) & -\alpha \end{Vmatrix},$$

а в качестве матрицы $\|a_{ik}\|$ берем просто единичную матрицу. Таким образом, получим

$$v = \int_0^{\Delta\theta} [\sin(\theta_0+\Delta\theta) - \sin\theta_0 + \xi(\sin 2(\theta_0+\Delta\theta) - \\ - \sin 2\theta_0)]\, d\Delta\theta + \frac{s^2}{2} + \frac{(\Delta i)^2}{2},$$

$$= -\alpha(\Delta i)^2.$$

Построенная функция Ляпунова позволяет оценить область притяжения положения равновесия, что дает возможность быстро оценить допустимую предельную нагрузку на синхронный двигатель.

Предложенный метод в линейном случае дает необходимые и достаточные условия устойчивости, если найти подходящие выражения для σ_k. Это следует из того, что всякая определенно положительная квадратичная форма линейным преобразованием может быть приведена к каноническому виду, т. е. к сумме квадратов переменных. Трудность этого метода состоит в подборе σ_k и матрицы $\|p_{ik}\|$.

11. Рассмотрим другой метод, описанный Н. Н. Красовским [51]. Этот метод в линейном случае также дает необходимые и достаточные условия. Исследуется система уравнений

$$\dot{x} = X(x), \qquad X(0) = 0. \tag{4.24}$$

Функция Ляпунова строится в виде $v = X'BX$, где симметричная матрица B подбирается так, чтобы ее собственные числа были положительны и чтобы симметризованная матрица

$$T = \left(B\frac{\partial X}{\partial x}\right)' + B\frac{\partial X'}{\partial x} \tag{4.25}$$

удовлетворяла критерию отрицательности Сильвестра. Имеем в силу системы (4.24)

$$\dot{v} = \dot{X}'BX + X'B\dot{X} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} X\right)' BX + X'B\frac{\partial X}{\partial x} X =$$
$$= X'\left[\left(B\frac{\partial X}{\partial x}\right)' + B\frac{\partial X}{\partial x}\right] X = X'TX.$$

Таким образом, получим $v > 0$ и $\dot{v} < 0$. Требуя, чтобы собственные числа матрицы T удовлетворяли во всем пространстве неравенствам $\lambda_i < -\delta$, $i = 1, \ldots, n$, Н. Н. Красовский показывает, что в этом случае будет иметь место устойчивость нулевого решения системы (4.12) при любых начальных возмущениях.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + bx = 0, \quad b > 0,$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - \varphi(y).$$

Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$2v = a_{11}y^2 + a_{22}(bx + \varphi(y))^2.$$

Легко видеть, что

$$\dot{v} = (-a_{11} + ba_{22})\, y\, (bx + \varphi(y)) - a_{22}\varphi'(y)(bx + \varphi(y))^2.$$

Очевидно, следует принять $a_{22} = 1$ и $a_{11} = b$, тогда будем иметь

$$\dot{v} = -\varphi'(y)(bx + \varphi(y))^2$$

и условие устойчивости в целом принимает вид $\varphi'(y) > 0$ при любых y. Это более слабый результат по сравнению с полученным в п. 2 настоящего параграфа.

12. Следующий прием представляет собой несколько улучшенный вариант метода, описанного В. И. Зубовым [44] (см. также [151] — [154]). Система дифференциальных уравнений записывается в матричной форме

$$\dot{x} = A(x)\, x. \tag{4.26}$$

В качестве функции Ляпунова применяется функция

$$v = x'B(x)\, x = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k, \qquad b_{ik} = b_{ki}.$$

Дифференцируя v в силу системы (4.26), получим

$$\dot{v} = x' \left(A'(x)B(x) + B(x)A(x) + \dot{B}(x)\right)x = \\ = x'T(x)x, \quad (4.27)$$

где

$$T(x) = A'(x)B(x) + B(x)A(x) + \dot{B}(x).$$

Получим, таким образом, представление $\dot{v}$ в виде квадратичной формы с переменными коэффициентами. К этой форме может быть применен критерий Сильвестра. Условия устойчивости могут быть и здесь сформулированы в форме неравенств, накладываемых на собственные числа матрицы $T(x)$.

Заметим теперь, что систему (4.24) всегда можно представить в виде системы (4.26). Для этого рассмотрим матрицу Якоби векторной функции X

$$J(x) = \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right\|$$

положим

$$A(x) = \int_0^1 J(\theta x)\, d\theta.$$

Нетрудно видеть, что будет справедливо тождество

$$X(x) = A(x)x.$$

Таким образом, указанный выше прием применим для любой нелинейной системы. В работах [151] — [154] матрицу B выбирают в специальной форме. Так, например, в случае построения функции Ляпунова для нелинейного уравнения 4-го порядка применяется

$$B(x) = \begin{Vmatrix} K_{11} + \frac{Y_{11}}{x_1^2} & K_{12} + \frac{f_{12}}{2x_1} & K_{13} + \frac{f_{13}}{2x_1} & K_{14} + \frac{f_{14}}{2x_1} \\ K_{12} + \frac{f_{12}}{2x_1} & K_{22} + \frac{Y_{22}}{x_2^2} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} + \frac{f_{13}}{2x_1} & K_{23} & K_{33} + \frac{Y_{33}}{x_3^2} & K_{34} \\ K_{14} + \frac{f_{14}}{2x_1} & K_{24} & K_{34} & K_{44} + \frac{Y_{44}}{x_4^2} \end{Vmatrix},$$

где K_{ij} — постоянные такие, что форма $x'Kx$, где $K = \|K_{ij}\|$, определенно положительна, $Y_{it} = \int\limits_0^{x_i} y_i(x)\,dx$, f_{ik} являются функциями только x_1. Числа K_{ij} и функции $y_i(x_i)$, $f_{ik}(x_1)$ находятся путем ряда соображений, обеспечивающих знакоотрицательность $\dot{v}$ заданной формулой (4.27) и наиболее простой вид матрицы $T(x)$.

Предполагая элементы матрицы $A(x)$ в уравнении (4.26) полиномами аргументов $x_1, \ldots, x_n$, Г. П. Сеге [184] предлагает искать функцию Ляпунова в виде $v(x) = x' B(x) x$, где матрица $B(x)$ зависит только от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, но не зависит от x_n. В этом случае, если x_n входит в систему (4.26) только линейно, функция $\dot{v}$ будет квадратичной функцией x_n. Подбор матрицы $B(x)$ осуществляется с помощью требования, чтобы дискриминант квадратичной функции $v = c_1 x_n^2 + c_2 x_n + c_3$ равнялся нулю. В этом случае функция $\dot{v}$ будет знакопостоянной.

Однако так как при указанной процедуре возникают трудности, строится по определенным правилам функция $\psi(x) = d_1 x_n^2 + d_2 x_n + d_3$, в некотором смысле «подобная» по внешнему виду функция $\dot{v}$. Эта вспомогательная функция позволяет узнать форму функции $v(x)$ в виде полинома. Постоянные коэффициенты этого полинома затем доопределяются.

13. В работе [178] предлагается начинать поиск функций Ляпунова с записи градиента этой функции в форме

$$\nabla v = (\nabla v_1, \ldots, \nabla v_n),$$

где

$$\nabla v_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x)\, x_k.$$

Функции $\alpha_{ik}(x)$ подбираются из условия отрицательности $\dot{v}$ и из требования, чтобы векторное поле ∇v было потенциальным. Это значит, что должны выполняться условия $\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \nabla v_k}{\partial x_i}$, $i, k = 1, \ldots, n$. После того как найден градиент ∇v, сама функция v определяется как криволинейный интеграл

$$v(x) = \int_0^x \nabla v\, dx = \int_0^{x_1} \nabla v_1(x_1, 0, \ldots, 0)\, dx_1 +$$

$$+ \int_0^{x_2} \nabla v_2(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)\, dx_2 + \ldots + \int_0^{x_n} \nabla v_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{4.28}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + g(x)\,x = 0, \tag{4.29}$$

где $a > 0$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -g(x)\,x - ay. \tag{4.30}$$

Будем искать вектор-градиент ∇v в форме

$$\nabla v_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \qquad \nabla v_2 = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y.$$

В силу системы (4.30) получим

$$\frac{dv}{dt} = \nabla v_1 \dot{x} + \nabla v_2 \dot{y} =$$
$$= -\alpha_{21}g(x)\,x^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{22}g(x))\,xy + (\alpha_{12} - a\alpha_{22})\,y^2.$$

Удобно положить $\alpha_{11} = \alpha_{21} + \alpha_{22}\,g(x)$, $\alpha_{12} = a\alpha_{22}$, $\alpha_{22} = 1$. Условия потенциальности поля дают $\alpha_{21} = \alpha_{12} = a$. Таким образом, имеем $\alpha_{11} = a + g(x)$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = a$, $\alpha_{22} = 1$. Формула (4.28) дает нам

$$v = \int_0^x (a^2 + g(x)\,x)\,dx + \int_0^y (ax + y)\,dy$$

или, что то же самое,

$$v = \frac{1}{2}(ax + y)^2 + \int_0^x g(x)\,x\,dx.$$

Так как $\dot{v} = -ag(x)\,x^2$, то условия устойчивости имеют вид $g(x) > 0$ и

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_0^x g(x)\,x\,dx = \infty.$$

Очевидно, эти условия можно получить также из результатов п. 2. данного параграфа.

14. Интересный прием построения функции Ляпунова дан в работе Уокера и Кларка [112]. В этой работе рассматривается уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = 0, \qquad (4.31)$$

эквивалентное системе

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1 = x, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dot{x}_n = -f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

Если не углубляться в критику туманных рассуждений, проведенных авторами в защиту своего метода, то суть его можно кратко изложить в следующем виде.

Функцию Ляпунова для системы (4.32) предлагается брать в виде

$$v = \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, \ldots, x_n), \qquad (4.33)$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ специально подбирается с целью упрощения вида v и с целью выполнения неравенства $\dot{v} \leqslant 0$.

Так, например, для системы

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = z, \\ &\dot{z} = -f(x) - \varphi(y) - az, \end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

эквивалентной уравнению (4.1), функцию v ищем в виде

$$v = f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy + ayz + \frac{z^2}{2} + F(x, y, z).$$

Имеем в силу системы (4.34)

$$\dot{v} = \left(f'(x) - a\frac{\varphi(y)}{y}\right) y^2 - ayf(x) - a^2yz + f_1 y + f_2 z - \\ - f_3(f(x) + \varphi(y) + az),$$

где

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Очевидно, проще всего положить $f_1 = af(x)$, $f_2 = a^2 y$, $f_3 = 0$, откуда $F = a\int\limits_0^x f(x)\,dx + a^2\frac{y^2}{2}$ и получаем нужную функцию

$$v = a\int\limits_0^x f(x)\,dx + f(x)\,y + \int\limits_0^y \varphi(y)\,dy + \frac{(z+ay)^2}{2}. \quad (4.35)$$

Впервые такая функция для системы (4.34) построена в работе [13].

Несмотря на длинные и не очень убедительные пояснения к своему методу, авторы, по-видимому, специально приспосабливали свой метод к системе типа (4.34), а к таким системам, как мы увидим далее, сводятся многие интересные уравнения.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \qquad (f(0, 0) = 0), \quad (4.36)$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -f(x, y). \quad (4.37)$$

Согласно предложенному способу следует принять

$$v = \int\limits_0^x f(x, y)\,dx + \frac{y^2}{2} + F(x, y).$$

Имеем тогда

$$\dot{v} = -f(x, y)\int\limits_0^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx + \frac{\partial F}{\partial x}\,y - \frac{\partial F}{\partial y}\,f(x, y).$$

Если положить $F(x, y) \equiv 0$, то условия устойчивости будут иметь вид $xf(x, y) > 0$ и $x\int\limits_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\,dx > 0$. Это не очень хорошие условия, так как они не могут быть удовлетворены для линейной функции $f(x, y) = bx + ay$.

Значительно полезней оказывается функция, предложенная Л. Америо (см. [124]),

$$v = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(x, 0)\,dx. \quad (4.38)$$

В данном случае получим

$$\dot{v} = [f(x, 0) - f(x, y)]\, y$$

и условия устойчивости в целом принимают вид

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ f(x, 0)\, x > 0 && \text{при} \quad x \neq 0, \\ &\text{b)}\ [f(x, y) - f(x, 0)]\, y > 0 && \text{при} \quad y \neq 0, \\ &\text{c)}\ \int_0^x f(x, 0)\, dx \to \infty && \text{при} \quad |x| \to \infty. \end{aligned}$$

§ 5. Векторные функции Ляпунова. Устойчивость сложных систем

1. Здесь мы рассмотрим один метод исследования вопросов устойчивости сложных систем (см. [125], [88]). Этот метод связан с применением векторных функций Ляпунова. Идея привлечения векторных функций Ляпунова давно уже разрабатывается в самых различных направлениях (см. [74], [64], [147], [150], [156]), однако наиболее эффектно векторные функции Ляпунова действуют в применении к сложным системам, т. е. к системам достаточно высокого порядка.

Известно, что трудность построения функции Ляпунова с ростом порядка системы значительно возрастает, а иногда такое построение превращается в непосильную задачу. Однако часто исследуемую систему можно разбить на подсистемы, в какой-то мере слабо связанные между собой или связанные по определенному (например, линейному) закону, позволяющему без особого труда учесть эту взаимосвязь. Так как подсистемы имеют порядок значительно ниже по сравнению с порядком всей системы, то для каждой из таких подсистем удается построить свою функцию Ляпунова, зависящую от координат данной подсистемы. Объединяя затем все полученные функции в одну векторную функцию, можно на основании некоторых положений сделать вывод об устойчивости исследуемой полной системы. В этом и состоит идея метода Ф. Бейли (см. [125]).

2. Рассмотрим системы следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= X_i(x_i, t) + D_i u_i, \\ y_i &= H_i x_i, \\ u_i &= \sum_{j=1}^{m} B_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Здесь $X_i(0, t) = 0$, x_i — выходной вектор размерности n_i, u_i — входной вектор размерности p_i, y_i — выходной вектор размерности q_i, y_j — выходной вектор размерности q_j другой подсистемы, имеющей номер j, матрицы B_{ij}, D_i, H_i являются постоянными матрицами. Очевидно, матрица B_{ij} характеризует зависимость входного вектора u_i данной подсистемы от выходных векторов других подсистем, а матрица

$$B = \begin{Vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ B_{m1} & \ldots & B_{mm} \end{Vmatrix}$$

полностью характеризует взаимодействие отдельных подсистем.

Очевидно, уравнения подсистемы (5.1) можно переписать в форме

$$\dot{x}_i = X_i(x_i, t) + \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.2}$$

где

$$C_{ij} = D_i B_{ij} H_j.$$

Так как матрица C_{ii} характеризует влияние выходного вектора i-й подсистемы на этот же вектор, то величину $C_{ii} x_i$ можно отнести к функции $X_i(x_i, t)$, характеризующей внутренние связи i-й подсистемы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $C_{ii} = 0$ при $i = 1, \ldots, m$.

3. Предположим, что для каждого уравнения

$$\dot{x}_i = X_i(x_i, t) \tag{5.3}$$

найдена функция Ляпунова $v_i(x_i, t)$, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned} c_{i1}\|x_i\|^2 &\leqslant v_i(x_i, t) \leqslant c_{i2}\|x_i\|^2, \\ \dot{v}_i(x_i, t) &\leqslant -c_{i3}\|x_i\|^2, \\ \|\operatorname{grad} v_i\| &\leqslant c_{i4}\|x_i\|. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Здесь норма вектора выбирается евклидовой. Как известно ([53], стр. 70), если функция $X_i(x_i, t)$ непрерывна по x_i и t и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x_i, то для существования функции v_i, удовлетворяющей условиям (5.4), необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение подсистемы (5.3) было экспоненциально устойчиво, т. е. чтобы существовали две положительные постоянные α и B такие, что для любого решения системы (5.3) справедливо неравенство

$$\| x_i(t, x_i^0, t) \| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{5.5}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что для каждой подсистемы вида (5.3) условие (5.5), а следовательно, и неравенства (5.4) справедливы. Такое требование не является очень ограничительным, так как оно выполнено в случае асимптотически устойчивой линейной автономной системы. Для неавтономных линейных систем свойство (5.5) также имеет место, если реакция системы на ограниченный непрерывный сигнал является ограниченной (см. [18], стр. 169). Существует и достаточно широкий класс нелинейных систем, для которых нулевое решение является экспоненциально устойчивым.

Если, например, можно подобрать симметричную матрицу B, имеющую положительные собственные числа и такую, что матрица

$$\left(B \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)' + B \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

имеет отрицательные собственные числа λ_k, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_k < -\gamma$, $\gamma > 0$, $k = 1, \ldots, n_i$, то свойство экспоненциальной устойчивости также имеет место (см. [53], стр. 109).

4. Лемма 5.1. *Пусть матрица A есть матрица с неотрицательными недиагональными элементами; если $x(t, x_0, t_0)$ удовлетворяет неравенству*

$$\dot{x} \leqslant Ax, \tag{5.6}$$

а $y(t, x_0, t_0)$ — решение уравнения

$$\dot{y} = Ay, \tag{5.7}$$

то справедливо неравенство

$$x(t, x_0, t_0) \leqslant y(t, x_0, t_0) \quad \textit{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Здесь неравенство $x \leqslant y$ означает, что выполнены неравенства $x_k \leqslant y_k$ для всех проекций рассматриваемых векторов.

Из (5.6) и (5.7) по формуле Коши (см. [18], стр. 102) имеем

$$x = \exp(A(t - t_0))\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(A(t - s))\, f(s)\, ds, \tag{5.8}$$

$$y = \exp(A(t - t_0))\, x_0, \tag{5.9}$$

где $f(s) \leqslant 0$ при $s \geqslant t_0$.

Чтобы доказать требуемое неравенство, достаточно показать, что матрица $\exp At$ имеет неотрицательные элементы, так как тогда интеграл в уравнении (5.8) будет неположительным. Предполагая вначале, что $a_{ij} > 0$ при $i \neq j$, рассмотрим тождество

$$\exp At = \left(\exp \frac{At}{N}\right)^N,$$

где N — положительное число.

Так как

$$\exp \frac{At}{N} = E + A\frac{t}{N} + A^2 \frac{t^2}{N^2} + \ldots,$$

то при достаточно больших значениях N элементы матрицы $\exp \frac{At}{N}$ будут неотрицательны. Но это значит, что и элементы матрицы $\exp At$ также будут неотрицательны. Случай, когда $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$ получается предельным переходом. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Если $a > 0$, $b > 0$, то при $z \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2} z^2 + \frac{b^2}{2a}. \tag{5.10}$$

В самом деле, очевидно,

$$\frac{az^2}{2} - bz + \frac{b^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}z - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqslant 0,$$

таким образом, прибавляя к обеим частям неравенства $-az^2 + bz$, получим (5.10).

Теорема 5.1. *Пусть каждая из подсистем типа* (5.3) *имеет функцию Ляпунова* $v_i(x_i, t)$, *удовлетворяющую оценкам* (5.4) *с положительными* $c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$. *Рассмотрим линейную систему*

$$\dot{r} = Ar, \tag{5.11}$$

где A *есть* $m \times m$ — *матрица с элементами*

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{c_{i3}}{2c_{i2}} & \text{при } i = j, \\[2ex] \dfrac{c_{i4}^2 \sum\limits_{j=1}^{m} \|C_{ij}\|^2}{2c_{i3}c_{j1}} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Здесь C_{ij} — *матрица, фигурирующая в* (5.2).

Если нулевое решение системы (5.11) *асимптотически устойчиво, то нулевое решение полной системы* (5.2) *также асимптотически устойчиво в целом.*

Заметим, что норма матрицы C определяется здесь как нижняя грань чисел α, для которых справедливо

$$\|Cx\| \leqslant \alpha\|x\|.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Беря производную от функции v_i в силу подсистемы (5.1), будем иметь

$$\dot{v}_i \leqslant -c_{i3}\|x_i\|^2 + c_{i4}\|x_i\|\|D_iu_i\|.$$

Используя третье уравнение (5.1) и лемму 5.2, получим

$$\dot{v}_i \leqslant -\frac{1}{2}c_{i3}\|x_i\|^2 + \frac{c_{i4}^2}{2c_{i3}} \sum_{j=1}^{m} \|D_iB_{ij}H_j\|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \|x_j\|^2.$$

Используя первое неравенство (5.4) и помня, что $C_{ij} = D_iB_{ij}H_j$, имеем

$$\dot{v}_i \leqslant -\frac{c_{i3}}{2c_{i2}}v_i + \frac{c_{i4}^2}{2c_{i3}} \sum_{j=1}^{m} \|C_{ij}\|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{v_j}{c_{j1}}. \tag{5.12}$$

Теперь пусть i пробегает все значения от 1 до m. Если за вектор v взять вектор с проекциями $v_1, \ldots, v_m$, то получаем систему

$$\dot{v} \leqslant Av.$$

Если теперь $v(t_0) = r(t_0)$, то согласно лемме 5.1 получим $v(t) \leqslant r(t)$ при $t > t_0$, что и завершает доказательство теоремы.

5. В качестве примера рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) + C_{12}y, \\ \dot{y} &= C_{21}x + Y(y), \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

где x, y — векторы, вообще говоря, неодинаковой размерности, $X(0) = Y(0) = 0$.

Матрица A, о которой говорилось в теореме 5.1, имеет здесь вид

$$A = \begin{Vmatrix} -\dfrac{c_{13}}{2c_{12}} & \dfrac{c_{14}^2}{2c_{13}c_{21}}\|C_{12}\|^2 \\ \dfrac{c_{24}^2}{2c_{23}c_{11}}\|C_{21}\|^2 & -\dfrac{c_{23}}{2c_{22}} \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, условие устойчивости нулевого решения в силу условий Рауза — Гурвица можем записать следующим образом:

$$\frac{c_{13}c_{23}}{c_{14}c_{24}} > \left(\frac{c_{11}c_{23}}{c_{12}c_{22}}\right)^{1/2}\|C_{12}\|\|C_{21}\|.$$

§ 6. Устойчивость сложных систем в случае, когда подсистемы связаны нелинейно

1. Метод Ф. Бейли может быть применен к исследованию систем и в том случае, когда составляющие полную систему подсистемы связаны между собой нелинейно. Здесь мы ограничимся рассмотрением того случая, когда внутренние подсистемы являются устойчивыми линейными системами.

Итак, будем рассматривать систему

$$\dot{x}_i = A_i x_i + f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.1}$$

здесь x_i — вектор размерности n_i, A_i — устойчивая матрица размерности $n_i \times n_i$, векторная функция $f_i(x_1, \ldots, x_m)$, не зависящая от x_i, является функцией, характеризующей связь между i-й подсистемой и другими подсистемами.

Пусть выполнено во всем пространстве условие

$$\|f_i\| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} l_{ik}\|x_k\|, \tag{6.2}$$

где числа l_{ik} неотрицательны.

Рассмотрим линейную подсистему

$$\dot{x}_i = A_i x_i. \tag{6.3}$$

Так как матрица A_i устойчива, то по теореме 1.2 гл. II для любой определенно положительной симметричной матрицы C_i существует определенно положительная симметричная матрица B_i, удовлетворяющая уравнению

$$A_i' B_i + B_i A_i = -C_i.$$

Функция $v_i = x_i' B_i x_i$ будет удовлетворять неравенству (см. § 2 гл. II)

$$\lambda_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant v_i \leqslant \lambda_{i2}\|x_i\|^2, \tag{6.4}$$

где λ_{i1} и λ_{i2} — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы B_i.

Так как в силу системы (6.3)

$$\dot{v}_i = -x_i' C_i x_i,$$

то имеет место оценка

$$\dot{v}_i \leqslant -\mu_i\|x_i\|^2, \tag{6.5}$$

где μ_i — наименьшее собственное число матрицы C_i.

С другой стороны,

$$\operatorname{grad} v_i = 2B_i x_i.$$

Следовательно,

$$\|\operatorname{grad} v_i\| \leqslant 2\|B_i\|\,\|x_i\|.$$

Однако известно, что норма определенно положительной симметричной матрицы B_i равна наибольшему собственному числу этой матрицы (см. [18], стр. 142), следовательно,

$$\|\operatorname{grad} v_i\| \leqslant 2\lambda_{i2}\|x_i\|. \tag{6.6}$$

Т е о р е м а 6.1. *Пусть для каждой подсистемы типа* (6.3) *определена квадратичная функция Ляпунова v_i, для которой справедливы оценки* (6.4), (6.5), (6.6).

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{r} = Ar, \tag{6.7}$$

где A — $m \times m$-матрица с элементами

$$a_{ik} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_i}{2\lambda_{i2}} & \text{при } i = k, \\ 2\dfrac{\lambda_{i2}^2}{\mu_i \lambda_{k1}} \sum\limits_{j \neq i}^{m} l_{ij}^2 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Если нулевое решение системы (6.7) *асимптотически устойчиво, то нулевое решение полной системы* (6.1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Для доказательства рассмотрим производную функции v_i, взятую в силу подсистемы (6.1); учитывая (6.5), имеем

$$\dot{v}_i \leqslant -\mu_i \|x_i\|^2 + f_i' \operatorname{grad} v_i$$

или

$$\dot{v}_i \leqslant -\mu_i \|x_i\|^2 + 2\lambda_{i2} \|x_i\| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} l_{ik} \|x_k\|.$$

Согласно лемме 5.2 получим

$$\dot{v}_i \leqslant -\frac{\mu_i}{2} \|x_i\|^2 + 2\,\frac{\lambda_{i2}^2 \left(\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} l_{ik} \|x_k\|\right)^2}{\mu_i},$$

откуда в силу (6.4) и неравенства Шварца следует неравенство

$$\dot{v}_i \leqslant -\frac{\mu_i}{2\lambda_{i2}} v_i + 2\frac{\lambda_{i2}^2}{\mu_i} \sum_{k \neq i}^{m} l_{ik}^2 \sum_{k \neq i}^{m} \frac{v_k}{\lambda_{k1}}. \tag{6.8}$$

Рассматривая неравенство (6.8) для каждого значения i, следовательно, для каждой функции v_i, получим для векторной функции $v\,(v_1, \ldots, v_m)$ неравенство

$$\dot{v} \leqslant Av.$$

Теперь достаточно воспользоваться леммой 5.1, из которой и следует справедливость теоремы.

2. В качестве примера рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + f_1(y), \\ \dot{y} &= f_2(x) + A_2 y, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

где векторы x, y имеют, вообще говоря, различную размерность, $f_1(0) = f_2(0) = 0$,

$$\|f_1(y)\| \leqslant l_{12}\|y\|, \quad \|f_2(x)\| \leqslant l_{21}\|x\|. \tag{6.10}$$

В качестве матрицы C_i, $i = 1, 2$, выберем единичную матрицу, тогда получим $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Матрица A в данном случае будет иметь вид

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{1}{2\lambda_{12}} & 2\dfrac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{21}} l_{12}^2 \\ 2\dfrac{\lambda_{22}^2}{\lambda_{11}} l_{21}^2 & -\dfrac{1}{2\lambda_{22}} \end{matrix} \right\|,$$

где приняты обозначения предыдущего пункта, а условие устойчивости согласно условиям Рауза — Гурвица запишется в виде

$$\lambda_{11}\lambda_{21} > 16\lambda_{12}^3\lambda_{22}^3 l_{12}^2 l_{21}^2. \tag{6.11}$$

ГЛАВА IV

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему непрямого управления

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + b\xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma) \\ \sigma &= c'y - \rho\xi, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где b, c, y — n-мерные векторы, A — квадратная $n \times n$-матрица, ξ, σ, ρ — скалярные величины, c' — n-мерная вектор-строка.

Преобразование

$$x = Ay + b\xi, \qquad \sigma = c'y - \rho\xi \tag{1.2}$$

сводит систему (1.1) к системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'x - \rho f(\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Чтобы задачи устойчивости систем (1.1) и (1.3) были эквивалентны, преобразование (1.2) должно быть невырожденным. Условие невырожденности преобразования (1.2) запишется в форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) можно упростить, если разложить Δ по элементам последней строки и последнего столбца

$$\Delta = -\rho \det A - \sum_{i,\, k=1}^{n} A_{ik} b_i c_k,$$

где через A_{ik} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. Так как величины $\frac{A_{ik}}{\det A}$ являются элементами обратной матрицы A^{-1}, то при условии $\det A \neq 0$ неравенство (1.4) может быть записано в следующем виде

$$\rho + c'A^{-1}b \neq 0. \tag{1.5}$$

Пусть всюду в дальнейшем функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$f(\sigma)\,\sigma > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \tag{1.6}$$

Задача состоит в том, чтобы найти условия асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (1.6). Устойчивость указанного сейчас вида называется *абсолютной устойчивостью*.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что собственные числа матрицы A имеют неположительные вещественные части.

Это требование вызвано следующим обстоятельством. Если в качестве $f(\sigma)$ взять линейную характеристику $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$, где $\varepsilon > 0$, то матрица правых частей системы (1.3) будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} A & b\varepsilon \\ c'\varepsilon & -\rho\varepsilon \end{Vmatrix}. \tag{1.7}$$

Отсюда видно, что при малых ε одно из собственных чисел матрицы (1.7) будет малой величиной, а остальные собственные числа этой матрицы будут мало отличаться от собственных чисел матрицы A. Если система (1.3) абсолютно устойчива, то она должна быть устойчивой и при $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$, поэтому собственные числа матрицы A не могут иметь положительные вещественные части.

Условие (1.4) обеспечивает также отсутствие у системы (1.3) других особых точек, кроме нулевой точки. В самом деле, особые точки системы (1.3) могут быть найдены из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} Ax + bf(\sigma) &= 0, \\ c'x - \rho f(\sigma) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Но так как в силу условия (1.6) $f(\sigma) = 0$ только при $\sigma = 0$, то имеем единственное решение системы (1.8) $x = 0$, $\sigma = 0$.

В частности, если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то $\det A \neq 0$ и выполнение условий (1.5) и (1.6) обеспечит отсутствие каких-либо других особых точек системы (1.3), кроме нулевой точки.

Задача об абсолютной устойчивости впервые рассматривалась в работе [65].

§ 2. Система непрямого управления

1. Рассмотрим теперь систему (1.3) в случае, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Впредь матрицу A с указанным свойством будем называть *устойчивой матрицей*.

Начнем с простейшего примера системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + bf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= cx - \rho f(\sigma), \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

где x, σ, c, a, ρ — скалярные величины, $a > 0$. Функцию Ляпунова для системы (2.1) ищем в форме

$$v = \alpha x^2 + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma, \qquad \alpha > 0,$$

откуда получим

$$\dot{v} = -2\alpha a x^2 + 2df(\sigma)\, x - \rho f^2(\sigma),$$

где $d = \alpha b + \frac{1}{2} c$. Условия отрицательности функции $\dot{v}$ запишутся в виде $\rho > 0$ и

$$\left(\alpha b + \frac{c}{2}\right)^2 - 2\alpha a \rho < 0. \qquad (2.2)$$

Чтобы неравенство (2.2) имело положительное решение $\alpha > 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $a\rho > bc$, которое обеспечивает положительность обоих корней уравнения

$$\alpha^2 b^2 + \alpha(bc - 2a\rho) + \frac{c^2}{4} = 0.$$

2. Перейдем теперь к исследованию общего случая, т. е. к исследованию системы (1.3).

Зададимся симметричной *положительной матрицей* C (т. е. матрицей, все собственные числа которой положительны) и найдем симметричную матрицу B, удовлетворяющую уравнению

$$A'B + BA = -C. \tag{2.3}$$

По теореме 1.2 гл. II решение уравнения (2.3) существует и матрица B будет также положительной.

Будем искать для системы (1.3) функцию Ляпунова вида

$$v(x, \sigma) = x' Bx + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma. \tag{2.4}$$

Так как $B > 0$, то в силу условия (1.6) функция v будет определенно положительной. Наша задача теперь состоит в том, чтобы за счет выбора матрицы C обеспечить определенную отрицательность производной $\dot{v}$.

Производная функции v, взятая в силу системы (1.3), имеет следующий вид:

$$\dot{v}(x, \sigma) = \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} + f(\sigma)\dot{\sigma} =$$
$$= x'(A'B + BA)x + (b'Bx + x'Bb - c'x) f(\sigma) - \rho f^2(\sigma).$$

Принимая во внимание (2.3) и соотношения

$$b'Bx = (Bb)'x, \qquad x'Bb = (Bb)'x,$$

окончательно получим

$$\dot{v}(x, \sigma) = -x'Cx + 2f(\sigma)\, d'x - \rho f^2(\sigma), \tag{2.5}$$

где $d = Bb + \frac{c}{2}$.

Очевидно, имеем

$$-\dot{v}(x, \sigma) = (x' - f(\sigma)\, d'\, C^{-1})\, C\, (x - f(\sigma)\, C^{-1}d) +$$
$$+ (\rho - d'C^{-1}d)\, f^2(\sigma).$$

Так как $C > 0$, то $(x' - f(\sigma)\, d'\, C^{-1})\, C\, (x - f(\sigma)\, C^{-1}d)$ является определенно положительной квадратичной формой от проекции вектора $x - f(\sigma)\, C^{-1}d$. Поэтому условие

$$\rho > d'C^{-1}d \tag{2.6}$$

будет достаточным условием определенной положительности $-\dot{v}(x, \sigma)$ как квадратичной формы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $f(\sigma)$.

Теорема 2.1. *Если матрица A устойчива, и величина ρ удовлетворяет условию* (2.6), *то нулевое решение системы* (1.3) *абсолютно устойчиво.*

Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы система (1.3) имеет единственную особую точку $x = 0$, $\sigma = 0$. В самом деле, если бы система

$$Ax + bf(\sigma) = 0, \quad c'x - \rho f(\sigma) = 0 \tag{2.7}$$

имела отличное от нулевого решение $x = x_0$, $\sigma = \sigma_0$, то $\dot{v}$, построенная выше, обращалась бы в этой точке в нуль, что противоречит условию отрицательной определенности.

Покажем далее, что справедливо неравенство

$$\rho + c'A^{-1}b > 0. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что в силу условия (2.6) неравенство (2.8) вытекает из неравенства

$$-c'A^{-1}b < d'C^{-1}d.$$

Если допустить, что последнее неравенство несправедливо, то, выбирая $\rho = -c'A^{-1}b$, придем к выводу, что определитель (1.4) системы (2.7) равен нулю и, следовательно, система (2.7) имеет ненулевое решение, а это, как мы видели, противоречит условию (2.6).

Рассмотрим далее область

$$v < l, \qquad |\sigma - c'A^{-1}x| < N. \tag{2.9}$$

Очевидно, эта область ограничена, так как из первого неравенства следует $x'Bx < l$, т. е. ограниченность x, а из второго неравенства следует ограниченность σ.

Если $P(x_0, \sigma_0)$ — произвольная точка фазового пространства, то, взяв l и N достаточно большими, можно добиться, чтобы эта точка лежала в области (2.9). Покажем, что траектория системы (1.3), выходящая из точки P, не выйдет при $t > 0$ из области (2.9).

В самом деле, первое неравенство (2.9) не может нарушиться, так как $\dot{v}$ определенно отрицательна. Из уравнений (1.3) получаем

$$\frac{d}{dt}(\sigma - c'A^{-1}x) = -(\rho + c'A^{-1}b)f(\sigma). \tag{2.10}$$

Допустим, второе из неравенств (2.9) превратилось в равенство, например, $\sigma - c'A^{-1}x = N$, тогда при достаточно большом N будем иметь $\sigma > 0$ и $f(\sigma) > 0$, а в силу (2.10) получим при данном значении σ $\frac{d}{dt}(\sigma - c'A^{-1}x) < < 0$, что и делает невозможным выход траектории через плоскую часть границы области (2.9). Аналогичный результат получается при $\sigma - c'A^{-1}x = -N$. Устойчивость в целом нулевого решения системы (1.3) следует теперь из теоремы 3.5 гл. I.

Таким образом, в рассматриваемом случае для установления устойчивости в целом не требуется, чтобы функция v вида (2.4) была обязательно бесконечно большой, т. е. не требуется выполнения условия

$$\int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma \to \infty \quad \text{при} \quad |\sigma| \to \infty.$$

Этот факт впервые был установлен В. А. Якубовичем (см. [121]).

3. Рассмотрим теперь случай, когда матрица A имеет одно нулевое собственное число. В подходящей системе координат новая система может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(\sigma)\, b, \\ \dot{\eta} &= \alpha f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'x + 2\varepsilon\eta - \rho f(\sigma). \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Здесь A — устойчивая $n \times n$ = матрица, x, b, c — n-мерные векторы, η, α, σ, ρ, ε — скалярные величины.

Покажем сначала, что неравенство $\alpha\varepsilon < 0$ является необходимым условием абсолютной устойчивости нулевого решения системы (2.11). В самом деле, если имеет место абсолютная устойчивость, то нулевое решение системы (2.11) будет асимптотически устойчивым при $f(\sigma) = = \gamma\sigma$, где $\gamma > 0$. Определитель соответствующей линейной системы, как легко видеть, будет равен величине

$$-2\gamma\varepsilon\alpha \det A,$$

причем знак этого определителя должен совпадать со знаком $\det A$. Следовательно, должно выполняться неравенство $\varepsilon\alpha < 0$, обеспечивающее положительность свободного члена характеристического уравнения полученной линейной системы.

Функцию Ляпунова для системы (2.11) возьмем в виде

$$v = \delta\eta^2 + x'Bx + \int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma. \qquad (2.12)$$

Беря производную этой функции в силу системы (2.11), получим

$$\dot{v} = -x'Cx + 2f(\sigma)\,d'x - \rho^2 f^2(\sigma) + 2(\delta\alpha + \varepsilon)\,\eta f(\tau),$$

где C — заданная положительно определенная $n \times n$-матрица (т. е. матрица, все собственные числа которой положительны), причем имеет место соотношение (2.3).

Если $\alpha\varepsilon < 0$, то можно выбрать положительное значение δ таким образом, что будем иметь $\delta\alpha + \varepsilon = 0$. В этом случае, используя предыдущие рассуждения, проведенные при выборе матрицы C, получим при выполнении неравенства (2.6) определенно положительную функцию v, производная которой $\dot{v}$ будет знакоотрицательной в пространстве переменных x, η, $f(\sigma)$.

Множество, на котором $\dot{v}$ может обращаться в нуль, является линией $x = 0$, $\sigma = 0$. Но так как $\varepsilon\alpha < 0$, то $\varepsilon \neq 0$. Отсюда вытекает, что если на указанной линии имеется целая траектория, то из последнего уравнения системы (2.11) получим $\eta = 0$, откуда и следует, что начало координат будет единственным инвариантным множеством, лежащим на этой прямой.

В силу теоремы 3.4 гл. I получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *Если выполнены неравенства* $\alpha\varepsilon < 0$ *и* (2.6) *и, кроме того,* $\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma \to \infty$ *при* $|\sigma| \to \infty$, *то нулевое решение системы* (2.11) *абсолютно устойчиво.*

§ 3. Исследование системы прямого управления. Основной случай

1. Рассмотрим систему прямого управления

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \sigma &= c'x, \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

где A — устойчивая $n \times n$-матрица, b — n-мерный вектор-столбец, c' — n-мерная вектор-строка, $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$f(\sigma)\,\sigma > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \tag{3.2}$$

Как и ранее, зададимся симметричной матрицей C, все собственные числа которой положительны, и, пользуясь теоремой 1.2 гл. II, найдем из уравнения

$$A'B + BA = -C \tag{3.3}$$

положительно определенную матрицу B.

Будем строить функцию Ляпунова для системы (3.1) в форме

$$v = x'Bx + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.4}$$

Так как $B > 0$, то v, как функция координат $x_1, \ldots, x_n$, будет при $\beta > 0$ определенно положительной и бесконечно большой. Наша задача состоит в том, чтобы за счет выбора матрицы C и параметра β обеспечить определенную отрицательность $\dot{v}$. Нетрудно видеть, что для $\dot{v}$ получим выражение

$$\dot{v} = -x'Cx + 2d'xf(\sigma) + \beta c'bf^2(\sigma), \tag{3.5}$$

где

$$d = Bb + \beta\frac{A'c}{2}. \tag{3.6}$$

Очевидно, условие $c'b \leqslant 0$ будет необходимым условием знакоотрицательности $\dot{v}$.

Однако в данном случае мы не можем получить знакоопределенность функции (3.5), если рассматривать эту функцию как квадратичную форму $n+1$ переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ и $f(\sigma)$. В самом деле, согласно (3.1) имеем

$$\dot{v} = (2Bx + \beta f(\sigma)\,c)'\,(Ax + bf(\sigma)),$$

откуда следует, что на множестве

$$Ax + bf(\sigma) = 0 \tag{3.7}$$

$\dot{v}$ может обращаться в нуль. Но уравнение (3.7) в пространстве $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y = f(\sigma)$ может иметь нетривиальное решение, поэтому возможно обращение в нуль функции $\dot{v}$ не только при $x = 0$, $y = 0$.

2. Предположим, что параметр β и матрица C подобраны так, что выполняется условие

$$d'C^{-1}d = -\beta c'b.$$

Имеем тогда

$$\dot{v} = -(x - C^{-1}df)'C(x - C^{-1}df). \tag{3.8}$$

Мы видим, что $\dot{v} \leqslant 0$ как функция $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, f может обращаться в нуль только на одномерной прямой $x = C^{-1}df$ этого пространства. Но мы уже убедились, что $\dot{v}$ обращается в нуль на одномерной прямой $Ax + bf = 0$. Поэтому в данном случае эти прямые должны совпадать, и мы приходим к выводу, что $\dot{v}$ может обращаться в нуль только при выполнении условия (3.7). Теперь будем рассматривать σ как функцию x. Условие (3.7) задает положения равновесия системы (3.1). Если таких положений равновесия имеется только одно $x = 0$, то мы получаем абсолютную устойчивость этого положения в силу теоремы 3.4 гл. I. Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Если существует положительное значение β и положительная матрица C, удовлетворяющие условию $d'C^{-1}d = -\beta c'b$, и система (3.1) имеет только нулевое положение равновесия, то это положение равновесия будет абсолютно устойчивым.*

3. Представим $\dot{v}$ следующим образом:

$$\dot{v} = -S(x, \sigma) - \sigma f(\sigma), \tag{3.9}$$

где

$$S(x, \sigma) = x'Cx - 2f(\sigma)\left(d' + \frac{c'}{2}\right)x - \beta c'bf^2(\sigma).$$

Если $S(x, \sigma)$ как квадратичная форма $n+1$ переменной $x_1, \ldots, x_n, f(\sigma)$ будет определенно положительной функцией, то $\dot{v}$ будет определенно отрицательной функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если $r = -\beta c'b > 0$, то мы уже не получаем противоречия, требуя знакоопределенность $S(x, \sigma)$. Условия, обеспечивающие положительность $S(x, \sigma)$, будут условиями Сильвестра, причем, так как первые n условий выполняются автоматически, следует потребовать выполнения последнего условия

$$\begin{vmatrix} C & -\left(d+\frac{c}{2}\right) \\ -\left(d+\frac{c}{2}\right)' & -\beta c'b \end{vmatrix} > 0. \qquad (3.10)$$

Так же как и ранее, это условие можно свести к условию

$$-\beta c'b > \left(d+\frac{c}{2}\right)' C^{-1}\left(d+\frac{c}{2}\right). \qquad (3.11)$$

Итак, мы получаем окончательный результат.

Теорема 3.2. *Если можно подобрать положительное число* β *и положительную матрицу* C, *удовлетворяющие условию* (3.11), *то нулевое решение системы* (3.1) *абсолютно устойчиво.*

4. Рассмотрим теперь, предполагая $r > 0$, другой способ рассуждений. Обозначая $d + \frac{1}{2}c = e$, получим

$$S(x, y) = x'Cx - 2ye'x + ry^2 = r\left(y - \frac{1}{r}e'x\right)^2 + \\ + x'Cx - \frac{1}{r}(e'x)^2.$$

Так как $r > 0$, то для определенной положительности $S(x, y)$ достаточно, чтобы была определенно положительной форма

$$Q(x) = x'Cx - \frac{1}{r}(e'x)^2. \qquad (3.12)$$

Так как

$$e = d + \frac{c}{2} = Bb + \frac{\beta A' + E}{2}c, \qquad (3.13)$$

где E — единичная матрица, то приходим к выводу, что коэффициенты формы Q зависят от элементов матрицы A по квадратичному закону, поскольку коэффициенты матрицы B линейно зависят от элементов матрицы A. Если коэффициенты формы $Q(x)$ заданы, то из (3.12) можно получить $\frac{n(n+1)}{2}$ квадратных уравнений для определения элементов матрицы B. Если эта система квадратных уравнений имеет действительное решение, то квадратичная форма $x'Bx$ будет определенно положительной, так как определенно положительна форма

$$x'Cx = Q(x) + \frac{1}{r}(e'x)^2.$$

Можно показать, что система $\frac{n(n+1)}{2}$ квадратных уравнений, необходимых для определения матрицы B, может быть сведена к системе n уравнений для определения $e_1, \ldots, e_n$.

5. Рассмотрим теперь случай $r = \beta c'b = 0$. Очевидно,

$$S(x, f(\sigma)) = x'Cx - 2f(\sigma)\left(d + \frac{c}{2}\right)' x.$$

Если положить

$$d + \frac{c}{2} = Bb + \frac{\beta A' + E}{2} c = 0, \tag{3.14}$$

то получим

$$S(x, f(\sigma)) = x'Cx.$$

Полагая

$$x'Cx = x'Qx + (u'x)^2, \tag{3.15}$$

где $Q > 0$ — произвольная заданная матрица, найдем матрицу B, элементы которой будут квадратичными функциями $u_1, \ldots, u_n$. Подставляя b_{ij} в (3.14), получим систему n квадратных уравнений для определения $u_1, \ldots, u_n$.

6. В качестве примера рассмотрим одно уравнение

$$\dot{x} = -ax + bf(\sigma), \tag{3.16}$$

где $\sigma = cx$, x, a, b, c — скалярные величины, $a > 0$.

Беря функцию Ляпунова

$$v = \alpha x^2 + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma, \tag{3.17}$$

получим

$$\dot{v} = (2\alpha x + cf(\sigma))(-ax + bf(\sigma)).$$

Очевидно, $\dot{v}$ не может быть определенно отрицательной функцией переменных x и $f(\sigma)$.

Дальнейшие выкладки приводят к соотношению

$$\dot{v} = -2\alpha a x^2 + 2dxf(\sigma) + bcf^2(\sigma), \tag{3.18}$$

где

$$d = \alpha b - a\frac{c}{2}. \tag{3.19}$$

Выделяя в (3.18) полный квадрат, приходим к выражению

$$\dot{v} = -2\alpha a\left(x - \frac{d}{2\alpha a} f(\sigma)\right)^2 + \left(bc + \frac{d^2}{2\alpha a}\right) f^2(\sigma). \qquad (3.20)$$

Согласно первому способу мы должны приравнять коэффициент при $f^2(\sigma)$ к нулю, отсюда получим уравнение для определения α

$$bc + \frac{\left(\alpha b - a\frac{c}{2}\right)^2}{2\alpha a} = 0$$

или

$$b^2\alpha^2 + abc\alpha + \frac{a^2c^2}{4} = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид $\alpha = -\frac{ac}{b}$. Подставив найденное значение α в (3.20), получим

$$\dot{v} = \frac{c}{b}\left(x - \frac{b}{a} f(\sigma)\right)^2.$$

Если уравнение (3.16) имеет единственное состояние равновесия $x = 0$, то при $bc < 0$ получаем абсолютную устойчивость этого состояния.

Беря в уравнении (3.16) $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$, где $\varepsilon > 0$, убеждаемся, что необходимым условием абсолютной устойчивости является условие $bc \leqslant 0$.

Рассмотрим теперь другой способ решения задачи. Представим $\dot{v}$ следующим образом:

$$\dot{v} = -S(x, \sigma) - \sigma f(\sigma),$$

где

$$S(x, \sigma) = 2\alpha a x^2 - (2d + c)\, x f(\sigma) - bcf^2(\sigma).$$

Если функция $S(x, \sigma)$ будет определенно положительной функцией переменных x и $f(\sigma)$, то $\dot{v}$ будет определенно отрицательной функцией x. Условия определенной положительности функции $S(x, \sigma)$ имеют вид

$$\alpha a > 0, \quad \left(\frac{2d + c}{2}\right)^2 < -2\alpha abc.$$

Из последнего неравенства следует, что $bc < 0$. Используя (3.19), получим неравенство

$$\alpha^2 b^2 + \alpha b(a + 1)c + \frac{(a-1)^2}{4} c^2 < 0. \qquad (3.21)$$

Нетрудно видеть, что, так как $bc < 0$, уравнение

$$\alpha^2 b^2 + \alpha b (a+1) c + \frac{(a-1)^2}{4} c^2 = 0$$

всегда имеет положительный вещественный корень. Поэтому существует такое $\alpha > 0$, что неравенство (3.21) выполняется. Таким образом, приходим к ранее полученному выводу, что условие $bc < 0$ является достаточным условием абсолютной устойчивости нулевого решения уравнения (3.16).

§ 4. Системы прямого управления. Критические случаи

1. Рассмотрим случай, когда матрица линейной части системы прямого регулирования имеет простое нулевое характеристическое число. Подходящим выбором системы координат (предполагая, что первоначальная система имеет размерность $n+1$) можно представить исследуемую систему в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\eta} &= f(\sigma), \\ \sigma &= c'x + \gamma\eta. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

При $\gamma = 0$ система (4.1) есть система прямого регулирования, изученная ранее. Если же $\gamma \neq 0$, то в случае абсолютной устойчивости необходимо выполняется неравенство $\gamma < 0$.

В самом деле, подставляя в (4.1) $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$, где ε — достаточно малое положительное число, получим линейную систему, определитель которой имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} A + \varepsilon bc' & \varepsilon\gamma \\ \varepsilon c' & \varepsilon\gamma \end{vmatrix} = \varepsilon\gamma \det A.$$

Так как порядок определителя D выше на единицу порядка $\det A$, то, принимая во внимание устойчивость матрицы A и устойчивость линеаризованной системы, необходимо должны сделать вывод о противоположности знаков D и $\det A$, отсюда и следует отрицательность γ.

В системе (4.1) перейдем от координат (x, η) к координатам (x, σ), преобразование $x = x$, $\sigma = c'x + \gamma\eta$, осуществляющее этот переход, является невырожденным. Новая система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'Ax - \rho f(\sigma), \\ \rho &= -\gamma - c'b. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Система (4.2) является системой непрямого регулирования. Функция Ляпунова для нее запишется согласно § 2 следующим образом:

$$v(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Для производной получим выражение

$$\dot{v}(x, \sigma) = -x'Cx + 2f(\sigma)\, d'x - \rho f^2(\sigma),$$

где

$$d = Bb + \frac{A'c}{2}, \qquad \rho = -\gamma - c'b.$$

Согласно изложенному в § 2 получим неравенство

$$\rho > d'C^{-1}d,$$

дающее достаточное условие абсолютной устойчивости нулевого решения системы (4.2).

2. Для системы (4.1) функция Ляпунова может быть построена и непосредственно. Положим

$$v = x'Bx + \alpha\eta^2 + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma. \qquad \alpha > 0, \ \beta \geqslant 0, \qquad (4.3)$$

где, как и ранее, матрица B определяется уравнением (3.3). Используя третье уравнение системы (4.1), получим

$$v = x'Bx + \frac{\alpha}{\gamma^2}(\sigma - c'x)^2 + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Несложные выкладки дадут следующее выражение для производной $\dot{v}$, взятой в силу системы (4.1):

$$\dot{v} = -x'Cx + 2d_0'\, xf(\sigma) - \beta\rho f^2(\sigma) + \frac{2\alpha}{\gamma}\sigma f(\sigma), \qquad (4.4)$$

где

$$d_0 = Bb + \beta \frac{A'c}{2} - \frac{\alpha}{\gamma} c, \quad -\gamma - c'b = \rho.$$

Согласно теореме 3.2 гл. III из определенной отрицательности $\dot{v}$ при всевозможных характеристиках $f(\sigma) = h\sigma$, $0 < h < \infty$, следует определенная отрицательность $\dot{v}$ при выполнении условия $f(\sigma)\sigma > 0$, $\sigma \neq 0$. Полагая в (4.4) $f(\sigma) = h\sigma = y$, получим

$$\dot{v} = -x'Cx + 2d_0'xy + \frac{2\alpha}{\gamma h} y^2 - \beta\rho y^2.$$

Рассмотрим функцию

$$S(x, y) = x'Cx - 2d_0xy + \beta\rho y^2.$$

Если эта квадратичная форма будет определенно положительной функцией переменных x, y, то функция $\dot{v}$ будет определенно отрицательной функцией этих же переменных.

Как и ранее, условие определенной положительности функции $S(x, y)$ может быть записано следующим образом:

$$\beta\rho > d_0'C^{-1}d_0.$$

Это условие и является достаточным условием абсолютной устойчивости в рассматриваемом случае.

3. Рассмотрим далее случай, когда матрица линейной части имеет два нулевых корня. Считая систему (3.1) теперь $(n+2)$-мерной, подходящим выбором системы координат можем записать ее либо в форме

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\eta}_1 &= \beta_1 f(\sigma), \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_2 f(\sigma), \\ \sigma &= c'x + \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2, \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

либо в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\eta}_1 &= \beta_1 f(\sigma), \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_1 + \beta_2 f(\sigma), \\ \sigma &= c'x + \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Система (4.5) может иметь решение

$$\eta_1 = \eta_1^0,\ \eta_2 = \eta_2^0,\ \sigma = 0,\ x = 0,$$

где η_1^0, η_2^0 — подходящим образом выбранные постоянные, отличные от нуля. Следовательно, эта система имеет ненулевое положение равновесия и прямое управление не может решить задачу абсолютной устойчивости.

Обратимся к исследованию системы (4.6). Принимая за новые координаты переменные x, η_1, σ, получим новую систему, эквивалентную системе (4.6),

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \\ \dot{\eta}_1 &= \beta_1 f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'Ax + \gamma_2\eta_1 - \rho f(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

где

$$\rho = -(c'b + \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2).$$

Система (4.7) есть система непрямого регулирования типа (2.11). Функция Ляпунова для этой системы может быть взята в виде

$$v = \delta\eta_1^2 + x'Bx + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Для производной получим следующее выражение:

$$\dot{v} = -x'Cx + 2d'xf(\sigma) - \rho f^2(\sigma) + 2\left(\delta\beta_1 + \frac{\gamma_2}{2}\right)\eta_1 f(\sigma),$$

где

$$d = Bb + \frac{A'c}{2}.$$

Если $\gamma_2\beta_1 < 0$, что является необходимым условием абсолютной устойчивости, то можно подобрать положительное число δ такое, что будем иметь $\delta\beta_1 + \frac{\gamma_2}{2} = 0$. Таким образом, на основании теоремы 2.2 можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.1. *Если выполнены неравенства*

$$\gamma_2\beta_1 < 0 \quad и \quad \rho > d'C^{-1}d$$

и, кроме того,

$$\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma \to \infty \quad при \quad |\sigma| \to \infty,$$

то нулевое решение системы (4.6) *абсолютно устойчиво.*

§ 5. Случай многих исполнительных органов

1. В случае, когда регулируемая система имеет два и более исполнительных органов, для исследования устойчивости используют функции Ляпунова, в записи которых фигурируют несколько интегралов от нелинейностей (см. [35], [64], [63]).

В качестве примера системы непрямого регулирования рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf_1(\sigma_1) + gf_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_1 &= c'x - \rho_{11}f_1(\sigma_1) - \rho_{12}f_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_2 &= d'x - \rho_{21}f_1(\sigma_1) - \rho_{22}f_2(\sigma_2). \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Здесь A — квадратная $(n \times n)$-матрица, b, g, x — векторы-столбцы, c', d' — векторы-строки, σ_1, σ_2, ρ_{ik} — скалярные величины. Предполагая матрицу A устойчивой, снова находим положительную матрицу B, удовлетворяющую уравнению (2.3). Функцию Ляпунова ищем в следующем виде:

$$v = x'Bx + \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2)\,d\sigma_2. \tag{5.2}$$

Для производной $\dot{v}$ получим выражение

$$\begin{aligned} \dot{v} = -x'Cx &+ 2e_1'xf_1(\sigma_1) + 2e_2'xf_2(\sigma_2) - \\ &- \rho_{11}f_1^2(\sigma_1) - (\rho_{12} + \rho_{21})f_1(\sigma_1)f_2(\sigma_2) - \rho_{22}f_2^2(\sigma_2), \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$e_1 = Bb + \frac{c}{2}, \quad e_2 = Bg + \frac{d}{2}.$$

Чтобы функция $-\dot{v}$ была определенно положительной квадратичной формой переменных x, $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$, необходимо и достаточно, чтобы все главные последовательные миноры матрицы

$$\left\| \begin{matrix} C & -e_1 & -e_2 \\ -e_1' & -\rho_{11} & \frac{\rho_{12}+\rho_{21}}{2} \\ -e_2' & \frac{\rho_{12}+\rho_{21}}{2} & \rho_{22} \end{matrix} \right\|$$

были положительны.

Так как матрица C уже положительная, условия Сильвестра сводятся к двум неравенствам:

$$\begin{vmatrix} C & -e_1 \\ -e_1' & \rho_{11} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} C & -e_1 & -e_2 \\ -e_1' & \rho_{11} & \frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21}) \\ -e_2' & \frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21}) & \rho_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, первое неравенство эквивалентно следующему:

$$\rho_{11} > e_1' C^{-1} e_1.$$

Вводя в рассмотрение матрицу

$$C_1 = \left\| \begin{matrix} C & -e_1 \\ -e_1' & \rho_{11} \end{matrix} \right\|$$

и $(n+1)$-мерный вектор $\left\{e_2, -\frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21})\right\} = -e$, последнее неравенство Сильвестра можем записать в форме

$$\rho_{22} > e' C_1^{-1} e.$$

2. В более общем случае (см. [64]) рассматривается система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gf(u), \\ \dot{u} &= Hx + Rf(u), \end{aligned} \right\} \qquad (5.4)$$

где A — устойчивая $(n \times n)$-матрица, G, H, R — матрицы размерностей $n \times r$, $r \times n$, $r \times r$, соответственно, x — n-мерный вектор, u — r-мерная векторная величина, $f(u)$ — r-мерный вектор, причем проекции вектора $f(u)$, т. е. функции $f_k(u)$, удовлетворяют условию $f_k(u)u_k > 0$ при $u_k \neq 0$, $f_k(u) = 0$, если $u_k = 0$.

Функция Ляпунова в этом случае строится в виде

$$v = x'Bx + \int_0^u f(u)\,du,$$

где интеграл берется по лучу, соединяющему начало координат с точкой u. При этом условия отрицательности $\dot{v}$ снова сведутся и в данном случае к r неравенствам, вытекающим из условий Сильвестра.

§ 6. Пример применения к задаче абсолютной устойчивости векторной функции Ляпунова

Рассмотрим систему прямого управления следующего вида (см. [88]):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + b_1f_1(\sigma_1), \qquad \sigma_1 = c_1'y, \\ \dot{y} &= A_2y + b_2f_2(\sigma_2), \qquad \sigma_2 = c_2'x. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Здесь x, y — векторы размерности n_1, n_2, соответственно, A_1, A_2 — устойчивые матрицы порядка $n_1 \times n_1$, $n_2 \times \times n_2$, соответственно,

$$0 < f_1(\sigma)\,\sigma < k_1\sigma^2,\ 0 < f_2(\sigma)\,\sigma < k_2\sigma^2 \text{ при } \sigma \neq 0.$$

Применим к исследованию устойчивости системы (6.1) метод, описанный в § 6 гл. III. Для этого рассмотрим подсистемы

$$\dot{x} = A_1x, \tag{6.2}$$

$$\dot{y} = A_2y \tag{6.3}$$

и построим для них соответствующие функции Ляпунова

$$v_1 = x'B_1x, \qquad v_2 = y'B_2y,$$

где B_1, B_2 — положительно определенные матрицы. Функции v_1 и v_2 удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_{11}\|x\|^2 \leqslant v_1 \leqslant \lambda_{12}\|x\|^2, \qquad \lambda_{21}\|y\|^2 \leqslant v_2 \leqslant \lambda_{22}\|y\|^2.$$

Если B_i, $i = 1, 2$, найдены из уравнений

$$A_i'B_i + B_iA_i = -E,$$

где E — единичная матрица, то, беря производные от v_1 и v_2 в силу соответствующих систем (6.2) и (6.3), получим

$$\dot{v}_1 = -\|x\|^2, \quad \dot{v}_2 = -\|y\|^2.$$

Наконец, справедливы неравенства

$$\|b_i f_i(\sigma_i)\| \leqslant \|b_i\| k_i |\sigma_i|, \qquad i = 1, 2,$$

откуда получаем

$$\|b_1 f_1(\sigma_1)\| \leqslant \|b_1\| k_1 \|c_1\| \|y\|,$$

$$\|b_2 f_2(\sigma_2)\| \leqslant \|b_2\| k_2 \|c_2\| \|x\|.$$

Теперь воспользуемся теоремой 6.1 гл. III, а точнее примером к этой теореме. Здесь, принимая обозначения $l_{12} = k_1 \|b_1\| \|c_1\|$, $l_{21} = k_2 \|b_2\| \|c_2\|$, получим согласно (6.11) гл. III условия абсолютной устойчивости в виде

$$\lambda_{11}\lambda_{21} > 16\lambda_{12}^3\lambda_{22}^3 l_{12}^2 l_{21}^2.$$

ГЛАВА V

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Теоремы об устойчивости в целом нулевого решения одного нелинейного уравнения третьего порядка

1. Рассмотрим уравнение (см. [20])

$$\dddot{x} + \psi(x, \dot{x})\,\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \tag{1.1}$$

где функции $\psi(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x при всех значениях x и y, причем $f(0, 0) = 0$.

Уравнение (1.1) эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -f(x, y) - \psi(x, y)\,z. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = a\int_0^x f(x, 0)\,dx + \int_0^y f(x, y)\,dy + \frac{(z + ay)^2}{2} + a\int_0^y (\psi(x, y) - a)\,y\,dy. \tag{1.3}$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (1.2), имеет вид

$$\dot{v} = ay\,[f(x, 0) - f(x, y)] + y\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy + [a - \psi(x, y)]\,z^2 + ay\int_0^y \frac{\partial \psi}{\partial x}\,y\,dy. \tag{1.4}$$

Введем следующие обозначения:

$$F(x)=\int_0^x f(x,0)\,dx,\qquad \Phi(x,y)=\int_0^y [f(x,y)-f(x,0)]\,dy,$$

$$w(x,y)=a\int_0^x f(x,0)\,dx+\int_0^y f(x,y)\,dy=$$
$$=aF(x)+yf(x,0)+\Phi(x,y),$$

$$u(x,y)=4aF(x)\,\Phi(x,y)-y^2f^2(x,0).$$

Теорема 1.1. *Если можно указать положительную постоянную a такую, что удовлетворяются условия*

a) $a[f(x,y)-f(x,0)]\,y>y\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy$ *при* $y\neq 0$,

b) $f(x,0)\,x>0$ *при* $x\neq 0$, $\Phi(0,y)>0$ *при* $y\neq 0$,

c) $u(x,y)>0$ *при* $xy\neq 0$,

d) $\psi(x,y)\geqslant a$,

e) $y\frac{\partial\psi}{\partial x}\leqslant 0$ *при* $y\neq 0$,

f) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x,y)=\infty$ *при любом фиксированном* y,

то нулевое решение системы (1.2) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Для доказательства теоремы рассматриваем функцию Ляпунова (1.3). Очевидно, имеем $\dot v\leqslant 0$ при $y\neq 0$. Легко видеть, что множество $\dot v=0$ не содержит целых траекторий, кроме точки покоя $O(0,0,0)$. В самом деле, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — решение системы (1.2), целиком лежащее на множестве $\dot v=0$, то должны иметь тождество $y(t)\equiv 0$, из второго уравнения системы (1.2) следует, что $z(t)\equiv\dot z(t)\equiv 0$, а из третьего уравнения этой же системы получаем $f(x(t),0)=0$, откуда, принимая во внимание условие b) теоремы, получим $x(t)\equiv 0$.

Теперь покажем, что функция v является определенно положительной. Так как в силу условия b) имеем $F(x)>0$ при $x\neq 0$, то справедливо представление

$$w(x,y)=a\left[(F(x))^{1/2}+\frac{yf(x,0)}{2a(F(x))^{1/2}}\right]^2+\left[\Phi(x,y)-\frac{y^2f^2(x,0)}{4aF(x)}\right].\tag{1.5}$$

Из условия c) следует неотрицательность выражения, стоящего во второй квадратной скобке (1.5). Если $x \neq 0$, то при любом y $w(x, y) > 0$, если же $x = 0$, $y \neq 0$, то $w(0, y) > 0$ в силу условия b). Таким образом, функция $w(x, y)$ будет определенно положительной функцией переменных x и y, а функция v, заданная соотношением (1.3), будет определенно положительной функцией переменных x, y, z.

Чтобы воспользоваться теоремой 3.5 гл. I, нужно еще показать, что все траектории системы (1.1) ограничены при $t \to \infty$. Для этого выберем положительные числа l и N настолько большими, чтобы произвольная точка P_0 (x_0, y_0, z_0) оказалась лежащей в области D, определяемой неравенствами

$$v < l, \quad |y| < N. \tag{1.6}$$

Покажем, что область D является ограниченной областью. Из первого неравенства (1.6) следует неравенство

$$(ay + z)^2 \leqslant 2l, \tag{1.7}$$

из которого получаем ограниченность координаты z. Из неравенства $w(x, y) \leqslant l$ следует в силу условия f) теоремы ограниченность координаты x.

Покажем, что траектория точки P_0 не выйдет при $t > 0$ из области D. В самом деле, так как $\dot{v} \leqslant 0$, то выход этой точки из области D может произойти только через плоскую часть границы этой области, т. е. должен наступить такой момент времени T, что будем иметь $|y(T)| = N$. Но из неравенства (1.7), следует, что при достаточно большом значении N знак $y(T)$ должен быть противоположен знаку $z(T) = \dot{y}(T)$.

Если, например, $y(T) = N$, то из (1.7) получаем

$$z \leqslant -aN + \sqrt{2l},$$

если же $y(T) = -N$, то имеем

$$z \geqslant aN - \sqrt{2l}.$$

Таким образом, траектории системы (1.2) могут пересекать плоскую часть границы области D только снаружи внутрь. Итак, траектории системы (1.2) ограничены при $t > 0$, и мы можем воспользоваться теоремой 3.5 гл. I.

С л е д с т в и е 1.1. *Если вместо условия* f) *теоремы* 1.1 *выполнены условия*

$$\alpha)\ \lim_{|x|\to\infty}\int_0^x f(x,0)\,dx = \infty,$$

β) *функция* $g(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ *ограничена по* x *при любом фиксированном* y,

то при выполнении всех других условий теоремы 1.1 *нулевое решение системы* (1.2) *будет асимптотически устойчивым в целом.*

В самом деле, покажем, что выполнение условий α) и β) влечет выполнение условия f) теоремы 1.1. Из условия β) следует, что функция $\Phi(x, y) = \int_0^y [f(x, y) - f(x, 0)]\,dy$ будет ограниченной по x при любом фиксированном y. С другой стороны, так как справедливо неравенство $u \geqslant 0$, которое можно записать теперь в виде

$$0 \leqslant \frac{y^2 f^2(x, 0)}{4aF(x)} \leqslant \Phi(x, y),$$

то приходим к выводу об ограниченности при любом фиксированном y выражения $\frac{y f(x, 0)}{2a(F(x))^{1/2}}$. Учитывая условие α), приходим к выводу, что функция $w(x, y)$ в силу представления (1.5) будет обладать свойством $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty$ при любом фиксированном y.

С л е д с т в и е 1.2. *Если вместо условия* f) *теоремы* 1.1 *выполнены условия*

α) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\Phi(x, y) = \infty$ *при любом фиксированном* $y \neq 0$,

β) *существует такая положительная постоянная* M, *что* $F(x) \leqslant M$ *при* $-\infty < x < \infty$,

то нулевое решение системы (1.2) *асимптотически устойчиво в целом.*

В самом деле, из условий b) и c) теоремы 1.1 следует неравенство $\Phi(x, y) > 0$ при $y \neq 0$. Таким образом, справедливо представление

$$w(x, y) = \left[\Phi^{1/2}(x, y) + \frac{yf(x, 0)}{2\Phi^{1/2}(x, y)}\right]^2 + \left[aF(x) - \frac{y^2 f^2(x, 0)}{4\Phi(x, y)}\right].$$

В силу условия с) теоремы 1.1 выражение во второй квадратной скобке будет неотрицательным, отсюда следует неравенство при любом y

$$\frac{y^2 f^2(x, 0)}{4\Phi(x, y)} \leqslant aF(x) \leqslant aM \quad \text{или} \quad \frac{y f(x, 0)}{2\Phi^{1/2}(x, y)} \leqslant (aM)^{1/2}.$$

Следовательно, функция $w(x, y)$ будет обладать тем свойством, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty$ при любом фиксированном y.

Т е о р е м а 1.2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x и y, а функция $\psi(x, y)$ непрерывна по y и непрерывно дифференцируема по x при всех x и y и если существует такая положительная постоянная a, что могут быть выполнены условия*

a) $a\dfrac{\partial f}{\partial y} > \dfrac{\partial f}{\partial x}$ *при* $y \neq 0$,

b) $f(x, 0)\,x > 0$ *при* $x \neq 0$, $\Phi(0, y) > 0$ *при* $y \neq 0$,

c) $u(x, y) > 0$ *при* $xy \neq 0$,

d) $\psi(x, y) \geqslant a$,

e) $y\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \leqslant 0$ *при* $y \neq 0$,

f) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty$ *при любом фиксированном* y,

то нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Очевидно, теорема 1.2 непосредственно следует из теоремы 1.1, так как имеем для функции v, заданной выражением (1.3),

$$\dot{v} = y\int_0^y \left(\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + (a - \psi(x, y))\, z^2 + ay\int_0^y \frac{\partial \psi}{\partial x}\, y\, dy.$$

Из условий a), d) и e) следует знакоотрицательность функции $\dot{v}$. Далее проводится рассуждение, совершенно аналогичное доказательству теоремы 1.1.

Очевидно, из ограниченности функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ по x при любом фиксированном y следует в силу формулы конечных приращений ограниченность функции $g(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ по x при любом фиксированном y.

Используя рассуждения, проведенные при доказательстве следствий теоремы 1.1, получаем

Следствие 1.3. *Если вместо условия* f) *теоремы* 1.2 *выполнены условия*

$$\alpha)\quad \lim_{|x|\to\infty}\int_0^x f(x,0)\,dx = \infty,$$

β) *функция* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ограничена по* x *при любом фиксированном значении* y,

то при выполнении всех прочих условий теоремы 1.2 *нулевое решение системы* (1.2) *будет асимптотически устойчивым в целом.*

Следствие 1.4. *Если вместо условия* f) *теоремы* 1.2 *выполнены условия*

α) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\Phi(x,y)=\infty$ *при любом фиксированном* $y \neq 0$,

β) функция $F(x)=\int_0^x f(x,0)\,dx$ *ограничена по* x *при* $-\infty < x < \infty$,

то нулевое положение равновесия системы (1.2) *асимптотически устойчиво в целом.*

Теорема 1.3. *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $\psi(x,y)$ *непрерывны по* x *и* y, *функция* $f(x,y)$ *непрерывно дифференцируема по* x. *Если существует такое положительное число* a, *что будут выполнены условия*

$$\text{a)}\ 2a\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} > \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy + a^2(\psi(x,y)-2a)$$

при $y \neq 0$,

b) $f(x,0)\,x > 0$ *при* $x \neq 0$, $\Phi(0,y) > 0$ *при* $y \neq 0$,

c) $u(x,y) > 0$ *при* $xy \neq 0$,

d) $\psi(x,y) \geqslant 2a$,

e) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x,y)=\infty$ *при любом фиксированном* y,

то нулевое решение уравнения (1.1) *асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Для доказательства теоремы запишем систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z - ay, \\ \dot{z} &= -(\psi(x, y) - a)(z - ay) - f(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

эквивалентную уравнению (1.1), и рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = 2a\int_0^x f(x, 0)\,dx + \int_0^y f(x, y)\,dy + \frac{(z + ay)^2}{2}. \qquad (1.9)$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (1.8), имеет вид

$$\dot{v} = -\left[2a\,\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} - \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy - \right.$$

$$\left. - a^2(\psi(x, y) - 2a)\right] y^2 - (\psi(x, y) - 2a)\,z^2. \qquad (1.10)$$

Из условий a) и d) теоремы следует неравенство $\dot{v} \leqslant 0$. Так же как и при доказательстве теоремы 1.1, убеждаемся в отсутствии целых, отличных от точки покоя, траекторий на множестве $\dot{v} = 0$. Так как в силу условия b) $\int_0^x f(x, 0)\,dx > 0$ для любых x, а определенную положительность функции $w(x, y)$ можно доказать так же, как и ранее, то приходим к выводу, что функция v будет определенно положительной функцией.

Ограниченность положительных полутраекторий системы (1.8) может быть доказана точно так же, как и при доказательстве теоремы 1.1. Чтобы завершить доказательство теоремы, остается применить теорему 3.5 гл. I. Так же как и ранее, условие e) теоремы 1.3 может быть заменено либо условиями

α) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\int_0^x f(x, 0)\,dx = \infty$,

β) функция $g(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ ограничена по x при любом фиксированном y,

либо условиями

γ) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\Phi(x, y) = \infty$ при любом фиксированном y, δ) $F(x) = \int\limits_0^x f(x, 0)\,dx$ — ограниченная функция на множестве $-\infty < x < \infty$.

2. Поясним теперь, как была построена функция Ляпунова (1.3).

В статье [13] было рассмотрено уравнение

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\varphi(0) = f(0) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -f(x) - \varphi(y) - az. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Соответствующая линейная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -cx - by - az. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Функция Ляпунова для этой системы может быть найдена в виде

$$v = \frac{ac}{2}x^2 + cxy + \frac{b}{2}y^2 + \frac{(z + ay)^2}{2}, \tag{1.14}$$

причем, беря производную в силу линейной системы (1.13), получим

$$\dot{v} = (c - ab)\,y^2.$$

Используя рассуждения, проведенные в п. 5 § 4 гл. III, нетрудно получить функцию Ляпунова и для нелинейной системы (1.12). Эта функция будет иметь вид

$$v = a\int\limits_0^x f(x)\,dx + f(x)\,y + \int\limits_0^y \varphi(y)\,dy + \frac{(z + ay)^2}{2}, \tag{1.15}$$

причем в силу системы (1.12) получим

$$\dot{v} = \left[f'(x) - a\frac{\varphi(y)}{y}\right]y^2.$$

Теорема 1.4. *Если $a > 0$ и выполнены условия*

a) $a\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$ *при* $y \neq 0$,

b) $f(x)\,x > 0$ *при* $x \neq 0$,

c) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \int\limits_0^x f(x)\,dx = \infty$,

то нулевое положение равновесия системы (1.12) *асимптотически устойчиво в целом.*

Для доказательства теоремы воспользуемся следствием 1.1 теоремы 1.1. Так как $f(x, y) - f(x, 0) = \varphi(y)$ в данном случае и $\psi(x, y) = a$, то все условия теоремы 1.1 и следствия 1.1 легко проверяются; следует, пожалуй, более подробно остановиться на проверке условия c) теоремы 1.1.

В данном случае

$$u(x, y) = 4a\int\limits_0^x f(x)\,dx\int\limits_0^y \varphi(y)\,dy - y^2f^2(x) =$$

$$= 4\int\limits_0^x f(x)\left[\int\limits_0^y (a\varphi(y) - yf'(x))\,dy\right]dx. \qquad (1.16)$$

В силу условия a) доказываемой теоремы внутренний интеграл будет положительным, в силу условия b) функция $u(x, y)$ будет также неотрицательной, а функция

$$w(x, y) = a\int\limits_0^x f(x)\,dx + f(x)\,y + \int\limits_0^y \varphi(y)\,dy$$

будет определенно положительной функцией переменных x и y. Заметим также, что $\int\limits_0^y \varphi(y)\,dy > 0$ при $y \neq 0$. В самом деле, из условия b) теоремы следует, что $f'(x)$ принимает положительные значения, а из условия a) вытекает неравенство $\varphi(y)\,y > 0$, обеспечивающее положительность рассматриваемого интеграла. Итак, все условия следствия 1.1 теоремы 1.1 выполнены, что и завершает доказательство нашей теоремы.

3. С. Н. Шиманов [118] рассмотрел уравнение

$$\dddot{x} + \psi(x, \dot{x})\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \tag{1.17}$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - by - \psi(x, y) z. \tag{1.18}$$

Соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = cx - by - az. \tag{1.19}$$

Для этой системы может быть построена функция Ляпунова вида

$$2v = (bz + cy)^2 + b(cx + by)^2 + c(ab - c)y^2, \tag{1.20}$$

причем в силу системы (1.19) получим

$$\dot{v} = -b(ab - c)z^2.$$

Пользуясь аналогией с линейной системой, С. Н. Шиманов строит свою функцию для системы (1.18) в виде

$$2v = (bz + cy)^2 + b(cx + by)^2 + c\left[2b\int_0^y \psi(x, y)\, y\, dy - cy^2\right], \tag{1.21}$$

причем в силу системы (1.18) получим

$$\dot{v} = -b(\psi(x, y)b - c)z^2 + bcy\int_0^y \frac{\partial\psi}{\partial x} y\, dy. \tag{1.22}$$

Условия устойчивости в целом в данном случае могут быть записаны следующим образом:

$$\psi(x, y) > \frac{c}{b}, \quad y\frac{\partial\psi}{\partial x} \leqslant 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{1.23}$$

Эти условия могут быть получены также и из теоремы 1.1, при этом следует положить в записи функции Ляпунова и условий устойчивости $f(x, y) = by + cx$ и $a = c/b$.

Уже в статье [118] было показано, что обычные ограничения, накладываемые на поведение функции Ляпунова на бесконечности, могут быть в данном случае опущены.

4. А. И. Огурцов [81] рассматривал уравнение

$$\dddot{x} + \psi(x, \dot{x})\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \tag{1.24}$$

где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $\varphi(y)$ непрерывна, $\psi(x, y)$ непрерывна и имеет первую производную по x, $\varphi(0) = f(0) = 0$.

Для соответствующей системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -\psi(x, y)\, z - \varphi(y) - f(x) \end{aligned}\right\}$$

строится функция Ляпунова

$$v = \alpha \int_0^x f(x)\, dx + f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy + \frac{1}{2}(\alpha y + z)^2 + \alpha \int_0^y [\psi(x, y) - \alpha]\, y\, dy,$$

где α — некоторая положительная постоянная.

Нетрудно подсчитать, что

$$\dot{v} = -\left[\alpha \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x)\right] y^2 - [\psi(x, y) - \alpha]\, z^2 + \alpha y \int_0^y \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}\, y\, dy.$$

Условия асимптотической устойчивости в данном случае имеют согласно теореме 1.1 и ее следствию 1.1 вид

a) $f(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\psi(x, y) \geqslant \alpha > 0$,

c) $\alpha \dfrac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$ при $y \neq 0$,

d) $y \dfrac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \leqslant 0$,

e) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \displaystyle\int_0^x f(x)\, dx = \infty$.

Однако в работах [80], [81] условие типа e) было записано в более ограничительной форме, здесь же и ниже, по существу, приводятся более поздние результаты Езейло (см. [140]).

Если $\psi(x, y) = a = \text{const}$, то, беря $\alpha = a$, получаем условия теоремы 1.4, если же функция $\psi(x, y)$ отлична от постоянной, но $\varphi(\dot{x}) = b\dot{x}$, $f(x) = cx$, то, заменяя условия b) и c) неравенствами $\psi(x, y) > \alpha$, $ab - c > 0$, получаем, полагая $\alpha = c/b$, условия (1.23).

Огурцов А. И. в той же работе, сводя уравнение (1.24) к системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z - \alpha y, \\ \dot{z} &= -[\psi(x, y) - \alpha]\, z - \varphi(y) - \\ &\qquad - \alpha\, [\psi(x, y) - \alpha]\, y - f(x), \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

использует функцию Ляпунова следующего вида:

$$v = 2\alpha \int_0^x f(x)\, dx + f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy + \frac{1}{2}(\alpha y + z)^2,$$

где α — некоторая положительная постоянная.

Производная этой функции, взятая в силу системы (1.25), имеет вид

$$\dot{v} = -\left\{2\alpha \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) - \alpha^2 [\psi(x, y) - 2\alpha]\right\} y^2 - \\ - [\psi(x, y) - 2\alpha]\, z^2.$$

Этот новый вариант дает следующие достаточные условия устойчивости в целом (см. [140]), вытекающие из теоремы 1.3:

a) $f(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\psi(x, y) \geqslant 2\alpha > 0$,

c) $2\alpha \dfrac{\varphi(y)}{y} - f'(x) - \alpha^2 [\psi(x, y) - 2\alpha] > 0$ при $y \neq 0$,

d) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \displaystyle\int_0^x f(x)\, dx = \infty$.

Как видим, здесь исчезло ограничение на производную по x функции $\psi(x, y)$. Если $\psi(x, y) = \text{const} = a$, то, полагая $a = 2\alpha$, получаем условия теоремы 1.4.

В работе [80] рассмотрено еще более общее уравнение

$$\dddot{x} + \psi(x, \dot{x})\, \ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + F(x, \dot{x}) + f(x) = 0. \tag{1.26}$$

эквивалентное системе

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= z,\\ \dot{z} &= -\psi(x, y)\, z - \varphi(y) - F(x, y) - f(x).\end{aligned}\right\} \quad (1.27)$$

Предположим, что $F(x, 0) = \varphi(0) = f(0) = 0$.

Здесь с помощью функции Ляпунова

$$v = \int_0^x f(x)\, dx + f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy + \frac{(y+z)^2}{2} + \\ + \int_0^y [\psi(x, y) - 1]\, y\, dy + \int_0^y F(x, y)\, dy,$$

имеющей производную

$$\dot{v} = -\left[\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x)\right] y^2 + y \int_0^y \frac{\partial \psi}{\partial x}\, y\, dy - [\psi(x, y) - 1]\, z^2 - \\ - yF(x, y) + y \int_0^y \frac{\partial F}{\partial x}\, dy,$$

получены следующие условия устойчивости в целом:

a) $f(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$ при $y \neq 0$,

c) $yF(x, y) > 0$, при $y \neq 0$,

d) $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \leqslant 0$, $\psi(x, y) \geqslant 1$,

e) $\lim\limits_{r \to \infty} w(x, y) = \infty$,

где

$$w(x, y) = a \int_0^x f(x)\, dx + f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Очевидно, учитывая предыдущие результаты, условие e) А. И. Огурцова можно улучшить и заменить условием

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_0^x f(x)\, dx = \infty.$$

5. Для уравнения

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \qquad (1.28)$$

эквивалентного системе

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = z, \ \dot{z} = -f(x, y) - az, \qquad (1.29)$$

И. В. Гайшун (см. [26]) строит функцию Ляпунова в форме

$$v = a\int_0^x f(x, 0)\,dx + \int_0^y f(x, y)\,dy + \frac{(z + ay)^2}{2}. \qquad (1.30)$$

Беря производную функции v в силу системы (1.29), получим

$$\dot{v} = ay\,[f(x, 0) - f(x, y)] + y\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy. \qquad (1.31)$$

Условия устойчивости в данном случае имеют вид

$$\left.\begin{array}{ll} a\,[f(x, y) - f(x, 0)]\,y > y\displaystyle\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy & \text{при } y \neq 0, \\ f(x, 0)\,x > 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \Phi(0, y) > 0 & \text{при } y = 0, \\ u(x, y) = 4aF(x)\,\Phi(x, y) - y^2 f^2(x, 0) > 0 & \text{при } xy \neq 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \ \text{при любом фиксированном } y. & \end{array}\right\} \qquad (1.32)$$

Здесь нами приняты обозначения, введенные в п. 1 данного параграфа.

Функция (1.30) может быть построена по методу Уокера и Кларка, описанному в п. 14 § 4 гл. III.

6. Рассмотрим уравнение (см. [140])

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = 0, \qquad (1.33)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, $f(0) = 0$, $a > 0$ $0 < \frac{f(x)}{x} < ab$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x} = y - ax, \ \ \dot{y} = z - bx, \quad \dot{z} = -f(x). \qquad (1.34)$$

Функция Ляпунова

$$v = \frac{1}{2}((a^2 - b)x - ay + z)^2 + \frac{b}{2}(y - ax)^2 + \frac{z^2}{2} + \\ + a\int_0^x f(x)\,dx$$

будет, очевидно, определенно положительной и бесконечно большой, причем имеем в силу системы (1.34)

$$\dot{v} = -a\left\{(a^2 - b)x - ay + z + \frac{f(x)}{a}\right\}^2 - \frac{f(x)}{a}(abx - f(x)).$$

Очевидно, $\dot{v} \leqslant 0$ и множество $\dot{v} = 0$ не содержит целых траекторий. В силу теоремы 3.4 гл. I нулевое решение (1.33) будет асимптотически устойчивым в целом.

§ 2. Примеры построения функций Ляпунова для некоторых нелинейных уравнений третьего порядка

1. Уравнение (см. [13])

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0, \tag{2.1}$$

где $\varphi(y)$ — непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$, является частным случаем уравнения (1.11), рассмотренного в § 1. Эквивалентная система имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - \varphi(y) - az. \tag{2.2}$$

Условия устойчивости в целом можно записать в данном случае в виде

$$a > 0, \qquad c > 0, \qquad \frac{\varphi(y)}{y} > \frac{c}{a}\,(y \neq 0). \tag{2.3}$$

В. А. Плисс [90] был первым, кто указал, что требование типа f) теоремы 1.1 является здесь излишним.

2. Уравнение (см. [42], [81])

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + f(x)\dot{x} + cx = 0 \tag{2.4}$$

сводится заменой

$$X = -\frac{1}{c}\left(\ddot{x} + a\dot{x} + \int_0^x f(x)\,dx\right), \qquad Y = x, \qquad Z = \dot{x}$$

к системе

$$\dot{X} = Y,\ \dot{Y} = Z,\ \dot{Z} = -cX - F(Y) - aZ, \quad (2.5)$$

где $F(Y) = \int\limits_0^Y f(y)\,dy.$

Система (2.5) совпадает с системой (2.2), поэтому условия устойчивости нулевого решения в целом имеют в данном случае вид

$$a > 0, c > 0, \qquad \frac{F(x)}{x} > \frac{c}{a} \text{ при } x \neq 0. \quad (2.6)$$

Как видим, здесь также отсутствует ограничение на поведение функции $F(x)$ на бесконечности, фигурирующее в работах [42] и [81].

3. Рассмотрим уравнение (см. [82])

$$\dddot{x} + f(\ddot{x}) + b\dot{x} + cx = 0, \quad (2.7)$$

где $b > 0$, $c > 0$, функция $f(\eta)$ дифференцируема для всех значений аргумента и, кроме того, $f(0) = 0$.

Вводя новые переменные $\dot{x} = X$, $\ddot{x} = Y$, $\dddot{x} = Z$, сведем уравнение (2.7) к системе

$$\dot{X} = Y,\ \dot{Y} = Z,\ \dot{Z} = -cX - bY - f'(Y)Z. \quad (2.8)$$

Система (2.8) является частным случаем системы (1.18). Поэтому условия устойчивости в данном случае имеют вид

$$b > 0, \quad c > 0, \quad bf'(\eta) > c. \quad (2.9)$$

Заметим, что если $\lim X = \lim Y = \lim Z = 0$ при $t \to \infty$, то из (2.7) следует $\lim x = 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, из устойчивости в целом нулевого решения системы (2.8) следует устойчивость в целом нулевого решения уравнения (2.7).

Во всех перечисленных случаях очевидным образом можно построить соответствующую функцию Ляпунова.

4. Рассмотрим уравнение (см. [26])

$$\dddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad (2.10)$$

где функция $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема по x, y, z при любых значениях переменных и $F(0, 0, 0) = 0$.

Уравнение (2.10) эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -F(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Введем обозначения

$$F_1(x, y, z) = F(x, y, z) - az, \qquad \Phi(x) = \int_0^x F(x, 0, 0)\,dx,$$

$$H(x, y, z) = \int_0^y [F_1(x, y, z) - F_1(x, 0, z)]\,dy,$$

$$w(x, y, z) = a\int_0^x F(x, 0, 0)\,dx + \int_0^y F_1(x, y, z)\,dy.$$

Очевидно, имеем

$$w(x, y, z) = a\Phi(x) + yF_1(x, 0, z) + H(x, y, z).$$

Теорема 2.1. *Если можно указать такое положительное число a, что будут выполнены условия*

a) $F(x, 0, 0)\,x > 0$ *при* $x \neq 0$, $\quad H(0, y, z) > 0$ *при* $y \neq 0$,

b) $F(x, y, z)\displaystyle\int_0^y \frac{\partial F}{\partial z}\,dy > ayF(x, 0, 0) + a^2yz + y\int_0^y \frac{\partial F}{\partial x}\,dy$ *при* $y \neq 0$,

c) $u(x, y, z) = 4a\,\Phi(x)\,H(x, y, z) - y^2F_1^2(x, 0, z) > 0$ *при* $xy \neq 0$,

d) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y, z) = \infty$ *при любых фиксированных значениях* y, z,

то нулевое решение системы (2.11) *асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Для доказательства рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = a\int_0^x F(x, 0, 0)\,dx + \frac{a^2}{2}y^2 + \int_0^y F_1(x, y, z)\,dy + \frac{z^2}{2} + ayz. \tag{2.12}$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (2.11), имеет вид

$$\dot{v} = ayF(x, 0, 0) + a^2yz + y\int_0^y \frac{\partial F}{\partial x}\,dy - F(x, y, z)\int_0^y \frac{\partial F}{\partial z}\,dy. \tag{2.13}$$

Из условия b) теоремы следует, что $\dot{v} \leqslant 0$. Нетрудно проверить, что множество точек, на котором $\dot{v} = 0$, не содержит целых траекторий, кроме начала координат. В самом деле, если на множестве $\dot{v} = 0$ лежит целая траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то будем иметь $y(t) \equiv 0$; из второго уравнения системы (2.11) получим $z(t) \equiv 0$, а из третьего уравнения следует $F(x(t), 0, 0) \equiv 0$, откуда в силу условия a) теоремы получим $x(t) \equiv 0$.

Легко видеть, далее, что при $x \neq 0$ $\Phi(x) > 0$ в силу условия a), поэтому справедливо представление

$$w(x, y, z) = a\left[\Phi^{1/2}(x) + \frac{yF_1(x, 0, z)}{2a\Phi^{1/2}(x)}\right]^2 + \left[H(x, y, z) - \frac{y^2F_1^2(x, 0, z)}{4a\Phi(x)}\right]. \tag{2.14}$$

Из условия c) следует, что выражение, стоящее во второй скобке, неотрицательно, кроме того, $w(x, 0, 0) > 0$, $w(0, y, z) > 0$. Следовательно, функция

$$v(x, y, z) = w(x, y, z) + \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{z^2}{2} + ayz$$

будет определенно положительной функцией. Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1.1 гл. V, легко показать, что в нашем случае все решения системы (2.11) ограничены. Таким образом, в данном случае следует для завершения доказательства привлечь теорему 3.5 гл. I.

С л е д с т в и е 2.1. *Асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения системы* (2.11) *будет иметь место и в том случае, если при выполнении всех прочих условий теоремы* 2.1 *условие* d) *заменить требованиями*

$$\alpha)\ \lim_{|x|\to\infty}\int_0^x F(x, 0, 0)\,dx = \infty,$$

β) *функция* $g(x, y, z) = F_1(x, y, z) - F_1(x, 0, z)$ *ограничена по* x *при фиксированных значениях* y *и* z.

В самом деле, из условия β) и неравенства с) теоремы 2.1 следует неравенство

$$\frac{y^2 F_1^2(x, 0, z)}{4a\Phi(x)} \leqslant H(x, y, z),$$

где функция $H(x, y, z)$ ограничена по x при любых фиксированных значениях y и z. Отсюда следует ограниченность по x выражения

$$\frac{yF_1(x, 0, z)}{2(a\Phi(x))^{1/2}}.$$

Но это значит, что функция $w(x, y, z)$ в силу представления (2.14) обладает согласно условию α) тем свойством, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x, y, z) = \infty$ при любых фиксированных значениях y и z. Остается теперь воспользоваться теоремой 2.1.

Следствие 2.2. *Если при выполнении всех прочих условий теоремы* 2.1 *заменить условие* d) *требованиями*

α) $\lim\limits_{|x|\to\infty} H(x, y, z) = \infty$ *при любых фиксированных значениях* y, z;

β) $\Phi(x)$ — *ограниченная функция при* $-\infty < x < \infty$, *то нулевое решение системы* (2.11) *будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.*

В самом деле, из условия с) теоремы следует неравенство

$$\frac{y^2 F_1^2(x, 0, z)}{4H(x, y, z)} \leqslant a\Phi(x) \leqslant M.$$

Из представления

$$w(x, y, z) = \left[(H(x, y, z))^{1/2} + \frac{yF_1(x, 0, z)}{2(H(x, y, z))^{1/2}}\right]^2 + \\ + \left[a\Phi(x) - \frac{y^2 F_1^2(x, 0, z)}{4H(x, y, z)}\right]$$

получаем свойство d) теоремы 2.1, что и завершает доказательство.

§ 3. Функции Ляпунова для нелинейных уравнений четвертого порядка

1. Здесь будут рассмотрены функции Ляпунова и критерии асимптотической устойчивости нулевого решения некоторых нелинейных уравнений четвертого порядка Основные результаты этого параграфа принадлежат А. И. Огурцову (см. [80] — [82]).

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + d\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = 0, \tag{3.1}$$

где a, b, c, d — постоянные.

Условия Рауза — Гурвица, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (3.1), имеют вид

$$d > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ bcd - b^2 - ad^2 > 0. \tag{3.2}$$

Наряду с уравнением (3.1) рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + d\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + ax = 0, \tag{3.3}$$

где функция $\varphi(y)$ непрерывна для всех значений аргумента и $\varphi(0) = 0$. Уравнение (3.3) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = u,\ \dot{u} = -ax - \varphi(y) - cz - du. \tag{3.4}$$

Рассмотрим функцию

$$v = \frac{ac}{2}x^2 + a\,dxy + \frac{c^2-2a}{2}y^2 + 2axz + c\,dyz + \frac{d^2+c}{2}z^2 + cyu + dzu + u^2 + d\int_0^y \varphi(y)\,dy. \tag{3.5}$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (3.4), имеет вид

$$\dot{v} = ady^2 - c\varphi(y)\,y - 2\varphi(y)u - du^2. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Если* $a > 0$, $d > 0$ *и выполнены условия*

a) $\varphi(y)\,y > 0$ *при* $y \neq 0$,

b) $cd\frac{\varphi(y)}{y} - \left[\frac{\varphi(y)}{y}\right]^2 - ad^2 > 0$ *при* $y \neq 0$, *что нулевое решение системы* (3.4) *асимптотически устойчиво в целом.*

Из условия b) следует, что $\frac{\varphi(y)}{y} > \frac{ad}{c}$, поэтому имеем

$$v = \frac{ac}{2}x^2 + a\,dxy + \frac{1}{2}\left(c^2 - 2a + \frac{ad^2}{c}\right)y^2 + 2axz +$$

$$+ cdyz + \frac{d^2 + c}{2}z^2 + cyu + dzu + u^2 +$$

$$+ d\int_0^y \left[\frac{\varphi(y)}{y} - \frac{ad}{c}\right] y\,dy.$$

Очевидно, в последнем выражении интеграл положителен, а квадратичная форма, стоящая перед интегралом, тоже будет определенно положительной, если при проверке критерия Сильвестра учесть неравенство $c^2 - 4a > 0$, вытекающее из условия b). Но так как всякая определенно положительная квадратичная форма будет и бесконечно большой, то приходим к выводу, что функция v будет определенно положительной бесконечно большой функцией.

Легко видеть, что имеет место представление

$$\dot{v} = \frac{1}{d}\left(ad - cd\frac{\varphi(y)}{y} + \left(\frac{\varphi(y)}{y}\right)^2\right)y^2 - \frac{1}{d}\left(\varphi(y) + \frac{u}{d}\right)^2,$$

откуда с учетом условия b) и следует знакоотрицательность $\dot{v}$. Так как множество $y = 0$, $u = 0$, на котором $\dot{v} = 0$, не содержит целых траекторий, отличных от начала координат, то можно воспользоваться теоремой 3.4 гл. I.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + d\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + \psi(x)\frac{dx}{dt} + ax = 0. \tag{3.7}$$

Заменой переменных

$$X = -\frac{1}{a}\left(\dddot{x} + d\ddot{x} + c\dot{x} + \int_0^x \psi(x)\,dx\right),$$

$$Y = x, \qquad Z = \dot{x}, \qquad U = \ddot{x}$$

сведем уравнение (3.7) к эквивалентной системе

$$\dot{X} = Y,\ \dot{Y} = Z,\ \dot{Z} = U,\ \dot{U} = -aX - F(Y) - cZ - dU, \tag{3.8}$$

где

$$F(Y)=\int\limits_0^Y \psi(\eta)\,d\eta.$$

Система (3.8) совпадает с системой (3.4), поэтому условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (3.8) запишутся следующим образом:

$$a>0,\ d>0,\ xF(x)>0\quad (x\neq 0),$$
$$cd\frac{F(x)}{x}-\left[\frac{F(x)}{x}\right]^2-ad^2>0\qquad (x\neq 0).$$

Эти условия отличаются от условий, приведенных в [81]. В указанной работе А. И. Огурцов для эквивалентной уравнению (3.7) системы

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=z,\\ \dot{z}&=u-dz-\int\limits_0^x\psi(x)\,dx,\\ \dot{u}&=-cz-ax\end{aligned}\right\}$$

строит функцию Ляпунова

$$\begin{aligned}2v={}&(c^2-2a)x^2+\left(d^2+\frac{c^3}{a}-3c\right)y^2+2cxz+2dyz+\\ &+2z^2-2dxu+2\left(\frac{c^2}{a^2}-2\right)yu+\frac{c}{a}u^2+2d\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x\psi(x)dx=\\ &=\left(c^2-2a+\frac{ad^2}{c}\right)x^2+\left(d^2+\frac{c^3}{a}-3c\right)y^2+2cxz+\\ &+2dyz+2z^2-2dxu+2\left(\frac{c^2}{2}-a\right)yu+\frac{c}{a}u^2+\\ &+2d\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x\left[\psi(x)-\frac{ad}{c}\right]dx.\end{aligned}$$

Для производной получаем выражение

$$\begin{aligned}\dot{v}&=a\,dx^2-cxF(x)-2zF(x)-dz^2=\\ &=-\frac{1}{d}\left(cdxF(x)-F^2(x)-a\,dx^2\right)-\frac{1}{d}(F(x)+dz)^2,\end{aligned}$$

где

$$F(x) = \int_0^x \psi(x)\, dx.$$

Так как

$$cdxF(x) - F^2(x) - a\,d^2x^2 = x\int_0^x [c\,d\psi(x) - \psi^2(x) - ad^2]\,dx +$$
$$+ x\int_0^x \psi^2(x)\,dx - \left[\int_0^x \psi(x)\,dx\right]^2,$$

а в силу неравенства Буняковского

$$x\int_0^x \psi^2(x)\,dx - \left[\int_0^x \psi(x)\,dx\right]^2 \geqslant 0,$$

то получаем следующие условия устойчивости в целом в данном случае:

$$a > 0,\ d > 0,\ \psi(x) > 0,\ cd\,\psi(x) - \psi^2(x) - ad^2 > 0.$$

Этот последний результат, очевидно, не улучшает полученные выше условия.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = 0, \tag{3.9}$$

где функция $\psi(y, z)$ непрерывна по y, z и непрерывно дифференцируема по y для всех значений аргументов. Уравнение (3.9) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} \dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\psi(y, z)\,u - cz - by - ax. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Рассмотрим функцию

$$v = a^2x^2 + abxy + \frac{1}{2}(ac + b^2)\,y^2 + caxz + bcyz +$$
$$+ \frac{1}{2}(c^2 - 2a)\,z^2 + 2ayu + bzu + \frac{c}{2}u^2 + b\int_0^z \psi(y, z)\,z\,dz. \tag{3.11}$$

Полная производная по времени, взятая в силу системы (3.10), имеет вид

$$\dot{v} = -aby^2 - 2a\psi(y, z)\,yu + bu^2 - c\psi(y, z)\,u^2 + bz\int_0^z \frac{\partial\psi}{\partial y} z\,dz. \tag{3.12}$$

Теорема 3.2. *Если $a > 0$, $b > 0$ и функция $\psi(y, z)$ удовлетворяет условиям*

a) $\psi(y, z) > 0$,

b) $b\,c\,\psi(y, z) - b^2 - a\psi^2(y, z) > 0$,

c) $z\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \leqslant 0$,

то нулевое решение системы (3.10) *асимптотически устойчиво в целом.*

В самом деле, из условия b) следует неравенство $\psi(y, z) > \dfrac{b}{c}$, поэтому

$$v = a^2x^2 + abxy + \frac{1}{2}(ac + b^2)\,y^2 + acxz + bcyz + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(c^2 - 2a + \frac{b^2}{c}\right)z^2 + 2ayu + bzu + \frac{c}{2}u^2 + {}$$
$$+ b\int_0^z \left[\psi(y, z) - \frac{b}{c}\right] z\,dz.$$

Здесь интеграл положителен при $z \neq 0$, а стоящая перед ним квадратичная форма будет определенно положительной (и, следовательно, бесконечно большой). Этот факт проверяется с помощью критерия Сильвестра, если учесть неравенство $c^2 - 4a > 0$, вытекающее из условия b).

Принимая во внимание представление

$$\dot{v} = -\frac{1}{b}(bc\psi - b^2 - a\psi^2)\,u^2 - \frac{a}{b}(\psi u + by)^2,$$

делаем вывод, что $\dot{v} \leqslant 0$, причем $\dot{v} = 0$ на множестве $u = 0$, $y = 0$, не содержащем целых траекторий, кроме точки O (0, 0, 0). Теперь применяем теорему 3.4 гл. I.

Замечание. Если функция $\psi = \psi(\ddot{x})$ зависит только от второй производной, то условия теоремы 3.2 имеют вид

$$a > 0,\ b > 0,\ \psi(z) > 0,\ bc\,\psi(z) - b^2 - a\psi^2(z) > 0, \tag{3.13}$$

т. е. являются обобщенными условиями Рауза — Гурвица в чистом виде.

4. Рассмотрим, далее, уравнение (см. [82])

$$\frac{d^4x}{dt^4}+f\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)+c\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+ax=0, \qquad (3.14)$$

где функция $f(u)$ непрерывно дифференцируема и $f(0)=0$. Введем новые переменные

$$X=\dot{x},\ Y=\dot{X},\ Z=\dot{Y},\ U=\dot{Z},$$

тогда эквивалентная уравнению (3.14), система запишется в виде

$$\dot{X}=Y,\ \dot{Y}=Z,\ \dot{Z}=U,$$
$$\dot{U}=-aX-bY-cZ-f'(Z)U.$$

Эта система является частным случаем системы (3.10), поэтому, учитывая условия (3.13), получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3.3. *Если* $a>0$, $b>0$ *и выполнены условия*

a) $f'(Z)>0$,

b) $bcf'(Z)-b^2-a(f'(Z))^2>0$,

то нулевое решение уравнения (3.14) *асимптотически устойчиво в целом.*

В работе [82] уравнение (3.14) заменяется эквивалентной системой

$$\dot{X}=Y,\ \dot{Y}=Z,\ \dot{Z}=U-f'(Y)Z,$$
$$\dot{U}=-cZ-bY-aX. \qquad (3.15)$$

Для этой системы строится функция Ляпунова

$$v=\frac{1}{2}(b^2+ac)X^2+bcXY+\frac{1}{2}(c^2-2a)Y^2+2aXZ+$$
$$+bYZ+\frac{c}{2}Z^2+bXU+cYU+U^2+b\int_0^Y f'(\eta)\,\eta\,d\eta.$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (3.15), имеет вид

$$\dot{v}=-abX^2-2af'(Y)XZ-cf'(Y)Z^2+bZ^2.$$

При этом получаются точно те же условия, которые даны в формулировке теоремы 3,3, ГЛАВА VI

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В настоящей главе с помощью специально построенных функций Ляпунова мы рассмотрим некоторые вопросы устойчивости нелинейных систем третьего порядка. При этом функции Ляпунова для рассматриваемых систем будем строить в виде «интеграл от нелинейности плюс квадратичная форма координат фазового пространства».

Отметим, что материал этой главы излагается в основном по работам [91], [48], [110], [111].

§ 1. Одна общая теорема

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

правые части которой определены, непрерывны и удовлетворяют условию единственности решений при любых вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Кроме того, предположим, что

$$X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Через $\varphi(P, t)$ будем обозначать ту траекторию системы (1.1), которая при $t = 0$ проходит через точку P.

Рассмотрим гиперплоскость

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \tag{1.3}$$

фазового пространства. Будем говорить, что траектория $\varphi(P, t)$ пересекает гиперплоскость (1.3) при $t = t_1$, если существуют такие моменты времени $t_0 < t_1 \leqslant t_2 < t_3$, что на траектории $\varphi(P, t)$ выполняется

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \text{ при } t \in [t_1, t_2] \quad (1.4)$$

и

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \neq 0 \text{ при } t \in [t_0, t_1) \text{ и } t \in (t_2, t_3].$$

При этом знаки в промежутках $[t_0, t_1)$ и $(t_2, t_3]$ разные. Иными словами, при пересечении траектория переходит с одной стороны гиперплоскости на другую. При этом траектория $\varphi(P, t)$ может лежать в гиперплоскости (1.3) на протяжении некоторого промежутка времени (если $t_1 < t_2$) или иметь с ней лишь одну общую точку (если $t_1 = t_2$). В обоих случаях точкой пересечения траектории $\varphi(P, t)$ с гиперплоскостью (1.3) будем называть точку $\varphi(P, t_1)$.

Приводимая ниже теорема принадлежит В. А. Плиссу (см. [91]).

Теорема 1.1. *Для того, чтобы тривиальное решение системы* (1.1) *было устойчивым в целом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Точка* (0, 0,..., 0) — *единственное состояние равновесия системы* (1.1).

2. *Состояние равновесия* (0, 0, ..., 0) *устойчиво в смысле Ляпунова.*

3. *Существует такая гиперплоскость L вида* (1.3), *что* а) *вдоль любой траектории, для которой можно указать такое T, что при $t > T$ она не пересекает гиперплоскость L, выполняется условие $x_s \to 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ при $t \to \infty$;* б) *существует определенная только для точек гиперплоскости L непрерывная функция v, обладающая свойствами:*

$v(0, 0, \ldots, 0) = 0$,

$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ *при* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ *и* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$,

$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \infty$ *при* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ *и* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$;

в) *если траектория* $\varphi(P, t)$ *системы* (1.1) *имеет с гиперплоскостью L хотя бы две общие точки $\varphi(P, t_1)$ и $\varphi(P, t_2)$, то*

$$v(\varphi(P, t_1)) > v(\varphi(P, t_2)), \text{ если } t_1 < t_2.$$

Доказательство. Достаточность. В силу условия 3, а) достаточно доказать следующее: любая траектория $\varphi(P, t)$, обладающая тем свойством, что для нее можно выделить возрастающую последовательность

$$t_1, t_2, t_3, \dots \to \infty \tag{1.5}$$

такую, что точки $\varphi(P, t_k)$ являются точками пересечения траектории $\varphi(P, t)$ с гиперплоскостью L, стремится к началу координат при $t \to \infty$.

В силу условия 3, в) все точки $\varphi(P, t_k)$ лежат в области

$$v \leqslant v(\varphi(P, t_1)), \tag{1.6}$$

ограниченной в силу условия 3, б). Поэтому, согласно принципу выбора, можно считать, что последовательность точек $\varphi(P, t_k)$ сходится к точке q, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(P, t_k) = q. \tag{1.7}$$

Это значит, что q является ω-предельной точкой траектории $\varphi(P, t)$. Покажем, что если τ — момент пересечения траектории $\varphi(P, t)$ с гиперплоскостью L, то

$$v(\varphi(P, \tau)) > v(q). \tag{1.8}$$

Так как последовательность $v(\varphi(P, t_k))$ является убывающей в силу условия 3, в) и функция v непрерывна, то, очевидно, имеем

$$v(\varphi(P, t_k)) > v(q), \tag{1.9}$$

откуда и следует (1.8), ибо в силу (1.5) $t_k > \tau$, если k достаточно велико.

Докажем теперь, что точка q совпадает с началом координат. Допустим противное: $q \neq (0, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим траекторию $\varphi(q, t)$, которая является ω-предельной для $\varphi(P, t)$. Предположим сначала, что существует такое $t^* > 0$, что при $t = t^*$ траектория $\varphi(q, t)$ пересекает гиперплоскость L. По условию 3, в) теоремы имеем

$$v(\varphi(q, t^*)) < v(q). \tag{1.10}$$

Из теоремы об интегральной непрерывности следует существование такого τ, что траектория $\varphi(P, t)$ пересекает гиперплоскость L при $t = \tau$ и $v(\varphi(P, \tau)) < v(q)$. Но это противоречит неравенству (1.8).

Пусть траектория $\varphi(q, t)$ не пересекает гиперплоскость L при $t > 0$. Тогда по условию 3, а) $\varphi(q, t) \to (0, 0, \ldots, 0)$ при $t \to \infty$ и, следовательно, начало координат есть ω-предельная точка для траектории $\varphi(P, t)$. Но отсюда в силу условия 2 теоремы вытекает, что $\varphi(P, t) \to (0, 0, \ldots, 0)$, а это противоречит тому, что точка $q \neq (0, 0, \ldots, 0)$ есть ω-предельная точка для траектории $\varphi(P, t)$. Полученные противоречия доказывают, что $q = (0, 0, \ldots, 0)$, а следовательно, траектория $\varphi(P, t)$ имеет своей ω-предельной точкой устойчивое состояние равновесия $(0, 0, \ldots, 0)$. Отсюда вытекает, что траектория стремится к началу координат при $t \to \infty$. Достаточность теоремы доказана.

Необходимость следует из работы [14], где показано, что в условиях теоремы существует непрерывно дифференцируемая, определенно положительная, бесконечно большая функция Ляпунова w, производная от которой в силу системы (1.1) определенно отрицательна.

§ 2. Система со «своей» нелинейностью

Рассмотрим систему третьего порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y_1 + a_{23}z_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y_1 + a_{33}z_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Положим

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\Delta_{21}^2 + \Delta_{31}^2 \neq 0. \tag{2.3}$$

Случай $\Delta_{21}^2 + \Delta_{31}^2 = 0$ нас не интересует по следующим причинам. Если $a_{12} = a_{13} = 0$, то система (2.1) интегрируется квадратурами. Если же $\Delta_{21} = \Delta_{31} = 0$, но $a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, то систему (2.1) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_{21}x + (a_{12}y_1 + a_{13}z_1)\, n_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= a_{31}x + (a_{12}y_1 + a_{13}z_1)\, n_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где n_1 и n_2 — соответствующим образом подобранные постоянные. Однако непосредственно видно, что в таком случае всякая точка, лежащая на прямой

$$x = 0, \ a_{12}y_1 + a_{13}z_1 = 0,$$

является состоянием равновесия для системы (2.4), а следовательно, и для системы (2.1). Но мы везде будем предполагать, что функция $f_1(x)$ подчинена обобщенным условиям Рауза — Гурвица, и, следовательно, система (2.1) не может иметь состояний равновесия, отличных от начала координат.

Не нарушая общности, можем считать, что

$$\Delta_{21} \neq 0 \tag{2.5}$$

(случай $\Delta_{31} \neq 0$ простой заменой переменных приводится к случаю $\Delta_{21} \neq 0$).

Будем рассматривать отдельно два случая:

$$\frac{a_{13}}{a_{12}} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} \qquad \text{(первый случай)} \tag{2.6}$$

и

$$\frac{a_{13}}{a_{12}} \neq \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} \qquad \text{(второй случай).} \tag{2.7}$$

Относительно функции $f_1(x)$ будем предполагать, что она определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений при всех вещественных x. Кроме того, будем предполагать, что $f_1(x)$ удовлетворяет обобщенным условиям Рауза — Гурвица, т. е. если при $f_1(x) = Fx$ характеристическое уравнение системы (2.1) имеет корни с отрицательными вещественными частями для всех $F \in (\alpha, \beta)$, то $f_1(x)$ удовлетворяет условию

$$\alpha x^2 < f_1(x)\, x < \beta x^2 \quad (x \neq 0).$$

§ 3. Исследование системы с тремя нелинейностями

Рассмотрим более общую систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= f_2(x) + a_{22}y_1 + a_{23}z_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= f_3(x) + a_{32}y_1 + a_{33}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ и коэффициенты a_{jk} удовлетворяют всем условиям, перечисленным в § 2, и предположим, что выполняется равенство (2.6) (см. [48]).

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$-\begin{vmatrix} \dfrac{f_1(x)}{x} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ \dfrac{f_2(x)}{x} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ \dfrac{f_3(x)}{x} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) = 0 \tag{3.2}$$

при всех $x \neq 0$ удовлетворяют неравенствам

$$a(x) > 0, \qquad a(x)b(x) > c(x), \qquad c(x) > 0, \tag{3.3}$$

аналогичным условиям Рауза — Гурвица в линейном случае.

Тогда для того, чтобы решение $x = y = z = 0$ было устойчивым в целом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[x\left(-a(x) + \frac{\Delta_{21}}{a_{12}}\right)\operatorname{sgn} x - \int_0^x x\,c(x)\,dx\right] = -\infty. \tag{3.4}$$

Доказательство. При любом неособом линейном преобразовании вида

$$x_1 = x, \qquad y = Ax_1 + By_1 + Cz_1,$$
$$z = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1$$

коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ уравнения (3.2) не меняют своей величины. Для всякого значения $x = x_0 \neq 0$ это следует непосредственно из инвариантности коэффициентов характеристического уравнения системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{f_1(x_0)}{x_0}x + a_{12}y_1 + a_{13}z_1,\\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{f_2(x_0)}{x_0}x + a_{22}y_1 + a_{23}z_1,\\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{f_3(x_0)}{x_0}x + a_{32}y_1 + a_{33}z_1\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

при указанном выше преобразовании и того факта, что при $x = x_0$ преобразование системы (3.1) формально совпадает с преобразованием системы (3.5).

Неособым линейным преобразованием

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= x,\\ y &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}}a_{12}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1,\\ z_1 &= z\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

система (3.1) в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varphi_1(x) + y,\\ \frac{dy}{dt} &= \varphi_2(x),\\ \frac{dz}{dt} &= \varphi_3(x) + b_{32}y - \frac{\Delta_{21}}{a_{12}}z.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Так как коэффициенты уравнения

$$-\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1(x)}{x}-\lambda & 1 & 0\\ \frac{\varphi_2(x)}{x} & -\lambda & 0\\ \frac{\varphi_3(x)}{x} & b_{32} & -\frac{\Delta_{21}}{a_{12}}-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1(x)}{x}-\lambda & 1\\ \frac{\varphi_2(x)}{x} & -\lambda\end{vmatrix}\left(-\frac{\Delta_{21}}{a_{12}}-\lambda\right) = 0 \tag{3.8}$$

совпадают при всех $x \neq 0$ с коэффициентами уравнения (3.2), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в (3.2) и (3.8), получим

$$\varphi_1(x) = \left(-a(x) + \frac{\Delta_{21}}{a_{12}}\right)x, \qquad \varphi_2(x) = \frac{-c(x)\,a_{12}}{\Delta_{21}}\,x. \tag{3.9}$$

Кроме того, вследствие условий (3.3) уравнение (3.2), и следовательно, и совпадающее с ним уравнение (3.8) имеют все корни λ_j ($j = 1, 2, 3$) при всех $x \neq 0$ с отрицательными вещественными частями, а тогда должны выполняться условия

$$\frac{\Delta_1}{a_{12}} > 0, \tag{3.10}$$

$$x\varphi_1(x) < 0, \quad x\,\varphi_2(x) < 0 \text{ при } x \neq 0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi_1(x) + y, \\ \frac{dy}{dt} &= \varphi_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Покажем, что при выполнении условия (3.4) тривиальное решение системы (3.12) устойчиво в целом. В самом деле, из соотношения (3.4) следует, что выполняется, по крайней мере, одно из условий:

$$\varlimsup_{x\to\infty} \varphi_1(x) = -\infty \tag{3.13}$$

или

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x -\varphi_2(x)\,dx = \infty. \tag{3.14}$$

Если выполняется условие (3.14), то вопрос об устойчивости в целом тривиального решения системы (3.12) решает определенно положительная и бесконечно большая функция Ляпунова

$$v = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x \varphi_2(x)\,dx, \tag{3.15}$$

производная от которой в силу системы (3.12) равна

и
$$\left.\begin{aligned} \dot v &= -\varphi_1(x)\varphi_2(x) \\ \dot v &< 0 \quad (x \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Функция $\dot v$ обращается в нуль лишь на прямой $x = 0$, на которой нет ни одной целой траектории системы (3.12), и теперь утверждение следует из теоремы 3.4 гл. I.

Пусть выполняется условие (3.13). Докажем ограниченность траекторий системы (3.12) в этом случае. Рассмотрим траекторию $\varphi(P, t)$ системы (3.12). Не нарушая общности, предположим, что точка $P = (x_P, y_P, z_P)$ лежит выше кривой
$$y = -\varphi_1(x) \tag{3.17}$$
и $x_P > 0$. Так как при движении точки $\varphi(P, t)$ в рассматриваемой области $y(t) < y_P$, то траектория $\varphi(P, t)$ пересечет кривую (3.17). При дальнейшем движении точки $\varphi(P, t)$ в области ниже кривой (3.17) $\frac{dx}{dt} < 0$ и, следовательно, траектория либо примыкает к началу координат при $t \to \infty$, либо пересекает полуось $x = 0$, $y < 0$.

Рассматривая аналогично предыдущему поведение $\varphi(P, t)$ в области ниже кривой (3.17) и $x < 0$, легко убедиться, что она либо примыкает при $t \to \infty$ к началу координат, либо пересекает полуось $x = 0$, $y > 0$.

Нетрудно проверить также, что рассматриваемая траектория $\varphi(P, t)$ при некотором значении $t < 0$ пересекается с полуосью $x = 0$, $y > 0$.

Таким образом, достаточно рассматривать случай, когда траектория $\varphi(P, t)$ пересекает ось $x = 0$, $y > 0$ в точках $A = \varphi(P, t_1)$ и $B = \varphi(P, t_2)$. Покажем, что при $t_2 > t_1$ будет $y_A > y_B$. Действительно, в силу (3.15), (3.16), очевидно, имеем $v(A) > v(B)$, что вследствие $\frac{dv}{dt} = y > 0$ при $y > 0$ и доказывает неравенство $y_A > y_B$. Таким образом, отрезок траектории $\varphi(P, t)$ при $t > t_2$ попадает внутрь замкнутой области, ограниченной отрезком AB и дугой траектории BA, которую не может покинуть ни при каких $t > t_2$. На основании теоремы 3.5 гл. I имеем $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим теперь систему (3.7). По доказанному при выполнении условия (3.4) $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. А тогда из третьего уравнения системы (3.7), ввиду того что $\Delta_{21}/a_{12} > 0$, следует, что и $z(t) \to 0$, так как

$$z(t) = z\exp\left(-\frac{\Delta_{21}t}{a_{12}}\right)\left[C + \int_0^t (\varphi_3(x(t)) + b_{32}y(t))\exp\left(\frac{\Delta_{21}t}{a_{12}}\right)dt\right].$$

Итак, достаточность условия (3.4) доказана.

Докажем необходимость условия (3.4). Рассмотрим снова систему (3.12). Покажем, что при выполнении неравенств

$$\varphi_1(x) > -M, \qquad \int_0^x \varphi_2(x)\,dx > -M \text{ при } x \neq 0, \tag{3.18}$$

где M — достаточно большое число, система (3.12) имеет траекторию, уходящую в бесконечность при возрастании t (условия (3.18) соответствуют, очевидно, нарушению (3.4) при $x > 0$). В самом деле, пусть точка P имеет координаты $x_P = 0$, $y_P = 2M + 2$. Все время, пока точка $\varphi(P, t)$ будет находиться в области $y > 2M$, для ее координаты $y(t)$ выполняется неравенство

$$y(t) > y_P + \frac{1}{M}\int_0^x \varphi_2(x)\,dx > 2M + 2 - 1 = 2M + 1. \tag{3.19}$$

Справедливость неравенства (3.19) следует из оценки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_2(x)}{y + \varphi_1(x)} \geqslant \frac{\varphi_2(x)}{2M - M} = \frac{\varphi_2(x)}{M}. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.19) и доказывает наше утверждение. В самом деле, прежде чем траектория $\varphi(P, t)$ попадет на прямую $y = 2M$, она должна пересечь прямую $y = 2M + 1$, но для нашей траектории $\varphi(P, t)$ это невозможно, так как все время, пока $y(t) > 2M$, вследствие (3.19) $y(t) > 2M + 1$. Таким образом, траектория $\varphi(P, t)$ не может пересечь прямую $y = M$ в направлении к оси $y = 0$, т. е. не может вследствие (3.19) пересечь кривую (3.17). Таким образом, все время $\frac{dx}{dt} > 0$, откуда уже нетрудно получить, что $x(t) \to \infty$ при возрастании времени. Но в таком случае и система (3.7) будет обладать траекторией, уходящей в бесконечность при возрастании времени. Так как неособое преобразование (3.6) не нарушает топологической картины траекторий, то теорема 3.1 полностью доказана.

§ 4. Некоторые преобразования и классификация обобщенных условий Рауза—Гурвица во втором случае

1. Совершим в системе (2.1) следующее преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -(a_{22}+a_{33})x + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ z &= \Delta_{11}x + \Delta_{21}y_1 + \Delta_{31}z_1. \end{aligned}\right\}$$

Из неравенства (2.7) следует, что преобразование это неособое. В новых переменных система (2.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} &= z - cx - df(x), \\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bf(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= -f_1(x) - (a_{22}+a_{33})x, \\ a &= -(a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31}) + (a_{22}+a_{33})\Delta_{11}, \\ b &= \Delta_{11}, \\ c &= -(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} - \Delta_{11}) - (a_{22}+a_{33})^2, \\ d &= -(a_{22}+a_{33}). \end{aligned}$$

Мы предположили, что функция $f_1(x)$ удовлетворяет обобщенным условиям Рауза — Гурвица, но тогда и функция $f(x)$ удовлетворяет этим условиям. Составим для системы (4.1) характеристическое уравнение, считая $f(x)/x$ постоянной величиной,

$$\begin{vmatrix} -\frac{f(x)}{x} - \lambda & 1 & 0 \\ -c - d\frac{f(x)}{x} & -\lambda & 1 \\ -a - b\frac{f(x)}{x} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 + \frac{f(x)}{x}\lambda^2 + \left(c + d\frac{f(x)}{x}\right)\lambda + \left(a + b\frac{f(x)}{x}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что обобщенные условия Рауза — Гурвица для системы (4.1) имеют следующий вид:

$$f(0) = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{4.3}$$

$$a + b\frac{f(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{4.4}$$

$$d\frac{f^2(x)}{x^2} + (c - b)\frac{f(x)}{x} - a > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{4.5}$$

В случае $d = 0$ сделаем дополнительно следующие замены. Из условий (4.2) — (4.5) вытекает, что при $d = 0$ $c > 0$. Положим

$$y = \sqrt{c}\, y_2, \ z = cz_2, \ t = \frac{t_2}{\sqrt{c}}. \tag{4.6}$$

Тогда система (4.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt_2} &= y_2 - \frac{1}{\sqrt{c}} f(x), \\ \frac{dy_2}{dt_2} &= z_2 - x, \\ \frac{dz_2}{dt_2} &= \frac{a}{c\sqrt{c}} x - \frac{b}{c\sqrt{c}} f(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Полагая здесь

$$\frac{1}{\sqrt{c}} f(x) = f_2(x), \qquad \frac{a}{c\sqrt{c}} = a_2, \qquad \frac{b}{c\sqrt{c}} = b_2$$

и опуская всюду индекс 2, придем к системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} &= z - x, \\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bf(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Как следует из соотношений (4.2) — (4.5), обобщенные условия Рауза — Гурвица для системы (4.8) имеют вид

$$f(0) = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{4.10}$$

$$a + b\frac{f(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{f(x)}{x} - \left(a + b\frac{f(x)}{x}\right) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{4.12}$$

2. В зависимости от параметров a, b, c и d системы (4.1) обобщенные условия Рауза — Гурвица записываются по-разному. В связи с этим возникает целый ряд различных случаев (см. [110]). Предположим сначала, что $d = 0$, т. е. сначала рассмотрим систему (4.8), тогда неравенства (4.10) — (4.12) дают следующие случаи:

1. $0 < b < 1$, $a > 0$,
$$\frac{f(x)}{x} > \frac{a}{1-b} \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.13}$$
2. $0 < b < 1$, $a = 0$,
$$\frac{f(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.14}$$
3. $0 < b < 1$, $a < 0$,
$$\frac{f(x)}{x} > -\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.15}$$
4. $b = 0$, $a > 0$,
$$\frac{f(x)}{x} > a \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.16}$$
5. $b < 0$, $a > 0$,
$$\frac{a}{1-b} < \frac{f(x)}{x} < -\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.17}$$
6. $b = 1$, $a < 0$,
$$\frac{f(x)}{x} > -a \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.18}$$
7. $b > 0$, $a < 0$,
$$-\frac{a}{b} < \frac{f(x)}{x} < \frac{a}{1-b} \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{4.19}$$

Пусть теперь $d \neq 0$. Положим в этом случае

$$A = \frac{-(c-b) + \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2d},$$

$$B = \frac{-(c-b) - \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2d}.$$

Обозначения эти имеют смысл, когда $(c-b)^2 + 4ad \geqslant 0$.

Неравенства (4.3) — (4.5) приводятся к следующим различным случаям:

8. $d < 0$, $b > 0$, $A > \max\left\{0, -\frac{a}{b}\right\}$
$$A < \frac{f(x)}{x} < B \quad \text{при} \quad x \neq 0; \tag{4.20}$$

9. $d<0,\ b>0,\ A=-\frac{a}{b}=0,$

$$A<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.21)$$

10. $d<0,\ b>0,\ B>-\frac{a}{b}>\max\{A,0\},$

$$-\frac{a}{b}<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.22)$$

11. $d<0,\ b=0,\ A>0,$

$$A<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.23)$$

12. $d<0,\ b<0,\ 0<A<B<-\frac{a}{b},$

$$A<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.24)$$

13. $d<0,\ b<0,\ 0<A<B=-\frac{a}{b},$

$$A<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.25)$$

14. $d<0;\ b<0,\ 0<A<-\frac{a}{b}<B,$

$$A<\frac{f(x)}{x}<-\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.26)$$

15. $d>0,\ b>0,\ (c-b)^2+4ad\leq 0,$

$$\frac{f(x)}{x}>-\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.27)$$

16. $d>0,\ b>0,\ A>\max\left\{0,\ -\frac{a}{b}\right\},$

$$\frac{f(x)}{x}>A \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.28)$$

17. $d>0,\ b>0,\ A=-\frac{a}{b}>0,$

$$\frac{f(x)}{x}>A \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.29)$$

18. $d>0,\ b>0,\ A=-\frac{a}{b}=0,$

$$\frac{f(x)}{x}>A \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.30)$$

19. $d>0,\ b>0,\ -\frac{a}{b}>\max\{A,0\},$

$$\frac{f(x)}{x}>-\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x\neq 0; \qquad (4.31)$$

20. $d>0,\ b>0,\ B>-\frac{a}{b}>0,$

$$-\frac{a}{b}<\frac{f(x)}{x}<B \quad \text{при} \quad x\neq 0; \tag{4.32}$$

21. $d>0,\ b=0,\ A>0,$

$$\frac{f(x)}{x}>A \quad \text{при} \quad x\neq 0; \tag{4.33}$$

22. $d>0,\ b<0,\ 0<A<-\frac{a}{b},$

$$A<\frac{f(x)}{x}<-\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad x\neq 0. \tag{4.34}$$

3. Изучая общий характер поведения траекторий системы (4.1), можно доказать следующую теорему (см. [91], стр. 22—28).

Теорема 4.1. *Предположим, что в системе* (4.1) *не выполняются условия случаев* 13 *или* 17, *тогда любая положительная полутраектория системы* (4.1), *целиком лежащая в одном из полупространств* $\{x\geqslant 0\}$ *или* $\{x\leqslant 0\}$, *стремится к началу координат.*

§ 5. Исследование случаев 4, 5 и 7

В этом и некоторых следующих параграфах мы дадим несколько достаточных условий устойчивости в целом нулевого решения системы (4.8). Для построения функций Ляпунова будем использовать теоремы 3.1 и 3.2 гл. III, согласно которым вопрос о существовании и построении функции Ляпунова для нелинейной системы вида (3.7) гл. III сводится к вопросу существования и построения для соответствующей линейной системы функции Ляпунова вида (3.6) гл. III.

1. Рассмотрим случаи 1, 4, 5 и 7, введенные в § 4 настоящей главы. Положим

$$c=\frac{a}{1-b}. \tag{5.1}$$

Из неравенств (4.13), (4.16), (4.17) и (4.19) вытекает, что тогда должно быть

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant c \quad \text{при} \quad x\neq 0. \tag{5.2}$$

Положим

$$f(x)=cx+\alpha(x). \tag{5.3}$$

Система (4.8) принимает теперь вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - cx - \alpha(x),\\ \frac{dy}{dt} &= z - x,\\ \frac{dz}{dt} &= -cx - b\alpha(x).\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Функция $\alpha(x)$ подчиняется следующим неравенствам: в случаях 1 и 4, т. е. при $0 \leqslant b < 1$, $a > 0$,

$$\frac{\alpha(x)}{x} > 0 \text{ при } x \neq 0; \tag{5.5}$$

в случае 5, т. е. при $b < 0$, $a > 0$,

$$0 < \frac{\alpha(x)}{x} < -\frac{c}{b} \text{ при } x \neq 0; \tag{5.6}$$

в случае 7, т. е. при $b > 0$, $a < 0$,

$$-\frac{c}{b} < \frac{\alpha(x)}{x} < 0 \text{ при } x \neq 0. \tag{5.7}$$

В этих случаях для системы (5.4) станем разыскивать функцию Ляпунова в виде «интеграл от нелинейности плюс квадратичная форма координат фазового пространства». Для этого наряду с системой (5.4) рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - cx - Ax,\\ \frac{dy}{dt} &= z - x,\\ \frac{dz}{dt} &= -cx - bAx,\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

где число A подчинено тем же неравенствам, что и величина $\alpha(x)/x$ в зависимости от рассматриваемого случая.

Совершим в системах (5.4) и (5.8) следующую замену переменных:

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= c^2x - cy + z,\\ y_1 &= z - x,\\ z_1 &= y,\\ x &= \frac{x_1 - y_1 + cz_1}{c^2 + 1}.\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Тогда системы (5.4) и (5.8) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-cx_1-(c^2+b)\,\alpha(x),\\ \frac{dy_1}{dt}&=-z_1+(1-b)\,\alpha(x),\\ \frac{dz_1}{dt}&=y_1\end{aligned}\right\}\tag{5.10}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-cx_1-(c^2+b)\,Ax,\\ \frac{dy_1}{dt}&=-z_1+(1-b)\,Ax,\\ \frac{dz_1}{dt}&=y_1.\end{aligned}\right\}\tag{5.11}$$

Для системы (5.11) отыскиваем функцию Ляпунова в виде

$$v=\frac{1}{2}b_{11}x_1^2+\frac{1}{2}b_{22}y_1^2+\frac{1}{2}b_{33}z_1^2+b_{12}x_1y_1+$$
$$+b_{13}x_1z_1+b_{23}y_1z_1+\frac{1}{2}\mu Ax^2,\tag{5.12}$$

где числа b_{ik} и μ пока не определены. Потребуем, чтобы производная от этой функции по времени, взятая в силу системы (5.11), при любых A, удовлетворяющих соответствующим неравенствам, была неположительна.

$$\dot v=-b_{11}cx_1^2-b_{11}(c^2+b)Axx_1-b_{22}y_1z_1+$$
$$+b_{22}(1-b)Axy_1+b_{33}y_1z_1-b_{12}cx_1y_1-b_{12}(c^2+b)Axy_1-$$
$$-b_{12}x_1z_1+b_{12}(1-b)Axx_1-b_{13}cx_1z_1-b_{13}(c^2+b)Axz_1+$$
$$+b_{13}x_1y_1-b_{23}z_1^2+b_{23}(1-b)Axz_1+b_{23}y_1^2+$$
$$+\mu Ax\,(y-cx-Ax).\tag{5.13}$$

Так как $\dot v$ должна быть постоянно отрицательной при любых A, удовлетворяющих соответствующим неравенствам, то очевидно, что и при $A=0$ функция $\dot v$ должна быть постоянно отрицательной. Из (5.13) тогда следует, что должно быть

$$b_{23}=0,\quad b_{22}=b_{33},\tag{5.14}$$

$$-b_{12}c+b_{13}=0,\qquad -b_{12}-b_{13}c=0,\tag{5.15}$$

откуда

$$b_{12}=b_{13}=0. \tag{5.16}$$

Из (5.12), (5.13), (5.14) и (5.16) получаем

$$v=\frac{1}{2}b_{11}x_1^2+\frac{1}{2}b_{22}y_1^2+\frac{1}{2}b_{22}z_1^2+\frac{1}{2}\mu A x^2 \tag{5.17}$$

и

$$\dot v=-b_{11}cx_1^2-b_{11}(c^2+b)Axx_1+b_{22}(1-b)Axy_1+ \\ +\frac{\mu Ax}{c^2+1}[-cx_1+cy_1+z_1-(c^2+1)Ax]. \tag{5.18}$$

Из условий рассматриваемых случаев видно, что $c>0$, поэтому из (5.18) следует, что должно быть $b_{11}\geqslant 0$. При $b_{11}=0$ и достаточно малых $|A|$ функция $\dot v$ окажется, как нетрудно проверить, знакопеременной, поэтому должно быть $b_{11}>0$. Так как функция v нас интересует лишь с точностью до постоянного положительного множителя, то можно считать, что $b_{11}=1$. Тогда функцию $\dot v$ можно записать в виде

$$\dot v=-cx_1^2-\left[(c^2+b)+\frac{c\mu}{c^2+1}\right]Axx_1+ \\ +\left[b_{22}(1-b)+\frac{\mu c}{c^2+1}\right]Axy_1+\frac{\mu}{1+c^2}xz_1-\mu A^2x^2. \tag{5.19}$$

При $x_1=0$ коэффициент при Ax должен быть пропорционален x, так как в противном случае при малых A функция $\dot v$ будет менять знак. Поэтому

$$b_{22}c(1-b)+\frac{\mu c^2}{1+c^2}=-\frac{\mu}{1+c^2}.$$

Отсюда

$$b_{22}=\frac{-\mu}{c(1-b)}. \tag{5.20}$$

Подставляя найденное значение b_{22} в $\dot v$ и заменяя там $x_1-y_1+cz_1$ на $(c^2+1)x$, получаем

$$\dot v=-cx_1^2-\left[(c^2+b)+\frac{\mu}{c}\right]Axx_1+\frac{\mu}{c}Ax^2-\mu A^2x^2. \tag{5.21}$$

Условие отрицательности последней функции состоит в следующем:

$$-\mu A+\mu c A^2 \geqslant \frac{1}{4}\left[(c^2+b)+\frac{\mu}{c}\right]^2 A^2. \qquad (5.22)$$

2. Рассмотрим сначала случай 7, т. е. случай, когда $b>1$, $a<0$. Согласно (5.7) должно быть

$$-\frac{c}{b}<A<0. \qquad (5.23)$$

Из (5.22) теперь получаем

$$-\mu+\mu c A \leqslant \frac{1}{4}\left[(c^2+b)+\frac{\mu}{c}\right]^2 A. \qquad (5.24)$$

Неравенство (5.24) выполняется строго при $A=0$ и при любом $\mu>0$. Поэтому, если мы выберем $\mu>0$, то неравенство (5.24) будет выполнено при достаточно малых $|A|$. Выберем теперь такое $\mu>0$, чтобы при $A=-c/b$ неравенство (5.24) было также выполнено. Если такое μ мы найдем, то неравенство (5.24) будет выполнено при любых A, удовлетворяющих неравенствам (5.23), так как в (5.24) A входит линейно. Итак, положим в (5.24) $A=-c/b$, тогда получим

$$-4\frac{b+c^2}{b}\mu \leqslant -\frac{c}{b}\left[(c^2+b)^2+\frac{2\mu(c^2+b)}{c}+\frac{\mu^2}{c^2}\right]$$

или

$$-\frac{c}{b}\left[(c^2+b)-\frac{\mu}{c}\right]^2 \geqslant 0. \qquad (5.25)$$

Так как $c>0$, $b>0$, то последнее неравенство может быть выполнено лишь при условии

$$\mu=c(c^2+b). \qquad (5.26)$$

Очевидно, что выбранное таким образом μ положительно, следовательно, неравенство (5.24) при таком μ выполняется при любых $A\in(-c/b, 0)$ и притом, как нетрудно видеть, в строгом смысле. Значит, при любых x и x_1, удовлетворяющих неравенству $x_1^2+x^2>0$, и при любых $A\in(-c/b, 0)$ окажется $\dot v<0$. Таким образом, в случае 7 у системы (4.8) существует функция Ляпунова вида

$$v_1=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\frac{c^2+b}{b-1}y_1^2+\frac{1}{2}\frac{c^2+b}{b-1}z_1^2+c(c^2+b)\int\limits_0^x \alpha(x)\,dx, \qquad (5.27)$$

где переменные x_1, y_1 и z_1 связаны с исходными по формулам (5.9).

Используя функцию (5.27), легко доказать следующее утверждение.

Теорема 5.1. *В условиях случая* 7, *т. е. при* $b > 1$, $a < 0$, *нулевое решение системы* (4.8) *устойчиво в целом при любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.2) *и* (4.19).

Доказательство. Нетрудно видеть, что функция v_1, определяемая равенством (5.27), является определенно положительной и бесконечно большой (это следует из критерия Сильвестра и теоремы 3.1 гл. III). Производная $\dot{v}_1$ от функции v_1 по времени, взятая в силу системы (5.10), как это следует из теоремы 3.2 гл. III, будет постоянно отрицательна вне множества $\{x = 0,\ x_1 = 0\}$, на котором она обращается в нуль. Легко убедиться, что прямая $x = 0$, $x_1 = 0$ не содержит целых траекторий системы (5.10). Таким образом, в случае 7 выполняются условия теоремы 3.4 гл. I. Следовательно, нулевое решение системы (5.10) устойчиво в целом. Так как преобразование (5.9) неособое, то отсюда следует устойчивость в целом нулевого решения системы (4.8).

3. Рассмотрим теперь случай 5, т. е. случай, когда $b < 0$, $a > 0$. Согласно (5.6) должны выполняться неравенства

$$0 < A < -\frac{c}{b}. \tag{5.28}$$

Сокращая неравенство (5.22) на $A > 0$, получаем

$$-\mu + \mu c A \geqslant \frac{1}{4}\left[(c^2 + b) + \frac{\mu}{c}\right]^2 A. \tag{5.29}$$

В рассматриваемом случае неравенство (5.29) выполняется при достаточно малых A, если $\mu < 0$. Поэтому требуется найти такое $\mu < 0$, чтобы при $A = -c/b$ неравенство (5.29) было выполнено. В (5.29) вместо A подставим $-c/b$, тогда получим

$$-4\frac{c^2 + b}{b}\mu \geqslant -\frac{c}{b}\left[(c^2 + b)^2 + \frac{2\mu(c^2 + b)}{c} + \frac{\mu^2}{c^2}\right] \tag{5.30}$$

или

$$-\frac{c}{b}\left[(c^2 + b) - \frac{\mu}{c}\right]^2 \leqslant 0. \tag{5.31}$$

Так как в рассматриваемом случае $c > 0$, а $b < 0$, то последнее неравенство может быть выполнено лишь при условии

$$\mu = c\,(c^2 + b). \tag{5.32}$$

Таким образом, если $c^2 + b < 0$, то при любых x и x_1, удовлетворяющих неравенству $x^2 + x_1^2 > 0$, и при любом $A \in (0, -c/b)$ окажется $\dot{v} < 0$. Если $c^2 + b > 0$, то не существует такого μ, при котором функция $\dot{v}$ была бы н е- положительна при любом $A \in (0, -c/b)$. Если же $c^2 + b = 0$, то из неравенства (5.29) следует, что должно быть $\mu = 0$ и функция v вырождается в функцию $v = \frac{1}{2}x_1^2$.

Т е о р е м а 5.2. *Если выполняются условия случая 5, т. е. если $b < 0$, $a > 0$, и если, сверх того, $c^2 + b < 0$, то нулевое решение системы (4.8) устойчиво в целом при любой функции $f(x)$, удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица (4.17).*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 5.1. При этом, так же как и в доказательстве теоремы 5.1, надо воспользоваться функцией v_1, определяемой равенством (5.27), и теоремой 3.4 гл. I.

4. Рассмотрим теперь случай 1 и 4, т. е. случаи, когда $0 \leqslant b < 1$, $a > 0$. Согласно (5.5) будем иметь

$$A > 0. \tag{5.33}$$

Сократив неравенство (5.22) на $A > 0$, получим неравенство (5.29). Неравенство (5.29) выполняется при достаточно малых A лишь при условии, что $\mu < 0$, но, с другой стороны, при $\mu < 0$ это неравенство не может быть выполнено при достаточно больших A. Поэтому в рассматриваемых случаях неравенство (5.29) не может быть выполнено при всех $A > 0$ ни при каком вещественном μ.

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что для системы (4.8) в случаях 1 и 4 и в случае 5 при $c^2 + b > 0$ нельзя указать положительную функцию вида «интеграл от нелинейности плюс квадратичная форма координат фазового пространства», которая имела бы отрицательную производную по времени при любых $f(x)$, удовлетворяющих обобщенным условиям Рауза — Гурвица.

5. Т е о р е м а 5.3. *Если выполнены условия случая 5, т. е. если $a > 0$, $b < 0$, и если, сверх того,*

$$c^2 + b = 0, \tag{5.34}$$

что нулевое решение (4.8) *устойчиво в целом при любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.17).

Доказательство. Из условия (5.34) следует, что первое уравнение системы (5.10) не зависит от остальных двух, поэтому вдоль всех решений системы (5.10) в рассматриваемом случае выполняется равенство

$$x_1 = x_{10} \exp(-ct), \tag{5.35}$$

где x_{10} — значение x_1 при $t = 0$ на рассматриваемом решении. Из формулы (5.35) следует, что любое решение системы (5.10), имеющее хотя бы одну точку в плоскости $x_1 = 0$, остается в этой плоскости и при всех t, при которых это решение определено.

Любое решение, лежащее в плоскости $x_1 = 0$, как следует из (5.10) и (5.35), описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -z_1 + (1 + c^2)\,\alpha\left(\frac{cz_1 - y_1}{1 + c^2}\right), \\ \frac{dz_1}{dt} &= y_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Введем в рассмотрение функцию координат фазового пространства

$$v = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} z_1^2 - c(1 + c^2)\int_0^x \alpha(x)\,dx. \tag{5.37}$$

Производная от этой функции в силу системы (5.10) равна

$$\dot{v} = (1 + c^2)\,[x_1 - x + c\alpha(x)]\,\alpha(x). \tag{5.38}$$

На тех же решениях системы (5.10), которые целиком лежат в плоскости $x_1 = 0$,

$$\dot{v} = (1 + c^2)\,[c\alpha(x) - x]\,\alpha(x). \tag{5.39}$$

В работе [91] (стр. 41—47) качественными методами показано, что все решения системы (5.10) стремятся к началу координат при $t \to \infty$. Так как система (5.10) получена из системы (4.8) путем неособого линейного преобразования (5.9), то нулевое решение системы (4.8) устойчиво в целом.

§ 6. Исследование случаев 2, 3 и 6

1. Имеет место следующая

Теорема 6.1. *Если выполнены условия случаев* 3 *и* 6, *т. е. если* $a < 0$, $0 < b \leqslant 1$, *то нулевое решение системы* (4.8) *устойчиво в целом при любой нелинейной функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.15) *и* (4.18).

Доказательство. Для доказательства теоремы мы покажем, что в рассматриваемых случаях выполнены все условия теоремы 1.1. Условие 1 этой теоремы, как отмечалось выше, выполнено. За гиперплоскость L, фигурирующую в условии 3 теоремы 1.1, выберем плоскость $x = 0$, тогда в силу теоремы 4.1 условие 3, а) будет выполнено. В качестве функции v, фигурирующей в условии теоремы 1.1, возьмем функцию

$$v = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2b} z^2. \tag{6.1}$$

Условие 3, б) теоремы 1.1 будет выполнено в этом случае. Таким образом, осталось доказать, что и условие 3, в) в рассматриваемом случае также выполнено. Покажем это. Положим

$$f(x) = -\frac{a}{b} x + \alpha(x), \tag{6.2}$$

тогда согласно обобщенным условиям Рауза — Гурвица (4.15) и (4.18) функция $\alpha(x)$ должна быть подчинена условиям

$$\alpha(0) = 0, \qquad x\alpha(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{6.3}$$

Система (4.8) в обозначении (6.2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \frac{a}{b} x - \alpha(x), \\ \frac{dy}{dt} &= z - x, \\ \frac{dz}{dt} &= -b\alpha(x). \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию координат фазового пространства:

$$u = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\frac{1-b}{b} z^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2. \tag{6.5}$$

Производная от этой функции по времени, взятая в силу системы (6.4), как легко проверить, равна

$$\dot{u} = -\frac{a}{b}x(z-x) - (1-b)x\alpha(x). \qquad (6.6)$$

Рассмотрим теперь произвольную траекторию $\varphi(P, t)$ системы (4.8), начальная точка P которой лежит в плоскости $x=0$. Для определенности будем считать, что точка P лежит в полуплоскости $y \geqslant 0$ плоскости $x=0$. При этом, если $z(P) \leqslant 0$, то будем считать, что $y(P) > 0$. Предположим, что существует такое $T > 0$, при котором точка $\varphi(P, T)$ лежит в плоскости $x=0$. При этом мы будем считать, что T — первый после $t=0$ момент пересечения траектории $\varphi(P, t)$ с плоскостью $x=0$, т. е. что при $t \in (0, T)$ на $\varphi(P, t)$ оказывается $x>0$.

Теорема будет доказана, если мы установим, что на траектории $\varphi(P, t)$ справедливо неравенство

$$v(0) > v(T). \qquad (6.7)$$

Будем доказывать неравенство (6.7). Предположим сначала, что $z(P) \leqslant 0$. Так как при $t \in (0, T)$ на траектории $\varphi(P, t)$ оказывается $x > 0$, то из третьего уравнения системы (6.4) следует, что при $t \in (0, T)$ $z<0$. Отсюда и из равенства (6.6) следует, что функция u на промежутке времени $0 < t < T$ убывает с возрастанием времени вдоль траектории $\varphi(P, t)$. Следовательно, имеем

$$u(P) > u(\varphi(P, T)). \qquad (6.8)$$

Так как при $x=0$ функция u обращается в v, то в случае $z(P) \leqslant 0$ неравенство (6.7) доказано.

В случае, когда $z(P) > 0$, доказательство более громоздко (см. [91], стр. 48—53), и мы его здесь опускаем.

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, откуда и следует наше утверждение.

2. Рассмотрим случай 2. Справедлива следующая

Теорема 6.2. *Если выполнены условия случая 2, т. е. если $0 < b < 1$, $a=0$, то нулевое решение системы (4.8) устойчиво в целом при любой нелинейной функции $f(x)$, удовлетворяющей обобщенному условию Рауза — Гурвица (4.14).*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1-b}{2b}z^2, \tag{6.9}$$

производная от которой в силу системы (4.8) равна

$$\dot{v} = -(1-b)\,xf(x). \tag{6.10}$$

Функция v определенно положительна и бесконечно большая, а $\dot{v}$ неположительна и обращается в нуль лишь на плоскости $x = 0$, которая, как легко проверить, не содержит целых траекторий системы (4.8), кроме начала координат. И теперь наше утверждение следует из теоремы 3.4 гл. I.

§ 7. Некоторые достаточные условия устойчивости в целом

В § 5 мы установили, что для системы (4.8) в случаях 1 и 4, т. е. при $0 \leqslant b < 1$, $a > 0$, и в случае 5 при $c^2 + b > 0$, т. е. в случае, когда $b < 0$, $a > 0$, $c^2 + b > 0$, нельзя указать определенно положительную функцию вида «интеграл от нелинейности плюс квадратичная форма координат фазового пространства», которая имела бы отрицательную производную по времени при любых $f(x)$, удовлетворяющих обобщенным условиям Рауза — Гурвица. В настоящем параграфе будут даны два условия, достаточные для устойчивости нулевого решения системы (4.8) в целом.

Теорема 7.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:* $a > 0$, $0 \leqslant b < 1$ *или* $a > 0$, $b < 0$, $c^2 + b > 0$, *предположим, кроме того, что при любых вещественных* $x \neq 0$ *выполняются неравенства*

$$0 < x\alpha(x) \leqslant \frac{1}{c}x^2, \tag{7.1}$$

где c *дается формулой* (5.3), *тогда нулевое решение системы* (4.8) *устойчиво в целом.*

Доказательство. Для доказательства введем в рассмотрение функцию координат фазового пространства

$$v = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2+b}{1-b} y_1^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2+b}{1-b} z_1^2 - - c(c^2+b) \int_0^{x} \alpha(x)\,dx, \qquad (7.2)$$

где переменные x_1, y_1 и z_1 связаны с переменными x, y и z по формулам (5.9). Производная от функции v по времени в силу системы (4.8) равна

$$\dot{v} = -cx_1^2 + c(c^2+b)\alpha^2(x) - (c^2+b)x\alpha(x). \qquad (7.3)$$

Легко убедиться в том, что функция v определенно положительна и бесконечно велика. Из равенства (7.1) следует, что производная $\dot{v}$ от функции v по времени неположительна. В нуль $\dot{v}$ может обратиться лишь на плоскости $x_1 = 0$. Непосредственно из дифференциальных уравнений системы (4.8) видно, что ни одна положительная полутраектория системы (4.8) не может лежать в плоскости $x_1=0$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 3.4 гл. I. Ссылка на эту теорему и завершает доказательство.

Теорема 7.2. *Предположим, что выполнены условия случаев 1, 4 или 5, т. е. что выполнены неравенства: $a > 0$, $0 \leqslant b < 1$, или $a > 0$, $b < 0$. Предположим далее, что выполнены обобщенные условия Рауза — Гурвица* (5.5) *или* (5.6) *в зависимости от чисел a и b. Предположим, сверх того, что при всех вещественных x функция $\alpha(x)$ дифференцируема и выполняется неравенство*

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} > 0. \qquad (7.4)$$

Тогда нулевое решение системы (4.8) *устойчиво в целом.*

Доказательство. Взяв функцию Ляпунова в виде

$$v = \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{2} y^2 + (1-b)y\alpha(x) + c(1-b)x\alpha(x) + + \frac{1}{2}(1-b)\alpha^2(x) - c(1-b)\int_0^x \alpha(x)\,dx, \qquad (7.5)$$

в силу системы (4.8) будем иметь

$$\dot{v} = -(1-b)\,\alpha'(x)\,(y-f(x))^2. \tag{7.6}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае выполнены условия теоремы 1.1. Действительно, условия 1 и 2 этой теоремы, очевидно, выполнены. За гиперплоскость L, фигурирующую в условии 3 этой теоремы, возьмем плоскость $x=0$, тогда, как следует из теоремы 4.1, условие 3, а) будет также выполнено. За функцию v, фигурирующую в условии 3, б) теоремы 1.1, выберем функцию y^2+z^2, тогда, как следует из соотношений (7.5) и (7.6), все остальные условия теоремы 1.1 будут выполнены. Теорема доказана.

§ 8. Устойчивость в целом в случаях 9, 10 и 20

В этом и нескольких следующих параграфах мы будем рассматривать систему (4.1) при условии $d \neq 0$ и сформулируем несколько достаточных условий устойчивости нулевого решения этой системы в целом. Обозначим, как и ранее, через A и B вещественные корни уравнения

$$d\omega^2 + (c-b)\,\omega - a = 0, \tag{8.1}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{-(c-b)+\sqrt{(c-b)^2+4ad}}{2d}, \\ B &= \frac{-(c-b)-\sqrt{(c-b)^2+4ad}}{2d}. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Рассмотрим сначала случаи 9, 10 и 20. Во всех этих случаях обобщенные условия Рауза — Гурвица имеют одинаковый вид (4.22).

1. Введем вместо $f(x)$ новую нелинейную функцию $\gamma(x)$ по формуле

$$\gamma(x) = f(x) - Bx. \tag{8.3}$$

Тогда обобщенное условие Рауза — Гурвица в рассматриваемых случаях примет вид

$$-\frac{a}{b} - B < \frac{\gamma(x)}{x} < 0 \quad \text{при } x \neq 0, \tag{8.4}$$

а система (4.1) перепишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - Bx - \gamma(x),\\ \frac{dy}{dt} &= z - cx - dBx - d\gamma(x),\\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bBx - b\gamma(x).\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Наряду с системой (8.5) рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - Bx - \Gamma x,\\ \frac{dy}{dt} &= z - cx - dBx - d\Gamma x,\\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bBx - b\Gamma x,\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

где постоянная Γ подчиняется неравенствам

$$-\frac{a}{b} - B < \Gamma < 0. \tag{8.7}$$

Положим

$$k^2 = c + dB. \tag{8.8}$$

В рассматриваемых случаях $k^2 > 0$.

Произведем в системах (8.5) и (8.6) следующую замену переменных:

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= B^2x - By + z,\\ y_1 &= z - k^2x,\\ z_1 &= ky,\\ x &= \frac{x_1 - y_1 + \frac{B}{k}z_1}{B^2 + k^2},\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

тогда системы (8.5) и (8.6) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -Bx_1 - (B^2 - dB + b)\gamma(x),\\ \frac{dy_1}{dt} &= -kz_1 + (k^2 - b)\gamma(x),\\ \frac{dz_1}{dt} &= ky_1 - dk\gamma(x)\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -Bx_1 - (B^2 - dB + b)\,\Gamma x, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -kz_1 + (k^2 - b)\,\Gamma x, \\ \frac{dz_1}{dt} &= ky_1 - dk\Gamma x. \end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

Повторяя почти дословно рассуждения § 5, получим функцию Ляпунова для системы (8.11) в виде

$$v = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\nu y_1^2 + \frac{1}{2}\nu z_1^2 + \frac{1}{2}\mu\Gamma x^2, \qquad (8.12)$$

где ν — пока не определенная постоянная,

$$\mu = \nu\,(bB - Bk^2 + dk^2).$$

Производная от функции v в силу системы (8.11) равна

$$\dot v = -Bx_1^2 + [\nu\,(k^2 - b) - (B^2 - dB + b)]\Gamma x x_1 + \\ + \nu k^2\,(b - k^2 - dB)\Gamma x^2 - \nu\,(Bb - Bk^2 + dk^2)\Gamma^2 x^2. \quad (8.13)$$

Условие неположительности последней функции состоит в выполнении неравенства

$$-4B\nu k^2\,(b - k^2 - dB)\Gamma + 4B\nu(Bb - Bk^2 + dk^2)\Gamma^2 \geqslant \\ \geqslant [\nu(k^2 - b) - (B^2 - dB + b)]^2\Gamma^2. \quad (8.14)$$

2. Используя это условие, докажем следующую теорему.

Теорема 8.1. *Если выполнены условия случая* 10, *т. е. если* $d < 0$, $b > 0$ *и* $B > -\frac{a}{b} > \max\{A, 0\}$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой нелинейной функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.22).

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что $a < 0$. Но тогда

$$b - k^2 > 0. \qquad (8.15)$$

Действительно, из (8.8) следует, что

$$Bb - Bk^2 = Bb - cb - dB^2 = -a, \qquad (8.16)$$

откуда и вытекает неравенство (8.15). Из (8.15) и условия $d < 0$ следует, что неравенство (8.14) будет выполняться при любых $\nu > 0$ и достаточно малых по абсолютной величине отрицательных Г. Если найдем такое $\nu > 0$, что неравенство (8.14) будет выполняться при $\Gamma = -\frac{a}{b} - B = -\frac{Bk^2}{b}$, то это неравенство при таком ν будет выполняться для всех Г, удовлетворяющих неравенствам (8.7). Подставим в неравенство (8.14) вместо Г величину $-\frac{1}{b}Bk^2$. После несложных преобразований получим неравенство

$$[\nu (k^2 - b) + (B^2 - dB + b)]^2 \leqslant 0, \tag{8.17}$$

которое может быть выполнено тогда и только тогда, когда

$$\nu = \frac{B^2 - dB + b}{b - k^2}. \tag{8.18}$$

Из (8.15) и условий теоремы следует, что выбранное таким образом ν положительно.

Из приведенных рассуждений и из доказательства теоремы 3.2 гл. III вытекает, что производная от функции

$$v = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2 - dB + b}{b - k^2} y_1^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2 - dB + b}{b - k^2} z_1^2 + \\ + (bB - Bk^2 + dk^2) \frac{B^2 - dB + b}{b - k^2} \int_0^x \gamma(x)\, dx \tag{8.19}$$

по времени, взятая в силу системы (8.10), неположительна и может обращаться в нуль лишь на прямой $x = 0$, $x_1 = 0$. Теперь легко проверить, что выполняются условия теоремы 1.1, если за гиперплоскость L, фигурирующую в условии теоремы 1.1, взять плоскость $x = 0$.

3. Т е о р е м а 8.2. *Если выполнены условия случая* 9, *т. е. если* $d < 0$, $b > 0$ *и* $B > -\frac{a}{b} = A = 0$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой нелинейности* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} z_1^2 + dk^2 \int_0^x \gamma(x)\, dx.$$

Производная от этой функции по времени, взятая в сил системы (4.1), равна

$$\dot{v} = -dk^2\gamma(x)(Bx + \gamma(x)).$$

Из обобщенных условий Рауза — Гурвица (8.4) сле дует, что v определенно положительна, а $\dot{v}$ постоянно о рицательна, причем в нуль $\dot{v}$ обращается лишь при $x = 0$ Но тогда ясно, что в данном случае выполняются вс условия теоремы 1.1, если за гиперплоскость L взят плоскость $x = 0$, а в качестве функции v выбрать функци $\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2$ при $x = 0$.

Теорема доказана.

4. Рассмотрим случай 20.

Теорема 8.3. *Если выполнены условия случая 2С т. е. если $d > 0$, $b > 0$ и $B > -\frac{a}{b} > 0$, то нулевое ре шение системы (4.1) устойчиво в целом при любой нелиней ной функции $f(x)$, удовлетворяющей обобщенным условия Рауза — Гурвица (4.32).*

Доказательство. Покажем сначала, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство

$$b - dB > 0. \tag{8.20}$$

Имеем по условию

$$\frac{-(c-b) - \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2d} > -\frac{a}{b} > 0$$

или

$$b\sqrt{(c-b)^2 + 4ad} < 2ad + b(b-c). \tag{8.21}$$

Возводя в квадрат и приводя подобные члены, получае

$$4a^2d^2 - 4abcd > 0,$$

но по условию $-\frac{a}{b} > 0$, следовательно, $a < 0$, и потому $ad < bc$. Тогда из (8.21) вытекает, что $b + c > 0$. Имеем далее

$$b - dB = \frac{b + c + \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2},$$

а отсюда и вытекает (8.20).

Из (8.2) и (8.3) следует, что

$$b - k^2 - dB = b - c - 2dB = \sqrt{(c-b)^2 + 4ad} \geqslant 0. \quad (8.22)$$

Предположим сначала, что

$$(c-b)^2 + 4ad > 0. \quad (8.23)$$

Из (8.22) следует, что неравенство (8.14) выполнено при достаточно малых по абсолютной величине отрицательных Г, если только $\nu > 0$. Совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 8.1 настоящего параграфа, легко показать, что неравенство (8.14) выполняется при всех $\Gamma \in \left(-\frac{a}{b} - B,\ 0\right)$, и притом в строгом смысле, если ν определить по формуле (8.18). Отсюда следует, что функция (8.19) является функцией Ляпунова для системы (4.1) и в рассматриваемом случае. Так же, как и при доказательстве теоремы 8.1, заключаем об устойчивости нулевого решения системы (4.1) в целом.

Предположим теперь, что

$$(c-b)^2 + 4ad = 0.$$

Тогда из равенства (8.22) следует, что

$$b - k^2 - dB = 0. \quad (8.24)$$

Неравенство (8.14) принимает вид

$$[\nu(k^2 - b) + (B^2 - dB + b)]^2 \leqslant 0. \quad (8.25)$$

Отсюда, как и ранее, следует, что функция (8.19) является функцией Ляпунова для системы (4.1) и в рассматриваемом случае. Производная от этой функции по времени в силу системы (4.1) в данном случае равна

$$\dot{v}_1 = -Bx_1^2 - 2(B^2 - dB + b)x_1\gamma(x) - \nu(Bb - Bk^2 + dk^2)\gamma^2(x)$$

или, учитывая (8.25) и (8.18),

$$\dot{v}_1 = -\frac{1}{B}[Bx_1 + (B^2 - dB + b)\gamma(x)]^2. \quad (8.26)$$

Из последнего равенства следует, что $\dot{v}$ обращается в нуль лишь на поверхности

$$Bx_1 + (B^2 - dB + b)\gamma(x) = 0. \quad (8.27)$$

Рассмотрим траекторию $\varphi(P, t)$ системы (4.1), начал
ная точка $P \neq (0, 0, 0)$ которой лежит в плоскости $x =$
Пусть $T > 0$ — первый после $t = 0$ момент пересечени
траектории $\varphi(P, t)$ с плоскостью $x = 0$. Покажем, чт

$$v_1(\varphi(P, T)) < v_1(P). \tag{8.28}$$

Неравенство (8.28) может не выполняться лишь тогд
когда траектория $\varphi(P, t)$ при всех $t \in (0, T)$ лежит на п
верхности (8.27). Но тогда должно быть

$$x_1(P) = x_1(\varphi(P, T)) = 0. \tag{8.29}$$

Из первого уравнения системы (8.10) имеем

$$x_1(\varphi(P, T)) = (B^2 - dB + b)\exp(-BT)\int_0^T \gamma(x)\exp(Bt)\,dt. \tag{8.30}$$

По определению момента T на промежутке времен
$0 < t < T$ величина x вдоль траектории $\varphi(P, t)$ сохраняе
знак. Тогда из обобщенного условия Рауза — Гурвиц
(8.4) вытекает, что и $\gamma(x)$ сохраняет знак на траектори
$\varphi(P, t)$ при $t \in (0, T)$, а тогда из (8.30) следует, что
$x_1(\varphi(P, T)) \neq 0$, что противоречит (8.29). Таким образом
в данном случае выполнены все условия теоремы 1.1.
Теорема 8.3 доказана.

§ 9. Исследование случаев 8, 11—14, 16, 18, 21 и 22

1. В перечисленных в названии параграфа случаях левая граница изменения величины $\frac{f(x)}{x}$ при $x \neq 0$ равна A. Введем в этих случаях новую нелинейную функцию $\gamma(x)$ по формуле

$$\gamma(x) = f(x) - Ax. \tag{9.1}$$

Система (4.1) примет тогда вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - Ax - \gamma(x),\\ \frac{dy}{dt} &= z - cx - dAx - d\gamma(x),\\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bAx - b\gamma(x).\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Наряду с системой (9.2) рассмотрим следующую линейную систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - Ax - \Gamma x, \\ \frac{dy}{dt} &= z - cx - dAx - d\Gamma x, \\ \frac{dz}{dt} &= -ax - bAx - b\Gamma x, \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

где постоянная Г подчинена тем же неравенствам, что и величина $\frac{\gamma(x)}{x}$ в соответствующих обобщенных условиях Рауза — Гурвица. Положим

$$k^2 = c + dA. \tag{9.4}$$

В условиях рассматриваемых случаев $k^2 > 0$.

Сделаем в системах (9.2) и (9.3) замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A^2 x - Ay + z, \\ y_1 &= z - k^2 x, \\ z_1 &= ky, \\ x &= \frac{x_1 - y_1 + \frac{A}{k} z_1}{A^2 + k^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Тогда системы (9.2) и (9.3) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -Ax_1 - (A^2 - dA + b)\gamma(x), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -kz_1 + (k^2 - b)\gamma(x), \\ \frac{dz_1}{dt} &= ky_1 - dk\gamma(x) \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -Ax_1 - (A^2 - dA + b)\Gamma x, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -kz_1 + (k^2 - b)\Gamma x, \\ \frac{dz_1}{dt} &= ky_1 - dk\Gamma x. \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

Повторяя дословно рассуждения § 8, только заменяя B на A, докажем, что при условии

$$k^2 - b \neq 0 \tag{9.8}$$

функция Ляпунова v для системы (9.7) должна иметь вид

$$v = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \nu y_1^2 + \frac{1}{2} \nu z_1^2 + \frac{1}{2} \nu (Ab - Ak^2 + dk^2) \Gamma x^2. \tag{9.9}$$

Производная от нее в силу системы (9.7) равна

$$\dot{v} = -Ax_1^2 + [\nu(k^2 - b) - (A^2 - dA + b)] \Gamma x x_1 +$$
$$+ \nu k^2 (b - k^2 - dA)\Gamma x^2 - \nu (AB - Ak^2 + dk^2)\Gamma^2 x^2. \tag{9.10}$$

В случае $k^2 - b = 0$ функция v также может иметь вид (9.9), но может случиться, что она не будет содер жать члена x_1^2. Выясним, при каких условиях возможно равенство $k^2 - b = 0$:

$$k^2 - b = c + dA - b = \frac{c - \dot{b} + \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2}. \tag{9.11}$$

Отсюда ясно, что неравенство (9.8) может нарушаться лишь при $a = 0$. Но a может обращаться в нуль лишь в условиях случаев 16 и 18. Таким образом, в остальных случаях функции v и $\dot{v}$ имеют вид (9.9) и (9.10). Условие неположительности функции (9.10) состоит в выполнении неравенства

$$-4A\nu k^2 (b - k^2 - dA)\Gamma + 4A\nu (Ab - Ak^2 + dk^2)\Gamma^2 \geqslant$$
$$\geqslant [\nu(k^2 - b) - (A^2 - dA + b)]^2 \Gamma^2. \tag{9.12}$$

2. Имеет место

Теорема 9.1. *Если выполнены условия случая* 14, *т. е. если* $d < 0$, $b < 0$, $0 < A < -\frac{a}{b} < B$, *и, сверх того,* $A^2 - Ad + b < 0$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой нелинейности* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.26).

Доказательство. В рассматриваемом случае справедливо неравенство

$$0 < \frac{\gamma(x)}{x} < -\frac{a}{b} - A \quad \text{при } x \neq 0. \tag{9.13}$$

Из равенства (9.4) получаем

$$b - k^2 - dA = b - c - dA - dA.$$

А отсюда и из (8.2) находим

$$b - k^2 - dA = -\sqrt{(c - b)^2 + 4ad} < 0. \qquad (9.14)$$

Из последнего неравенства следует, что неравенство (9.12) выполняется при достаточно малых $\Gamma > 0$, если $\nu > 0$. Выберем ν из условия выполнимости неравенства (9.12) при $\Gamma = -\frac{a}{b} - A = -\frac{1}{b}Ak^2$. Несложные преобразования показывают, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\nu = \frac{A^2 - dA + b}{b - k^2}. \qquad (9.15)$$

Из условий теоремы следует, что выбранное таким образом ν положительно. Но тогда неравенство (9.12) выполняется при всех $\Gamma \in \left(0, -\frac{a}{b} - A\right)$ и притом в строгом смысле. Отсюда и из теоремы 3.2 гл. III следует, что производная от функции

$$v_1 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2 - dA + b}{b - k^2}y_1^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2 - dA + b}{b - k^2}z_1^2 +$$
$$+ (bA - Ak^2 + dk^2)\frac{A^2 - dA + b}{b - k^2}\int_0^x \gamma(x)\,dx \qquad (9.16)$$

по времени в силу системы (9.6) при условии (9.13) неположительна и может обратиться в нуль лишь на прямой $x_1 = x = 0$. Это и завершает доказательство теоремы.

3. Теорема 9.2. *Если выполнены условия случая 21, т. е. если $d > 0$, $b = 0$, $A > 0$, и, если, кроме того, $A - d < 0$, то нулевое решение системы (4.1) устойчиво в целом при любой функции $f(x)$, удовлетворяющей обобщенному условию Рауза — Гурвица (4.33).*

Доказательство. В этом случае справедливо неравенство

$$\frac{\gamma(x)}{x} > 0 \quad \text{при } x \neq 0. \qquad (9.17)$$

Неравенство (9.12) в нашем случае выполняется при достаточно малых $\Gamma > 0$, если только $\nu > 0$. Чтобы это неравенство было выполнено при всех $\Gamma > 0$, необходимс и достаточно выполнение неравенства

$$4Ak^2\nu(d-A) \geqslant [\nu k^2 + A(d-A)]^2$$

или

$$[\nu k^2 - A(d-A)]^2 \leqslant 0. \tag{9.18}$$

Отсюда

$$\nu = A\,\frac{d-A}{k^2}.$$

При выполнении условий теоремы $\nu > 0$. Следовательно, неравенство (9.12) выполняется при всех $\Gamma > 0$ и притом в строгом смысле. Отсюда следует, что производная по времени от функции

$$v_1 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}A\frac{d-A}{k^2}y_1^2 + \frac{1}{2}A\frac{d-A}{k^2}z_1^2 + \\ + A(d-A)^2\int_0^x \gamma(x)\,dx \tag{9.19}$$

в силу системы (9.6) неположительна и может обратиться в нуль лишь при $x = x_1 = 0$. А это и доказывает теорему.

4. Рассмотрим случай 22.

Теорема 9.3. *Если выполнены условия случая* 22, *т. е. если* $d > 0$, $b < 0$, $0 < A < -\frac{a}{b}$, *и, если, сверх того,* $A^2 - Ad + b < 0$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным условиям Рауза — Гурвица* (4.34).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9.1.

5. Теорема 9.4. *Если выполнены условия случая* 16, *т. е. если* $d > 0$, $b > 0$, $A > \max\{0, -\frac{a}{b}\}$, *и, если* $Ab - Ak^2 + dk^2 \geqslant 0$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенному условию Рауза — Гурвица* (4.28).

Доказательство. В нашем случае $\gamma(x)$ удовлетворяет неравенству (9.17).

Если

$$(c-b)^2 + 4ad = 0, \tag{9.20}$$

то $A = B$ и доказательство теоремы совпадает с той частью доказательства теоремы 8.3, которая посвящена случаю выполнения равенства (9.20).

Пусть теперь

$$(c - b)^2 + 4ad > 0. \tag{9.21}$$

Из неравенства (9.21) и соотношения (9.14) следует, что неравенство (9.12) выполняется при достаточно малых $\Gamma > 0$, если $\nu > 0$. Будем отыскивать такое положительное ν, чтобы неравенство (9.12) выполнялось и при достаточно больших Γ, тогда оно будет выполняться и при всех $\Gamma > 0$.

Из неравенства

$$A^2 - Ad + b \leqslant 0 \tag{9.22}$$

следует неравенство

$$Ab - Ak^2 + dk^2 > 0. \tag{9.23}$$

Действительно, умножая (9.22) на $k^2 > 0$ и прибавляя к обеим частям A^2b, получим

$$A^2b - A^2k^2 + dAk^2 \geqslant (A^2 + k^2)b > 0,$$

что и доказывает (9.23).

Предположим, что (9.22) выполняется в строгом смысле. Пусть, кроме того, выполняется неравенство

$$k^2 - b < 0. \tag{9.24}$$

Если взять теперь

$$\nu = \frac{A^2 - Ad + b}{k^2 - b}, \tag{9.25}$$

то неравенство (9.12) будет выполняться при всех $\Gamma > 0$ и притом в строгом смысле.

Пусть имеет место равенство

$$k^2 - b = 0. \tag{9.26}$$

В этом случае неравенство (9.12) будет выполняться при всех $\Gamma > 0$, если ν положительно и достаточно велико.

Предположим теперь, что

$$k^2 - b > 0. \tag{9.27}$$

Тогда имеет место неравенство

$$A^2b - A^2k^2 + Adk^2 > (b - k^2)(A^2 - dA + b). \tag{9.28}$$

В самом деле, неравенство (9.28) эквивалентно неравенству

$$b(b - Ad - k^2) < 0,$$

которое вытекает из соотношения (9.14).

Из неравенства (9.28) следует, что если взять

$$\nu = \frac{A^2 - dA + b}{b - k^2} > 0, \tag{9.29}$$

то неравенство (9.12) будет выполняться при всех $\Gamma > 0$ в строгом смысле.

Пусть теперь

$$A^2 - Ad + b = 0. \tag{9.30}$$

В этом случае (9.12) выполняется также в строгом смысле, если только ν положительно и достаточно мало.

Переходим теперь к случаю

$$A^2 - dA + b > 0. \tag{9.31}$$

Если выполняется неравенство (9.27), то неравенство (9.12) будет выполняться строго при всех $\Gamma > 0$, если ν выбрать по формуле (9.25). Если выполняется неравенство (9.24), то из (9.28) следует, что если выбрать ν по формуле (9.29), то неравенство (9.12) также будет выполняться в строгом смысле при $\Gamma > 0$. Если же имеет место равенство (9.26), то (9.12) выполняется строго при всех $\Gamma > 0$, если только ν достаточно велико.

Таким образом, если выполнено (9.21), то всегда удается указать такое $\nu > 0$, что неравенство (9.12) выполняется строго при всех $\Gamma > 0$. Но тогда из предыдущих рассуждений следует, что нулевое решение системы (4.1) устойчиво в целом при любых $f(x)$, удовлетворяющих обобщенному условию Рауза — Гурвица (4.28). Теорема доказана.

6. Теорема 9.5. *Если выполнены условия случая* 18, *т. е. если* $d > 0$, $b > 0$, $A = -\frac{a}{b} = 0$, *то нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом при любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенному условию Рауза — Гурвица* (4.30).

Доказательство. Пусть $c = b$, тогда функцию Ляпунова для системы (4.1) возьмем в виде

$$v = \frac{1}{2}(z - k^2x)^2 + \frac{1}{2}k^2y^2 + cd\int_0^x f(x)\,dx. \qquad (9.32)$$

Производная от этой функции в силу системы (4.1) равна

$$\dot{v} = -bdf^2(x). \qquad (9.33)$$

Функция $\dot{v}$ может обращаться в нуль лишь на плоскости $x = 0$. Но нетрудно проверить, что плоскость $x = 0$ не содержит целых траекторий системы (4.1).

Докажем теперь, что все траектории нашей системы ограничены. Возьмем произвольную точку P фазового пространства и выберем положительные l и N такими, чтобы $P \in D$, где D — область, определяемая неравенствами

$$|z| \leqslant N, \qquad v \leqslant l. \qquad (9.34)$$

Область D замкнута. Рассмотрим траекторию $\varphi(P, t)$, проходящую через точку P при $t = 0$, и покажем, что она не выйдет из области D при $t > 0$. Действительно, через поверхность $v = l$ траектория выйти не может, так как $v > 0$ и $\dot{v}$ неположительна вдоль траектории $\varphi(P, t)$. Пусть траектория $\varphi(P, t)$ выходит из области D, пересекая плоскость $z = N$. Если N достаточно велико ($N > l$), то для выполнения (9.34) необходимо условие $x > 0$. Но тогда из третьего уравнения системы (4.1) в силу условия (4.30) следует, что в окрестности плоскости $z=N$ должно быть $\frac{dz}{dt} < 0$, следовательно, траектория $\varphi(P, t)$ не может пересечь плоскость $z = N$. Аналогично, траектория $\varphi(P, t)$ не может пересечь плоскость $z = -N$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 3.5 гл. I, что и обеспечивает устойчивость в целом нулевого решения системы (4.1) в настоящем случае.

Пусть теперь $c \neq b$. Рассмотрим функцию

$$v = d\int_0^x f(x)\,dx + \frac{c}{2}\left(x - \frac{z}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{c-b}{2bc}z^2. \qquad (9.35)$$

Производная от нее в силу системы (4.1) равна

$$\dot{v} = -df^2(x) - (c - b)xf(x). \qquad (9.\text{:}$$

Плоскость $x = 0$, на которой функция $\dot{v}$ может обращать в нуль, как нетрудно видеть, не содержит целых траек рий системы (4.1). В условиях рассматриваемого случ функция v определенно положительна и бесконечно бол шая. Теперь на основании теоремы 3.4 гл. I заключаем устойчивости в целом и в этом случае. Теорема полност доказана.

7. Рассмотрим теперь систему (4.1) при услов $A^2 - Ad + b = 0$. Имеет место следующая

Теорема 9.6. *Пусть выполнены условия одного трех следующих случаев*: 14, 21 *или* 22. *Пусть, кроме тог*

$$A^2 - Ad + b = 0. \qquad (9.3$$

Тогда нулевое решение системы (4.1) *устойчиво в целом пр любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей обобщенным усл виям Рауза — Гурвица.*

Доказательство. Из равенства (9.37) следу что первое уравнение системы (9.6) не зависит от остальны двух, и поэтому вдоль решений системы (4.1) выполняетс равенство

$$x_1 = x_{10}\exp(-At), \qquad (9.3\text{ξ}$$

где x_{10} — значение x_1 при $t = 0$ на рассматриваемом р шении.

Рассмотрим функцию координат фазового пространств

$$v = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2 + (Ab - Ak^2 + dk^2)\int_0^x \gamma(x)\,dx. \qquad (9.39$$

В силу системы (4.1) имеем

$$\dot{v} = [(k^2 - b)x_1 + k^2(b - k^2 - dA)x - (Ab - Ak^2 + dk^2)\gamma(x)]\,\gamma(x). \qquad (9.40$$

Покажем, что при $x_1 = 0$ $\dot{v} \leqslant 0$ и в нуль $\dot{v}$ может обратиться лишь при $x = 0$. Имеем

$$\dot{v}\,|_{x_1=0} = [k^2(b - k^2 - dA)x - (Ab - Ak^2 + dk^2)\gamma(x)]\gamma(x), \qquad (9.41)$$

Если выполняются условия случая 21, то доказываемое утверждение вытекает из (9.41) и обобщенного условия Рауза — Гурвица (9.17).

Пусть теперь выполняются условия случаев 14 или 22. В обоих этих случаях обобщенные условия Рауза — Гурвица имеют вид (9.13). Подставим в (9.41) вместо $\gamma(x)$ величину $\left(-\frac{b}{a}-A\right)x=-\frac{1}{b}Ak^2x$. Имеем тогда

$$\dot{v}=\left[k^2(b-k^2-dA)+(Ab-Ak^2+dk^2)\frac{Ak^2}{b}\right]\left(-\frac{Ak^2}{b}\right)x^2.$$

А отсюда и из (9.37) следует, что при $x_1=0$ и $\gamma(x)=-\left(\frac{a}{b}+A\right)x$ $\dot{v}\equiv 0$. Из (9.13) тогда вытекает, что если $x_1=0$, то $\dot{v}\leqslant 0$ и $\dot{v}=0$ лишь при $x=0$.

Дальнейшее доказательство теоремы 9.6 проводится так же, как и доказательство теоремы 5.3, только вместо функции (5.37) следует рассмотреть функцию (9.39).

§ 10. Устойчивость при более сильных ограничениях на нелинейность

В этом параграфе будут сформулированы некоторые условия устойчивости в целом нулевого решения системы (4.1), которые накладывают на $f(x)$ более жесткие ограничения, чем обобщенные условия Рауза — Гурвица.

1. Теорема 10.1. *Предположим, что выполняются условия случаев 8, 11, 12 и 13, предположим, кроме того, что функция $f(x)$ при всех $x\neq 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$A<\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{(A^2+k^2)(b-k^2)}{Ab-Ak^2+dk^2},\qquad(10.1)$$

тогда нулевое решение системы (4.1) устойчиво в целом.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях рассматриваемых случаев имеет место неравенство

$$A^2-Ad+b>0.\qquad(10.2)$$

Если выполнены условия случаев 8 или 11, то неравенство (10.2) очевидно. Пусть выполняются условия случаев 12 и 13, т. е. пусть $d<0$, $b<0$, $0<A<B\leqslant-\frac{a}{b}$. Тогда ясно, что $a>0$ и $c-b>0$. По определению числа B имеем

$$\frac{-(c-b)-\sqrt{(c-b)^2+4ad}}{2d} \leqslant -\frac{a}{b}$$

или

$$-2ad+b(c-b) \geqslant -b\sqrt{(c-b)^2+4ad}. \qquad (10.3)$$

После возведения в квадрат получаем

$$ad \leqslant bc. \qquad (10.4)$$

Из (10.3) следует, что $-2ad + b(c-b) > 0$. Кроме того, из условий рассматриваемых случаев следует $(c-b)^2 + 4ad > 0$. Из последних двух неравенств получаем $c^2 - b^2 > 0$. Отсюда и из $c - b > 0$ выводим

$$c + b > 0. \qquad (10.5)$$

Из определения A имеем

$$-2Ad = c - b - \sqrt{(c-b)^2+4ad}.$$

Отсюда и из (10.4), (10.5) получаем

$$-2Ad \geqslant (c-b) - \sqrt{(c-b)^2+4bc} = -2b$$

или

$$-Ad + b \geqslant 0,$$

а это и доказывает (10.2). Из соотношений (9.14) вытекает, кроме того, что $k^2 - b > 0$.

Из неравенства (10.1) следует, что

$$0 < \frac{\gamma(x)}{x} \leqslant \frac{k^2(b-k^2-dA)}{Ab-Ak^2+dk^2} \quad \text{при } x \neq 0. \qquad (10.6)$$

Но тогда из соотношения (9.10) следует, что производная от функции

$$v = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2-dA+b}{k^2-b}y_1^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2-dA+b}{k^2-b}z_1^2 + $$
$$+ (bA - Ak^2 + dk^2)\frac{A^2-dA+b}{k^2-b}\int\limits_0^x \gamma(x)\,dx \qquad (10.7)$$

по времени, взятая в силу системы (4.1), неположительна и может обращаться в нуль лишь при $x_1 = 0$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия одного из случаев: 14, 21 или 22 и, кроме того, выполняются неравенство* (10.2) *и условие* (10.1). *Тогда нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом.*

Теорема 10.3. *Пусть выполнены условия случая 10 и, кроме того, имеет место неравенство* $Ab - Ak^2 + dk^2 < 0$. *Тогда нулевое решение системы* (4.1) *устойчиво в целом, если имеет место условие* (10.1).

Доказательство двух последних теорем совпадает с доказательством теоремы 10.1.

2. Рассмотрим случай 17. Имеем

$$c + dA = a + bA = 0.$$

Система (4.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - Ax - \gamma(x), \\ \frac{dy}{dt} &= z - d\gamma(x), \\ \frac{dz}{dt} &= -b\gamma(x). \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

где A и $\gamma(x)$ определены соотношением (9.1) и $x\gamma(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Теорема 10.4. *Если выполнены условия случая 17 и если функция* $\gamma(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x \gamma(x)\,dx = \infty, \tag{10.9}$$

то нулевое решение системы (4.1) *устойчиво в целом.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{Ab} z^2 + \mu \int_0^x \gamma(x)\,dx, \tag{10.10}$$

где $x_1 = A^2x - Ay + z$, величина μ определяется следующим образом: $\mu = A\,|A^2 - dA + b|$, если $A^2 - dA + b \neq 0$, и μ — произвольное число из промежутка $0 < \mu < 4A^3$, если $A^2 - dA + b = 0$. Производная от функции v по времени в силу системы (10.8) равна

$$\dot{v} = -Ax_1^2 - \left[(A^2 - dA + b) + \frac{\mu}{A}\right] x_1\gamma(x) - \mu\gamma^2(x). \tag{10.11}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае функция v определенно положительна и бесконечно большая, а производная от нее $\dot{v}$ обращается в нуль лишь на множестве $\{x_1 = 0,\ x = 0\}$, которое, как легко видеть, не содержит целых траекторий системы (10.8). Для завершения доказательства следует применить теорему 3.4 гл. I.

Отметим, что в работе [91] получен более сильный результат, а именно доказана следующая

Теорема 10.5. *Если выполнены условия случая 17, то для устойчивости в целом нулевого решения системы* (4.1) *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*:

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \left(\gamma(x)\operatorname{sgn} x + \int_0^x \gamma(x)\,dx\right) = \infty.$$

§ 11. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости

Здесь, кратко следуя работе [94], изложим результаты исследования случаев 15 и 19. Несложным преобразованием переменных и функции $f(x)$ система (4.1) в рассматриваемых случаях может быть приведена к системе непрямого управления

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1x_1 + f(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= a_2x_2 + f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c_1x_1 + c_2x_2 - rf(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

где функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, \qquad \sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \tag{11.2}$$

Введем обозначения

$$d = -(a_1 + a_2), \quad b = a_1a_2,$$
$$b' = -(a_1 + a_2)r - (c_1 + c_2), \quad b'' = a_1a_2r + c_1a_2 + c_2a_1.$$

Имеет место следующий результат (см. [94]).

Теорема 11.1. *Пусть выполнены неравенства $d > 0$, $h > 0$, тогда необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нулевого решения системы* (11.1) *имеют вид*

$$r \geqslant 0, \quad b' > 0, \quad b'' > 0, \quad (b'')^{1/2} < (rb)^{1/2} + (db)^{1/2}.$$

§ 12. Устойчивость в целом системы с «чужой» нелинейностью

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (см. [111])

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + f(y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Предполагаем так же, как и в случае системы (2.1), что функция $f(y)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений при всех вещественных y. Кроме того, будем предполагать, что $f(y)$ удовлетворяет обобщенным условиям Рауза — Гурвица. Эти условия в зависимости от параметров системы (12.1) записываются по-разному. Поэтому возникает ряд различных случаев:

1. $a_{21} = 0$, $\delta_{12} = 0$, $f(y)$ — произвольная;
2. $a_{21} < 0$, $\delta_{12} = 0$,

$$yf(y) > \frac{\Delta_1(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) - \Delta}{a_{21}\Delta_1} y^2 \text{ при } y \neq 0; \tag{12.2}$$

3. $a_{21} > 0$, $\delta_{12} = 0$,

$$yf(y) < \frac{\Delta_1(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) - \Delta}{a_{21}\Delta_1} y^2 \text{ при } y \neq 0; \tag{12.3}$$

4. $\delta_{12} < 0$, $\delta_{12} = a_{21}\Delta_1$,

$$yf(y) < \frac{\Delta}{a_{21}\Delta_1} y^2 \text{ при } y \neq 0; \tag{12.4}$$

5. $\delta_{12} > 0$, $\delta_{12} = a_{21}\Delta_1$,

$$yf(y) > \frac{\Delta}{a_{21}\Delta_1} y^2 \text{ при } y \neq 0; \tag{12.5}$$

6. $\delta_{12} < 0,\ a_{21}\Delta_1 - \delta_{12} > 0,$

$$\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}y^2 < yf(y) < \frac{\Delta}{\delta_{12}}y^2 \text{ при } y \neq 0; \quad (12.6)$$

7. $\delta_{12} > 0,\ a_{21}\Delta_1 - \delta_{12} < 0,$

$$\frac{\Delta}{\delta_{12}}y^2 < yf(y) < \frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}y^2 \text{ при } y \neq 0; \quad (12.7)$$

8. $\delta_{12} > 0,\ a_{21}\Delta_1 - \delta_{12} > 0,$

$$yf(y) > \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}y^2, \\ \dfrac{\Delta}{\delta_{12}}y^2 \end{array} \right. \text{ при } y \neq 0; \quad (12.8)$$

9. $\delta_{12} < 0,\ a_{21}\Delta_1 - \delta_{12} < 0,$

$$yf(y) < \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}y^2, \\ \dfrac{\Delta}{\delta_{12}}y^2 \end{array} \right. \text{ при } y \neq 0. \quad (12.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

δ_{ik} — минор определителя Δ, соответствующий элементу a_{ik},

$$\Delta_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Отметим, что условия Рауза — Гурвица при $f(y) \equiv ay$ имеют вид

$$\Delta_1 < 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}) - \Delta - a(a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}) < 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta - \delta_{12}a < 0.$$

Не нарушая общности, считаем $\Delta < 0$.

Следует отметить, что из обобщенных условий Рауза — Гурвица вытекает единственность точки равновесия $x = y = z = 0$ у системы (12.1).

Переходим к исследованию устойчивости в целом.

2. Случай 1, $a_{21} = 0$, $\delta_{12} = -a_{23}a_{31} = 0$.

а) Пусть $a_{23} = 0$, $a_{31} = 0$. Тогда система (12.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + f(y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

Так как при $f(y) \equiv 0$ корни характеристического уравнения имеют только отрицательные вещественные части, а последние уравнения не зависят от x, то $y(t) \to 0$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, следовательно, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, а тогда из неравенства $\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} < 0$ получаем, что и $a_{11} < 0$. Из первого уравнения системы (12.10) имеем

$$x(t) = \frac{x(0) + \int\limits_0^t [a_{12}y + a_{13}z + f(y)] \exp(-a_{11}t)\,dt}{\exp(-a_{11}t)},$$

откуда следует, что и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, нулевое решение системы (12.10) устойчиво в целом.

б) Пусть $a_{31} = 0$, $a_{23} \neq 0$. Тогда система (12.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + f(y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

Так как при $f(y) \equiv 0$ характеристическое уравнение системы (12.11) имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а последние уравнения не зависят от x, то $y(t) \to 0$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, следовательно, $a_{22} + a_{33} < 0$, $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$, а тогда из неравенства $\Delta_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) < 0$ следует, что $a_{11} < 0$, и так же, как и выше, мы заключаем, что тривиальное решение $x = y = z = 0$ устойчиво в целом.

в) Пусть $a_{31} \neq 0$, $a_{23} = 0$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к заключению об устойчивости в целом тривиального решения системы (12.1) и в этом случае. Таким образом, получена теорема.

Теорема 12.1. *Если выполнены условия случая* 1, *то тривиальное решение системы* (12.1) *устойчиво в целом.*

3. Рассмотрим случаи 2 и 3. Из условий (12.2) и (12.3) следует, что функция $f(y)$ может быть представлена в виде

$$f(y)=\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1}\,y-a_{21}\alpha(y),$$

где функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условию

$$y\alpha(y)>0 \quad \text{при} \quad y\neq 0. \tag{12.12}$$

Теперь система (12.1) может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_{11}x+\left(a_{12}+\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1}\right)y+a_{13}z-a_{21}\alpha(y),\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ \frac{dz}{dt}&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,\end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

и так как при $\alpha(y)\equiv 0$ $\Delta_1<0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3<0$, то, как известно, для системы первого приближения (при $\alpha(y)\equiv 0$) характеристическое уравнение имеет один отрицательный корень и два чисто мнимых, а именно:

$$\xi_1=\Delta_1<0,\quad \xi_{2,3}=\pm\lambda i,\qquad \text{где}\qquad \lambda=\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}.$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned}x_1&=a_{21}\xi_1x-[\delta_{22}-(a_{11}+a_{33})\xi_1+\xi_1^2]y+\\&\qquad\qquad+(\delta_{32}-a_{23}\xi_1)z,\\ y_1&=-(\delta_{22}-\lambda^2)y+\delta_{32}z,\\ z_1&=-a_{21}\lambda x+(a_{11}+a_{33})\lambda y-a_{23}\lambda z\end{aligned}\right\}$$

система (12.13) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\xi_1x_1+a_{21}^2\xi_1\alpha(y),\\ \frac{dy_1}{dt}&=-\lambda z_1,\\ \frac{dz_1}{dt}&=\lambda y_1+a_{21}^2\lambda\alpha(y),\end{aligned}\right\} \tag{12.14}$$

где

$$y = \frac{-\lambda x_1 + \lambda y_1 + \xi_1 z_1}{\lambda (\xi_1^2 + \lambda^2)}. \tag{12.15}$$

Легко проверить, что наше преобразование неособое.

Положим

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{1}{2a_{21}^2\lambda^2}(y_1^2 + z_1^2).$$

Производная от функции v по времени в силу системы (12.14) равна

$$\dot{v} = \xi_1 \alpha(y) y.$$

Функция $\dot{v}$ неположительна и может обращаться в нуль лишь при $y = 0$. Но плоскость $y = 0$, как легко проверить, не содержит целых траекторий системы (12.14), кроме начала координат. Функция v определенно положительна и, если имеет место соотношение

$$\lim_{|y| \to \infty} \int_0^y \alpha(y)\,dy = \infty, \tag{12.16}$$

v бесконечно большая. Таким образом, в силу теоремы 3.4 гл. I получаем следующее утверждение.

Теорема 12.2. *При выполнении условий случаев* 2 *и* 3 *нулевое решение системы* (12.1) *устойчиво в целом, если выполняется условие* (12.16), *и устойчиво в области*

$$v < \min\left\{ \int_0^{+\infty} \alpha(y)\,dy, \int_0^{-\infty} \alpha(y)\,dy \right\},$$

если (12.16) *не выполняется.*

4. Рассмотрим далее случаи 4 и 5. Теперь функция $f(y)$ может быть представлена в виде

$$f(y) = \frac{\Delta}{a_{21}\Delta_1} y - a_{21}\alpha(y),$$

где функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условию

$$y\alpha(y) > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0,$$

и тогда систему (12.1) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + \left(a_{12} + \frac{\Delta}{a_{21}\Delta_1}\right) y + a_{13}z - a_{21}\alpha(y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}\right\} \qquad (12.17$$

и так как $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 = 0$, то характеристическо уравнение системы первого приближения имеет один ну левой корень и два корня с отрицательными веществення ми частями, а именно:

$$\xi_{1,2} = \frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} - \frac{\Delta}{\Delta_1}\right)}}{2}, \quad \xi_3 = 0.$$

а) Пусть корни ξ_1, ξ_2 — вещественные и различные Тогда преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \delta_{12}x - \delta_{22}y + \delta_{32}z, \\ y_1 &= a_{21}\xi_2 x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\xi_1 + \xi_1^2]y + \\ &\quad + (\delta_{32} - a_{23}\xi_1)z, \\ z_1 &= a_{21}\xi_1 x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\xi_2 + \xi_2^2]y + \\ &\quad + (\delta_{32} - a_{23}\xi_2)z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого отличен от нуля, система (12.17 приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a_{21}\delta_{12}\alpha(y), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \xi_1 y_1 - a_{21}^2\xi_2\alpha(y), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \xi_2 z_1 - a_{21}^2\xi_1\alpha(y), \end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

где

$$y = \frac{(\xi_1 - \xi_2)\, x_1 + \xi_2 y_1 - \xi_1 z_1}{\xi_1\xi_2(\xi_2 - \xi_1)}. \qquad (12.19$$

Положим

$$v = \int_0^y \alpha(y)\, dy + \frac{\xi_1 + \xi_2}{2a_{21}^2\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2)^2}\left(\xi_1 y_1^2 - \frac{4\xi_1\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} y_1 z_1 + \xi_2 z_1^2\right).$$

Производная от функции v по времени в силу системы (12.18) и соотношения (12.19) равна

$$\dot{v} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{a_{21}^2 \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)^2} (\xi_1 y_1 - \xi_2 z_1)^2.$$

Функция $\dot{v}$ знакоотрицательна и обращается в нуль только при $\xi_1 y_1 - \xi_2 z_1 = 0$. Но плоскость $\xi_1 y_1 - \xi_2 z_1 = 0$, как легко проверить, не содержит целых траекторий системы (12.18), отличных от нулевого положения равновесия.

Покажем, что все траектории системы (12.18) ограничены. Возьмем произвольную точку P фазового пространства и выберем положительные постоянные l и N такими, чтобы точка P лежала в области D, определяемой неравенствами

$$v \leqslant l, \qquad |x_1| \leqslant N.$$

Область D ограничена, так как $v > 0$ и v бесконечно большая в пространстве переменных y_1, z_1. Рассмотрим траекторию $\varphi(P, t)$ и покажем, что траектория $\varphi(P, t) \subset D$ при $t > 0$, если N достаточно велико. Действительно, она не может выйти из области D через поверхность $v = l$, так как $v > 0$ и $\dot{v}$ вдоль траектории $\varphi(P, t)$ неположительна. Через плоскости $x_1 = \pm N$ траектория $\varphi(P, t)$ также выйти не может, так как из первого уравнения системы (12.18) получим

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{x_1=\pm N} = -a_{21}\delta_{12}\alpha\left(\frac{\pm(\xi_1 - \xi_2) N + \xi_2 y_1 - \xi_1 z_1}{\xi_1 \xi_2 (\xi_2 - \xi_1)}\right).$$

Из неравенства $y\alpha(y) > 0$ при $y \neq 0$ в силу ограниченности y_1 и z_1 в условиях рассматриваемых случаев имеем

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{x_1=N} < 0, \qquad \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{x_1=-N} > 0,$$

если N достаточно велико. Следовательно, траектория $\varphi(P, t)$ не может пересечь ни одной из плоскостей $x_1 = \pm N$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.5 гл. I, т. е. имеет место устойчивость в целом.

б) Пусть корни ξ_1, ξ_2 — вещественные и кратные, а именно:

$$\xi_{1,2} = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \xi_3 = 0.$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \delta_{12}x - \delta_{22}y + \delta_{32}z, \\ y_1 &= a_{21}\xi_1 x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\xi_1 + \xi_1^2]y + \\ &\qquad + (\delta_{32} - a_{21}\xi_1)z, \\ z_1 &= a_{21}^2 x + a_{21}a_{22}y - a_{21}a_{23}z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого отличен от нуля, система (12.17) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2a_{21}^2\xi_1\alpha(y), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \xi_1 y_1 + a_{21}^2\xi_1\alpha(y), \\ \frac{dz_1}{dt} &= -a_{21}y_1 + \xi_2 z_1 - a_{21}^3\alpha(y), \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

где

$$y = \frac{-a_{21}x_1 + a_{21}y_1 + \xi_1 z_1}{a_{21}\xi_1^2}. \tag{12.21}$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{1}{2a_{21}^4\xi_1^2}(a_{21}y_1 - \xi_1 z_1)^2 + \frac{1}{2a_{21}^4}z_1^2,$$

производная от которой по времени в силу системы (12.20) равна

$$\dot{v} = \frac{1}{a_{21}^4\xi_1}(a_{21}y_1 - \xi_1 z_1)^2.$$

Функция $\dot{v}$ знакоотрицательна и обращается в нуль лишь на множестве $\{a_{21}y_1 - \xi_1 z_1 = 0\}$, которое, как легко проверить, не содержит целых траекторий системы (12.20), за исключением начала координат. Так же как и в случае, а), легко доказать ограниченность траекторий, следовательно, устойчивость в целом имеет место и в этом случае.

в) Пусть корни ξ_1 и ξ_2 — комплексные, т. е.

$$\xi_{1,2} = \mu + \lambda i,$$

где

$$\mu = \frac{\Delta_1}{2} < 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} - \frac{\Delta}{\Delta_1}\right) - \Delta_1^2}. \tag{12.22}$$

Преобразование

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2a_{21}\mu x - \delta_{22}y + \delta_{32}z, \\ y_1 &= a_{21}\mu x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\mu + \mu^2 - \lambda^2]y + \\ &\qquad + (\delta_{32} - a_{23}\mu)z, \\ z_1 &= -a_{21}\lambda x - a_{22}\lambda y - a_{23}\lambda z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого отличен от нуля, приводит систему (12.17) к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2a_{21}^2\mu\alpha(y), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \mu y_1 - \lambda z_1 - a_{21}^2\mu\alpha(y), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \mu z_1 + \lambda y_1 + a_{21}^2\lambda\alpha(y), \end{aligned}\right\} \qquad (12.23)$$

где

$$y = \frac{-\lambda x_1 + \lambda y_1 + \mu z_1}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2)}. \qquad (12.24)$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{1}{2a_{21}^2(\lambda^2+\mu^2)}y_1^2 + \frac{2\mu^2+\lambda^2}{2a_{21}^2\lambda^2(\mu^2+\lambda^2)}z_1^2 + \\ + \frac{\mu}{a_{21}^2\lambda(\lambda^2+\mu^2)}y_1 z_1,$$

производная от которой по времени в силу системы (12.23) равна

$$\dot{v} = \frac{2\mu}{a_{21}^2\lambda^2(\lambda^2+\mu^2)}(\lambda y_1 + \mu z_1)^2 \leqslant 0.$$

Так же, как и выше, доказывается, что и в этом случае выполняются все условия теоремы 3.5 гл. I.

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 12.3. *Если выполняются условия случаев 4 и 5, то нулевое решение системы* (12.1) *устойчиво в целом.*

5. Теперь рассмотрим случаи 6 и 7. В рассматриваемых условиях функция $f(y)$ может быть представлена

в виде

$$f(y)=\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\,y-\delta_{12}\alpha(y),$$

где функция $\alpha(y)$ подчинена условию

$$0<y\alpha(y)<-\frac{\Delta_1[a_{21}\Delta-\delta_{12}(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})]}{\delta_{12}^2(a_{21}\Delta_1-\delta_{12})}\,y^2\quad\text{при }y\neq 0. \tag{12.25}$$

В этом случае систему (12.1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_{11}x+\left(a_{12}+\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\right)y+a_{13}z-\delta_{12}\alpha(y),\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ \frac{dz}{dt}&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,\end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

и так как $\Delta_1<0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3<0$, то характеристическо уравнение системы первого приближения будет иметь дв чисто мнимых корня, а именно:

$$\xi_1=\Delta_1<0,\qquad \xi_{2,3}=\pm\lambda i,$$

где

$$\lambda=\sqrt{\frac{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}}. \tag{12.27}$$

Учитывая (12.27), условие (12.25) можно переписать сле дующим образом:

$$0<y\alpha(y)<-\frac{\xi_1\lambda^2}{\delta_{12}^2}\,y^2\quad\text{при}\quad y\neq 0. \tag{12.28}$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned}x_1&=(\delta_{12}-a_{21}\xi_1)x-[\delta_{22}-(a_{11}+a_{33})\xi_1+\xi_1^2]y+\\&\qquad+(\delta_{32}-a_{23}\xi_1)\,z,\\ y_1&=\delta_{12}x-(\delta_{22}-\lambda^2)y+\delta_{32}z,\\ z_1&=-\lambda a_{21}x+(a_{11}+a_{33})\lambda y-\lambda a_{23}z,\end{aligned}\right\}$$

определитель которого, как нетрудно проверить, отличе от нуля, система (12.26) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \xi_1 x_1 - \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\alpha(y),\\ \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda z_1 - \delta_{12}^2\alpha(y),\\ \frac{dz_1}{dt} &= \lambda y_1 + \lambda a_{21}\delta_{12}\alpha(y),\end{aligned}\right\}\tag{12.29}$$

где

$$y = \frac{-\lambda x_1 + \lambda y_1 + \xi_1 z_1}{\lambda(\xi_1^2 + \lambda^2)}.\tag{12.30}$$

Рассмотрим функцию

$$v = 2\delta_{12}(\lambda^2 a_{21} + \delta_{12}\xi_1)\int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{\delta_{12}}{(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\tag{12.31}$$

производная от которой в силу системы (12.29) и соотношения (12.30) в условиях рассматриваемых случаев равна

$$\dot v = \frac{2\delta_{12}}{(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\xi_1}[\xi_1 x_1 - \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\alpha(y)]^2 - \\ - 2\lambda^2\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\alpha(y)\left[\frac{\delta_{12}^2}{\lambda^2\xi_1}\alpha(y) + y\right].$$

Функция $\dot v$ знакоотрицательна и может обращаться в нуль лишь при условии

$$y = 0, \quad x_1 = 0.\tag{12.32}$$

Но, как легко проверить, система (12.29) не имеет траекторий, кроме начала координат $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, удовлетворяющих условию (12.32).

Если $\delta_{12}(a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1) \geqslant 0$, то функция v определенно положительная и бесконечно большая. Пусть $\delta_{12}(a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1) < 0$. В этом случае функцию v можно записать в виде

$$v = 2\delta_{12}(a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1)\int_0^y\left[\alpha(y) + \frac{\lambda^2\xi_1}{\delta_{12}^2}y\right]dy + A_{11}x_1^2 + \\ + A_{22}y_1^2 + A_{33}z_1^2 + A_{12}x_1y_1 + A_{13}x_1z_1 + A_{23}y_1z_1,\tag{12.33}$$

где

$$A_{33} = \frac{\lambda^2}{\xi_1^2 + \lambda^2} + \frac{\xi_1^2 \lambda^2 (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

$$A_{22} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda^4 (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

$$A_{11} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{12} - a_{21}\xi_1} - \frac{\lambda^2 \xi_1 (\lambda^2 a_{21} + \delta_{12}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

$$A_{12} = \frac{2\lambda^2 \xi_1 (a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

$$A_{13} = \frac{2\xi_1^2 \lambda (a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

$$A_{23} = -\frac{2\xi_1^2 \lambda (a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)^2},$$

причем в силу (12.27) и $\delta_{12} (a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1) < 0$ в условиях рассматриваемых случаев имеем

$$A_{33} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_{33} & \frac{1}{2} A_{23} \\ \frac{1}{2} A_{23} & A_{22} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2 (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_{33} & \frac{1}{2} A_{23} & \frac{1}{2} A_{13} \\ \frac{1}{2} A_{23} & A_{22} & \frac{1}{2} A_{12} \\ \frac{1}{2} A_{13} & \frac{1}{2} A_{12} & A_{11} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^4 (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{\delta_{12} (\xi_1^2 + \lambda^2)} > 0;$$

и, как следует из критерия Сильвестра, квадратичная форма в (12.33) будет определенно положительной, а тогда в силу неравенства $\delta_{12} (a_{21}\lambda^2 + \delta_{12}\xi_1) < 0$ и условия (12.28) функция v будет бесконечно большой.

Таким образом, выполняются все условия теоремы 3.4 гл. I, т. е. мы получили утверждение:

Теорема 12.4. *Если выполняются условия случаев 6 и 7, то нулевое решение системы* (12.1) *устойчиво в целом.*

6. Исследуем случаи 8 и 9.

а) Пусть

$$\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}=\frac{\Delta}{\delta_{12}},$$

тогда функция $f(y)$ может быть представлена в виде

$$f(y)=\frac{\Delta}{\delta_{12}}y-a_{21}\alpha(y),$$

где функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условию

$$y\alpha(y)>0 \quad \text{при } y\neq 0,$$

а система (12.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_{11}x+\left(a_{12}+\frac{\Delta}{\delta_{12}}\right)y+a_{13}z-a_{21}\alpha(y),\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ \frac{dz}{dt}&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z, \end{aligned}\right\} \qquad (12.34)$$

и, так как $\Delta_1<0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$, характеристическое уравнение системы первого приближения имеет два корня, равных нулю, и один корень отрицательный, а именно:

$$\xi_1=\Delta_1<0, \quad \xi_{2,3}=0. \qquad (12.35)$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1&=(\delta_{12}-a_{21}\xi_1)x-[\delta_{22}-(a_{11}+a_{33})\xi_1+\xi_1^2]y+\\ &\qquad\qquad+(\delta_{32}-a_{23}\xi_1)z,\\ y_1&=\delta_{12}x-\delta_{22}y+\delta_{32}z,\\ z_1&=a_{21}^2x-(a_{11}+a_{33})a_{21}y+a_{23}a_{21}z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, отличен от нуля, система (12.34) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\xi_1x_1-a_{21}(\delta_{12}-a_{21}\xi_1)\alpha(y),\\ \frac{dy_1}{dt}&=-a_{21}\delta_{12}\alpha(y),\\ \frac{dz_1}{dt}&=-a_{21}y_1-a_{21}^3\alpha(y), \end{aligned}\right\} \qquad (12.36)$$

где

$$y=\frac{-a_{21}x_1+a_{21}y_1-\xi_1z_1}{a_{21}\xi_1^2}. \qquad (12.37)$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$v=\int_0^y \alpha(y)\,dy+\frac{1}{2\xi_1 a_{21}(a_{21}\xi_1-\delta_{12})}x_1^2+\frac{1}{2\xi_1 a_{21}\delta_{12}}y_1^2 .$$

В силу системы (12.36) будем иметь

$$\dot v=-\frac{1}{a_{21}(\delta_{12}-a_{21}\xi_1)}x_1^2\leqslant 0,$$

причем $\dot v=0$ только при $x_1=0$ и плоскость $x_1=0$ не содержит целых траекторий системы (12.36), отличных от нулевого положения равновесия. Функция v определенно положительна, и если выполняется условие

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_0^y \alpha(y)\,dy=+\infty, \tag{12.38}$$

то v бесконечно велика. Таким образом, при выполнении условия (12.38) нулевое решение системы (12.36) устойчиво в целом.

б) Пусть

$$\delta_{12}\,yf(y)>\delta_{12}\,\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\,y^2>\Delta y^2 \quad \text{при} \quad y\neq 0, \tag{12.39}$$

тогда функция $f(y)$ может быть представлена в виде

$$f(y)=\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\,y-a_{21}\alpha(y),$$

где функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условию $y\alpha(y)>0$ при $y\neq 0$. В этом случае система (12.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=a_{11}x+\left(a_{12}+\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\right)y+a_{13}z-a_{21}\alpha(y),\\
\frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\
\frac{dz}{dt}&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,
\end{aligned}\right\} \tag{12.40}$$

и так как $\Delta_1<0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3<0$, то характеристическое уравнение системы первого приближения имеет два чисто мнимых корня и один отрицательный, а именно:

$$\xi_1 = \Delta_1 < 0, \quad \xi_{2,3} = \pm \lambda i, \quad \lambda = \sqrt{\frac{a_{21}\Delta - \delta_{12}(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})}{a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}}}. \tag{12.41}$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\xi_1 + \xi_1^2]y + \\ &\quad + (\delta_{32} - a_{23}\xi_1)z, \\ y_1 &= \delta_{12}x - (\delta_{22} - \lambda^2)y + \delta_{32}z, \\ z_1 &= -\lambda a_{21}x + (a_{11} + a_{33})\lambda y - a_{23}\lambda z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого отличен от нуля, система (12.40) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \xi_1 x_1 - a_{21}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\alpha(y), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda z_1 - a_{21}\delta_{12}\,\alpha(y), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \lambda y_1 + \lambda a_{21}^2\,\alpha(y), \end{aligned}\right\} \tag{12.42}$$

где

$$y = \frac{-\lambda x_1 + \lambda y_1 + \xi_1 z_1}{\lambda(\xi_1^2 + \lambda^2)}. \tag{12.43}$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{\delta_{12}}{2a_{21}(\lambda^2 a_{21} + \xi_1\delta_{12})(a_{21}\xi_1 - \delta_{12})}\,x_1^2 + \\ + \frac{1}{2a_{21}(\lambda^2 a_{21} + \delta_{12}\xi_1)}\,(y_1^2 + z_1^2).$$

Вычисляя производную от функции v в силу системы (12.42), получим

$$\dot v = \frac{\lambda^2(a_{21}\xi_1 - \delta_{12})}{\lambda^2 a_{21} + \xi_1\delta_{12}}\,y\alpha(y) + \frac{\delta_{12}\xi_1}{a_{21}(\lambda^2 a_{21} + \xi_1\delta_{12})(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}\,x_1^2 \leqslant 0,$$

причем $\dot v = 0$ только на множестве $\{y = 0,\ x_1 = 0\}$, которое не содержит целых траекторий системы (12.42), отличных от нулевого положения равновесия. Функция v определенно положительна и бесконечно велика, следовательно, тривиальное решение системы (12.41) устойчиво в целом.

в) Пусть

$$\delta_{12}yf(y) > \Delta y^2 > \frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{a_{21}\Delta_1-\delta_{12}}\delta_{12}y^2 \quad \text{при} \quad y \neq 0. \tag{12.44}$$

Функция $f(y)$ теперь может быть представлена следующим образом:

$$f(y) = \frac{\Delta}{\delta_{12}}y + \delta_{12}\alpha(y),$$

где $\alpha(y)$ удовлетворяет условию $y\alpha(y) > 0$ при $y \neq 0$. Тогда система (12.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + \left(a_{12} + \frac{\Delta}{\delta_{12}}\right)y + a_{13}z + \delta_{12}\alpha(y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}\right\} \tag{12.45}$$

и, так как $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 = 0$, то характеристическое уравнение системы первого приближения имеет один равный нулю корень и два корня с отрицательными вещественными частями:

$$\xi_{1,2} = \frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\left(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}-\frac{a_{21}\Delta}{\delta_{12}}\right)}}{2}, \qquad \xi_3 = 0.$$

1) Пусть корни ξ_1 и ξ_2 вещественные и различные, т. е.

$$\Delta_1^2 - 4\left(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}-\frac{a_{21}\Delta}{\delta_{12}}\right) > 0. \tag{12.46}$$

Тогда преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \delta_{12}x - \delta_{22}y + \delta_{32}z, \\ y_1 &= (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)x + [\delta_{22} - (a_{11}+a_{33})\xi_1 + \xi_1^2]y + \\ &\qquad + (\delta_{32} - a_{23}\xi_1)z, \\ z_1 &= (\delta_{12} - a_{21}\xi_2)x + [\delta_{22} - (a_{11}+a_{33})\xi_2 + \xi_2^2]y + \\ &\qquad + (\delta_{32} - a_{23}\xi_2)z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого $D = \xi_1\xi_2(\xi_2 - \xi_1)(a_{21}\delta_{32} - a_{23}\delta_{12}) \neq 0$ при условии

$$a_{21}\delta_{32} - a_{23}\delta_{12} \neq 0, \tag{12.47}$$

система (12.45) приводится к виду

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \delta_{12}^2\,\alpha(y),\\
\frac{dy_1}{dt} &= \xi_1 y_1 + \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)\,\alpha(y),\\
\frac{dz_1}{dt} &= \xi_2 z_1 + \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2)\,\alpha(y),
\end{aligned}\right\} \tag{12.48}
$$

где

$$
y = \frac{(\xi_1 - \xi_2)\,x_1 + \xi_2 y_1 - \xi_1 z_1}{\xi_1\xi_2(\xi_2 - \xi_1)}. \tag{12.49}
$$

Если $\delta_{12} - a_{21}\xi_1 = 0$, то, положив

$$
v = \int_0^y \alpha(y)\,dy - \frac{1}{2a_{21}^2\,\xi_1^2\,\xi_2}\,x_1^2 + By_1^2 + \frac{1}{2a_{21}^2\,\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2)}\,z_1^2,
$$

в силу системы (12.48) получим

$$
\dot v = \xi_1 y\alpha(y) + 2B\xi_1 y_1^2 + \frac{1}{a_{21}^2\,\xi_1(\xi_1 - \xi_2)}\,z_1^2.
$$

Функция v при $B > 0$ определенно положительна и бесконечно большая, а производная от нее $\dot v$ определенно отрицательна. Следовательно, тривиальное решение системы (12.48) устойчиво в целом.

Если $\delta_{12} - a_{21}\xi_2 = 0$, то, положив

$$
\begin{aligned}
v = \int_0^y \alpha(y)\,dy - \frac{1}{4\xi_2^3 a_{21}^2}\,x_1^2 - \frac{1}{4a_{21}^2\,\xi_2(\xi_2 - \xi_1)^2}\,y_1^2 + Cz_1^2 &+\\
+ \frac{2\xi_2 - \xi_1}{2a_{21}^2\,\xi_2^2(\xi_2 - \xi_1)}\,y_1 z_1&,
\end{aligned}
$$

в силу системы (12.48) будем иметь

$$
\dot v = \frac{\xi_1}{2}y\alpha(y) - \frac{\xi_1}{2a_{21}^2\,\xi_2(\xi_2 - \xi_1)}y_1^2 + 2C\xi_2 z_1^2 + \frac{(2\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)}{2a_{21}^2\,\xi_2^2(\xi_2 - \xi_1)^2}y_1 z_1,
$$

причем при достаточно больших $C > 0$ функция v определенно положительна и бесконечно велика, а производная $\dot v$ определенно отрицательна, следовательно, тривиальное решение системы (12.48) устойчиво в целом в этом случае.

Если $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1) > 0$, $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) < 0$, то беря функцию Ляпунова в виде

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy - \frac{1}{4\xi_2\delta_{12}^2}x_1^2 - \frac{1}{4(\xi_2 - \xi_1)\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}y_1^2 + \\ + \frac{2\xi_2 - \xi_1}{4\xi_2(\xi_2 - \xi_1)\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2)}z$$

и учитывая, что в силу системы (12.48) будем иметь

$$\dot{v} = \frac{\xi_1}{2}y\alpha(y) - \frac{\xi_1 y_1^2}{2(\xi_2 - \xi_1)\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)} + \\ + \frac{2(\xi_2 - \xi_1)z_1^2}{2(\xi_2 - \xi_1)\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2)},$$

заключаем об устойчивости в целом и в этом случае.

Если $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1) < 0$, $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) < 0$, то за функцию Ляпунова, удовлетворяющую всем условиям теоремы 3.4 гл. I, можно взять функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy - \frac{\xi_1 + \xi_2}{4\delta_{12}^2\xi_1\xi_2}x_1^2 + \frac{y_1^2}{4\xi_1\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)} + \frac{z_1^2}{4\xi_2\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2)}.$$

Следовательно, и в этом случае имеет место устойчивость в целом.

Случай $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1) < 0$, $\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) > 0$ невозможен, так как, вычитая из второго неравенства первое, получим $\delta_{12}a_{21}(\xi_1 - \xi_2) > 0$, но это невозможно, так как в условиях рассматриваемых случаев $\delta_{12}a_{21} < 0$ и, следовательно, $\delta_{12}a_{21}(\xi_1 - \xi_2) < 0$.

Пусть теперь

$$\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1) > 0, \quad \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{1}{2}Ax_1^2 + \frac{1}{2}By_1^2 + \frac{1}{2}Cz_1^2 + Dy_1z_1,$$

где

$$A = \frac{[\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2\delta_{12}](a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}) - a_{21}\delta_1 \cdot \xi_1\xi_2}{-2a_{21}\delta_{12}^2 \xi_1\xi_2 [\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2\delta_{12}]},$$

$$B = \frac{-(\xi_1 + \xi_2)^2(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{2\xi_1\delta_{12}a_{21}(\xi_2 - \xi_1)\,[\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2\delta_{12}]},$$

$$C = \frac{-(\xi_1 + \xi_2)^2(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{2\xi_2\delta_{12}a_{21}(\xi_2 - \xi_1)^2[\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2\delta_{12}]},$$

$$D = \frac{\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)}{\delta_{12}a_{21}(\xi_2 - \xi_1)^2[\xi_1(\delta_{12} - a_{21}\xi_2) + \xi_2\delta_{12}]}.$$

Нетрудно проверить, что при наших условиях

$$A > 0, \quad B > 0 \quad \text{и} \quad C > 0.$$

Производная от функции v по времени, взятая в силу системы (12.48), равна

$$\dot{v} = -A\xi_1\xi_2 y\alpha(y) + B\xi_1 y_1^2 + C\xi_2 z_1^2 + D(\xi_1 + \xi_2)y_1 z_1,$$

и, так как

$$4BC\xi_1\xi_2 - (\xi_1 + \xi_2)^2 D^2 > 0, \quad BC - D > 0,$$

функция v определенно положительна и бесконечно большая, а производная $\dot{v}$ определенно отрицательна. Итак, по теореме 3.4 гл. I нулевое положение равновесия устойчиво в целом.

2) Корни ξ_1, ξ_2 — комплексно сопряженные, т. е.

$$\Delta_1 - 4\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} - \frac{a_{21}\Delta}{\delta_{12}}\right) < 0$$

и

$$\xi_{1,2} = \mu \pm \lambda i, \quad \xi_3 = 0,$$

где

$$\mu = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} - \frac{a_{21}\Delta}{\delta_{12}}\right)}.$$

Преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \delta_{12}x - \delta_{22}y + \delta_{32}z, \\ y_1 &= (\delta_{12} - a_{21}\mu)x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\mu + \mu^2 - \lambda^2]y + \\ &\quad + (\delta_{32} - a_{23}\mu)z, \\ z_1 &= -a_{21}\lambda x - a_{22}\lambda y - a_{23}\lambda z, \end{aligned}\right\}$$

определитель которого, как легко видеть, отличен от нуля, система (12.45) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \delta_{12}^2\,\alpha(y), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \mu y_1 - \lambda z_1 + \delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\mu)\,\alpha(y), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \mu z_1 + \lambda y_1 - a_{21}\lambda\delta_{12}\,\alpha(y), \end{aligned}\right\} \tag{12.50}$$

где

$$y = \frac{-\lambda x_1 + \lambda y_1 - \mu z_1}{\lambda(\lambda^2 + \mu)}.$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{1}{2} B y_1^2 + \frac{1}{2} C z_1^2 + D y_1 z_1,$$

где

$$B = -\frac{a_{21}\left[\delta_{12}(a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}) + (\lambda^2 + \mu^2)\,a_{21}^2\right]}{\delta_{12}\left[\lambda^2 a_{21}^2 + (\delta_{12} - a_{21}\mu)^2\right]^2},$$

$$C = -\frac{(\delta_{12} - a_{21}\mu)\left[\delta_{12}(a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}) + (\lambda^2 + \mu^2)a_{21}^2\right] + \left[\lambda^2 a_{21}^2 + (\delta_{12} - a_{21}\mu)^2\right]^2}{a_{21}\lambda\,\delta_{12}\left[\lambda^2 a_{21}^2 + (\delta_{12} - a_{21}\mu)^2\right]^2}$$

$$D = \frac{-(\delta_{12} - a_{21}\mu)\left[\delta_{12}(a_{21}\Delta_1 - \delta_{12}) + (\lambda^2 + \mu^2)\,a_{21}^2\right]}{\delta_{12}\lambda\left[\lambda^2 a_{21}^2 + (\delta_{12} - a_{21}\mu)\right]^2}.$$

В силу системы (12.50) имеем

$$\dot v = (B\mu + D\lambda)y_1^2 + (C\mu - D\lambda)z_1^2 + \\ +(C\lambda - B\lambda + 2D\mu)\,y_1 z_1$$

В условиях рассматриваемых случаев $B > 0$, $C > 0$ а тогда, как нетрудно проверить, имеют место неравенства

$$B\mu + D\lambda < 0,$$
$$4(B\mu + D\lambda)(C\mu + D) - (C\lambda - B\lambda + 2D\mu)^2 > 0$$

и, следовательно, функция v определенно положительна, а $\dot v \leqslant 0$, причем знак равенства возможен только при условии $y_1 = z_1 = 0$. Легко видеть, что траекторий, удовлетворяющих условию $y_1 = z_1 = 0$, кроме $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, система (12.50) не имеет. Так же как и в усло ниях случаев 4 и 5, доказывается ограниченность траекторий системы (12.50). Таким образом, имеет место устойчивость в целом системы (12.50).

3) Корни ξ_1, ξ_2 — вещественные и равные, т. е.

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \xi_3 = 0,$$

что равносильно условию

$$\Delta_1^2 - 4\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} - \frac{a_{21}\Delta}{\delta_{12}}\right) = 0.$$

Предполагая выполненным неравенство $a_{21}\delta_{32} - a_{23}\delta_{12} \neq 0$, в этом случае за функции Ляпунова, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3.4 гл. I, можно взять функции:

при $\delta_{12} - a_{21}\xi_1 = 0$

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + By_1^2 - \frac{1}{2a_{21}^3\delta_{12}} z_1^2,$$

при $\delta_{12} - a_{21}\xi_1 \neq 0$

$$v = \int_0^y \alpha(y)\,dy + \frac{a_{21}[\delta_{12}(\delta_{12} - 2a_{21}\xi_1) - a_{21}^2\xi_1^2]}{2\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)^4} y_1^2 -$$

$$- \frac{\xi_1^2}{a_{21}\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)^2} z_1^2 - \frac{[\delta_{12}(\delta_{12} - 2a_{21}\xi_1) - a_{21}\xi^2]}{a_{21}\delta_{12}(\delta_{12} - a_{21}\xi_1)^3} y_1 z_1,$$

где

$$B > 0,$$

$$y_1 = (\delta_{12} - a_{21}\xi_1)x - [\delta_{22} - (a_{11} + a_{33})\xi_1 + \xi_1^2]y + (\delta_{32} - a_{23}\xi_1)z,$$

$$z_1 = a_{21}^2 x + a_{22}a_{21}y + a_{23}a_{21}z,$$

и так же, как и в случае 6, делается заключение об устойчивости в целом.

В случаях 8 и 9 при наличии вещественных корней устойчивость тривиального решения устанавливается в предположении, что $a_{21}\delta_{32} - a_{23}\delta_{12} \neq 0$. Если же $a_{21}\delta_{32} - a_{23}\delta_{12} = 0$, то устойчивость в целом следует из результатов § 3 настоящей главы. Объединяя все вышеприведенные рассуждения, можем сформулировать теорему.

Т е о р е м а 12.5. *При выполнении условий случаев 8 и 9 тривиальное решение системы* (12.1) *устойчиво* *в целом всегда, за исключением случая*

$$\frac{\Delta_1(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})-\Delta}{\Delta_1 a_{21}-\delta_{12}}=\frac{\Delta}{\delta_{12}},$$

когда требуется выполнение дополнительного условия

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_0^y \alpha(y)\,dy=+\infty.$$

§ 13. Устойчивость в целом одной системы с двумя нелинейностями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (см. [119])

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+\varphi_2(x_2)+\varphi_3(x_3),\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \frac{dx_3}{dt}&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{aligned}\right\}\qquad(13.1$$

где $\varphi_2(0)=\varphi_3(0)=0$; $\varphi_2(x_2)$, $\varphi_3(x_3)$ — непрерывны функции, удовлетворяющие условиям существования единственности решения системы (13.1) при всех вещес венных x_2 и x_3.

Пусть $a_{21}a_{31}\neq 0$, тогда преобразованием

$$\left.\begin{aligned}x&=a_{21}x_1+\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}x_2+a_{23}x_3,\\ y&=x_2,\\ z&=\frac{a_{21}}{a_{31}}x_3\end{aligned}\right\}$$

система (13.1) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-ax+aby-\varphi_1(y)-f_1(z),\\ \frac{dy}{dt}&=x-by,\\ \frac{dz}{dt}&=x-cz.\end{aligned}\right\}\qquad(13.2$$

Будем рассматривать случай, когда $c=$.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + aby - \varphi_1(y) - f_1(z), \\ \frac{dy}{dt} &= x - by, \\ \frac{dz}{dt} &= x \end{aligned}\right\} \qquad (13.3)$$

ри выполнении обобщенных условий Рауза — Гурвица, оторые в нашем случае имеют вид

$$+\,b > 0, \quad b\frac{f_1(z)}{z} > 0, \quad a\frac{f_1(z)}{z} + (a+b)\frac{\varphi_1(y)}{y} > 0 \ (yz \neq 0). \qquad (13.4)$$

1. Оказывается, что условия (13.4) недостаточны для стойчивости в целом системы (13.3) и что для этого необходимым является условие

$$\lim_{|z|\to\infty} \int_0^z bf_1(z)\,dz = +\infty. \qquad (13.5)$$

Пример

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + aby - \frac{z}{z^4+1}, \\ \frac{dy}{dt} &= x - by, \\ \frac{dz}{dt} &= x \quad (a > 0,\ b > 0) \end{aligned}\right\} \qquad (13.6)$$

оказывает, что при невыполнении условия (13.5) у системы (13.3) могут появиться неограниченные решения. В самом деле, пусть $\varphi(P, t)$ — фазовая траектория системы (13.6). Рассмотрим область $D = \{by - x \geqslant 0,\ z > 0,\ z \geqslant 1\}$ и покажем, что если $P \in D$, то и $\varphi(P, t) \subset D$ при всех $t \geqslant 0$. Действительно, в области D

$$\frac{d}{dt}(by - x)\Big|_{by-x=0} = \left[(a+b)(x - by) + \frac{z}{z^4+1}\right]\Big|_{x-by=0} = \frac{z}{z^4+1} > 0,$$

$$\frac{d}{dt}(xz) = \left(-ax + aby - \frac{z}{z^4+1}\right)z + x^2 \geqslant -\frac{z^2}{z^4+1} + \frac{1}{z^2} > 0,$$

$$\frac{dz}{dt} = x > 0,$$

откуда следует, что $\varphi(P, t)$ при возрастании времени может покинуть область D.

Далее, в области D имеем

$$\frac{dz}{dt} = x \geqslant \frac{1}{z}, \quad z\,dz \geqslant dt, \quad z^2(t) - z_0^2 \geqslant 2t \quad (z(0) = z_0),$$

$$z(t) \geqslant \sqrt{2t + z_0^2}$$

и, следовательно, $z(t)$ вдоль траектории $\varphi(P, t)$ возраста неограниченно.

2. Пусть выполнены условия (13.4), (13.5) и $a =$ тогда система (13.3) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\varphi_1(y) - f_1(z), \\ \frac{dy}{dt} &= x - by, \\ \frac{dz}{dt} &= x. \end{aligned}\right\} \qquad (13.$$

Взяв функцию Ляпунова в виде

$$v = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^y \varphi_1(y)\,dy + \int_0^z f_1(z)\,dz,$$

в силу системы (13.7) будем иметь

$$\dot{v} = -by\varphi_1(y) \leqslant 0, \qquad (13$$

причем знак равенства возможен лишь на плоскости $y =$ и плоскость $y = 0$ не содержит целых траекторий систе (13.7), кроме начала координат.

Если рассмотреть область $D = \{v \leqslant l, (y - z)^2 \leqslant k$ где $l > 0$, $k > 0$, и заметить, что

$$\frac{d}{dt}(y - z)^2 \Big|_{y - z = \pm k} = -2bk|y| < 0, \qquad (13.$$

то легко установить ограниченность траекторий сист мы (13.7). Теорема 3.5 гл. I приводит теперь к следу щему утверждению.

Теорема 13.1. *Если выполняются условия* (13. (13.5) *и* $a = 0$, *то нулевое решение системы* (13.3) *устойчи в целом.*

3. Введем обозначение

$$\inf_z a\frac{f_1(z)}{z} = \frac{a}{b}\mu.$$

Пусть $\mu = 0$, в силу условий (13.4), (13.5) это возмож только при $a > 0$, $b > 0$. Тогда условия (13.4), (13.5) сведутся к следующим:

$$a > 0,\ b > 0,$$
$$\frac{f_1(z)}{z} > 0,\quad \frac{\varphi_1(y)}{y} \geqslant 0,\quad \lim_{|z|\to\infty} \int_0^z f_1(z)\,dz = +\infty. \tag{13.10}$$

Теорема 13.2. *Если выполняются условия* (13.10), *то тривиальное решение системы* (13.3) *устойчиво в целом.*

Действительно, рассмотрим определенно положительную и бесконечно большую функцию

$$v = x^2 + aby^2 + 2\int_0^y \varphi_1(y)\,dy + 2\int_0^z f_1(z)\,dz.$$

В силу системы (13.3) имеем

$$\dot{v} = -2a(x - by)^2 - 2by\varphi_1(y).$$

Функция $\dot{v}$ знакоотрицательна и может обращаться в нуль лишь на множестве $\{x = 0,\ y = 0\}$, которое не содержит целых траекторий системы (13.3), отличных от начала координат. Теперь наше утверждение следует из теоремы 3.4 гл. I.

Пусть теперь $\mu \neq 0$. В силу (13.4) $\mu > 0$. Обозначим

$$f(z) = af_1(z) - \frac{a}{b}\mu z,$$
$$(a + b)\varphi(y) = \frac{a}{b}\mu y + (a + b)\varphi_1(y).$$

Тогда система (13.3) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + a\left(b + \frac{\mu}{b(a+b)}\right)y + \frac{\mu}{b}z - \varphi(y) - \frac{1}{a}f(z),\\ \frac{dy}{dt} &= x - by,\\ \frac{dz}{dt} &= x, \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

а условия (13.4), (13.5) заменяются следующими:

$$\left.\begin{aligned} &a + b > 0,\quad \mu + \frac{b}{a}\frac{f(z)}{z} > 0,\quad \frac{f(z)}{z} \geqslant 0,\\ &\frac{\varphi(y)}{y} > 0,\quad \lim_{|z|\to\infty}\int_0^z \left[\mu z + \frac{b}{a}f(z)\right]dz = +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{13.12}$$

Имеют место следующие две леммы.

Лемма 13.1. *Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[0, x_0]$ непрерывна, не убывает, $f(0)=0$ и $\frac{f(x)}{x} < k$, где $k > 0$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx < x_0 f(x_0) - \frac{f^2(x_0)}{2k}.$$

Лемма 13.2. *Пусть $a + b > 0$, $\mu + \frac{b}{a}\frac{f(z)}{z} > 0$, $\frac{f(z)}{z} \geqslant 0$ и $f(z)$ не убывает. Тогда*

$$W(y, z) = \mu(a+b)\left(\frac{a}{a+b}y - z\right)^2 + \frac{2b^2}{a}\int_0^z f(u)\,du + 2b\int_0^{z-y} f(u)\,du \geqslant 0$$

Отметим, что при доказательстве этих лемм в [119] используется вспомогательная система нелинейных дифференциальных уравнений, вдоль решений которой изучается поведение $W(y, z)$. Мы на этом доказательстве останавливаться не будем.

Теорема 13.3. *Пусть для системы* (13.11) *выполняются условия* (13.12), *и пусть $f(z)$ — неубывающая функция. Тогда тривиальное решение системы* (13.11) *устойчиво в целом.*

Теорема доказывается при помощи функции

$$v = b^2(x + ay)^2 + \mu(a+b)\left(\frac{a}{a+b}y - z\right)^2 + 2b^2\int_0^y \varphi(y)\,dy + \frac{2b^2}{a}\int_0^z f(u)\,du + 2b\int_0^{z-y} f(u)\,du$$

с использованием лемм 13.1—13.2.

ГЛАВА VII

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Настоящая глава посвящается изучению устойчивости в целом одной системы третьего порядка с нелинейностью типа $f(x, y)$. Так же как и в главе VI, изучение этой системы сводится к рассмотрению ряда различных случаев в зависимости от параметров системы. В каждом случае система в целях упрощения подвергается неособому линейному преобразованию. Затем для каждого случая строится функция Ляпунова, с помощью которой и устанавливаются достаточные условия устойчивости в целом.

В большинстве случаев построенные функции Ляпунова не являются бесконечно большими по всем переменным, но в этих случаях удается доказать ограниченность траекторий соответствующей системы. Все результаты этой главы получены И. В. Гайшуном (см. [27, 28]).

§ 1. Предварительные преобразования изучаемой системы

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_1(x_1, x_2) + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где a_{ij} — вещественные постоянные. Относительно функции $f_1(x_1, x_2)$ будем предполагать, что она непрерывно дифференцируема по обеим переменным. Отметим, что это условие во многих случаях можно было бы ослабить.

Пусть, дополнительно, функция $f_1(x_1, x_2)$ такова, что система (1.1) имеет единственную точку покоя $O(0, 0, 0)$ и, следовательно, $f_1(0,0) = 0$. Когда функция $f_1(x_1, x_2)$ является линейной, т. е. когда $f_1(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$, система (1.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= p_1x_1 + p_2x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Условия устойчивости в целом нулевого решения системы (1.2) записываются в виде системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} < 0, \\ &\Delta_2 = \Delta_1(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) - \Delta_3 < 0, \\ &\Delta_3 < 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где δ_{ik} — миноры определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_1 & p_2 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - p_2\delta_{23} + p_1\delta_{13}.$$

Пусть теперь

$$a_{13}a_{23} \neq 0.$$

Совершим в системе (1.1) следующее преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= \frac{a_{13}}{a_{23}}x_2, \\ z &= \frac{a_{21}a_{13}}{a_{23}}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Система (1.1) в новых переменных примет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= cx + z,\\ \frac{dy}{dt} &= by + z,\\ \frac{dz}{dt} &= f(x, y) + az,\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

где

$$c = -\frac{\delta_{32}}{a_{23}}, \quad b = -\frac{\delta_{31}}{a_{13}}, \quad a = \frac{a_{21}a_{13}^2 + a_{12}a_{23}^2 + a_{13}a_{23}a_{33}}{a_{23}a_{13}},$$

$$f(x, y) = f_1\left(x, \frac{a_{23}}{a_{13}} y\right) + \frac{a_{21}a_{13}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} - a_{23}a_{33})}{a_{23}^2} x + {}$$

$$+ \frac{a_{12}a_{23}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} - a_{13}a_{33})}{a_{13}^2} y.$$

Если $a_{23} = 0$, $a_{13} \neq 0$ и $a_{21} \neq 0$, то система (1.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\\ \frac{dx_3}{dt} &= f_1(x_1, x_2) + a_{33}x_3\end{aligned}\right\}$$

и неособым преобразованием

$$\left.\begin{aligned}x &= x_1,\\ y &= \frac{1}{a_{21}} x_2,\\ z &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= z,\\ \frac{dy}{dt} &= x + by,\\ \frac{dz}{dt} &= f(x, y) + az,\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

где

$$a = a_{11} + a_{33}, \qquad b = a_{22},$$

$$f(x,\ y) = f_1(x,\ a_{21}y) + (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{33})x + \\ + a_{12}a_{21}(a_{22} - a_{33})y.$$

Если $a_{21} = a_{23} = 0$, $a_{13} \neq 0$, то система (1.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{22}x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_1(x_1,\ x_2) + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\}$$

и неособым преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= x_2, \\ z &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z, \\ \frac{dy}{dt} &= by, \\ \frac{dz}{dt} &= f(x,\ y) + az, \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

где

$$b = a_{22}, \qquad a = a_{11} + a_{33},$$

$$f(x,\ y) = f_1(x,\ y) - a_{11}a_{33}x + a_{12}(a_{22} - a_{33})y.$$

Случай, когда $a_{23} \neq 0$, $a_{13} = 0$, простым переименованием переменных приводится к случаю $a_{13} \neq 0$, $a_{23} = 0$.

Таким образом, в зависимости от параметров a_{ij} изучение системы (1.1) будем разбивать на четыре случая:

Случай первый: $a_{13} = a_{23} = 0$.

Случай второй: $a_{23} = a_{21} = 0$, $a_{13} \neq 0$.

Случай третий: $a_{23} = 0$, $a_{13}a_{21} \neq 0$.

Случай четвертый: $a_{13}a_{23} \neq 0$.

Случай первый малоинтересен, так как при $a_{13} = a_{23} = 0$ система (1.1) интегрируется квадратурами. Во втором случае, т. е. в случае системы (1.9), сколь-нибудь приемлемых функций Ляпунова построить не удается, поэтому для изучения устойчивости нулевого решения этой системы в [29] применяются качественные методы исследования, которые выходят за рамки нашей книги.

Все последующие параграфы посвящены третьему случаю. Случай четвертый здесь совсем не затрагивается.

§ 2. Устойчивость в одном частном случае

В этом параграфе рассмотрим систему (1.7) при $a = 0$, $b < 0$, т. е. рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + by, \\ \frac{dz}{dt} &= f(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$F(y) = \int_0^y f(0, y)\, dy, \qquad \Phi(x, y) = \int_0^x [f(0, y) - f(x, y)]\, dx,$$

$$w(x, y) = -b\int_0^y f(0, y)\, dy - \int_0^x f(x, y)\, dx.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + bf(0, y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > 0 \quad \textit{при } v \neq 0, \tag{2.2}$$

$$F(y) > 0 \ \textit{при } y \neq 0, \qquad \Phi(x, 0) > 0 \ \textit{при } x \neq 0, \tag{2.3}$$

$$u(x, y) = -4bF(y)\,\Phi(x, y) - x^2 f^2(0, y) > 0 \ \textit{при } xy \neq 0, \tag{2.4}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \ \textit{при фиксированном } y. \tag{2.5}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v = -\int_0^x f(x, y)\, dx - b\int_0^y f(0, y)\, dy + \frac{1}{2} z^2. \tag{2.6}$$

В силу системы (2.1) будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + bf(0, y)\right]. \tag{2.7}$$

Условие (2.2) обеспечивает неположительность функции $\frac{dv}{dt}$, если положить $u = x$, $v = x + by$. Функция $\frac{dv}{dt}$ обращается в нуль на множестве $x + by = 0$. Покажем, что на плоскости $x + by = 0$ нет целых положительных полутраекторий системы (2.1), отличных от нулевого положения равновесия. В самом деле, если такая траектория имелась бы, то вдоль нее, как это следует из второго уравнения системы (2.1), $y(t) \equiv c_2$, $x(t) \equiv c_1$, а тогда из первого уравнения этой же системы получаем $z(t) \equiv 0$. В силу единственности состояния равновесия системы (2.1) $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, рассматриваемое движение может быть только нулевым.

Покажем, что функция $w(x, y)$ является определенно положительной. Имеем

$$w(x, y) = -bF(y) - xf(0, y) + \Phi(x, y) =$$

$$= \frac{(2\Phi(x, y) - xf(0, y))^2}{4\Phi(x, y)} - \frac{4bF(y)\,\Phi(x, y) + x^2f^2(0, y)}{4\Phi(x, y)},$$

и теперь определенную положительность функции $w(x, y)$ обеспечивают условия (2.3) и (2.4).

Следовательно, функция $v(x, y, z) = w(x, y) + \frac{1}{2}z^2$ является определенно положительной функцией аргументов x, y, z.

Докажем ограниченность траекторий системы (2.1). Возьмем произвольную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ фазового пространства и выберем положительную постоянную l настолько большой, чтобы $P_0 \in D$, где $D = \{v \leqslant l\}$. Выпустим из точки P_0 траекторию $\varphi(P_0, t)$. Так как $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и функция v бесконечно большая по z, то координата $z(t)$ ограничена вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$.

Из второго уравнения системы (2.1) имеем

$$y(t) = \exp(bt)\left[y_0 + \int_0^t x(t)\exp(-bt)\,dt\right]. \tag{2.8}$$

Так как в силу (2.5) $x(t)$ ограничена вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$, то из (2.8) следует ограниченность и $y(t)$ вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$. Теперь для завершения доказательства остается применить теорему 3.5 гл. I.

Отметим, что в линейном случае, т. е. когда $f(x, y) = px + qy$, функции v и $\frac{dv}{dt}$ имеют вид соответственно

$$v = -\frac{p}{2}x^2 - qxy - \frac{1}{2}bqy^2 + \frac{1}{2}z^2,$$

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)^2 q,$$

а условия (2.2) — (2.5) превращаются в необходимые и достаточные условия Рауза — Гурвица.

Если воспользоваться представлением

$$w(x, y) = \left[\Phi^{1/2}(x, y) - \frac{xf(0, y)}{2\Phi^{1/2}(x, y)}\right]^2 + \left[-bF(y) - \frac{x^2f^2(0, y)}{4\Phi(x, y)}\right], \tag{2.9}$$

которое в силу условий (2.3), (2.4) имеет смысл, то легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если выполняются условия* (2.2) — (2.4) *и, кроме того,*

1) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty$ *при любом фиксированном* y,

2) $F(y) \leqslant M$, *где* M — *положительная постоянная, то нулевое решение системы* (2.1) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Действительно, условия (2.3) — (2.4) дают нам положительность выражения, стоящего во второй квадратной скобке (2.9). Отсюда следует ограниченность величины $\frac{x^2f^2(0, y)}{4\Phi(x, y)}$ при фиксированном x и в силу условия (2) нашей теоремы свойство (2.5) функции $w(x, y)$. Теорема доказана.

§ 3. Устойчивость в целом при отрицательных значениях параметров a и b

Настоящий параграф посвящается изучению системы (1.7) при $a < 0$, $b < 0$.

Функции $F(y)$, $\Phi(x, y)$ и $w(x, y)$ имеют прежний смысл.

Теорема 3.1. *Пусть* $a < 0$, $b < 0$, *выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int^{u}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y,0) + bf(0,y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} >$$

$$> ab(a+b) \quad \text{при } v \neq 0, \tag{3.1}$$

$$F(y) > 0 \quad \text{при } y \neq 0, \qquad \Phi(x, 0) > 0 \text{ при } x \neq 0, \tag{3.2}$$

$$u(x, y) = -4bF(y)\Phi(x, y) - x^2f^2(0, y) > 0 \text{ при } xy \neq 0 \tag{3.3}$$

$$b\frac{f(y,0)}{y} - \frac{f(0,y)}{y} \geqslant 0 \quad \text{при } y \neq 0 \tag{3.4}$$

и имеет место одно из соотношений

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \text{ при фиксированном } y, \tag{3.5}$$

или

$$\lim_{|y|\to\infty} [w(x, y) + h(y)] = \infty, \tag{3.6}$$

где $h(y) = a\int_0^y [f(0, y) - bf(y, 0)]\,dy$.

Тогда нулевое положение равновесия системы (1.7) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v = -\int_0^x f(x, y)\,dx + (a-b)\int_0^y f(0,y)dy - ab\int_0^y f(y,0)\,dy +$$

$$+\frac{ab}{2}(x+by)^2 + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2.$$

Производная $\frac{dv}{dt}$ функции v в силу системы (1.7) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left\{a[f(x,y) - f((0,y)] + abf(y,0) + \right.$$

$$\left. + bf(0,y) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}dx\right\} + ab(a+b)(x+by)^2 =$$

$$= -(x+by)\left[\int_0^x\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y,0) + bf(0,y)\right] +$$

$$+ ab(a+b)(x+by)^2$$

Из условия (3.1) теоремы следует, что $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$ на плоскости $x + by = 0$. Но, как легко видеть, на плоскости $x + by = 0$ нет целых траекторий системы (1.7), отличных от нулевого положения равновесия.

Докажем определенную положительность функции v. Очевидно, имеем

$$v(x, y, z) = w(x, y) + h(y) + \frac{ab}{2}(x + by)^2 + \frac{1}{2}[z - a(x + by)]^2.$$

Определенная положительность функции $w(x, y)$ доказывается так же, как и в теореме 2.1 настоящей главы.

Из условия (3.4) теоремы следует, что $h(y) \geqslant 0$. Таким образом, функция $v(x, y, z)$ определенно положительна.

Докажем теперь, что при выполнении условий теоремы функция v будет бесконечно большой. В самом деле, рассмотрим область D, определяемую неравенством

$$v(x, y, z) \leqslant l. \tag{3.7}$$

Покажем, что область D ограничена. Действительно, непосредственно из вида функции v и условия $w(x, y) + h(y) > 0$ заключаем, что из неравенства (3.7) следуют неравенства

$$(x + by)^2 \leqslant \frac{2}{ab} l. \tag{3.8}$$

$$[z - a(x + by)]^2 \leqslant 2l. \tag{3.9}$$

Из (3.9) в силу (3.8) следует ограниченность z. Ограниченность координат x и y следует из условия (3.5) теоремы и неравенства (3.8).

Таким образом, мы доказали следующие утверждения:

1) $v(x, y, z)$ — определенно положительная функция;

2) $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$ на множестве, не содержащем целых траекторий, отличных от нулевого положения равновесия;

3) функция v бесконечно большая.

Полученные условия в силу теоремы 3.4 гл. I равносильны утверждению теоремы.

Теорема 3.2. *При выполнении условий $a < 0$, $b < 0$ и условий* (3.1) — (3.4) *теоремы* 3.1 *для устойчивости* *в целом тривиального решения системы* (1.7) *достаточно выполнение условий*

α) $\lim\limits_{|y|\to\infty} F(y) = \infty$,

β) *функция* $g(x, y) = f(x, y) - f(0, y)$ *ограничена по* y *при любом фиксированном* x.

В самом деле, покажем, что выполнение условий α) и β) теоремы влечет выполнение условия (3.6). Из условия β) теоремы следует, что функция $\Phi(x, y) = -\int\limits_0^x g(x, y)\,dx$ будет ограниченной по y при любом фиксированном x. С другой стороны, для функции $w(x, y)$ имеем

$$w(x, y) = -b\left[F^{1/2}(y) + \frac{xf(0, y)}{2bF^{1/2}(y)}\right]^2 + \\ + \left[\Phi(x, y) + \frac{x^2 f^2(0, y)}{4bF(y)}\right] \geqslant 0, \qquad (3.10)$$

и в силу условий $\Phi(x, y) > 0$, $u(x, y) > 0$ при $xy \neq 0$ из (3.10) получим неравенство

$$0 \leqslant \frac{x^2 f^2(0, y)}{4(-b)F(y)} \leqslant \Phi(x, y).$$

Отсюда следует ограниченность при любом фиксированном x выражения $\frac{xf(0, y)}{2(-b)^{1/2} F^{1/2}(y)}$. Учитывая неравенства $a < 0$, $b < 0$, приходим к выводу, что функция $w(x, y)$ будет обладать тем свойством, что $\lim\limits_{|y|\to\infty} w(x, y) = \infty$ при любом фиксированном x. Так же, как и теорема 2.2, легко доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть* $a < 0$, $b < 0$ *и* $F(y) \leqslant M$, *где* M — *положительная постоянная. Пусть, кроме того, выполняются условия* (3.1) — (3.4) *теоремы* 3.1. *Тогда для устойчивости в целом нулевого решения системы* (1.7) *достаточно выполнения одного из соотношений*:

$$\lim_{|y|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty \quad \textit{при фиксированном } x,$$

или

$$\lim_{|x|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty \quad \textit{при фиксированном } y.$$

Теорема 3.4. *При выполнении условий $a < 0$, $b < 0$ и условий*

$$F(y) > 0 \quad \text{при } y \neq 0, \quad \Phi(x, 0) > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \tag{3.11}$$

$$u(x, y) = -4bF(y)\Phi(x, y) - x^2 f^2(0, y) > 0 \text{ при } xy \neq 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + bf(0, y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > 0 \text{ при } v \neq 0, \tag{3.13}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \quad \text{при фиксированном } y \tag{3.14}$$

нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 2.1. Используется функция Ляпунова

$$v = -\int_0^x f(x, y)\, dx - b\int_0^y f(0, y)\, dy + \frac{1}{2} z^2,$$

производная от которой в силу системы (1.7) равна

$$\frac{dv}{dt} = -(x + by)\left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + bf(0, y)\right] + az^2.$$

Если воспользоваться представлением функции $w(x, y)$ в виде (2.9), то легко сформулировать теорему, аналогичную теореме 2.2. Мы на этом останавливаться не будем.

Дальше в этом параграфе под функцией $w(x, y)$ будем понимать следующую функцию фазовых координат:

$$w(x, y) = -\int_0^x f(x, y)\, dx + a\int_0^y f(0, y)\, dy.$$

Теорема 3.5. *Пусть $a < 0$, $b < 0$ и выполнены условия*

$$F(y) < 0 \text{ при } y \neq 0, \quad \Phi(x, 0) > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \tag{3.15}$$

$$u(x, y) = 4aF(y)\,\Phi(x, y) - x^2 f^2(0, y) > 0 \text{ при } xy \neq 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{v}\int_0^u \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \,\Big|_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a + b) \quad \text{при } v \neq 0. \tag{3.17}$$

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом при выполнении одного из соотношений:*

$$\textit{либо}\ \lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty\ \textit{при фиксированном}\ y,$$

$$\textit{либо}\ \lim_{|y|\to\infty} w(x, y) = \infty\ \textit{при фиксированном}\ x. \qquad (3.18)$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$v = w(x, y) + \frac{ab}{2}(x + by)^2 + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2 = -\int_0^x f(x, y)\,dx + a\int_0^y f(0, y)\,dy + \frac{ab}{2}(x + by)^2 + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2.$$

В силу системы (1.7) имеем

$$\frac{dv}{dt} = -(x + by)\left\{a[f(x, y) - f(0, y)] + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right\} + ab(a + b)(x + by)^2 = -(x + by)\int_0^x\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + ab(a + b)(x + by)^2.$$

Из условия (3.17) теоремы следует, что функция $\frac{dv}{dt}$ неположительна и может обращаться в нуль лишь на плоскости $x + by = 0$. Но на этой плоскости, как легко видеть, не содержится ни одной целой траектории системы (1.7), отличной от нулевого положения равновесия.

Так как

$$w(x, y) = aF(y) - xf(0, y) + \Phi(x, y) = \frac{(2\Phi(x, y) - xf(0, y))^2}{4\Phi(x, y)} + \frac{4aF(y)\Phi(x, y) - x^2f^2(0, y)}{4\Phi(x, y)},$$

то в силу условий (3.15) и (3.16) $w(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$.

Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 3.1, легко показать, что при выполнении условий теоремы функция v будет бесконечно большой.

В силу теоремы 3.4 гл. I наше утверждение доказано.

Теорема 3.6. *При выполнении условий* $a < 0$, $b < 0$ *и условий* (3.15)—(3.17) *теоремы* 3.5 *для устойчивости* *в целом тривиального решения системы* (1.7) *достаточно выполнение условий:*

1) $\lim\limits_{|y|\to\infty} F(y) = -\infty$,

2) *функция* $g(x, y) = f(x, y) - f(0, y)$ *ограничена по* y *при фиксированном* x.

Теорема 3.7. *Если выполняются условия* $a < 0$, $b < 0$ *и условия* (3.15) — (3.17) *теоремы* 3.5 *и, кроме того,*

$\lim\limits_{|y|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty$ *при фиксированном* x,

$F(y) \geqslant -M$, *где* M — *положительная постоянная, то нулевое решение системы* (1.7) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Последние две теоремы доказываются так же, как и теоремы 3.2, 2.2, соответственно, если функцию $w(x, y)$ представить в следующем виде:

$$1)\ w(x, y) = -a\left[(-F(y))^{1/2} + \frac{xf(0, y)}{2a(-F(y))^{1/2}}\right]^2 + \left[\Phi(x, y) - \frac{x^2 f^2(0, y)}{4aF(y)}\right],$$

$$2)\ w(x, y) = \left[\Phi^{1/2}(x, y) - \frac{xf(0, y)}{2\Phi^{1/2}(x, y)}\right]^2 + \left[aF(y) - \frac{x^2 f^2(0, y)}{4\Phi(x, y)}\right].$$

§ 4. Случай, когда параметры a и b имеют разные знаки

1. Пусть $a < 0$, $b > 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = -\int_0^x \varphi(x, y)\, dx + a\int_0^y \varphi(0, y)\, dy - a\int_0^y \Big[bf(y, 0) + \frac{b}{a} f(0, y) - b^2(a + b)y\Big] dy + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2, \qquad (4.1)$$

где

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - ab(x + by).$$

Производная по времени от функции v, взятая в силу системы (1.7), имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\Big\{a[f(x,y)-f(0,y)] + abf(y,0) + bf(0,y) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}dx\Big\} + ab(a+b)(x+by)^2 = -(x+by)\left[\int_0^x\left(\frac{\partial f}{\partial y} + a\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + abf(y,0) + bf(0,y)\right] + ab(a+b)(x+by)^2. \tag{4.2}$$

Вводя новые переменные $x = u$, $x + by = v$, функцию $\frac{dv}{dt}$ можно при $x + by = v \neq 0$ представить в виде

$$\frac{dv}{dt} = -v^2\left\{\frac{1}{v}\left[\int_0^u\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y,0) + bf(0,y)\right] - ab(a+b)\right\}\Bigg|_{y=\frac{v-u}{b}}. \tag{4.3}$$

Примем следующие обозначения:

$$F(y) = \int_0^y \varphi(0,y)\,dy, \qquad \Phi(x,y) = \int_0^x [\varphi(0,y) - \varphi(x,y)]\,dx,$$

$$w(x,y) = -\int_0^x \varphi(x,y)\,dx + aF(y),$$

$$m(y) = -a\int_0^y\left[bf(y,0) + \frac{b}{a}f(0,y) - b^2(a+b)y\right]dy.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $a < 0$, $b > 0$ *и выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y,0) + bf(0,y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a+b) \quad \text{при } v \neq 0, \tag{4.4}$$

$$F(y) < 0 \ \text{ при } y \neq 0, \qquad \Phi(x,0) > 0 \ \text{ при } x \neq 0, \tag{4.5}$$

$$u(x,y) = 4aF(y)\Phi(x,y) - x^2\varphi^2(0,y) > 0 \ \text{ при } xy \neq 0, \tag{4.6}$$

$$b\frac{f(y,0)}{y} + \frac{b}{a}\frac{f(0,y)}{y} \geqslant b^2(a+b) \ \text{ при } y \neq 0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{|y|\to\infty}[w(x,y) + m(y)] = \infty \ \text{ при фиксированном } x. \tag{4.8}$$

Тогда тривиальное решение системы (1.7) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Доказательство. Из условия (4.4) следует, что $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$ на плоскости $x + by = 0$. Но плоскость $x + by = 0$ не содержит целых траекторий системы (1.7), отличных от нулевого положения равновесия.

Докажем теперь, что функция v определенно положительна.

Действительно, из условия (4.7) следует, что функция $m(y) \geqslant 0$ при $y \neq 0$. Так как

$$w(x, y) = aF(y) - x\varphi(0, y) + \Phi(x, y) =$$
$$= \frac{(2\Phi(x, y) - x\varphi(0, y))^2}{4\Phi(x, y)} + \frac{4aF(y)\Phi(x, y) - x^2\varphi^2(0, y)}{4\Phi(x, y)},$$

то в силу условий (4.5) и (4.6) $w(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$. Следовательно,

$$v(x, y, z) = w(x, y) + m(y) + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2$$

является определенно положительной функцией аргументов x, y, z.

Докажем теперь, что все траектории системы (1.7) при выполнении наших условий ограничены. Возьмем произвольную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ фазового пространства и выберем положительную постоянную l настолько большой, чтобы $P_0 \in D$, где $D = \{v \leqslant l\}$. Пусть $\varphi(P_0, t)$ — траектория системы (1.7), выходящая при $t = 0$ из точки P_0. Так как $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$, то $\varphi(P_0, t) \subset D$ при всех $t > 0$.

Рассмотрим теперь функцию $p(t) = z(t) - ax(t)$. Из первого уравнения системы (1.7) имеем

$$\frac{dx}{dt} = ax + p(t),$$

откуда

$$x(t) = \exp(at)\left[x_0 + \int_0^t p(t)\exp(-at)\,dt\right]. \qquad (4.9)$$

Из неравенства $(z - ax - aby)^2 \leqslant 2l$ (которое следует из неравенства $v \leqslant l$) в силу (4.8) заключаем, что вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$ ограничены $y(t)$ и $z(t) - ax(t) = p(t)$. Учитывая (4.9), получим, что вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$ ограничены все координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, т. е. траектория $\varphi(P_0, t)$ ограничена.

В силу теоремы 3.5 гл. I наше утверждение полностью доказано.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия $a < 0$, $b > 0$ и условия (4.4) — (4.7) теоремы 4.1. Тогда для устойчивости в целом нулевого решения системы (1.7) достаточно выполнение соотношений*

$$\alpha)\ \lim_{|y|\to\infty} F(y) = -\infty,$$

β) *функция $g(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(0, y)$ ограничена по y при любом фиксированном x.*

Для доказательства следует воспользоваться следующим представлением функции $w(x, y)$:

$$w(x, y) = -a\left[(-F(y))^{1/2} + \frac{x\varphi(0, y)}{2a(-F(y))^{1/2}}\right]^2 + \left[\Phi(x, y) - \frac{x^2\varphi^2(0, y)}{4aF(y)}\right]$$

и провести рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве теоремы 3.2.

Теорема 4.3. *Если выполняются условия $a < 0$, $b > 0$ и условия (4.4) — (4.7) теоремы 4.1 и, кроме того,*

$$\lim_{|y|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty \text{ при любом фиксированном } x \neq 0,$$

$F(y) \geqslant -M$, *где M — положительная постоянная, то нулевое положение равновесия системы (1.7) устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Для доказательства теоремы следует воспользоваться представлением

$$w(x, y) = \left[\Phi^{1/2}(x, y) - \frac{x\varphi(0, y)}{2\Phi^{1/2}(x, y)}\right]^2 + \left[aF(y) - \frac{x^2\varphi^2(0, y)}{4\Phi(x, y)}\right]$$

и рассуждениями теоремы 2.2.

Т е о р е м а 4.4. *Пусть выполнены условия*

a) $a < 0,\ b > 0,\ a + b < 0,$

b) $\frac{1}{v}\int\limits_0^u \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\Big|_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a+b)$ *при* $v \neq 0$,

c) $F(y) < 0$ *при* $y \neq 0$, $\Phi(x,\ 0) > 0$ *при* $x \neq 0$,

d) $4aF(y)\Phi(x,\ y) - x^2\varphi^2(0,\ y) > 0$ *при* $xy \neq 0$.

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Для доказательства рассмотрим функцию

$$v = w(x, y) + \frac{ab^2}{2}(a+b)y^2 + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2.$$

В силу системы (1.7) будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left\{a\left[f(x, y) - f(0, y)\right] + \int\limits_0^x \frac{\partial f}{\partial y}dx\right\} + $$
$$+ ab(a+b)(x+by)^2 = -(x+by)\int\limits_0^x\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + $$
$$+ ab(a+b)(x+by)^2,$$

и дальше доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 4.1, если заметить, что в этом случае имеет место условие

$$\lim_{|y|\to\infty} v(x, y, z) = \infty,$$

которое обеспечивает ограниченность траекторий системы (1.7).

Т е о р е м а 4.5. *Пусть выполняются условия* a), c), d) *теоремы* 4.4 *и*

$$\frac{1}{v}\left[\int\limits_0^u\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + bf(0, y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a+b)$$

при $v \neq 0$.

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Эта теорема доказывается с помощью функции Ляпунова

$$v = w(x, y) - b\int_0^y f(0, y)\,dy + \frac{ab^2}{2}(a+b)\,y^2 + \\ + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2,$$

производная от которой, взятая в силу системы (1.7), равна

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left[\int_0^x \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + bf(0, y)\right] + \\ + ab(a+b)(x+by)^2.$$

2. Пусть теперь $a > 0$, $b < 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = -\int_0^x \varphi(x, y)\,dx - b\int_0^y \varphi(0, y)\,dy - \\ - a\int_0^y [bf(y, 0) - f(0, y)]\,dy + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2.$$

В силу системы (1.7) будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left\{\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}dx + a[f(x, y) - f(0, y)] + \\ + abf(y, 0) + bf(0, y)\right\} + ab(a+b)(x+by)^2 = \\ = -(x+by)\left\{\int_0^x \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y, 0) + bf(0, y)\right\} + \\ + ab(a+b)(x+by)^2.$$

Если ввести новые переменные $x = u$, $x + by = v$, то функция $\frac{dv}{dt}$ перепишется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2\left\{\frac{1}{v}\left[\int_0^u \left(\frac{\partial f}{\partial y} + a\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + abf(y, 0) + bf(0, y)\right] - \\ - ab(a+b)\right\}.$$

Обозначим для краткости

$$w(x, y) = -\int_0^x \varphi(x, y)\,dx - b\int_0^y \varphi(0, y)\,dy,$$

$$p(y) = -a\int_0^y [bf(y, 0) - f(0, y)]\,dy.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть $a > 0$, $b < 0$ и выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + abf(y, 0) + bf(0, y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a+b)$$

$$\text{при } v \neq 0, \qquad (4.10)$$

$$F(y) > 0 \quad \text{при } y \neq 0, \quad \Phi(x, 0) > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \qquad (4.11)$$

$$[bf(y, 0) - f(0, y)]\, y \leqslant 0 \qquad \text{при } x \neq 0, \qquad (4.12)$$

$$-4bF(y)\Phi(x, y) - x^2\varphi^2(0, y) > 0 \text{ при } xy \neq 0, \qquad (4.13)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \text{ при фиксированном } y. \qquad (4.14)$$

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Доказательство. Из условия (4.10) следует, что $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$ на плоскости $x + by = 0$, которая, как легко видеть, не содержит целых положительных траекторий системы (1.7), отличных от нулевого положения равновесия.

Из условия (4.12) следует, что $p(y) \geqslant 0$ при всех вещественных y. Так как

$$w(x, y) = -bF(y) - x\varphi(0, y) + \Phi(x, y) =$$

$$= \frac{(2\Phi(x, y) - x\varphi(0, y))^2}{4\Phi(x, y)} - \frac{4bF(y)\Phi(x, y) + x^2\varphi^2(0, y)}{4\Phi(x, y)},$$

то в силу (4.11), (4.13) $w(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$. Таким образом, функция v является определенно положительной в пространстве переменных x, y, z.

Докажем теперь, что при выполнении условий теоремы все траектории системы (1.7) ограничены. Действительно, рассмотрим любую фазовую траекторию $\varphi(P_0, t)$ системы

(1.7), выходящую при $t=0$ из точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Выберем положительную постоянную l настолько большой, чтобы $P_0 \in D$, где область D определяется неравенством

$$v \leqslant l. \tag{4.15}$$

Так как функция $\frac{dv}{dt}$ знакоотрицательна, то $\varphi(P_0, t) \subset D$ при всех $t > 0$.

Из второго уравнения системы (1.7) имеем

$$y(t) = \exp(bt)\left[y_0 + \int_0^t x(t)\exp(-bt)\,dt\right],$$

отсюда в силу условия (4.14) теоремы следует ограниченность координат $x(t)$ и $y(t)$ вдоль траектории $\varphi(P_0, t)$. Ограниченность координаты $z(t)$ теперь следует из неравенства $(z - ax - aby)^2 \leqslant 2l$, которое в свою очередь вытекает из неравенства (4.15).

Таким образом, в данном случае выполняются все условия теоремы 3.5 гл. I, чем и завершается доказательство.

Если воспользоваться представлением

$$w(x, y) = \left[\Phi^{1/2}(x, y) - \frac{x\varphi(0, y)}{2\Phi^{1/2}(x, y)}\right]^2 + \left[-bF(y) - \frac{x^2\varphi^2(0, y)}{4\Phi(x, y)}\right],$$

то так же, как и в случае теоремы 4.3, легко доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.7. *Пусть* $a > 0$, $b < 0$, *выполняются условия* (4.10) — (4.13) *и, кроме того,*

$F(y) \leqslant M$, *где* M — *положительная постоянная,*

$\lim\limits_{|x|\to\infty} \Phi(x, y) = \infty$ *при фиксированном* y.

Тогда нулевое положение равновесия системы (1.7) *устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Т е о р е м а 4.8. *Пусть* $a > 0$, $b < 0$ *и выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + af(x, y) + bf(0, y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > ab(a+b)$$

$$\text{при } v \neq 0, \tag{4.16}$$

$$F(y) > 0 \text{ при } y \neq 0, \quad \Phi(x, 0) > 0 \text{ при } x \neq 0, \tag{4.17}$$

$$-4bF(y)\,\Phi(x, y) - x^2\varphi^2(0, y) > 0 \text{ при } xy \neq 0, \tag{4.18}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x, y) = \infty \text{ при фиксированном } y. \tag{4.19}$$

Тогда тривиальное решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v = w(x, y) + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2.$$

Производная по времени от функции v, взятая в силу уравнений системы (1.7), имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -(x + by)\left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + af(x, y) + bf(0, y)\right] + \\ + ab(a + b)(x + by)^2.$$

Из условия (4.16) следует, что $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$ на плоскости $x + by = 0$. Плоскость $x + by = 0$ не содержит целых траекторий системы (1.7), отличных от нулевого положения равновесия.

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 4.6, легко показать, что $w(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и все траектории системы (1.7) ограничены. Теорема 3.5 гл. I заканчивает доказательство.

Теорема 4.9. *Пусть* $a > 0$, $b < 0$ *и выполняются условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + bf(0, y)\right]_{y = \frac{v-u}{b}} > ab(a + b) \text{ при } v \neq 0, \tag{4.20}$$

$$F(y) > 0 \quad \text{при } y \neq 0, \quad \Phi(x, 0) > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \tag{4.21}$$

$$-4bF(y)\,\Phi(x, y) - x^2\varphi^2(0, y) > 0 \quad \text{при } xy \neq 0, \tag{4.22}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} w(x, y) = \infty \quad \text{при фиксированном } y. \tag{4.23}$$

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Доказательство этой теоремы проводится с помощью функции Ляпунова

$$v = w(x, y) + a\int_0^y f(0, y)\, dy + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2,$$

которая в силу условий (4.21) — (4.23) является определенно положительной и бесконечно большой. Производная от функции v, взятая в силу системы (1.7), имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left[\int_0^x \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + bf(0,y)\right] + \\ + ab(a+b)(x+by)^2.$$

Рассмотрим теперь следующую функцию фазовых координат:

$$v = w(x,y) - a\int_0^y f(-by,y)\,dy + \frac{1}{2}(z - ax - aby)^2. \quad (4.24)$$

Беря от нее производную в силу системы (1.7), будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -(x+by)\left\{\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}dx + bf(0,y) + af(x,y) + af(-by,y)\right\} + \\ + ab(a+b)(x+by)^2. \quad (4.25)$$

Используя функции (4.24) и (4.25), легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4.10. *Пусть $a > 0$, $b < 0$ и выполнены условия*

$$\frac{1}{v}\left[\int_0^u \frac{\partial f}{\partial y}dx + bf(0,y) + af(x,y) + af(-by,y)\right]_{y=\frac{v-u}{b}} > \\ > ab(a+b) \text{ при } v \neq 0,$$

$F(y) > 0$ *при* $y \neq 0$, $\Phi(x, 0) > 0$ *при* $x \neq 0$,

$-4bF(y)\,\Phi(x, y) - x^2\varphi^2(0, y) > 0$ *при* $xy \neq 0$,

$yf(-by, y) < 0$ *при* $y \neq 0$,

$\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x,y) = \infty$ *при фиксированном* y.

Тогда нулевое решение системы (1.7) *устойчиво в целом.*

Заметим, что функции типа (4.24) могут быть получены из соответствующих функций Ляпунова, рассмотренных в этой главе, если в последних вместо слагаемого вида

$$\alpha\int_0^y f(y,0)\,dy + \beta\int_0^y f(0,y)\,dy$$

использовать выражение $\int_0^y f(\alpha y, \beta y)\,dy$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем, УМН 4, вып. 4 (1949).
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во АН СССР, 1963.
3. Алимов Ю. И., О построении функций Ляпунова для релейных систем регулирования, «Автоматика и телемеханика» 21, № 6 (1960).
4. Алимов Ю. И., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, «Автоматика и телемеханика» 22, № 7 (1961).
5. Алимов Ю. И., К вопросу о построении функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Сибирский матем. ж. 2, № 1 (1961).
6. Алимов Ю. И., Обобщение теоремы А. М. Ляпунова о построении функции Ляпунова для устойчивой линейной системы, Тр. Уральского политехн. ин-та 139, 1964.
7. Арзамасцев Д. А., Рудницкий М. П., Применение второго метода Ляпунова для анализа электромеханических переходных процессов, связанных с определением предельных переходов в многомашинных системах, «Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике», ч. II, Новосибирск, «Наука», 1966.
8. Арзамасцев Д. А., Рудницкий М. П., Некоторые вопросы практического использования второго метода Ляпунова для исследования динамической устойчивости многомашинных систем, «Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике», ч. II, Новосибирск, «Наука», 1966.
9. Балитинов М. А., Поведение решений в целом одной нелинейной системы, встречающейся в теории автоматического регулирования, «Диф. уравнения» 5, № 2 (1969).
10. Балитинов М. А., Поведение решений в целом одной нелинейной системы, «Диф. уравнения» 5, № 6 (1969).
11. Барбашин Е. А., Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб. 29, № 2 (1951).
12. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, ДАН СССР 86, № 6 (1952).

13. Барбашин Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ 16, вып. 3 (1952).
14. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом, ПММ 18, вып. 3 (1954).
15. Барбашин Е. А., Об условиях сохранения свойства устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. вузов, сер. «Математика», № 1 (1957).
16. Барбашин Е. А., О построении функций Ляпунова для нелинейных систем, Тр. Первого международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, Изд-во АН СССР, 1961.
17. Барбашин Е. А., Бисярина Л. П., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. вузов, сер. «Математика», № 3 (1963).
18. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
19. Барбашин Е. А., О построении функций Ляпунова, «Диф. уравнения» 4, № 12 (1968).
20. Барбашин Е. А., Об устойчивости в целом нулевого решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, «Диф. уравнения» 5, № 3 (1969).
21. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, «Наука», 1969.
22. Бедельбаев А. К., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Изд-во АН КазССР, 1960.
23. Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, «Мир», 1965.
24. Беллман. Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
25. Бромберг П. В., Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования, «Наука», 1967.
26. Гайшун И. В., Об устойчивости в целом решений некоторых нелинейных уравнений третьего порядка, «Диф. уравнения» 5, № 2 (1969).
27. Гайшун И. В., Об устойчивости в целом одной системы регулирования, «Диф. уравнения» 6, № 5 (1970).
28. Гайшун И. В., Об устойчивости в целом движения, определяемого одной нелинейной системой третьего порядка, «Диф уравнения» 5, № 12 (1969).
29. Гайшун И. В., Об одном применении качественных методов в теории устойчивости нелинейных систем, «Диф. уравнения» 6, № 7 (1970).
30. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.
31. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967.
32. Геращенко Е. И., Завалищин С. Т., Исследование релейных систем с помощью разрывных функций Ляпунова, «Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике», ч. I, Новосибирск, «Наука», 1966.
33. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967.

34. Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, Изд-во МГУ, 1952.
35. Дувакин А. П., Лётов А. М., Об устойчивости регулируемых систем с двумя органами управления, ПММ 18, вып. 2 (1954).
36. Еругин Н. П., О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом, ПММ 14, вып. 5 (1950).
37. Еругин Н. П., Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений, ПММ 14, вып. 6 (1950).
38. Еругин Н. П., Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения, ПММ 15, вып. 2 (1951).
39. Еругин Н. П., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ 16, вып. 5 (1952).
40. Еругин Н. П., Качественные методы в теории устойчивости, ПММ 19, вып. 5 (1955).
41. Еругин Н. П., Методы решения вопросов устойчивости в большом, Тр. Второго всесоюзн. совещания по теории автоматического регулирования, т. I, Изд-во АН СССР, 1955.
42. Железнов Е. И., Об устойчивости в целом одной нелинейной системы трех уравнений, Тр. Уральского политехн. ин-та 74, 1958.
43. Заславская Т. Б., Тагиров М. А., Путилова А. Т., Функция Ляпунова как критерий синхронной динамической устойчивости, «Электричество», № 6 (1967).
44. Зубов В. И., Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, ПММ 17, вып. 4 (1953).
45. Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1957.
46. Костерев Н. В., Цукерник Л. В., Построение функции Ляпунова для анализа устойчивости синхронного двигателя, «Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике», ч. II, Новосибирск, «Наука», 1966.
47. Красовский Н. Н., Теоремы об устойчивости движения, определяемого системой двух уравнений, ПММ 16, вып. 5 (1952).
48. Красовский Н. Н., Об устойчивости при любых начальных возмущениях одной нелинейной системы трех уравнений, ПММ 17, вып. 3 (1953).
49. Красовский Н. Н., Об одной задаче устойчивости движения в целом, ДАН СССР 58, № 3 (1953).
50. Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях, ПММ 18, вып. 1 (1954).
51. Красовский Н. Н., Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, ПММ 18, вып. 6 (1954).
52. Красовский Н. Н., Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР 101, № 1 (1955).
53. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

54. Ку Ю. Х., Об устойчивости некоторых нелинейных систем четвертого порядка с выпуждающими функциями, «Механика» (период. сб. переводов) 2: 90, ИЛ, 1965.
55. Кузьмин П. А., Теорема Гурвица и прямом методе Ляпунова, Тр. Казанск. авиац. ин-та 71 (1962).
56. Курцвейль Я., К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехословацкий матем. ж. 5: 80(1955).
57. Курцвейль Я., Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехословацкий матем. ж. 6 : 81, № 2, № 4 (1956).
58. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, «Мир», 1964.
59. Лебедев А. А., Об одном методе построения функций Ляпунова, ПММ 21, вып. 1 (1957).
60. Лепик З. Х., О втором методе Ляпунова с квадратичными формами, зависящими от параметров. в применении к нелинейной системе автономных дифференциальных уравнений с линейной частью, Изд-во АН СССР, 1960.
61. Лефшец С., Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, «Мир», 1967.
62. Лётов А. М., Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами, ПММ 17, вып. 4 (1953).
63. Лётов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.
64. Лётов А. М., Проблематика научных исследований в области автоматического управления, «Автоматика и телемеханика» 8 (1966).
65. Лурье А. И., Постников В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ 8, вып. 3 (1944).
66. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
67. Лурье А. И., Прямой метод Ляпунова и его применение в теории автоматического регулирования, Тр. Второго всесоюзн. совещания по теории автоматического регулирования, т. I, Изд-во АН СССР, 1955.
68. Лурье А. И., Розенвассер Е. Н., О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем, Изд-во АН СССР, 1960.
69. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
70. Малкин И. Г., О построении функций Ляпунова для систем линейных уравнений, ПММ 16, вып. 2 (1952).
71. Малкин И. Г., Об одной задаче устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ 16, вып. 4 (1952).
72. Малкин И. Г., К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, ПММ 18, вып. 2 (1954).
73. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, «Наука», 1966.
74. Матросов В. М., Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости, Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механ., вып. I, «Наука», 1965.
75. Моисеев Н. Д., Квазиинтегральный вывод прямого коэффициентного критерия асимптотической устойчивости движения, Изд-во ВВА им. Жуковского, вып. 3, 1948.

76. Моисеев Н. Д., Очерки развития теории устойчивости, Гостехиздат, 1949.
77. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, «Наука», 1965.
78. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
79. Немыцкий В. В., Метод вращающих функций Ляпунова для разыскания колебательных режимов, ДАН 97, № 1 (1954).
80. Огурцов А. И., Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков, Изв. вузов, сер. «Математика», № 1 (1958).
81. Огурцов А. И., Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков, Изв. вузов, сер. «Математика», № 3 (1959).
82. Орурцов А. И., Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков, ПММ 23, вып. 1 (1959).
83. Огурцов А. И., Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков, Матем. зап. УрГУ (Свердловск) 3, № 2 (1962).
84. Огурцов А. И., Новый критерий устойчивости решения одного нелинейного дифференциального уравнения, Матем. зап. УрГУ (Свердловск) 5, № 2 (1965).
85. Оркина Е. Л., Применение разрывных функций Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных следящих систем, «Автоматика и телемеханика» 26, № 12 (1965).
86. Паркс П., Новое доказательство критерия устойчивости Рауза — Гурвица, основанное па применении второго метода Ляпунова, «Механика» (период. сб. переводов), № 4 (1964).
87. Персидский К. П., Об одной теореме Ляпунова, ДАН 14, № 9 (1937).
88. Пионтковский А. А., Рутковская Л. Д., Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью метода векторной функции Ляпунова, «Автоматика и телемеханика», № 10 (1967).
89. Плисс В. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для системы n дифференциальных уравнений, ДАН 105, № 1 (1955).
90. Плисс В. А., Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка, ДАН **111**, № 6 (1956).
91. Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд-во ЛГУ, 1958.
92. Плишкин Ю. М., К вопросу об оценке интегральных критериев качества регулирования нелинейных систем, «Автоматика и телемеханика» 16, № 2 (1955).
93. Пожарицкий Г. К., О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения, ПММ 22, вып. 2 (1958).
94. Попов В. М., Об ослаблении достаточных условий абсолютной устойчивости, «Автоматика и телемеханика» 19, № 1(1958).
95. Пьюри Н. Н., Устойчивость в целом некоторого класса нелинейных систем, Тр. Амер. о-ва инж.-механиков, сер. Д, «Теорет. основы инж. расчетов» 88, № 2 (1966).

96. Разумихин Б. С., Об устойчивости тривиального решения систем второго порядка, ПММ 19, вып. 3 (1955).
97. Разумихин Б. С., Оценки решений системы дифференциальных уравнений возмущенного движения с переменными коэффициентами, ПММ 21, вып. 1 (1957).
98. Разумихин Б. С., О применении метода Ляпунова к задачам устойчивости, ПММ 22, вып. 3 (1958).
99. Репин Ю. М., Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием, ПММ 29, вып. 3 (1965).
100. Розенвассер Е. Н., Замечание об одном способе построения функции Ляпунова, ПММ 24, вып. 4 (1960).
101. Розенвассер Е. Н., О построении функции Ляпунова для однородного класса нелинейных систем, Изв. АН СССР, Отд. техн. н. «Механ. и машиностр.», № 2 (1960).
102. Ройтенберг Я. Н., Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами, ПММ 22, вып. 2 (1958).
103. Ройтенберг Я. Н., О построении функций Ляпунова для систем линейных уравнений в конечных разностях с переменными коэффициентами, ПММ 29, вып. 5 (1965).
104. Румянцев В. В., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ 20, вып. 6 (1956).
105. Румянцев В. В., Об устойчивости движения относительно части переменных, Вестник МГУ № 4 (1957).
106. Рыбашов М. В., Дудникова Е. Е., Применение прямого метода Ляпунова к решению задач нелинейного программирования, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6 (1964).
107. Сегё Г. П., Развитие второго метода Ляпунова. Нелинейные автономные системы, Тр. Амер. об-ва инж.-механиков, серия Д, «Техн. механика», № 4 (1962).
108. Тагиров М. А., О функции Ляпунова для уравнений электрической системы и консервативной идеализации, Изв. АН СССР, «Энергетика и транспорт», № 1 (1966).
109. Тагиров М. А., Критические случаи по Ляпунову в теории устойчивости электрических систем, «Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике», ч. II, Новосибирск, «Наука», 1966.
110. Тузов А. П., Вопросы устойчивости для одной системы регулирования, Вестник ЛГУ № 2 (1955).
111. Тузов А. П., Об устойчивости в целом одной системы автоматического регулирования, Вестник ЛГУ № 1 (1957).
112. Уокер Д. А., Кларк Л. Г., Интегральный метод построения функций Ляпунова для нелинейных автономных систем, Тр. Амер. об-ва инж.-механиков, сер. Е, «Прикл. механ.» 32, № 3 (1965).
113. Фельдбаум А. А., Интегральные критерии качества регулирования, «Автоматика и телемеханика» 9, № 1 (1948).
114. Цай Суй-линь, Функция Ляпунова для систем уравнений с постоянными коэффициентами, Acta math. sinica 9, № 4 (1959).
115. Четаев Н. Г., О выборе параметров устойчивости механической системы, ПММ 15, вып. 2 (1951).
116. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, «Наука», 1965.

117. Ш и м а н о в С. Н., Об устойчивости в целом одной нелинейной системы уравнений, УМН 8, вып. 6 (1953).
118. Ш и м а н о в С. Н., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ 17, вып. 3 (1953).
119. Э ф е н д и е в А. Р., Б а л и т и н о в М. А., Об асимптотической устойчивости в целом одной нелинейной системы, «Диф. уравнения» 4, № 4 (1968).
120. Я к о в л е в М. К., Об одном способе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами, «Диф. уравнения» 1, № 11 (1965).
121. Я к у б о в и ч В. А., Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования, Вестник ЛГУ 19, вып. 4 (1957).
122. Я н к о- Т р и н и ц к и й А. А., Новый метод анализа работы синхронных двигателей при разно-переменных нагрузках, Госэнергоиздат, 1958.
123. Я р о м и н е к В., Об эквивалентности критерия устойчивости по Раузу—Гурвицу и по Маркову, ДАН 130, № 6 (1960).
124. A m e r i o L., Studio asintotico del moto di un punto su una linea chinsa per azione di forze indipendenti dal tempo, Ann. scuola Norm. Sup. Pisa, 1950, 3 (3).
125. B a i l e y F. N., The application of Lyapunov's second method to interconnected systems, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965 (1966), A3, № 3, 443—462. (См. также «Экспресс-информация», серия «Системы автоматического управления», 1966, № 24, реф. 83.)
126. B a r n e t t S., S t o r e y C., Stability analysis of constant linear systems by Lyapunov's second method, «Electron. Letters», 1966, 2, № 5.
127. B a r n e t t S., S t o r e y C., Solution of the Lyapunov matrix equation, «Electron. Letters», 1966, 2, № 12.
128. B a r n e t t S., S t o r e y C., Comments on the Lyapunov matrix equation, «Electron. Letters», 1967, 3, № 3.
129. B a r n e t t S., S t o r e y C., Analysis and sinthesis of Stability matrices, «J. Different. Equat.», 1967, 3, № 3.
130. B a r n e t t S., S t o r e y C., Some applications of the Lyapunov matrix equation, «J. Inst. Math. and Appl.», 1968, 4, № 1.
131. B a s s R. W., Diskussionbemerkungen Regelungstechnik, Verlag R. Oldenbourg München, 1951, 201—211.
132. B e l l m a n R., Kronecher products and the second method of Lyapunov, Math. Nachrichten, 1959, 20, № 1—2.
133. C a r t w r i g h t M. L., On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order, Mech. and Appl. Math., 1956, 9, № 2.
134. C h e n C. F., R i c h a r d s E. F., C h u H., Constructing Lyapunov functions by means of the analog computer, IEEE Trans. Educ., 1964, 7, № 2—3, 63—66.
135. C h e n C. F., C h u H., A matrix for evaluating Schwarz's form, IEEE Trans. Automat. Control, 1966, 11, № 2.
136. C h i n S. M., Comment on «An application of Lyapunov method to synchronous machine stability by Fallside and Patel», Internat. J. Control, 1967, 6, № 3.

137. Ergen W. K., Lipkin H. J., Hohel L. A., Application of Lyapunov's Second Method in Reactor Dynamics, «J. of Math. and Phys.» (Baltimor), 1957, 36, № 1.
138. Ezeilo J. O. C., On the stability of solutions of certain differential equations of the third order, Quart. J. Math. Oxford (2), 11, 1960, 64—69.
139. Ezeilo J. O. C., On stability of solutions of certain systems of ordinary differential equations, Ann. mat. pura ed appl., 1966, 73.
140. Ezeilo J. O. C., On the stability of the solutions of some third order differential equations, «J. London Math. Soc.», 1967, 43, № 2.
141. Fellow, Ku Y. H., Lyapunov function of a fourth-order system, IEEE Trans. Automat. Control, 1964, 9, № 3.
142. Haas V., A stability result for a third order nonlinear differential equations, «J. London Math. Soc.», 40, 1965, 31—33.
143. Hahn W., Theorie und Anvendung der Directen Methode von Ljapunov, Berlin, Springer — Verlag, 1959.
144. Hewit J. R., Storey C., Optimisation of the Zubov and Ingwerson methods for constructing Lyapunov functions, «Electron. Letters», 1967, 3, № 5.
145. Huaux A., Sur la stabilité de la solution triviale de l'équation différentielle rhéolinéare, Compt. Rend., 1966, 262, Ser A, № 1. (Русский перев.: «Механика», сб. переводов, 1967, 3, 103.)
146. Huaux A., On the construction of Lyapunov functions, IEEE Trans. Automat. Control, 1967, 12, № 4.
147. Ibrahim E. S., Rekasius Z. V., Construction of Lyapunov functions for nonlinear feedback systems roith several nonlinear elements, J. Aut. Control. Conference at Stanford University, 1964, 256—260.
148. Kalman R. E., Bertram J. E., Control system analysis and design via the «second method» of Lyapunov. I. Continuous-time systems. II. Discrete-time systems. J. Basic Engng (Trans. ASME, Ser. D.), 1960, 82, № 2, 371—400.
149. Kalman R. E., Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 49, № 2.
150. Kayande A. A., Lakshmikantham V., Conditionally Invariant Sets and Vector Lyapunov Functions, J. Math. Analysis and Applic., 1966, 14, № 2.
151. Ku Y. H., Puri N. N., On Lyapunov functions of high order nonlinear systems, J. Franklin Inst., 1963, 276, № 5.
152. Ku Y. H., Lyapunov Function of a Fourth-Order System, IEEE Trans. Automat. Control, 1964, 9, № 3, 276—278.
153. Ku Y. H., Mekel R., Su C. C., Stability and design of nonlinear control systems via Lyapunov's criterion, IEEE Internat. Convent. Rec., 1964, 12, № 1. (Русский перев. «Экспресс-информация», серия «Системы автоматического регулирования», 1965, № 2, реф. 4—7.)
154. Ku Y. H., Lyapunov function of a high-order system, «Proc IEEE», 1966, 54, № 11, 1620—1622.
155. Kushner H. J., On the construction of stochastic Lyapunov functions, IEEE Trans. Automat. Control, 1965, 10, № 4 477—478.

156. Lakshmikantham V., Vector Lyapunov Functions and Conditional Stability, J. Math. Analysis and Applic., 1965, 10, № 2.
157. Lalli B. S., On stability of solutions of certain differential equations of the third order, «Canad. Math. Bull.», 1967, 10, № 5.
158. Leighton W., On the construction of certain Lyapunov functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 50, № 1.
159. Lehnigk S. H., Quadratic forms as Lyapunov functions for linear differential equations with real constant coefficients, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, 61, № 4.
160. Liu Ruey-Wen, Leake R., Jeffrey, Inverse Lyapunov problems., «Different. equat. and Dynam. Syst.», New York — London, Acad. Press., 1967, 333—339.
161. Margolis S. G., Vogt W. G., Control engineering applications of V. I. Zubov's construction procedure for Lyapunov functions, IEEE Trans. Aut. Control, 1963, AC-8, № 2, 104—113.
162. Massera J. L., On Lyapunovs condition of stability, Ann. of Math., 1949, 50, № 3.
163. Myrray H. S., Schultz D. G., Weaver L. E., Stability of conpled core reactors by the second method of Lyapunov, «J. Nucl. Energy», 1966, AB, 20, № 9.
164. Newman A. K., New Lyapunov function for nonlinear time-varying systems, Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs., 1967, NWA/AUT-3,5 pp.
165. Parks P. C., Lyapunov's methods in automatic control theory, I. Control, 1962, 5, № 53.
166. Parks P. C., Lyapunov's methods in automatic control theory, Part two. Control, 1962, 5, № 54.
167. Parks P. C., Lyapunov and the Schur-Cohn stability criterion, IEEE Trans. Automát. Control, 1964, 9, № 1.
168. Ponzo P. J., On the stability of certain nonlinear differential equations, IEEE Trans. Automatic Control, 1965, AC-10, № 4, 470—472.
169. Power H. M., Further comments on the Lyapunov matrix equation, «Electron Letters», 1967, 3, № 4.
170. Puri N. N., Weygandt C. N., Second method of Lyapunov and Routh's canonical form, J. Franklin Inst., 1963. 276, № 5.
171. Puri N. N., Drake R. L., Stability studies for a class of nonlinear difference equations using Lyapunov's second method, J. Franklin Inst., 1965, 279, № 3.
172. Reissig R., Über die Konstruktion einer Ljapunowschen Funktion für die verallgemeinerte Liénardsche Gleichung, Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1962, 4, № 6.
173. Reissig R., Über die Stabilität eines Systems von autonomen Differentialgleichungen, Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss., Berlin, 1965, 7, № 5—6.
174. Reissig R., Das Aisermansche Problem bei einem nichtlinearen System dritter Ordnung, Z. angew. Math. und Mech., 1966, 46, Sonderh., 79—82.
175. Schwarz H. R., Critère de stabilité pour des systèmes à coefficients constants, Compt. Rend. Acad. sci., 1955, 241, № 1.

176. S c h u l t z D. G., The variable gradient method for genera-ting Lyapunov functions, A IEE Transactions, 1962, 81, par 2.
177. S c h u l t z D. G., A discussion of generalized Routh — Hurwit conditions for nonlinear systems, Trans. AIEE, 1963, v. 6 (Appl. and Ind.), 377—380.
178. S c h u l t z D. G., The generation of Lyapunov function «Advances Control Syst.», v. 2, New York — London, Aca Press., 1965.
179. S c h w a l m D., On ascertaining asymptotic stability in th large of nuclear power reactors by means of Lyapunov's s method, «Nukleonik», 1966, Bd. 8, № 7.
(Русский перев.: «Механика», сб. переводов, 1967, 4, 104.)
180. S k i d m o r e A. S., On the stability of solutions of a diffe-rential equation of fourth order, J. London Math. Soc., 196 41, № 4.
181. S m i t h R. A., Bounds for quadratic Lyapunov function J. Math. Anal. and Applic., 1965, 12, № 3.
182. S m i t h R. A., Matrix Calculations for Lyapunov Quadrat Forms, J. Differential Equations, 1966, 2, № 2.
183. S z e g ö G. P., On the application of the Zubov method fo construction of Lyapunov's functions for nonlinear control sys-tems, Joint Automat. Control Conf., New York, 1962.
184. S z e g ö G. P., A contribution to Lyapunov's second method, nonlinear autonoms systems, International simposium in non linear differential equations and nonlinear mechanics. Acad. Press., New York, 1963, 421—430.
185. S z e g ö G. P., On the application of Zubov's method constru-cting Lyapunov functions for nonlinear control systems, J. Basic Engng (Trans. ASME. Ser. D), 1963, 85, № 2.
186. S z e g ö G. P., New methods for constructing Lyapunov fun-ctions for time-invariant control systems, Automat. and Remote Control. Theory. London, Butterworths; Munich, Oldenbourg 1964, 584—588. Discuss., 589.
187. V i d e l o D. A., Using Lyapunov's methods, «Measurem. and Control», 1964, 3, № 7.
188. W a l k e r J. A., C l a r k L. G., Complete Lyapunov ana-lysis of a special system having multiple singularities, «IEEE Trans. Automat. Control», 1967, 12, № 1.
189. W a l l E d w a r d T., M o e M a y n a r d L., An energ metric algorithm for the generation of Lyapunov functions «IEEE Trans. Automat. Control», 1968, 13, № 1.
190. W a l l E d w a r d T., A topological approach to the genera-tion of Lyapunov function, «Acta techn.» (ČSAV), 1968, 13, № 2