
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи физических наук»*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

ДЖ. БАРДИН, ДЖ. ШРИФФЕР

НОВОЕ В ИЗУЧЕНИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Перевод Н. И. ГИНЗБУРГ

Под редакцией
В. Л. ГИНЗБУРГА и Л. П. ГОРЬКОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

RECENT DEVELOPMENTS IN SUPERCONDUCTIVITY

by

J. BARDEEN and J. SCHRIEFFER

Department of Physics, University
of Illinois, Urbana, Illinois

(PROGRESS IN LOW TEMPERATURE PHYSICS,
VOLUME III, CAPTER VI)

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY,
AMSTERDAM 1961

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов перевода	7
§ 1. Введение	9
§ 2. Исторический обзор	15
§ 3. Основные положения теории Лондонов и теории Пип- парда	20
§ 4. Квантовая картина сверхпроводящего состояния (со- гласно Лондону)	24
§ 5. Элементарные возбуждения в нормальных металлах .	29
5.1. Квазичастичные возбуждения	29
5.2. Экранирование и «противоток»	32
5.3. Взаимодействие между элементарными возбужде- ниями	35
§ 6. Электронно-фононное взаимодействие	37
§ 7. Элементарные возбуждения в сверхпроводниках . . .	40
§ 8. Природа волновых функций сверхпроводников . . .	44
8.1. Образование парных конфигураций	44
8.2. Волновая функция основного состояния	48
8.3. Спектр возбуждений	50
8.4. Связь с конденсацией Бозе — Эйнштейна	51
§ 9. Результаты для упрощенной модели	53
9.1. Интегральное уравнение	53
9.2. Кулоновское взаимодействие и эффекты, связан- ные с конечным временем жизни возбуждений	55
9.3. Спектр возбуждений	56
§ 10. Термодинамические свойства	61
§ 11. Вероятности перехода и эффекты когерентности . . .	66
11.1. Теория	66
11.2. Затухание ультразвука	76
11.3. Релаксация ядерного спина	81
§ 12. Электромагнитные свойства	84
12.1. Теория	84

12.2. Прохождение инфракрасного излучения через тонкие пленки	97
12.3. Глубина проникновения	104
12.4. Поверхностный импеданс	112
§ 13. Коллективные возбуждения	120
§ 14. Двухжидкостная модель и незатухающий ток	135
14.1. Двухжидкостная модель	135
14.2. Критические токи в тонких пленках	141
14.3. Теория Гинзбурга — Ландау	143
§ 15. Теплопроводность	146
15.1. Теплопроводность решетки	146
15.2. Электронная компонента	148
§ 16. Сверхпроводящие сплавы и соединения	153
§ 17. Заключение	159
Цитированная литература	163

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Явление сверхпроводимости было открыто 50 лет назад (в 1911 г.), но его изучение по ряду причин происходило сравнительно медленно. Достаточно сказать, что лишь через 22 года было установлено такое фундаментальное свойство сверхпроводников, как их «идеальный диамагнетизм» (эффект Мейсснера). Другой важнейший факт — изотопический эффект в сверхпроводниках — был обнаружен только в 1950 г. Между тем именно существование сильного изотопического эффекта указывает на то, что сверхпроводимость обусловлена взаимодействием электронов с колебаниями решетки. В этой связи представляется довольно естественным, что до последних лет более или менее успешно была развита лишь макроскопическая теория сверхпроводимости. Что же касается микроскопической теории, то в сколько-нибудь последовательной и замкнутой форме ее не существовало вплоть до 1957 г., хотя в этой области и были ранее высказаны некоторые важные идеи и предположения.

Создание микроскопической теории, являющееся одним из выдающихся достижений теоретической физики, знаменует начало нового этапа в изучении сверхпроводимости. Для этого этапа характерен углубленный теоретический анализ как самой проблемы, так и родственных вопросов, а также появление большого числа интересных экспериментальных исследований. Одновременно, хотя в известной мере и по независимым причинам, сильно возрос интерес к сверхпроводимости с точки зрения ее применений в физике и технике.

В подобных условиях, очевидно, ощущается особенно большая потребность в обзорах и монографиях, посвященных сверхпроводимости. Если не говорить о литературе, рассчитанной преимущественно на физиков-теоретиков,

то таких обзоров за последние годы появилось весьма мало. Наиболее современным и лучшим из них нам представляется предлагаемая вниманию читателей большая статья Дж. Бардина и Дж. Шриффера, появившаяся в 1961 г. в третьем томе «Успехов физики низких температур», выходящих в Голландии под редакцией К. Гортера. Статья (или, скорее, небольшая монография) Дж. Бардина и Дж. Шриффера рассчитана на довольно широкие круги физиков, и в первую очередь на экспериментаторов, работающих в области изучения сверхпроводимости. В соответствии с этим авторы, с одной стороны, не используют сложный математический аппарат и большей частью приводят только результаты вычислений. С другой стороны, проводится детальное сравнение теории с опытом, и в этом отношении книга представляет несомненный интерес и для теоретиков. Нельзя также не подчеркнуть, что авторы являются одними из создателей современной теории сверхпроводимости и это обстоятельство, естественно, положительным образом сказалось на качестве статьи. Заметим также, что статья снабжена довольно обширной библиографией новых работ, в том числе советских.

Мы не можем вместе с тем не указать, что в отношении ряда вопросов придерживаемся несколько другой точки зрения и предпочли бы другую форму изложения. Представляется, однако, несомненным, что это обстоятельство не должно отражаться на переводе. Последний поэтому выполнен без всяких сколько-нибудь существенных изменений текста, а замечания редакторов даются в виде подстрочных примечаний и преимущественно содержат ссылки на литературу (добавленная литература отмечена звездочками).

В. Л. Гинзбург, Л. П. Горьков

Сентябрь 1961 г.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхпроводимости вызывало большой интерес с самого момента его открытия Камерлинг Оннесом в 1911 г.¹⁾ Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных сверхпроводимости, все попытки построения адекватной микроскопической теории до последнего времени не приводили к успеху. За последние несколько лет, однако, достигнуты большие успехи как в области эксперимента, так и в области теории. В результате большинство существующих экспериментальных данных можно объяснить, основываясь на теории, предложенной Л. Купером и авторами. В настоящей монографии мы надеемся с наибольшей возможной ясностью изложить физические основы и содержание новой теории, а также остановиться на результатах последних экспериментальных работ, подтверждающих большинство ее предсказаний.

Замечательные свойства сверхпроводников (так же как сверхтекучесть жидкого гелия) являются проявлением квантовых эффектов в макроскопическом масштабе. Ф. Лондон [10] (см. также [1]) указал общее направление, на котором могло быть найдено объяснение сверхпроводимости; предлагаемая теория находится в согласии с его идеями. Сверхпроводящее состояние представляет собой основное (невыврожденное) квантовое состояние всего сверхпроводящего образца, причем это состояние не разрушается локальными тепловыми возбуждениями. В основе современной теории лежит учет эффективного притяжения между электронами, возникающего в результате электронно-фононного взаимодействия (§ 6). На это было указано

¹⁾ См., например, обзоры теоретических [1—7] и экспериментальных работ [8, 9].

то таких обзоров за последние годы появилось весьма мало. Наиболее современным и лучшим из них нам представляется предлагаемая вниманию читателей большая статья Дж. Бардина и Дж. Шриффера, появившаяся в 1961 г. в третьем томе «Успехов физики низких температур», выходящих в Голландии под редакцией К. Гортера. Статья (или, скорее, небольшая монография) Дж. Бардина и Дж. Шриффера рассчитана на довольно широкие круги физиков, и в первую очередь на экспериментаторов, работающих в области изучения сверхпроводимости. В соответствии с этим авторы, с одной стороны, не используют сложный математический аппарат и большей частью приводят только результаты вычислений. С другой стороны, проводится детальное сравнение теории с опытом, и в этом отношении книга представляет несомненный интерес и для теоретиков. Нельзя также не подчеркнуть, что авторы являются одними из создателей современной теории сверхпроводимости и это обстоятельство, естественно, положительным образом сказалось на качестве статьи. Заметим также, что статья снабжена довольно обширной библиографией новых работ, в том числе советских.

Мы не можем вместе с тем не указать, что в отношении ряда вопросов придерживаемся несколько другой точки зрения и предпочли бы другую форму изложения. Представляется, однако, несомненным, что это обстоятельство не должно отражаться на переводе. Последний поэтому выполнен без всяких сколько-нибудь существенных изменений текста, а замечания редакторов даются в виде подстрочных примечаний и преимущественно содержат ссылки на литературу (добавленная литература отмечена звездочками).

В. Л. Гинзбург, Л. П. Горьков

Сентябрь 1961 г.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхпроводимости вызвало большой интерес с самого момента его открытия Камерлинг Оннесом в 1911 г.¹⁾ Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных сверхпроводимости, все попытки построения адекватной микроскопической теории до последнего времени не приводили к успеху. За последние несколько лет, однако, достигнуты большие успехи как в области эксперимента, так и в области теории. В результате большинство существующих экспериментальных данных можно объяснить, основываясь на теории, предложенной Л. Купером и авторами. В настоящей монографии мы надеемся с наибольшей возможной ясностью изложить физические основы и содержание новой теории, а также остановиться на результатах последних экспериментальных работ, подтверждающих большинство ее предсказаний.

Замечательные свойства сверхпроводников (так же как сверхтекучесть жидкого гелия) являются проявлением квантовых эффектов в макроскопическом масштабе. Ф. Лондон [10] (см. также [1]) указал общее направление, на котором могло быть найдено объяснение сверхпроводимости; предлагаемая теория находится в согласии с его идеями. Сверхпроводящее состояние представляет собой основное (невырожденное) квантовое состояние всего сверхпроводящего образца, причем это состояние не разрушается локальными тепловыми возбуждениями. В основе современной теории лежит учет эффективного притяжения между электронами, возникающего в результате электронно-фононного взаимодействия (§ 6). На это было указано

¹⁾ См., например, обзоры теоретических [1—7] и экспериментальных работ [8, 9].

Фрелихом (1950). Волновая функция основного сверхпроводящего состояния представляется в виде линейной комбинации конфигураций «нормального типа», т. е. относящихся к металлу в нормальном (несверхпроводящем) состоянии. В этих конфигурациях индивидуальные электронные состояния заполнены парами электронов с противоположными спинами и импульсами. Такая волновая функция устанавливает корреляцию между электронами с противоположными спинами на большом расстоянии в реальном пространстве, что отвечает учету притяжения.

В первоначальной короткой заметке [11] Купер и авторы вычислили для упрощенной модели разность энергий между нормальной и сверхпроводящей фазами при $T = 0^\circ \text{K}$ и показали, что для возбуждения электронов из основного сверхпроводящего состояния необходимо преодолеть энергетическую щель. В подробной работе [12] был найден спектр элементарных возбуждений при отличной от нуля температуре. Этот спектр был использован для вычисления тепловых и электромагнитных свойств в постоянном и низкочастотном поле. Было показано, что из теории следует фазовый переход второго рода, происходящий при критической температуре; теория объясняет эффект Мейсснера и существование незатухающего тока. В статье [12] были вычислены матричные элементы, необходимые для рассмотрения поглощения ультразвуковых и электромагнитных волн, а также нахождения времен релаксации ядерного спина.

Анализ математической структуры теории проводился рядом авторов. Боголюбов с сотрудниками [13—21] и Валатин [22] предложили альтернативную формулировку теории, часто более удобную для вычислений и приводящую к результатам, в общем находящимся в согласии с первоначальной трактовкой.

Благодаря работам Андерсона [23, 24], Боголюбова с сотрудниками [13—21], Намбу [25], Рикайзена [26], Пайнса и Шриффера [27] была выяснена роль коллективных возбуждений электронов, а также решен вопрос о градиентной инвариантности при вычислениях эффекта Мейсснера. Нерешенным до конца остается вопрос о роли кулоновского взаимодействия между электронами с точки зрения существования сверхпроводимости, а также вопрос

об установлении надежного критерия, позволяющего отличать металлы — сверхпроводники от несверхпроводников.

В дальнейшем на основе предлагаемой теории был рассмотрен ряд вопросов: электродинамика в случае полей произвольной частоты, теплопроводность, учет влияния примесей (включая парамагнитные примеси), критические токи и поля для маленьких образцов, сдвиг Найта и спиновый парамагнетизм, проблема границы между нормальной и сверхпроводящей областями. В решение вышеуказанных проблем внесли вклад несколько авторов. Несмотря на то, что большинство вычислений было основано на очень простой модели, почти все теоретические результаты удивительно хорошо согласуются с экспериментом.

Наиболее непосредственное доказательство существования энергетической щели для возбуждений квазичастиц дано, видимо, в работах Тинкхама и его сотрудников [28—31], которые изучали отражение и прохождение электромагнитных волн в далекой инфракрасной области спектра. При очень низких температурах поглощения энергии не происходит до тех пор, пока энергия кванта падающего излучения не превысит величину щели, после чего поглощение быстро возрастает до его значения в нормальном металле. Микроволновые измерения поверхностного импеданса, в частности, недавние измерения Бьонди и Гарфункеля [32], также определенно указывают на существование щели, которая уменьшается от максимума при $T = 0^\circ \text{K}$ до нуля при температуре перехода T_c , как это и предсказывалось теорией.

Ярким теоретическим результатом, подтвержденным экспериментально, является предсказание сильного влияния когерентных свойств сверхпроводящей волновой функции на вероятность перехода системы под действием внешнего поля. Электроны с противоположными спинами и импульсом поглощают когерентно. В зависимости от конкретного явления поглощение либо возрастает, либо становится меньше по сравнению с нормальным металлом. Например, при обычном взаимодействии (типа взаимодействия, существенного для затухания ультразвуковых волн) поглощение в результате интерференции сильно уменьшается. В этом случае коэффициент поглощения быстро падает с понижением температуры ниже T_c .

Недавние измерения Морзе и др. [33—35] находятся в прекрасном согласии с теорией. Одновременно с разработкой теории Гебель и Шлихтер [36, 37] провели первые измерения времени релаксации ядерного спина в сверхпроводящем алюминии. Они нашли неожиданно, что с понижением температуры ниже T_c скорость релаксации увеличивается более чем вдвое по сравнению с нормальным состоянием. Этот результат указывает на наличие более сильного взаимодействия между электронами и ядерными спинами в сверхпроводящем состоянии по сравнению с нормальным состоянием. В данном случае эффект когерентности приводит к увеличению матричного элемента. Вместе с тем увеличение скорости релаксации по сравнению с ее значением в нормальном металле связано с существенным повышением плотности состояний в сверхпроводнике сразу над энергетической щелью. Результаты аналогичных, но более поздних измерений, проведенных Редфилдом [38, 39]¹⁾ с большей точностью и в более широком интервале температур, находятся в хорошем согласии с предсказаниями теории. Когерентность приводит также к изменению поглощения электромагнитных волн. Величина, соответствующая в двухжидкостной модели электропроводности нормальной компоненты (жидкости), при не слишком высоких частотах может быть больше, чем в нормальном состоянии вблизи T_c . Такой когерентный эффект подкрепляет концепцию спаренных электронных состояний, на котором базируется теория.

Возродился интерес к измерениям теплопроводности. Ранние работы указывали на существенную разницу между свойствами свинца и ртути, в которых рассеяние электронов происходит в основном на колебаниях решетки, и свойствами остальных сверхпроводников, в которых доминирует рассеяние на примесях. Существующая теория достаточно хорошо согласуется с опытом в случае рассеяния на примесях, но не может объяснить быстрого паде-

¹⁾ Масуда и Редфилд [40] изучали вопрос о влиянии примесей и размера частиц на время релаксации. Примеси не оказывают сильного влияния, а для коллоидных частиц с размерами от 200 до 700 Å обнаружено заметное уменьшение времени релаксации.

ния теплопроводности при температурах ниже T_c , наблюдаемого для Pb и Hg. Эти элементы с низкими температурами Дебая отличаются от большинства сверхпроводников и в других отношениях, например по зависимости их электронной теплоемкости от температуры. Важно установить, является ли быстрое падение теплопроводности свойством, присущим только Pb и Hg, или же оно будет наблюдаться и в других достаточно чистых сверхпроводниках, когда доминирующую роль играет рассеяние на фонах. Результаты недавних измерений Генаулта [41], проведенных на очень чистом олове, хотя и указывают на более быстрое падение теплопроводности вблизи T_c , чем в случае рассеяния на примесях, все же не находятся в соответствии с данными для Pb и Hg, согласно которым теплопроводность уменьшается значительно быстрее.

Измерения ядерного магнитного резонанса, проведенные Эндросом и Найтом [42] на тонких сверхпроводящих пленках, подтвердили ранние данные Райфа [43], полученные на коллоидной ртути. Эти результаты указывают на существование сдвига частоты, связанного с электронным спиновым парамагнетизмом, который, по-видимому, имеет место вплоть до $T=0^\circ\text{K}$. Сдвиг вблизи $T=0^\circ\text{K}$ равен примерно 70% сдвига в нормальном состоянии. Проблема найтовского сдвига в сверхпроводниках остается неясной до сих пор, подробней она будет обсуждаться в § 13.

В силу существования эффекта Мейсснера долгое время считали, что сверхпроводимость и ферромагнетизм несовместимы¹⁾. В высшей степени примечательны поэтому недавние эксперименты Маттиаса и др., обнаруживших сосуществование этих двух явлений в одних и тех же образцах — сплавах редкоземельных элементов, ферромагнетизм которых обусловлен f -электронами. При некоторых составах сплава его температура Кюри может оказаться выше температуры сверхпроводящего перехода T_c . При охлаждении ниже T_c одновременно наблюдаются остаточная намагниченность и характерные для сверхпро-

¹⁾ См. статьи [237*, 238*], в которых рассмотрены условия существования ферромагнитных сверхпроводников. — *Прим. ред.*

водимости диамагнитные свойства; некоторые из этих работ обсуждаются в § 16.

Современная теория развивается в большинстве случаев в применении к упрощенной модели, в которой фигурируют в основном три параметра: 1) $N(E_F)$ — нормальная плотность энергетических состояний у поверхности Ферми, 2) $v_0 = \hbar^{-1} \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \right|_{\text{ср}}$ — средняя скорость электронов в нормальном состоянии у поверхности Ферми и 3) параметр, который зависит от эффективного взаимодействия между электронами, приводящего к сверхпроводимости, и который определяет щель при $T = 0^\circ \text{K}$ и критическую температуру T_c . Только последний параметр зависит от свойств сверхпроводящего состояния. При сравнении теории с опытом для данного металла все три указанных параметра находятся эмпирически. Плотность состояний $N(E_F)$ получается из константы нормальной электронной теплоемкости γ , определяемой с помощью соотношения $c_v = \gamma T$. Произведение $N(E_F) v_0$ может быть найдено из измерений поверхностного сопротивления нормального металла в условиях аномального скин-эффекта¹⁾. Третий параметр определяется обычно из T_c или исключается путем использования приведенной температурной шкалы $t = T/T_c$. Что касается матричных элементов для вероятностей перехода в нормальном состоянии, то при вычислении отношения поглощения в сверхпроводящем и нормальном состояниях они обычно не требуются.

Полученные таким образом теоретические результаты обычно удивительно хорошо согласуются с экспериментом. Это указывает на то, что для сверхпроводников приближенно выполняется закон соответственных состояний. Имеются, конечно, существенные отклонения от этого закона, что и не удивительно в связи со сложностью зонной структуры сверхпроводящих металлов. Расхождение теории с опытом наиболее значительно для металлов

¹⁾ В теории [11, 12] не учитывается анизотропия металла. Поэтому значения указанных в тексте трех параметров будут, вообще говоря, зависеть от способа их экспериментального определения. Использование данных по аномальному скин-эффекту, например для Al, не дает хороших результатов (см. [201]). — *Прим. ред.*

с низкой дебаевской температурой, особенно для свинца и ртути. Возможно, что для этих элементов необходимо дальнейшее обобщение теории.

Желательно было бы получить выражение для эффективного взаимодействия, а также другие параметры на основе точного гамильтониана системы. Это необходимо для установления надежного критерия, с помощью которого можно отличать сверхпроводящие металлы от несверхпроводящих, а также определять критические температуры. Успех в решении этих важных вопросов пока еще невелик. Возникающие здесь трудности частично связаны со сложностью электронной структуры реальных металлов. С учетом кулоновского взаимодействия трудны вычисления даже для идеального металла, и несмотря на большую работу, проделанную в этом направлении, проблема еще не решена.

Много вычислений было проведено с гамильтонианами, включающими только электронно-фононное взаимодействие и не учитывающими непосредственное кулоновское взаимодействие между электронами. Такая модель, представляющая несомненный интерес с математической точки зрения, обладает свойствами, качественно отличными от свойств реальных металлов. Наиболее важное отличие состоит в том, что в этой модели появляются низколежащие коллективные возбуждения, соответствующие продольным флуктуациям плотности электронного газа. В реальных же металлах с кулоновским взаимодействием такие флуктуации отвечают плазменным колебаниям с очень высокой частотой.

§ 2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Укажем наиболее важные вехи на пути, приведшем к пониманию сверхпроводимости.

1) Камерлинг Оннес (1911) [44] обнаружил бесконечную проводимость, получив в металлическом кольце незатухающий ток; вместе с сотрудниками он установил существование критического магнитного поля, выше которого сверхпроводимость разрушалась.

2) Кеэзом, Ван ден-Энде, Кок [45, 46] (1932) и др. показали, что в отсутствие магнитного поля при температуре перехода имеет место скачок электронной

теплоемкости, характерный для фазового перехода второго рода.

3) Мейсснер и Оксенфельд [47] (1933) обнаружили, что наряду с идеальной проводимостью сверхпроводник обладает идеальным диамагнетизмом. Магнитное поле в толще массивного образца исчезает даже при его охлаждении ниже температуры перехода в присутствии магнитного поля. Диамагнитный ток, текущий в тонком слое вблизи поверхности односвязного тела и экранирующий толщу образца от внешнего поля, является стабильным, а не метастабильным.

4) Кеезом [48] (1924), Рутгерс [49] (1933) и особенно Гортер [50] (1933) провели термодинамическое рассмотрение сверхпроводящего перехода и получили связь между электронной теплоемкостью и критическим полем.

5) Гортер и Казимир [51] (1934) с помощью двухжидкостной модели феноменологически описали переход второго рода и ряд других свойств сверхпроводников.

6) Ф. Лондон и Г. Лондон [52] (1935) развили феноменологическую теорию электродинамических свойств, в основу которой положен диамагнетизм сверхпроводников. Было предсказано, что глубина проникновения должна быть порядка 10^{-6} см.

7) Ф. Лондон [10] (1935) указал, что диамагнитные свойства могут быть объяснены квантовомеханически, если предположить «жесткость» волновой функции электронов в сверхпроводящем состоянии. Под «жесткостью» имеется в виду свойство волновой функции слабо изменяться под влиянием внешнего магнитного поля.

8) Изучение магнитных свойств тонких свинцовых проволочек Понтиусом [53, 54] (1937), коллоидной ртути Шенбергом [55] (1940) и более поздние работы с тонкими пленками и проволочками (см., например, Локк [56] (1949)) качественно подтвердили предсказания теории Лондонов и показали, что и глубина проникновения λ сильно зависит от температуры. Лаурман и Шенберг [57] (1949) с помощью метода, предложенного Казимиром [58] (1940), определили температурную зависимость глубины проникновения для массивного олова и ртути. Их результаты согласуются с полуэмпирическим законом $\lambda = \lambda_0 [1 - (T/T_c)^4]^{-1/2}$, полученным из двухжидкостной модели Гортера — Казимира.

9) Ландау [59] (1937) предсказал структуру промежуточного состояния, которая была экспериментально подтверждена Шальниковым, Мешковским и др. [60].

10) Г. Лондон [61] (1940) измерял поверхностное сопротивление R_s на микроволновых частотах ($\sim 10^9$ гц) и показал, что при критической температуре значение R_s не претерпевает разрыва, а быстро убывает при понижении температуры ниже T_c , приближаясь к нулю с $T \rightarrow 0^\circ \text{K}$. Этот метод позже был развит и широко применялся Пиппардом и др. Пиппард (см. [62] и последующие работы, а также обзор [63]) (1947) показал, что из данных о реактивной части поверхностного импеданса можно получить сведения о глубине проникновения поля в сверхпроводник.

11) Гинзбург и Ландау [64] (1950) обобщили феноменологическую теорию Лондонов. Это позволило вычислить поверхностную энергию на границе между нормальной и сверхпроводящей фазами, а также рассмотреть ряд других вопросов.

12) Максвелл [65], а также Рейнольдс и др. [66] (1950) обнаружили существование изотопического эффекта $T_c \sim M^{-1/2}$, что явилось несомненным свидетельством связи сверхпроводимости с взаимодействием между электронами и колебаниями решетки (фононами).

13) В 1950 г. Фрелих [67] независимо разработал теорию, основанную на рассмотрении электронно-фононного взаимодействия. Теория указывала на существование изотопического эффекта, но не могла объяснить других свойств сверхпроводников. Аналогичная попытка построения теории, предпринятая одним из авторов [68], также встретила с затруднениями.

14) Пиппард [69] (1953) ввел в рассмотрение «длину когерентности» и нелокальным образом видоизменил уравнения Лондонов для объяснения результатов некоторых экспериментов по определению глубины проникновения. Один из авторов [70] (см. также [3]) (1955) показал, что нелокальная связь Пиппарда особенно естественно появляется в моделях с энергетической щелью.

15) Начиная с 1953 г. и по настоящее время получен ряд экспериментальных доказательств (см. обзор [71]) существования энергетической щели для возбуждения электронов из основного сверхпроводящего состояния. Эти

доказательства будут обсуждены ниже более подробно. Предположения о существовании такой щели неоднократно высказывались ранее из теоретических соображений.

16) Маттиас [72] исследовал сверхпроводящие свойства большого числа сплавов, соединений и твердых растворов. Им были получены эмпирические правила для существования сверхпроводимости, учитывающие такие факторы, как атомный объем, массу и число валентных электронов на атом.

17) Купер [73] (1956) показал, что основное состояние ферми-газа (фермиевский фон) при любом сколь угодно малом взаимодействии, отвечающем притяжению, неустойчиво по отношению к образованию связанных пар.

В течение многих лет считали, что сверхпроводящее состояние в первую очередь характеризуется бесконечной проводимостью. В этой связи в области теории основные усилия были направлены на объяснение равенства нулю сопротивления. При отсутствии сопротивления (т. е. для бесконечной проводимости) из уравнений Максвелла вытекает, что магнитное поле в толще массивного сверхпроводника не может изменяться с изменением внешнего магнитного поля. Отсюда следует, что распределение поля внутри образца совпадает с распределением поля, существующим при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние. Важным вкладом в понимание сверхпроводимости было неожиданное открытие Мейсснера и Оксенфельда, которые обнаружили, что магнитная индукция внутри массивного сверхпроводника всегда равна нулю. Только после этого стало очевидным, что сверхпроводящее состояние в первую очередь характеризуется идеальным диамагнетизмом и многие свойства, ранее связываемые с бесконечной проводимостью, являются фактически следствием магнитных свойств системы.

В односвязном теле сверхпроводящие токи обусловлены и однозначно определяются магнитным полем. Таким образом, вопрос сводится к объяснению идеально-диамагнитных свойств сверхпроводника. Кроме того, остается нерешенной проблема объяснения существования метастабильного тока в сверхпроводящем кольце. В этом случае ток и магнитное поле должны определяться самосогласованным образом.

Эффект Мейсснера означает, что при заданных условиях — температуре, давлении и внешнем магнитном поле — существует одно-единственное состояние односвязного сверхпроводника. Таким образом, переход из сверхпроводящего состояния в нормальное является обратимым, и систему можно рассматривать термодинамически. Из термодинамики следует, что разность плотностей свободной энергии Гиббса (т. е. термодинамического потенциала. — *Ред.*) между двумя состояниями массивного тела в нулевом магнитном поле равна:

$$G_n(H_c) \approx G_n(0) = G_s(0) + \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (2.1)$$

Здесь H_c — критическое поле, разрушающее сверхпроводимость при данных давлении и температуре. Таким образом, критическое поле полностью определяется термодинамически и может быть вычислено на основе измерений электронной теплоемкости в отсутствие магнитного поля. И наоборот, из измерений критического поля можно вычислить электронную теплоемкость. Этот метод особенно удобен для исследования металлов типа свинца, обладающих низкой температурой Дебая, так как в этом случае трудно отделить вклады в удельную теплоемкость, вносимые решеткой и электронами.

Изотопический эффект наблюдался уже для целого ряда элементов (табл. I). Все результаты измерений согласуются с соотношением $T_c M^\alpha = \text{const}$, где α очень близко

Таблица I
Значение степени α в законе $T_c \sim M^{-\alpha}$ для различных элементов

Свинец	0,478	Олово	0,505
Ртуть	0,504	Таллий	0,49

к 0,5. Ранние измерения дали для свинца значения α , значительно превышающие величину 0,5. Однако после целого ряда тщательных экспериментов, проведенных Хейком, Мапотером и Деккером [74], получено значение $\alpha = 0,48 \pm 0,01$ (см. табл. I). Закон $T_c M^{1/2} = \text{const}$ очень существен с точки зрения развития теории.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛОНДОНОВ И ТЕОРИИ ПИППАРДА

Беккер, Геллер и Заутер вывели электродинамические уравнения для металла, в котором электроны проводимости не встречают сопротивления. Ф. Лондон и Г. Лондон видоизменили эти уравнения, чтобы выделить из них класс решений, дающих однозначный результат для односвязного тела во внешнем магнитном поле. Для случая бесконечной проводимости, когда электроны ускоряются свободно, уравнение, связывающее плотность тока \mathbf{j}_s с магнитным полем \mathbf{H} , имеет вид:

$$-\Delta c \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}. \quad (3.1)$$

Постулируя, что константа, возникающая при интегрировании по времени, всегда равна нулю, Ф. и Г. Лондоны получили единственное решение этого уравнения в виде:

$$-\Delta c \operatorname{rot} \mathbf{j}_s = \mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Другими словами, если \mathbf{H} выражается через вектор-потенциал \mathbf{A} таким образом, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и на поверхности $\mathbf{A}_\perp = 0$, то

$$-\Delta c \mathbf{j}_s = \mathbf{A}. \quad (3.3)$$

Для газа свободных электронов $\Delta = m/ne^2$, где n — концентрация электронов. В более общем виде:

$$\Delta^{-1} = \frac{2}{3} e^2 N(E_F) v_0^2.$$

Закон проникновения поля внутрь образца с плоской поверхностью можно получить с помощью уравнения Лондонов (3.2) и уравнения Максвелла $c \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$. Если поверхность образца совпадает с плоскостью $z = 0$, а $H_y(z)$ — напряженность магнитного поля, направленного параллельно поверхности, то соответствующее решение имеет вид:

$$H_y(z) = H_y(0) e^{-z/\lambda}. \quad (3.4)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{\Delta c^2/4\pi}$ — глубина проникновения. Подставляя

значение Δ для газа свободных электронов, получаем $\lambda = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2}$. Эта величина для обычных плотностей электронов в сверхпроводниках имеет порядок 10^{-6} см. Экспериментальные значения λ обычно порядка $5 \cdot 10^{-6}$ см, т. е. в несколько раз больше лондонской величины.

Пиппард [69], используя аналогию с теорией аномального скин-эффекта в нормальных металлах, предложил нелокальную модификацию уравнения Лондонов. В случае аномального скин-эффекта искомой величиной является плотность нормального тока \mathbf{j}_n в условиях, когда изменение напряженности поля \mathcal{E} происходит на средней длине свободного пробега.

Выражение, полученное Чемберсом [75] и эквивалентное полученному ранее Рейтером и Зондхеймером, может быть записано в виде:

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(E_F) v_0}{2\pi} \int \frac{\mathbf{R} [\mathcal{E}(\mathbf{r}')] \exp\left(-\frac{R}{l}\right) d\mathbf{r}'}{R^4}. \quad (3.5)$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и l — средняя длина свободного пробега. В предельном аномальном случае, когда глубина скин-слоя мала по сравнению с l , плотность тока, а следовательно, и поверхностное сопротивление R_s не зависят от l . Этот случай имеет место в микроволновых полях высокой частоты, если рассеяние на примесях не делает величину l слишком малой. Фабер и Пиппард [76] показали, что из измеренных значений R_s можно получить эмпирические значения параметра $N(E_F) v_0$. Зная этот параметр, а также значение $N(E_F)$, полученное из результатов измерений электронной теплоемкости, можно определить среднюю скорость электронов у поверхности Ферми v_0 .

На основе эмпирических данных Пиппард предположил, что плотность тока в данной точке сверхпроводника не является величиной, пропорциональной вектор-потенциалу \mathbf{A} в этой точке, а определяется интегралом от \mathbf{A} по некоторой области вокруг рассматриваемой точки. Выражение для плотности тока Пиппард предложил записать в

форме, аналогичной (3.5), а именно

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = -\frac{3}{4\pi c \Delta \xi_0} \int \frac{\mathbf{R} [R A(\mathbf{r}')] \exp\left(-\frac{R}{\xi_0}\right) \exp\left(-\frac{R}{l}\right) d\mathbf{r}'}{R^4}. \quad (3.6)$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и опять $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Если \mathbf{A} медленно меняется, то выражение (3.6) переходит в уравнение Лондонов (3.3). Вновь введенный параметр — длина когерентности ξ_0 — по порядку величины равен 10^{-4} см. Такой порядок величины для длины когерентности в сверхпроводнике Пиппард [77] установил на основании нижеследующих соображений¹⁾:

1) Резкость фазового перехода в нулевом магнитном поле (Дойдж [78], измеряя сопротивление, получил ширину перехода меньше $0,002^\circ \text{C}$) заставляет предположить, что большое число электронов действует когерентно, снижая тем самым локальные флуктуации, существенные обычно вблизи λ -точки.

2) Пусть сверхпроводящая фаза характеризуется некоторым «параметром упорядочения». Можно ожидать, что в больших магнитных полях этот параметр должен изменяться таким образом, чтобы обеспечить большее проникновение поля и таким образом снизить свободную энергию. Однако эксперименты показывают, что глубина проникновения очень мало зависит от поля вплоть до его критической величины. Это означает, что изменение «параметра упорядочения» не ограничивается областью проникновения поля, а должно захватывать область до глубин порядка 10^{-4} см.

3) Ряд экспериментов указывает на существование большой поверхностной энергии α_{ns} на границе между

¹⁾ Сделанный Пиппардом вывод о нелокальной связи между током и полем в сверхпроводниках оказался в большой мере справедливым и плодотворным. В то же время некоторые из приводимых в тексте аргументов не могут считаться непосредственно связанными с вопросом о нелокальности. Достаточно указать, что уже теория локального типа (см. [64] и § 14.3) приводит к большой поверхностной энергии α_{ns} и длине $\Delta \sim 10^{-4}$ см. — Прим. ред.

нормальной и сверхпроводящей фазами в промежуточном состоянии. Если эту энергию выразить в форме $\Delta H_c^2 / 8\pi$, то из наблюдаемого значения α_{ns} вытекает $\Delta \sim 10^{-4}$ см. Как естественно предположить, такое большое значение α_{ns} связано с тем, что переходный слой между нормальной и сверхпроводящей фазами имеет ширину Δ .

4) Еще одним доказательством, подтверждающим нелокальную теорию, служат эксперименты Пиппарда, который наблюдал сильное увеличение глубины проникновения λ в олове, содержащем в качестве примеси 3% индия. Такая небольшая присадка индия не оказывает заметного влияния на температуру перехода и не сильно влияет на плотность электронов.

Таким образом, по теории Лондонов в данном случае можно ожидать лишь очень малого изменения λ . Эффект увеличения λ может быть, однако, связан с влиянием множителя $\exp(-R/l)$, входящего в ядро уравнения (3.6) нелокальной теории. Дойдж [78] предположил, что наблюдавшееся им снижение поверхностной энергии α_{ns} с увеличением концентрации примесей также связано с уменьшением длины когерентности в силу рассеяния на примесях.

На основании вышеприведенных соображений Пиппард пришел к выводу, что сверхпроводящее состояние характеризуется некоторой «когерентностью», причем соответствующий радиус действия велик. Поэтому в чистых металлах существенные изменения электронного состояния не могут происходить на расстояниях, меньших примерно 10^{-4} см¹⁾. В этой связи Пиппард предположил, что нелокальный характер уравнений есть результат слабого изменения волновой функции сверхпроводящих электронов под влиянием магнитного поля. При этом возмущение, связанное с векторным потенциалом в данной точке, охватывает область размером $\sim \xi_0$.

Согласно нелокальной теории закон проникновения поля $H(z)$ внутрь сверхпроводника уже не экспоненциальный, как в теории Лондонов, а имеет более сложную

¹⁾ Мейсснер [79] показал, что упорядочение, характерное для сверхпроводящего состояния, может распространяться и на барьер (прослойку) из нормального металла (см. также [239*]).

форму; на больших глубинах направление поля изменяется на обратное. В большинстве экспериментов измеряется только полный поток магнитного поля. Глубина проникновения λ определяется соотношением:

$$\lambda H(0) = \int_0^{\infty} H(z) dz. \quad (3.7)$$

Современная теория связывает j_s и A нелокальным образом аналогично тому, как это предложено Пиппардом. В § 12 предсказания теории сравниваются с экспериментальными результатами. Там же перечислены соображения в пользу того, что любая разумная модель сверхпроводника с энергетической щелью будет приводить к теории нелокального типа.

§ 4. КВАНТОВАЯ КАРТИНА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ (СОГЛАСНО ЛОНДОНУ)

Предполагая, что токи, удовлетворяющие уравнению (3.2), имеют диамагнитную природу, Ф. Лондон показал, как уравнение такого типа может быть получено на основе квантовомеханического рассмотрения. Существенная роль квантовой теории следует из известной теоремы Бора и ван Левена [80, 81], согласно которой классическая система не может обладать диамагнетизмом. Сверхпроводимость отвечает идеальному диамагнетизму, при котором внутри массивного образца поле равно нулю. Согласно Лондону [1] в изолированном сверхпроводнике, находящемся в тепловом равновесии, в отсутствие магнитного поля нет незатухающего тока; в присутствии поля ток появляется, и его значение определяется величиной и направлением внешнего магнитного поля. Незатухающий ток в кольце является, конечно, метастабильным, а не стабильным. При изменении внешнего поля поток через кольцо сохраняется.

Для объяснения метастабильности токов в многосвязных телах ограничиться концепцией идеального диамагнетизма уже нельзя.

Какая квантовомеханическая система может обладать большим диамагнетизмом? Хорошо известно, что для

атомных или молекулярных систем выражение для магнитной восприимчивости имеет вид:

$$\chi = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_i \bar{r}_i^2. \quad (4.1)$$

Здесь N — число частиц в 1 см^3 и \bar{r}_i^2 — среднее значение квадрата радиуса орбиты электронов. При плотностях электронов, типичных для твердых тел, и при типичных атомных радиусах порядка 10^{-8} см получаем $|\chi| \sim 10^{-6} - 10^{-7}$, как это и наблюдается для нормальных металлов и изоляторов. При выводе формулы (4.1) предполагается, что волновые функции под влиянием магнитного поля сколь угодно существенно не изменяются. В нормальном же металле орбиты изменяются, но, как показал Ландау, восприимчивость мала и по порядку величины равна вышеприведенному значению. Идеальный диамагнетизм соответствует $\chi = -(4\pi)^{-1}$, что дает $B = H(1 + 4\pi\chi) = 0$. Величина такого порядка требует больших орбит для электронов; эффективный радиус \bar{r}_i должен быть порядка 10^{-4} см . Конечно, модель с большим \bar{r}_i и с большим диамагнетизмом не обязательно должна при этом обладать всеми свойствами сверхпроводника, в частности возможностью протекания незатухающего тока [82]¹⁾.

Лондон вывел уравнение (3.3) из квантовой теории следующим образом. Общее выражение для плотности тока системы, состоящей из n электронов с волновой функцией $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ в магнитном поле, описываемом

¹⁾ Выражение (4.1) фактически представляет собой коэффициент $\chi_1 = \frac{B-H}{B} = \frac{\chi}{1+4\pi\chi}$, где, по определению, восприимчивость $\chi = \frac{B-H}{H}$. Разумеется, при $\chi \ll 1$ величины χ

и χ_1 можно не различать, но значению $\chi \rightarrow -\frac{1}{4\pi}$ отвечает уже величина $\chi_1 \rightarrow \infty$. Отсюда ясно, что сделанное в тексте утверждение не точно и формально, $\chi \rightarrow -\frac{1}{4\pi}$ только при $r_i \rightarrow \infty$.

Прим. ред.

вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, имеет вид:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \int \left[-\frac{\hbar e}{2im} (\Psi^* \text{grad}_{\alpha} \Psi - \Psi \text{grad}_{\alpha} \Psi^*) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(r_{\alpha}) \Psi^* \Psi \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n \right\}. \quad (4.2)$$

В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{A} = 0$), $\Psi = \Psi_0$, и плотность тока равна нулю. В нормальном металле волновая функция изменяется под влиянием магнитного поля таким образом, что имеет место почти полная компенсация «парамагнитного» вклада, связанного с градиентными членами, за счет «диамагнитного» вклада, пропорционального вектор-потенциалу \mathbf{A} . В результате остается лишь небольшой диамагнетизм Ландау. В связи с изложенным Лондон предположил, что сверхпроводник отличается от нормального металла «жесткостью» волновой функции, которая не меняется заметным образом под действием магнитного поля, если это поле описывается с использованием калибровки $\text{div} \mathbf{A} = 0$. Поскольку волновая функция не меняется, Ψ можно заменить на Ψ_0 , и парамагнитный вклад становится равным нулю даже в присутствии поля. Остается лишь диамагнитный член, и уравнение (4.2) принимает вид, эквивалентный (3.3):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (4.3)$$

Чтобы понять важность этого результата, нужно помнить, что оператор импульса \mathbf{p} отличается от оператора скорости:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (4.4)$$

В нормальном металле среднее значение \mathbf{p} изменяется в магнитном поле таким образом, что \mathbf{v} практически равно нулю. В лондоновском сверхпроводнике $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{ср}}$ остается приблизительно равным нулю и при включении поля, так что средняя скорость пропорциональна \mathbf{A} . Было предположено, что $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{ср}}$ в сверхпроводнике не изменяется при приложении поля в силу упорядочения, действующего так, чтобы локальное среднее значение импульса оставалось

лось постоянным на больших пространственных расстояниях. Это упорядочение сохраняется даже в присутствии магнитного поля. Упорядоченное основное состояние рассматривается как одно квантовое состояние, распространенное на весь образец. В этой связи Лондон [1] назвал сверхпроводник «квантовой структурой в макроскопическом масштабе», что соответствует «затвердению или конденсации распределения среднего импульса».

Согласно современной теории «парамагнитный» вклад обращается в нуль только в полях, медленно изменяющихся на длине когерентности. Если при изменении волновой функции в магнитном поле учитывать члены первого порядка, то мы приходим к нелокальной теории, которая аналогична, хотя и неидентична нелокальной теории Пиппарда.

Вышеприведенное рассмотрение применимо только к квантовому состоянию, которому отвечает температура $T = 0^\circ \text{K}$. При $T > 0^\circ \text{K}$ возникают тепловые возбуждения. Проще всего рассматривать элементарные электронные возбуждения как электроны, возбужденные из основного состояния. Если температура достаточно низка, число этих возбуждений так мало, что упорядочение, существующее в основном состоянии, на больших расстояниях не нарушается. Только при достижении температуры перехода T_c число возбуждений становится достаточно большим, чтобы разрушить это упорядочение. В рамках двухжидкостной модели основное состояние можно рассматривать как сверхтекучую компоненту, а возбуждения — как нормальную компоненту жидкости. Вплоть до T_c основное состояние сохраняет характер единого квантового состояния.

В этом отношении между сверхпроводимостью и сверхтекучестью He II существует аналогия. Основное состояние покоящегося He II есть квантовое состояние, в котором в среднем конечная часть всех атомов имеет импульс, строго равный нулю, как и в конденсированном бозе-эйнштейновском газе [83]. Такая сильная корреляция между импульсами сохраняется даже при наличии взаимодействия между атомами. С повышением температуры возникают возбуждения, называемые фононами и ротонами, но вплоть до λ -точки число этих возбуждений недостаточно для разрушения упорядоченности в основном

состоянии. Указанный характер основного состояния жидкого He II наиболее ярко проявляется, пожалуй, в экспериментах Вайнена [84] (см. также [85]), который показал, что циркуляция $\int v dl$ вдоль нити, расположенной по оси цилиндрического сосуда, квантуется и при этом равна $(2\pi\hbar/M)l$, где l — целое число. Такой результат можно ожидать только в случае, когда волновая функция основного состояния отлична от нуля во всем объеме. В сверхпроводнике имеет место аналогичное квантование токов. Вследствие этого полный поток магнитного поля через сверхпроводящее кольцо должен быть целым, кратным $2\pi\hbar c/e$ (около $4 \cdot 10^{-7}$ гс · см²)¹).

Можно показать [86—89], что для бозе-эйнштейновского газа, состоящего из заряженных частиц, ниже его температуры перехода будут иметь место эффект Мейснера и другие свойства, характерные для сверхпроводников. Пытаясь на таком пути объяснить сверхпроводимость, Шафрот и др. [56—89] предположили, что могут существовать локализованные связанные пары электронов, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна. Шафрот, Блатт и Батлер [88] сделали попытку развить такую теорию с помощью метода, названного ими квазихимическим. В силу математических трудностей им не удалось последовательно провести вычисления ни для одной модели, обладающей сверхпроводящими свойствами. Для качественного рассмотрения они предложили модель с локализованными парами, в которой средний размер пар меньше расстояния между ними [90]. Такие пары «молекул» способны двигаться поступательно, и возможна близкая аналогия между основным состоянием и низколежащими возбужденными состояниями такой модели и бозе-эйнштейновского газа.

Согласно современной теории основному состоянию сверхпроводника присущи некоторые характерные свойства бозе-эйнштейновского конденсата. В пространстве импульсов электроны связаны в пары таким образом, что пол-

¹) Фактически поток должен быть кратным $\pi\hbar c/e$ [255*—261*]. Это утверждение справедливо, если только сверхпроводник (проволока, из которой сделано кольцо, и т. д.) не слишком мал по своим размерам [259*]. — *Прим. ред.*

ные импульсы каждой пары строго одинаковы. Однако пары не локализуются в пространстве, в отличие от теории Шафрота, Блатта и Батлера, а спектр элементарных возбуждений полностью отличается от спектра бозе-эйнштейновского газа. Таким образом, хотя и существуют одинаковые свойства (в частности, очень важное свойство — упорядочение среднего импульса, происходящее на больших расстояниях), различия между сверхпроводниками и бозе-эйнштейновским конденсатом столь велики, что аналогия между упомянутыми системами является далеко не полной. Этот вопрос еще будет обсуждаться в § 8 в связи с исследованием структуры волновых функций.

§ 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ

5.1. Квазичастичные возбуждения¹)

Существенная трудность при создании микроскопической теории сверхпроводимости заключается в том, что разность энергий между нормальной и сверхпроводящей фазами очень мала. Эта разность равна $H_c^2/8\pi$ на единицу объема, что составляет по порядку величины 10^{-7} эв на один атом. Величина такого порядка получается в предположении, что электроны, находящиеся в слое вблизи поверхности Ферми с толщиной $\sim k_B T_c$, при переходе снижают свою энергию на величину порядка $k_B T_c$. Именно такая весьма небольшая энергия ответственна за столь существенные изменения электромагнитных и других свойств системы. Эту энергию нужно сравнить с обусловленной кулоновским взаимодействием корреляционной энергией порядка 1 эв/атом и с собственной энергией порядка 10^{-4} эв/атом, связанной с электронно-фононным взаимодействием.

Поскольку вычислить энергию каждой фазы с точностью примерно 10^{-7} эв невозможно, все внимание нужно сосредоточить на членах в выражении для энергии,

¹) В советской литературе для таких возбуждений обычно применяется термин: фермиевские возбуждения. — *Прим. ред.*

обуславливающих появление разности энергий между нормальной и сверхпроводящей фазами. Эту разность нужно оценить по возможности точно. Один из способов заключается в том, чтобы выразить волновую функцию сверхпроводящего основного состояния с помощью конфигураций волновых функций нормального состояния, учитывающих корреляционные эффекты, общие для обеих фаз. Сначала мы обсудим нормальное состояние и спектр его элементарных возбуждений, а затем, в следующем параграфе, рассмотрим такой спектр для сверхпроводящего состояния.

Как в нормальном, так и в сверхпроводящем металле существуют три основных типа элементарных возбуждений: квазичастичные возбуждения, фононы и плазмоны. Эти возбуждения не являются точными собственными состояниями гамильтониана и взаимодействуют как друг с другом, так и с фермиевским фоном. Таким образом, возбуждения имеют конечное время жизни τ . В большинстве случаев элементарные возбуждения можно четко определить, если неопределенность в энергии \hbar/τ мала по сравнению с самой энергией возбуждения.

Всем элементарным возбуждениям можно сопоставить волны, имеющие соответствующий волновой вектор \mathbf{k} . Определенное значение \mathbf{k} отвечает волне, бегущей по всему кристаллу; для образования локализованного волнового пакета, протяженностью Δx , как обычно, нужно считать, что имеются волны с разными \mathbf{k} , причем разброс Δk вокруг рассматриваемого вектора \mathbf{k} равен примерно $1/\Delta x$. В силу конечности времени жизни элементарных возбуждений лучше всего считать их локализованными в указанном смысле.

Различные низколежащие квазичастичные конфигурации в нормальном металле при учете взаимодействий могут быть поставлены в однозначное соответствие с конфигурациями, отвечающими блоховской модели индивидуальных частиц. Другими словами, конфигурация определяется заданием числа заполненных состояний в k -пространстве. Для основной конфигурации при $T=0^\circ\text{K}$, все состояния ниже поверхности Ферми заполнены, а выше — незаполнены. Энергия возбужденной конфигурации по сравнению с энергией конфигурации, отвечающей основному состоянию, может быть выражена в виде суммы энергий квази-

частиц. Энергию квазичастицы $\epsilon(\mathbf{k})$ мы будем отсчитывать относительно энергии Ферми E_F . Таким образом, для нормального металла $\epsilon(\mathbf{k})$ — непрерывная функция волнового вектора \mathbf{k} , обращающаяся в нуль на поверхности Ферми. Если $k < k_F$, где k_F отвечает поверхности Ферми, то $\epsilon(\mathbf{k})$ отрицательно. Часто удобно описывать заполнение состояний под поверхностью Ферми в терминах незаполненных состояний или дырок. Энергия дырки с $k < k_F$ является тогда положительным числом, равным $\epsilon(\mathbf{k})$. Если заполнение состояния с волновым вектором \mathbf{k} и спином σ определяется значениями $\eta(\mathbf{k}, \sigma) = 1, 0$, то энергия, необходимая для возбуждения системы над энергией основного состояния, равна:

$$W - W_0 = \sum_{k > k_F, \sigma} \eta(\mathbf{k}, \sigma) \epsilon(\mathbf{k}) + \sum_{k < k_F, \sigma} [1 - \eta(\mathbf{k}, \sigma)] [-\epsilon(\mathbf{k})]. \quad (5.1)$$

Здесь множитель $1 - \eta(\mathbf{k}, \sigma)$ можно рассматривать как число дырок при $k < k_F$. Возбужденные частицы над и дырки под поверхностью Ферми должны рассматриваться как элементарные квазичастичные возбуждения. В нормальном металле, когда $k \rightarrow k_F$, энергия $\epsilon(\mathbf{k}) \rightarrow 0$, так что для возбуждения электрона у поверхности Ферми требуется бесконечно малая энергия. Как мы увидим, различные возбужденные конфигурации в сверхпроводнике, так же как и в нормальном металле, могут быть описаны с помощью чисел заполнения в k -пространстве. Спектр возбуждений характеризуется в этом случае существованием отличной от нуля энергии (энергетической щели), необходимой для возбуждения частицы из сверхпроводящего основного состояния.

Фононы — кванты колебаний решетки — имеют дебаевский спектр со средними энергиями $\hbar\omega_{\text{ph}}$ порядка 10^{-2} эв. При переходе в сверхпроводящее состояние эти частоты изменяются очень мало. Плазмоны — кванты плазменных колебаний электронного газа, энергия которых $\sim 10-20$ эв, — обычно не возбуждаются и в явлении сверхпроводимости непосредственной роли не играют. Однако введение плазменных степеней свободы важно при рассмотрении экранировки электронов (см. § 13).

Когда частица возбуждается над фермиевским фоном, в этом фоне остается дырка. Возбужденная частица и дырка, вообще говоря, пространственно не связаны и могут считаться независимыми возбуждениями. Квазичастичные возбуждения образуются, таким образом, из основного состояния парами.

5.2. Экранирование и «противоток»

Квазичастица не является «голой» частицей, двигающейся независимо от всех других частиц. Напротив, она должна рассматриваться как частица, движущаяся в электронной жидкости. На языке теории поля эта частица «одета» в результате взаимодействия с фононами, плазмонами и другими частицами. Каждый электрон окружен

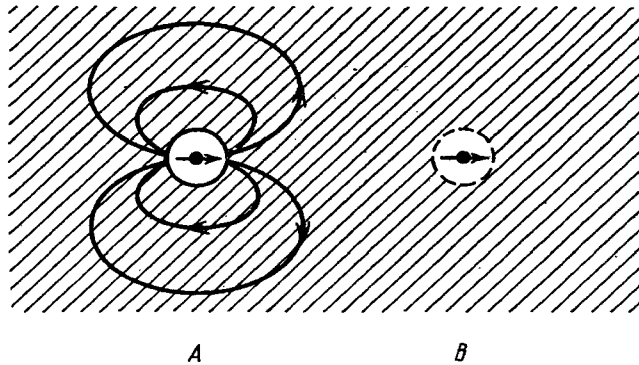


Рис. 1. Экранирующая дырка, окружающая каждый электрон.

Когда электрон движется из A в B , возникает компенсирующий «противоток», текущий в окружающей жидкости.

«экранирующей дыркой»; в занимаемой ею области отсутствует заряд, равный как раз заряду рассматриваемого электрона. В силу локального смещения других электронов, происходящего вследствие кулоновского отталкивания, возникает положительный ионный заряд, компенсирующий заряд электрона в центре дырки.

Эта ситуация иллюстрируется рис. 1, на котором схематически показано также движение электрона из A в B . Поскольку экранирующая дырка движется вместе с элект-

троном, результирующего переноса заряда не происходит. Когда рассматриваемый электрон переносится из точки A в точку B , в жидкости, окружающей электрон, должен возникнуть компенсирующий «противоток». Концепция «противотока» была предложена Фейнманом и Коэном [91] при обсуждении природы ротонов в $He II$, которые также можно рассматривать как квазичастицы, движущиеся в сопровождении «противотока».

На больших расстояниях «противоток» приводит к дипольному по форме распределению тока. Потенциал скорости на больших расстояниях имеет вид:

$$\varphi = \frac{\mu \cdot r}{r^3}; \quad \mu = \frac{p}{4\pi m} \quad (5.2)$$

Сила диполя μ пропорциональна скорости частицы. «Противоток» является коллективным движением и может быть описан с помощью коллективных переменных. С точки зрения формализма Бома и Пайнса, в котором далекодействующая часть кулоновского взаимодействия описывается с помощью плазменных переменных, «противоток» на больших расстояниях можно рассматривать как облако виртуальных плазмонов, двигающихся вместе с электроном.

Проблема «противотока» для электронов в металлах была обсуждена Пайнсом и одним из авторов [27]. Они отметили, что введение «противотока» существенно для того, чтобы квазичастичные возбуждения удовлетворяли уравнению непрерывности, — этот вопрос тесно связан с градиентной инвариантностью теории. В связи с этим имеется заметное различие в описании тока в продольных и поперечных волнах. На рис. 2 схематически показаны

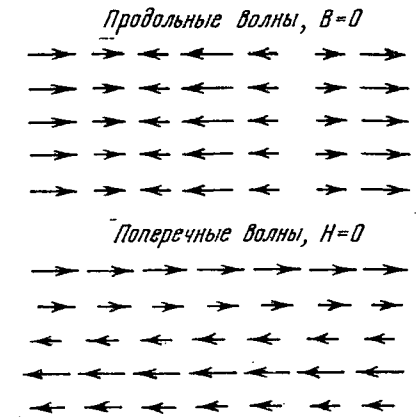


Рис. 2. Продольные и поперечные волны намагничивания.

Поле скоростей в «противотоке», связанном с квазичастицами, соответствует полю H магнитных диполей; полная плотность тока, связанная с движением частиц и «противотоком», отвечает величине $V = \dot{H} + 4\pi M$. Для длинных продольных волн $V=0$, а для поперечных волн $H=0$.

элементарные диполи, связанные с движением квазичастиц для двух типов волн. Здесь существует полная аналогия с продольными и поперечными волнами намагничивания; поле скоростей соответствует H -полю магнитных диполей, а полная плотность тока, связанная с движением частиц и «противотоком», соответствует индукции $B = H + 4\pi M$. Для волн большой длины продольные токи описываются почти полностью в терминах коллективного движения, а следовательно, с помощью плазменных переменных. Квазичастицы и экранирующие их дырки в этом случае не вносят заметного вклада в ток (это соответствует случаю $B = 0$). Обратная ситуация возникает для поперечных волн, где «противотоки» от различных участков волны компенсируют друг друга (это соответствует случаю $H = 0$), и поэтому ток совпадает с током, получаемым при движении частиц без учета «противотока».

Приведенные выше рассуждения показывают, что при рассмотрении продольных волн необходимо явно учитывать коллективные возбуждения. С другой стороны, в поперечных волнах ток почти полностью связан с движением квазичастиц, и вклад последних в ток может быть вычислен обычным образом без учета «противотока». Это и является по существу причиной выбора калибровки $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, которая выделяет поперечные волны. Для вычислений в общей калибровке необходимо ввести как квазичастичные переменные, так и коллективные. В § 13 мы обсудим проведенные недавно градиентно инвариантные вычисления эффекта Мейсснера. Полученные при этом результаты полностью совпадают с полученными в более ранних работах, использовавших калибровку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и учитывающих только квазичастичные возбуждения. «Противотоком» можно также пренебречь при рассмотрении стационарных токов, текущих в проволоке или в другом проводнике. Нужно отметить, что плазменные возбуждения являются просто когерентной суперпозицией возбуждений типа электрон — дырка, носящих характер флуктуаций плотности электронного газа. Поскольку плазмоны являются «хорошими» элементарными возбуждениями в области длинных волн, ясно, что в общем случае нужно описывать систему, рассматривая все возможные квазичастичные и плазменные возбуждения. Труд-

ностей, связанных с пренебрежением специальными комбинациями квазичастичных возбуждений, которые соответствуют когерентным колебаниям плотности, в большинстве случаев не возникает. Фактически можно корректно провести вычисления без введения дополнительных переменных, используя обобщения метода самосогласованного поля Хартри, соответствующие нормальному и сверхпроводящему состояниям (см. § 13).

Вокруг каждого электрона, кроме плазменного облака, имеется смещение ионов, которое следует за движением электрона и может быть описано как облако виртуальных фононов. Кроме того, при описании фононов важно учитывать экранировку полей ионов электронами. Плазмоны, являющиеся в основном колебаниями электронного газа, связаны также с некоторым движением ионов.

5.3. Взаимодействие между элементарными возбуждениями

Теперь мы обсудим вопрос о взаимодействии квазичастиц с фермиевским фоном и друг с другом. Для сверхпроводимости существенны электронно-фононное взаимодействие и экранированное электронно-электронное взаимодействие. Возбужденный электрон может терять энергию или рассеиваться. Это происходит либо вследствие испускания или поглощения фонона, либо при возбуждении другого электрона из фона (с образованием двух новых квазичастиц), либо при взаимодействии с другой квазичастицей.

Время жизни квазичастичных возбуждений τ при средних температурах достаточно продолжительно в силу ограничения, накладываемого на рассеяние принципом Паули. Это и объясняет успех блоховской модели индивидуальных частиц. Частица с энергией возбуждения ϵ может выбить другую частицу из фермиевского фона только в том случае, если энергия выбиваемой частицы лежит в интервале ϵ вблизи поверхности Ферми E_F . Энергии обеих частиц после рассеяния также должны лежать в интервале ϵ около E_F . В результате этого ограничения, накладываемого на используемый объем фазового пространства, длина свободного пробега для элек-

тронно-электронного рассеяния увеличивается по порядку величины в $(E_F/\varepsilon)^2$ раз. При $E_F \sim 10 \text{ эВ}$ и $\varepsilon \sim 0,01 \text{ эВ}$ (это соответствует температуре $T \sim 100^\circ \text{K}$) получаем длину свободного пробега порядка $(10^6 \cdot 10^{-8}) = 10^{-2} \text{ см}$. При значениях ε такого порядка или меньших длина свободного пробега ограничивается в большей мере электронно-фононным, чем электронно-электронным рассеянием.

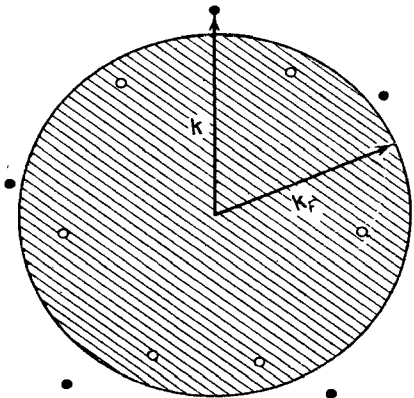


Рис. 3. Типичная возбужденная конфигурация нормального состояния.

Квазичастичные возбуждения — заполненные состояния над поверхностью Ферми и дырки под поверхностью Ферми.

ским фоном. Эти конфигурации могут быть описаны, как и в модели Блоха, заданием чисел заполнения квазичастичных состояний в k -пространстве. Типичная конфигурация показана на рис. 3. Чтобы сделать описание полным, нужно указать также заполнение фононных и плазмонных состояний. При этом предполагается, что корреляционная энергия в основном состоянии учитывается надлежащим образом и что только взаимодействия между элементарными возбуждениями мешают превращению этой конфигурации в точное собственное состояние гамильто-

¹⁾ Затухание фермиевских возбуждений благодаря фононному механизму изучено в работе [234]. — *Прим. ред.*

на. В тяжелых элементах с низкой температурой Дебая электронно-фононное взаимодействие велико, так что электрон легко может рассеиваться с испусканием фонона со сравнительно небольшой длиной свободного пробега¹⁾. Можно полагать, что это объясняет аномальные сверхпроводящие свойства Pb и Hg (подробнее см. § 9).

Существует большое число низколежащих возбужденных конфигураций нормальных состояний, соответствующих малой энергии возбуждения электрона над фермиев-

ниана. Поэтому рассматриваемая конфигурация не совпадает с конфигурацией, отвечающей детерминанту из блоховских волновых функций.

Такой способ феноменологического описания фермиевского газа с учетом взаимодействия был обобщен Ландау [92, 93, см. также 94] в его теории ферми-жидкости. В этой теории зависимость энергии квазичастиц от распределения частиц в k -пространстве учитывается подобно тому, как это делается в методе Хартри — Фока. Теория ферми-жидкости была обоснована Ландау с помощью использования функции Грина, однако дальнедействующее кулоновское взаимодействие в электронном газе, вносящее усложнение, в явном виде не рассматривалось. Теоретики уделяют много внимания этому вопросу, но несмотря на существенный прогресс здесь до сих пор нет удовлетворительного количественного решения для обычных значений электронных плотностей.

§ 6. ЭЛЕКТРОННО-ФОНОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Путь для успешного развития микроскопической теории был указан Фрелихом [67], обратившим внимание на необходимость учета электронно-фононного взаимодействия для объяснения сверхпроводимости. Предпринятые им вычисления [95] притяжения между электронами, обусловленного обменом виртуальными фононами, были обобщены затем Бардином и Пайнсом [96], с целью учета кулоновского взаимодействия. Качественно взаимодействие можно описать следующим образом [96]. Частица вблизи поверхности Ферми в состоянии k_1 испускает виртуальный фонон с волновым вектором q и рассеивается в состояние $k'_1 = k_1 - q$. Хотя электрон и не имеет достаточной энергии, чтобы испустить реальный фонон, он может на мгновение сделать это в силу соотношения неопределенности $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Второй электрон в состоянии k_2 поглощает фонон, переходя в состояние $k'_2 = k_2 + q$. В результате электроны в состояниях k_1 и k_2 рассеиваются в состояния k'_1 и k'_2 с сохранением волнового вектора:

$$k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2. \quad (6.1)$$

Такой процесс соответствует парному взаимодействию между частицами, которое отвечает притяжению, если разность энергий между рассматриваемыми электронными состояниями меньше энергии виртуального фонона $\hbar\omega_{\text{ph}}$. Критерий сверхпроводимости заключается по существу в том, чтобы это притяжение доминировало над экранированным кулоновским отталкиванием.

Физическая природа фононного взаимодействия связана с тем, что электрон, совершая переход из состояния \mathbf{k}_1 в состояние $\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}$, создает флуктуацию плотности заряда $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$ с волновым вектором \mathbf{q} и частотой

$$\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) = \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})].$$

Вследствие электронно-фононного взаимодействия флуктуация $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$ может возбудить фонон. Этот фонон связан с флуктуацией плотности ионного заряда $\delta\rho_{\mathbf{q}}^i$, которая происходит в противофазе с первоначальной флуктуацией электронного заряда $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$, если частота $\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q})$ больше собственной частоты фонона $\omega_{\mathbf{q}}$. В противном случае $\delta\rho_{\mathbf{q}}^i$ будет совпадать по фазе с $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$. Этот процесс описывает динамическую экранировку электрического поля, создаваемую виртуальным электронным переходом $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}$. Величина «отдачи», испытываемой вторым электроном ($\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}$), зависит от эффективности указанного динамического экранирования. Если $\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) < \omega_{\mathbf{q}}$, то происходит столь сильное экранирование (грубо говоря, в результате того, что флуктуации положительного ионного заряда достигают величины, которая с избытком компенсирует кулоновское поле, создаваемое $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$), что вторая частица притягивается к первой, а не отталкивается от нее. При $\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) > \omega_{\mathbf{q}}$ экранирование не полное, так как $\delta\rho_{\mathbf{q}}^i$ и $\delta\rho_{\mathbf{q}}^e$ не совпадают по фазе. Как и можно ожидать, взаимодействие, обусловленное обменом виртуальными фононами, пропорционально

$$\frac{1}{\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \quad (6.2)$$

(вынужденные колебания гармонического осциллятора).

Нужно упомянуть, что фононное взаимодействие и экранированное кулоновское взаимодействие вносят также вклад в собственную энергию квазичастиц. Такой вклад возникает, например, благодаря процессу, при котором электрон с волновым вектором \mathbf{k}_1 , испуская виртуальный фонон, переходит в состояние \mathbf{k}'_1 , а затем поглощает фонон, возвращаясь в исходное состояние. Предполагается, что все такие собственно-энергетические поправки учтены при выборе конфигурации волновых функций нормального состояния и что эти поправки не изменяются существенным образом при переходе к сверхпроводящему состоянию. В эффективном гамильтониане, описывающем электроны и фононы, должны таким образом учитываться только члены, отвечающие истинному взаимодействию.

Матричный элемент для фононного взаимодействия между электронами имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 | V_{\text{ph}} | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle = \\ = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}} |M_{\mathbf{q}}|^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}'_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1})^2 - (\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2} + \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}} |M_{\mathbf{q}}|^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}'_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2})^2 - (\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь $M_{\mathbf{q}}$ — матричный элемент электронно-фононного взаимодействия и $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ — энергия соответствующего фонона. Взаимодействие отвечает притяжению (отрицательно), если разность между энергиями состояний электрона меньше $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$. Критерий сверхпроводимости заключается в том, чтобы это взаимодействие, имеющее характер притяжения, превышало экранированное кулоновское взаимодействие, которое характеризуется выражением:

$$V_{\text{coul}} = \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1|^2 + k_s^2}. \quad (6.4)$$

Здесь k_s — постоянная, характеризующая экранировку. Условие появления сверхпроводимости может быть символически записано в виде:

$$\langle V_{\text{ph}} + V_{\text{coul}} \rangle < 0, \quad (6.5)$$

где усреднение проводится по области взаимодействия

вблизи поверхности Ферми, так что $|\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k| < \hbar\omega_c$. Здесь ω_c — средняя частота фононов, равная примерно половине дебаевской частоты.

Этот критерий обсуждался Пайнсом [97], а также более детально на основе упрощенной модели Моррелом [98]¹⁾. Они нашли, что в наиболее благоприятных условиях с точки зрения появления сверхпроводимости находятся элементы с большим числом валентных электронов на атом и одновременно с низкой электронной плотностью (в согласии с эмпирическими правилами Маттиаса). Такой критерий весьма грубо отделяет сверхпроводники от несверхпроводников. Наибольший вклад в V_{ph} вносится областью процессов «переброса», где разность $k'_1 - k_1$ лежит вне первой зоны Бриллюэна. Если состояния k описываются с помощью расширенной зонной схемы, то этот вывод относится к большинству возможных виртуальных переходов. В области процессов «переброса» $|k'_1 - k_1|$ может быть относительно велико (что уменьшает кулоновский вклад), в то время как приведенный волновой вектор $q = k_1 - k'_1 + K$, а также $\hbar\omega_q$, малы. Здесь K — вектор обратной решетки. Роль кулоновского взаимодействия с точки зрения подавления сверхпроводимости будет еще обсуждена в § 9.

§ 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Наиболее ярким различием между возбуждениями в нормальном и сверхпроводящем состояниях является наличие в последнем случае энергетической щели для квазичастичных возбуждений. Квазичастицы в сверхпроводниках можно характеризовать волновым вектором k и спином σ в одно-

¹⁾ Влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость изучалось на основе простой модели также в работе [18]. Результат состоит в том, что большая величина отталкивательного кулоновского взаимодействия входит в критерий типа (6.5) не сама по себе, а деланная на некоторый логарифм (величина логарифма ~ 5). Это облегчает возможность сверхпроводящего перехода. — *Прим. ред.*

однозначном соответствии с нормальными металлами. Энергия квазичастицы в сверхпроводнике E_k может быть записана в виде

$$E_k = V \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}. \quad (7.1)$$

Здесь ε_k — блоховская энергия в нормальном состоянии, отсчитываемая относительно фермиевского фона, а Δ_k — параметр, характеризующий энергетическую щель и полученный из теории в результате решения интегрального уравнения. Возбуждения соответствуют, грубо говоря, частицам над поверхностью Ферми и дыркам под поверхностью Ферми, хотя в сверхпроводнике свойства возбуждений и не меняются разрывным образом при переходе через поверхность Ферми. Если $\eta(k, \sigma) = 1, 0$ — числа заполнения для возбуждений, то полная энергия возбуждения относительно энергии основного состояния W_{s0} равна:

$$W_{exc} - W_{s0} = \sum_{k, \sigma} \eta(k, \sigma) E_k, \quad (7.2)$$

что находится в полной аналогии с нормальным состоянием. Значение Δ_k зависит от распределения возбуждений по состояниям и таким образом изменяется с температурой. Энергетическая щель имеет максимум при $T = 0^\circ K$ и постепенно уменьшается с увеличением температуры, обращаясь в нуль в точке перехода (при $T = T_c$).

Вообще говоря, энергетическая щель может быть анизотропна и зависеть от направления k так же, как и от энергии. Целый ряд экспериментальных фактов указывает на существование анизотропных эффектов, которые, конечно, являются специфическими для каждого отдельного металла. Однако, поскольку эти эффекты сравнительно невелики и не существенны для понимания сверхпроводимости, мы в большинстве случаев будем ими пренебрегать и предполагать, что Δ_k является функцией только энергии ε_k рассматриваемого блоховского состояния.

Из теории следует, что параметр Δ_k должен быть достаточно велик в области, где существенно фононное притяжение, т. е. в слое вблизи поверхности Ферми с шириной порядка средней энергии фононов $\hbar\omega_c$ (рис. 4).

Для упрощенной модели взаимодействия, использованной в теории БКШ [12], параметр Δ постоянен до энергии обрезания $\hbar\omega_c$, а при больших энергиях равен нулю. Обычно представляют интерес энергии возбуждения не больше, чем несколько $k_B T_c$. В пределе так называемой слабой связи, справедливом для большинства сверхпроводников, $k_B T_c \ll \hbar\omega_c$. В этом случае в интересующей нас области можно без заметной ошибки считать, что $\Delta = \text{const}$. Приближение слабой связи неприменимо к металлам с очень низкими температурами Дебая, как, например, к свинцу и ртути.

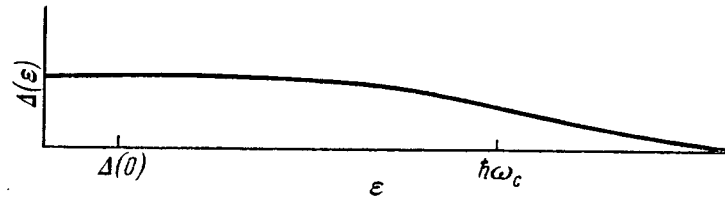


Рис. 4. Изменение параметра энергетической щели $\Delta(\epsilon)$ вблизи поверхности Ферми. В случае слабой связи $\hbar\omega_c \gg \Delta$.

Некоторая часть из огромного количества экспериментальных доказательств существования энергетической щели будет более подробно обсуждена в последующих параграфах. Как уже упоминалось во введении, наиболее непосредственные доказательства получены из экспериментов по поглощению электромагнитных волн как в микроволновой, так и в далекой инфракрасной частях спектра. Другие данные получены из экспериментов по теплоемкости, поглощению ультразвуковых волн, времен релаксации ядерного спина и теплопроводности. Все эти явления зависят от количества возбужденных электронов. Из экспериментов, проведенных при сверхнизких температурах, следует, что число возбуждений экспоненциально падает по закону $\exp(-bT_c/T)$, характерному для наличия в спектре энергетической щели. Большинство упомянутых доказательств собраны после 1953 г., когда Браун, Земанский и Бурз [99] показали, что электронная теплоемкость ванадия имеет экспоненциальный характер, а Гудман [100] обнаружил экспоненциальное падение тепло-

проводности олова, которое он интерпретировал, предполагая существование энергетической щели. В табл. II помещены эмпирические значения щели для некоторых металлов¹⁾.

Таблица II
Значения ширины энергетической щели

Сверхпроводник	$T_c, ^\circ\text{K}$	$10^4 T_c / \theta_D$	$2\Delta(0)/k_B T_c$				
			I	II	III	IV	V
Индий	3,39	31	$4,1 \pm 0,2$	$3,9 \pm 0,3$	3,5	3,9	
Олово	3,73	19	$3,6 \pm 0,2$	$3,3 \pm 0,2$	3,6	3,6	3,3
Ртуть	4,15	52	$4,6 \pm 0,2$		3,7		
Тантал	4,39	18	$\approx 3,0$		3,6	3,6	
Ванадий	5,1	15	$3,4 \pm 0,2$		3,6	3,6	3,5
Свинец	7,15	76	$4,1 \pm 0,2$	$4,0 \pm 0,5$	3,9		
Ниобий	9,0	35	$2,8 \pm 0,3$		3,7	4,0	3,9

В таблице приведены значения энергетической щели при абсолютном нуле (в единицах $k_B T_c$) по сравнению с значениями, полученными (римские цифры указывают номера столбцов):

I — Ричардсом и Тинкхамом из измерений отражения инфракрасного излучения от массивных образцов;

II — Гинзбергом и Тинкхамом из измерений прохождения излучения через тонкие пленки;

III — Гудманом из соотношения макроскопической теории

$$\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} = \frac{2H_0}{T_c \left(\frac{\pi}{6\gamma}\right)^{1/2}}$$

(использованы экспериментальные значения γ , H_0 и T_c);

¹⁾ Самым непосредственным свидетельством наличия энергетической щели явилось изучение туннельного эффекта [262*—265*]. Оказалось, в частности, что туннельный эффект из сверхпроводника в нормальный металл при низких температурах появляется только тогда, когда разность потенциалов достигает величины, равной удвоенному значению щели. — Прим. ред.

IV — Гудманом с помощью подбора экспоненциальной функции, ближе всего отвечающей экспериментальным данным по теплоемкости.

V — Гудманом с помощью сравнения микроскопической теории с экспериментальными данными по теплоемкости.

Предположение о существовании энергетической щели в течение многих лет обсуждалось теоретиками. Велькер [101] ввел в спектр щель для объяснения эффекта Мейсснера. Даунт и Мендельсон [102] показали, что в сверхпроводнике нет тепла Томпсона, связанного с током, и что поэтому сверхпроводящий ток представляет собой перенос в основном состоянии с равной нулю энтропией. Они предположили существование щели для возбужденных состояний, которые вносят вклад в электронную теплоемкость. Гинзбург [2, 240*] предложил двухжидкостную модель, основанную на введении энергетической щели. Один из авторов настоящего обзора развил теорию эффекта Мейсснера на основе модели с энергетической щелью и показал, что эта теория приводит к недоказанной связи между током и полем пиппардовского типа, если энергетическая щель не превышает нескольких $k_B T_c$.

§ 8. ПРИРОДА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

8.1. Образование парных конфигураций

Купер [73] показал, что в случае результирующего притяжения две квазичастицы, находящиеся над фермиевским фоном нормального металла, могут образовать связанную пару с выигрышем в суммарной энергии. При этом образование пары происходит и при сколь угодно слабом притяжении. Этот очень важный результат свидетельствует о том, что для взаимодействия типа притяжения фермиевский фон неустойчив по отношению к образованию таких связанных пар. Купер показал также, что если энергия связи пары порядка $k_B T_c$ и $T_c \sim 1^\circ \text{K}$, то протяженность волновой функции пары по порядку величины равна 10^{-4} см. Волновая функция пары обра-

зуется в основном из функций состояний с энергиями, лежащими в интервале порядка нескольких $k_B T_c$ около E_F .

Задолго до работы Купера было известно, что протяженность такого порядка величины следует из соотношения неопределенности. Разность волновых векторов Δk , соответствующая разности энергий $k_B T_c$ у поверхности Ферми $k = k_F$, определяется соотношением:

$$\frac{\Delta k}{k_F} \sim \frac{k_B T_c}{E_F} \sim 10^{-4}. \quad (8.1)$$

Поскольку обычно k_F по порядку величины равно 10^8 см⁻¹, Δk по порядку величины составляет 10^4 см⁻¹. Соотношение неопределенности $\Delta k \Delta x \sim 1$ дает минимальную протяженность волновой функции $\Delta x \sim 10^{-4}$ см.

Из этих соображений размерности немедленно следует, что картина бозе-эйнштейновской конденсации изолированных пар невозможна. Число электронов в области с шириной $\sim \Delta k$ около k_F , которые, по предположению, принимают участие в образовании сверхпроводящего конденсированного состояния, по порядку величины равно $10^{-4} \times 10^{22} = 10^{18}$ см⁻³. Если эти электроны образуют пары, расстояние между парами будет порядка 10^{-6} см. Поскольку протяженность волновой функции равна $\sim 10^{-4}$ см, должно возникать очень большое перекрытие, и картина изолированных пар теряет смысл.

Таким образом, проблема состоит в том, как применить идею конденсации пар для объяснения сверхпроводимости. Купер и авторы [11, 12] получили формулы теории сверхпроводимости с помощью математической техники, использованной Купером в его работе для одной пары. Этот метод кратко может быть описан следующим образом. Предположим, что имеется гамильтониан $H = H_0 + U$ с невозмущенными собственными состояниями $H_0 \psi_i = E_i \psi_i$ и матричными элементами U_{ij} . Здесь H_0 может, например, отвечать невзаимодействующим частицам, а U — взаимодействию между ними. Предположим, что можно выбрать подсовокупность функций ψ_i с такими фазами, что матричные элементы U_{ij} между любыми двумя функциями ψ_i являются преимущественно

отрицательными. Тогда пробная функция для основного состояния гамильтониана H задается линейной комбинацией членов этой подсовокупности с коэффициентами a_i одного знака: $\Psi = \sum a_i \psi_i$. Соответствующая энергия равна:

$$W = \sum_i a_i^2 E_i + \sum_{ij} a_i a_j U_{ij}. \quad (8.2)$$

Если все U_{ij} отрицательны, их вклады в энергию взаимодействия будут находиться в фазе и дадут когерентное состояние с низкой энергией. Коэффициенты a_i могут при этом подбираться с помощью вариационного метода.

Особенно простым примером является случай, когда имеется совокупность состояний из N вырожденных ψ_i с энергиями $E_i = E_0$, причем каждое состояние связано с m другими состояниями с помощью отличного от нуля матричного элемента $U_{ij} = -V$. Тогда все a_i равны между собой, и энергия основного состояния имеет вид:

$$W = E_0 - mV. \quad (8.3)$$

Образует сверхпроводящее основное состояние из линейных комбинаций конфигураций нормального типа, в которых частицы возбуждены только до низких энергий над фермиевским фоном. Какая-либо конфигурация типа, приведенного на рис. 3, может быть обозначена с помощью чисел заполнения в k -пространстве для частиц над фермиевским фоном и для дырок под фермиевским фоном. Предположим, что характер этих конфигураций таков, что ими учитывается вся корреляционная энергия нормального состояния и собственная энергия квазичастиц. Остается еще неучтенным только эффективное взаимодействие U между квазичастицами, обусловленное фононами и экранированным кулоновским взаимодействием. Сверхпроводимость возникает, если фононное взаимодействие преобладает, т. е. если результирующее взаимодействие для частиц вблизи поверхности Ферми имеет характер притяжения. Для оценки величины матричных элементов между состояниями с упомянутыми нормальными конфигурациями может быть использована блоховская модель индивидуальных частиц. Может быть развит также и более точный метод. В любом случае для эффективного парного взаи-

действия существует отличный от нуля матричный элемент между двумя конфигурациями, отличающимися друг от друга только числами заполнения двух состояний отдельных частиц. Например, k_1, k_2 , переходит в k'_1, k'_2 с сохранением волнового вектора:

$$k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2 = Q. \quad (8.4)$$

Для общих конфигураций частиц Ферми — Дирака знак матричного элемента зависит от заполнения других состояний $k_\alpha, k_\beta, \dots, k_\delta$, которые не изменяются при переходе:

$$\begin{aligned} (k_\alpha, k_\beta, \dots, k_\delta, k'_1, k'_2 | V | k_\alpha, k_\beta, \dots, k_\delta, k_1, k_2) = \\ = \pm (k'_1, k'_2 | V | k_1, k_2). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Спиновые переменные здесь в явном виде не указаны. Если выбирается определенное упорядочение всех состояний, относительный знак матричного элемента определяется значением $(-1)^{N+N'}$, где N и N' — соответственно полные числа заполнения состояний, лежащих между $k_1 \sigma_1$ и $k_2 \sigma_2$ в начальном и $k'_1 \sigma'_1$ и $k'_2 \sigma'_2$ в конечном состояниях. Для взаимодействующих частиц величина матричного элемента также будет зависеть от состояний, заполненных другими частицами, но эта зависимость слаба для рассматриваемых нами конфигураций с малым возбуждением над фермиевским фоном.

Поскольку для общих конфигураций сумма $N + N'$ может быть с равной вероятностью четной или нечетной, матричные элементы будут иметь переменный знак и получить когерентное состояние с низкой энергией описанным выше методом невозможно. Если различные конфигурации входят в это состояние с примерно равным весом, энергия взаимодействия будет мала. Число матричных элементов много больше числа конфигураций, поэтому нельзя получить для них правильные знаки с помощью изменения знаков волновых функций, соответствующих различным конфигурациям. Чтобы применить описанный выше метод, нужно отобрать подсовокупность конфигураций, матричные элементы между которыми для случая притяжения преимущественно отрицательны. Как

легко видеть, это можно сделать, соединяя состояния парами $(\mathbf{k}_1\sigma_1, \mathbf{k}_2\sigma_2)$ с условием, что если в какой-либо конфигурации состояние одного из членов пары заполнено, то и другое также заполнено. Таким образом и N , и N' будут обязательно четными числами, также как сумма $N + N'$. Чтобы получить максимальное число матричных элементов, а следовательно и наименьшую энергию основного состояния, желательно подобрать пары таким образом, чтобы каждая из них в результате всех взаимодействий могла переходить в другую. Это означает, что они должны иметь одинаковый суммарный импульс, т. е. для всех пар $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}$. Вероятно также, что в большинстве случаев образующие пару квазичастицы должны иметь противоположные спины, поскольку обменные члены обычно приводят к уменьшению матричных элементов для параллельных спинов. Для основного состояния $\mathbf{Q} = 0$ и парные состояния имеют противоположные спин и импульс $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$. Случай параллельно спаренных спинов также, однако, рассматривается, иногда он может привести к состоянию с более низкой энергией, если угловая зависимость взаимодействия такова, что обменные и обычные матричные элементы имеют противоположные знаки. В случаях, когда существенную роль играет рассеяние на примесях, волновой вектор не является хорошим квантовым числом; вопрос об образовании пар в такой ситуации обсуждается в § 12.

8.2. Волновая функция основного состояния

На указанном пути мы приходим к когерентному сверхпроводящему основному состоянию Ψ_s , причем Ψ_s представляется в виде линейной комбинации конфигураций нормального типа, в которых квазичастичные состояния заполнены парами с противоположными спином и импульсом. Такая пара характеризуется волновым вектором $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}\uparrow; -\mathbf{k}\downarrow)$. Конфигурация может быть определена с помощью указания заполненных парных состояний. Таким образом, мы можем написать:

$$\Psi_s = \sum_i a_i \psi_i(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m), \quad (8.6)$$

где суммирование проводится по всем конфигурациям. Образование такого состояния предпочтительно, если для частиц с энергиями вблизи поверхности Ферми, взаимодействие имеет характер притяжения. Различные конфигурации ψ_i , вносящие основной вклад в энергию наименьшего состояния, имеют примерно одинаковое общее распределение частиц в k -пространстве. Вероятность $h(k)$ того, что данное состояние заполнено, падает непрерывно от единицы при $k \ll k_F$ до нуля при $k \gg k_F$, не терпя разрыва у поверхности Ферми (рис. 5). При

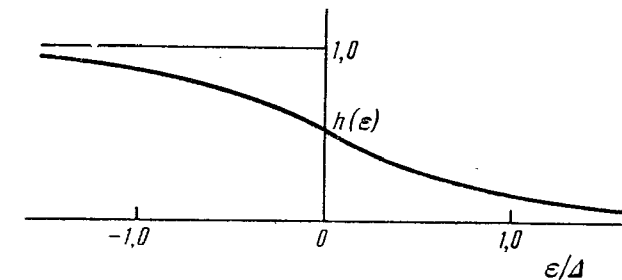


Рис. 5. Вероятность $h(\epsilon)$ заполнения данного состояния с энергией ϵ в сверхпроводящем основном состоянии.

этом разность $1 - h(k)$ в области $k < k_F$ должна рассматриваться как вероятность существования дырки. Нормальному основному состоянию соответствует $h(k) = 1$ для $k < k_F$ и $h(k) = 0$ для $k > k_F$.

Нужно заметить, что полная разность энергий между нормальным и сверхпроводящим состоянием в рассматриваемом приближении определяется теми отвечающими взаимодействию членами в гамильтониане, для которых $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 = \mathbf{Q} = 0$. Эти члены имеют нулевой вес с точки зрения всего взаимодействия и вносят пренебрежимо малый вклад в энергию нормального состояния. Если члены с $\mathbf{Q} = 0$ рассматривать на основе теории возмущений, то в любом приближении их вклад в энергию для большой системы пренебрежимо мал (энергия на частицу порядка $O(1/n)$). Однако для сверхпроводимости именно эти члены наиболее существенны.

Образование линейных комбинаций парных состояний имеет своим физическим следствием появление дальнедействующей корреляции между частицами с противоположными спинами. Радиус корреляции в реальном пространстве имеет порядок 10^{-4} см, причем характер корреляции отвечает наличию притяжения. Поскольку значение суммарного импульса пар повсюду одинаково, существует также дальнедействующая корреляция среднего импульса, аналогичная предполагавшейся Лондоном. Состояние системы как раз таково, каким оно предполагалось для объяснения эффекта Мейсснера и других свойств сверхпроводников. Подробные вычисления подтверждают вышесказанное.

8.3. Спектр возбуждений

Квазичастичные возбуждения в сверхпроводнике, находящиеся в одно-однозначном соответствии с возбуждениями в нормальном металле, могут быть получены путем выбора чисел заполнения определенных состояний в k -пространстве, с использованием остальных состояний для образования линейных комбинаций парных конфигураций. В случае «одночастичных» возбуждений теории ВКШ одна из компонент пары, скажем $k \uparrow$, заполнена, а другая $-k \downarrow$ незаполнена для всех конфигураций. Каждая из таких конфигураций ортогональна с конфигурациями, образующими основное состояние. Такая волновая функция соответствует возбужденной частице в состоянии $k \uparrow$, если $k > k_F$, и дырке в состоянии $-k \downarrow$, если $k < k_F$. Конструирование «парных» возбуждений, в которых оба состояния $k \uparrow$ и $-k \downarrow$ «заполнены», нужно производить с большей осторожностью. Основное состояние может быть разложено на часть φ_1 , для которой пара k определенно заполнена, и часть φ_0 , для которой пара незаполнена. Тогда:

$$\Psi_s = v_k \varphi_1 + u_k \varphi_0. \quad (8.7)$$

Здесь $v_k^2 = 1 - u_k^2 = h(k)$ — вероятность заполнения состояния k . Ортогональная комбинация

$$\Psi_{\text{exc}} = u_k \varphi_1 - v_k \varphi_0 \quad (8.8)$$

является волновой функцией для «возбужденной пары» в состоянии k . Боголюбов и Валатин показали, что «одиночные» и «парные» возбуждения в сверхпроводниках можно рассматривать на равных основаниях с помощью преобразования операторов рождения и уничтожения квазичастичных возбуждений нормального состояния (см. § 11.1).

8.4. Связь с конденсацией Бозе — Эйнштейна

Если нормальное основное состояние рассматривать как состояние невзаимодействующих частиц, то волновая функция основного сверхпроводящего состояния может быть выражена как антисимметричное произведение идентичных функций отдельных пар¹⁾ [103]:

$$\Psi_s = \sum_P (-1)^P \varphi(r_1 - r_2) \varphi(r_3 - r_4) \dots \varphi(r_{n-1} - r_n), \quad (8.9)$$

где суммирование производится по всем перестановкам P рассматриваемых n частиц. Каждая функция пары имеет симметричную пространственную часть и антисимметричную спиновую часть (последняя в явном виде не указана). Пространственная часть имеет вид:

$$\varphi(r_1 - r_2) = \sum_k \left(\frac{v_k}{u_k} \right) \exp [ik(r_1 - r_2)]. \quad (8.10)$$

В результате антисимметризации произведения исключаются все корреляции в $\varphi(r_1 - r_2)$, за исключением дальнедействующих корреляций, связанных с отличием коэффициентов $h(k)$ от их значений в нормальном состоянии, равных единице при $k < k_F$ и нулю при $k > k_F$. Нормальное основное состояние может быть выражено через такое же произведение. В этом случае антисимметризация устраняет все корреляции между частицами с противоположными спинами.

Выражение (8.9) можно использовать для выяснения сходства и различия между сверхпроводящим основным

¹⁾ F. J. D y s o n, частное сообщение (1957).

состоянием и основным состоянием конденсированных бозе-эйнштейновских пар, а также для установления связи с теорией Шафрота, Блатта и Батлера [88]. Как показали эти авторы, бозе-эйнштейновский конденсат, состоящий из пар, может быть также описан произведением идентичных функций отдельных пар. Процесс антисимметризации не должен сильно изменить характера состояния, если протяженность волновой функции пары мала по сравнению с средним расстоянием между парами. В этом случае входящие в сумму (8.9) функции, отличающиеся друг от друга обменом частицей между двумя или большим количеством пар (например, замена r_1 на r_3 и наоборот, но без одновременной замены r_2 на r_4), сильно не перекрываются. Поэтому система в качественном отношении будет вести себя подобно конденсированному бозе-эйнштейновскому газу. Если, однако, размер пар велик по сравнению с расстоянием между парами, как это и имеет место в реальных сверхпроводниках, то антисимметризация вносит существенные новые черты. Как упоминалось ранее, полный спектр возбуждений сверхпроводника является по существу спектром квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака. Имеется только небольшое число коллективных возбуждений, соответствующих движению пары квазичастиц в связанном состоянии. Однако соответствующие энергии возбуждения лишь слегка меньше ширины энергетической щели. Движение таких связанных пар сильно отличается от движения индивидуальных пар, которое имело бы место в случае системы Бозе — Эйнштейна.

Использованная выше волновая функция пары φ является функцией только расстояния $|r_1 - r_2|$ и поэтому представляет собой s -функцию. Обсуждались и другие возможные функции пары. В некоторых случаях они могут привести к состояниям с более низкой энергией, чем для s -функции. Например, можно рассматривать пространственную функцию p -типа с симметричной спиновой частью; такая функция, соответствующая образованию пары из частиц с параллельными спинами, была изучена Фишером. Функция d -типа была рассмотрена в качестве функции пар в случае возможного в принципе сверхтекучего состояния He^3 . Эти вопросы еще будут обсуждены в § 13.

§ 9. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

9.1. Интегральное уравнение

Как указывалось в предыдущем параграфе, почти вся разность энергии между нормальным и сверхпроводящим основными состояниями определяется теми членами в гамильтониане, которые ответственны за рассеяние пар с суммарным импульсом, равным нулю. Для рассмотрения квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике удобен эффективный гамильтониан, в котором оставлены только такие члены. В настоящем параграфе мы приведем результаты для упрощенной модели, использованной в теории БКШ. В этой модели предположено, что матричный элемент $V_{kk'} = V_{k'k}$, отвечающий рассеянию пары из $k \uparrow, -k \downarrow$ в $k' \uparrow, -k' \downarrow$, является отрицательным (притяжение) и постоянным в энергетическом слое с энергиями электронов от $E_F - \hbar\omega_c$ до $E_F + \hbar\omega_c$. Здесь $\hbar\omega_c$ — средняя энергия фонона в области, в которой взаимодействие, вызванное фононами, велико и соответствует притяжению. Эта модель не является столь ограниченной, как может показаться на первый взгляд, поскольку в пределе слабой связи (для которой энергетическая щель мала по сравнению с $\hbar\omega_c$) почти все результаты зависят только от величины энергетической щели у поверхности Ферми. Очень важный вопрос о том, что именно определяет «энергию обрезания» $\hbar\omega_c$, будет обсужден ниже.

Для вычисления энергии взаимодействия мы можем еще раз разложить функцию Ψ_s [см. (8.7)], чтобы получить числа заполнения двух пар k и k' . С точностью до членов $O(1/n)$, где n — полное число частиц, коэффициенты второго разложения совпадают с коэффициентами в первом разложении [104]¹⁾:

$$\Psi_s = v_k v_{k'} \varphi_{11} + v_k u_{k'} \varphi_{10} + u_k v_{k'} \varphi_{01} + u_k u_{k'} \varphi_{00}. \quad (9.1)$$

¹⁾ В результате более детального рассмотрения Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников [105] показали, что полученное на основе формулы (9.1) выражение для свободной энергии в случае эффективного гамильтониана асимптотически правильно для большой системы. — *Прим. авт. при корректуре.*

состоянием и основным состоянием конденсированных бозе-эйнштейновских пар, а также для установления связи с теорией Шафрота, Блатта и Батлера [88]. Как показали эти авторы, бозе-эйнштейновский конденсат, состоящий из пар, может быть также описан произведением идентичных функций отдельных пар. Процесс антисимметризации не должен сильно изменить характера состояния, если протяженность волновой функции пары мала по сравнению с средним расстоянием между парами. В этом случае входящие в сумму (8.9) функции, отличающиеся друг от друга обменом частицей между двумя или большим количеством пар (например, замена r_1 на r_3 и наоборот, но без одновременной замены r_2 на r_4), сильно не перекрываются. Поэтому система в качественном отношении будет вести себя подобно конденсированному бозе-эйнштейновскому газу. Если, однако, размер пар велик по сравнению с расстоянием между парами, как это и имеет место в реальных сверхпроводниках, то антисимметризация вносит существенные новые черты. Как упоминалось ранее, полный спектр возбуждений сверхпроводника является по существу спектром квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака. Имеется только небольшое число коллективных возбуждений, соответствующих движению пары квазичастиц в связанном состоянии. Однако соответствующие энергии возбуждения лишь слегка меньше ширины энергетической щели. Движение таких связанных пар сильно отличается от движения индивидуальных пар, которое имело бы место в случае системы Бозе — Эйнштейна.

Использованная выше волновая функция пары φ является функцией только расстояния $|r_1 - r_2|$ и поэтому представляет собой s -функцию. Обсуждались и другие возможные функции пары. В некоторых случаях они могут привести к состояниям с более низкой энергией, чем для s -функции. Например, можно рассматривать пространственную функцию p -типа с симметричной спиновой частью; такая функция, соответствующая образованию пары из частиц с параллельными спинами, была изучена Фишером. Функция d -типа была рассмотрена в качестве функции пар в случае возможного в принципе сверхтекучего состояния He^3 . Эти вопросы еще будут обсуждены в § 13.

§ 9. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

9.1. Интегральное уравнение

Как указывалось в предыдущем параграфе, почти вся разность энергии между нормальным и сверхпроводящим основными состояниями определяется теми членами в гамильтониане, которые ответственны за рассеяние пар с суммарным импульсом, равным нулю. Для рассмотрения квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике удобен эффективный гамильтониан, в котором оставлены только такие члены. В настоящем параграфе мы приведем результаты для упрощенной модели, использованной в теории БКШ. В этой модели предположено, что матричный элемент $V_{kk'} = V_{k'k}$, отвечающий рассеянию пары из $k \uparrow, -k \downarrow$ в $k' \uparrow, -k' \downarrow$, является отрицательным (притяжение) и постоянным в энергетическом слое с энергиями электронов от $E_F - \hbar\omega_c$ до $E_F + \hbar\omega_c$. Здесь $\hbar\omega_c$ — средняя энергия фонона в области, в которой взаимодействие, вызванное фононами, велико и соответствует притяжению. Эта модель не является столь ограниченной, как может показаться на первый взгляд, поскольку в пределе слабой связи (для которой энергетическая щель мала по сравнению с $\hbar\omega_c$) почти все результаты зависят только от величины энергетической щели у поверхности Ферми. Очень важный вопрос о том, что именно определяет «энергию обрезания» $\hbar\omega_c$, будет обсужден ниже.

Для вычисления энергии взаимодействия мы можем еще раз разложить функцию Ψ_s [см. (8.7)], чтобы получить числа заполнения двух пар k и k' . С точностью до членов $O(1/n)$, где n — полное число частиц, коэффициенты второго разложения совпадают с коэффициентами в первом разложении [104]¹⁾:

$$\Psi_s = v_k v_{k'} \varphi_{11} + v_k u_{k'} \varphi_{10} + u_k v_{k'} \varphi_{01} + u_k u_{k'} \varphi_{00}. \quad (9.1)$$

¹⁾ В результате более детального рассмотрения Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников [105] показали, что полученное на основе формулы (9.1) выражение для свободной энергии в случае эффективного гамильтониана асимптотически правильно для большой системы. — *Прим. авт. при корректуре.*

Разность энергий сверхпроводящего и нормального состояний равна:

$$W_s - W_n = 2 \sum_k \varepsilon_k v_k^2 - 2 \sum_{k < k'} \varepsilon_k + \sum_{k, k'} V_{kk'} \chi_k \chi_{k'} \quad (9.2)$$

Здесь $\chi_k \equiv u_k v_k$ и $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Коэффициенты u_k , v_k , а следовательно и энергия, могут быть определены вариационным методом. Удобно выразить их через параметр энергетической щели Δ_k и энергию квазичастиц $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}$ следующим образом:

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right); \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right). \quad (9.3)$$

Энергия основного состояния минимальна, когда Δ_k является решением интегрального уравнения:

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}}. \quad (9.4)$$

Для специального случая, когда $V_{kk'} = -V$ при $|\varepsilon_k| < \hbar\omega_c$, $\Delta_k = \text{const}$ при $|\varepsilon_k| < \hbar\omega_c$ и $\Delta_k = 0$ при $|\varepsilon_k| > \hbar\omega_c$, уравнение (9.4) принимает вид:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}. \quad (9.5)$$

Здесь плотность состояний заменена на $N(0)$ — ее значение на поверхности Ферми, т. е. при $\varepsilon_k = 0$. В пределе слабой связи имеем:

$$\Delta = 2\hbar\omega_c \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right). \quad (9.6)$$

Практически предельный случай слабой связи можно использовать без внесения существенной ошибки, если $N(0)V < 0,5$.

В этом пределе разность энергий равна:

$$W_s - W_n = -\frac{1}{2} N(0) \Delta(0)^2, \quad (9.7)$$

где $\Delta(0)$ — параметр, характеризующий энергетическую щель у поверхности Ферми. Поскольку взаимодействие $V_{kk'}$

по существу от массы изотопа не зависит, изотопический эффект возникает в силу того, что фононная энергия $\hbar\omega_c$, определяющая обрезание, изменяется пропорционально $M^{-1/2}$ (более общий вывод см. [106]).

Решение (9.1) построено так, чтобы наиболее полным образом использовать доступную часть фазового пространства и получить таким образом максимальное число парных взаимодействий. Вклад, вносимый состоянием пары k в энергию конденсации, равен (для $k > k_F$):

$$W_k = 2\varepsilon_k v_k^2 + 2 \sum_{k'} V_{kk'} \chi_k \chi_{k'} = \varepsilon_k - E_k. \quad (9.8)$$

Первый член отвечает блоховской энергии обеих частиц пары k , а второй — энергии взаимодействия, связанной с матричным элементом, приводящим к переходу в состояние пары k или выходу из этого состояния. Максимальный вклад вносится состояниями у поверхности Ферми, где $W_k = -\Delta$.

9.2. Кулоновское взаимодействие и эффекты, связанные с конечным временем жизни возбуждений

Остается еще нерешенным вопрос о роли матричного элемента $V_{kk'}$ экранированного кулоновского взаимодействия, отличного от нуля в области вплоть до довольно высоких энергий порядка E_F над фермиевским фоном. Боголюбов [13—17] предположил, что если не обрезать кулоновское взаимодействие при $\hbar\omega_c$, но допустить образование пар вплоть до области энергий порядка E_F , то можно получить сверхпроводящее состояние с более низкой энергией. Его результат аналогичен получаемому при обрезании у $\hbar\omega_c$, но с кулоновскими членами, уменьшенными на множитель порядка $\log(E_F/\hbar\omega_c)$, который обычно равен ~ 5 . Если бы эти вычисления были правильными, возникли бы два существенных затруднения: 1) показатель α для изотопического эффекта существенно отличался бы от 0,5, что противоречит экспериментальным данным; 2) эффект кулоновского взаимодействия снижается столь сильно, что почти все металлы оказались бы сверхпроводниками. Кроме того, хотя, конечно, речь идет лишь о приближенных

оценках, множитель, равный пяти, трудно согласовать с вычислениями Пайнса [97] и Моррела [98].

Один из авторов предположил, что обрезание при $\hbar\omega_c$ может определяться временем жизни квазичастичных возбуждений. Когда $|\epsilon_k|$ велико, возбуждение может распадаться столь быстро, что само понятие возбуждения становится уже недостаточно определенным. Математически это означает, что мнимая часть энергии при большом $|\epsilon_k|$ становится больше действительной части. Оценки, приведенные в § 13 (см. рис. 33), показывают, что такая ситуация имеет место при распаде, обусловленном фоновым рассеянием вблизи дебаевской энергии; это может дать желаемое обрезание. Однако существует, по-видимому, еще одна энергетическая область, простирающаяся, возможно, до $10\hbar\omega_c$, где возбуждения опять хорошо определены. При еще более высоких энергиях время жизни становится опять коротким за счет процесса, в котором частица рассеивается с возбуждением другой частицы из фермиевского фона. Таким образом, неясно, какой именно процесс определяет обрезание. Разумное значение для обрезания получалось бы, если потребовать, чтобы время жизни было достаточно для прохождения частицей расстояний порядка длины когерентности. Пока еще не имеется достаточно хорошего математического подтверждения этой гипотезы. Существенное затруднение связано с тем, что энергия сверхпроводящего перехода составляет очень малую часть как кулоновской корреляционной энергии, так и электронно-фононной собственной энергии.

Эффекты, связанные с конечностью времени жизни, по-видимому, играют важную роль в случае свинца и ртути, для которых энергия обрезания, вероятно, не сильно превышает ширину энергетической щели. Для этих двух элементов электронно-фононное взаимодействие является особенно сильным.

9.3. Спектр возбуждений

Энергию «единичного» квазичастичного возбуждения можно определить следующим образом. Если во всех конфигурациях одна из компонент пары, скажем $k\uparrow$, заполнена, а другая компонента $-k\downarrow$ незаполнена, то со-

стояние k в силу принципа Паули недоступно для переходов пар с равными и противоположными импульсами. Это приводит к вычитанию энергии W_k из энергии основного состояния, т. е. дает возрастание энергии на $E_k - \epsilon_k$ [см. (9.8)]. Энергия частицы $k\uparrow$ равна ϵ_k , так что суммарное возрастание энергии равно E_k . Этим, конечно, и объясняются принятые нами обозначения; E_k равно как раз энергии квазичастиц в сверхпроводящей фазе. Минимальное значение E_k равно $\Delta(0)$ — энергетическому параметру у поверхности Ферми.

Парное возбуждение в состоянии k описывается функцией (8.8), ортогональной основному состоянию. Эта функция описывает состояние, неблагоприятное с точки зрения связи: энергия при этом вместо W_k становится равной $\epsilon_k + E_k$. Энергия относительно основного состояния равна поэтому $2E_k$, т. е. энергии двух единичных возбуждений. При вычислении энергии с помощью эффективного гамильтониана нет необходимости различать между собой пары «единичных» возбуждений и истинные «парные» возбуждения. Так же как и в нормальном металле, возбужденную конфигурацию можно описать, задавая числа заполнения $\eta(k, \sigma)$, равные единице при наличии возбуждения и нулю при отсутствии возбуждения. Заполнение обоих состояний $k\uparrow$ и $-k\downarrow$ соответствует волновой функции возбужденной пары. Полная энергия возбуждения равна:

$$W_{\text{exc}} - W_s = \sum_{k, \sigma} \eta(k, \sigma) E_k. \quad (9.9)$$

Из вышеприведенных рассуждений становится ясным, почему в сверхпроводнике имеется энергетическая щель, а в нормальном металле ее нет. Разрушение пары, скажем, при переходе электрона из состояния $k\uparrow$ в другое, бесконечно близкое состояние $(k + \Delta k)\uparrow$, приводит к появлению единичных возбуждений $-k\downarrow$ и $(k + \Delta k)\uparrow$. Это исключает два состояния пар k и $k + \Delta k$ с точки зрения возможности виртуальных переходов и приводит к соответствующему увеличению энергии на $2|W_k|$. В нормальном металле энергия взаимодействия связана с возможностью виртуального перехода в состоянии над фермиевским фоном и в незаполненные состояния под фермиевским фоном. Перенос частицы из $k\uparrow$ в $(k + \Delta k)\uparrow$ означает, что

состояние $(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \uparrow$ больше недоступно, а состояние $\mathbf{k} \uparrow$ доступно для таких переходов. Поскольку в нормальном состоянии переходы $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$ не имеют преимуществ, разность энергий становится бесконечно малой, когда $\Delta\mathbf{k}$ приближается к нулю. Мы рассматриваем здесь только когерентные вклады в энергию, обусловленные рассеянием пар с противоположными спинами и импульсом. Влияние других членов, входящих в гамильтониан взаимодействия, как показывают оценки, невелико, если не говорить о связанном с ними возникновении коллективных возбуждений.

При повышении температуры от 0°K число возбуждений возрастает, а энергия образования пар и энергетическая щель уменьшаются. Поскольку квазичастичные состояния в k -пространстве могут заполняться независимо, выражение для энтропии имеет вид, обычный для частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака:

$$TS = -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \{f(\mathbf{k}, \sigma) \ln f(\mathbf{k}, \sigma) - [1 - f(\mathbf{k}, \sigma)] \ln [1 - f(\mathbf{k}, \sigma)]\}. \quad (9.10)$$

Здесь $\beta = k_B T$ и $f(\mathbf{k}, \sigma)$ — средние числа заполнения состояний в окрестности (\mathbf{k}, σ) . Параметр энергетической щели определяется теперь таким образом, чтобы свободная энергия, равная

$$F = W - TS = 2 \sum_{\mathbf{k}} |\epsilon_{\mathbf{k}}| [f_{\mathbf{k}} + (1 - 2f_{\mathbf{k}}) h_{\mathbf{k}}(|\epsilon_{\mathbf{k}}|)] + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \chi_{\mathbf{k}'} (1 - 2f_{\mathbf{k}'}) - TS, \quad (9.11)$$

была минимальна. Минимизируя F по отношению к $h_{\mathbf{k}}$, находим совокупность квазичастиц, которая лучше всего описывает состояния, возбужденные при температуре T . Это приводит к интегральному уравнению вида:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \operatorname{th} \frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T}. \quad (9.12)$$

Максимальное значение T , для которого имеется отличное от нуля решение для Δ , есть критическая температура T_c .

Как было указано Купером [107], форма интегрального уравнения такова, что при наличии энергетической

щели на части поверхности Ферми щель должна существовать повсюду, за исключением, может быть, изолированных точек или линий¹⁾. Чтобы убедиться в этом, предположим противоположное, т. е. что параметр $\Delta_{\mathbf{k}}$ повсюду равен нулю, за исключением области R в k -пространстве. Тогда для точки \mathbf{k} , не лежащей в области R , должно выполняться условие:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \operatorname{th} \frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T} = 0. \quad (9.13)$$

Но если $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ не равно нулю для всех \mathbf{k}' , нет никаких оснований считать, что сумма по \mathbf{k}' равна нулю, за исключением, может быть, случайного обращения в нуль в изолированных точках. Для общего взаимодействия параметр $\Delta_{\mathbf{k}}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения²⁾. Энергетическая щель, однако, равна $2|\Delta_{\mathbf{k}}|$. На рис. 6 энергетическая щель Δ изображена как функция температуры для упрощенной модели, в которой $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V$ при $|\epsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_c$. В пределе слабой связи критическая температура T_c дается равенством:

$$k_B T_c = 1,14 \hbar\omega_c \exp \left[- \frac{1}{N(0)V} \right]. \quad (9.14)$$

В большинстве случаев применения теории это равенство используется для эмпирического определения средней константы взаимодействия. Энергетическая щель при $T=0$ может быть выражена через T_c .

$$2\Delta(0) = 3,52 k_B T_c. \quad (9.15)$$

Для упрощенной модели с постоянным взаимодействием были проведены подробные вычисления свободной энергии и теплоемкости как функций температуры. Результаты будут обсуждены и сравнены с экспериментом в следующем параграфе.

¹⁾ В работе [266*] было показано, что уравнение типа (9.12) может быть сведено к однородному интегральному уравнению типа Фредгольма. Щель $\Delta_{\mathbf{k}}$ пропорциональна решению этого уравнения для основного собственного значения и поэтому не имеет нулей. — *Прим. ред.*

²⁾ Величина $\Delta_{\mathbf{k}}$ может быть и комплексной [168]. — *Прим. ред.*

Теория приводит к переходу второго рода со скачком теплоемкости, но без выделения скрытого тепла при T_c . Причиной отсутствия λ -точки с логарифмической особенностью (как это наблюдается в He II и во многих других случаях, связанных с появлением упорядоченности) является тот факт, что при сверхпроводящем переходе нет ничего соответствующего ближнему порядку. Большая

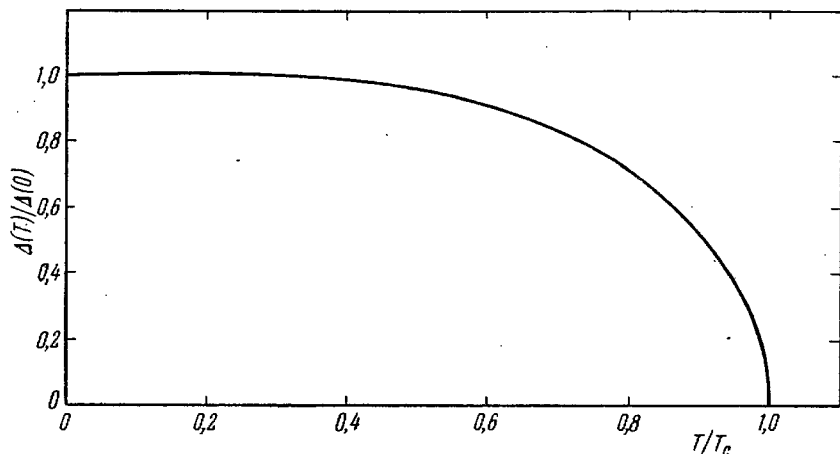


Рис. 6. Изменение параметра энергетической щели Δ с температурой вычисленное теоретически.

длина когерентности мешает образованию маленьких сверхпроводящих областей с размерами порядка атомных (речь идет о приближении к T_c из области более высоких температур). Вентцель [108] привел соображения в пользу того, что разность между членами собственной энергии для нормального и сверхпроводящего состояний, которая не учитывалась при нашем рассмотрении, может привести к появлению весьма небольшой скрытой теплоты перехода¹⁾.

¹⁾ Имеются все основания полагать, что фазовый переход в сверхпроводниках в принципиальном отношении вполне подобен другим переходам 2-го рода (например, λ -переходу в He⁴). Отличие между сверхпроводящим и другими переходами 2-го рода является количественным и связано с относительно очень малыми флуктуациями «концентрации сверхпроводящих электронов» в сверхпроводниках [241*] — Прим. ред.

§ 10. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Ранние измерения электронной теплоемкости в сверхпроводящем состоянии c_{es} дают в согласии с двухжидкостной моделью Гортера—Казимира [51] зависимость $c_{es} \sim T^3$.

Отклонения от закона T^3 впервые наблюдались Браунном, Земанским и Бурзом [99] в опытах с ниобием. Эти авторы обнаружили грубое согласие с моделью Коппе [3], которую можно интерпретировать как модель с энергетической щелью [100]. Поскольку одной из основных черт современной теории является наличие энергетической щели в спектре квазичастичных возбуждений, эта теория предсказывает экспоненциальное понижение электронной теплоемкости при $T \rightarrow 0$. Вычисления, основанные на выражениях (9.11) для свободной энергии, дают:

$$c_{es} = 4k_B \beta^2 \sum_{k > k_F} f_k (1 - f_k) \left[E_k^2 + \frac{\beta}{2} \frac{d\Delta_k^2}{d\beta} \right]. \quad (10.1)$$

Здесь $\beta \equiv 1/k_B T$ и f_k — функция Ферми для квазичастиц. В случае, когда $V_{kk'} = -V$ при $|\epsilon_k| < \hbar\omega_c$ и $|\epsilon_{k'}| < \hbar\omega_c$ и $V_{kk'} = 0$ для больших значений $|\epsilon_k|$ и $|\epsilon_{k'}|$, величина $\Delta_k = \Delta = \text{const}$ и определяется из уравнения:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{d\epsilon}{V\epsilon_k^2 + \Delta^2} \text{th} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \right) \quad (10.2)$$

при $|\epsilon_k| < \hbar\omega_c$; вне этой области $\Delta_k = 0$. При $\beta\Delta \gg 1$ теплоемкость c_{es} может быть выражена в виде:

$$\frac{c_{es}}{\gamma T_c} = \frac{3}{2\pi^2} \left(\frac{\Delta}{k_B T_c} \right)^3 \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 [3K_1(\beta\Delta) + K_3(\beta\Delta)] \approx \begin{cases} 8,5 \exp\left(-1,44 \frac{T_c}{T}\right), & 2,5 < \frac{T_c}{T} < 6, \\ 25 \exp\left(-1,62 \frac{T_c}{T}\right), & 7 < \frac{T_c}{T} < 11. \end{cases} \quad (10.3)$$

При сверхнизких температурах коэффициент у экспоненты стремится к 1,76.

Измерения теплоемкости, проведенные Кораком и др. [109] на ванадии, а также Кораком и Саттервайтом [110]

на олове, дали экспоненциальную зависимость теплоемкости при $T_c/T > 1/3$:

$$\frac{c_{es}}{\gamma T_c} = a \exp\left[-\frac{bT_c}{T}\right]. \quad (10.4)$$

Здесь $a = 9,17$ и $b = 1,50$, что находится в хорошем согласии с теоретической кривой для этой области. Гудман [111] продолжил измерения на ванадии и олове до значений $T_c/T > 8$. Он нашел, что данные для ванадия согласуются с законом (10.4) вплоть до сверхнизких температур, в то время как для олова кривая зависимости $\log c_{es}/\gamma T_c$ от T_c/T загибается вверх при $T_c/T > 4$. Результаты недавних экспериментов Чжоу, Уайта и Джонстона [112], проведенных на ниобии, не противоречат формуле (10.4) с параметрами, определенными из данных для ванадия, хотя для более низких температур их экспериментальные точки также ложатся выше кривой (10.4). Гудман [111], Заварицкий [113] и Филлипс [114] (см. также [115]) независимо провели измерения теплоемкости алюминия. Данные Заварицкого и Филлипса близки к экспоненциальному закону до температур $T_c/T = 6$ с значением коэффициента в (10.4), несколько меньшим теоретического. Данные Гудмана определенно указывают на загиб кривой вверх, начиная с $T_c/T = 4$ (рис. 7). Измерения, проведенные на цинке Филлипсом, также дают загиб кривой вверх, хотя аналогичные измерения Заварицкого опять совпадают с экспонентой. Было предположено, что этот загиб кривой вверх обусловлен либо состояниями, расположенными в энергетической щели, например коллективными состояниями, либо анизотропией энергетической щели [115а]. Вычисления показывают, что плотность коллективных состояний слишком мала, чтобы объяснить этот эффект. Вторая возможность, по-видимому, не лишена оснований, поскольку Морзе, Олсен и Гавенда [116] получили доказательства анизотропии энергетической щели у олова, для которого кривая теплоемкости загибается вверх при $T_c/T > 4$ ¹⁾. Измерения критического магнитного поля как функции температуры в комбинации с термодинамическим

¹⁾ Результаты работы [267*] по измерению теплопроводности в Ga, In и Cd дают для величины анизотропии щели оценку $\sim 30-40\%$. — Прим. ред.

соотношением

$$G_s - G_n = -\frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (10.5)$$

дают точный метод определения c_{es} при низкой температуре. Данные Максвелла и Лутса [117], полученные на

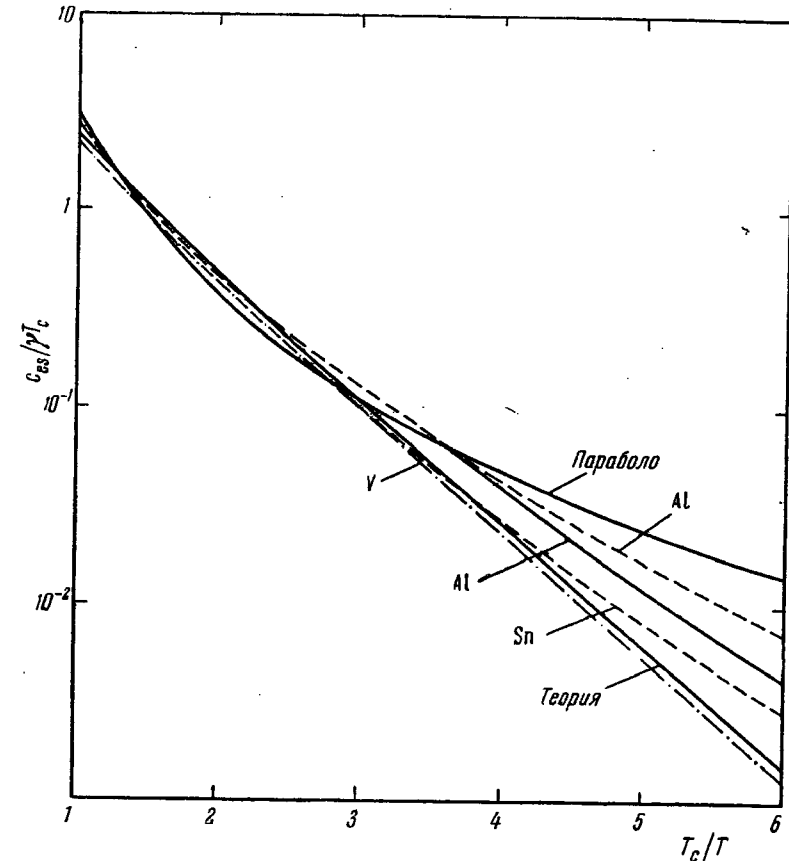


Рис. 7. Теоретическая кривая для электронной теплоемкости и эмпирические данные, полученные для некоторых сверхпроводников со слабой связью.

Сплошная кривая для Al соответствует данным Заварицкого [113] и Филлипса [114]; пунктирная кривая для Al — данным Гудмана [111].

таллии, индии и олове, а также недавние результаты для свинца, полученные Мапотером и др. [118, 119], даны

на рис. 8, где приведены отклонения от закона $1 - (T/T_c)^2$, находящегося в согласии с моделью Гортера — Казимира.

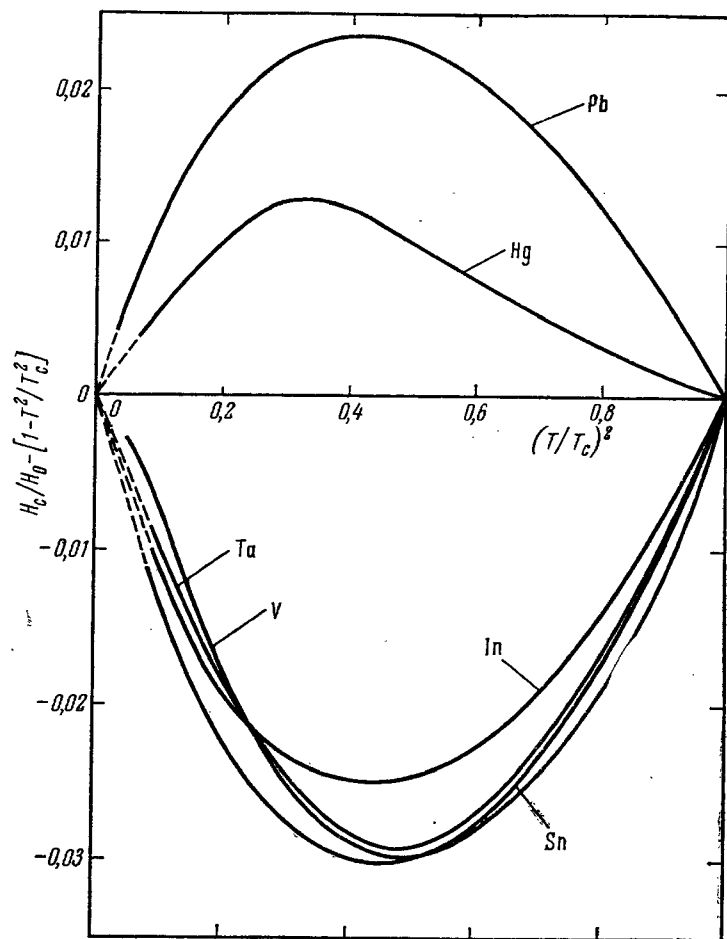


Рис. 8. Отклонение критического магнитного поля от закона $H_c/H_0 = 1 - (T/T_c)^2$, согласующегося с двухжидкостной моделью Гортера — Казимира.

Отрицательные отклонения для олова, ванадия и др. отражают экспоненциальное падение электронной теплоемкости. Положительные отклонения для ртути и свинца

указывают на то, что сверхпроводники с отношениями T_c/θ_D нужно рассматривать отдельно. Как мы увидим далее, представляется вероятным, что эти металлы нужно рассматривать на основе теории промежуточной или сильной связи, в то время как приближение слабой связи, по-видимому, хорошо описывает остальные сверхпроводники.

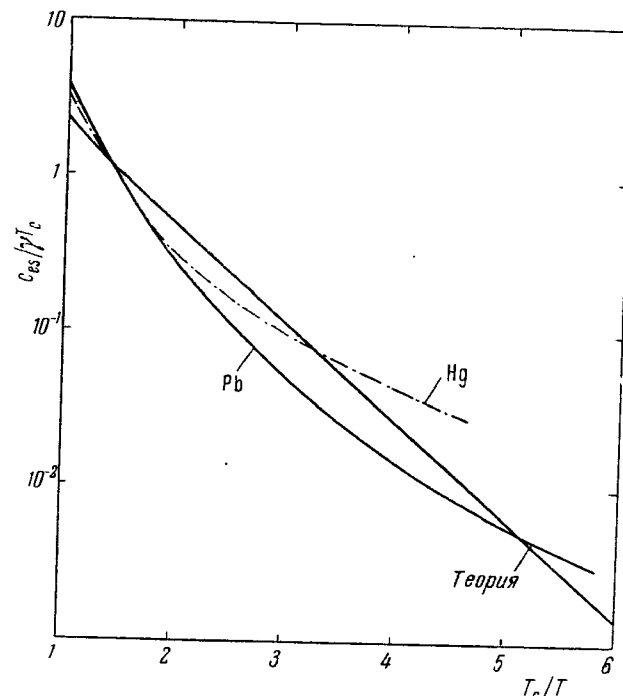


Рис. 9. Кривые электронной теплоемкости в сверхпроводящем состоянии для элементов с «промежуточной» связью и теоретическая кривая для случая слабой связи.

Кривые электронной теплоемкости Pb и Hg, полученные из магнитных измерений, изображены на рис. 9.

Таким образом, на основе данных, полученных из тепловых и магнитных измерений, можно заключить, что экспоненциальное изменение c_{es} с температурой ниже T_c — общее свойство сверхпроводников и является следствием наличия энергетической щели в спектре элементарных

возбуждений. Уменьшение скорости изменения c_{es} ниже $T_c/T=4$ может быть связано либо с существованием относительно небольшого числа состояний с меньшей энергетической щелью, либо, что более вероятно, с анизотропией энергетической щели.

Скачок теплоемкости, соответствующий фазовому переходу второго рода при T_c , согласно теории [12] равен:

$$\frac{c_{es} - \gamma T_c}{\gamma T_c} \Big|_{T_c} = 1,43. \quad (10.6)$$

В модели Гортера — Казимира это отношение равно 2,00, а в модели Коппе [120] — 1,71. Эмпирические значения отношения $c_{es}/\gamma T_c$ приведены в табл. III¹⁾.

Таблица III

Отношение электронных теплоемкостей некоторых элементов в сверхпроводящем и нормальном состояниях (при T_c)

Элемент	$c_{es}(T_c)/\gamma T_c$	Элемент	$c_{es}(T_c)/\gamma T_c$
Pb	3,65	Ta	2,58
Hg	3,18	V	2,57
Nb	3,07	Zn	2,25
Sn	2,60	Tl	2,15
Al	2,60	Теория	2,43

§ 11. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА И ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ

11.1. Теория

Для многих применений теории необходимо вычислить матричные элементы между возбужденными состояниями системы для оператора взаимодействия, выраженного через

¹⁾ Согласно работе [266*] теплоемкость анизотропного сверхпроводника как функция приведенной температуры при низких температурах больше, чем предсказываемая на основе изотропной модели. Там же показано, что изотропная теория дает завышенное значение для скачка теплоемкости при T_c (ср. табл. III). — *Прим. ред.*

одночастичные операторы в форме:

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}, \sigma, \mathbf{k}', \sigma'} B_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}'\sigma'}^* c_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (11.1)$$

Здесь $B_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'}$ — матричный элемент для рассеяния из $\mathbf{k}\sigma$ в $\mathbf{k}'\sigma'$, а $c_{\mathbf{k}\sigma}^*$ и $c_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастичных возбуждений в нормальном состоянии. В блоховском приближении волновые функции отдельной частицы $\varphi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{x})$ могут быть определены для самосогласованного поля, которое мало изменяется при небольших возбуждениях системы. В этом случае

$$B_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'} = \int \varphi_{\mathbf{k}'\sigma'}^*(\mathbf{x}) H_1(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (11.2)$$

Здесь величина \mathbf{x} может быть определена так, чтобы она включала спиновую переменную. В более общем виде матричный элемент определяется для многочастичных функций нормального состояния, учитывающих эффекты корреляции и изменяющихся при переходе квазичастицы из $\mathbf{k}\sigma$ в $\mathbf{k}'\sigma'$. Другими словами, в начальном состоянии $\mathbf{k}\sigma$ заполнено, а $\mathbf{k}'\sigma'$ свободно; в конечном состоянии $\mathbf{k}'\sigma'$ заполнено, а $\mathbf{k}\sigma$ свободно. Заполнение других квазичастичных состояний для начального и конечного состояний системы одинаково. Матричный элемент $B_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'}$ может также слабо зависеть от конфигурации других частиц, но для небольших возбуждений системы этой зависимостью обычно можно пренебречь. Матричный элемент гамильтониана H_1 между возбужденными состояниями сверхпроводящей фазы может быть вычислен непосредственно из соответствующих матричных элементов для нормального состояния.

Сильное различие между сверхпроводниками и нормальными металлами вызвано эффектами когерентности, связанными с волновыми функциями пар [12]. В нормальном состоянии рассеяние из $\mathbf{k}\sigma$ в $\mathbf{k}'\sigma'$ совершенно не зависит от рассеяния из $-\mathbf{k}'$, $-\sigma'$ в $-\mathbf{k}$, $-\sigma$, так же как и от всех других переходов. Вероятность рассеяния из $\mathbf{k}\sigma$ в $\mathbf{k}'\sigma'$ пропорциональна $|B_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'}|^2$, а вероятность рассеяния из $-\mathbf{k}'$, $-\sigma'$ в $-\mathbf{k}$, $-\sigma$ пропорциональна $|B_{-\mathbf{k}', -\sigma', -\mathbf{k} - \sigma}|^2$. В сверхпроводнике, в силу характера волновых функций пар, оба указанных вклада когерентны,

и до возведения в квадрат матричные элементы нужно сложить. Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, рассмотрим матричный элемент оператора независимого от спина взаимодействия между двумя возбужденными состояниями сверхпроводника. Предположим, что в начальном состоянии $k \uparrow$ заполнено одной частицей, а пара k' или находится в своем основном состоянии, или возбуждена (см. § 9). В любом случае начальное состояние есть линейная комбинация нормальных конфигураций, в каждой из которых $k \uparrow$ заполнено, а $-k \downarrow$ свободно. В некоторых конфигурациях (см. рис. 10, *a*)

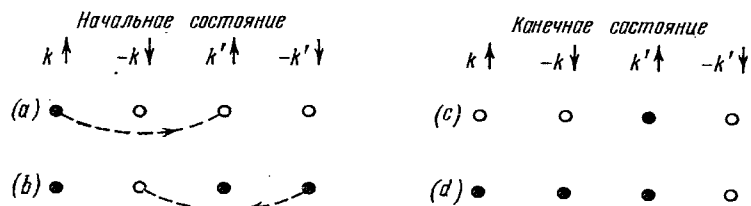


Рис. 10. Конфигурации, соответствующие случаю, когда квазичастица переходит из заполненного состояния $k \uparrow$ в состояние $k' \uparrow$.

состояние пары $k' \equiv (k' \uparrow, -k' \downarrow)$ незаполнено, в других (рис. 10, *b*) оно заполнено. Мы предполагали, что в конечном состоянии пара k находится или в своем основном состоянии, или возбуждена и что $k' \uparrow$ заполнено одной частицей. В конфигурации (*c*) на рис. 10 пара k незаполнена; в конфигурации (*d*) пара заполнена.

Неравные нулю матричные элементы гамильтониана H_1 между двумя конфигурациями (*a*) и (*c*) (что соответствует рассеянию из $k \uparrow$ в $k' \uparrow$) должны существовать, если заполнение всех других состояний одинаково. Однако существует также неравный нулю матричный элемент перехода между начальным и конечным состояниями, соответствующими рассеянию частицы из $-k' \downarrow$ в конфигурации (*b*) в $-k \downarrow$ конфигурации (*d*); в этом случае все остальные состояния также должны иметь одинаковые числа заполнения. Полное число частиц в конфигурациях (*a*) и (*c*) должно быть таким же, как в конфигурациях (*b*) и (*d*); поэтому в (*a*) и (*c*) в состояниях, не показанных на рис. 10,

находится на две частицы больше, чем в (*b*) и (*d*). Когда общее число частиц велико, это различие оказывает пренебрежимо малое влияние на вес, с которым различные конфигурации нормальных состояний входят в сумму, представляющую собой волновую функцию сверхпроводящего состояния.

В зависимости от природы взаимодействия два вклада (*a*) \rightarrow (*c*) и (*b*) \rightarrow (*d*) могут складываться в фазе или в противофазе. Вообще говоря, B имеет одну и ту же величину как для $k \uparrow \rightarrow k' \uparrow$, так и для $-k' \downarrow \rightarrow -k \downarrow$, поскольку разности волновых векторов одинаковы; однако знак B может быть для обоих случаев переходов различен. Оба случая можно записать в виде:

$$B_{k'\sigma', k\sigma} = +\theta_{\sigma\sigma'} B_{-k, -\sigma, -k', -\sigma'} \quad (\text{случай I})$$

$$B_{k'\sigma', k\sigma} = -\theta_{\sigma\sigma'} B_{-k, -\sigma, -k', -\sigma'} \quad (\text{случай II})$$

где $\theta_{\sigma\sigma'} = +1$ для $\sigma = \sigma'$ и $\theta_{\sigma\sigma'} = -1$ для $\sigma = -\sigma'$.

Первый случай применим к обычному потенциальному взаимодействию типа, определяющего поглощение продольных ультразвуковых волн. Второй случай относится к электромагнитному взаимодействию волн и к приводящему к сверхтонкой структуре взаимодействию, учитываемому при вычислении времени релаксации при ядерном магнитном резонансе.

Факторы когерентности можно наиболее просто вычислить с помощью квазичастичных операторов, введенных Боголюбовым и Валатиным [13—22]. Как «одиночные», так и «парные» возбуждения сверхпроводника могут быть выражены через операторы:

$$\gamma_{k\uparrow}^* = u_k c_{k\uparrow}^* - v_k c_{-k\downarrow} \quad (11.3)$$

$$\gamma_{-k\downarrow}^* = u_k c_{-k\downarrow}^* + v_k c_{k\uparrow} \quad (11.4)$$

Здесь так же как в § 9 $u_k = \sqrt{1 - h_k}$ и $v_k = \sqrt{h_k}$. Одиночное возбуждение в (k, σ) определяется как $\gamma_{k\sigma}^* \Psi_0$, а возбужденная пара в k как $\gamma_{k\uparrow}^* \gamma_{-k\downarrow}^* \Psi_0$. Эти выражения соответствуют «одиночным» и «парным» возбуждениям, рассматриваемым в § 9. Операторы γ подчиняются обычным коммутационным соотношениям статистики Ферми — Дирака. В нормальном состоянии ($\Delta = 0$) $\gamma_{k\uparrow}^*$ порождает

частицу в $k \uparrow$, если k расположено над поверхностью Ферми, и дырку в $-k \downarrow$, если k находится под поверхностью Ферми. Сверхпроводящее основное состояние может быть определено как вакуум для квазичастичных возбуждений:

$$\gamma_{k \uparrow} \Psi_0 = \gamma_{-k \downarrow} \Psi_0 = 0. \quad (11.5)$$

При таком определении Ψ_0 можно рассматривать как смесь состояний с различным полным числом частиц, имеющую резкий максимум вблизи среднего числа частиц n . Это упрощает математический формализм и не создает никаких трудностей для систем с большим числом частиц. В сказанном можно убедиться следующим образом. Матричные элементы оператора H_1 , сохраняющего число частиц (но не квазичастиц), для перехода между состояниями Ψ_α могут быть вычислены с помощью разложения Ψ_α на компоненты $\Psi_{an'}$, каждая из которых отвечает фиксированному числу частиц:

$$\Psi_\alpha = \sum_{n'} A_{n'} \Psi_{an'}. \quad (11.6)$$

Здесь $(\Psi_{an'}, \Psi_{an'}) = 1$. Поскольку H_1 сохраняет число частиц, имеем:

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta H_1 \Psi_\alpha) &= \sum_{n', n''} A_{n'}^* A_{n''} (\Psi_{\beta n'} H_1 \Psi_{\alpha n''}) = \\ &= \sum_{n'} |A_{n'}|^2 (\Psi_{\beta n'} H_1 \Psi_{\alpha n'}). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Как и в случае канонического распределения, веса $|A_{n'}|^2$ имеют резкие максимумы, расположенные вблизи среднего числа частиц n . Поскольку матричный элемент для n -частиц медленно изменяется с n , полный матричный элемент оператора H_1 между функциями Ψ_α с точностью до величин порядка $1/n$ равен соответствующему матричному элементу перехода между состояниями с n -частицами.

В терминах γ -операторов сумма двух когерентных вкладов в матричный элемент (опуская общий множитель $B_{k'\sigma', k\sigma}$) равна:

$$\begin{aligned} c_{k'\sigma'}^* c_{k\sigma} \pm \theta_{\sigma\sigma'} c_{-k-\sigma}^* c_{-k'-\sigma'} &= \\ &= (u_k u_k \mp v_k v_k) (\gamma_{k'\sigma'}^* \gamma_{k\sigma} \pm \theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k-\sigma}^* \gamma_{-k'-\sigma'}) + \\ &+ (v_k u_k \pm u_k v_k) (\gamma_{k'\sigma'}^* \gamma_{-k-\sigma}^* \pm \theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k'-\sigma'} \gamma_{k\sigma}). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Первый член правой части соответствует рассеянию квазичастиц, а второй — образованию или уничтожению двух квазичастиц. Например, матричный элемент для рассеяния квазичастицы в сверхпроводящем состоянии из $k\sigma$ в $k'\sigma'$ есть $B_{k'\sigma', k\sigma} (u_k u_k \mp v_k v_k)$. Верхний знак « \mp » соответствует случаю I (см. выше), а нижний знак « \pm » — случаю II. В нормальном металле образование пары возбуждений соответствует возбуждению электрона из состояния под поверхностью Ферми в состояние над поверхностью Ферми, что сопровождается образованием дырки под поверхностью Ферми и появлением возбужденной частицы над нею.

Вероятность перехода из состояния с энергией E в состояние с энергией $E + \hbar\omega$, вызванного взаимодействием с полем угловой частоты ω , пропорциональна квадрату матричного элемента и плотности конечных состояний $N(E + \hbar\omega)$. Чтобы получить суммарную скорость поглощения энергии, нужно взять разность между непосредственным поглощением и индуцированной эмиссией, а также провести суммирование по начальным состояниям. Отношение α_s/α_n поглощения в сверхпроводнике к поглощению в нормальной фазе можно получить, если принять, что нормальные матричные элементы $B_{k'\sigma', k\sigma}$ не зависят от разности энергий между начальным и конечным состояниями (хотя они могут зависеть от угла между k' и k). Это приближение должно быть очень хорошим, поскольку рассматриваемые разности энергии обычно очень малы по сравнению с энергией Ферми. Результат можно наиболее просто выразить, если отказаться от нашего обычного обозначения и считать, что E имеет одинаковый знак с ϵ , т. е. положительно над поверхностью Ферми и отрицательно под поверхностью Ферми.

Тогда имеем [12]:

$$\begin{aligned} \alpha_s \sim \int \left(1 \mp \frac{\Delta^2}{E(E + \hbar\omega)} \right) (f(E) - f(E + \hbar\omega)) N_s(E) \times \\ \times N_s(E + \hbar\omega) dE, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где $f(E)$ — обычная функция распределения Ферми, а $N_s(E)$ — плотность энергетических состояний в сверх-

проводнике, равная

$$N_s(E) = N_n \frac{d\varepsilon}{dE} = N(0) \frac{E}{\varepsilon} = N(0) \frac{E}{[E^2 - \Delta^2]^{1/2}}. \quad (11.10)$$

Мы можем предположить, что N_n не зависит от энергии и равно $N(0)$. Заметим, что N_s становится бесконечной

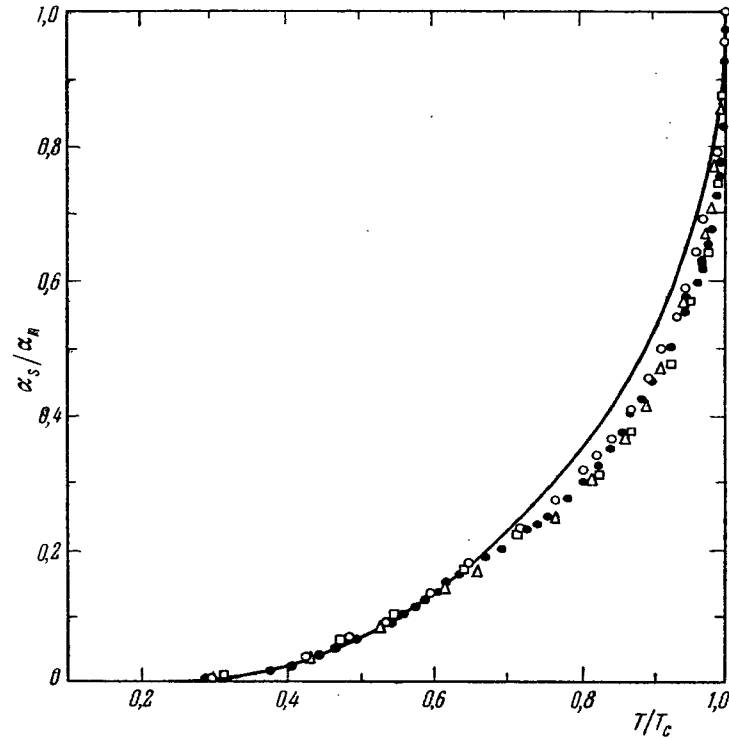


Рис. 11. Отношение коэффициентов затухания продольных ультразвуковых волн в сверхпроводящем и в нормальном состояниях и теоретическая кривая для случая I в пределе $\hbar\omega \ll k_B T_c$.

Экспериментальные точки соответствуют: \circ — Sn, 33,5 МГц; \bullet — Sn, 54,0 МГц; \square — In „A“, 28,5 МГц; \triangle — In „B“, 35,2 МГц. Сплошная линия — теоретическая кривая.

на поверхности Ферми, т. е. при $\varepsilon = 0$ или $E = \pm \Delta$. Тогда отношение поглощения в сверхпроводящем и

нормальном состояниях равно:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int \frac{[E(E + \hbar\omega) \mp \Delta^2] [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE}{[(E^2 - \Delta^2) \{(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2\}]^{1/2}}. \quad (11.11)$$

Верхний знак соответствует случаю I, отвечающему вычитанию матричных элементов при $\hbar\omega < 2\Delta$; нижний знак соответствует случаю II. Разница особенно заметна при

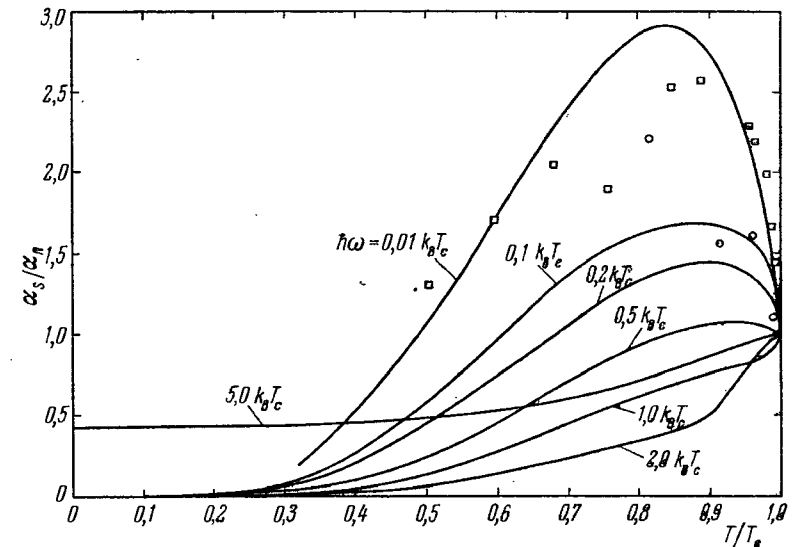


Рис. 12. Отношение коэффициентов поглощения в сверхпроводящей и нормальной фазах для случая II.

Экспериментальные точки — величины, обратные временам релаксации спина в алюминии; ошибки измерения не приводятся. Кривая для $\hbar\omega = 0,01 k_B T_c$ вычислена Гебелем [37] для уширенных уровней; другие кривые получены Миллером [149] для переноса энергии, равного $\hbar\omega$. Экспериментальные данные получены: \square — Редфилдом и Андерсоном [38]; \circ — Гебелем и Шлихтером [36].

очень низких частотах $\hbar\omega \ll \Delta$. В случае I (затухание ультразвуковых волн) отношение α_s/α_n падает при температурах ниже T_c с бесконечной производной в самой T_c . В пределе $\hbar\omega \rightarrow 0$ получаем:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2f(\Delta) = \frac{2}{1 + \exp\left[\frac{\Delta(T)}{k_B T}\right]}. \quad (11.12)$$

Таблица IV

Термодинамические функции [148] ($c_0 = c_{en}(T_c) = \gamma T_c$)

$\frac{T}{T_c}$	$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$	$\frac{S}{c_0}$	$\frac{-F}{c_0 T_c}$	$\frac{H_0^2}{8\pi c_0 T_c}$	$1 - \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}$	$\frac{c_{es}}{c_0}$
1,00	0,0000	1,0000	0,5000	0,0000	1,0000	2,4261
0,98	0,2436	0,9519	0,4805	0,0003	0,9601	2,3314
0,96	0,3416	0,9048	0,4619	0,0011	0,9206	2,2378
0,94	0,4148	0,8587	0,4443	0,0025	0,8814	2,1454
0,92	0,4749	0,8136	0,4276	0,0044	0,8425	2,0541
0,90	0,5263	0,7694	0,4117	0,0067	0,8041	1,9639
0,88	0,5715	0,7263	0,3968	0,0096	0,7660	1,8750
0,86	0,6117	0,6842	0,3827	0,0129	0,7283	1,7874
0,84	0,6480	0,6432	0,3694	0,0166	0,6911	1,7010
0,82	0,6810	0,6032	0,3569	0,0207	0,6544	1,6159
0,80	0,7110	0,5643	0,3453	0,0253	0,6182	1,5321
0,78	0,7386	0,5266	0,3344	0,0302	0,5826	1,4498
0,76	0,7640	0,4900	0,3242	0,0354	0,5475	1,3689
0,74	0,7874	0,4546	0,3148	0,0410	0,5131	1,2894
0,72	0,8089	0,4203	0,3060	0,0468	0,4793	1,2115
0,70	0,8288	0,3873	0,2979	0,0529	0,4463	1,1352
0,68	0,8471	0,3554	0,2905	0,0593	0,4140	1,0605
0,66	0,8640	0,3249	0,2837	0,0659	0,3825	0,9874
0,64	0,8796	0,2956	0,2775	0,0727	0,3518	0,9162
0,62	0,8939	0,2676	0,2719	0,0797	0,3221	0,8467
0,60	0,9070	0,2410	0,2668	0,0868	0,2933	0,7792
0,58	0,9190	0,2157	0,2622	0,0940	0,2656	0,7136
0,56	0,9299	0,1918	0,2582	0,1014	0,2389	0,6501
0,54	0,9399	0,1693	0,2545	0,1087	0,2133	0,5888
0,52	0,9488	0,1482	0,2514	0,1162	0,1890	0,5298
0,50	0,9569	0,1285	0,2486	0,1236	0,1660	0,4731
0,48	0,9641	0,1103	0,2462	0,1310	0,1442	0,4190
0,46	0,9704	0,0937	0,2442	0,1384	0,1239	0,3675
0,44	0,9760	0,0784	0,2425	0,1457	0,1055	0,3188
0,42	0,9809	0,0646	0,2410	0,1528	0,0878	0,2731
0,40	0,9850	0,0524	0,2399	0,1599	0,0721	0,2305
0,38	0,9885	0,0416	0,2389	0,1667	0,0580	0,1913
0,36	0,9915	0,0322	0,2382	0,1734	0,0456	0,1555
0,34	0,9938	0,0243	0,2376	0,1798	0,0348	0,1233
0,32	0,9957	0,0177	0,2372	0,1860	0,0257	0,0950
0,30	0,9971	0,0124	0,2369	0,1919	0,0182	0,0706
0,28	0,9982	0,0082	0,2367	0,1975	0,0123	0,0502
0,26	0,9989	0,0051	0,2366	0,2028	0,0078	0,0338
0,24	0,9994	0,0030	0,2365	0,2077	0,0046	0,0212
0,22	0,9997	0,0016	0,2365	0,2123	0,0024	0,0121
0,20	0,9999	0,0007	0,2364	0,2164	0,0011	0,0061
0,18	1,0000	0,0003	0,2364	0,2202	0,0005	0,0027
0,16	1,0000	0,0001	0,2364	0,2236	0,0001	0,0009
0,14	1,0000	0,0000	0,2364	0,2266	0,0000	0,0002

Эта функция (вычисленная с помощью значений для $\Delta(T)$, приведенных в табл. IV), изображена на рис. 11. В случае II поглощение при низких частотах быстро возрастает с падением температуры ниже T_c (рис. 12). Логарифмическая расходимость интеграла в пределе $\hbar\omega \rightarrow 0$ связана с особенностью плотности состояний N_s . С повышением

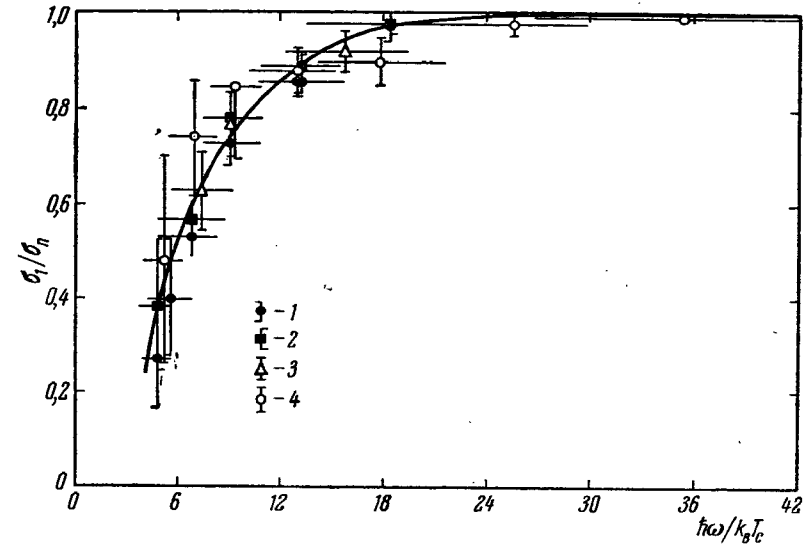


Рис. 13. Поглощение за пределами щели для случая II при $T=0^\circ \text{K}$, выраженное в виде отношения проводимостей в сверхпроводящей и нормальной фазах.

Экспериментальные точки взяты из ранних измерений Гловера и Тинкхана [28] по прохождению электромагнитного излучения сквозь тонкие пленки; они соответствуют: 1—Pb, $R_n=192 \text{ ом/см}^2$; $T/T_c=0,30 \pm 0,05$; 2—Pb, $R_n=111 \text{ ом/см}^2$; $T/T_c=0,30 \pm 0,05$; 3—Pb, $R_n=36 \text{ ом/см}^2$; $T/T_c=0,30 \pm 0,10$; 4—Sn, $R_n=174 \text{ ом/см}^2$; $T/T_c=0,58 \pm 0,10$.

частоты максимум поглощения понижается, пока частота не достигнет значения, соответствующего энергии $0,5k_B T_c$. Тогда падение поглощения начинается с T_c . При низких частотах поглощение вызывается только частицами, уже находящимися в возбужденном состоянии. При более высоких частотах возникает дополнительное поглощение, связанное с возбуждением частиц при переходе через щель, которое происходит при $\hbar\omega > 2\Delta(T)$. Щель уменьшается

с повышением температуры; перегиб в кривой поглощения наступает при температуре, для которой $2\Delta(T) \simeq \hbar\omega$.

При сверхнизких температурах, когда лишь небольшое число частиц возбуждено в результате теплового движения, поглощение очень мало до тех пор, пока частота не превысит значения $\omega_g = 2\Delta(0)/\hbar$, соответствующего щели при $T = 0^\circ\text{K}$. На рис. 13 показано, как с возрастанием ω в области $\omega > \omega_g$ поглощение быстро увеличивается до значения поглощения в нормальном металле. Такая картина наблюдалась при прохождении электромагнитного излучения через тонкие пленки [28—31]. Перейдем теперь к обсуждению некоторых экспериментальных данных, связанных с эффектами когерентности.

11.2. Затухание ультразвука

Основным источником затухания ультразвуковых волн в металлах при сверхнизких температурах служит взаимодействие с электронами проводимости. Рассмотрим сначала продольные волны. На основе ранних измерений поглощения в сверхпроводниках, произведенных Бёммелем [121] и Макинномом [122], было выяснено, что быстрое падение затухания с понижением T ниже T_c связано с уменьшением числа «нормальных» электронов. Однако наблюдаемое падение затухания оказалось столь резким, что его было трудно согласовать с другими оценками уменьшения плотности нормальной компоненты ρ_n , основанными на двухжидкостной модели. Например, теория Гортера — Казимира [51] предсказывает, что $\rho_n/\rho \propto (T/T_c)^4$.

В современной теории в результате интерференционного эффекта, соответствующего случаю I, влияние большой плотности состояний у края щели не сказывается. Поэтому остается только фермиевский фактор (11.12). Быстрое падение затухания отражает резкое увеличение щели при температурах ниже T_c . Простая теория, приводящая к выражению (11.12), применима, когда $ql \gg 1$, где q — волновой вектор продольной волны, а l — средняя длина свободного пробега для рассеяния на примесях. Тогда взаимодействие с электронами можно рассматривать как соответствующее излучению и поглощению фононов. Другой предельный случай $ql \ll 1$ был рассмотрен Кре-

синым [123]; Цунето [124] провел общие вычисления, пригодные при всех значениях l . Температурная зависимость затухания не очень сильно отличается от случая $l \rightarrow \infty$.

С целью проверки теории Морзе и Бомом [33—35] было поставлено несколько тщательных экспериментов.

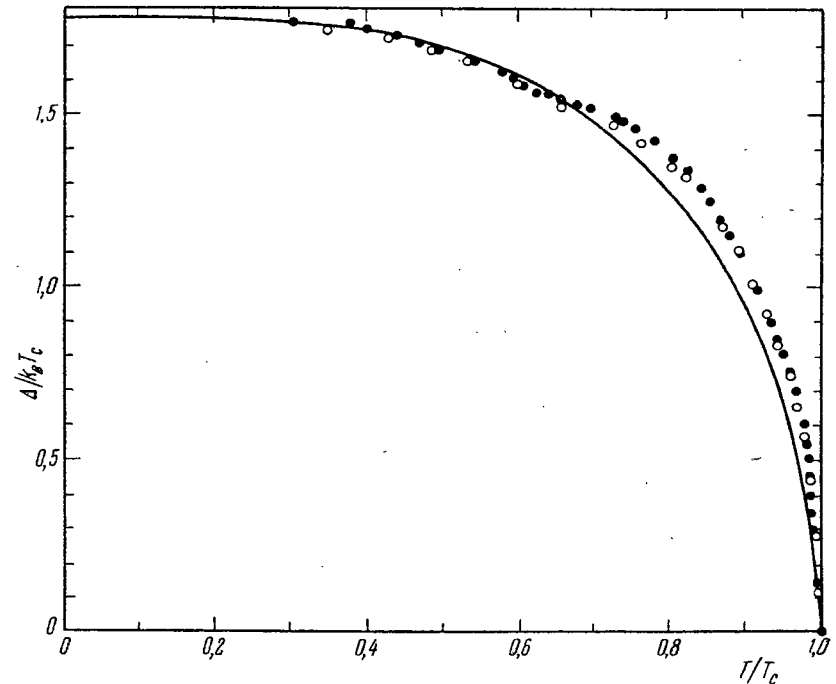


Рис. 14. Температурная зависимость Δ (получена из экспериментов Морзе и Бомы [33—35] по затуханию продольных звуковых волн в олове) и соответствующая теоретическая кривая. Экспериментальные точки соответствуют: \circ — Sn, 33,5 МГц; \bullet — Sn, 54 МГц. Сплошная линия — теоретическая кривая.

Они нашли, что выражение (11.12) прекрасно согласуется с их измерениями, произведенными на поликристаллическом индий и на очень чистом монокристалле олова (см. рис. 11). Температурная зависимость ширины энергетической щели для олова, определенная с помощью (11.12), в сочетании с эмпирическими результатами, полученными на частотах 33,5 и 54 МГц, приведена на рис. 14. Направление

распространения совпадает с осью [001]. Наилучшее значение для энергетической щели при $T = 0^\circ \text{K}$ равно $3,54k_B T_c$. Оно удивительно близко к значению $3,52k_B T_c$, предсказанному для всех металлов на основе упрощенной теории (т. е. теории, использующей постоянные матричные элементы с обрезанием при $|\varepsilon| = \hbar\omega_c$). Более поздние измерения [116, 125] затухания волн, распространяющихся в различных направлениях, указывают на заметную кристаллическую анизотропию величины $\Delta(0)$, и следовательно, отмеченное выше согласие частично носит случайный характер. Таким образом, прежде чем тщательно сравнивать теорию с экспериментом, необходимо провести рассмотрение, учитывающее анизотропию параметров нормального состояния. Наибольшее расхождение теории с экспериментом наблюдается вблизи T_c , где экспериментальные результаты указывают на более быстрое увеличение щели с понижением температуры, чем это предсказывает теория.

Относительный коэффициент затухания, полученный Морзе и Олсеном [116] на образцах из очень чистого олова в условиях $ql \gg 1$, приведен на рис. 15 для трех кристаллографических ориентаций. При $T_c/T > 1,5$ кривые хорошо аппроксимируются прямыми линиями, с помощью которых получены значения $2\Delta(0)$, приведенные в табл. V.

Таблица V
Кристаллическая анизотропия Δ для олова, полученная Морзе и др. из данных по затуханию продольных ультразвуковых волн

q	$2\Delta(0)/k_B T_c$
Параллельно [001]	$3,2 \pm 0,1$
Параллельно [110]	$4,3 \pm 0,2$
Перпендикулярно [001] 18° с направлением [100] }	$3,5 \pm 0,1$

В силу закона сохранения энергии и импульса в процессе поглощения проекция групповой скорости квазичастиц на направление распространения звука должна быть равна

скорости звука s . Большая часть квазичастиц имеет скорости порядка v_F . Поскольку $v_F \gg s$, вклад в затухание вносят только частицы, волновые векторы которых расположены на диске, перпендикулярном направлению

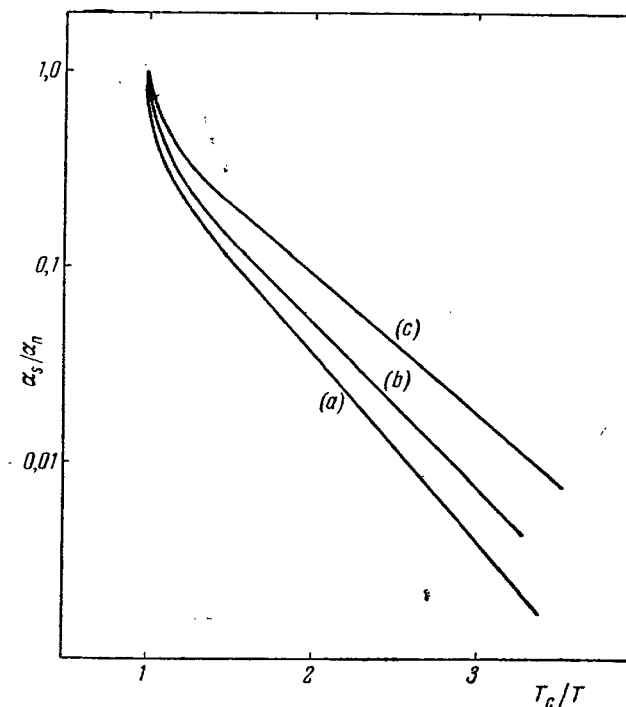


Рис. 15. Кристаллическая анизотропия относительного коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн, полученная Морзе и Олсеном [116] из измерений на очень чистом образце олова с $gl \gg 1$.

распространения волны. Эксперименты, проведенные на ориентированных монокристаллах, дают непосредственные значения энергетической щели, усредненной по такому диску [268*].

Некоторые экспериментальные данные [126] по поглощению поперечных волн в поликристаллическом олове при $ql \gg 1$ приведены на рис. 16, где можно видеть еще

более резкое падение поглощения при T_c , за которым следует более медленное понижение, отвечающее, по-видимому, закону (11.12). Наиболее вероятно, что указанное очень резкое падение, почти соответствующее разрыву,

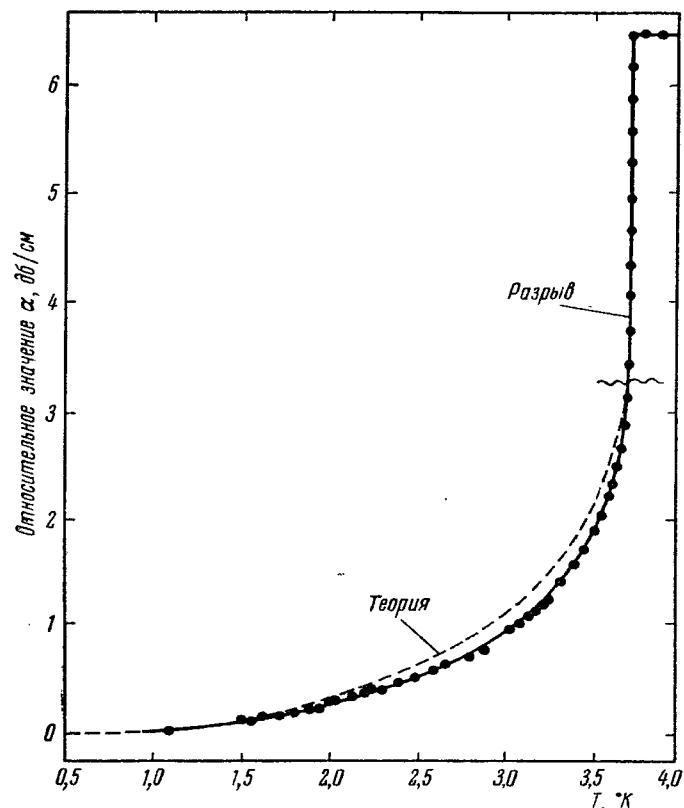


Рис. 16. Температурная зависимость относительного коэффициента затухания поперечных ультразвуковых волн в олове, измеренная Бомом и Морзе [126].

обусловливается сильным экранированием поперечного поля сверхпроводящими токами, поскольку благодаря эффекту Мейсснера магнитное поле, создаваемое поперечными токами, связанными с поперечными волнами, будет экранироваться на расстоянии порядка $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-6}$ см. Морзе

предположил, что более плавное уменьшение затухания при температурах ниже T_c связано со сдвиговыми напряжениями, приводящими к изменению энергии электрона и поэтому к затуханию. Частично это может быть связано с эффектами релаксации типа эффекта, описанного Киттелем [127] для нормального состояния. Как заметил Морзе, поперечные волны могут в принципе дать более подробные сведения об анизотропии энергетической щели, поскольку поперечная поляризация способствует расположению определенных групп квазичастиц на диске, перпендикулярном q . Поэтому важно иметь более полное представление о процессе затухания поперечных волн в сверхпроводящем состоянии.

11.3. Релаксация ядерного спина

Примером эффектов когерентности, соответствующих сложению матричных элементов (случай II), является связанная с квазичастицами релаксация ядерных спинов. Одновременно с развитием современной теории Гебель и Шлихтер [36], используя изящный метод, смогли измерить скорость релаксации ядерных спинов при нулевом поле в сверхпроводящем алюминии. Более поздние результаты, полученные Редфилдом и Андерсоном [38], приведены на рис. 17. Скорость релаксации увеличивается вдвое сразу же при понижении температуры ниже T_c и затем постепенно понижается по мере дальнейшего уменьшения температуры. Поскольку релаксация в основном обусловлена обменом энергии с электронами проводимости, возрастание скорости релаксации невозможно было бы объяснить на основе обычной двухжидкостной модели с ее резким падением плотности «нормальных» электронов при $T < T_c$. Как показали Гебель и Шлихтер, современная теория находится в хорошем согласии с вышеприведенными экспериментальными результатами. В процессе релаксации фактически происходит крайне небольшой перенос энергии и, таким образом, соответствующее значение $\hbar\omega$ чрезвычайно мало. Чтобы получить согласие с экспериментом Гебель и Шлихтер предположили, что уровни квазичастиц не являются идеально резкими, а размыты на величину $\sim 0,01k_B T_c \approx 10^{-6}$ эв. Благодаря этому

исчезает расходимость, которая в противном случае должна была бы появиться в интеграле (11.11). Причина уширения уровней остается неясной.

Андерсон и Редфилд [38] недавно распространили измерения в алюминии на область температур вплоть до $T_c/T = 6$.

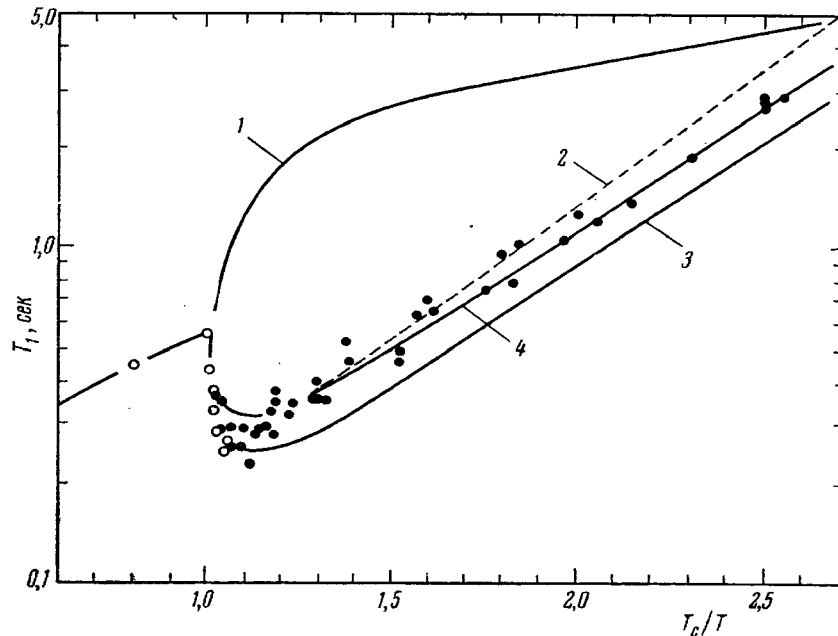


Рис. 17. Время релаксации ядер T_1 для сверхпроводящего алюминия.

Теоретические кривые построены на основе современной теории с плотностью состояний вблизи края щели, замененной на функцию в виде прямоугольника (ширина $2d$, высота $1/2d$, где $\Delta/d=r$). Пунктирные и сплошные кривые вычислены соответственно для значений $2\Delta(0)/k_B T_c$, равных 3,52 и 3,25 (последнее значение получено Бьонди и Гарфункелем из микроволновых измерений). Экспериментальные точки получены: \circ — Андерсоном и Редфилдом [38], \bullet — новые данные. Теоретические кривые соответствуют: 1 — T_1 нормальному состоянию ($H=H_c$); 2 — $r=15$ (не скорректирована); 3 — $r=60$ (скорректирована); 4 — $r=15$ (скорректирована).

Их результаты, приведенные на рис. 17, находятся в хорошем согласии с предсказаниями Гебеля и Шлихтера. Две кривые на этом графике, отмеченные как «скорректированные», соответствуют различному выбору ширины уровней; значение энергетической щели было при этом на осно-

вании экспериментов Бьонди и Гарфункеля [32] выбрано равным $2\Delta = 3,25k_B T_c$, что на 7,5% меньше теоретически предсказанной величины $2\Delta = 3,52k_B T_c$.

Недавно Хаммонд¹⁾ наблюдал в Ga увеличение скорости релаксации в 1,7 раза при температурах ниже T_c . Представляется вероятным, что увеличение скорости релаксации ядерного спина при температуре ниже T_c — общее свойство сверхпроводников, хотя величина возрастания зависит от конкретного вещества.

Важно ясно осознать, что наблюдаемое увеличение скорости релаксации ядерных спинов и резкое падение коэффициента затухания ультразвука с понижением температуры ниже T_c предъявляет несовместимые требования к обычной двухжидкостной модели. Одно из наиболее важных достижений современной теории состоит в том, что температурные изменения рассмотренных независимых эффектов совершенно естественным образом следуют из общего определения функций основного состояния и возбужденных состояний системы. Тем самым мы имеем убедительное экспериментальное доказательство справедливости концепции образования пар в сверхпроводящем состоянии.

Хотя экспериментально наблюдаемые эффекты когерентности сами по себе не дают возможности убедиться в том, что только взаимодействия $k\uparrow, -k\downarrow$ обуславливают разницу между сверхпроводящим и нормальным состояниями, концепция таких пар согласуется с эмпирическими фактами. Другие возможности образования пар будут обсуждены в § 13 при рассмотрении коллективных возбуждений. Не исключено, что системы с сильным взаимодействием между частицами в состояниях с нечетными моментами количества движения или при наличии больших сил, зависящих от спинов и стремящихся установить спины квазичастиц параллельно, лучше описывались бы при введении пар с параллельными спинами. До сих пор еще не было найдено доказательств в подтверждение такой точки зрения, и мы будем полагать, что для рассматриваемой нами системы к основному состоянию приводит образование пар с антипараллельными спинами, как это и было принято выше.

¹⁾ R. N. Hammond, частное сообщение.

§ 12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА

12.1. Теория

Для построения теории электромагнитных свойств сверхпроводников необходимо иметь выражение для плотности тока при полях, произвольно изменяющихся в пространстве и во времени. Действующее на систему полное поле, т. е. сумма приложенного поля и поля, вызванного токами в металле, согласованным образом определяется с помощью уравнений Максвелла. В своей основной статье Купер и авторы [12] получили выражение для тока, вызванного слабыми квазистатическими полями, путем рассмотрения электромагнитного взаимодействия по теории возмущений и при учете только одночастичных возбуждений (это значит, что коллективные возбуждения не принимались во внимание. — *Ред.*) Позже Маттисом и одним из авторов [128], а также независимо Абрикосовым, Горьковым и Халатниковым [4, 129, 130] теория была обобщена на случай полей произвольной частоты. В настоящем параграфе мы приведем только результаты этих работ и сравним теорию с экспериментом для некоторых явлений. Как мы увидим, в общем теория прекрасно согласуется с экспериментом в широкой области температур и частот. Прежде чем перейти к описанию результатов, остановимся кратко на использовавшихся методах, а также поясним, каким образом эффект Мейсснера с нелокальным соотношением между током и вектор-потенциалом следует из модели с энергетической щелью.

Доказательство существования эффекта Мейсснера, приведенное Купером и авторами [12], подверглось критике в силу того, что рассмотрение не было градиентно инвариантным. Отсутствие такой инвариантности обусловлено двумя обстоятельствами:

1) Первое обстоятельство связано с тем, что эффективное взаимодействие с обрезанием при $|\epsilon| > \hbar\omega_c$ является взаимодействием, которое нелокальным образом зависит от импульса, и следовательно выражение для тока, связанного с квазичастицами, должно отличаться от обычного. Однако оценки показывают, что при использовании обычного выражения в пределе слабой связи ошибки состав-

вляют лишь величину порядка $(\Delta/\hbar\omega_c)^2$ и поэтому ею можно пренебречь. Чтобы в этом убедиться, можно начать с рассмотрения градиентно инвариантной теории, в которой электронно-фононное взаимодействие не заменяется на эффективное взаимодействие между электронами. Такое вычисление эффекта Мейсснера было проведено Рикайзенном [131], который нашел, что поправочные члены действительно малы, если энергии и скорости квазичастиц соответствующим образом перенормированы с целью учета собственно энергетических поправок. Физически нелокальные эффекты несущественны, поскольку характерный размер пар порядка $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см велик по сравнению с областью нелокального взаимодействия, которая обычно порядка 10^{-6} см.

2) Второе обстоятельство более серьезно и ограничивает применимость вышеупомянутых уравнений случаем поперечных электромагнитных волн, описываемых потенциалами с «поперечной» калибровкой. При разложении в ряд, отвечающий теории возмущений, в рассмотрение были включены только квазичастичные возбуждения; при этом для вклада в ток от квазичастиц было использовано обычное выражение. В приближении плоских волн вклад в «поперечный» ток, вносимый квазичастицами, отвечающими «единичному» возбуждению с волновым вектором \mathbf{k} , определяется величиной $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m^*$, где m^* — эффективная масса электрона в нормальном состоянии. Нужно помнить, что \mathbf{v} не равно групповой скорости возбуждения:

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dk} = v \frac{dE}{d\epsilon} = v \frac{\epsilon}{E}. \quad (12.1)$$

Заметим, что для возбуждений у поверхности Ферми $\epsilon = 0$ и скорость v_g равна нулю. Так же как и некоторые возбуждения (ротон) в He II, квазичастицы можно представить себе как вихревые кольца. Кольцо в целом, вместе с сопровождающим его «противотоком», движется со скоростью v_g , но средняя скорость потока через центр кольца равна v . Как обсуждалось в § 5, «противоток» в случае поперечных волн погашается, и следовательно, чтобы получить выражение для тока, нужно суммировать по различным возбуждениям не v_g , а v . Для выполнения вычислений явно градиентно инвариантным образом необходим

формализм, который является достаточно общим и учитывает «противоток» и коллективные возбуждения¹⁾. Этот вопрос обсуждался несколькими авторами²⁾, причем наиболее полным образом Рикайзенем [26]³⁾. Мы обсудим его в § 13, где перечислены доказательства в пользу существования непосредственного поглощения, связанного с коллективными возбуждениями.

Теория развита для металла бесконечной протяженности, причем определяется реакция системы на поперечное электромагнитное поле с произвольным волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω , описываемое вектор-потенциалом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t), \quad (12.2)$$

где $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Поле может быть создано частично источниками, частично токами, вызываемыми самим полем в металле. Такая формулировка задачи впервые была ис-

¹⁾ Общая структура уравнений для плотности тока в поле с произвольным волновым вектором и частотой рассматривается в статьях Накажима [132], а также Константинова и Переля [133]. Эти авторы показали, как проводимость связана с корреляционной функцией токов, а также обсудили вопрос о правиле сумм. В безграничной среде «продольная» проводимость содержит особенность типа δ -функции только в пределе длинных волн. Этот предельный случай обсуждается в § 14 в связи с двухжидкостной моделью.

²⁾ То обстоятельство, что коллективные возбуждения существенны при рассмотрении продольных волн, а следовательно и для вопроса о градиентной инвариантности, было отмечено Бардином [134].

Обобщение микроскопической теории, включающее коллективные возбуждения, проведено Андерсоном [23, 24], Боголюбовым и др. [13—21], Намбу [25] и Рикайзенем [26]. Более формальный математический подход к проблеме содержится в статье Мэя и Шафрота [135]. Эти авторы показали, что градиентно инвариантные результаты получаются путем суммирования соответствующих членов ряда теории возмущений. Эта процедура эквивалентна введению коллективных колебаний. Более ранние работы на эту тему [136, 137], хотя и градиентно инвариантны, но привели к неверным результатам. Работа Вентцеля критиковалась в статье Пайнса и Шриффера [138] (см. также [139]).

³⁾ Рикайзен [26] обсуждает и вопрос об эффекте Мейсснера и проблему вычисления комплексной диэлектрической постоянной в продольных полях. Проблема градиентной инвариантности в теории сверхпроводимости в литературе сильно усложнена. Градиентно инвариантная схема предложена в работе [168]. — *Прим. ред.*

пользована Клейном [140, 141] при обсуждении диамагнитных свойств металлов и затем Линдхардом [142] для определения комплексной диэлектрической постоянной нормальных металлов в поперечных и продольных полях. В последнее время эта формулировка особенно часто используется при обсуждении электромагнитных свойств сверхпроводников.

Пусть Φ_0 — многочастичная волновая функция основного состояния с энергией W_0 , или при конечной температуре квантового состояния с распределением квазичастиц, соответствующим температуре T . Пусть состояния Φ_j с энергией W_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) представляют спектр возбужденных состояний в отсутствие поля. Рассматривая электромагнитное взаимодействие как возмущение, можно написать:

$$\Psi = \exp\left(-\frac{iW_0 t}{\hbar}\right) \Phi_0 + \sum_{j=0} a_j(t) \exp\left(-\frac{iW_j t}{\hbar}\right) \Phi_j. \quad (12.3)$$

В первом приближении по полю:

$$a_j(t) = \frac{(j|H_1|0) \exp i(\omega - is)t}{W_0 - W_j - \hbar(\omega - is)}. \quad (12.4)$$

Здесь s — малая положительная постоянная, указывающая на то, что поле было включено давно в прошлом; в окончательном результате переходят к пределу $s \rightarrow 0$. Для вычисления плотности тока в состоянии с возмущенной волновой функцией используется выражение (4.2). Как отмечалось в § 4, выражение для плотности тока состоит из двух частей: парамагнитного тока \mathbf{j}_p , связанного с оператором дифференцирования, и диамагнитного, или «градиентного» тока \mathbf{j}_D , пропорционального вектор-потенциалу \mathbf{A} . Последний член, т. е. \mathbf{j}_D , зависит только от плотности электронов и одинаков для нормального и сверхпроводящего состояний. Разница между этими состояниями обуславливается, следовательно, выражением для \mathbf{j}_p и особенно его частью, содержащей коэффициенты a_j , для которых разность $W_j - W_0$ по порядку величины равна энергетической щели E_g или меньше ее. В сверхпроводнике (при $T=0$), если не считать коллективных возбуждений,

не имеется членов, для которых $W_j - W_0 < E_g$; в то же время вклад членов, для которых $W_j - W_0 < \approx 2E_g$, значительно меньше, чем в нормальном металле. Для членов с $W_j - W_0 > \approx 2E_g$ разница между нормальным и сверхпроводящим состояниями мала. Поскольку общий ток $\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_{np} + \mathbf{j}_D$, наведенный статическим магнитным полем, в нормальном металле крайне мал (в соответствии с существованием лишь слабого диамагнетизма Ландау), мы имеем $\mathbf{j}_D \approx -\mathbf{j}_{np}$. Суммарный сверхпроводящий ток равен поэтому $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_{sp} + \mathbf{j}_D \approx \mathbf{j}_{sp} - \mathbf{j}_{np}$, что, грубо говоря, отвечает взятому с минусом вкладу в ток \mathbf{j}_{np} в нормальном состоянии членов с $W_j - W_0 < \approx 2E_g$. До построения микроскопической теории один из авторов [70] использовал аналогичную аргументацию, чтобы показать, что модель с энергетической щелью должна, по-видимому, привести к нелокальной теории эффекта Мейсснера, подобной теории Пиппарда.

Пиппардовский предельный случай имеет место, если доминирующие члены в разложении для \mathbf{j}_{np} содержат в знаменателе энергию, превышающую ширину щели. Теория Лондона применима, если значения знаменателей меньше ширины щели. Матричные элементы для волнового вектора \mathbf{q} соответствуют возбуждению частицы из состояния \mathbf{k} под поверхностью Ферми в состояние $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ над поверхностью Ферми. Разность энергий $W_j - W_0$ по порядку величины равна $\hbar q v_0$, где v_0 — скорость у поверхности Ферми. С точки зрения проникновения поля в сверхпроводник основную роль играют значения q порядка $1/\lambda$ (λ — глубина проникновения), т. е. порядка $2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$. При $v_0 \sim 10^8 \text{ см/сек}$ получаем $W_j - W_0 \sim 10^{-2} \text{ эв}$, что на порядок больше ширины энергетической щели и, следовательно, применима теория типа Пиппарда. Уравнения Лондона были бы применимы при $q < 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Как указал Феррелл с сотрудниками [143, 144], эти аргументы могут быть уточнены с помощью соотношений Крамерса — Кронига. При $\omega \neq 0$ ток можно выразить через проводимость, зависящую от комплексной частоты и волнового числа

$$\sigma(q, \omega) = \sigma_1(q, \omega) - i\sigma_2(q, \omega), \quad (12.5)$$

где σ_1 — активная компонента, определяющая потери энергии, σ_2 — реактивная компонента. Эти две величины связаны соотношением Крамерса — Кронига:

$$\sigma_2(q, \omega) = \frac{2\omega}{\pi} \text{P} \int_0^\infty \frac{\sigma_1(q, \omega_1) d\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad (12.6)$$

где P обозначает, что интеграл берется в смысле главного значения. Связь между \mathbf{j} и \mathbf{A} может быть записана в виде:

$$\mathbf{j}(q, \omega) = -\frac{c}{4\pi} K(q, \omega) \mathbf{A}(q, \omega). \quad (12.7)$$

Здесь

$$K(q, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma(q, \omega). \quad (12.8)$$

Это выражение можно применить и к случаю статических магнитных полей, если положить $\omega = 0$. Чтобы описать эффект Мейсснера, ядро $K(q, 0)$ должно при $q \rightarrow 0$ иметь конечное значение, большее нуля. В лондоновском сверхпроводнике, для которого предполагается, что $j_p = 0$, $K(q) = 1/\lambda_L^2$, где $\lambda_L^2 = (mc^2/4\pi ne^2)$ — квадрат лондоновской глубины проникновения.

Матричные элементы, входящие в сумму для $K(q)$, совпадают с теми, что определяют поглощение энергии при частоте $\omega \neq 0$, которая удовлетворяет условию $W_j - W_0 \approx \hbar\omega$. Как было указано Ферреллом [143], $K(q)$ можно определить из $\sigma_1(q, \omega)$, если последняя функция известна для всех ω . Вопрос сводится к тому, какую информацию о $\sigma_2(q, \omega)$ можно получить при малых ω из σ_1 с помощью соотношения Крамерса — Кронига. Приведем коротко соответствующую аргументацию [143, 144, 242*].

При частотах ω , значительно превышающих максимальную частоту ω_m , при которой может происходить поглощение, система ведет себя как совокупность свободных электронов; это значит, $\sigma_1 = 0$ и

$$\sigma_2 = \frac{ne^2}{m\omega}. \quad (12.9)$$

Комбинируя (12.9) с (12.6), получаем правило сумм:

$$\int_0^{\infty} \sigma_1(q, \omega) d\omega = \frac{\pi n e^2}{2m}, \quad (12.10)$$

которое должно выполняться независимо от детальной структуры системы. В сверхпроводнике часть вклада вносится в интеграл за счет δ -функции при $\omega = 0$. Если S — «сила» δ -функции, (12.10) можно записать в виде:

$$S + \int_{0^+}^{\infty} \sigma_{1s}(q, \omega) d\omega = \frac{\pi n e^2}{2m}. \quad (12.11)$$

Тинкхам и Феррелл [144] применили это соотношение к модели с энергетической щелью, предположив, что $\sigma_{1s}(q, \omega) = 0$ при $\omega < \omega_g$ и $\sigma_{1s} = \sigma_{1n}$ при $\omega > \omega_g$, где $\hbar\omega_g \sim 2E_g$. Для модели свободных электронов:

$$\sigma_{1n}(q, \omega) = \frac{3\pi}{4} \frac{n e^2}{m v_0 q} \left(1 - \frac{\omega^2}{v_0^2 q^2} \right) \quad \text{при } \omega < v_0 q, \quad (12.12)$$

$$\sigma_{1n}(q, \omega) = 0 \quad \text{при } \omega > v_0 q.$$

Если $\omega > v_0 q$, поглощения не может происходить, поскольку в этом случае скорость волны больше скорости электрона и нельзя обеспечить сохранение энергии и импульса. Если $\omega_g \ll v_0 q$ (пиппардовский предел), правило сумм дает:

$$S = \tilde{\omega}_g \cdot \frac{3\pi}{4} \frac{n e^2}{m v_0 q} = \frac{3\pi n e^2 \tilde{\omega}_g}{4 m v_0 q}. \quad (12.13)$$

Вклад δ -функции в выражение (12.6) для σ_2 равен:

$$\sigma_2 = \frac{2S}{\pi\omega}. \quad (12.14)$$

При низких частотах $\sigma_1 = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(q, \omega) &= -i\sigma_2 \mathcal{E}(q, \omega) = -\left(\frac{2iS}{\pi\omega}\right) \left(\frac{-i\omega \mathbf{A}}{c}\right) = \\ &= -\frac{2SA(q, \omega)}{\pi c}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Таким образом, можно ожидать, что при $\omega_g \ll v_0 q$

$$K(q) = \frac{8S}{c^2} = \frac{6\pi n e^2 \tilde{\omega}_g}{m v_0 q c^2} = \frac{3\tilde{\omega}_g}{2v_0 q \lambda_L^2}. \quad (12.16)$$

Соответствующее соотношение Пиппарда, получающееся после перехода к компонентам Фурье в выражении (3.6) в пределе $\xi_0 q \gg 1$, имеет вид:

$$K(q) = \frac{3\pi}{4\xi_0 q \lambda_L^2}. \quad (12.17)$$

Сравнивая эти два выражения [см. (12.16) и (12.17)], находим выражение для ξ_0 через величину энергетической щели:

$$\xi_0 = \frac{\pi v_0}{2\tilde{\omega}_g}. \quad (12.18)$$

Микроскопическая теория приводит к выражению, аналогичному (12.18) с $\hbar\omega_g = \pi^2 \Delta(0)/2$, что слегка превышает удвоенное значение ширины щели.

Присутствие δ -функции при $\omega = 0$ соответствует ускорению всей группы электронов с образованием результирующего тока. Это может иметь место в металле, но не может произойти в изоляторе или полупроводнике со щелью. Правило сумм для полупроводника со щелью выполняется за счет поглощения отличных от нуля частот. Андерсон [23] показал в явном виде, почему для сверхпроводимости требуется упорядочение на больших расстояниях.

Общее выражение для плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, вызванного полем, выраженным через вектор-потенциал с поперечной калибровкой $\text{div} \mathbf{A} = 0$, может быть записано [128] в форме, аналогичной предложенной Пиппардом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\omega} \frac{e^2 N(0) v_0 e^{i\omega t}}{2\pi^2 \hbar c} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}')) I(\omega, R, T) e^{-R/l} dr'}{R^4}. \quad (12.19)$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Ядро $I(\omega, R, T)$ — довольно сложный интеграл по энергиям, который, за исключением предельных случаев, может быть вычислен только с помощью численных методов. Вывод этого выражения был основан

на упрощенной модели (см. § 9) с постоянными матричными элементами оператора эффективного электрон-электронного взаимодействия. Полученный результат имеет однако более широкое значение и справедлив для изотропных поверхностей Ферми, если параметр энергетической щели $\Delta(T)$ слабо зависит от энергии в области с шириной в несколько $k_B T$ от поверхности Ферми. По существу это и есть приближение слабой связи. Можно поэтому рассматривать $\Delta(T)$ как параметр, определяемый из эксперимента.

Упругое рассеяние на примесях, описываемое средней длиной свободного пробега l , приводит к появлению в выражении (12, 19) под интегралом множителя $\exp(-R/l)$. Этот множитель, введенный Пиппардом в его феноменологической теории, проявляется в сверхпроводниках таким же образом, как и в нормальных металлах [128]. Авторы работы [128] использовали волновые функции отдельных электронов, пригодные для рассмотрения загрязненных металлов с центрами рассеяния, в качестве основы для построения многочастичных волновых функций сверхпроводящего состояния и для вычислений по теории возмущений. Если ψ_n — одна из таких функций, то другая функция, соответствующая состоянию с той же энергией, ψ_n^* будет комплексно сопряжена с первой, и они могут рассматриваться как взаимно ортогональные. Состояния пар, входящие в конфигурации основного состояния сверхпроводника, могут быть выбраны в виде $(\psi_{n\uparrow}, \psi_{n\downarrow}^*)$. Это означает, что если одно из состояний данной конфигурации заполнено, то второе также заполнено. Можно показать (см. § 16), что энергия приводящего к образованию пар взаимодействия в загрязненном металле не намного меньше энергии образования пары ($\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow$) в чистом металле, хотя средняя длина свободного пробега много меньше длины когерентности. Чтобы получить выражение для плотности тока в рамках теории возмущений, необходимо провести усреднение выражений типа $\langle \psi_n^*(r) \psi_n(r') \rangle$ по случайным распределениям примесей и по состояниям с одинаковой энергией. Усреднения, требуемые для случая сверхпроводимости, такие же, как усреднения, необходимые при вычислении нормальной проводимости. В обоих

этих случаях усреднения приводят к появлению множителя $\exp(-R/l)$. Вычисления с помощью методов квантовой теории поля, проведенные Эдвардсом [145] (см. [3, 146]), а также Абрикосовым и Горьковым [147], приводят к почти эквивалентным результатам.

Часто удобно пользоваться преобразованием Фурье для выражения (12.19). В результате между фурье-компонентами \mathbf{j} и \mathbf{A} получаем связь типа (12.7), причем

$$K(q, \omega) = \frac{-3}{c^2 \hbar v_0 \Lambda(0)} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{iqR} e^{-R/l} (1-u^2) I(\omega, R, T) du dR. \quad (12.20)$$

Здесь мы ввели обозначение $\Lambda(0)$ для лондоновского параметра при $T=0$:

$$\Lambda(0)^{-1} = \frac{2}{3} e^2 N(0) v_0^2. \quad (12.21)$$

Рассмотрим выражение (12.19) в нескольких интересных предельных случаях:

1) Если ширина энергетической щели стремится к нулю (или в более общем случае, если частота достаточно высока), так что $\hbar\omega \gg \Delta$, имеем:

$$I(\omega, R, T) \rightarrow -\pi i \hbar \omega \exp\left(-\frac{iR\omega}{v_0}\right). \quad (12.22)$$

При этом выражение для $\mathbf{j}(r, t)$ переходит в выражение Чемберса для нормальных металлов (3.5). Коэффициент перед интегралом $N(0) v_0$ может быть оценен эмпирически из величины поверхностного импеданса чистого металла в нормальном состоянии в предельно аномальном случае (глубина скин-слоя много меньше средней длины свободного пробега).

2) Предел $\omega \rightarrow 0$ или $\hbar\omega \ll \Delta$ соответствует квазистатическому случаю, рассмотренному Купером и авторами [12]. В результате введения функции $J(R, T)$ было получено выражение, очень похожее на уравнение Пиппарда (3.6)

$$I(0, R, T) = \frac{\Lambda(0)}{\Lambda(T)} \frac{\pi \hbar v_0}{\xi_0} J(R, T). \quad (12.23)$$

При $\omega = 0$ имеем:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{3}{4\pi c \Delta(T) \xi_0} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}A(\mathbf{r}')) J(R, T) e^{-R/l}}{R^4} d\mathbf{r}'. \quad (12.24)$$

Ядро $\exp(-R/\xi_0)$ заменено на функцию $J(R, T)$, определенную таким образом, что при всех T вплоть до T_c интеграл от J :

$$\int_0^\infty J(R, T) dR = \xi_0 = \left(\frac{\pi \Delta(0)}{\hbar v_0} \right)^{-1}, \quad (12.25)$$

совпадает с таким же интегралом от экспоненты. Здесь ξ_0 — не зависящий от температуры параметр, соответствующий пиппардовой длине когерентности и выбранный таким образом, что $J(0, 0) = 1$. Оказывается, что $J(R, T)$ не изменяется сильно с температурой и мало отличается по форме от экспоненты. Предельное значение $J(R, T)$ при $R=0$ изменяется от единицы при $T=0$ до 1,33 при $T=T_c$. С повышением температуры $\Delta(T)$ увеличивается в соответствии с уменьшением плотности сверхтекучей компоненты ρ_s в двухжидкостной модели. Отношение $\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}$ может быть выражено через величину энергетической щели:

$$\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} \equiv \frac{\rho_s(T)}{\rho} = 1 - 2 \int_0^\infty dy \frac{\exp(y^2 + \beta^2 \Delta^2)^{1/2}}{[1 + \exp(y^2 + \beta^2 \Delta^2)^{1/2}]^2}. \quad (12.26)$$

Здесь $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Для модели Бардина, Купера, Шриффера:

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \frac{1}{\Delta(T)} = \frac{d\beta \Delta(T)}{d\beta}. \quad (12.26a)$$

График отношения $\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}$, основанный на вычислениях Мюльшлегеля [148], приведен на рис. 18 (см. также табл. IV). Следует отметить, что согласно (12.26) отношение $\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}$ является функцией $\beta \Delta(T)$. Если температурная зависимость Δ для данного металла отличается от температурной зависи-

мости Δ в модели, рассмотренной в § 9, то отношение $\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}$ лучше определять из эмпирического значения $\beta \Delta(T)$.

3) Если поле мало изменяется на длине когерентности, или в загрязненном металле поле мало изменяется на длине свободного пробега, то $A(\mathbf{r}')$ можно заменить на $A(\mathbf{r})$ и вынести A за знак интеграла. В квазистатическом пределе это приводит к уравнению Лондона $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{1}{c\Lambda}\right) A(\mathbf{r})$.

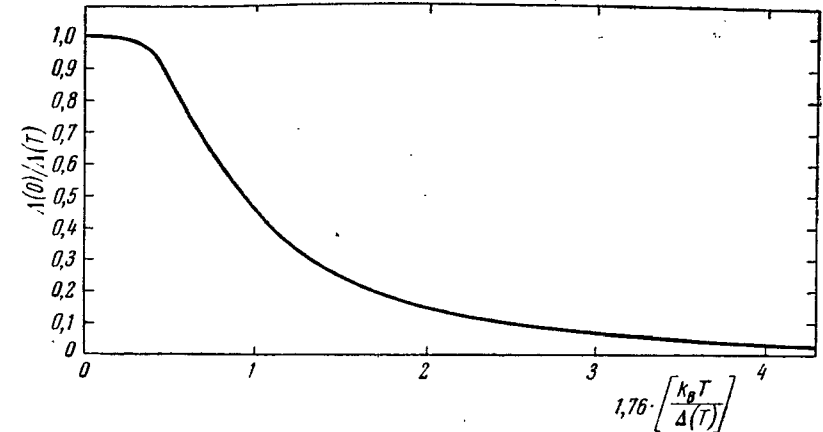


Рис. 18. Обратный приведенный параметр Лондона $(\Delta(T)/\Delta(0))^{-1}$ как функция $[T/\Delta(T)]/[T_c/\Delta(0)]$; $\Delta(0) = 1,76 k_B T_c$.

4) Если рассматривается поле в области, размеры которой малы по сравнению с длиной когерентности ξ_0 , то функция $I(R, \omega, T)$ может быть заменена на свое значение при $R=0$ и вынесена за знак интеграла. Этот предел применим, когда $\lambda \ll \xi_0$, а также для тонких пленок и других образцов малого размера¹⁾. Остающийся интеграл

¹⁾ Применение теории к образцам малого размера затрудняется из-за их поликристалличности. Отожженные пленки состоят из кристалликов, размеры которых порядка толщины пленки d и потому характеризуются длиной свободного пробега $l \sim d$. Свежеосажденные пленки, получаемые при низких температурах, отличаются аморфным строением и обладают обычно длиной пробега $l \ll d$. С теоретической точки зрения свойства таких пленок ближе к локальному предельному случаю. — Прим. ред.

такой же, как в случае нормального состояния в том же поле. Удобно ввести в рассмотрение отношение комплексных проводимостей в сверхпроводящем и нормальном состояниях:

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{I(\omega, 0, T)}{-i\pi\hbar(\omega)}. \quad (12.27)$$

Выражение для σ_1/σ_n идентично формуле (11.11), определяющей α_s/α_n . Получающееся выражение для σ_2/σ_n таково:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\Delta - \hbar\omega, -\Delta}^{\Delta} \frac{[1 - 2f(E + \hbar\omega)][E^2 + \hbar\omega E + \Delta^2]}{\{[\Delta^2 - E^2][(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]\}^{1/2}} dE. \quad (12.28)$$

Нижний предел здесь равен $\Delta - \hbar\omega$ для $\hbar\omega < 2\Delta$ и $-\Delta$ для $\hbar\omega > 2\Delta$. Отношения $\sigma_{1,2}/\sigma_n$ в пределе $T=0$ могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $E(k)$ и $K(k)$. В частности, $\sigma_1=0$ для $\hbar\omega < 2\Delta(0)$, а для $\hbar\omega > 2\Delta$ имеем:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right) E(k) - \frac{4\Delta}{\hbar\omega} K(k) \quad (T=0^\circ\text{K}). \quad (12.29)$$

Соответствующее выражение для σ_2/σ_n , справедливое при всех частотах, имеет вид:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right) E(k') - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right) K(k'). \quad (12.30)$$

В приведенных выражениях

$$k = \left| \frac{2\Delta - \hbar\omega}{2\Delta + \hbar\omega} \right| \quad \text{и} \quad k' = (1 - k^2)^{1/2}. \quad (12.31)$$

Значения, вычисленные с помощью этих формул, приведены на рис. 19. Предельные значения равны [4]:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \frac{2\hbar\omega}{k_B T} f(\Delta) (1 - f(\Delta)) \ln \left[\frac{4k_B T}{\hbar\omega\gamma} \right] \quad (12.32)$$

для $\hbar\omega \ll k_B T_c \ll 2\Delta$,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{\pi\Delta}{\hbar\omega} [1 - 2f(\Delta)] \quad \text{для} \quad \hbar\omega \ll 2\Delta.$$

Здесь $\gamma = e^c = 1,78$ (c — постоянная Эйлера). Значения σ_1/σ_n и σ_2/σ_n для широкой области температур и частот

были вычислены Миллером [149] и приведены в табл. VI. Они применимы, вообще говоря, к случаю изотропного

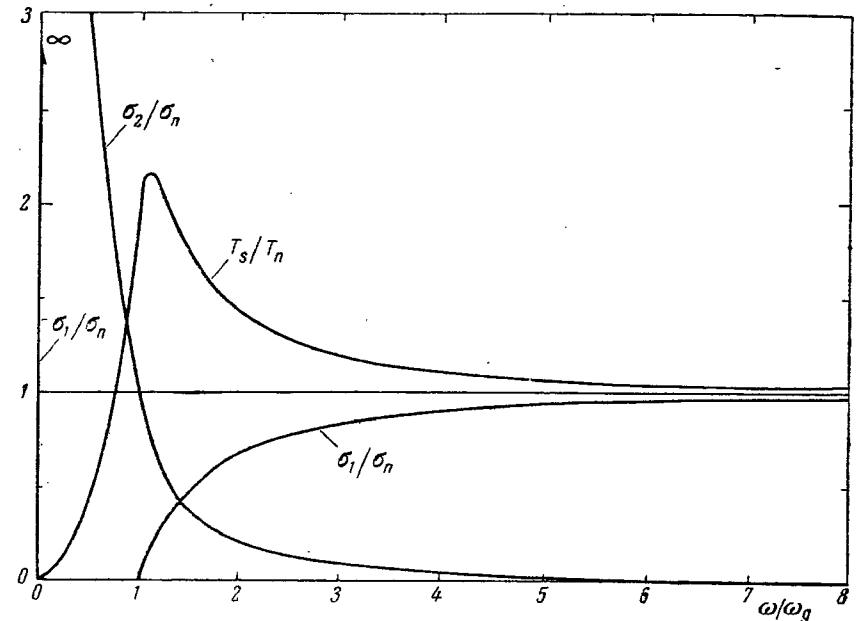


Рис. 19. Частотная зависимость T_s/T_n , σ_1/σ_n и σ_2/σ_n согласно вычислениям Тинкхама на основе теории Маттиса и Бардина (см. [30]).

сверхпроводника в пределе слабой связи, поэтому для щели $\Delta(T)$ можно брать значение, определенное эмпирически.

12.2. Прохождение инфракрасного излучения через тонкие пленки

Гловер и Тинкхам [28], а позже Гинзберг и Тинкхам [30] изучали прохождение инфракрасного излучения через пленки, толщина которых мала по сравнению с глубиной проникновения. Поскольку напряженность поля на толщине пленки приблизительно постоянна, результаты легко можно сравнить с теорией. Наибольший интерес представляют частоты, для которых $\hbar\omega$ близко к ширине энергетической щели. Эта ширина порядка 10^{-3} эв, что соответствует

Таблица VI

Значения комплексной проводимости при различных частотах и температурах

$\Delta (T)/k_B T$	$k_{\omega}/k_B T$	σ_1/σ_n	σ_2/σ_n	$\Delta (T)/k_B T$	$k_{\omega}/k_B T$	σ_1/σ_n	σ_2/σ_n
A	0,0567A	0,00	55,4	4,99	0,285	0,149	54,5
A	0,0850A	0,00	36,9	4,99	0,428	0,122	36,3
A	0,113A	0,00	27,6	4,99	0,570	0,104	27,2
A	0,199A	0,00	15,8	4,99	0,998	0,0714	15,5
A	0,283A	0,00	11,0	4,99	1,43	0,0530	10,9
A	0,425A	0,00	7,30	4,99	2,14	0,0359	7,20
A	0,567A	0,00	5,43	4,99	2,85	0,0260	5,36
A	0,850A	0,00	3,52	4,99	4,28	0,0160	3,48
A	1,13A	0,00	2,53	4,99	5,70	0,0112	2,50
A	1,99A	0,00	1,03	4,99	9,98	0,00604	0,999
A	2,83A	0,424	0,419	4,99	14,3	0,434	0,414
для предельного случая $A \rightarrow \infty$							
3,33	0,198	0,596	49,7	2,50	0,160	1,064	42,6
3,33	0,297	0,505	33,2	2,50	0,239	0,923	28,4
3,33	0,396	0,444	24,9	2,50	0,319	0,822	21,4
3,33	0,692	0,326	14,3	2,50	0,558	0,632	12,5
3,33	0,990	0,257	10,05	2,50	0,798	0,513	8,74
3,33	1,48	0,186	6,70	2,50	1,20	0,389	5,89
3,33	1,98	0,143	5,01	2,50	1,60	0,308	4,43
3,33	2,97	0,0936	3,27	2,50	2,39	0,211	2,91
3,33	3,96	0,0673	2,35	2,50	3,19	0,155	2,09
3,33	6,92	0,0887	0,883	2,50	5,58	0,222	0,733
3,33	9,90	0,478	0,384	2,50	7,98	0,550	0,326
1,74	0,130	1,54	29,7	1,13	0,113	1,73	17,6
1,74	0,196	1,38	20,3	1,13	0,170	1,56	11,4
1,74	0,261	1,24	15,4	1,13	0,227	1,44	8,69
1,74	0,457	0,992	9,00	1,13	0,397	1,24	5,21
1,74	0,652	0,835	6,44	1,13	0,567	1,04	3,78
1,74	0,978	0,665	4,40	1,13	0,850	0,866	2,73
1,74	1,30	0,548	3,35	1,13	1,13	0,737	2,05
1,74	1,96	0,396	2,22	1,13	1,70	0,565	1,36
1,74	2,61	0,304	1,59	1,13	2,27	0,449	0,884
1,74	4,57	0,449	0,499	1,13	3,97	0,97	0,273
1,74	6,52	0,673	0,237	1,13	5,67	0,819	0,125

Продолжение табл. VI

$\Delta (T)/k_B T$	$k_{\omega}/k_B T$	σ_1/σ_n	σ_2/σ_n	$\Delta (T)/k_B T$	$k_{\omega}/k_B T$	σ_1/σ_n	σ_2/σ_n
0,700	0,105	1,60	7,38	0,400	0,400	0,102	2,74
0,700	0,158	1,47	5,11	0,400	0,153	0,127	1,96
0,700	0,210	1,38	3,97	0,400	0,203	1,21	1,58
0,700	0,368	1,20	2,46	0,400	0,356	1,09	0,970
0,700	0,526	1,06	1,83	0,400	0,509	1,00	0,734
0,700	0,788	0,924	1,31	0,400	0,764	0,893	0,504
0,700	1,05	0,812	1,01	0,400	1,02	0,886	0,331
0,700	1,58	0,715	0,568	0,400	1,53	0,910	0,190
0,700	2,10	0,762	0,352	0,400	2,03	0,917	0,119
0,700	3,68	0,868	0,117	0,400	3,56	0,954	0,0406
0,700	5,26	0,921	0,057	0,400	5,09	0,975	0,019
0,300	0,101	1,25					
0,300	0,151	1,19					
0,300	0,202	1,14					
0,300	0,353	1,04					
0,300	0,504	0,972					
0,300	0,756	0,940					
0,300	1,01	0,944					
0,300	1,51	0,950					
0,300	2,02	0,958					
0,300	3,53	0,979					
0,300	5,04	0,987					

длинам волн порядка 0,1 см. Эксперименты в этой области спектра, расположенной сразу же за микроволновой областью, наиболее трудны. Тинкхам и его сотрудники для работы в далекой инфракрасной области разработали специальную оптическую методику с применением больших дифракционных решеток и зеркал. Эти опыты не только дали наиболее непосредственное экспериментальное доказательство существования энергетической щели, но, кроме того, убедительно свидетельствовали в пользу нелокальной формы теории сверхпроводимости.

Удобной величиной для интерпретации данных, полученных из этих экспериментов, является комплексная проводимость $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$, отнесенная к площади поверхности.

Данные относительно коэффициента прохождения были получены в виде T_s/T_n отношения мощностей излучения, проходящего через пленку в сверхпроводящем и в нормальном состояниях ($T > T_c$). Это отношение выражается через σ следующим образом:

$$\frac{T_s}{T_n} = \left\{ \left[T_n^{1/2} + (1 - T_n^{1/2}) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n} \right) \right]^2 + \left[(1 - T_n^{1/2})^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_n} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (12.33)$$

Поскольку σ_1 и σ_2 связаны соотношением Крамерса — Кро-нига, из значений T_s/T_n , известных для широкой области частот, можно определить отдельно и σ_1 , и σ_2 . Анализ упрощается, так как T_s/T_n определяется в основном либо величиной σ_1 , либо σ_2 везде, кроме узкой полосы частот в непосредственной близости к щели. График теоретических значений σ_1/σ_n , σ_2/σ_n и T_s/T_n приведен на рис. 19. Эксперименты также дают пик для T_s/T_n при $\omega \sim \omega_g$ (здесь $\hbar\omega_g = 2\Delta$), где значения σ_1 и σ_2 малы.

Если построить в логарифмической шкале график зависимости величины $[1 - (\sigma_1/\sigma_n)]^{-1}$ от приведенной частоты ω/ω_g , то теория дает приблизительно прямую линию с наклоном около 1,65.

На рис. 20 приведены результаты, полученные в экспериментах Гинзберга и Тинкхама, проведенных с оловянными пленками; наклон несколько больше теоретического и равен 1,83. Температуры были достаточно низки, так что формулы для предельного случая $T = 0^\circ \text{K}$ должны быть достаточно точными. Экстраполяция к $\sigma_1 = 0$ дает для ширины щели значение около $3,5 k_B T_c$.

Гловер и Тинкхам пытались определить σ_2/σ_n на низких частотах с помощью измерений прохождения микроволн через пленки. Хотя их результаты не очень точны, они обрабатывали их в предположении, что отношение $\sigma_2(\omega)/\sigma_n(\omega)$ является универсальной функцией частоты типа:

$$\frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_n(\omega)} = \frac{1}{a} \frac{k_B T_c}{\hbar\omega}. \quad (12.34)$$

Параметр a здесь тот же самый, что и параметр, введенный ранее Фабером и Пиппардом в эмпирическом выражении для длины когерентности (предполагается, что этот

параметр одинаков для всех металлов):

$$\xi_0 = a \frac{\hbar v_0}{k_B T_c}; \quad (12.35)$$

здесь v_0 — скорость электронов на поверхности Ферми. Фабер и Пиппард оценили параметр a путем сравнения

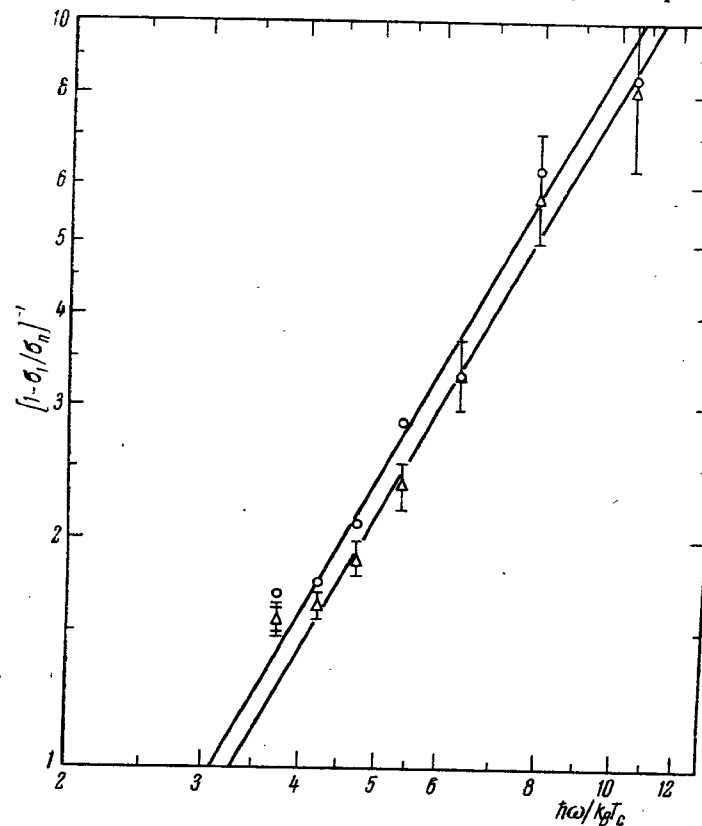


Рис. 20. Частотная зависимость $(1 - \sigma_1/\sigma_n)^{-1}$ для олова, измеренная Гинзбергом и Тинкхамом [30] (в логарифмическом масштабе).

Экспериментальные точки соответствуют: Δ — Sn 1, 152 ом/см², \circ — Sn 2, 230 ом/см².

нелокальной теории Пиппарда с глубиной проникновения для алюминия и олова, измеренной в микроволновом

диапазоне, и нашли, что $a = 0,15$. Анализируя свои данные, полученные с помощью микроволновой методики, Гловер и Тинкхам получили значение $a = 0,27$. Используя правило сумм (12.10), которое следует из соотношений Крамера — Кронига, Феррелл и Гловер [143] на основе данных для σ_1 , определенных из измерений прохождения инфракрасного излучения, получили значение $a = 0,21 \pm 0,05$. Они полагают, что это значение точнее, чем вычисленное из данных, полученных с помощью микроволновой методики.

Теоретическое значение a из (12.25) при $\Delta = 1,76k_B T_c$ равно 0,18, что является средним между упомянутыми эмпирическими результатами.

Недавно Гинзберг и Тинкхам [30] измеряли с большей точностью коэффициент прохождения инфракрасного излучения через тонкие пленки свинца, олова и индия. Полученные из их измерений значения $[1 - (\sigma_1/\sigma_n)]^{-1}$ приведены на рис. 20. Оценки значений ширины энергетической щели, полученные с помощью экстраполяции, равны $4,0 \pm 0,5$, $3,3 \pm 0,2$ и $3,9 \pm 0,3k_B T_c$ для свинца, олова и индия соответственно. Используя эти данные для σ_1 , указанным выше методом были получены следующие значения параметра a : 0,20 для индия, 0,23 для свинца и 0,26 для олова. Последнее значение несколько больше полученного из более ранних экспериментов Гловера и Тинкхама. Интересно отметить, что магнитное поле напряженностью 8000 гс не оказывает заметного действия на прохождение излучения сквозь свинцовую пленку.

В локальной теории Лондона проводимости равны:

$$\sigma_1^L(\omega) = \frac{c^2}{8\lambda_L^2} \delta(\omega); \quad \sigma_2^L(\omega) = \frac{c^2}{4\pi\lambda_L^2 \omega}. \quad (12.36)$$

В этом случае значение a по порядку величины в сто раз меньше вышеприведенных значений, если только не делать предположения ad hoc, что концентрация сверхпроводящих электронов в тонких пленках сильно понижается. Таким образом, эксперименты с тонкими пленками подтверждают модель с энергетической щелью порядка $3,5k_B T_c$ и указывают на существование нелокальной связи между плотностью тока и векторным потенциалом.

Значительный интерес представляет существование дополнительного пика поглощения, наблюдаемого в свинце на частоте несколько меньшей частоты главного пика поглощения (рис. 21). Гинзберг и Тинкхам обнаружили такой пик также для ртути. Аналогичные («предшествующие») пики поглощения наблюдались Ричардсом и Тинкхамом [31] в этих же веществах при изучении отражения от массивных образцов (см. ниже).

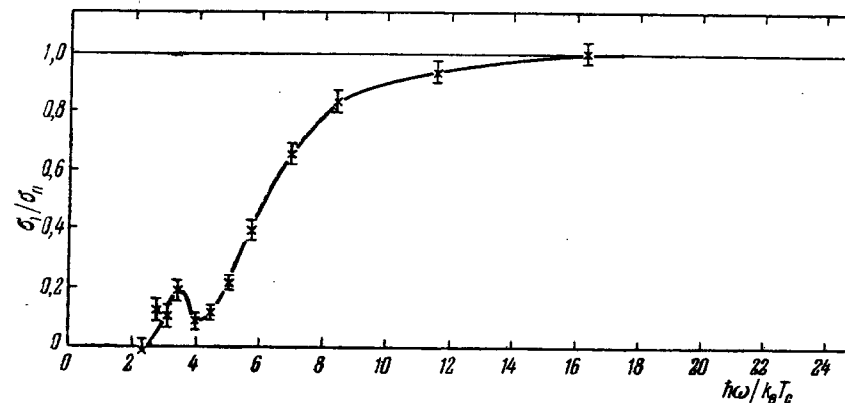


Рис. 21. Частотная зависимость σ_1/σ_n для свинца, измеренная Гинзбергом и Тинкхамом.

Обращает на себя внимание существование «предшествующего» поглощения при $\hbar\omega/2\Delta \approx 0,85$. Не совсем ясно, имеется ли в этой области реальный «пик» поглощения или наблюдается только изменение формы кривой.

Природа структуры края полосы поглощения еще не выяснена. Однако было предположено, что здесь могут играть роль либо анизотропия энергетической щели, либо существование ряда поперечных коллективных возбуждений с энергиями, близкими к энергии щели. Наличие «горба» в кривой поглощения представляется неправдоподобным¹⁾, если бы эффект определялся анизотропией энергетической щели, поскольку в этом случае вклад каждой области поверхности Ферми в поглощение увеличивался бы с увеличением ω . Однако эксперименты еще недостаточно точны,

¹⁾ Учет анизотропии действительно не приводит к аномалии в кривой поглощения [269*]. — Прим. ред.

и нельзя сказать, действительно ли имеет место пик или это просто изгиб в кривой поглощения.

Недавние вычисления Цунето [150] указывают на то, что поперечные коллективные возбуждения d -типа приводят к поглощению на частотах $\omega < 2\Delta/\hbar$. Однако при разумных предположениях о характере взаимодействия между квазичастицами величина пика поглощения почти на порядок меньше наблюдаемой. Поскольку поглощение на частотах $\omega < 2\Delta/\hbar$ наблюдается только в случае свинца и ртути, для которых должна использоваться теория сильной связи, объяснение этого явления нужно искать, по-видимому, на пути дальнейшего развития теории ¹⁾.

12.3. Глубина проникновения

Одним из наиболее важных применений теории является вычисление средней глубины проникновения магнитного поля внутрь плоской поверхности (речь идет о величине λ , определяемой уравнением (3.7)). Как было упомянуто в § 3, экспериментально определяют обычно полный магнитный поток, проходящий через образец, и поэтому не удается получить достаточных сведений о том, каким образом поле изменяется с расстоянием от наружной поверхности. Ниже мы сравним некоторые экспериментальные значения λ со значениями, полученными из микроскопической теории, но прежде остановимся кратко на методике экспериментов, а также вычислении теоретических значений λ .

Наиболее ранние оценки глубины проникновения были основаны на измерениях магнитной восприимчивости маленьких частиц или тонких пленок. Самая обширная серия экспериментов такого типа была проведена Локком на тонких пленках олова, индия и свинца. Метод, предложенный Казимиром, может быть использован для определения изменений глубины проникновения с температурой в массивных образцах. При этом измеряется взаимная индукция между катушками, плотно намотанными на цилиндрический образец. С увеличением температуры увеличивается λ и

¹⁾ Имеется в виду выход за пределы приближения слабой связи. — *Прим. ред.*

пропорционально возрастает магнитный поток, проходящий через измерительную катушку. Лаурманн и Шенберг успешно применили этот метод для измерений λ в случае олова и ртути (использовалась частота 70 гц). Анализ результатов производился на основе эмпирического закона:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1-t^4}}. \quad (12.37)$$

Здесь $t = \frac{T}{T_c}$ — приведенная температура. Этот закон, полученный из двухжидкостной модели Гортера — Казимира, очень хорошо согласуется с зависимостью λ от температуры, наблюдаемой для образцов малых размеров. Если этот закон справедлив, измеренные значения $\Delta\lambda = \lambda(T) - \lambda(0)$, нанесенные на графике как функция $y = (1 - t^4)^{-1/2}$, должны давать прямую линию с наклоном $\lambda(0)$. Многие приводимые значения $\lambda(0)$ были получены именно таким образом.

Другой метод определения глубины проникновения, основанный на измерениях поверхностного импеданса в микроволновом диапазоне, был предложен и применен Пиппардом. Образец помещался в объемный резонатор и наблюдались изменения добротности Q и резонансной частоты. Последняя зависит от изменения глубины проникновения поля в образец, и таким образом можно было исследовать изменение λ с температурой. Существует также возможность оценить абсолютные значения λ , сравнивая резонансные частоты в нормальном и сверхпроводящем состояниях. Трудность метода заключается в том, что глубина проникновения изменяется с частотой, и предельное значение λ для низких частот можно получить только с помощью экстраполяции. Измерения поверхностного импеданса более подробно рассмотрены в следующем параграфе; здесь же мы просто приведем некоторые результаты Пиппарда и его сотрудников, относящиеся к глубине проникновения.

Недавно Сарачик, Гарвин и Эрльбах [151] измерили проникновение поля сквозь тонкую свинцовую пленку, нанесенную на внешнюю поверхность цилиндра. Измерялась взаимная индукция между катушками, расположенными внутри и снаружи цилиндра. Были приняты меры для устранения паразитных полей, возникающих обычно около

концов цилиндра, и таким образом внутренняя катушка регистрировала только поле, проходящее через свинцовую пленку. Этот метод использовался и в более ранней работе Шавлова [152].

В зависимости от природы рассеяния электронов на поверхности металла глубина проникновения λ может быть выражена через интегралы, содержащие $K(q)$, следующим образом:

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int \frac{dq}{q^2 + K(q)} \quad (\text{зеркальное отображение}), \quad (12.38)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\int_0^{\infty} \ln[1 + q^{-2}K(q)] dq} \quad (\text{диффузное рассеяние}). \quad (12.39)$$

Эти выражения, полученные Пиппардом, являются обобщением соотношений, выведенных Рейтером и Зондхеймером для аномального скин-эффекта. Вычисления, основанные на микроскопической теории, производились следующим образом. Выводилось аналитическое выражение для $K(q)$, соответствующее предельным случаям большого и малого q , а затем с помощью графической интерполяции были получены значения его для промежуточной области, где непосредственные вычисления затруднительны. Эксперименты с нормальными металлами заставляют полагать, что случай диффузного рассеяния на поверхности ближе к действительности, в связи с чем большая часть вычислений была выполнена с соответствующим граничным условием [см. (12.39)].

В изотропной модели имеются три параметра: $\Lambda(0)$, ξ_0 и $\Delta(0)$ (последний параметр может быть связан с T_c). Фабер и Пиппард показали, что параметр $\Lambda(0)$ лучше всего определять из измерений поверхностного сопротивления в условиях предельно аномального скин-эффекта. Из значения параметра $\Lambda(0)$ и из значения $N(E_F)$ — плотности состояний для электронов (с одним значением проекции спина) на поверхности Ферми можно определить скорость Ферми v_0 и следовательно $\xi_0^{-1} = \pi\Delta(0)/\hbar v_0$. Для Sn и Al определение величины $\Delta(T)$ из T_c , а также $\Lambda(T)/\Lambda(0)$ производилось с помощью модели, обсужденной в § 9.

Таким образом, единственный параметр, связанный с сверхпроводящим состоянием, — критическая температура T_c .

Если наблюдаемые значения $\Delta/k_B T_c$ значительно отличаются от величин, получаемых теоретически в упрощенной модели, то при рассмотрении электромагнитных свойств нужно пользоваться эмпирической функцией $\Delta(T)$.

Соотношение Лондона $\lambda_L(T) = (4\pi/\Lambda(T)c^2)^{1/2}$ справедливо, если $\xi_0 \ll \lambda$. Пиппард получил выражение, справедливое при $\xi_0 \gg \lambda$:

$$\lambda_{\infty}(T) = \frac{3^{1/6}}{(2\pi)^{1/3}} \left(\frac{\xi_0 \lambda_L(T)^2}{J(0, T)} \right)^{1/6}. \quad (12.40)$$

Как было отмечено выше, величина $J(0, T)$ изменяется

Таблица VII
Значения некоторых параметров для различных металлов *)

Металл	T_c , град. $^{-2}$. см. $^{-3}$	$\omega^2 \xi_0^3$	v_0 , 10 10 см/сек	$10^8 \lambda_L(0)$, см	$2\Delta(0)/k_B T_c$	T_c (°K)
I. Sn	1100 [215]	17,8 [155]	0,65 3,55	3,6 ± 0,2 [157]	3,73	
II. Al	1370 [114]	45,5 [155]	1,32 1,57	3,37 [32, 149]	1,18	
III. Pb	1710 [118, 119]	17—26 [155]	0,50 3,7	4,1 ± 0,2 [157]	7,15	
IV. Cd	561 [153, 154]	4,1 [164]	0,29 11,1	3,3 **)	0,56	
		12,0 [156]	0,85 3,8			
ξ_0 , 10 $^{-4}$ см	$\xi_0/\lambda_L(0)$	$\lambda/\lambda_L(0)$	λ , 10 $^{-6}$ см	$\lambda_{\text{эксп}}$, 10 $^{-6}$ см		
I. 0,23	6,5	1,57	5,6	5,1 [155]		
II. 1,6	102	3,36	5,3	4,9 [155]; 5,15 [32]		
III. 0,083	2,2	1,30	4,8	3,9 [155]		
IV. 0,76	6,9	1,60	18	13 ± 1,4 [164]		
	2,2	2,8	11			

*) Цифры в квадратных скобках обозначают номер ссылки на литературу, приведенную в конце книги.

***) С. В. Satterthwaite, частное сообщение.

от 1 до 1,33 при изменении T от 0 до T_c . График зависимости отношения $\lambda(T)/\lambda_L(T)$ от отношения $\xi_0/\lambda_L(T)$, приведенный в работе [14], может быть использован для определения λ в промежуточных случаях. В табл. VII даны значения параметров для нескольких металлов, для которых существуют измерения; там же сопоставлены вычисленные и наблюдаемые значения глубины проникновения при $T=0^\circ\text{K}$.

На рис. 22 дан график глубины проникновения для Sn и Al, вычисленной для случая диффузного рассеяния, как

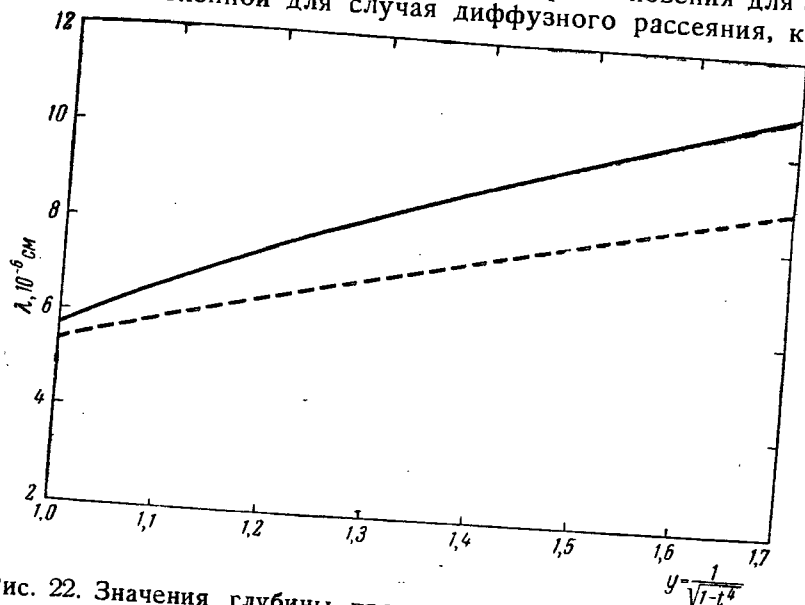


Рис. 22. Значения глубины проникновения для олова и алюминия, вычисленные для случая диффузного рассеяния от поверхности.

Сплошная кривая соответствует олову, ее наклон равен $7,0 \cdot 10^{-6}$ см; пунктир соответствует алюминию, наклон составляет $4,8 \cdot 10^{-6}$ см.

функция величины $y = (1 - t^4)^{-1/2}$. Для $y > 1,5$ (температура вблизи T_c) график приближенно выражается прямой линией, но при $y < 1,5$ имеет место отклонение от прямой линии вниз с возрастанием соответствующей производной. Еще до развития микроскопической теории Льюис [158] предсказал такое изменение наклона кривой на основе двухжидкостной модели с энергетической щелью. Наклон

кривой для Sn в области значений y от ~ 2 до 6 равен около $5,4 \cdot 10^{-6}$ см, что находится в хорошем согласии с измерениями Лаурманна и Шенберга, проведенными для той же области температур. В области значений y от 1,1 до 1,6 производная $d\lambda/dy$ равна примерно $7,0 \cdot 10^{-6}$ см, что существенно превышает величину $5,0 \cdot 10^{-6}$ см, полученную Фабером и Пиппардом для Sn с помощью микроволновой методики. Однако теоретическое значение производной для Al, равное приблизительно $4,8 \cdot 10^{-6}$ см,

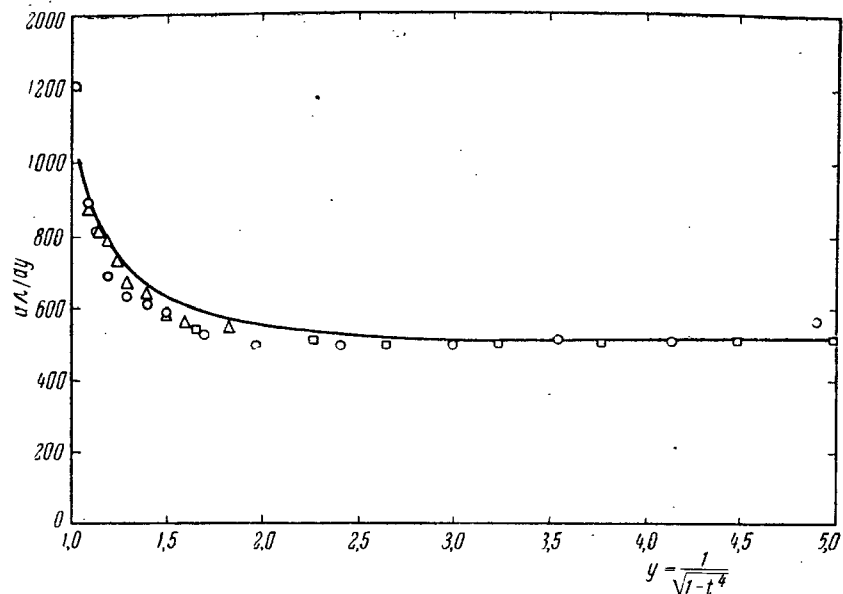


Рис. 23. Температурная зависимость $d\lambda/dy$, определенная Шавловым и Девлиным [159], и соответствующая теоретическая кривая.

находится в хорошем согласии с результатами их измерений. В точках пересечения кривой с линией $y=1$ (или $t=0$) теория дает лишь приближенное согласие с опытом. Значения λ в этих точках равны примерно $5,7 \cdot 10^{-6}$ см и $5,2 \cdot 10^{-6}$ см для Sn и Al соответственно.

Недавно Шавлов и Девлин [159] определяли глубину проникновения для олова с помощью видоизмененной

методики Казимира. Они измеряли самоиндукцию соленоида, плотно одетого на сверхпроводящий цилиндр, и использовали низкую частоту, равную 100 кгц. Было обнаружено (рис. 23) увеличение производной $d\lambda/dy$ в области низких

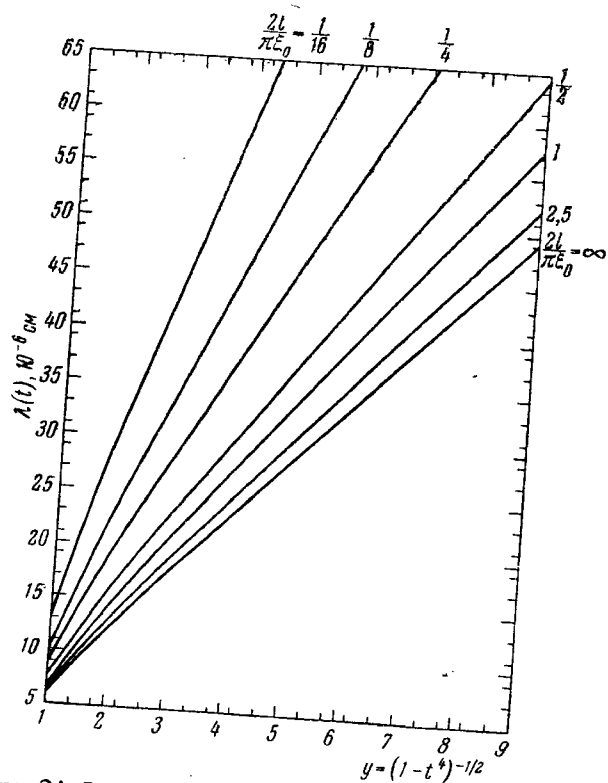


Рис. 24. Зависимость глубины проникновения λ от y при различных значениях средней длины свободного пробега l , выраженной с помощью безразмерного параметра $2l/\pi\epsilon_0$ (согласно вычислениям Миллера [161]).

температур, что находится в хорошем согласии с предсказаниями микроскопической теории. Вычисления производились на основе модели с энергетической щелью $2\Delta(0) = 3,5k_B T_c$, так что для получения столь хорошего согла-

сия теории с опытом не было введено никаких дополнительных параметров. Недавно Пиппард и др. [160] также наблюдали увеличение производной при низкой температуре, но это увеличение вдвое меньше предсказанного теоретически. Еще неясно, может ли это расхождение быть

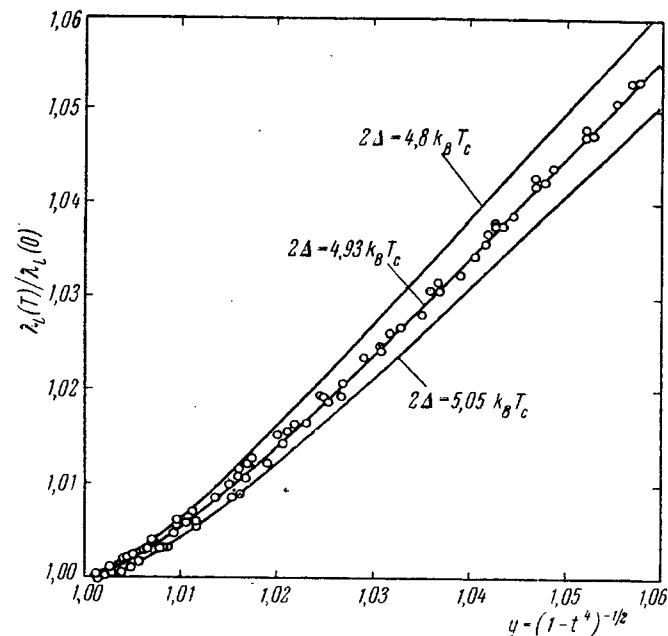


Рис. 25. Температурная зависимость глубины проникновения в свинце, измеренная Сарачиком, Гарвиным и Эрльбахом [151].

Упомянутые авторы нашли хорошее согласие с теорией при $2\Delta/k_B T_c = 4,93$.

отчасти связано с частотной зависимостью глубины проникновения.

Одним из экспериментальных фактов, приведших Пиппарда к нелокальной теории, были данные, указывающие на сильное увеличение глубины проникновения с уменьшением средней длины свободного пробега l для рассеяния на примесях в сплавах олова с индием. Этот эффект наблюдался в сплавах с малой концентрацией индия

(меньше 2%), которая не могла сильно изменять электронную концентрацию, а следовательно и λ_L ¹⁾.

На рис. 24 приведена зависимость $\lambda(t)$ от u , вычисленная Миллером [161] для различных значений l или, точнее, безразмерного параметра $2l/\pi\xi_0$. Эти кривые снова заметно искривляются при $u < 1,5$ в противоположность экспериментальным данным. Предельные значения λ при $t=0$ находятся в разумном согласии с результатами Пиппарда, согласно которым λ увеличивается вдвое, когда l снижается примерно до 10^{-5} см.

В заключение кратко остановимся на измерениях Сарачика и др. [151], основанных на наблюдении прохождения сигналов с частотой 2,2 Мгц через тонкие свинцовые пленки. Толщина пленок менялась от $1,5 \cdot 10^6$ до $4,0 \cdot 10^{-6}$ см, что немного меньше глубины проникновения. Авторы провели анализ данных и получили отношение $\lambda_L(T)/\lambda_L(0)$ для лондоновского предела, или величину $[\lambda_\infty(T)/\lambda_\infty(0)]^{3/2}$ для пиппардовского предела. В случае свинца, по-видимому, более оправдан лондоновский предел. На рис. 25 приведены данные этих авторов для свинца. Результаты измерений хорошо согласуются с теорией, если температурная зависимость ширины щели выбирается согласно упрощенной теории, но $2\Delta(0) = 4,93k_B T_c$.

12.4. Поверхностный импеданс

Измерения поверхностного импеданса, проведенные с помощью микроволновой методики, дали чрезвычайно ценные сведения об электромагнитных свойствах сверхпроводников. Из уравнений Максвелла следует, что должно существовать электрическое поле, связанное с магнитным полем, изменяющимся во времени в области проникновения, и что это электрическое поле значительно в микроволновом диапазоне. При $T > 0$ электрическое поле может оказывать влияние на квазичастичные возбуждения и вы-

¹⁾ Изменение глубины проникновения и прочих эффектов при малой концентрации примесей зависит только от проводимости в нормальном состоянии [147, 199, 200]. Экспериментальные данные находятся в достаточно хорошем согласии с теоретическими формулами. — *Прим. ред.*

зывает диссипацию энергии. Первые эксперименты Г. Лондона в 1940 г. показали, что поверхностное сопротивление R_s , являющееся мерой потерь, непрерывно при T_c и монотонно уменьшается от своего нормального значения при T_c до нуля при $T \rightarrow 0$. В двухжидкостной модели эти потери связаны с нормальной компонентой. В дальнейшем метод измерения поверхностного импеданса был развит Пиппардом, который совместно с сотрудниками провел обширный ряд измерений. Как упоминалось в предыдущем параграфе, Пиппард смог измерить обе компоненты импеданса — активную и реактивную. Объяснить полученную температурную и частотную зависимость поверхностного сопротивления в рамках простых вариантов двухжидкостной модели не удастся. В то же время эти результаты прекрасно согласуются с современной микроскопической теорией.

В последнее время измерения поверхностного импеданса проводились и другими авторами. Особенно заслуживает внимания серия точных измерений, проведенных на алюминии Бьонди и Гарфункелем [32] в широкой области частот и температур. Прежде чем обсуждать их данные, а также другие новые работы, остановимся на результатах теории.

Если сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, поверхностный импеданс Z определяется выражением:

$$Z = R + iX = \frac{\mathcal{E}_y(\omega)_{x=0}}{\int_0^\infty j_y(x, \omega) dx}. \quad (12.41)$$

Импеданс Z можно выразить через ядро $K(q, \omega)$, связывающее фурье-компоненты \mathbf{j} и \mathbf{A} (12.7). Для случая диффузного рассеяния на поверхности получаем:

$$Z = \frac{4\pi^2 i \omega}{c^2} \left\{ \int_0^\infty \ln(1 + q^{-2} K(q, \omega)) dq \right\}^{-1}. \quad (12.42)$$

Отношение поверхностного импеданса Z_{sc} в пиппардовском пределе к поверхностному импедансу в нормальном состоянии в случае предельно-аномального скин-эффекта $Z_{n\infty}$

может быть выражено через отношение комплексных проводимостей (см. табл. VI):

$$\frac{Z_{s\infty}}{Z_{n\infty}} = \left(\frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{\sigma_n} \right)^{-1/3}. \quad (12.43)$$

Миллер [149] вычислил интеграл (12.42) для Al и Sn. При

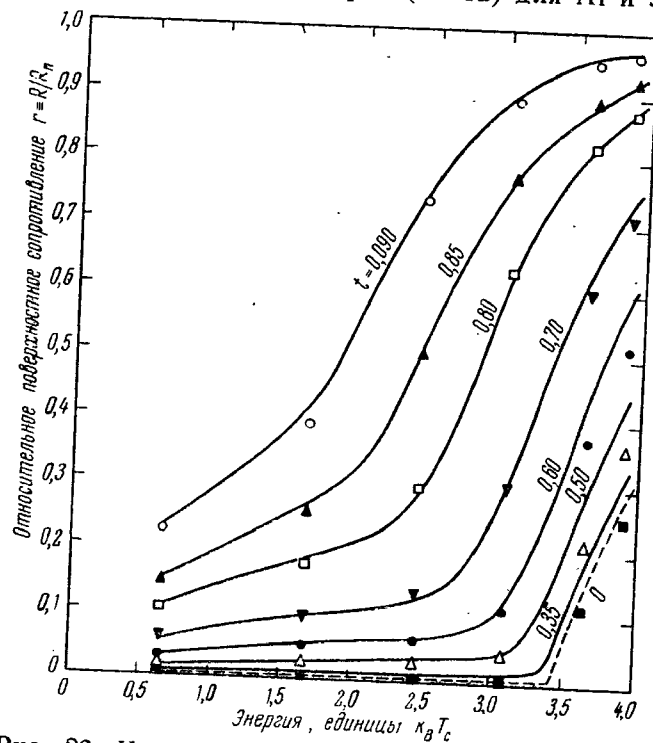


Рис. 26. Частотная зависимость поверхностного сопротивления алюминия, измеренная Бьонди и Гарфункелем [32] (сплошные кривые). Пунктирная кривая соответствует вычислениям Миллера [149].

этом оказалось, что отношение поверхностных сопротивлений довольно сильно отличается от значения, полученного в пиппардовском пределе, даже для Al, для которого $\xi_0 \sim 30\lambda$. Для реактивных частей импеданса соответствующее расхождение меньше,

Бьонди и Гарфункель измеряли калориметрическим методом энергию, поглощаемую металлом в микроволновом поле и таким образом непосредственно определяли только поверхностное сопротивление R , т. е. активную часть Z . Они провели измерения в столь широкой области частот (длины волн от 20 до 3 мм), что смогли с помощью соотношений Крамерса—Кронига определить мнимую часть Z , т. е. X . Последняя может быть выражена через эффективную глубину проникновения δ_r следующим образом:

$$\delta_r = \frac{cX}{4\pi\omega}. \quad (12.44)$$

На рис. 26 и 27 приведены экспериментальные результаты и результаты вычислений Миллера, причем сплошные линии отвечают экспериментальным значениям, а отдельные точки — теоретическим значениям (экспериментальные данные более полны и точны, чем теоретические). Единственным изменением упрощенной модели, которое было здесь использовано, является небольшое уменьшение величины энергетической щели: вместо $3,52k_B T_c$ взято значение $3,37k_B T_c$.

Изломы на кривых, характеризующих изменения поверхностного импеданса в зависимости от энергии фотонов, отвечают точкам, в которых энергия фотона становится больше ширины щели при соответствующей температуре. Увеличение поглощения за изломом связано с возбуждением носителей через щель (образование двух квазичастиц). Бьонди и Гарфункель эмпирически оценили ширину щели и ее зависимость от температуры, используя для этого изменение положения излома с температурой.

Существует большое число измерений поверхностного импеданса олова; последние измерения проведены Капланом и др. [162]¹⁾. Так же как и в предыдущих работах, экспериментальные результаты этих авторов зависят от качества поверхности образцов и от внутренних напряжений. Пиппард

¹⁾ Зависимость поверхностного импеданса от напряженности магнитного поля была измерена для олова на частоте 10^9 гц Сливак [163]. Она нашла, что разности $[R_s(H) - R_s(0)]$ и $[X_s(H) - X_s(0)]$ могут быть любого знака в зависимости от ориентальной ориентации статического и высокочастотного полей и от температуры.

отметил, что в широкой области ($\sim 0,4T_c < T < \sim 0,8T_c$; $\sim 0,01k_B T_c < \hbar\omega < \sim 1,0k_B T_c$) отношение поверхностных

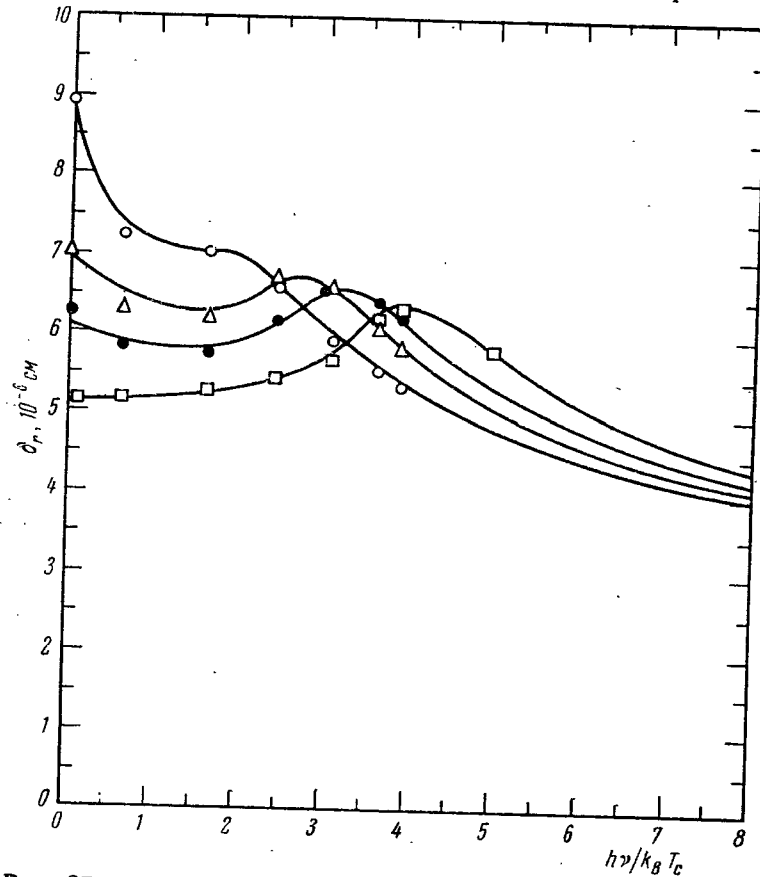


Рис. 27. Частотная зависимость поверхностного реактанса (X) алюминия, выраженная через глубину проникновения

$$\delta_r = \frac{cX}{4\pi\omega}.$$

Измерениям Бьонди и Гарфункеля [32] отвечают сплошные линии. Нанесенные точки соответствуют вычислениям Миллера [149].

сопротивлений может быть выражено как произведение температурного и частотного множителей:

$$\frac{R_s}{R_n} = \varphi(t) A(\nu). \quad (12.45)$$

Здесь $\varphi(t)$ — функция приведенной температуры $t = T/T_c$, а именно:

$$\varphi(t) = t^4(1-t^2)(1-t^4)^{-2}. \quad (12.46)$$

Этот эмпирический результат был подтвержден другими авторами. Из вычислений Миллера следует, что зависимость (12.45) в указанных интервалах измерения T и ω справедлива с точностью около 10%. Миллер использовал

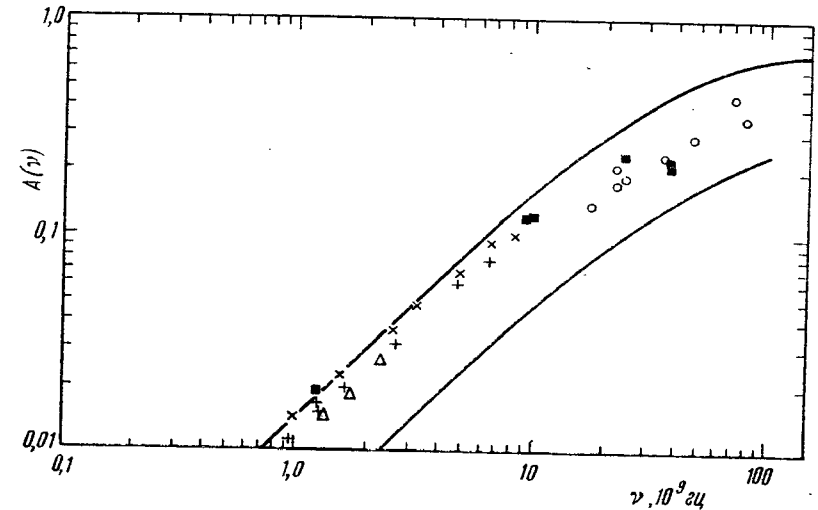


Рис. 28. Частотный множитель $A(\nu)$, входящий в выражение для поверхностного сопротивления (12.45).

в своих вычислениях упрощенную модель без изменений и, таким образом, теоретическое значение ширины энергетической щели $3,5k_B T_c$. На рис. 28 приведены теоретические результаты и различные экспериментальные значения частотного множителя $A(\nu)$. Согласие прекрасное, если учесть отсутствие свободного параметра. Нижняя кривая, справедливая для пиппардовского предельного случая (12.43), расположена значительно ниже и экспериментальных точек, и результатов подробных вычислений.

Хайкин [164] измерял поверхностный импеданс кадмия, температура сверхпроводящего перехода которого равна $0,56^\circ\text{K}$. Используемая им частота соответствует энергии $0,9k_B T_c$. На рис. 29 приведены наблюдаемые

значения и результаты теоретических вычислений Абрикосова, Горькова и Халатникова [129, 130], проведенных для липпардовского предела (12.43). Согласие опять прекрасное.

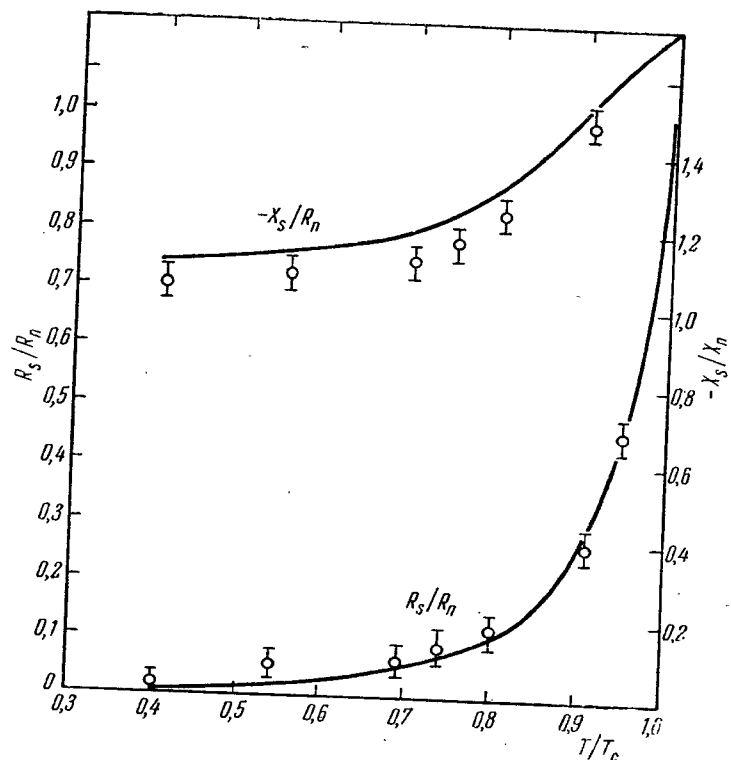


Рис. 29. Экспериментальные значения поверхностного импеданса, измеренные [164] на кадмии, и теоретические кривые Абрикосова и др. [129, 130] для липпардовского предельного случая.

Наконец, на рис. 30 приведены результаты некоторых измерений поверхностного импеданса, выполненных Ричардсом и Тинкхамом в далекой инфракрасной области. Они измеряли поглощение энергии в зависимости от частоты излучения для частот, больших частоты, отвечающей ширине щели. Найденные значения ширины щели для различных веществ приведены в табл. II. Они существенно

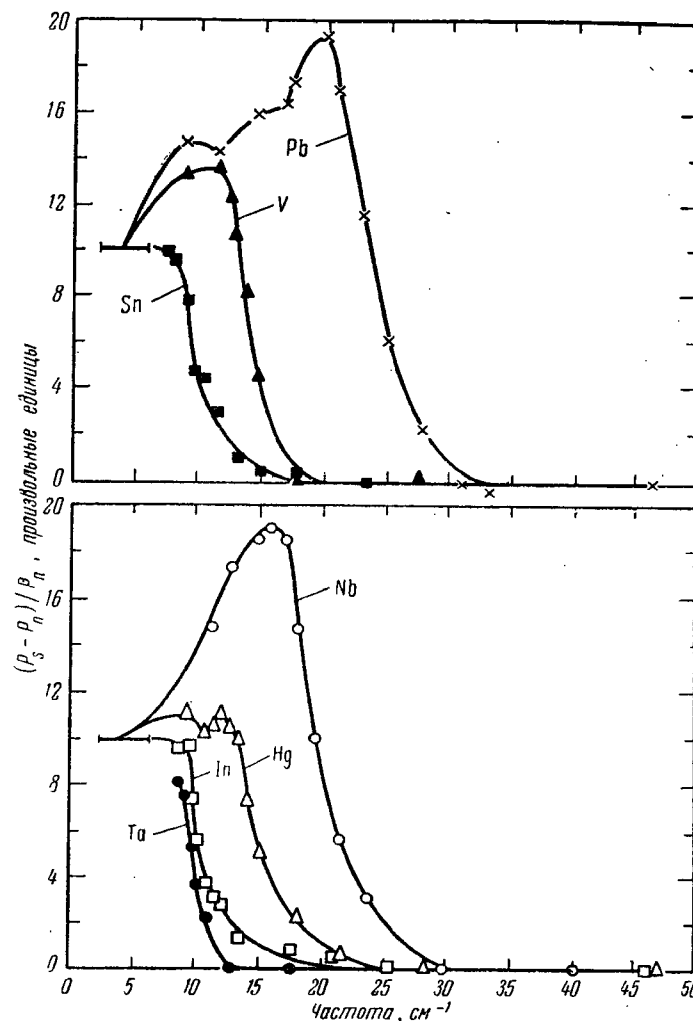


Рис. 30. Частотная зависимость электромагнитной мощности, поглощаемой массивными сверхпроводящими образцами в далекой инфракрасной области (согласно измерениям Ричардса и Тинкхама).

Здесь P_s и P_n — мощности, поглощаемые в сверхпроводящем и нормальном состоянии соответственно. Экспериментальные точки соответствуют (цифры в скобках указывают значение T_c в градусах Кельвина): \times — свинец (7,15); \blacktriangle — ванадий (5,10); \blacksquare — олово (3,73); \square — индий (3,39); \triangle — ртуть (4,15); \bullet — тантал (4,39); \circ — ниобий (9,00).

отклоняются от $3,5k_B T_c$, изменяясь от $2,8k_B T_c$ для ниобия, до $4,6k_B T_c$ для ртути. В общем ширина щели падает с ростом дебаевской температуры. Обнаруженный этими же авторами ход кривых поглощения для свинца и ртути указывает на возможность поглощения или в результате возбуждения коллективных колебаний с энергиями, меньшими ширины щели, или в результате эффектов анизотропии. Вообще говоря, экспериментальные кривые поглощения приближаются к соответствующим значениям в нормальном состоянии быстрее, чем это следует из теории.

Итак, микроскопическая теория электромагнитных свойств сверхпроводников в целом удивительно хорошо согласуется с экспериментом, особенно при использовании эмпирических значений для ширины энергетической щели и ее температурной зависимости. Имеющиеся расхождения, возможно, могут быть связаны со сложностью зонной структуры реальных металлов по сравнению с использованной при построении теории изотропной моделью. Заметим, что интересные опыты Сливак [163, 165], изучавшей зависимость поверхностного импеданса от напряженности магнитного поля, полностью еще не поняты [166].

§ 13. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

До сих пор мы обсуждали теоретические проблемы, связанные только со спектром квазичастиц. Вместе с тем с точки зрения градиентно инвариантного рассмотрения эффекта Мейсснера и полного описания поведения сверхпроводников во внешних полях, изменяющихся во времени и в пространстве, существенную роль играют коллективные возбуждения¹⁾. Энергия этих возбуждений «отщепляется» от непрерывного спектра в результате остаточных взаимодействий, не учитываемых в приближении, используемом для рассмотрения отдельных квазичастиц. По аналогии с нормальным состоянием коллективные возбуждения можно описывать как когерентную суперпозицию конфигураций квазичастиц.

¹⁾ См. второе примечание на стр. 86.

В сверхпроводящем состоянии могут существовать плазменные колебания, причем они, по сути дела, не отличаются от плазменных колебаний в нормальном состоянии. В связи с высокими энергиями (~ 15 эв) реальные плазменные возбуждения не проявляются в обсуждаемых нами явлениях, отвечающих низким частотам ($\hbar\nu < 10^{-2}$ эв). Однако виртуальное возбуждение плазмонов существенно при получении градиентно инвариантной формы ядра K , связывающего плотность тока с векторным потенциалом. При кулоновской калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ не нужно рассматривать ни реальных, ни виртуальных плазменных возбуждений в силу того, что плотность плазменного тока носит продольный характер. Поэтому вычисления часто упрощаются при выборе калибровки $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, как это и было сделано в § 12.

Новой чертой сверхпроводящего состояния является возможность появления экситоноподобных возбуждений с энергиями, меньшими ширины энергетической щели, как это было указано Андерсоном [23, 24] и Боголюбовым [13—21]. Отсутствие таких возбуждений в нормальном состоянии связано с тем, что конечная плотность одночастичных состояний вблизи поверхности Ферми должна приводить к быстрому распаду коллективных возбуждений. В сверхпроводящем состоянии, в силу отсутствия одночастичных состояний внутри щели, экситонные возбуждения должны, по-видимому, иметь большое время жизни. В противоположность плазмонным возбуждениям экситоны могут играть роль и в реальных, и в виртуальных процессах, и с ними связаны наблюдаемые физические эффекты. Реальные переходы с образованием экситона вносят резонансный вклад в связанную с поглощением часть зависящего от частоты и волнового вектора ядра $K(q, \omega)$ при $q\xi_0 < 1$ и $\hbar\omega < 2\Delta$. Виртуальные же процессы с образованием экситонов оказывают небольшое влияние на вещественную часть ядра K для всех представляющих интерес частот. Поскольку природа экситонного спектра тесно связана с угловой зависимостью остаточного двухчастичного взаимодействия $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, параметр теории [12] $N(0) V$ уже недостаточен для выяснения вопроса о том, какие экситоны появляются в данном сверхпроводящем металле. Для существования экситонного состояния с моментом L (соответ-

отклоняются от $3,5k_B T_c$, изменяясь от $2,8k_B T_c$ для ниобия, до $4,6k_B T_c$ для ртути. В общем ширина щели падает с ростом дебаевской температуры. Обнаруженный этими же авторами ход кривых поглощения для свинца и ртути указывает на возможность поглощения или в результате возбуждения коллективных колебаний с энергиями, меньшими ширины щели, или в результате эффектов анизотропии. Вообще говоря, экспериментальные кривые поглощения приближаются к соответствующим значениям в нормальном состоянии быстрее, чем это следует из теории.

Итак, микроскопическая теория электромагнитных свойств сверхпроводников в целом удивительно хорошо согласуется с экспериментом, особенно при использовании эмпирических значений для ширины энергетической щели и ее температурной зависимости. Имеющиеся расхождения, возможно, могут быть связаны со сложностью зонной структуры реальных металлов по сравнению с использованной при построении теории изотропной моделью. Заметим, что интересные опыты Сливак [163, 165], изучавшей зависимость поверхностного импеданса от напряженности магнитного поля, полностью еще не поняты [166].

§ 13. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

До сих пор мы обсуждали теоретические проблемы, связанные только со спектром квазичастиц. Вместе с тем с точки зрения градиентно инвариантного рассмотрения эффекта Мейсснера и полного описания поведения сверхпроводников во внешних полях, изменяющихся во времени и в пространстве, существенную роль играют коллективные возбуждения¹⁾. Энергия этих возбуждений «отщепляется» от непрерывного спектра в результате остаточных взаимодействий, не учитываемых в приближении, используемом для рассмотрения отдельных квазичастиц. По аналогии с нормальным состоянием коллективные возбуждения можно описывать как когерентную суперпозицию конфигураций квазичастиц.

¹⁾ См. второе примечание на стр. 86.

В сверхпроводящем состоянии могут существовать плазменные колебания, причем они, по сути дела, не отличаются от плазменных колебаний в нормальном состоянии. В связи с высокими энергиями (~ 15 эв) реальные плазменные возбуждения не проявляются в обсуждаемых нами явлениях, отвечающих низким частотам ($\hbar\nu < 10^{-2}$ эв). Однако виртуальное возбуждение плазмонов существенно при получении градиентно инвариантной формы ядра K , связывающего плотность тока с векторным потенциалом. При кулоновской калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ не нужно рассматривать ни реальных, ни виртуальных плазменных возбуждений в силу того, что плотность плазменного тока носит продольный характер. Поэтому вычисления часто упрощаются при выборе калибровки $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, как это и было сделано в § 12.

Новой чертой сверхпроводящего состояния является возможность появления экситоноподобных возбуждений с энергиями, меньшими ширины энергетической щели, как это было указано Андерсоном [23, 24] и Боголюбовым [13—21]. Отсутствие таких возбуждений в нормальном состоянии связано с тем, что конечная плотность одночастичных состояний вблизи поверхности Ферми должна приводить к быстрому распаду коллективных возбуждений. В сверхпроводящем состоянии, в силу отсутствия одночастичных состояний внутри щели, экситонные возбуждения должны, по-видимому, иметь большое время жизни. В противоположность плазменным возбуждениям экситоны могут играть роль и в реальных, и в виртуальных процессах, и с ними связаны наблюдаемые физические эффекты. Реальные переходы с образованием экситона вносят резонансный вклад в связанную с поглощением часть зависящего от частоты и волнового вектора ядра $K(q, \omega)$ при $q\xi_0 < 1$ и $\hbar\omega < 2\Delta$. Виртуальные же процессы с образованием экситонов оказывают небольшое влияние на вещественную часть ядра K для всех представляющих интерес частот. Поскольку природа экситонного спектра тесно связана с угловой зависимостью остаточного двухчастичного взаимодействия $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, параметр теории [12] $N(0)$ уже недостаточен для выяснения вопроса о том, какие экситоны появляются в данном сверхпроводящем металле. Для существования экситонного состояния с моментом L (соответ-

ствующего p -, d -, ... экситонам)¹⁾ необходимо, чтобы потенциал V_L был отрицательным (V_L — часть взаимодействия $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, отвечающая моменту L). Плазмон соответствует S -состоянию экситона, энергия которого гораздо больше в результате дальнегодействующего кулоновского взаимодействия.

Достаточно общий подход к рассмотрению возбуждений обоих типов (квазичастичных и коллективных) в пределе высокой плотности связан с использованием обобщенного, зависящего от времени метода самосогласованного поля или приближения случайных фаз, введенного Андерсеном [23, 24] и независимо Боголюбовым, Ширковым и Толмачевым [17]. Этот метод является обобщением метода, предложенного Бомом и Пайнсом [169] (см. также [170]) для описания нормального состояния. Наиболее полное описание метода имеется в работе Рикайзена [26], который применял его для вывода градиентно инвариантной формы ядра $K(q, \omega)$ в сверхпроводящем состоянии.

Если не говорить о малых членах, связанных с экситонами, то результаты Рикайзена для калибровки $\text{div } \mathbf{A} = 0$ идентичны полученным в основной работе Купера и авторов [12].

С целью иллюстрации характера, зависящего от времени приближения самосогласованного поля, начнем с рассмотрения спектра элементарных возбуждений нормального состояния. Получающийся спектр справедлив в предельном случае высокой плотности $r_s < 1$ ($n^{-1} = 4\pi/3 (r_s a_0)^3$, $a_0 \equiv$ радиус Бора). В этом предельном случае энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению с кинетической энергией электронов. Поэтому хорошее приближение можно было бы получить методом теории возмущений с фермиевским фоном в качестве нулевого приближения, если бы не сингулярный характер кулоновского взаимодействия для длинных волн

$$\left(V(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \rightarrow \infty \text{ при } q \rightarrow 0 \right).$$

¹⁾ J. C. Fisher, частное сообщение (1958). В дополнение к экситонам типа частица — частица, возникающим при $q_L > 0$, в работе [167] указывается на возможность появления при $q_L < 0$ экситонов типа частица — дырка,

Как оказывается, влияние на данный электрон дальнегодействующей составляющей V может быть выражено через средний самосогласованный потенциал, обусловленный когерентным движением электронов, плюс малый флуктуирующий потенциал, связанный с остаточным хаотическим движением этих электронов. В работе Бома и Пайнса было показано, что в пределе высокой плотности флуктуирующим потенциалом можно пренебречь.

Для получения спектра элементарных возбуждений в рамках приближения самосогласованного поля удобно

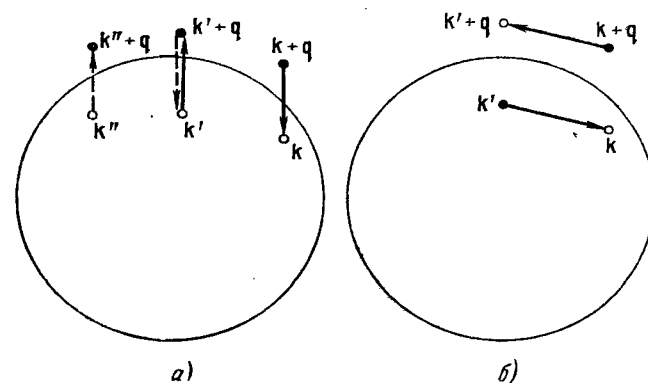


Рис. 31. Процессы рассеяния дырка — электрон, рассматриваемые в приближении случайных фаз.

рассматривать движения пар электрон — дырка с общим импульсом $\hbar q$. Под влиянием кулоновских сил электрон и дырка в состояниях $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ и \mathbf{k} соответственно могут рекомбинировать и возбуждать электрон в состоянии $\mathbf{k}' + \mathbf{q}$, оставляя дырку в состоянии \mathbf{k}' . Эта новая пара снова может рекомбинировать, создавая пару $\mathbf{k}'' + \mathbf{q}$ и \mathbf{k}'' . Такой процесс иллюстрируется схемой на рис. 31, а. Возможны другие, так называемые обменные процессы, при которых пара в состояниях $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ и \mathbf{k} рассеивается непосредственно в $\mathbf{k}' + \mathbf{q}$ и \mathbf{k}' без рекомбинации (исчезновения) и появления вновь (рождения) (рис. 31, б). Матричный элемент для процесса (а) содержит множитель (матричный элемент) $4\pi e^2/q^2$, в то время как матричный элемент в случае (б) содержит множитель $4\pi e^2/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2$. В силу этого в пределе $q \rightarrow 0$ процессы типа (а) в среднем значительно более

существенны, чем (б). Если ограничиться рассмотрением только прямых процессов, что (как показали Гелла-Ман и Бракнер [171—175]) достаточно при $r_s < 1$, то некоторые линейные комбинации состояний электрон — дырка будут собственными состояниями гамильтониана. Плазменные колебания, отщепляющиеся от непрерывного спектра, отвечают суперпозиции конфигурации пар, в которых все состояния имеют один и тот же знак и примерно равный вес. Эта ситуация в известном смысле аналогична когерентной суперпозиции многочастичных конфигураций, используемой для образования основного состояния сверхпроводника. Остающиеся линейные комбинации пар электрон — дырка соответствуют состояниям рассеяния, в которых электрон и дырка слабо коррелируют. Формально спектр элементарных возбуждений находится с помощью определения тех линейных комбинаций $\mu_\alpha(\mathbf{q})^*$ операторов пары электрон — дырка:

$$\rho_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{q}) = c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^* c_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (13.1)$$

которые порождают собственное состояние приближенного гамильтониана:

$$H\mu_\alpha(\mathbf{q})^* \Psi_0 = (\hbar\Omega_\alpha(\mathbf{q}) + W_0)\mu_\alpha(\mathbf{q})^* \Psi_0. \quad (13.2)$$

Здесь H включает только члены взаимодействия, отвечающие поляризаационным процессам: $\hbar\Omega_\alpha(\mathbf{q})$ — энергия возбуждения α -й линейной комбинации операторов $\rho_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{q})$. Уравнение (13.2) удовлетворяется, если операторы $\mu_\alpha(\mathbf{q})^*$ подчиняются соотношению:

$$[H, \mu_\alpha(\mathbf{q})^*] = \hbar\Omega_\alpha(\mathbf{q})\mu_\alpha(\mathbf{q})^*. \quad (13.3)$$

Разложим $\rho_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{q})$ на среднее значение $\rho_{\mathbf{k}\sigma}^{(0)}(\mathbf{q})$, взятое по отношению к самосогласованному состоянию, плюс флуктуацию $\rho_{\mathbf{k}\sigma}^{(1)}(\mathbf{q})$ около этого среднего значения. Тогда процессы типа рис. 31, а учитываются, если в коммутаторе $[H, \rho_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{q})]$ сохраняются только члены первого порядка относительно $\rho^{(1)}$. Это как раз соответствует приближению самосогласованного поля (см. вычисления [176, 177]).

В пределе высокой плотности существенно линеаризовать уравнения относительно средних значений $\rho_{\mathbf{k}\sigma}^{(0)}(\mathbf{q})$, соответствующих фермиевскому фону. В этом случае только

компонента $\rho_{\mathbf{k}\sigma}(0) = n_{\mathbf{k}\sigma}$ для волнового вектора $q = 0$ будет иметь отличное от нуля среднее значение:

$$\rho_{\mathbf{k}\sigma}^{(0)}(0) \equiv n_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1, & |k| < k_F, \\ 0, & |k| > k_F. \end{cases} \quad (13.4)$$

Можно непосредственно показать, что энергия элементарных возбуждений определяется дисперсионным соотношением:

$$1 = 2V(q) \sum_{\mathbf{k}} \frac{(n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})}{(\hbar\Omega_\alpha(q))^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})^2}. \quad (13.5)$$

График решений уравнений (13.5) приведен на рис. 32. Появляются оба типа состояний: состояния, описывающие пары электрон — дырка в состоянии рассеяния (состоянии

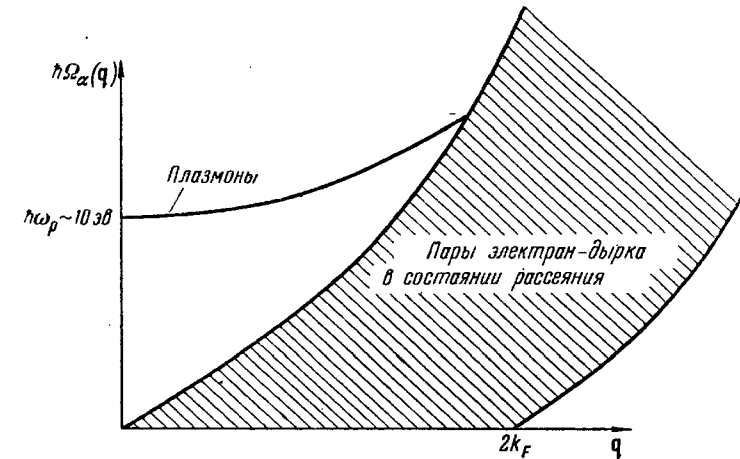


Рис. 32. Спектр элементарных возбуждений для нормального состояния.

несвязанных, но взаимодействующих электрона и дырки) и коллективные плазменные состояния. Энергия пар электрон — дырка в рамках приближения самосогласованного поля сохраняет свое значение $\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}$, отвечающее отсутствию взаимодействия; в то же время волновые функции сильно изменяются. Каждая частица (электрон или дырка) окружена областью с уменьшенной средней концентрацией

частиц того же типа (электронов или дырок соответственно), и естественным образом мы приходим к картине «противотока», описанной в § 5.

При более тщательном анализе оказывается, что разность $\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}$ изменяется в связи с появлением члена

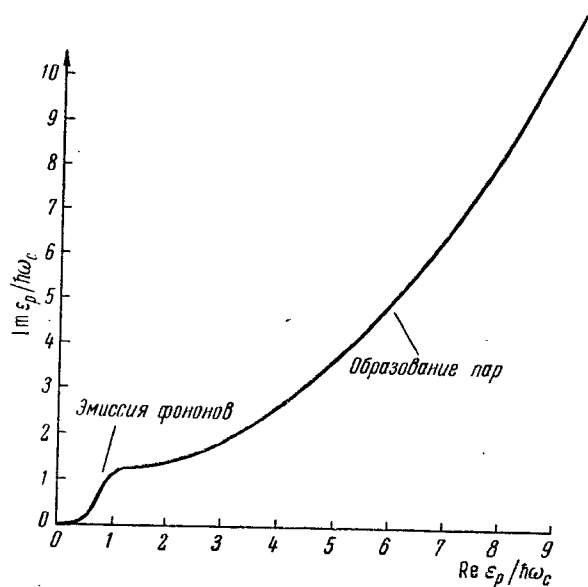


Рис. 33. Энергетическая зависимость мнимой части энергии возбуждения для нормального состояния.

Для типичных значений электронной плотности, возбуждения плохо определены вблизи дебаевской энергии и для энергий, превосходящих дебаевскую в 10 раз.

собственной энергии. Этот член комплексный, его мнимая часть соответствует конечному времени жизни возбуждений [178, 179]¹⁾. Мнимая часть собственной энергии отдельной частицы, вычисленная с помощью метода функций Грина, показана на рис. 33 в зависимости от вещественной части энергии возбуждения. Для энергий, меньших максимальной энергии фононов $\hbar\omega_{\text{max}}$, основную роль играет излу-

¹⁾ На важную роль эффекта конечного времени жизни для случая сверхпроводников было указано Бардином [180].

чение реальных фононов; для энергий $\epsilon > 10\hbar\omega_{\text{max}}$ решающее значение имеет образование пар электрон — дырка, и уровни одиночных частиц становятся очень широкими. Влияние конечного времени жизни на уравнение для энергетической щели уже было обсуждено в § 9.

В сверхпроводящем состоянии взаимодействия способствующие образованию пар приводят к отличным от нуля средним значениям для операторов вида (а также для $n_{\mathbf{k}\sigma}$):

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \equiv \chi_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{(1)}, \\ \chi_{\mathbf{k}} &= (\Psi_0, b_{\mathbf{k}} \Psi_0). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Как указали независимо Андерсон [23, 24] и Боголюбов [13—21], более полное описание элементарных возбуждений в сверхпроводящем состоянии может быть получено при учете остаточных взаимодействий, не принимавшихся во внимание в работе Купера и авторов [12]. И Андерсон и Боголюбов использовали обобщенное приближение самосогласованного поля, связанное с введением обеих величин $\hbar_{\mathbf{k}}$ и $\chi_{\mathbf{k}}$. Анализ выполняется наиболее просто [26] с помощью операторов квазичастиц, рассмотренных в § 11. Задача опять сводится к отысканию тех линейных комбинаций $\mu_{\alpha}^*(q)$ операторов $\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^* \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^*$, $\gamma_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}$ и $\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^* \gamma_{\mathbf{k}\sigma}$, которые порождают элементарные возбуждения системы.

Нормальные колебания у линеаризованных уравнений определяются для сверхпроводящего состояния несколько более сложно, чем для нормальных металлов. Как указал Рикайзен [26], ядро K и диэлектрическая постоянная могут быть определены и без нахождения операторов нормальных колебаний в явном виде. В результате получается полностью градиентно инвариантное описание эффекта Мейснера, причем ядро K для нулевой частоты идентично ядру, полученному Купером и авторами [12], если ограничиться рассмотрением только s -волновой части двухчастичного потенциала (см. § 9).

При проведении градиентно инвариантных вычислений становится ясным, что продольные коллективные возбуждения вносят вклад в поляризационный ток, который в сумме с квазичастичным поляризационным током погашает диамагнитный градиентный ток, что приводит к градиентно инвариантной форме ядра K . Если ξ -и d -

волновые части потенциала положить равными, то поправки, вносимые в K по порядку величины, будут равны 10^{-2} , и ими вполне можно пренебречь.

Диэлектрическая постоянная $\epsilon(q, \omega)$ существенно отличается от своего значения для нормального металла, только если $\hbar\omega \approx \hbar v_0 q < \Delta$. Из результатов Рикайзена следует также, что выражение для коэффициента акустического поглощения, вычисленное в § 11 в рамках приближения отдельных квазичастиц, справедливо с точностью до членов порядка:

$$\left(\frac{\omega}{v_0 q}\right)^2 \approx 10^{-4}; \quad \left(\frac{\hbar v_0 q}{\Delta}\right)^2 \ll 1. \quad (13.7)$$

Цунето [150] применил метод Рикайзена для рассмотрения поверхностного импеданса при отличной от нуля частоте. Предполагая, что не равны нулю только s - и d -волновые части потенциала, он обнаружил существование «предшествующего» поглощения для частот, лежащих ниже частоты $2\Delta/\hbar$, соответствующих ширине энергетической щели. В применении к свинцу и ртути результаты Цунето отвечают связанному с экситонными состояниями в щели поглощению, которое на порядок меньше поглощения, наблюдавшегося для этих веществ Гинзбергом, Ричардсом и Тинкхамом [29]. Поскольку эффекты конечного времени жизни должны, по-видимому, играть важную роль в упомянутых сверхпроводниках с сильной связью, желательно обобщить теорию на случай сильного взаимодействия. Только после этого можно будет сделать выводы относительно роли, которую играют коллективные возбуждения в экспериментах [29].

Спектр элементарных возбуждений сверхпроводящего состояния схематически представлен на рис. 34. Как упоминалось выше, плазменные нормальные колебания в сверхпроводнике почти идентичны плазменным нормальным колебаниям для нормального состояния. Широкий спектр квазичастиц пар в состоянии рассеяния (т. е. в несвязанном состоянии. — *Ред.*) ограничивается снизу энергетической щелью 2Δ .

Экситонные состояния (с энергиями, лежащими внутри энергетической щели) могут быть представлены как пара квазичастиц, связанных вместе в реальном пространстве.

Центр тяжести пары имеет импульс, равный $\hbar q$. Экситонная волновая функция имеет вид [167]:

$$\Psi_{q,L,M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_{q,L,M}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \frac{q}{2}} S_{12}, \quad (13.8)$$

где S_{12} — спиновая функция, а φ описывает относительное движение компонент пары, которая имеет размер порядка ξ_0 . В пределе $q \rightarrow 0$ получаем:

$$\varphi_{L,M} \sim Y_L^M(\theta_{12}, \varphi_{12}), \quad (13.9)$$

что соответствует обычной картине экситонных p -, d -, ... состояний в изоляторах.

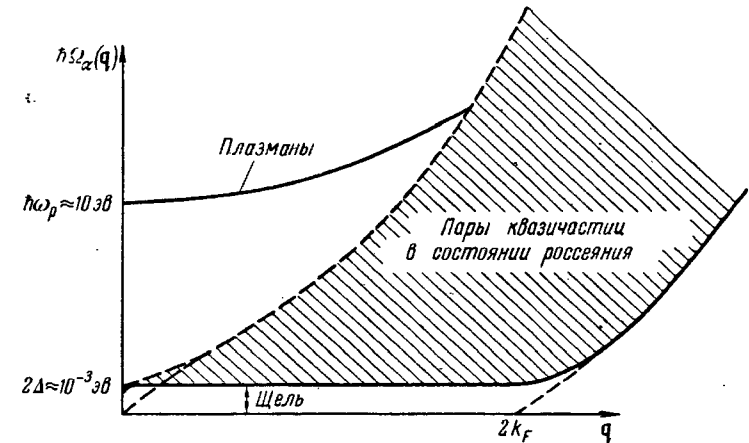


Рис. 34. Спектр элементарных возбуждений для сверхпроводящего состояния.

Для больших q состояния с различными L смешиваются, хотя для $q\xi_0 \ll 1$ смешение мало; в то же время M — хорошее квантовое число для всех q , если только потенциал не имеет кристаллической анизотропии. Поскольку квазичастицы являются фермионами, волновая функция должна быть антисимметричной по отношению к обмену \mathbf{r}_1, σ_1 и \mathbf{r}_2, σ_2 . Таким образом, состояние с четным L должно иметь синглетную спиновую функцию, а нечетным значениям L отвечает триплетная спиновая функция.

Спектр экситонных состояний определяется угловой зависимостью остаточного двухчастичного потенциала $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Если разложить потенциал на сферические гармоники

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{L,M} V_L(|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|) Y_L^M(\theta, \varphi) Y_L^M(\theta', \varphi') \quad (13.10)$$

и аппроксимировать $V_L(|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|)$ следующим образом:

$$V_L(|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|) = \begin{cases} V_L |\varepsilon_k| \cdot |\varepsilon_{k'}| < \hbar\omega, \\ 0 \text{ во всех других случаях,} \end{cases} \quad (13.11)$$

то для существования экситонного состояния L должно

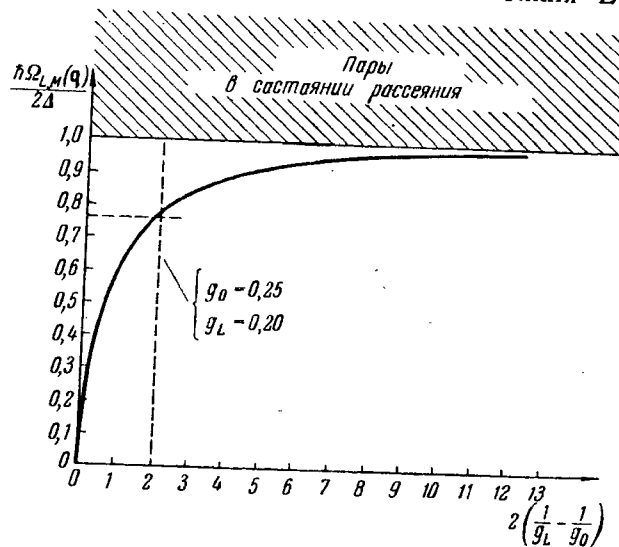


Рис. 35. Энергия экситонных состояний внутри энергетической щели для нулевого импульса центра тяжести как функция константы связи.

соблюдаться условие $g_0 > g_L > 0$. Здесь константа связи g_L равна:

$$g_L = -N(0)V_L \quad (13.12)$$

и $g_0 = -N(0)V_0 = N(0)V$ — константа связи, введенная в § 9. На рис. 35 приведен график экситонной энергии как функции g_L при $q=0$. Когда $g_L > g_0$, энергия воз-

буждения мнимая и система нестабильна, если ее основное состояние описывать с помощью s -состояний пар, как это было сделано в § 8. Например, если g_1 — наибольшая константа связи, то основное состояние состоит из функций пар φ_1 , имеющих симметрию p -типа [см. (8.10)]:

$$\varphi_1^M(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \varphi_1(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) Y_1^M(\theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (13.13)$$

Этому случаю соответствует образование триплетных пар, рассмотренное Фишером¹⁾. Если преобладает d -волновой

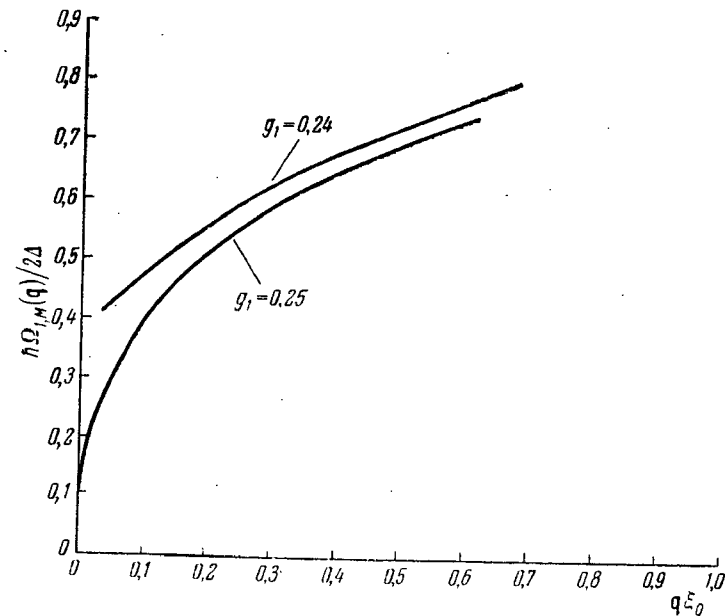


Рис. 36. Энергия экситонных состояний как функция импульса центра тяжести $\hbar q$ для магнитного квантового числа $M \neq 0$.

потенциал, основное состояние описывается с помощью синглетных d -функций (этот случай был рассмотрен Андерсоном и др. [181] в применении к He^3). На рис. 36 дан график зависимости экситонной энергии от импульса центра тяжести пары для различных значений g_L . При $M \neq 0$ дальнедействующий кулоновский потенциал не

¹⁾ J. C. Fisher, частное сообщение (1958).

играет никакой роли, и эти экситоны можно рассматривать как поперечные коллективные возбуждения. Состояния с $M=0$ могут быть отщеплены от состояний с $M \neq 0$, причем экситоны в s -состоянии соответствуют плазменным колебаниям (если основное состояние получается в результате образования пар в s -состоянии).

Для потенциалов $V(|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|)$, которые не могут быть выражены в виде произведения $W(|\mathbf{k}|)W(|\mathbf{k}'|)$, может существовать больше чем одно связанное состояние с данными L и M . В случае атома водорода это соответствует состояниям с различными главными квантовыми числами n .

Обсудим теперь кратко вопрос об электронной спиновой восприимчивости в сверхпроводниках. В нормальном состоянии спиновая восприимчивость равна $\chi_n = 2\mu_B^2 N_M(0)$. Здесь μ_B — магнетон Бора и $N_M(0)$ — эффективная плотность состояний у поверхности Ферми; она отличается от плотности $N(0)$, фигурирующей в выражении для электронной теплоемкости, наличием членов, связанных с кулоновской обменной энергией. В опытах по ядерному резонансу найтовский сдвиг K прямо пропорционален χ_n (по определению K есть относительная разность резонансных частот для ядер в свободных ионах и в металле). Поскольку восприимчивость χ_n пропорциональна $N_M(0)$, эксперименты по ядерному резонансу дают сведения о плотности состояний у поверхности Ферми.

Райф [43] измерял найтовский сдвиг K_s в сверхпроводящих ртутных коллоидах, состоящих главным образом из частиц с диаметром, меньшим 500 \AA (меньше λ). Он нашел, что K_s быстро падает при $T < T_c$, но затем при $T \approx \frac{1}{2} T_c$ достигает насыщения, равного $\frac{2}{3} K_n$. На рис. 37

приведены данные Райфа, а также данные, полученные недавно Эндросом и Найтом [42] в опытах с тонкими пластинками из сверхпроводящего олова (толщина $\approx 40 \text{ \AA}$, диаметр $\approx 140 \text{ \AA}$). Отношение K_s/K_n стремится к насыщению при $K_s/K_n \approx 0,73$ (для сравнения была взята соль SnCl_2). Иосида [182] показал, что микроскопическая теория приводит к восприимчивости χ_s , которая в однородном магнитном поле обращается в нуль при $T \rightarrow 0^\circ \text{ K}$ [187].

Этот вывод, очевидно, находится в противоречии с экспериментом. Указанный теоретический результат получается в силу того, что минимальная энергия 2Δ , необходимая для образования двух квазичастиц из основного состояния, больше зеемановской энергии $\mu_B H_0$, которая выигрывается при образовании возбуждений.

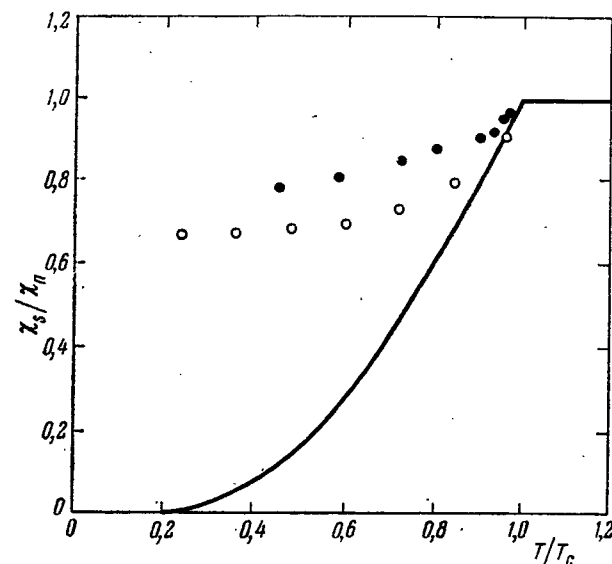


Рис. 37. Температурная зависимость приведенного сдвига Найта, измеренная Райфом [43] на ртутных коллоидных растворах и Эндросом и Найтом [42] на оловянных пластинках.

Экспериментальные точки соответствуют: ● — олову, ○ — ртути. Сплошная линия — теоретическая кривая.

Гейне и Пиппард [183] предложили такую альтернативную форму входящих в теорию матричных элементов, которая приводит к отличному от нуля найтовскому сдвигу. Пока не удалось, однако, построить волновых функций, приводящих к таким матричным элементам.

Феррелл [184] и Андерсон [185] предположили, что в результате спин-орбитального взаимодействия для малых образцов вблизи $T=0^\circ \text{ K}$ может быть получено отличное от нуля значение χ_s ; это связано с тем, что

одночастичные волновые функции нормального состояния не являются собственными состояниями спина. В этом случае магнитное взаимодействие

$$-\mu_B \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{H}_0 \equiv H_M$$

будет иметь отличный от нуля матричный элемент для перехода между основным и возбужденным состояниями. Поэтому восприимчивость χ_s , вероятно, можно вычислить по теории возмущений с использованием основного состояния, определенного в отсутствие магнитного поля.

Ряд авторов [183, 185, 186]¹⁾ указали, что и в отсутствии спин-орбитальных эффектов получают отличные от нуля значения восприимчивости, если учесть ее зависимость от волнового вектора, что нужно иметь в виду для изменяющихся в пространстве полей. В результате этого внутри области проникновения поля в массивный образец должен был бы наблюдаться положительный найтовский сдвиг. Область же с обратным направлением спинов, которая должна существовать, чтобы удовлетворить условию $\chi_s(q=0)=0$, будет охватывать слой толщиной $\sim \xi_0$ под поверхность образца и не должна оказывать влияния на наблюдаемый резонансный спектр. В настоящее время нет экспериментальных данных, подтверждающих такую картину. Зависящая от q восприимчивость не может объяснить вышеупомянутые экспериментальные результаты, полученные на олове. В любом состоянии, которое получается с помощью теории возмущений из синглетного состояния без учета спин-орбитальных эффектов, полное спиновое намагничение должно быть равно нулю. В связи с этим теория предсказывает уширение резонансной линии с небольшим или равным нулю найтовским сдвигом. Эксперименты же, наоборот, указывают на наличие сдвига, величина которого по меньшей мере достигает ширины линии.

¹⁾ А. А. Абрикосов и Л. П. Горьков [187] показали, что результат Иосиды справедлив в пределе длинных волн и при наличии рассеяния на примесях, не приводящего к перебору спина. — *Прим. авт. при корректуре.*

Один из авторов [188] предположил, что для однородного поля конечное значение χ_s при $T=0^\circ \text{K}$ может быть получено, если основное состояние в присутствии магнитного поля H_0 образуется из пар, отличных от пар для случая $H_0=0$ ¹⁾. По аналогии с парами $(\mathbf{k} + \mathbf{q} \uparrow, -\mathbf{k} + \mathbf{q} \downarrow)$, введенными для описания состояний, переносящих ток, можно начать с состояний с намагничением, соответствующим нормальному металлу; затем рассматривается образование пар в состояниях, отвечающих поверхностям Ферми для спинов, направленных по и против поля. Эти одночастичные состояния не переходят друг в друга при изменении знака времени. Однако такое условие и нельзя выдвигать в присутствии магнитного поля. Расчет упомянутой модели еще не произведен.

Было бы интересно исследовать роль спин-орбитальных эффектов, измеряя K_s в легких металлах типа алюминия (в этом случае можно ожидать более слабое спин-орбитальное взаимодействие, чем в олове и ртути).

§ 14. ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ И НЕЗАТУХАЮЩИЙ ТОК

14.1. Двухжидкостная модель

Двухжидкостная модель Не II оказалась исключительно удачной и с ее помощью были предсказаны и объяснены многие замечательные свойства сверхтекучей жидкости, такие, как второй звук, конвекционный перенос тепла, а также различные термомеханические эффекты. Возникает вопрос о том, могут ли соответствующие эффекты наблюдаться в сверхпроводниках. Гортером [190] был сделан обзор и проведено сравнение двухжидкостной модели для сверхпроводников и для жидкого гелия. Сверхтекучая компонента — это часть жидкости, текущая без трения; ее течение соответствует потоку в основном состоянии и не переносит энтропию. Нормальная компонента связана с тепловыми возбуждениями; течение нормальной компоненты происходит с трением. Формально уравнения для

¹⁾ Аналогичное предположение высказано Блаттом [189] (в этой связи см. также статью [244*]. — *Прим. ред.*).

He II представляют собой уравнения для двух взаимопроникающих и не взаимодействующих жидкостей. Ландау [191] показал, однако, что эти уравнения можно интерпретировать на языке свойств основного состояния и спектра элементарных возбуждений жидкости.

Аргументация Ландау может быть формально применена для построения двухжидкостной модели сверхпроводников [192], но в силу целого ряда обстоятельств для сверхпроводников эта модель значительно менее полезна, чем для He II. Прежде чем остановиться на выводе формул, укажем причины, благодаря которым многие явления, характерные для двухжидкостной модели He II, трудно наблюдать в сверхпроводниках. Ниже мы остановимся также на применениях модели к незатухающим токам и критическим токам в тонких пленках, а также на теории Гинзбурга — Ландау.

Некоторые усложняющие факторы, ограничивающие использование двухжидкостной модели в сверхпроводниках, таковы:

1) В сверхпроводнике ток создает магнитное поле, которое сильно влияет на сам ток. Например, при прохождении через сверхпроводящий стержень ток распределяется в тонком поверхностном слое с толщиной, равной глубине проникновения. Можно считать, что этот ток создает магнитное поле, или наоборот, что магнитное поле создает токи, приводящие к эффекту Мейсснера, т. е. препятствующие проникновению поля в сверхпроводник. Сумма всех этих экранирующих токов дает общий ток, текущий по стержню. Плотность тока становится приблизительно однородной только в случае образцов с размерами порядка глубины проникновения или меньшей. Практически это легко достигается в тонких пленках. Чтобы избежать усложнений, ниже мы будем пренебрегать эффектами магнитного поля и предположим, что ток однороден. Тогда электроны обладают сверхтекучими свойствами, и возможно существование незатухающего тока.

2) Возбужденные электроны (нормальная компонента) рассеиваются и приходят в равновесие с решеткой. Поэтому трудно создать поток нормальной компоненты в отсутствие электрического поля. Это одна из причин, объясняющих трудность наблюдения второго звука в сверх-

проводниках. Для простоты мы сначала будем пренебрегать релаксационными эффектами, но позднее рассмотрим следствия, вытекающие из учета релаксации.

3) Соотношение неопределенности приводит к значительно большему минимальному размеру возбуждений в сверхпроводнике, чем в He II (в основном это является следствием большой разницы масс электрона и атома гелия); квази-частичные возбуждения в сверхпроводнике могут быть определены разумным образом, лишь если их протяженность больше длины когерентности ($\sim 10^{-4}$ см). Локальные соотношения двухжидкостной модели могут быть использованы только при условии медленного изменения характера движения жидкости на длине такого порядка. Это налагает, например, ограничения на минимальную длину волны, на которой можно надеяться наблюдать второй звук.

4) Как указывалось выше, теплопроводность в He II может осуществляться в результате противотока нормальной и сверхтекучей компонент, причем тепло переносится нормальной компонентой. Аналогичный эффект может иметь место в сверхпроводнике, но величина его будет мала по сравнению с обычной электронной теплопроводностью [193, 245*, 246*]. Элементарные возбуждения, возникающие при нагреве сверхпроводника, соответствуют электронам над поверхностью Ферми и дыркам под поверхностью Ферми. Электроны и дырки образуются примерно в равных количествах и стремятся перемещаться в одном и том же направлении. В силу этого суммарный электрический ток, связанный с тепловым потоком, очень мал. В нормальном металле этот ток связан с термоэлектрическим эффектом и определяет разницу между теплопроводностью при $j=0$ и при $E=0$. Как известно, эта разница очень мала. Соответственно мала величина рассматриваемого эффекта в сверхпроводнике¹⁾.

Для формального вывода уравнений двухжидкостной модели пренебрежем влиянием магнитного поля и процессами релаксации электронов с решеткой. Предположим,

¹⁾ Положенне в принципе может оказаться несколько иным, если существенную роль в электропроводности в сверхпроводящем состоянии играют экситонные возбуждения с большой длиной пробега [244*]. — Прим. ред.

далее, что изменение характера движения происходит медленно на длине когерентности. Кроме того, с целью простоты примем для нормального металла модель свободных электронов. Сначала рассмотрим ускорение, создаваемое электрическим полем \mathcal{E} . Общий импульс $m\mathbf{v}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ пар основного состояния ($\mathbf{p}_1 \uparrow, \mathbf{p}_2 \downarrow$) возрастает согласно уравнению Ньютона $m\dot{\mathbf{v}}_s = e\mathcal{E}$. При абсолютном нуле тепловые возбуждения отсутствуют, и распределение электронов смещается в k -пространстве как целое. Из-за энергетической щели рассеяние электронов, сопровождающееся переходом с одной стороны фермиевского распределения (в k -пространстве. — *Ред.*) на противоположную его сторону, энергетически невыгодно, пока не достигается критическая скорость, выше которой сверхпроводимость разрушается. Если v_0 — скорость на поверхности Ферми, то последнее происходит, когда

$$\frac{1}{2} m (v_0 + v_s)^2 - \frac{1}{2} m (v_0 - v_s)^2 > E_g = 2\Delta, \quad (14.1)$$

т. е. при $v_s > \Delta/(mv_0)$.

Для температуры, большей нуля, тепловые возбуждения могут уменьшить ток, так что только часть электронов будет свободно ускоряться полем. Второе уравнение Лондона имеет вид:

$$\frac{\partial (\Lambda(T) \mathbf{j}_s)}{\partial t} = \mathcal{E}, \quad (14.2)$$

где $\Lambda(T)$ — параметр Лондона, зависящий от температуры.

Можно записать $\mathbf{j}_s = -e\rho_s \frac{\mathbf{v}_s}{m}$, где ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты. При $T=0$ $\rho_s = \rho = nm$. В общем случае

$$\frac{\rho_s}{\rho} = 1 - \frac{\rho_n}{\rho} = \frac{\Lambda(0)}{\Lambda(T)}. \quad (14.3)$$

Эта функция, определяемая с помощью формулы (12.26), изображена графически на рис. 18 (см. стр. 95).

Лондон [1] показал, как, исходя из волновой функции основного состояния $\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$, можно построить функцию:

$$\Psi = \exp \left[i \sum_j \varphi(\mathbf{r}_j) \right] \Psi_0, \quad (14.4)$$

для которой v_s — медленно изменяющаяся функция положения. В локальной области около точки \mathbf{r} функция (14.4) соответствует смещению распределения в k -пространстве на $\delta\mathbf{k} = \text{grad} \varphi(\mathbf{r})$ и скорости потока

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \hbar m^{-1} \text{grad} \varphi(\mathbf{r}). \quad (14.5)$$

Из выражения (14.5) следует, что течение является потенциальным, так как $\text{rot} \mathbf{v}_s = 0$. Согласно Лондону [1] таким же образом может быть описан ток в сверхпроводящем кольце. В этом случае при обходе вокруг кольца φ может изменяться на величину $2\pi l$, где l — целое число.

Выражение для ρ_n может быть получено также методом, использованным Ландау в случае He II и обобщенным Динглем [194] на ферми-системы. Тепловые возбуждения могут обеспечить существование результирующего тока относительно основного состояния (т. е. состояния, имеющего место при $T=0$). Рассмотрим сначала основное состояние в покое ($\mathbf{v}_s = 0$) и предположим, что имеется результирующий импульс (поток массы):

$$\mathbf{J}_n = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} f(\mathbf{p}), \quad (14.6)$$

обусловленный возбуждениями с функцией распределения $f(\mathbf{p})$. Последняя может быть определена из требования минимальности свободной энергии F при заданном \mathbf{J}_n с помощью введения скорости \mathbf{v} в качестве множителя Лагранжа

$$\delta F - \mathbf{v} \delta \mathbf{J}_n = 0. \quad (14.7)$$

Это приводит к выражению:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{1 + \exp [(E(\mathbf{p}) - \mathbf{v}\mathbf{p})/k_B T]}. \quad (14.8)$$

Когда скорость \mathbf{v} мала, импульс \mathbf{J}_n пропорционален \mathbf{v} и соответствующий коэффициент определяется как плотность нормальной компоненты ρ_n :

$$\rho_n = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{J}_n}{\mathbf{v}} \right) = - \frac{4\pi}{3\hbar^3} \int_0^\infty p^4 \frac{d}{dE} \frac{1}{1 + \exp [E(\mathbf{p})/k_B T]} dp. \quad (14.9)$$

Этот результат находится в согласии с выражением, выведенным из (14.3).

В случае, когда имеется поток в основном состоянии, нормальная скорость определяется как $v_n = v_s + v$ и полный поток массы равен:

$$J = \rho v_s + \rho_n v = \rho_s v_s + \rho_n v_n. \quad (14.10)$$

Из (14.4) и выражения для кинетической энергии, связанной с v_s , находим полный прирост свободной энергии:

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_n v_n^2 + \frac{1}{2} \rho_s v_s^2. \quad (14.11)$$

Можно легко показать, как это сделал Дингл [194], что энтропия переносится нормальной компонентой. При этом не надо путать поток массы с потоком числа возбуждений $N_{\text{exc}} = \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p})$. Последние движутся с нормаль-

ной компонентой таким образом, что их поток равен $v_n N_{\text{exc}}$; этот поток, вообще говоря, отличен от $v_n \rho_n / m$.

Поток сверхтекучей компоненты со скоростью v_s может образоваться под действием электрического поля, имеющего характер импульса. Все электроны ускоряются полем, и общая скорость пар увеличивается до значения v_s . Рассеяние тепловых возбуждений стремится снизить ток, чтобы свободная энергия стала минимальной, но рассеяние не изменяет v_s . Согласно (14.11) рассеяние может лишь привести к равенству $v_n = 0$ с сохранением результирующего потока $J_s = \rho_s v_s$. Именно эта часть потока непосредственно определяется из уравнения Лондона (14.2). Изменить v_s может только сила, действующая или на все электроны или на их большую часть. При отсутствии такой силы ток не затухает.

Хотя наблюдение второго звука в сверхпроводниках затруднительно, интересно оценить скорость такого звука c_2 . Формально для этой цели можно использовать то же выражение, что и для He II [195]:

$$c_2^2 = \frac{\rho_s S^2 T}{\rho_n C_p}. \quad (14.12)$$

Здесь S — энтропия и C_p — электронная теплоемкость на единицу массы. Чтобы оценить порядок величины C_p , можно использовать модель Гортера — Казимира, для которой $\frac{\rho_s}{\rho_n} = 1 - t^4$, S и C_p в сверхпроводящей фазе пропорциональны T^3 ; и при температуре перехода $S = \gamma T_c$ равно энтропии нормальной фазы. В результате получаем:

$$c_2^2 = \frac{\gamma T_c^2}{3\rho} (1 - t^4). \quad (14.13)$$

Если для γ использовать значение в модели свободных электронов, то в олове находим:

$$c_2 = \frac{k_B T_c}{\sqrt{3} n^{1/3} \hbar} (1 - t^4)^{1/2} \approx 10^3 \text{ см/сек.}$$

Эта скорость имеет тот же порядок величины, как и в He II. Для наблюдения второго звука на частоте ω нужно, чтобы соблюдалось неравенство $\omega\tau > 1$ (здесь τ — время релаксации электронов с решеткой); необходимо также, чтобы длина волны была больше длины когерентности, $c_2 > \omega \xi_0$. Из обоих этих требований вытекает неравенство $\tau > \xi_0 / c_2$ или для олова $\tau > 10^{-8}$ сек, которое очень трудно реализовать практически, так как оно соответствует средней длине свободного пробега около 1 см (см., однако, [244 *]).

14.2. Критические токи в тонких пленках

Критический ток в массивном образце определяется критическим полем. С увеличением тока поле у поверхности образца также увеличивается до тех пор, пока оно не достигнет критического значения H_c , при котором образец переходит в нормальное или в промежуточное состояние. Иная картина наблюдается при протекании тока в пленках, толщина которых достаточна мала для того, чтобы магнитное поле могло проходить сквозь пленку.

Влияние магнитного поля может быть сведено к минимуму при использовании образцов соответствующей формы. Н. Гинзбург и Шальников [196] измеряли критические поля в оловянных пленках, нанесенных на наружную поверхность цилиндра. В этом случае нет краев, где могут возникнуть аномально большие поля, разрушающие сверхпроводимость. Указанные авторы особенно интересовались критическими полями при температуре вблизи T_c . Они нашли, что критический ток изменяется как $(T_c - T)^{3/2}$ в согласии с феноменологической теорией Гинзбурга — Ландау и микроскопической теорией. В более ранних работах, где уделялось меньше внимания устранению краевых эффектов, были получены результаты, отвечающие изменению критических токов по закону $(T_c - T)^{1/2}$ или $(T_c - T)^{3/2}$.

Если применить теорию Лондона, то для увеличения свободной энергии при протекании тока с плотностью j_s имеем:

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_s v_s^2 = \frac{1}{2} \Lambda(T) j_s^2. \quad (14.14)$$

Здесь, по предположению, $\Lambda(T)$ не зависит от j_s , что может не выполняться для очень больших токов. Критический ток, очевидно, должен быть таким, чтобы ΔF становилось равным разности энергий между нормальной и сверхпроводящей фазами $H_c^2/8\pi$; это приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \Lambda(T) j_{sc}^2 = \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (14.15)$$

Вблизи T_c и поле H_c , и $\Lambda(T)^{-1}$ изменяются как $(T_c - T)$, поэтому j_{sc} должно, видимо, изменяться как $(T_c - T)^{3/2}$. При учете изменения распределения квазичастиц и изменения ширины энергетической щели, возникающих при увеличении тока, критический ток уменьшается на 25% (Роджерс [197]).

Для очень тонких пленок, в которых средняя длина свободного пробега l сильно снижается в результате рассеяния на поверхности, скорее можно применять формулы, относящиеся к пиппардовскому, а не лондоновскому

предельному случаю¹⁾. Скорость возрастания тока можно выразить через нормальную проводимость σ_n и ядро пиппардовского интеграла $J(R, T)$ в пределе $R \rightarrow 0$:

$$\frac{dj_s}{dt} = \frac{J(0, T) l}{\Lambda(T) \xi_0} \mathcal{E}. \quad (14.16)$$

Тогда прирост свободной энергии равен:

$$\Delta F = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda(T) \xi_0}{J(0, T) l} \right) j_s^2. \quad (14.17)$$

Плотность критического тока в результате рассеяния снижается на множитель порядка $(l/\xi_0)^{1/2}$; при этом температурная зависимость меняется не очень сильно.

14.3. Теория Гинзбурга — Ландау

Несколько лет назад Гинзбург и Ландау [64] обобщили феноменологическую теорию Лондона с целью учета пространственного изменения эффективной концентрации сверхпроводящих электронов n_s . Это позволило рассмотреть целый ряд вопросов, наиболее важным из которых является, по-видимому, вопрос о границе между нормальной и сверхпроводящей фазами в промежуточном состоянии. В этом случае значение n_s меняется от нуля в нормальной области до равновесного значения, соответствующего данной температуре в сверхпроводящей фазе (рис. 38). В то же время магнитное поле падает от своего критического значения H_c с нормальной стороны до нуля на сверхпроводящей стороне переходного слоя. Большая длина

¹⁾ Нам неизвестны основания для такого утверждения. Поликристаллические пленки должны вести себя подобно сверхпроводящим сплавам, в которых роль длины когерентности играет средняя длина свободного пробега l . Если $l \ll d$ (d — толщина пленки), то пригоден лондоновский предельный случай; при $l < d$ этот предел также, видимо, должен приближенно соответствовать действительности. Разрушение пленок током и полем в рамках феноменологической теории [64] рассмотрено в статье [247*]. Укажем последние экспериментальные работы по измерению критического поля и тока в пленках [196, 248*, 249*, 274*]. Большой интерес представляет, по-видимому, изучение свежеосажденных (аморфных или очень мелкодисперсных) пленок, для которых уравнения макроскопической теории локального типа должны быть заведомо применимы. — *Прим. ред.*

когерентности сверхпроводящих волновых функций мешает резкому изменению n_s на границе [198].

Гинзбург и Ландау предположили, что $n_s(\mathbf{r})$ пропорционально квадрату эффективной волновой функции $\Psi_s(\mathbf{r})$. Плотность свободной энергии $F(\Psi_s, T)$ зависит от Ψ_s (или от n_s), в равновесии F минимально при постоянном Ψ_s . Предполагается далее, что в магнитном поле с вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в выражении для свободной

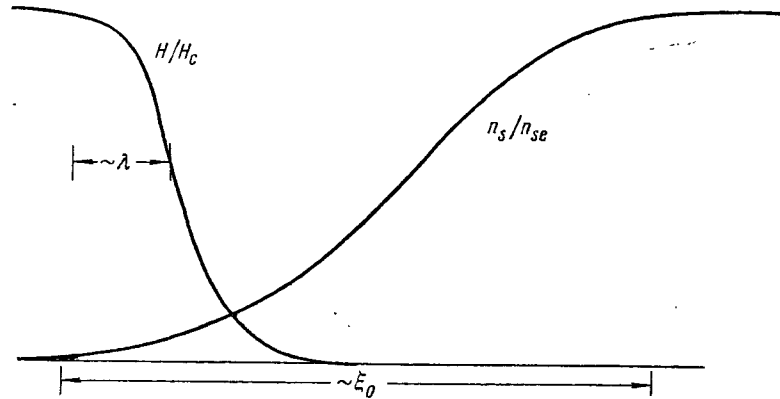


Рис. 38. Изменение магнитного поля и эффективной концентрации сверхпроводящих электронов в области, отделяющей нормальную фазу от сверхпроводящей.

энергии имеется дополнительный член, пропорциональный $\left| -i\hbar \text{grad} \Psi_s + \left(\frac{e\mathbf{A}}{c} \right) \Psi_s \right|^2$. Для определения поверхностной энергии α_{ns} с помощью вариационного метода находятся функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\Psi_s(\mathbf{r})$, отвечающие минимуму полной свободной энергии. Параметры теории полностью определяются значениями критического поля $H_c(T)$ и глубины проникновения $\lambda(T)$. Для абсолютных значений α_{ns} , а также для ее температурной зависимости теория довольно хорошо согласуется с экспериментом¹⁾.

¹⁾ См. [201, 250*, 251*]. Небольшие систематические расхождения между теорией и опытом отмечены в работе [270*]; скорее всего эти расхождения следует отнести за счет анизотропии. Измерения [271*] на олове свидетельствуют о заметной (~20%) анизотропии поверхностной энергии. При не слишком

Недостатком теории является тот факт, что она основана на теории Лондона, а не на нелокальной теории, которая как теперь известно, отвечает в общем случае действительности. Только для температур, очень близких к T_c , нелокальная теория переходит в локальную теорию Лондона¹⁾.

Горьков [199, 168]²⁾ обобщил микроскопическую теорию на случай изменяющейся в пространстве величины щели. В приближении слабой связи, справедливом для большинства сверхпроводников, параметр энергетической щели $\Delta(\mathbf{r})$ можно рассматривать как функцию координат. Горьков сформулировал проблему с помощью «термодинамических» функций Грина, в которых температура рассматривается как мнимое время. Хотя легко написать соответствующие дифференциальные уравнения для функций Грина, решение их очень трудно, за исключением предельных случаев. Горьков выполнил вычисления только для температур вблизи T_c , где можно ожидать справедливости теории Лондона, и нашел уравнения, идентичные с уравнениями, предложенными Гинзбургом и Ландау. Было найдено, что эффективная волновая функция $\Psi_s(\mathbf{r})$ пропорциональна $\Delta(\mathbf{r})$. Единственное отличие заключается в том, что заряд e заменен на $2e$, последний, очевидно, соответствует заряду пары. Гинзбург [201] указал, что это изменение улучшает согласие теории с экспериментом.

низких температурах эта анизотропия носит нетензорный характер, но анизотропия становится тензорной при приближении к T_c . Нетензорная анизотропия имеет место только в нелокальной теории. — Прим. ред.

¹⁾ Вопрос о границах применимости локального рассмотрения зависит от того, какой характерной длиной определяется рассматриваемая физическая величина. По отношению к глубине проникновения поля в массивный сверхпроводник локальная теория для чистых металлов обычно пригодна лишь при температурах, весьма близких к T_c . Но в отношении вычисления поверхностной энергии α_{ns} или поля, отвечающего границе переохлаждения, область применения локальной теории шире [241*, 199, 200]. — Прим. ред.

²⁾ Недавно Горьков [200] распространил теорию на случай переохлаждения; он вычислил температуру, при которой нормальное состояние становится неустойчивым относительно образования областей с бесконечно малыми значениями Δ .

В своем обобщенном «методе компенсации» Боголюбов [16] приводит другую формулировку, которая также является достаточно общей для учета пространственного изменения щели. Волновая функция пары $\varphi(r_1, r_2)$ может зависеть не только от разности $r_1 - r_2$, но также от r_1 и r_2 в отдельности. Этот метод пока еще не был использован для обсуждения вопроса о поверхностной энергии.

§ 15. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

15. 1. Теплопроводность решетки

Теоретическая интерпретация теплопроводности сверхпроводников трудна в силу того, что могут действовать одновременно несколько механизмов. В сверхпроводящем состоянии, так же как и в нормальном, тепловой поток состоит из двух частей: одна из них связана с электронами проводимости, а другая — с фононами [202, 203]. Теплопроводность κ равна сумме электронной теплопроводности κ_e и теплопроводности решетки κ_g :

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_g. \quad (15.1)$$

В том и другом случае существует несколько механизмов рассеяния, ограничивающих тепловой поток. Для нормального состояния имеем:

$$\frac{1}{\kappa_{en}} = aT^2 + \frac{\beta}{T}, \quad (15.2)$$

$$\frac{1}{\kappa_{gn}} = AT^2 + BT^3. \quad (15.3)$$

Первый и второй члены в выражении для κ_{en}^{-1} отвечают соответственно рассеянию электронов на фононах и на статических примесях. Соответствующие члены в выражении κ_{gn}^{-1} отвечают рассеянию фононов на электронах и на поверхности образца. Те же механизмы рассеяния действуют и в сверхпроводящем состоянии. Однако температурные зависимости в этом случае заметно отличаются от температурных зависимостей для нормального состояния.

Для сверхнизких температур (обычно $T < 0,15T_c$) теплопроводность сверхпроводников, по-видимому, изменяется по закону T^3 , что характерно для рассеяния фононов на поверхности. Этот эффект хорошо исследован.

При более высоких температурах теплопроводность решетки определяется рассеянием фононов на электронах. Однако этот механизм трудно выделить, так как в чистых металлах в этой области температур существует большая теплопроводность, связанная с электронами. Поскольку примеси рассеивают электроны более эффективно, чем фононы, электронная компонента может быть снижена с помощью увеличения концентрации примесей. Рассеяние фононов на электронах было оценено Хульмом [204], который производил измерения на олове с присадками ртути и тантала. Ларедо [205] произвел измерения на олове с присадками индия, а Сладек [206] выполнил аналогичные измерения на сплавах индия с таллием. С целью учета вклада в теплопроводность, связанного с электронами, соответствующий электронный член описывался с помощью функции κ_{es}/κ_{en} , определенной из данных для относительно чистых веществ, для которых теплопроводность по существу чисто электронная.

Рикайзен, Тевордт и один из авторов [207] (см. также [4, 208, 209]) вывели на основе современной теории выражение для теплопроводности решетки в условиях, когда она определяется рассеянием на электронах. Полученная ими кривая вместе с экспериментальными результатами Хульма, Ларедо и Сладека приведена на рис. 39. Экспериментальные значения носят несколько неопределенный характер, поскольку они получены путем вычитания большой электронной теплопроводности с использованием отношения κ_{es}/κ_{en} , справедливого для значительно более чистых веществ. Кроме того, значения κ_{gn} для нормального состояния, определенные Сладеком и Ларедо, находятся в хорошем согласии с теоретическим законом T^2 , в то время как данные Хульма лучше аппроксимируются законом T^3 . Это указывает на дополнительное действие другого механизма рассеяния. Теоретическая кривая также может оказаться недостаточно точной. Электронно-фононное взаимодействие, которое определяет значение κ_{gn} в вышеприведенных случаях, определяет также рассеяние

электронов фононами, существенное при вычислении χ_{es} . В этом случае имеется большая ясность в экспериментальном отношении, но в то же время теория заметно расходится с опытом¹⁾.

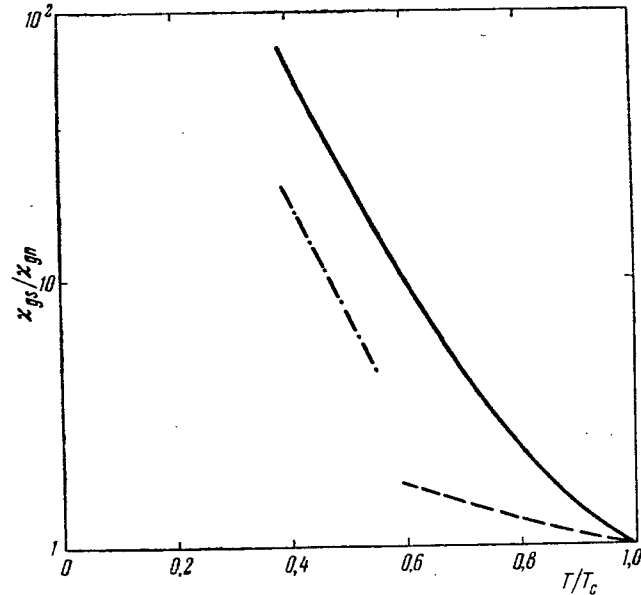


Рис. 39. Отношение теплопроводностей решетки в сверхпроводящем и нормальном состояниях (т. е. χ_{gs} и χ_{gn}) для случая, когда преобладает рассеяние на электронах.

Сплошная линия — теоретическая кривая; штрихпунктирная — данные Ларедо [205], пунтирная — данные Хульма [204].

15.2. Электронная компонента

Несколько авторов [207, 209, 246*] вывели выражение для χ_{es}/χ_{en} на основе микроскопической теории в случае, когда определяющим является рассеяние на примесях. Они нашли

$$\frac{\chi_{es}}{\chi_{en}} = \frac{2F_1(-y) + 2y \ln(1 + e^{-y}) + \frac{y^2}{(1 + e^y)}}{2F_1(0)}, \quad (15.4)$$

¹⁾ См., однако, статью [209]. — Прим. ред.

где $y = \frac{\Delta(T)}{k_B T}$ и

$$F_n(-y) = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{1 + e^{z+y}}. \quad (15.5)$$

Недавно Заварицкий [210] и Саттервайт [211] провели измерения на алюминии и цинке, для которых этот механизм определяет теплопроводность в большой области температур ниже T_c . То же относится к чистым образцам олова и таллия, использованных Хульмом, к оловянным образцам Заварицкого и в меньшей степени к индиевым образцам Хульма и Сладека. Все эти данные, однако, менее надежны, чем данные, полученные на алюминии и цинке. На рис. 40 приведены экспериментальные данные и теоретическая кривая, вычисленная для $2\Delta(0) = 3,50 k_B T_c$. Прекрасное согласие между теорией и экспериментом носит несколько случайный характер, поскольку имеются доказательства того, что для алюминия $2\Delta(0) = 3,30 k_B T_c$, и эта разница существенно изменит теоретическую кривую¹⁾.

Электронная теплопроводность, ограниченная фононами, изучена значительно меньше. Большинство данных, относящихся непосредственно к этому механизму, были получены на образцах свинца и ртути, которые, как упоминалось выше, обладают в сверхпроводящем состоянии аномальными тепловыми и электромагнитными свойствами. Недавно была измерена²⁾ теплопроводность двух серий оловянных образцов различной чистоты в зависимости от кристаллографической ориентации. Согласно оценке вклад рассеяния, обусловленный фононами, изменяется при T_c от 70 до 15% для обеих серий образцов. Результаты для температур, больших $0,7 T_c$, приведены на рис. 41, из которого ясно наличие анизотропии (см. также [267*]). Для каждой ориентации с изменением концентрации примесей наблюдается систематическое изменение χ_s/χ_n . Это изменение находится

¹⁾ Теплопроводность при учете анизотропии теоретически рассмотрена в статье [252*]. Нужно иметь в виду, что при использовании формул изотропной теории определяемый с помощью этих формул и экспериментальных данных параметр $\Delta(0)$ будет разным для различных эффектов. — Прим. ред.

²⁾ А. М. Guenault, частное сообщение (1959).

в соответствии с использованием характеристических функций (т. е. функций отношения T/T_c) и для фононного рассеяния, и для рассеяния на примесях, как предположил Хульм [204]. Кривая, отвечающая характеристической функции для рассеяния на примесях при тепловом потоке вдоль тетрагональной оси, располагается ниже теоретической кривой (см. §15.1), а при тепловом потоке вдоль оси второго

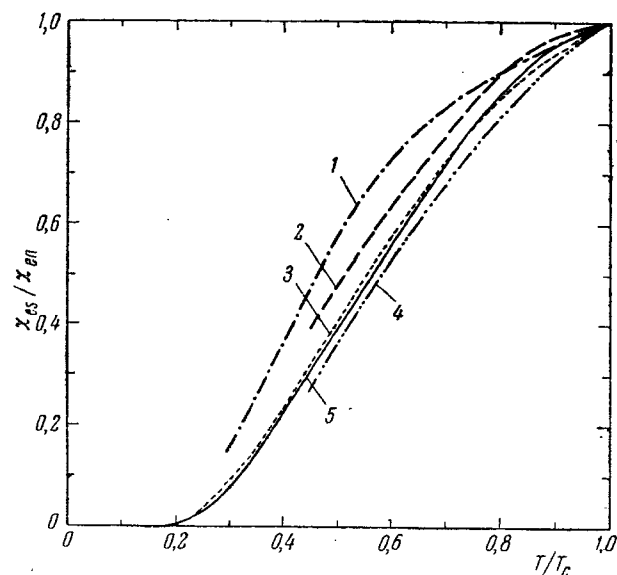


Рис. 40. Отношение электронных теплопроводностей в сверхпроводящем и нормальном состоянии для случая, когда преобладает рассеяние на примесях.

Очень хорошее согласие с теоретической кривой носит несколько случайный характер. Кривые соответствуют: 1 — Zп (данные Заварицкого [210]); 2 — Sn (данные Хульма [204]); 3 — Al (данные Заварицкого [210] и теория); 4 — In (данные Хульма [204] и Сладека [206]); 5 — Al (данные Саттер в айта [211]).

порядка — сразу над этой кривой. Эти результаты не противоречат ранним исследованиям Хульма, проведенным на поликристаллических образцах. Соответствующие функции для фононного рассеяния имеют положительную производную у T_c . Однако были получены производные, равные только единице (ось второго порядка) и двум (тетрагональная

ось), что резко расходится с более ранними измерениями на свинце и ртути, которые дали для начальной производной значение, равное примерно 5 (рис. 42).

При теоретическом выводе [207] выражения для отношения χ_{es}/χ_{en} в случае рассеяния на фонах было найдено приближенное решение уравнения переноса с помощью вариационного метода Колера. Это дает нижнюю границу

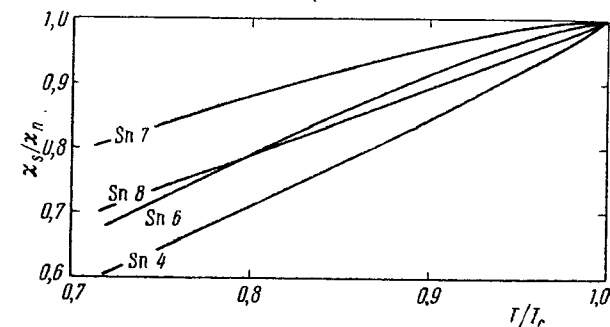


Рис. 41. Приведенная теплопроводность нескольких оловянных образцов различной чистоты, измеренная параллельно и перпендикулярно тетрагональной оси.

Согласно оценке часть рассеяния при T_c , обусловленная фонами, изменяется от 70 до 15% для обеих этих ориентаций.

для коэффициента теплопроводности. Если предположить, что неравновесная часть функции распределения квазичастиц имеет вид:

$$\chi_k = b\varepsilon_k \left| \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right| \cos \theta, \quad (15.6)$$

то для производной χ_{es}/χ_{en} по T/T_c при температуре T_c получаем значение $-0,5$. Вычисления дают значение $\chi_{es}/\chi_{en} = 0,75$ при $T/T_c = 0,72$. Хотя производная при $T \rightarrow T_c$ имеет другой знак по сравнению с измерениями Генаулта, значение χ_{es}/χ_{en} при $T/T_c = 0,72$, вычисленное на основе изотропной модели, близко к среднему измеренному значению. Природа расхождений в отношении производной у T_c пока еще не выяснена. Для объяснения больших положительных производных в случае свинца и

ртути нужно провести вычисления для случая «промежуточной» связи¹⁾.

Как установили Каданов и Мартин [213], данные, полученные для олова, приближенно согласуются с теорией, если предположить, что время релаксации для электронно-фононного взаимодействия одинаково для нормального и

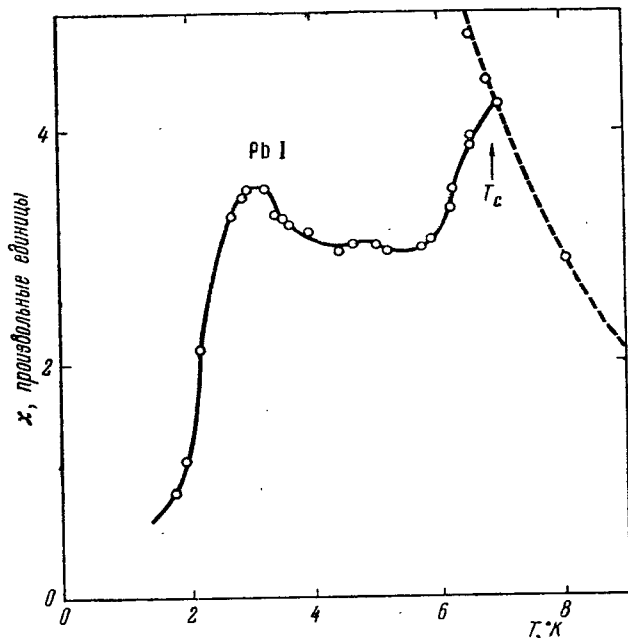


Рис. 42. Теплопроводность свинца.

Отмечается быстрое падение ниже T_c и пик при $T \approx T_c/2$, по-видимому, когда начинает преобладать рассеяние на примесях [212]. Пунктирная линия отвечает нормальной фазе, сплошная — сверхпроводящей.

сверхпроводящего состояний. Это предположение, однако, не согласуется с описанными выше детальными вычислениями, основанными на уравнении Больцмана. Из вычислений Кресина [214]¹⁾ следует, что эта трудность, быть может, связана с коротким временем релаксации τ

¹⁾ См. в этой связи работу [243*]. — Прим. ред.

для квазичастиц. Согласно расчетам Кресина $\kappa_{es}/\kappa_{en} \approx 0,81$ для $\Delta/k_B T \approx 0,25$ и $\kappa_{es}/\kappa_{en} \approx 0,72$ для $\Delta/k_B T \approx 0,5$. Эти значения приводят к еще более быстрому падению вблизи T_c , чем наблюдается для свинца и ртути.

§ 16. СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СПЛАВЫ И СОЕДИНЕНИЯ

Недавно было проведено много экспериментов на магнитных и немагнитных сверхпроводящих сплавах. Особенно интересны вещества, которые одновременно являются ферромагнитными и сверхпроводящими. Хотя полного теоретического объяснения экспериментальных данных в настоящее время нет, некоторые результаты были интерпретированы. Обсудим сначала свойства немагнитных сплавов.

Линтон, Серин и Цукер [215], а также Чейнин, Линтон и Серин [216] изучали влияние различных немагнитных присадок (от 0,01 до 1,0 ат.%) на критическую температуру олова, индия и алюминия. При достаточно малых концентрациях всех твердых растворов они нашли, что T_c линейно уменьшается с возрастанием обратной величины средней длины свободного пробега электрона. Для больших концентраций кривые зависимости T_c от концентрации образуют две группы в соответствии со знаком разности валентностей ΔZ между растворимым и растворителем. Кривая температуры перехода имеет резкий загиб кверху у твердых растворов с более высокой валентностью присадки. При более низких валентностях присадки величина T_c стремится к насыщению в области высоких концентраций. Соответствующие кривые для индия приведены на рис. 43. Подобие результатов для трех совершенно различных растворителей — индия, алюминия и олова заставляет предположить, что эти результаты характерны для немагнитных сверхпроводящих сплавов.

Андерсон [217] (см. также [128]) предположил, что анизотропия энергетической щели, имеющая место в чистых металлах, может быть уничтожена в результате рассеяния на примесях. Это может вызвать уменьшение T_c при малых концентрациях¹⁾. Андерсон считал, что образование

¹⁾ Анизотропия щели порядка самой ширины щели (см. например, [267*]). Поэтому предполагаемое [217] усреднение ширины щели порядка самой этой ширины. Между тем изменение

пар в основном состоянии должно происходить на основе состояний φ_{ps} и φ_{ps}^* , определенных в присутствии рассеивающих центров. Пока средняя длина свободного пробега электрона мала по сравнению с ξ_0 при движении электрона на длине когерентности, примеси будут слабо смешивать состояния, отвечающие плоским волнам. Если же

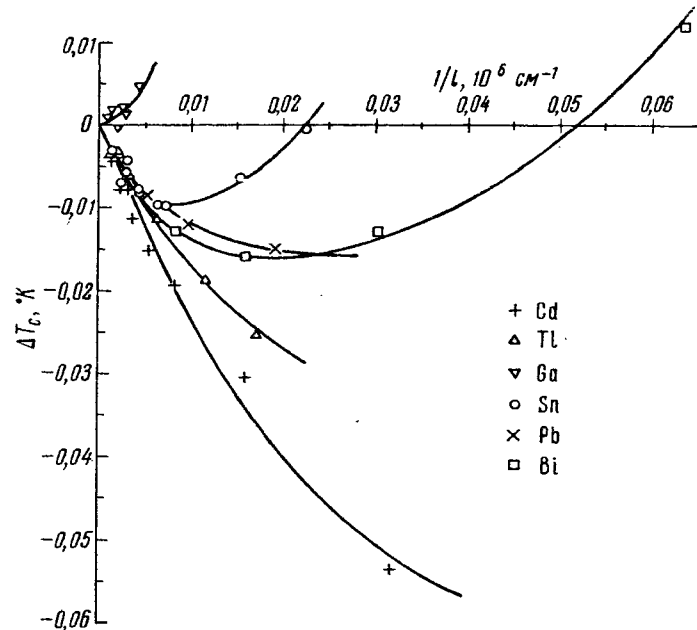


Рис. 43. Понижение T_c для индия, вызванное немагнитными примесями, как функция средней длины свободного пробега (см. Серин и др. [215, 216]).

$l < \xi_0$, функция φ_{ps} не может больше аппроксимироваться отдельной плоской волной, и состояния, лежащие на всей поверхности Ферми, перемешиваются с более или менее одинаковым весом. Последнее приводит к уничтожению источника анизотропии энергетической щели. Как только

температуры перехода при концентрации примесей $\sim 1\%$, когда $l > \xi_0$, еще мало и составляет $\sim 5\%$. Наблюдаемый малый эффект, вероятно, связан с изменением решетки при внесении примесей. Согласно [147] при малых концентрациях $\Delta T/T_c \sim a/l$, где a — межатомное расстояние. — *Прим. ред.*

смешение состояний становится полным, влияние увеличения числа примесей на T_c должно исчезать. Именно факт насыщения кривой T_c для твердых растворов с отрицательной разностью ΔZ побудил Андерсона высказать свои предположения.

Абрахамс и Вейсс [218]¹⁾ рассмотрели влияние примесей на плотность состояний на поверхности Ферми, а также на фононно-электронные матричные элементы с учетом изменения электронного экранирования. Их выражение для зависимости T_c от концентрации примесей содержит разность больших членов и пока еще не доведено до точной оценки. Однако такой подход к решению проблемы представляется обещающим.

Чейнин, Линтон и Серин [216] предположили, что сложность зависимости T_c от концентрации за пределами линейной области может быть связана с изменением концентрации электронов, а следовательно и плотности состояния $N(0)$. Однако вопрос остается невыясненным, поскольку Линтон, Серин и Цукер [215] нашли, что γ (а следовательно и $N(0)$), по-видимому, увеличивается для всех концентраций примесей.

Переходя к обсуждению магнитных сплавов, заметим, что в последнее время большое число работ было посвящено выяснению связи между сверхпроводимостью и ферромагнетизмом [220 — 227, 237*]. Маттиас, Комптон, Сул и Коренцвит неожиданно обнаружили, что присадка магнитных переходных металлов повышает, а не понижает температуру сверхпроводящего перехода T_c (рис. 44). По их мнению, возрастание не может быть объяснено только изменением электронной концентрации. Подтверждением этой точки зрения служит сравнение твердых растворов, включающих первый ряд переходных элементов с твердыми растворами для второго ряда переходных элементов. Последние вносят такое же количество электронов, но не обладают никаким магнитным моментом.

При добавлении малых концентраций редкоземельных элементов T_c снижается. Это понижение грубо описывается функцией вида $J(J+1)(g-1)^2$, где J — спин атома

¹⁾ См. также статью [219], в которой рассеивающий потенциал рассматривается как возмущение.

редкоземельного элемента и g — фактор спектроскопического расщепления. При больших концентрациях сплав становится ферромагнетиком. На рис. 45 показаны результаты, полученные для лантаново-гадолиниевых твердых растворов. Последующие результаты Хейна и др. указывают на возможность одновременного сосуществования сверхпроводимости и ферромагнетизма при $T = 0,5^\circ \text{K}$

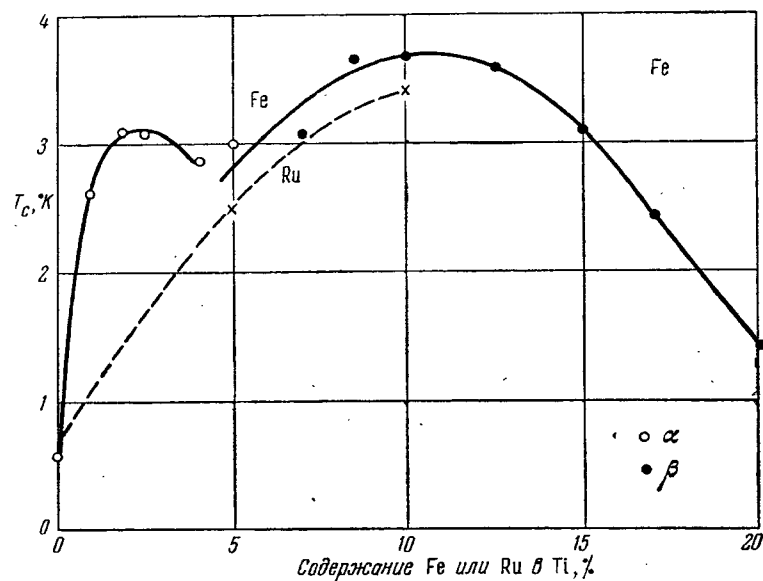


Рис. 44. Температуры сверхпроводящего перехода твердых растворов железа или рутения в титане [226].

для 1%-ной концентрации Gd. Образую смешанные кристаллы Y и CdOs_2 , а также CeRu_2 и GdRu_2 , можно получить системы одновременно сверхпроводящие и ферромагнитные (рис. 46). Существует область концентрации, где температура Кюри θ выше T_c . Если один из таких образцов охладить ниже T_c , то одновременно наблюдается остаточное намагничение, свойственное ферромагнетизму, и диамагнитное экранирование, характерное для идеального проводника. Возможно, что существуют чередующиеся сверхпроводящие и ферромагнитные домены, и в одной и той же области оба эффекта фактически не существуют.

Очень вероятно, что сверхпроводящие домены во всяком случае являются узкими, так как критические поля должны быть высокими. В сплавах с переходными элементами (незаполненная d -оболочка) аналогичных эффектов не наблюдается.

На основе этих результатов Маттиас предположил, что магнитный момент сам по себе не мешает сверхпроводимости, а скорее обуславливает существование обменного взаимодействия с s -электронами, которое усиливает

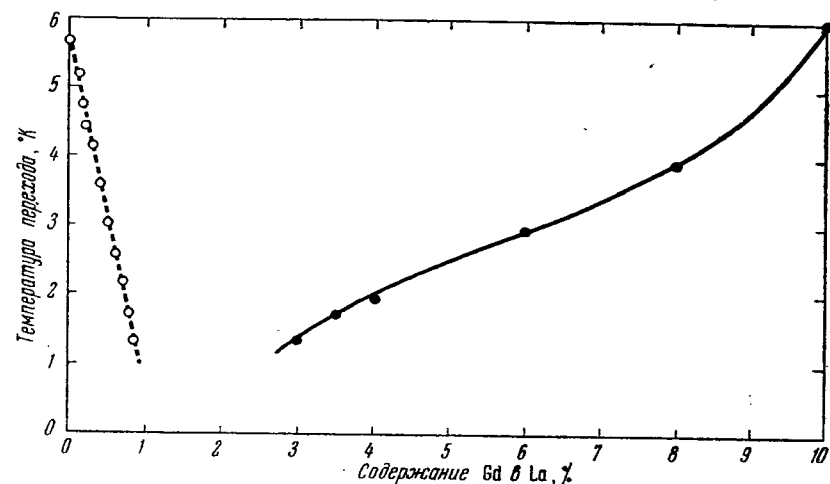


Рис. 45. Температуры сверхпроводящего (пунктир) и ферромагнитного (сплошная линия) переходов твердых растворов гадолиния в лантане, измеренные Маттиасом и др. [226].

сверхпроводимость. Дальнействующие обменные взаимодействия между присадками редкоземельных элементов (f -оболочка) и электронами проводимости приводят к ферромагнетизму. Как указали Херринг и Сул [228], температура перехода сплавов, содержащих атомы редкоземельных элементов, понижается в результате ослабления косвенного обменного взаимодействия в сверхпроводящем состоянии, что происходит в результате отсутствия виртуальных переходов с малыми энергиями возбуждения. Вычисления во втором приближении теории возмущений дают правильную спиновую зависимость изменения T_c . С другой стороны, для сплавов, содержащих переходные металлы,

дальнодействующий потенциал косвенного обменного взаимодействия, по-видимому, очень слаб. Вместо того чтобы снижать T_c , эти магнитные ионы могут привести к новому механизму притяжения между электронами, что усиливает тенденцию к сверхпроводимости. Таким образом,

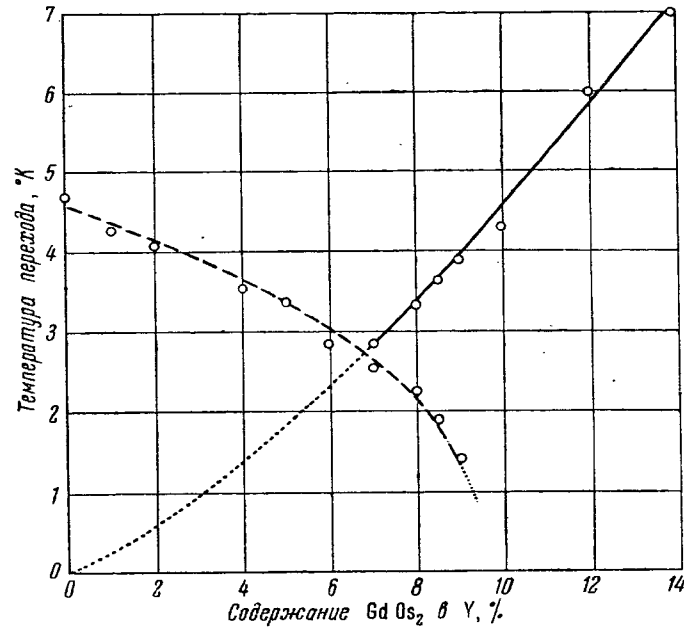


Рис. 46. Температуры сверхпроводящего (пунктир) и ферромагнитного (сплошная линия) переходов твердого раствора $Y_{1-x}Gd_xOs_2$, измеренные Маттиасом и др. [226].

Точечная линия — экстраполяция к 0%.

введение редкоземельных присадок снижает свободную энергию для нормального состояния в большей степени, чем для сверхпроводящего, что приводит к понижению T_c . С другой стороны, в сплавах с переходными металлами свободная энергия сверхпроводящего состояния снижается сильнее, чем для нормального состояния. Возможно, это происходит благодаря эффективному взаимодействию между электронами в результате существования спиновых обменных сил. Кроме того, в случае переходных элементов,

по-видимому, нет дальнодействующих косвенных обменных взаимодействий между примесями, приводящих к ферромагнетизму в разбавленных системах. Хотя все эти аргументы внушают доверие, теория нуждается в более детальном развитии, прежде чем можно будет прийти к окончательному выводу о роли взаимодействия электрон — примесь — электрон по сравнению с взаимодействием примесь — электрон — примесь¹⁾.

§ 17. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы видели, согласие между экспериментом и предсказаниями микроскопической теории, основанной на упрощенной модели, в общем случае много лучше, чем этого можно было ожидать. Ряд экспериментальных данных хорошо подтверждает: 1) факт наличия зависящей от температуры энергетической щели; 2) существование заметного когерентного влияния волновых функций пар на величину матричных элементов и вероятности переходов, 3) нелокальную теорию, объясняющую электромагнитные свойства, и 4) наличие быстрого перехода от сверхпроводящего «поведения» к нормальному, когда $\hbar\omega$ становится больше ширины щели. Теория объясняет появление перехода второго рода при T_c , эффект Мейсснера и метастабильность

1) Из теории [12] следует [272*], что при достаточно малых концентрациях парамагнитных примесей температура перехода должна убывать с увеличением концентрации. Физически этот результат связан с тем, что рассеяние на спине примеси способно разрушать спиновую корреляцию в куперовской паре. Такая ситуация имеет место до тех пор, пока концентрация настолько мала, что примеси можно считать равномерно распределенными по металлу. При концентрациях, отвечающих условиям работы [226], видимо, наступает заметное упорядочение примесей. В противном случае следовало бы ожидать гораздо меньших температур ферромагнитного перехода, поскольку силы между атомами примеси (возникающие благодаря обмену электронами проводимости) быстро осциллируют с расстоянием между этими примесными атомами. Поэтому в результате усреднения температура ферромагнитного перехода была бы экспоненциально мала.

В случае сверхпроводящих сплавов, вообще говоря, существенную роль играют также эффекты, связанные с уменьшением или даже изменением знака поверхностной энергии α_{ns} (см. [253*, 254*]). — Прим. ред.

незатухающего тока. Вопросы, возникшие по поводу градиентной инвариантности теории, были полностью разрешены. Были указаны некоторые возможные объяснения сдвига Найта и соответствующего спинового парамагнетизма электронов.

Мы попытались дать физическую картину сверхпроводника в терминах основного состояния и спектра его элементарных возбуждений. Незатухающий ток и эффект Мейсснера связаны с дальнедействующей корреляцией импульсов спаренных электронов в основном состоянии. Теория развивалась в направлении, предложенном Ф. и Г. Лондонами с учетом изменений, сделанных Пиппардом в связи с введением длины когерентности. Несмотря на некоторую аналогию с бозе-эйнштейновской конденсацией, имеются также заметные различия, так что по существу такая аналогия является далеко не полной. Наиболее существенными возбуждениями являются квазичастицы, подчиняющиеся статистике Ферми. Тепловые возбуждения не разрушают дальнедействующей корреляции импульсов, пока температура не достигает критического значения.

Необходимо дальнейшее развитие теории для детального объяснения свойств сверхпроводников с большим электронно-фононным взаимодействием и низкими температурами Дебая, для которых приближение слабой связи не является удовлетворительным. Это относится, в частности, к свинцу и ртути, свойства которых существенно отклоняются от приближенного закона соответственных состояний, справедливого для большинства других сверхпроводников. Возможно, что отсутствие согласия теории с экспериментом для случая, когда электронная теплопроводность ограничена рассеянием на фонах, частично объясняется отклонением реальных сверхпроводников от сверхпроводников, рассматриваемых в пределе слабой связи.

В вычислениях, которые были выполнены до настоящего времени, не учитывались эффекты зонной структуры, за исключением тех случаев, когда они могли быть отражены введением изотропной эффективной массы. Известно, что эффекты анизотропии существенны для нормальных металлов; то же относится и к сверхпроводникам. Из экспериментов по затуханию ультразвука в монокристаллах

олова следует, что свойства энергетической щели различны в различных направлениях. Анизотропия энергетической щели объясняет, вероятно, отклонения наблюдаемой теплопроводности от теоретических значений при сверхнизких температурах.

Одним из наиболее важных вопросов, которые до сих пор остаются еще открытыми, является вопрос о критерии сверхпроводимости и, в частности о том, как именно кулоновское отталкивание противодействует электрон-фононному притяжению, и тем мешают появлению сверхпроводимости. Представляется вероятным, что для этого нужно рассмотреть эффекты конечного времени жизни квазичастичных возбуждений в нормальном состоянии. Хотя микроскопическая теория согласуется качественно с эмпирическими правилами Маттиаса, еще очень много надо сделать, прежде чем можно будет дать даже грубые теоретические оценки критических температур для реальных веществ, в том числе сплавов.

В связи с экспериментами Маттиаса и др., посвященными ферромагнетизму и сверхпроводимости, возникло много интересных вопросов. Могут ли ферромагнетизм и сверхпроводимость сосуществовать в одной и той же области кристалла или это имеет место только для всего образца в целом? Почему имеется такая тесная связь между сверхпроводящими соединениями и соединениями, становящимися ферромагнитными при малых присадках к ним редких земель (f -электронов)? Существуют ли другие механизмы, ответственные за сверхпроводимость, кроме электронно-фононного взаимодействия? Так, Сул предположил¹⁾, что может иметь место эффективное взаимодействие между валентными электронами, возникающее в результате взаимодействия между валентными электронами и d -электронами²⁾.

¹⁾ H. Su h l, частное сообщение.

²⁾ В работе [273*] обнаружено отсутствие изотопического эффекта в сверхпроводящем рутении, что указывает на возникновение сверхпроводимости не за счет взаимодействия электронов с решеткой. Отметим, что в работе [224] были высказаны соображения в пользу того, что в ферромагнетиках притяжение между электронами может быть связано с обменом спиновыми возбуждениями (магнонами). — Прим. ред.

В настоящем обзоре мы обсудили явление сверхпроводимости только с точки зрения его существования в металлах. Вслед за первоначальным предположением Бора, Моттельсона и Пайнса [229—234] было проведено подробное рассмотрение аналогичных, приводящих к образованию пар, взаимодействий в ядрах. Существуют указания на наличие щели в спектре возбуждения ядер, а также на существование других явлений, свойственных сверхпроводимости. Имеется прямая аналогия между эффектом Мейсснера и тем фактом, что момент инерции вращающихся ядер значительно меньше момента инерции твердого тела. Силы Кориолиса, возникающие во вращающейся системе отсчета в первом приближении, эквивалентны силам, обусловленным магнитным полем. Уменьшение момента инерции по сравнению с его «твердотельным» значением указывает на наличие большого тока частиц, текущего во вращающейся системе навстречу вращению. Этот ток соответствует диамагнитному току в случае эффекта Мейсснера. Оболочечная структура, относительно малый размер и небольшое число частиц в ядрах вносят здесь осложнения, отсутствующие в металлах. Мы упомянули о возможности существования сверхтекучести в He^3 , где пары скорее всего могут образовываться в d -состоянии [181, 235]. Намбу [236] предложил теорию сверхпроводимости для элементарных частиц, в которой масса нуклонов определяется энергетической щелью. Мезоны же рассматриваются как низколежащие коллективные или экситоноподобные состояния. Таким образом, может оказаться, что сверхпроводимость — общее явление для всех ферми-систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. London F., Superfluids, vol. 1, New York, 1950.
2. Гинзбург В. Л., Fortsch. d. Phys. 1, 101 (1953); УФН 42, 169, 333 (1950); 48, 25 (1952).
3. Bardeen Y., Handbuch der Physik B15, S. 274, Berlin, 1956 (см. перевод: «Физика низких температур», стр. 679, ИЛ, 1959).
4. Халатников И. М., Абрикосов А. А., Phil. Mag. Suppl. 8, 45 (1959) (см. УФН 65, 551 (1958)).
5. Kuper C. G., Phil. Mag. Suppl. 8, 1 (1959).
6. Schafroth M. R., Solid State Physics, vol. 10, p. 293, New York (1960).
7. Bardeen Y., Physica 24, 527 (1958).
8. Shoenberg D., Superconductivity, Cambridge University Press, 1952 (см. перевод: Д. Шенберг «Сверхпроводимость», ИЛ, 1955).
9. Serin B., Handbuch der Physik B15, S. 210, Berlin, 1956 (см. перевод: «Физика низких температур», стр. 611, ИЛ, 1959).
10. London F., Phys. Rev. 74, 562 (1948).
11. Bardeen J., Cooper L., Schriffer J., Phys. Rev. 106, 162 (1957).
12. Bardeen J., Cooper L., Schriffer J., Phys. Rev. 108, 1175 (1957) (см. перевод «Теория сверхпроводимости», стр. 103, ИЛ, 1960).
13. Боголюбов Н. Н., Nuovo Cimento 7, 6, 794 (1958).
14. Боголюбов Н. Н., ЖЭТФ 34, 58 (1958).
15. Боголюбов Н. Н., ЖЭТФ 34, 73 (1958).
16. Боголюбов Н. Н., УФН 67, 549 (1959).
17. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Fortsch. d. Phys. 6, 605 (1958).
18. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд. АН СССР, 1958.
19. Толмачев В. В., Тябликов С. В., ЖЭТФ 34, 66 (1958).
20. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А., ДАН 117, 778 (1957).
21. Ширков Д. В., ЖЭТФ 37, 179 (1960).
22. Valatin J. G., Nuovo Cimento 7, 843 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 204, ИЛ, 1960).

В настоящем обзоре мы обсудили явление сверхпроводимости только с точки зрения его существования в металлах. Вслед за первоначальным предположением Бора, Моттelsona и Пайнса [229—234] было проведено подробное рассмотрение аналогичных, приводящих к образованию пар, взаимодействий в ядрах. Существуют указания на наличие щели в спектре возбуждения ядер, а также на существование других явлений, свойственных сверхпроводимости. Имеется прямая аналогия между эффектом Мейсснера и тем фактом, что момент инерции вращающихся ядер значительно меньше момента инерции твердого тела. Силы Кориолиса, возникающие во вращающейся системе отсчета в первом приближении, эквивалентны силам, обусловленным магнитным полем. Уменьшение момента инерции по сравнению с его «твердотельным» значением указывает на наличие большого тока частиц, текущего во вращающейся системе навстречу вращению. Этот ток соответствует диамагнитному току в случае эффекта Мейсснера. Оболочечная структура, относительно малый размер и небольшое число частиц в ядрах вносят здесь усложнения, отсутствующие в металлах. Мы упомянули о возможности существования сверхтекучести в He^3 , где пары скорее всего могут образовываться в d -состоянии [181, 235]. Намбу [236] предложил теорию сверхпроводимости для элементарных частиц, в которой масса нуклонов определяется энергетической щелью. Мезоны же рассматриваются как низколежащие коллективные или экситоноподобные состояния. Таким образом, может оказаться, что сверхпроводимость — общее явление для всех ферми-систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. London F., Superfluids, vol. 1, New York, 1950.
2. Гинзбург В. Л., Fortschr. d. Phys. 1, 101 (1953); УФН 42, 169, 333 (1950); 48, 25 (1952).
3. Bardeen Y., Handbuch der Physik B15, S. 274, Berlin, 1956 (см. перевод: «Физика низких температур», стр. 679, ИЛ, 1959).
4. Халатников И. М., Абрикосов А. А., Phil. Mag. Suppl. 8, 45 (1959) (см. УФН 65, 551 (1958)).
5. Kuper C. G., Phil. Mag. Suppl. 8, 1 (1959).
6. Schafroth M. R., Solid State Physics, vol. 10, p. 293, New York (1960).
7. Bardeen Y., Physica 24, 527 (1958).
8. Shoenberg D., Superconductivity, Cambridge University Press, 1952 (см. перевод: Д. Шенберг «Сверхпроводимость», ИЛ, 1955).
9. Serin B., Handbuch der Physik B15, S. 210, Berlin, 1956 (см. перевод: «Физика низких температур», стр. 611, ИЛ, 1959).
10. London F., Phys. Rev. 74, 562 (1948).
11. Bardeen J., Cooper L., Schriffer J., Phys. Rev. 106, 162 (1957).
12. Bardeen J., Cooper L., Schriffer J., Phys. Rev. 108, 1175 (1957) (см. перевод «Теория сверхпроводимости», стр. 103, ИЛ, 1960).
13. Боголюбов Н. Н., Nuovo Cimento 7, 6, 794 (1958).
14. Боголюбов Н. Н., ЖЭТФ 34, 58 (1958).
15. Боголюбов Н. Н., ЖЭТФ 34, 73 (1958).
16. Боголюбов Н. Н., УФН 67, 549 (1959).
17. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Fortschr. d. Phys. 6, 605 (1958).
18. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд. АН СССР, 1958.
19. Толмачев В. В., Тябликов С. В., ЖЭТФ 34, 66 (1958).
20. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А., ДАН 117, 778 (1957).
21. Ширков Д. В., ЖЭТФ 37, 179 (1960).
22. Valatin J. G., Nuovo Cimento 7, 843 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 204, ИЛ, 1960).

23. Anderson P. W., Phys. Rev. 110, 827 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 264, ИЛ, 1960).
24. Anderson P. W., Phys. Rev. 112, 1900 (1959) (см. перевод «Теория сверхпроводимости», стр. 285, ИЛ, 1960).
25. Nambu Y., Phys. Rev. 117, 648 (1960).
26. Rickayson G., Phys. Rev. 115, 795 (1959).
27. Pines D., Schriffer J., Nuovo Cimento 10, 496 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 328, ИЛ, 1960).
28. Glover R. E. III, Tinkham M., Phys. Rev. 108, 243 (1957).
29. Ginsberg D. M., Richards P. L., Tinkham M., Phys. Rev. Lett. 3, 337 (1959).
30. Ginsberg D. M., Tinkham M., Phys. Rev. 118, 990 (1960).
31. Richards P. L., Tinkham M., Phys. Rev. 119, 575 (1960).
32. Biondi M. A., Garfunkel M. P., Phys. Rev. 116, 853 (1959).
33. Morse R. W., Bohm H. V., Phys. Rev. 108, 1094 (1957).
34. Morse R. W., Bohm H. V., Gavenda J. D., Bull. Am. Phys. Soc. II, 3, 44, 203 (1958).
35. Morse R. W., Progress in Cryogenics, vol 1, p. 220, London, 1959.
36. Hebel L. C., Shlichter C. P., Phys. Rev. 113, 1504 (1959).
37. Hebel L. C., Phys. Rev. 116, 79 (1959).
38. Redfield A. G., Anderson A. G., Phys. Rev. 116, 583 (1959).
39. Redfield A. G., Phys. Rev. Lett. 3, 85 (1959).
40. Masuda Y., Redfield A., Phys. Rev. Lett. (в печати).
41. Guenault A. M., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
42. Androes G. M., Knight W. D., Phys. Rev. Lett. 2, 386, (1959); Phys. Rev. 121, 779 (1961).
43. Reif F., Phys. Rev. 106, 208 (1957).
44. Kamerlingh Onnes H., Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, № 119, 120, 122 (1911).
45. Keesom W. H., van den Ende J. N., Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, № 2196 (1932).
46. Keesom W. H., Kok Y. A., Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, № 221 (1932); Physica 1, 175 (1934).
47. Meissner W., Ochsenfeld R., Naturwiss 21, 787 (1933).
48. Keesom W. H., Rapp. et Disc. 4-e Congr. Phys. Solvay, p. 288.
49. Rutgers A. J., Physica 1, 1055 (1934).
50. Gorter C. J., Arch., Mus. Teyler 7, 378 (1933).
51. Gorter C. J., Casimir B. G., Phys. Z. 35, 963 (1934); Z. techn. Phys. 15, 539 (1934).
52. London H., London F., Proc. Roy. Soc. (London) A149, 71 (1935); Physica 2, 341 (1935).
53. Pontius R. B., Phil. Mag. 24, 787 (1937).

54. v. Laue M., Ann. Phys. 32, 71, 253 (1938).
55. Shoenberg D., Proc. Roy. Soc. (London) A175, 49 (1940).
56. Lock J. M., Proc. Roy. Soc. (London) A208, 391 (1951).
57. Laurman E., Shoenberg D., Proc. Roy. Soc. (London) A198, 560 (1949).
58. Casimir H. G. B., Physica 7, 887 (1940).
59. Ландау Л. Д., Phys. Z. Sowet. 11, 129 (1937).
60. Мешковский А. Г., Шальников А. И., J. Phys. 11, 1 (1947); ЖЭТФ 17, 851 (1947).
61. London H., Proc. Roy. Soc. (London) A176, 522 (1940).
62. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. (London) A191, 370 (1947).
63. Pippard A. B., Adv. Electronics and Electron Phys. 6, 1, (1954).
64. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
65. Maxwell E., Phys. Rev. 78, 477 (1950).
66. Reynolds, Serin, Wright, Nesbitt, Phys. Rev. 78, 487 (1950).
67. Frölich H., Phys. Rev. 79, 845 (1950) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 11, ИЛ, 1960).
68. Bardeen J., Rev. Mod. Phys. 23, 261 (1951).
69. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. (London) A216, 547 (1953).
70. Bardeen J., Phys. Rev. 97, 1724 (1955).
71. Biondi M. A., Forrester A. T., Garfunkel M. P., Safferwaite C. B., Rev. Mod. Phys. 30, 1109 (1958).
72. Matthias B. T., Prog. Low Temp. Phys., vol 11, p. 138, Amsterdam, 1957.
73. Cooper L. N., Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
74. Hake R. R., Mapother D. E., Dexter D. L., Phys. Rev. 112, 1522 (1958).
75. Chambers R. G., Proc. Roy. Soc. (London) A65, 458 (1952).
76. Faber T. E., Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. (London) A231, 336 (1955).
77. Pippard A. B., Physica 19, 765 (1953).
78. Doidge P. R., Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A248, 553 (1956).
79. Meissner H., Phys. Rev. Lett. 2, 458 (1959).
80. Bohm N., Dissertation, Copenhagen, 1911.
81. van Leeuwen Y. H., J. de Physique (6) 2, 361 (1921).
82. Slater J. C., Phys. Rev. 51, 195 (1937); 52, 214 (1937).
83. Feynman R. P., Prog. Low. Temp. Phys., vol. 1, p. 17, Amsterdam, 1955.
84. Vinen W. F., Nature 181, 1524 (1958); Physica 24, 13 (1958).
85. Chase C. E., Phys. Rev. Lett. 4, 220 (1960).
86. Гинзбург В. Л., УФН 48, 25 (1952).
87. Schafroth M. R., Phys. Rev. 100, 463 (1955).
88. Schafroth M. R., Blatt J. M., Butler S. T., Helv. Phys. Acta 30, 93 (1957) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 62, ИЛ, 1960).
89. Mastubara T., Blatt Y. M., Prog. Teor. Phys. 23, 45 (1960).

90. Schafroth M. R., Phys. Rev. 111, 72 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 245, ИЛ, 1960).
91. Feunman K. P., Cohen M., Phys. Rev. 102, 1189 (1956).
92. Ландау Л. Д., ЖЭТФ 34, 262 (1958); 30, 1058 (1956).
93. Ландау Л. Д., ЖЭТФ 32, 59 (1957).
94. Абрикосов А. А., Халатников И. М., Rep. Prog. Phys. 22, 329 (1959) (см. УФН 66, 177 (1958)).
95. Frölich H., Proc. Roy. Soc. (London) A215, 291 (1952) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 37, ИЛ, 1960).
96. Bardeen J., Pines D., Phys. Rev. 99, 1104 (1955).
97. Pines D., Phys. Rev. 109, 280 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 186, ИЛ, 1960).
98. Morrell P., J. Phys. Chem. Solids 10, 277 (1959).
99. Brown A., Zemansky M. W., Boorse H. A., Phys. Rev. 92, 52 (1953).
100. Goodman B. B., Proc. Roy. Soc. (London) A66, 217 (1953).
101. Welker H., Phys. Z. 39, 920 (1938).
102. Daunt J. G., Mendelssohn K., Proc. Roy. Soc. (London) A185, 225 (1946).
103. Nakamura K., Proc. Theor. Phys. 21, 713 (1959).
104. Bardeen J., Rickayzen G., Phys. Rev. 118, 936 (1960).
105. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А., ЖЭТФ 39, 120 (1960).
106. Swihart Y. C., Phys. Rev. 116, 45 (1959).
107. Cooper Z. N., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
108. Wentzel G., Helv. Phys. Acta 33, 859 (1961).
109. Corak W. S., Goodman B. B., Satterthwaite C. B., Wexler S., Phys. Rev. 96, 1442 (1954); 102, 656 (1956).
110. Corak W. S., Satterthwaite C. B., Phys. Rev. 102, 662 (1956).
111. Goodman B. B., Comp. Rend. 224, 2899 (1957); 246, 3031 (1958).
112. Chou C., White D., Johnston H. L., Phys. Rev. 109, 788 (1958).
113. Заварицкий Н. В., ЖЭТФ 34, 1116 (1958).
114. Phillips N. E., Phys. Rev. 114, 676 (1959).
115. Seidel G., Phys. Rev. 112, 1083 (1959).
- 115a. Cooper Z. N., Phys. Rev. Lett. 3, 17 (1959); Boorse H. A., Phys. Lett. 2, 391 (1959).
116. Morse R. W., Olsen T., Gavenda J. D., Phys. Rev. Lett. 3, 15 (1959); 4, 193 (1959).
117. Maxwell E., Lutes O. S., Phys. Rev. 95, 333 (1954).
118. Decker D. C., Mapother D. E., Shaw R. W., Phys. Rev. 112, 1888 (1958).
119. Finnemore D. K., Mapother D. E., Shaw R. W., Phys. Rev. 118, 127 (1960).
120. Н. Корре, Ergebn. exact. Naturw. 23, 283 (1950).
121. Bömmel H. E., Phys. Rev. 96, 220 (1954).
122. MacKinnon L., Phys. Rev. 98, 1181 (1955); 106, 70 (1957).

123. Кресин В. З., ЖЭТФ 36, 1957 (1959).
124. Tsuneto T., Phys. Rev. 118, 1029 (1960).
125. Безуглый П. О., Галкин А. А., Каролюк А. П., ЖЭТФ 36, 1951 (1959).
126. Bohm H. V., Morse R. W., Bull. Am. Phys. Soc. 11, 3, 225 (1958).
127. Kittel C., Phys. Rev. 98, 1181 (A) (1955).
128. Mattis D. C., Bardeen J., Phys. Rev. 111, 412 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 172, ИЛ, 1960).
129. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Халатников И. М., ЖЭТФ 35, 1 (1959).
130. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Халатников И. М., ЖЭТФ 37, 187 (1960).
131. Rickayzen G., Phys. Rev. 111, 817 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 252, ИЛ, 1960).
132. Nakajima S., Proc. Theor. Phys. 22, 430 (1959).
133. Константинов О. В., Перель Б. Л., ЖЭТФ 37, 786 (1959).
134. Bardeen J., Nuovo Cimento 5, 1766 (1957) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 241, ИЛ, 1960).
135. May R. M., Schafroth M. R., Phys. Rev. 115, 1446 (1959).
136. Wentzel G., Phys. Rev. 111, 1488 (1958) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 347, ИЛ, 1960).
137. Gupta K. K., Mathur V. S., Phys. Rev. 115, 75 (1959).
138. Pines D., Schrieffer J. R., Phys. Rev. Lett. 1, 407 (1958).
139. Wentzel G., Phys. Rev. Lett. 2, 33 (1959).
140. Klein O., Ark. Mat. Astronom. Fys. Ser. A31, № 12 (1944).
141. Klein O., Lindhard J., Rev. Mod. Phys. 17, 305 (1945).
142. Lindhard J., Dan. Mat. Fys. Medd. 28, № 8 (1954).
143. Ferrell R. A., Glover R. E. III, Phys. Rev. 109, 1398 (L) (1958).
144. Tinkham M., Ferrell R. A., Phys. Rev. Lett. 2, 331 (1959).
145. Edwards S. F., Phil. Mag. 3, 1020 (1958).
146. Weiss P. R., Abrahams E., Phys. Rev. 111, 722 (1958).
147. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ 35, 1558 (1958).
148. Mühlischlegel B., Z. Phys. 155, 313 (1959).
149. Miller P. B., Phys. Rev. 118, 928 (1960).
150. Tsuneto T., Phys. Rev. 118, 1029 (1960).
151. Sarachik M. P., Garwin R. S., Erlbach E., Phys. Rev. Lett. 4, 52 (1960).
152. Shawlow A. Z., Phys. Rev. 109, 1856 (L) (1958).
153. Clement J. R., Phys. Rev. 92, 1578 (1953).
154. Самойлов Б. Н., ДАН 86, 281 (1952).
155. Faber T. E., Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. (London) A231, 336 (1955).

156. Chambers R. G., Proc. Roy. Soc. (London) A215, 481 (1952).
157. Richards P. Z., Tinkham M. (в печати).
158. Lewis H. W., Phys. Rev. 102, 1508 (1956).
159. Schawlow A. L., Devlin G. E., Phys. Rev. 113, 120 (1959).
160. Pippard A. B., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
161. Miller P. B., Phys. Rev. 112, 1209 (1959).
162. Kaplan R., Nethercot A. H., Jr., Boorse H., Phys. Rev. 116, 270 (1959).
163. Spiewak M., Phys. Rev. 113, 1479 (1959).
164. Хайкин М. С., ЖЭТФ 34, 1389 (1958).
165. Spiewak M., Phys. Rev. Lett. 1, 4, 136 (1958).
166. Dresselhaus G., Dresselhaus M. C., Phys. Rev. 118, 77 (1960).
167. Bardasis A., Schrieffer J. R., Phys. Rev. 118, 1029 (1961).
168. Горьков Л. П., ЖЭТФ 34, 735 (1958).
169. Bohm D., Pines D., Phys. Rev. 92, 609, 626 (1953).
170. Pines D., Solid State Physics, vol. 1, p. 368, New York, 1955.
171. Geil-Mann M., Breuckner K. A., Phys. Rev. 106, 364 (1957).
172. Sawada K., Phys. Rev. 106, 372 (1957).
173. Sawada K., Brueckner K. A., Fukuda N., Brout R., Phys. Rev. 108, 507 (1957).
174. Brout R., Phys. Rev. 103, 515 (1957).
175. Wentzel G., Phys. Rev. 103, 1593 (1957) (см. перевод: «Теория сверхпроводимости», стр. 337, ИЛ, 1960).
176. Ehrenreich H., Cohen M. H., Phys. Rev. 115, 786 (1959).
177. Goldstone J., Gottfried K., Nuovo Cimento 13, 849 (1959).
178. Quinn J. J., Ferrell R. A., Phys. Rev. 112, 812 (1958).
179. Мигдал А. Б., ЖЭТФ 34, 1438 (1958).
180. Bardeen J., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
181. Brueckner K. A., Soda T., Anderson P. W., Morigel P., Phys. Rev. 118, 1442 (1960).
182. Yosida K., Phys. Rev. 110, 769 (1958).
183. Heine V., Pippard A. B., Phil. Mag. Ser. 8, 3, 1046 (1958).
184. Ferrell R. A., Phys. Rev. Lett. 3, 262 (1959).
185. Anderson P. W., Phys. Rev. Lett. 3, 325 (1959).
186. Martin P. C., Kadanoff L. P., Phys. Rev., Lett. 3, 322 (1959).
187. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ 39, 480 (1960).
188. Schrieffer J. R., Phys. Rev. Lett. 3, 323 (1959).

189. Blatt J. M., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
190. Gorter C. J., Prog. Low Temp. Phys., vol. 1, Amsterdam, 1955.
191. Ландау Л. Д., J. Phys. (СССР) 5, 71 (1951); 11, 91 (1947).
192. Bardeen J., Phys. Rev. Lett. 1, 399 (1959).
193. Gorter C. J., Can. Journ. Phys. 34, 1334 (1956).
194. Dingle R. B., Phil. Mag. 42, 1080 (1951).
195. Atkins K. R., Liquid Helium, Cambridge, 1959.
196. Гинзбург Н. И., Шальников А. И., ЖЭТФ 37, 399 (1960).
197. Rogers K. T., thesis, Univ. of Illinois, 1960.
198. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. (London) A203, 210 (1950).
199. Горьков Л. П., ЖЭТФ 36, 1918 (1959).
200. Горьков Л. П., ЖЭТФ 37, 833 (1960).
201. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ 36, 1930 (1959).
202. Mendelssohn K., Prog. Low Temp. Phys., vol 1, p. 185, Amsterdam, 1955; Can. Journ. Phys. 34, 1315 (1956).
203. Klemens P. G., Handbuch der Physik B14, S. 198, Berlin, 1956.
204. Hulm J. K., Proc. Roy. Soc. (London) A204, 98 (1950).
205. Laredo S. J., Proc. Roy. Soc. (London) A229, 473 (1955).
206. Sladek R. J., Phys. Rev. 97, 902 (1955).
207. Bardeen J., Rickaysen G., Tewordt L., Phys. Rev. 113, 982 (1959).
208. Гейликман Б. Т., Кресин В. З., ДАН 123, 259 (1958).
209. Гейликман Б. Т., Кресин В. З., ЖЭТФ 36, 959 (1959).
210. Заварицкий Н. В., ЖЭТФ 33, 1085 (1958).
211. Satterthwaite C. B., Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
212. Rosenberg H. M., Phil. Trans. A247, 441 (1955).
213. Kadanoff L. P., Martin P. C. (в печати).
214. Кресин В. З., ЖЭТФ 36, 1947 (1959).
215. Lynton E. A., Serin B., Zucker M., J. Phys. Chem. Solids 3, 165 (1957).
216. Chanin G., Lynton E. A., Serin B., Phys. Rev. 114, 719 (1959).
217. Anderson P. W., J. Phys. Chem. Solids 11, 26 (1959).
218. Abrahams E., Weiss P. R., Phys. Rev. 111, 722 (1958).
219. Nakamura K., Prog. Theor. Phys. 21, 435 (1959).
220. Matthias B. T., Suhl H., Corenzwit E., Phys. Rev. Lett. 1, 92, 449 (1958).
221. Hein R. A., Falge R. L., Matthias B. T., Corenzwit C., Phys. Rev. Lett. 2, 500 (1959).
222. Suhl H., Matthias B. T., Corenzwit E., Zachariasen W. H., Phys. Rev. 112, 89 (1958).
223. Suhl H., Matthias B. T., Phys. Rev. 114, 977 (1959).
224. Ахизер А. И., Померанчук И. Я., ЖЭТФ 36, 859 (1959).
225. Matthias B. T., Suhl H., Phys. Rev. Lett. 4, 51 (1960).

226. Matthias B., Compton V. B., Suhl H., Corenzwit E., Phys. Rev. **115**, 1597 (1959).
 227. Anderson G. S., Levgold S., Spedding F. H., Phys. Rev. **109**, 243 (1958); Phys. Rev. Lett. **1**, 322 (1958).
 228. Herring C., Suhl H., Phys. Suppl. **24**, 184 (1958).
 229. Pines D., Proceeding Rehovoth Conference Nuclear. Structure, September 1958.
 230. Bohr A., Mottelson B. R., Pines D., Phys. Rev. **110**, 936 (1958).
 231. Mottelson B. R., The Many Body Problem, p. 283, New York, 1959.
 232. Bellaev S. T., The Many Body Problem, p. 343, New York 1959; Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **34**, № 11 (1959).
 233. Mills R. L., Sessler A. M., Moszkowski S. A., Shankland D. G., Phys. Rev. Lett. **3**, 381 (1959).
 234. Мигдал А. В., ЖЭТФ **37**, 249 (1960).
 235. Cooper L. N., Mills R. L., Sessler A. M., Phys. Rev. **114**, 1377 (1959).
 236. Nambu Y., Proc. Midwest Theoret. Phys. Conference Purdue Univ., April 1960; Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
 237*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **31**, 202 (1956).
 238*. Жарков Г. Ф., ЖЭТФ **34**, 412 (1958).
 239*. Smith P., Cooper L., *et al.*, Phys. Rev. Lett. **6**, 686, 689 (1961).
 240*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **14**, 134 (1944).
 241*. Гинзбург В. Л., ФММ **6**, 994 (1958); Физика твердого тела **2**, 2031 (1960).
 242*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **29**, 748 (1955); Nuovo Cimento **2**, 1234 (1955).
 243*. Гейликман Б. Т., Кресин З. В., ЖЭТФ **41**, 1143 (1961).
 244*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **41**, 828 (1961).
 245*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **14**, 177 (1944); J. Phys. (СССР) **8**, 148 (1944).
 246*. Гейликман Б. Т., ЖЭТФ **34**, 1042 (1958).
 247*. Гинзбург В. Л., ДАН **118**, 464 (1958); Proc. VII International Conference on low Temperature Physics, p. 312, 1961.
 248*. Bremer J. W., Newhouse V. L., Phys. Rev. **116**, 309 (1959).
 249*. Севастьянов Б. К., ЖЭТФ **40**, 52 (1961).
 250*. Шарвин Ю. В., ЖЭТФ **33**, 134 (1957).
 251*. Davies E. A., Proc. Roy. Soc. (London) **255**, 407 (1960).
 252*. Халатников И. М., ЖЭТФ **36**, 1818 (1959); **38**, 298 (1960).
 253*. Абрикосов А. А., ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
 254*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **31**, 541 (1956).
 255*. Deaver B. S., Fairbank W. H., Jr., Phys. Rev. Lett. **7**, 43 (1961).
 256*. Byers N., Yang C. N., Phys. Rev. Lett. **7**, 46 (1961).
 257*. Onsager L., Phys. Rev. Lett. **7**, 50 (1961).
 258*. Doll R., Näbauer M., Phys. Rev. Lett. **7**, 51 (1961).
 259*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ, **42**, 299 (1962).

- 260*. Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **7**, 162 (1961).
 261*. Keller J. B., Zumino B., Phys. Rev. Lett. **7**, 164 (1961).
 262*. Giaever J., Phys. Rev. Lett. **5**, 464 (1960).
 263*. Nicol J., Shapiro S., Smith P., Phys. Rev. Lett. **5**, 461 (1960).
 264*. Douglass D. H., Jr., Phys. Rev. Lett. **6**, 460 (1961).
 265*. Sherril M. D., Edwards H. H., Phys. Rev. Lett. **6**, 460 (1961).
 266*. Покровский В. Л., ЖЭТФ **40**, 641 (1961).
 267*. Заварицкий Н. В., ЖЭТФ **37**, 1506 (1959); **39**, 1193 (1960).
 268*. Покровский В. Л., ЖЭТФ **40**, 898 (1961).
 269*. Покровский В. Л., Рывкин М. С., ЖЭТФ **40**, 1859 (1961).
 270*. Шарвин Ю. В., ЖЭТФ **33**, 298 (1960).
 271*. Шарвин Ю. В., Гантмахер В. Ф., ЖЭТФ **38**, 1456 (1960).
 272*. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
 273*. Geballe T. H., Matthias B. J., Hull G. W., Corenzwitt E., Jr., Phys. Rev. Lett. **6**, 275 (1961).
 274*. Тохен А. М., Phys. Rev. **123**, 442 (1961).