

**ПЕЛИНЕЙНАЯ
ТЕОРИЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ВОЛИ**

PROCEEDINGS
OF THE ROYAL SOCIETY

Series A Mathematical and Physical Sciences
№ 1456, v. 299, 1967

**A DISCUSSION ON NONLINEAR
THEORY OF WAVE PROPAGATION
IN DISPERSIVE SYSTEMS**

Organized by M. J. Lighthill, Sec. R. S.

PUBLISHED BY THE ROYAL SOCIETY

London 1967

**НЕЛИНЕЙНАЯ
ТЕОРИЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ВОЛН**

**ПЕРЕВОД
С АНГЛИЙСКОГО
Под редакцией
Г. И. БАРЕНБЛАТТА**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1970**

Книга представляет собой перевод материалов дискуссии по нелинейной теории распространения волн, проведенной Лондонским королевским обществом по инициативе известного ученого М. Лайтхилла. В ней содержатся глубокие обзорные статьи, написанные крупнейшими учеными-механиками (Лайтхиллом, Уиземом, Сафменом, Филлипсом, Бенджаменом и др.) и посвященные новым методам, проблемам и результатам нелинейной теории распространения волн. Эти работы имеют выдающееся значение для общей теории нелинейных явлений в сплошных средах.

Книга предназначена для научных работников в области механики сплошных сред и инженеров-исследователей. Она окажется полезной также аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Красовицкий (1860) см стр 104.

Проблема нелинейных гравитационных волн — традиционная проблема в исследованиях советских ученых-механиков; труды А. И. Некрасова¹⁾, Н. Е. Кочина²⁾, М. А. Лаврентьева³⁾, Л. Н. Сретенского⁴⁾ и их многочисленных последователей внесли фундаментальный вклад в классическую линию развития нелинейной теории волн. Дискуссия в Лондонском королевском обществе, материалы которой предлагаются вниманию читателя в русском переводе, была посвящена новым методам в нелинейной теории распространения волн, развитым в течение последних нескольких лет в основном трудами английских ученых. Вряд ли есть необходимость что-либо добавить к той яркой характеристике перспектив применения этих новых методов, которая дана во вступительной и заключительной статьях организатора дискуссии профессора М. Дж. Лайтхилла. Эти методы уже оказались полезными в ряде задач физики сплошных сред, даже весьма далеких от породившей их теории волн. По-видимому, они могут существенно облегчить исследование вопросов автоколебаний в сплошных средах и, в частности, актуальных задач автоколебаний вязкой и вязко-упругой жидкостей.

В настоящем сборнике вместе с материалами упомянутой дискуссии по предложению профессора М. Дж. Лайтхилла по-

1) Некрасов А. И., Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изд. АН СССР, М., 1951.

2) Кочин Н. Е., Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины, Собр. соч., Изд. АН СССР, М. — Л., 1949.

3) Лаврентьев М. А., До теории довгих хвиль, *Зб. Праць Инст. Матем. АН УССР*, № 8 (1946).

4) Сретенский Л. Н., Пространственная задача об определении установившихся волн конечной амплитуды, *ДАН СССР*, 89 (1953), 25—29; Распространение волн конечной амплитуды в круговом канале, Труды Морского гидрофизического института АН СССР, т. 6, 1955, стр. 3—9 и др. работы.

мещены две статьи М. С. Хоува; они интересны с точки зрения дальнейшего развития изложенных в ходе дискуссии идей.

Исчерпывающее изложение основных работ (до 1936 г.) по нелинейным волнам классического направления как советских, так и зарубежных авторов можно найти в книге Л. Н. Сретенского¹⁾. В лекциях В. И. Карпмана²⁾ можно найти многочисленные другие приложения идей, затронутых в настоящем сборнике.

Г. И. Баренблатт

¹⁾ Сретенский Л. Н., Волновые движения идеальной жидкости, ГИТТЛ, М., 1936.

²⁾ Карпман В. И., Лекции по нелинейному распространению волн в диспергирующих системах. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 1967.

Вводные замечания

М. ДЖ. ЛАЙТХИЛЛ

Настоящая дискуссия имеет своєю целью суммировать, консолидировать и привести в единообразную систему совокупность знаний в относительно новой области изучения механики волн, области, в которой основные результаты получены на протяжении последних шести лет. Эта деятельность, посвященная системам с дисперсией, представляет собой вторую фазу развития нелинейной механики волн. Первая фаза, насчитывающая теперь уже более ста лет своего существования, была связана с рассмотрением изотропных волн без дисперсии, т. е. волн (подобных, например, звуковым волнам), для которых скорость распространения *малых* возмущений не зависит ни от длины волны, ни от направления распространения, хотя на большие возмущения нелинейные эффекты и оказывают влияние. Эта теория состоит из двух частей: общего исследования непрерывного изменения формы волны, получающегося вследствие нелинейных эффектов, и специального исследования разрывов (появляющихся в форме ударных волн) вместе с изучением вопроса о том, как эти разрывы вписываются в непрерывные решения.

В этом предмете, оказывается, легко впасть в ошибку, ожидая проявления нелинейных эффектов только в том случае, когда амплитуда колебаний давления составляет существенную часть самого давления. Казалось бы на большом удалении от мест, где возмущения велики, можно утверждать, что «волны постепенно затухают и становятся уже достаточно малыми для того, чтобы линейная теория распространения могла описывать их дальнейшее развитие с несомненно достаточно полной точностью». Однако такое предположение было бы ошибочным: малые нелинейные члены уравнений создают при распространении на большие расстояния накапливающееся воздействие, влияние которого достаточно велико, и это утверждение остается справедливым, даже если амплитуды волн затухают.

Этот результат оказался очень благоприятным применительно к сверхзвуковой авиации, поскольку импульс давления, который прохождение сверхзвукового самолета вызывает на

поверхности земли, имел бы гораздо большую амплитуду, если бы была применима чисто линейная теория, — а ведь «хлопки» доставляют нам немало неприятностей и при нынешнем положении дел. К счастью, нелинейная теория, предсказывающая меньшую амплитуду, дает результаты, находящиеся в превосходном согласии с опытом; в частности, интенсивность сверхзвукового хлопка, вычисленная с ее помощью, была одним из критических конструктивных ограничений в проектах самолетов типа «Конкорд». Я испытываю определенную гордость за то, что девятнадцать лет назад выбрал в качестве задачи для первого по настоящему хорошего моего аспиранта определение импульсов давления, передаваемых на большие расстояния телами, движущимися со сверхзвуковыми скоростями. В то время уже было очевидно, что по той или иной причине окажется важным знать ответ на этот вопрос, и события вполне подтвердили такую точку зрения.

Аспирант, о котором идет речь, как вы знаете, успешно распутал эту задачу (Уизем, 1956), и для всех нас составляет большое удовольствие видеть его сегодня нашим первым докладчиком по вопросу о волнах в средах с дисперсией, представляющему до сих пор большую трудность. Я полагаю, что пока еще не вполне ясно, какова будет вся область практического приложения этих новых теорий (подобно тому как в 1947 г. это было неясно в акустическом случае); частично это связано с тем, что результаты новых теорий еще не отработаны на достаточно широком классе примеров. Несомненно, что некоторые из примеров, представленных на обсуждение, позволяют прояснить потенциальные возможности новых теорий, но можно поручиться, что эти теории будут иметь гораздо более широкое поле приложений и большую пробивную силу, нежели сейчас можно обоснованно предполагать. Может оказаться, в частности, что в очень многих задачах, в которых мы теперь спокойно применяем линейную теорию (за неимением ничего лучшего), истинное поведение решений существенно иное.

Исторически и в развитии *самой* линейной теории имело место аналогичное отставание во времени между развитием методов для изотропных задач без дисперсии и построением соответствующих обобщений на случай анизотропных волн с дисперсией. Разумеется, даже в изотропном случае точные аналитические методы позволяют провести вычисления до конца только тогда, когда формы границ и другие характеристики задач достаточно просты. В более сложных условиях для определения нормальных мод и сечений рассеяния целесообразнее применять численные и вариационные методы, но эти методы эффективны только для относительно низких частот.

Метод решения задач для случая высоких частот совсем иной, его идея восходит к принципу Гюйгенса для среды без дисперсии; в самом деле, в течение столетий приближение геометрической оптики (наряду с его различными ответвлениями, такими, как метод ВКБ и «ползущие» моды в теневых зонах) продолжало нести свою превосходную службу. Соответствующее использование геометрической оптики и лучевого метода в анизотропных средах с дисперсией было первоначально развито Гамильтоном в 1837 г. (хотя и не было подхвачено его современниками); оно неявно содержится в принципе соответствия квантовой механики. И лишь совсем недавно этот метод получил широкое распространение и приложение в задачах геофизического и инженерного направлений, в частности в метеорологии, океанографии и магнитной гидродинамике [3].

Данная дискуссия частично посвящена проблемам обобщения приближения геометрической оптики на нелинейный случай. Существенное предположение, лежащее в основе этого приближения, заключается в том, что параметры, характеризующие волны, медленно меняются на расстояниях порядка длины волны. Теория Уизема основана на том принципе, что если это изменение достаточно медленное, то локально волны должны хорошо представляться плоскими периодическими волнами. На этой дискуссии у нас будет возможность обсудить очень интересные следствия этого основного принципа теории Уизема, так же как и проблему определения условий, в которых теория Уизема дает вполне надежные результаты.

Я уверен, что этот принцип и определение диапазона его применимости суть ключевые моменты исследования. Существуют различные методы расчета, использующие этот принцип (первоначальный метод Уизема, его более поздний и более общий вариационный метод и, быть может, также и другие методы), однако значение всех этих методов должно зависеть от того, насколько точно волновые системы в типичных ситуациях, представляющих практический интерес, можно считать локально плоскими и периодическими.

В остальных методах, которые будут обсуждаться, не используется приближение геометрической оптики, но делаются другие предположения; в частности, обычно предполагают, что амплитуды остаются ограниченными, а в некоторых случаях считают, что отклонения от начального состояния остаются малыми. Именно на этой последней гипотезе основана теория, позволившая Бенджамену получить совершенно сенсационный результат, всесторонне подтвержденный опытами Фейра и состоящий в том, что периодические волны Стокса на глубокой воде, доказательству существования которых так много математиков посвятили

свои многолетние усилия, представляют собой неустойчивую конфигурацию.

Эта теория, которую доложит Бенджамен, является частным случаем теории «резонансных взаимодействий», изучению которой профессор Филлипс посвятил свою основополагающую работу [5] еще шесть лет назад. Резонирующая пара волн, образующая при совместном действии силы тяжести и поверхностного натяжения, была обнаружена много ранее Уилтоном [7], однако теория резонанса для теории собственно гравитационных волн, существенно опирающаяся на резонансные триплеты, была разработана только на протяжении последних шести лет. Филлипс в своем сообщении даст описание как теории, так и экспериментов в этой области, а Лонге-Хиггинс, также внесший очень важный вклад в эту теорию [4], опишет другую, в некотором смысле аналогичную работу, выполненную им совместно с Гиллом для теории волн Россби и планетарных волн в океане.

Теория резонанса уже нашла плодотворные применения для исследования случайных ансамблей волн, находящихся в нелинейном взаимодействии между собой. Исследования этого типа были начаты пионерской работой Фишмана, Кантровица и Петчека [2] при обсуждении вопроса о том, может ли случайный шум, производимый взаимодействующими между собой магнитогидродинамическими пакетами, внести существенный вклад в энтропию бесстолкновительной плазмы в магнитном поле. Общее представление об ансамблях взаимодействующих случайных волн дает Хассельман в своем сообщении; здесь особый интерес представляют его собственные недавние результаты и результаты Бинни и Сафмена [1]. Для выяснения этих вопросов и других проблем нелинейной генерации и рассеяния волн Хассельман использует идеи из физики твердого тела. Филлипс дает описание недавних применений всей совокупности своих методов к очень важным для геофизики проблемам внутренних волн и их взаимодействий.

Насколько мне известно, несколько докладчиков предполагают продемонстрировать согласованность между теорией Уизема для медленно меняющихся волновых цугов и различными теориями, включающими резонансные взаимодействия, т. е. показать согласованность условий, в которых приближения, лежащие в основе теорий обоих типов, являются одновременно применимыми. Более того, предметом этой дискуссии является наиболее ясное определение совокупности знаний в этой трудной области исследований, а также ее взаимосвязей со всеми другими областями знаний — как прелюдия к быстрому расширению работы в рассматриваемой области, которого можно, как я полагаю, ожидать в ближайшем будущем. Важно будет также

определить пробелы в наших познаниях и, в особенности, те задачи, для которых новая теория представляется наиболее плодотворной.

Имея это в виду в качестве конечной цели, я хотел бы стимулировать самое широкое обсуждение представленного материала. Для такого обсуждения в программе дискуссии отведено много времени. Надеюсь, что различные вопросы и выступления по ходу дискуссии будут способствовать успеху этого собрания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D. J., Saffman P. G., *Proc. Roy. Soc.*, A 289 (1966), 301.
2. Fishman F. J., Kantrowitz A. R., Petschek H. E., *Rev. Mod. Phys.*, 32 (1960), 959. (См. русский перевод: сб. *Механика*, № 3 (1961), 63—75.)
3. Lighthill M. J., *J. Inst. Math. Appl.*, 1 (1965), 1.
4. Longuet-Higgins M. S., *J. Fluid Mech.*, 12 (1962), 321.
5. Phillips O. M., *J. Fluid Mech.*, 9 (1960), 193.
6. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 1 (1956), 290.
7. Wilton J. R., *Phil. Mag.* (6), 29 (1915), 688.

Вариационные методы и их приложение к волнам на воде

Д. Б. УИЗЕМ

В статье дается обзор различных применений вариационных методов в теории нелинейных волн в средах с дисперсией, причем особое внимание уделяется применению этих методов для волн на воде. Сначала обсуждается вариационный принцип, соответствующий теории волн на воде; затем этот принцип используется для вывода длинноволновых приближений Буссинеска и Кортевега — де Фриза. Кратко излагается теория резонансного почти линейного взаимодействия с использованием функции Лагранжа. После этого дается обзор предложенной автором теории медленно меняющихся цугов волн и ее приложений к теории волн Стокса. Приводится также теория возмущений Льюка для медленно меняющихся цугов волн. Наконец показано, как можно при помощи интегро-дифференциальных уравнений сформулировать более общие дисперсионные соотношения; важное приложение этого подхода, развитое с некоторым успехом, может помочь разрешить давно стоящие трудности в понимании опрокидывания волн на воде.

1. Вариационный принцип для волн на воде

Некоторым исследованиям по нелинейной теории волн можно придать общую форму, если основные уравнения управляются вариационным принципом

$$\delta \int \int L \, dx \, dt = 0. \quad (1)$$

В то же время математические преобразования, которые при других способах могут оказаться трудоемкими, становятся простыми, если использовать «функцию Лагранжа» L . По-видимому, для отыскания вариационных принципов, отвечающих данной системе уравнений, не существует общего метода, отличного от эмпирического подхода. Однако для многих важных случаев такие вариационные принципы известны. Как это ни странно, по-видимому, соответствующей вариационной формулировки для волн на воде в литературе до сих пор дано не было; заведомо, она не является общеизвестной. Волны на воде представляют собой основной пример, рассмотренный в этой статье в качестве типичного примера волн в средах с дисперсией. Первые два раздела статьи содержат изложение соответствующего вариационного принципа и приближений для длинных волн.

Известно, что принцип Гамильтона, в котором функция Лагранжа L берется равной разности между кинетической энергией и потенциальной, должен быть применим в гидродинамике, поскольку вполне понятно, что жидкость можно рассматривать как некоторую систему частиц. Однако прямая формулировка принципа Гамильтона создает трудности в эйлеровом представлении, так что различные дополнительные условия должны вводиться при помощи множителей Лагранжа (см., например, Серрин [9]).

По крайней мере для безвихревых волн на воде более удобный вариационный принцип, свободный от дополнительных условий, представляется в виде (1), где

$$L = \int_0^{h(\mathbf{x}, t)} \left\{ \varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + gy \right\} dy. \quad (2)$$

Здесь y — вертикальная координата; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — горизонтальная координата; $\varphi(\mathbf{x}, y, t)$ — потенциал скорости; $y = h(\mathbf{x}, t)$ — уравнение свободной поверхности; g — ускорение силы тяжести. Вариации потенциала скорости φ внутри области течения приводят к уравнению

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad (3)$$

вариация h дает условие для давления

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + gy = 0 \quad \text{при} \quad y = h(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

После нескольких интегрирований по частям вариация φ на свободной поверхности приводит к «естественному» граничному условию

$$h_t + \varphi_{x_i} h_{x_i} - \varphi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = h(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Эта формулировка в явном виде была дана Льюком [7]. Бейтмен [1] указал некоторую форму, для которой функция (2) является частным случаем, однако он не обратил внимания на то, что условие на свободной поверхности (главное затруднение в теории волн на воде) также следует из (2).

Следует отметить, что, согласно принципу Гамильтона, функция Лагранжа равна

$$L_1 = \int_0^{h(\mathbf{x}, t)} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - gy \right\} dy. \quad (6)$$

Вариации этой функции дают уравнение Лапласа для течения, однако они приводят к неверным граничным условиям на

поверхности. Легко показать, что

$$L_1 = -L - [\varphi\varphi_y]_{y=0} - [\varphi(h_t + \varphi_{x_i}h_{x_i} - \varphi_y)]_{y=h} - \\ - \int_0^h \varphi \nabla^2 \varphi dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \varphi dy + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^h \varphi \varphi_{x_i} dy.$$

За исключением дивергентного члена, все остальные члены в последнем соотношении выражают закон сохранения массы. Если φ представляет собой некоторое решение уравнений теории волн на воде, то все эти остальные члены обращаются в нуль и функция L_1 будет отличаться от функции $-L$ только дивергентным членом. Для теории, описанной в § 4, используется осредненное значение L ; поскольку среднее значение дивергентного члена равно нулю, средние значения L и $-L_1$ равны между собой.

2. Длинные волны

2.1. Уравнения Буссинеска. Приближения для длинных волн можно получить путем разложения φ в степенной ряд по y . Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию $\partial\varphi/\partial y=0$ на дне $y=0$, имеет вид

$$\varphi = f(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} y^2 \nabla^2 f(\mathbf{x}, t) + O(h^4/\lambda^4), \quad (7)$$

где λ — типичная длина волны. При этом лагранжиан в (2) принимает вид

$$L = h \left(f_t + \frac{1}{2} f_{x_i}^2 \right) + \frac{1}{2} g h^2 - \frac{1}{6} h^3 \left\{ \nabla^2 f_t + f_{x_i} \nabla^2 f_{x_i} - (\nabla^2 f)^2 \right\} + \\ + O(h^5/\lambda^5). \quad (8)$$

Член, содержащий h^3 , представляет собой дисперсионную поправку к обычной теории мелкой воды. Вариационные уравнения, соответствующие лагранжиану (8), дают два дифференциальных уравнения для функций $f(\mathbf{x}, t)$ и $h(\mathbf{x}, t)$. В этой форме уравнения довольно сложны, и, как оказывается, проще оперировать с величиной потенциала на поверхности, т. е. с величиной

$$F(\mathbf{x}, t) = f - \frac{1}{2} h^2 \nabla^2 f + O(h^4/\lambda^4),$$

вместо величины f — значения потенциала на дне.

С точностью до члена

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} h^3 \nabla^2 f \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^3 f_{x_i} \nabla^2 f \right),$$

который не отражается на формулировке вариационного принципа, поскольку он обращается в нуль после интегрирования, имеем

$$L = h \left(F_t + \frac{1}{2} F_{x_i}^2 \right) + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{1}{3} h^3 (\nabla^2 F)^2 + O(h^5/\lambda^5). \quad (9)$$

Вариационные уравнения, соответствующие этому лагранжиану, суть

$$\delta F: h_t + (hF_{x_i})_{x_i} + \nabla^2 \left(\frac{1}{3} h^3 \nabla^2 F \right) = 0, \quad (10)$$

$$\delta h: F_t + \frac{1}{2} F_{x_i}^2 + gh - \frac{1}{2} gh^2 (\nabla^2 F)^2 = 0. \quad (11)$$

Производные высшего порядка дают дисперсионную поправку к теории мелкой воды. Обычно считается достаточным иметь линейризованную форму для этих поправочных членов, т. е.

$$h_t + (hF_{x_i})_{x_i} + \frac{1}{3} h_0^3 \nabla^4 F = 0, \quad (12)$$

$$F_t + \frac{1}{2} F_{x_i}^2 + gh = 0.$$

В этом случае считается малым не только параметр h_0^2/λ^2 , но и амплитудный параметр a/h_0 . Полностью линейризованные уравнения теории мелкой воды соответствуют условиям $a/h_0 \rightarrow 0$ и $h_0^2/\lambda^2 \rightarrow 0$ и могут быть записаны в следующем виде:

$$h_t + h_0 F_{x_i x_i} = 0, \quad F_t + gh = 0.$$

Уравнения (12) включают поправки следующего порядка малости по a/h_0 и h_0^2/λ^2 .

Другое представление можно получить, вводя вместо F среднее значение \mathcal{F} по глубине. Среднее значение \mathcal{F} дается соотношением

$$\mathcal{F} = f - \frac{1}{6} h^2 \nabla^2 f + O(h^4/\lambda^4) = F + \frac{1}{3} h^2 \nabla^2 F + O(h^4/\lambda^4),$$

поэтому вместо (12) получаем следующие уравнения:

$$h_t + (h \mathcal{F}_{x_i})_{x_i} = 0,$$

$$\mathcal{F}_t + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{x_i}^2 + gh - \frac{1}{3} h_0^2 \nabla^2 \mathcal{F}_t = 0. \quad (13)$$

Из первого уравнения (13) получаем, что $h_t = -h_0 \nabla^2 \mathcal{F}$ с точностью до членов более высокого порядка малости, так что (13)

можно переписать в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} h_t + (h\mathcal{F}_{x_i})_{x_i} &= 0, \\ \mathcal{F}_t + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{x_i}^2 + gh + \frac{1}{3} h_0 h_{tt} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, если ввести среднюю горизонтальную скорость $U_i = \mathcal{F}_{x_i}$, то можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Эта система уравнений представляет собой систему, обычно называемую уравнениями Буссинеска. Лагранжиан, соответствующий системе (14), имеет вид

$$L = h \left(\mathcal{F}_t + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{x_i}^2 \right) + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{1}{6} h_0 h_t^2.$$

2.2. Уравнение Кортевега — де Фриза. Кортевег и де Фриз [3] получили выражение для волн, распространяющихся только в одном направлении. Его можно получить как решение типа «простых волн» для уравнений мелкой воды, подправленных за счет дисперсионного члена третьего порядка в уравнениях (15). Можно проверить, что соотношения

$$\begin{aligned} U &= c_0 \left(\frac{\eta}{h_0} - \frac{1}{4} \frac{\eta^2}{h_0^2} \right) + \frac{1}{6} c_0 h_0 \eta_{xx}, \\ \eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \eta_{xxx} &= 0, \\ \eta &= h - h_0 \end{aligned} \quad (16)$$

представляют собой решение уравнений (15) с ошибкой второго порядка по a/h_0 и h_0^2/λ^2 .

Остается неясным, как можно получить соотношения (16) из вариационного принципа (9). Однако один вариационный принцип можно получить непосредственно, если записать (16) в форме

$$\begin{aligned} \psi_{xt} + c_0 (1 + \psi_x) \psi_{xx} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \chi_{xxx} &= 0, \\ \psi_{xx} - \chi &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $3\eta/2h_0 = \psi_x$. Уравнения (17) получаются из следующего вариационного принципа:

$$\delta \int \int \left\{ \frac{1}{2} \psi_x \psi_t + \frac{1}{2} c_0 \psi_x^2 + \frac{1}{6} c_0 \psi_x^3 + \frac{1}{12} c_0 h_0^2 (\chi^2 + 2\chi_x \psi_x) \right\} dx dt = 0. \quad (18)$$

3. Резонансные взаимодействия

Одним из подходов к нелинейным волнам является использование метода возмущений для малой амплитуды, основанного на линеаризованной теории, как приближении более низкого порядка. Непосредственное разложение в ряды при этом приводит к появлению вековых членов, линейно растущих по t , которые обязаны своим происхождением резонансу между произведениями линейных членов, имеющими более высокий порядок, с первоначальными членами линейной теории. Данный вопрос интенсивно разрабатывался другими участниками настоящей дискуссии, и большинство следующих статей посвящено этому подходу.

Представляется заслуживающим внимания показать коротко, каким образом вариационные методы используются для резонансных взаимодействий с той целью, чтобы подчеркнуть различие между этим подходом и методом медленно меняющихся волн, описанным в следующем разделе. Для этого достаточно простого примера; однако следует с самого начала подчеркнуть, что в других примерах алгебраические выкладки существенно возрастают. Рассматриваемый пример является необычно простым.

В качестве этого простого примера рассмотрим уравнение¹⁾

$$u_t + 3u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

Для получения вариационного принципа положим $u = \varphi_x$, $\chi = \varphi_{xx}$ и запишем эквивалентную пару уравнений в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{xt} + 3\varphi_x^2\varphi_{xx} + \chi_{xx} &= 0, \\ \varphi_{xx} - \chi &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \varphi_x \varphi_t + \varphi_x \chi_x + \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{1}{4} \varphi_x^4. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь некоторую совокупность волн, представленную в виде

$$\varphi = \sum \frac{1}{ik_\alpha} A_\alpha(t) e^{ik_\alpha x}, \quad \alpha = \pm 1, \dots, \pm N,$$

где $k_{-\alpha} = -k_\alpha$ и $A_{-\alpha} = A_\alpha^*$, чтобы φ было действительным (звездочка означает комплексно сопряженную величину). За вычетом

¹⁾ Это уравнение предложено Бинни как модель для обсуждения резонансных взаимодействий.

дивергентного члена лагранжиан представляется в виде

$$L = \sum \sum \left\{ \frac{1}{2ik_\alpha} A_\beta \frac{dA_\alpha}{dt} + \frac{1}{2} k_\alpha k_\beta A_\alpha A_\beta \right\} \exp \{i(k_\alpha + k_\beta) x\} + \\ + \frac{1}{4} \sum \sum \sum \sum A_\alpha A_\beta A_\gamma A_\delta \exp \{i(k_\alpha + k_\beta + k_\gamma + k_\delta) x\}. \quad (21)$$

В вариационном принципе функция L интегрируется по произвольному прямоугольнику в плоскости (x, t) . Возьмем прямоугольник, для которого $-l \leq x \leq l$, и рассмотрим функцию

$$\hat{L} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l L dx. \quad (22)$$

При переходе к пределу сохраняются лишь «резонансные члены», для которых

$$k_\alpha + k_\beta = 0, \quad k_\alpha + k_\beta + k_\gamma + k_\delta = 0.$$

Резонансные пары членов (независимо от их порядка) суть $(k_\alpha, k_\beta) = (k_n, -k_n)$, где $n=1, 2, \dots, N$. В четверках имеются различные возможности. Всегда будут резонансными взятые в некотором порядке следующие четверки членов:

$$(k_n, k_n, -k_n, -k_n)$$

и

$$(k_m, k_n, -k_m, -k_n), \quad m \neq n.$$

Частные случаи резонансов могут быть, однако, заложены в заданных начальных модах; например, предполагается, что среди начального множества волновых чисел в резонансной задаче, рассмотренной Бенджаменом, находятся волновые числа $k_0, k_+ = k_0 + \mu, k_- = k_0 - \mu$. Тогда будут резонансными следующие четверки:

$$(k_0, k_0, -k_+, -k_-) \quad \text{и} \quad (-k_0, -k_0, k_+, k_-).$$

Лангранжиан \hat{L} принимает вид

$$\hat{L} = \sum \frac{i}{2k_n} \left(A_n \frac{dA_n^*}{dt} - A_n^* \frac{dA_n}{dt} \right) - \sum k_n^2 A_n A_n^* + \frac{3}{2} \sum (A_n A_n^*)^2 + \\ + 6 \sum_{m \neq n} \sum A_m A_m^* A_n A_n^* + 3 \{ A_0^2 A_+^* A_-^* + A_0^2 A_+ A_- \}. \quad (23)$$

Вариационный принцип приводится к виду

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \hat{L} dt = 0,$$

В линейной теории в лагранжиане \hat{L} удерживаются только квадратичные члены и вариация по A_n^* дает соотношение

$$\frac{i}{k_n} \frac{dA_n}{dt} = -k_n^2 A_n. \quad (24)$$

Решение имеет вид $A_n = a_n e^{-i\omega_n t}$, где ω_n удовлетворяет линейному дисперсионному соотношению

$$\omega_n = -k_n^3. \quad (25)$$

Для полного выражения (23) вариация, например A_+^* , дает

$$\frac{i}{k_+} \frac{dA_+}{dt} = - \left\{ k_+^2 - 3A_+ A_+^* - 6 \sum' A_n A_n^* \right\} A_+ + 3A_0^2 A_-^*, \quad (26)$$

где \sum' — суммирование по всем модам, кроме той, для которой $k = k_+$. Второй член в коэффициенте при A_+ представляет собой изменение частоты, обусловленное нелинейными эффектами одной моды, третий член определяет изменение частоты, обусловленное нелинейным взаимодействием с другими модами. Член $3A_0^2 A_-^*$ определяет изменение в A_+ , обусловленное специальным резонансом между k_0 , k_+ и k_- . Если A_+ и A_- малы по сравнению с A_0 , то можно предполагать, что величины A_+ и A_- не влияют на A_0 с точностью до первого порядка, так что

$$A_0 = a_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad \omega_0 = -k_0^3 + 3k_0 a_0^2,$$

отсюда без потери общности можно считать, что a_0 — действительная величина.

При этом уравнение (26) и соответствующее ему уравнение, в котором k_+ , A_+ заменены на k_- , A_- , имеют приближенные решения:

$$A_{\pm} = a_{\pm} e^{-i\omega_{\pm} t}, \quad A_- = a_- e^{-i\omega_- t}, \quad (27)$$

$$\omega_{\pm} = -k_{\pm}^3 + 6k_{\pm} a_0^2 + 3k_0 (a_0^2 - \mu^2) + i \sqrt{9k_0^2 \mu^2 (2a_0^2 - \mu^2)}.$$

Этот тип «неустойчивости» был обнаружен Бенджаменом для волн на глубокой воде. «Резонанс» частот $\omega_+ + \omega_-^* = 2\omega_0$, который можно усмотреть непосредственно из показателей экспоненциальных выражений в (27), следует отметить специально.

В более общих примерах возникают отмеченные ранее осложнения, поскольку резонанс может не появиться даже при использовании нелинейной теории второго и третьего порядков. Этот вопрос и соответствующее использование диаграммной техники для преодоления упомянутых осложнений обсуждаются в статье Хассельмана.

4. Осреднение для медленно меняющихся нелинейных волновых пакетов

Метод взаимодействий ограничен почти линейными задачами. Подозревая, что истинно нелинейные представления могут в этом подходе отсутствовать, была сделана попытка найти какие-либо вполне нелинейные решения в дополнение к периодическим равномерным цугам волн, существование которых было известно в типичных задачах. Отыскивалось некоторое упрощающее свойство, отличное от линеаризации, причем казалась очевидной возможность рассмотрения медленно меняющихся цугов волн, для которых решения были бы близки к точным решениям для равномерных цугов волн. Была развита общая теория такого подхода (см. работы [10, 11]); ее основные моменты рассмотрены в этом разделе. «Метод взаимодействий» и «метод слабых изменений» легко сравнить на примере элементарного случая биений. Для линейной задачи с дисперсией решение с двумя соседними модами можно записать либо в виде

$$a_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t),$$

либо в виде

$$a \cos(kx - \omega t - \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \left\{ \frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right\}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \operatorname{tg} \left\{ \frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right\}, \\ k &= \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

В нелинейном аналоге можно рассматривать либо изменения величин a_1, k_1, a_2, k_2 , соответствующие взаимодействию мод, либо изменения медленно меняющихся функций a, k, ω .

При развитии теории медленно меняющихся нелинейных цугов волн математические операции оказались невыполнимыми во всех случаях, за исключением простейших, пока не было осознано, что все относящиеся к делу выражения можно определить через некоторую функцию Лагранжа. Но тогда весь вывод можно дать, исходя из вариационного принципа.

Рассмотрим случай волн на воде с функцией Лагранжа:

$$L = \int_0^{h(x, t)} \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g y \right\} dy.$$

Существуют равномерные цуги волн, для которых

$$\varphi = \beta_i x_i - \gamma t + \Phi(\theta, y), \quad \theta = \kappa_i x_i - \omega t, \quad h = H(\theta), \quad (29)$$

где κ_i , ω , β_i , γ — постоянные параметры. Члены, пропорциональные x_i и t , включены в φ для достижения полной общности формулировки. Решение нормировано таким образом, что изменение фазы θ за один период составляет 2π и что Φ — периодическая часть φ ; эти условия можно записать в виде

$$[\theta] = 2\pi, \quad [\Phi] = 0, \quad (30)$$

где $[]$ обозначает изменение соответствующей величины за один период. Тогда κ_i представляет собой волновое число, ω — частоту, β_i — среднюю горизонтальную скорость. Существуют два других параметра, за которые можно принять среднюю высоту b и амплитуду волн a . Таким образом, решение зависит от двух триплетов (κ, ω, a) и (β, γ, b) . Два соотношения между этими параметрами получаются из условий нормировки (30), однако решающим является то, что на этом этапе они остаются независимыми.

В точной теории волн на воде это однородное решение в явном виде не получено. Для длинноволнового приближения, рассматриваемого в § 2, решение, соответствующее равномерно распространяющемуся цугу волн, известно и выражается в эллиптических функциях. Оно известно также в более общей форме в стоковом приближении для волн малой амплитуды; это приближение было бы возвратом к почти линейному случаю, но здесь ценно получение общей точки зрения.

Медленно меняющийся цуг волн близок к этому однородному решению; его можно приближенно представить теми же самыми выражениями с двумя триплетами (κ, ω, a) , (β, γ, b) — медленно меняющимися функциями в пространстве и времени в том смысле, что относительное изменение каждой из них на одной длине волны или за один период мало. Тогда *осредненный* лагранжиан \mathcal{L} получается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\kappa, \omega, a; \beta, \gamma, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^H \left\{ -(\gamma + \omega\Phi_\theta) + \frac{1}{2}(\beta_i + \kappa_i\Phi_\theta)^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 + gy \right\} dy d\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

Утверждается, что «осредненные уравнения» для медленно меняющихся функций (κ, ω, a) , (β, γ, b) можно получить из «осредненного вариационного принципа»

$$\delta \iint \mathcal{L}(\kappa, \omega, a; \beta, \gamma, b) dx dt = 0, \quad (32)$$

где соотношения

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, & \omega &= -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \beta_i &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, & \gamma &= -\frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (33)$$

представляют собой соответствующие обобщения формул $\theta = \kappa_i x_i - \omega t$, $\psi = \beta_i x_i - \gamma t$ для однородного решения. Этот вариационный принцип является интуитивно правильным, однако он не получается при помощи формальной процедуры теории возмущений. Оставалось неясным, как применять формальную процедуру для высших порядков при вариационном подходе. Однако Льюк [6] установил, каким образом подробная формальная процедура примененная к дифференциальному уравнению, приводит к тем же результатам в некотором частном случае; основные положения его работы рассмотрены в разд. 5.

Вариационный принцип (32) с ограничениями (33) приводит к соотношениям

$$\mathcal{L}_a = 0, \quad \mathcal{L}_b = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{\kappa_i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\gamma - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{\beta_i} = 0. \quad (35)$$

Поскольку сюда входят только производные от θ и ψ , удобнее добавить условия совместности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_i}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= 0, & \text{rot } \kappa &= 0, \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial t} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} &= 0, & \text{rot } \beta &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

нежели подставлять соотношения (33). Функциональные соотношения (34) дают в точности условия нормировки (30). Дисперсионное соотношение $[\theta] = 2\pi$ принимает вид $\mathcal{L}_a = 0$.

4.1. Адиабатические инварианты. Проблема медленно меняющихся цугов волн аналогична проблеме медленно меняющихся колебаний в классической механике. Известная элементарная задача состоит в определении изменений амплитуды простого маятника, когда пружина медленно перемещается по подставке. Вообще же говоря, эта задача относится к поведению гамильтоновой системы, когда внешний параметр медленно меняется со временем. Теория основывается обычно на уравнениях Гамильтона, причем существенно используются канонические преобразования. Соответствующие преобразования не существуют в случае большего числа независимых переменных [8], так что в задачах теории волн подобные методы построить нельзя. С дру-

гой стороны, метод осредненного лагранжиана к задаче механики применить можно по крайней мере в простых случаях.

Рассмотрим некоторую механическую систему с лагранжианом $L(q, \dot{q}, \lambda)$, где $\lambda(t)$ — некоторый внешний параметр. Предположим, что при $\lambda = \text{const}$ существуют периодические решения $q = q(\theta)$, $\dot{\theta} = \omega$ с интегралом энергии

$$\dot{q}(\partial L/\partial \dot{q}) - L = E.$$

Эти решения отвечают равномерным цугам волн; здесь (E, ω) суть параметры, соответствующие (a, κ, ω) и т. д. Вычислим теперь осредненный лагранжиан

$$\mathcal{L}(\omega, E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\theta - E = \frac{\omega}{2\pi} \oint p dq - E, \quad (37)$$

где $p = \partial L/\partial \dot{q}$ вычисляется как некоторая функция $p(q, \lambda, E)$ из уравнения энергии.

Вариационные уравнения имеют вид

$$\mathcal{L}_E = 0, \quad d\mathcal{L}_\omega/dt = 0.$$

Если интеграл действия

$$\frac{1}{2\pi} \oint p dq$$

обозначить через $I(\lambda, E)$, то эти уравнения приведутся к виду

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\partial I}{\partial E}, \quad I = \text{const}.$$

Эти уравнения выражают собой классические результаты; здесь интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \mathcal{L}_\omega$$

представляет собой «адиабатический инвариант».

В волновой задаче первое уравнение (35) можно интерпретировать как уравнение баланса между изменениями времяподобной адиабатической переменной \mathcal{L}_ω и изменениями пространственноподобных адиабатических переменных \mathcal{L}_{κ_i} , коль скоро энергия медленно переносится к различным частям цуга волн. В простых случаях осредненный лагранжиан близко следует форме, указанной соотношениями (37) (см. ниже уравнение (57)). Кроме того, функция W , в ранней версии этого метода (Уизем, [10]), представляет собой некоторый аналог инварианта I .

4.2. Линейная теория. Будучи развитой специально для нелинейных волн, эта теория указывает некоторый новый общий

подход к теории линейных волн с дисперсией. Прежде всего мы рассмотрим здесь волны на воде, а потом обсудим общий случай.

В линеаризованной теории одномерных волн на воде соотношение (29) принимает вид

$$H = h_0 + b + a \cos \theta,$$

$$\Phi = \frac{a\omega \operatorname{ch} \kappa y}{\kappa \operatorname{sh} \kappa h_0} \sin \theta,$$

где h_0 — невозмущенная глубина потока. Можно ожидать, что величины (β, γ, b) не потребуются в линейной теории, но мы сохраним их при вычислении \mathcal{L} , чтобы облегчить сравнение с нелинейным случаем. Осредненный лагранжиан \mathcal{L} вычисляется путем подстановки H и Φ в (31), в результате мы получаем

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2} \beta^2 - \gamma\right)(h_0 + b) + \frac{1}{2} g b^2 + \frac{1}{4} g a^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{g \kappa \operatorname{th} \kappa h_0}\right).$$

Как и ожидалось, изменения средней скорости β и средней высоты b не связаны с волновым движением, и для получения обычной линейной теории можно принять $b = \beta = \gamma = 0$. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} g a^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{g \kappa \operatorname{th} \kappa h_0}\right).$$

Без потери общности можно считать, что для линейной системы лагранжиан L квадратичен по возмущениям, поэтому всегда будет получаться, что

$$\mathcal{L} = G(\omega, \kappa) a^2. \quad (38)$$

Поскольку $\mathcal{L}_a = 0$, имеем

$$G(\omega, \kappa) = 0, \quad (39)$$

откуда вытекает, что функция G всегда определяет собой левую часть дисперсионного соотношения.

Другое вариационное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \kappa_i = 0. \quad (40)$$

Оно принимает форму

$$\frac{\partial (G_\omega a^2)}{\partial t} - \frac{\partial (G_{\kappa_i} a^2)}{\partial x_i} = 0. \quad (41)$$

Хотя это уравнение подобно уравнению энергии, оно соответствует скорее уравнению для адиабатических инвариантов, рас-

смотренному выше. Дополнительные уравнения, которые необходимо решать совместно с (41), имеют вид

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \text{rot } \kappa = 0, \quad G(\omega, \kappa) = 0, \quad (42)$$

где ω можно рассматривать как некоторую функцию κ ; в результате мы имеем

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial t} + C_j(\kappa) \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_j} = 0, \quad (43)$$

где

$$G_j(\kappa) = -G_{\kappa_j}/G_\omega \quad (44)$$

представляет собой линейную групповую скорость. Из (43) и (44) вытекает, что (41) можно преобразовать в соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(\kappa) a^2) + \frac{\partial}{\partial x_i}(C_i F(\kappa) a^2) = 0 \quad (45)$$

при произвольной функции $F(\kappa)$. В частности, при $F(\kappa) = 1$ уравнение (41) преобразуется к виду

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial (C_i a^2)}{\partial x_i} = 0. \quad (46)$$

Это уравнение можно рассматривать как «энергетическое уравнение», однако для физической энергии, вообще говоря, требуется другой выбор $F(\kappa)$, см. разд. 4.5.

Уравнения (43) и (46) можно решить путем интегрирования вдоль характеристик:

$$dx/dt = C. \quad (47)$$

Величина κ остается постоянной вдоль характеристик, и, коль скоро κ найдено, изменения a определяются из соотношения

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_i}{\partial x_i} a. \quad (48)$$

Уравнение (48) определяет уменьшение амплитуды вследствие расхождения группы волн. Таким образом, групповая скорость представляет собой двойную характеристическую скорость системы и определяет распространение изменений κ и a . Следует также заметить, что можно определить некоторую «энергетическую скорость» как поток энергии, деленной на плотность энергии. В соответствии с соотношением (45) эта скорость для линейной системы совпадает с величиной C . Фактически характеристическая скорость отличается от энергетической, поэтому

оказывается, что для нелинейной системы эти скорости не совпадают.

4.3. Тип уравнений для нелинейной системы. В нелинейной теории условие $\mathcal{L}_a = 0$ не дает соотношения, не зависящего от a , поэтому

$$\omega = \omega(\kappa, a)$$

даже в простом случае, когда от других переменных β, γ, b решение не зависит. Таким образом, уравнения для κ и a перестают быть несвязанными и образуют систему дифференциальных уравнений, которую необходимо исследовать. Первый важный вопрос состоит в том, эллиптически или гиперболически эта система. Его можно решить стандартными методами. Как простейший первый шаг, выводящий за рамки линейной теории, можно предположить в одномерном случае, что

$$\omega = \omega_0(\kappa) + \omega_1(\kappa) a^2.$$

Это соотношение вносит в систему эффект нелинейности; предполагается, однако, что «уравнение энергии»

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_0(\kappa) a^2) = 0$$

остается в силе при

$$C_0(\kappa) = \omega'_0(\kappa).$$

Из этого уравнения и из уравнения

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\omega_0 + \omega_1 a^2) = 0$$

можно легко найти, что характеристические скорости равны

$$C = C_0(\kappa) \pm a \sqrt{(\omega_1 C'_0) + O(a^2)}. \quad (49)$$

Рассматриваемые уравнения гиперболически при $\omega_1 C'_0 > 0$ и эллиптически при $\omega_1 C'_0 < 0$.

В гиперболическом случае двойная характеристическая скорость линейной теории расщепляется на две отдельные скорости и дает обобщение групповой скорости на нелинейные задачи.

Если имеет место эллиптический случай, то это означает, что исходный равномерный цуг волн является в некотором смысле неустойчивым. В этом случае малые синусоидальные возмущения κ и a определяются решениями вида

$$e^{i\mu(x-Ct)}, \quad (50)$$

где величина C определяется соотношением (49) для невозможных значений κ и a . Если величина C комплексная, что соответствует эллиптическому случаю, то модуляции, определяемые соотношением (50), растут по экспоненциальному закону; в этом смысле цуг волн и является неустойчивым. Если применить эти простые соображения к стоксовым волнам на глубокой воде, то легко видеть, что уравнения эллиптические, поскольку

$$\omega = \sqrt{g\kappa} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 a^2 \right) + O(a^4). \quad (51)$$

Таким образом, имеем $\omega_1 C'_0 < 0$, т. е. характеристические скорости в (49) будут мнимыми, а стоксовы волны на глубокой воде — неустойчивыми. Этот результат сначала казался удивительным и, возможно, неправильным. Поэтому он был временно забыт, пока не оказалось возможным провести полное обсуждение теории волн на воде. Однако, когда Лайтхилл [5] исследовал данную полную теорию, он обнаружил этот результат для стоксовых волн и сразу понял, что результат должен быть верным. После этого Лайтхилл подробно исследовал эллиптические случаи, поскольку ранее они почти не изучались.

К настоящему времени выполнено также полное исследование стоксовых волн на воде произвольной глубины (Уизем, [12]). В дополнение к нелинейности, вносимой дисперсионным соотношением, здесь имеет место взаимное влияние волнового движения и изменений средней высоты b и скорости β ; для глубокой воды этим взаимным влиянием можно пренебречь, поэтому предыдущий результат остается справедливым. Для конечной глубины это взаимное влияние приводит к уменьшению скорости роста модуляций, а для мелкой воды уравнения меняют тип и цуги волн становятся устойчивыми.

Для произвольной глубины осредненный лагранжиан оказывается равным

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\frac{1}{2} \beta^2 - \gamma \right) (h_0 + b) + \frac{1}{2} g b^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(\omega - \beta\kappa)^2}{g\kappa \operatorname{th} \kappa (h_0 + b)} \right\} E + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 D_0}{g \operatorname{th} \kappa h_0} E^2 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$E = \frac{1}{2} g a^2, \quad D_0 = \frac{9 \operatorname{th}^4 \kappa h_0 - 10 \operatorname{th}^2 \kappa h_0 + 9}{8 \operatorname{th}^3 \kappa h_0}.$$

Осредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega_0} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_0 E}{\omega_0} \right) &= 0, \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta h_0 + \frac{E}{c_0} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_0 + \frac{\kappa^2 D_0}{c_0} E + \frac{\kappa B_0}{h_0} b + \kappa \beta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g b + \frac{B_0}{c_0 h_0} E \right) &= 0,\end{aligned}$$

$$\omega_0^2 = g \kappa \operatorname{th} \kappa h_0, \quad C_0 = \omega_0'(\kappa), \quad c_0 = \omega_0 / \kappa_0, \quad B_0 = C_0 - \frac{1}{2} c_0.$$

Оказывается, что уравнения имеют эллиптический тип, если $\kappa h_0 > 1,36$, и гиперболический, если $\kappa h_0 < 1,36$. Дальнейшие подробности можно найти в цитированной выше работе.

Развитая теория была применена к уравнениям Кортевега — де Фриза и Буссинеска (без каких-либо упрощений, связанных с малостью амплитуды) и к аналогичной задаче теории волн в плазме. Обсуждение этих и дальнейших результатов можно найти в более ранних статьях [10, 11].

4.4. Связь с теорией неустойчивости Бенджамена. Для медленно меняющегося цуга волн, который является почти линейным, можно записать

$$\varphi = \frac{1}{2} a e^{i\theta} + \frac{1}{2} a^* e^{-i\theta},$$

где a , θ_x , θ_t — медленно меняющиеся функции. Предполагается, что амплитуда будет достаточно мала для того, чтобы цуг волн сохранил синусоидальную форму, однако фазовая функция θ будет нелинейно зависеть от амплитуды, причем эта зависимость определяется нелинейным дисперсионным соотношением. Если рассмотреть частный случай, для которого эти медленно меняющиеся функции близки к постоянным, то можно записать

$$a = a_0 + a_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1, \quad \theta_0 = \kappa_0 x - \omega(\kappa_0, a_0) t,$$

где a_0 , κ_0 — константы; a_1 , θ_1 — малые возмущения амплитуды и фазы. Предполагая, что θ_1 ограничено (в отличие от θ_0), можно разложить решение с точностью до членов первого порядка по a_1 и θ_1 и представить его в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} a_0 e^{i\theta_0} + \frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_0} + \frac{1}{2} i \theta_1 a_0 e^{i\theta_0} + \text{Сопряженные величины}.$$

Малые возмущения a_1 и θ_1 удовлетворяют линейному приближению осредненных уравнений. Эти уравнения имеют постоянные

коэффициенты, зависящие от (κ_0, a_0) , и допускают решения вида

$$\begin{aligned} a_1 &= B_+(t)e^{i\mu x} + B_-(t)e^{-i\mu x}, \\ \theta_1 &= \Theta_+(t)e^{i\mu x} + \Theta_-(t)e^{-i\mu x}, \end{aligned}$$

где функции B_+ и т. д. экспоненциально возрастают или осциллируют в зависимости от того, являются ли уравнения эллиптическими или гиперболическими. Наконец, потенциал φ можно выразить в виде

$$\varphi = A_0 e^{i\kappa_0 x} + A_+ e^{i(\kappa_0 + \mu)x} + A_- e^{i(\kappa_0 - \mu)x} + \text{Сопряженные величины.}$$

Этот подход можно теперь отождествить с методом резонансных взаимодействий Бенджамена (см. § 3). Заметим, что две боковые модуляции, вводимые в исследовании Бенджамена, эквивалентны взаимодействующим модуляциям амплитуды и фазы в методе осреднения. Возмущения a_1 и θ_1 будут медленно меняющимися функциями при условии, что $\mu \ll \kappa_0$. Метод Бенджамена свободен от этого ограничения, но, с другой стороны, он применим только к нелинейным задачам.

4.5. Уравнения сохранения и скачки. Если осредненные уравнения являются гиперболическими, то некоторые решения будут «рваться» в том смысле, что непрерывное вначале решение будет становиться многозначным. Это явление аналогично возникновению ударных волн в газовой динамике. Однако в данном рассмотрении волн на воде это явление соответствует просто наложению двух частей цуга волн и не требует разрывов. Предсказание возникновения такого явления, в случае когда начальная форма близка к одиночному периодическому цугу волн, представляет самостоятельный интерес. Разумеется, после того как такое наложение произойдет, развитые здесь осредненные уравнения уже становятся неприменимыми. Здесь уже требуется обобщенная теория с возможностью появления более чем одной главной моды. По-видимому, такую теорию можно построить, причем в связи с этим может оказаться полезным рассмотрение взаимодействий для почти линейных мод.

Другая интригующая возможность состоит в том, что разрыв в осредненных уравнениях («скачок») иногда отвечает требуемому решению. Доводом в пользу этого может быть то, что осредненные уравнения становятся непригодными, поскольку непригодным становится представление о медленно меняющемся цуге волн. Однако, как и в газовой динамике, решение можно получить без обращения к исходным неупрощенным уравнениям, вводя разрывы, удовлетворяющие соответствующим уравнениям сохранения. Математически это означает обращение к «обобщенным решениям».

Условия на скачках получаются из уравнений сохранения. Однако существенным свойством всех этих нелинейных задач является то, что законов сохранения всегда больше, нежели требуемых условий на скачках. Например, из дифференциальных уравнений невязкой газодинамики можно получить уравнение сохранения энтропии

$$(\rho S)_t + \nabla(\rho u S) = 0$$

в дополнение к уравнениям сохранения массы, количества движения и энергии. Однако нельзя применять соответствующее условие на скачке, поскольку из физических соображений следует, что энтропия в скачке не сохраняется. Аналогичное положение возникает и здесь.

Уравнения (35) и (36) уже имеют форму законов сохранения. Другие важные уравнения можно получить из вариационного принципа (32) путем использования теоремы Нётер. Поскольку лагранжиан \mathcal{L} инвариантен по отношению к произвольному сдвигу по времени, отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathcal{L}_\omega + \gamma \mathcal{L}_\gamma - \mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega \mathcal{L}_{x_i} + \gamma \mathcal{L}_{\beta_i}) = 0. \quad (52)$$

Это и есть уравнение энергии. Аналогично этому, поскольку лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно сдвигов в пространстве, отсюда следует, что

$$-\frac{\partial}{\partial t}(x_j \mathcal{L}_\omega + \beta_j \mathcal{L}_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j \mathcal{L}_{x_i} + \beta_j \mathcal{L}_{\beta_i} - \mathcal{L} \delta_{ij}) = 0. \quad (53)$$

Это — уравнение количества движения. Инвариантность лагранжиана \mathcal{L} относительно произвольных постоянных изменений величин θ и ψ приводит к вариационным уравнениям (35). Для волн на воде оказывается, что второе уравнение (35) соответствует уравнению сохранения массы.

Для любого уравнения сохранения вида

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = 0$$

соответствующее условие на движущейся поверхности разрыва с единичным вектором нормали n_i и скоростью по нормали V имеет вид

$$n_i [Q_i] = V [P],$$

где символ $[]$ обозначает величину разрыва соответствующей переменной. Однако следует некоторым образом выбрать уравнения сохранения, причем нужно иметь в виду, что можно ис-

пользовать только соответствующие условия на скачке. Этот выбор должен быть сделан на основе дополнительной информации, которая не содержится в осредненных уравнениях. Поскольку исходные дифференциальные уравнения остаются еще применимыми, мы выбираем те уравнения сохранения, которые представляют собой осредненную форму соответствующих уравнений сохранения в исходных уравнениях. Для волн на воде выбираются следующие уравнения: (i) сохранения энергии (52), (ii) сохранения количества движения (53), (iii) сохранения массы — второе уравнение (35) — и (iv) вторая система в (36), которая получается исключением ψ и, по-видимому, не имеет общего физического смысла. (Подробности этого выбора можно найти в статье [11].)

Уравнения сохранения, которые должны быть опущены, поскольку их можно найти только в осредненной форме для медленно меняющихся цугов волн, суть

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \text{rot } \kappa = 0 \quad (54)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\kappa_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (55)$$

Система (54) связана с существованием фазовой функции θ , однако ее можно интерпретировать более выразительно, как закон сохранения волн во времени и пространстве. Если $\text{rot } \kappa = 0$, то равен нулю следующий линейный интеграл по замкнутому контуру, т. е.

$$\oint \kappa \cdot ds = 0,$$

так что в системе волн в произвольный момент число волн (например, вершин волн), входящих внутрь контура и выходящих из него, одинаково. Аналогично этому, из первого уравнения (54) получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} \kappa_1 dx_1 = \omega^{(2)} - \omega^{(1)},$$

так что число волн, содержащихся внутри некоторого отрезка, изменяется со скоростью, равной чистому притоку количества волн внутрь отрезка. Но эти проинтегрированные формы — в точности те же самые, которые нельзя использовать на повер-

ности разрыва; их нельзя вывести непосредственно, а можно получить только из соотношений (54), которые справедливы лишь для непрерывных частей решения.

Величины \mathcal{L}_ω , \mathcal{L}_{κ_i} в (55) аналогичны адиабатическим инвариантам классической механики (см. разд. 4.1). Уравнение (55) выражает баланс изменений пространственноподобных адиабатических инвариантов \mathcal{L}_{κ_i} и времяподобного адиабатического инварианта \mathcal{L}_ω . Однако это уравнение справедливо для медленных изменений и непригодно на скачке в системе.

Уравнения (54) и (55) с этой точки зрения имеют ту же самую основу, что и энтропия в газодинамических скачках. Возникает естественный вопрос о знаке скачка на поверхности разрыва. В простом случае (рассмотренном в статье [10]) можно показать, что при пересечении волною поверхности разрыва ее частота относительно движущейся поверхности всегда возрастает. Это условие, по-видимому, позволяет обойти «необратимость», и можно ожидать, что оно справедливо и в общем случае, однако для общего случая оно еще не доказано. Этот результат представляет дополнительный интерес, если вспомнить, что исходные уравнения обратимы! В связи с этим уместно упомянуть теорию гладкой боры с волнами за ней и возможность бесстолкновительных скачков в плазме.

Эта идея была намечена в более ранних работах. Позже [13] был выполнен численный расчет уравнения Кортевега — де Фриза для случая, когда две группы волн следовали одна за другой. Оказалось, что волны проходят одна через другую, когда вторая группа настигает первую. С самого начала, разумеется, ясно, что этот тип скачка требует специальных условий, если он вообще существует. В линейной теории два цуга волн можно всегда наложить один на другой и получить новое решение; таким образом, для осуществления этого скачка необходимы сильно нелинейные волны. Ясно также, что две группы волн с очень разными скоростями будут просто проходить одна через другую со сложными взаимодействиями; поэтому для существования упомянутого скачка необходима малая относительная скорость.

Некоторое указание по этому последнему пункту дает работа Бинни и Льюка [2]. Они исследовали соударение двух *кноидальных* волн (кноидальные волны — однородные волновые решения уравнения Кортевега — де Фриза). Их теория определяет нелинейное взаимодействие двух волн, а члены, выражающие это взаимодействие, стремятся к бесконечности, когда интенсивности и направления двух волн стремятся к совпадению.

5. Применение теории возмущений

Льюк [2] рассматривает нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0, \quad (56)$$

где $V(u)$ — произвольная нелинейная потенциальная энергия, которая дает колебательные решения. Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - V(u)$$

и, как легко видеть, осредненный лагранжиан представляется в виде

$$\mathcal{L}(\omega, \kappa, E) = \{2(\omega^2 - \kappa^2)\}^{1/2} \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{E - V(u)} du - E. \quad (57)$$

Это выражение интересно сопоставить с (37).

Льюк вводит разложение в ряды, согласно теории возмущений,

$$u(x, t) = U(\theta, X, T) + \varepsilon U_1(\theta, X, T) + \dots, \\ X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon t, \quad \theta = \varepsilon^{-1} \Theta(X, T).$$

Это разложение представляет собой обобщение разложения геометрической оптики для линейных задач, для которых всегда имеет место $U_n(\theta, X, T) \propto e^{i\theta}$. Оно представляет собой также обобщение различных методов Крылова — Боголюбова и, в частности, подхода Г. Е. Кузмака [4], разработанных для обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнения в частных производных. Заметим, что в случае $\varepsilon = 0$, $u(x, t) = U(\theta)$ получается равномерный цуг волн.

Указанное выше разложение можно подставить в (56) и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях ε . Первые два порядка дадут

$$(\omega^2 - \kappa^2) U_{\theta\theta} + V'(U) = 0, \quad (58)$$

$$(\omega^2 - \kappa^2) U_{1\theta\theta} + V''(U) U_1 = 2\omega U_{\theta T} + 2\kappa U_{\theta X} + \omega_T U_\theta + \kappa_X U_\theta, \quad (59)$$

где $\omega = -\theta_t = -\Theta_T$, $\kappa = \theta_x = \Theta_X$. Уравнение (58) представляет собой уравнение для равномерного цуга волн; его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для переменной θ , несмотря на то что величины U , ω , κ также зависят от (X, T) ; вид этой зависимости определяет медленное изменение величин U , ω , κ . Первый интеграл уравнения (58) имеет вид

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - \kappa^2) U_\theta^2 + V(U) = E(X, T). \quad (60)$$

На этом этапе величины $\omega(X, T)$, $\kappa(X, T)$, $E(X, T)$ остаются неопределенными.

Обратимся теперь к уравнению (59). Правая часть этого уравнения известна, а левая часть линейна по U_1 ; это уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно θ . Далее, одно из решений однородного уравнения имеет вид $U_1 = U_\theta$, поскольку в этом случае левая часть будет равна производной от левой части (58). В принципе уравнение (59) решается подстановкой $U_1 = fU_\theta$. Здесь достаточно отметить, что уравнение (59) можно переписать в виде

$$(\omega^2 - \kappa^2) \frac{\partial}{\partial \theta} (U_{1\theta} U_\theta - U_1 U_{\theta\theta}) = (\omega U_\theta^2)_T + (\kappa U_\theta^2)_X.$$

Правая часть этого уравнения — периодическая функция θ . Поэтому U_1 будет ограниченной функцией θ , если только интеграл от правой части за период обращается в нуль. Условие этого имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^{2\pi} \omega U_\theta^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{2\pi} \kappa U_\theta^2 d\theta = 0.$$

Можно проверить, что вследствие соотношений (57) и (60) это условие можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{L}_\kappa}{\partial X} = 0. \quad (61)$$

Таким образом, «условие ортогональности», позволяющее избежать появления вековых членов при решении уравнения (59), получается как следствие из осредненного вариационного принципа.

Обсуждение членов более высокого порядка довольно сложное дело и связано с введением дальнейших условий ортогональности. Подробности можно найти в статье [6].

6. Интегральные уравнения для более общей дисперсии

Решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных с независимыми переменными (x, t) и постоянными коэффициентами может дать только полиномиальные дисперсионные функции; соответствие имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow i\kappa.$$

В случае волн на воде имеем

$$\omega^2 = g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0. \quad (62)$$

Это соотношение объясняется наличием дополнительной координаты y , которая в этом смысле не составляет части пространства (x, t) , где происходит распространение волн. Одним из методов получения более общей дисперсии в задаче с переменными (x, t) является рассмотрение, например, уравнения

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (63)$$

где $K(x)$ — некоторое подходящим образом выбранное ядро. Решения вида

$$\eta = e^{i(kx - \omega t)}$$

удовлетворяют уравнению (63), если

$$c = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{-ik(x - \xi)} d\xi. \quad (64)$$

Это означает, что можно получить любую фазовую скорость $c(k)$, если взять за $K(x)$ преобразование Фурье для функции $c(k)$, т. е.

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk. \quad (65)$$

Для полиномиальных случаев ядро $K(x)$ представляет собой сумму δ -функций. В частном случае

$$c(k) = c_0 + c_2 k^2, \quad K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) \quad (66)$$

уравнение (63) принимает форму линеаризованного уравнения Кортевега — де Фриза:

$$\eta_t + c_0 \eta_x - c_2 \eta_{xxx} = 0.$$

Одно из уравнений, сочетающее общую дисперсию интеграла с типичной нелинейностью, имеет вид

$$\eta_t + a \eta \eta_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0. \quad (67)$$

Если для $c(k)$ и $K(x)$ принять выражение (66), то отсюда получается уравнение Кортевега — де Фриза.

Интересное обобщение получается, если рассмотреть другие ядра; например, для волн на воде следует положить

$$c(k) = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh_0}, \quad K_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk. \quad (68)$$

Уравнение Кортевега — де Фриза соответствует удержанию двух членов в длинноволновом разложении $\kappa h_0 \ll 1$.

Хотя уравнение Кортевега — де Фриза и дает уединенные волны и кноидальные дуги волн, оно не является адекватным для получения волн наибольшей высоты со стоковым углом 120° при вершине. Более того, здесь теряется явление опрокидывания волн с образованием боры, описываемое уравнениями мелкой воды, поскольку представляется очевидным, что член η_{xxx} всегда будет препятствовать опрокидыванию (хотя, по-видимому, это еще не доказано). Оба эти явления представляют собой высокочастотные эффекты, утрачиваемые в длинноволновом разложении $\kappa h_0 \ll 1$. Уравнение (67) с этой точки зрения не имеет ограничений.

Равномерные дуги волн получаются, если положить $\eta = \eta(X)$, $X = x - Ut$, так что уравнение (67) принимает вид

$$(U - \alpha\eta)\eta' = \int_{-\infty}^{\infty} K(X - \xi)\eta'(\xi) d\xi. \quad (69)$$

Из этого уравнения после интегрирования находим

$$A + U\eta - \frac{1}{2} \alpha\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(X - \xi)\eta(\xi) d\xi, \quad (70)$$

где A — постоянная интегрирования. Для ядра K_g , определяемого соотношением (68), решения уравнения (70) в явном виде получить не удастся, однако можно показать, что при $U = \alpha\eta$ возникает предельная форма и вершина волны становится заостренной с вертикальной касательной. Появление заострения вместо стокового угла в 120° связано со все еще имеющейся неадекватностью нелинейных членов. Однако волну максимальной высоты удастся предсказать, так что это уравнение позволяет получить желаемый качественный эффект.

Ядро в уравнении (68), нормализованное так, что $g = 1$, $h_0 = 1$, обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} K_g(x) &= K_g(-x), \\ K_g(x) &\sim (2\pi x)^{-1/2} \quad \text{при } x \rightarrow 0, \\ K_g(x) &\sim \left(\frac{1}{2} \pi^2 x\right)^{-1/2} e^{-1/2(\pi x)} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_g(x) dx = 1.$$

Если взять, например, ядро

$$K_0(x) = \frac{1}{4} \pi e^{-\frac{1}{2} \pi |x|}, \quad c(x) = \frac{1}{1 + (2x/\pi)^2}, \quad (71)$$

то интегралы в (67) и (70) можно исключить, применяя оператор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \pi^2 \right),$$

поскольку (71) представляет собой функцию Грина для этого оператора. Этот анализ можно продолжить.

В случае, когда $\alpha = 3c_0/2h_0$, что соответствует уравнению Кортевега — де Фриза (см. (16)), для уединенной волны максимальной высоты справедливо соотношение

$$\frac{\eta_{\max}}{h_0} = \frac{8}{9}.$$

Забавно (поскольку это случайно), что эта волна имеет конечный угол 110° при вершине! Конечный угол вместо заострения получается в связи с тем, что ядро $K_0(x)$ регулярно при $x = 0$, тогда как $K_g(x)$ имеет там особенность. Поэтому результат вычисления угла в вершине не следует принимать всерьез. Однако результат, касающийся максимальной высоты, заслуживает большего доверия, поскольку он зависит от всего профиля волны в целом. Полученный результат достаточно хорошо согласуется со значением 0,78, вычисленным Маккоуэном при помощи варианта метода Польгаузена.

Что касается вопроса об опрокидывании и превращении в бору, то уравнение (67) также внушает некоторые надежды. Здесь уже не существует производных высшего порядка, способных предотвратить опрокидывание. Интеграл этого уравнения более похож на интеграл уравнения

$$\eta_t + (c_0 + \alpha \eta) \eta_x + \beta \eta = 0,$$

который дает опрокидывание, если начальный наклон η_x даже отрицателен и

$$|\eta_x| > \beta/\alpha.$$

Первые результаты в этом направлении были получены Зеллигером и будут опубликованы позже.

Поскольку этот тип интегро-дифференциальных уравнений оказался заслуживающим серьезных дальнейших исследований, можно отметить, что эти уравнения могут быть получены из некоторого вариационного принципа, откуда будет следовать вся

теория медленно меняющихся цугов волн и т. д. Уравнение (67) можно сперва записать в виде

$$\psi_{xt} + \psi_x \psi_{xx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \psi_{\xi\xi}(\xi, t) d\xi = 0,$$

если положить $\alpha\eta = \psi_x$. Это уравнение получается из вариационного принципа

$$\delta \int \int L dx dt = 0,$$

где

$$L = \frac{1}{2} \psi_x \psi_t + \frac{1}{6} \psi_x^3 + \frac{1}{2} \psi_x \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \psi_{\xi\xi}(\xi, t) d\xi.$$

Приложение. Вариационный принцип для волн Россби

Вопрос о подходящем вариационном принципе для волн Россби возник в ходе дискуссии. Этот вопрос был исследован после встречи автора с Зелигером; были получены следующие результаты. Простая формулировка для волн Россби в приближении « β -плоскости» имеет вид

$$\begin{aligned} Du/Dt - f(y)v &= -p_x, \\ Dv/Dt + f(y)u &= -p_y, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \quad (A1)$$

Вариационные принципы удобнее всего формулировать с использованием потенциалов. В этом случае мы вводим обобщенные потенциалы φ , α , β следующим образом:

$$u = \varphi_x + \alpha\beta_x - \alpha, \quad (A2)$$

$$v = \varphi_y + \alpha\beta_y - f\beta, \quad (A3)$$

$$-p = \varphi_t + \alpha\beta_t + \frac{1}{2} \{(\varphi_x + \alpha\beta_x - \alpha)^2 + (\varphi_y + \alpha\beta_y - f\beta)^2\}. \quad (A4)$$

Это представление является обобщением преобразования Клебша (см. Ламб Г., Гидродинамика, стр. 312) на случай учета кориолисовых сил. Из (A1) легко получить, что уравнения для φ , α , β представляются в виде

$$\begin{aligned} D\alpha/Dt + fv &= 0, \\ D\beta/Dt - u &= 0, \\ u_x + v_y &= 0, \end{aligned} \quad (A5)$$

где u , v определяются соотношениями (A2), (A3). Вариационный принцип снова выражается с использованием выражения для давления. Система (A5) получается из вариационного принципа

$$\delta \iiint \left\{ \varphi_t + \alpha \beta_t + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right\} dx dy dt = 0, \quad (A6)$$

где u и v определяются выражениями (A2) и (A3). Теперь можно применить общую теорию к волнам Россби, используя лагранжиан из соотношения (A6). Приложения и более подробное обсуждение использования «потенциалов Клебша» для вращательных течений будут опубликованы позже (см. [14*]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bateman H., *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1944.
2. Benney D. J., Luke J. C., *J. Math. Phys.*, **43** (1964), 309.
3. Korteweg D. J., de Vries G., *Phil. Mag.* (5), **39** (1895), 422.
4. Кузмак Г. Е., *Прикл. матем. и мех.*, **23** (1959), 515.
5. Lighthill M. J., *J. Inst. Math. Appl.*, **1** (1965), 269.
6. Luke J. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A 292** (1966), 403.
7. Luke J. C., *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 395.
8. Rüssman H., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **8** (1961), 353.
9. Серрин Дж., Математические основы классической механики жидкости, ИЛ, М., 1963.
10. Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, **A 283** (1965 a), 238.
11. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, **22** (1965 b), 273.
12. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 399.
13. Zabusky N., Kruskal M., *Bell Telephone Labs. Tech. Rep.*, 1965.
- 14*. Seliger R. L., Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, **A 305** (1968), 1—25.
См. русский перевод: сб. *Механика*, № 5 (117) (1969), 99—123.

Обсуждение

Адиабатический инвариант для распространения волн в неоднородной движущейся среде

Ч. Дж. Р. ГАРРЕТТ

Уизем [5] развил общий подход к исследованию диспергирующих волн в неподвижной среде с использованием лагранжиана. Применяя эту теорию к линейному случаю, он получил уравнение (см. уравнение (41) предыдущей статьи)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E} \mathbf{c}_g) = 0, \quad (1)$$

где $\mathcal{E} = \partial \mathcal{L} / \partial \omega$; \mathcal{L} — осредненный лагранжиан; ω — частота; \mathbf{c}_g — групповая скорость. Плотность энергии E определяется уравнением $E = \omega (\partial \mathcal{L} / \partial \omega) - \mathcal{L}$, но поскольку $\mathcal{L} = 0$, получается $\mathcal{E} = E / \omega$.

Таким образом, для волнового пакета с объемом δV , движущегося вдоль луча, определяемого соотношением

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{c}_g,$$

величина $E\delta V/\omega$ сохраняется. (Этот инвариант соответствует адиабатическому инварианту для простого гармонического осциллятора, также равного энергии, деленной на частоту.) Величина ω может, таким образом, изменяться вдоль лучей только тогда, когда свойства среды, определяющие дисперсионные соотношения, зависят от времени, так что на практике уравнение (1) приводится к обычному уравнению распространения энергии $(\partial E / \partial t) + \Delta(E\mathbf{c}_g) = 0$.

Однако другой способ изменения частоты пакета, коль скоро рассматривается волновой пакет сам по себе, состоит в том, чтобы заставить его распространяться в движущейся среде, скорость которой \mathbf{U} слегка изменяется на протяжении одной длины волны. Если обозначить частоту относительно среды через Ω , то уравнение для частоты принимает вид

$$\{\partial / \partial t + (\mathbf{U} + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla\} (\Omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) = 0,$$

где \mathbf{k} — волновое число. Мы можем предположить, таким образом, что при распространении волн малой амплитуды в движущейся среде волновая энергия, поделенная на частоту относительно среды, будет адиабатическим инвариантом. Под волновой

энергией подразумевается энергия, которую можно определить при помощи теории волн бесконечно малой амплитуды в системе отсчета, движущейся вместе со средой. Возможно, удастся показать, что полная энергия, связанная с волнами, инвариантна для волнового пакета, но доказать это утверждение, вообще говоря, сложно и оно менее пригодно для использования, нежели предложенный принцип.

Было обнаружено несколько типов распространения волн, для которых уравнение распространения энергии приводится к форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\Omega} \right) + \nabla \cdot \left\{ \frac{E}{\Omega} (\mathbf{U} + \mathbf{c}_g) \right\} = 0, \quad (2)$$

где E — плотность волновой энергии. Эти случаи описаны ниже. Цель настоящей заметки сводится к следующему утверждению: уравнение (2) может быть общим принципом, управляющим распространением волн малой амплитуды в неравномерно движущейся среде при соответствующих условиях, связанных со скоростью среды и медленным изменением амплитуды и волнового числа.

Бретертон в частном сообщении отметил, что уравнение (2) можно вывести из осредненного вариационного принципа

$$\delta \int \mathcal{L}(\Omega, \mathbf{k}, E, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = 0$$

путем варьирования θ , где

$$\omega = \Omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad k_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = \frac{E}{\Omega}.$$

Однако строгого доказательства уравнения (2) еще не имеется (примечание при корректуре: общее обоснование уравнения (2) в настоящее время получено Бретертоном и автором и будет опубликовано позже). Основные случаи, для которых уравнение (2) оказалось справедливым, приводятся ниже.

а) *Поверхностные гравитационные волны.* Лонге-Хиггинс и Стюарт [4] вывели уравнение

$$\partial E / \partial t + \nabla \cdot \{ E (\mathbf{U} + \mathbf{c}_g) \} + \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

определяющее распространение гравитационных волн в неравномерном потоке со скоростью \mathbf{U} . Величина \mathbf{S} представляет собой тензор напряжений излучения, а $\boldsymbol{\gamma}$ — тензор скоростей деформации течения \mathbf{U} .

Оказалось, что уравнение (2) можно получить из этого уравнения путем использования кинематических соотношений (вытекающих из условия сохранения волн), а также уравнения

неразрывности $\nabla \cdot (h\mathbf{U}) = 0$ для основного течения, где h — глубина воды.

б) *Внутренние гравитационные волны.* Бретертон [2] вывел уравнение (2), используя приближение ВКБ для внутренних гравитационных волн в потоке с поперечным сдвигом при высоких числах Ричардсона; Хайнс и Редди независимо получили тот же результат другим методом. По-видимому, это был первый случай, когда уравнение (2) было получено как таковое, хотя и без понимания всего значения и всей общности результата.

в) *Звуковые волны.* Д. И. Блохинцев [1], рассматривая акустику неоднородной движущейся среды, получил (также с помощью приближения ВКБ) уравнение энергии

$$\partial E' / \partial t + \nabla \cdot \{E'(\mathbf{U} + \mathbf{c}_g)\} = 0,$$

где E' — плотность полной энергии, связанной с волновым движением. Оказалось, что $E' = E\omega/\Omega$, так что уравнение (2) справедливо для звуковых волн, поскольку

$$\partial \omega / \partial t + (\mathbf{U} + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \omega = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И., Акустика неоднородной движущейся среды, ГТИ, М. — Л., 1946.
2. Bretherton F. P., *Q. J. R. Met. Soc.*, **92** (1966), 466.
3. Hines C. O., Reddy C. A., To be published.
4. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W., *Deep Sea Res.*, **11** (1964), 529.
5. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, **22** (1965), 273.

Некоторые частные случаи применения теории Уизема

М. ДЖ. ЛАЙТХИЛЛ

Теория, развитая в предыдущей статье (Д. Уизема), может оказаться ценной в задачах о нелинейных волновых системах с дисперсией, когда уравнения, описывающие эти системы, слишком сложны для аналитического и численного исследования. В этой теории предлагается, по существу, описывать развитие групп волн, параметры которых изменяются достаточно медленно, значительно менее сложными приближенными уравнениями, выведенными в предположении, что на каждом отдельном малом участке волны близки к плоским периодическим. Тем не менее даже для решения этих приближенных уравнений приходится обычно затрачивать значительные усилия, поэтому важно (см. § 1) иметь первоначальное представление о том, хорошо ли будут эти решения согласовываться с действительностью или нет. Такое представление можно получить, проведя вычисления на основе этой теории для одной или нескольких сравнительно простых систем и сравнив результаты этих вычислений с экспериментом.

Одной из подходящих систем для этой цели являются, по-видимому, волны постоянного направления на глубокой воде (см. § 2). Согласно теории Уизема, их распространение определяется зависимостью плотности лагранжиана \mathcal{L} от частоты ω и волнового числа k . На самом деле выражение $\mathcal{L}k^2/\rho g$ (где ρ — плотность жидкости) оказывается функцией одной только комбинации $z = \omega^2/gk$. Путем интерполяции между известными значениями для низких волн ($z \rightarrow 1$) и волн наибольшей высоты ($z = 1,20$) было найдено (§ 4) приближенное полиномиальное выражение

$$\mathcal{L}k^2/\rho g = \frac{1}{8} [(z-1)^2 - (z-1)^3 - (z-1)^4],$$

пригодное, как можно ожидать, во всем интервале $1 \leq z \leq 1,20$.

Отсюда получается (§ 5), что, когда волнопродуктор создает на глубокой воде слабо модулированный пучок волн постоянной частоты, логарифмическая скорость нарастания модуляции с расстоянием от волнопродуктора (пропорциональная амплитуде для волн умеренной амплитуды, см. ниже статью Бенджамена) достигает максимума для волн примерно в половине максимальной высоты, а затем падает до нуля; причем теория не предсказывает нарастания модуляции в случае волн, превосходящих три четверти максимальной высоты. Указанные волны обнаруживают вместо этого «расщепление групповой скорости» по Уизему (см. рис. 2). Такое видоизменение теории улучшает согласие с экспериментом для случая Бенджамена и Фейра (см. рис. 3), причем остающиеся расхождения вполне можно объяснить влиянием диссипации. Однако для больших значений амплитуд нужны дополнительные эксперименты.

Наряду с этим разработана и сопоставлена с экспериментом теория для групп волн, в которых амплитуда изменяется на величину, сопоставимую с самой амплитудой, хотя эти изменения ограничены сверху и растянуты на много длин волн (§ 7). Расчет изменения амплитуды во времени, первоначально выполненный [5] для одной специальной формы группы (для которой

обратная величина амплитуды есть линейная функция квадрата расстояния от середины, см. § 8), выполнен в § 9 для общего случая группы волн с одинаковыми волновыми числами, амплитуда которых меняется гладко и симметрично относительно максимума; приведены подробные результаты для синусоидальной модуляции с произвольной глубиной модуляции.

Из теории следует, что группа остается симметричной и что максимальная амплитуда возрастает, сперва согласно закону гиперболического косинуса, а затем еще быстрее, пока не достигается критическое условие, при котором распределение амплитуды волн имеет заострение в середине группы, где одновременно претерпевает разрыв волновое число. После этого критического времени предположения теории нарушаются и можно ожидать изменения характера распространения.

Эксперименты Фейра (описанные ниже, стр. 77), в которых пространственный период модуляции составлял около 12 длин волн, показали именно такое резкое изменение, момент возникновения которого близок к предсказанному (§ 10), а изменение волнового числа приблизительно соответствует теоретическому. Диссипация энергии волн (например, из-за трения о боковые стенки) снова была слишком велика, чтобы допустить проверку предсказаний теории в отношении амплитуды. Однако значение критического времени (после которого наблюдаемая группа волн становится заметно асимметричной) служит обнадеживающим свидетельством того, что теория применима до тех пор, пока предсказываемые ею изменения остаются достаточно медленными и гладкими, чтобы удовлетворяться ее основные предположения.

Несколько ранее, в § 3 и 6, обрисован путь (немногим более сложный) использования теории для изучения двумерной картины стационарных волн на однородном потоке глубокой воды.

1. Общее обсуждение теории Уизема

В вводных замечаниях я уже отмечал, что основной принцип теории Уизема и определение области ее применимости являются ключевыми вопросами, подлежащими изучению. Я думаю, что лучший способ изучения состоит в детальной разработке следствий теории для частных случаев, допускающих сопоставление с экспериментом.

Принципом, справедливость которого подлежит изучению, является фундаментальное предположение Уизема о том, что если параметры, характеризующие волны, меняются достаточно медленно на длине волны, то локально волны должны быть близки к плоским периодическим. Если это верно, то соотношения между характеризующими волны параметрами должны быть весьма близки по форме соответствующим соотношениям для плоских периодических волн, так что их определение связано лишь с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученные таким образом соотношения между параметрами можно затем использовать вместе с другими уравнениями для определения того, как изменятся волны при прохождении больших расстояний. При проведении этого анализа могут быть использованы различные методы, либо исходящие (весьма эле-

гантным образом, который только что обрисовал профессор Уизем) из вариационного принципа типа принципа Гамильтона, либо использующие более непосредственный подход, данный в первой работе Уизема [9], или, например, приближенный метод, упоминаемый в статье Уизема (см. разд. 4.3, первые шесть уравнений, кончающиеся уравнением (49)) и обсуждаемый подробнее ниже (§ 6). Однако, какой бы математический метод не был использован, результаты его не могут быть более точны, чем основной принцип, на который опирается работа.

В пользу указанного принципа следует заметить, что он совпадает с принципом, используемым, когда волны удовлетворяют линейным уравнениям, т. е. если параметры, характеризующие эти волны, достаточно мало меняются на длине волны, то можно использовать приближение геометрической оптики. В этом случае форма волн должна быть локально весьма близка к плоским периодическим волнам, иными словами — к синусоидальным волнам, поскольку уравнения линейны. Отсюда следует немедленно, что соотношения между параметрами (в частности, частотой и волновым числом) могут быть взяты такими же, как и для синусоидальных волн, что сразу приводит ([4], § 5) к уравнениям, определяющим движение отдельных волновых пакетов.

Представляется естественным предположить, как это делает Уизем, что тот же метод будет применим и тогда, когда уравнения, определяющие волновое движение, нелинейны. Плоские периодические решения существуют и в этом случае, хотя их форма уже не является более синусоидальной; можно предположить, что любая картина волн, испытывающая на длине волны малые изменения, локально близка к некоторой плоской периодической волне.

Однако любому расчету, основанному на этом предположении, присуща в одном отношении ограниченность, которой нет в случае линейной геометрической оптики. Там хорошо известно, что решения, однозначные в некоторых пространственно-временных областях, могут стать многозначными в других. Действительно, как только появляется каустика, решение по одну сторону от нее является по крайней мере двузначным, например с двумя различными значениями волнового вектора в каждой точке. Однако хотя приближение геометрической оптики не является точным в непосредственной близости каустики, сама многозначность не мешает решению давать хорошие результаты в удаленных от каустики областях. Происходит это потому, что в линейных задачах возможна суперпозиция решений и, следовательно, две отдельные волны с различными амплитудами и волновыми числами могут локально сосуществовать в линейной комбинации.

К сожалению, в нелинейном случае такого простого пути нет. Как мы увидим, уравнения Уизема указывают на столь же (если не более) сильную тенденцию решений, которые являются однозначными в определенных пространственно-временных областях, становиться многозначными в других. Однако коль скоро линейная суперпозиция невозможна, не существует простой интерпретации решения с волновым вектором, принимающим более одного значения в каждой точке. Уизем [9] предположил, что, как и в газовой динамике, в каждой точке осуществляется только одно решение, а скачкообразный переход от одного решения к другому происходит на некоторой поверхности, подлежащей определению, хотя правила ее определения никоим образом нельзя назвать выясненными. Возможно, что в некоторых случаях картина волн близка к распределению такого типа, а в других, близких к линейному, она близка к суперпозиции различных цугов волн; однако еще не было попыток определить области применимости этих двух подходов и природу перехода от одного к другому.

Таким образом, при оценке теории Уизема существуют две отдельные проблемы. Во-первых, когда даваемые ею решения остаются однозначными, мы должны выяснить, насколько они точны или, вернее, насколько мало должны параметры изменяться на длине волны, чтобы эти решения имели приемлемую точность. Во-вторых, мы должны выяснить, что происходит физически, когда получаемые решения становятся многозначными. Что это означает и может ли быть найдено видоизменение теории, которое будет в грубых чертах соответствовать происходящему?

Я должен подчеркнуть, что теория Уизема будет заслуживать рассмотрения, даже если она окажется применимой только в тех пространственно-временных областях, где даваемые ею решения остаются однозначными, поскольку такие области достаточно обширны. Более того, если существует некоторое замечательное физическое явление, которому отвечает предсказание многозначности, то сам факт, что теория Уизема может быть использована для определения наступления этого явления, будет ценным сам по себе.

На самом деле, я покажу позже, что дело обстоит именно таким образом. В примерах, которые рассматриваются ниже, не найдено никакого видоизменения теории, удовлетворительно соответствующего эксперименту в области многозначности, но с многозначным решением оказывается связанным особое характерное поведение, а его наступление предсказывается теорией достаточно хорошо.

Таким образом, основная цель данной работы заключается в получении подробных следствий теории Уизема для частных примеров и сравнении их с результатами экспериментов. Пока это не сделано в обоих случаях (однозначных и двузначных решений), теория может не иметь значения, т. е. формулы бесполезны, если никто не знает, когда их можно применять.

2. Вводные замечания о задачах с двумя независимыми переменными без псевдочастот и о задачах для волн на глубокой воде

По причинам, изложенным в § 1, представляется существенным изучить более простые случаи, когда разнообразные решения уравнений Уизема могут быть получены относительно гибким путем. В соответствии с этим я не буду извиняться за то, что ограничиваюсь задачами с двумя независимыми переменными, а также такими, в которых отсутствуют псевдочастоты Уизема (например, γ в уравнении (29) на стр. 21), поскольку уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными значительно проще исследовать, чем уравнения высшего порядка или с большим числом независимых переменных.

Хорошим примером такой системы без псевдочастот служат волны на глубокой воде. Стоит отметить попутно, что если поверхностные волны рассматриваются только в случае глубокой воды, то упомянутые Уиземом трудности в отношении формулировки подходящего вариационного принципа исчезают.

Согласно Уизему, классический лагранжиан (разность между кинетической энергией T и потенциальной энергией V) применим в любой задаче, в которой для характеристики движения используются лагранжевы (а не эйлеровы) переменные. Задача о волнах на глубокой воде принадлежит к задачам именно такого рода, так как существует вполне подходящая зависимая переменная лагранжева типа для описания движения, а именно возвышение свободной поверхности. В случае волн неизменного направления, когда движение происходит только в плоскости (x, y) (где ось y вертикальна), это возвышение обозначим, например, через $\eta(x, t)$; тогда знание функции $\eta(x, t)$ вполне определяет в бесконечной области $y \leq \eta(x, t)$ движение, подчиняющееся дополнительному условию обращения скорости в нуль при $y \rightarrow -\infty$. В самом деле, в каждый момент t потенциал скорости ϕ , определяемый однозначно с точностью до произвольной постоянной, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \phi = 0$ в этой области, условию $|\nabla \phi| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$ и граничному условию для

нормальной производной при $y = \eta(x, t)$, а именно условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

В соответствии с этим можно использовать классический лагранжиан $(T - V)$, если T и V выражены через функцию $\eta(x, t)$, которая описывает искривление свободной поверхности. (Это утверждение не справедливо для волн на мелкой воде, так как единственность теряется, если условие $|\nabla \Phi| \rightarrow 0$ заменяется граничным условием на дне; действительно, тогда к потенциалу Φ можно добавить с произвольным множителем решение, описывающее установившееся течение в канале, ограниченном дном и мгновенной формой свободной поверхности.)

Помимо этого упрощающего обстоятельства, волны на глубокой воде особенно подходят для сравнения теории с экспериментом, так как вязкость в этой теории не учитывается, а движение вблизи дна определено связано с весьма сильным проявлением вязких эффектов, влияние которых может распространяться, охватывая всю область движения [6]. Поэтому сравнение с экспериментом будет, вероятно, более благоприятным, если по мере возможности исключаются движения вблизи твердых поверхностей, как это имеет место в волнах на поверхности воды, достаточно глубокой, чтобы можно было пренебречь придонным движением.

Таким образом, поскольку эксперименты на глубокой воде удобны и подходят для сопоставления, многое из последующего будет относиться к ним, хотя теория в целом будет сформулирована так, чтобы допускать весьма широкие приложения, — практически к любой задаче с двумя независимыми переменными без псевдочастот. Лайтхилл [5] дал удобный математический метод исследования таких задач, если независимыми переменными являются x и t (как выше).

Для периодических волн плотность лагранжиана \mathcal{L} (т. е. лагранжиан в расчете на единицу площади горизонтальной проекции в случае волн на глубокой воде) является функцией волнового числа k и некоторым образом определенной амплитуды a . Однако частота ω будет также известна, если мы знаем волновое число k и амплитуду a . Поэтому можно исключить a из этих двух соотношений и рассматривать \mathcal{L} как функцию ω и k , т. е.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega, k). \quad (1)$$

Для описания развития более общего цуга волн используем, следуя Уизему (см. [10] и предыдущий доклад), фазовую функцию $\theta(x, t)$, где θ меняется гладко и принимает последователь-

ные целые значения на последовательно проходимых гребнях волн. Тогда местная частота и волновое число определяются как

$$\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad k = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (2)$$

а уравнение Эйлера для вариационного принципа

$$\delta \iint \mathcal{L} \left(-\frac{\partial\theta}{\partial t}, \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dt dx = 0, \quad (3)$$

определяющего функцию $\theta(x, t)$, может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right). \quad (4)$$

Из (1) и (2) видно, что это уравнение можно записать как квазилинейное уравнение в частных производных второго порядка для θ , а именно

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Такое уравнение может быть преобразовано в линейное уравнение при помощи преобразования Лежандра, в котором первые производные (2) используются в качестве новых независимых переменных. Новая зависимая переменная и ее первые производные суть

$$\varphi(\omega, k) = kx - \omega t - \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -t, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k} = x, \quad (6)$$

причем потенциал φ удовлетворяет линейному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (7)$$

Все решения уравнения (5) являются также решениями уравнения (7) [1], кроме тех весьма простых решений, легко получаемых другими способами, для которых ω является некоторой фиксированной функцией k .

Характеристиками линейного уравнения служат фиксированные кривые. Для уравнения (7) это, фактически, «асимптотические линии», покрывающие поверхность $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega, k)$. Они даются соотношением

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega^2} d\omega^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \omega \partial k} d\omega dk + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k^2} dk^2 = 0, \quad (8)$$

а их направления в каждой точке — это те направления, по которым плоскость, касательная к поверхности, пересекает эту поверхность. Таким образом, они вещественны, так что уравнение будет гиперболическим только в том случае, когда поверхность имеет главные кривизны различных знаков,

Лайтхилл [5] показал, что если дисперсионное соотношение для бесконечно малой амплитуды имеет вид $\omega = f(k)$, то при умеренных амплитудах условие гиперболичности этого уравнения выполняется, если выражение

$$[\omega - f(k)]f''(k) \quad (9)$$

положительно, т. е. если при умеренных амплитудах точка (ω, k) лежит в той области, куда кривая $\omega = f(k)$ обращена своей вогнутостью. Обратно, если выражение (9) отрицательно, так что точка (ω, k) для умеренных амплитуд лежит в той области, куда кривая для бесконечно малых амплитуд обращена своей выпуклостью, то уравнение (7) эллиплично. Это условие справедливо, поскольку осредненный лагранжиан обращается в нуль (с точностью до членов порядка квадрата амплитуды) для бесконечно малых амплитуд, и поэтому поверхность $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega, k)$ касается плоскости $\mathcal{L} = 0$ вдоль всей кривой $\omega = f(k)$. Тогда, очевидно, она может иметь двоякую кривизну только на той стороне, к которой эта кривая вогнута.

Для волн на глубокой воде кривая бесконечно малых амплитуд обращена выпуклостью вверх (фактически $f(k)$ равно \sqrt{gk}), тогда как для конечных амплитуд величина ω возрастает *быстрее*, чем \sqrt{gk} . В соответствии с этим кривая $\omega = f(k)$ обращена выпуклостью к точке (ω, k) (и выражение (9) отрицательно); это согласуется с заключением Уизема в предыдущем докладе о том, что уравнения в этом случае эллипчны.

Для сравнения теории волн на глубокой воде с экспериментами представляются особенно подходящими два вида экспериментальных установок. Лайтхилл [5] исследовал случай, когда на одном конце продолговатого лотка при помощи волнопродуктора создается группа волн с длинными гребнями, продвижение которых вдоль лотка наблюдается достаточно детально, чтобы выявить любое нелинейное взаимодействие. По-видимому, одновременно и независимо Бенджамен и Лайтхилл пришли к заключению, что такой подход является ключевым моментом в исследовании. Это был не первый случай, когда мы одновременно приступали к аналогичным работам; надеюсь, что, как и раньше, совокупность обоих исследований позволила обнаружить больше, чем каждое из них в отдельности!

Эти эксперименты с возбуждением волн будут рассмотрены ниже более подробно, но прежде я хочу описать другой вид экспериментальной установки, который ранее не упоминался в качестве подходящего поля приложения теории Уизема, но который может оказаться одним из наиболее важных. Это — некоторый вид стационарных волн, которые можно создать на однородном стационарном потоке.

3. Приложение теории Уизема к стационарным волнам на установившемся потоке

Этот вопрос рассматривается главным образом в связи с той волновой картиной, которая может быть вызвана препятствием на поверхности потока глубокой воды; такая же картина может быть вызвана на покоящейся глубокой воде равномерно движущимся препятствием по поверхности воды (или вблизи нее). Однако дальнейшие рассуждения приложимы к любой двумерной однородной жидкой системе, в которой возможны плоские периодические волны с произвольным волновым числом (k_1, k_2) в некотором диапазоне амплитуд и в которой существует взаимодействие между препятствием (действующим как стационарный источник возмущения) и жидкостью. Случай глубокой воды, очевидно, допускает сопоставление с экспериментом; представляется вероятным также, что могут быть найдены и другие приложения, например некоторые виды волн в плазме.

Изучение стационарных волн на установившемся потоке может на деле оказаться более полезным, чем рассмотрение задач с волнопродуктором. В известном акустическом случае, когда дисперсия отсутствует, нелинейная теория распространения волн находит значительно менее широкое применение для одномерного неустановившегося движения, чем для двумерного стационарного случая, который включает теорию крыла в сверхзвуковом потоке. Более того, для этого или другого вида движения жидкости исследование стационарного движения может быть в экспериментальном отношении более удобным. Можно полагать далее, что в случае волн на воде легче вести исследования с экспериментальной установкой, в которой направления фронтов волн лежат в определенном диапазоне, чем с установкой, в которой нужно создавать и поддерживать волны строго постоянного направления. Наконец, существует возможность, подробнее обсуждаемая ниже, практического приложения теории к задаче о волнах, создаваемых судном при равномерном движении по глубокой воде.

Математическая сторона исследования, полезность которого определяется приведенными рассуждениями, оказывается весьма простой, если непосредственно применяется основная идея вариационного подхода Уизема. Для этого обозначим через

$$\mathcal{L}_s(k_1, k_2) \quad (10)$$

плотность лагранжиана (на единицу площади горизонтальной проекции) для периодической стационарной волны с волновым числом $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ на потоке, движущемся с постоянной скоростью $(U, 0)$. Входящая в лагранжиан кинетическая энер-

гия есть энергия движения относительно однородного потока.

Рассмотрим теперь общую стационарную волновую картину, для которой фазовая функция θ , не зависящая от времени, удовлетворяет соотношениям

$$\theta = \theta(x_1, x_2), \quad \partial\theta/\partial x_i = k_i. \quad (11)$$

Тогда принцип Гамильтона дает

$$\delta \int \int \mathcal{L}_s \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0. \quad (12)$$

Уравнение Эйлера в этом случае представляет собой просто соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial k_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial k_2} \right) = 0. \quad (13)$$

Этот вывод основного уравнения для волн с гребнями любых направлений настолько поразительно прост, что может показаться желательным проверить его каким-либо другим методом. Чтобы сделать это, предположим, что в покоящейся жидкости волна частоты ω с волновым числом \mathbf{k} имеет плотность лагранжиана $\mathcal{L}(\omega, k_1, k_2)$, и рассмотрим систему волн, устанавливающуюся под действием стационарного вынуждающего воздействия, движущегося по жидкости со скоростью $(-U, 0)$. Такая система должна иметь фазовую функцию вида

$$\theta = \theta(x_1 + Ut, x_2). \quad (14)$$

Ясно, что функция в правой части должна быть той же самой, что и фазовая функция для рассмотренной выше задачи о стационарных волнах на потоке жидкости.

Но, согласно теории Уизема, любая система волн в жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_2} \right). \quad (15)$$

Далее, для функций вида (14) имеем соотношение $\partial/\partial t = U\partial/\partial x_1$. Отсюда получаем, что, во-первых,

$$\omega = - \frac{\partial\theta}{\partial t} = -U \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = -Uk_1 \quad (16)$$

и, во-вторых, уравнение (15) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} - U \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_2} \right) = 0. \quad (17)$$

В то же время, согласно (16), плотность лагранжиана \mathcal{L}_s для волн, удовлетворяющих условию (14), равна

$$\mathcal{L}_s(k_1, k_2) = \mathcal{L}(-Uk_1, k_1, k_2), \quad (18)$$

а из (17) следует, что она удовлетворяет простому уравнению (13), выведенному ранее непосредственно.

При практическом применении уравнения (13) удобно использовать в качестве координат x и y вместо x_1 и x_2 и $(l, -m)$ в качестве компонент волнового вектора вместо (k_1, k_2) . При этом для периодических волн, определяемых величинами l и m , независимой переменной является комбинация $(lx - my)$, а тангенс угла между направлением их распространения и осью x равен l/m . Уравнение (13) тогда переходит в следующее:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial m} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial l} \right), \quad (19)$$

где

$$m = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad l = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (20)$$

Полезным свойством уравнений (19) и (20) является то, что они абсолютно идентичны с уравнениями (4) и (2) после подстановки величин

$$y, x, m, l, \mathcal{L}_s \quad (21)$$

вместо

$$t, x, \omega, k, \mathcal{L}.$$

В соответствии с этим любая часть общей теории, развитой в переменных (x, t) применительно к задаче с «волнопродуктором», может быть непосредственно взята и применена к «задаче о стационарных волнах» на поверхности потока в переменных (x, y) с использованием простой подстановки (21). Это обстоятельство существенно повышает полезность исследований, которые направлены на решение задачи с волнопродуктором.

Как показывает уравнение (18), чтобы получить функцию $\mathcal{L}_s(l, m)$, мы просто должны взять плотность лагранжиана \mathcal{L} для плоских волн с частотой ω и волновым числом $(l, -m)$ и подставить $\omega = -Ul$. Для волн на глубокой воде Лайтхилл [5] получил лагранжиан \mathcal{L} в следующей форме (см. также § 4 ниже):

$$\mathcal{L} = \frac{g}{8k^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} - 1 \right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{gk} - 1 \right)^3 + \dots \right], \quad (22)$$

где вместо k — модуля волнового вектора — нужно подставить $\sqrt{l^2 + m^2}$. Заменяя ω на $-Ul$, мы получаем для этого случая

$$\mathcal{L}_s(l, m) = \frac{g}{8(l^2 + m^2)} \left[\left(\frac{U^2 l^2}{g \sqrt{l^2 + m^2}} - 1 \right)^2 - \left(\frac{U^2 l^2}{g \sqrt{l^2 + m^2}} - 1 \right)^3 + \dots \right]. \quad (23)$$

Аналогичным образом, кривая в плоскости (l, m) , соответствующая волнам бесконечно малой амплитуды, получается подстановкой $\omega = -Ul$ в соотношение между ω , l и m для бесконечно малой амплитуды. Естественно, что эта кривая та самая, на которой выражение (23) обращается в нуль, а именно

$$U^2 l^2 = g \sqrt{l^2 + m^2}. \quad (24)$$

Она показана на рис. 1 сплошной линией. Далее, для конечных амплитуд величина ω^2 возрастает *быстрее*, чем $gk = g \sqrt{l^2 + m^2}$, так что для любого заданного значения $\sqrt{l^2 + m^2}$ на рис. 1 величина $U^2 l^2$ для случая конечных амплитуд больше, чем величина, соответствующая кривой. Поэтому реальным волнам отвечает область справа от этой кривой; точнее, область между нею и штриховой линией (отвечающей волнам максимальной высоты для $\omega^2 = 1,20 gk$, см. ниже соотношение (25)).

На кривой бесконечно малых амплитуд на рис. 1 точки, лежащие ниже точки P , соответствуют длинным «поперечным» волнам за препятствием. В этой области волнам конечной амплитуды отвечают точки, к которым кривая обращена своей вогнутостью. Следовательно, такие длинные поперечные волны, возникающие преимущественно при достаточно большой длине препятствия L (точнее при малых числах Фруда U^2/gL), описываются гиперболическим уравнением.

Напротив, точки, расположенные выше точки P , отвечают коротким «боковым» волнам позади препятствия. Здесь кривая обращена выпуклостью к области конечных амплитуд. Следовательно, короткие боковые волны, преимущественно возникающие, когда препятствие мало в сравнении с его скоростью (так что U^2/gL велико), описываются эллиптическим уравнением.

Можно возразить, что к задаче о «корабельных волнах», по существу, невозможно применить теорию Уизема из-за упомянутых в § 1 затруднений с многозначностью. Действительно, вся хорошо известная кельвиновская волновая картина дважды покрыта волнами «диагональной» и «боковой» систем, которые

встречаются, образуя точки возврата, на линиях типа каустики, идущих за препятствием под углом $\arcsin(1/3) = 19,5^\circ$.

Это возражение было бы решающим применительно к кораблю или препятствию, создающим достаточно широкий спектр волн, заполняющих большую часть кельвиновской картины, для которых, в частности, значительная часть энергии отвечает точкам, лежащим как ниже, так и выше точки P на рис. 1. Однако мы уже отмечали, что судно, движущееся при больших числах Фруда, создает главным образом боковые волны, соответствующие точкам, лежащим значительно выше точки P ; гребни этих волн образуют малый угол с направлением движения судна. Если же судно движется при малых числах Фруда, то оно создает главным образом диагональные волны (соответствующие точки лежат значительно ниже P), причем гребни образуют почти прямой угол с направлением движения. Любой из этих случаев (соответственно эллиптический и гиперболический) представляется вполне подходящим для экспериментальной проверки однозначных решений уравнений Уизема.

Менее правдоподобным выглядит рассуждение в пользу того, что препятствия определенного вида, движущиеся при промежуточных числах Фруда и создающие волны главным образом в окрестностях каустики с гребнями под углом около 55° к направлению движения судна, могут давать волновую картину, к которой можно применить теорию Уизема. Конечно, геометрическая оптика дает неверную картину вблизи каустик, где точная линейная теория предсказывает появление весьма характерных волн с длинными гребнями [8]; однако нелинейные эффекты могут воспрепятствовать этой тенденции, и не исключено, что при этом в некоторой форме окажутся приложимыми уравнения Уизема.

Можно отметить, наконец, что диапазон волновых картин на однородном потоке значительно шире совокупности форм, обычно возникающих при обтекании судов. Для экспериментального

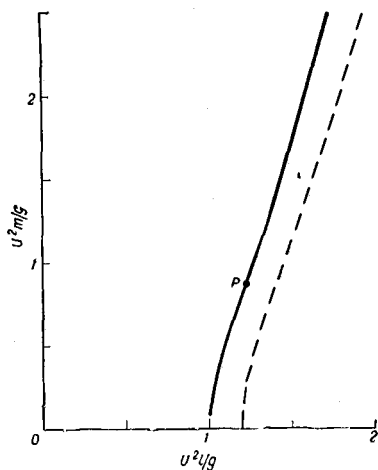


Рис. 1.

Волновое число стационарных волн (l, m) на глубокой воде, движущейся со скоростью $(U, 0)$, представляется точкой, лежащей между сплошной линией (отвечающей волнам бесконечно-малой амплитуды) и штриховой линией (отвечающей волнам максимальной амплитуды).

сопоставления наряду с формами, создающими широкий спектр волн, могут оказаться удобными препятствия, скажем, с волнистой боковой поверхностью, которые будут создавать волны преимущественно с определенным продольным волновым числом.

4. Вид лагранжиана для гравитационных волн на глубокой воде

Как отмечалось выше, гравитационные волны на глубокой воде могут оказаться особенно полезными для сопоставления теории Уизема с экспериментом. Поэтому желательно определить для них возможно точнее вид плотности лагранжиана $\mathcal{L}(\omega, k)$ во всем диапазоне амплитуд, в котором существуют периодические волны. Эта работа была начата Лайтхиллом [5], в результате которой были найдены первые члены ряда (22), приведенные выше.

Представляется крайне невероятным, чтобы получение удовлетворительной точности во всем диапазоне было связано с вычислением высших членов тейлоровского разложения по степеням $[(\omega^2/gk) - 1]$. Как известно, вычисление высших членов тейлоровских разложений для волн на воде — дело весьма сложное, причем трудности и вероятность ошибки необычайно возрастают с каждым новым членом, тогда как интервал, в котором приближение приемлемо, возрастает лишь очень медленно.

Однако если требуется приближение для функции в некотором интервале, то ряд Тейлора с начальной точкой на конце интервала в принципе мало пригоден. Вместо того чтобы увеличивать длину ряда, можно получить значительно большее уточнение, используя сведения о функции на другом конце интервала. Именно такой подход получения приближения для лагранжиана «с двух концов» используется в этом разделе.

Максимальной амплитудой для периодической волны является та, при которой поверхность на гребне образует стоковский угол, равный 120° , причем скорость жидкости на гребне равна фазовой скорости волны. Замечательное определение формы этой волны, данное Мичелом [7], блестяще выдержало критический анализ последующих лет и может быть использовано с полной уверенностью. Таким образом, можно использовать его результат для связи между частотой и волновым числом

$$\omega^2 = 1,20gk. \quad (25)$$

Фактически он получил этот результат как соотношение между фазовой скоростью c и длиной волны L , а именно $c^2 = 0,191 gL$.

Он ошибочно считал, будто этот результат показывает, что скорость в 1,2 раза больше ее значения для бесконечно малых волн (и Ламб [3] повторяет это утверждение), в действительности же величина c^2 в 1,2 раза больше, чем соответствующее значение (а именно $gL/2\pi$) для бесконечно малых волн, отсюда и получается (25).

Плотность лагранжиана \mathcal{L} в зависимости от ω и k будет получена из выражения для потенциальной энергии V на единицу площади горизонтальной проекции с использованием следующего соотношения (см. уравнение (85) работы [5], где нужно исправить опечатку: заменить ω^2 на ω^3):

$$\frac{\partial (\mathcal{L}/\omega^2)}{\partial \omega} = \frac{2V}{\omega^3}. \quad (26)$$

Это соотношение следует из выражения Уизема ($\omega \partial \mathcal{L} / \partial \omega - \mathcal{L}$) для полной плотности энергии ($\mathcal{L} + 2V$) в задачах без псевдо-частот. Если известна зависимость величины $Vk^2/\rho g$ от параметра

$$z = \omega^2/gk \quad (27)$$

при $1 \leq z \leq 1,20$ (см. (25)), то можно, интегрируя уравнение (26), определить $\mathcal{L}k^2/\rho g$, т. е.

$$\mathcal{L}k^2/\rho g = z \int_1^z (Vk^2/\rho g) z^{-2} dz. \quad (28)$$

Первые два члена в разложении потенциальной энергии вблизи $z = 1$

$$Vk^2/\rho g = \frac{1}{4}(z-1) - \frac{1}{4}(z-1)^2 + O(z-1)^3 \quad (29)$$

могут быть получены различными методами; эти члены неявно присутствуют в уравнениях (90) и (91) работы [5]. Значение потенциальной энергии для $z = 1,2$ также легко получается из найденных Мичелом координат поверхности, если начертить кривую $y = y(x)$ и воспользоваться соотношением

$$V = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho g (y - \bar{y})^2 dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y dx. \quad (30)$$

Это дает

$$(Vk^2/\rho g)_{z=1,20} = 0,0334, \quad (31)$$

где ненадежна, в худшем случае, лишь последняя цифра.

Первый член в (29) дает при $z = 1,2$ значение 0,05, а параболическая аппроксимация (первые два члена) дает 0,04. Оче-

видно, что отклонение от параболы не столь велико, поэтому выбор возможных форм кривых (которые должны соприкасаться с параболой при $z = 1$) ограничен. Далее, если используется параболическая аппроксимация для V , то из (28) для $\mathcal{L}k^2/\rho g$ при $z = 1,2$ получается значение 0,0041; это значение снижается до 0,0038, если для V подставляется некоторая гладкая кривая, например кубическая, соприкасающаяся с параболой при $z = 1$ и удовлетворяющая условию (31). Видно, что поправка мала и почти наверняка дает две верные цифры. Принимая $\mathcal{L}k^2/\rho g = 0,0038$ при $z = 1,2$, мы получаем из (26), что

$$d(\mathcal{L}k^2/\rho g)/dz = 0,031.$$

Простое полиномиальное приближение, удовлетворяющее этим двум условиям на конце интервала $z = 1,2$, а также двум условиям при $z = 1$ (т. е. здесь известны значения второй и третьей производных), имеет вид

$$\mathcal{L}k^2/\rho g = \frac{1}{8} [(z-1)^2 - (z-1)^3 - (z-1)^4]. \quad (32)$$

Такое полиномиальное приближение, удовлетворяющее равному числу условий на обоих концах интервала, обычно особенно эффективно; оно далее используется во всех приложениях теории Уизема к волнам на глубокой воде.

Когда необходимо связать z с высотой H , измеряемой расстоянием между гребнем и впадиной, предлагается использовать в качестве подходящего приближения соотношение

$$z = 1 + (\pi H/\lambda)^2, \quad (33)$$

поскольку оно содержит первые два правильных члена разложения по степеням H/λ и дает практически точные значения в случае Мичела ($z = 1,2$, $H = 0,142 \lambda$).

5. Слабая медленная модуляция цуга волн на глубокой воде

В своем докладе (см. стр. 83) Бенджамен описывает проведенные им совместно с Фейром эксперименты, в которых создавался цуг волн постоянной частоты с постоянной средней амплитудой, на которую накладывалась слабая модуляция амплитуды. Он описывает также развитие модуляции при помощи теории, которая, как можно ожидать, справедлива: 1) пока модуляция остается малой и 2) пока начальная амплитуда не слишком велика. Наконец, он показывает, что, когда эти условия выполняются, эксперименты вполне удовлетворительно согласуются с теорией.

В упомянутом докладе для расчета развития модуляции в двух различных случаях (а именно, когда ослаблены условия (1) либо (2), упомянутые выше) используется теория Уизема. Однако основное предположение теории Уизема приводит к требованию, чтобы (3) *модуляция была медленной*.

Таким образом, теория Бенджамена требует выполнения условий (1) и (2), но не (3). Теория, требующая выполнения условий (2) и (3), но не (1), будет дана в § 9. Там же приводится теория, требующая выполнения условий (1) и (3), но не (2); кроме того, дается сопоставление теории с экспериментами Бенджамена и Фейра, включая и те эксперименты, которые проводились при больших начальных амплитудах. Точнее говоря, при помощи выражения лагранжиана из § 4 для произвольных амплитуд мы рассчитаем развитие медленных слабых модуляций цуга гравитационных волн на глубокой воде на протяжении периода, пока модуляции остаются слабыми.

Пусть ω_0 и k_0 суть невозмущенные значения ω и k ; малые отклонения фазы θ от невозмущенного значения ($k_0x - \omega_0t$) удовлетворяют уравнению (5), в котором коэффициенты заменены константами, т. е. их невозмущенными значениями \mathcal{L}_{kk_0} , $\mathcal{L}_{\omega\omega_0}$ и $\mathcal{L}_{\omega k_0}$. Вблизи источника волн ($x=0$) они удовлетворяют условиям

$$\theta = -\omega_0 t, \quad \partial\theta/\partial x = k_0 + \varepsilon e^{ixt}, \quad (34)$$

так что частота $\omega = -\partial\theta/\partial t$ сохраняет фиксированное значение ω_0 , а волновое число (и поэтому также и амплитуда) модулируется. Решение уравнения (5) при этих же условиях приводит к выражению

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t + \varepsilon e^{ia(t-x/c_0)} \frac{\text{sh } \beta x}{\beta} \quad (35)$$

где c_0 — «эффективная групповая скорость» (скорость распространения модуляции по лотку) — дается выражением

$$c_0 = -\mathcal{L}_{k_0\omega_0}/\mathcal{L}_{\omega k_0}, \quad (36)$$

а β — логарифмическая скорость нарастания модуляции с расстоянием — определяется формулой

$$\beta = \alpha (\mathcal{L}_{\omega\omega_0}\mathcal{L}_{kk_0} - \mathcal{L}_{k\omega_0}^2)^{1/2} / \mathcal{L}_{kk_0}. \quad (37)$$

Величина β вещественна, если уравнение эллиплично (так оно и есть, согласно § 2, по крайней мере для не слишком больших амплитуд).

Если бы величина β была мнимой, то решение по-прежнему имело бы вид (35), но интерпретация его стала бы иной. В этом случае не происходило бы никакого экспоненциального нараста-

ния, но модуляция распространялась бы с двумя скоростями c_1 и c_2 , которые даются выражениями

$$\frac{\alpha}{c_1} = \frac{\alpha}{c_0} - |\beta|, \quad \frac{\alpha}{c_2} = \frac{\alpha}{c_0} + |\beta|. \quad (38)$$

Это и есть то «расщепление групповой скорости» в гиперболическом случае, которое впервые отметил Уизем [9].

Используя выражение (32) для лагранжиана \mathcal{L} , легко вычислить c_0 и β . Такое вычисление показывает, что величина β , будучи вещественной для умеренных амплитуд, становится мнимой при $z_0 > 1,115$, где $z_0^2 = \omega_0^2/gk_0^3$.

Это означает, что для амплитуд, превосходящих примерно три четверти максимальной амплитуды, это уравнение гиперболично.

Результаты вычислений приведены на рис. 2, причем все скорости отнесены к невозмущенной фазовой скорости ω_0/k_0 . Величина β представлена отношением $2\pi c_0 \beta / \alpha$, которое равно логарифму увеличения глубины модуляции на расстоянии $2\pi c_0 / \alpha$ между последовательными максимумами амплитуды волн. Для отношений высоты к длине от 0,06 до 0,09 величина $2\pi c_0 \beta / \alpha$ близка к 0,7, так что глубина модуляции для отдельного распространяющегося максимума примерно удваивается к тому времени, когда у волнопродуктора возникает следующий максимум амплитуды. Для малых отношений высоты к длине величина $2\pi c_0 \beta / \alpha$ равна

$$(\pi^2 \sqrt{2}) H/\lambda = 14H/\lambda.$$

Этот результат дают все теории, включая теорию Бенджамена, когда выполнены условия (1), (2) и (3).

Однако для отношений высоты к длине, превосходящих 0,108, увеличения глубины модуляции не происходит. Напротив, становится четко выраженным расщепление групповых скоростей, причем одна из них возрастает до величины, значительно превосходящей фазовую скорость,

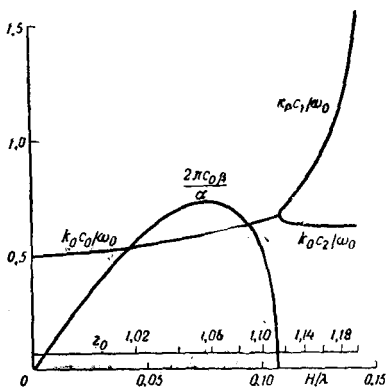


Рис. 2.

Для периодических волн постоянного направления на глубокой воде с частотой ω_0 и волновым числом k_0 , слегка модулированных частотой $\alpha \ll \omega_0$, логарифмическая скорость β нарастания глубины модуляции с расстоянием и скорость c_0 распространения максимумов амплитуды представлены в функции от H/λ (расстояние по вертикали между гребнем и впадиной волны, деленное на длину волны). При $H/\lambda > 0,108$ имеем $\beta = 0$, но скорость распространения расщепляется на две (c_1 и c_2).

В других докладах на настоящей дискуссии демонстрируется, что основная неустойчивость гравитационных волн с длинными гребнями на глубокой воде пропадает, когда глубина модуляции уменьшается ниже определенного значения (Уиземт) или когда частота модуляции превосходит определенное значение (Бенджамен). В настоящем параграфе в дополнение к этим результатам показывается, что появляется третья граница неустойчивости, когда амплитуда превосходит определенное значение¹⁾.

Экспериментальные данные относительно логарифмической скорости нарастания глубины модуляции периодической волны представлены в докладе Бенджамена (см. рис. 4 на стр. 101) для случая $\alpha = 0,1 \omega_0$. Это означает, что временной период модуляции амплитуды составляет 10 циклов, тогда как ее пространственный период составляет около 5 длин волн (он весьма мал с точки зрения основного предположения Уизема (3)).

На рис. 3 настоящего доклада эти экспериментальные точки сопоставляются с тремя теоретическими кривыми: штрихпунктирной линией, основанной на всех трех приведенных выше предположениях (1), (2) и (3); штриховой линией, соответствующей теории Бенджамена — Фейра, в которой предполагаются выполненными только условия (1) и (2) и которая должна давать хорошие результаты для не слишком больших значений H/λ ; и сплошной линией, вычисленной по теории

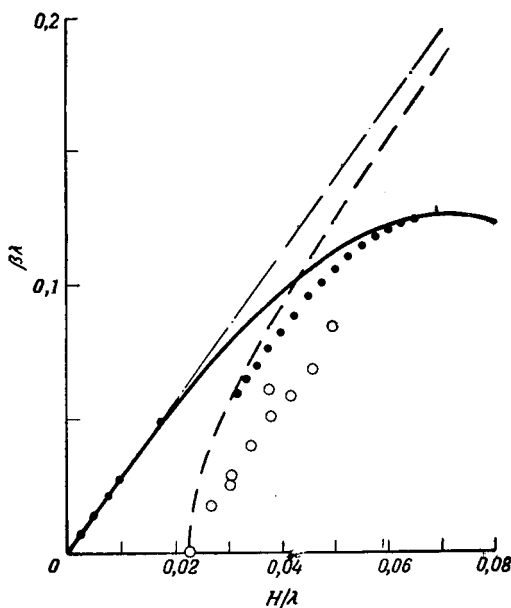


Рис. 3.

Логарифмическая скорость увеличения глубины модуляции на длине волны ($\beta\lambda$) в зависимости от H/λ . Сплошная кривая соответствует теории § 5 (см. также и рис. 2); штриховая — теории Бенджамена и Фейра; штрихпунктирной линией показаны предельные значения сплошной линии для малых H/λ и штриховой линии для больших H/λ ; точками (пунктирная линия) показана предлагаемая интерполяция между сплошной и штриховой линиями; кружками обозначены экспериментальные результаты Бенджамена и Фейра.

¹⁾ Четвертое обобщение основной теории дается в докладе Филлипса при рассмотрении трехмерных форм неустойчивости.

настоящего параграфа, где принимаются только предположения (1) и (3).

Как можно оценить, сравнивая штриховую и штрих-пунктирную линии, ошибка от использования предположения Уизема (3) при $\alpha = 0,1 \omega_0$ существенна только при малых значениях H/λ (скажем, менее $0,05$)¹⁾. Из сравнения сплошной и штрих-пунктирной линий видно, что ошибка в использовании предположения (2) о не слишком больших амплитудах существенна только при больших значениях H/λ (скажем, больше $0,04$). Эти оценки показывают, что развитие модуляции, пока она остается малой (предположение (1)), должно хорошо описываться (независимо от справедливости предположений (2) и (3)) пунктирной линией, сопрягающей штриховую и сплошную линии вблизи $H/\lambda = 0,045$. Поскольку во всех теориях не учитывалась вязкая диссипация, можно было, очевидно, ожидать, что экспериментальные точки будут лежать ниже даже этой пунктирной кривой; весьма отраднo, что они лежат ближе к ней, чем к любой из кривых, основанных на предположениях (2) и (3). Для бoльших значений параметра H/λ нужны, конечно, дополнительные данные.

6. Развитие группы волн умеренной амплитуды за длительное время

Обратимся теперь к случаю, когда выполнены условия (2) и (3) из § 5, но не выполнено условие (1). Задача состоит в изучении модуляции после того, как она выросла по глубине и стала сопоставимой с начальной амплитудой, или, более общё, в изучении любой группы волн (не обязательно модулированной периодической волны), если амплитуда всюду остается не слишком большой, а изменение параметров волн по группе происходит медленно.

Можно было бы думать, что ограничение исследования умеренными амплитудами помешает получить какой-либо результат, отличный от тех, которые легко получить методами взаимодействия гармоник. Такое предположение неверно, поскольку развиваемая теория описывает эволюцию группы волн за время, сравнимое с деленной на безразмерную амплитуду временной

¹⁾ Это связано с тем, что, согласно предположению Уизема, время релаксации, в течение которого обмен энергией между основной волной и ее гармониками приводит их в соответствие, характерное для периодической волны данной амплитуды, должно быть мало в сравнении с периодом. Для данного периода это соответствует требованию, чтобы амплитуда не была слишком мала (так как время релаксации возрастает с уменьшением амплитуды).

протяженностью группы. Это время достаточно велико для того, чтобы каждый «элемент энергии» волн прошел через весьма большое число взаимодействий гармоник. Их расчет порознь оказался бы очень трудным, а их сглаженный результат должна правильно дать приводимая здесь теория.

Аналогичным образом, в отсутствие дисперсии, как указывалось в вводных замечаниях, действие малых нелинейных возмущений при распространении на большие расстояния накапливается и создает весьма большой эффект. Этот кумулятивный эффект также невозможно рассчитать по методу умеренных амплитуд.

Лайтхилл [5] развил методы, применимые к группам двух различных видов. Первый метод, кратко рассматриваемый здесь, может быть применен, если разброс частот волн группы значительно больше разброса частот (для волн данной длины), связанного с разбросом по амплитуде. Тогда, если и частота, и амплитуда меняются достаточно гладко, можно обосновать приближения, которые делают построение теории относительно простым ([5], § 5); здесь будут рассматриваться только такие результаты.

Изменение со временем амплитуды волн определенной длины оказывается таким же, как и в линейной теории, но *положение* волн совершенно иное. Это утверждение в целом почти точно воспроизводит соответствующий результат для случая отсутствия дисперсии. Точнее говоря, положение определяется по правилу, что волна с волновым числом k перемещается со скоростью

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_t, \quad (39)$$

значение которой известно, поскольку для определения ω в зависимости от k и t может быть использовано изменение амплитуды во времени, полученное по линейной теории.

Уизем (см. § 4.3, первые шесть уравнений) упомянул возможный приближенный метод расчета, в котором, по существу, принимаются эти результаты; его третье уравнение показывает, что энергия распространяется так же, как и в линейной теории, тогда как пятое уравнение, которое следует из соотношений (2) данного доклада, может быть записано в виде

$$0 = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_t \frac{\partial k}{\partial x}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что величина k остается постоянной для изменений dx и dt , отношение которых равно величине, определяемой формулой (39). Уизем упомянул этот метод в качестве

приближенной альтернативы вариационного метода, однако данный Лайтхиллом вывод этого метода из вариационных уравнений при умеренных амплитудах и сравнительно большом диапазоне частот показывает, что при этих условиях приближение должно быть хорошим.

Соответствующий результат в теории корабельных волн (§ 3) состоит в том, что для волны с данным продольным волновым числом l амплитуда также зависит от расстояния y от курса судна, как и в линейной теории, но положение волн удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_l = \left(\frac{\partial m}{\partial l}\right)_y. \quad (41)$$

Далее будет рассматриваться только эта задача, поскольку задачи в плоскости (x, t) были полностью рассмотрены Лайтхиллом [5].

Согласно линейной теории, точка (l, m) лежит на сплошной кривой (см. рис. 1), уравнение которой (24) может быть записано в виде

$$m = \left(\frac{U^4 l^4}{g^2} - l^2\right)^{1/2} = f(l). \quad (42)$$

Для конечных амплитуд зависимость m от l другая, и это изменяет наклон (41). В частности, для умеренных амплитуд разность

$$\omega = m - f(l) \quad (43)$$

изменяется как квадрат амплитуды; характер изменения можно определить, если подставить $\omega = -Ul$ в соотношение между ω , l , m и амплитудой.

Если волна с продольным волновым числом l при $y = 0$ находится в точке $x = x_0(l)$, то, согласно линейной теории, для больших значений y она находится в точке

$$x = x_0(l) + yf'(l), \quad (44)$$

тогда как волна с волновым числом $l + \delta l$ имеет координату

$$x = x_0(l) + x'_0(l) \delta l + y[f'(l) + f''(l) \delta l]. \quad (45)$$

Следовательно, продольное расстояние между волнами с волновыми числами l и $(l + \delta l)$ возрастает пропорционально $(1 + \alpha(l)y)$, где

$$\alpha(l) = f''(l)/x'_0(l). \quad (46)$$

Далее, значение ω , пропорциональное квадрату амплитуды (и, следовательно, составляющей потока энергии по оси y), должно

меняться обратно пропорционально расстоянию, приходящемуся на эти волны, а именно как

$$\omega = \frac{\omega_0(l)}{1 + \alpha(l)y}, \quad (47)$$

где $\omega_0(l)$ — значение ω при $y = 0$.

Для умеренных амплитуд зависимость ω от y при данном l приближенно такая же, как и в линейном случае (47), но положение волн определяется соотношением (41), откуда находим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_l = f'(l) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_y = f'(l) + \frac{\omega'_0(l)}{1 + \alpha(l)y} - \frac{\omega_0(l)\alpha'(l)y}{[1 + \alpha(l)y]^2}. \quad (48)$$

Соответственно уравнение (44) заменяется уравнением

$$x = x_0(l) + yf'(l) + \frac{\omega'_0(l)}{\alpha(l)} \ln[1 + \alpha(l)y] - \frac{\omega_0(l)\alpha'(l)y}{1 + \alpha(l)y}. \quad (49)$$

Очевидно, что с возрастанием y могут появиться весьма значительные отклонения от линейной теории. Для малых значений y начальное изменение наклона (41) из-за конечности амплитуды удобнее всего найти, построив график зависимости между l и m при $y = 0$ с помощью рис. 1. Ясно, что если амплитуда значительно меняется с длиной волны, то возможны изменения на несколько порядков. Если амплитуда есть возрастающая функция l , то клин волн для данного значения l расширяется (так как производная $\partial x/\partial y$ убывает).

7. Случай малого диапазона частот

Возвращаясь снова к задаче с волнопродуктором, рассмотрим ее во втором упомянутом ранее случае (см. § 6), а именно в случае малого диапазона частот. При этом задача для волн умеренной амплитуды не упрощается, а скорее усложняется, поскольку это означает, что изменения положения волн из-за изменений амплитуды могут полностью перестроить картину, которая возникла бы из-за одних изменений частоты. Эффекты этих двух воздействий имеют примерно равную величину, и первый из них не может рассматриваться как малое возмущение по сравнению со вторым, как это было сделано в § 6.

В случае эллиптичности, который здесь будет рассмотрен (как мы видели, он охватывает задачу о волнах умеренной амплитуды на глубокой воде), сопоставление этих двух воздействий существенно облегчается введением новой переменной определяемой в общем случае как

$$s = 2 \left[-\frac{\omega - f(k)}{f''(k)} \right]^{1/2}, \quad (50)$$

так что она изменяется прямо пропорционально амплитуде для умеренных амплитуд. Например, для волн амплитуды a на глубокой воде при не слишком больших значениях максимального наклона волны ka имеем

$$s \simeq 2k^2 a \sqrt{2}. \quad (51)$$

Лайтхилл [5] показал, что если только амплитуды остаются малыми, то главные члены уравнения (7), преобразованного путем введения s и k в качестве независимых переменных, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \quad (52)$$

Это преобразование ценно тем, что результирующее приближенное уравнение довольно простое (это осесимметричное уравнение Лапласа) и имеет один и тот же вид для всех одномерных систем волн умеренной амплитуды без псевдочастот. Любой результат по решению краевых задач для уравнения (52) в равной степени приложим ко всем таким системам, а также (после подстановки (21)) к аналогичной системе стационарных волн на поверхности потока.

Граничные условия для уравнения (52) легко получаются из соотношений

$$t = -\frac{2}{\mu s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad x - u_0 t = \frac{\partial \varphi}{\partial k} + \frac{2(k - k_0)}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (53)$$

связывающих первоначальные независимые переменные (x, t) и переменные, получающиеся в результате преобразования Лежандра (50). В соотношениях (53) через k_0 обозначено характерное волновое число, по сравнению с которым волновое число k изменяется незначительно. Кроме того, использованы следующие обозначения:

$$f'(k_0) = u_0, \quad f''(k_0) = -\mu. \quad (54)$$

Очевидно, что граничные условия, отвечающие любой задаче об эволюции группы волн, носят характер начальных данных Коши: два условия задаются на некоторой начальной кривой в плоскости (s, k) . Фактически это могут быть условия, описывающие состояние группы волн при $t = 0$, т. е. на некоторой кривой в плоскости (s, k) время t обращается в нуль, а координата x представляет собой известную функцию. Напротив, для волн, создаваемых неподвижным источником, x обращается в нуль, а t представляет собой известную функцию точки кривой.

Комбинация эллиптического дифференциального уравнения (52) с граничными условиями типа начальных данных (или «гиперболического» типа) означает, что задача «некорректно

поставлена». Хотя такие комбинации все чаще используются в последние годы и уже признано, что их постановка и решение могут оказаться полезными при рассмотрении важных физических проблем, остаются еще некоторые вопросы общего характера, которые встают каждый раз, когда возникает такая задача. Особые трудности заключаются в том, что, если начальные данные не удовлетворяют некоторым условиям гладкости, решение может не существовать вовсе, и что, если даже начальные данные гладкие, то мало вероятно, чтобы решение было свободно от особенностей во всей плоскости.

В случае теории Уизема такие вопросы общего характера не имеют значения. Эта теория устанавливает лишь, какой вид имеют уравнения, если изменения происходят достаточно гладко. Решения этих уравнений определяют последующую эволюцию волн до тех пор, пока изменения остаются гладкими. Если возникают особенности, то это означает просто, что за конечное время, которое можно определить, параметры волны (длина волны и амплитуда) перестают меняться гладко. Физических причин, препятствующих этому, не существует, так что теория, предсказывающая, когда это произойдет, представляет очевидный физический интерес.

Превосходным методом решения эллиптических уравнений при гиперболических граничных условиях является метод характеристик. Вообще говоря, скорее не тип уравнения, а «тип» граничного условия определяет лучший способ решения задачи. Риманов метод характеристик великолепно подходит для решения задач с начальными данными. Некоторые авторы (см., например, [2]) показали, что мнимость характеристик эллиптического уравнения не создает непреодолимых трудностей для применения этого метода. Значение ϕ в любой точке может быть представлено интегралом по начальной кривой, взятым между точками, в которых ее пересекают две характеристики, проведенные через точку (k, s) . Точки эти мнимые, но интеграл можно вычислить, если только начальные условия можно продолжить аналитически в комплексную плоскость до этих точек. Форма интеграла для уравнения (52) особенно проста, поскольку это уравнение имеет весьма простую функцию Римана.

8. Случай первоначально постоянной длины волны

Частный случай, который хорошо иллюстрирует общую ситуацию, описанную в § 7, состоит в расчете эволюции во времени группы волн постоянной длины, но переменной амплитуды, так что

$$k = k_0, \quad s = s_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (55)$$

Соотношения (53) дают тогда

$$\varphi = 0, \quad \partial\varphi/\partial k = x_0(s) \quad \text{при} \quad k = k_0, \quad (56)$$

где произвольная постоянная при интегрировании соотношения $\partial\varphi/\partial s = 0$ положена равной нулю и где

$$x = x_0(s) - \text{функция, обратная} \quad s = s_0(x). \quad (57)$$

Лайтхилл [5] показал, что две другие задачи, представляющие интерес, приводят к граничным условиям (56) с той же степенью точности, с которой получено уравнение (52). Во-первых, если начальные условия заданы не при $t = 0$, а на неподвижном волнопродукторе $x = 0$, $s = s_1(t)$ (обратная функция $t = t_1(s)$), то в том же приближении мы по-прежнему получаем условия (56) с $x_0(s) = -u_0 t_1(s)$. Во-вторых, если волнопродуктор поддерживает постоянную частоту, равную $f(k_0)$ (вместо постоянного k , равного k_0), то различие в граничных условиях (56) приводит к малым изменениям в решении, которыми в том же приближении можно пренебречь.

Решение уравнения (52), определяемое при помощи известной для него функции Римана и граничных условий (56), имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2} i \int_{s-i(k-k_0)}^{s+i(k-k_0)} x_0(S) \left(\frac{S}{s}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{(k-k_0)^2 + (s-S)^2}{-4sS}\right) ds, \quad (58)$$

где F — гипергеометрическая функция, а пределы интегрирования равны значениям s , при которых характеристики, проведенные из точки (k, s) , пересекают начальную кривую $k = k_0$. Интеграл (58) можно вычислить только в том случае, если $x_0(s)$ можно аналитически продолжить в комплексную плоскость.

Далее, всюду, где начальное изменение амплитуды $s = s_0(x)$ аналитично в некоторой области, содержащей вещественную ось, тем же свойством локально обладает и обратная функция $x = x_0(s)$, если исключить точки стационарности $s_0(x)$. Рассмотрим, например, группу, амплитуда которой $s_0(x)$ имеет максимум, скажем $s_0(x_m) = s_m$. В этом случае обратная функция $x_0(s)$ аналитична в комплексной плоскости s только в том случае, если в этой плоскости проведен разрез от точки s_m до ∞ . Интеграл (58) должен тогда вычисляться вдоль контура, который не пересекает разрез. Лайтхилл [5] показал, что если это условие выполнено, то наличие разреза не приводит к появлению особенностей в решении (58) даже для значений $s > s_m$.

Он рассматривает частный вид изменений амплитуды в группе волн

$$s = s_0(x) = \frac{s_m}{1 + (x/X)^2}. \quad (59)$$

(Здесь $x_m=0$ есть то значение x , при котором $s_0(x)$ имеет максимум; X — расстояние, на котором амплитуда уменьшается до $s_m/2$; оно должно быть велико по сравнению с длиной волны.) Как показывает Лайтхилл, в этом случае решение в плоскости (s, k) не имеет особенностей; тем не менее по истечении определенного критического времени

$$t_{\text{крит}} = 0,69X/\mu s_m, \tag{60}$$

обратно пропорционального максимальной амплитуде s_m , в преобразовании от переменных (x, t) к переменным (k, s) появляется особенность и условие гладкости в физической плоскости нарушается. Расстояние $u_0 t_{\text{крит}}$, проходимое волнами за критическое время, определяется для гравитационных волн выражением $u_0 t_{\text{крит}} = 0,49 X/ka$.

Вплоть до момента времени $t=t_{\text{крит}}$ изменения амплитуды в группе остаются гладкими и симметричными относительно некоторой точки, движущейся со скоростью u_0 . Свойство четности s как функции $(x - u_0 t)$ выводится из того, что потенциал ϕ , определенный выражением (58), представляет собой четную функцию $(k - k_0)$ (эта функция выглядит нечетной, но в действительности для получения решений, соответствующих $t > 0$, следует $x_0(s)$ брать в виде $\pm X \sqrt{(s_m/s) - 1}$ в зависимости от знака неравенства $k \geq k_0$).

Максимальная амплитуда в группе волн все время находится в средней точке $x = u_0 t$ и, как оказывается, возрастает сверх начального значения s_m ; однако полная энергия группы остается постоянной, что в принятом приближении выражается соотношением

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 dx = 0. \tag{61}$$

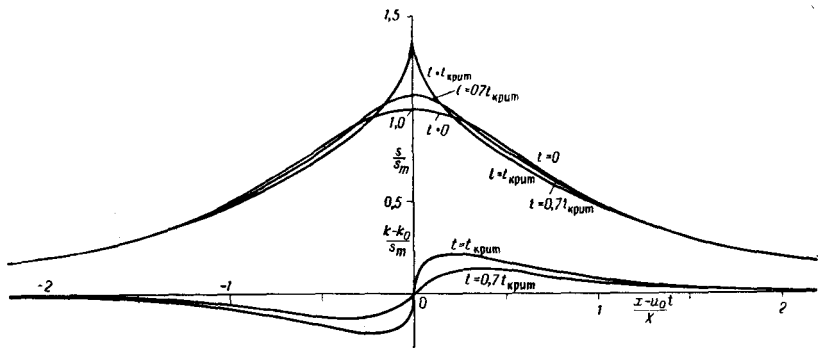
Увеличение максимальной амплитуды вызывается, таким образом, тенденцией к концентрации энергии в центре группы.

Этот процесс иллюстрируется на рис. 4, где показано также еще одно интересное и неожиданное обстоятельство. Оказывается, рассматриваемый процесс обладает «инкубационным периодом» в том смысле, что до момента времени $t = 0,7t_{\text{крит}}$ происходят лишь незначительные изменения распределения амплитуды.

С другой стороны, распределение волнового числа начинает меняться раньше, что, по-видимому, служит причиной других изменений. Физически это можно понять так, что там, где амплитуда максимальна, гребни волн продвигаются вперед наиболее быстро. Это приводит к уменьшению длин волн впереди

максимума амплитуды и увеличению длин волн за ним. Последующие изменения в скорости распространения энергии вызывают переход энергии к центральной части группы как спереди, так сзади.

Наконец, при $t = t_{\text{крит}}$ в середине группы возникает настоящий разрыв длины волны, а распределение амплитуд приобретает здесь точку возврата. После того как нарушено предположение о гладкости, теория не может быть адекватным образом



Р и с. 4.

Изменение со временем волнового числа k и безразмерной амплитуды s (см. уравнение (51)) в группе волн с постоянным начальным волновым числом k_0 и s , удовлетворяющим соотношению (59). Здесь $u_0 = f'(k_0)$ и критическое время $t_{\text{крит}}$, определено выражением (60), где $u = -f''(k_0)$ и для волн на глубокой воде $f(k) = \sqrt{gk^3}$.

использована для выяснения того, что происходит при $t > t_{\text{крит}}$; попытки выяснить это, в том числе и в § 16 работы Лайтхилла [5], дают, как мы увидим, неверные результаты.

9. Определение критического времени в некоторых частных случаях и в случае синусоидальной модуляции

Результаты, приведенные в § 8 для частного начального распределения (59), получены также для весьма широкого класса распределений амплитуды, симметричных относительно точки максимальной амплитуды $x=0$. Совершенно такие же рассуждения показывают, что группа волн остается симметричной относительно ее максимума, движущегося со скоростью u_0 ; при этом волновое число сохраняет постоянное значение k_0 .

Чтобы выяснить, как максимальное значение амплитуды возрастает со временем, и определить критическое время, при котором скорость роста становится бесконечной, можно воспользоваться выражением (58) при $s > s_m$ в предельном случае,

когда k стремится к k_0 сверху. В этом предельном случае интеграл не обращается в нуль из-за разреза, проведенного от $s=s_m$ до $s=\infty$. Путь интегрирования проходит от точки на нижнем берегу разреза до $s=s_m$, а затем — обратно по верхнему берегу.

Если амплитуда $s=s_c(x)$ имеет при $x=0$ простой максимум с $s''(0) < 0$, то обратная функция $x_0(S)$ на берегах разреза принимает чисто мнимые значения. Эти значения обратной функции очень просто выразить через $\xi_0(s)$ — обратную функцию для $s=s_0(i\xi)$. При этом $x_0(S) = i\xi_0(S)$ на нижнем берегу разреза и $x_0(S) = -i\xi_0(S)$ на верхнем, так что из (58) находим соотношение

$$\varphi = - \int_{s_m}^s \xi_0(S) \left(\frac{S}{s}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{(s-S)^2}{-4sS}\right) dS, \quad (62)$$

откуда вместе с выражением (53) для времени, а именно

$$t = - \frac{2}{\mu s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (63)$$

следует, что амплитуда s в середине группы зависит от t .

К числу интересных относятся случаи, для которых

$$s_0(x) = s_a(1 + A \cos \kappa x), \quad (64)$$

так что на среднюю амплитуду s_a наложена модуляция с максимальным значением

$$s_m = s_a(1 + A) \quad (65)$$

и минимальным $s_a(1 - A)$, где $0 \leq A \leq 1$. В предположении (1) из § 5 потребовалось бы, чтобы величина A была малой, но рассматриваемый здесь метод может быть использован при любых значениях A . Метод применим, если только выполнены условия (2) и (3), т. е. если s_m умеренно мало и $\kappa \ll k$.

Функция $\xi_0(s)$, обратная к $s_0(i\xi)$, очевидно, имеет вид

$$\xi_0(s) = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Arch} \left(\frac{s - s_a}{As_a} \right). \quad (66)$$

Вместе с (62) и (63) это соотношение определяет нарастание амплитуды в середине группы для данного случая. Отношение амплитуд представлено на рис. 5 для $A=1; 0,3; 0,1; 0,03; 0,01$.

В каждом случае нарастание амплитуды вначале происходит экспоненциально, как ожидалось согласно § 5. Действительно, когда величина $(s - s_m)$ мала, из (62) и (63) следует, что

$$\frac{1}{2} \mu s_m t \simeq - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \simeq \xi_0(s), \quad (67)$$

откуда с учетом выражения (66) находим

$$s = s_a \left[1 + A \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \mu s_m t \right) \right]. \quad (68)$$

Это согласуется с результатами, получаемыми методом Бенджамена или другими методами, когда выполнены все предположения (1), (2) и (3) из § 5. Аргумент гиперболического косинуса $\frac{1}{2} \mu s_m t$ возрастает на величину $\pi \sqrt{2} ka$, когда расстояние $u_0 t$, пройденное максимумом амплитуды, становится равным

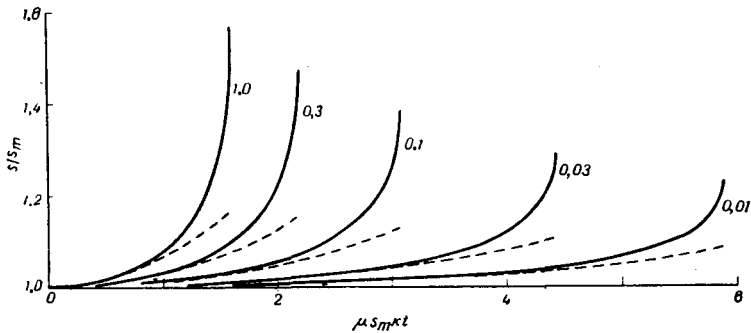


Рис. 5.

Изменение во времени максимальной амплитуды для группы волн, имеющих вначале постоянную длину волны и медленную синусоидальную модуляцию (64), где A принимает значения 1,0; 0,3; 0,1; 0,03 и 0,01, указанные вблизи кривых. Сплошной линией показаны результаты теории § 9; штриховой — результаты теории для малых $s - s_m$ (см. уравнение (68)).

расстоянию $2\pi/k$ между последовательными максимумами амплитуды (заметим, что величина $\pi \sqrt{2} ka$, будучи выражена через высоту волны H , измеряемую расстоянием между гребнем и впадиной, составляет $\pi^2 \sqrt{2} H/\lambda$, как и в § 5).

На рис. 5 ордината s/s_m показывает увеличение максимальной амплитуды относительно ее начального значения, тогда как абсцисса $\mu s_m t$ измеряет время; другое выражение для этой абсциссы $\mu s_m t = ka \sqrt{2} \chi u_0 t$, где ka — максимальное значение наклона начальной волны. Рядом с каждой кривой (сплошные линии), воспроизводящей результаты рассмотренной теории, приведена штриховая кривая, отвечающая приближенному выражению (68), которое справедливо для малых изменений максимальной амплитуды.

Точно так же, как и § 8, когда максимальная амплитуда увеличивается на определенную долю от начального значения (в интервале от 24% до 57% при изменении A от 0,01 до 1, что

можно сравнить с величиной 39% в § 8), обнаруживается критическое поведение (бесконечная скорость роста максимальной амплитуды во времени и разрыв длины волны). Во всех случаях производит столь же сильное впечатление существование «инкубационного периода», как и в § 8; его физическое объяснение остается прежним.

10. Сравнение с экспериментом

Приведенная в § 5 теория была сопоставлена с экспериментальными результатами Бенджамена и Фейра. Теперь мы сравним результаты § 9 с экспериментальными данными, полученными в той же лаборатории.

Рассмотренная теория была впервые частично опубликована в апреле 1965 г.; это был главным образом материал § 8, относящийся к группе волн специальной формы (59) с единственным максимумом амплитуды в середине группы. Вскоре после этого Фейр решил поставить эксперимент, который служил бы проверкой выводов теории для случая, настолько близкого к теоретическому, насколько это возможно реализовать на установке, допускающей лишь синусоидальную модуляцию. С этой целью он настроил волнопродуктор так, чтобы создавать группу волн, близко следующую выражению (64) при $A=1$ для $|x| < \pi/x$ и удовлетворяющую соотношению $s_0(x) = 0$ при $|x| > \pi/x$. Таким образом, изменение амплитуды состояло из одной «дольки» синусоиды; вторая его производная (но не первая) была разрывна при $x = \pm \pi/x$.

Сравнение наблюдаемых им значений для критического времени с теоретическими из § 8 дало удовлетворительное совпадение при условии, что значение x было выбрано так, чтобы обе группы волн были возможно ближе друг к другу (скажем, в смысле наименьших квадратов). Однако более удовлетворительным было бы сравнение экспериментальных результатов с теоретическими именно для синусоидального изменения амплитуды, что стало возможным после разработки теории § 9.

Очевидно, что детальное сравнение с теорией при $A=1$ в выражении (64) было бы лучше проводить для экспериментов (до сих пор еще не выполненных), в которых изменение амплитуды представляется выражением (64) не только при $|x| < \pi/x$, но и в значительно более широком диапазоне значений x . Недостаточная гладкость, выражающаяся в виде разрыва второй производной закона изменения амплитуды при $x = \pm \pi/x$, вызывает отклонение от теории. Это отклонение сохранится даже для бесконечно малых амплитуд, когда, согласно линейной теории.

появляется максимум местной частоты, высота которого будет возрастать с расстоянием от волнопродуктора.

Фактически результаты Фейра (см. ниже, стр. 77) указывают именно такой узкий максимум частоты на концах группы. Этот результат недостаточной начальной гладкости изменения амплитуды представляется, однако, вполне локализованным (как показывает и линейная теория, вероятно, вполне точная там, где амплитуда мала); изменения же в середине группы вплоть до критического времени происходят, по-видимому, независимо от него.

Эти изменения измерялись на расстоянии 8,5 м от волнопродуктора для различных значений амплитуды и периода модуляции. Когда временной период модуляции амплитуды в 25 раз больше периода волн, можно ожидать (как и подтвердилось), что результаты вполне хорошо согласуются с теорией Уизема. Для некоторых (малых) амплитуд расстояние 8,5 м меньше, чем предсказываемое теорией критическое расстояние, но наблюдаемая группа волн все еще остается точно симметричной и ее середина распространяется с групповой скоростью $u_0 = 31$ см/сек, отвечающей частоте волн 2,5 гц. Для других (больших) амплитуд расстояние 8,5 м превосходит критическое расстояние и наблюдаемая группа становится заметно асимметричной.

Точное сравнение изменений максимума амплитуды с теорией невозможно из-за различных источников диссипации (в том числе потерь на боковых стенках лотка), снижающих начальную энергию группы примерно до половины на расстоянии 8,5 м. Можно, однако, сравнивать критические расстояния. Теоретическое значение критического расстояния, выраженное через максимум начального наклона волны ka , равно

$$\frac{0,54}{ka} \text{ м.} \quad (69)$$

Экспериментальное значение оказывается равным 8,5 м при $ka = 0,07$, так как группа волн при 8,5 м остается еще симметричной, но приобретает заостренную форму, сильно напоминающую теоретический результат для $t = t_{\text{крит}}$. (В статье Фейра на рис. 2 изменения амплитуды приведены для $ka = 0,078$; там видна как раз начинающаяся проявляться асимметрия.)

Теоретическое же выражение (69) равно 8,5 м при $ka = 0,063$. Причина того, что это значение меньше экспериментально наблюдаемого, по-видимому, связана с упомянутым влиянием диссипации энергии, приводящим к уменьшению максимального наклона примерно от 0,07 до 0,06 на рассматриваемом расстоянии.

Вместе с тем вычисления, описанные в § 8, показывают (см. рис. 4), что волновое число возрастает примерно на

$$0,2s_m \simeq (0,56ka)k \quad (70)$$

в передней части группы волн с соответствующим уменьшением позади группы. На рис. 2 Фейра показано, что фактически осуществляется изменение примерно на $0,033k$, которое согласуется с выражением (70) при $ka=0,06$. В этом отношении, как и раньше, можно считать, что экспериментальный результат предварительно подтверждает теорию Уизема вплоть до критического момента.

Как оказалось (см., например, рис. 3 Фейра), закритическое состояние группы заметно асимметрично. Хотя предположения, на которых основана теория Уизема, в этой области нарушаются, Лайтхилл [5] без особого обоснования видоизменил теорию, чтобы использовать ее для закритических состояний. От этого видоизменения придется отказаться, так как из него следует, что группа остается симметричной. К настоящему времени нет еще теоретического объяснения для появления асимметрии¹⁾.

Тем не менее напрашивается определенная аналогия. Симметричный двумерный профиль, обладающий к тому же симметрией относительно поперечной оси, вызывает при обтекании невязким дозвуковым потоком течение с полной симметрией относительно поперечной оси при всех числах Маха вплоть до некоторого критического значения, когда впервые появляется разрыв (т. е. ударная волна). После достижения этого значения числа Маха течение становится сильно асимметричным. В рассматриваемой задаче появление разрыва (разрыва длины волны) в середине группы аналогичным образом вызывает сильную асимметрию распределения амплитуды.

Предварительный вывод этого доклада, который можно сделать на основе ограниченного сопоставления с экспериментом для простых систем, состоит в том, что теория Уизема дает надежные результаты в тех пространственно-временных областях, где выполнены ее предпосылки и, в частности, где решение остается однозначным. Таким образом, работа над аналитическими задачами, возникающими при применении теории к более сложным проблемам, представляется потенциально достаточно полезной, чтобы полностью оправдать затрачиваемые усилия.

¹⁾ В предыдущем докладе в § 4.5 (добавленном после дискуссии) Уизем показывает, как можно получить такое объяснение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, ИЛ М., 1964.
2. Garabedian P. R., *J. Math. Phys.*, 36 (1957), 192. (См. русский перевод: сб. *Механика*, № 6 (1958).)
3. Ламб Г., Гидродинамика, ГТИ, М.—Л., 1947.
4. Lighthill M. J., *J. Inst. Math. Appl.*, 1 (1965), 1.
5. Lighthill M. J., *J. Inst. Math. Appl.*, 1 (1965), 269.
6. Longuet-Higgins M. S., *Phil. Trans.*, A245 (1953), 535.
7. Michell J. H., *Phil. Mag.* (5), 36 (1893), 430.
8. Ursell F., *J. Fluid Mech.*, 8 (1960), 418.
9. Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, A283 (1965), 238.
10. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), 273.

Обсуждение

Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами

ДЖ. ФЕЙР

На рис. 1—3 представлены в компактной форме данные о некоторых экспериментах с волновыми импульсами, проведенных в длинном лотке, снабженном волнопродуктором. Цель этих экспериментов состояла в исследовании влияния конечной амплитуды на форму волновых импульсов, распространяющихся по глубокой воде, и распределение частоты в них. Каждый импульс создавался путем медленного изменения хода волнопродуктора от нулевой амплитуды до некоторого максимального значения с последующим изменением до нулевой амплитуды. После этого электрическими датчиками записывались результирующие перемещения поверхности в различных точках вдоль осевой линии волнового лотка.

Частота волнопродуктора во всех опытах составляла 2,5 *гц* (что соответствует длине регулярных волн около 25 *см*). Периоды импульсов, выбранных для представления быстрой и медленной модуляции, составляли 12,5 и 25 периодов волнопродуктора.

Максимальный за импульс ход волнопродуктора менялся в опытах от 0,19 *см* для волн малой амплитуды до 1,5 *см* для волн большой амплитуды. Оказалось, что значения хода, превосходящие примерно 0,64 *см*, дают импульсы с нерегулярной формой и нерегулярными частотными характеристиками, как это будет здесь продемонстрировано. Однако при ходе, меньшем 0,64 *см*, были получены иные, весьма интересные эффекты, иллюстрируемые на рис. 1 и 2. В обоих случаях запись производилась в точке на расстоянии 34 длин волн от волнопродуктора, а длительность импульса составляла 10 *сек* (25 периодов волнопродуктора).

На рис. 1 представлен импульс очень малой амплитуды, равной около 0,1 *см*. На верхней диаграмме точками помечены гребни и впадины отдельных волн, входящих в данную группу. Импульс имеет гладкий профиль, симметричный относительно максимума.

Частота волн определялась путем измерения времени, отделяющего гребни и впадины. Затем подсчитывалась величина

изменения частоты в долях от основной частоты; эта величина представлена на нижней диаграмме рис. 1. Вблизи концов группы волн обнаруживается разброс частоты, но в основной части группы частота волн остается удивительно постоянной.

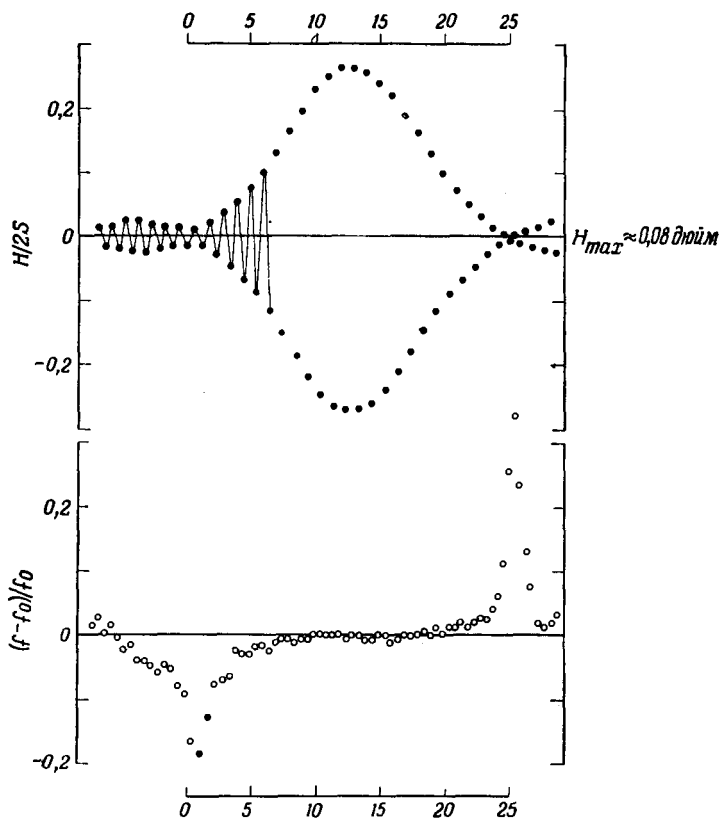


Рис. 1. Характеристики импульса.

Расстояние от волнопродуктора 8,4 м, частота волнопродуктора $f_0 = 2,50$ гц, ход $S = 0,19$ см, длительность импульса 10,00 сек. По горизонтали отложено время (в периодах источника); $H/2S$ — высота волн; $(f - f_0)/f_0$ — изменение частоты.

В случае, представленном на рис. 2, ход волнопродуктора был увеличен более чем в два раза; максимальная высота волн в группе оказалась приблизительно в три раза больше, чем в предыдущем случае, составляя примерно 0,25 дюйм. Профиль импульса здесь значительно острее вблизи максимума и заметно асимметричен. Другое важное изменение, вызванное увеличе-

нием амплитуды, проявляется на частотной диаграмме импульса. Здесь в противоположность равномерному распределению, наблюдаемому в случае малых амплитуд, распределение частоты

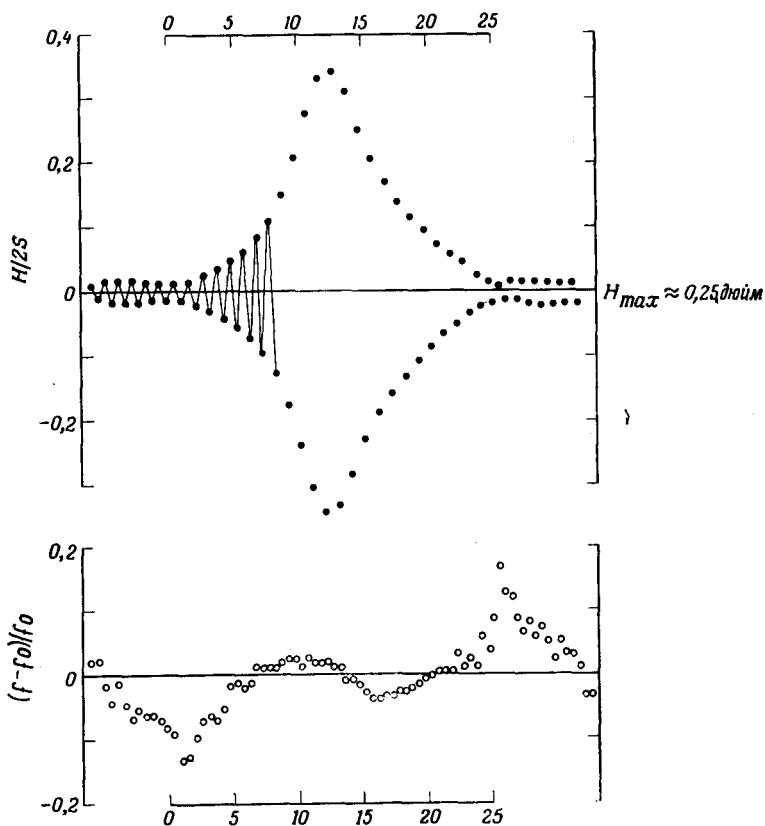
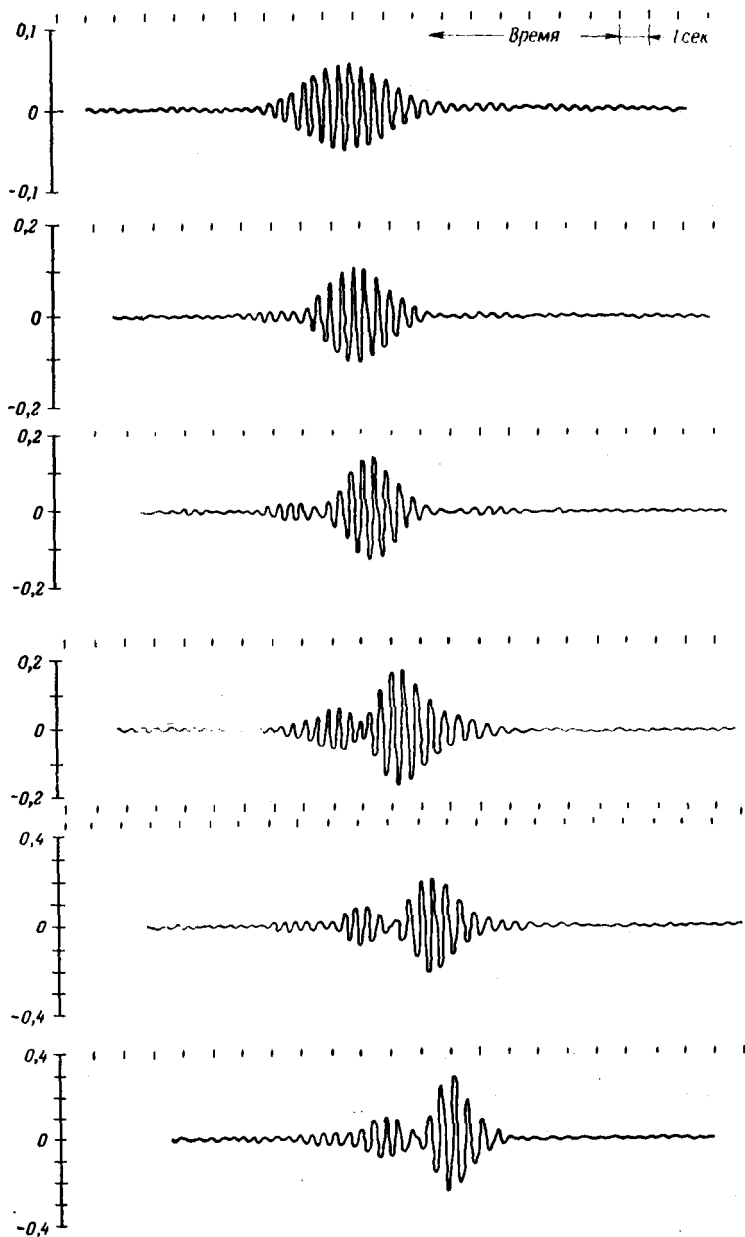


Рис. 2. Характеристики импульса.

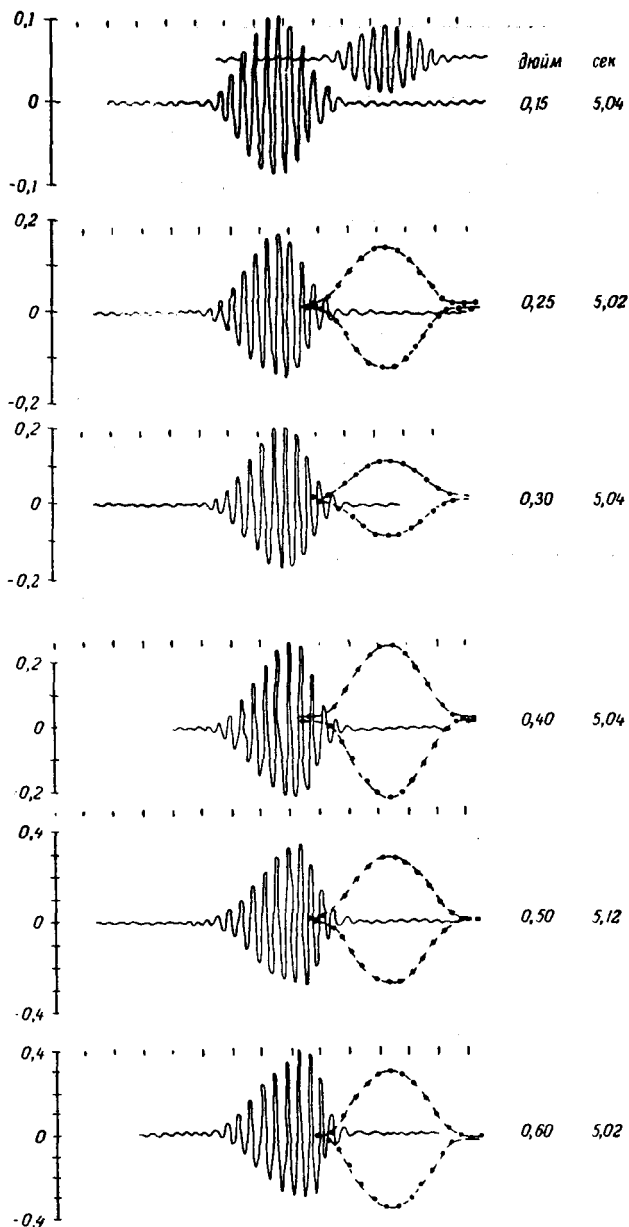
Расстояние от волнопродуктора 8,4 м. Частота волнопродуктора $f_0 = 2,50$ гц; ход $S = 0,45$ см; длительность импульса 9,92 сек. Обозначения те же, что и на рис. 1.

имеет отчетливый изгиб; кроме того, волны повышенной частоты, представленные положительными значениями параметра $(f - f_0)/f_0$, оказываются движущимися быстрее максимума группы, тогда как волны меньшей частоты отстают от него. Этот результат согласуется с предсказанием Лайтхилла [1] о том, что на глубокой воде перед максимумом группы волн движутся



Р и с. За. Записи волновых импульсов.

По оси ординат указан масштаб смещений поверхности воды, дюймы. Расстояние от волнопродуктора 8,4 м.



Р и с. 36. Записи волновых импульсов (продолжение). По оси ординат указан масштаб смещений поверхности воды, дюймы. Расстояние от волнопродуктора равно 1,2 м. Числа показывают максимальный ход (дюймы) волнопродуктора при частоте 2,5 гц и продолжительность импульса (сек).

компоненты с ббольшим волновым числом, а за ним следуют компоненты с меньшим волновым числом.

На рис. 3а и 3б показан вид волновых импульсов, когда амплитуда волн взята очень большой. Приведены записи, сделанные на расстоянии 1,2 и 8,4 м от волнопродуктора и соответствующие 6 значениям хода волнопродуктора и продолжительности импульса в 5 сек. Справа от формы волны на рис. 3б показана запись перемещения волнопродуктора.

При повышенной амплитуде волн обнаруживается, что вблизи волнопродуктора профиль импульса теряет симметрию относительно максимума и постепенно, по мере движения импульса по лотку, разделяется на две различные группы. Частота в этих группах изменяется нерегулярно, но, по-видимому, частота в опережающей группе ниже, чем частота в отстающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J., *J. Inst. Math. Appl.*, 1 (1965), 269.

Неустойчивость периодических цугов волн в нелинейных системах с дисперсией

Т. Б. БЕНДЖАМЕН

Определяющим свойством рассматриваемого здесь класса физических систем является то, что вследствие установления равновесия между нелинейными и частотно-дисперсионными эффектами в таких системах могут распространяться периодические волны постоянной формы с конечной амплитудой. Поэтому для любой такой системы динамические уравнения, описывающие распространение относительно невозмущенного состояния в направлении оси x , имеют точные периодические решения, скажем, вида $\eta(x, t) = H(x - ct)$, где c — постоянная фазовая скорость, зависящая как от амплитуды волн, так и от их частоты или длины. В этой статье рассматривается тот факт, что во многих случаях эти однородные цуги волн неустойчивы по отношению к малым возмущениям определенного рода, так что на практике при попытке вызвать их распространение на большие расстояния они будут распадаться. Замечательным недавно обнаруженным примером является неустойчивость гравитационных волн конечной амплитуды на глубокой воде: в настоящее время имеются несомненные экспериментальные доказательства этого свойства, которое было обнаружено также и аналитически.

Факторы, приводящие к неустойчивости, описаны в общих чертах в § 2. Возмущение, способное извлекать энергию из основного волнового движения, состоит из пары синусоидальных волн, частоты и волновые числа которых отличаются от основной частоты и волнового числа на некоторую малую их долю. Нелинейные эффекты препятствуют ослаблению этих волн вследствие дисперсии, и они приходят в резонанс со второй гармоникой основного движения, вследствие чего их амплитуды совместно увеличиваются, причем увеличение происходит экспоненциально по времени и пройденному расстоянию. В § 3 приведено подробное исследование устойчивости цугов волн на воде произвольной глубины h и показано, что они неустойчивы, если основное волновое число k удовлетворяет условию $kh > 1,363$, и устойчивы в противном случае. Наконец, в § 4 обсуждаются некоторые экспериментальные результаты относительно неустойчивости волн на глубокой воде и дается обзор некоторых возможных приложений этих идей к другим частным системам.

1. Введение

Основной вопрос настоящего сообщения состоит в том, устойчив или нет однородный цуг волн в нелинейной системе с дисперсией. Из рассматриваемых задач наиболее типична задача о параллельных волнах с прямолинейными гребнями на поверхности бесконечного слоя воды с горизонтальным дном, но в дальнейшем будут упомянуты и некоторые другие физические проблемы, к которым имеют отношение излагаемые идеи. Здесь предполагается дать обзор экспериментальных и теоретических исследований по неустойчивости и последующему разрушению волн на глубокой воде, проведенных совместно с Фейром за последние два года. Предварительное сообщение об этой работе

было представлено год-назад на Седьмом британском коллоквиуме по теоретической механике в Лидсе, а подробнее она излагается в статьях [1, 2]. Однако некоторые более поздние результаты будут сообщены здесь впервые, в частности будет показано, что обнаружилось при исследовании на устойчивость волн на воде произвольной глубины.

Чтобы уточнить обсуждаемые положения, нужно сначала напомнить следующие известные факты. Отличительное свойство многих нелинейных систем, обладающих в то же время дисперсией, состоит в том, что их динамические уравнения допускают периодические, хотя и не синусоидальные, решения, представляющие прогрессивные волны конечной амплитуды, но с неизменной формой волны. Эти решения получены в предположении равновесия между эффектами нелинейности и частотной дисперсии, так как в отсутствие любого из этих факторов такие установившиеся волны вообще невозможны. В случае волн на воде предположение о существовании таких решений высказывали многие авторы уже на ранней стадии изучения вопроса, причем считалось, что их можно выразить в виде разложения в ряды по амплитуде волн. Это разложение обычно называют стоксовым, поскольку Стокс впервые определил его главные члены. Тем не менее доказательство существования установившихся волн на воде представляет собой труднейшую математическую задачу; по этому поводу в начале столетия шла оживленная дискуссия, в частности высказывались существенные сомнения в сходимости стоксова разложения.

Вопрос был окончательно разрешен в знаменитой работе Леви-Чивита [9]. Он доказал, что стоксово разложение для волн на воде бесконечной глубины сходится при достаточно малых значениях отношения амплитуды волны к ее длине; тем самым было показано, что нелинейные граничные условия в задаче о волнах на воде могут точно удовлетворяться для волн неизменной формы. Это доказательство было обобщено Стройком [13] на волны малой амплитуды на воде произвольной глубины, а в недавних работах Красовского [6, 7] было установлено, наконец, существование установившихся периодических волн для всех амплитуд, меньших предельной, при которой гребень волны становится острым. Однако несмотря на большое число работ по доказательству существования волн на воде, имеющих неизменяющуюся форму, вопрос об их устойчивости до сих пор, по-видимому, не рассматривался, если не считать некоторых попыток Кортвега и де Фриза в 1895 г., относящихся к длинным волнам на мелкой воде. Удивительный факт, обнаруженный к настоящему времени, состоит в том, что волны Стокса на достаточно глубокой воде определенно неустойчивы.

Практически этот факт был продемонстрирован в опытах, описываемых Бенджаменом и Фейром [2]. На одном конце длинного лотка создавались цуги волн на глубокой воде достаточно большой амплитуды (однако значительно меньшей, чем та, при которой появляются барашки), а затем наблюдалось их распространение на расстояния, составляющие много длин волн. Было замечено, что если такой цуг волн распространяется достаточно далеко, то в нем обнаруживаются значительные нерегулярности, даже если вблизи волнопродуктора отклонения от периодичности были едва заметны. И, наконец, на больших расстояниях от места возникновения цуг волн может полностью разрушиться, а его энергия соответственно перераспределяется по широкому спектру. Начальная фаза этих явлений, на протяжении которой нерегулярности увеличиваются, но все еще остаются достаточно малыми, поддается анализу и более или менее полно изучена. Далее будут приведены примеры того, как согласуются теоретические и экспериментальные результаты.

Эффекты, возникающие вследствие неустойчивости волн, красноречиво демонстрируются на рис. 1. На этих двух фотографиях показан цуг волн, полученный в большом опытовом бассейне (гидроканал № 3) корабельного отделения Национальной физической лаборатории (НФЛ) в Фельтхэме. Основная длина волны равна 2,2 м, а глубина воды 7,5 м. На рис. 1, а показан цуг волн вблизи от волнопродуктора, расположенного у одного из концов бассейна; здесь цуг волн явно регулярен, если не считать мелких неровностей, которые неизбежны при создании волн таких размеров и несущественны для рассматриваемых процессов. Для сравнения на рис. 1, б тот же цуг волн показан на расстоянии 60 м (28 длин волн) от волнопродуктора; можно видеть, насколько велики произошедшие искажения.

Правда этот случай был искусственным в том отношении, что малые возмущения в виде отдельных неустойчивых синусоид создавались путем модуляции возвратно поступательного движения волнопродуктора (подробнее об этом будет сказано позже), поэтому показанные на рис. 1 результаты не должны, конечно, бросить тень на превосходное оборудование НФЛ. Однако и в любом достаточно длинном гидроканале случайные фоновые возмущения будут самопроизвольно порождать большие искажения, если только амплитуда волн превышает некоторый уровень, на котором механизм неустойчивости (определяемый нелинейными эффектами и поэтому сильнее проявляющийся при больших амплитудах) уже не подавляется действием вязкости. Это явление, вероятно, уже наблюдали многие экспериментаторы (оно определенно известно сотрудникам корабельного отделения НФЛ), хотя уровень амплитуды волн, при кото-

ром оно становится сильно выраженным, несколько выше того, при котором обычно испытываются модели кораблей.

Неустойчивость волн на глубокой воде имеет и другую замечательную сторону, обнаруженную в недавних теоретических

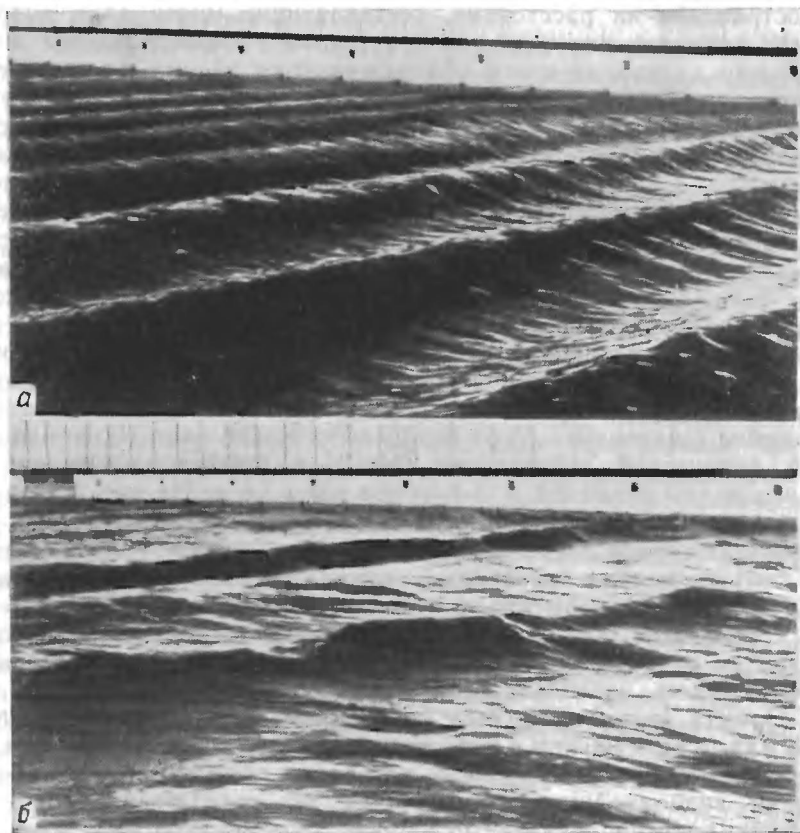


Рис. 1. Фотографии прогрессивных цугов волн, иллюстрирующие разрушение из-за неустойчивости.

а — вид вблизи волнопродуктора; б — вид на расстоянии 60 м от волнопродуктора. Основная длина волны 2,2 м.

работах Лайтхилла [10] и Уизема [15]. В их работах выведены уравнения, определяющие чрезвычайно плавные, но не обязательно малые, изменения параметров волн; для волн на глубокой воде эти уравнения оказываются уравнениями эллиптического типа. Поначалу странно видеть уравнение эллиптического

типа со временем в качестве независимой переменной, поскольку интуитивно очевидным свойством рассматриваемой физической задачи является допустимость в начальный момент произвольных данных Коши (т. е. гиперболические граничные условия).

С физической точки зрения правильная интерпретация состоит, по-видимому, в том, что если началось некоторое весьма постепенное изменение цуга волн, то оно сперва должно все время усиливаться, так что (в силу эллиптичности описывающих эти возмущения уравнений) параметры волн изменяются монотонно, не проходя через максимум или минимум; поэтому с течением времени искажения цуга волн станут столь сильными, что теория окажется неприменимой. Таким образом, вопрос о применимости теории на всем бесконечно большом промежутке времени отпадает, но для ограниченного диапазона времени данная теория дает адекватное описание. В этом смысле результаты Лайтхилла и Уизема полностью соответствуют результатам излагаемого ниже исследования неустойчивости, согласно которому бесконечно малые возмущения определенного рода могут увеличиваться неограниченно. В противовес теориям Лайтхилла и Уизема, имеющим преимущества при описании больших возмущений, излагаемая теория дает большую точность при описании поведения малых неустойчивых возмущений. В частности, здесь найдены условия максимума скорости роста возмущений и условия среза, определяющие переход к устойчивому поведению возмущений.

Элементы этой теории имеют сходство с некоторыми из результатов теории резонансного взаимодействия волн на воде, развитой за последние годы Филлипсом и его сотрудниками. Однако отбор этих элементов должен быть весьма тщательным, так что, хотя связь с ранее проделанной работой в области резонансных взаимодействий усматривается без труда, данное аналитическое исследование исходит непосредственно из основных соотношений гидродинамики. Сначала, в § 2, проводится общее обсуждение механизма неустойчивости, а затем, в § 3, подробно излагается анализ устойчивости волн на воде.

2. Объяснение неустойчивости

Пусть в произвольной системе рассматриваемого здесь типа распространяется в направлении оси x стационарный периодический цуг волн, основная гармоническая компонента которого имеет аргумент $\zeta = kx - \omega t$ и амплитуду (по смещению) a . Поскольку система нелинейна, должны присутствовать также гармоники с аргументами $2\zeta, 3\zeta, \dots$, причем все они распространяются с той же фазовой скоростью $c = \omega/k$, что и основная

гармоника; их амплитуды можно, вообще говоря, считать убывающими по порядку величины, как последовательные целые степени произведения ka , которые, по предположению, $\ll 1$.

Допустим теперь, что введено возмущение, состоящее из двух прогрессивных грамонических волн, частоты и волновые числа которых близки к ω и k и являются по отношению к ним «боковыми», так что их аргументы имеют вид, показанный в первой и последней строчках приводимой ниже диаграммы. Здесь κ и δ считаются много меньшими единицы, а амплитуды e_1 и e_2 этих волн считаются много меньшими a . На диаграмме показаны два вида частных произведений, получающихся вследствие нелинейного взаимодействия между возмущением и основным цугом волн; точнее, это разностные компоненты, порождаемые боковыми частотами и второй гармоникой.

Диаграмма взаимодействия, показывающая аргументы { } и амплитуды [] гармонических составляющих

Верхняя боковая полоса

$$\{\xi_1 = k(1 + \kappa)x - \omega(1 + \delta)t - \gamma_1\}, [e_1]$$

Вторая гармоника основного цуга волн

$$\left. \begin{array}{l} \xi_2 + (\gamma_1 + \gamma_2), [k^2 a^2 e_1] \\ 2\xi = 2(kx - \omega t), [ka^2] \end{array} \right\}$$

Нижняя боковая полоса

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 + (\gamma_1 + \gamma_2), [k^2 a^2 e_2] \\ \xi_2 = k(1 - \kappa)x - \omega(1 - \delta)t - \gamma_2, [e_2] \end{array} \right\}$$

Важнейший факт, раскрываемый этой диаграммой, заключается в том, что если по мере развития нелинейных процессов

$$\theta = \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \text{const}, \quad (1)$$

то пара гармоник, получившихся в результате взаимодействия, приходит во взаимный резонанс. Поэтому каждая из гармоник боковых полос подвергается синхронному вынуждающему воздействию, пропорциональному амплитуде другой гармоники, так что эти две амплитуды могут экспоненциально возрасти. Таким образом, основное волновое движение неустойчиво по отношению к этой форме возмущения.

Выполнение условия (1), необходимого для неустойчивости, должно получаться как следствие последующего воздействия основного движения на гармоники боковых частот. Действительно, если бы амплитуда a была слишком мала для значительного проявления нелинейного взаимодействия, то локаль-

ные волновые числа $k_{1,2} = \partial \zeta_{1,2} / \partial x$ и частоты $\hat{\omega}_{1,2} = -\partial \zeta_{1,2} / \partial t$ этих гармоник удовлетворяли бы дисперсионному соотношению, следующему из линейной теории, скажем

$$\hat{\omega} = f(k). \quad (2)$$

При малых χ и δ соотношение (2) будет, очевидно, выполнено в первом приближении при постоянных γ_1 и γ_2 , если

$$\frac{\delta \omega}{\chi k} = c_g, \quad (3)$$

где $c_g = f'(k)$ — групповая скорость при волновом числе k . Однако во втором приближении из (2) следует, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_g \frac{\partial \theta}{\partial x} = (\chi k)^2 f''(k) = \delta^2 \frac{f^2(k) f''(k)}{[f'(k)]^2}, \quad (4)$$

причем в общем случае $f''(k) \neq 0$ из-за наличия дисперсии.

Таким образом, для выполнения условия (1) необходимо иметь такое нелинейное воздействие на соотношение между частотой и волновым числом для боковых полос, которое уравновесило бы влияние дисперсии, выражаемое соотношением (4). В случае, подробно рассматриваемом ниже, оказывается, что к правой части уравнения (4) добавляется член $O(\omega k^2 a^2)$; можно ожидать, что таким же будет результат в общем случае. При рассмотрении устойчивости решающее значение имеет знак получающейся суммы, так как, если этот знак тот же, что и знак $f''(k)$, то условие (1) не выполняется и обеспечена устойчивость. Таков результат анализа для волн на мелкой воде, подтверждающего выводы, ранее полученные Уиземом [14, 15].

Однако как уже показано Бенджаменом и Фейром [1], свойство (1) может быть реализовано для возмущений на боковых полосах, наложенных на волны на глубокой воде, которые поэтому явным образом неустойчивы. Интересно отметить, что, в то время как сонаправленное взаимодействие нелинейности и дисперсии необходимо для существования волн неизменной формы как состояний полного динамического равновесия, противонаправленное взаимодействие этих же двух факторов может также приводить к разрушению таких цугов волн при наличии малых возмущений.

Последующий анализ проведен для произвольных начальных значений амплитуд боковых гармоник ε_i , однако будет установлено, что в условиях неустойчивости амплитуды по мере увеличения имеют тенденцию к выравниванию. Случай равных амплитуд, скажем $\varepsilon_i = \varepsilon$, допускает простую интерпретацию, которую здесь стоит упомянуть. Рассматривая наложение двух боковых гармоник на основную гармонику исходного цуга волн,

находим по определению ζ и ζ_i соотношение (см. [1], § 3):

$$a \cos \zeta + \bar{e} (\cos \zeta_1 + \cos \zeta_2) = \left\{ a + 2\bar{e} \cos \frac{1}{2} \theta \cos(\kappa kx - \omega \delta t) \right\} \times \\ \times \cos(kx - \omega t) + 2\bar{e} \sin \frac{1}{2} \theta \cos(\kappa kx - \omega t \delta) \sin(kx - \omega t). \quad (5)$$

Это соотношение описывает плавную модуляцию основной волны с волновым числом $\kappa k \ll k$. Огибающая модуляции

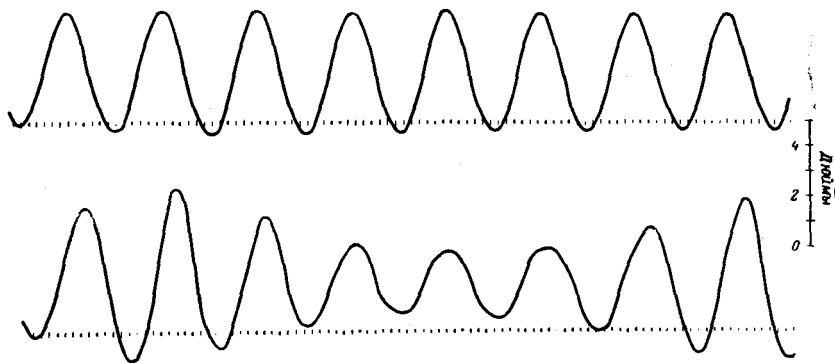


Рис. 2. Экспериментальные записи высоты поверхности воды в зависимости от времени для двух положений, показывающие самопроизвольное развитие неустойчивости из фоновых помех.

Основная частота 0,85 гц. Верхняя запись снята на расстоянии 60 м от волнопродуктора, нижняя — на расстоянии 120 м. Интервал между отметками времени равен 0,1 сек.

распространяется с групповой скоростью c_g , определяемой выражением (3); соотношение (5) описывает два различных фактора: первый член его выражает амплитудную модуляцию, а второй, в котором быстро меняющийся множитель сдвинут по фазе относительно основного движения на четверть волны, примерно эквивалентен некоторой фазовой модуляции.

Амплитудную модуляцию довольно просто обнаружить экспериментально; она измерялась как основной показатель развития неустойчивости в экспериментах Бенджамена и Фейра [2] и весьма отчетливо видна на рис. 2 (обсуждение см. в § 4)

3. Исследование устойчивости волн на воде произвольной глубины

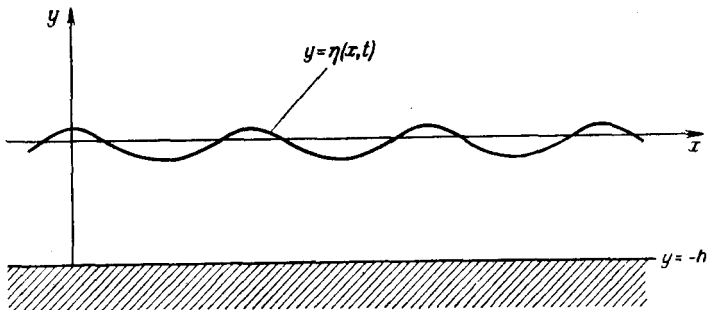
Метод исследования в этом случае совпадает с методом, использованным Бенджаменом и Фейром [1] для волн на глубокой воде, но сложность вычислений значительно возрастает, поскольку теперь учитывается влияние жесткого горизонтального дна. Поскольку основные этапы исследования повторяются, в

настоящем изложении мы оставим самое существенное, а различные вспомогательные рассуждения можно найти в статье [1].

Как показано на рис. 3, ось x направлена горизонтально, а ось y — вертикально вверх. Начало координат выбрано на уровне невозмущенной поверхности воды, так что, скажем, при глубине воды h координата $y = -h$ соответствует дну. Координата свободной поверхности обозначается через

$$y = \eta(x, t). \quad (6)$$

Вода моделируется идеальной жидкостью, находящейся в состоянии безвихревого движения. Поэтому существует потенциал



Р и с. 3. Система координат.

скорости $\varphi(x, y, t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (7)$$

и граничному условию

$$\varphi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \quad (8)$$

На свободной поверхности имеем кинематическое условие

$$\eta_t + \eta_x [\varphi_x]_{y=\eta} - [\varphi_y]_{y=\eta} = 0 \quad (9)$$

и условие постоянства давления (см. [11], § 1.4)

$$g\eta + \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right]_{y=\eta} = \text{const.} \quad (10)$$

Стоксовы волны неизменной формы. Известно, что приведенные выше уравнения имеют точные решения вида $\eta = H(x - ct)$, $\varphi = \bar{\Phi}(x - ct, y)$, где c — постоянная фазовая скорость. Для наших целей достаточно иметь эти решения с точностью до второго приближения, как они были первоначально получены Сток-

сом [12], и еще нам потребуется второе приближение для c (см., например, [3]). Таким образом, мы рассмотрим выражения

$$\eta = H = \bar{\eta} + a \cos \zeta + ka^2 P \cos 2\zeta, \quad (11)$$

$$\varphi = \Phi = \frac{\omega a}{k} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} K} \sin \zeta + \omega a^2 Q \frac{\operatorname{ch} 2k(y+h)}{\operatorname{sh} 2K} \sin 2\zeta, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= kx - \omega t, \quad K = kh, \\ \bar{\eta} &= ka^2 \Delta = -\frac{1}{2} ka^2 / \operatorname{sh} 2K, \end{aligned} \quad (13)$$

$$P = \frac{1}{4} \operatorname{cth} K (3 \operatorname{cth}^2 K - 1), \quad Q = \frac{3}{4} \operatorname{cth} K / \operatorname{sh}^2 K$$

и

$$\omega^2 = k^2 c^2 = gk \operatorname{th} K \left\{ 1 + k^2 a^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 K} + \frac{9 - 2 \operatorname{th}^2 K}{8 \operatorname{sh}^4 K} \right) \right\}. \quad (14)$$

Это приближение справедливо при $ka \ll 1$ или, если K мало, при $ka \ll K^3$. Последнее требование налагает дополнительное ограничение на основную амплитуду a , когда длина волны намного превосходит глубину воды; в этом случае более полезным оказывается приближение кноидальной волны, данное Кортевегом и де Фризом (см. [5, 8, § 253]). Однако устойчивость кноидальных волн уже, по существу, доказана Кортевегом и де Фризом и Уиземом [14]; поэтому она не представляет здесь интереса, так что случай очень длинных волн здесь не рассматривается.

Уравнения для возмущений. Чтобы исследовать устойчивость стационарного волнового движения, описываемого соотношениями (11) и (12), можно записать

$$\eta = H + i\bar{\eta}, \quad \varphi = \Phi + i\bar{\varphi} \quad (15)$$

и, считая i малым числом, квадратом которого будем пренебрегать, можно вывести линеаризованные уравнения для $\bar{\eta}$ и $\bar{\varphi}$. Коэффициенты этих уравнений нужно вычислять вплоть до членов порядка a^2 . Согласно сказанному в § 2, будем считать, что возмущение состоит из пары гармоник в боковых полосах и результатов их взаимодействия с основным цугом волн. Таким образом, определив аргументы ζ_i ($i=1, 2$), как указано выше, положим

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2, \quad (16)$$

где

$$\bar{\eta}_i = \varepsilon_i \cos \zeta_i + ka \{ A_i \cos(\zeta + \zeta_i) + B_i \cos(\zeta - \zeta_i) \} + O(k^2 a^2 \varepsilon_i). \quad (17)$$

Входящие сюда члены порядка $O(k^2 a^2 \varepsilon_i)$ имеют аргументы $(2\zeta + \zeta_i)$, и их не нужно учитывать в дальнейшем, так как они описывают нерезонансные, а потому пассивные эффекты взаимодействия. Члены того же порядка с аргументами $(2\zeta - \zeta_i)$ имеют

определяющее значение, но, как будет видно в дальнейшем, их можно объединить с членами, имеющими аргументы ζ_i .

Будем считать, что малые параметры κ и δ , определяющие отклонения боковых полос, удовлетворяют соотношению (3), в котором величина c_g теперь равна групповой скорости бесконечно малых волн на воде с волновым числом k . Необходимое выражение для c_g можно получить из соотношения (14), если не учитывать поправку на конечность амплитуды (т. е. опустить члены, содержащие $k^2 a^2$). Таким образом, получим

$$\delta/\kappa = \frac{1}{2} (1 + 2K/\text{sh } 2K) = \lambda. \quad (18)$$

Имея в виду окончательные результаты, допустим в дальнейшем, что

$$\kappa, \delta = O(ka), \quad (19)$$

и будем упрощать выражения для различных коэффициентов, зависящих от κ и δ , с учетом принятого порядка аппроксимации по степеням (ka) . Учитывая эти предположения, будем считать ϵ_i и γ_i медленно меняющимися функциями одного лишь времени (это тоже должно быть подтверждено окончательными результатами); производные этих функций удовлетворяют условиям

$$\dot{\epsilon}_i = O(\omega k^2 a^2 \epsilon_i), \quad \dot{\gamma}_i = O(\omega k^2 a^2). \quad (20)$$

Таким образом, в данной модели предполагается, что характеристики модуляции, наложенной на исходный цуг волн, пространственно однородны и поэтому изменяются всюду одновременно. Выделение в явном виде зависимости от времени удобно для упрощения анализа, а обобщение с целью параллельного учета зависимости от x можно легко выполнить после (как это уже рассматривалось в § 2).

Подходящая форма потенциала $\bar{\varphi}$, соответствующая выражениям (16) и (17) и такая, что полный потенциал скоростей удовлетворяет соотношениям (7) и (8), имеет вид

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i = & \frac{\text{ch } k_i (y+h)}{k_i \text{sh } k_i h} \{ \epsilon_i (\omega_i L_i + \dot{\gamma}_i M_i) \sin \zeta_i + \dot{\epsilon}_i N_i \cos \zeta_i \} + \\ & + \omega a \epsilon_i \left\{ C_i \frac{\text{ch} |(k+k_i)(y+h)|}{\text{sh} |(k+k_i)h|} \sin (\zeta + \zeta_i) + \right. \\ & \left. + D_i \frac{\text{ch} |(k-k_i)(y+h)|}{\text{sh} |(k-k_i)h|} \sin (\zeta - \zeta_i) \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$k_i = k(1 \pm \kappa), \quad \omega_i = \omega(1 \pm \delta). \quad (23)$$

Заметим, что из граничных условий (9) и (10) следует

$$L_i = 1 + O(k^2 a^2),$$

так как в первом приближении величины $\tilde{\varphi}_i$ должны удовлетворять этим (линеаризованным) соотношениям при $a \rightarrow 0$. Коэффициенты M_i, N_i, C_i, D_i и A_i, B_i в соотношении (17) также должны рассматриваться как величины порядка единицы.

Дальнейшая процедура состоит в подстановке возмущенного решения (15) в граничные условия (9) и (10) и линеаризации их по ϵ с последующим сведением всех членов к простым гармоническим составляющим. Предполагается, что эти условия выполняются при любых значениях x , так что они должны удовлетворяться каждым набором составляющих гармоник при различных волновых числах. В соответствии с этим разделение составляющих приводит к независимым уравнениям для определения коэффициентов $\tilde{\eta}_i$ и $\tilde{\varphi}_i$. Соответствующие вычисления довольно объемисты, но не сложны, поэтому мы их здесь не приводим.

Сначала определим коэффициенты, входящие в выражения (17) и (22) и пропорциональные $a\epsilon_i$. Выделяя в граничных условиях все компоненты с аргументами $(\zeta + \zeta_i)$, т. е. с волновыми числами $(k \pm k_i)$, мы получаем системы двух уравнений для A_i, C_i и B_i, D_i , приближенное решение которых, если пренебречь величинами $O(\alpha, \delta)$, имеет вид

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= 2P, & C_{1,2} &= 2Q, \\ B_{1,2} &= -\frac{1}{2} \frac{K + 2\lambda \operatorname{ch} K \operatorname{sh} K}{K \operatorname{ch} K \operatorname{sh} K - \lambda^2 \operatorname{sh}^2 K}, \\ D_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda K + 2K \operatorname{ch}^2 K}{K \operatorname{ch} K \operatorname{sh} K - \lambda^2 \operatorname{sh}^2 K}. \end{aligned} \quad (24)$$

В соответствии с условием (19) такое приближение оправдано, поскольку эти коэффициенты входят в наши окончательные выражения лишь в виде произведения с выражением $k^2 a^2$. Отметим, что здесь P и Q определяются соотношениями (13), а λ — выражением (18).

Выделим теперь в граничных условиях (9) и (10) компоненты с волновыми числами k_i и возьмем для них приближения до порядка $O(\omega k^2 a^2 \epsilon_i)$ и $O(\omega^2 k a^2 \epsilon_i)$ соответственно. В получаемый результат вносят вклад члены, вычисленные в (24), так как, например, произведение $\sin \zeta \cos(\zeta + \zeta_i)$ дает компоненту $-(1/2) \sin \zeta_i$. На этой стадии большое значение имеет обстоятельство, иллюстрируемое диаграммой из § 2, а именно то, что

$$2\zeta - \zeta_{1,2} = \zeta_{2,1} + \theta,$$

где $\theta = \gamma_1 + \gamma_2$. Таким образом, компоненты с аргументами $2\xi - \xi_i$ дают вклад в окончательные выражения. После ряда преобразований из граничного условия (9) получается пара уравнений:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} \{ \omega_{1,2} (1 - L_{1,2}) + \dot{\gamma}_{1,2} (1 - M_{1,2}) \} \sin \xi_{1,2} + \dot{\epsilon}_{1,2} (1 - N_{1,2}) \cos \xi_{1,2} = \\ = \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 \{ \epsilon_{1,2} R \sin \xi_{1,2} + \epsilon_{2,1} S \sin (\xi_{1,2} + \theta) \}, \end{aligned} \quad (25)$$

где функции

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{2} + (2\Delta + A + B) \operatorname{cth} K + 2C \operatorname{cth} 2K + |D| K^{-1}, \\ S &= \frac{3}{4} + (P + B) \operatorname{cth} K + 2Q \operatorname{cth} 2K + |D| K^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

зависят только от K , а величины A , B , C и $|D|$ определяются выражениями (24). В результате же преобразования условия (10) получаются уравнения

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} \{ \omega_{1,2}^{-1} \{ g k_{1,2} \operatorname{th} (k_{1,2} h) - \omega_{1,2}^2 \} - \dot{\gamma}_{1,2} (1 + N_{1,2}) \} \cos \xi_{1,2} + \\ + \dot{\epsilon}_{1,2} (1 + N_{1,2}) \sin \xi_{1,2} = \\ = \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 \{ \epsilon_{1,2} U \cos \xi_{1,2} + \epsilon_{2,1} V \cos (\xi_{1,2} + \theta) \}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} U &= -\frac{5}{2} + (2\Delta + A + B) \operatorname{th} K - 2C (\operatorname{sh} 2K)^{-1} - |D| K^{-1}, \\ V &= -\frac{5}{4} + (P + B) \operatorname{th} K - 2Q (\operatorname{sh} 2K)^{-1} - |D| K^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Граничным условиям должны независимо удовлетворять две простые гармонические компоненты, сдвинутые друг относительно друга на четверть волны. Следовательно, из каждого уравнения (25) и (27) после отделения членов, содержащих $\sin \xi_i$ и $\cos \xi_i$, получается два уравнения (так что всего их восемь). Путем простого сложения и вычитания можно исключить постоянные L_i , M_i , N_i , так что в результате получатся четыре уравнения с известными параметрами для функций $\epsilon_i(t)$ и $\gamma_i(t)$.

Складывая коэффициенты при $\cos \xi_i$ в (25) с коэффициентами при $\sin \xi_i$ в (27) и, наконец, преобразуя величину $(S - V)$ после подстановки выражений для P , Q , Δ , A , B , C и $|D|$, получим

$$\frac{d\epsilon_{1,2}}{dt} = \left\{ \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 X(K) \sin \theta \right\} \epsilon_{2,1}, \quad (29)$$

где

$$X(K) = \frac{1}{2}(S - V) = \frac{9 - 10 \operatorname{th}^2 K + 9 \operatorname{th}^4 K}{8 \operatorname{th}^4 K} + \frac{4 \operatorname{ch}^4 K + 2 \operatorname{ch}^2 K + 3K \operatorname{cth} K}{\operatorname{ch}^4 K - 2K \operatorname{sh} K \operatorname{ch} K \operatorname{ch} 2K + K^2}. \quad (30)$$

Интеграл системы уравнений (29) имеет вид

$$\varepsilon_{1,2}(t) = \varepsilon_{1,2}(0) \operatorname{ch} \left\{ \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 X \int_0^t \sin \theta dt \right\} + \varepsilon_{2,1}(0) \operatorname{sh} \left\{ \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 X \int_0^t \sin \theta dt \right\}, \quad (31)$$

что вполне подтверждает принятый в § 2 характер поведения системы, а именно то, что амплитуды боковых гармоник неограниченно увеличиваются при $\theta \rightarrow \operatorname{const} (\neq 0, \pi)$.

Из остающихся компонент в уравнениях (25) и (27) мы получим два уравнения:

$$\frac{d\gamma_{1,2}}{dt} = \frac{1}{2} \omega_{1,2}^{-1} \{ gk_{1,2} \operatorname{th}(k_{1,2}h) - \omega_{1,2}^2 \} + \frac{1}{2} \omega k^2 a^2 \left\{ \frac{1}{2} (R - U) + (\varepsilon_{1,2}/\varepsilon_{2,1}) X \cos \theta \right\}, \quad (32)$$

которые можно сложить, чтобы получить одно уравнение для θ . В сумму войдут два множителя вида

$$F = f^2(k_i) - \omega_i^2 = f^2(k_i) - \omega^2 (1 \pm \delta)^2, \quad (33)$$

где

$$f(k_i) = \{ gk_i \operatorname{th}(k_i h) \}^{1/2} \quad (34)$$

представляет собой выражение, даваемое линеаризованной теорией, для частоты в функции волнового числа (ср. уравнение (2) § 2). Учитывая, что $\delta\omega = \kappa k f'(k)$, мы получаем из (33) с точностью до второго приближения, что

$$F = f^2(k) \pm \kappa k f^{2'}(k) + \frac{1}{2} (\kappa k)^2 f^{2''}(k) - \omega^2 (1 \pm \delta)^2 = f^2(k) - \omega^2 - \omega^2 \delta^2 Y(K), \quad (35)$$

где

$$Y(K) = 1 - \frac{1}{2} \frac{f^{2''}(k)}{[f'(k)]^2} = - \frac{k^2 f''(k)}{\lambda^2 f'(k)} = 1 - \frac{8K(1 - K \operatorname{th} K)}{\operatorname{sh} 2K + 2K}, \quad (36)$$

а разность $(f^2(k) - \omega^2)$ может быть определена с точностью до членов $O(\omega^2 k^2 a^2)$ из уравнения (14). Следовательно, после ис-

ключения коэффициента $(R - U)$ из уравнений (32) получим соотношение

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega k^2 a^2 X(K) \left\{ 1 + \frac{e_1^2 + e_2^2}{2e_1 e_2} \cos \theta \right\} - \omega \delta^2 Y(K). \quad (37)$$

Последний член этого выражения эквивалентен правой части уравнения (4); таким образом, мы теперь получили те добавочные члены, упомянутые в § 2, которые представляют нелинейные эффекты, способные препятствовать расстраивающему влиянию дисперсии на боковые полосы.

Условия устойчивости и неустойчивости. Система уравнений (29) и (37) была полностью исследована Бенджаменом и Фейром [1] для случая волн на глубокой воде ($K \rightarrow \infty$), причём решения системы были получены в явном виде. Здесь достаточно дать только сводку основных выводов.

Заметим сначала, что функция $Y(K)$, которая пропорциональна взятой с обратным знаком кривизне кривой, представляющей соотношение между частотой и волновым числом в соответствии с линеаризованной теорией, положительна для всех ненулевых значений K . Для волн на глубокой воде имеем $Y(\infty) = 1$, причём Y уменьшается монотонно до нуля с уменьшением K , т. е. с уменьшением отношения глубины воды h к длине волны $2\pi/k$. Следовательно, рассуждение, изложенное Бенджаменом и Фейром [1], доказывает, что если

$$2k^2 a^2 X(K) < \delta^2 Y(K), \quad (38)$$

то решения $\varepsilon_i(t)$ периодичны и ограничены конечной величиной. Тот факт, что неограниченное увеличение ε_i в этом случае невозможно, очевиден из (31) и (37): первое уравнение показывает, что $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$, если $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, а уравнение (37) показывает, что тогда при соблюдении условия (38) невозможно, чтобы $d\theta/dt \rightarrow 0$. Это условие является, таким образом, условием устойчивости.

С другой стороны, если

$$2k^2 a^2 X(K) > \delta^2 Y(K), \quad (39)$$

то при любом выборе начальных значений (с одним лишь исключением) решения уравнений (29) и (37) обладают при $t \rightarrow \infty$ асимптотическими свойствами:

$$\theta \rightarrow \arccos \{ (\delta^2 Y / k^2 a^2 X) - 1 \} \quad \text{в интервале } (0, \pi), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \exp \left(\frac{1}{2} k^2 a^2 X \sin \theta \omega t \right) = \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2} \delta Y^{1/2} (2k^2 a^2 X - \delta^2 Y)^{1/2} \omega t \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Исключительный случай, который, очевидно, не интересен с физической точки зрения, имеет место тогда, когда начальные значения ε_1 и ε_2 берутся равными, а для $\theta(0)$ принимается значение $\theta(0) = \arccos\{(\delta^2 Y/k^2 a^2 X) - 1\}$, $\pi < \theta(0) < 2\pi$; в этом случае возмущения экспоненциально затухают.

Если неравенство (39) заменить соответствующим равенством, то оказывается, что величины ε_i снова неограниченно асимптотически возрастают, причем это возрастание линейное по времени, а не экспоненциальное. Таким образом, с учетом этого крайнего случая условие неустойчивости имеет вид

$$2k^2 a^2 X(K) \geq \delta^2 Y(K). \quad (42)$$

Теперь мы видим, что устойчивость начального цуга волн определяется в конечном счете знаком величины $X(K)$. Если $X(K) < 0$, то условие устойчивости (38) выполняется для всех значений других параметров, но если $X(K) > 0$, то существует диапазон значений δ , удовлетворяющих условию неустойчивости (42). Вычисляя $X(K)$, согласно выражению (30), мы находим, что

$$\begin{aligned} X(K) > 0 & \text{ при } K > 1,363, \\ X(K) < 0 & \text{ при } K < 1,363. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, стоксов цуг волн на достаточно глубокой воде, а именно когда длина волны меньше $(2\pi/1,363)h = 4,61h$, неустойчив, тогда как цуг, для которого длина волны больше $4,61h$, устойчив. То же критическое значение и его роль в отношении устойчивости были совершенно другим способом установлены Уиземом [15]; приятно отметить прекрасное согласие между двумя теоретическими подходами.

Заметим, что когда $K > 1,363$, все еще остается «значение среза» δ , а именно

$$\delta_c = ka(2X/Y)^{1/2}, \quad (44)$$

при превышении которого не происходит неограниченного возрастания амплитуд боковых гармоник. Иными словами, для неограниченного возрастания боковых гармоник они должны иметь частоты, достаточно близкие к основной частоте, так что изменение амплитуды основного цуга волн должно быть достаточно плавным. Диапазон значений δ , отвечающих неустойчивости $(0, \delta_c)$, сужается до нулевого значения при уменьшении K до 1,363. Заметим также, что скорость асимптотического роста, определяемая выражением (41), максимальна при $\delta = \delta_c/\sqrt{2}$. Это максимальное значение показателя равно

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\max} = \frac{1}{2} k^2 a^2 \omega X(K); \quad (45)$$

оно достигает наибольшей величины для волн на очень глубокой воде ($X=1$) и монотонно убывает до нуля по мере уменьшения K до 1,363.

Наконец, укажем обобщение на случай, когда модуляция исходного цуга волн неоднородна по пространству. При помощи известного рассуждения можно заключить, например, что асимптотическое поведение, определяемое соотношением (41), эквивалентно в более общем случае соотношению

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + c_g \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x} = \left\{ \frac{1}{2} \delta Y^{1/2} (2k^2 a^2 X - \delta^2 Y)^{1/2} \omega \right\} \varepsilon_i. \quad (46)$$

В экспериментах Бенджамена и Фейра [2] боковые гармоники вводились путем модуляции движения волнопродуктора, создающего на одной стороне лотка основной цуг волн; параметры этих гармоник оказываются поэтому примерно стационарными ($\partial \varepsilon_i / \partial t = 0$) и изменяются по мере продвижения по лотку. В соответствии с этим приведенная выше формула была использована для оценки величины $d\varepsilon_i/dx$ и сравнения с измеряемыми скоростями нарастания возмущений по пространству.

4. Обсуждение

Приведенные выше результаты дают, конечно, только первое приближение для параметров неустойчивых возмущений при малых значениях ka и соответственно при малых δ . Однако их теоретическое значение заключается в *точной* представлений этих параметров в предельном случае $ka \rightarrow 0$. Например, соотношение (42) представляет собой *точное* условие неустойчивости стоковых волн ограниченной малой амплитуды на поверхности идеальной жидкости, если допускается, что время намного больше $(\omega k^2 a^2)^{-1}$ (или расстояние намного больше $c_g / \omega k^2 a^2 = \lambda / k^3 a^2$), чтобы неустойчивость успела развиться. На практике, однако, если величина ka достаточно мала, то неустойчивость будет подавлена действием вязкости, поскольку уровень вязкого демпфирования можно считать приближенно независимым от амплитуды. Если механизмы демпфирования и передачи энергии боковым полосам достаточно слабы, то их можно считать, по существу, независимыми. Следовательно, практическое условие неустойчивости имеет, вероятно, вид

$$\frac{1}{2} k^2 a^2 \omega X(K) > \beta, \quad (47)$$

где левая часть неравенства — это максимально возможная скорость нарастания, согласно невязкой модели, определяемая выражением (45), а β — скорость вязкого затухания во времени

(равная произведению c_g на пространственную скорость затухания) для волн весьма малой амплитуды с волновым числом k .

Для волн на глубокой воде экспериментальные результаты Бенджамена и Фейра достаточно хорошо согласуются с предсказаниями теории, не оставляя сомнения в правильности, по существу, описания процесса нарушения устойчивости. Как уже отмечалось, в большинстве опытов дискретные боковые гармоники, имеющие заданное отклонение по частоте δ , создавались одновременно с основным цугом волн путем простого наложения слабой модуляции на возвратно-поступательное движение волнопродуктора. Их начальные амплитуды были примерно одинаковы и очень малы, хотя и достаточно велики для ясного различения возмущений над уровнем помех в системе.

В одном из экспериментов, однако, вначале создавалась лишь одна гармоника; это делалось с целью подтвердить теоретический вывод о том, что другая гармоника возникает затем в результате нелинейного взаимодействия. В другом эксперименте, результаты которого показаны на рис. 2, движение волнопродуктора было сделано по возможности более регулярным без наложения какой-либо модуляции, так что неустойчивость выходящего цуга волн могла развиваться самопроизвольно из фоновых помех. На различных расстояниях по бассейну были расположены емкостные датчики, измеряющие мгновенные значения высоты поверхности воды, и по различным записям высоты в зависимости от времени было измерено развитие параметров возмущения во времени. Обычно наблюдался с увеличением расстояния экспоненциальный рост амплитуды на величину 30 дБ и более. Обширные результаты были получены на небольшом лотке в Кембридже, и еще некоторые данные, согласующиеся в основном с данными первой серии, были получены в значительно больших масштабах на гидроканале № 3 корабельного отделения Национальной физической лаборатории.

На рис. 2 показана пара записей, полученных в НФЛ в эксперименте с основной частотой $\omega/2\pi = 0,85$ гц, длиной волны $2\pi/k = 2,16$ м и $ka = 0,17$. При этом не создавалось никакого искусственного возмущения. Запись, представленная в верхней части рисунка, снималась на расстоянии 60 м от волнопродуктора, а нижняя запись — на расстоянии 120 м. Эти результаты замечательны тем, что на первой записи можно увидеть лишь очень слабые нерегулярности; на второй же видна четко выраженная модуляция амплитуды. Оценка по изменениям среднего периода модуляции дала значение $\delta = 0,15$, которое было подтверждено гармоническим анализом второй записи, давшим высокие пики на боковых частотах в 0,72 и 0,98 гц. Таким образом, оказалось, что пара боковых гармоник возникает явно вслед-

ствии процесса избирательного усиления фоновых помех. Из соотношений (41) или (46) следует, что для волн на глубокой воде ($X=Y=1$) скорость нарастания возмущений максимальна при $\delta=ka$, так что экспериментальное значение $\delta=0,15$ достаточно хорошо согласуется с основным параметром цуга волн $ka=0,17$. Согласие представляется вполне удовлетворительным, если учесть, что теория претендует лишь на первое приближение и что, как известно из других гидродинамических примеров, процесс избирательного усиления может лишь грубо выделить оптимальную гармонику.

В качестве второго примера рассмотрим рис. 4, на котором показаны результаты серии экспериментов в Кембридже; в экспериментах измерялся пространственный рост амплитуд боковых гармоник в зависимости от основной амплитуды при фиксированных значениях основной и боковых частот, а именно при $\omega/2\pi = 2,5$ гц и $\delta = 0,1$. Для получения каждой экспериментальной точки приходилось снимать записи модулированного цуга волн в большом числе точек лотка, а затем по ним оценивать логарифмическую скорость нарастания $d(\ln \epsilon)/d\bar{x}$.

Теория указывает, что для волн на глубокой воде не будет происходить усиления боковых гармоник при заданном значении δ , если величина ka не превосходит $\delta/\sqrt{2}$, что в рассматриваемом случае составляет 0,71. Как видно из графика, это значение среза подтверждается с большой точностью, но для больших значений ka теория дает сильно завышенные по сравнению с наблюдаемыми скорости нарастания. Скорость вязкого демпфирования, согласно измерениям, оказалась равной около 0,01 (в единицах оси ординат на рис. 4); учет этой скорости объясняет лишь примерно треть наблюдаемого расхождения. Остаточное расхождение можно приписать главным образом неточности даваемого теорией первого приближения. Когда в коэффициент X в соотношениях (41) и (46) вводится поправка $O(\delta)$ (ошибка

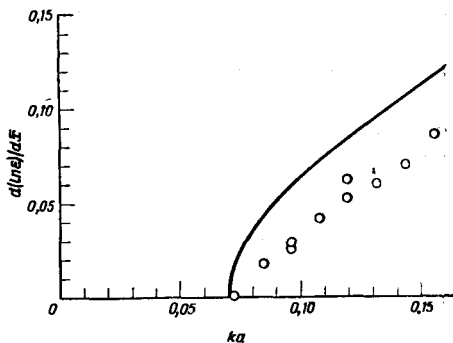


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные значения пространственной скорости роста амплитуд боковых гармоник при $\delta=0,1$, выраженные в зависимости от безразмерной амплитуды основного движения (ka).

По ординате отложена величина $d(\ln \epsilon)/d\bar{x}$, где $\bar{x} = (2\pi)^{-1}kx$ — горизонтальное расстояние в длинах волн. Сплошной линией показан теоретический результат:

$$d(\ln \epsilon)/d\bar{x} = 0,2\pi(2k^2a^2 - 0,01)^{1/2}.$$

в Y составляет только $O(\delta^2 k^2 a^2)$, согласие с экспериментальными результатами сильно улучшается. Однако и без таких поправок сравнение, представленное на рис. 4, заведомо достаточно убедительно, чтобы внушить общую уверенность в правильности теоретического объяснения.

В заключение перейдем от задачи о прямолинейных волнах на воде в каналах постоянного сечения к рассмотрению некоторых других приложений изложенного теоретического подхода. Общее обсуждение в § 2 позволило нам достаточно близко подойти к пониманию рассматриваемого механизма неустойчивости без уточнения характера физической системы; в частности было показано, каким образом «дисперсионную компоненту» определяющего уравнения (37) для фазовой функции θ можно весьма просто получить из соотношения, неявно записываемого в виде $\omega = f(k)$, которое существует между частотой и волновым числом в предельном случае $a \rightarrow 0$.

Поэтому хотелось бы иметь возможность при помощи столь же простого и общего рассуждения получить «нелинейную компоненту» уравнения для θ ; тогда можно было бы вывести универсальный критерий неустойчивости для систем рассматриваемого типа. Автор пытался получить такой критерий, обобщая основные шаги исследования для волн на воде, но ничего простого не получилось. В этой связи нужно отметить, что Лайтхилл [10] дал элегантный и замечательно простой результат, определяющий, будут ли при определенных ограничениях очень плавные изменения параметров туга волн описываться эллиптическим или же гиперболическим уравнениями; и, конечно, в любом частном случае неустойчивость можно считать доказанной, если удастся показать, что эти уравнения эллиптические.

Однако уже упомянутые ограничения, которые требуют сохранения постоянных средних значений зависимых переменных, представляются неестественными для некоторых задач (например, для волн на воде произвольной глубины, но не для случая бесконечной глубины), так что результат Лайтхилла все же не дает общего критерия неустойчивости. Поэтому в настоящее время многое можно узнать путем изучения все возрастающего множества систем, к которым применимы эти теории; особенно важным представляется отыскание таких простых систем, которые поддаются также экспериментальному исследованию.

Вот один из возможных примеров. Бинни [4] сообщил о некоторых удивительных экспериментальных результатах исследования течения воды в открытом канале с волнистыми боковыми стенками. Как можно было ожидать, вследствие волнистости наблюдалось появление стоячих волн в стационарном потоке,

Однако при некоторых условиях эта стационарная картина оказывалась неустойчивой, и в результате возникала и распространялась по потоку регулярная последовательность бегущих волн. Строгий анализ еще не выполнен, но я определенно склоняюсь к тому, чтобы считать это примером неустойчивости рассматриваемого типа. Основное состояние, конечно, сходно со стоковыми волнами, будучи стационарной периодической конфигурацией, относительно которой движется жидкость.

Чтобы познакомить вас с другой перспективной областью приложения, я упомяну, что недавно начал опыты по волнам растяжения конечной амплитуды в длинных резиновых шнурах. У резины то преимущество, что она выдерживает огромные деформации упруго, без заметного пластического течения, так что использование ее обеспечивает проведение легко воспроизводимых экспериментов по волнам большой амплитуды, распространение которых сильно зависит от нелинейных эффектов и частотной дисперсии.

Далее, волны растяжения первой моды Похгаммера — Кри (для которых при не слишком больших волновых числах k продольные смещения приблизительно постоянны по сечению) обладают тем свойством, что фазовая и групповая скорости максимальны при нулевом волновом числе (т. е. $f'(k) \rightarrow kf(k)$, $f''(k) < 0$ при $k \rightarrow 0$). Поэтому для очень длинной волны, возникающей при снятии растяжения (так что сечение расширяется), почти вся энергия заключена в ее первой гармонике, и крутизна передней части волны увеличивается благодаря влиянию амплитуды на местную скорость распространения.

Оба эти свойства аналогичны свойствам волн на мелкой воде; в соответствии с этим было обнаружено, что дисперсия, так же как и для скачка в открытом канале, препятствует образованию ударных волн. Далее, динамические уравнения этой упругой системы можно преобразовать в уравнение Кортевега — де Фриза (см. [14], § 7), которое описывает распространение длинных волн на воде. Поэтому вопрос об устойчивости периодических волн в этой новой системе решается немедленно ссылкой на исследование возмущений, которое Уизем применил к периодическим решениям (т. е. кноидальным волнам) уравнения Кортевега — де Фриза; его результаты показывают, что в обеих физических системах однородные цуги волн устойчивы. Однако для волн растяжения с большими волновыми числами неустойчивость заведомо остается возможной, в частности, ввиду того, что функция $f''(k)$ дважды меняет знак при увеличении k от нуля. (Но при $k \rightarrow \infty$ стационарные цуги волн постоянной амплитуды становятся невозможными, поскольку $f'(k) \rightarrow \text{const}$ и дисперсия волн исчезает.) Заслуживает исследования также

интересная возможность неустойчивости волн изгиба и кручения конечной амплитуды в резиновых шнурах.

Я многим обязан Дж. Фейру, который выполнил эксперименты по неустойчивости волн на глубокой воде. Я благодарен также руководителю корабельного отделения Национальной физической лаборатории Э. Силверлифу за предоставление оборудования опытового бассейна в Фельтхэме, где были выполнены эксперименты, результаты которых показаны на рис. 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B., Feir J. E., The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory, *J. Fluid. Mech.*, **27** (1967), 417.
2. Benjamin T. B., Feir J. E., The disintegration of wave trains on deep water, Part 2. Experiments, *J. Fluid Mech.* (1967).
3. Bowden K. F., Some observations of waves and other fluctuations in a tidal current. Appendix: Surface waves of finite amplitude in water of finite depth, *Proc. Roy. Soc.*, **A 192** (1948), 403.
4. Binnie A. M., Self-induced waves in a conduit with corrugated walls. I. Experiments with water in an open horizontal channel with vertically corrugated sides, *Proc. Roy. Soc.*, **A259** (1960), 18.
5. Korteweg D. J., de Vries G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* (5), **39** (1895), 422.
6. Красовский Ю. П., О существовании аперiodических течений со свободной границей, *ДАН СССР*, **133**, № 4 (1960), 768—770.
7. Красовский Ю. П., К теории установившихся воли конечной амплитуды, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **1**, № 5 (1961), 836—855.
8. Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
9. Levi-Civita T., Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finie, *Math. Ann.*, **93** (1925), 264.
10. Lighthill M. J., Contributions to the theory of waves in non-linear dispersive systems, *J. Inst. Math. Applic.*, **1** (1965), 269.
11. Стокер Дж. Дж., Волны на воде, ИЛ, М., 1959.
12. Stokes G. B., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **8** (1847), 441. (Papers **1**, 197.)
13. Struik D. J., Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal à profondeur finie, *Mat. Ann.*, **95** (1926), 595.
14. Whitham G. B., Non-linear dispersive waves, *Proc. Roy. Soc.*, **A283** (1965), 238.
15. Whitham G. B., Non-linear dispersion of water waves, *J. Fluid Mech.*, **27** (1966), 399.

Обсуждение статьи Т. Б. Бенджамена

К. ХАССЕЛЬМАН

Демонстрация Уиземом и Бенджаменом неустойчивости стоксовой волны по отношению к малым возмущениям частоты и амплитуды чрезвычайно интересна, и я хочу поздравить авторов с прекрасными работами. Ввиду продолжительных попыток доказать математически существование стоксовой волны этот результат представляется выдающимся. Однако этот результат, возможно, менее удивителен в другом аспекте. В любом волновом спектре резонансное нелинейное взаимодействие порождает тенденцию к необратимому равномерному перераспределению энергии волн по всем волновым числам. Поэтому можно ожидать, что узкий спектральный пик будет расширяться. То, что это происходит для гравитационных волн, подтверждено численными расчетами [1]. Это, однако, эквивалентно утверждению, что почти периодическая стоксова волна неустойчива по отношению к передаче энергии в ее боковые полосы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasselmann K., *J. Fluid Mech.*, 15 (1963), 273 (см. примечание на стр. 281).

Описание нелинейных взаимодействий методами теоретической физики (с приложением к образованию волн ветром)

К. ХАССЕЛЬМАН

Метод Фейнмановских диаграмм, пригодный для анализа взаимодействий между волнами случайных волновых полей, обобщается с целью учета некогерентных взаимодействий между волновыми полями и внешними полями. Интерпретация с помощью частиц здесь не приложима, тем не менее выражения переноса можно компактно представить диаграммами «переноса», которые соответствуют диаграммам столкновения в картине частиц. Метод применяется к случаю взаимодействия гравитационных волн с турбулентным атмосферным пограничным слоем. Полный набор диаграмм переноса низшего порядка включает в себя механизмы Филлипса и Майлса образования волн и одну добавочную группу взаимодействий турбулентности с волнами, которая ранее не рассматривалась.

Гипотеза замыкания, привлеченная для вывода выражений переноса, кратко обсуждается в приложении А. Обращается внимание на то, что недавний вывод Бинни и Сафмена выражений переноса без использования обычной гипотезы замыкания противоречит необратимости выражений переноса и потому справедлив лишь на начальной стадии. Соответствующие статистические характеристики зависят от различия между крупнозернистыми и мелкозернистыми распределениями. Это иллюстрируется в приложении Б при обсуждении вопроса о том, являются ли гауссовыми линейные случайные волновые поля.

1. Внутренние и внешние взаимодействия одной волновой системы

Будем рассматривать случайные волновые поля со статистическими характеристиками, слабо меняющимися во времени и в пространстве. Процессы, которые вызывают эти изменения, можно тогда толковать как малые возмущения установившегося состояния свободного поля.

Примером такой системы является совокупность поверхностных гравитационных волн g , внутренних гравитационных волн i и сейсмических волн s в невращающемся стратифицированном океане конечной глубины (рис. 1). Полное движение океана состоит из волновых движений и остаточного горизонтального сдвигового течения h .

Будем также рассматривать взаимодействие между океаном и атмосферой, в которой, как мы предполагаем, имеется среднее течение m и пульсационное турбулентное течение f . Среднее течение не зависит от времени t и горизонтального координат-

ного вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Аналогично турбулентное течение считается стационарным и однородным по отношению к \mathbf{x} .

В качестве дополнительных полей можно рассматривать физические неоднородности типа придонной неоднородности b . Эти поля также предполагаются случайными и однородными по \mathbf{x} .

Совокупность волновых полей g, i, s составляет по определению *волновую систему*. Взаимодействия с волновой системой можно разбить на два класса: *внутренние* взаимодействия (между волнами), которые затрагивают только волновые компоненты, и *внешние* взаимодействия, затрагивающие по крайней мере одно из неволновых полей h, m, f или b ¹⁾. Будем предполагать, что энергия и импульс волновой системы сохраняются только внутренними взаимодействиями, но не внешними. Неконсервативные взаимодействия между волновыми компонентами будут формально рассматриваться как внешние взаимодействия.

Взаимодействия между волнами впервые детально рассматривались в основополагающей статье Пайерлса [18] по теплопроводности твердых тел. С тех пор они интенсивно исследовались в теории твердого тела и других областях физики, в частности в квантовой полевой теории рассеяния. Литвак [15] применил эту теорию к плазменным волновым взаимодействиям. Рассеяние в геофизических полях вызвало недавно интерес благодаря работам Филлипса [20], Хассельмана [6, 7], Бинни [2], Лонге-Хиггинса [16] и др. Применение общих представлений, развитых в теории твердого тела и квантовой теории поля, к геофизическим задачам рассеяния описано в работе Хассельмана [9].

В предлагаемой статье мы рассмотрим главным образом обобщение этих представлений для того, чтобы учесть внешние взаимодействия. В качестве приложения обобщенной теории рассмотрим взаимодействия между поверхностными гравитационными волнами и атмосферным пограничным слоем. Теория с полным набором взаимодействий низшего порядка, как будет

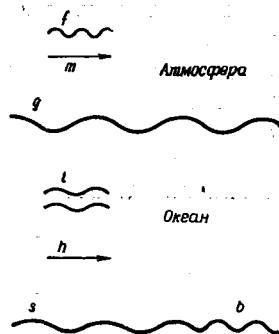


Рис. 1. Волновые и «внешние» поля для стратифицированного океана постоянной глубины.

Волновая система: поверхностные гравитационные волны g , внутренние гравитационные волны i , сейсмические волны s . *Внешние поля:* среднее течение в пограничном слое m , турбулентные пульсации f , горизонтальное сдвиговое течение h , нерегулярность дна b .

¹⁾ Поля h и b можно также рассматривать как вырожденные волновые поля с нулевой частотой [9].

показано, содержит в себе теории образования волн Майлса и Филлипса [17, 19] и дополнительный набор взаимодействий турбулентных волн, которые прежде не рассматривались, но которые, по-видимому, могут быть главным источником волновой энергии.

2. Уравнения движения

а) Внутренние взаимодействия. Предположим, что состояние волновой системы можно описать совокупностью координат q_k^v , которые в линейном приближении представляют собой амплитуды нормальных мод собственных функций $\Phi_k^v(z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, где z — вертикальная координата, \mathbf{k} — горизонтальный волновой вектор.

Пусть эволюция волновой системы без внешних взаимодействий описывается лагранжианом

$$L(q_k^v, \dot{q}_k^v) = L_2 + L_3 + L_4 + \dots, \quad (2.1)$$

$$L_2 = \sum_{\mathbf{k}, v} \frac{1}{2} (\dot{q}_k^v \dot{q}_{-\mathbf{k}}^v - (\omega_k^v)^2 q_k^v q_{-\mathbf{k}}^v),$$

где L_2 — лагранжиан линейной системы, а L_3, L_4, \dots — однородные лагранжианы взаимодействия третьего, четвертого и т. д. порядков однородности по координатам. Лагранжиан L_2 описывает систему свободных осцилляторов. Он определяется единственным образом (с точностью до множителей нормировки) инвариантностью системы относительно горизонтальных переносов и отражений. Для удобства обозначения вектор \mathbf{k} трактуется в (2.1) как дискретная переменная, хотя позднее будет рассмотрен также предельный случай непрерывного спектра. Лагранжианы взаимодействия описывают нелинейную связь. Ряд примеров процессов рассеяния в океаническом волноводе имеется в работе [9].

Уравнения движения можно переписать в более удобной форме, вводя функцию Гамильтона

$$H = \sum p_k^v \dot{q}_k^v - L, \quad p_k^v = \partial L / \partial \dot{q}_k^v$$

и переходя затем от канонических переменных к нормальным переменным

$$a_k^v = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{-\mathbf{k}}^v - i\omega_k^v q_k^v), \quad (2.2)$$

$$a_{\mathbf{k}}^{-v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{-\mathbf{k}}^v + i\omega_k^v q_k^v).$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\dot{a}_k^v = -i\omega_k^v \frac{\partial H}{\partial a_{-k}^{-v}} \quad (v \geq 0). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) справедливо для положительного и отрицательного индекса v , если для отрицательных индексов мы определим

$$\omega_k^{-v} = -\omega_k^v.$$

Тогда выражение гамильтониана принимает вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad H_2 = \sum \frac{1}{2} (a_k^v a_{-k}^{-v}), \quad (2.4)$$

а для $n \geq 3$ имеем

$$H_n = \sum D_{k_1 \dots k_n}^{v_1 \dots v_n} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_n}^{v_n}, \quad (2.5)$$

где $D_{k_1 \dots k_n}^{v_1 \dots v_n}$ — постоянные симметричные коэффициенты взаимодействия.

Вещественность гамильтониана H приводит к условиям

$$a_{-k}^{-v} = (a_k^v)^*, \quad (2.6)$$

$$D_{-k_1 \dots -k_n}^{-v_1 \dots -v_n} = (D_{k_1 \dots k_n}^{v_1 \dots v_n})^*, \quad (2.7)$$

а однородность поля — к дополнительному условию

$$D_{k_1 \dots k_n}^{v_1 \dots v_n} = 0 \quad \text{при} \quad k_1 + \dots + k_n \neq 0. \quad (2.8)$$

Уравнения движения (2.3) записываются явно в виде

$$\begin{aligned} \dot{a}_k^v + i\omega_k^v a_k^v = & -3i\omega_k^v \sum D_{-kk_1 k_2}^{-vv_1 v_2} a_{k_1}^{v_1} a_{k_2}^{v_2} - \dots \\ & \dots - (p+1) i\omega_k^v \sum D_{-kk_1 \dots k_p}^{-vv_1 \dots v_p} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_p}^{v_p}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение линеаризованного уравнения (2.9) без членов взаимодействия имеет форму

$$i\dot{a}_k^v = A_k^v \exp\{-i\omega_k^v t\}, \quad A_k^v = \text{const}. \quad (2.10)$$

б) Внешние взаимодействия. Взаимодействия с внешними полями можно легко включить в вышеприведенный формализм. Предположим, что внешние поля описываются совокупностью переменных $b_k^\mu(t)$, где по аналогии с линейным волновым решением (2.10)

$$b_k^\mu(t) = B_k^\mu \exp\{-i\omega_k^\mu t\}, \quad B_k^\mu = \text{const}. \quad (2.11)$$

Здесь обобщенный индекс μ может быть дискретным, непрерывным или комбинацией того и другого.

Например, если внешним полем является однородная случайная нерегулярность δH глубины океана H , то мы можем написать

$$\delta H(\mathbf{x}) = \sum B_k \exp\{ik \cdot \mathbf{x}\}, \quad B = \text{const},$$

так что $\mu = \text{const}$, $\omega_k^\mu = 0$.

Если внешнее поле — стационарное горизонтальное однородное турбулентное поле скорости $u_i(\mathbf{x}, z, t)$, то мы можем написать

$$u_i = \sum_{k, \omega} U_i(k, \omega, z) \exp\{i(k \cdot \mathbf{x} + \omega t)\}, \quad (2.12)$$

так что $\mu \equiv (i, z, \omega)$, $\omega_k^\mu \equiv -\omega$.

Условие вещественности, соответствующее уравнению (2.6), имеет вид

$$b_k^\mu = (b_k^\mu)^*, \quad (2.13)$$

где $\bar{\mu}$ — сопряженный μ индекс, для которого

$$\omega_k^{\bar{\mu}} = -\omega_k^\mu.$$

Например, в случае турбулентного поля

$$\mu \equiv (i, z, \omega), \quad \bar{\mu} \equiv (i, z, -\omega).$$

Предположим теперь, что внешние взаимодействия могут быть разложены таким же способом, как и внутренние взаимодействия, в степенной ряд. В этом случае уравнения движения, включающие внутренние и внешние взаимодействия, имеют общую форму:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k^v + i\omega_k^v a_k^v &= -3i\omega_k^v \sum D_{-kk_1k_2}^{-vv_1v_2} a_{k_1}^{v_1} a_{k_2}^{v_2} \dots \\ &\dots - i(p+1)\omega_k^v \sum D_{-kk_1 \dots k_p}^{-vv_1 \dots v_p} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_p}^{v_p} \dots \\ &\dots - 2i\omega_k^v \sum E_{-kk_1}^{-vv_1} a_{k_1}^{v_1} \dots - 2i\omega_k^v \sum E_{-kk}^{-v\mu} \theta_k^\mu \dots \\ &\dots - i(p+1)\omega_k^v \sum E_{-kk_1 \dots k_q}^{-vv_1 \dots v_q} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_q}^{v_q} b_{k_{q+1}}^{\mu_{q+1}} \dots b_{k_p}^{\mu_p} \dots, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где E_{\dots} — коэффициенты внешнего взаимодействия. Эти коэффициенты удовлетворяют условиям вещественности и однородности

$$E_{-k-k_1 \dots -k_q - k_{q+1} \dots -k_p}^{-v_1 \dots v_q \mu_{q+1} \dots \mu_p} = \left(E_{-kk_1 \dots k_q k_{q+1} \dots k_p}^{-vv_1 \dots v_q \mu_{q+1} \dots \mu_p} \right)^*, \quad (2.15)$$

$$E_{k_1 k_2 \dots k_q k_{q+1} \dots k_p}^{v_1 v_2 \dots v_q \mu_{q+1} \dots \mu_p} = 0 \quad \text{при} \quad k_1 + \dots + k_p \neq 0, \quad (2.16)$$

аналогичным условиям (2.7) и (2.8). Но в противоположность коэффициентам внутреннего взаимодействия D_{\dots} они не связаны с гамильтонианом и поэтому не обладают симметрией по всем индексам. В этом главное различие между внутренними и внешними взаимодействиями.

3. Диаграммы взаимодействия

Предположим, что решения первого порядка a_k^v и внешние поля b_k^μ имеют порядок $O(\alpha)$, где $\alpha \ll 1$. Коэффициенты внутренней связи $D_{k_1 \dots k_n}^{v_1 \dots v_n}$ будут иметь по предположению порядок $O(1)$, а коэффициенты внешней связи $E_{-kk_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_q}^{-vv_1 \dots v_p \mu_{p+1} \dots \mu_q}$ — порядок $O(\beta)$ или менее при $\beta \ll 1$.

Тогда решение уравнений (2.14) можно построить с помощью разложения волновых полей в ряд теории возмущений

$$a_k^v = {}_1 a_k^v + {}_2 a_k^v + \dots, \quad (3.1)$$

где ${}_n a_k^v = O(\alpha^n)$. Каждый член возмущения ${}_n a_k^v$ можно дальше разложить по β , но мы не будем делать этого в явном виде.

Упорядочение по параметрам α и β применимо к океану, но не в наиболее общем случае. Более последовательная процедура должна использовать многопараметрическое разложение, при котором каждое поле и коэффициент связи характеризуются отдельным параметром. Однако это громоздко и не является в действительности необходимым, так как неявную зависимость от индивидуальных параметров можно легко установить в ходе анализа.

Подставляя разложение (3.1) в уравнение движения (2.14), собирая вместе члены n -го порядка и интегрируя, получаем соотношение

$${}_n a_k^v = \int_0^t \left\{ \dots - i(p+1) \omega_k^v \sum_{\substack{(n_1 + \dots + n_q =) \\ = n + p - q}} E_{-kk_1 \dots k_q k_{q+1} \dots k_p}^{-vv_1 \dots v_p \mu_{q+1} \dots \mu_p} a_{k_1}^{v_1}(t') \dots \dots a_{k_q}^{v_q}(t') b_{k_{q+1}}^{\mu_{q+1}}(t') \dots b_{k_p}^{\mu_p}(t') \dots \right\} \exp[-i\omega_k^v(t-t')] dt'. \quad (3.2)$$

Мы предположили, что линейное решение (2.10) выбирается таким образом, чтобы строго удовлетворить начальным условиям $a_k^v(0) = A_k^v$, так что ${}_n a_k^v(0) = 0$ при $n \geq 2$. Уравнение (3.2) можно разрешить последовательно для различных n , поскольку

в правую часть входят члены возмущения только порядков, меньших n .

Удобно выразить структуру решения, определяемого выражением (3.2), в более компактной форме с помощью диаграмм взаимодействия. Будем обозначать волновые компоненты a_k^v при $v > 0$ и компоненты внешнего поля b_k^μ при $\omega_k^\mu > 0$ стрелками, равными \mathbf{k} (рис. 2). Комплексно сопряженные («анти»)компоненты $a_{-\mathbf{k}}^{-v}$ ($v > 0$) и $b_{-\mathbf{k}}^\mu$ ($\omega_k^\mu > 0$) обозначаются перечеркнутыми стрелками, равными \mathbf{k} . Тем самым члены с положительной частотой связаны с «компонентами», члены с отрицательной

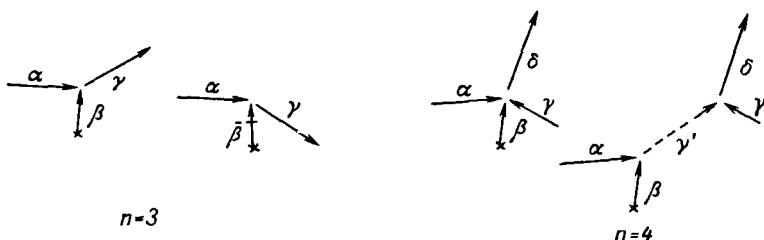


Рис. 2. Примеры диаграмм взаимодействия для возмущений 3-го и 4-го порядка.

Внешние поля обозначаются крестиками, антикомпоненты — поперечными черточками, а виртуальные компоненты — штриховыми линиями.

частотой — с «антикомпонентами». Это соглашение о знаке таково, что в обоих случаях стрелки указывают направление распространения волн. Внешние поля отличаются от волновых полей крестиком у основания стрелок (см. рис. 2).

Вклад общего члена соотношения (3.2) в амплитуду возмущения $n a_k^v$, т. е.

$$\delta_n a_k^v = -i(p+1) \omega_k^v \int_0^t E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_q \mathbf{k}_{q+1} \dots \mathbf{k}_p}^{-v\nu_1 \dots \nu_q \mu_{q+1} \dots \mu_p} n_1 a_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1}(t') \dots$$

$$\dots n_q a_{\mathbf{k}_q}^{\nu_q}(t') b_{\mathbf{k}_{q+1}}^{\mu_{q+1}}(t') \dots b_{\mathbf{k}_p}^{\mu_p}(t') \exp\{-i\omega_k^v(t-t')\} dt',$$

представляется p стрелками $n_1 a_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} \dots b_{\mathbf{k}_p}^{\mu_p}$, входящими в вершину, и одной стрелкой $\delta_n a_k^v$, выходящей из этой вершины (см. рис. 2). Вследствие условий однородности (2.8) и (2.15) векторная сумма компонент за вычетом антикомпонент, входящих в вершину, равна компоненте (или с минусом антикомпоненте), выходящей из вершины.

При последовательном представлении компонент, входящих в вершину, через компоненты более низкого порядка компо-

нента $\delta_n a_k^v$ может быть изображена каскадной диаграммой с n входами первого порядка и одним выходом. При этом компонента $n a_k^v$ задается суммой всевозможных каскадных диаграмм с n входами первого порядка.

Решение (3.2) представляет собой отклик линейного осциллятора на суперпозицию синусоидальных вынуждающих членов. Поэтому оно также является суперпозицией синусоидальных колебаний. Обычно эти колебания малы. Однако отклик велик, когда частота воздействия близка к резонансной частоте, и неограниченно растет со временем, когда имеет место резонанс. В диаграммной системе обозначений резонанс имеет место тогда, когда частота некоторой компоненты на диаграмме равна сумме частот какого-нибудь набора компонент более низкого порядка, которые порождают эту компоненту (частоты антикомпонент считаются отрицательными). Мы будем обозначать резонансные, свободные, компоненты на диаграмме сплошными линиями. Нерезонансные, виртуальные, компоненты будут обозначаться штриховыми линиями. Свободные компоненты удовлетворяют двум условиям:

$$s_k = \sum_j s_j k_j, \quad (3.3)$$

$$s\omega = \sum_j s_j \omega_j \quad (s, s_j = \pm 1), \quad (3.4)$$

где суммы в правых частях берутся по совокупностям входящих компонент более низкого порядка. Виртуальные компоненты удовлетворяют только первому условию.

4. Перенос энергии внутренними взаимодействиями

Резонансные возмущения описывают перенос энергии между волновыми компонентами по аналогии с явлением биения линейных связанных настроенных осцилляторов. Если поля состоят из конечного числа дискретных компонент, то эволюцию полей можно определить, переписывая вековые члены в разложении возмущения как скорость медленного изменения волновых амплитуд во времени [1, 2, 4]. Для случайных полей мы будем интересоваться эволюцией спектра. Мы примем здесь, по существу, тот же самый подход: сначала определим из уравнений возмущений вековые члены разложения возмущений для спектра, затем перепишем их как скорость изменения медленно меняющегося спектра. (Между этими двумя случаями находится задача о рассеянии отдельной волны случайными полями [5, 26]. Наша теория дает соотношения интенсивностей для этой задачи, но не флуктуации фазы.)

Линейная волновая система статистически вполне определяется заданием спектра энергии

$$F_k^v = \frac{1}{2} \langle a_k^v a_{-k}^{-v} \rangle \quad (= \text{const}), \quad (4.1)$$

где ломаные скобки обозначают величины, осредненные по ансамблю. Это справедливо в смысле крупнозернистого распределения (см. приложение Б). Волновые поля являются гауссовыми и поэтому определяются корреляционной матрицей $\langle a_k^v a_k^\mu \rangle$. К тому же они стационарны, так что отличны от нуля лишь диагональные члены $\langle a_k^v a_k^{-v} \rangle$. Энергия линейного поля v есть

$$E_2^v = H_2^v = \sum_k (F_k^v + F_k^{-v}) = 2 \sum_k F_k^v. \quad (4.2)$$

Чтобы определить эволюцию спектра в нелинейном случае, мы разложим F_k^v в ряд теории возмущений

$$F_k^v = 2F_k^v + 3F_k^v + 4F_k^v + \dots,$$

где

$$2F_k^v = \frac{1}{2} \langle a_{k_1}^v a_{-k}^{-v} \rangle = \text{const}, \quad (4.3)$$

$$3F_k^v = \mathcal{R} \langle a_{k_1}^v a_{-k}^{-v} \rangle, \quad (4.4)$$

$$4F_k^v = \frac{1}{2} \langle a_{k_2}^v a_{-k}^{-v} \rangle + \mathcal{R} \langle a_{k_1}^v a_{-k}^{-v} \rangle. \quad (4.5)$$

Возмущения спектра можно выразить через известные линейные амплитуды a_k^v , подставляя решения (3.2) в выражения (4.3) — (4.5).

Удерживая лишь члены, зависящие от коэффициентов внутренней связи $D_{k_1 \dots k_p}^{v_1 \dots v_p}$, получаем

$$3F_k^v = \mathcal{R} \left\{ -3i\omega \sum D_{kk_1k_2}^{-vv_1v_2} \langle A_{-k}^{-v} A_{k_1}^{v_1} A_{k_2}^{v_2} \rangle \Delta_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) \right\}, \quad (4.6)$$

$$4F_k^v = \frac{9}{2} \omega^2 \sum D_{kk_1k_2}^{-vv_1v_2} D_{k-k_3-k_4}^{v-v_3-v_4} \langle A_{k_1}^{v_1} A_{k_2}^{v_2} A_{-k_3}^{-v_3} A_{-k_4}^{-v_4} \rangle \Delta_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) \times \\ \times \Delta_1^*(\omega - \omega_3 - \omega_4) + \mathcal{R} \left\{ \sum -18\omega\omega_4 D_{kk_3k_4}^{-vv_3v_4} D_{-k_1k_1k_2}^{-v_1v_1v_2} \times \right. \\ \times \langle A_{-k}^{-v} A_{k_1}^{v_1} A_{k_2}^{v_2} A_{k_3}^{v_3} \rangle \Delta_2(\omega - \omega_3 - \omega_4, \omega_4 - \omega_1 - \omega_2) \left. \right\} + \\ + \mathcal{R} \left\{ \sum -4i\omega D_{kk_1k_2k_3}^{-vv_1v_2v_3} \langle A_{-k}^{-v} A_{k_1}^{v_1} A_{k_2}^{v_2} A_{k_3}^{v_3} \rangle \Delta_1(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right\}, \quad (4.7)$$

где

$$\Delta_1(\omega) = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega t} - 1), \quad (4.8)$$

$$\Delta_2(\omega, \omega') = \frac{\Delta_1(\omega + \omega') - \Delta_1(\omega)}{i\omega'}. \quad (4.9)$$

Здесь мы ввели сокращенное обозначение $\omega \equiv \omega_k^v$, $\omega_j \equiv \omega_{k_j}^{v_j}$.

Каждый член в соотношениях (4.6) и (4.7) представляет собой квадратичное произведение двух компонент возмущений. Структура различных членов показана в диаграммном обозначении на рис. 3.

Спектральные возмущения включают в себя средние произведения трех или более начальных амплитуд A_k^v . Мы будем предполагать, что вначале поля стационарны и гауссовы. Тогда

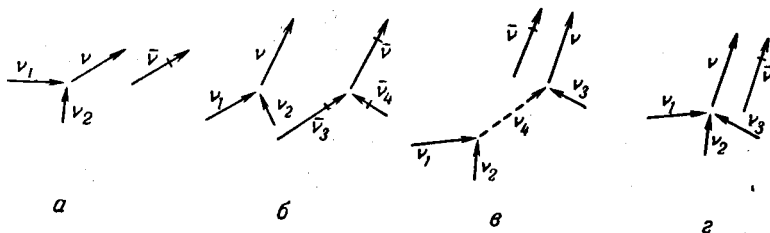


Рис. 3. Диаграммы взаимодействия для спектральных возмущений ${}_3F_k^v$ (уравнение (4.6)) и ${}_4F_k^v$ (уравнение (4.7)).

Диаграмма (а) изображает правую часть уравнения (4.6), диаграммы (б), (в) и (г) изображают 1-й, 2-й и 3-й члены соответственно в правой части уравнения (4.7).

осредненные произведения можно выразить через начальный спектр ${}_2F_k^v$. Предположение кажется разумным, так как линейные поля стремятся к гауссовому стационарному состоянию, а нелинейные взаимодействия являются слабыми. Основания для этой гипотезы мы обсудим позже более детально.

Для гауссового начального поля кубический член ${}_3F_k^v$ обращается в нуль. Вклад в возмущения четвертого порядка ${}_4F_k^v$ дают лишь члены, в которых четыре амплитуды $A_{k_i}^v$ можно разбить на две комплексно сопряженные пары. Это приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 {}_4F_k^v = & 36\omega^2 \sum_{\substack{k_1, k_2 \\ v_1, v_2 \cong 0}} {}_2F_{k_1}^{v_1} {}_2F_{k_2}^{v_2} |D_{-kk, k_1 k_2}^{-v v_1 v_2}|^2 |\Delta_1(\omega - \omega_1 - \omega_2)|^2 - \\
 & - 72\omega {}_2F_k^v \sum_{\substack{k_1 \\ v_1, v' \cong 0}} {}_2F_{k_1}^{v_1} \omega' \mathcal{R} \{ D_{-k-k, k_1 k+k}^{-v-v, v'v'} D_{-k-k, k_1 k_1}^{-v'v v_1} \Delta_2(\omega + \omega_1 - \omega', \\
 & - \omega - \omega_1 + \omega') \} - 32\omega {}_2F_k^v \sum_{k_1, v_1 \cong 0} {}_2F_{k_1}^{v_1} \mathcal{R} \{ i D_{-kk, k-k, k_1}^{-v v_1 v_1} \Delta_1(0) \}, \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

где

$$\omega' \equiv \omega_{k+k_1}^{v'}$$

Диаграммы, соответствующие трем членам правой части выражения (4.10), показаны на рис. 4. Мы предполагаем, что

коэффициенты взаимодействия обращаются в нуль, когда одно из волновых чисел обращается в нуль, что исключает одну из трех возможных пар комбинаций для второго и третьего членов.

Для больших значений t главные вклады дают вековые члены, появляющиеся из-за резонансных взаимодействий. Они

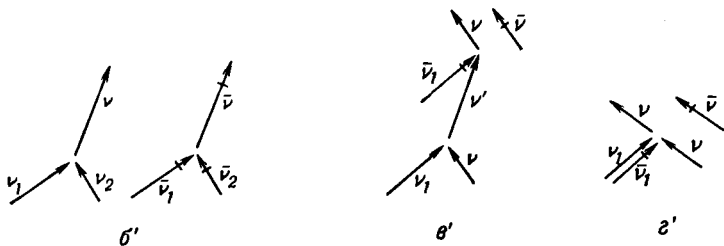


Рис. 4. Диаграммы взаимодействия спектрального возмущения ${}_4F_k^v$ при начальном гауссовом поле, уравнение (4.10).

Диаграммы (б'), (в') и (г') соответствуют 1-му, 2-му и 3-му членам уравнения (4.10); частота v' на диаграмме (б') выбиралась как резонансная компонента.

определяются асимптотическим поведением функций отклика Δ_1 и Δ_2 , а именно

$$|\Delta_1(\omega)|^2 \rightarrow 2\pi t \delta(\omega), \quad (4.11)$$

$$\Delta_2(\omega, -\omega) \rightarrow t(\pi \delta(\omega) + iP(1/\omega)). \quad (4.12)$$

Соотношение (4.12) является сокращенной записью следующего соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2(\omega, -\omega) f(\omega) d\omega \rightarrow t \left(\pi f(0) + iP \int \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right),$$

которое справедливо для любой непрерывной функции $f(\omega)$.

При вычислении асимптотического выражения ${}_4F_k^v$ с помощью (4.11) и (4.12) заметим следующее:

а) Из-за симметрии коэффициентов связи D_{\dots} и условия вещественности (2.7) вещественная часть выражения $\{ \dots \}$ во втором члене в соотношении (4.10) включает только δ -функцию от Δ_2 .

б) Вещественность гамильтониана взаимодействия H_4 влечет за собой вещественность коэффициента $D_{\mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1}^{-v v - v_1 v_1}$. Таким образом, третий член в (4.10) обращается в нуль. Оба эти свойства присущи только внутренним взаимодействиям.

Асимптотические соотношения (4.11) и (4.12) приводят к следующему выражению:

$${}_4F_{\mathbf{k}}^{\nu} = tI({}_2F_{\mathbf{k}'}^{\nu}),$$

где I — квадратичный интегральный оператор, действующий на совокупность начальных спектров ${}_2F_{\mathbf{k}'}^{\nu}$. Если спектры считаются меняющимися функциями, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\partial F_{\mathbf{k}}^{\nu} / \partial t = I(F_{\mathbf{k}'}^{\nu})$$

или в явном виде

$$\frac{\partial n_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = \sum_{\nu_1, \nu_2 > 0} \int \int \{T_+(n_1 n_2 - n n_1 - n n_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + 2T_-(n_1 n_2 + n n_1 - n n_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega)\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (4.13)$$

где

$$T_+ = 72\pi\omega\omega_1\omega_2 |D_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2}|^2, \quad (4.14)$$

$$T_- = 72\pi\omega\omega_1\omega_2 |D_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2}|^2 \quad (4.15)$$

и $n_{\nu}(\mathbf{k}) = F_{\nu}(\mathbf{k}) / \omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$. Мы ввели непрерывный спектр, согласно обозначению

$$\sum F_{\mathbf{k}}^{\nu} \rightarrow \int F_{\nu}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Уравнение (4.13), в силу квадратичной связи, представляет собой уравнение переноса энергии наимизшего порядка. Оно было впервые получено Пайерлсом [18] для взаимодействующих колебаний решетки в твердом теле. В некоторых случаях, например для поверхностных гравитационных волн наимизшего порядка, резонансные условия имеют лишь тривиальные решения, и необходимо выполнить расчет до членов более высокого порядка [7]. Получающиеся выражения переноса аналогичны по структуре уравнению (4.13), но содержат вместо квадратичных кубические спектральные произведения [9].

Эти выражения переноса пригодны для всех моментов времени при условии, что основная гипотеза, согласно которой поля могут считаться приближенно гауссовыми, остается справедливой. Как показано Пригожиным [28], это имеет место в том случае, когда поля были первоначально строго гауссовыми, и гипотеза о том, что поля являются гауссовыми, применяется лишь для *дальнейшего* изменения полей во времени.

Бинни и Сафмен [3] показали, что указанная гипотеза не является необходимой, если кумулянты предполагаются гладкими функциями волновых чисел. Однако в приложении А показы-

вається, що це припущення суперечить необратимості виражень переносу. Кумулянти старого поля суть функції з швидкими мелкомасштабними флуктуаціями (см. додаток Б).

5. Перенос енергії зовнішніми взаємодіями

В цьому параграфі ми будемо припускати, що поля статистично стаціонарні однорідні і ортогональні, т. є.

$$\langle b_{\mathbf{k}}^{\mu}(t+\tau) b_{\mathbf{k}'}^{\mu'}(t) \rangle = 0 \quad \text{при } \mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0 \quad \text{или } \mu' \neq \mu,$$

$$\langle b_{\mathbf{k}}^{\mu}(t+\tau) b_{-\mathbf{k}}^{\mu}(t) \rangle = 2G_{\mathbf{k}}^{\mu} \exp\{-i\omega_{\mathbf{k}}^{\mu}\tau\},$$

де

$$G_{\mathbf{k}}^{\mu} = \frac{1}{2} \langle B_{\mathbf{k}}^{\mu} B_{-\mathbf{k}}^{\mu} \rangle = \text{const.} \quad (5.1)$$

Ми вводимо умову ортогональності для простоти викладок. Произвольне представлення, взагалі кажучи, не буде приводити до ортогональних компонентів зовнішнього поля. Наприклад, турбулентні компоненти $U_i(\mathbf{k}, \omega, z)$ представлення (2.12) не задовольняють умові

$$\langle U_i(\mathbf{k}, \omega, z) U_j(-\mathbf{k}, -\omega, z') \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad \text{или } z \neq z'.$$

Ортогональності можна досягти переходом до нового представлення. Ми не будемо цього робити, а просто відзначимо, що, коли використовується неортогональне представлення, вираження виду $\sum_{\mu} G_{\mathbf{k}}^{\mu}$ замінюються вираженнями $\sum_{\mu\mu'} K_{\mathbf{k}}^{\mu\mu'} G_{\mathbf{k}}^{\mu\mu'}$, де $G_{\mathbf{k}}^{\mu\mu'} = \frac{1}{2} \langle b_{\mathbf{k}}^{\mu} b_{-\mathbf{k}}^{\mu'} \rangle$ і $K_{\mathbf{k}}^{\mu\mu'}$ — матриця коефіцієнтів.

В подальшому будемо припускати, що лінійні хвильові поля і зовнішні поля статистично незалежні. Це можна встановити в сенсі крупнозернистого розподілу з допомогою деякого узагальнення аналізу, виконаного в додатку Б.

а) Лінійні взаємодії. Рівняння лінійної взаємодії

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^{\nu} + i\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} a_{\mathbf{k}}^{\nu} = -2i\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \sum_{\mu} E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\mu} b_{\mathbf{k}}^{\mu} \quad (5.2)$$

можна розв'язати точно, без розкладання в ряд теорії збурень. В загальній теорії права частина рівняння (5.2) повинна тим не менше вважатися малим збуренням (т. є. $E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\mu} = O(\beta)$ при $\beta \ll 1$), оскільки аналіз взаємодій вищих порядків ґрунтується на розв'язку типу вільної хвилі однорідного рівняння.

Решение уравнения (5.2)

$$a_{\mathbf{k}}^{\nu} = -2i\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \sum_{\mu} E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\mu} B_{\mathbf{k}}^{\mu} \Delta_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} - \omega_{\mathbf{k}}^{\mu}) \exp\{-i\omega_{\mathbf{k}}^{\mu} t\}$$

приводит к спектру, который линейно растет во времени (уравнение (4.11)). В соответствии с предыдущим мы можем записать это в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial F_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = 8\pi (\omega_{\mathbf{k}}^{\nu})^2 \sum_{\mu} |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\mu}|^2 G_{\mu}(\mathbf{k}) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} - \omega_{\mathbf{k}}^{\mu}), \quad (5.3)$$

где мы использовали обозначения для непрерывного спектра

$$\sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}}^{\mu} \rightarrow \int G_{\mu}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Неконсервативные линейные волновые взаимодействия

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^{\nu} + i\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} a_{\mathbf{k}}^{\nu} = -2i\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \sum_{\nu'} E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\nu'} a_{\mathbf{k}}^{\nu'} \quad (5.4)$$

дают незначительно отличающееся выражение. Умножая уравнение (5.4) на $a_{-\mathbf{k}}^{-\nu}$, складывая результат с комплексно сопряженным уравнением и осредняя, получаем

$$\frac{\partial F_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = 4\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \oint (E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}^{-\nu\nu'}) F_{\nu}(\mathbf{k}). \quad (5.5)$$

Теории Филлипса и Майлса [19, 17] образования волн ветром (см. ниже § 7) представляют собой примеры процессов переноса вида (5.3) и (5.5).

б) Нелинейные взаимодействия между волнами и внешними полями. Анализ нелинейных внешних взаимодействий аналогичен анализу взаимодействий между волнами, за исключением некоторых дополнительных видоизменений. Видоизменения связаны с тем, что свойства (а) и (б), которые позволяют получить из уравнения (4.10) простое выражение переноса (4.13), здесь не приложимы.

Осложнение возникает также и в том случае, если выражения, соответствующие уравнениям (4.6) и (4.7), содержат более двух компонент внешнего поля. Хотя волновые поля можно считать гауссовыми, а волновые и внешние поля статистически независимыми, внешние поля, вообще говоря, не будут гауссовыми. Следовательно, осредненные произведения, содержащие больше двух компонент внешнего поля, нельзя свести к спектру внешнего поля. Это соображение не является основной трудностью, так как статистическую структуру внешних полей можно предполагать известной, но оно ведет к более сложным выражениям переноса. Однако во многих случаях гипотеза о том,

что поля гауссовы, может все же использоваться для оценки порядка величины переноса энергии (например, при порождении звука турбулентностью, см. [14]). Так как в дальнейшем нам не понадобятся точные выражения, предположим здесь для простоты, что внешние поля так же гауссовы. Это означает, что последующие выражения не являются строго правильными, как только появляются произведения двух спектров внешнего поля (уравнение (5.8)). Другие выражения не зависят от этого предположения.

Удобно разделить общий перенос на три выражения в соответствии со спектральными произведениями, встречающимися в интегралах. Первое выражение содержит билинейные произведения волнового спектра и спектра внешнего поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = & \int \int \sum_{\substack{\nu_1 > 0 \\ \mu(\omega_{\mathbf{k}}^{\mu} > 0)}} \{ (T_1^a F_1 G_2 - T_1^b F G_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + \\ & + (T_2^a F_1 G_2 - T_2^b F G_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) + \\ & + (T_3^a F_1 G_2 + T_3^b F G_2) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega) - T_4 F G_2 \} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$F_1 = F_{\nu_1}(\mathbf{k}_1), \quad G_2 = G_{\mu}(\mathbf{k}_2), \quad F = F_{\nu}(\mathbf{k}), \quad \omega_1 = \omega_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1}, \quad \omega_2 = \omega_{\mathbf{k}_2}^{\mu}, \quad \omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\nu},$$

$$T_1^a = 36\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu}|^2,$$

$$T_2^a = 36\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu}|^2,$$

$$T_3^a = 36\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu-\nu_1\mu}|^2,$$

$$T_1^b = 36\pi\omega\omega_1 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu\mu} \},$$

$$T_2^b = 36\pi\omega\omega_1 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu\mu} \},$$

$$T_3^b = 36\pi\omega\omega_1 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu} E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{\nu_1\nu\mu} \},$$

$$\begin{aligned} T_4 = & + 36\omega \sum_{\nu_1 > 0} \left[\omega_1 P \oint \left\{ \frac{E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu\mu}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega} + \frac{E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\mu} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu\mu}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu-\nu_1\mu} E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}^{\nu_1\nu\mu}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega} - \frac{E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu-\nu_1\mu} E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{\nu_1\nu\mu}}{\omega_2 - \omega_1 - \omega} \right\} \right] - 32\omega \oint \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{k}_2\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu\mu} \}. \end{aligned}$$

Второе выражение описывает перенос энергии неконсервативными взаимодействиями между волнами. Оно аналогично выражению (5.6), за исключением того, что индекс μ заменяется на индекс ν_2 , а внешний спектр G_2 — на $F_2 = F_{\nu_2}(\mathbf{k}_2)$. Число парных комбинаций больше для двух волновых спектров, чем

для одного волнового спектра и одного спектра внешнего поля; это приводит к дополнительным множителям 2 и 4 соответственно в функциях переноса T_j^a и T_j^b ($j=1, 2, 3$). Аналогично первый и второй члены в T_4 умножаются соответственно на 4 и 3. Упорядочивая члены, выражения переноса можно написать в форме, аналогичной уравнению переноса (4.13) для консервативных взаимодействий между волнами,

$$\frac{\partial F_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = \sum_{\nu_1, \nu_2 > 0} \int \int \{ (T_1^a F_1 F_2 - T_2^b F F_1 - T_1^y F F_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) + 2(T_2^a F_1 F_2 + T_2^b F F_1 - T_2^y F F_2) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) - T_3 F F_1 \} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (5.7)$$

где

$$T_1^a = 72\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2}|^2, \\ T_2^a = 72\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1-\nu_2}|^2, \\ T_1^b = 72\pi\omega\omega_2 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{-\nu_2\nu-\nu_1} \}, \\ T_2^b = 72\pi\omega\omega_2 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1-\nu_2} E_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{\nu_2\nu-\nu_1} \}, \\ T_1^y = 72\pi\omega\omega_1 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu-\nu_2} \}, \\ T_2^y = 72\pi\omega\omega_1 \mathcal{R} \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1-\nu_2} E_{-\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}^{-\nu_1\nu\nu_2} \}, \\ T_3 = 144\omega \sum_{\nu_2 > 0} \left[\omega_2 P \oint \left\{ \frac{E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1\nu_2} E_{-\mathbf{k}_2\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{-\nu_2\nu-\nu_1}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega} + \frac{E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu-\nu_1\nu_2} E_{-\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{-\nu_2\nu\nu_1}}{\omega_2 - \omega_1 - \omega} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{E_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu-\nu_1-\nu_2} E_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\nu_2\nu\nu_1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega} - \frac{E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\nu_1-\nu_2} E_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{\nu_2\nu-\nu_1}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega} \right\} \right] - 96\omega \oint \{ E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1}^{-\nu\nu-\nu_1\nu_1} \}.$$

Для симметричных коэффициентов уравнение (5.7) становится тождественным уравнению (4.13).

Третье выражение описывает перенос, осуществляемый только взаимодействиями внешнего поля,

$$\frac{\partial F_{\nu}(\mathbf{k})}{\partial t} = \int \int \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2 \\ (\omega_1, \omega_2 > 0)}} \{ T_1 G_1 G_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + \\ + 2T_2 G_1 G_2 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (5.8)$$

где

$$T_1 = 72\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{-\nu\mu_1\mu_2}|^2, \\ T_2 = 72\pi\omega^2 |E_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{-\nu\mu_1\mu_2}|^2.$$

Уравнения (5.3), (5.5) — (5.8) представляют собой полный набор выражений переноса низшего порядка, содержащих произведения не более двух спектров.

6. Диаграммы переноса

Удобно изображать выражения переноса, выведенные в § 4 и 5 диаграммами *переноса* энергии. В частном случае консервативных взаимодействий между волнами выражения переноса можно интерпретировать как диаграммы столкновений в картине частиц [9]. В общем случае неконсервативных взаимодействий такая интерпретация более не применима, но эти диаграммы сохраняют некоторые полезные свойства.

Каждый член в интегралах переноса можно связать с компонентой — стрелкой на диаграмме переноса. Члены, содержащие множителями δ -функцию, и линейные выражения переноса (5.3) и (5.5) представляются диаграммой с n компонентами, входящими в вершину, и единственной компонентой, выходящей из вершины (мы рассматривали детально лишь линейный случай $n=1$ и квадратичный случай $n=2$). Различные комбинации знаков в δ -функциях характеризуются компонентами и антикомпонентами так же, как и на диаграммах взаимодействия (§ 3).

Таким образом, множитель $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$ представляется двумя стрелками, равными \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , входящими в вершину, и стрелкой, равной \mathbf{k} , выходящей из вершины. Множитель $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega)$ представляется той же диаграммой, но компонента \mathbf{k}_2 заменяется антикомпонентой. Правило суммирования для волновых чисел и частот то же самое, что для диаграмм взаимодействия. Оба множителя из δ -функций можно представить двумя другими диаграммами, в которых в качестве результирующей компоненты выбираются \mathbf{k}_1 или \mathbf{k}_2 .

Мы будем говорить о трех диаграммах с данным множителем из δ -функций, как о *наборе* диаграмм. (Три диаграммы с выходящими антикомпонентами можно не принимать в расчет, поскольку они идентичны другим диаграммам, за исключением того, что знаки у всех компонент изменяются.) Каждая диаграмма некоторого набора представляет перенос энергии от входящих компонент к выходящей компоненте. Однако если выходящая компонента представляет фиксированное внешнее поле, то перенос отсутствует; эти диаграммы можно исключить. Как и в случае диаграмм взаимодействия, стрелки указывают всегда направление распространения волн. (С этой целью выражения переноса были написаны так, что содержат лишь положительные частоты.)

Последние члены в уравнениях (5.6) и (5.7), которые не содержат множителей в виде δ -функций, изображаются просто двумя стрелками, входящими в вершину, без результирующей

компоненты. В этом случае не делается различия между компонентами и антикомпонентами.

Структуру выражений переноса можно определить из диаграмм по единственному правилу: скорость изменения спектра любой волновой компоненты или антикомпоненты на диаграмме переноса пропорциональна произведению спектральных плотностей входящих компонент.

Таким образом, линейные выражения переноса (5.3) и (5.5) представляются на рис. 5 линейными диаграммами *a* и *б* соответственно. Первые два члена, связанные с множителем

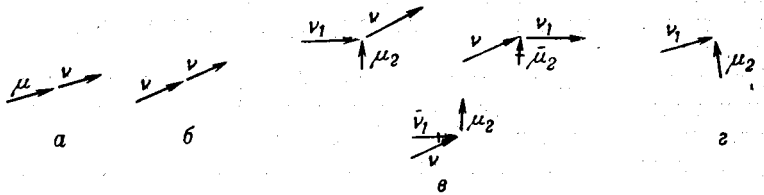


Рис. 5. Представление выражений переноса энергии диаграммами переноса.

Диаграммы (*a*) и (*б*) изображают линейные выражения переноса (5.3) и (5.5) соответственно. Диаграммы (*в*) изображают первые два члена с множителем $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$ уравнения (5.6). Третья диаграмма этого набора показывает, как генерируется внешняя компонента, которая приводит к нулевому переносу. Остальные члены с δ -функциями из уравнений (5.6) — (5.8) получаются заменой компонент и антикомпонент или волновых компонент и компонент внешнего поля. Диаграмма (*г*) изображает последний член в уравнении (5.6).

$\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$ в уравнении (5.6), представляются двумя диаграммами *в* на рис. 5. Третья диаграмма из набора изображает образование внешней компоненты μ_2 , и ее можно не учитывать. Если μ_2 заменить на ν_2 , то получаются первые три члена в уравнении (5.7). В этом случае все три диаграммы набора дают вклад в перенос энергии. Если ν_1 заменить на μ_1 , то получается первый член уравнения (5.8). Здесь лишь одна диаграмма дает вклад в перенос энергии. Остальные члены выражений переноса (5.6) — (5.8) получаются заменой одной из входящих компонент на антикомпоненту. Диаграмма *г* на рис. 5 представляет собой последний член уравнения (5.6). Диаграммы *a*, *в*, *г* и т. д. сопоставляются взаимодействиями $\mu \rightarrow \nu$, $\nu_1 \mu_2 \rightarrow \nu$, $\nu_1 \mu_2$ и т. д.

В случае консервативных взаимодействий между волнами скорость переноса для всех компонент можно характеризовать единственным коэффициентом переноса, который приложим ко всем диаграммам данного набора. Кроме того, имеется тесная связь между диаграммами переноса и взаимодействия; различные

вклады в выражения переноса можно классифицировать непосредственно через диаграммы взаимодействия (диаграммы Фейнмана) и нет необходимости четко различать эти два типа диаграмм [9].

Эта простота теряется в общем случае. Скорость переноса различна для каждой компоненты диаграммы. Связь между диаграммами переноса и диаграммами взаимодействия, которые описывают структуру возмущений для членов переноса, более запутана. (Например, член переноса, соответствующий диаграмме g на рис. 5, содержит коэффициент связи четвертого порядка.) Но диаграммы переноса тем не менее остаются полезным инструментом при анализе структуры сложных взаимодействующих систем.

Применение диаграмм переноса (Фейнмана) для консервативных процессов рассеяния волны волной иллюстрируется на некоторых примерах в работе [9]. Далее мы рассмотрим и случай, включающий неконсервативные внешние взаимодействия.

7. Образование волн турбулентным ветром

Применим предыдущие результаты к взаимодействиям между гравитационными волнами g и атмосферным турбулентным пограничным слоем. Мы предполагаем, что пограничный слой состоит из среднего течения m , которое зависит только от вертикальной координаты, и статистически стационарного горизонтально однородного флуктуирующего поля f .

Подробный анализ мы здесь выполнять не будем. Было установлено, что взаимодействия между волнами g и полем f можно разложить в ряд теории возмущений вида (2.14). Среднее течение m определяет форму коэффициентов g - f связи, но его не следует рассматривать как возмущение. Следовательно, мы формально рассматриваем лишь взаимодействия между компонентами g и f .

Полный набор диаграмм переноса низшего порядка, содержащих не более двух входящих компонент, показан на рис. 6. (Диаграммы $g_1 g_2 \rightarrow g_3$ и $g_1 g_2$, которые должны включаться в полный набор, не показаны. Первая диаграмма не удовлетворяет условиям резонанса [4]. Можно показать, что вторая диаграмма относится к более высокому порядку, чем диаграмма a на рис. 6, и поэтому ею можно пренебречь.)

Линейная диаграмма a на рис. 6 $g \rightarrow g$ соответствует теории Майлса [17] образования волн из-за линейной связи между волнами и средним течением пограничного слоя. Каждая волновая компонента создает возмущение среднего течения. Возникающее возмущение давления питает в свою очередь волновую ком-

понтенту, что приводит ее к возрастанию. Физический механизм этой обратной связи обсуждался Лайтхиллом [13]. В соответствии с правилом переноса скорость роста спектральной плотности $F(\mathbf{k})$ компоненты g пропорциональна $F(\mathbf{k})$, так что

$$\partial F(\mathbf{k})/\partial t = \beta F(\mathbf{k}), \quad (7.1)$$

где β зависит от среднего профиля пограничного слоя. Рост волны происходит экспоненциально.

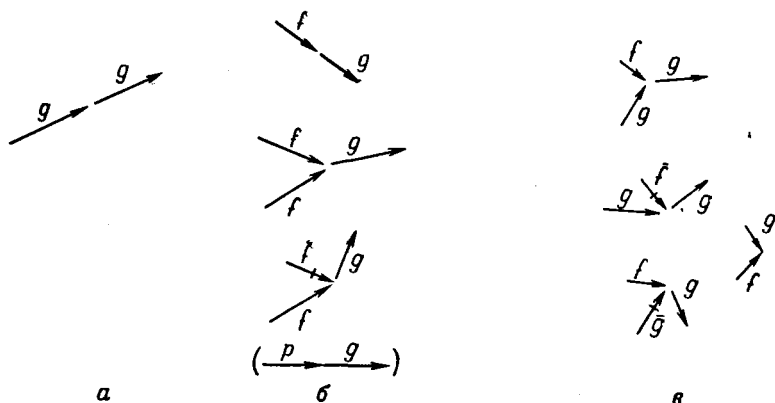


Рис. 6. Диаграммы переноса для взаимодействий между гравитационными волнами и атмосферным пограничным слоем.

Диаграмма а — Майлс [17]; б — Филлипс [19]; в — взаимодействия волн с турбулентностью.

Второй набор диаграмм (рис. 6, б) соответствует теории Филлипса [19] образования вынужденных волн турбулентными флуктуациями давления. Процесс можно представить более просто при помощи линейной диаграммы $p \rightarrow g$. Однако давление является производным полем. Его можно выразить через взаимодействующие компоненты скорости, которые приводят к трем диаграммам (см. рис. 6, б). Скорость переноса пропорциональна трехмерному спектру G_p турбулентного давления на морской поверхности [6]

$$\frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial t} = \frac{\pi \omega^2}{2\rho g} G_p(\mathbf{k}, -\omega), \quad (7.2)$$

где ω — частота волновой компоненты \mathbf{k} , ρ — плотность воды. Спектры нормируются таким образом, что

$$\iint F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{1}{2} \rho g \langle \zeta^2 \rangle = \frac{1}{2} E,$$

где ζ — смещение поверхности, E — волновая энергия, а

$$\int \int \int G_p(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega = \langle p^2 \rangle.$$

Уравнение (7.2) приводит к линейному росту волны.

Остальные взаимодействия диаграммы ν на рис. 6 не рассматривались ранее. В самом простом случае они представляют собой возмущение среднего пограничного слоя компонентой g' , взаимодействие между этим возмущением и турбулентной компонентой f и обратную связь флуктуации давления за счет этого взаимодействия с компонентой g . Согласно правилу переноса, результирующая энергия переноса имеет вид

$$\partial F(\mathbf{k})/\partial t = -\gamma F(\mathbf{k}) + \int \delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (7.3)$$

Первый член представляет собой потерю энергии (или ее приток) для компоненты g' . Он пропорционален спектральной плотности самой компоненты g' . Второй член представляет собой энергию, получаемую компонентой g , которая пропорциональна спектру энергии компоненты g' при других волновых числах. Функции γ и δ являются линейными функционалами спектра турбулентности при волновых числах, соответствующих компонентам турбулентности на диаграммах. Второй член всегда положителен, в то время как первый член может иметь любой знак.

Трудно решить на основании имеющихся данных, какой из трех механизмов наиболее важен, поскольку существует очень мало количественных измерений роста волн. Снайдер и Кокс [25] измерили рост волн периода 3,3 сек под действием ветра в различных условиях. Они нашли, что волны растут вначале линейно и что скорость начального роста не противоречит механизму Филлипса, если результаты измерений флуктуаций давления над сушей [22] можно использовать и для океана. Начальная линейная стадия сменяется периодом более быстрого экспоненциального роста, на который приходится основная часть волновой энергии. Скорость роста в этот период почти на порядок больше, чем предсказанная Майлсом или более ранней теорией Джеффриса [12].

Тем самым естественно предположить, что взаимодействия турбулентных волн, составляющие набор взаимодействий низшего порядка, являются основным источником энергии волн. Хотя скорость переноса (7.3) трудно оценить на основании существующих измерений турбулентности, это выражение имеет некоторые качественные черты, согласующиеся с наблюдениями. Спектр турбулентности имеет максимум при более низких ча-

стотах, чем спектр волн, так что различие частот компонент g и g' при взаимодействиях $g'f \rightarrow g$ и т. п. будет, вообще говоря, мало. Следовательно, перенос энергии сосредотачивается в полосах близких частот волнового спектра. Если волны образуются сначала при высоких частотах, то второй член уравнения (7.3) ведет к образованию волн немного более низкой частоты. Когда последние достаточно велики, по соседству образуется полоса еще меньшей частоты и т. д. Наблюдения, по-видимому, подтверждают такое последовательное развитие волнового спектра, но высказывались также и другие объяснения (см. [7, 21]).

После того как волны образуются за счет второго члена уравнения (7.3), первый член будет либо вызывать их увеличение, либо противодействовать их дальнейшему росту в зависимости от знака δ . Последний случай представляет некоторый интерес, так как тогда можно объяснить наблюдаемое равновесие спектра, не привлекая к рассмотрению сильный перенос количества движения океаническими течениями. Обычно предполагается, что в состоянии равновесия перенос импульса от атмосферного пограничного слоя к волнам имеет тот же порядок величины, как и во время роста волны, но при этом он сбалансирован столь же сильным переносом импульса от волн к осредненному океаническому течению. Исходя из этого предположения, Снайдер и Кокс нашли, что скорости наблюдавшегося ими роста волн приводят к эффективному напряжению сдвига, отличающемуся в несколько раз от касательного напряжения на стенке для пограничного слоя у твердой стенки.

С другой стороны, различные измерения пограничного слоя над океаном не указывают существенных отклонений (в условиях нейтральной плавучести) от теоретического напряжения и логарифмического профиля скорости («закон стенки»). Эта трудность не возникает, если равновесие можно объяснить взаимодействиями волн с атмосферой и нелинейными взаимодействиями между волнами [7, 20]¹⁾ без привлечения сильного диссипативного процесса.

Решению этих вопросов должны помочь дальнейшие исследования атмосферного пограничного слоя, связанные более тесно с измерениями спектра волн и скоростей спектрального роста.

Приложение А

Бинни и Сафмен [3] показали, что выражения переноса можно вывести, не привлекая гипотезы о том, что поля гауссовы,

¹⁾ Значение взаимодействий между волнами в балансе энергии гравитационных волн подтвердили недавние наблюдения распространения зыби [24].

если кумулянты предполагаются гладкими в пространстве волновых чисел (или содержат только некоторые сингулярности типа δ -функций). Однако их вывод (если он применим для всех моментов времени) противоречит необратимости выражений переноса. Невозможно вывести выражение переноса из чисто локальных рассуждений, не вводя статистическую гипотезу, которая в действительности определяет направление времени. Это можно заключить из хорошо известной дискуссии о парадоксе необратимости для уравнения Больцмана.

Предположим, что выражения переноса заданы для всех моментов времени $t > 0$ для некоторого ансамбля E волновых полей. Найдем спектр $F(\mathbf{k}, t_1 - \tau)$ в момент времени $t_1 - \tau > 0$, более ранний, чем $t_1 > 0$, решая уравнения движения при обратном направлении времени и используя ансамбль состояний в момент t_1 в качестве начальных данных. Так как уравнения движения обратимы, тот же спектр получается, если обратить знак скоростей \dot{q}_k^y в момент времени t_1 и затем определить $F(\mathbf{k}, t_1 + \tau)$, решая задачу с начальными условиями для этого нового ансамбля \bar{E} в прямом направлении времени. Если выражения переноса предполагаются справедливыми для *обоих* ансамблей E и \bar{E} , то один и тот же спектр получается при $(t_1 + \tau)$ для *обоих* ансамблей E и \bar{E} . Выражения переноса зависят лишь от спектра и не зависят от знака поля скорости. Для ансамбля E следует, что $F(\mathbf{k}, t_1 - \tau) = F(\mathbf{k}, t_1 + \tau)$. Таким образом, эволюция во времени симметрична относительно t_1 . В частности, имеется разрыв наклона при t_1 :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{k}, t_1 - 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{k}, t_1 + 0). \quad (\text{A1})$$

Это, очевидно, противоречит предположению, что выражения переноса справедливы при всех $t > 0$. Следовательно, если выражения переноса справедливы для ансамбля \bar{E} , то они не могут выполняться для ансамбля E . Предположение о том, что данный ансамбль полей скорости соответствует ансамблю E , а не \bar{E} , является тогда необходимой гипотезой, которую нельзя вывести без анализа истории поля.

Ясно, что любая попытка вывести выражения переноса локально в момент времени t_1 должна основываться на различии между ансамблями E и \bar{E} . Если в класс начальных условий, допустимых в момент t_1 , входят E и \bar{E} , то анализ должен привести к появлению заострения. Как гауссовы поля, так и поля с гладкими кумулянтами представляют собой симметричные

классы в этом смысле¹⁾. Так как Пригожин [23] доказал справедливость выражений переноса для всех $t > 0$, отсюда следует, что кумулянты, вообще говоря, не равны нулю и не остаются гладкими.

Поведение кумулянтов становится более понятным из анализа линейного поля (приложение Б). Непрерывное перемешивание групп волн, распространяющихся в различных направлениях, приводит к вырождению начального поля с гладкими кумулянтами в пространстве волновых чисел. В нелинейном случае перемешивание в сочетании со слабой связью приводит к усложненной мелкомасштабной структуре, содержащей сингулярности²⁾. Гипотеза о том, что поля гауссовы, эквивалентна предположению, что мелкую структуру можно игнорировать, если она развивается в прямом направлении времени. Но ее нельзя игнорировать при попытке восстановить прошлое. Связь между необратимостью крупнозернистых распределений и симметрией во времени мелкозернистых распределений известна из других задач статистической механики.

С физической точки зрения роль мелкой структуры можно лучше понять из рассмотрения взаимодействий, имеющих место между большими, но конечными группами волн, а не бесконечными цугами волн. Ситуация тогда близка к случаю взаимодействующих частиц (приложение Б).

Приложение Б. Закон Гаусса для случайных линейных волновых полей

Обычно предполагается, что случайные линейные волновые поля можно считать гауссовыми. Гипотеза широко подтверждается наблюдениями и может быть оправдана интуитивно нестрогим применением центральной предельной теоремы. Однако доказательство этой гипотезы и общее понимание условий, на которых она базируется, отсутствуют.

¹⁾ Соотношение (A1) можно непосредственно проверить в случае, рассмотренном Бинни и Сафменом. В этом случае правая часть уравнения (2.51) и аналогично первый член в правой части уравнения (2.56) имеют отрицательный знак, если совершается предельный переход $t \rightarrow -\infty$ вместо $t \rightarrow \infty$. Это влияет на правую часть уравнения (2.44) для скорости переноса энергии. Таким образом, спектральная производная принимает противоположные знаки в зависимости от того, определяется ли она прошлыми или будущими состояниями. То же самое следует для строго гауссова поля.

²⁾ Автор получил такой же результат, как Бинни и Сафмен, при обсуждении с Брезертонем три года назад вопроса о том, являются ли поля гауссовыми. Брезертон отметил, что сингулярности, образовавшиеся за счет резонансных взаимодействий, нарушают предположение о гладкости кумулянтов. Противоречие этому предположению выявляется еще более просто из развития тонкой структуры.

Вопрос приобретает особое значение в связи с недавней работой по нелинейным взаимодействиям в случайных волновых полях. Метод спектрального анализа обобщен на более высокие порядки для определения нелинейных функций переноса [10, 11]. В противоположность линейному случаю методы более высокого порядка сильно зависят от предположения, что поля первого порядка (линейные поля) суть гауссовы. В настоящем изложении мы будем, однако, в основном касаться прежде всего новых обсуждений рассматриваемой гипотезы в связи с выводом выражений переноса в § 4 и 5. Недоразумения, имевшие при этом место, простираются непосредственно из неправильного представления природы гипотезы гауссовости для линейных волновых полей.

Оказалось [3], что эта гипотеза не более приемлема для полей взаимодействующих волн, чем для турбулентного поля; в обоих случаях взаимодействие приводит к нарушению этой гипотезы для заданного начального состояния в течение времени, сравнимого с временным масштабом переноса энергии. Такая аналогия игнорирует важное свойство линейных волновых полей: ниже показывается, что совокупность однородных линейных волновых полей, которые не являются гауссовыми вначале и которые имеют гладкие кумулянты в пространстве волновых чисел, асимптотически приближается к гауссову состоянию (и, более того, поля становятся стационарными и взаимно независимыми). Таким образом, свойство полей быть гауссовыми не просто согласуется, но и является следствием линейности волновых полей. В случае слабых нелинейных взаимодействий линейное стремление к гауссовому состоянию, как можно предполагать, сохраняет поля приближенно гауссовыми, несмотря на противодействующее влияние нелинейностей.

Приближение линейных полей к гауссовому состоянию имеет место в «крупнозернистом» смысле: это касается спектральных моментов, которые сглаживаются при свертке с произвольно узким, но конечным фильтром. Тонкая структура остается негауссовой, но разрешающая способность по частоте, требуемая для ее обнаружения, неограниченно увеличивается со временем и в конечном счете превышает любые достижимые разрешения. Хотя мелкая структура и не наблюдаема, она тем не менее важна из-за того, что объясняет необратимое поведение крупнозернистых распределений в линейном и нелинейном случаях.

Представление полей

Рассмотрим совокупность случайных вещественных полей $\phi_v(\mathbf{x}, t)$, где \mathbf{x} — координатный вектор в пространстве размерности δ . Поля можно охарактеризовать совокупностью осреднен-

ных произведений

$$R_{v_1 \dots v_n} = \langle \phi_{v_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \phi_{v_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle, \quad (\text{B1})$$

где ломаные скобки обозначают средние по ансамблю величины. Мы предполагаем, что поля статистически однородны, так что

$$R_{v_1 \dots v_n} = R_{v_1 \dots v_n}(\xi_1 \dots \xi_{n-1}, t_1 \dots t_n),$$

где $\xi_m = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n$, $m = 1, \dots, n-1$, являются разностями координат. Для простоты положим $\langle \phi \rangle = 0$. Иначе говоря, можно ввести представление Фурье — Стильтьеса

$$\phi_v(\mathbf{x}, t) = \int d\varphi_v(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{B2})$$

и описывать поля набором средних произведений

$$\begin{aligned} & \langle d\varphi_{v_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots d\varphi_{v_n}(\mathbf{k}_n, t_n) \rangle = \\ & = G_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}, t_1 \dots t_n) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

где

$$\begin{aligned} G_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}, t_1 \dots t_n) = \\ = (2\pi)^{-(n-1)} \int \dots \int R_{v_1 \dots v_n}(\xi_1 \dots \xi_{n-1}, t_1 \dots t_n) \times \\ \times \exp\{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \xi_1 + \dots + \mathbf{k}_{n-1} \cdot \xi_{n-1})\} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

есть трансформанта Фурье для $R_{v_1 \dots v_n}$.

В уравнении (B3) δ -функция характерна для однородных полей. Формально она возникает в силу того, что средние произведения $\langle \phi_{v_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \phi_{v_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle$ остаются конечными при $\mathbf{x}_n \rightarrow \infty$ для фиксированных ξ_m . По аналогичным причинам средние произведения $\langle d\varphi_{v_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots d\varphi_{v_n}(\mathbf{k}_n, t_n) \rangle$, вообще говоря, содержат дополнительные δ -функции, которые можно связать с асимптотическим поведением $\langle \phi_{v_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \phi_{v_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle$ при больших \mathbf{x}_j . Сингулярности можно разбить на множители путем разложения моментов по групповым функциям или кумулянтам.

Мы будем предполагать, что средние произведения удовлетворяют асимптотическому условию

$$\begin{aligned} \langle \phi(1) \dots \phi(n) \rangle \rightarrow \langle \phi(1) \dots \phi(p) \rangle \langle \phi(p+1) \dots \phi(q) \rangle \dots \\ \dots \langle \phi(s+1) \dots \phi(n) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

где $\phi(\alpha) \equiv \phi_{v_\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha)$, если разделяющие расстояния между индивидуальными группами для произвольной совокупности групп $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p)$, $(\mathbf{x}_{p+1} \dots \mathbf{x}_q) \dots (\mathbf{x}_{s+1} \dots \mathbf{x}_n)$ стремятся к бесконечности.

Групповые функции S тогда определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 S_{\nu} &= \langle \phi_{\nu} \rangle (= 0), \\
 S_{\nu_1 \nu_2} &= R_{\nu_1 \nu_2} - S_{\nu_1} S_{\nu_2}, \\
 S_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} &= R_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} - S_{\nu_1} S_{\nu_2 \nu_3} - S_{\nu_2} S_{\nu_1 \nu_3} - S_{\nu_3} S_{\nu_1 \nu_2} - S_{\nu_1} S_{\nu_2} S_{\nu_3}, \\
 &\dots \\
 S_{\nu_1 \dots \nu_n} &= R_{\nu_1 \dots \nu_n} - \sum S_{\alpha_1 \dots \alpha_p} S_{\beta_1 \dots \beta_q} \dots S_{\nu_1 \dots \nu_s},
 \end{aligned} \tag{Б6}$$

которые конструируются таким образом, что при выполнении условия (Б5) все $S_{\nu_1 \dots \nu_n}$ стремятся к нулю, если какая-нибудь разность координат ξ_m стремится к бесконечности. В формуле (Б6) (а также ниже, в (Б8)) суммирование (знак Σ) производится по всевозможным совокупностям групп. Далее мы будем предполагать, что $S_{\nu_1 \dots \nu_n}$ приближается к нулю настолько плавно, что гарантируется существование непрерывного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
 H_{\nu_1 \dots \nu_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}, t_1 \dots t_n) &= \\
 &= (2\pi)^{-(n-1)\delta} \int \dots \int S_{\nu_1 \dots \nu_n}(\xi_1 \dots \xi_{n-1}, t_1 \dots t_n) \times \\
 &\times \exp\{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \xi_1 + \dots + \mathbf{k}_{n-1} \cdot \xi_{n-1})\} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}. \tag{Б7}
 \end{aligned}$$

Сравнивая уравнения (Б6), (Б7) с уравнениями (Б3), (Б4), мы можем написать

$$\begin{aligned}
 \langle d\phi_{\nu_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots d\phi_{\nu_n}(\mathbf{k}_n, t_n) \rangle &= \\
 &= d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \left\{ \sum \delta(\mathbf{k}_{\mu_1} + \dots + \mathbf{k}_{\mu_p}) \dots \right. \\
 &\dots \delta(\mathbf{k}_{\lambda_1} + \dots + \mathbf{k}_{\lambda_s}) H_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\mathbf{k}_{\mu_1} \dots \mathbf{k}_{\mu_{p-1}}, t_{\mu_1} \dots t_{\mu_p}) \dots \\
 &\quad \left. \dots H_{\nu_1 \dots \nu_s}(\mathbf{k}_{\lambda_1} \dots \mathbf{k}_{\lambda_{s-1}}, t_{\lambda_1} \dots t_{\lambda_p}) \right\}, \tag{Б8}
 \end{aligned}$$

где $\alpha_j \equiv \nu_{\mu_j} \dots \nu_j \equiv \nu_{\lambda_j}$.

Асимптотические свойства волновых полей. Предположим теперь, что поля ϕ_{ν} являются волновыми полями, компоненты Фурье которых удовлетворяют уравнению гармонического осциллятора:

$$d\ddot{\phi}_{\nu}(\mathbf{k}) + \omega_{\nu}^2(\mathbf{k}) d\phi_{\nu}(\mathbf{k}) = 0 \tag{Б9}$$

с решением

$$d\phi_{\nu}(\mathbf{k}, t) = d\phi_{\nu}^{+}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\nu} t} + d\phi_{\nu}^{-}(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\nu} t}. \tag{Б10}$$

Для вещественных ϕ_{ν} имеем

$$d\phi_{\nu}^{+} = (d\phi_{\nu}^{-}(-\mathbf{k}))^{*}. \tag{Б11}$$

Средние произведения (Б3) тогда принимают вид

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_{v_1}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots d\varphi_{v_n}(\mathbf{k}_n, t_n) \rangle = \\ = \sum_{\text{знаки } s_j} \langle d\varphi_{v_1}^{s_1}(\mathbf{k}_1) \dots d\varphi_{v_n}^{s_n}(\mathbf{k}_n) \rangle \exp\{-i(s_1\omega_{v_1}t_1 + \dots + s_n\omega_{v_n}t_n)\}, \end{aligned} \quad (\text{Б12})$$

где

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_{v_1}^{s_1}(\mathbf{k}_1) \dots d\varphi_{v_n}^{s_n}(\mathbf{k}_n) \rangle = \\ = G_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \end{aligned} \quad (\text{Б13})$$

задается начальным статистическим распределением.

Из (Б3) и (Б8) получаем аналогичные соотношения для кумулянтов:

$$\begin{aligned} H_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}, t_1 \dots t_n) = \sum_{s_1 \dots s_n} H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ \times \exp\{-i(s_1\omega_{v_1}t_1 + \dots + s_n\omega_{v_n}t_n)\}, \end{aligned} \quad (\text{Б14})$$

где $H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}$ — набор начальных кумулянтов, связанный с набором начальных моментов $G_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}$.

Мы будем предполагать, что начальные распределения произвольны, за исключением того, что кумулянты $H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}$ непрерывны.

Для гауссовых полей все кумулянты порядка выше второго обращаются в нуль. Из уравнения (Б14) немедленно следует, что при произвольных начальных условиях набор волновых полей не может приближаться строго к гауссовому состоянию, так как правая часть уравнения (Б14) состоит из конечного числа членов с постоянными коэффициентами, которые, вообще говоря, не обращаются в нуль. Рассмотрим, однако, *наблюдаемые* спектральные моменты, которые получаются сверткой теоретических моментов с фильтрами конечной ширины:

$$\begin{aligned} \overline{H}_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}, \tau_1 \dots \tau_{n-1}, t_n) = \\ = \int \dots \int H_{v_1 \dots v_n}(\mathbf{k}'_1 \dots \mathbf{k}'_{n-1}, \tau_1 + t_n, \dots, \tau_{n-1} + t_n, t_n) \times \\ \times \gamma(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}'_{n-1} - \mathbf{k}_{n-1}) d\mathbf{k}'_1 \dots d\mathbf{k}'_{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{Б15})$$

где $\gamma(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1})$ — конечная непрерывная функция фильтра, нормированная следующим образом:

$$\int \dots \int \gamma(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_{n-1} = 1,$$

Обычно функция γ действительно отлична от нуля лишь в малой области вокруг начала координат $k_1 = 0, \dots, k_{n-1} = 0$.

Исследуем предел $\bar{H}_{v_1 \dots v_n}$, когда $t_n \rightarrow \infty$ при фиксированных выдержках времени

$$\tau_j = t_j - t_n \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Согласно уравнению (Б14), имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_{v_1 \dots v_n} = & \sum_{s_1 \dots s_n} \int \dots \int H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}(k'_1 \dots k'_{n-1}) \gamma(k'_1 - k_1 \dots k'_{n-1} - k_n) \times \\ & \times \exp\{-i(s_1 \omega'_{v_1} + \dots + s_n \omega'_{v_n}) t_n\} \exp\{-i(s_1 \omega'_{v_1} \tau_1 + \dots \\ & \dots + s_{n-1} \omega'_{v_{n-1}} \tau_{n-1})\} dk'_1 \dots dk'_{n-1}. \end{aligned}$$

Так как $H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}$ и γ — непрерывные функции, то интеграл от быстро осциллирующего множителя $\exp\{-i(s_1 \omega'_{v_1} + \dots + s_n \omega'_{v_n}) t_n\}$ стремится к нулю при $t_n \rightarrow \infty$, если только подпространство $s_1 \omega'_{v_1} + \dots + s_n \omega'_{v_n} = 0$ не дает конечного вклада в интеграл. Предполагая, что компоненты невырожденные, т. е. что

$$\omega_\nu(\mathbf{k}) \neq \omega_\mu(\mathbf{k}) \quad \text{при } \nu \neq \mu \quad \text{и} \quad \partial \omega_\nu / \partial k_i \neq 0,$$

получаем, что это имеет место лишь в случае а) $\delta = 1$, $\omega_\nu/k = c = \text{const}$ для некоторого ν , $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_1$ и $s_1 = \dots = s_n = s_\nu$ или в случае б) $n = 2$, $s_1 = -s_2$, $v_1 = v_2$. Случай а) соответствует одномерному волновому полю без дисперсии. Тогда волновое поле представляет собой суперпозицию двух цугов волн, которые распространяются в противоположных направлениях без изменения формы. Асимптотическое приближение к гауссовому состоянию, очевидно, невозможно.

Исключая этот случай, получаем, что лишь вторые кумулянты при комбинации индексов б) остаются конечными при $t_n \rightarrow \infty$. Таким образом, наблюдаемые поля стремятся к гауссовому состоянию. Условия $s_1 = -s_2$ и $v_1 = v_2$ означают, что поля стационарны и что различные моды колебаний статистически независимы.

Если бы мы исследовали кумулянты в физическом пространстве вместо пространства волновых чисел, то проблема сглаживания не возникла бы. Интегральное преобразование от пространства векторов \mathbf{k} к пространству векторов \mathbf{x} автоматически

приводит к сглаженным кумулянтам S в x -пространстве. Трудность теперь состоит в аномальном поведении кумулянтов S при больших разделяющих расстояниях ξ_m , так что в пределе $t_n \rightarrow \infty$ преобразования Фурье более не существуют.

Асимптотическое поведение кумулянтов S и H лучше всего выясняется при рассмотрении случайных волновых полей как суперпозиции большого ансамбля конечных волновых групп, чем бесконечных цугов волн.

Гауссовы поля эквивалентны статистически независимым группам волн. Предположение, что кумулянты H начального негауссового состояния непрерывны, означает, что начальная зависимость между волновыми группами приближается плавно к нулю, когда расстояния между группами стремятся к бесконечности. Позже волновые группы занимают различные положения в пространстве, но их статистическая зависимость остается. Следовательно, поля не могут строго приближаться к гауссовому состоянию. Но расстояния между зависимыми волновыми группами увеличиваются со временем, так что статистическая информация распространяется до бесконечности и может быть восстановлена лишь непрерывным расширением пространственной области анализа. Это эквивалентно увеличению спектрального разрешения.

По существу, та же самая ситуация имеет место, если группы волн взаимодействуют друг с другом. Связь между волновыми группами, которые удовлетворяют условиям резонанса, приводит к малому переносу энергии и слабой статистической зависимости между волновыми группами. После взаимодействия группы волн расходятся и статистические связи рассыпаются в мелкую структуру. Гипотеза гауссовости означает, что мелкую структуру можно игнорировать при развитии поля в одном направлении времени. Другими словами, в последующих взаимодействиях (включающих новые наборы волновых групп, уже взаимодействовавших раньше) взаимодействующие компоненты можно считать статистически независимыми. Ясно, что эта гипотеза представляет собой аналог гипотезы Больцмана о статистической независимости взаимодействующих частиц.

Если поле взаимодействует некоторое время и затем все скорости вдруг поворачиваются в обратном направлении, то поле будет возвращаться к своему первоначальному состоянию. После обращения волновые компоненты не будут больше статистически независимыми перед взаимодействием, и выражения переноса не будут справедливы. Аналогично в линейном случае мелкая структура не может игнорироваться после обращения скоростей, и для поля, кажущегося гауссовым, возможно развитие назад в негауссово поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball F. K., *J. Fluid. Mech.*, **19** (1964), 465.
2. Benney D. J., *J. Fluid Mech.*, **14** (1962), 577.
3. Benny D. J., Saffman P. G., *Proc. Roy. Soc.*, **A289** (1966), 301.
4. Bretherton F. B., *J. Fluid Mech.*, **20** (1964), 457.
5. Chernov L. A., Wave propagation in a random medium, New York, 1960.
6. Hasselmann K., *Schiffstechnik*, **7** (1960), 191.
7. Hasselmann K., *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 481.
8. Hasselmann K., *J. Fluid Mech.*, **15** (1963), 385.
9. Hasselmann K., *Rev. Geophys.*, **4** (1966a), 1.
10. Hasselmann K., *J. Ship. Res.*, **10** (1966b), 64.
11. Hasselmann K., Munk W. H., MacDonald G. J. F., Time series analysis (ed. M. Rosenblatt), chap 8, New York, 1963.
12. Jeffreys H., *Proc. Roy. Soc.*, **A107** (1925), 189.
13. Lighthill M. J., *J. Fluid Mech.*, **14** (1962), 385.
14. Lighthill M. J., *AIAA J.*, **1** (1963), 1507.
15. Litvak M. M., A transport equation for magnetohydrodynamic waves, AVCO-Everett Res. Lab., Res. Rep. № 92, 1960.
16. Longuet-Higgins M. S., *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 321.
17. Miles J. W., *J. Fluid Mech.*, **3** (1957), 185.
18. Peierls R., *Ann. Phys.*, **3** (1929), 1055.
19. Phillips O. M., *J. Fluid Mech.*, **2** (1957), 417.
20. Phillips O. M., *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 193.
21. Phillips O. M., Katz E. J., *J. Mar. Res.*, **19** (1961), 57.
22. Priestley J. T., Correlation studies of pressure fluctuations on the ground beneath a turbulent boundary layer, Nat. Bur. Stand. Rep. № 8942, 1965.
23. Prigogine I., Non-equilibrium statistical mechanics, New York, 1962.
24. Snodgrass F. E., Groves G. W., Hasselmann K., Miller G. R., Munk W. H., Powers W. H., *Phil. Trans.*, **A259** (1966), 431.
25. Snyder R. L., Cox C. S., *J. Mar. Res.*, **24** (1966), 141.
26. Tatarski V. I., Wave propagation in a turbulent medium, New York, 1961.

Обсуждение статьи К. Хассельмана

П. САФМЕН

Я хочу указать на то, что полученный д-ром Хассельманом из парадокса необратимости (Umkehrgeinwand) вывод о необходимости статистической гипотезы для определения направления времени вызывает серьезные сомнения. Но сначала следует отметить, что анализ Бинни — Сафмена был представлен в несколько искаженном виде. Единственное предположение или скорее ограничение, налагаемое на кумулянты, заключается в том, что имеется начальный момент времени, когда они гладкие. Затем было доказано, что нужные кумулянты остаются гладкими до требуемого порядка. Утверждение Хассельмана в приложении А о том, что Бинни и Сафмен показали на самом деле негладкость кумулянтов случайных волновых полей, находится в полном противоречии с их анализом.

Более того, результаты приложения Б не имеют отношения к этому вопросу. Кумулянты, соответствующие анализу Бинни — Сафмена, в обозначениях приложения Б суть $H_{v_1 v_2 \dots v_n}^{s_1 s_2 \dots s_n}$. Эти кумулянты постоянны для линейного волнового поля и, следовательно, тривиальным образом остаются гладкими, если они гладки вначале. Тот факт, что зависящие от времени кумулянты $H_{v_1 \dots v_n}$ приводят к быстро осциллирующей мелкой структуре, не имеет отношения к делу. Истинный вопрос состоит в том, развивают ли $H_{v_1 \dots v_n}^{s_1 \dots s_n}$ кумулянты сингулярности типа δ -функций за счет нелинейных взаимодействий. Они действительно развивают эти сингулярности, но Бинни и Сафмен показали, что эти сингулярности дают эффект более высокого порядка, который может быть отброшен; они не игнорировались, как это подразумевается во второй сноске приложения А, а была показана их несущественность. Следует отметить, что «гладкость» представляет собой достаточное, но не необходимое условие для кумулянтов. Действительные требования состоят в том, чтобы выполнялись условия леммы Римана — Лебега, так что для анализа Бинни — Сафмена в самом деле лучше использовать начальные условия, согласно которым кумулянты не являются «гладкими», а быстро меняются.

Поскольку анализ Бинни — Сафмена оказывается пока свободным от математических ошибок и логически выдержанным (и прямо нужно заметить, что Хассельман не привлек внимания к каким-либо аналитическим ошибкам или противоречиям), не должно быть, по-видимому, оснований для возражений Хассельмана. Я делаю заключение, что выводы Хассельмана из парадокса необратимости ошибочны и что его категорические утверждения необоснованны.

Рассмотрим теперь третье утверждение приложения А. Не ясно, что означает «чисто локальное рассмотрение», поскольку анализ Бинни — Сафмена описывает скорость слабого изменения спектральной функции за много колебаний волнового поля и определяет среднюю по большому числу периодов скорость изменения, а не выражение для мгновенной скорости изменения точной спектральной функции. Так, Бинни и Сафмен представляют спектральные функции как

$$F(k, t) = F_0(k, T) + \varepsilon F_1(k, t) + \varepsilon^2 F_2(k, t) + \dots,$$

где $T = \varepsilon^2 t$ — «медленное время», и определяют $\partial F_0 / \partial T$ по правилу (которое выбрано из физических соображений), что F_1 и F_2 свободны от вековых членов при $t \rightarrow +\infty$. Далее, парадокс обратимости несомненно указывает, что «локальное» уравнение для $\partial F / \partial t$, как функционала F , не может быть выведено, но он не запрещает уравнения для $\partial F_0 / \partial T$ как функционала F_0 . Направление времени выбрано согласно указанному правилу; если бы мы заменили его требованием (которое, думается, будет нефизическим), что F_1 и F_2 свободны от вековых членов при $t \rightarrow -\infty$, то уравнение для $\partial F_0 / \partial T$ имело бы противоположный знак. Таким образом, нет ничего неясного в том, что уравнение, несимметричное во времени, выводится из уравнения симметричного, и, конечно, нет никакой необходимости в статистической гипотезе для определения направления времени.

Верно, что при первоначальном выводе уравнения Больцмана использовалась статистическая гипотеза, гипотеза Клаузиуса «Stosszahlansatz» о том, что сталкивающиеся частицы статистически независимы. Хассельман в приложении Б приходит к заключению, что гипотеза Клаузиуса «Stosszahlansatz» и гипотеза гауссовости случайных полей эквивалентны. На следующем примере будет проиллюстрировано, что это не так. Во всяком случае, исследованиями в Принстоне несколько лет назад показано, что уравнение Больцмана можно вывести без привлечения статистической гипотезы из иерархии Б.Б.Г.К.И. путем разложения по параметру отношения быстрого времени (продолжительность столкновения) к медленному времени (время между столкновениями) и использования правила от-

существования вековых членов, когда быстрое время стремится к «плюс-бесконечности».

Рассмотрим теперь модельную систему, описываемую модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_x u = 2\epsilon u \frac{\partial u}{\partial x},$$

где \mathcal{L}_x — линейный оператор, нечетный по x . Преобразование Фурье удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A(k)}{\partial t} - i\omega(k) A(k) = \epsilon ik \int_{k_1+k_2=k} A(k_1) A(k_2) dk_1,$$

где ω — нечетная функция k . Для случайного пространственно однородного распределения спектральная функция, тройная корреляция и кумулянт четвертого порядка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle A(k) A(k') \rangle &= F(k) \delta(k+k'), \\ \langle A(k) A(k') A(k'') \rangle &= \Gamma(k, k', k'') \delta(k+k'+k''), \\ \langle A(k) A(k') A(k'') A(k''') \rangle &= \langle A(k) A(k') \rangle \langle A(k'') A(k''') \rangle - \\ &= \langle A(k) A(k'') \rangle \langle A(k') A(k''') \rangle - \langle A(k) A(k''') \rangle \langle A(k') A(k'') \rangle = \\ &= Q(k, k', k'', k''') \delta(k+k'+k''+k'''). \end{aligned}$$

Здесь функции F , Γ и Q не являются функциями случайных переменных. Непосредственным преобразованием получают точные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(k)}{\partial t} &= 2\epsilon ik \int_{k_1+k_2+k=0} \Gamma(k, k_1, k_2) dk_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(k, k', k'') &= \epsilon ik \int_{k_1+k_2=k} Q(k_1, k_2, k', k'') dk_1 + 2\epsilon ik F(k') F(k'') + \\ &+ \text{Члены, получающиеся перестановкой } k, k', k''. \end{aligned}$$

Уравнение для $\partial Q/\partial t$ включает кумулянты четвертого порядка и т. д.

Здесь исходные уравнения движения обратимы по времени в том смысле, что если функции $u(x, t)$ и $A(k, t)$ являются решениями, то и функции $u(-x, -t)$ и $A(-k, -t)$, т. е. обращенные решения, развиваются назад во времени, а отражение относительно $x=0$ аналогично повороту скоростей в кинетической теории. Иерархия уравнений для спектральных функций и т. д. также обратима во времени в этом смысле, так как изменение знаков у величин k и t оставляет уравнения неизменными. Таким образом, свойства обратимости не теряются при

образовании уравнений для статистических величин. Мы теперь оборвем иерархию, предполагая, что кумулянты четвертого порядка Q суть нули. Когда Хассельман ссылается на гипотезу гауссовости, он в действительности подразумевает равными нулю кумулянты четвертого порядка. Теперь мы имеем полную запись уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(k)}{\partial t} &= 2\epsilon i k \int_{k_1+k_2+k=0} \Gamma(k, k_1, k_2) dk_1; \\ \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(k, k', k'') - i(\omega + \omega' + \omega'') \Gamma(k, k', k'') &= \\ &= 2\epsilon i (kF(k')F(k'') + k'F(k)F(k'') + k''F(k)F(k')). \end{aligned}$$

Замечание. Усеченные уравнения обладают точно теми же свойствами обратимости, что и исходная система. Заключение Хассельмана о необходимости введения статистической гипотезы и ее роли для взаимодействий случайных волн поэтому ошибочны.

Теперь мы переходим к интригующему вопросу о том, как возникают необратимые уравнения и каково их значение. Это глубокий вопрос, обсуждать который здесь неуместно и который нуждается в дальнейшем изучении. Достаточно сказать, что необратимость появляется в том случае, когда выражения переноса получены обработкой асимптотической формы этих уравнений для малых ϵ и больших t ; вероятно, она связана с тем, что интегрирование по времени, будучи устойчивым в одном направлении, неустойчиво в противоположном направлении. То есть предположим, что мы задаем начальные условия $F(t_0)$ и $\Gamma(t_0)$ и путем интегрирования находим $F(t_1)$ и $\Gamma(t_1)$.

В момент t_1 мы обращаем решение и интегрируем вперед до момента времени $(2t_1 - t_0)$, чтобы получить функции $F(2t_1 - t_0)$ и $\Gamma(2t_1 - t_0)$. Так как уравнения обратимы, эти функции должны быть отражениями функций $F(t_0)$ и $\Gamma(t_0)$, но они не будут их отражениями, если интегрирование неустойчиво (мы ведь не можем интегрировать с абсолютной точностью). Уравнение для F_0 получено асимптотическим анализом, который должен, вероятно, выражать эту неустойчивость и не давать действительного решения, а давать лишь «наиболее вероятное» решение. Теоретический анализ необходим для того, чтобы пролить свет на эту интересную проблему и чтобы подтвердить, что уравнение переноса для F_0 дает решения, которые являются хорошими приближениями действительных величин F .

Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий гравитационных волн

О. М. ФИЛЛИПС

В данной статье рассматриваются различные вопросы резонансных взаимодействий волн. В 1962 г. Лонге-Хиггинс [5] предложил провести эксперимент для обнаружения такого типа взаимодействий между поверхностными волнами. Такой эксперимент был выполнен впоследствии двумя группами исследователей [7, 10]. В настоящей статье сравниваются результаты этих исследований. Эти результаты, взятые вместе, дают отчетливое представление об основных особенностях взаимодействия: максимальный отклик при резонансе и линейный рост амплитуды в зависимости от протяженности взаимодействия, уменьшение ширины группы взаимодействующих волн с протяженностью взаимодействия и смещение точки резонанса из-за дисперсии амплитуды.

Таковыми взаимодействиями, как показывается далее, можно описать неустойчивость волны Стокса, обнаруженную и проанализированную Бенджаменом и Фейром; причем это справедливо не только для двумерных движений. Волна Стокса неустойчива по отношению к возмущению, которое содержит пару волновых чисел, определяемую любой точкой некоторой области вблизи границы петли в форме восьмерки (см. рис. 12).

В качестве другого примера резонансных взаимодействий волн служат короткие внутренние гравитационные волны в стратифицированной жидкости с постоянной частотой Бранта—Вайсяля. Рассматриваются взаимодействия между отдельными гармониками и показывается, что возникают как свободные, так и вынужденные колебания. Для последних дисперсионное уравнение внутренних волн не выполняется, т. е. в этом случае отсутствует определенное соотношение между волновым числом и частотой. Амплитуды этих колебаний малы по сравнению с амплитудами внутренних волн, если среднее гармоническое завихренности в двух взаимодействующих волнах мало по сравнению с частотой Бранта—Вайсяля. Движение в этом случае представляет собой некоторый набор взаимодействующих внутренних гравитационных волн. С другой стороны, если вынужденные колебания становятся сравнимыми по амплитуде с собственными, то эти взаимодействия оказываются довольно сильными и неразличимыми — развивается «каскад», характерный для турбулентности.

1. Введение

В последние несколько лет резонансные взаимодействия между волнами в жидких системах с дисперсией исследовались неоднократно. Впервые они были обнаружены в случае взаимодействия поверхностных гравитационных волн [11], затем теория этого явления была значительно развита в работах [2—6]. Недавно тот же механизм обмена энергией рассматривался в задачах о взаимодействии между капиллярными волнами [9] и между внутренними и поверхностными волновыми модами [1, 13].

Шесть лет назад такого рода взаимодействие казалось несколько удивительным, поэтому теоретические выводы требовали, как было очевидно по крайней мере д-ру Лонге-Хиггинсу, экспериментальной проверки. В своей статье 1962 г. [5] он предложил эксперимент, который в принципе весьма прост и позволяет обнаружить этот тип взаимодействия. В конце 1962 г. Лонге-Хиггинс вместе со Смитом выполнили этот эксперимент; им удалось наблюдать взаимодействие и измерить некоторые характеристики этого явления. В Университете Джона Гопкинса мы также приняли предложение Лонге-Хиггинса и начали такой же эксперимент, построив специальный лоток для изучения взаимодействия и применив усовершенствованные зонды, более чувствительные, чем имевшиеся до сих пор. Наши эксперименты шли гораздо медленнее и длились вплоть до 1965 г. Результаты обеих групп экспериментов кратко описаны в работах [7, 10]. Тем временем Бенджамен и Фейр сделали ряд замечательных открытий, касающихся неустойчивости классической волны Стокса. Этому посвящена другая статья сборника, здесь же будет показано, как их результаты вписываются в общую картину.

Эти три группы экспериментов дают наиболее убедительное и прямое доказательство существования такого общего типа динамических взаимодействий в жидкости. Настоящая статья имеет своей целью следующее: прежде всего будут кратко описаны и сравнены результаты первых двух экспериментальных исследований, т. е. результаты эксперимента, предложенного Лонге-Хиггинсом. Во-вторых, будет показано, что неустойчивость волны Стокса имеет место не только для двумерного движения; первичная волна неустойчива по отношению к возмущениям, которые содержат пары волновых векторов, попадающие внутрь петли в форме восьмерки, описанной автором [11]. Наконец, в несколько другой связи будет показано, что рассмотрение таких взаимодействий удобно при выводе различия между турбулентностью в стратифицированной жидкости, с одной стороны, и полем взаимодействующих внутренних гравитационных волн — с другой.

2. Взаимодействия между поверхностными гравитационными волнами

Для поверхностных гравитационных волн резонансные взаимодействия проявляются в третьем порядке и лишь между компонентами, волновые векторы которых образуют такой замкнутый четырехугольник, что одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4, \\ \sigma_1 + \sigma_3 &= \sigma_2 + \sigma_4, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\sigma_r^2 = gk_r$ ($r = 1, \dots, 4$). Для экспериментального изучения удобна одна особая конфигурация, которая имеет место, когда волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 совпадают. Условия резонанса при этом приводятся к виду

$$\begin{aligned} 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_4, \\ 2\sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_4. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тройки волновых векторов, которые удовлетворяют этим условиям, изображены на рис. 1. Любая компонента с волновым век-

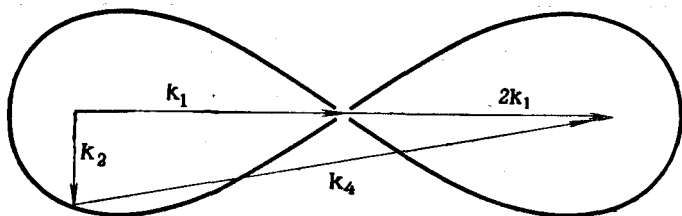


Рис. 1. Резонансная петля для триад взаимодействующих гравитационных волн в глубокой воде.

тором, оканчивающимся на петле в виде восьмерки, взаимодействует резонансным образом с компонентами с волновыми векторами $2\mathbf{k}_1$ и \mathbf{k}_4 , которые вместе образуют треугольник.

Рассмотрим совокупность волновых компонент, волновые векторы и частоты которых удовлетворяют этим условиям. Потенциал скорости можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{\pm r} b_r(t) e^{k_r z} e^{i\chi_r} + \hat{\varphi}, \quad (2.3)$$

где $\chi_r = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \sigma_r t$ и $\sigma_r^2 = gk_r$. Остаток $\hat{\varphi}$ представляет собой ограниченные произведения взаимодействий второго и третьего порядков, гармоники первичных волн и произведения для нерезонансных перекрестных взаимодействий. Величины b_r могут слабо зависеть от времени, когда энергия перераспределяется между модами. Амплитуды первичных волн даются соотношениями

$$a_r = ik_r b_r / \sigma_r \quad (r = 1, 2, 4). \quad (2.4)$$

Уравнения взаимодействия можно вывести способом, предложенным в основных чертах Бинни [2]. Для частного рассматриваемого здесь типа взаимодействия с тремя волновыми модами,

как показано в работе [10], они принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 b_1 &= ib_1 \{g_{11} b_1 b_1^* + g_{12} b_2 b_2^* + g_{14} b_4 b_4^*\} + ihb_1^* b_2 b_4, \\ \sigma_2 b_2 &= ib_2 \{g_{21} b_1 b_1^* + g_{22} b_2 b_2^* + g_{24} b_4 b_4^*\} + \frac{1}{2} ihb_1^2 b_4^*, \\ \sigma_4 b_4 &= ib_4 \{g_{41} b_1 b_1^* + g_{42} b_2 b_2^* + g_{44} b_4 b_4^*\} + \frac{1}{2} ihb_1^2 b_2^*.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Коэффициенты g_{ij} и h — вещественные функции, зависящие от конфигураций векторов и имеющие порядок $k_1^2 k_2 k_4$. Непосредственно из (2.5) можно получить два частных интеграла:

$$\begin{aligned}\sigma_1 b_1 b_1^* + 2\sigma_2 b_2 b_2^* &= \text{const}, \\ \sigma_1 b_1 b_1^* + 2\sigma_4 b_4 b_4^* &= \text{const}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Заметим, что любой рост компоненты с волновым вектором k_4 сопровождается ростом компоненты с волновым вектором k_2 , причем *обе* эти компоненты растут за счет компоненты k_1 .

Имеются два других свойства общих уравнений, которые следует отметить. Во-первых, матрица из членов с g_{ij} вещественна, так что первая группа членов в правой части уравнений (2.5) дает вклад в скорость изменения величины b , отстающий по фазе на $\frac{1}{2}\pi$ от b . Это приводит к слабому росту аргумента комплексной функции b , которая полностью эквивалентна некоторой модификации волновой частоты $(gk)^{1/2}$. В этом, конечно, находит выражение дисперсия амплитуды из-за самодействия и взаимодействия волновых компонент, но главное здесь в том, что *истинные* частоты волн далее уже не удовлетворяют простым соотношениям (2.2) точно. Тем не менее и в этом состоит вторая особенность, если частоты волн меняются слабо, т. е. если

$$\begin{aligned}2k_1 - k_2 &= k_4, \\ 2\sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_4 + \varepsilon,\end{aligned}$$

где по-прежнему $\sigma_r^2 = gk_r$, то последний член в каждом из уравнений (2.5) приобретает дополнительный множитель $e^{\pm i\varepsilon t}$. При подходящем выборе величины ε этот слабо меняющийся временной множитель может сократиться с членом, возникающим из-за дисперсии амплитуды. Другими словами, резонанс можно сохранить, введя слабую «расстройку», компенсирующую дисперсию амплитуды таким образом, что уравнения (2.2) остаются справедливыми, но частота σ_r должна теперь считаться истинной волновой частотой f_r , включающей эффекты дисперсии ам-

плитуды. При этом происходит слабый сдвиг резонансной петли, но резонансный эффект не уничтожается.

В эксперименте, который иллюстрируется схемой на рис. 2, компоненты с волновыми векторами k_1 и k_2 создавались внешним воздействием. Наиболее удобное механическое приспособление предложено Лонге-Хиггинсом; оно имеет плунжеры, параллельные соседним сторонам прямоугольного лотка, так что волновые векторы k_1 и k_2 взаимно перпендикулярны. Амплитуда b_4 потенциала скорости, связанная с третьей компонентой, в начале равна нулю, но по мере продвижения взаимодействия растет с расстоянием поперек лотка. Если $|b_4| \ll |b_1|, |b_2|$, то последнее уравнение из (2.5) сводится к следующему:

$$\sigma_4 b_4 = \frac{1}{2} i h b_1^2 b_2^*, \quad (2.7)$$

а так как b_1 и b_2 , по существу, постоянны, то

$$b_4 = \frac{i h b_1^2 b_2^*}{2 \sigma_4} t. \quad (2.8)$$

При этих условиях амплитуда третьей компоненты является линейной функцией времени, в течение которого имеет место взаимодействие. В эксперименте эта амплитуда пропорциональна расстоянию d , на которое третья волновая компонента распространится за время взаимодействия.

Это решение наиболее удобно выразить через амплитуды волн a ; как показано в работе [7], полученное решение эквивалентно соотношению

$$a_4 = (a_1 k_1)^2 (a_2 k_2) G(r, \theta) d, \quad (2.9)$$

где коэффициент взаимодействия G зависит от отношения малых частот $r = \sigma_1 / \sigma_2$ и угла θ между двумя первичными волнами. В эксперименте $\theta = 90^\circ$, $r = 1,736$; как показали расчеты Лонге-Хиггинса [5], при этих условиях $G = 0,442$.

Эти выражения определяют рост третьей волновой компоненты, когда условия резонанса удовлетворяются точно. Однако, как и во всех резонансных явлениях, имеется существенный рост группы волновых чисел, лежащих вблизи кривой в виде восьмерки (см. рис. 1), ширина которой уменьшается с

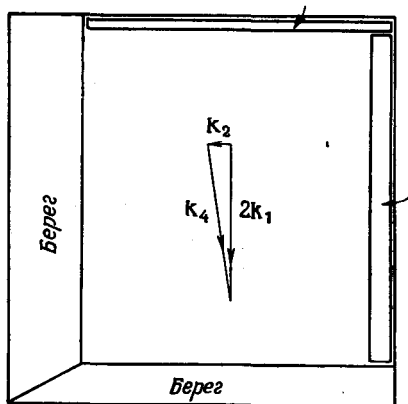


Рис. 2. Схема лотка взаимодействия.

увеличением протяженности взаимодействия. Со временем резонанс становится более острым. Лонге-Хиггинс и Смит [7] детально проанализировали отклик вблизи резонанса и нашли, что

$$a_4 = (a_1 k_1)^2 (a_2 k_2) G(r, \theta) d \left| \frac{\sin \delta k d}{\delta k d} \right|, \quad (2.10)$$

где δk — мера «расстройки» на плоскости волновых чисел, равная половине разности величин $k_4 = (4k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ и $(2\sigma_1 - \sigma_2)^2/g$. Для конфигурации, изученной экспериментально,

$$\delta k = 0,249 k_4 \delta r.$$

3. Эксперименты

Обе серии экспериментов были предназначены для проверки этих результатов с различных сторон. Они включали а) обнаружение результата взаимодействия при определенном отношении частот $r = \sigma_1/\sigma_2 = 1,736$, б) нахождение скорости его линейного роста с протяженностью взаимодействия d и сравнение с величиной, предсказанной теорией, в) определение «ширины полосы» для функции отклика и проверка закона ее уменьшения, как d^{-1} . Кроме того, мы пытались точно проверить квадратичную зависимость a_4 по $(a_1 k_1)$, хотя она должна иметь место при выполнении пункта б).

Некоторые различия между двумя экспериментальными установками привели, естественно, к некоторым различиям в результатах. В обоих случаях волнографы были емкостно-проводочного типа; Лонге-Хиггинс и Смит использовали два параллельных вертикальных элемента, отстоящих друг от друга примерно на четверть дюйма. Наша группа разработала новый и более чувствительный тип волнографа, в котором чувствительным элементом была капиллярная трубка, наполненная ртутью и запечатанная с нижнего конца. Благодаря большей чувствительности вторая серия экспериментов могла проводиться с начальными волнами гораздо меньшего наклона. Максимальные наклоны исследованных начальных волн были меньше чем 0,1, так что поправки, учитывающие влияние конечной амплитуды на отношение резонансных частот r , были очень малыми. Большие наклоны начальных волн вплоть до 0,3, использованные Лонге-Хиггинсом и Смитом, привели к сдвигу отношения наблюдавшихся частот при резонансе, как описано ранее. Лонге-Хиггинс и Смит оценили, что при резонансе в условиях их эксперимента отношение f_1/f_2 должно быть равно приблизительно 2,09, а не 1,736, что соответствует бесконечно малым волнам.

Хотя оба лотка имели близкие размеры в горизонтальных направлениях, использованный Лонге-Хиггинсом и Смитом ло-

ток имел глубину лишь 23 см, тогда как в наших экспериментах лоток имел глубину 107 см. Это обстоятельство вместе с тем фактом, что Лонге-Хиггинс и Смит были вынуждены использовать более крутые начальные волны, могло привести к возбуждению более сильных течений, которые могли до некоторой

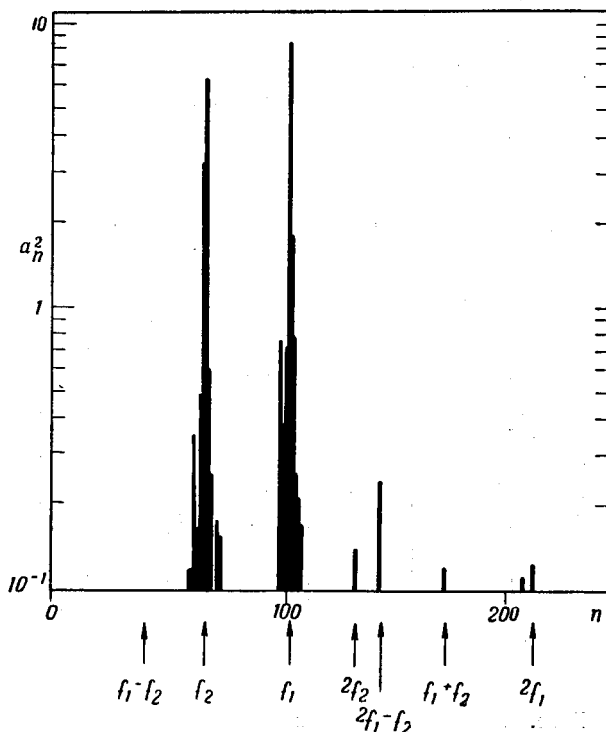


Рис. 3. Спектры волн в лотке по измерениям Лонге-Хиггинса и Смита [7].

Квадраты коэффициентов Фурье представлены в зависимости от номера гармоники n . Отношение частот f_1/f_2 соответствует резонансу.

степени повлиять на конечные результаты экспериментов. Однако несмотря на эти различия, как будет видно, результаты двух серий экспериментов удивительно хорошо согласуются.

На рис. 3 и 4 изображены «амплитудные спектры», наблюдавшиеся в двух сериях экспериментов. Лонге-Хиггинс и Смит получили длинную запись смещения поверхности в одной точке лотка и подсчитали для нее коэффициенты Фурье. Получаю-

щийся ряд линий изображен на рис. 3. Когда отношение частот близко к резонансному, две первичные волны наблюдаются вместе с третьей волной частоты $(2f_1 - f_2)$; она была заметно

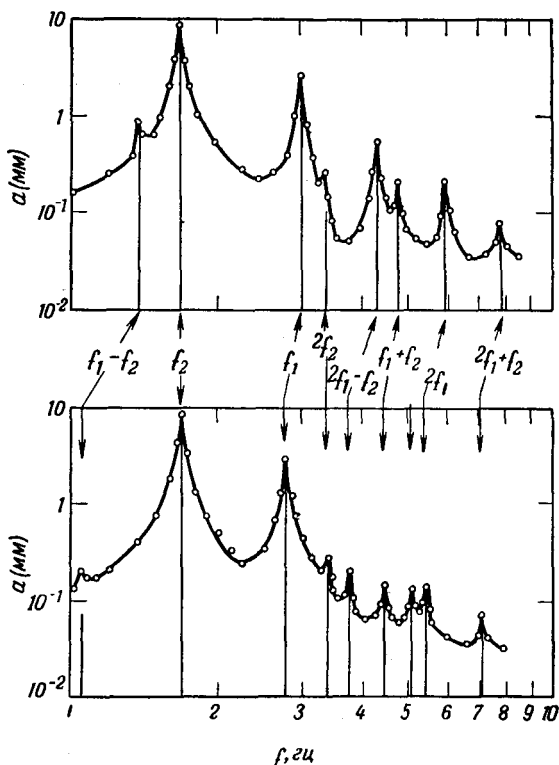


Рис. 4. Спектры волн в лотке по измерениям Макголдрика и др. [10] для резонанса (вверху) и при уходе от резонанса (внизу).

Экспериментальные точки отражают форму фильтра и соответствуют линейному спектру, указанному вертикальными линиями.

больше, чем *вторичные* компоненты, образующиеся из-за эффектов самодействия и парных взаимодействий.

На рис. 4 демонстрируется результат аналогичного измерения, выполненного нашей группой с помощью электронной аппаратуры. Формы кривых около максимумов очень хорошо соответствуют характеристикам использованного фильтра. Измеренные формы спектра совпадают с линейчатый спектром по дискретным частотам, амплитуды которых показаны в виде вер-

тикальных линий. На рис. 4 показаны состояния непосредственно при резонансе и при уходе от резонанса. В первом случае компонента с частотой $(2f_1 - f_2)$ больше, чем любая другая из наведенных компонент второго порядка. Однако когда отношение частот изменяется, так что резонанс расстраивается, резонансная компонента почти исчезает; она не больше, чем другие наведенные (связанные) компоненты.

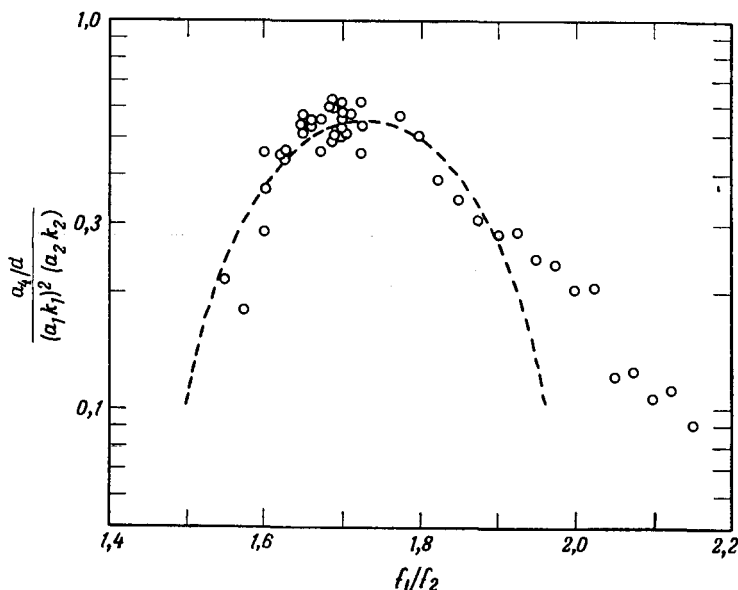
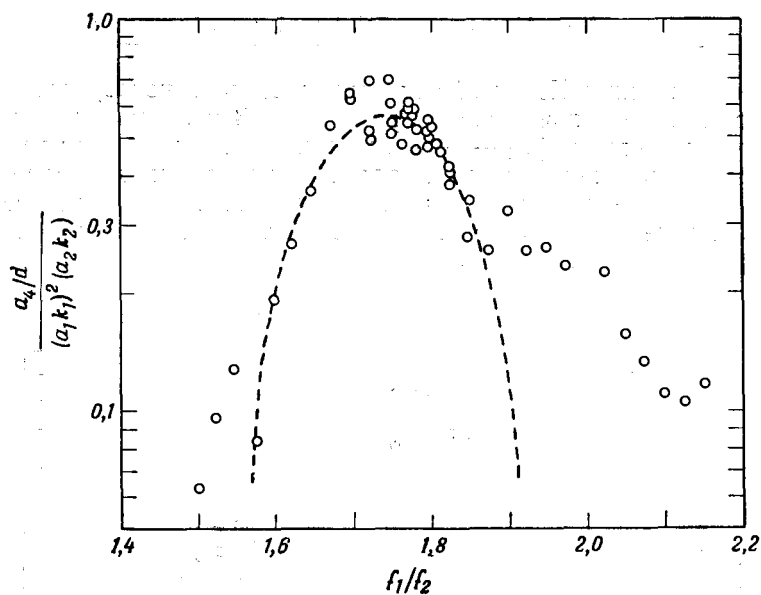
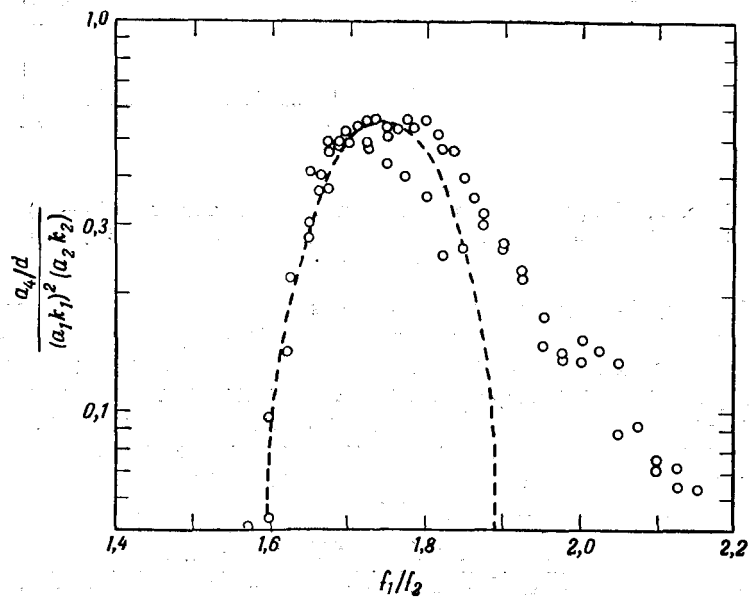


Рис. 5. Коэффициент взаимодействия при частоте $(2f_1 - f_2)$ в зависимости от f_1/f_2 ; протяженность взаимодействия равна 81,4 см [10].

На рис. 5—9 показана в зависимости от отношения частот f_1/f_2 амплитуда компонент с частотой $(2f_1 - f_2)$ при различных протяженностях взаимодействия. Светлыми кружками обозначены результаты измерений нашей группы, а темными кружками — измерения Лонге-Хиггинса и Смита. Результаты измерений были пронормированы путем деления на протяженность взаимодействия и на коэффициенты наклона, которые входят в уравнение (2.9). Поэтому они представляют собой, в сущности, функцию G , умноженную на форму полосы, последняя показана на рисунках штриховыми линиями. Эти результаты наиболее примечательны в трех отношениях. Во-первых, как это видно, максимальное значение на каждом рисунке приблизи-



Р и с. 6. Коэффициент взаимодействия при $d = 107$ см.



Р и с. 7. Коэффициент взаимодействия при $d = 137$ см.

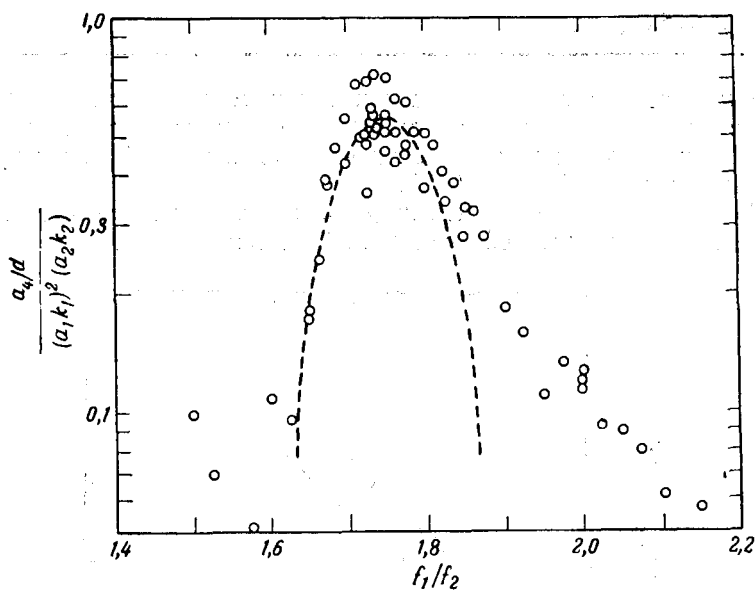


Рис. 8. Коэффициент взаимодействия при $d = 168$ см.

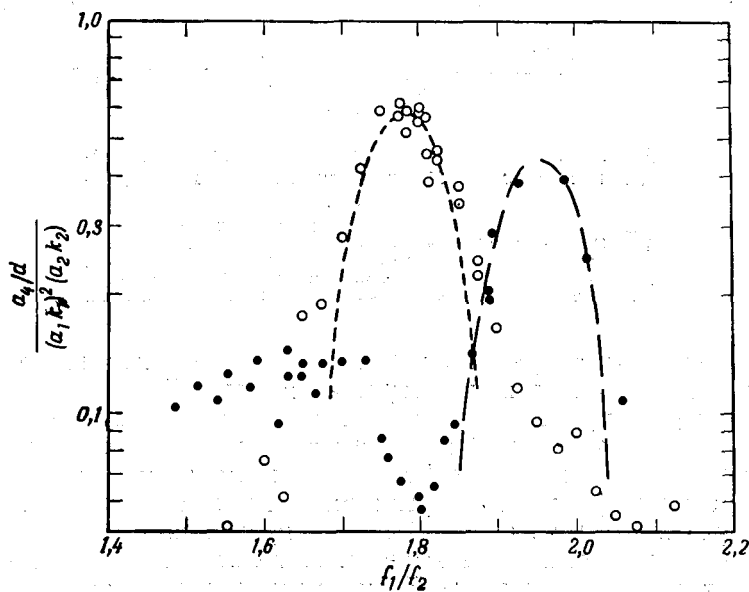
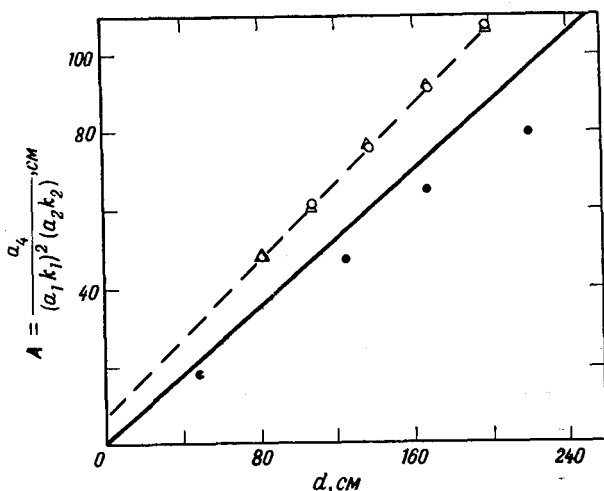


Рис. 9. Коэффициент взаимодействия при $d = 198$ см.

Светлыми кружками представлены результаты Макголдрика и др. [10], а темными кружками — результаты Лонге-Хиггинса и Смита [7]. Штриховые линии изображают теоретические формы полос. Заметен сдвиг резонансного отношения частот вследствие влияния дисперсии амплитуды, наблюдавшийся Лонге-Хиггинсом и Смитом.

тельно почти одно и то же, а так как начальные наклоны волн почти не зависят от d , то отсюда следует, что амплитуда a_4 пропорциональна протяженности взаимодействия d , как и предсказывается уравнением (2.9).

Во-вторых, очевидно, что ширина полосы уменьшается с протяженностью взаимодействия и наблюдаемая форма совпадает



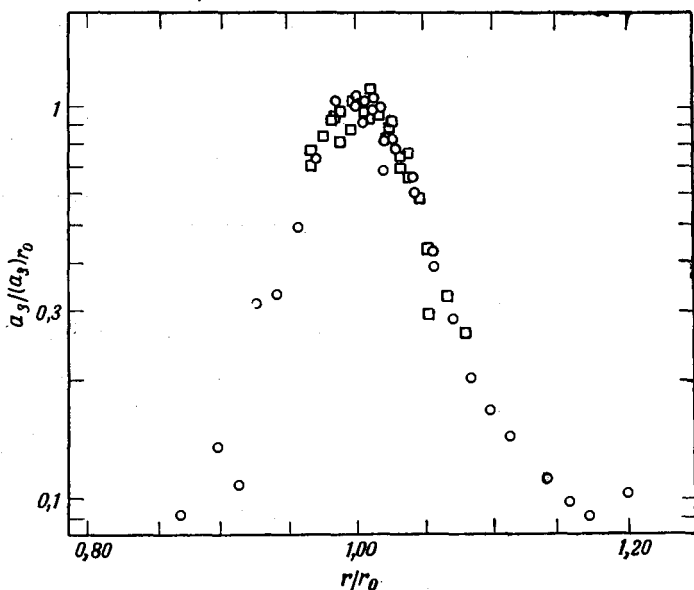
Р и с. 10. Рост амплитуды произведения взаимодействия в зависимости от протяженности взаимодействия d .

Непрерывная линия изображает предсказанную скорость $A = 0,442d$, темными кружками обозначены результаты Лонге Хиггинса и Смита. Светлыми кружками и треугольниками обозначены две разные серии измерений Макголдрика и др. [10], в которых менялись также наклоны первичных волн.

с множителем в уравнении (2.10). В-третьих, как это видно, максимальное значение по результатам Лонге-Хиггинса и Смита имеет место при отношении частот около 1,95. Это значение больше соответствующей величины для бесконечно малых волн, но меньше предсказанной Лонге-Хиггинсом и Смитом при рассмотрении эффектов дисперсии амплитуды. Это различие между результатами их наблюдений и предсказанным значением 2,09 несколько озадачивает; оно может быть результатом наведенных течений в их лотке. Несмотря на это, эффект дисперсии амплитуды совершенно ясен.

Отметим также, что полученный ими максимальный отклик несколько меньше, чем наблюдавшийся нашей группой; это показано более отчетливо на рис. 10, где амплитуды a_4 , измерен-

ные при резонансе, нанесены в зависимости от протяженности взаимодействия вместе с теоретической кривой. Как видно, скорость роста, измеренная Лонге-Хиггинсом и Смитом, несколько меньше теоретического значения, а скорость, измеренная нашей



Р и с. 11. Сравнение кривых отклика вблизи резонанса [10]. Кружками и квадратиками показаны результаты двух серий измерений, в которых основные частоты слабо отличались (это делалось для того, чтобы уничтожить возможность какого-либо влияния резонанса, связанного с размерами лотка). В этих измерениях $d = 198$ см.

группой, несколько больше. Эти различия не могут быть существенными; они лежат вблизи верхнего предела ожидаемых тарировочных ошибок.

Нами были сделаны измерения при двух различных начальных наклонах волн; полученные результаты оказались почти неразличимыми. Это может служить более непосредственным подтверждением указанного уравнением (2.9) изменения амплитуды a_4 с наклонами волн. Видно также, что прямая линия, определяемая этими измерениями, не проходит точно через начало координат. Это может быть результатом слабой реверберации в лотке, связанной с неполным поглощением на берегах.

Для того чтобы быть совершенно уверенным, что эти наблюдения не явились результатом некоторого необычного резонанса, связанного с самим лотком, мы повторили некоторые

измерения при несколько других частотах первичных волн, но при тех же самых значениях *отношения* частот. На рис. 11 показаны характерные результаты; они кажутся совершенно неотличимыми от результатов более раннего, более обширного набора.

Таким образом, рассмотренные две серии измерений превосходно подтверждают предсказания простой теории взаимодействия. Наиболее значительными расхождениями являются, во-первых, различие примерно на 20% между предсказанными и измеренными скоростями роста и, во-вторых, различие между отношением частот при резонансе, найденным Лонге-Хиггинсом и Смитом, и величиной, рассчитанной с учетом эффекта дисперсии амплитуды. Однако в любом случае можно быть уверенным, что расхождения не значительны.

4. Замечание о неустойчивости Бенджамена — Фейра

Когда b_2 и b_4 сравнимы по величине и первоначально малы в сравнении с b_1 , которое в действительности постоянно, последнее из уравнений (2.5) сводится к уравнению первого порядка по амплитудам b_2, b_4

$$\sigma_4 b_4 = i b_4 (g_{41} b_1 b_1^*) + \frac{1}{2} i h b_1^2 b_2^* \quad (4.1)$$

и аналогичному уравнению для b_2 . Если

$$\begin{aligned} \beta_4 &= b_4 \exp \left\{ -i g_{41} b_1 b_1^* t / \sigma_4 \right\}, \\ \beta_2 &= b_2 \exp \left\{ -i g_{21} b_1 b_1^* t / \sigma_2 \right\}, \end{aligned}$$

то

$$\sigma_4 \dot{\beta}_4 = \frac{1}{2} i h b_1^2 \beta_2^* \exp \left\{ -i \left(\frac{g_{21}}{\sigma_2} + \frac{g_{41}}{\sigma_4} \right) b_1 b_1^* t \right\}, \quad (4.2)$$

$$\sigma_2 \dot{\beta}_2 = \frac{1}{2} i h b_1^2 \beta_4^* \exp \left\{ -i \left(\frac{g_{21}}{\sigma_2} + \frac{g_{41}}{\sigma_4} \right) b_1 b_1^* t \right\}. \quad (4.3)$$

Если к тому же имеется слабое отклонение от резонансных условий, соответствующих бесконечно малым волнам, то, как мы уже видели, в правую часть добавляется множитель $e^{i\epsilon t}$ и при условии

$$\epsilon = \left(\frac{g_{21}}{\sigma_2} + \frac{g_{41}}{\sigma_4} \right) b_1 b_1^*$$

это полностью уничтожает связанное с дисперсией амплитуды изменение фазы в (4.2) и (4.3). Если эти уравнения выразить

через волновые амплитуды, как делает Лонге-Хиггинс [5], то они сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_4 &= \frac{1}{2} (a_1 k_1)^2 (a_2 k_2) (g/\sigma_4) G, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} (a_1 k_1)^2 (a_4 k_4) (g/\sigma_2) G. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Эта комбинация расстройки и дисперсии амплитуды является существенным составляющим неустойчивости Бенджамена —

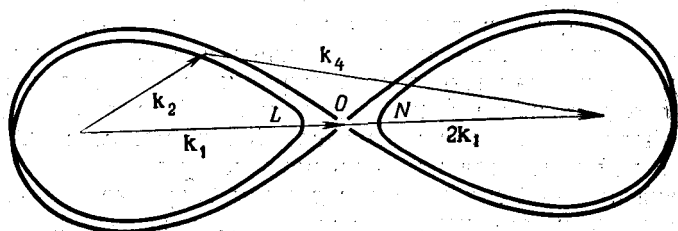


Рис. 12. Схема зоны волновых векторов, в которой волна Стокса с волновым вектором k_1 неустойчива.

Любой треугольник с вершиной, лежащей внутри показанных узких полос, определяет пару неустойчивых волновых векторов. Эксперименты Бенджамена и Фейра относятся к двумерному случаю, в котором вершина лежит на продолжении вектора k_1 .

Фейра волны Стокса; здесь, как и в их анализе, система линейных уравнений для амплитуд возмущений a_2 и a_4 имеет экспоненциально растущие решения

$$\begin{aligned} a_2 &= \sigma_4^{1/2} C \exp \left\{ \frac{1}{2} G (a_1 k_1)^2 (\sigma_2 \sigma_4)^{1/2} t \right\}, \\ a_4 &= \sigma_2^{1/2} C \exp \left\{ \frac{1}{2} G (a_1 k_1)^2 (\sigma_2 \sigma_4)^{1/2} t \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Оба возмущения отбирают энергию из первичной группы волн, на что указывают частные интегралы (2.6). В этом смысле, как это видно, неустойчивость не ограничивается двумерными движениями, так что волна Стокса неустойчива по отношению к парам волновых векторов, определяемых любой вершиной, лежащей *внутри* некоторой области петли в форме «восьмерки» вблизи ее границы, как показано на рис. 12. Отметим, что скорость роста пропорциональна квадрату начального наклона волны, так что ширина группы также пропорциональна квадрату наклона. Как можно показать, чем круче начальная волна Стокса, тем быстрее развивается неустойчивость и шире группа волн.

Имеются две исключительные точки на петле, обе связанные с частной конфигурацией коллинеарных волновых векторов

или чисто двумерного движения. Если вершина треугольника волновых векторов лежит в какой-нибудь крайней точке петли, то, как показано в работе [5], коэффициент взаимодействия G обращается в нуль, скорость роста и ширина полосы также обращаются в нуль. С другой стороны, если вершина треугольника находится в центре петли (переходная точка), то три волновых вектора \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_4 совпадают. Тогда нет различия между начальной волной и возмущением, и взаимодействие вырождается.

Однако если вершина лежит по какую-либо сторону от переходной точки, но в пределах ширины полосы, то волновые векторы, хотя и коллинеарны, различны и лежат внутри зоны неустойчивости. Эта частная конфигурация, для которой вершина лежит между точками L и N (исключая O), а движение двумерно, была теоретически изучена Бенджаменом и Фейром; именно к ней относятся их очень важные эксперименты. Этому посвящена статья Бенджамена в данном сборнике. Однако, как можно теперь видеть, неустойчивость, которую нашли Бенджамен и Фейр, не ограничена парами волновых векторов из указанного интервала, а имеет место в гораздо более общем случае. Эти соображения также указывают на очень тесную связь между экспериментами по неустойчивости и взаимодействию, связь, которая не казалась непосредственно очевидной.

5. Взаимодействия внутренних гравитационных волн

Теперь обратимся к другому примеру этих взаимодействий, который демонстрирует некоторые новые интересные свойства явления. Рассмотрим неограниченную область однородно стратифицированной жидкости, в которой средняя плотность $\bar{\rho}$ зависит от вертикальной координаты z таким образом, что частота Бранта—Вяйсяля

$$N = \left\{ -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right\}^{1/2} \quad (5.1)$$

является вещественной постоянной. Малые возмущения в жидкости около состояния покоя удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 (\nabla^2 \omega) / \partial t^2 + N^2 \nabla_h^2 \omega = 0, \quad (5.2)$$

где ω — вертикальная компонента скорости, $\nabla_h^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа, составленный из производных по горизонтальным координатам. Компонента Фурье возмущения скорости

$$\omega = \alpha \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t) \quad (5.3)$$

имеет частоту

$$\sigma = N \cos \theta, \quad (5.4)$$

которая зависит лишь от N и угла θ между волновым вектором \mathbf{k} и горизонтальной плоскостью. Из-за того что гравитационная восстанавливающая сила направлена вертикально, внутренние

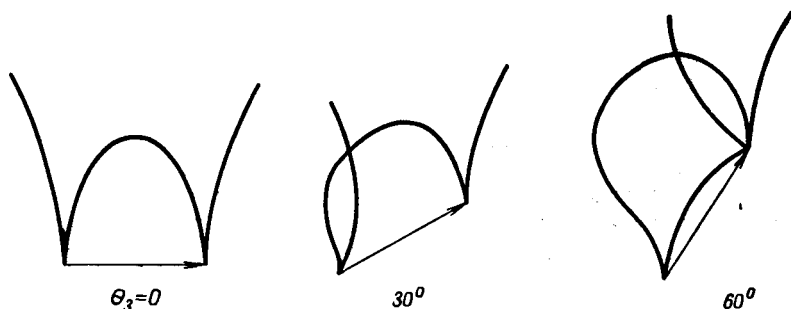


Рис. 13. Диаграммы взаимодействия для внутренних гравитационных волн.

Любой треугольник с вершиной, лежащей на какой-либо ветви кривой, определяет тройку волновых векторов, способных к резонансному взаимодействию.

гравитационные волны этого вида анизотропны в вертикальной плоскости.

Такие волновые компоненты способны к резонансным взаимодействиям между триадами, причем условия резонанса имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3, \\ \sigma_1 \pm \sigma_2 &= \sigma_3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Второе условие является ограничением на наклоны векторов, образующих замкнутый треугольник,

$$\cos \theta_1 \pm \cos \theta_2 = \cos \theta_3.$$

Существуют нетривиальные решения этих уравнений; некоторые из них иллюстрируются на рис. 13.

Имеется очень важное различие между этими волнами и поверхностными волнами, рассматривавшимися ранее. В случае поверхностных волн волновые амплитуды ограничены требованиями гравитационной устойчивости свободной поверхности; их максимальные наклоны должны быть малыми, так что результаты вынужденных (нерезонансных) взаимодействий должны быть также малыми и должны иметь более высокий порядок.

Спектры на рис. 3 и 4 хорошо иллюстрируют это обстоятельство. Напротив, каждая компонента Фурье волны (5.3) представляет собой *точное* решение уравнений Навье—Стокса (по существу, тривиальное, так как нелинейные инерционные члены тождественно равны нулю); ограничений на амплитуду нет. Следовательно, при взаимодействии этих волн заранее нет причин, по которым не возникают *вынужденные* компоненты с волновыми векторами и частотами, *не* подчиняющимися дисперсионным соотношениям (5.4), и амплитудами, сравнимыми с амплитудами первичных волн.

Рассмотрим теперь взаимодействия между тремя такими волнами. Из-за нелинейных членов полного уравнения движения любые два волновых вектора \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 будут давать вклады с волновыми векторами $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ и частотами $\sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_2$. Если α_i представляет собой максимальную скорость компоненты с волновым вектором k_i , то динамическое уравнение приводится к виду

$$\left\{ k^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + N^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \right\} \alpha_3 = A_1 |\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}| (k_1 \alpha_1) (k_2 \alpha_2) N \exp i(\chi_1 - \chi_2) + \\ + A_2 |\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}| (k_1 \alpha_1) (k_2 \alpha_2) N \exp i(\chi_1 + \chi_2), \quad (5.6)$$

где A_1 и A_2 — константы, \mathbf{v} — горизонтальный единичный вектор. Теперь волновой вектор \mathbf{k}_3 может быть в резонансе самое большее с одним из этих векторов. Если

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = \cos \theta_3,$$

то, вообще говоря, имеем

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 \neq \cos \theta_3,$$

т. е. $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ — резонансный волновой вектор, а $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ — нет. Взаимодействие приводит к появлению резонансной растущей волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, максимальная амплитуда которой порядка $O(\alpha_1 \alpha_2)^{1/2}$; кроме того, появляется ограниченная вынужденная компонента с волновым вектором $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, частота которой *не соответствует* свободной внутренней волне с этим волновым вектором, а амплитуда составляет $O\{(k_1 k_2)^{1/2} \alpha_1 \alpha_2 / N\}$.

Если

$$(\alpha_1 k_1 \alpha_2 k_2)^{1/2} \ll N, \quad (5.7)$$

т. е. если гармоническое среднее скоростей сдвига начальных волн мало по сравнению с частотой Бранта—Вяйсяля, то вынужденные моды всегда малы в сравнении с волновыми модами (это всегда имеет место в случае поверхностных волн).

Обмен энергией осуществляется тогда почти исключительно между волновыми модами, т. е. взаимодействия носят избирательный характер, время взаимодействия велико по сравнению с волновыми периодами, а совокупность взаимодействий замкнута — энергия непрерывно перетекает от одного волнового вектора треугольника к другому. Движение представляет собой в точности одну из взаимодействующих внутренних гравитационных волн. С другой стороны, если

$$(\alpha_1 k_1 \alpha_2 k_2)^{1/2} \sim N, \quad (5.8)$$

то вынужденные моды сравнимы по величине с начальными волновыми модами. Для них нет определенной связи между волновым вектором и частотой; они развиваются в течение волнового периода начальных первичных волн и имеют энергию, сравнимую с энергией этих волн. Их взаимодействия быстры и неупорядочены, — вообще говоря, любая такая мода взаимодействует с любой другой модой, порождая дополнительные моды. Совокупности взаимодействий открыты, и развивается «каскад». Движение типично для турбулентности с сильными беспорядочными взаимодействиями, сменяющимися слабыми селективными взаимодействиями поля внутренних гравитационных волн.

Если спектр мод непрерывен и задан скалярной плотностью энергии $E(k)$, то соответствующие условия для внутренних волн суть

$$\{k^3 E(k)\}^{1/2} \ll N, \quad (5.9)$$

а для турбулентности с ее мощным энергетическим каскадом имеют вид

$$\{k^3 E(k)\}^{1/2} \sim N. \quad (5.10)$$

Отличие между этими двумя случаями важно во многих отношениях: в обоих случаях различны перенос энергии в физическом пространстве и характеристики диффузии. Интересно отметить, что из совсем других соображений Ламли [8] и Шур [12] предположили, что в «подобласти плавучести» турбулентность находится в состоянии статистического равновесия, т. е.

$$E(k) \sim N^2 k^{-3}.$$

Этот результат основывается на явном использовании идеи локального каскада в турбулентности; теперь видно, что обратное утверждение также правильно. Полученное выражение является также условием того, что такой каскад должен существовать всюду в этой части турбулентного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball F. K., Energy transfer between external and internal gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **19** (1964), 465—478.
2. Benney D. J., Non-linear gravity wave interactions, *J. Fluid, Mech.*, **14** (1962), 577—584.
3. Hasselmann K., On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 1, *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 481—500.
4. Hasselmann K., On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 2, *J. Fluid Mech.*, **15** (1963), 273—281, Part 3, **15** (1963), 385—398.
5. Longuet-Higgins M. S., Resonant interactions between two trains of gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 321—332.
6. Longuet-Higgins M. S., Phillips O. M., Phase velocity effects in tertiary wave interactions, *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 333—336.
7. Longuet-Higgins M. S., Smith N. D., An experiment on third order resonant wave interactions, *J. Fluid Mech.*, **25** (1966), 417—436.
8. Lumley J. L., The spectrum of nearly inertial turbulence in a stably stratified fluid, *J. Atmos. Sci.*, **21** (1964), 99—102.
9. McGoldrick L. F., Resonant interaction among capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **21** (1965), 305—332.
10. McGoldrick L. F., Phillips O. M., Huang N., Hodgson T., Measurements on resonant waves interactions, *J. Fluid Mech.*, **25** (1966), 437—456.
11. Phillips O. M., On the dynamics of unsteady gravity waves of infinite amplitude, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 193—217.
12. Shur G. N., Experimental investigation of the energy spectrum of atmospheric turbulence, *Trudy tsent. aerol. Obs.*, **43** (1962), 79—90.
13. Thorpe S. A., On wave interactions on a stratified fluids, *J. Fluid Mech.*, **24** (1966), 737—752.

Резонансное взаимодействие планетарных волн

М. С. ЛОНГЕ-ХИГГИНС, А. Э. ГИЛЛ

В противоположность гравитационным поверхностным волнам, для планетарных волн может иметь место резонансное взаимодействие во втором порядке. Следовательно, могут возникать триплеты планетарных волн, которые находятся друг с другом в резонансе.

Для простоты сначала изучается ситуация на β -плоскости. Определяются геометрические условия, при которых две волны образуют триплет с данной третьей волной, а также находится скорость передачи энергии. Установлены некоторые законы сохранения. Анализ допускает возможность ненулевой горизонтальной дивергенции движения.

Для волн, покрывающих сферу полностью, показано, что если вообще между тремя различными гармоническими составляющими имеется резонансное взаимодействие, то оно возникает в окрестностях двух широтных кругов, расположенных симметрично по обе стороны от экватора.

1. Введение

«Планетарными волнами» (или волнами Россби) называют некоторые движения, происходящие в слое жидкости, покрывающем вращающийся шар. Эти волны обязаны своим происхождением изменению вертикальной компоненты относительной завихренности при смещении элемента жидкости из среднего положения в сторону низких широт [14]. Нелинейное взаимодействие между такими волнами представляет интерес по крайней мере по двум причинам: во-первых, для планетарных волн в атмосфере, а, возможно, также и в океане, отношение скорости частицы к фазовой скорости волны (являющееся показателем нелинейности) может составлять заметную величину; во-вторых, резонансное взаимодействие между планетарными волнами происходит уже во втором порядке малости, а не в третьем, как для поверхностных гравитационных волн. (В этом отношении оно сходно с взаимодействием между внутренними гравитационными волнами. См. работы [1, 17] и статью Филлипса из настоящего сборника.) Следовательно, с динамической точки зрения это взаимодействие имеет более важное значение. Кроме того, уравнения, описывающие такое взаимодействие, сравнительно просты, и с ними легче работать.

В частном случае, когда горизонтальная дивергенция волн мала, известно, что функции тока, отвечающие различным мо-

дам свободных колебаний, представляют собой сферические гармоники [4]. В более общем дивергентном случае они имеют приближенно вид сфероидальных гармоник [8]. В бездивергентном случае некоторые условия нелинейного взаимодействия между гармониками были установлены Зильберманом [15], см. также [12, 13]. Одна из целей данной статьи состоит в более полном исследовании значения условий Зильбермана и распространении анализа на более общий случай, когда учитывается горизонтальная дивергенция движения.

Для упрощения анализа рассматривается движение в ограниченной области поверхности сферы (в некоторой β -плоскости), в которой сфера локально заменяется плоскостью, но при этом учитывается изменение кориолисового параметра в северном направлении. Можно показать, что как сферические гармоники, соответствующие бездивергентному движению, так и более общие сфероидальные гармоники, относящиеся к движению с дивергенцией, на самом деле сводятся локально к волновым движениям, удовлетворяющим уравнениям движения на β -плоскости [7, 8]. Поэтому первый шаг заключается в том, чтобы изучить взаимодействие таких волн на β -плоскости.

Два частных случая резонансного взаимодействия между волнами на β -плоскости были выделены Кенионом [6] и Стерном [16]. Однако общие условия того, что три волны будут взаимодействовать, по-видимому, еще не изучались. В § 3 и 4 настоящей статьи определено сначала геометрическое место всех тех волновых чисел, отвечающих волнам, для которых имеет место резонансное взаимодействие с волной, обладающей некоторым заданным волновым числом. Результаты представлены графически на рис. 1—4. Точки P , Q , R и S на кривых указывают, где происходит изменение знака коэффициента взаимодействия. Все эти точки лежат на окружности с центром в начале координат.

В § 5 выводятся некоторые законы сохранения, относящиеся к резонансным взаимодействиям, показывающие в частности, что сохраняются как полная энергия, так и квадрат относительного потенциального вихря. Уравнение, описывающее обмен энергией в резонансном триplete дискретных волн, выведено в § 6. Перенос энергии в сплошном спектре, который был изучен в работе [6] для частного случая бездивергентных волн, рассмотрен в § 7 в общем случае волн с дивергенцией.

Наконец, правила взаимодействия, найденные Зильберманом [15] для волн, покрывающих сферу, интерпретированы в терминах локальных взаимодействий планетарных волн на β -плоскости. Показано, что если происходит передача энергии, то она имеет место в окрестности двух широтных кругов, расположенных симметрично к северу и югу от экватора.

2. Динамические уравнения

Пусть (x, y) — координаты в касательной плоскости сферы, причем x отсчитывается на восток, y — на север. Скорость (u, v) почти геострофична. Ее компоненты определяются выражениями

$$u \doteq \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \doteq -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где

$$\psi = -g\xi/f \quad (2.2)$$

и ξ , g и f обозначают соответственно поднятие поверхности, ускорение силы тяжести и удельную силу Кориолиса. Таким образом, вертикальная компонента вихря выражается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \doteq -\nabla^2 \psi. \quad (2.3)$$

Из условия сохранения потенциального вихря имеем

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{f - \nabla^2 \psi}{h + \xi} \right) = 0, \quad (2.4)$$

где через D/Dt обозначено дифференцирование в системе, движущейся вместе с жидкостью, а через h — средняя глубина. В результате приходим к следующему (приближенному) дифференциальному уравнению для ψ :

$$\frac{D}{Dt} [(\nabla^2 - \alpha^2) \psi] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\alpha^2 = f^2, gh, \quad \beta = df/dy. \quad (2.6)$$

В уравнении (2.5) оставлены только наиболее важные нелинейные члены, а именно те, которые определяют горизонтальную адвекцию вихря. Уравнение (2.5) представляет собой обобщение уравнения для бездивергентных планетарных волн:

$$\frac{D}{Dt} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

При рассмотрении решений уравнения (2.5) удобно перейти к приближению β -плоскости, в котором α и β принимаются постоянными. Тогда, выбирая единицы измерения длины и времени таким образом, чтобы обе величины α и β были равны единице, приходим к следующей форме уравнения (2.5):

$$\frac{D}{Dt} [(\nabla^2 - 1) \psi] + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Бездивергентное уравнение (2.7) при этом принимает простой вид:

$$\frac{D}{D'} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

независимо от выбора единицы длины. При достаточно малом коэффициенте взаимодействия (отношения скорости частицы к фазовой скорости волны) уравнение (2.8) можно линеаризовать, после чего оно принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\nabla^2 - 1) \psi] + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

Это уравнение имеет гармоническое решение

$$\psi = a \exp \{i(kx + ly - \sigma t)\} \quad (2.11)$$

при условии, что удовлетворяется дисперсионное соотношение

$$\sigma(k^2 + l^2 + 1) + k = 0. \quad (2.12)$$

Для бездивергентных волн соответствующее уравнение имеет вид

$$\sigma(k^2 + l^2) + k = 0. \quad (2.13)$$

Компонента фазовой скорости в направлении с востока на запад согласно (2.12), определяется соотношением

$$\frac{\sigma}{k} = - \frac{1}{k^2 + l^2 + 1}. \quad (2.14)$$

Выражение, стоящее справа, всегда отрицательно; это означает, что волны всегда распространяются на запад.

В равенстве (2.11) нужно брать вещественную часть, так что волновому вектору $-\mathbf{k}$ при частоте $-\sigma$ соответствует та же волна, что и волновому вектору \mathbf{k} при частоте σ . В ряде случаев удобно принять $\sigma \geq 0$. При этом $k \leq 0$, так что волновой вектор \mathbf{k} должен лежать в левой полуплоскости. Однако ниже мы будем считать, что данную волну можно представить любым из двух противоположенных волновых векторов \mathbf{k} или $-\mathbf{k}$.

При рассмотрении взаимодействия волн удобно разделить волны на два класса. К волнам первого класса относятся волны, для которых

$$\alpha = |\mathbf{k}| = (k^2 + l^2)^{1/2} > 1, \quad (2.15)$$

т. е. для этих волн конец волнового вектора \mathbf{k} лежит *вне* круга $k^2 + l^2 = 1$; их можно назвать *короткими* планетарными волнами. К волнам второго класса относятся волны, для которых волновой вектор лежит *внутри* указанного круга; их можно назвать *длинными* планетарными волнами. Динамическое различие

между указанными двумя классами волн можно установить при помощи потенциального вихря элемента жидкости, который в безразмерных переменных определяется соотношением

$$\frac{1 - \nabla^2 \psi}{1 - \psi} = 1 + (\chi^2 + 1) \psi. \quad (2.16)$$

Для коротких волн изменение потенциального вихря в некоторой фиксированной точке происходит главным образом в результате смещения жидкости с севера на юг. С другой стороны, для длинных волн эти изменения происходят главным образом вследствие растяжения вихревых нитей, происходящего при вертикальном смещении свободной поверхности.

3. Условия резонансного взаимодействия трех волн

Рассмотрим три свободные планетарные волны, определяемые в первом приближении выражениями

$$\psi_n = a_n \exp \{i(k_n x + l_n y - \sigma_n t)\} \quad (n = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

Каковы условия того, что эти волны будут взаимодействовать? Для каждой волны должно удовлетворяться дисперсионное уравнение (2.9); следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_1(k_1^2 + l_1^2 + 1) + k_1 &= 0, \\ \sigma_2(k_2^2 + l_2^2 + 1) + k_2 &= 0, \\ \sigma_3(k_3^2 + l_3^2 + 1) + k_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме того, должно быть

$$(k_1, l_1, \sigma_1) \pm (k_2, l_2, \sigma_2) \pm (k_3, l_3, \sigma_3) = (0, 0, 0). \quad (3.3)$$

Будем считать, что σ_n может принимать отрицательные значения. Тогда без потери общности можно принять, что все знаки в (3.3) положительны. Таким образом, мы имеем необходимые условия:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ l_1 + l_2 + l_3 &= 0, \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Очевидно, что одно из решений этих уравнений дают векторы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, образующие равносторонний треугольник с центром в начале координат. В самом деле, в этом случае первые два из уравнений (3.4) удовлетворяются автоматически, причем начало координат является центроидом; поскольку сумма $(k_n^2 + l_n^2 + 1)$ имеет одно и то же значение для каждого из волновых векторов,

равенства (3.2) показывают, что третье из уравнений (3.4) также удовлетворяется. (Частный случай с $l_2 = 0$ упоминается в работе [6].)

Еще одно решение уравнений (3.4) дается соотношениями

$$(k_1, l_1) = (-k_2, l_2), (k_3, l_3) = (0, -2l_2) \quad (3.5)$$

при произвольных значениях (k_2, l_2) . Другими словами, любой волновой вектор \mathbf{k}_2 вместе с его отражением относительно оси l и третьим волновым вектором, лежащим на оси l таким образом, что начало координат становится центроидом, образует вместе резонансный триплет. Третий волновой вектор соответствует установившемуся зональному течению.

Однако, вообще говоря, мы имеем шесть соотношений между семью величинами k_n, l_n и σ_n . Если две из них, скажем k_2 и l_2 , заданы, то оставшиеся образуют систему с одной степенью свободы. Допустим, что задан вектор \mathbf{k}_2 , и будем искать геометрическое место концов пар волновых векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3$, для которых имеет место резонансное взаимодействие с вектором \mathbf{k}_2 .

Из второго уравнения (3.2) можно при помощи (3.4) исключить k_2, l_2 и σ_2 . В результате находим

$$(\sigma_1 + \sigma_3)[(k_1 + k_3)^2 + (l_1 + l_3)^2 + 1] + (k_1 + k_3) = 0. \quad (3.6)$$

Исключая теперь σ_1 и σ_3 с помощью первого и третьего из уравнений (3.2), получаем

$$k_1 [(2k_1 k_3 + k_3^2) + (2l_1 l_3 + l_3^2)](k_3^2 + l_3^2 + 1) + k_3 [(2k_1 k_3 + k_1^2) + (2l_1 l_3 + l_1^2)](k_1^2 + l_1^2 + 1) = 0. \quad (3.7)$$

Теперь первые два из уравнений (3.4), которые могут быть записаны в виде

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_2 + \mathbf{O}, \quad (3.8)$$

показывают, что концы векторов $\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ и точка \mathbf{O} образуют параллелограмм с диагоналями, пересекающимися в точке $-\frac{1}{2}\mathbf{k}_2$. Ясно, что геометрическое место концов векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 должно располагаться симметрично относительно этой точки. Запишем

$$\mathbf{k}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_0; \quad \mathbf{k}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{k}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{k}_0. \quad (3.9)$$

Подстановка этих выражений в (3.7) дает нам следующее соотношение для (k_0, l_0) :

$$k_2 [3(k_2^2 + l_2^2)^2 + 2(k_2^2 + l_2^2)(k_0^2 + l_0^2) - (k_0^2 + l_0^2)^2 + \\ + 12(k_2^2 + l_2^2) + 4(k_0^2 + l_0^2) + 4(k_2 k_0 + l_2 l_0)^2] - \\ - k_0 [4(k_2^2 + l_2^2 + 1) \cdot 2(k_2 k_0 + l_2 l_0)] = 0, \quad (3.10)$$

в которое k_0 и l_0 входят совместно в четной степени. Вводя полярные координаты κ_n, φ_n при помощи соотношений

$$(k_n, l_n) = \kappa_n (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n) \quad (n = 1, \dots, 4), \quad (3.11)$$

имеем

$$[(3\kappa_2^4 + 2\kappa_2^2 \kappa_0^2 - \kappa_0^4) + (12\kappa_2^2 - 4\kappa_0^2) + 4\kappa_2^2 \kappa_0^2 \cos^2(\varphi_0 - \varphi_2)] \times \\ \times \cos \varphi_2 - 8(\kappa_2^2 + 1) \kappa_0^2 \cos(\varphi_0 - \varphi_2) \cos \varphi_0 = 0 \quad (3.12)$$

или если положить

$$\varphi_0 - \varphi_2 = \varphi' \quad (3.13)$$

(т. е. отсчитывать направление \mathbf{k}_0 от направления \mathbf{k}_2), то это уравнение примет вид

$$(3\kappa_2^4 - \kappa_0^4 + 12\kappa_2^2 - 8\kappa_0^2) \cos \varphi_2 - (2\kappa_2^2 \kappa_0^2 + 4\kappa_0^2) \cos 2\varphi' \cos \varphi_2 + \\ + (4\kappa_2^2 \kappa_0^2 + 4\kappa_0^2) \sin 2\varphi' \sin \varphi_2 = 0. \quad (3.14)$$

Если $\varphi_2 \neq \pm \frac{1}{2} \pi$, то это уравнение можно поделить на $\cos \varphi_2$, после чего найдем

$$\kappa_0^4 + 2\kappa_0^2 [4 + (2 + \kappa_2^2) \sec 2\alpha \cos 2(\varphi' - \alpha)] - 3(\kappa_2^4 + 4\kappa_2^2) = 0, \quad (3.15)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2 + 2\kappa_2^2}{2 + \kappa_2^2} \operatorname{tg} \varphi_2, \quad |2\alpha| \leq \frac{1}{2} \pi. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.15) и есть как раз уравнение искомого геометрического места точек. Оно представляет собой квадратное уравнение относительно κ_0^2 , единственным положительным корнем которого является

$$\kappa_0^2 = -B + [B + 3(\kappa_2^4 + 4\kappa_2^2)]^{1/2}, \quad (3.17)$$

где

$$B = 4 + (2 + \kappa_2^2) \sec 2\alpha \cos 2(\varphi' - \alpha). \quad (3.18)$$

Таким образом, величину κ_0 можно в общем случае выразить как однозначную функцию от $\varphi' = \varphi_0 - \varphi_2$. Найдя κ_0 и φ_0 , можно при помощи соотношения (3.11) найти вектор $\mathbf{k}_0 = (\kappa_0, l_0)$ и, воспользовавшись (3.9), найти векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 .

4. Обсуждение

Найденное геометрическое место точек изображено для некоторых типичных значений волнового вектора \mathbf{k}_2 на рис. 1—4. Это — кривая четвертой степени с двумя осями симметрии, проходящая через точку $-\frac{1}{2}\mathbf{k}_2$ и образующая с вектором \mathbf{k}_2 углы α и $(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$. Концы волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 лежат в диаметрально противоположных точках кривой. Если положить $\varphi' = 0$ или π , то (3.15) сводится к уравнению

$$(\kappa_0^2 - \kappa_2^2)(\kappa_0^2 + 3\kappa_2^2 + 12) = 0, \quad \kappa_0 = \kappa_2, \quad (4.1)$$

показывающему, что обе точки $-\mathbf{k}_2$ и \mathbf{O} лежат на кривой (эти точки обозначены через P и O соответственно). Если же положить $\varphi' = \pm \frac{1}{2}\pi$, то (3.15) принимает вид

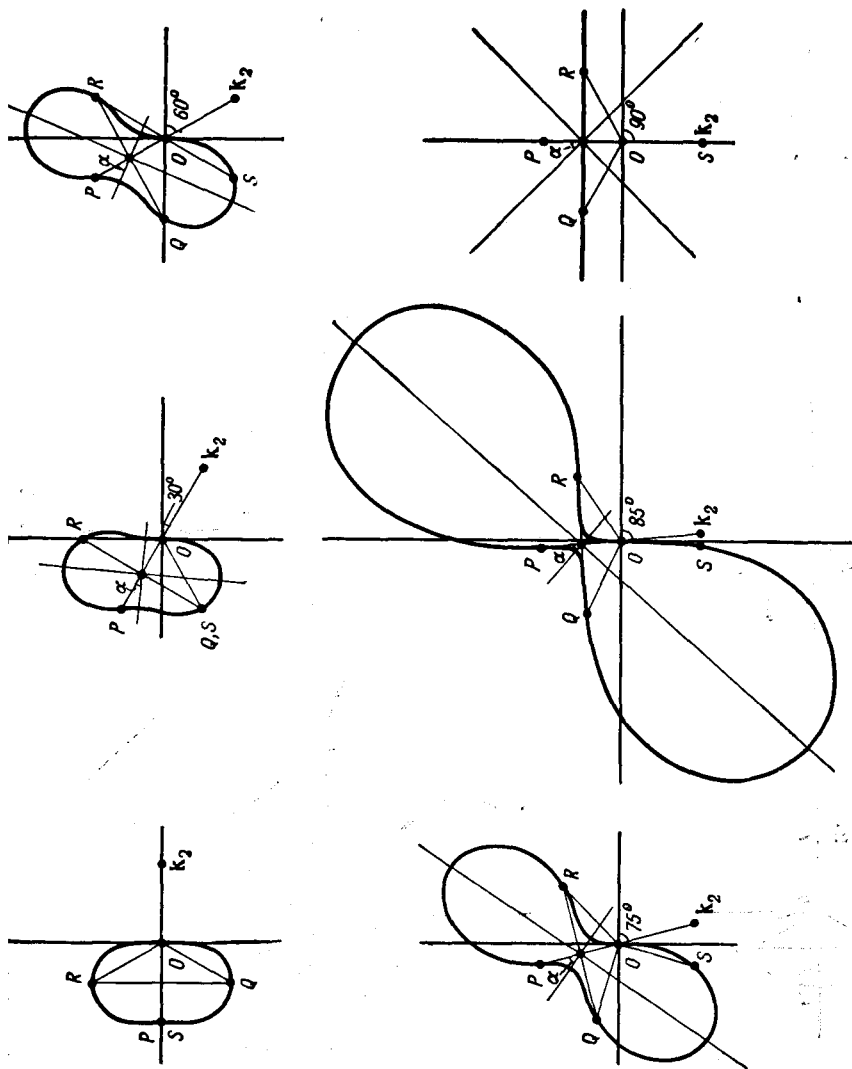
$$(\kappa_0^2 - 3\kappa_2^2)(\kappa_0^2 + \kappa_2^2 + 4) = 0, \quad \kappa_0 = \sqrt{3}\kappa_2. \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что точки, получающиеся поворотом вектора \mathbf{k}_2 на угол $\pm \frac{2}{3}\pi$, также лежат на кривой (эти точки обозначены через R и Q соответственно).

Точки P , Q и R являются тремя точками пересечения кривой с окружностью радиуса κ_2 с центром в точке O . Четвертая точка пересечения этой окружности с кривой S получается отражением вектора \mathbf{k}_2 относительно оси l . Так как степени кривой и окружности равны соответственно 4 и 2, то, вообще говоря, точек пересечения имеется 8; однако рассмотрение показывает, что остальные 4 точки пересечения мнимые.

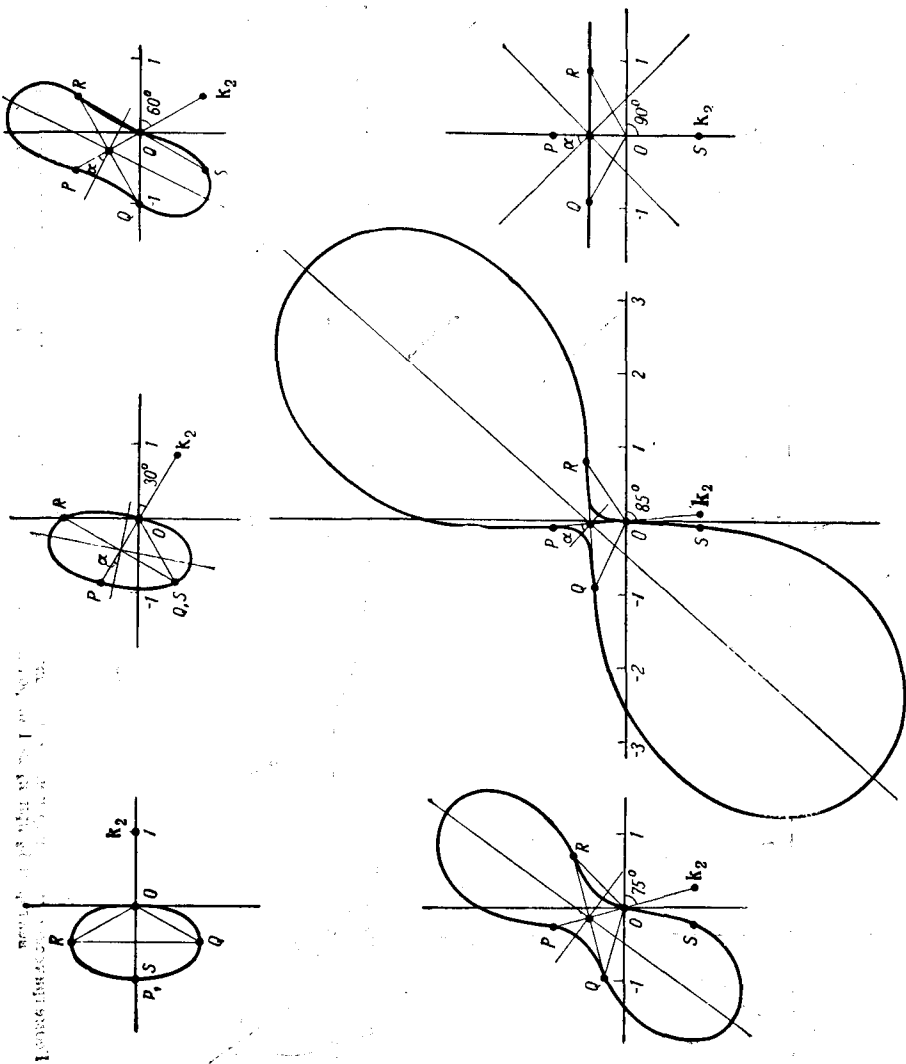
Указанные четыре точки P , Q , R и S являются удобными ориентирами на кривой, поскольку, как будет видно, они отделяют те части кривой, в пределах которых коэффициенты переноса энергии положительны, от тех, где они отрицательны.

Из рис. 1—4 можно видеть, что для фиксированного значения \mathbf{k}_2 на положительной действительной оси ($\varphi_2 = 0$) рассматриваемое геометрическое место точек представляет собой овал (вообще говоря, не эллипс) с вертикальной главной осью. По мере того как φ_2 становится отрицательным, эта ось наклоняется; одновременно с этим происходит удлинение кривой. При



Р и с. 1.

Геометрическое место пар концов волновых векторов k_1 и k_2 , которые взаимодействуют с заданным волновым вектором k_3 при $k_3 \gg 1$ (короткие планетарные волны). Точки Q , R и S определены в § 4.



Р и с. 2.

Геометрическое место пар концов волновых векторов k_1 и k_2 , которые взаимодействуют с заданным волновым вектором k_2 при $k_2 = 1$.

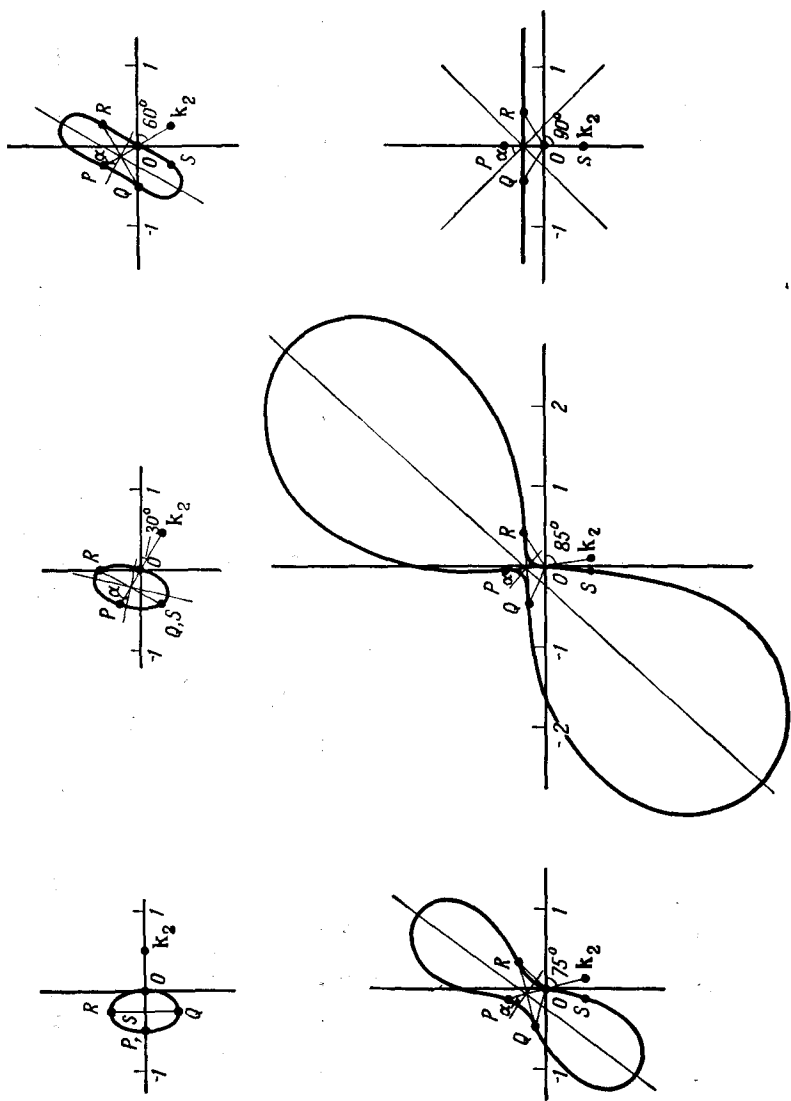
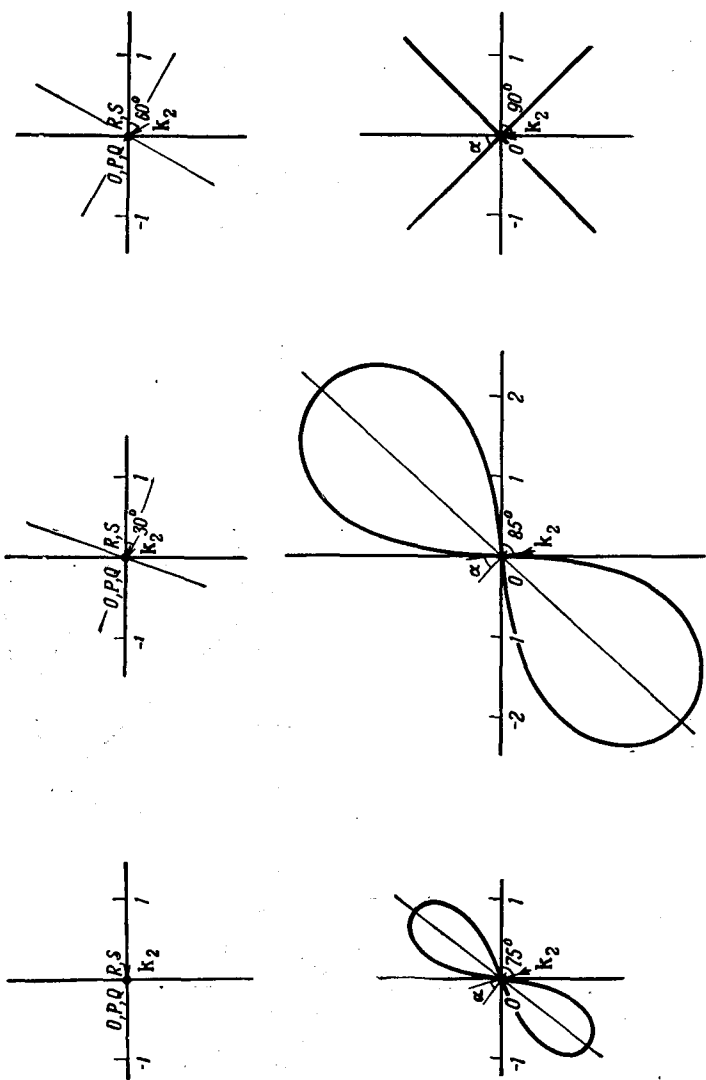


Рис. 3. Геометрическое место пар концов волновых векторов k_1 и k_2 , которые взаимодействуют с заданным волновым вектором k_3 при $k_1 = 1/2$.



Р и с. 4.

Геометрическое место пар концов волновых векторов k_1 и k_2 , которые взаимодействуют с заданным волновым вектором k_2 при $\alpha_2 \ll 1$ (длинные планетарные волны).

некотором значении φ_2 в средней части кривой возникает «талия», после чего она становится похожей по форме на песочные часы. Когда φ_2 приближается к $-\frac{1}{2}\pi$, две закругленные части кривой удаляются в бесконечность и у кривой возникают две асимптоты (одной из которых является ось l , а другой — прямая $l = \frac{1}{2}l_2$). Для значений $|\varphi_2|$, превышающих $\frac{1}{2}\pi$, но меньших π , рассматриваемые кривые представляют собой отражение относительно оси l кривых, соответствующих $(-\pi - \varphi_2)$. Кривые, соответствующие положительным значениям φ_2 , являются отражениями относительно оси k кривых, соответствующих $(-\varphi_2)$. (Вследствие этой симметрии достаточно рассмотреть значения φ_2 , лежащие, скажем, в интервале $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi_2 \leq 0$.)

На рис. 1 представлен случай, когда κ_2 велико, т. е. волны бездивергентны (очень короткие планетарные волны). В этом случае уравнение (3.15) сводится к

$$(\chi_0/\chi_2)^4 + 2(\chi_0/\chi_2)^2 \sec 2\alpha \cos 2(\varphi' - \alpha) - 3 = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.4)$$

Можно проверить, что в этом случае касательная к кривой в начале координат ($\varphi' = 0$ или π) всегда вертикальна.

На рис. 2 изображен случай, когда $\kappa_2 = 1$, а на рис. 3 — случай, когда $\kappa_2 = 1/2$.

В пределе, когда $\kappa_2 \rightarrow 0$ (очень длинные волны), те решения χ_0 уравнения (3.15), которые стремятся с изменением κ_2 к 0, определяются уравнением

$$\chi_0^2 [2 + \sec \varphi_2 \cos 2(\varphi' - \alpha)] - 3\chi_2^2 = 0, \quad (4.5)$$

где

$$2\alpha = -\varphi_2. \quad (4.6)$$

В общем случае это уравнение конических сечений. При $-\frac{1}{3}\pi < \varphi_2 \leq 0$ оно представляет собой эллипс с главной осью, наклоненной к оси k под углом $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \pi)$. При $\varphi_2 \rightarrow \frac{1}{3}\pi$ главная ось становится большей по сравнению с χ_2 и часть кривой, определяемая уравнением (4.5), вырождается в две прямые, проходящие через точки $-k_2$ и O и наклоненные по отношению к оси k под углом $-\frac{1}{3}\pi$. Оставшаяся часть кривой соответствует значениям χ_0 порядка $\chi_2^{1/2}$. Для значений φ_2 , лежащих между $-\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$, часть кривой, определяемая (4.5), представляет

собой гиперболу. Оставшаяся часть лежит в конечной части плоскости (см. рис. 4) и с учетом (3.15) определяется уравнением

$$\kappa_0^2 + 4[2 + \sec \varphi_2 \cos 2(\varphi' - \alpha)] = 0. \quad (4.7)$$

Таким образом, в этом интервале изменения φ_2 кривая имеет форму песочных часов, но с бесконечно малой «талией» по середине.

Когда конец вектора k_1 лежит в точке S , вектор k_3 , конец которого попадает в точку, диаметрально противоположную концу вектора k_1 , должен оказаться на оси l (чтобы было $k_1 + k_2 + k_3 = \mathbf{0}$). В этом случае k_3 соответствует установившемуся зональному течению, но с ненулевым меридиональным волновым числом l_3 . Таким образом, имеем две волны k_1 и k_2 , которые обладают одной и той же длиной, как в направлении x , так и в направлении y ; комбинация этих векторов взаимодействует с волной k_3 , соответствующей зональному течению.

Обратно, когда вектор k_2 лежит на оси l и, следовательно, соответствует зональному течению, векторы k_1 и k_3 должны лежать на двух прямых, в которые вырождается рассматриваемое геометрическое место точек, причем на равных расстояниях от точки $-\frac{1}{2}k_2$.

Частный случай, отмеченный Кенионом [6], имеет место при $\varphi_2 = 0$ (и $\kappa_i \gg 1$), когда k_1 и k_3 попадают в точки Q и R соответственно. Кенион заметил, что этот случай принадлежит классу случаев, в которых $\sigma_1 = \sigma_3 = -\frac{1}{2}\sigma_2$. Частный случай, отмеченный Стерном [16], имеет место при $l_1 = l_2 = -\frac{1}{2}l_3$, но $k_1 \neq -k_2$. (Рассмотрение показывает, что прямая $l = l_2$ в общем случае пересекает геометрическое место точек, о котором идет речь, в двух действительных точках, однако только для одной из них справедливо равенство $k_1 = -k_2$.)

5. Некоторые законы сохранения

До сих пор мы рассматривали необходимые условия резонансного взаимодействия волнового триплета, т. е. задачу, связанную только с линейными дисперсионными соотношениями. Чтобы определить скорость обмена энергией в резонансном триплете, следует использовать полное уравнение (2.5), содержащее нелинейные члены. Его можно записать в виде

$$(\nabla^2 \psi - \psi)_t + (\psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y) + \psi_x = 0. \quad (5.1)$$

Отметим сначала некоторые законы сохранения. Умножая (5.1) на ψ и перегруппировывая члены, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \psi_x^2 + \frac{1}{2} \psi_y^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi_{xt} + \psi \psi_y \nabla^2 \psi + \frac{1}{2} \psi^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi \psi_{yt} - \psi \psi_x \nabla^2 \psi). \quad (5.2)$$

При интегрировании по большой области правая часть (5.2) превращается в интеграл по границе; этот интеграл возрастает, как линейный размер L . В то же время левая часть возрастает, как L^2 . Если амплитуда ψ ограничена, отсюда следует, что

$$\iint \left(\frac{1}{2} \psi_x^2 + \frac{1}{2} \psi_y^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) dx dy = \text{const}. \quad (5.3)$$

Первые два члена подинтегрального выражения представляют собой плотность кинетической, а третий — плотность потенциальной энергии (в безразмерной форме).

Можно видеть, что для решения в виде плоской волны (2.11) плотности кинетической и потенциальной энергий равны соответственно $\frac{1}{4} (\kappa^2 a^2)$ и $\frac{1}{4} (a^2)$. Таким образом, для коротких планетарных волн ($\kappa > 1$) кинетическая энергия превосходит потенциальную, а для длинных планетарных волн потенциальная энергия превосходит кинетическую.

Далее можно заметить, что если три последних члена уравнения (5.1) перенести в правую часть, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \psi) = - \frac{\partial}{\partial x} (\psi_y \nabla^2 \psi + \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi_x \nabla^2 \psi), \quad (5.4)$$

откуда следует, что

$$\iint (\nabla^2 \psi - \psi) dx dy = \text{const}. \quad (5.5)$$

Обращаясь к уравнению (2.16), мы видим, что этим выражается закон сохранения *потенциального вихря*.

Аналогичным образом, умножая обе стороны (5.1) на $(\nabla^2 \psi - \psi)$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \psi)^2 = \frac{\partial}{\partial x} [\psi (\nabla^2 \psi - \psi)_y + \psi_y^2 - \psi_x^2 + \psi^2] - \frac{\partial}{\partial y} [\psi (\nabla^2 \psi - \psi)_x + 2\psi_x \psi_y], \quad (5.6)$$

откуда на основании тех же соображений следует

$$\iint (\nabla^2 \psi - \psi)^2 dx dy = \text{const}. \quad (5.7)$$

Этим выражается закон сохранения *квадрата возмущения потенциального вихря*. Аналогично может быть проведен вывод для более высоких моментов.

Уравнение (5.4) можно также записать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\psi_{xt} + \psi_y \nabla^2 \psi + \psi) - \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{yt} - \psi_x \nabla^2 \psi). \quad (5.8)$$

Таким образом,

$$\iint \psi \, dx \, dy = \text{const}, \quad (5.9)$$

что эквивалентно сохранению полной массы. Дифференцируя (5.8) по x и y соответственно, аналогичным образом приходим к выводу о сохранении составляющих полного импульса в направлениях с севера на юг и с востока на запад.

6. Обмен энергией в резонансном триплете

Представим решение для слабо взаимодействующего триплет волн в виде

$$\psi = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3, \quad (6.1)$$

где θ_n обозначают фазы

$$\theta_n = k_n x + l_n y - \sigma_n t + \epsilon_n \quad (n = 1, 2, 3), \quad (6.2)$$

а амплитуды $a_n(t)$ представляют собой медленно меняющиеся функции одного только времени t . Прямая подстановка (6.1) в динамическое уравнение (5.1) дает

$$\begin{aligned} (\kappa_1^2 + 1) \dot{a}_1 \cos \theta_1 + (\kappa_2^2 + 1) \dot{a}_2 \cos \theta_2 + (\kappa_3^2 + 1) \dot{a}_3 \cos \theta_3 = \\ = C_1 a_2 a_3 [\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2 - \theta_3)] + \\ + C_2 a_3 a_1 [\cos(\theta_3 + \theta_1) - \cos(\theta_3 - \theta_1)] + \\ + C_3 a_1 a_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

где через C_1, C_2, C_3 обозначены коэффициенты взаимодействия

$$C_1 = \frac{1}{2} (\kappa_2^2 - \kappa_3^2) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) \quad \text{и т. д.}, \quad (6.4)$$

\mathbf{z} — единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Если условия резонанса (3.4) удовлетворены, то, скажем,

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = 2b, \quad (6.5)$$

так что в данном случае

$$C_1 = b(\kappa_2^2 - \kappa_3^2) \quad \text{и т. д.} \quad (6.6)$$

Если, далее, фазы ϵ_n связаны соотношением

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0, \quad (6.7)$$

то три члена в левой части (6.3) уравниваются тремя членами в правой при условии, что

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_1^2) \dot{a}_1 &= b (\kappa_2^2 - \kappa_3^2) a_2 a_3, \\ (1 + \kappa_2^2) \dot{a}_2 &= b (\kappa_3^2 - \kappa_1^2) a_3 a_1, \\ (1 + \kappa_3^2) \dot{a}_3 &= b (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) a_1 a_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Остальные члены в правой части в общем случае не соответствуют свободным волнам и поэтому не будут непосредственно участвовать в резонансном переносе энергии. Соответствующие им возмущения будут «вынужденными» волнами, амплитудой которых при некоторых общих условиях можно пренебречь (см. ниже).

Можно видеть, что полная энергия волнового триплета сохраняется. Умножим уравнения (6.8) последовательно на a_1 , a_2 , a_3 и сложим результаты, при этом правая часть обращается в нуль. После интегрирования находим соотношение

$$(1 + \kappa_1^2) a_1^2 + (1 + \kappa_2^2) a_2^2 + (1 + \kappa_3^2) a_3^2 = \text{const}, \quad (6.9)$$

аналогичное (5.3).

Подобным образом, умножив уравнения (6.8) на $(1 + \kappa_1^2) a_1$, $(1 + \kappa_2^2) a_2$ и $(1 + \kappa_3^2) a_3$ соответственно и проинтегрировав, найдем соотношение

$$(1 + \kappa_1^2)^2 a_1^2 + (1 + \kappa_2^2)^2 a_2^2 + (1 + \kappa_3^2)^2 a_3^2 = \text{const}, \quad (6.10)$$

аналогичное (5.5).

Последние два закона сохранения (6.9) и (6.10) сходны с отмеченным в работе [2] для бездивергентного движения невращающейся жидкости. Обозначим через Δ_n изменение a_n^2 в течение времени от момента t_0 до более позднего момента t . Из (6.9) и (6.10) тогда получаем следующую пару уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_1^2) \Delta_1 + (1 + \kappa_2^2) \Delta_2 + (1 + \kappa_3^2) \Delta_3 &= 0, \\ (1 + \kappa_1^2)^2 \Delta_1 + (1 + \kappa_2^2)^2 \Delta_2 + (1 + \kappa_3^2)^2 \Delta_3 &= 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

из которых следует

$$\frac{(1 + \kappa_1^2) \Delta_1}{\kappa_2^2 - \kappa_3^2} = \frac{(1 + \kappa_2^2) \Delta_2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} = \frac{(1 + \kappa_3^2) \Delta_3}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}. \quad (6.12)$$

Если, например, $\kappa_1^2 < \kappa_2^2 < \kappa_3^2$, то знак Δ_2 всегда противоположен знакам Δ_1 и Δ_3 . Другими словами, поток энергии в сторону

двух крайних волновых чисел κ_1 и κ_3 всегда имеет один и тот же знак, противоположный знаку потока энергии к промежуточному волновому числу κ_2 . То же справедливо и в отношении потока квадрата возмущения потенциального вихря.

Умножив уравнения (6.8) на a_1 , a_2 и a_3 соответственно, имеем

$$\frac{1}{2}(1 + \kappa_1^2) da_1^2/dt = b(\kappa_2^2 - \kappa_3^2) a_1 a_2 a_3 \quad (6.13)$$

и два аналогичных уравнения. Из этих уравнений следует, что знак потока энергии, например к первой волне, зависит не только от знака величины $a_1 a_2 a_3$ (которая может быть отрицательной), но также от знака величины $b(\kappa_2^2 - \kappa_3^2)$. Положительна или отрицательна эта последняя величина, можно легко определить из рис. 1—4. Когда конец вектора \mathbf{k}_3 описывает соответствующую кривую, множитель $(\kappa_2^2 - \kappa_3^2)$, вообще говоря, меняет знак при прохождении конца вектора \mathbf{k}_3 через точки P , Q , R или S .

Следует отметить, что когда два из волновых чисел κ_1 , κ_2 , κ_3 равны между собой, соответствующий коэффициент C_i обращается в нуль. В частности, когда концы векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 лежат в точках Q и R , так что Q , R и конец вектора \mathbf{k}_2 образуют равнобедренный треугольник, перенос энергии между волновыми компонентами равен нулю.

В случае зонального течения, когда, скажем, вектор \mathbf{k}_2 лежит на оси l , из указанных диаграмм следует, что либо \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 также лежат на оси l (а это приводит к обращению b в нуль, $b = 0$, и тогда переноса энергии нет), либо концы векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 лежат на равных расстояниях от O , так что $\kappa_1 = \kappa_3$. В последнем случае C_2 равно нулю, но C_1 и C_3 , вообще говоря, нулю не равны. Из (6.8) мы видим тогда, что $\dot{a}_2 = 0$; можно сказать, что зональное течение не приобретает и не теряет энергии во взаимодействии с двумя другими компонентами. Однако при $a_2 \neq 0$ уравнения (6.8) показывают, что как a_1 , так и a_3 будут совершать гармонические колебания около нулевых средних значений. В этом случае зональное течение действует как своего рода катализатор, который позволяет двум другим волнам обмениваться энергией.

В общем случае уравнения (6.8) могут быть разрешены явно в эллиптических функциях. Таким образом, если

$$k^2 \equiv \frac{\frac{1 + \kappa_1^2}{\kappa_3^2 - \kappa_2^2} a_{10}^2 + \frac{1 + \kappa_2^2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} a_{20}^2}{\frac{1 + \kappa_3^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} a_{30}^2 + \frac{1 + \kappa_2^2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} a_{20}^2} < 1 \quad (6.14)$$

(индекс 0 обозначает некоторое начальное значение), то решение имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \operatorname{cn}(t/t_0 - \lambda), \\ a_2 &= a_2 \operatorname{sn}(t/t_0 - \lambda), \\ a_3 &= a_3 \operatorname{dn}(t/t_0 - \lambda), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a_{10}^2 + \frac{\kappa_3^2 - \kappa_2^2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} \frac{1 + \kappa_2^2}{1 + \kappa_1^2} a_{20}^2, \\ a_2^2 &= a_{20}^2 + \frac{\kappa_3^2 - \kappa_1^2}{\kappa_3^2 - \kappa_2^2} \frac{1 + \kappa_1^2}{1 + \kappa_2^2} a_{10}^2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} a_3^2 &= a_{30}^2 + \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} \frac{1 + \kappa_2^2}{1 + \kappa_3^2} a_{20}^2, \\ bt_0 &= \left[\frac{\kappa_3^2 - \kappa_2^2}{1 + \kappa_1^2} \left(\frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{1 + \kappa_3^2} a_{20}^2 + \frac{\kappa_3^2 - \kappa_1^2}{1 + \kappa_2^2} a_{30}^2 \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Величина λ может быть найдена с использованием начальных условий. Модуль k эллиптических функций определяется из (6.14). Если неравенство (6.14) не удовлетворяется, то решение получается переменной местами индексов 1 и 3 в вышеприведенных формулах. Величина t_0 представляет собой время взаимодействия и в общем случае имеет порядок $(1 + \kappa^2)/\kappa^4 a$, где через a обозначен порядок величин a_1 , a_2 и a_3 . Однако при $k = 1$ имеем $\operatorname{cn} = \operatorname{dn} \equiv \operatorname{sch}$ и $\operatorname{sn} \equiv \operatorname{th}$, так что время t_0 становится бесконечным. При этом волна с амплитудой a_2 все время отбирает энергию у волн с амплитудами a_1 и a_3 .

Легко можно выписать условие «слабого» взаимодействия волн в указанном выше смысле. Пусть, например, $a'_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$ обозначает функцию тока для нерезонансной волны, возбуждаемой слагаемым в правой части (6.3), которое пропорционально $\cos(\theta_1 - \theta_3)$. Простое вычисление показывает, что

$$a'_1 = \frac{\frac{1}{2}(\kappa_2^2 - \kappa_3^2)(z \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3)}{(k_2 - k_3) - (1 - \kappa'^2)(\sigma_2 - \sigma_3)} a_2 a_3, \quad (6.18)$$

где $\kappa' = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3|$. Чтобы этой величиной можно было пренебречь, она должна быть мала по сравнению с амплитудами a_1 , a_2 или a_3 , которые мы считаем величинами одного порядка a . Для коротких планетарных волн ($\kappa \gg 1$) из (6.18) имеем

$$a'_1/a \sim \kappa^3 \ll 1, \quad (6.19)$$

а для длинных планетарных волн ($\kappa \ll 1$ и $\sigma \sim \kappa$) имеем

$$a'_1/a \sim a\kappa \ll 1. \quad (6.20)$$

В обоих случаях это эквивалентно условию

$$a\kappa \ll \sigma/\kappa, \quad (6.21)$$

означающему, что отношение скорости частицы к фазовой скорости должно быть мало по сравнению с единицей. Это отношение равно показателю взаимодействия R , так что мы должны иметь

$$R \ll 1, \quad (6.22)$$

т. е. то же условие, которое нужно для представления решения в виде ряда теории возмущений по степеням R .

Когда же, напротив, $R \gg 1$, вынужденные взаимодействия становятся относительно сильными и течение переходит в турбулентное. Это как раз тот случай, к которому применим анализ, выполненный в работе [11].

7. Обмен энергией в непрерывном спектре

Скорость переноса энергии в непрерывном спектре гравитационных волн была вычислена Хассельманом [3]. Тот же способ применен Кенионом [6] к непрерывному спектру волн Росби на β -плоскости. Кенион считал движение бездивергентным. Мы обобщим здесь результат Кениона, приняв во внимание дивергенцию.

Предположим, что функция тока ψ может быть разложена в степенной ряд по малому параметру R , т. е.

$$\psi = R_1\psi + R_2^2\psi + R_3^3\psi + \dots \quad (7.1)$$

(R^n в дальнейшем будет включено в $n\psi$). Примем, далее, что низшее приближение может быть выражено в виде

$${}_1\psi = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)\}, \quad \sigma = \frac{-k}{x^2 + 1}, \quad (7.2)$$

где амплитуды $a_{\mathbf{k}}$ распределены случайно и независимо по закону Гаусса (за исключением только того, что $a_{-\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^*$). Высшие приближения ${}_2\psi$, ${}_3\psi$ и т. д. могут быть затем найдены из уравнения движения (5.1).

Средняя плотность энергии, которая во втором порядке определяется выражением

$$E = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_y^2 + \bar{\psi}^2) \quad (7.3)$$

(где черточкой обозначено среднее по распределению), может быть представлена в виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (7.4)$$

Здесь $F(\mathbf{k})$ — спектральная плотность. Плотность $F(\mathbf{k})$ можно разложить в ряд, подобный (7.1), а именно

$$F(\mathbf{k}) = {}_2F(\mathbf{k}) + {}_3F(\mathbf{k}) + {}_4F(\mathbf{k}). \quad (7.5)$$

Член низшего порядка ${}_2F$ определяется соотношением¹⁾

$${}_2F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \sum_{d\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\chi^2 + 1) |a_{\mathbf{k}}|^2, \quad (7.6)$$

которое формально не зависит от t . Следующий член ${}_3F$ тождественно равен нулю. Далее, член ${}_4F$ содержит выражение, пропорциональное t . Это указывает на постепенное изменение спектра F :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \doteq \frac{\partial {}_4F}{\partial t}. \quad (7.7)$$

Можно показать (см. статью Хассельмана на стр. 106 этого сборника), что в подобных случаях гауссов характер решения существенно не нуждается в модификации вследствие слабого переноса энергии, т. е. гипотеза гауссовости внутренне непротиворечива.

Вычисление $\partial {}_4F/\partial t$ в случае, когда учитывается дивергенция, проводится в точности тем же путем, что и в бездивергентном случае [6]. Действительно, соответствующее выражение для дивергентного случая может быть получено просто заменой всюду χ^2 и χ_i^2 на $(\chi^2 + 1)$ и $(\chi_i^2 + 1)$ соответственно. Поскольку это так, мы можем сразу записать окончательное выражение для $\partial F/\partial t$ и сравнить его с результатом Кениона [6, уравнение (60)]. Полагая для краткости ${}_2F(\mathbf{k}_n) = F_n$, имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = 8\pi \int \int \int \frac{C_1(C_1 F_2 F_3 + C_2 F_3 F_1 + C_3 F_1 F_2)}{(1 + \chi_1^2)(1 + \chi_2^2)(1 + \chi_3^2)} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \quad (7.8)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2} (\chi_2^2 - \chi_3^2) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) \text{ и т. д.}, \quad (7.9)$$

а через $\delta(\mathbf{k})$ и $\delta(\sigma)$ обозначены дельта-функции Дирака.

¹⁾ Энергия данной волновой компоненты поделена поровну между волновыми векторами \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$.

Так как

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad (7.10)$$

непосредственно видно, что полная энергия сохраняется, т. е.

$$\iint \frac{\partial F_1}{\partial t} d\mathbf{k}_1 = 0. \quad (7.11)$$

Поскольку

$$(\kappa_1^2 + 1)C_1 + (\kappa_2^2 + 1)C_2 + (\kappa_3^2 + 1)C_3 = 0, \quad (7.12)$$

видно также, что сохраняется квадрат потенциального вихря, т. е.

$$\iint (\kappa_1^2 + 1) \frac{\partial F_1}{\partial t} d\mathbf{k}_1 = 0. \quad (7.13)$$

Это также эквивалентно сохранению составляющей «количества движения» по направлению с востока на запад, т. е.

$$\iint \frac{k_1}{\sigma_1} \frac{\partial F_1}{\partial t} d\mathbf{k}_1 = 0. \quad (7.14)$$

Из (7.11) и (7.14) после приравнивания нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1/\sigma_1 & k_2/\sigma_2 & k_3/\sigma_3 \\ l_1/\sigma_1 & l_2/\sigma_2 & l_3/\sigma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} \quad (7.15)$$

следует, что

$$\iint \frac{l_1}{\sigma_1} \frac{\partial F_1}{\partial t} d\mathbf{k}_1 = 0. \quad (7.16)$$

Другими словами, составляющая «количества движения» в направлении с севера на юг также сохраняется.

Из уравнения (7.8) видно, что поток энергии к волне, определяемой, скажем, волновым вектором \mathbf{k}_1 , состоит из трех частей: 1 часть, определяемая совместно векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , которая пропорциональна $C_1^2 F_3 F_1$ и поэтому всегда положительна; 2 часть, определяемая совместно векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 , которая пропорциональна $C_1 C_2 F_3 F_1$ и которая может быть как положительной, так и отрицательной; и, наконец, 3 часть, определяемая совместно векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , которая также может быть как положительной, так и отрицательной. Исходя только из знаков величин C_1 , C_2 и C_3 , невозможно сказать, будет ли положительным или отрицательным полный поток энергии к волне, определяемой данным волновым вектором. Тем не менее, возможно, заслуживает внимания то обстоятельство, что, как это следует из уравнения (8.10), знак одного из коэффициентов C_1 , C_2 , C_3

противоположен знаку двух других и что знак соответствующего одного из коэффициентов C_2, C_3, C_3C_1, C_1C_2 также противоположен знаку двух других.

8. Планетарные волны на сфере

До сих пор мы рассматривали волны на некоторой части сферической поверхности, которая была достаточно ограниченной, чтобы можно было применить приближенное рассмотрение на β -плоскости. Рассмотрим теперь, что произойдет, если волны распространяются за пределы указанной ограниченной области, пробегая по всей сфере.

Достаточно хорошо известно, что планетарные волны на β -плоскости, кроме того, что они имеют локальный смысл, являются еще волнами второго класса [5, 10], покрывающими всю сферу. Свободные движения на сфере могут быть проанализированы при помощи гармоник. В случае бездивергентных движений это — поверхностные сферические гармоники S_n^m [4]; для дивергентного движения они приближенно описываются сфероидальными волновыми функциями [8]. Однако в общем случае можно показать, что в ограниченной области сферы любое движение приближенно описывается волнами на β -плоскости с соответствующими фазовыми и групповыми скоростями [7, 8].

Рассмотрим для простоты бездивергентные волны. Сферическая гармоника S_n^m степени n и порядка m соответствует локально некоторой β -плоской волне с волновым вектором (k, l) , где

$$k \sin \theta = m, \quad (k^2 + l^2)^{1/2} = n. \quad (8.1)$$

Здесь через θ обозначен угол, дополнительный к широте, радиус сферы принят за единицу.

Зильберман [15] показал, что в случае бездивергентного движения необходимые условия того, чтобы три поверхностные гармоники $S_{n_1}^{m_1}, S_{n_2}^{m_2}, S_{n_3}^{m_3}$ взаимодействовали, заключаются в следующем:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= 0, \\ |n_1 - n_3| < n_2 < (n_1 + n_2), \\ (n_1 + n_2 + n_3) &\text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ясно, что первое из уравнений (8.2) эквивалентно правилу суммирования (3.4) для волновых чисел, определяющих распространение волн в восточном направлении при любой заданной дополнительной широте θ . Второе уравнение (8.2) представляет собой «правило треугольника»: оно показывает, что можно по-

строить треугольник со сторонами, образованными тремя волновыми векторами. Смысл третьего условия (8.2) будет истолкован позже.

При анализе на β -плоскости волновое число l в северном направлении играет столь же важную роль, как и волновое число в восточном направлении. Однако из (8.1) ясно, что l должно быть функцией широты, по крайней мере для бездивергентных волн. Представляется разумным предположить, что перенос энергии между гармониками происходит только на тех широтах, на которых волновые числа l_i удовлетворяют правилу суммирования, и что энергия распространяется из этих широт с групповыми скоростями указанных трех волн.

Если имеется перенос энергии на какой-то широте в северном полушарии, то вследствие симметрии относительно экватора должен происходить также аналогичный перенос энергии на соответствующей широте в южном полушарии. Исследуем теперь, может ли происходить такой перенос энергии более чем на одной паре широт.

Из уравнений (8.1) для каждой из трех волн имеем

$$m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta + l^2 = n^2 \quad (8.3)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} l_1^2 &= n_1^2 - m_1^2 q, \\ l_2^2 &= n_2^2 - m_2^2 q, \\ l_3^2 &= n_3^2 - m_3^2 q, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где $q = \operatorname{cosec}^2 \theta$. Далее, из тождества

$$\begin{aligned} (l_1^4 + l_2^4 + l_3^4) - 2(l_2^2 l_1^2 + l_3^2 l_1^2 + l_1^2 l_2^2) &\equiv \\ &\equiv (l_1 + l_2 + l_3)(l_1 - l_2 - l_3)(l_2 - l_3 - l_1)(l_3 - l_1 - l_2) \end{aligned} \quad (8.5)$$

следует, что множитель $(l_1 + l_2 + l_3)$ в правой части (8.5) может обращаться в нуль только тогда, когда обращается в нуль левая часть (8.5). Подставляя (8.4) в (8.5), находим

$$\sum_{1,2,3} [(n_1^2 - m_1^2 q)^2 - 2(n_2^2 - m_2^2 q)(n_3^2 - m_3^2 q)] = 0. \quad (8.6)$$

Это выражение квадратично по q . Однако коэффициент при q^2 , т. е.

$$(m_1^4 + m_2^4 + m_3^4) - 2(m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2 + m_1^2 m_2^2), \quad (8.7)$$

обращается в нуль тождественно, поскольку имеет множителем $(m_1 + m_2 + m_3)$. Таким образом, уравнение (8.14) относительно q самое большее первого порядка. Другими словами, имеется

самое большое одно значение $\operatorname{cosec}^2 \theta$, для которого $(l_1 + l_2 + l_3)$ обращается в нуль и имеет место резонанс.

Теперь можно интерпретировать третье условие (8.2). Интерпретация состоит в том, что если бы $(n_1 + n_2 + n_3)$ было четным, то резонансная компонента, возбужденная на северном широтном круге, находилась бы точно в противофазе с соответствующей компонентой, возбуждаемой на южном широтном круге, и обе они уничтожили бы друг друга.

Так как поверхность сферы ограничена, значения n и m всегда целые, а спектр волн — дискретный. Если же взять очень большую сферу или допустить большие значения n и m , то более подходящим будет представление о непрерывном спектре, особенно если диссипация энергии достаточно велика для того, чтобы размазать соседние гармоники. В этом случае движения в окрестностях указанных кругов не будут связаны и перенос энергии на этих широтах не будет уничтожаться.

В более общем случае дивергентного движения, когда параметр

$$4\Omega^2/gh \quad (8.8)$$

не мал, сферические гармоники заменяются (приблизительно) сфероидальными гармониками S_n^m . При этом первое соотношение (8.1) сохраняется, однако второе должно быть заменено на следующее [8]:

$$k^2 + l^2 + f^2/gh = \text{const} = -2\Omega m/\sigma. \quad (8.9)$$

Это соотношение можно записать в виде

$$m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta + l^2 + \epsilon \cos^2 \theta = mr \quad (r = -2\Omega/\sigma). \quad (8.10)$$

Отсюда, полагая $\operatorname{cosec}^2 \theta = q$, находим

$$m^2 q + l^2 + \epsilon(1 - 1/q) = mr. \quad (8.11)$$

Теперь вместо (8.4) имеем

$$l_1^2 q = \epsilon + (m_1 r_1 - \epsilon) q m_1^2 q^2 \quad \text{и т. д.} \quad (8.12)$$

После подстановки в тождество (8.5) приходим к уравнению четвертой степени относительно q , старший член которого обращается в нуль, в результате чего уравнение становится кубическим. Таким образом, существует, вообще говоря, три корня q . Однако можно показать, что два из них находятся вне допустимого интервала $1 \leq q < \infty$, по крайней мере для достаточно малых ϵ . Поэтому в данном случае существует всего одна пара широт, вблизи которых происходит резонансное взаимодействие.

9. Заключение

Показано, что при определенных условиях триплет планетарных волн может взаимодействовать таким образом, что энергия одной волны передается двум другим и, более того, по крайней мере для больших значений волновых чисел место, где происходит передача энергии, расположено в окрестности некоторой пары широтных кругов. Одна из трех волн может представлять собой зональное течение. Однако мы показали, что для зонального течения коэффициент взаимодействия должен обращаться в нуль. Следовательно, как для системы дискретных волн, так и для непрерывного спектра волн на β -плоскости, подобного изученному Кенионом [6], зональное течение не может получать или терять энергию посредством этого механизма (хотя наличие этого течения может облегчать обмен энергией между некоторыми другими парами волновых чисел). Таким образом, настоящая теория не учитывает преобразования «вихревой» энергии в энергию среднего движения, как было, например, найдено в работе [18].

Для приложений к проблеме океана вообще желательно рассмотреть планетарные волны в замкнутом бассейне. Мы знаем, однако, что в прямоугольном бассейне на β -плоскости можно построить решения, являющиеся суммой четырех бегущих планетарных волн [7, 8]. Существует возможность, что для бассейнов определенного размера и ориентации может наступать резонанс между тремя модами низшего порядка. В настоящее время эта возможность исследуется.

Авторы благодарны м-ру Сойеру и проф. Филлипсу за замечания по первому варианту этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball F. K., Energy transfer between external and internal gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **19** (1964), 465—478.
2. Fjortoft R., On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional, non-divergent flow, *Tellus*, **5** (1953), 225—230.
3. Hasselmann K., On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum., *J. Fluid Mech.*, **12** (1961), 481—500.
4. Haurwitz B., The motion of atmospheric disturbances on a spherical earth, *J. Mar. Res.*, **3** (1940), 254—267.
5. Hough S. S., On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. Part II. On the general integration of Laplace's tidal equations. *Phil. Trans.*, **A191** (1898), 139—185.
6. Kenyon K., Non-linear Rossby waves. Woods Hole Oceanogr. Inst., Summer Study Program in Geophys. Fluid Dynamics. Student lectures, v. II, 1964, pp. 69—83.
7. Longuet-Higgins M. S., Planetary waves on a rotating sphere, *Proc. Roy. Soc.*, **A 279** (1964), 446—473.

8. Longuet-Higgins M. S., Planetary waves on a rotating sphere, II, *Proc. Roy. Soc.*, **A284** (1965), 40—54.
9. Lorenz E. N., Maximum simplification of the dynamical equations, *Tellus*, **12** (1960), 243—254.
10. Margules M., Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale (II Teil), *Sber. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Kl.*, **102** (1893), 11—56.
11. Pedlosky J., Spectral considerations in two-dimensional incompressible flow, *Tellus*, **14** (1962), 125—132.
12. Platzman G. W., The spectral form of the vorticity equation, *J. Meteor.*, **17** (1960), 635—644.
13. Platzman G. W., The analytical dynamics of the spectral vorticity equation, *J. Atmos. Sci.*, **19** (1962), 313—328.
14. Rossby C. G., Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action, *J. Mar. Res.*, **2** (1939), 38—55.
15. Silberman I., Planetary waves in the atmosphere., *J. Meteor.*, **11** (1954), 27—34.
16. Stern M. E., Non-linear interaction of planetary waves, Woods Hole Oceanogr. Inst. Contrib., № 1063, 1961.
17. Thorpe S. A., On wave interactions in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, **24** (1966), 737—751.
18. Wiin-Nielsen A., Drake M., An observational study of kinetic energy conversions in the atmosphere, *Mon. Weather Rev.*, **94** (1966), 221—230.

Обсуждение статьи М. С. Лонге-Хиггинса и А. Э. Гилла

К. КЕНИОН

В связи с обсуждением Лонге-Хиггинсом и Гиллом моих более ранних вычислений [5] может оказаться интересным кратко рассмотреть пример нелинейного переноса энергии в непрерывном спектре бездивергентных волн Россби и провести некоторое сравнение с измерениями в атмосфере. Мною была выдвинута гипотеза, что слабый нелинейный механизм резонансного переноса энергии, рассматриваемый, например, Хассельманом [4] для случайного поля гравитационных волн, играет существенную роль в энергетическом балансе длинных волн (длина волны 5000 км), которые наилучшим образом проявляются в средних широтах в верхних слоях атмосферы (поверхность 500 миллибар).

Упрощенная картина этих длинных атмосферных волн обсуждалась Россби [7], который описал, как происходит нарастание волны с изменением ее наклона между 0 и 1, а затем ослабление (иногда заканчивающееся переходом в циклон) в интервале времени от 3 до 6 недель. Эти волны, вероятно, зарождаются под влиянием бароклинной неустойчивости [1, 6] и затем растут до тех пор, пока не станет существенной нелинейность.

Модель, на которой основаны вычисления, рассматривалась Кенионом [5]. Эта модель описывает только взаимодействие между волнами и непригодна для рассмотрения взаимодействия волн с потоками, поскольку основные уравнения относятся к возмущениям относительно состояния покоя, а также поскольку коэффициент переноса энергии обращается в нуль для зонального течения.

На рис. 1 и 2 показаны вычисленные линии равной величины скорости переноса энергии, соответствующие двум различным начальным энергетическим спектрам. Первый рисунок относится к случаю изотропного начального энергетического спектра, сосредоточенного в узкой области вблизи волнового числа 5 на широте $47,5^\circ$ ($R = R_0 \cos 47,5^\circ$, R_0 — радиус Земли). Начальный спектр, соответствующий рис. 2, содержит размазывающий мно-

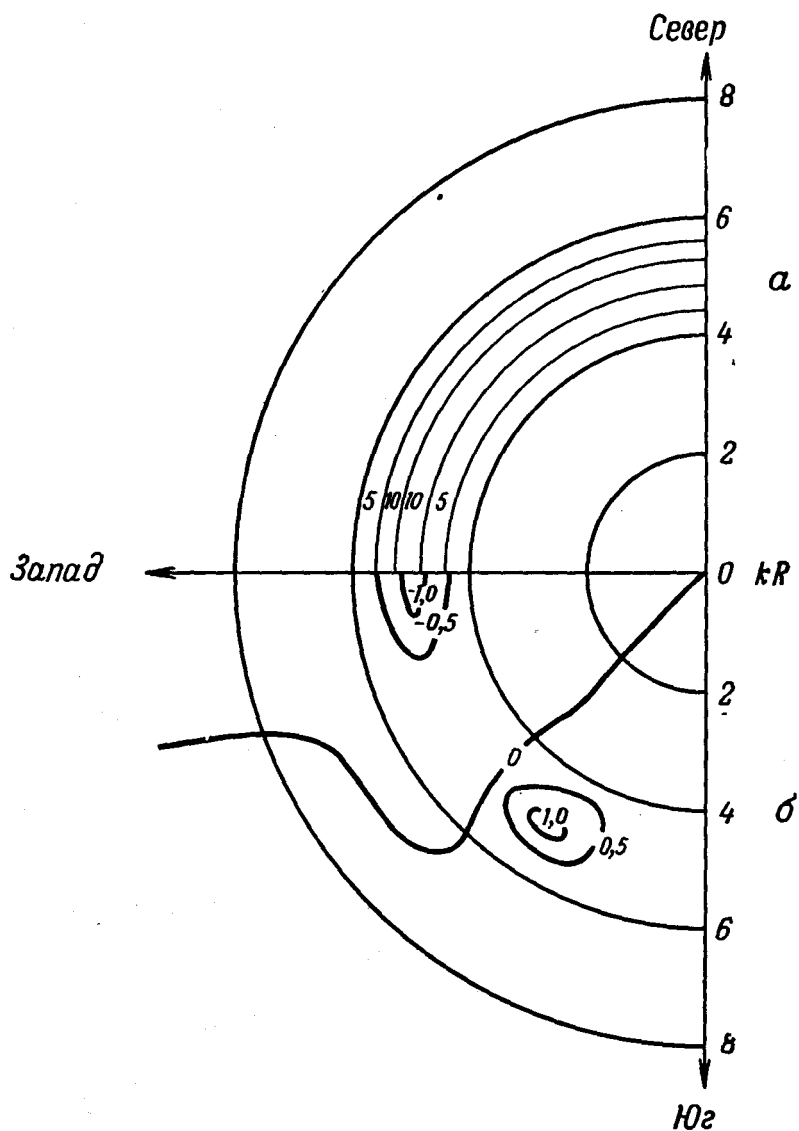
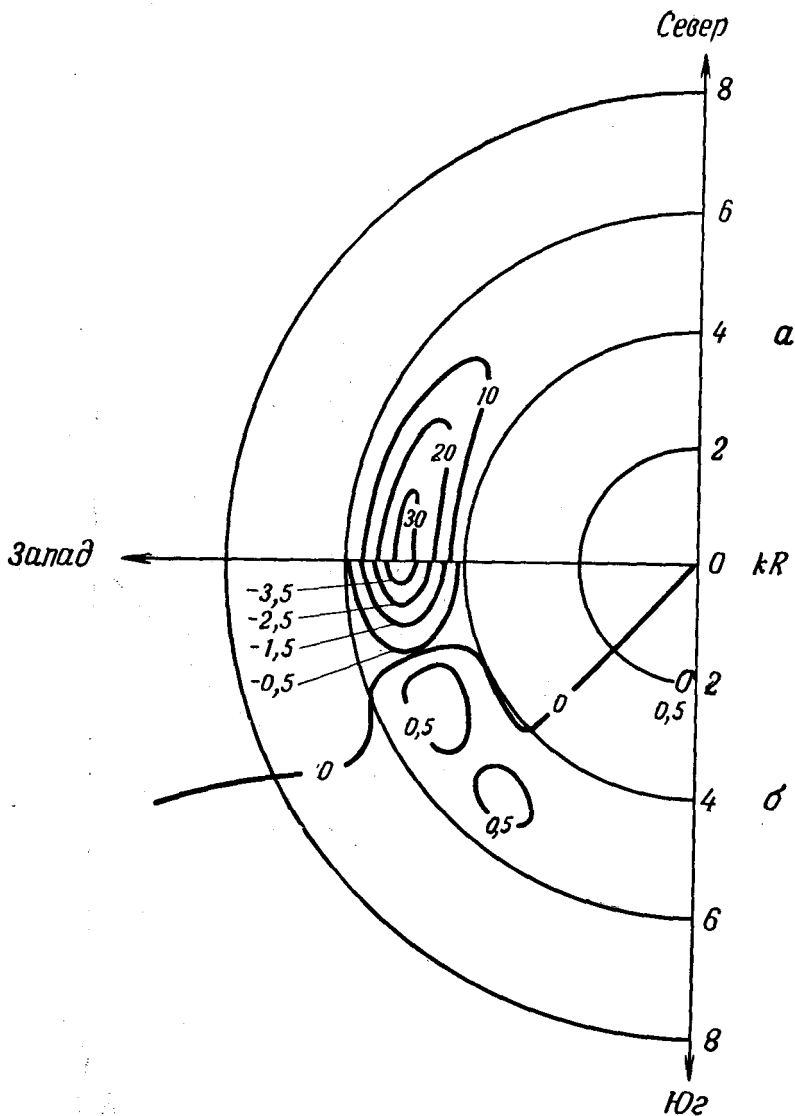


Рис. 1.

a — начальный изотропный спектр F ; линии равной величины $10^{-7}F$ ($\text{км}^3/\text{сутки}^2$); *б* — перенос энергии, $\partial F/\partial t$; линии равной величины $10^{-7}\partial F/\partial t$ ($\text{км}^3/\text{сутки}^3$).



Р и с. 2.

a — начальный спектр F ; размазывающий множитель $\cos^4 A$; линии равной величины $10^{-7} F$ ($\text{км}^3/\text{сутки}^2$); *b* — перенос энергии $\partial F/\partial t$; линии равной величины $10^{-7} \partial F/\partial t$ ($\text{км}^3/\text{сутки}^3$).

житель $\cos^4 A$, где A отсчитывается по часовой стрелке от западной оси. Полная начальная энергия в каждом случае соответствует вычисленному значению [2] для волнового числа 5 при $47,5^\circ$ северной широты, исходя из 500 миллибарных карт, взятых из опубликованных Бюро погоды США за период с 21 октября по 30 ноября 1950 г. (см. рис. 3).

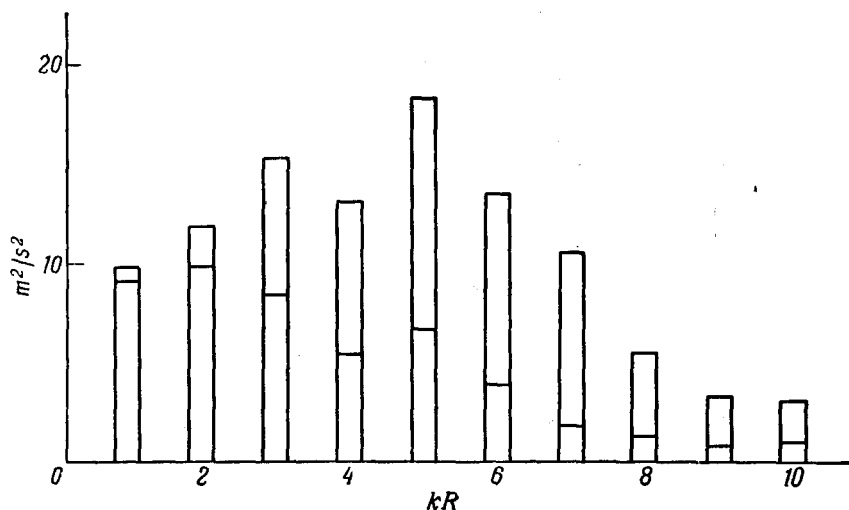


Рис. 3. Спектр зональной кинетической энергии на $47,5^\circ$ северной широты [2].

Нижняя часть каждой колонки представляет собой вклад от восточно-западных компонент скорости ветра, верхняя — от северо-южных компонент.

Из рис. 1 видно, что энергия переносится от волн с волновыми векторами западного направления к волнам с волновыми векторами, имеющими более северное или южное направления. Абсолютная величина волновых векторов при этом та же самая, что и для начального спектра. Диаграмма Фейнмана для доминирующих взаимодействий, связанная с этим эффектом, показана на рис. 4 (см. [4]). Временной масштаб ($F/\partial F/\partial t$) для этого взаимодействия составляет около 10 суток, что сравнимо с периодом волны (7,4 суток для волн, распространяющихся на запад). Таким образом, уже для использованного начального спектра плотности энергии очень важна нелинейность.

На рис. 3 показано измеренное распределение кинетической энергии для зональных волновых чисел от 1 до 10, взятых из

работы [2]. Верхние части каждой колонки представляют собой вклады от компонент скорости север—юг, а нижние части — от компонент восток—запад. Видны два существенных пика; один для зонального волнового числа 5, а другой для зонального волнового числа 3. Очевидно, что для меньших зональных волновых чисел (1, 2, 3) движение происходит в основном с запада на восток. Это может вызываться волнами с волновыми векторами, направленными на север или на юг и имеющими большую абсолютную величину (4, 5, 6).

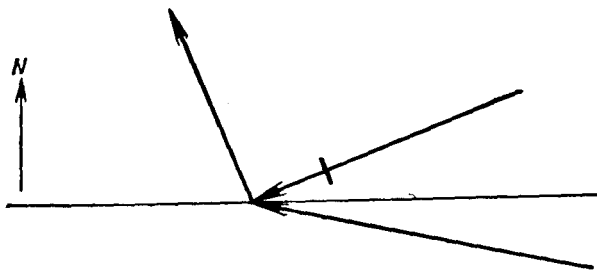


Рис. 4.

Диаграмма Фейнмана для доминирующего взаимодействия, приводящего к распределению переноса энергии, показанному на рис. 1 и 2.

Как видно из рис. 1, нелинейный перенос энергии является одним из возможных механизмов, объясняющих возникновение бегущих волн в северном (южном) направлении за счет волн, бегущих на запад; таким образом, этим механизмом можно объяснить вторичный пик на рис. 3. Из рис. 2 видно, что результат остается приблизительно тем же самым, если начальный спектр содержит размазывающий множитель.

Нелинейный перенос энергии между волнами Россби может также иметь важное значение в океане, когда наклон волн сравним с наблюдаемым в атмосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Charney J., On the general circulation of the atmosphere, *The atmosphere and sea in motion* (The Rossby Memorial Volume), New York, Rockefeller Institute Press, 1959.
2. Eliassen E., A study of long atmospheric waves on the basis of zonal harmonic analysis, *Tellus*, 10 (1958), 206—215.
3. Hasselmann K., On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, *J. Fluid Mech.*, 12 (1961), 481—500.

4. Hasselmann K., Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes, *Rev. Geophys.*, 4 (1966), 1—32.
5. Kenyon K., Non-linear Rossby waves, Woods Hole Oceanog. Inst., Summer Study Program in Geophys, Fluid Dynamics, Student lectures, v. 2, 1964, pp. 69—83.
6. Miles J., Baroclinic instability of the zonal wind, *Rev. Geophys.*, 2 (1964), 155—177.
7. Rossby C., Current problems in meteorology, The atmosphere and sea in motion (The Rossby Memorial Volume), New York, Rockefeller Institute Press, 1959.

Заключительные замечания

М. ДЖ. ЛАЙТХИЛЛ

Это была самая интересная дискуссия, которую можно себе представить. Будучи изданной, она явится, как я надеюсь, сочинением значительной, непреходящей ценности, в особенности благодаря тому, что ее участники не только дали пронизательный и всесторонний обзор своей области, но и тщательно проанализировали связи между отдельными областями. Были изложены методы анализа нелинейного развития волн с дисперсией, кажущиеся очень различными. Хотя рассмотренные методы имеют разные области применения, существуют интервалы перекрытия между этими областями; участники дискуссии приложили усилия, чтобы показать, что в таких интервалах эти методы дают одинаковые результаты.

В частности, связь между вариационным методом Уизема, анализом устойчивости Бенджамена, методом взаимодействия мод волновых колебаний Филлипса и Лонге-Хиггинса и работой Хассельмана по случайным волновым полям стала гораздо яснее, так что достижения последних шести лет начинают образовывать связную картину. Остаются некоторые неясные вопросы и много нерешенных задач, но сопоставления существующих теорий с экспериментом дают настолько обнадеживающие результаты, что, вероятно, многие исследователи решатся на дальнейшие разработки в ближайшем будущем.

Настоящий обзор состояния знаний в рассматриваемой области представляет уникальную ценность не только для тех, кто уже в ней работает, но также и для тех, кого эта перспективная область механики увлечет своими интересными возможностями. Я чрезвычайно признателен всем, кто способствовал тому, чтобы эта дискуссия состоялась.

Нелинейная теория установившегося течения в открытом канале вдоль твердой поверхности, имеющей форму конечной группы волн¹⁾

М. С. ХОУВ

В этой статье подробно рассматривается приложение теории Уизема пространства волн конечной амплитуды для случая установившегося течения воды в открытом канале бесконечной глубины с медленно волнообразно изменяющейся стенкой. Для построения волновой картины на свободной поверхности воды применен численный метод, впервые использованный Гарабедяном и Либерштейном [2] при решении «устойчиво поставленной» задачи Коши для эллиптического уравнения. Наблюдающееся в решении появление «скачка» обсуждается с точки зрения ранее полученных аналитических и экспериментальных результатов.

1. Введение

Общая теория дисперсии цугов медленно меняющихся нелинейных волн была предложена Уиземом [7, 8]. Она основана прежде всего на допущении, что цуги волн локально представляют собой однородные решения уравнений движения, пользуясь которыми можно вычислить средний лагранжиан через волновые параметры. Уравнения, описывающие медленные изменения этих параметров, выводятся затем из принципа Гамильтона, т. е. из требования стационарности интеграла по времени от лагранжиана всей системы.

Лайтхилл [5, 6] детально исследовал приложение этой теории к волнам умеренной амплитуды на глубокой воде (когда определенные «псевдочастоты» отсутствуют); в частности, он рассмотрел следующие эффекты дисперсии в группе волн конечной амплитуды: (1) большое размазывание по частотам и (2) существенное изменение амплитуды при почти постоянных волновых числах. В его второй работе получена полиномиальная аппроксимация среднего лагранжиана для глубокой воды, справедливая при всех амплитудах. Уизем [9] рассмотрел одномерное распространение волн конечной амплитуды для случая конечной глубины. Оба автора сообщают о хорошем согласовании их аналитических результатов с аналитическими и экспериментальными результатами Бенджамена и Фейра [1], получен-

¹⁾ Howe M. S., Nonlinear theory of open-channel steady flow past a solid surface of finite-wave-group shape, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 497—512.

ными при изучении явления неустойчивости волн на глубокой воде.

Общий обзор состояния всей области был дан в материалах недавнего заседания Королевского общества (см. предыдущие статьи настоящего сборника) [6]. На стр. 51 сборника предварительно обсуждаются приложения теории Уизема к волнам, стационарным в однородном потоке. Более подробно это направление обсуждается в настоящей работе, возникшей из попытки применить теорию Уизема к задаче о корабельных волнах. По отношению к равномерно движущемуся кораблю волновая картина неподвижна и соответственно экспериментальная проверка теоретических предсказаний нелинейных эффектов должна быть легче, чем в ранее рассмотренных случаях неуставившихся движений.

Теорию корабельных волн впервые рассматривал Кельвин, установивший, что в общем случае волновая картина содержит два семейства волн: 1) поперечные волны, которые следуют за кораблем в кильватере и имеют тенденцию преобладать при малых числах Фруда, и 2) система боковых или расходящихся волн, существенных при больших числах Фруда. В целом больше внимания уделялось поперечным волнам, поэтому теперь, по-видимому, больший интерес представляет изучение той части кельвиновского решения, которая отвечает боковым волнам, создаваемым, скажем, быстроходным катером. Хотя нелинейный анализ волн, создаваемых кораблем, движущимся при больших числах Фруда, был бы очень ценным, он представляется еще достаточно трудным для практического осуществления. В связи с этим здесь рассматривается несколько более простая задача, выбранная в качестве возможного введения к задаче о волнах, возбуждаемых кораблем.

Трудность, возникающая в последнем случае, заключается в том, что энергия волн, возбуждаемых кораблем, стремится размазаться по большой области пространства волновых чисел, так что вблизи корабля, вообще говоря, плавно изменяющаяся волновая картина невозможна. Поэтому нельзя задать соответствующие гладкие граничные условия, такие, которые необходимы для теоретического предсказания развития волн в будущем. Более легкая задача заключается в рассмотрении установившегося течения в открытом канале вдоль медленно волнообразно изменяющейся стенки с постоянной длиной волны. В этом случае энергия волнового движения приходится на относительно узкую полосу волновых чисел.

Эта задача и рассматривается ниже. Слой воды предполагается бесконечно глубоким, так что может быть использована соответствующим образом видоизмененная формула Лайтхилла

для среднего лагранжиана. Хотя зависимости от времени в этом случае нет, дисперсионное уравнение оказывается все же столь сложным, что на данном этапе может быть предложено только численное его решение.

2. Вывод дисперсионного уравнения

В декартовых координатах (x, y, z) с единичными векторами по осям (i, j, k) уравнение поверхности стенки записывается в виде $y = f(x)$. Вода в невозмущенном состоянии занимает область $-\infty < x < \infty$, $f(x) < y < \infty$, $-\infty < z < 0$. Средняя скорость воды принимается равной $U i$.

Лайтхилл [6] предложил некоторую аппроксимацию плотности лагранжиана \mathcal{L} для волн на глубокой воде в зависимости от частоты ω и волнового числа κ . Согласно Лайтхиллу, $\mathcal{L} \kappa^2 / \rho g$ представляет собой функцию только от $\Omega = \omega^2 / g \kappa$, где ρ — плотность воды, причем формула

$$\mathcal{L} = \frac{\rho g}{8 \kappa^2} \{(\Omega - 1)^2 - (\Omega - 1)^3 - (\Omega - 1)^4\} \quad (1)$$

справедлива в хорошем приближении в интервале от $\Omega = 1$ (волны бесконечно малой амплитуды) до $\Omega = 1,20$ (волны максимальной высоты).

Выражение (1) записано в системе координат, фиксированной относительно невозмущенного движения воды. Чтобы привести его к виду, соответствующему установившемуся течению со скоростью U вдоль волнообразной стенки, заметим, что если \mathbf{v} — фазовая скорость в точке с волновым вектором $\boldsymbol{\kappa} = (l, m)$, то частота ω равна

$$\omega = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\kappa}.$$

В системе координат, связанной со стенкой, частота дается выражением $(U i + \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\kappa}$, обращение которого в нуль, приводит к равенству

$$\omega = -Ul. \quad (2)$$

Требуемый вид лагранжиана получается из (1) заменой ω на $-Ul$ и модуля волнового числа κ на $(l^2 + m^2)^{1/2}$.

Для получения дисперсионного уравнения волнового поля вводится фазовая функция $\theta(x, y)$ следующим образом:

$$l = \theta_{,x}, \quad m = \theta_{,y}, \quad (3)$$

где индексами обозначены частные производные. Линии уровня $\theta(x, y) = \text{const}$ описывают положение гребней и впадин волнового поля на плоскости (x, y) . Таким образом, средний лагран-

жиан \mathcal{L} выражается через частные производные от θ , а применяемый в упрощенном виде принцип Гамильтона дает

$$\delta \int \int \mathcal{L}(\theta_x, \theta_y) dx dy = 0.$$

Вариационное исчисление приводит к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_y} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_x^2} \theta_{xx} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_x \partial \theta_y} \theta_{xy} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_y^2} \theta_{yy} = 0, \quad (4)$$

которое представляет собой квазилинейное уравнение в частных производных относительно θ с коэффициентами, зависящими только от первых производных θ_x и θ_y .

Удобно перейти к безразмерным переменным X, Y, L, M , определенным посредством соотношений

$$X = \frac{xg}{U^2}, \quad Y = \frac{yg}{U^2}, \quad L = \frac{U^2 l}{g}, \quad M = \frac{U^2 m}{g}, \quad (5)$$

после чего уравнение (4) принимает вид

$$a(L, M) \theta_{XX} + 2b(L, M) \theta_{XY} + c(L, M) \theta_{YY} = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты этого уравнения находятся с использованием (1) и равны соответственно

$$a(L, M) = \{(-2L^{10} - 10L^8 M^2 + 24L^6 M^2 - 56L^6 M^4 + 6L^6 + 10L^4 M^2 - 24L^2 M^6 + 2L^2 M^4 - 2M^6) + \quad (7)$$

$$+ [(L^2 + M^2)(-2L^6 - 15L^6 M^2 + 9L^4 M^2 + 90L^4 M^4 + 9L^2 M^4 - 2M^6)]^{1/2}\},$$

$$b(L, M) = \{(-16L^7 M + 48L^7 M^3 + 8L^5 M + 16L^5 M^3 + 16L^3 M^3 + 32L^3 M^5 + 8LM^5) +$$

$$+ [(L^2 + M^2)(15L^7 M - 9L^5 M - 90L^5 M^3 - 3L^3 M^3 + 6LM^5)]^{1/2}\}, \quad (8)$$

$$c(L, M) = \{(6L^{10} + 8L^8 - 42L^8 M^2 - 2L^6 - 32L^6 M^2 + 2L^4 M^2 - 40L^4 M^4 + 10L^2 M^4 + 6M^6) + [(L^2 + M^2)(-15L^8 + 3L^6 + 90L^6 M^2 - 9L^4 M^2 - 12L^2 M^4)]^{1/2}\}. \quad (9)$$

Граничные условия, определяющие решение дисперсионного уравнения, сводятся к заданию значений L, M, θ на некоторой кривой Γ в плоскости (X, Y) , поэтому важно знать тип уравнения (6) в окрестности этой начальной кривой. Он определяется знаком дискриминанта

$$\Delta = b^2 - ac. \quad (10)$$

Уравнение будет эллиптическим при $\Delta < 0$, параболическим при $\Delta = 0$ и гиперболическим при $\Delta > 0$. На рис. 1 сплошными кривыми изображены геометрические места точек, в которых Δ

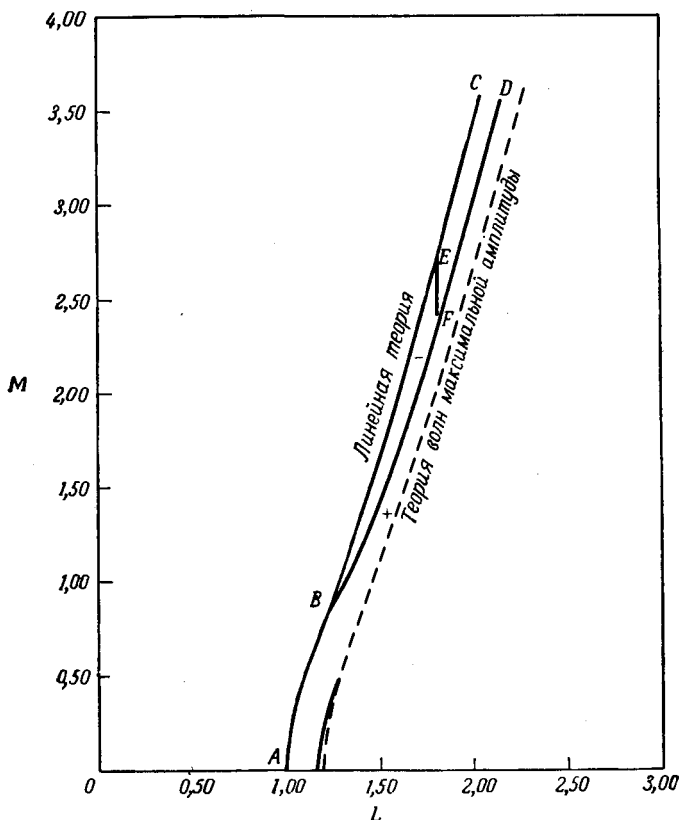


Рис. 1

Характер дисперсии группы волн определяется размазыванием энергии e_2 составляющих в (L, M) -пространстве между кривыми, соответствующими линейной теории и теории волн максимальной амплитуды. В областях, помеченных знаками $-$, $+$, дисперсия описывается соответственно эллиптическим и гиперболическим уравнениями. Отрезок EF отвечает волновым числам, соответствующим начальным данным, которые используются в приводимых вычислениях.

обращается в нуль. Величина M построена в зависимости от величины L , на линии ABC они связаны уравнением

$$L^2 = \sqrt{L^2 + M^2}, \quad (11)$$

которое получается в приближении линейной теории. Участок кривой BD отделяет две области, обозначенные знаками $+$,

и —, где дискриминант Δ соответственно положителен и отрицателен.

В положительной области характеристики дисперсионного уравнения действительны и различны, что же касается решения θ , то можно ожидать характерное расщепление групповой скорости, отмеченное Уиземом [7]. В отрицательной области действительных характеристик нет. Волнам максимальной амплитуды соответствует штриховая кривая, для которой, как было показано Лайтхиллом [6],

$$L^2 = 1,20 \sqrt{L^2 + M^2}. \quad (12)$$

Реальным волнам соответствует область между кривыми, отвечающими линейной теории и волнам максимальной амплитуды.

Точке B на рис. 1 соответствует $L = \sqrt{3/2}$, $M = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Эта точка важна в связи с тем, что, например, в линейной теории корабельных волн она является точкой в пространстве волновых чисел, соответствующей известному заострению на кельвиновской волновой картине; участку AB отвечают поперечные волны, а участку BC — боковые. Таким образом, для корабельных волн умеренной амплитуды боковые волны описываются эллиптическим уравнением, а поперечные — гиперболическим. В данной работе вычисления относятся к системе боковых волн. При этом корабль заменяется волнообразной стенкой. Эта стенка создает волновую картину, обладающую тем свойством, что для нее вблизи стенки точка (L, M) находится существенно внутри области эллиптичности.

3. Граничные условия

Основная идея теории Уизема заключается в том, что средний лагранжиан сначала вычисляется для идеально периодической формы волны, затем в пределах длины волны допускаются плавные изменения. Для рассматриваемой задачи граничные условия могут быть реализованы совершенно аналогичным образом, если сначала предположить амплитуду волнообразной формы стенки постоянной. Случай, когда форма стенки изображается группой волн, получается из упомянутого, если допустить медленные изменения амплитуды в пределах длины волны стенки.

Помимо требования медленного изменения волновых параметров, теория Уизема требует также, чтобы они были однозначными, или по крайней мере, если два или больше семейств волн наложились друг на друга, — чтобы энергия, связанная с

одним из них, значительно превосходила энергии остальных. В связи с этим невозможно получить соответствующие граничные условия непосредственно на стенке. Следует удовлетвориться их записью вблизи стенки, но все же на достаточном удалении от нее, чтобы пространственные изменения были несущественными. В случае синусоидальной стенки умеренной амплитуды можно убедиться, что это условие удовлетворительно выполняется, если за начальную линию Γ принять прямую $Y=1$, параллельную стенке.

Известно [6], что по крайней мере для умеренных амплитуд, амплитуда волны с данным продольным волновым числом L изменяется с изменением расстояния Y от стенки так же, как и в линейной теории, хотя при этом удовлетворяется уравнение

$$\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_L = \left(\frac{\partial M}{\partial L}\right)_Y. \quad (13)$$

Если величина Y не больше одной-двух длин волн, то существенных отклонений от приближения геометрической оптики не возникает и энергия поступает от стенки вдоль даваемых линейной теорией линий групповой скорости, определяемых уравнением

$$X - \chi(L)Y = \text{const}, \quad (14)$$

где $\chi(L) = \partial M / \partial L$, а L и M связаны соотношением (11). Пусть, в частном случае, уравнение стенки имеет вид

$$f(X) = A_0 \cos WX, \quad (15)$$

где A_0 и W — соответственно безразмерные амплитуда и волновое число стенки. В этом случае будет показано, что в приближении линейной теории поднятие ζ вблизи стенки может быть записано в форме

$$\zeta = \frac{-2A_0W}{\sqrt{W^2 - 1}} \sin [WX - WY\sqrt{W^2 - 1}]. \quad (16)$$

Множитель $2A_0W/\sqrt{W^2 - 1}$ представляет собой амплитуду волны и принимается за первый коэффициент в разложении в ряд Фурье формы волны.

Если теперь допустить медленное изменение A_0 в зависимости от X , положив $A_0 = A_0(X)$, то можно ожидать, что вблизи стенки влияние этого изменения будет передаваться вдоль линий

$$X - \chi(W)Y = \text{const}. \quad (17)$$

Таким образом, на начальной линии Γ , расположенной достаточно близко от стенки, чтобы можно было пренебречь нели-

нейным эффектом накопления, соответствующая амплитуда волны дается выражением

$$A = \frac{2WA_0(X - \chi(W)Y)}{\sqrt{W^2 - 1}}. \quad (18)$$

Здесь $A = \delta g/U^2$, δ — истинная амплитуда.

Чтобы полностью определить волновой вектор (L, M) и фазу θ на линии Γ для реальной волны конечной амплитуды, должно быть использовано уравнение совместности, связывающее l , m и δ [3]:

$$\omega^2 = g\kappa \left(1 + \kappa^2\delta^2 + \frac{5}{4}\kappa^4\delta^4 + \dots \right). \quad (19)$$

Здесь, как и выше, $\omega^2 = U^2 l^2$, $\kappa = \sqrt{l^2 + m^2}$. Продольное волновое число L принимается равным W , т. е. продольному волновому числу вынуждающего механизма, а амплитуда δ дается формулой (18). Число M при этом вычисляется из (19) путем обращения ряда и разложения M по аргументам A и L . Легко показать, что

$$\begin{aligned} M &= M(L, A) = \\ &= -L\sqrt{L^2 - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{L^2}{L^2 - 1} \right) (AL^2)^2 + \frac{L^2}{L^2 - 1} \left(\frac{9}{4} - \frac{L^2}{2(L^2 - 1)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times (AL^2)^4 + \dots \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

где знак минус указывает на распространение волны в обратную сторону.

Следовательно, поскольку, согласно (20), величина M является медленно изменяющейся функцией от X , граничные условия для дисперсионного уравнения на линии $Y = 1$ могут быть сформулированы в виде

$$L = W, \quad M = M(W, A), \quad \theta = LX + MY. \quad (21)$$

В следующем параграфе рассматривается решение в приближении линейной теории.

4. Решение в приближении линейной теории

Волновую картину, создаваемую стенкой

$$Y = f(X), \quad (22)$$

где $f(X)$ — мало, можно проанализировать путем введения потенциала $\varphi(X, Y, Z)$, такого, что безразмерная скорость течения \mathbf{v} выражается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \nabla\varphi. \quad (23)$$

Согласно теории волн бесконечно малой амплитуды, потенциал Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0, \quad (24)$$

$$-\infty < X < \infty, \quad 0 < Y < \infty, \quad -\infty < Z < 0,$$

где $Z = zg/U^2$. Помимо обычного условия на бесконечности, потенциал Φ еще удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{df(X)}{dX} \quad \text{при } Y \rightarrow +0 \quad (25)$$

и условиям

$$\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - \frac{\partial \zeta}{\partial X} = 0$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } Z = 0. \quad (27)$$

Здесь $\zeta(X, Y)$ представляет собой безразмерное поднятие поверхности.

Поставленная задача легко решается при помощи двойного преобразования Фурье

$$\psi(L, M; Z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_0^{\infty} \Phi(X, Y, Z) \cos(MY) e^{-iLX} dY, \quad (28)$$

причем ψ , как нетрудно показать, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - (Z^2 + M^2)\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} iL\bar{f}(L), \quad (29)$$

где

$$\bar{f}(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) e^{-iLX} dX \quad (30)$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = L^2 \psi \quad (31)$$

при $Z \rightarrow -0$. Решение, ограниченное при $Z \rightarrow \infty$, легко находится. При $Z = 0$ оно принимает вид

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{iL\bar{f}(L)}{[L^2 - \sqrt{L^2 + M^2}] \sqrt{L^2 + M^2}}. \quad (32)$$

Потенциал φ находится по теореме обращения преобразования Фурье; при $Z = 0$ он равен

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dL \int_0^{\infty} \frac{iL\bar{f}(L) e^{iLX} \cos(MY) dM}{[L^2 - \sqrt{L^2 + M^2}] \sqrt{L^2 + M^2}}. \quad (33)$$

При вычислении двойного интеграла (33) следует принять во внимание условие излучения, заключающееся в том, что при

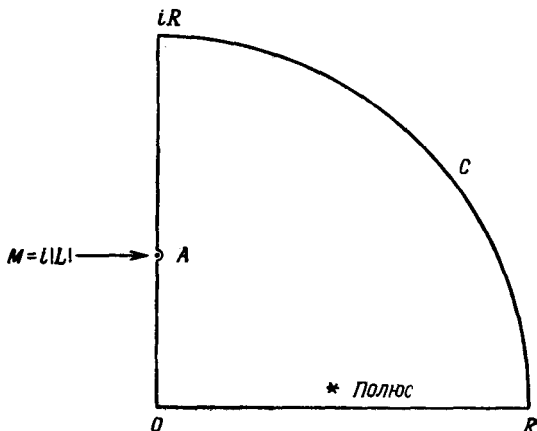


Рис. 2.

Контур, используемый для вычисления интеграла I_1 . Полюс находится внутри контура, если $L < 0$, и вне контура, если $L > 0$.

$X = -\infty$ нет никаких приходящих и уходящих волн. Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(MY) dM}{[L^2 - \sqrt{L^2 + M^2}] \sqrt{L^2 + M^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{iMY} dM}{[L^2 - \sqrt{L^2 + M^2}] \sqrt{L^2 + M^2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iMY} dM}{[L^2 - \sqrt{L^2 + M^2}] \sqrt{L^2 + M^2}} = I_1 + I_2.$$

Условие излучения будет автоматически удовлетворено, если L заменить на $(L - i\epsilon)$, где ϵ — малая положительная постоянная, вычислить интегралы I_1 и I_2 , а затем устремить ϵ к нулю.

Прежде всего заметим, что оба подынтегральных выражения имеют полюсы при

$$M = \pm L\sqrt{L^2 - 1}$$

и точки ветвления при $M = \pm iL$. Чтобы вычислить I_1 , рассмотрим интеграл по контуру, показанному на рис. 2 и состоящему

из отрезка действительной оси от $M = 0$ до R , дуги окружности C от $M = R$ до iR и отрезка мнимой оси от $M = iR$ до 0 с обходом точки ветвления A по малой полуокружности. При замене L на $(L - ie)$ в подинтегральном выражении полюс перемещается с положительной действительной полуоси внутрь указанного контура, если $L < 0$, и в нижнюю полуплоскость, если $L > 0$. Следовательно, после устремления ϵ к нулю вклад полюса в интеграл может быть записан в виде

$$\frac{\pi i H(-L)}{L \sqrt{L^2 - 1}} \exp(-iLY \sqrt{L^2 - 1}) = H(-L) P(L),$$

где H — единичная функция Хевисайда. Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= H(-L) P(L) + \int_0^A + \int_A^{i\infty} = \\ &= H(-L) P(L) + \frac{1}{2} \int_0^{|L|} \frac{ie^{-\lambda Y} d\lambda}{[L^2 - \sqrt{L^2 - \lambda^2}] \sqrt{L^2 - \lambda^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{|L|}^{\infty} \frac{e^{-\lambda Y} d\lambda}{[L^2 - i\sqrt{\lambda^2 - L^2}] \sqrt{\lambda^2 - L^2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} I_2 &= H(L) P(L) - \frac{1}{2} \int_0^{|L|} \frac{ie^{-\lambda Y} d\lambda}{[L^2 - \sqrt{L^2 - \lambda^2}] \sqrt{L^2 - \lambda^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{|L|}^{\infty} \frac{e^{-\lambda Y} d\lambda}{[L^2 + i\sqrt{\lambda^2 - L^2}] \sqrt{\lambda^2 - L^2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Объединяя интегралы I_1 и I_2 , находим окончательно

$$\begin{aligned} \varphi &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(L) \exp\{iLX - iLY \sqrt{L^2 - 1}\} dL}{\sqrt{L^2 - 1}} + \\ &\quad + 2i \int_{-\infty}^{\infty} dL \int_{|L|}^{\infty} \frac{L^3 \bar{f}(L) e^{-\lambda Y + iLX} d\lambda}{[L^4 + (\lambda^2 - L^2)] \sqrt{\lambda^2 - L^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

при $Z = 0$.

В первом приближении $f(X)$ представляет однородную стенку

$$f(X) = A_0 \cos(WX), \quad (37)$$

для которой

$$\bar{f}(L) = \frac{1}{2} A_0 [\delta(L + W) + \delta(L - W)], \quad (38)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Подстановка (38) в (36) с использованием (26) приводит к выражению для поднятия свободной поверхности

$$\xi = \frac{-2A_0 W}{\sqrt{W^2 - 1}} \sin(WX - WY \sqrt{W^2 - 1}) + \frac{2A_0 W^4}{\pi} \int_W^\infty \frac{\cos(WX) e^{-\lambda Y} d\lambda}{[W^4 + (\lambda^2 - W^2)] \sqrt{\lambda^2 - W^2}}. \quad (39)$$

Здесь второй член представляет собой возмущение, существенное лишь в непосредственной близости от стенки. Легко показать, что ошибка, связанная с пренебрежением этим членом, меньше, чем

$$\frac{\sqrt{W^2 - 1} e^{-WY}}{W \sqrt{2\pi W Y}}.$$

В качестве линии Γ принимается прямая $Y = 1$. Относительная ошибка на линии Γ составляет поэтому менее 4% и в дальнейшем с развитием решения быстро убывает (см. рис. 4). Безразмерная амплитуда A , таким образом, принимает на линии Γ вид, предусмотренный уравнением (18), а поскольку линии групповой скорости определяются уравнением

$$X - \frac{(2W^2 - 1)Y}{\sqrt{W^2 - 1}} = \text{const}, \quad (40)$$

приближение геометрической оптики для амплитуды в точке (X, Y) окончательно принимает вид

$$A = \frac{2W}{\sqrt{W^2 - 1}} A_0 \left(X - Y \frac{2W^2 - 1}{\sqrt{W^2 - 1}} \right). \quad (41)$$

Именно эта величина использовалась в условиях (21).

5. Решение дисперсионного уравнения

Теперь следует рассмотреть задачу для дисперсионного уравнения

$$a(L, M) \theta_{XX} + 2b(L, M) \theta_{XY} + c(L, M) \theta_{YY} = 0. \quad (42)$$

Требуется найти решение этого уравнения в полуплоскости $Y > 1$, причем граничные условия (при $Y = 1$), как было показано, имеют вид

$$L = W, \quad M = M(W, A), \quad \theta = LX + MY, \quad (43)$$

где A определяется выражением (41). Поскольку уравнение (42) вблизи стенки должно быть эллиптическим, величину W следует выбрать внутри области эллиптичности в пространстве волновых чисел. В приводимых ниже вычислениях положено $W = 1,8$.

Следует ожидать, что значения L в искомом решении будут того же порядка величины, что же касается M , то, согласно (11), $M \approx 2,7$. В этих условиях трудно построить эффективное приближение для коэффициентов a , b , c , которое позволило бы получить какие-либо аналитические решения. Правильнее сохранить все члены в выражениях для этих коэффициентов и применить излагаемый ниже численный метод решения.

Задача при этом заключается в том, чтобы решить эллиптическое уравнение (42) при граничных условиях (43) типа Коши. В классическом смысле это представляет собой «некорректную постановку» задачи. Однако адамаровская концепция корректно поставленной начальной задачи, а именно требование устойчивости решения по отношению к любым возмущениям граничного условия, не приложима к данному случаю. Здесь все граничные условия функционально связаны, и произвольное независимое возмущение поэтому не допустимо. Либерштейн [4] обсуждал такие задачи в связи с линейными эллиптическими уравнениями второго порядка. Он определил начальную задачу как «устойчиво поставленную», если возмущения могут быть заданы лишь из ограниченного класса S функций, для которого решение остается устойчивым. Из дальнейшего будет видно, что это определение можно распространить и на данный случай квазилинейного уравнения, если потребовать, чтобы класс S и тем самым также граничные условия состояли из таких действительных функций, для которых существует достаточно большая область комплексной X -плоскости, куда они могут быть аналитически продолжены. Отсюда следует, что начальные значения волновых параметров, а также их аналитические продолжения должны быть гладко меняющимися функциями.

Обычно граничные условия типа Коши связаны с гиперболическими уравнениями, поэтому естественным путем решения является метод характеристик. В последнее время был развит метод решения эллиптических уравнений подобным образом. Такой метод подробно описан Гарабедяном и Либерштейном [2]; в качестве примера они рассмотрели дозвуковое течение за отошедшей ударной волной. Краткое изложение метода приводится ниже.

Пусть через (α, β) обозначены характеристические координаты уравнения (42). Для эллиптического уравнения они, вообще говоря, комплексны. Можно, однако, определить новую

пару переменных (ξ, η) посредством соотношений

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta = \frac{\alpha - \beta}{2i}, \quad (44)$$

которые обладают тем свойством, что действительные решения уравнения (42) в плоскости (ξ, η) соответствуют действительным же решениям в плоскости (X, Y) . Разумеется, связь между (X, Y) и (ξ, η) не известна заранее и должна находиться шаг за шагом одновременно с определением величин L, M и θ .

В этих новых координатах решение дисперсионного уравнения с граничными условиями (43) эквивалентно решению канонической эллиптической системы

$$\begin{aligned} X_{\xi} &= (bX_{\eta} - aY_{\eta})/\sqrt{ac - b^2}, \\ Y_{\xi} &= (cX_{\eta} - bY_{\eta})/\sqrt{ac - b^2}, \\ L_{\xi} &= (bL_{\eta} + cM_{\eta})/\sqrt{ac - b^2}, \\ M_{\xi} &= -(aL_{\eta} + bM_{\eta})/\sqrt{ac - b^2}, \\ \theta_{\xi} &= [(bL + cM)X_{\eta} - (aL + bM)Y_{\eta}]/\sqrt{ac - b^2} \end{aligned}$$

при тех же самых граничных условиях. Эту систему уравнений удобно записать в виде

$$R_{\xi} = BR_{\eta}, \quad (45)$$

где R — вектор-столбец неизвестных, а B — матрица коэффициентов. Поскольку любая функция характеристических координат представляет собой опять-таки характеристическую координату, существует известная свобода выбора начальной кривой γ в плоскости (ξ, η) , вдоль которой задаются граничные условия. В качестве нее можно взять ось η . Далее можно считать, что вдоль γ имеем $X = F(\eta)$, где F — произвольная действительная аналитическая функция от η ; в данном случае $F(\eta) \equiv \eta$.

Важно теперь заметить, что если все величины X, Y, L, M, θ могут рассматриваться как аналитические функции комплексного переменного, скажем $\eta = \lambda + i\sigma$, то на основании условий Коши — Римана производную $R_{\eta} (= R_{\lambda})$ в правой части (45) можно заменить на R_{σ}/i . Если зафиксировать λ , приняв его значение равным λ_0 , то каноническая система (45), которая эллиптична в действительной плоскости (ξ, η) , становится гиперболической системой

$$R_{\xi} = (B/i) R_{\sigma} \quad (46)$$

с действительными характеристиками

$$\xi \pm \sigma = \text{const}$$

в плоскости (ξ, σ) . Следовательно, при условии, что для каждого λ_0 функции, заданные на действительной оси, могут быть аналитически продолжены в плоскость комплексного переменного η , чтобы получить их значения на оси σ , указанную гиперболическую систему можно решить при помощи устойчивого процесса шаг за шагом в плоскости (ξ, σ) . Полученное, таким образом, решение при $\sigma = 0$ сводится к решению в действительной плоскости (ξ, η) на линии $\eta = \lambda_0$. Чтобы полностью покрыть любую часть действительной плоскости (ξ, η) , нужно повторить описанную процедуру во всем диапазоне изменения λ_0 .

Трудности, связанные с обоснованием требования, заключающегося в том, чтобы заданные функции могли быть продолжены в комплексную плоскость η , были рассмотрены ранее [6].

В теории Уизема с самого начала предполагается, что волновые параметры являюгся гладкими функциями координат в некотором смысле. Теперь ясно, что их изменение должно быть настолько гладким, чтобы эти функции можно было достаточно далеко продолжить в комплексную плоскость X , не встретив каких-либо особых точек. Именно это и имеет место в данной задаче.

Система (46) решается численно приближенным методом конечных разностей. Используемая здесь схема этого метода была предложена в упомянутой статье Гарабедяна и Либерштейна. Пусть $\Delta \xi$ и $\Delta \sigma$ обозначают положительные приращения ξ и σ ; для данного λ_0 совокупности

$$R_{m, n} = R \left[\left(\frac{1}{2} m \Delta \xi \right), \left(\frac{1}{2} n \Delta \sigma \right) \right], \tag{47}$$

$$B_{mn} = B \left[\left(\frac{1}{2} m \Delta \xi \right), \left(\frac{1}{2} n \Delta \sigma \right) \right]$$

представляют соответственно вектор $R(\xi, \sigma)$ и матрицу $B(\xi, \sigma)$ в системе (46). Тогда последнюю приближенно можно записать в виде

$$R_{m+1, n} = R_{m-1, n} + s [(B_{m, n+1} + B_{m, n-1})/2i] (R_{m, n+1} - R_{m, n-1}), \tag{48}$$

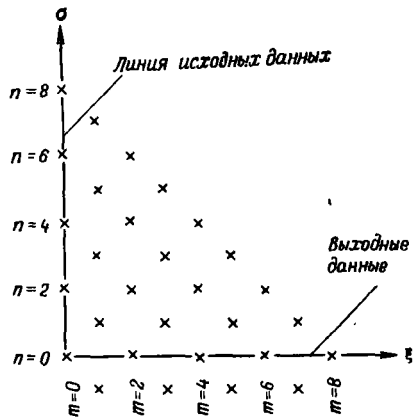


Рис. 3.

Сетка точек, используемая для численного решения по методу конечных разностей. По комплексным данным, задаваемым на оси σ , находится действительное решение, считываемое с оси ξ .

где $s = \Delta\xi/\Delta\sigma$. Легко устанавливается, что характеристические корни матрицы B/i равны 1, -1 и 0, поэтому можно ожидать, что решение задачи с начальными данными для (48) будет устойчивым при $s \leq 1$. Ошибка, связанная с отбрасыванием старших членов разложения при использовании (48), имеет порядок $(\Delta\sigma)^2$. Удобно положить $\Delta\xi = \Delta\sigma$ и воспользоваться сеткой точек, показанной на рис. 3, из которой потребуются только те значения m и n , сумма которых четна. Единственные используемые в вычислениях точки, для которых σ отрицательно, встречаются при $n = -1$. Поскольку как $R(\xi, 0)$, так и $B(\xi, 0)$ действительны, их значения в этих точках находятся по принципу отражения и даются формулами

$$R_{m, -1} = R_{m, 1}^*, \quad B_{m, -1} = B_{m, 1}^*, \quad (49)$$

где $R_{m, 1}^*$, $B_{m, 1}^*$ — числа, комплексно-сопряженные по отношению к $R_{m, 1}$, $B_{m, 1}$.

Итак, способ вычисления сводится к следующему.

I. Вычисляются на основании начальных условий значения $R_{0, n}$, скажем, для $n = 0, 2, 4, \dots, 2N$.

II. При помощи (48) с заменой $R_{-1, n}$ на $\frac{1}{2}(R_{0, n+1} + R_{0, n-1})$ и s на $\left(\frac{1}{2}\right)s$ вычисляются $R_{1, n}$ для $n = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1$.

III. При помощи повторных применений (48) вычисляются остальные значения $R_{m, n}$, такие, что $(m + n)$ четно и не превосходит $2N$.

«Вещественные выходные данные» вычислений получаются на оси ξ (рис. 3) в N точках $m = 2, 4, 6, \dots, 2N$. Эти выходные данные представляют собой численные значения вектора $R = (X, Y, L, M, \theta)$. При этом каждая линия $\eta = \lambda_0$ соответствует на плоскости (X, Y) , скажем, кривой C , вдоль которой величины L, M, θ принимают значения, даваемые соответствующими выходными данными для R .

6. Численное решение для волнообразной стенки

Приводимые вычисления выполнены для плавно модулированной стенки, описываемой уравнением

$$f(X) = (S/W) \exp\{-(2X/L_G)^2\} \cos(WX), \quad (50)$$

где S/W — максимальная амплитуда, а L_G — эффективный размер группы волн в масштабе длин, отнесенных к U^2/g . Таким образом, стенка характеризуется тремя безразмерными параметрами S, L_G и W , представляющими собой максимальный наклон стенки, длину возмущенной части и «естественную»

частоту соответственно. Расчет проведен при следующих значениях этих параметров:

$$S = 0,07, L_G = 6\pi, W = 1,8.$$

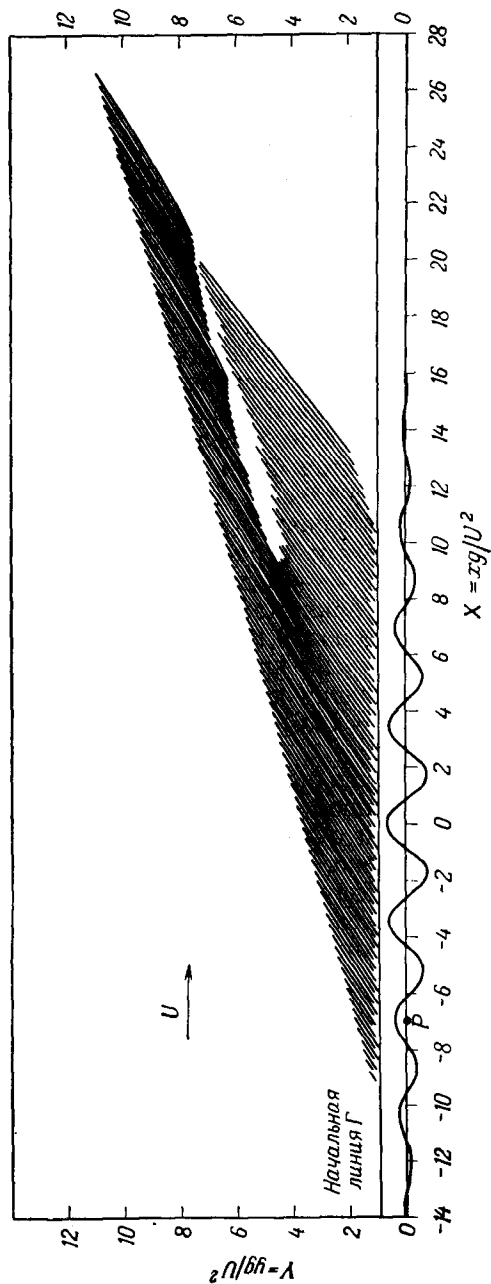
Длина волны стенки равна $2\pi/1,8 \approx 3,5$, так что группа волн фактически включает семь гребней — по три с каждой стороны от центрального максимума. Максимальный наклон мал, однако, обращаясь к рис. 1, видим, что область в пространстве волновых чисел, занятая начальными данными для этого значения S , изображается линией EF , а конец F этой линии, соответствующий максимальной амплитуде стенки, близок к границе области эллиптичности. Это обстоятельство, по-видимому, свидетельствует о том, что стенка умеренной амплитуды может генерировать очень большие волны; оно является следствием предположения о больших значениях чисел Фруда.

Целью численных расчетов было получение картины линий постоянной фазы θ вблизи стенки. Для реализации этой цели решалось (свыше сорока одного раза) дисперсионное уравнение по описанной выше схеме в равноотстоящих точках на начальной линии $Y = 1$ от $X = -10$ до $X = +10$. Во всех случаях число выходных точек N принималось равным 30, а шаг сетки $\Delta\xi = \Delta\sigma$ никогда не превышал 0,17. При помощи интерполяции между выходными точками на кривой C определялись координаты (X, Y) точек пересечения кривой C со 100 линиями уровня θ (от $\theta = -21,0$ до $\theta = 18,6$), а затем строились кривые постоянной фазы.

Вычисления проводились на машине IBM-7090; на получение выхода для одной кривой C , включая и интерполяцию, требовалось 3,7 мин. Полный объем вычисления требует минимум 2,5 час машинного времени. За исключением области скачкообразного изменения, о которой будет сказано ниже, схема вычислений оказалась очень устойчивой; при утроении шага сетки различия обнаруживались лишь в шестой значащей цифре.

7. Обсуждение результатов

Картина линий равной фазы показана на рис. 4. Из нее видно, что численное решение дает регулярное расположение линий гребней волн, которые слева почти прямые, но при движении в сторону положительных значений X делаются все более выпуклыми влево. В конце концов эта выпуклость становится столь значительной, что переходит в самый настоящий разрыв, соответствующий образованию некоторого типа «скачка». Дисперсионное уравнение остается всюду эллиптическим, за исключением самого скачка, в области которого вычислительная



Р и с. 4

Картина воли, возникающая при обтекании волнообразной стенки. „Скачок“ развивается примерно вдоль линии групповой скорости, начиная от точки P , определяемой линейной теорией. Стенка изображена в увеличенном масштабе.

схема становится крайне неустойчивой. Интерпретация этих результатов основана на том, что амплитуда волны тем больше, чем больше выпуклость. Последнее, таким образом, является следствием дисперсии, приводящей к тому, что волны большей амплитуды распространяются с большей фазовой скоростью.

В самом деле, легко видеть, что скачок начинается и развивается приблизительно вдоль той линии групповой скорости, даваемой линейной теорией, которая проходит через точку, обозначенную на рис. 4 буквой P , где впервые амплитуда колебаний стенки становится существенной. Более того, исследование численных результатов обнаруживает, что ниже этой линии волновые числа более глубоко уходят в область эллиптичности, чем выше нее, так что амплитуда волн здесь соответственно больше. В результате у внешних частей линий волновых гребней появляется тенденция к отставанию из-за меньшей фазовой скорости. Это ясно видно из рисунка, причем особенно заметно уже после развития скачка.

При пересечении скачка происходит резкое изменение направления линий гребней и величины волновых чисел; в области, удаленной от стенки, волны расположены более плотно. Эксперименты Фейра с одномерными неустановившимися цугами волн показывают, что в области скачка нет ярко выраженного эффекта турбулентного рассеяния или собирания воды: есть только переходная область, в которой линии гребней прорываются любопытный «извив» и выходят на другую ее сторону с изменением направления и плотности расположения. Возможно, однако, что полученное в данной работе решение неприменимо в области за скачком. В случае газовой динамики простой волновой подход к решению посредством каустики дает неправильный результат для ударной волны; решение в этом случае должно находиться из условий на скачке.

Уизем [7] высказал предположение, что такое положение могло бы иметь место для развития скачков в случае уравнения гиперболического типа и что их изучение, вероятно, могло бы быть проведено в рамках его теории путем введения соответствующих условий на скачке. Лайтхилл [5, 6] предвидел появление скачков в случае уравнения эллиптического типа. Исходя из своей трактовки указанной теории, он изучал эволюцию слабо модулированной группы волн с примерно постоянными волновыми числами и предсказал появление особенности в волновом числе и амплитуде по истечении некоторого времени, скажем t_c . Он показал далее, что существует кажущийся «инкубационный период», в течение которого почти не происходит изменения формы волны до момента $t = 0,7t_c$. Это можно сопоставить с данным случаем, в котором скачок начинает крайне быстро раз-

виваться из очень гладкой волновой картины. Так же как и в лайтхилловском случае, величина волновых чисел возрастает перед скачком и уменьшается позади него.

До сих пор экспериментальные свидетельства в пользу теории Уизема ограничивались случаями эволюции во времени и пространстве одномерных групп волн на глубокой воде [1], в которых, однако, наблюдалась неустойчивость типа скачка. Поскольку это интересное явление снова обнаружилось и именно в данном случае, когда волновая картина стационарна и позволяет относительно просто провести измерения, представляется желательным поставить эксперимент с волнообразной стенкой, чтобы посмотреть, что произойдет в окрестности разрыва. Данные такого эксперимента имели бы также большое значение для дальнейшего изучения корабельных волн, возникающих при больших числах Фруда.

Автору доставляет большое удовольствие выразить признательность проф. Лайтхиллу за его постоянную помощь и руководство в ходе выполнения настоящего исследования. Он хотел бы также поблагодарить д-ра Деванатхана (Бангалор, Индия) за полезные обсуждения, касающиеся материала данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B., Feir J. E., *J. Fluid Mech.*, 27 (1967), 417.
2. Garabedian P. R., Lieberstein H. M., *J. Aero Sci.*, 25 (1958), 109.
3. Ламб Г., Гидродинамика, М., 1947.
4. Lieberstein H. M., MRC Technical Summary Rept. № 81, Madison, Wisconsin, 1959.
5. Lighthill M. J., *J. I. M. A.*, 1 (1965), 269.
6. Lighthill M. J., см. стр. 43 настоящего сборника.
7. Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, A 283 (1965), 238.
8. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), 273.
9. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 27 (1967), 399.

Скачки фазы

М. С. ХОУВ¹⁾

В предыдущей статье [3] рассматривалась нелинейная теория установившегося течения жидкости в открытом канале большой глубины вдоль слегка модулированной волнообразной стенки. Волновая картина на свободной поверхности воды была получена в результате решения устойчиво поставленной задачи Коши для эллиптического уравнения. Основной характерной чертой решения было появление в нем скачка, при переходе через который происходит мгновенное изменение фазы. Подобные скачки фазы могут иметь место для широкого круга близких задач, однако преимущество указанной постановки заключается в том, что она открывает удобные возможности экспериментального исследования. Настоящая статья является введением к более общей задаче о скачках фазы. Для определения возможного расположения скачка на свободной поверхности воды в этой статье вместе с полученным ранее решением используется закон сохранения энергии. Рассматривается также возможный вид свободной поверхности вблизи скачка фазы (см. рис. 4). В этой области ширина волновых впадин резко уменьшается по мере приближения к скачку. Предложен приближенный метод определения линии, при переходе через которую фаза изменяется скачком; предложенный метод не связан с нахождением решения задачи Коши.

1. Введение

В предыдущей статье [3] была рассмотрена нелинейная теория установившегося течения жидкости большой глубины вдоль слабо модулированной волнообразной стенки. При этом использовалась теория Уизема [6, 7], описывающая дисперсию плавно изменяющихся цугов волн большой амплитуды. Метод основан на предположении, что локально цуг волн хорошо аппроксимируется идеально периодическим решением полных нелинейных уравнений движения и последующим вычислением среднего лагранжиана через волновые параметры. Дисперсионное уравнение, описывающее медленные изменения этих параметров, получается затем применением принципа Гамильтона.

Предыдущие вычисления дисперсии групп волн большой амплитуды [4, 5, 8] показали, что, в частном случае, когда дисперсионное уравнение определяется эллиптической системой, возникает определенная неустойчивость в решении задач с начальными данными. Экспериментальное подтверждение такой

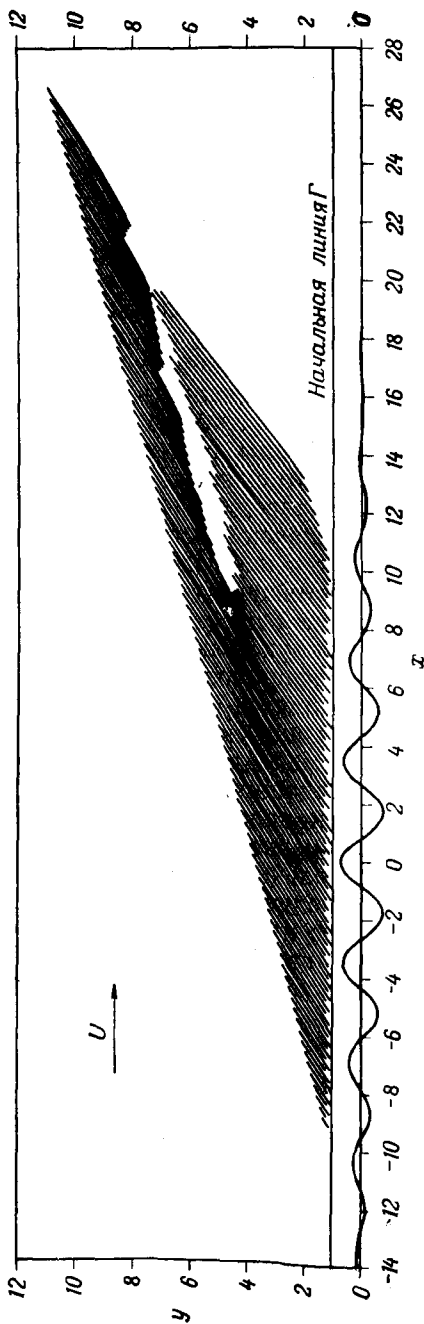
¹⁾ Howe M. S., Phase jumps, *J. Fluid Mech.*, 32 (1968), 779—789.

неустойчивости для случая одномерной группы волн конечной амплитуды на глубокой воде, эволюционирующей во времени и пространстве, было получено Бенджаменом и Фейром [1]. Однако из-за экспериментальных трудностей, возникающих в связи с необходимостью точного наблюдения движущихся групп волн, представляется желательным выполнить нелинейный расчет для случая, когда волновая картина стационарна. Такую установившуюся волновую картину можно в принципе наблюдать с корабля, движущегося с постоянной скоростью относительно неподвижной воды; однако из-за трудностей, обсуждавшихся в предыдущей статье [3], неясно пока, как применить теорию Уизема к общей задаче о волнах, возбуждаемых кораблем. Как уже было несколько подробнее разъяснено в предыдущей статье, волновое поле на свободной поверхности воды для стенки умеренной амплитуды описывается дисперсионным уравнением эллиптического типа при условии, что длина волны стенки не слишком велика.

Результат вычисления в предыдущей статье показан на рис. 1, представляющем собой карту линий постоянной фазы волн на свободной поверхности воды (соответствующих гребням и впадинам). Ось x проведена слева направо вдоль средней линии стенки; за начало отсчета принята точка, в которой амплитуда колебаний стенки максимальна; за положительное направление оси y принято направление в глубь жидкости от стенки. Все расстояния и длины волн измеряются в долях величины U^2/g , принятой за единицу длины; здесь U — скорость невзмущенного течения, направленного в сторону положительной оси x . Амплитуда колебаний стенки на рисунке увеличена в 8 раз. Изображенная волновая картина была получена в результате решения соответствующей задачи с начальными данными, в которых вдоль линии $y = 1$ были заданы волновое число k и фаза θ .

Из рисунка видно, что на плоскости (x, y) имеется область, в которой решение не определено. В дальнейшем будем говорить о ней, как об области неопределенности. В предыдущей статье было отмечено, что появление области неопределенности указывает на явление типа ударной волны, при переходе через которую волновое число и фаза претерпевают разрыв непрерывности, а направление гребней волн и взаимное расстояние между ними внезапно изменяются. Ударная волна, или «скачок фазы», образуется в основном как результат амплитудной дисперсии, выражающейся в том, что волны большей амплитуды обладают повышенными фазовыми скоростями.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы завершить решение задачи, указав способ нахождения линии разрыва



Р и с. 1.

Волновая картина на свободной поверхности, возникающая при стационарном течении со скоростью U вдоль водообразной стенки.

с использованием по обе ее стороны полученного решения, изображенного на рис. 1. Этот способ излагается в § 3 и основан на применении принципа сохранения энергии. Оказывается, что из всех возможных линий разрыва только одна обеспечивает выполнение этого условия.

Сопоставление с аналогичным случаем в газовой динамике указывает на возможность ошибки при использовании найденного решения за разрывом, т. е. в данном случае справа от него. Такого рода ошибки представляют собой в газовой динамике эффекты третьего порядка малости, и ими часто можно пренебречь при рассмотрении слабых ударных волн; однако для сильных ударных волн они могут приводить к неправильным выводам. Поэтому не должна упускаться из виду возможность того, что потребуются модифицировать решение за скачком, а вместе с ним и расположение самого скачка.

Таким образом, чтобы приводимое вычисление было справедливым, следует считать скачок достаточно слабым. В пользу этой точки зрения говорят и наблюдения Бенджамена и Фейра [1], согласно которым неустойчивость волн конечной амплитуды приводила не к турбулентной диссипации энергии, а к перераспределению ее по спектру группы волн.

Соответствующие уравнения сохранения выводятся в следующем параграфе. В § 3 находятся определяемые ими расположение ударной волны и величина скачка фазы при переходе через ударную волну, используемая для нахождения разности между числами гребней волн, входящих и выходящих из области скачка. Находится возможный вид свободной поверхности вблизи скачка фазы в сечениях, перпендикулярных линии скачка. Его наблюдение было бы довольно точным способом проверки теории. Наконец, в § 4 приводятся оценочные физические соображения, которые достаточно интересны в том отношении, что позволяют довольно хорошо предсказать линию скачка фазы, хотя и не дают возможности определить его положение на этой линии.

2. Уравнения сохранения и дисперсионное уравнение

Пусть $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \omega)$ обозначает средний лагранжиан на единицу площади горизонтальной поверхности для волн конечной амплитуды на глубокой воде, причем $\mathbf{x} = (l, m)$ — волновой вектор, ω — частота изменения во времени. Система предполагается недиссипативной, поскольку в почти однородном цуге волн градиенты скорости представляют собой плавно изменяющиеся функции точки, так что эффектом вязкости можно пренебречь. Для этого случая Лайтхилл [5] нашел явное выражение

лагранжиана \mathcal{L} , приближенно справедливое для всех возможных амплитуд. Это выражение использовано при вычислениях в работе [3].

Волновое поле описывается фазовой функцией $\theta(x_i, t)$, которая плавно изменяется и принимает последовательные значения, кратные 2π , на последовательно расположенных гребнях волн (здесь t — время). Волновой вектор и частота выражаются через θ следующим образом:

$$\kappa_i = \partial\theta/\partial x_i, \quad \omega = -\partial\theta/\partial t. \quad (2.1)$$

Принцип Гамильтона

$$\delta \int \int \mathcal{L}(\kappa_i, \omega) dx dt = 0 \quad (2.2)$$

приводит к следующему уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_\omega) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{L}_{\kappa_i}), \quad (2.3)$$

которое, как установил Уизем [9], представляет собой уравнение сохранения, выражающее баланс между изменением пространственно-подобного адиабатического инварианта \mathcal{L}_{κ_i} и время-подобного инварианта \mathcal{L}_ω . Другие уравнения сохранения можно вывести из (2.2), воспользовавшись теоремой Нётер (см. [2]). В частности, инвариантность лагранжиана \mathcal{L} по отношению к сдвигу во времени и в пространстве приводит соответственно к уравнению энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega \mathcal{L}_{\kappa_i}) = 0 \quad (2.4)$$

и уравнению количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_j \mathcal{L}_\omega) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\kappa_j \mathcal{L}_{\kappa_i} - \mathcal{L} \delta_{ij}) = 0. \quad (2.5)$$

Используя (2.1), приходим еще к двум уравнениям сохранения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \kappa = 0. \quad (2.6)$$

Первое из них выражает сохранение числа гребней волн, а второе показывает, что линии гребней начинаются и оканчиваются только на границах волнового поля. Однако уравнения (2.3) и (2.6) справедливы лишь в тех областях, где волновое поле изменяется медленно в масштабе длины волны, тогда как уравнения энергии и количества движения справедливы при любых обстоятельствах, если среднюю плотность лагранжиана \mathcal{L} заменить на точную.

Задача о волнообразной стенке связана с рассмотрением установившейся картины волн на свободной поверхности. В предыдущей статье было показано, как записать лайтхилловский лагранжиан в системе координат, фиксированной относительно стенки, по отношению к которой волновая картина стационарна; в этом случае в (2.1) и (2.6) надо положить $\omega = 0$ и $\partial/\partial t = 0$. Дисперсионное уравнение, получаемое при этом из (2.1) и (2.3), принимает вид

$$a(l, m)\theta_{xx} + 2b(l, m)\theta_{xy} + c(l, m)\theta_{yy} = 0, \quad (2.7)$$

где $a(l, m) = \mathcal{L}_{ll}$; $b(l, m) = \mathcal{L}_{lm}$; $c(l, m) = \mathcal{L}_{mm}$.

Для рассматриваемой частной формы стенки уравнение (2.7) представляет собой квазилинейное эллиптическое уравнение. Соответствующая начальная задача для него была решена методом мнимых характеристик; начальные значения для l, m, θ задавались на линии $y = 1$.

3. Скачок фазы в задаче о волнообразной стенке

В этом параграфе на основе результатов предыдущей статьи, полученных по обе стороны области неопределенности, находится линия скачка фазы в задаче о волнообразной стенке. Уизем [9] установил, что в нелинейных задачах рассматриваемого типа требуемое число условий на скачке всегда меньше числа уравнений сохранения. Существенно, однако, помнить различие между теми уравнениями сохранения, которые остаются справедливыми в неосредненном виде, т. е. и при переходе через скачок, и теми, которые справедливы лишь для плавно изменяющихся цугов волн. Так, например, выбор уравнений сохранения числа волн (2.6) для решения задачи был бы неверным. В то же время уравнения сохранения энергии и количества движения (2.4) и (2.5) могут быть использованы.

Рассмотрим, в частности, уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega \mathcal{L}_{x_i}) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i, \omega)$ — лайтхилловский средний лагранжиан, выраженный в системе координат, связанной со средним движением воды. Чтобы записать (3.1) в системе координат, связанной со стенкой, по отношению к которой волновая картина стационарна, нужно сначала вычислить производные \mathcal{L}_ω и \mathcal{L}_{x_i} в (3.1) и затем заменить ω на $-\omega l$, а $\partial/\partial t$ — на $U_i(\partial/\partial x_i)$, где $U_i =$

$= (U, 0)$ — невозмущенная скорость потока. В результате находим

$$U_i \frac{\partial}{\partial x_i} [U \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}] - \frac{\partial}{\partial x_i} [U \mathcal{L}_{\kappa_i}] = 0. \quad (3.2)$$

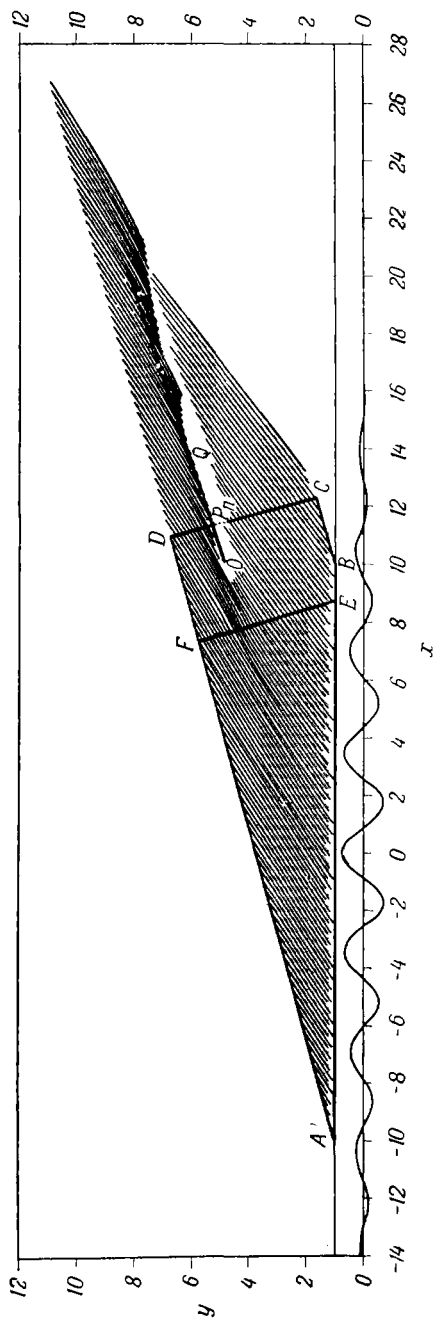
Таким образом, для любого контура S в плоскости (x, y) имеем

$$\oint_S [(U \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}) U_i - U \mathcal{L}_{\kappa_i}] n_i ds = 0, \quad (3.3)$$

где n_i — внешняя нормаль по отношению к S , а ds — криволинейный элемент длины. Уравнение (3.3) выражает баланс энергии поступающей в область, ограниченную контуром S , и выходящей из нее.

Линия скачка фазы определяется при помощи выбора соответствующей последовательности контуров S_n , которая проходит через область неопределенности решения задачи о волнообразной стенке. Поскольку решение известно по обе стороны от этой области, можно проэкстраполировать подинтегральное выражение вдоль контура по каждую из сторон области неопределенности, скажем, до точки P_n . В точке P_n подинтегральное выражение испытывает скачок, поэтому точное положение точки P_n на контуре подбирается так, чтобы обратить интеграл по всему контуру в нуль. Следует заметить, что интегральное соотношение в форме (3.3) можно также вывести из уравнения количества движения (2.4). И в этом случае, действуя аналогичным образом, можно было бы получить тот же вывод относительно расположения точки P_n .

На рис. 2 воспроизведено решение задачи о волнообразной стенке и показано расположение скачка фазы, определенное указанным выше методом. Показан также типичный контур интегрирования, состоящий из отрезка AB , начальной линии $y = 1$ от $x = -10$ до $x = +10$, участка BC «выходной кривой», начинающегося в точке $(10, 1)$ (см. § 4), поперечного отрезка CD , пересекающего линию скачка примерно под прямым углом, и отрезка DA выходной кривой, заканчивающегося в точке $(-10, 1)$. Прежде чем пытаться найти скачок, мы исследовали достоверность численного решения, полученного в работе [3]; для проверки того, удовлетворяет ли это решение уравнению (3.3), было проведено интегрирование по ряду замкнутых контуров, не проходящих через область неопределенности, как, например, по контуру $A E F A$. Данные, доставляемые решением, дают значения волнового вектора \mathbf{x} с четырьмя десятичными знаками. При использовании их для вычисления пробных интегралов было найдено, что последние отличаются от нуля лишь в пятом знаке (вклады от участков AE и EF , взятые по отдельности, ока-



Р и с. 2.

Положение скачка фазы OQ , определенное на основании уравнения сохранения энергии; контур $ABCDA$ — типичный контур, используемый для определения точки P_n ; контур $AEFA$ — типичный пробный контур интегрирования.

зались порядка единицы). Ни в одном случае ошибка не превышала $\pm 0,00005$.

Указанная выше последовательность контуров S_n получалась движением отрезка CD контура, показанного на рис. 2, вдоль AD и BC . Оказалось, что точка P_n , найденная таким способом, лежит вблизи прямой. Скачок фазы на рис. 2 расположен на отрезке прямой

$$y = 0,3372x + 1,4875, \quad (3.4)$$

проведенной через точку P_n по методу наименьших квадратов. Стандартное отклонение точки от прямой составляет 0,012. Конец скачка определяется довольно плохо. Приблизительно он расположен в точке O , где $x = 9,17$, тогда как данные, использованные для построения прямой (3.4), простираются до точки $x = 18,61$.

Разность между числом гребней волн, входящих в отрезок OQ скачка слева (1) и выходящих из него справа (2), выражается соотношением

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^Q [\kappa] \cdot ds. \quad (3.5)$$

Интегрирование здесь производится вдоль разрыва, а квадратными скобками обозначен скачок волнового вектора. Поскольку $\kappa = \text{grad } \theta$ и $\theta_1 = \theta_2$ в точке O , имеем

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^Q [d\theta] = \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)_Q. \quad (3.6)$$

Для удобства сопоставления результатов расчета с экспериментальными на рис. 3 представлено изменение величины $2\pi\delta$ с расстоянием s точки Q вдоль линии скачка, отсчитываемым от точки O .

Возможный вид свободной поверхности воды вблизи скачка фазы можно найти путем построения поднятия поверхности вдоль линии, подобной CD на рис. 2, пересекающей линию скачка под прямым углом. Поднятие свободной поверхности находится из полученного ранее решения [3] подстановкой амплитуды и фазы в стоксовское разложение для поверхностных волн конечной амплитуды. Возможные формы поверхности и области неопределенности могут быть после этого найдены при помощи графической интерполяции между кривыми поднятия, известными по обе стороны области неопределенности. Взяв достаточное число таких поперечных сечений и построив соответствующие им профили на одной диаграмме, можно получить картину свободной поверхности, весьма похожую на пространственную.

Такая картина представлена на рис. 4. Каждая волнообразная кривая на ней представляет собой поперечное сечение свободной поверхности (увеличенное в 5 раз) вдоль линии, подобной линии CD на рис. 2. Такая линия принимается за абсциссу, а за положительное направление ординат принимается направление OQ на рис. 2. Таким образом, рис. 4 следовало бы рассматривать, глядя слева вдоль линии скачка фазы, которая также изображена на рисунке. В такой системе координат левый

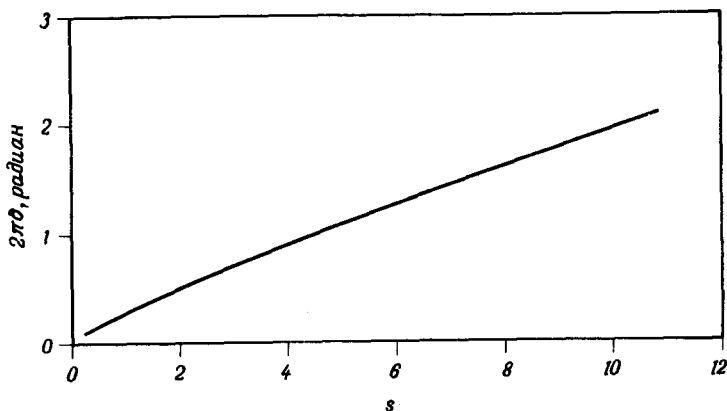


Рис. 3.

Величина $2\pi\delta$, измеренная в радианах, представляет собой увеличение фазы при пересечении скачка в направлении положительной оси x на расстоянии s от начала O скачка фазы.

конец каждой кривой лежит в области, где волновая энергия очень мала, т. е. приблизительно там, где свободная поверхность невозмущена. Участки кривых, показанные штриховкой, изображают возможную форму поверхности в области неопределенности.

Эффект скачка фазы выразительно подчеркивается сокращением ширины волновых впадин, которые входят в скачок снизу. Заслуживает внимания также изменение формы гребней, которые проходят в непосредственной близости начала скачка фазы слева от него. Эти волны обладают характерной трохойдальной формой сечения, которая становится более заостренной по мере приближения к началу скачка. Однако этой тенденции к увеличению крутизны препятствует образование скачка, который выступает как эффективное средство передачи волновой энергии от гребней, продвигающихся выше скачка, волнам в области ниже него, так как амплитуда гребней, проходящих через скачок, сильно снижается.

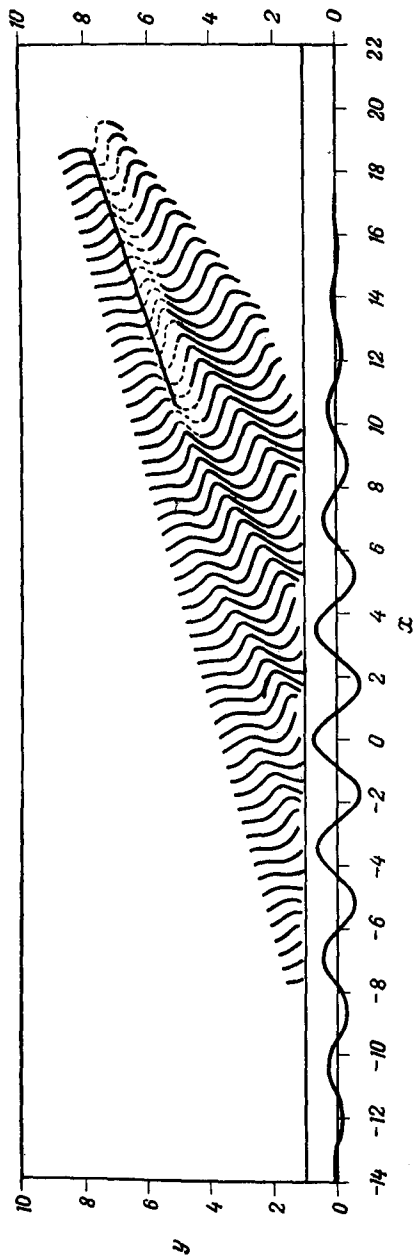


Рис. 4. Каждая волнообразная кривая представляет собой профиль свободной поверхности в нормальном сечении, перпендикулярном линии скачка фазы. Рисунку следует рассматривать, глядя слева вдоль линии разрыва. Участки кривых, показанные штриховыми линиями, изображают возможную форму свободной поверхности вблизи места скачка фазы.

4. Приближенный метод определения линии скачка

Проведенное исследование задачи о волнообразной стенке целесообразно завершить рассмотрением приближенного метода определения линии, вдоль которой образуется скачок фазы. Приближенный метод позволяет взглянуть на явление с более физической точки зрения, чем при чисто численном подходе.

Рассмотрим дисперсионное уравнение (2.7):

$$a\theta_{xx} + 2b\theta_{xy} + c\theta_{yy} = 0.$$

Характеристики этого уравнения определяются уравнением

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0$$

или, полагая $\Delta = \sqrt{ac - b^2}$ и учитывая, что дисперсионное уравнение эллиптическое, — уравнением

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b}{c} \pm i \frac{\Delta}{c}. \quad (4.1)$$

Вспоминая, что дисперсионное уравнение первоначально решалось при помощи аналитического продолжения в комплексную плоскость x , из (4.1) видим, что если y — действительно, то решение в любой точке P на действительной плоскости (x, y) определяется двумя сопряженными комплексными характеристиками, проходящими через P и начинающимися в двух сопряженных точках на той комплексной плоскости x , которая пересекается с действительной плоскостью (x, y) по прямой $y = 1$. Для получения начальных значений в этих точках нужно взять действительную часть фиксированного значения x и аналитически продолжить данные с начальной линии Γ (т. е. $y = 1$) в комплексную плоскость x . В точке P указанные две характеристики определяют плоский элемент, пересекающий действительную плоскость (x, y) вдоль кривой, наклон которой выражается уравнением

$$dx/dy = b/c. \quad (4.2)$$

В первом приближении линии, определяемые уравнением (4.2), можно рассматривать как лучи, вдоль которых передается энергия. В самом деле, в случае бесконечно малой амплитуды они действительно вырождаются в стационарный аналог линий групповой скорости, поскольку

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b}{c} = \frac{\mathcal{L}_{lm}}{\mathcal{L}_{mm}} = \frac{\partial(\mathcal{L}_m, m)}{\partial(l, m)} \frac{\partial(m, l)}{\partial(\mathcal{L}_m, l)} = - \left(\frac{\partial m}{\partial l} \right)_{\mathcal{L}_m}.$$

Для конечных амплитуд пренебрежение мнимой частью (4.1) означает, что распространение возмущений вдоль приближенных «лучей» будет до некоторой степени размазанным.

Допустим теперь, что амплитуда колебаний стенки постоянна. Решение дисперсионного уравнения при этом тривиально. Оно представляет собой плоскую волну, а энергетические лучи (4.2) превращаются в семейство параллельных прямых

$$x = \frac{b}{c} y + \text{const.} \quad (4.3)$$

Здесь b/c представляет собой функцию волнового вектора κ , который постоянен. Однако, когда амплитуда колебаний стенки изменяется, вектор κ также меняется вдоль линии Γ . При условии, что это изменение происходит достаточно медленно в смысле приближения Уизема, можно ожидать, что энергетические лучи будут на некотором расстоянии от линии Γ оставаться прямыми, но их наклон b/c будет меняться в соответствии с изменением вектора κ вдоль начальной линии. Понятно, что при этих условиях семейство линий (4.3) будет иметь огибающую каустику, вдоль которой решение дисперсионного уравнения неопределенно. Физически здесь можно ожидать появления скачка в решении.

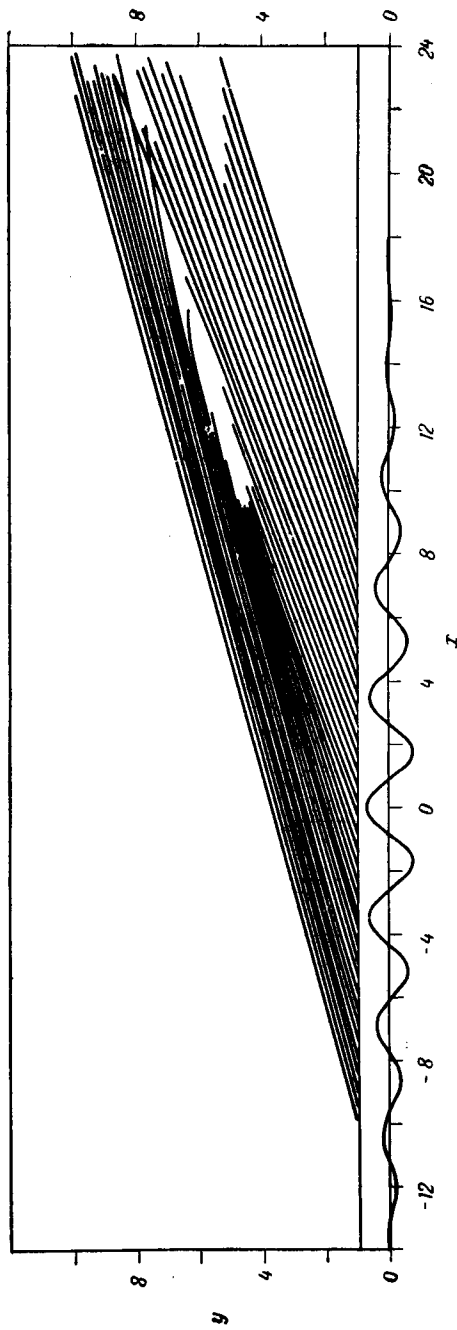
Эти соображения можно проиллюстрировать, используя результаты вычислений для задачи о волнообразной стенке. Дисперсионное уравнение было решено путем сведения его к системе пяти уравнений в частных производных первого порядка, в которых неизвестные (x, y, l, m, θ) определялись как функции координат (ξ, η) , задаваемых соотношениями

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta = \frac{\alpha - \beta}{2i},$$

где α, β — комплексные характеристические координаты дисперсионного уравнения. Метод решения основан на использовании аналитического продолжения начальных данных в комплексную плоскость η , где, если обозначить $\eta = \lambda + i\sigma$, величина λ считается постоянной, равной, скажем, λ_0 . В плоскости (ξ, σ) система уравнений будет гиперболической и допускает решение методом характеристик. Полученное таким образом решение дает при $\sigma = 0$ решение в действительной плоскости вдоль прямой $\eta = \lambda_0$. Чтобы полностью покрыть некоторую область на действительной плоскости (ξ, η) , нужно повторить процесс во всем интервале изменения λ_0 .

Так как решение указанной системы уравнений соответствует постоянному действительному значению η , то отсюда следует, что мнимая кривая в плоскости (x, y) , соответствующая прямой $\eta = \lambda_0$, удовлетворяет условию

$$d\alpha - d\beta = 0, \quad (4.4)$$



Р и с. 5. „Выходные“ кривые, полученные в работе [3].

Значения I , m , θ вдоль этих лучей найдены методом минимых характеристик, использованным для решения дисперсионного уравнения.

где, как было описано в предыдущей статье,

$$x = \lambda_0, y = 1 \text{ на линии } \alpha + \beta = 0. \quad (4.5)$$

Эта система «выходных кривых», полученная при решении задачи о волнообразной стенке, показана на рис. 5. Все они суть прямые, за исключением области вблизи разрыва. По этой причине допустимо приближенно каждой из них сопоставить то значение вектора \mathbf{x} , которое соответствует точке пересечения с гра-

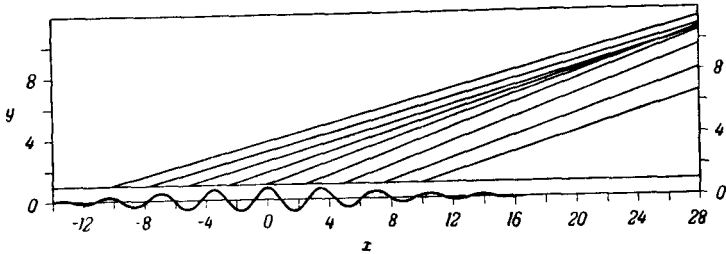


Рис. 6.

Семейство «энергетических лучей», определяемое уравнением (4.3). Влияние конечной амплитуды проявляется в размывании лучей, по которым распространяются возмущения.

ницей $y = 1$, после чего решать (4.4) в предположении, что вектор \mathbf{x} постоянен. В этом приближении легко находится решение, которое имеет вид

$$x = (b/c)y + \text{const}, \quad (4.6)$$

где константа определяется по начальной точке на границе $y = 1$. Таким образом, при указанных обстоятельствах выходные кривые соответствуют энергетическим лучам (4.3).

На рис. 5 показано, что выходные кривые при численном решении задачи о волнообразной стенке действительно стремятся образовать огибающую, идущую вдоль фронта области неопределенности. Для сравнения на рис. 6 проведены «энергетические лучи» (4.3), начинающиеся в тех же точках на прямой $y = 1$, что и «выходные кривые». Энергетические лучи образуют заострение в точке (23,37; 9,21); оно находится намного дальше от начальной линии, чем начало огибающей на рис. 5. Однако линия (3.4), вдоль которой расположен скачок фазы, довольно близко соответствует той, на которой образуется заострение энергетических лучей. Принимая за последнюю по определению тот луч, который касается вершины острия, получаем уравнение этой линии

$$y = 0,3235x + 1,6609. \quad (4.7)$$

Как легко установить, эта линия пренебрежимо мало отличается от линии (3.4) в интервале справедливости проведенных вычислений скачка фазы ($10 < x < 20$). Таким образом, размазывание энергетических лучей может повлиять на положение начала образования скачка, но, очевидно, не изменяет направления, вдоль которого этот скачок образуется.

Автору снова доставляет большое удовольствие выразить признательность проф. Лайтхиллу за большую помощь и руководство при выполнении этого исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B., Feir J. E., *J. Fluid Mech.*, 27 (1967), 417.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. Б., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
3. Howe M. S., см. стр. 195 настоящего сборника.
4. Lighthill M. J., *J. I. M. A.*, 1 (1965), 269.
5. Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc.*, A 299 (1967), 28.
6. Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, A 283 (1965), 238.
7. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), 273.
8. Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, 27 (1967), 399.
9. Whitham G. B., *Proc. Roy. Soc.*, A 299 (1967), 6.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора перевода	5
<i>М. Дж. Лайтхилл.</i> Вводные замечания. <i>Перевод Г. И. Баренблатта</i>	7
<i>Д. Б. Уизем.</i> Вариационные методы и их приложение к волнам на воде. <i>Перевод Г. И. Баренблатта</i>	12
<i>Ч. Дж. Р. Гарретт.</i> Обсуждение. Адиабатический инвариант для распро- странения волн в неоднородной движущейся среде. <i>Перевод</i> <i>Г. И. Баренблатта</i>	40
<i>М. Дж. Лайтхилл.</i> Некоторые частные случаи применения теории Уизема. <i>Перевод В. М. Ентова</i>	43
<i>Дж. Фейр.</i> Обсуждение. Некоторые результаты опытов с волновыми им- пульсами. <i>Перевод В. М. Ентова</i>	77
<i>Т. Б. Бенджамен.</i> Неустойчивость периодических цугов волн в нелиней- ных системах с дисперсией. <i>Перевод В. М. Ентова</i>	83
<i>К. Хассельман.</i> Обсуждение статьи Т. Б. Бенджамена. <i>Перевод В. М. Ен- това</i>	105
<i>К. Хассельман.</i> Описание нелинейных взаимодействий методами теорети- ческой физики (с приложением к образованию волн ветром). <i>Пе- ревод В. А. Городцова</i>	106
<i>П. Сафмен.</i> Обсуждение статьи К. Хассельмана <i>Перевод В. А. Городцова</i>	137
<i>О. М. Филлипс.</i> Теоретические и экспериментальные исследования взаимо- действий гравитационных волн. <i>Перевод В. А. Городцова</i>	141
<i>М. С. Лонге-Хиггинс, А. Э. Гилл.</i> Резонансное взаимодействие планетар- ных волн. <i>Перевод Р. Л. Салганика</i>	161
<i>К. Кенион.</i> Обсуждение статьи М. С. Лонге-Хиггинса и А. Э. Гилла. <i>Перевод Р. Л. Салганика</i>	188
<i>М. Дж. Лайтхилл.</i> Заключительные замечания. <i>Перевод Р. Л. Салганика</i>	194
<i>М. С. Хоув.</i> Нелинейная теория установившегося течения в открытом ка- нале вдоль твердой поверхности, имеющей форму конечной груп- пы волн. <i>Перевод Р. Л. Салганика</i>	195
<i>М. С. Хоув.</i> Скачки фазы. <i>Перевод Р. Л. Салганика</i>	215