

Г. БАРТОН

# ДИСПЕРСИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Перевод с английского  
В. П. Павлова и А. Д. Суханова



АТОМИЗДАТ МОСКВА 1968

# INTRODUCTION TO DISPERSION TECHNIQUES IN FIELD THEORY

GABRIEL BARTON

*University of Sussex*

**W. A. BENJAMIN, INC.**

1965

*New York*

*Amsterdam*

Г. БАРТОН. Дисперсионные методы в теории поля. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1968.

За последние 10 лет в физике элементарных частиц возникло новое направление. Его основа — метод дисперсионных соотношений — оказался удобным языком для описания сложных закономерностей в физике микромира. Книга Г. Бартона — первая книга, переведенная на русский язык, посвященная разносторонним применениям этого метода. В нее включен также ряд высших разделов квантовой теории поля, не получивших отражения в популярных монографиях.

Книга Г. Бартона несомненно найдет многочисленных читателей среди студентов и аспирантов-теоретиков, а также среди физиков, интересующихся последними достижениями теории элементарных частиц.

Рисунков 33, библиография 114.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Дисперсионные методы в квантовой теории поля получили свое обоснование более 10 лет назад, когда Н. Н. Боголюбов строго доказал дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах. Это доказательство появилось в тот момент, когда было серьезно подорвано доверие к продуктивности гамильтонова метода в квантовой теории поля. Оно не могло не вызвать энтузиазма среди широкого круга теоретиков. Возникла надежда, что с помощью дисперсионных соотношений удастся решить основные проблемы, связанные с взаимодействием элементарных частиц. Дело в том, что дисперсионные соотношения вместе с условием унитарности приводят к системе уравнений для наблюдаемых величин — амплитуд рассеяния, в каком-то смысле призванной заменить динамические уравнения гамильтонова метода.

Проблема дисперсионных соотношений заставила по-новому взглянуть и на саму квантовую теорию поля. Была создана такая ее формулировка, в которую дисперсионные соотношения наиболее естественно вписываются. Мы имеем в виду аксиоматический подход к квантовой теории поля. В двух продуктивных вариантах аксиоматики — аксиоматике Лемана — Симанзика — Циммермана и аксиоматике Боголюбова — основную роль играет условие причинности. Именно из этого условия выводится рабочий аппарат теории — редуцированные формулы. Хотя вначале казалось, что в аксиоматической формулировке квантовой теории поля удастся избежать столь коварных проблем, как перенормировка, в последнее время стало ясно, что они проявляют себя и в аксиоматике, в частности при изучении гейзенберговских операторов вне энергетической поверхности.

Первый успех в доказательстве дисперсионных соотношений вызвал к жизни многочисленные попытки раз-

вить их в применении к самым различным процессам. Однако математические проблемы таких доказательств оказались столь сложными, что до сих пор дисперсионные соотношения строго получены практически лишь в двух реальных случаях. Это обстоятельство не охладило энтузиазма «деловых людей», смело выписывавших дисперсионные соотношения и эксплуатировавших первоначальную идею метода. Основные практические результаты получены в теории с помощью не доказанных строго дисперсионных соотношений для формфакторов, амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния и двойных дисперсионных соотношений. С точки зрения ригористической они остаются гипотезами, но сам метод дисперсионных соотношений настолько удобен и естествен для описания взаимодействия элементарных частиц, что в конце концов на его основе возникла целая идеология, в значительной мере не зависящая от стандартной квантовой теории поля.

Предлагаемая читателям книга представляет собой перевод двух монографий известного английского теоретика Г. Бартона «Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory» (1965) и «Introduction to Advanced Field Theory» (1963). Одна из монографий посвящена собственно дисперсионным методам. Сформулировав основные аксиомы квантовой теории поля в духе Лемана — Симанзика — Циммермана, автор вначале подробно рассматривает представление Челлена — Лемана для функций Грина скалярного поля. Далее основное внимание уделено формфакторам как сохраняющихся, так и несохраняющихся векторных токов. В отличие от всей имеющейся монографической литературы по квантовой теории поля в книге Бартона тщательно разобраны проблемы выделения инвариантных формфакторов, аномальных порогов, поведения функций на втором римановом листе, структура решений уравнений Омнеса для парциальных амплитуд. Развитые здесь общие методы применены к конкретным примерам электромагнитных формфакторов нуклона и формфакторов векторного и аксиального токов слабых взаимодействий. Общая черта затронутого круга физических проблем — учет электромагнитного и слабого взаимодействий в низших порядках теории возмущений. Сильные же взаимодействия феноменологически описываются именно дисперсионным методом.

Вторая из включенных в перевод монографий частично касается дисперсионных методов, углубляя ряд вопросов, затронутых ранее. К числу наиболее интересных проблем относится теорема Лемана — Симанзика — Циммермана для вершинной функции, на которую в значительной мере опирается весь подход к формфакторам. Кроме того, сюда входят некоторые тонкие вопросы современной квантовой теории поля: проблема духовых состояний, индефинитная метрика, проблема неэквивалентных представлений канонических соотношений коммутации в квантовых системах с бесконечным числом степеней свободы, теорема Хаага как отражение последней проблемы в квантовой теории поля.

Приятной особенностью книг Бартона является простота и доступность изложения самых сложных и интересных вопросов современной теории элементарных частиц. В настоящее время материал этих книг во всей своей широте известен лишь довольно узкому кругу специалистов. Однако современный уровень развития физики элементарных частиц требует освоения дисперсионных методов всеми физиками — как теоретиками, так и экспериментаторами. Эти же методы получают все большее распространение и в других вопросах ядерной физики.

*В. П. Павлов,  
А. Д. Суханов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Основой этой книги послужила первая часть курса по методам теории элементарных частиц, прочитанного студентам первого и второго курсов Университета в Суссексе в 1963—1964 годах. Она охватывала круг вопросов вплоть до формфакторов и некоторых их приложений. Читатели должны быть знакомы с релятивистскими волновыми уравнениями, процедурой квантования свободных полей, элементарной техникой графов Фейнмана. Желательно также знакомство с теоремой Нетер и с элементарной теорией функций комплексного переменного. Прочитанный курс включал также дисперсионные соотношения для рассеяния вперед, представление Манделстама, уравнения для амплитуд парциальных волн и метод самосогласованных решений. Однако эти вопросы уже хорошо изложены в других книгах и обзорных статьях\*.

Обрабатывая записи лекций, я прежде всего имел в виду интересы студентов, занятых динамическими расчетами слабых и электромагнитных взаимодействий сильновзаимодействующих частиц. Основное внимание было сосредоточено на динамике. Например, внутренняя симметрия сильных взаимодействий, равно как и способ их нарушения слабыми и электромагнитными взаимодействиями предполагаются известными. В то же время рассматривается детально особая роль сохраняющихся токов в динамических проблемах.

Хотя очерченное направление только еще развивается, уже сейчас существуют довольно хорошо разработанные методы, позволяющие решать подобные проблемы. Отличительной чертой этих методов является то,

---

\* Особенно рекомендуем недавно вышедшую книгу Д. В. Ширкова, В. В. Серебрякова, В. А. Мещерякова «Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях» (М., «Наука», 1967).— *Прим. перев.*

что в них параметры физики сильных взаимодействий (подобные сдвигам фаз) рассматриваются в качестве исходных данных, а вовсе не как результат каких-то расчетов. Наконец, очевидно, что современная теория поля более приспособлена к использованию в этих методах, нежели в чистой физике сильных взаимодействий. К сожалению, составные части обсуждаемых методов рассеяны по различным статьям. Некоторые же этапы в подобных расчетах незаслуженно пользуются репутацией тривиальных, хотя работы, в которых их опускают, читать трудно, а сам подобный образ действий нередко приводит к ошибкам.

Эта книга должна быть элементарной в том смысле, что на своем уровне она разумно самосодержательна и во всех своих разделах достаточно ясна по изложению. Выкладки делаются подробно, если в этом появляется необходимость, а большинство относящихся к делу проблем, которые не обсуждаются в тексте, касаются теории в целом. С этими проблемами можно ознакомиться подробнее в специальной литературе, на которую даются ссылки. Книга даст возможность ознакомиться с согласованным описанием методов анализа проблем, относящихся к пограничной области между физикой сильных и прочих взаимодействий; кроме того, она, как я надеюсь, послужит также досужим введением в дисперсионную теорию, применяемую в физике сильных взаимодействий. Конечно, в этой области потребуются и совершенно иные методы и идеи, дополняющие методы данной книги.

*Габриель Бартон*

Брайтон, Суссекс  
Сентябрь, 1965 г.

### ВВЕДЕНИЕ И ПЛАН ИЗЛОЖЕНИЯ

Физике элементарных частиц пока еще далеко до внутреннего единства. Поэтому особую важность приобретают разделы, общие для различных существующих сейчас фрагментарных теорий. Цель первой главы — сопоставление подхода, принятого в настоящей книге, с другими — альтернативными, дополняющими или более претенциозными методами.

Предполагается, что читателю известны основные сведения о частицах, поэтому сразу же предупреждаем: мы не собираемся касаться большинства фундаментальных проблем, решения которых ждут, во всяком случае при теперешнем положении дел, лишь немногие физики. Итак, мы не требуем ответа ни на один из следующих вопросов:

— Почему взаимодействия частиц можно разбить на четыре типа: гравитационные, слабые, электромагнитные и сильные — намного различающиеся по своей силе?

— Почему только при слабых взаимодействиях нарушаются четность, инвариантность относительно зарядового сопряжения и странность?

— Почему все электрические заряды являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ ?

— Каково происхождение внутренних квантовых чисел, подобных изотопическому спину и странности, к которым относятся с почтением только сильные взаимодействия и никакие другие?

— Каково происхождение *строгих* законов сохранения, не гарантируемых одной лишь однородностью пространства-времени, подобных сохранению заряда, числа барионов и числа лептонов\*?

Все это мы примем здесь как опытные данные. Ведь

---

\* Эти законы сохранения связаны с так называемыми правилами сверхотбора.— *Прим. перев.*



пока остаются открытыми вопросы более скромные, мало надежды найти ключ к решению глубоких проблем.

Совокупность проблем, которыми мы займемся, состоит в количественном описании свойств и поведения сильно взаимодействующих частиц. (Фактически, как будет видно ниже, мы прежде всего рассмотрим влияние сильных взаимодействий на слабые и электромагнитные взаимодействия частиц.) Техника дисперсионных соотношений, единственная пригодная для таких целей, в этом аспекте никем еще не обсуждалась. Однако по поводу физических основ, на которые эта техника опирается (или должна опираться), нет общего мнения. Наш подход основан на квантовой теории поля.

Исторически престиж квантовой теории поля базируется, прежде всего, на возможности непосредственно описывать с ее помощью свободные частицы и слабые и электромагнитные взаимодействия в главных порядках по степеням константы связи. Кроме того, эта теория является средством для характеристики как пространственно-временных свойств, так и внутренней симметрии\*. Наконец, перенормированное итерационное решение уравнений поля в представлении взаимодействия количественно описывает во всех порядках по  $e^2$ , доступных экспериментальной проверке, любые электродинамические эффекты\*\*.

Однако перенормировка теряет силу (или неприменима), во всяком случае в ее первоначальной формулировке, для процессов высших порядков по слабым взаимодействиям. Теория возмущений как таковая неприменима и к сильным взаимодействиям, когда порядок параметров разложения лежит в пределах от 1 до 15. Эти два усугубляющих недостатка привели к многочисленным усовершенствованиям фейнмановской техники. В большинстве случаев речь шла о суммировании в замкнутой форме всех графов или совокупностей графов, казавшихся важными и многообещающими. Примерами могут служить уравнения Швингера, методы ренормализационной группы, уравнение Бете—Солпитера и недавние работы по векторным мезонам\*\*\*.

---

\* См., например, Роман (Roman, 1964).

\*\* См., например, Яух и Рорлих (Jauch, Rohrlich, 1955).

\*\*\* См., например, Боголюбов и Ширков, 1957; Швебер (Schweber, 1963); Ли и Янг (Lee, Yang, 1963); Ли (Lee, 1963); Фейнберг и Пайс (Feinberg, Pais, 1963).

Изучение аналитических свойств графов Фейнмана\* — другое важное ответвление теории возмущений, тесно связанное с физикой сильных взаимодействий. Оно иллюстрирует, а в ряде случаев дает и прямые сведения о структуре амплитуд перехода в целом. Однако здесь мы не будем непосредственно рассматривать ни один из этих аспектов теории.

Ввиду неприменимости теории возмущений к анализу сильных взаимодействий было развито два новых подхода к теории поля. Хотя их исходные точки близки, развитие шло несколько различными путями. В обоих случаях отказались от представления взаимодействия и от прямых попыток решить уравнения поля в представлении Гейзенберга. Вместо этого оба подхода опираются на следствия таких общих принципов, как релятивистская инвариантность, причинность, положительность спектра энергии, унитарность (т. е. сохранение вероятности) и положительная определенность метрики в гильбертовом пространстве. Для них характерна высокая степень требовательности, с которой они подходят к обычным, каждодневным вычислениям, проводимым в современной физике. Другими словами, они значительно выделяются своими математическими средствами.

Более абстрактная теория, возникшая главным образом из работ Вайтмана и Хаага, декларирует полную математическую строгость. Помимо всего прочего, она дала новые и изящные доказательства\*\* таких фундаментальных результатов, как теорема *PCT* (Людерса — Паули), связь спина со статистикой и теорема Хаага.

Другая теория, начиная примерно с того же, заключается в себе то, что обычно называют дисперсионной техникой. Ее теоретико-полевая основа наиболее ясно и элегантно изложена в работе Лемана, Симанзика и Циммермана, на которой базируется и наш подход. Первоначальной целью был вывод определенных аналитических свойств амплитуд рассеяния в теории поля. Из этих свойств сразу следуют непосредственно проверяемые на опыте некоторые соотношения между ампли-

---

\* См., например, Иден (Eden, 1962) и Полкингхорн (Polkinghorne, 1962).

\*\* См., например, Вайтман (Wightman, 1963); Стритер и Вайтман (Streater, Wightman, 1966).

тудами, так называемые дисперсионные соотношения\*, справедливые независимо от конкретной динамики, заключенной в лагранжианах. К сожалению, до сих пор никому еще не удалось вывести на основании теории поля все те аналитические свойства, в которые многие физики верят и которые они постоянно используют. В частности, все еще недостает прочного звена между теорией поля и представлением Манделстама. Это представление постулирует некоторые простые аналитические свойства амплитуды упругого рассеяния как функции обеих ее независимых аргументов (энергии и передачи импульса) и вместе с условием унитарности служит центральной составной частью всех современных динамических теорий\*\*.

Учитывая этот пробел, некоторые физики считают, что следует полностью отказаться от теории поля, а в теории элементарных частиц начать с постулирования тех аналитических свойств, какие нам потребуются. Их, совместно с перекрестной симметрией (известной в теории возмущений как «правила подстановки») и унитарностью, следует взять в качестве аксиоматической основы теории.

В частности, с такой точки зрения необходим отказ от всякого соответствия с лагранжевыми методами, хотя и не всегда явно, но остающимися составной частью теории поля. Такой подход обычно называют теорией, основанной только на  $S$ -матрице (Hagedorn, 1964; Goldberger, 1961).

Во всяком случае и с менее экстремистской позиции ясно, что совершенно не обязательно сопоставлять каждому типу частицы свое отдельное поле, т. е. независимую степень свободы. Но тогда возникает вопрос, не являются ли некоторые частицы (и соответствующие им поля) в каком-то смысле менее элементарными, чем другие. Либо, напротив, несколько разных наборов частиц с равным удобством можно выбрать в качестве основных, так что параметры (массы и константы связи), характеризующие любой из этих наборов, позволяют вычислить параметры всех остальных частиц. И нако-

---

\* См., например, Хагедорн (Hagedorn, 1964) и Гольдбергер (Goldberger, 1961).

\*\* См., например, Чью (Chew, 1961, 1964); Якоб и Чью (Jacob, Chew, 1965); Юост (Jost, 1963).

нец, можно считать, что все частицы выступают на равных основаниях, являясь в широком смысле возбужденными состояниями единственного фундаментального поля.

Окончательный выбор между этими различными типами теорий значительно затрудняется тем обстоятельством, что совпадают многие из их уравнений, в частности те, которые фактически применяются при вычислениях. Например, с практической точки зрения в общем-то неважно, постулированы ли необходимые аналитические свойства амплитуды или есть надежда вывести их в дальнейшем из теории поля. Аналогично практическая ценность вычислений вряд ли зависит от того, считаем мы все начальные данные логически необходимыми или излишними, приписав это временным недостаткам доступной нам математической техники.

К этим фундаментальным проблемам можно относиться по-разному. Но в любом случае заранее неясно, приведут ли аналитичность и унитарность (дополненные конечным числом начальных параметров) самостоятельно к системе уравнений, позволяющей выполнить все те вычисления, которые можно осуществить другими методами, скажем, на основе лагранжевой теории возмущений. Ясно одно: экстремистское  $S$ -матричное направление дало мощный толчок развитию конкретной дисперсионной техники. Благодаря именно ему мы можем сейчас по крайней мере высказать разумную надежду, что для большинства ближайших целей этого аппарата будет достаточно. А сторонники направления «чистой  $S$ -матрицы» безусловно считают, что его должно быть достаточно.

Эту книгу следует считать введением в дисперсионную технику. Мы развиваем ее настолько далеко, чтобы иметь дело с большинством приложений. Здесь нас интересуют процессы, в которых свойства сильно взаимодействующих частиц проявляются через их слабые и электромагнитные взаимодействия. Изучать такие процессы значительно проще, чем описывать поведение системы, состоящей только из сильно взаимодействующих частиц. Помимо всего, это позволит нам постепенно подойти к ряду основных методов и способов постановки задач, имеющих весьма широкие приложения. Техника, которой мы располагаем, по-видимому, сохранит свое зна-

чение для этого круга более простых проблем, хотя область ее применения может и измениться. Кроме того, здесь теория поля наиболее полезна. Хотя она все еще может показаться неудовлетворительной как основа для физики элементарных частиц, изложение целиком по-коится на теории поля. Но мы повторяем, что реальная вычислительная техника существует в значительной мере независимо от ее логического фундамента. Фактически нигде в рамках теории поля мы не надеемся, да и не желаем рисковать, затрагивая упомянутые выше глубокие вопросы.

Мы уже говорили, что в теории поля еще не доказаны все те дисперсионные соотношения, которые находят широкое применение. Частично по этой причине, а частично потому, что имеющиеся доказательства хорошо известны и могут быть найдены в литературе, в дальнейшем не приводится ни одного из них. По этому поводу и для дальнейших ссылок отсылаем читателя к ясно написанным книгам Хагедорна (Hagedorn, 1964) и Гольдбергера (Goldberger, 1961).

Разрыв между предметом настоящего изложения и более претенциозными направлениями частично восполняется двумя обзорами: Амати и Фубини (Amati, Fubini, 1962) и Манделстама (Mandelstam, 1962). В частности, там рассматриваются дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния по одной переменной и дается много библиографических ссылок.

Представление Манделстама и вскрытые им важные асимптотические проблемы хорошо изложены в четырех обзорах, написанных в той или иной степени с точки зрения чистой  $S$ -матрицы Чью (Chew, 1961), Омнесом и Фруассаром (Omnès, Froissart, 1963), Фраучи (Frautshi, 1963) и Сквайрсом (Squires, 1964). Обзор конкретных приложений к системе  $\pi$ -мезон—нуклон дал Гамильтон (Hamilton, 1964).

Наконец, следует подчеркнуть, что главное внимание мы обращаем на динамику. Другие и более успешные направления физики элементарных частиц, поиски внутренних симметрий находятся вне рамок нашей книги, хотя мы, конечно, упоминаем о влиянии соответствующих результатов на динамические вычисления. В то время как лоренц-инвариантность самым тесным образом переплетается с основами любой динамической теории, другие, внутренние, симметрии должны быть при-

внесены в нее извне\*. Наша глава о сохраняющихся токах и тождестве Уорда иллюстрирует, насколько важна корректность такого привнесения.

## Глава 2

### ГИПОТЕЗА ПОЛЯ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Совершенно очевидно, что в экспериментах по физике элементарных частиц имеют дело непосредственно с частицами. Чтобы обсуждать их в рамках теории поля, приходится привлекать абстракции, которые кажутся даже более отдаленными от жизни, чем соответствующие абстракции в теории Максвелла и в ее квантовомеханической формулировке. Как раз в силу того, что концепция квантованного поля столь абстрактна, необходимо быть достаточно осмотрительным, вводя ее в теорию таких непосредственно регистрируемых объектов, как элементарные частицы. В § 2.1 мы не упоминаем вовсе о полях, а ограничиваемся формулировкой и обсуждением некоторых аксиом и определений, непосредственно инспирированных конкретными экспериментальными ситуациями, встречающимися в физике элементарных частиц. Эти аксиомы необходимы в любой теории, которая имеет дело с элементарными частицами. В § 2.2 через уже введенные операторы частиц определяются «вспомогательные», или «асимптотические», поля. Это не приводит к сколько-нибудь новому физическому содержанию, а оказывается просто предварительным этапом (на котором впервые появляется постоянная Планка  $\hbar$ ). Понятие о нетривиальной теории поля дается в § 2.3.

#### § 2.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Наиболее типичный эксперимент в физике элементарных частиц состоит в следующем. Две частицы сталкиваются друг с другом и либо рассеиваются упруго, либо инициируют неупругий процесс, в результате кото-

---

\* См., например, Гелл-Манн и Неэман (Gell-Mann, Neeman, 1965).

рого в конечном состоянии оказываются дополнительные частицы того же или иного сорта по сравнению с частицами в начальном состоянии. Возможность неупругого процесса при столкновении частиц достаточно высокой энергии является существенным признаком любой релятивистской системы, кинетическая энергия которой может превращаться в массу (или энергию) покоя. Например, протон-антипротонные столкновения среди многих других могут привести к следующим процессам:  $p + \bar{p} \rightarrow p + \bar{p}$ ;  $p + \bar{p} \rightarrow p + \bar{p} + \pi$ ;  $p + \bar{p} \rightarrow \Lambda + \bar{\Lambda}$ ;  $p + \bar{p} \rightarrow 3 \pi$ .

Наша первая задача — научиться описывать возможные начальные и конечные состояния. Экспериментаторы решают ее, используя монохроматоры, коллиматоры и телескопические счетчики или другие регистрирующие приборы. Очевидно, они готовят состояния, которые первоначально характеризуются определенным числом частиц определенного сорта с заданными импульсами в единице объема, движущимися как-то до столкновения. Эта информация относится к свободно движущимся частицам и фиксирует данный эксперимент единственным образом.

Заметим, что до сих пор мы касались только проблемы спецификации рассматриваемой системы и все еще ничего не сказали о том, что происходит в течение и после столкновения. По прошествии значительного промежутка времени после столкновения данная система опять будет однозначно характеризоваться определенной концентрацией частиц определенных сортов, движущихся свободно с определенными импульсами. Конечно, система, допускающая *простое* описание посредством задания ее начальной конфигурации (например, система, содержащая только два антипараллельных падающих пучка одинаковых частиц) потребует более *сложного* описания, если ее характеризовать заданной конечной конфигурацией (в нашем случае это будет сложная суперпозиция многих различных возникающих пучков), и наоборот.

В строгом соответствии с экспериментальной ситуацией введем две фундаментальные аксиомы относительно гильбертова пространства векторов состояния.

I. *Состояния, которые в отдаленном прошлом (т. е. при  $t \rightarrow -\infty$ ) содержали в некотором объеме определенные числа частиц определенных сортов с определенными импульсами, образуют полный набор.*

Обозначим такие состояния

$$|k_1, k_2, \dots, (in)\rangle.$$

Это означает, что данное состояние в отдаленном прошлом имело в единице объема по одной свободной частице с четыре-импульсами  $k_1, k_2$  и т. д. Под символами  $k_i$  следует понимать не только импульсы частиц как таковые, но также и все другие присущие им характеристики, как-то: масса, заряд и спин.

II. *Состояния, которые в отдаленном будущем (т. е. при  $t \rightarrow +\infty$ ) содержат в некотором объеме определенные числа частиц определенных сортов с определенными импульсами, образуют полный набор.*

Члены этого набора мы обозначим как

$$|k_1, k_2, \dots, (out)\rangle.$$

Заметим, что по определению все ин- и аут-состояния от времени не зависят, т. е. мы действуем (и будем действовать) в представлении Гейзенберга. Те читатели, которым это ясно, могут пропустить данный параграф. Для остальных мы вновь подчеркнем следующее. Состояние  $|k_1, k_2, (in)\rangle$ , например, — это состояние, в котором (в единице объема) содержатся две частицы с четыре-импульсами  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, движущиеся свободно (до столкновения) при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, система описывается вектором состояния  $|k_1, k_2, (in)\rangle$ , имеющим простую конфигурацию в пространстве — времени при  $t \rightarrow -\infty$ ; но этот вектор не будет более иметь столь простой пространственно-временной конфигурации ни после столкновения (при  $t \rightarrow +\infty$ ), ни во время столкновения (т. е. при конечных значениях  $t$ ). Однако можно воспользоваться преимуществом простоты частного состояния при  $t \rightarrow -\infty$  и зафиксировать его *раз и навсегда*: даже если система изучается в конечные моменты времени, соответствующая пространственно-временная конфигурация может быть в принципе экстраполирована назад к моменту времени  $t \rightarrow -\infty$ , когда в ней удастся распознать состояние  $|k_1, k_2, (in)\rangle$ .

Эта аргументация относительно ин- и аут-состояний интуитивно очевидна, и мы не будем пытаться ее здесь улучшить. Она не является строгой, поскольку мы игнорировали фундаментальный факт: если можно считать, что частицы движутся к месту столкновения, то они должны быть локализованы в пространстве; поэтому в



силу принципа неопределенности их импульсы не могут быть в точности равны предписанным значениям. Строгое уточнение этого нашего наивного рассмотрения далеко не тривиально. Читатели смогут его найти в книге Гольдбергера и Ватсона (Goldberger, Watson, 1967).

Другое усложнение связано с тем обстоятельством, что введенные выше ин- и аут-состояния определяются заданием чисел частиц в единичном трехмерном объеме, который, конечно, не является лоренц-инвариантным объектом. При построении ковариантной теории удобно считать, что преобразования Лоренца изменяют не только спиновые и импульсные индексы векторов состояний (и их фазы), но также и их нормировку. К этому мы вернемся позднее.

Игнорируя на время вопрос о ковариантности, рассмотрим для простоты теорию, в которой существуют только частицы одного сорта — нейтральные и бесспиновые, подчиняющиеся статистике Бозе—Эйнштейна. Этот простой случай даст нам возможность ввести основные понятия. Возвратиться к усложнениям, связанным со спином и зарядом, тогда будет простым делом, и мы сделаем это в гл. 5. Кроме того, будем считать, что свободные частицы могут иметь только допустимые импульсы. Последние определяются тем, что соответствующие волновые функции  $\exp(+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$  в конфигурационном пространстве подчиняются на границах большого трехмерного объема  $V$  периодическим граничным условиям. Реальная физическая ситуация будет воспроизводиться в пределе при  $V \rightarrow \infty$ , когда имеет место следующая эквивалентная замена суммирования по фазовому пространству интегрированием:

$$V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Наконец, будем отождествлять  $V$  с тем «объемом в пространстве», который фигурирует в аксиомах I и II.

Число частиц с определенным импульсом естественно должно быть целым. Поэтому под множеством ин-состояний можно понимать множество одновременных собственных векторов операторов чисел частиц  $N(in)$  в гильбертовом пространстве, каждый из которых имеет неотрицательные целые значения. Состояния, отличающиеся на одну частицу, связаны друг с другом известными операторами рождения и уничтожения  $a_{\mathbf{k}}^*(in)$ ,

$a_k(in)$ , удовлетворяющими не менее известным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [a_k(in), a_{k'}^*(in)] &= \delta_{k, k'}; \\ [a_k(in), a_{k'}(in)] &= 0; \\ N_k(in) &= a_k^*(in) a_k(in). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Существует аналогичный набор операторов для аут-состояний, которые мы обозначим  $N(out)$  и т. д. (Для частиц, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака, следует коммутаторы заменить на антикоммутаторы.) В нерелятивистской квантовой механике совпадение алгебр ин- и аут-операторов означало бы, что эти операторы связаны унитарным преобразованием. В настоящей релятивистской теории с бесконечным числом степеней свободы существование такого унитарного оператора *автоматически* ниоткуда не вытекает. Элементарное обсуждение соответствующих усложнений будет дано в гл. 18 и 19. Однако для наших конкретных целей достаточно отметить, что существование такого оператора (будем называть его  $S$ -матрицей) может быть гарантировано введением еще одной физически обоснованной аксиомы — 0-аксиомы. К ее формулировке мы перейдем, как только перечислим некоторые элементарные формальные свойства оператора  $S$ .

$S$ -матрица выбирается так, чтобы ее матричные элементы определялись формулой

$$\langle f, (out) | i, (in) \rangle = S_{fi} = \langle f, (in) | S | i, (in) \rangle. \quad (2.3)$$

Это не единственное возможное требование и, вероятно, не самое естественное, хотя определено наиболее популярное. Очевидно, отсюда следует, что

$$\langle f, (out) | = \langle f, (in) | S; \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} S^* | \{k\}, (in) \rangle &= | \{k\}, (out) \rangle; \\ | \{k\}, (in) \rangle &= S | \{k\}, (out) \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} S^{-1} a_k(in) S &= a_k(out); \\ S &= \sum_{\{k\}} | \{k\}, (in) \rangle \langle \{k\}, (out) |. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Суммирование в последней формуле производится по всем конфигурациям  $\{k\}$ . В аксиомах I и II подразуме-

вается, что операторы  $u_k(in)$ ,  $a_k^*(in)$  образуют полный набор операторов. Иначе говоря, единственный оператор, коммутирующий со всеми операторами этого набора,— оператор, кратный тождественному. (Подобный полный набор операторов не следует смешивать с полными наборами *взаимно коммутирующих* операторов, знакомыми из квантовой механики.) Аналогичная ситуация имеет место и для аут-операторов.

[Обращаем внимание на равенство (определение)  $|\{k\}, (in)\rangle = S|\{k\}, (out)\rangle$ . Вероятно, было бы естественнее определить  $S$ -матрицу как такой оператор, который, действуя на ин-состояние, порождает соответствующее аут-состояние. Иначе говоря, это был бы оператор, эрмитово сопряженный оператору  $S$ , определенному выше. Тем не менее мы придерживаемся в дальнейшем определения (2.5), которое несколько удобнее для разного рода манипуляций.]

Конечно, единственными простыми по форме коммутаторами являются коммутаторы ин-операторов друг с другом и аналогичные коммутаторы аут-операторов. Что касается коммутаторов ин-операторов с аут-операторами, то их нельзя найти, откуда полностью не известна  $S$ -матрица. Они не входят в число основных уравнений.

В данный момент важно подчеркнуть, что сам способ введения ин- и аут-состояний подразумевает наличие только стабильных частиц. Вопрос о том, как можно в рамках этого формализма рассматривать процессы распада, весьма деликатен, и мы обратимся к нему позднее. Кроме того, на данной стадии изложения не делается никакого различия между «элементарной» или «составной» частицами: любой стабильной частице сопоставляются ее собственные ин- и аут-операторы, так что все частицы рассматриваются с одной и той же точки зрения.

Наконец, введем следующую аксиому, которую логично назвать 0-аксиомой.

0. *Существует состояние  $|0\rangle$  — вакуум, обладающее всеми теми свойствами, которые интуитивно хотелось бы ему приписать.* Именно:

1. Оно инвариантно относительно лоренцевых преобразований.

2. Ему соответствуют нулевые собственные значения всех динамических переменных (т. е. операторов энергии, момента импульса) и собственное значение  $+1$

операторов всех дискретных преобразований симметрии (например, оператора отражения пространства).

3. Оно нормируемо, т. е.

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.7)$$

4. Оно является состоянием с наимизшим значением энергии.

5. Оно единственно.

Вопрос о единственности определенного таким образом вакуумного состояния в настоящее время в некоторых теориях вызывает сомнения. Временно мы примем, что свойство 5 имеет место.

6. Оно оказывается состоянием «без частиц» одновременно и для ин-, и для аут-операторов, т. е. для всех  $k$  выполняются равенства

$$a_k(in)|0\rangle = 0 = a_k(out)|0\rangle. \quad (2.8)$$

Последнее требование — это, очевидно, необходимое условие стабильности. Фактически оно должно быть дополнено аналогичным, хотя и независимым требованием для одночастичных состояний:

$$|k, (in)\rangle \equiv a_k^*(in)|0\rangle \equiv |k, (out)\rangle \equiv a_k^*(out)|0\rangle \equiv |k\rangle. \quad [(2.9)$$

Требования полноты наборов ин- и аут-состояний теперь означают, что все векторы гильбертова пространства могут быть представлены в виде линейных комбинаций базисных векторов либо в форме

$$\{a_{k_\alpha}^*(in) \cdots a_{k_\omega}^*(in)\}|0\rangle,$$

либо в аналогичной форме, построенной с помощью операторов  $a_k^*(out)$ .

Условие полноты ин- и аут-состояний кажется тривиальным только на первый взгляд. Фактически это самая смелая гипотеза, ибо она утверждает, что в гильбертовом пространстве нет ничего, кроме того, что бросается в глаза. Чтобы лучше понять, насколько ограничительна такая гипотеза, достаточно вспомнить, что ее нарушает, например, обычная квантовая электродинамика в своей наиболее распространенной формулировке. Действительно, в формализме Гупта—Блейлера ввиду дополнительного условия Лоренца приходится иметь дело с пространством с идефинитной метрикой, т. е. вводить в гильбертовом пространстве ненаблюдае-

мые состояния с отрицательной нормой, не говоря уже о тех состояниях, которые не подчиняются условию Лоренца. Поэтому в такой теории некоторые результаты, следующие из других стандартных теорий поля, либо вообще неприменимы, либо, во всяком случае, неприменимы непосредственно. [Дальнейшее обсуждение и ссылки на литературу см. в работе Пью (Pugh, 1964).]

Нетривиальность условия нормировки 3 проявляется только в пределе при  $V \rightarrow \infty$ , когда дискретный спектр импульсов отдельных частиц, фиксированный периодическими граничными условиями, превращается в непрерывный. В этом случае все ин- или аут-состояния, кроме состояния  $|0\rangle$ , представляют собой собственные состояния оператора полного трехмерного импульса, относящиеся к его непрерывному спектру, и поэтому подлежат нормировке на  $\delta$ -функцию. Например, для одночастичных состояний

$$\langle k | k' \rangle \sim \delta(k - k').$$

Предоставляем читателям в качестве упражнения установить, что в пределе при  $V \rightarrow \infty$  правильное и удобное обобщение соотношений коммутации (2.2) состоит в следующем:

$$a_k(in) = \left[ \frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{1/2} a_{in}(k); \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} [a(k), a^*_l(k')] &= \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{k, k'} \rightarrow \delta(k - k'), \\ [a(k), a(k')] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Отсюда сразу следует, что если состояние  $|0\rangle$  нормировано согласно (2.7), то все другие состояния  $a^*_{in}(k)|0\rangle$  и т. д. ненормируемы или, точнее, подлежат нормировке только на  $\delta$ -функцию.

Возвращаясь к большому, но конечному объему  $V$  и к операторам  $a_k, a^*_k$ , заметим, что два состояния  $|k_1, k_2, (in)\rangle$  и  $|k_2, k_1, (in)\rangle$  одинаковы, поскольку  $a^*_{k_1}(in) a^*_{k_2}(in)|0\rangle = a^*_{k_2}(in) a^*_{k_1}(in)|0\rangle$ . Заметим также, что состояние  $|k_1, k_2, (in)\rangle$  нормировано на единицу, если  $k_1 \neq k_2$ . В противном случае, в силу соотношений коммутации,  $\langle k_1, k_1, (in) | k_1, k_1, (in) \rangle = 2$ .

На данном этапе удобно ввести оператор полного четырех-импульса  $P_\mu$ .

Соотношения коммутации оператора  $P_\mu$  с операторами  $a_k$  и  $a_k^*$  установить нетрудно. Пусть  $|p\rangle$  — какой-либо собственный вектор оператора  $P_\mu$ , отвечающий собственному значению  $p_\mu$ . Тогда

$$P_\mu a_k^*(in) |p(in)\rangle = (p + k)_\mu a_k^*(in) |p(in)\rangle. \quad (2.12)$$

Действительно, при  $t \rightarrow -\infty$  все частицы движутся как свободные, так что, действуя на состояние  $|p(in)\rangle$  оператором  $a_k^*(in)$ , мы просто добавляем одну частицу с четыре-импульсом  $k$  к уже имеющимся частицам, полный четыре-импульс которых равен  $p$ . Поскольку четыре-импульс сохраняется, состояние  $a_k^*(in) |p(in)\rangle$  будет в любой момент времени обладать четыре-импульсом, который на величину  $k$  больше четыре-импульса состояния  $|p, (in)\rangle$ . Из формулы (2.12) следует, что

$$P_\mu a_k^*(in) |p(in)\rangle = a_k^*(in) (P_\mu + k_\mu) |p(in)\rangle.$$

Поскольку это соотношение справедливо для всех состояний  $|p(in)\rangle$  и поскольку в силу аксиомы I ин-состояния образуют полный набор, имеет место операторное равенство

$$\left. \begin{aligned} P_\mu a_k^*(in) &= a_k^*(in) (P_\mu + k_\mu); \\ [P_\mu, a_k^*(in)] &= k_\mu a_k^*(in), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

а также эрмитово сопряженное ему равенство

$$[P_\mu, a_k(in)] = -k_\mu a_k(in). \quad (2.14)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для оператора  $a_k(out)$ .

Наконец, обратимся к проблеме ковариантной нормировки векторов состояний, с которой мы столкнулись при рассмотрении правой части формулы (2.11), имеющей, очевидно, размерность трехмерного объема. Это соответствует тому факту, что при принятой нормировке состояние

$$|k\rangle = a_k^* |0\rangle$$

содержит одну частицу в объеме  $V$ .

С точки зрения различных лоренцевых систем отсчета будут различными не только четыре-импульсы частицы  $k$ , но ввиду лоренцева сокращения и нормировочные объемы. Чтобы сделать нормировку состояний релятивистски инвариантной, следует заменить нормиро-

вочный объем величиной  $Vk_0/\mu$ , которая, как нетрудно проверить, инвариантна. Это означает, что инвариантно нормированным состоянием является не состояние  $|k\rangle = a_k^* |0\rangle$ , а состояние  $|\tilde{k}\rangle = \sqrt{k_0/\mu} a_k^* |0\rangle$ . Тогда оператор рождения для подобного состояния имеет вид

$$\tilde{a}_k^* = \sqrt{k_0/\mu} a_k^*. \quad (2.15)$$

Поскольку разные операторы  $a_k^*$  ( $in$ ) коммутируют между собой, то многочастичные состояния с инвариантной нормировкой определяются путем непосредственного обобщения последнего равенства:

$$|\overline{k_1, k_2, \dots (in)}\rangle = (k_{10}/\mu)^{1/2} (k_{20}/\mu)^{1/2} \dots |k_1, k_2, \dots, (in)\rangle. \quad (2.16)$$

Очевидно, элементы  $S$ -матрицы, определенные формулой (2.3), не являются скалярными, так что сама  $S$ -матрица — это не скалярный оператор. Однако последнее обстоятельство можно исправить, определив подходящий оператор  $S$  следующей формулой:

$$\tilde{S}_{fi} = \langle \overline{f(in)} | \overline{i(in)} \rangle = [(k'_{10}/\mu) (k'_{20}/\mu) \dots]^{1/2} \times \\ \times [(k_{10}/\mu) (k_{20}/\mu) \dots]^{1/2} S_{fi}.$$

## § 2.2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе мы определим два оператора поля  $\varphi_{in}(x)$  и  $\varphi_{out}(x)$  через уже введенные ин- и аут-операторы частиц. Поскольку алгебра таких операторов частиц тождественна алгебре операторов для невзаимодействующих частиц, то уравнения поля и соотношения коммутации для вспомогательных полей будут теми же, что и для свободных полей: они соотносятся с физическими частицами (которые участвуют во взаимодействии) только в силу физической интерпретации ин- и аут-состояний, развитой в предыдущем параграфе. Операторы полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  названы «вспомогательными» или «асимптотическими», чтобы подчеркнуть именно это обстоятельство и отличить их от нетривиального «интерполирующего» поля  $\varphi$ , которое мы введем ниже.

Предполагается, что читатели знакомы с теорией свободных полей; поэтому основное внимание будет сконцентрировано на некоторых физических аспектах;

более последовательное изложение и соответствующий анализ поведения частиц, отличных от нейтральных бесспиновых, можно найти в стандартных учебниках по теории поля.

Итак, наша цель — определить с помощью операторов  $a_{in}(\mathbf{k})$ ,  $a_{in}^*(\mathbf{k})$  по возможности наиболее просто оператор поля  $\varphi_{in}(x)$ , обладающий по крайней мере следующими, явно необходимыми свойствами:

- 1) поле  $\varphi_{in}(x)$  — скалярное поле;
- 2) оно является эрмитовым оператором;
- 3) оно удовлетворяет свободному уравнению Клейна—Гордона

$$(\square^2 + m^2) \varphi_{in}(x) = 0; \quad (2.17)$$

- 4) оно удовлетворяет основному соотношению коммутации с оператором полного четырех-импульса:

$$[\varphi_{in}(x), P_\mu] = i\hbar \partial_\mu \varphi_{in}(x), \quad (2.18)$$

которое подчеркивает роль оператора  $P_\mu$  как генератора преобразования сдвига (начиная с этого момента мы вновь будем считать постоянную Планка  $\hbar = 1$ ). [Аналогичные рассуждения применимы к аут-полям.]

Условие 1 здесь необходимо, ибо в любой релятивистски ковариантной теории основные величины должны обладать фиксированными и по возможности простейшими трансформационными свойствами; с этой точки зрения для бесспиновых частиц оказываются пригодными скалярные поля. Условие 2 отражает другое принятое нами временно упрощение, а именно тот факт, что частицы нейтральны. Обоснования условия 3 мы уже касались, а условие 4 необходимо в любой релятивистской теории.

Как хорошо известно из теории свободных полей, всем этим требованиям удовлетворяет стандартное выражение

$$\varphi_{in}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \{a_{in}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_{in}^*(\mathbf{k}) e^{ikx}\}, \quad (2.19)$$

эквивалентное выражению

$$\varphi_{in}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi_{in}(k), \quad (2.20)$$

где

$$\varphi_{in}(k) = \varphi_{in}^*(-k) = (2\omega)^{1/2} \{\theta(k) a_{in}(\mathbf{k}) + \theta_0'(-k) a_{in}^*(-\mathbf{k})\}. \quad (2.21)$$



Нетрудно проверить, что формулы, обратные (2.19), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_{in}(\mathbf{k}) &= i(2\pi)^{-3/2} \int dx \frac{e^{ikx}}{(2\omega)^{1/2}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x); \\ a_{in}^*(\mathbf{k}) &= -i(2\pi)^{-3/2} \int dx \frac{e^{-ikx}}{(2\omega)^{1/2}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где, по определению,

$$A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B \equiv A'_\mu (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B \quad (2.23)$$

и

$$\omega \equiv |k_0| = +(\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Действуя на  $\varphi_{in}$  оператором Клейна—Гордона и внося его под знак интеграла в формуле (2.20), без труда убеждаемся, что оператор  $\varphi_{in}$  действительно удовлетворяет свободному уравнению поля (2.17), а из формул (2.20) и (2.21) вытекает, что он эрмитов. В справедливости условия (2.18) можно убедиться, преобразуя его с помощью соотношений (2.13) и (2.14):

$$\begin{aligned} [\varphi_{in}(x), P_\mu] &= (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) [\varphi_{in}(k), P_\mu] = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) k_\mu \varphi_{in}(k) = \\ &= (2\pi)^{-3/2} (i\partial_\mu) \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi_{in}(k) = i\partial_\mu \varphi_{in}(x). \end{aligned}$$

В качестве упражнения предоставляем читателям проверить, что определенное выше поле  $\varphi_{in}(x)$  действительно скалярное. Соответствующее доказательство можно найти в книгах Швебера (Schweber, 1963) или Стритера и Вайтмана (Streater, Wightman, 1966).

Разложение (2.19) позволяет установить, что поле  $\varphi_{in}(x)$  удовлетворяет каноническим одновременным соотношениям коммутации:

$$[\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \varphi_{in}(t, \mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (2.25)$$

$$[\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \varphi_{in}^\dagger(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.26)$$

Этим условиям подчиняют обычно в любой канонической лагранжевой теории даже (неперенормированные) взаимодействующие поля (мы игнорируем возможные осложнения, обусловленные наличием связей с произ-

водными). Однако в частном случае свободных полей, подобных  $\varphi_{in}(x)$  [т. е. полей, удовлетворяющих уравнению (2.17)], справедливо еще одно упрощающее утверждение, в силу которого коммутатор

$$\Delta(x-y) \equiv [\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] \quad (2.27)$$

представляет собой  $c$ -число\* для всех относительных моментов времени  $(x_0-y_0)$ . [Если возникнет необходимость подчеркнуть зависимость функции  $\Delta$  от массы  $m$  свободного поля  $\varphi_{in}$ , будем записывать ее в виде  $\Delta(x-y|m^2)$ ].

Получим сначала выражение для функции  $\Delta$  из формулы (2.19) и воспользуемся им, чтобы проверить справедливость соотношений (2.25) и (2.26). Затем мы убедимся в том, что функция  $\Delta$  удовлетворяет аксиоме локальности IV, которая будет введена в следующем параграфе. Начнем с выражения

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= (2\pi)^{-3} \iint dk dl (2|k_0|2|l_0|)^{1/2} \delta(k^2-m^2) \times \\ &\times \delta(l^2-m^2) e^{-ikx-ily} \{ \theta(k) \theta(-l) [a_{in}(k) a_{in}^*(-l)] + \theta(-k) \times \\ &\times \theta(l) [a_{in}^*(-k), a_{in}(l)] \} = (2\pi)^{-3} \iint dk dl (2|k_0|2|l_0|)^{1/2} \times \\ &\times \delta(k^2-m^2) \delta(l^2-m^2) e^{-ikx-ily} \{ \theta(k) \theta(-l) \delta(k+l) + \\ &+ \theta(-k) \theta(l) \delta(k+l) \} = (2\pi)^{-3} \iint dk dl 2|k_0| \delta(k^2-m^2) \times \\ &\times \frac{1}{2|l_0|} \{ \delta(l_0 - [k^2 + m^2]^{1/2}) + \delta(l_0 + [k^2 + m^2]^{1/2}) \} \times \\ &\times e^{-ikx-ily} \{ \theta(k) \theta(l) \delta(k+l) - \theta(-k) \theta(l) \delta(k+l) \}; \\ \Delta(x-y) &= (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2-m^2) \varepsilon(k) e^{-ik(x-y)} \quad (2.28) \end{aligned}$$

На втором этапе мы воспользовались основными соотношениями коммутации (2.11). Теперь канонические соотношения коммутации (2.25) и (2.26) следуют немедленно, поскольку

$$\begin{aligned} [\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \varphi_{in}(t, \mathbf{y})] &= \Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ik(x-y)} \varepsilon(k_0) = 0. \quad (2.29) \end{aligned}$$

\* По терминологии Дирака  $c$ -числа — это величины, имеющие характер обычных коммутирующих величин, в частности обычные числа (вещественные или комплексные);  $q$ -числа — это величины, которые между собой не коммутируют (например, матрицы Дирака, операторы в квантовой механике и теории поля и т. п.). — Прим. перев.

Здесь интеграл обращается в нуль, ибо подынтегральное выражение является нечетной функцией  $k_0$ . Тогда, как и ожидалось, получим

$$[\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \varphi_{in}(t, \mathbf{y})] = \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x-y)|_{x_0=y_0}; \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} [\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \varphi_{in}(t, \mathbf{y})] &= -i(2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k) \times \\ &\times k_0 e^{ik(x-y)} = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dk dk_0 \frac{1}{2|k_0|} \{\delta(k_0 - \omega) + \delta(k_0 + \omega)\} \times \\ &\times k_0 \varepsilon(k_0) e^{ik(x-y)} = i(2\pi)^{-3} \int dk e^{-ik(x-y)} = -i\delta(x-y). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Убедимся в том, что функция  $\Delta(x-y)$  удовлетворяет аксиоме локальности, т. е. что для пространственно-подобных четыре-векторов  $(x-y)$  она обращается в нуль. Для этого следует сначала показать, что  $\Delta(x-y)$  — инвариантная функция. Последнее означает, что неоднородное преобразование Лоренца  $U(\Lambda, a)$ , действующее на координаты согласно формуле

$$z_\mu \rightarrow z'_\mu = \Lambda_\mu^\nu z_\nu + a_\mu,$$

будучи примененным одновременно к координатам  $x$  и  $y$ , не меняет функцию  $\Delta(x-y)$ . Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что

$$(x' - y')_\mu = \Lambda_\mu^\nu (x - y)_\nu \equiv \Lambda(x - y),$$

откуда

$$\Delta(x' - y') = (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k) e^{-ik \cdot \Lambda(x-y)}.$$

Перепишем показатель экспоненты следующим образом:

$$k \cdot \Lambda(x - y) = \Lambda^{-1} k \cdot (x - y),$$

затем заменим переменную интегрирования  $k$  на  $k' \equiv \Lambda^{-1} k$ . Очевидно,  $\delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k) = \delta(k'^2 - m^2) \varepsilon(k')$ , в то время как  $\int dk \dots = \int dk' \dots$ . Поэтому

$$\Delta(x' - y') = (2\pi)^{-3} \int dk' \delta(k'^2 - m^2) \varepsilon(k') e^{-ik' \cdot (x-y)} = \Delta(x-y).$$

Такая инвариантная функция, разумеется, может быть выражена только через инвариантные комбинации переменных  $(x-y)$ , т. е. только через  $(x-y)^2$ , а для вре-

мениподобных четыре-векторов  $(x-y)$  и через функцию  $\text{sign}(x_0-y_0)$ . (Явное выражение функции  $\Delta$  через эти переменные мы предлагаем осуществить читателям в качестве упражнения.) Отметим теперь особо тот факт, что для пространственноподобных четыре-векторов  $(x-y)$  функция  $\Delta$  зависит только от  $(x-y)^2$ . Воспользуемся этим обстоятельством, выбрав в качестве произвольного пространственноподобного интервала некий частный интервал, отвечающий  $x_0=y_0$ . Инвариантность функции  $\Delta$  гарантирует нам, что подобная процедура не приведет к потере общности. Однако при  $x_0=y_0$  выражение (2.28) можно переписать в виде (2.29), что, как уже установлено, равно нулю.

Очевидно, функция  $\Delta(x-y)$  удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона  $K_x \Delta(x-y) = 0$ . Образовав вакуумные средние от различных произведений и, в частности, от хронологических произведений полей  $\varphi_{in}(x)$  и  $\varphi_{in}(y)$ , можно получить другие интересующие нас инвариантные  $c$ -числовые функции. Две из них, а именно  $\Delta^\pm(x-y)$ , удовлетворяют уравнению Клейна—Гордона. Другие же представляют собой функции Грина, удовлетворяющие неоднородному уравнению

$$(\square^2 + m^2) G(x-y) = \delta(x-y). \quad (2.32)$$

Ниже (см. гл. 6) будет приведен перечень некоторых из них наряду с соответствующими представлениями Фурье. Доказательство справедливости этих формул читатели могут провести сами или найти в любом учебнике по теории поля. Напоминаем, что все эти функции зависят от  $m^2$ . Итак,

$$\begin{aligned} \Delta^+(x-y) &\equiv \langle 0 | \varphi_{in}(x) \varphi_{in}(y) | 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2 - m^2) \theta(k) e^{-ik(x-y)}; \\ \Delta^-(x-y) &\equiv \langle 0 | \varphi_{in}(y) \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2 - m^2) \theta(-k) e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Очевидно,  $\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$ , т. е.  $\Delta^\pm$  — это соответственно положительно и отрицательно частотные части функции  $\Delta$ .

До сих пор в этом разделе мы имели дело с непрерывными операторами  $a_{in}(\mathbf{k})$ . Чтобы установить связь с дискретными операторами  $a_{\mathbf{k}}(in)$ , соответствующими нормировке в ящике, перепишем стандартное разложе-

ние (2.19) для поля  $\varphi_{in}(x)$ , используя соотношения (2.1), (2.10) и (2.11):

$$\varphi_{in}(x) = (2\pi)^{-3/2} (2\pi)^3 V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \left\{ \left[ \frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{1/2} a_{\mathbf{k}}(in) e^{-ikx} + \left[ \frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{1/2} a_{\mathbf{k}}^*(in) e^{-ikx} \right\}; \quad (2.34)$$

$$\varphi_{in}(x) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \{ a_{\mathbf{k}}(in) e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^*(in) e^{ikx} \}. \quad (2.35)$$

Соответственно обратные формулы (2.22) заменятся на

$$a_{\mathbf{k}}(in) = iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{(2\omega)^{1/2}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x); \quad (2.36)$$

$$a_{\mathbf{k}}^*(in) = -iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} \frac{e^{-ikx}}{(2\omega)^{1/2}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x). \quad (2.37)$$

Входящие в них выражения

$$f_{\mathbf{k}}(x) = V^{-1/2} e^{-ikx} / (2\omega)^{1/2}$$

— это обычные положительно частотные решения уравнения Клейна—Гордона типа плоских волн, нормированные в ящике согласно равенству

$$i \int d\mathbf{x} f_{\mathbf{k}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\mathbf{k}'}(x) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

и удовлетворяющие условию полноты

$$V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^*(y) f_{\mathbf{k}}(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega} e^{-ik(x-y)} = \Delta^+(x-y). \quad (2.38)$$

В дальнейшем будем часто считать нормировочный объем  $V$  равным единице, если это не приводит к каким-либо неясностям.

### § 2.3. ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЕ ПОЛЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ

До настоящего момента мы просто конструировали формализм, необходимый для описания любой теории элементарных частиц, и использовали его для определения вспомогательных полей. Их введение не привносит никакого нового физического содержания; очевидно,

этого и не должно быть, поскольку каждое вспомогательное поле удовлетворяет своему собственному свободному уравнению и описывает формально невзаимодействующую систему. Введение операторов поля по общему признанию имеет психологическую окраску. Оно может рассматриваться в качестве первого шага по переводу физического содержания, заключенного в ин- и аут-операторах частиц, на язык пространственно-временного описания с использованием постоянной Планка в качестве масштабного множителя. В весьма широком смысле ин-поле, например, описывает пространственно-временное поведение, которому *следовали бы* в действительности сталкивающиеся пучки, если бы они не взаимодействовали. Аналогичное утверждение можно сделать и относительно аут-поля. Но даже этот скромный шаг приводит к тому, что мы оказываемся запутанными в нетривиальной теории поля благодаря следующей аксиоме, называемой асимптотическим условием.

III. *Существует оператор поля  $\varphi(x)$ , называемый интерполирующим полем, такой, что*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int dx f(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 \langle A | \{ \varphi(x) - \varphi_{in}(x) \} | B \rangle = 0,$$

где  $\langle A |$  и  $| B \rangle$  — произвольные состояния, с которыми имеют дело экспериментаторы, т. е. любое из ин- и аут-состояний, а  $f(x)$  — произвольное нормируемое решение свободного уравнения Клейна—Гордона.

Аксиома III, будучи дополнена постулированной ниже аксиомой IV, оказывается более содержательной, чем это может показаться с первого взгляда. Пока мы только отметим, что роль поля  $\varphi(x)$ , очевидно, сходна с ролью любого поля, призванного осуществлять неизбежно абстрактным образом развитие физической системы между ее наблюдаемыми непосредственно (начальной и конечной) конфигурациями.

Однако аксиома III содержит в себе два усовершенствования по сравнению с тем, чего можно было бы ожидать, исходя из интуитивных соображений при более непосредственной и привлекательной формулировке. Прежде всего, следует «размазать» операторы поля, свернув их с нормируемой функцией  $f(x)$ .

Далее, условия аксиомы необходимо применять не к самим операторам, а только к их матричным элементам.

(Операторы, матричные элементы которых стремятся к определенным пределам, называют сходящимися в слабом смысле, операторы же, которые сами стремятся к определенному пределу, называются сходящимися в сильном смысле\*. В асимптотическом условии подразумевается слабая, а не сильная сходимости). Обе эти оговорки существенны, поскольку без них можно быстро прийти к противоречиям. Однако здесь мы не будем тщательно следить за их выполнением.

Существует одно упрощение, которое, вообще говоря, можно безнаказанно допустить: функцию  $f(x)$ , которая в принципе должна быть нормируемым волновым пакетом, как правило, можно заменять плоской волной, не получая при этом бессмысленных результатов. Желających ознакомиться с подробным обсуждением такого перехода к плоским волнам отсылаем к книге Гольдбергера и Ватсона (1967). Кроме того, в дальнейшем мы иногда в целях сокращения записей не будем, применяя асимптотическое условие для матричных элементов в аксиоме III, явно выписывать размазывающую функцию  $f$ , если из контекста ясно, что изучаемые выражения фактически размазаны.

Отметим, что количество разных интерполирующих полей будет совпадать с числом различных сортов стабильных частиц (так же, как и в случае вспомогательных полей). В простейших случаях поле  $\varphi$  оказывается совпадающим с перенормированным оператором поля лагранжевых теорий.

Стандартное предположение о том, что оператор полного четыре-импульса  $P_\mu$  является генератором сдвигов, приводит к соотношению коммутации

$$\left. \begin{aligned} [\varphi'(x), P_\mu] &= i\partial_\mu \varphi(x); \\ \varphi(x) &= e^{iP_\mu x} \varphi(0) e^{-iP_\mu x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

(Напомним, что вспомогательные поля удовлетворяли соответствующим соотношениям по *построению*.) Отсюда можно вывести две важные формулы. Первая из них может быть получена также непосредственно из условия стабильности одночастичных состояний, т. е.

---

\* Точнее, последовательность операторов  $A$  сильно сходится к оператору  $B$ , если  $\|A_n \Psi\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \|B \Psi\|$ , где  $\Psi$  — произвольный вектор гильбертова пространства. — *Прим. перев.*

из равенства  $|k, (in)\rangle = |k, (out)\rangle$ . Чтобы получить ее формально из формулы (2.39), запишем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) | k, \overset{in}{out} \rangle &= \langle 0 | e^{iPx} \varphi(0) e^{-iPx} | k, \overset{in}{out} \rangle = \\ &= e^{-ikx} \langle 0 | \varphi(0) | k, \overset{in}{out} \rangle. \end{aligned}$$

Иначе говоря, оба матричных элемента представляют собой решения свободного уравнения Клейна—Гордона. Последний множитель в любом случае является просто константой, так что имеем

$$\langle 0 | \varphi(x) | k, \overset{in}{out} \rangle = c_i | \rangle \times e^{-ikx}.$$

Далее, воспользовавшись асимптотическим условием при  $x_0 \rightarrow \pm\infty$ , найдем, что  $c_1 = c_2 = (2\omega)^{-1/2}$ , так что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) | k, in \rangle &= f_k(x) = \langle 0 | \varphi(x) | k, out \rangle = \\ &= \langle 0 | \varphi_{out}^{in}(x) | k, \overset{in}{out} \rangle = \langle 0 | \varphi_{out}^{in}(x) | k, \overset{out}{in} \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Вторая интересная формула получится, если использовать (все еще не известное) уравнение, которому удовлетворяет поле  $\varphi(x)$ , чтобы *определить* оператор источника  $\eta(x)$ :

$$(\square^2 + m^2) \varphi(x) = \eta(x). \quad (2.41)$$

Тогда, образуя матричные элементы этого оператора между вакуумом и одночастичным состоянием, получаем

$$\langle 0 | \eta(x) | k \rangle = 0. \quad (2.42)$$

Это соотношение представляет собой важное тождество, к которому мы будем обращаться неоднократно.

В лагранжевой теории, в которой с самого начала исходят из подобных уравнений поля, динамика конкретизируется тем, что задается выражение оператора источника  $\eta(x)$  через интерполирующие поля. Однако для многих целей при использовании дисперсионных методов в этом нет необходимости. Единственное существенное предположение, которое мы сделаем, состоит в том, что  $\eta(x)$  — *локальный* оператор в том смысле, что он зависит от интерполирующих полей только в точке  $x$ . Например, в принципе недопустимо, чтобы оператор  $\eta(x)$  имел вид  $\int dx' G(x-x') \varphi^n(x')$ , где  $G(x-x')$  —  $c$ -числовая функция. При случае мы обсудим и сделаем качественные выводы из другого, несколько более огра-



ничающего предположения, гласящего, что оператор  $\eta(x)$  зависит только от интерполирующего поля  $\varphi(x)$ , но не от его производных.

Остается обсудить два важнейших и связанных друг с другом вопроса, относящихся к оператору интерполирующего поля: свойства полноты и соотношения коммутации, которым он подчиняется.

Поскольку поле  $\varphi(x)$  связано со вспомогательными полями аксиомой III, кажется весьма правдоподобным предположение о том, что свойства полноты этих полей приводят, вообще говоря, к аналогичному свойству для поля  $\varphi(x)$ . Например, можно написать в смысле слабой сходимости:

$$\begin{aligned} a_k(in) &= i(2\omega)^{-1/2} \int dx e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x) = \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} i(2\omega)^{-1/2} \int dx e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.43)$$

чем подчеркивается, что асимптотические операторы частиц являются пределами фурье-образов некоторого оператора интерполирующего поля. Чтобы придать этим соображениям о полноте поля  $\varphi$  строгий характер, необходимо сделать много уточнений; однако мы будем считать высказанное утверждение само собой разумеющимся. (Исключение составят только некоторые сложные случаи, которые будут отмечены позже, но они никак не повлияют на следующий этап наших рассуждений.)

Что касается соотношений коммутации, то прежде всего утверждается, что независимо от конкретной динамики теории для пространственноподобных интервалов коммутатор полей  $\varphi$  должен обращаться в нуль:

$$\text{IV. } [\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \text{ если } (x - y)^2 < 0.$$

Это утверждение — аксиома, которую часто называют условием микропричинности (локальности)\*. Ее следует

\* Как следует из работы Лемана, Симанзика и Циммермана (1955), аксиома IV не исчерпывает всех требований причинности в их системе аксиом. Поэтому соответствующее условие правильнее называть условием локальности, понимая под условием микропричинности либо известное условие Боголюбова (см. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. «Вопросы теории дисперсионных соотношений». М., Физматгиз, 1958), либо соответствующую совокупность условий в аксиоматике Лемана [см., например, Пью (Pugh, 1964)]. — Прим. перев.

рассматривать совместно с аксиомами 0—III, введенными ранее.

Для дальнейшего важно понять, что предположение о локальном характере оператора источника  $\eta(x)$  в совокупности с аксиомой IV влечет еще одно соотношение:

$$IV'. [\eta(x), \varphi(y)] = 0, \text{ если } (x - y)^2 < 0.$$

Чтобы установить связь между условием локальности и причинностью в общепринятом понимании, следует вспомнить, что по предположению поля (т. е. операторы  $\varphi(x)$ , заданные в каждой пространственно-временной точке) образуют полный набор операторов. Иными словами, каждая физическая наблюдаемая может быть в принципе выражена через  $\varphi(x)$ . Тем самым аксиомы IV и IV' гарантируют отсутствие какой-либо интерференции между результатами двух измерений, если одно из них выполняется в пространственно-временной области, каждая точка которой отделена пространственноподобным интервалом от каждой точки области, в которой проводилось другое измерение. Но, согласно специальной теории относительности, единственное требование типа причинности, *справедливое без каких-либо ограничений*, — запрещение существования сигналов, распространяющихся со скоростью, превышающей скорость света, т. е. сигналов, способных преодолевать пространственноподобные интервалы. Следовательно, аксиомы IV и IV' гарантируют, что эксперименты, подчиняющиеся нормальным законам квантовой механики, не нарушают такого релятивистского условия причинности. Однако совершенно неясно, *необходимо ли постулировать те же аксиомы, если желательно убедиться в причинном поведении системы в макроскопическом смысле.*

До сих пор одним из основных нерешенных вопросов остается вопрос о том, можно ли (и если можно, то как) ослабить условие IV, чтобы не прийти при этом к противоречию с требованиями макропричинности и макроскопической релятивистской инвариантности. Очевидно, если допустить возможность существования коммутатора полей, отличного от нуля вне светового конуса, то вступят «в игру» бесконечные скорости; тогда возникает нетривиальная задача — исключить распространение сигналов с бесконечной скоростью на макроскопические

расстояния. Такая проблема весьма важна и актуальна, поскольку дисперсионные соотношения для рассеяния вперед, являющиеся прямым и строгим следствием аксиомы IV, могут быть проверены экспериментально. Но ни одна подобная проверка не может считаться убедительной, пока не известно, к чему приведет отказ от аксиомы IV.

Для доказательства дисперсионных соотношений единственной необходимой информацией о соотношениях коммутации оказывается аксиома IV. Это большая удача, поскольку соотношения коммутации — единственные формулы, к которым можно относиться с полным доверием. Тем не менее по ряду причин стремятся выйти за рамки этих соотношений. В частности, такой выход — единственная возможность установить какое-то соответствие с лагранжевым формализмом; однако наиболее убедительным основанием для таких попыток служит чрезвычайная общность аксиомы IV. Поскольку она в равной мере применима к любой теории, то сама по себе она не предоставляет какой-либо возможности ввести те специфические различия, которые, как интуитивно чувствуется, должны отличать одну частную теорию от другой. Такая ограниченность информации особенно сказывается при решении проблем, касающихся пограничной области между сильными взаимодействиями, с одной стороны, и слабыми и электромагнитными взаимодействиями, с другой. Поэтому конец настоящего параграфа мы посвятим описанию более или менее интуитивных и качественных методов уточнения соотношений коммутации поля  $\varphi$ .

Наиболее серьезный недостаток аксиомы IV состоит в том, что она ничего не говорит о виде коммутатора как на границе светового конуса  $[(x-y)^2=0]$ , так и внутри него  $[(x-y)^2>0]$ . Ясно, что выражение для коммутатора во времениподобной области можно получить в законченной форме только в том случае, когда полностью решены те уравнения движения, которым удовлетворяет поле  $\varphi(x)$ . Но коль скоро мы их решим, нам будет известна вся необходимая информация (и, в частности,  $S$ -матрица) и столь сложный объект, как коммутатор, не будет представлять более интереса. Поэтому очевидная процедура — рассмотрение коммутатора полей в непосредственной окрестности светового конуса  $(x-y)^2=0$ ; в этой области выражение для него не обя-

зательно усложняется вследствие распространения полей, а из обычной квантовой механики следует, что одновременные канонические соотношения коммутации

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})]$$

будут иметь фундаментальное значение, причем они могут даже быть  $c$ -числами. Имея в виду аналогию с лагранжевым формализмом, предположим, что одновременные канонические соотношения коммутации действительно являются  $c$ -числами для тех полей  $\varphi$ , которые отвечают независимым степеням свободы. Чтобы не было противоречия с аксиомой IV, они должны при конечных значениях  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$  обращаться в нуль, т. е., иначе говоря, представлять собой некую линейную комбинацию  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$  и некоторого конечного числа ее производных. Бесконечный ряд по производным от  $\delta$ -функции следует исключить, поскольку его можно было бы свести к разложению в ряд Тейлора функции, которая отлична от нуля даже при конечных  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ . В действительности мы ограничимся простейшим выбором и предположим в случае теории одного эрмитова поля следующее:

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] &= i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})Z_3^{-1}; \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Эти соотношения можно рассматривать в качестве одних из определяющих уравнений теории.

Наиболее отличительная черта соотношений (2.44) состоит в том, что в правой части появилась  $c$ -числовая константа  $Z_3^{-1}$ . Она появляется в силу того, что, хотя мы все еще вправе потребовать выполнения соотношения *вида* (2.44), мы не вольны более распоряжаться масштабным множителем для поля  $\varphi(x)$ . Такой масштабный множитель фиксирован асимптотическим условием III, которое связывает поля  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_{in}(x)$  и  $\varphi_{out}(x)$ , ибо масштабные множители этих вспомогательных (или «асимптотических») полей уже определены постоянной Планка. Это следует непосредственно из того факта, что вспомогательные поля — *свободные* поля, и, стало быть, они удовлетворяют каноническим одновременным соотношениям коммутации вида

$$[\varphi_{in}(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}_{in}(t, \mathbf{y})] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Масштабный множитель  $Z_3^{-1}$ , называемый также константой перенормировки поля, сравнительно слабо влияет на результаты большинства детальных расчетов в рамках дисперсионного метода, но его роль оказывается чрезвычайно существенной для понимания основ теории поля. Мы вновь столкнемся с ним позже, когда будем иметь дело с функцией распространения (пропагатором). Пока же с помощью оператора  $\varphi$  и константы  $Z_3$  определим другое поле  $\varphi_0$  формулой

$$\varphi(x) = Z_3^{-1/2} \varphi_0(x). \quad (2.45)$$

Точно так же, как поле  $\varphi$  соответствует перенормированному полю в теории возмущений, поле  $\varphi_0$  соответствует перенормированному, или «голому», полю, удовлетворяющему соотношению

$$[\varphi_0(t, x), \dot{\varphi}_0(t, y)] = i\hbar \delta(x - y), \quad (2.46)$$

но не являющемуся, конечно, свободным полем.

С точки зрения облегчения перехода к дисперсионным соотношениям более удобно считать фундаментальной величиной поле  $\varphi$ , а поле  $\varphi_0$  — ее следствием. Наоборот, с позиций строго канонического или лагранжевого формализма поле  $\varphi_0$  рассматривается как фундаментальное, а поле  $\varphi$  получается из него.

Последнее замечание, которое мы сделаем, касается коммутаторов полей для того случая, когда существует несколько различных сортов частиц и, следовательно, несколько различных сортов асимптотических полей. Интуитивно представляется вполне допустимым, что некоторые из этих частиц могут в каком-то смысле считаться связанными состояниями остальных, и проблема заключается в том, чтобы описать такую ситуацию более точно.

Мы уже подчеркивали, что независимо от «элементарности» все частицы описываются их асимптотическими и интерполирующими полями; последние все удовлетворяют условию локальности IV. Различие между «элементарными» и «неэлементарными» или «составными» частицами, вероятно, может реализоваться в виде различия в одновременных соотношениях коммутации соответствующих им интерполирующих (или, иначе, перенормированных) полей. В частности, смешанные канонические одновременные соотношения коммутации

различных элементарных полей равны нулю; такие поля воплощают в себе взаимно независимые степени свободы системы. Наоборот, смешанные канонические одновременные соотношения коммутации поля, соответствующего сложной частице, и одного из полей, отвечающего составляющей ее элементарной частице, должны, вообще говоря, отличаться от нуля и даже могут не быть  $c$ -числом. Иными словами, поля «элементарных» частиц, вероятно, *сами по себе* образуют полный набор операторов. (Допустима также ситуация, когда существуют частицы, являющиеся хотя и элементарными, но нестабильными в силу взаимодействий, в которых они участвуют. Таким частицам не соответствовали бы никакие асимптотические поля; и пока остается без ответа деликатный вопрос, могут ли интерполирующие поля образовывать полный набор операторов, если в него не включить дополнительно поле, представляющее нестабильную элементарную частицу.) Однако здесь вновь следует подчеркнуть, что это различие на бумаге выглядит довольно отчетливо и, вероятно, при известных обстоятельствах может оказаться полезным, но в данный момент на практике им пользуются в весьма ограниченных пределах, хотя оно и может сыграть свою роль в некоторых модельных теориях. Действительно, один из главных принципов так называемой чистой теории  $S$ -матрицы, в которой при описании частиц отказываются от всех полей, состоит в том, что всякие различия между элементарными и составными частицами отвергаются как бессмысленные. Важно отметить, что на данной стадии развития дисперсионных методов в теории поля такое различие хотя в принципе и допустимо, но нет абсолютно никакой необходимости в том, чтобы использовать его на практике.

### Глава 3

#### СХЕМА СВЕРТЫВАНИЯ И ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ

Первый этап большинства расчетов в теории поля состоит в том, чтобы выразить изучаемые матричные элементы через матричные элементы интерполиру-

ющего поля. Данная глава посвящена систематическому изложению этой процедуры на основе метода, названного схемой свертывания и принадлежащего Леману, Симанзику и Циммерману (Lehmann, Symonzik, Zimmermann, 1955, 1957). Центральную роль в этой схеме играет асимптотическое условие (III) и условие локальности (IV). Сначала мы проиллюстрируем этот метод на примере элемента  $S$ -матрицы для упругого рассеяния, а затем сделаем некоторые общие замечания. Напомним, что здесь мы все еще имеем дело с самодействующими нейтральными скалярными частицами. (Проблемы, связанные со спином и зарядом, обсуждаются в гл. 5). Рассмотрим матричный элемент

$$S_{fi} = \langle cd, out | ab, in \rangle = \langle cd, in | S | ab, in \rangle. \quad (3.1)$$

Символы  $a, b, c, d$  обозначают четыре-импульсы частиц. Фигурирующие ниже функции  $f_a$  и т. д. — это в принципе нормируемые, но почти монохроматические волновые пакеты, пределы которых в случае плоских волн определяются формулой

$$f_a \rightarrow \exp(-iax)/(2\omega_a)^{1/2}.$$

Эти функции входят в разложение вспомогательных полей (см. гл. 2). Строгое обоснование такого несколько бесцеремонного перехода от нормируемых функций к плоским волнам можно найти в книге Гольдбергера и Ватсона (Goldberger, Watson, 1967).

Можно написать  $\langle cd, out | = \langle c | a_d(out)$  и, используя выражение (2.36) для  $a_d(out)$ , получить

$$S_{fi} = i \int dx f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle c | \varphi_{out}(x) | ab, in \rangle.$$

В силу асимптотического условия это выражение принимает вид

$$S_{fi} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} i \int dx f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle c | \varphi(x) | ab, in \rangle.$$

Далее восстановим интегрирование по четырехмерному объему, воспользовавшись тождеством

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int dx \equiv \int dx \frac{\partial}{\partial x_0} + \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int dx. \quad (3.2)$$

Тогда получим

$$S_{fi} = i \int dx \frac{\partial}{\partial x_0} \{ f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle c | \varphi(x) | ab, in \rangle \} + \\ + i \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int dx f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle c | \varphi(x) | ab, in \rangle. \quad (3.3)$$

Второй член в правой части (3.3), т. е. компенсирующий член, может быть записан в виде

$$\langle c | a_d(in) | ab, in \rangle = \langle cd, in | ab, in \rangle. \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) — просто соответствующий матричный элемент единичного оператора, который равен единице для случая рассеяния вперед и нулю в остальных случаях. В этом можно также убедиться, подействовав оператором  $a_d(in)$  в левой части соотношения (3.4) как оператором уничтожения на кет-вектор состояния\*; в результате получим

$$\langle c | a_d(in) | ab, in \rangle = \delta_{d,a} \langle c | b \rangle + \delta_{d,b} \langle c | a \rangle = \\ = \delta_{d,a} \delta_{c,b} + \delta_{d,b} \delta_{c,a}.$$

Первый член в формуле (3.3) перепишем в виде

$$i \int dx \left\{ f_d^*(x) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \langle || \rangle \right] - \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} f_d^*(x) \right] \langle || \rangle \right\}.$$

Но функция  $f_d^*(x)$  — это решение свободного уравнения Клейна — Гордона, так как оператор  $\partial^2/\partial x_0^2$ , действующий на нее, можно заменить на  $(\nabla^2 - \mu^2)$ . Наконец, оператор  $\nabla^2$  можно перенести на матричный элемент, дважды проинтегрировав по частям, причем никаких поверхностных членов не появится, ибо  $f_d^*$  — нормируемая функция, которая на пространственной бесконечности обращается в нуль. Тем самым имеем

$$S_{fi} = \langle cd, in | ab, in \rangle + i \int dx f_d^*(x) K_x \langle c | \varphi(x) | ab, in \rangle; \quad (3.5)$$

$$S_{fi} = \langle cd, in | ab, in \rangle + i \int dx f_d^*(x) \langle c | \eta(x) | ab, in \rangle. \quad (3.6)$$

Следовательно, мы «редуцировали», или «свернули», частицу  $d$ .

---

\* Здесь используется терминология Дирака (см. П. А. М. Дирак. «Принципы квантовой механики». М., Физматгиз, 1960). — Прим. перев.



Второй член в выражении (3.6), который содержит в себе всю информацию о рассеянии, очевидно, обращается в нуль, если поле  $\varphi$  удовлетворяет свободному уравнению Клейна—Гордона, т. е. если оператор источника  $\eta$  обращается в нуль.

Далее выкладки можно продолжать, исходя либо из соотношения (3.5), либо из (3.6). Фактически мы будем использовать формулу (3.6), но, очевидно, на любом этапе можно получить и соответствующие следствия формулы (3.5), заменяя в матричном элементе  $\eta(x)$  на  $\varphi(x)$  и действуя оператором  $K_x$  на все подынтегральное выражение, за исключением функции  $f_a^*(x)$ .

В качестве следующего шага удобнее произвести свертку одной из частиц из ин-состояния, скажем, частицы  $b$ . Определим величину

$$N(x) = \langle c | \eta(x) | ab, in \rangle \quad (3.7)$$

и запишем ее, повторяя проделанную выше процедуру:

$$\begin{aligned} N(x) &= \langle c | \eta(x) a_b^*(in) | a \rangle = -i \int dy f_b(y) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial y_0} \langle c | \eta(x) \varphi_{in}(y) | a \rangle = -i \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \int dy f_b(y) \times \\ &\times \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | \eta(x) \varphi(y) | a \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

На этой стадии следует использовать один из двух трюков: заменить произведение  $\eta(x)\varphi(y)$  либо хронологическим произведением, либо запаздывающим коммутатором. Как мы сейчас покажем, возможность таких трюков и ковариантность этой процедуры обеспечивается условием локальности и тем, что в (3.8) осуществляется предельный переход  $y_0 \rightarrow -\infty$ .

Что касается хронологического произведения, то прежде всего рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \eta(x)\varphi(y) &\equiv \{\theta(x-y) + \theta(y-x)\} \eta(x)\varphi(y) + \{\theta(y-x) - \\ &- \theta(y-x)\} \varphi(y)\eta(x) = \{\theta(x-y)\eta(x)\varphi(y) + \\ &+ \theta(y-x)\varphi(y)\eta(x)\} + \theta(y-x)[\eta(x), \varphi(y)] = \\ &= T\{\eta(x)\varphi(y)\} + \theta(y-x)[\eta(x), \varphi(y)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Важно понять, что второй член в (3.9) ковариантен *сам по себе* только в том случае, если ковариантна функция

$\theta(y-x)$ , а это, в свою очередь, зависит от наличия перед ней множителя, обращающегося в нуль вне светового конуса. Последнее как раз и обеспечивается условием локальности (IV'). Теперь, когда мы удостоверились в ковариантности второго члена в (3.9), следует заметить, что им можно вообще пренебречь, поскольку при  $y_0 \rightarrow -\infty$  функция  $\theta(y_0-x_0)$ , очевидно, стремится к нулю. Поэтому

$$N(x) = -i \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \int dy f_b(y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | T \{ \eta(x) \varphi(y) \} | a \rangle,$$

что мы перепишем ниже, вновь используя тождество (3.2):

$$\begin{aligned} N(x) = & i \int dy \frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ f_b(y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | T \{ \eta(x) \varphi_1^{\dagger}(y) \} | a \rangle \right\} - \\ & - i \lim_{y_0 \rightarrow \infty} \int dy f_b(y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | \varphi(y) \eta(x) | a \rangle. \end{aligned}$$

Во втором компенсирующем члене уже выполнено необходимое хронологическое упорядочение в матричном элементе. Теперь нетрудно видеть, что второй член весь обращается в нуль, если учесть соотношение

$$\begin{aligned} & -i \lim_{y_0 \rightarrow \infty} \int dy f_b(y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | \varphi(y) \eta(x) | a \rangle = \\ & = -i \int dy f_b(y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y_0} \langle c | \varphi_{out}(y) \eta(x) | a \rangle = \\ & \stackrel{\text{[2]}}{=} \langle c | a_b^*(out) \eta(x) | a \rangle = \delta_{c, b} \langle 0 | \eta(x) | a \rangle = 0, \end{aligned}$$

где на последнем шаге преобразования мы воспользовались формулой (2.42). С помощью тех же манипуляций, какие были использованы при первом свертывании, оставшийся первый член в выражении для  $N$  можно переписать в виде

$$i \int dy f_b(y) K_y \langle c | T \{ \eta(x) \varphi(y) \} | a \rangle,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} S_{fi} = & \langle cd, in | ab, in \rangle + \\ & + i^2 \iint dx dy f_a^*(x) f_b(y) K_y \langle c | T \{ \eta(x) \varphi_2^{\dagger}(y) \} | a \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

или в пределе плоских волн для  $f_i$

$$S_{fi} = \langle cd, in | ab, in \rangle + \frac{i^2}{[2\omega_d 2\omega_b]^{1/2}} \iint dx dy e^{idx - iby} \times \\ \times K_y \langle c | T \{ \eta(x) \varphi(y) \} | a \rangle. \quad (3.11)$$

Наконец, вспоминая сделанные выше замечания относительно сравнения формул (3.5) и (3.6), можно было бы на том же основании записать

$$S_{fi} = \langle cd, in | ab, in \rangle + \frac{i^2}{[2\omega_d 2\omega_b]^{1/2}} \iint dx dy e^{idx - iby} \times \\ \times K_x K_y \langle c | T \{ \varphi(x) \varphi^*(y) \} | a \rangle. \quad (3.12)$$

С другой стороны, можно продолжить выкладки, исходя из соотношения (3.8) и используя запаздывающий коммутатор. Прежде всего в формуле (3.8) выражение  $\eta(x)\varphi(y)$  можно заменить на  $[\eta(x), \varphi(y)]$ ; появляющийся при этом дополнительный член, как нетрудно видеть, обращается в нуль, ибо

$$i \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \int dy f_b(y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} \langle c | \varphi(y) \eta(x) | a \rangle = \langle c | a_b^*(in) \eta(x) | a \rangle = \\ = \delta_{c, b} \langle 0 | \eta(x) | a \rangle = 0.$$

Далее коммутатор внутри матричного элемента можно умножить на функцию  $\theta(x-y)$ , которая ковариантна, поскольку за ней следует коммутатор, и равна просто единице, ибо ей предшествует знак предельного перехода при  $y_0 \rightarrow -\infty$ . Наконец, применяя формулу (3.2) к окончательной модифицированной форме оператора  $N$ , находим<sup>1</sup>

$$-i \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \int dy f_b(y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} \langle c | \theta(x-y) [\eta(x), \varphi(y)] | a \rangle = \\ = i \int dy \frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ f_b(y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} \langle c | \theta(x-y) [\eta(x), \varphi(y)] | a \rangle \right\} - \\ - i \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \int dy f_b(y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} \langle c | \theta(x-y) [\eta(x), \varphi(y)] | a \rangle.$$

Второй член здесь обращается в нуль, поскольку

$$\lim_{y_0 \rightarrow \infty} \theta(x-y) = 0.$$

Переписывая оставшийся член обычным способом и подставляя результат в выражение для  $S_{fi}$ , получаем аналог соотношения (3.10):

$$S_{fi} = \langle cd, in | ab, in \rangle + i^2 \iint dx dy f_a^*(x) f_b(y) \times \\ \times K_y \langle c | \theta(x-y) [\eta(x), \varphi(y)] | a \rangle. \quad (3.13)$$

Это выражение можно переписать и в другой форме, аналогичной соотношениям (3.11) и (3.12).

Удивительнее всего то, что справедливы обе формулы — (3.10) и (3.13), хотя пространственно-временное поведение этих двух матричных элементов отличается чрезвычайно сильно: например, запаздывающий коммутатор в формуле (3.13) вне будущего светового конуса обращается в нуль, тогда как хронологическое произведение в формуле (3.10) таким свойством не обладает. Однако вклады в  $S_{fi}$  от соответствующих фурье-образов совпадают.

Чтобы показать в деталях, как разрешается этот явный парадокс, рассмотрим разность между хронологическим и запаздывающим произведениями операторов поля:

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} - \theta(x-y)[\varphi(x), \varphi(y)] = \theta(x-y)\varphi^*(x)\varphi(y) + \\ + \theta(y-x)\varphi(y)\varphi(x) - \theta(x-y)[\varphi(x), \varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)] = \\ = [\theta(y-x) + \theta(x-y)]\varphi(y)\varphi(x) = \varphi(y)\varphi(x). \quad (3.14)$$

В этой разности все ступенчатые  $\theta$ -функции исчезли, так что действие операторов Клейна—Гордона сводится к преобразованию полей  $\varphi$  в операторы источника  $\eta$ . В результате в качестве разности  $\delta$  (которая должна равняться нулю) между величинами (3.10) и (3.13) получим выражение

$$\delta = i^2 \iint dx dy f_a^*(x) \langle c | \eta(y)\eta(x) | a \rangle f_b(y).$$

В пределе плоских волн для функций  $f_i$  оно принимает вид

$$\delta = \frac{i^2}{(2\omega_a 2\omega_b)^{1/2}} \iint dx dy e^{ik_a x - ik_b y} \langle c | \eta(y)\eta(x) | a \rangle. \quad (3.15)$$

Подставим теперь в (3.15) сумму по полной системе состояний, скажем  $\sum | (n), in \rangle \langle (n), in |$ ; тогда соответствующий матричный элемент [с учетом соотношения (2.39)] примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_n \langle c | e^{iPy} \eta(0) e^{-iPy} | n \rangle \langle n | e^{iPx} \eta(0) e^{-iPx} | a \rangle = \\ & = \sum_n e^{i(k_c - k_n)y + i(k_n - k_a)x} \langle c | \eta(0) | n \rangle \langle n | \eta(0) | a \rangle. \end{aligned}$$

Вставляя это выражение в (3.15) и осуществляя затем интегрирование, приводящее к  $\delta$ -функциям, получаем

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{i^2}{(2\omega_a 2\omega_b)^{1/2}} \sum_n \langle c | \eta(0) | n \rangle \langle n | \eta(0) | a \rangle \times \\ & \times \delta(k_a - k_n + k_b) \delta(k_c - k_b - k_n). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Однако единственным состоянием  $|n\rangle$ , полный четырехимпульс которого удовлетворяет входящим в соотношение (3.16)  $\delta$ -функциям, является вакуум. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если  $k_a$  и  $k_b$  — импульсы отдельных частиц, то в силу свойств  $\delta$ -функций имеет место равенство  $k_a = k_b + k_n$ . Следовательно, отдельная частица с импульсом  $k_a$  должна распадаться на отдельную частицу с импульсом  $k_b$  и некоторую другую физическую систему с импульсом  $k_n$ . Но это противоречит условию стабильности одночастичных состояний. Значит,  $k_n = 0$  и состояние  $|n\rangle$  действительно является вакуумом. Наконец, согласно формуле (2.42) матричный элемент  $\langle a | \eta | 0 \rangle$  равен нулю, в соответствии с чем величина  $\delta$  равна нулю тождественно.

Исходя из хронологических произведений, очевидно, можно непосредственно продолжить свертывание всех частиц и получить окончательно

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle cd, in | ab, in \rangle + i^4 \int dx_1 \dots dx_4 f_a^*(x_4) f_c^*(x_3) f_b(x_2) \times \\ & \times f_a(x_1) K_1 \dots K_4 \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_4) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если же оперировать с запаздывающими коммутаторами, то отнюдь не очевидно, можно ли было бы продолжить ту же процедуру ковариантным образом. Оказывается, правильное обобщение состоит в том, чтобы заменить в формуле (3.17)  $T$ -произведение (хронологическое произведение) так называемым  $R$ -произведением (запаздывающим произведением):

$$R \{ \varphi(x_4) | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \}.$$

В общем случае  $n$ -точечное запаздывающее произведение определяется формулой

$$\begin{aligned} & R \{ \varphi(x) | \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} = \\ & = \sum [ \dots [ \varphi(x), \varphi(x_1) ] \dots, \varphi(x_n) ] \theta(x - x_1) \theta(x_1 - x_2) \dots \theta(x_{n-1} - x_n), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где суммирование производится по всем перестановкам переменных  $x_i$  (только друг с другом, но не с  $x$ ).

Отметим, что формула (3.17) может служить иллюстрацией к сделанным в конце § 2.4 замечаниям о релятивистских трансформационных свойствах  $S$ -матрицы. Второй член в выражении (3.17), очевидно, представляет собой с точностью до квадратных корней в знаменателях функций  $f_i$  скаляр; эти корни в точности сократились бы, если бы мы начали рассмотрение с соответствующих ин- и аут-состояний с инвариантной нормировкой.

Из проведенного выше рассмотрения следует, что вся информация об амплитудах упругого рассеяния  $\langle cd, out | ab, in \rangle$  будет известна, если известны все необходимые сведения о вакуумных средних произведениях четырех полей или о так называемых четырехточечных функциях. Аналогичным образом амплитуды рождения  $\langle cde, out | ab, in \rangle$  определяются пятиточечными функциями и т. д. Когда приходится свертывать состояние с тремя и более частицами, необходимо проявлять дополнительную осторожность. В частности, в случае записи через запаздывающие произведения, если имеется более двух падающих частиц, возникают дополнительные осложнения. Выяснение этих вопросов мы оставляем читателям в качестве упражнения и отсылаем их в связи с этим к работам Лемана, Симанзика и Циммермана и к лекциям Гольдбергера (Goldberger, 1961).

Поскольку закон сохранения энергии-импульса препятствует превращению стабильной частицы в другую стабильную частицу или в две другие частицы, то может показаться, что двухточечные и трехточечные функции (вакуумные средние) играют в теории поля незначительную роль. Действительно, в любой чистой теории  $S$ -матрицы они не имеют никаких аналогов. Однако в теории слабых и электромагнитных взаимодействий двух- и трехточечные функции играют центральную роль, и большая часть этой книги посвящена рассмотрению этих функций и их приложениям.

Схема свертывания применима также и к процессам, включающим нестабильную частицу, если взаимодействие, приводящее к распаду, является слабым и его можно рассматривать в первом порядке теории возмущений; при этом участвующие в процессе частицы

могут обладать и сильными взаимодействиями. Классическим примером такого рассмотрения может служить работа Кури и Треймана (Khuri, Treiman, 1960) о распаде  $K \rightarrow 3\pi$ , представляющем собой слабый распад, индуцированный предположительно лагранжианом слабого взаимодействия  $L_W(x)$ . Таким образом, в первом порядке по  $L_W$  соответствующий матричный элемент имеет вид

$$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, out | L_W(0) | K \rangle,$$

где  $K$ -мезон можно уже считать стабильной частицей, ибо слабая связь выделена явно. В данном случае слабое взаимодействие с участием четырех частиц описывается пятиточечной функцией.

Вероятно, наиболее глубокими следствиями схемы свертывания являются перекрестные соотношения, которые мы сейчас выведем в форме, применимой к записи через хронологические произведения. Обозначим второе (нетривиальное) выражение в правой части формулы (3.12) через  $P$ :

$$P(c, d | a, b) = \frac{i^2}{[2\omega_d 2\omega_b]^{1/2}} \iint dx dy e^{i dx - i b y} \times \\ \times K_x K_y \langle c | T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | a \rangle, \quad (3.19)$$

где в данном случае  $P$  — функция четырех векторных аргументов  $a, b, c, d$ , каждый из которых обязательно положительно времениподобен и находится на энергетической поверхности, т. е.

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \mu^2; \quad a_0, b_0, c_0, d_0 \geq \mu.$$

Однако в подынтегральном выражении векторы  $d$  и  $b$  фигурируют только в показателе экспоненты; поэтому мы будем рассматривать функцию  $P$ , определенную формулой (3.19), при произвольных  $d$  и  $b$ . Но выражение (3.19) не изменится, если заменить  $d$  на  $-b$  и  $b$  на  $-d$ , поскольку эта замена сказывается только на экспоненте и может быть скомпенсирована переобозначением переменных интегрирования  $x$  и  $y$ , причем остальная часть подынтегрального выражения при этом никак не изменится. Тогда получим следующее перекрестное соотношение:

$$P(c, d | a, b) = P(c, -b | a, -d). \quad (3.20)$$

Очевидно соотношение (3.20) не может быть объектом экспериментальной проверки, ибо функция  $P$  представляет собой наблюдаемую амплитуду только в том случае, когда все ее аргументы положительно времениподобны, а последнее, будучи верным для одной стороны равенства (3.20), не может быть одновременно верным для другой. Тем не менее такое перекрестное соотношение чрезвычайно важно, поскольку оно должно иметь место для любой функции  $P$ , которая допускает *аналитическое продолжение* от положительных времениподобных аргументов к отрицательным. Следовательно, перекрестная симметрия неразрывно связана с возможностью аналитического продолжения; позднее мы узнаем об этом еще больше.

Соотношения, аналогичные (3.20), существуют и для амплитуд процессов, включающих более четырех частиц. Общее правило состоит в том, что такая амплитуда инвариантна относительно операции перестановки импульса падающей частицы в аут-состояние [т. е. справа налево относительно вертикальной черты в  $P(c, d|a, b)$ ] и одновременного изменения его знака. Перекрестные соотношения можно рассматривать как обобщения требований статистики Бозе—Эйнштейна в той мере, в какой формула (3.20) носит некоторые черты формального сходства с требованиями инвариантности относительно перестановки неразличимых частиц в одном и том же состоянии, именно с условиями

$$P(c, d|a, b) = P(d, c|a, b) = P(c, d|b, a). \quad (3.21)$$

Схема свертывания удовлетворяет также и условиям (3.21). Это следует, например, из соотношения (3.17).

Перекрестное соотношение в той форме, в которой оно получено, применимо только к хронологическому способу записи амплитуды перехода; оно в точности совпадает с «правилом подстановки», известным из ковариантной теории возмущений, поскольку в теории возмущений имеют дело исключительно с  $T$ -произведениями. В дисперсионной теории, однако, обычно используют  $R$ -произведения. Хотя было отмечено, что соответствующие  $T$ - и  $R$ -произведения совпадают, когда их фурье-образы рассматриваются при физических значениях импульсов частиц, для нефизических значений импульсов такое совпадение, вообще говоря, отсутствует. Иными словами, аналитическое продолжение  $R$ -произ-



ведений в нефизическую область отличается от аналитического продолжения соответствующих  $T$ -произведений, и это различие сохраняется, хотя и в меньшей степени, для вещественных, но отрицательных времениподобных импульсов. В качестве упражнения предлагаем читателям получить аналог формулы (3.20) для  $R$ -произведения и напоминаем, что перекрестные соотношения для частиц со спином и зарядом естественно окажутся несколько более сложными (см. гл. 5).

В заключение главы мы еще раз подчеркнем, что (в предположении возможности аналитического продолжения) перекрестная симметрия представляет собой естественное следствие теории поля. Весьма вероятно, что это одно из наиболее фундаментальных следствий наряду с теоремой  $PCT$  и теоремой о связи спина и статистики. Подобное утверждение, в частности, находит отражение в том факте, что в теории  $S$ -матрицы, в которой поля вообще исключаются из рассмотрения, требование перекрестной симметрии необходимо ввести в качестве одной из фундаментальных аксиом теории. Конечно, даже в теории поля перекрестные соотношения не могут быть доказаны, если, например, оказывается невозможным аналитическое продолжение (по соответствующим переменным) выражений типа (3.19).

## Глава 4

### КИНЕМАТИКА, ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ И СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

В этой главе вводятся некоторые понятия, которые позволяют без всякого труда оперировать с сечениями рассеяния, сдвигами фаз, суммированием по фазовому пространству и прочей кинематикой рассеяния, а также связывают эти величины с выражениями, возникающими естественным образом в схеме свертывания. Мы по-прежнему будем рассматривать гипотетические нейтральные скалярные частицы. Представляется удобным обсудить одновременно и условие унитарности  $S$ -матрицы (для упругого рассеяния), прокомментировать еще раз перекрестные соотношения и показать, что вытекает из принципа неразличимости одинаковых ча-

стиц. Хотя в данной главе развивается очень мало новых физических идей, необходимо множество манипуляций, чтобы разобраться во всех этих вопросах. Безусловно, целесообразно познакомиться с ними подробно, прежде чем приступить к рассмотрению собственно дисперсионных соотношений.

#### § 4.1. КИНЕМАТИКА, ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ

В качестве примера рассмотрим упругое рассеяние нейтральных частиц, которое мы уже использовали для иллюстрации схемы свертывания в гл. 3. Если учесть закон сохранения четыре-импульса, то процесс рассеяния

$$a + b \rightarrow c + d \quad (4.1)$$

(буквы обозначают четыре-импульсы взаимодействующих частиц), очевидно, можно целиком охарактеризовать двумя переменными, скажем, полной энергией и углом рассеяния. Тем не менее удобно ввести на равных основаниях *три* релятивистские скалярные переменные, так называемые переменные Манделстама:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (a + b)^2 = (c + d)^2; \\ s_2 &= (a - c)^2 = (b - d)^2; \\ s_3 &= (a - d)^2 = (b - c)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Только две из них линейно независимы, поскольку закон сохранения энергии-импульса ( $a + b = c + d$ ) приводит к следующему линейному соотношению между этими переменными:

$$\left. \begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= (a + b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 = \\ &= 6\mu^2 + 2a(b - c - d) = 6\mu^2 + 2a(-a); \\ s_1 + s_2 + s_3 &= 4\mu^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Если массы частиц не равны между собой, скажем,  $a^2 = \mu_a^2$ ,  $b^2 = \mu_b^2$  и т. д., то формулу (4.3) следует заменить на

$$s_1 + s_2 + s_3 = \mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_c^2 + \mu_d^2.$$

В системе центра масс, где

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0,$$

имеем

$$a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = \omega.$$

Тогда

$$s_1 = 4\omega^2 = 4(\mu^2 + k^2),$$

где

$$\left. \begin{aligned} |k| &\equiv k = (s_1/4 - \mu^2)^{1/2}; \\ \frac{k}{\omega} &= \left[ \frac{s_1 - 4\mu^2}{s_1} \right]^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

здесь  $k$  — волновое число, а  $\omega$  — энергия частицы в системе центра масс.

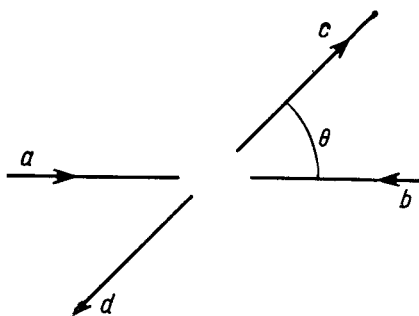


Рис. 4.1.

Определив угол рассеяния  $\theta$  как угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  в системе центра масс (см. рис. 4.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= -(\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 = -2k^2(1 - \cos \theta); \\ s_3 &= -2k^2(1 + \cos \theta); \\ s_{2,3} &= -2(s_1/4 - \mu^2)(1 \mp \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Физическая область такого процесса рассеяния, т. е. совокупность тех значений переменных  $s_i$ , которые они могут принимать в лабораторных условиях, определяется неравенствами

$$s_1 \geq 4\mu^2; \quad s_{2,3} \leq 0 \quad (4.6)$$

с дополнительным ограничением

$$-(s_1 - 4\mu^2) = -4k^2 \leq s_{2,3}. \quad (4.7)$$

Перекрестные соотношения (3.20), а также условия (3.21), связанные со статистикой Бозе—Эйнштейна (неразличимостью частиц), можно теперь переформулировать в терминах переменных  $s_i$ . Обозначим для краткости нетривиальную часть  $S_{fi}$  через  $A$ . Замены переменных, связанные со статистикой Бозе—Эйнштейна,  $a \leftrightarrow b$  и  $c \leftrightarrow d$  приводят к замене  $s_2 \leftrightarrow s_3$ , так что (3.21) означает

$$A(s_1, s_2, s_3) = A(s_1, s_3, s_2). \quad (4.8)$$

Замена переменных, связанная с перекрестной симметрией  $b \leftrightarrow -d$ , влечет замену  $s_1 \leftrightarrow s_3$ , так что неравенство (3.20) сводится к

$$A(s_1, s_2, s_3) = A(s_3, s_2, s_1). \quad (4.9)$$

В этих обозначениях аналогия между двумя типами ограничений еще более очевидна. Оба эти соотношения совместно означают, что  $A$  является *симметричной функцией всех трех переменных Манделстама*. Иными словами, она остается неизменной при замене любых двух переменных из трех  $s_i$ . (В гл. 5 мы увидим, что для заряженных частиц или частиц со спином перекрестные соотношения связывают амплитуды рассеяния частицы на частице, частицы на античастице и античастицы на античастице и соответственно более сложны). Мы использовали перекрестные соотношения для амплитуды в форме  $T$ -произведения. Весьма сходные результаты получатся из выражения для амплитуды в форме  $R$ -произведения; правда, при этом в некоторых случаях появятся или исчезнут знаки комплексного сопряжения. Но на данной стадии нам не следует заботиться об этом различии, поскольку если  $A$  — граничное значение аналитической функции, то и  $A^*$  — также граничное значение аналитической функции. Конечно, когда мы детально ознакомимся с дисперсионными соотношениями, основанными на  $R$ -произведениях, мы воспользуемся правильной записью амплитуды в форме  $R$ -произведения.

Если считать  $A$  функцией двух переменных  $s_1$  и  $s_2$  (где первая переменная определяет энергию, а вторая — передачу импульса в системе центра масс), то казалось бы естественным заключить, что функция  $A(s_1, s_2)$  физически реализуется только в области на плоскости переменных  $s_1, s_2$ , допустимой соотношениями

(4.6) и (4.7). Однако перекрестное соотношение показывает, что если поменять ролями переменные  $s_1$  и  $s_2$ , то в определенной таким образом области функция  $A$  опять будет описывать физический процесс рассеяния (в рассматриваемом случае тот же самый процесс), в котором переменная  $s_2$  отвечает энергии, а переменная

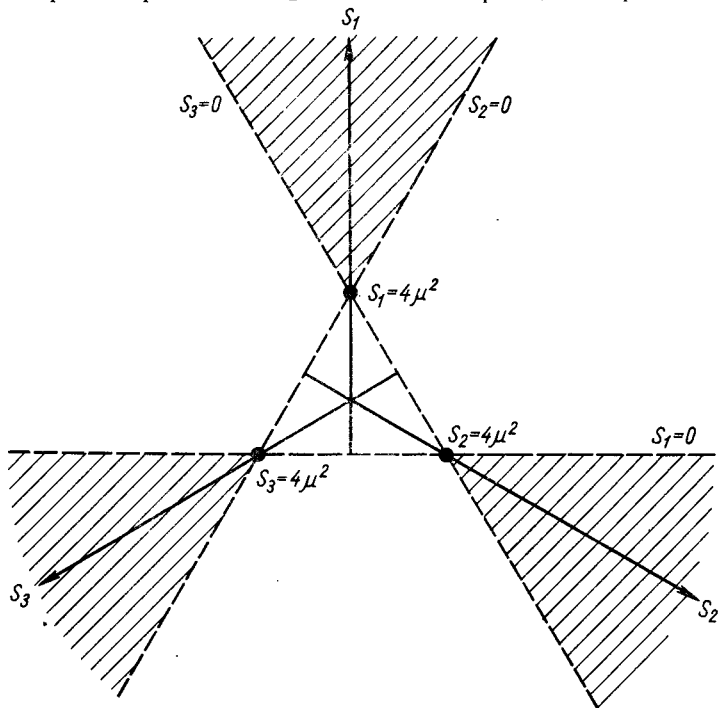


Рис. 4.2.

$s_1$  — передаче импульса. Наконец, существует и третья подобная область, в которой роль энергии играет переменная  $s_3$ , а переменная  $s_1$  (или  $s_2$ ) играет роль передачи импульса. С учетом соотношения Манделстама (4.3) переменные  $s_i$  можно представить на диаграмме (см. рис. 4.2), которая ниже будет предметом тщательного изучения. Заштрихованные области диаграммы — это физические области, которые, очевидно, ограничены кривой третьего порядка  $s_1 s_2 s_3 = 0$ ; в качестве упражнения мы предоставляем читателям определить граничную кривую в случае неравных масс (см. Kibble, 1960). Эти

три области часто называют 1-м, 2-м и 3-м каналами, или  $s_1$ -,  $s_2$ -,  $s_3$ -каналами, помечая каждую область символом той переменной Манделстама, которая обозначает энергию в этом канале. Важно подчеркнуть, что эти три области не перекрываются, так что перекрестные соотношения имеют смысл только в том случае, когда определенное замкнутое выражение для амплитуды в одном канале действительно математически предопределяет определенное замкнутое выражение для амплитуд в других каналах, например, посредством аналитического продолжения.

Наконец, заметим, что центр диаграммы, так называемая точка симметрии, расположен вне физических областей и соответствует значению

$$s_1 = s_2 = s_3 \equiv s_0 = \frac{4}{3} \mu^2. \quad (4.10)$$

## § 4.2. СВЕРНУТЫЕ АМПЛИТУДЫ И СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

Отвлечемся от этого общего описания на основе перекрестной симметрии и опять сконцентрируем внимание на частном процессе (4.1), кинематика которого фиксирована формулами (4.2), (4.4) и (4.5). Результаты рассмотрения, особенно разложение по амплитудам парциальных волн в значительной степени определяются схемой свертывания как исходной точкой. Читатели могут найти более стандартное изложение в книгах Блатта и Вайскопфа (1952) или Гольдбергера и Ватсона (1967).

Наша цель — связать свернутую амплитуду, скажем в форме (3.6), с сечением рассеяния.

В пределе плоских волн выражение (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle cd, out | ab, in \rangle = \langle cd, in | S | ab, in \rangle = \\ &= \langle cd, in | ab, in \rangle + i(2\omega_d)^{-1/2} \int dx e^{idx} \langle c | \eta(x) | ab, in \rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Соответственно определим оператор  $T$  соотношениями:

$$S = 1 + iT; \quad S^* = 1 - iT^*. \quad (4.12)$$

В выражении (4.11), используя стандартную формулу (2.39), справедливую для любого локального оператора, осуществим преобразование

$$\langle c | \eta(x) | ab, in \rangle = \langle c | \eta(0) | ab, in \rangle e^{i(c-a-b)x}.$$

Тогда, проинтегрировав по  $x$ , получим

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta(a + b - c - d) (2\omega_d)^{-1/2} \langle c | \eta(0) | ab, in \rangle. \quad (4.13)$$

$\delta$ -Функция в этой формуле отражает просто закон сохранения четыре-импульса. Начиная с этого момента будем вместо  $\eta(0)$  писать просто  $\eta$ . Как уже отмечалось выше (см. гл. 3), каждое свертывание приводит к появлению множителя  $(2\omega)^{-1/2}$ . В предвидении этого определим теперь лоренцеву скалярную амплитуду  $\mathfrak{M}$  по формуле

$$\left. \begin{aligned} T_{fi} &= (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \frac{\mathfrak{M}_{fi}}{[16\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d]^{1/2}}; \\ \mathfrak{M}_{fi} &= [8\omega_a\omega_b\omega_c]^{1/2} \langle c | \eta(x) | ab, in \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Величину  $\mathfrak{M}$  называют *инвариантной амплитудой*. В общем случае мы будем записывать ее в виде

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \frac{\mathfrak{M}_{fi}}{\Pi_i \Pi_f}, \quad (4.15)$$

где  $\Pi_i$  и  $\Pi_f$  — подходящие множители для каждого состояния  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$ . Подводя итог сказанному, можно написать

$$S_{fi} = \langle f, in | i, in \rangle + i(2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \mathfrak{M}_{fi} / \Pi_f \Pi_i. \quad (4.16)$$

Далее установим соотношение между инвариантной амплитудой  $\mathfrak{M}$  и сечением рассеяния. Сделаем это двумя методами. Первый из них применим в предположении, что можно полностью пренебречь неупругими эффектами; второй метод является более общим.

В первом методе выкладки начинаются с использования условия унитарности  $S$ -матрицы. Если  $S$ -матрица унитарна, то

$$\left. \begin{aligned} SS^* &= (1 + iT)(1 - iT^*) = 1; \\ i(T - T^*) &= -TT^*. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Последнее соотношение — это операторное уравнение. Здесь  $T^*$  — оператор, эрмитово сопряженный оператору  $T$ . Образовав матричные элементы, получим

$$i(T_{fi} - T_{if}^*) = -\sum_j T_{fj} T_{ij}^*, \quad (4.18)$$

где звездочка при отдельных матричных элементах естественно служит для обозначения комплексного сопряжения. Левая часть этого соотношения дает некие, но неполные сведения о мнимой части  $T_{fi}$ . Ниже будет по-

казано, что в рассматриваемом нами частном случае  $T_{fi} = T_{if}$ , т. е. проекции матриц  $T$  и  $S$  на подпространство, натянутое на двумезонные состояния, являются симметричными подматрицами, так что левая часть формулы (4.18) фактически равна  $-2i \text{Im} T_{fi}$ . Действительно, в силу  $TP$ -инвариантности\* можно записать

$$\langle cd, out | ab, in \rangle = \langle cd, in | ab, out \rangle^*.$$

Значок комплексного сопряжения появился справа вследствие того, что преобразование  $T$  антиунитарно; отметим, что под действием оператора  $TP$  система из двух бесспиновых частиц с заданными импульсами переходит сама в себя с заменой индексов ин-состояний на индексы аут-состояний. Заменяя просто матричный элемент справа транспонированным, получим

$$\langle cd, out | ab, in \rangle = \langle ab, out | cd, in \rangle,$$

которое и является требуемым соотношением.

Поэтому формула (4.18) принимает вид

$$\text{Im} T_{fi} = \frac{1}{2} \sum_i T_{fi} T_{if}^*. \quad (4.19)$$

Через инвариантные амплитуды  $\mathfrak{M}$  это соотношение запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \text{Im} \mathfrak{M}_{fi} / \Pi_f \Pi_i = \\ & = \frac{1}{2} \sum_j \frac{(2\pi)^8 \delta(p_f - p_j) \delta(p_i - p_j)}{\Pi_f \Pi_i \Pi_j^2} \mathfrak{M}_{fj} \mathfrak{M}_{ij}^*; \\ & \text{Im} \mathfrak{M}_{fi} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_i \delta(p_f - p_j) \mathfrak{M}_{fj} \mathfrak{M}_{ij}^* / \Pi_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Суммирование здесь производится по полной системе состояний; эти состояния вследствие наличия  $\delta$ -функции должны обладать тем же четыре-импульсом, от которого зависит амплитуда  $\mathfrak{M}_{fi}$  в левой части равенства. Всякий раз, когда значение  $s_1 = p_i^2 = p_f^2$  превышает квадрат пороговой массы данного набора состояний,

\* Здесь  $T$  — преобразование обращения времени, а  $P$  — преобразование пространственной инверсии.  $TP$ -инвариантность — инвариантность относительно комбинации пространственной инверсии и обращения времени. — *Прим. перев.*



этот набор должен быть включен в сумму, вносящую вклад в  $\text{Im } \mathfrak{M}_{fi}$ . Например, для  $\pi$ -мезон —  $\pi$ -мезонного рассеяния это происходит при  $s_1 = (2n\mu_\pi)^2$  ( $n=1, 2, 3\dots$ ) и при  $s_1 = 4M^2$ , если учитывать нуклон-antinуклонные состояния и т. д. Эти точки скачкообразного изменения, очевидно, являются сингулярными точками для амплитуды  $\mathfrak{M}_{fi}$ ; фактически это точки ветвления, или так называемые *нормальные пороги*.

Заметим, что соотношение вида (4.20) справедливо в каждой из обсуждаемых трех физических областей (каналов), которые взаимосвязаны условиями перекрестной симметрии. Строго говоря, формула (4.20) относится только к физической области канала 1; нельзя автоматически утверждать, что  $\text{Im } \mathfrak{M}_{fi}$  обращается в нуль, если значение  $s_1 = p_f^2$  опускается ниже самого низкого порога, именно порога упругого рассеяния при  $4\mu^2$ . В действительности оказывается, что полная амплитуда, обладающая перекрестной симметрией, вещественна вне трех физических областей, а ее мнимая часть в каждой из этих областей определяется соответствующим соотношением типа (4.20). В частности, такая амплитуда будет вещественной в точке симметрии  $s_1 = s_2 = s_3 = s_0 = \frac{4}{3} \mu^2$ .

Возвращаясь к рассмотрению канала 1 и ограничиваясь областью упругого рассеяния  $4\mu^2 \leq s_1 \leq 16\mu^2$ , произведем суммирование в (4.20) только по тем состояниям  $j$ , которые дают вклад в этой области, т. е. по самим двухмезонным состояниям. Если обозначить

$$|j\rangle = |kl\rangle$$

(не делая различия между ин- и аут-состояниями), то интересующая нас сумма равна

$$\sum_j = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l$$

Множитель  $1/2$  свидетельствует о том, что в целях упрощения суммирование по  $k$  и  $l$  выполнено независимо друг от друга. Это приводит к тому, что состояния  $|kl\rangle$  и  $|lk\rangle$  учитываются отдельно даже тогда, когда они представляют собой одно и то же состояние вследствие неразличимости входящих в них частиц. Для ком-

пенсации такой возможности и вводится множитель  $1/2$ .

[Если быть педантичным, то следует уделить специальное внимание случаю, когда импульсы и изоспины двух неразличимых частиц в одном и том же состоянии совпадают. При  $k=1$  состояние  $a_k^* a_l^* |0\rangle$  не нормировано надлежащим образом на единицу и поэтому должно быть домножено на  $2^{-1/2}$ . Конечно, при суммировании по  $k, l$  такие состояния встречаются. Предоставляем читателям в качестве упражнения показать, что правильный ответ получится, если это обстоятельство просто-напросто не учитывать (см. также работу Вика (Wick, 1955).]

Таким образом, имеем

$$\text{Im } \mathfrak{M}_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{4} \sum_{k,l} \delta(p_f - p_i) \frac{\mathfrak{M}_{fi} \mathfrak{M}_{ij}^*}{\Pi_j^2}. \quad (4.21)$$

Наиболее удобно выполнить указанное суммирование в системе центра масс и прежде всего осуществить процесс диагонализации момента количества движения. В этом месте фактически будет утеряна явная перекрестная симметрия рассматриваемых величин.

В системе центра масс выберем ось  $z$  вдоль направления импульса  $k_a$ ; предположим, что импульс  $k_c$  находится в плоскости  $xz$  и образует с  $k_a$  угол  $\theta_0$ ; соответствующие сферические углы вектора  $k$  обозначим  $\theta, \varphi$ ; наконец, допустим, что  $\theta'$  — угол между импульсами  $k$  и  $k_c$  (см. рис. 4.3).

Запишем теперь (4.21) в виде

$$\text{Im } \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta_0) = \frac{(2\pi)^4}{4} (2\pi)^{-3} \int dk dl \times \\ \times \frac{\delta(2\omega_k - \sqrt{s}) \delta(k+1)}{4\omega^2} \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta) \mathfrak{M}^*(s_1, \cos \theta').$$

Мы воспользовались стандартным соотношением эквивалентности (2.1), положив  $\Pi_j^2 = (\sqrt{4\omega^2})^2 = 4\omega^2$ ; при этом мы предположили, что вследствие наличия  $\delta$ -функций состояние  $(k, l)$  соответствует тому же значению

$s_1$  (той же полной массе), что и левая часть равенства. Поэтому

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta_0) = \frac{(2\pi)^{-2}}{4} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk \delta(\omega_k - \omega)/2}{4\omega^2} \int d\Omega \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta) \times \\ \times \mathfrak{M}^*(s_1, \cos \theta').$$

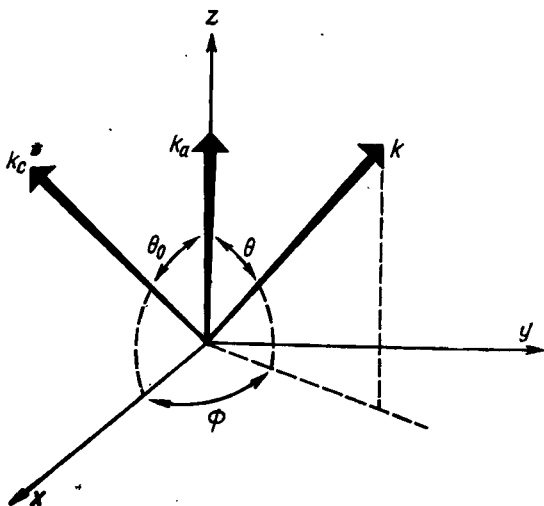


Рис. 4.3.

Здесь мы ввели обозначение  $k \equiv |\mathbf{k}|$ . Поскольку  $kdk = \omega d\omega$ , получим

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta_0) = \frac{(2\pi)^{-2}}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{k}{\omega} \int d\Omega \dots$$

Теперь введем разложение по амплитудам парциальных волн

$$\mathfrak{M}(s_1, \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) g_l(s_1), \quad (4.22)$$

что дает

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}(s_1, \cos \theta_0) = \frac{(2\pi)^{-2}}{32} \cdot \frac{k}{\omega} \sum_{l, l'} \int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta') \times \\ \times g_l(s_1) g_{l'}^*(s_1) (2l+1) (2l'+1).$$

Стандартное соотношение

$$\int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l, l'} P_l(\cos \theta_0)$$

позволяет придать этой формуле вид

$$\sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta_0) \operatorname{Im} g_l(s_1) = \frac{(k/\omega) 4\pi}{(4\pi^2) 32} \times \\ \times \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta_0) |g_l(s_1)|^2.$$

Приравнявая коэффициенты при ортогональных полиномах  $P_l$ , окончательно получим

$$\operatorname{Im} g_l = \frac{k}{32\pi\omega} |g_l|^2. \quad (4.23)$$

Это означает, что функцию  $g_l$  можно представить в следующем виде с вещественной фазой  $\delta_l(s)$ :

$$g_l(s) = 32\pi (\omega/k) e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s).$$

Отсюда следует, что саму инвариантную амплитуду можно записать как

$$\mathfrak{M}(s_1, \cos \theta) = \frac{32\pi\omega}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (4.24)$$

(неразличимые частицы).

Это позволяет соотнести сдвиги фаз в обычной теории рассеяния амплитуде  $\mathfrak{M}$ .

Для различных частиц в правой части равенства (4.23) вместо коэффициента  $1/32$  должен стоять множитель  $1/16$ , так что для таких частиц справедлива формула

$$\mathfrak{M}(s_1, \cos \theta) = \frac{16\pi\omega}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (4.25)$$

(различимые частицы).

Заметим, что для неразличимых частиц ограничение (4.8) из статистики Бозе—Эйнштейна приводит к тому, что в сумме (4.24) отсутствуют члены с нечетными  $l$ . Чтобы убедиться в этом, необходимо только вспомнить определения (4.5). Перестановка одинаковых частиц как в начальном, так и в конечном состоянии приводит к заменам  $s_2 \leftrightarrow s_3$ ,  $s_1 \leftrightarrow s_1$ , т. е. к замене  $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$ .

Поэтому требование инвариантности относительно таких замен означает, что в соответствующей сумме будут отсутствовать члены с нечетными степенями  $\cos \theta$ , т. е. отсутствовать члены  $P_{2n+1}(\cos \theta)$ .

Другой путь получения формулы (4.25) ближе по своему характеру к изложению в обычных учебниках. Одно из преимуществ второго метода — возможность его непосредственного применения и выше порога неупругого рассеяния, когда фаза  $\delta_l$  становится комплексной.

Рассмотрим «вероятность перехода» в обычном квантовомеханическом смысле из состояния  $|ab, in\rangle$  в состояние  $|cd, out\rangle$ . Она равна просто

$$W = |\langle cd, out | ab, in \rangle|^2.$$

Предполагается, что  $|ab, in\rangle \neq |cd, in\rangle$ , т. е. исключено рассеяние вперед. С учетом данного выше определения  $\mathfrak{M}$  выражение для этой вероятности принимает вид

$$W_{fi} = (2\pi)^8 \delta^2(p_i - p_f) |\mathfrak{M}_{fi}|^2 / (\Pi_f^2 \Pi_i^2).$$

Множитель  $(2\pi)^4 \delta(0)$  эквивалентен произведению  $VT$ , где  $V$  — объем квантования, а  $T$  — продолжительность эксперимента; на практике  $T \rightarrow \infty$ . Поэтому вероятность перехода в единицу времени равна

$$W_{fi}/T \equiv \omega_{fi} = (2\pi)^4 V \delta(p_f - p_i) |\mathfrak{M}_{fi}|^2 / (\Pi_f^2 \Pi_i^2).$$

Сейчас следует точно восстановить множители, включающие  $V$ , в нормировочных членах  $\Pi$ . Тогда в случае упругого рассеяния в системе центра масс получим

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4 V \delta(p_f - p_i) |\mathfrak{M}_{fi}|^2 / (16\omega^4 V^4).$$

Для различных частиц величина  $\omega_{fi}$  связана с дифференциальным сечением рассеяния на телесный угол  $\Omega_0$  соотношением

$$\sum_{k_c k_d} \delta(\Omega(k_c) - \Omega_0) \omega_{fi} = (\text{падающий поток}) \times \frac{d\tau}{d\Omega}.$$

Для неразличимых частиц сумму в левой части равенства следует заменить на  $\frac{1}{2} \sum_{k_c k_d}$ , поскольку  $|cd\rangle$  и

$|dc\rangle$  представляют собой теперь одно и то же состояние; в то же время детектор под телесным углом  $\Omega_0$

будет в равной мере обнаруживать обе частицы, так что под знаком суммы следует тогда писать  $\{\delta(\Omega(\mathbf{k}_c) - \Omega_0) + \delta(\Omega(\mathbf{k}_d) - \Omega_0)\}$ . Поскольку эти две  $\delta$ -функции дают одинаковые вклады, дополнительный множитель  $1/2$  компенсируется. Тем самым оба случая могут быть описаны одним и тем же соотношением.

В системе центра масс левая часть рассматриваемого соотношения имеет вид

$$(2\pi)^4 (2\pi)^{-6} \int d\mathbf{c} d\mathbf{d} \delta(\Omega_c - \Omega_0) \delta(p_f - p_i) |\mathfrak{M}_{fi}|^2 (16\omega^4 V)^{-1},$$

в правую же часть входит отношение

$$\text{Падающий поток} = \frac{\text{Относительная скорость}}{\text{Нормировочный объем}} = \frac{2k}{\omega} \cdot \frac{1}{V}.$$

Приравнивая эти два выражения и продолжая выкладки, как и выше, получим

$$\left. \begin{aligned} (2\pi)^{-2} \int_0^\infty c^2 dc \int d\Omega_c \delta(\Omega_c - \Omega_0) \frac{\delta(\omega_c - \omega)/2}{16\omega^4} |\mathfrak{M}_{fi}|^2 &= \\ &= \frac{2k}{\omega} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\omega}{2k} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{k}{\omega^2} \cdot \frac{1}{32} |\mathfrak{M}'_{fi}|^2; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2^8 \pi^2} \cdot \frac{1}{\omega^2} |\mathfrak{M}_{fi}|^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Для различных частиц стандартное выражение, согласно теории рассеяния, имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(s_1, \cos \theta)|^2 = \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \right|^2 / k^2.$$

Здесь  $F$  — обычная амплитуда рассеяния. Написанная формула применима независимо от того, вещественны ли  $\delta_l$  или нет. Сравнение последних двух соотношений дает в соответствии с формулой (4.25)

$$\mathfrak{M}_{fi} = \frac{16\pi\omega}{k} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \delta_l.$$

Для неразличимых частиц (бозонов) стандартное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) [P_l(\cos\theta) + P_l(-\cos\theta)] e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right|^2 = \\ &= \frac{4}{k^2} \left| \sum_{\text{четные } l} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right|^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь мы использовали тот факт, что для четных (нечетных)  $l$  полиномы  $P_l(\cos\theta)$  являются четными (нечетными) функциями  $\cos\theta$ . Сравнение с соотношением (4.26) показывает, что в данном случае имеет место равенство

$$\mathfrak{M}_{fi} = \frac{32\pi\omega}{k} \sum_{\text{четные } l} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l$$

в согласии с формулой (4.24) и предыдущими замечаниями об отсутствии парциальных волн с нечетными  $l$ .

### § 4.3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Чтобы дать конкретную (хотя и нереалистическую) иллюстрацию некоторым из предыдущих формул, предположим, что взаимодействие рассматриваемых (неразличимых) мезонов описывается лагранжианом взаимодействия

$$L(x) = \lambda \tau_0^4(x), \quad (4.28)$$

и исследуем упругое рассеяние таких частиц в первом порядке по  $\lambda$ . Следует отметить, что константа  $\lambda$  безразмерна. Уравнение поля

$$(\square^2 + \mu^2) \varphi_0 - 4\lambda \varphi_0^3(x)$$

позволяет определить оператор источника

$$\tau_0^r(x) = 4\lambda \varphi_0^3(x) \quad (4.29)$$

В первом порядке по  $\lambda$  следует, пренебрегая различиями между полями  $\varphi_0$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_{in}$ , получить амплитуду рассеяния путем подстановки оператора  $\eta$  вида (4.29) в выражение для  $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}_{P.T.} = 4\lambda [8\omega_a \omega_b \omega_c]^{1/8} \langle c | \varphi_{in}^3(0) | ab, in \rangle$$

и рассчитать эту величину. Положив объем квантования равным единице (теперь это можно сделать, поскольку мы раз и навсегда тщательно провели выкладки в предыдущем разделе) и подставив в качестве  $\varphi_{in}$  стандартное разложение (2.35), получим (опуская индекс  $in$ ):

$$\mathfrak{M}_{P.T.} = 4\lambda [8\omega_a\omega_b\omega_c]^{-1/2} \sum_{r, s, t} (8\omega_r\omega_s\omega_t)^{-1/2} \times \\ \times \langle c | (a_r + a_r^*) (a_s + a_s^*) (a_t + a_t^*) | ab \rangle.$$

В этот матричный элемент дают ненулевой вклад только те члены, которые содержат один оператор рождения и два оператора уничтожения, т. е. комбинация

$$\{a_r^* a_s a_t + a_r a_s^* a_t^* + a_r a_s a_t^*\}.$$

Теперь мы можем во всех членах перенести оператор рождения налево, пренебрегая  $\delta_{s,r}$  и другими подобными множителями, которые при этом появляются, ибо соответствующие члены не дают вклада в рассматриваемый матричный элемент. Поскольку оставшаяся часть выражения под знаком суммы симметрична относительно  $r, s, t$ , то все три сомножителя дадут в сумму одинаковый вклад. Поэтому

$$\mathfrak{M}_{P.T.} = 4 \cdot 3\lambda [8\omega_a\omega_b\omega_c]^{1/2} \sum_{r, s, t} \langle c | a_r^* a_s a_t | ab \rangle [8\omega_r\omega_s\omega_t]^{-1/2}.$$

Единственный член, который дает здесь вклад в сумму по  $r$ , — это член с  $r=c$ ; аналогично должно быть либо ( $s=a$ ;  $t=b$ ), либо ( $s=b$ ;  $t=a$ ). Каждая из этих возможностей приводит к единичному вкладу в соответствующую сумму, и в результате квадратные корни сокращаются. Окончательно получаем

$$\mathfrak{M}_{P.T.} = (4!\lambda). \quad (4.30)$$

Индекс  $P.T.$  означает здесь, что рассматривается первый член ряда теории возмущений.

Амплитуда  $\mathfrak{M}_{P.T.}$  не зависит от  $\cos \theta$ , поэтому она приводит к чистому рассеянию в  $S$ -состоянии. Это позволяет точно решить вопрос, насколько мала должна быть константа  $\lambda$ , чтобы соответствующее выражение, согласно теории возмущений, не было бы совсем абсурдным. Это можно сделать, воспользовавшись условием унитарности, которое всегда нарушается при рас-



смотрении в любом конечном порядке теории возмущений. Полученный ниже критерий основан на том, что соответствующее нарушение не должно быть слишком чрезмерным.

Подставляя (4.30) в соотношение (4.26), найдем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{P.T.} = \frac{1}{28\pi^2\omega^2} (4!\lambda)^2 = \frac{9\lambda^2}{4\pi^2\omega^2}, \quad (4.31)$$

в то время как из формулы (4.27) следует, что для чистого рассеяния в  $S$ -состоянии для неразличимых частиц

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{k^2} |e^{i\delta_0} \sin \delta_0|^2 = \frac{4 \sin^2 \delta_0}{k^2} \leq \frac{4}{k^2}. \quad (4.32)$$

Это последнее соотношение устанавливает абсолютную верхнюю границу для рассеяния в  $S$ -состоянии и не содержит в себе ничего, кроме обычных геометрических ограничений. Сравнивая формулы (4.31) и (4.32), заключаем, что в этом порядке по  $\lambda$  результаты теории возмущений определенно противоречат условию унитарности, если только  $\lambda$  не удовлетворяет неравенству

$$\lambda^2 \leq 16\pi^2\omega^2/(9k^2).$$

При  $k \rightarrow \infty$  правая часть его стремится к  $16\pi^2/9$ . Поэтому, чтобы избежать совершенно бессмысленных результатов, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\lambda^2 \leq 16\pi^2/9.$$

Гораздо более реалистичное ограничение связано с тем обстоятельством, что вещественное значение  $\mathfrak{M}_{P.T.}$  отвечает некой определенной величине  $(d\sigma/d\Omega)_{P.T.}$ , которая, в свою очередь, связана, согласно формуле (4.32), с определенным значением фазы  $\delta_0$ . Однако если нарушено условие  $\delta_0 \ll 1$ , то соответствующее значение  $\delta_0$  приводит к появлению заметной мнимой части в амплитуде  $\mathfrak{M}$ , в то время как величина  $\mathfrak{M}_{P.T.}$  мнимой части не имеет. Поэтому должно иметь место неравенство

$$|\delta_0| \sim |\sin \delta_0| = 3|\lambda|k/(4\pi\omega) \ll 1. \quad (4.33)$$

Очевидный, хотя и грубый метод расширения области применимости полученного по теории возмущений выражения состоит в следующем. Заметим, что реали-

стичное выражение для амплитуды чистой  $S$ -волны стремится при  $k \rightarrow 0$  (на пороге) к вещественному конечному пределу, поскольку в этом случае фаза  $\delta_0$  стремится к нулю как первая степень  $k$ . Следовательно, можно попытаться выбрать при малых значениях  $k$  какое-нибудь однопараметрическое представление  $\delta_0$  в терминах  $k$  и предположить, что предельная амплитуда на пороге равна  $\mathfrak{M}_{P.T.}$ . Один из популярных вариантов такой параметризации — параметризация с помощью длины рассеяния (так называемое приближение нулевого радиуса), когда полагают

$$\operatorname{tg} \delta_0 = ka, \quad (4.34)$$

или в более релятивистском по форме виде

$$\operatorname{tg} \delta_0 = ka_{\mu}/\omega.$$

В обоих случаях при малых  $k$  фаза  $\delta_0 \sim ak$ , откуда следует

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathfrak{M} = \lim_{k \rightarrow 0} 32\pi (\omega/k) e^{i\delta_0} \sin \delta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} 32\pi \omega \delta_0 / k = 32\pi a_{\mu}.$$

Сравнивая это выражение с амплитудой  $\mathfrak{M}_{P.T.}$ , получаем

$$a = 3\lambda/4\pi\mu.$$

Окончательные выражения для дифференциального сечения рассеяния, отвечающие выбору фаз (4.34) и (4.35), имеют вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 (3\lambda/4\pi)^2}{1 + (3\lambda/4\pi)^2 (k/\mu)^2} \mu^{-2}$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 (3\lambda/4\pi)^2}{1 + (3\lambda/4\pi)^2 (k/\omega)^2} \omega^{-2}.$$

Следует подчеркнуть, что эти выражения не соответствуют суммированию членов высшего порядка в ряду теории возмущений. Они возникают вследствие того, что мы прибегли к некоему трюку для обеспечения унитарности амплитуды при любом значении  $\lambda$ . Из ограничений, связанных с унитарностью, непосредственно следует, что полученные для сечения  $d\sigma/d\Omega$  выражения при  $\lambda \rightarrow \infty$  стремятся к конечному пределу при любых  $k$ , отличных от нуля, и обращаются в нуль при  $k \rightarrow \infty$ .

## ЗАРЯД И СПИН

Вплоть до этого момента конструкция вспомогательных полей, схема свертывания и перекрестные соотношения обсуждались только для нереалистического случая самодействующих нейтральных бесспиновых частиц. Выпишем теперь соответствующие формулы для заряженных бесспиновых бозонов и для заряженных фермионов со спином  $1/2$ . Предполагается, что читатели хорошо знакомы с теорией свободных полей соответствующих частиц и с теорией их взаимодействия с электромагнитным полем, с понятием оператора сохраняющегося тока и его связью в силу теоремы Нетер с градиентной (калибровочной) инвариантностью [см., например, книги Романа (Roman, 1964) и Маршака и Судершана (1961)]. Поэтому мы сконцентрируем внимание на формулах, существенных в формализме Лемана, Симанзика и Циммермана, выписывая другие формулы, главным образом для справочных целей. Подобная краткость никоим образом не должна означать, что соответствующие проблемы тривиальны — касается ли это физики, лежащей в основе теорий свободных или обладающих электромагнитным взаимодействием частиц различных спинов, или теоремы Нетер. Например, «кинематические» различия между частицами, возникающие вследствие различия в их спинах, конечно, очень глубоки, и вполне вероятно, что они больше различий, вытекающих из любых «динамических» теорий, которые будут обсуждаться в остальной части книги.

## § 5.1. ЗАРЯЖЕННЫЕ МЕЗОНЫ С НУЛЕВЫМ СПИНОМ

Напомним, что свободные бесспиновые частицы, обладающие положительным или отрицательным зарядом  $\pm e$ , описываются неэрмитовым скалярным полем  $\varphi$  и эрмитово сопряженным ему оператором  $\varphi^*$ , которые оба подчиняются свободному уравнению Клейна—Гордона и имеют следующие разложения в ряд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} [b_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^* e^{ikx}]; \\ \varphi^*(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^* e^{ikx}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Здесь  $b$  и  $b^*$  — операторы рождения и уничтожения для положительно заряженных частиц, тогда как  $a$  и  $a^*$  — соответствующие операторы для отрицательно заряженных частиц. Они удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$\left. \begin{aligned} [a_k, a_{k'}^*] &= \delta_{k, k'} = [b_k, b_{k'}^*]; \\ [a_k, a_{k'}] &= 0 = [b_k, b_{k'}] = [a_k^*, b_{k'}] = [a_k^*, b_{k'}^*], \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

что означает

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0; \quad [\varphi(x), \varphi^*(y)] = \Delta(x - y). \quad (5.3)$$

Обратные формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} b_k &= iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} (2\omega)^{-1/2} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x); \\ b_k^* &= -iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} (2\omega)^{-1/2} e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi^*(x); \\ a_k &= iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} (2\omega)^{-1/2} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi^*(x); \\ a_k^* &= -iV^{-1/2} \int d\mathbf{x} (2\omega)^{-1/2} e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Все эти формулы можно непосредственно отнести к вспомогательным полям, если снабдить все операторы индексами (*in*) или (*out*). Тогда из асимптотического условия следует, что существуют два интерполирующих поля:  $\varphi(x)$  и  $\varphi^*(x)$ .

Чтобы проиллюстрировать перекрестные соотношения, рассмотрим два процесса рассеяния (буквы обозначают импульсы частиц, а индексы — их заряды):

$$a_+ + b_+ \rightarrow c_+ + d_+; \quad (5.5)$$

$$a_+ + b_- \rightarrow c_+ + d_-. \quad (5.6)$$

Свертывая частицы  $b$  и  $d$  в каждом случае аналогично тому, как это делалось в гл. 3, и используя обратные формулы (5.4), получаем следующие выражения (для простоты считаем  $V=1$ ):

$$\begin{aligned} \langle c_+ d_+, out | a_+ b_+, in \rangle &= \langle c_+ d_+, in | a_+ b_+, in \rangle + \\ &+ \frac{i^2}{[2\omega_b 2\omega_d]^{1/2}} \int dx dy e^{id_+ x - ib_+ y} \times \\ &\times K_x K_y \langle c_+ | T \{ \varphi(x) \varphi^*(y) \} | a_+ \rangle; \quad (5.7) \\ \langle c_+ d_-, out | a_+ b_-, in \rangle &= \langle c_+ d_-, in | a_+ b_-, in \rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i^2}{[2\omega_b 2\omega_d]^{1/2}} \int dx dy e^{id_-x - ib_-y} \times \\
& \times K_x K_y \langle c_+ | T \{ \varphi^*(x) \varphi(y) \} | a_+ \rangle. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Обозначим нетривиальные вторые члены в формулах (5.7) и (5.8) соответственно  $P(c_+, d_+ | a_+, b_+)$  и  $P(c_+, d_- | a_+, b_-)$ . Переобозначая в (5.8) переменные интегрирования  $x$  и  $y$ , получаем

$$\begin{aligned}
P(c_+, d_- | a_+, b_-) = \frac{i^2}{[2\omega_b 2\omega_d]^{1/2}} \int dx dy e^{id_-y - ib_-x} \times \\
\times K_x K_y \langle c_+ | T \{ \varphi^*(y) \varphi(x) \} | a_+ \rangle. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Поскольку порядок, в котором записаны операторы под знаком  $T$ -произведения, не существен, матричный элемент, входящий в подынтегральное выражение в формуле (5.9), совпадает с подобным матричным элементом в подынтегральном выражении формулы (5.7). Сравнение двух интегралов тогда дает

$$P(c_+, d_+ | a_+, b_+) = P(c_+, -b_- | a_+, -d_-). \quad (5.10)$$

Это и есть перекрестное соотношение. Оно более сложно, чем соответствующее соотношение для нейтральных частиц [см. (3.20)], поскольку здесь при переносе импульсных переменных справа налево меняются не только их знаки, но также и знаки зарядов соответствующих частиц.

Чтобы переписать перекрестное соотношение в переменных Манделстама, удобно относить дополнительные индексы не к самим импульсным переменным, а в целом ко всей амплитуде; например, определим

$$\left. \begin{aligned}
P(c_+, d_+ | a_+, b_+) &\equiv P_{++|++}(c, d | a, b); \\
P(c_+, d_- | a_+, b_-) &\equiv P_{+-|+-}(c, d | a, b),
\end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где учитывается, что порядок этих индексов соответствует порядку следования импульсных переменных. Для процесса (5.5) определим переменные Манделстама следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
s_1 &= (a_+ + b_+)^2 = (c_+ + d_+)^2; \\
s_2 &= (a_+ - c_+)^2 = (b_+ - d_+)^2; \\
s_3 &= (a_+ - d_+)^2 = (b_+ - c_+)^2,
\end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

а для процесса (5.6) соответственно:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (a_+ - d_-)^2 = (b_- - c_+)^2; \\ s_2 &= (a_+ - c_+)^2 = (b_+ - d_+)^2; \\ s_3 &= (a_+ + b_-)^2 = (c_+ + d_-)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

[ $s_1$  — это переменная энергии для процесса (5.5), а  $s_3$  — переменная энергии для процесса (5.6)]. Тогда перекрестное соотношение (5.10) принимает вид

$$P_{++|++}(s_1, s_2, s_3) = P_{+-|+-}(s_1, s_2, s_3). \quad (5.14)$$

Таким образом, одна и та же функция переменных  $s_i$  при различном отождествлении переменных  $s_i$  с импульсными переменными описывает как процесс  $(++) \rightarrow (++)$ , так и процесс  $(+-) \rightarrow (+-)$ . (Следует помнить о замечаниях из гл. 3 относительно необходимости аналитического продолжения, позволяющего придать смысл перекрестным соотношениям).

Далее мы должны рассмотреть оператор электромагнитного тока и симметрию относительно зарядового сопряжения. Для свободных частиц можно сконструировать оператор плотности тока (где  $e = |e|$ )

$$s_\lambda = ie \left\{ \varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \varphi(x) - \langle 0 | \varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \varphi(x) | 0 \rangle \right\},$$

который, в силу уравнения свободного поля, удовлетворяет закону сохранения в дифференциальной форме

$$\partial^\lambda s_\lambda(x) = 0 = i [s_\lambda(x), P^\lambda]. \quad (5.15)$$

Это позволяет сконструировать оператор сохраняющегося заряда

$$Q \equiv \int dx s_0(x); \quad dQ/dt = 0. \quad (5.16)$$

Для свободных полей можно легко проверить, что

$$Q = e \sum_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) = e \sum_{\mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}}^+ - N_{\mathbf{k}}^-).$$

Кроме того, имеет место соотношение коммутации

$$[Q, \varphi(x)] = -e\varphi(x); \quad [Q, \varphi^*(x)] = e\varphi^*(x), \quad (5.17)$$

которое указывает, что оператор  $\varphi(x)$  уменьшает, а оператор  $\varphi^*(x)$  увеличивает заряд на величину  $e$ .

В любой лагранжевой теории, четной по взаимодействующим полям, существование оператора сохраняющейся плотности тока  $s_\lambda(x)$  является отражением ин-

вариантности теории относительно градиентных преобразований. Относительно этих преобразований поля  $\varphi$  и  $\varphi^*$  преобразуются по закону ( $\alpha$ —с-числовая константа):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = e^{-i\alpha e} \varphi^*(x); \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi^{*'}(x) = e^{-i\alpha e} \varphi(x), \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

и с точки зрения квантовой механики они генерируются с учетом соотношений (5.17) оператором заряда  $Q$ , определенным формулой (5.16):

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{i\alpha Q} \varphi(x) e^{-i\alpha Q}, \\ \varphi^{*'}(x) &= e^{i\alpha Q} \varphi^*(x) e^{-i\alpha Q}. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Хотелось бы сохранить то же требование инвариантности и его связь с  $s_\lambda$  и в обсуждаемой нелагранжевой формулировке теории и тем самым постулировать соотношения (5.15) и (5.17) для *интерполирующих* полей. Тогда будет иметь место равенство (5.16), и поэтому можно написать

$$Q = e \sum_k \{ b_k^* (in) b_k (out) - a_k^* (in) a_k (out) \}. \quad (5.20)$$

Наоборот, данное выше явное выражение для  $s_\lambda$ , вообще говоря, не будет более справедливым, да в этом и нет необходимости. Однако весьма важно потребовать, чтобы  $s_\lambda$  был локальным оператором, т. е. зависел бы (в остальном неконкретизированном образом) от различных операторов интерполирующих полей только в точке  $x$ . Это обстоятельство в сочетании с формулами (5.16) и (5.17) приводит к важному следствию для одновременного коммутатора  $s_\lambda$  с операторами поля. Чтобы вывести его, запишем

$$[Q, \varphi(x)] = \int dy [s_0(y), \varphi(x)] = -e\varphi(x).$$

Поскольку  $dQ/dt=0$ , то координате  $y_0$  можно приписать любое значение. Например, выберем ее равной  $x_0$ . Но локальность оператора  $s_0(y)$  совместно с аксиомой локальности IV приводит к тому, что

$$[s_\mu(y), \varphi^*(x)] = 0, \text{ если } (x - y)^2 < 0.$$

Для данного частного случая  $y_0=x_0$ , это, в свою очередь, означает, что рассматриваемый коммутатор дол-

жен обращаться в нуль во всех точках  $y$ , исключая точку  $y=x$ . Поэтому для выполнения соотношения коммутации необходимо, чтобы

$$[s_0(y), \varphi(x)]|_{x_0=y_0} = -e\varphi(x)\delta(x-y). \quad (5.21)$$

Заменяя интегрирование по плоскости  $t=\text{const}$  на интегрирование по пространственноподобной поверхности  $\sigma^\lambda$ , проходящей через точку  $x$ , можно переписать соотношение (5.21) в ковариантной форме

$$\int d\sigma^\lambda [s_\lambda(y), \varphi(x)] = -e\varphi(x) \quad (x \text{ на поверхности } \sigma),$$

откуда в силу локальности

$$[s_\lambda(y), \varphi(x)] = -\delta_\lambda(y-x)e\varphi(x),$$

если  $x$  и  $y$  лежат на одной и той же пространственноподобной поверхности.

Наконец, обсудим проблему инвариантности относительно зарядового сопряжения<sup>1</sup> (сопряжения частица — античастица). Она относится к числу дискретных инвариантных свойств лагранжевых теорий свободных частиц, которые в природе присущи всем взаимодействиям, кроме слабых. При зарядовом сопряжении частицы переходят в античастицы с фазовым множителем  $\pm 1$ ; следовательно, электромагнитные характеристики изменяют знак, а механические характеристики нет. Для определенности выберем случай, когда фазовый множитель равен  $+1$ . Тогда при зарядовом сопряжении для одночастичного состояния имеем

$$|k_\pm \rangle \rightarrow |k_\mp \rangle$$

и соответственно

$$\left. \begin{aligned} a_k \begin{matrix} (in) \\ (out) \end{matrix} &\rightarrow b_k \begin{matrix} (in) \\ (out) \end{matrix}; \\ \varphi_{out}^{in}(x) &\rightarrow \varphi_{out}^{*in}(x), \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

что, очевидно, представляет собой каноническое (унитарное) преобразование. Предположение об инвариантности, принятое в нашей теории, требует, чтобы и для интерполирующих полей переход  $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^*(x)$  также осуществлялся с помощью унитарного преобразования,



т. е. чтобы существовал унитарный оператор  $U$  со следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} U\varphi(x)U^{-1} &= \varphi^*(x); \\ U| \{a_1 \dots a_n\}_+ \{b_1 \dots b_m\}_-, \overset{in}{out} \rangle &= \\ = | \{a_1 \dots a_n\}_- \{b_1 \dots b_m\}_+, \overset{in}{out} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Очевидно,

$$Us_\lambda U^{-1} = -s_\lambda.$$

В качестве иллюстрации можно использовать формулу (5.23) и показать, что амплитуды рассеяния  $P_{++|++}(c, d|a, b)$  и  $P_{--|--}(c, d|a, b)$  равны. Именно  $\langle c_+d_+, out | a_+, b_+, in \rangle = \langle c_+d_+, out | U^{-1}U | a_+b_+, in \rangle = \langle c_-d_-, out | a_-, b_-, in \rangle.$  (5.24)

Формулу (5.24) можно выразить в прежних обозначениях:

$$P_{++|++}(c, d|a, b) = P_{--|--}(c, d|a, b).$$

Читатели в качестве упражнения могут выяснить, что из перекрестных соотношений следует равенство

$$P_{++|++}(c, d|a, b) = P_{--|--}(-a, -b|-c, -d),$$

и обсудить связь между этими двумя формулами, когда обе они записаны через переменные Манделстама.

## § 5.2. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $1/2$

Рассматриваемые в этом разделе проблемы изложены еще более сжато. Внимание сосредоточено только на тех вопросах, в которых нововведения для частиц со спином  $1/2$  принципиально отличаются от соответствующих нововведений для заряженных частиц с нулевым спином. Первая часть раздела посвящена лишь перечислению ряда формул, которые нам понадобятся в дальнейшем; она не претендует на последовательное изложение математического аппарата уравнения Дирака.

Принятые обозначения и соотношения для матриц Дирака имеют вид:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &\equiv \{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu\} = 2g_{\mu\nu}; \\ \gamma_0 &= \gamma_0^*; \quad \gamma = -\gamma^*; \quad \gamma_5 = -\gamma^5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3; \end{aligned}$$

$$\alpha_{\mu\nu} = (i/2) \{ \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \}; \quad \bar{\psi} = \psi^* \gamma_0.$$

Уравнение Дирака для свободной частицы записывается в виде

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m). \quad (5.25)$$

Стандартное разложение полей  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в ряд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left( \frac{m}{\omega} \right)^{1/2} [b_{s, \mathbf{k}} u_{s, \mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{s, \mathbf{k}}^* v_{s, \mathbf{k}} e^{ikx}]; \\ \bar{\psi}(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left( \frac{m}{\omega} \right)^{1/2} [a_{s, \mathbf{k}} \bar{v}_{s, \mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{s, \mathbf{k}}^* \bar{u}_{s, \mathbf{k}} e^{ikx}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Необходимо иметь в виду следующее. Всюду принято обозначение  $k_0 \equiv \omega \equiv (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ . Индекс  $s$  относится к состоянию с определенной спиральностью и принимает значения  $\pm 1$ . Спиноры  $u$  и  $v$  являются собственными состояниями оператора спиральности  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$ . Операторы  $b$  и  $b^*$  — это операторы уничтожения и рождения частиц; операторы  $a$  и  $a^*$  — операторы уничтожения и рождения античастиц (точно так же, как в случае заряженных бозонов). Соотношения антикоммутиации, приводящие к статистике Ферми—Дирака, имеют вид

$$\{a_{s, \mathbf{k}}, a_{s', \mathbf{k}'}^*\} = \delta_{ss'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \{b_{s', \mathbf{k}}, b_{s, \mathbf{k}'}^*\}, \quad (5.27)$$

в то время как все другие пары операторов антикоммутируют, например  $\{a_{s, \mathbf{k}}, a_{s', \mathbf{k}'}\} = 0$  и т. д. Уравнения (в импульсном пространстве), которым удовлетворяют спиноры  $u$  и  $v$ , можно получить, если подставить разложения (5.26) в уравнение (5.25):

$$\left. \begin{aligned} (-\gamma^\mu k_\mu + m) u_{\mathbf{k}, s} &= 0 = \bar{u}_{\mathbf{k}, s} (-\gamma^\mu k_\mu + m); \\ (\gamma^\mu k_\mu + m) v_{\mathbf{k}, s} &= 0 = \bar{v}_{\mathbf{k}, s} (\gamma^\mu k_\mu + m). \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Таким образом, спиноры  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{-\mathbf{k}}$  удовлетворяют следующим уравнениям на собственные значения:

$$\left. \begin{aligned} H(\mathbf{k}) &\equiv [\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + \gamma_0 m]; \\ H(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}} &= \omega u_{\mathbf{k}}, \quad H(\mathbf{k}) v_{-\mathbf{k}} = -\omega v_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

(Иными словами,  $4 \times 4$ -матрица  $H(\mathbf{k})$  была бы в одночастичной теории гамильтонианом для частицы с им-

пульсом  $k$ .) Для спиноров выбрана инвариантная нормировка:

$$\left. \begin{aligned} u_{s, k}^* u_{s', k} &= \delta_{s, s'} \omega/m = v_{s, k}^* v_{s', k}; \\ u_{s, k}^* v_{s', -k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Последнее условие ортогональности следует из того, что  $u_k$  и  $v_{-k}$  — это собственные функции, принадлежащие различным (противоположным по знаку) собственным значениям матрицы  $H(k)$ . Уравнения Дирака можно стандартным образом использовать для вывода следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{s, k} u_{s', k} &= \delta_{s, s'} = -\bar{v}_{s, k} v_{s', k}; \\ \bar{u}_{s, k} v_{s', k} &= \bar{u}_{s, k} \gamma_0 v_{s', -k} = 0; \\ \bar{u}_{s, k} \gamma_\lambda u_{s', k} &= \bar{u}_{s, k} u_{s', k} k_\lambda/m = \delta_{ss'} k_\lambda/m; \\ \bar{v}_{s, k} \gamma_\lambda v_{s', k} &= -\bar{v}_{s, k} v_{s', k} k_\lambda/m = \delta_{ss'} k_\lambda/m. \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Соотношение полноты при заданном  $k$  имеет вид

$$\sum_s \{ u_{s, k}^\alpha \bar{u}_{s, k}^\beta - v_{s, k}^\alpha \bar{v}_{s, k}^\beta \} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.32)$$

Из предыдущего следует, что одновременные соотношения антикоммутиации для  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  можно записать как

$$\left. \begin{aligned} \{ \psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \bar{\psi}^\beta(t, \mathbf{y}) \} &= \gamma_0^{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ \{ \psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \psi^\beta(t, \mathbf{y}) \} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Проведенное выше обсуждение роли оператора тока применимо непосредственно и к спинорам, если положить

$$s_\lambda = \bar{e} \{ \bar{\psi} \gamma_\lambda \psi - \langle 0 | \bar{\psi} \gamma_\lambda \psi | 0 \rangle \}.$$

По поводу зарядового сопряжения спиноров отсылаем читателей к любому учебнику, напоминая только, что под действием унитарного оператора зарядового сопряжения  $U$  операторы полей (асимптотических или интерполирующего, все равно) преобразуются по формуле

$$U \psi(x) U^{-1} = C \bar{\psi}^T(x),$$

где  $4 \times 4$ -матрица  $C$  определяется соотношением

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T.$$

Верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования в спинорном пространстве. Сравнение с формулой (5.26) приводит к равенствам:

$$U b_{s, k} U^{-1} = a_{-s, k}; \quad u_{s, k} = C \bar{v}_{-s, k}^T.$$

Наконец, обсудим кратко схему свертывания и перекрестные соотношения. Для этого нужны в дополнение к разложениям (5.26) и обратные формулы. При выводе их необходимо воспользоваться соотношениями (5.31):

$$\left. \begin{aligned} a_{s, k}(in) &= V^{-1/2} \int dx \bar{\psi}_{in}(x) \gamma_0 \left(\frac{m}{\omega}\right)^{1/2} v_{s, k} e^{ikx}; \\ a_{s, k}^*(in) &= V^{-1/2} \int dx \left(\frac{m}{\omega}\right)^{1/2} e^{-ikx} \bar{v}_{s, k} \gamma_0 \psi_{in}(x); \\ b_{s, k}(in) &= V^{-1/2} \int dx \left(\frac{m}{\omega}\right)^{1/2} e^{ikx} \bar{u}_{s, k} \gamma_0 \psi_{in}(x); \\ b_{s, k}^*(in) &= V^{-1/2} \int dx \bar{\psi}_{in}(x) \gamma_0 \left(\frac{m}{\omega}\right)^{1/2} u_{s, k} e^{-ikx}. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

(В дальнейшем множители  $V^{1/2}$  часто будем считать равными единице.) Заметим, что, например, в первой строке интегрирование по  $x$  с множителем  $\exp(ikx)$  позволяет выделить из оператора  $\bar{\psi}_{in}$  его компоненты, содержащие  $b_{s, -k}^*$  и  $a_{s, k}$ , а последующее свертывание с  $\gamma_0 v_{s, k}$  приводит к исключению нежелательной компоненты  $b_{s, -k}^*$ .

Схема свертывания и результирующие требования перекрестной симметрии проще всего пояснить на примере частного случая мезон-нуклонного рассеяния. Для простоты ограничимся рассмотрением только протонов и нейтральных  $\pi$ -мезонов и исследуем амплитуды переходов

$$p + k \rightarrow p' + k' \quad (5.35)$$

и

$$\bar{p} + k \rightarrow \bar{p}' + k', \quad (5.36)$$

где  $p$ ,  $\bar{p}$  и  $k$  обозначают соответственно импульсы протонов, антипротонов и  $\pi$ -мезонов; спиновые характеристики в состояниях фермионов мы опускаем.

Элемент S-матрицы для процесса (5.35) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle p'k', out | pk, in \rangle &= \langle k' | b_{p'}(out) | pk, in \rangle = \\ &= \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int_{x_0 \rightarrow +\infty} dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \langle k' | \psi_{out}(x) | pk, in \rangle = \\ &= \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int_{x_0 \rightarrow +\infty} dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь подразумевается свертывание в  $4 \times 4$ -спинорном пространстве. На втором этапе мы использовали асимптотическое условие. С учетом тождества (3.2) продолжим выкладки следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle p'k', out | pk, in \rangle &= \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int dx \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \times \right. \\ &\times \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle \left. \right\} + \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int_{x_0 \rightarrow -\infty} dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \times \\ &\times \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle. \end{aligned}$$

Второй член в правой части — это ожидаемый матричный элемент единичного оператора, именно  $\langle p'k', in | pk, in \rangle$ . Нетривиальный первый член обозначим на время  $Q(p', k' | p, k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q(p', k' | p, k) &= \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int dx \left\{ \partial_0 e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle + \right. \\ &\left. + e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 \partial_0 \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\exp(ip'x) \bar{u}_{p'}$  удовлетворяет свободному уравнению Дирака (5.25), то можно записать

$$\partial_0 e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma_0 = \nabla e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \gamma - e^{ip'x} \bar{u}_{p'} m/i.$$

С помощью интегрирования по частям можно перенести оператор  $\nabla$  на матричный элемент, что даст дополнительный знак минус. Таким образом,

$$\begin{aligned} Q(p', k' | p, k) &= \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \left\{ -\gamma^k \nabla_k - \frac{m}{i} + \gamma^0 \partial_0 \right\} \times \\ &\times \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle = i \left( \frac{m}{\omega_{p'}} \right)^{1/2} \int dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \left\{ -i\gamma^\mu \partial_\mu + m \right\} \times \\ &\times \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle. \end{aligned}$$

Определив оператор Дирака  $\mathcal{D}$  и оператор источника  $\chi$ , соответствующий интерполирующему полю  $\psi$ , равенством

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \equiv \mathcal{D}\psi \equiv \chi \quad (5.37)$$

и выполнив интегрирование по  $x$ , окончательно получим

$$Q(p', k' | p, k) = i(2\pi)^4 \delta(p' + k' - p - k) \times \\ \times (m/\omega_{p'})^{1/2} \bar{u}_{p'} \langle k' | \chi(0) | pk, in \rangle. \quad (5.38)$$

Следует отметить появление и расположение в соотношении (5.38) спинора  $\bar{u}_{p'}$ .

Записав опять

$$Q(p', k' | p, k) = i(m/\omega_{p'})^{1/2} dx e^{ip'x} \bar{u}_{p'} \mathcal{D}_x \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle,$$

будем свертывать падающий протон. Обозначив для удобства

$$M \equiv \langle k' | \psi(x) | pk, in \rangle,$$

как и выше, получим

$$M = (m/\omega_p)^{1/2} \int_{y_0 \rightarrow -\infty} dy \langle k' | \psi(x) \bar{\psi}(y) | k \rangle \gamma_0 u_p e^{-ipy}.$$

Заметим на будущее, что спинорные индексы в произведении  $\bar{\psi} \gamma_0 u_p$  должны быть свернуты. Мы будем следовать здесь только процедуре с использованием хронологического произведения. Очевидно, произведение  $\psi(x) \bar{\psi}(y)$  можно заменить на  $T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\}$ , где теперь  $T$ -произведение включает и знак «-», характеризующий ферми-поля, т. е.

$$T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\} \equiv \{\theta(x-y) \psi(x) \bar{\psi}(y) - \theta(y-x) \bar{\psi}(y) \psi(x)\}.$$

Тогда

$$M = - (m/\omega_p)^{1/2} \int dy \frac{\partial}{\partial y_0} \{ \langle k' | T\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\} | k \rangle \gamma_0 u_p e^{-ipy} \} - \\ - (m/\omega_p)^{1/2} \int_{y_0 \rightarrow +\infty} dy \langle k' | \bar{\psi}(y) \psi(x) | k \rangle \gamma_0 u_p e^{-ipy}.$$

Второй (компенсирующий) член равен просто нулю, т. е.

$$-\langle k' | b_p^*(out) \bar{\psi}(x) | k \rangle = 0,$$

ибо оператор  $b_p^*$ , действуя налево, уничтожает состояние  $\langle k' |$ , которое можно рассматривать как состояние  $\langle k', out |$ . В первом члене осуществим интегрирование аналогично тому, как это делалось выше, и найдем

$$M = i(m/\omega_p)^{1/2} \int dy \langle k' | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_y u_p e^{-ipy},$$

где, по определению,

$$\overline{\mathcal{D}} \equiv (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m). \quad (5.39)$$

Подставляя выражение для  $M$  в формулу для  $Q$ , получаем окончательно (с полностью выписанными спинорными индексами)

$$Q(p', k' | p, k) = i^2 \left[ \frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}} \right]^{1/2} \int dx dy e^{ip'x} \bar{u}_{p'}^\alpha \times \\ \times \{ \mathcal{D}_x^{\alpha\alpha'} \langle k' | T \{ \psi^{\alpha'}(x) \bar{\psi}^{\beta'}(y) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_y^{\beta\beta'} \} u_p^\beta e^{-ipy}. \quad (5.40)$$

Теперь рассмотрим процесс (5.36), свертывая два антифермиона. Поскольку этот процесс теперь хорошо нам знаком, мы рассмотрим его кратко:

$$\langle \bar{p}', k', out | \bar{p}k, in \rangle = (m/\omega_{\bar{p}'})^{1/2} \int_{x_0 \rightarrow +\infty} dx \times \\ \times \langle k' | \bar{\psi}_{out}(x) | \bar{p}k, in \rangle \gamma_0 v_{\bar{p}'} e^{i\bar{p}'x} = \langle \bar{p}'k', in | \bar{p}, k, in \rangle + \\ + i(m/\omega_{\bar{p}'})^{1/2} \int dx \langle k' | \bar{\psi}(x) | \bar{p}k, in \rangle \overline{\mathcal{D}}_x v_{\bar{p}'} e^{i\bar{p}'x}.$$

Обозначив второй член  $R(\bar{p}', k' | \bar{p}, k)$ , получим (вновь явно выписывая спинорные индексы)

$$R(\bar{p}', k' | \bar{p}, k) = i^2 \left[ \frac{m^2}{\omega_{\bar{p}'} \omega_{\bar{p}}} \right]^{1/2} \int dx dy e^{-i\bar{p}y} \times \\ \times \bar{v}_{\bar{p}'}^\alpha \{ \mathcal{D}_y^{\alpha\alpha'} \langle k' | T \{ \psi^{\alpha'}(y) \bar{\psi}^{\beta'}(x) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_x^{\beta\beta'} \} v_{\bar{p}}^\beta e^{i\bar{p}'x}. \quad (5.41)$$

Сравнение формул (5.40) и (5.41) позволяет установить связывающее их перекрестное соотношение. Присутствие в формулах спиноров  $\bar{u}$ ,  $u$  и  $\bar{v}$ ,  $v$  делает это соотношение более сложным, чем аналогичное соотношение для бозонов. Усложнения можно свести к минимуму, записав произвольный матричный элемент, относящийся к фермионам или антифермионам, в стандартной форме прямых произведений  $4 \times 4$ -матриц Дирака, расположенных следующим образом. Они вставляются

между свободными классическими спинорами  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ , соответствующими фермионам в бра-векторе состояния и антифермионам в кет-векторе, с одной стороны, и спинорами  $u$  и  $v$ , соответствующими фермионам в кет-векторе состояния и антифермионам в бра-векторе, с другой. Естественно, что спинорный индекс каждого спинора  $\bar{u}_p$  или  $\bar{v}_p$  свернут (посредством оператора  $\mathcal{D}$ ) со спинорным индексом одного из операторов поля в матричном элементе. Если, например, индекс  $p$  в спиноре  $\bar{u}_p$  входит в интеграл Фурье в виде  $\exp(ipx)$ , то правильным оператором поля, который следует свертывать с  $\bar{u}_p$ , будет тот, у которого пространственно-временной аргумент равен  $x$ . Поскольку это условие отождествляет однозначно спиноры для любого процесса, то матричный элемент для этого процесса можно представить с равным успехом в виде соответствующего произведения  $4 \times 4$ -матриц Дирака. В этом смысле информация, содержащаяся в амплитудах  $Q$  и  $R$ , может быть сосредоточена соответственно в матрицах

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}(p', k' | p, k) &\equiv i^2 \left[ \frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}} \right]^{1/2} \int dx dy e^{ip'x} \times \\ &\times \mathcal{D}_x \langle k' | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_y e^{-ipy} \\ \text{и} \\ \mathbf{R}(\bar{p}', k' | \bar{p}, k) &\equiv i^2 \left[ \frac{m^2}{\omega_{\bar{p}} \omega_{\bar{p}'}} \right]^{1/2} \int dx dy e^{-ip\bar{y}} \times \\ &\times \mathcal{D}_y \langle k' | T \{ \psi(y) \bar{\psi}(x) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_x e^{ip'x}. \end{aligned} \right\} (5.42)$$

В матрице  $\mathbf{R}$  переобозначим переменные интегрирования  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\bar{p}', k' | \bar{p}, k) &= i^2 \left[ \frac{m^2}{\omega_{\bar{p}} \omega_{\bar{p}'}} \right]^{1/2} \int dx dy e^{-ipx} \times \\ &\times \overline{\mathcal{D}}_x \langle k' | T \{ \psi(x) \psi(\bar{y}) \} | k \rangle \overline{\mathcal{D}}_y e^{ip'y}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Тогда сравнение формул (5.42) и (5.43) приводит к перекрестному соотношению

$$\mathbf{Q}(p', k' | p, k) = \mathbf{R}(-p, k' | -p', k). \quad (5.44)$$

В качестве упражнения предоставляем читателям перевести соотношение (5.44) на язык переменных



Манделстама  $s_i$ , а также установить связь амплитуд  $Q$  и  $R$  с амплитудой процесса аннигиляции

$$p + \bar{p} \rightarrow k + k'. \quad (5.45)$$

Следует несомненно отметить тот факт, что амплитуды  $Q$  и  $R$  характеризуются проекциями спина дираковых частиц; наоборот, матрицы  $Q$  и  $R$  не имеют подобных индексов, а вместо этого имеют обычные спинорные индексы. Конечно, если известна, скажем, матрица  $Q$ , то амплитуды  $Q$  можно получить из формулы

$$Q(s'p', k' | sp, \underline{k}) = \bar{u}_{s', p}^\alpha Q^{\alpha\beta}(p', k' | p, k) u_{s, p}^\beta,$$

где слева выписаны явно спиновые индексы  $s'$  и  $s$  (выше их объединяли с импульсными индексами). В качестве упражнения по технике дираковых матриц читателю предоставляется возможность найти способ построения матрицы  $Q$  по амплитудам процессов (5.35), (5.36) и (5.45).

## Глава 6

### ПЕРЕХОД К ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ПОЛЕЙ

#### § 6.1. ФУНКЦИИ ГРИНА

Рассмотрим две взаимосвязанные проблемы:

- 1) решение однородного (свободного) уравнения поля с заданными граничными условиями;
- 2) решение неоднородного уравнения поля с фиксированными классическими ( $c$ -числовыми) источниками.

Проблема решения свободного уравнения тривиальна, поскольку каждое нормальное колебание распространяется независимо от других колебаний. Тем не менее удобно иметь в своем распоряжении некое формальное решение, выражающееся в замкнутой форме через граничные условия. Причем на сей раз несущественно, является ли поле оператором ( $q$ -числом) или  $c$ -числом.

Как это нередко бывает, наилучший способ решения такой простой проблемы — сначала ее несколько услож-

нить и рассмотреть вместо уравнения  $(\square^2 + m^2)\varphi = 0$  неоднородное уравнение

$$(\square^2 + m^2)\varphi(x) = \delta(x - x'). \quad (6.1)$$

Решения уравнения (6.1) принято называть функциями Грина и обозначать их  $G(x - x')$ . Если скоро функция  $G$  известна, решение неоднородного уравнения

$$(\square^2 + m^2)\varphi(x) = \eta(x)$$

выражается в виде

$$\varphi(x) = \int dx' G(x - x') \eta(x'),$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой.

Чтобы понять, каким образом получить с помощью функции Грина  $G$  решения однородного уравнения, запишем соответствующие уравнения:

$$(\square^2 + m^2)\varphi(x) = 0;$$

$$(\square'^2 + m^2)G(x' - x) = \delta(x' - x)$$

и тривиальное равенство

$$\int dx' \{G(x' - x)(\square'^2 + m^2)\varphi(x') - \varphi(x') \times \\ \times (\square'^2 + m^2)G(x' - x)\} = \int dx' \varphi(x') \delta(x' - x).$$

В левой части равенства члены с  $m^2$  взаимно уничтожаются; воспользовавшись теоремой Грина, найдем

$$\varphi(x) = \int dS'_\mu G(x' - x) \overleftrightarrow{\partial}'_\mu \varphi(x'), \quad (6.2)$$

где  $S'_\mu$  — произвольная гиперповерхность (трехмерное многообразие), содержащая точку  $x$ . Если все величины на пространственной бесконечности обращаются в нуль, то

$$\varphi(x) = \left\{ \int_{\sigma_+} - \int_{\sigma_-} \right\} d\sigma'_\mu G(x' - x) \overleftrightarrow{\partial}'_\mu \varphi(x'), \quad (6.3)$$

где  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  — две пространственноподобные поверхности, причем  $\sigma_+$  соответствует более позднему, а  $\sigma_-$  — более раннему моменту времени по сравнению с  $x_0$ . Как и следовало ожидать, для уравнения второго порядка решение  $\varphi(x)$  определяется однозначно значениями  $\varphi(x')$  и  $\partial'_\mu \varphi(x')$  на этих гиперповерхностях.

Конечно, уравнение (6.1) не фиксирует функцию  $G$  единственным образом; поэтому необходимо также наложить граничные условия. Поскольку мы сформулируем их в инвариантной форме, то представляется возможность определить несколько функций Грина, пригодных для различных целей.

В частности, определим запаздывающую функцию Грина  $G_r$  следующим образом:

$$G_r(x) = 0 \text{ при } x^2 > 0, x_0 < 0. \quad (6.4)$$

Здесь важно понять, что второе из условий (6.4) инвариантно только в сочетании с первым. Аналогично можно определить опережающую функцию Грина  $G_a$ :

$$G_a(x) = 0 \text{ при } x^2 > 0, x_0 > 0. \quad (6.5)$$

Но для любых двух функций Грина  $G_1$  и  $G_2$  имеют место соотношения:

$$G_2(x-z) (\square_x^2 + m^2) G_1(x-y) = \delta(x-y) G_2(x-z);$$

$$G_1(x-y) (\square_x^2 + m^2) G_2(x-z) = \delta(x-z) G_1(x-y),$$

откуда

$$\{G_1(z-y) - G_2(y-z)\} = \left\{ \int_{\sigma_+} - \int_{\sigma_-} \right\} d\tau_\mu G_2(x-z) \overleftrightarrow{\partial}_\mu G_1(x-y). \quad (6.6)$$

Применив последнее соотношение к  $G_r$  и  $G_a$ , найдем

$$G_r(x) = G_a(-x). \quad (6.7)$$

Положим теперь в уравнении (6.3)  $G = G_a$ ; тогда, используя равенство (6.7), получаем

$$\varphi(x) = - \int_{\sigma_-} d\sigma_\mu G_r(x-x') \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi(x'),$$

т. е. обычный результат, согласно которому  $\varphi(x)$  выражается через граничные значения в моменты времени, предшествующие  $x_0$ .

Далее удобно ввести комбинации:

$$\bar{\Delta}(x) \equiv \frac{1}{2} \{G_a(x) + G_r(x)\}; \quad \bar{\Delta}(x) = \bar{\Delta}(-x).$$

Определим также функцию  $\Delta$ , которая удовлетворяет однородному уравнению Клейна—Гордона и, следовательно, не является функцией Грина:

$$\Delta(x) \equiv \{G_r(x) - G_a(x)\} = -\Delta(-x). \quad (6.8)$$

Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x_0 > 0: \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} G_r, & x_0 < 0: \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} G_a, \\ \Delta &= G_r, & \Delta &= -G_a, \\ \bar{\Delta} &= -\frac{1}{2} \Delta; & \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Нетрудно также получить равенства:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &= -\frac{1}{2} \varepsilon(x) \Delta(x); \\ G_r(x) &= \theta(x) \Delta(x); \\ G_a(x) &= -\theta(-x) \Delta(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Рассмотрим теперь поведение функции  $\Delta$  вблизи светового конуса. Проинтегрируем обе части уравнения

$$(\square^2 + m^2) G_r(x) = \delta(x)$$

по малой области, ограниченной гиперповерхностями  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  и включающей начало координат. Затем рассмотрим предельный случай, когда обе гиперповерхности  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  стремятся к одной и той же гиперповерхности  $\sigma$ , проходящей через начало координат. Тогда получим

$$\lim_{\substack{\sigma_+ \\ \sigma_-}} \int dx (\square^2 + m^2) G_r(x) = 1.$$

В этом предельном равенстве членом с  $m^2$  можно пренебречь, поскольку он, очевидно, в меньшей степени сингулярен, чем второй. (В этом можно также убедиться *a posteriori*, если только получить выражения для функций Грина в замкнутой форме.) Применяя теорему Грина к члену с  $\square^2$ , получим

$$\lim \left\{ \int_{\sigma_+} - \int_{\sigma_-} \right\} d\sigma_\mu \partial_\mu G_r = 1.$$

Но в силу определения функция  $G_r$  обращается в нуль на гиперповерхности  $\sigma_-$ , в то время как на гиперповерхности  $\sigma_+$  имеет место равенство  $G_r = \Delta$ . Таким образом, окончательно

$$\int_\sigma d\sigma_\mu \partial_\mu \Delta = 1.$$

Если гиперповерхность  $\sigma$  плоская, то в трехмерном виде

$$\int_{(x_0=0)} d\mathbf{x} \frac{\partial \Delta}{\partial x_0} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x) \Big|_{x_0=0} = \delta(\mathbf{x}). \quad (6.11)$$

В данный момент полезно установить, какой вид имеют фурье-образы функций Грина. Проще всего их можно получить, начав с преобразования Фурье для  $\delta$ -функции:

$$\left. \begin{aligned} (\square^2 + m^2) G &= \delta = (2\pi)^{-4} \int dk e^{ikx}; \\ G(x) &= (\square^2 + m^2)^{-1} \delta = (2\pi)^{-4} \int dk (-k^2 + m^2)^{-1} e^{ikx}. \end{aligned} \right\} (6.12)$$

Пространственно-временные граничные условия на функцию  $G(x)$  определяют контур в комплексной плоскости  $k_0$ , вдоль которого следует вести интегрирование, чтобы обойти полюса подынтегрального выражения при

$$k_0 = \pm (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2} = \pm \omega_{\mathbf{k}}.$$

Итак,

$$G_{r,a} = (2\pi)^{-4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int dk \frac{e^{ikx}}{-k^2 + m^2 \pm i\zeta k_0}.$$

С помощью этих фурье-образов можно представить функции  $G$  в замкнутой форме. Запишем соотношения:

$$\left. \frac{\bar{\Delta}}{2} \Delta \right\} = (2\pi)^{-4} \int dk e^{ikx} \left. \begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \frac{1}{-k^2 + m^2 + i\zeta k_0};$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta} &= (2\pi)^{-4} P \int dk e^{ikx} (-k^2 + m^2)^{-1}; \\ \Delta &= -i (2\pi)^{-3} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0). \end{aligned} \right\} (6.13)$$

Кроме того, теперь можно ввести разложение совершенно нового типа в соответствии со знаком частоты фурье-образов. В то время как умножение одной из функций  $G$  на  $\theta(x)$  или  $\varepsilon(x)$  для получения другой является локальным преобразованием, это новое разложение несомненно нелокально. Удобно определить

$$\Delta = \Delta^+ + \Delta^-;$$

тогда, используя равенство

$$\delta(k^2 - m^2) = (2\omega_k)^{-1} \{ \delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k) \},$$

получим

$$\Delta^\pm(x) = \mp i (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} (2\omega_k)^{-1} \exp(\pm i\omega_k x_0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}).$$

Наконец, определим фейнманову функцию

$$\Delta_F = G_r - \Delta^- = G_a + \Delta^+ = \bar{\Delta} + \frac{1}{2} i\Delta^{(1)},$$

где  $\Delta^{(1)}$  — однородная функция вида

$$\Delta^{(1)} = -i(\Delta^+ - \Delta^-) = (2\pi)^{-3} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2),$$

так что окончательно

$$\Delta_F = (2\pi)^{-4} \int dk \frac{e^{ikx}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

Заметим, что в то время как функции  $\Delta$ ,  $G_r$  и  $G_a$  вне светового конуса обращаются в нуль, функции  $\Delta^{(1)}$  и  $\Delta_F$  этим свойством не обладают; последнее следовало ожидать ввиду того, что их связь с функцией  $\Delta$  нелокальна. Следует отметить также равенство

$$\Delta_F = \theta(x) \Delta^- - \theta(-x) \Delta^+. \quad (6.14)$$

Обратимся теперь к вопросу о сингулярности этих функций на световом конусе. Его проще всего исследовать, выразив соответствующие функции в замкнутой форме (см. любой учебник по теории поля). В непосредственной окрестности светового конуса имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^\pm &\approx \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x) \delta(x^2) - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x) \theta(x^2) \pm \\ &\pm i \left\{ \frac{1}{4\pi x^2} - \frac{m^2}{8\pi^2} \ln \left[ \frac{m(|x^2|)^{1/2}}{2} \right] \right\}; \\ \Delta_F &\approx \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{m^2}{16\pi^2} \theta(x^2) - \\ &- i \left\{ \frac{1}{4\pi x^2} - \frac{m^2}{8\pi^2} \ln \left[ \frac{m(|x^2|)^{1/2}}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Хорошо известно, что эти инвариантные функции тесно связаны с вакуумными средними различных произведений свободных скалярных полей массы  $m$ . В качестве

упражнения мы предлагаем читателям доказать равенства:

$$\begin{aligned}\Delta(x'_a - y) &= \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle; \\ i\Delta_F(x - y) &= \langle 0 | T \{ (\varphi(x) \varphi(y)) \} | 0 \rangle; \\ \Delta^+(x - y) &= \langle 0 | [\varphi(x), \dot{\varphi}(y)] | 0 \rangle\end{aligned}$$

и установить, какие произведения или коммутаторы соответствуют функциям  $\Delta^{(1)}$ ,  $G_r$  и  $G_a$ .

Завершая обсуждение, обратим внимание на следующее решающее обстоятельство: наиболее существенные особенности типа  $\delta(x^2)$  или  $x^{-2}$  не зависят от массы. Это утверждение является просто отражением того хорошо известного факта, что в одновременных соотношениях коммутации для свободного поля

$$[\varphi(t, x), \dot{\varphi}(t, y)] = i\delta(x - y)$$

правая часть от массы не зависит.

## § 6.2. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОЛЯ

Поставим задачу решить уравнение

$$(\square^2 + m^2)\varphi(x) = \eta(x), \quad (6.16)$$

в котором  $\eta(x)$  — заданное внешнее  $c$ -числовое поле. В процессе решения этого уравнения мы приобретаем навыки для манипуляций со связанными уравнениями поля, описывающими взаимодействующие частицы. В последнем случае, правда, исчезнут оба упрощающих предположения, ибо источник  $\eta(x)$  будет оператором ( $q$ -числом) и сам будет зависеть от  $\varphi(x)$ . Тем не менее некоторые из формальных свойств решений уравнения (6.16) могут послужить иллюстрациями реальной ситуации.

Стандартное выражение для решения уравнения (6.16) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} dx' G(x - x') \eta(x') + \\ &+ \left\{ \int_{\sigma_+} - \int_{\sigma_-} \right\} d\sigma'_\mu G(x - x') \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi(x'),\end{aligned}$$

где  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  — две пространственноподобные поверхности, расположенные соответственно «выше» и «ниже»  $x_0$ .

Для простоты будем считать их плоскими, т. е. поверхностями с постоянными значениями времени. Тот факт, что предложенное выражение представляет собой решение, проверяется непосредственной подстановкой. Если в качестве  $G$  выбрать запаздывающую функцию Грина, а в качестве  $\sigma_+$  — пространственноподобную поверхность  $\sigma(x)$ , действительно проходящую через точку  $x$ , в которой ищется поле, то

$$\varphi(x) = \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} dx' G_r(x-x') \eta(x') - \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} d\sigma'_\mu G_r(x-x') \overset{\leftarrow}{\partial}'_\mu \varphi(x'). \quad (6.17)$$

Весьма поучительно проанализировать ситуацию, когда гиперповерхность  $\sigma_-$  стремится к  $t \rightarrow -\infty$ . Вопрос о судьбе второго члена в равенстве (6.17) сводится к определению

$$\varphi_{-\infty}(x) \equiv - \lim_{x'_0 \rightarrow -\infty} \int_{x'_0}^{\sigma_+} d\sigma'_\mu G_r(x-x') \overset{\leftarrow}{\partial}'_\mu \varphi(x'). \quad (6.18)$$

Заметим, что оператор  $\varphi_{-\infty}(x)$  удовлетворяет по построению *свободному* уравнению поля. Чтобы убедиться в этом, необходимо просто написать

$$(\square^2 + m^2) \varphi_{-\infty}(x) = - \lim_{x'_0 \rightarrow -\infty} \int_{x'_0}^{\sigma_+} d\sigma'_\mu \overset{\leftarrow}{\partial}'_\mu \delta(x-x') \overset{\leftarrow}{\partial}'_\mu \varphi(x').$$

Правая часть этого равенства, очевидно, обращается в нуль при  $x'_0 \rightarrow -\infty$  при любом значении  $x_0$ . Подстановка выражения (6.18) в (6.17) приводит к формуле

$$\varphi(x) = \varphi_{-\infty}(x) + \int_{x_0 \rightarrow -\infty}^{x_0} dx' G_r(x-x') \eta(x'). \quad (6.19)$$

Физический смысл этой формулы совершенно прозрачен. Поле  $\varphi(x)$  — это общее решение неоднородного дифференциального уравнения (в частных производных);  $\varphi_{-\infty}(x)$  — некое решение соответствующего однородного уравнения, второй же член в (6.19) представляет собой частное решение неоднородного уравнения. Поскольку этот второй член является  $c$ -числом, то поле  $\varphi(x)$  подчиняется во все моменты времени тем же соотношениям коммутации, что и свободное поле  $\varphi_{-\infty}(x)$ . Поэтому можно предполагать, что должен существовать



унитарный оператор, преобразующий  $\varphi_{-\infty}(x)$  в  $\varphi(x)$ . Всегда следует твердо помнить, что эта особенность является одним из следствий  $c$ -числового характера источника и ее нельзя распространить на более реальные случаи. Однако, исключая эту оговорку, все последующие замечания справедливы в той же мере и в случае настоящих связанных уравнений поля.

Используя вместо  $G_r$  функцию  $G_a$ , можно определить другое свободное поле  $\varphi_{+\infty}(x)$  вида

$$\varphi_{+\infty}(x) \equiv \lim_{x_0' \rightarrow +\infty} \int_{(x_0')} d\sigma'_\mu G_a(x - x') \overleftrightarrow{\partial}'_\mu \varphi(x'). \quad (6.20)$$

Этот весьма элементарный пример можно использовать для иллюстрации смысла асимптотического условия. Заметим, что поля  $\varphi_{\pm\infty}$  ассоциируются с полями  $\varphi_{out}$  и  $\varphi_{in}$  соответственно, в чем можно убедиться, образовав предел

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \left\{ \varphi_{-\infty}(x) + \int_{-\infty}^{x_0} dx' G_r(x - x') \eta(x') \right\}. \quad (6.21)$$

Если рассуждать весьма нестрого, то можно сказать, что при  $x_0 \rightarrow -\infty$  область интегрирования справа стягивается в точку, так что интеграл обращается в нуль и мы действительно получим соотношение

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \varphi_{-\infty}(x). \quad (6.22)$$

Аналогично при  $x_0 \rightarrow +\infty$  получим  $\varphi \rightarrow \varphi_{+\infty}$ . Допустив это на какое-то время, можно положить  $x_0 \rightarrow +\infty$  в формуле (6.19); тогда, поскольку при  $(x_0 - x_0') > 0$  имеет место  $G_r = \Delta$ , получим

$$\varphi_{+\infty}(x) = \varphi_{-\infty}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \Delta(x - x') \eta(x'). \quad (6.23)$$

Это соотношение позволяет выразить аут-поле  $\varphi_{+\infty}$  через ин-поле  $\varphi_{-\infty}$  и некое замкнутое выражение, зависящее только от источника. В рассматриваемом сверхупрощенном случае, когда источник  $\eta(x)$  задан, формула (6.23) — решение проблемы получения аут-поля по ин-полю. В более реальной ситуации источник  $\eta$  должен сам зависеть от  $\varphi$ ; тогда формула (6.23) будет просто

формальной записью интегрального уравнения для полей.

Важно понять, что, хотя формулы (6.21) и (6.22) интуитивно кажутся исключительно привлекательными, процедура их вывода весьма далека от совершенства. Если бы даже наша аргументация относительно вклада от интеграла в формуле (6.21) была справедлива, говорить в обычном смысле о «пределе» осциллирующей величины, подобной  $\varphi_{-\infty}(x)$ , нельзя. Однако эта частная проблема решается почти тривиально, если вспомнить (см. гл. 2), что асимптотическое условие следует формулировать не для самого поля  $\varphi(x)$ , а лишь для некоторой конструкции, сглаженной с нормированной функцией  $f(x)$ . Ниже будет также показано, что то же самое соображение позволит разрешить и совершенно нетривиальную трудность, связанную с интегралом в формуле (6.21). Дело в том, что если при  $x_0 \rightarrow -\infty$  источник  $\eta$  не стремится к нулю, аргументация, основанная на возможности деформации области интегрирования в точку, более недействительна. Предположим, например, что  $\eta(x) = \delta(x)$  (статический точечный источник). Тогда очевидно, что рассматриваемый интеграл не зависит от  $x_0$  и, следовательно, не может при  $x_0 \rightarrow -\infty$  обратиться в нуль.

Поэтому необходимо тщательно проследить вывод асимптотического условия в его более строгой формулировке.

Если  $f_\alpha$  — нормированное решение уравнения Клейна—Гордона, то из формулы (6.19) получим

$$\{\varphi^{f_\alpha}(x_0) - \varphi^{f_\alpha}_{-\infty}\} = i \int dx f_\alpha^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \int G_r(x-x') \eta(x') dx'.$$

Отметим, в частности, что поле  $\varphi^{f_\alpha}_{-\infty}$  от времени не зависит. Переменив порядок интегрирования, правую часть данного соотношения можно переписать в виде

$$i \int dx' \eta(x') \int dx f_\alpha^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 G_r(x-x').$$

Используя формулу

$$\int dx f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 G_r(x-x') = \theta(x-x') f^*(x'),$$

окончательно можно написать

$$\{\varphi^{f_\alpha}(x_0) - \varphi^{f_\alpha}_{-\infty}\} = i \int_{-\infty}^{x_0} dx' f_\alpha^*(x') \eta(x'). \quad (6.24)$$

Но любая функция  $f_\alpha(x)$ , нормированная посредством интегрирования по трехмерному пространству, при  $|x_0| \rightarrow \infty$  обращается в нуль; этого оказывается достаточно, чтобы гарантировать также сходимость к нулю при  $x_0 \rightarrow -\infty$  правой части (6.24) независимо от того, обрезается ли источник  $\eta(x)$  при больших временах или нет. Таким образом,

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \varphi^{f_\alpha}(x_0) = \varphi_{-\infty}^{f_\alpha}, \quad (6.25)$$

что в точности совпадает с асимптотическим условием. С другой стороны, необходимость формулировать его не для самих операторов, а только для их матричных элементов в данной проблеме не проявляется.

В заключение в качестве особенно яркой иллюстрации можно рассмотреть случай статического точечного источника. Обозначим упомянутый выше интеграл  $\mathcal{Y}(x_0)$ . Тогда

$$\mathcal{Y}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx' f_\alpha^*(x') \delta(x') = \int_{-\infty}^{x_0} dx' f_\alpha^*(x', 0). \quad (6.26)$$

Но функция  $f$  нормирована, так что можно записать

$$f^*(x) = \int dk \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{-ikx} (2k_0)^{-1/2};$$

$$\int dk |\tilde{f}(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (6.27)$$

Подставляя (6.27) в (6.26) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mathcal{Y}(x_0) = \int dk \frac{\tilde{f}(\mathbf{k})}{(2k_0)^{1/2}} \cdot \frac{1}{-ik_0} e^{-ik_0 x_0} \Big|_{x_0 \rightarrow -\infty}^{x_0}. \quad (6.28)$$

Нижний предел этого интеграла представляет собой фурье-образ нормируемой функции в пределе бесконечных частот; поэтому он строго определен и обращается в нуль в силу леммы Римана—Лебега, а тем самым при  $x_0 \rightarrow -\infty$  обращается в нуль  $\mathcal{Y}(x_0)$ .

### § 6.3. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕГО ПОЛЯ ПО S-МАТРИЦЕ

Примечательно, что некоторые из важных уравнений последнего раздела воспроизводятся вновь при более реалистическом подходе к построению теории поля взаимодействующих частиц на основе асимптотического

условия и формализма  $S$ -матрицы. Правда, смысл многих соотношений в этом новом контексте будет совсем иным. В нашем распоряжении есть все необходимое, чтобы повторить с этой точки зрения проведенное выше рассуждение и проиллюстрировать как сходство, так и различие.

Выше мы исходили из уравнения поля

$$(\square^2 + m^2)\varphi(x) = \eta(x) \quad (6.29)$$

в предположении, что функция источника  $\eta(x)$  задана явно, а  $S$ -матрица вычислялась через  $\eta(x)$  в результате решения этого уравнения.

Теперь, чтобы придать уравнению поля обычную форму, начнем все заново, положив в основу асимптотическое условие и постулировав существование  $S$ -матрицы, заданной аксиоматически. Запишем две эквивалентные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{out}(x) &= S^{-1}\varphi_{in}(x)S; \\ \varphi_{out}(x) &= \varphi_{in}(x) + S^{-1}[\varphi_{in}(x), S]. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

$S$ -матрицу можно разложить по полям  $\varphi_{in}$ , поскольку последние образуют полный набор операторов. Удобно представить эту зависимость в следующей форме:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n C_n(x_1, \dots, x_n) : \varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_n) : \quad (6.31)$$

Здесь двойное двоеточие обозначает нормальное произведение, а выражение в целом не даёт ничего нового, будучи просто определением коэффициентных функций  $C_n$ .

Для краткости введем два определения:

$$W_n \equiv : \varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_n) : \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial W_n}{\partial \varphi_{in}(x_i)} \equiv : \varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_{i-1}) \varphi_{in}(x_{i+1}) \dots \varphi_{in}(x_n) : \quad (6.33)$$

Непосредственно видно, что

$$\begin{aligned} [\varphi_{in}(x), W_n] &= \sum_{j=1}^n [\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(x_j)] \partial W_n / \partial \varphi_{in}(x_j) = \\ &= i \sum_{j=1}^n \Delta(x - x_j) \partial W_n / \partial \varphi_{in}(x_j). \end{aligned}$$

Тогда

$$[\varphi_{in}(x), S] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i(-i)^n}{n!} \sum_{k=1}^n \int dx_1 \dots dx_n \Delta(x - x_k) C_n(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \partial W_n / \partial \varphi_{in}(x_k).$$

Без потери общности выражения  $C_n$  и  $W_n$  можно выбрать симметричными по своим аргументам. Переставляя немые индексы, получаем

$$[\varphi_{in}(x), S] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int dy \Delta(x - y) \int dx_2 \dots dx_n \times \\ \times C_n(y, x_2, \dots, x_n) \partial W_n / \partial \varphi_{in}(y) = \int dy \Delta(x - y) \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n C_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) : \varphi_{in}(x_1) \dots \varphi_{in}(x_n) : \right\}. \quad (6.34)$$

Сравнение с выражением (6.31) показывает, что комбинация в фигурной скобке справа — это просто функциональная производная  $S$ -матрицы по  $\varphi_{in}(y)$ ; следовательно, можно написать

$$[\varphi_{in}(x), S] = \int dy \Delta(x - y) i \delta S / \delta \varphi_{in}(y). \quad (6.35)$$

Подставляя (6.35) в (6.30), находим

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) + \int dy \Delta(x - y) i \{ S^{-1} \delta S / \delta \varphi_{in}(y) \}. \quad (6.36)$$

Определяя оператор источника  $\eta(y)$  равенством

$$\eta(y) = i S^{-1} \delta S / \delta \varphi_{in}(y), \quad (6.37)$$

получаем

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) + \int dy \Delta(x - y) \eta(y). \quad (6.38)$$

Уравнение (6.38) по форме напоминает уравнение (6.23). Однако по смыслу они различны: уравнение (6.38) было выведено исключительно на основе аксиоматического подхода в сочетании с допущением о возможности представления (без потери общности)  $S$ -матрицы в форме (6.31) (согласно гипотезе о том, что поля образуют полный набор операторов.)

Исходя из уравнения (6.38), определим теперь оператор интерполирующего поля в виде

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) - \int dy G_r(x-y) \eta(y). \quad (6.39)$$

По построению поле  $\varphi(x)$  удовлетворяет как уравнению поля (6.29), так и асимптотическому условию в его строгой форме. Уравнение (6.39) — двойник уравнения (6.19).

Отметим, что мы ничего не сказали о соотношениях коммутации для поля  $\varphi(x)$ . Коль скоро оператор  $\eta$  выражается через  $\varphi$ , требование локальности (аксиома IV или более конкретные одновременные соотношения коммутации) приводит к некоторым ограничениям на коэффициентные функции  $C_n$ . Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

В завершение этого раздела проанализируем, насколько полно задание  $S$ -матрицы определяет оператор источника  $\eta$ , а следовательно, и интерполирующее поле в соответствии с соотношением (6.39). Решение этого вопроса, в свою очередь, зависит от того, насколько полно коэффициентные функции  $C_n(x)$  в (6.31) определяются заданием  $S$ -матрицы. Обсуждение этой проблемы удобнее проводить в импульсном пространстве.

Определим фурье-образ  $\tilde{C}_n$  функции  $C_n$  равенством

$$C_n(x) = (2\pi)^{-5n/2} \int dk_1 \dots dk_n \delta\left(\sum_1^n k_i\right) C_n(k_1, \dots, k_n) \times \\ \times \exp\left\{i \sum_1^n k_j x_j\right\}. \quad (6.40)$$

В этом соотношении уже проявляются ограничения на  $C_n(x)$ , вытекающие из требования трансляционной инвариантности  $S$ -матрицы, которое заключается в условии

$$S = e^{-iPa} S e^{iPa}.$$

Чтобы убедиться в этом, подставим выражение (6.31) в правую часть последнего равенства и применим формулу (2.39) к оператору  $\varphi_{in}$  (на  $c$ -числовые коэффициентные функции операторы импульса  $P$ , разумеется, не действуют, а коммутируют с ними). Тогда в сокращенных обозначениях

$$S = 1 + \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int dx C_n(x) : \varphi_{in}(x+a) : =$$

$$= 1 + \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int dx C_n(x-a) : \varphi_{in}(x) : \quad (6.41)$$

где вторая строчка следует из первой после замены переменных интегрирования. Сравнивая равенства (6.41) и (6.31), убеждаемся в том, что функции  $C_n$  можно выбрать трансляционно инвариантными, и это в точности соответствует информации, содержащейся в множителе  $\delta(\Sigma k)$  в преобразовании Фурье (6.40).

Подставляя формулу (6.40) и стандартное разложение поля (2.20) в правую часть формулы (6.31), получаем выражение

$$S = 1 + \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int dk_1, \dots, dk_n \tilde{C}_n(k_1, \dots, k_n) \times \\ \times \delta(\sum k) \delta(k_1^2 - m^2) \dots \delta(k_n^2 - m^2) : \varphi_{in}(k_1) \dots \varphi_{in}(k_n) : \quad (6.42)$$

из которого с очевидностью следует, что  $S$ -матрица определяет коэффициентные функции  $\tilde{C}_n$  только тогда, когда все их аргументы лежат на энергетической поверхности. Различный выбор функций  $\tilde{C}_n$  вне энергетической поверхности оставляет  $S$ -матрицу без изменения.

В то же время оператор  $\delta S / \delta \varphi_{in}(y)$ , определенный формулами (6.34) и (6.35), зависит от поведения функций  $\tilde{C}_n$  вне энергетической поверхности. Чтобы убедиться в этом, необходимо только выписать фурье-образ этого оператора, который в силу соотношений (2.20) и (6.40) имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_{in}(y)} = \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int dle^{iy} \int dk_1 \dots dk_n \delta(l + \sum k) \times \\ \times \tilde{C}_{n+1}(l, k_1, \dots, k_n) \delta(k_1^2 - m^2) \dots \delta(k_n^2 - m^2) : \varphi_{in}(k_1) \dots \varphi_{in}(k_n) : \quad (6.43)$$

Отсутствие в этом выражении множителя  $\delta(l^2 - m^2)$  явным образом подтверждает зависимость оператора  $\delta S / \delta \varphi_{in}(y)$  от поведения функций  $\tilde{C}_n$  вне энергетической поверхности. Поэтому из формул (6.37) и (6.39) следует, что ни оператор источника  $\eta(x)$ , ни интерполирующее поле  $\varphi(x)$  не определяются однозначно заданием  $S$ -матрицы. [Нетрудно убедиться, что никаких противоречий не возникает, ибо в силу (6.38) всякая зависимость оператора источника  $\eta(x)$  от членов вне энергетической поверхности не отражается на поле  $\varphi_{out}$ .]

Вопрос о том, является ли недостатком теории подобное отсутствие взаимно однозначного соответствия между  $S$ -матрицей и интерполирующим полем,— в значительной мере дело вкуса. Для тех, кто привык к обычному лангранжевому формализму, произвол такого типа не должен оказаться неожиданным. Нечто сродни этому факту составляет содержание различных теорем эквивалентности, согласно которым одну и ту же  $S$ -матрицу можно получить из нескольких различных лангранжианов, приводящих к различному пространственно-временному поведению оператора поля. Отметим, что как в теории  $S$ -матрицы, так и в лагранжевом формализме информацию о спектре масс следует вводить независимо. Это обстоятельство может иметь некоторое отношение к обсуждаемой проблеме: если бы существовал способ вычисления спектра масс с помощью нескольких фундаментальных констант, то по крайней мере в рамках лангранжевого формализма можно было бы различать некоторые «эквивалентные» лангранжианы.

С точки зрения теории  $S$ -матрицы единственное определение интерполирующего поля соответствовало бы единственному продолжению  $S$ -матрицы вне энергетической поверхности. Действительно, предположим, что существует некий физический принцип, позволяющий определить, исходя из действительной  $S$ -матрицы, каковы должны были быть элементы  $S$ -матрицы, если бы массы частиц принимали различные нефизические значения. Это соответствовало бы возможности определения коэффициентных функций  $C_n$  вне энергетической поверхности, а следовательно, и оператора интерполирующего поля  $\phi$ . В свете распространенных попыток строить теорию элементарных частиц исключительно на основе определенным образом постулированных аналитических свойств элементов  $S$ -матрицы выводы представляются весьма многообещающими. Если постулируемые аналитические свойства отвечают единственному продолжению в область нефизических значений масс, то результирующая теория будет автоматически эквивалентна некой теории поля, поскольку в этом случае появляется возможность *сконструировать* единственный оператор поля, подчиняющийся асимптотическому условию и уравнению поля обычного вида. Сейчас не решен еще до конца вопрос, какие полезные свойства элементов  $S$ -матрицы можно извлечь из требования, согласно



которому построенный из этих элементов оператор поля должен подчиняться условию локальности (аксиома IV). В то же время не ясно, можно ли, а если можно, то в каком смысле ввести условие «причинности» непосредственно в чистой теории S-матрицы.

#### § 6.4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛАГРАНЖИАНАХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

Вплоть до этого момента в ходе обсуждения мы тщательно избегали сколько-нибудь пространных замечаний о лагранжевой формулировке теории поля. При этом мы надеялись внушить читателям, что предшествующее изложение в основных своих аспектах не зависит от каких-либо предубеждений относительно лагранжианов. В данный момент уместно выяснить, каким образом можно установить связь между предшествующим изложением, основанным на асимптотических полях, с одной стороны, и обычным лагранжевым формализмом, с другой. Предполагается, что читатель уже в какой-то степени знаком с последним, включая ковариантную теорию возмущений и перенормировочную процедуру.

Для свободных полей (например, для нейтрального скалярного поля) можно написать

$$L = -\frac{1}{2} \{ \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \},$$

отождествив постоянную  $m$  с массой соответствующей частицы. Это выражение приемлемо, поскольку действительно можно сконструировать оператор полного числа частиц и привести его к диагональному виду одновременно с оператором полной энергии — импульса. При этом оказывается, что поле  $\varphi$  линейно по операторам рождения и уничтожения, а  $m$  отвечает массе одночастичных состояний. (Эти состояния — единственные, кроме вакуума, состояния с дискретной массой).

В теории с взаимодействием, например в теории взаимодействующих спинорного и нейтрального псевдоскалярного полей, нельзя установить ни одно из этих упрощающих положений. Выпишем лагранжиан вида

$$L = -\bar{\psi}_0 (\gamma_\mu \partial_\mu + M_0) \psi_0 - \frac{1}{2} \{ \partial_\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + m_0^2 \varphi_0^2 \} - \\ - i g_0 \bar{\psi}_0 \gamma_5 \psi_0 \varphi_0. \quad (6.44)$$

Использование индексов здесь просто означает, что в выражение (6.44) входят некоторые формально написанные операторы. Начиная с этого момента канонический формализм диктует ряд решающих шагов, которые необходимо сделать. Прежде всего нам хотелось бы иметь квантовую теорию. Поэтому следует ввести постоянную Планка через посредство соотношений коммутации (или антикоммутации). Тогда для бозе-поля

$$[\varphi_0(x), \dot{\varphi}_0(x')] \Big|_{x_0=x'_0} = -i\delta(x-x')\hbar. \quad (6.45)$$

По аналогии со строгой процедурой найдем, по крайней мере формально, уравнения поля, тензор энергии — импульса и т. п. В этом случае предположение о полноте набора полей является само собой разумеющимся.

В квантовой теории, основанной на лагранжевом формализме, имеется ряд жестких ограничений; поэтому при попытке использовать ее для описания системы взаимодействующих частиц мы сталкиваемся с многочисленными неопределенностями. Чтобы такое описание стало возможным, необходимо потребовать выполнения нескольких условий. Прежде всего спектр оператора полной массы должен содержать вакуум, за которым следуют одночастичные состояния с дискретными массами, а за ними — континуум многочастичных состояний. Далее, решения операторных ( $q$ -числовых) уравнений поля должны удовлетворять условию, которое тесно примыкает к асимптотическому условию и которое мы будем называть условием асимптотического разделения: если физическая система удалена достаточно далеко впредь или вспять по времени, то она в конце концов разделится на свободно движущиеся стабильные частицы. Иными словами, должны существовать асимптотические операторы числа частиц и они должны быть наблюдаемыми в том смысле, что для них имеются полные наборы собственных векторов. Однако для теории, фиксированной формулами (6.44) и (6.45), ни одна из этих особенностей не поддается проверке.

Кроме того, с точки зрения лагранжева формализма не ясно, является ли условие асимптотического разделения следствием самого этого формализма или оно представляет собой логически независимое условие, которое следует накладывать на решения уравнений поля. Поскольку уравнения поля — это дифференциальные

уравнения в частных производных, то не столь уж вероятно, что они не в состоянии фиксировать проблему, пока не наложены какие-то граничные условия. Обычное же асимптотическое условие ассоциируется именно с граничными условиями. Задача еще более усложняется ввиду очевидной взаимозависимости между асимптотическим условием и видом спектра масс, которые должны быть, по крайней мере, совместимы, хотя они могут и не быть следствием одно другого.

Если даже предположить, что все эти трудности в лагранжевом формализме в принципе преодолимы, остается еще несколько проблем, которые практически исключительно трудно разрешить. Прежде всего мы допускаем, что рассматриваемая теория во всяком случае совместима с наблюдаемым спектром масс; но в то же время мы не имеем ни одного способа расчета наблюдаемых масс и констант связи через параметры, входящие в лагранжиан. Это побуждает нас к попыткам развить лагранжев формализм таким образом, чтобы по возможности наиболее полно использовать наблюдаемые значения указанных констант. Итак, сначала перепишем выражение (6.44) в виде

$$L = -\bar{\psi}_0 (\gamma_\mu \partial_\mu + M) \psi_0 - \frac{1}{2} \{ \partial_\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + m^2 \varphi_0^2 \} - \\ - i g_0 \bar{\psi}_0 \gamma_5 \psi_0 \varphi_0 - \delta M \bar{\psi}_0 \psi_0 - \frac{1}{2} \delta m^2 \varphi_0^2, \quad (6.46)$$

где  $M$ ,  $m$  — наблюдаемые массы, а неизвестные величины  $\delta M$  и  $\delta m^2$  определяются равенствами

$$\delta M = M_0 - M; \quad \delta m^2 = m_0^2 - m^2. \quad (6.47)$$

Далее, хотя по предположению теория и согласуется с асимптотическим условием, *a priori* не известен характер связи между интерполирующими полями  $\psi$  и  $\varphi$ , удовлетворяющими этому условию, с одной стороны, и операторами полей  $\psi_0$ ,  $\varphi_0$ , которые входят в выражение (6.46), с другой. Поэтому естественна тенденция переписать лагранжиан по возможности в наиболее знакомых терминах; в соответствии с этим определим

$$\psi = Z_2^{-1/2} \psi_0; \quad \varphi = Z_3^{-1/2} \varphi_0, \quad (6.48)$$

где  $Z_2$  и  $Z_3$  — неизвестные постоянные. Пропорциональная зависимость в формулах (6.48) представляет собой

простейшую возможную связь между  $\psi$  и  $\psi_0$  и между  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , которая не является явным абсурдом. Очевидно, эти операторы, вообще говоря, нельзя просто приравнять, ибо масштабные множители полей  $\psi_0$  и  $\varphi_0$  уже фиксированы через постоянную Планка с помощью канонических соотношений коммутации (6.45) и т. д., в то время как масштабные множители полей  $\psi$  и  $\varphi$  фиксированы независимо с помощью асимптотического условия, например в форме (2.40).

В следующей главе мы увидим, что в случае взаимодействующих полей действительно невозможна ситуация, когда  $Z_2=1$ ,  $Z_3=1$ . С учетом этого из формул (6.45) и (6.48) следует, что одновременные коммутаторы интерполирующих (т. е. перенормированных) полей отличаются от соответствующих коммутаторов перенормированных полей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(x), \dot{\varphi}(x')] \Big|_{x_0=x'_0} &= -iZ_3^{-1} \delta(x-x'); \\ \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} \Big|_{x_0=x'_0} &= Z_2^{-1} \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x'). \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Поскольку правая часть равенств (6.49) отличается численным множителем от правой части соотношения (6.45) и поскольку оба эти коэффициента —  $c$ -числа, то невозможно, например, найти унитарные операторы, которые могли бы преобразовать перенормированные поля  $\psi_0$ ,  $\varphi_0$  в соответствующие перенормированные поля. Аналогично при  $Z_i \neq 1$  не может существовать никаких унитарных преобразований, связывающих асимптотические (ин- или аут-) поля, с одной стороны, и интерполирующее поле, с другой.

С учетом формул (6.47) и (6.49) выражение для  $L$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L = & -Z_2 \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + M) \psi - \frac{1}{2} Z_3 \{ \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \} - \\ & - i g_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi - Z_2 \delta M \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} Z_3 \delta m^2 \varphi^2. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Остаются два неясных вопроса. Во-первых, можно ли гарантировать, по крайней мере в принципе, возможность соответствующих расчетов, исходя из значений постоянных в формуле (6.50). Во-вторых, какова зависимость между экспериментальными величинами и константой связи  $g_0$ ?

Единственный способ получить пригодный ответ на первый вопрос — рассмотреть итерационную процедуру. Из нее следует, что выражение (6.50) логически неполно, но может быть сделано полным, если к нему добавить еще один член вида  $-\lambda Z_3^2 \varphi^4$  с подходящей константой  $\lambda$ . С другой стороны, если бы вместо связи  $\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$  была использована (неперенормируемая) связь с производными вида  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi$ , то, согласно теории возмущений, для предсказания результатов любого эксперимента необходимо было бы дополнительно ввести бесконечное число подходящих констант.

Второй вопрос можно решить относительно прямым путем. Если экспериментальное значение константы связи  $g$  определено некоторым подходящим способом (сравни с моделью Ли, гл. 17), то необходима еще одна произвольная константа  $Z_1$ , которую мы введем соотношением

$$g = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} g_0. \quad (6.51)$$

Тогда лагранжиан принимает следующий окончательный вид:

$$L = -Z_2 \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + M) \psi - \frac{1}{2} Z_3 \{ \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \} - \\ - i g Z_1 \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi - \lambda Z_3^2 \varphi^4 - Z_2 \delta M \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} Z_3 \delta m^2 \varphi^2. \quad (6.52)$$

Итерационная процедура, основанная на выражении (6.52), оказывается самосогласованной. Это означает, что существует вполне определенная схема любого расчета, в частности расчета поправок как к спектру масс, так и к асимптотическому условию. В соответствии с этой схемой константы в выражении (6.52) должны быть подобраны таким образом, чтобы в любом фиксированном порядке по константе связи указанные поправки тождественно обращались бы в нуль.

В настоящем параграфе мы пока явно не затрагивали вопроса о хорошо известных расходимостях в релятивистской теории возмущений, хотя присутствие члена  $\lambda\varphi^4$  в лагранжиане перенормируемой мезонной теории и бесконечного числа подходящих параметров в лагранжианах неперенормируемых теорий продиктовано как раз необходимостью исключить из амплитуд перехода расходящиеся выражения. Мы умолчали об

этом намеренно, чтобы подчеркнуть, что при существующем уровне знаний проблема перенормировки представляется в принципе не зависящей от проблемы расходимостей, хотя в релятивистской теории они всегда практически тесно переплетаются. Единственной нашей целью было бы показать, что наличие контрчленов перенормировки массы и волновой функции как таковых является неотъемлемой особенностью всякой теории, основанной на лагранжевом формализме.

В последующих главах мы еще обсудим существо вопроса о фактической расходимости констант перенормировки. Эти две разные стороны проблемы могут одновременно иметь значение при установлении числа независимых подходящих параметров, которые должна включать всякая удовлетворительная теория. Теория возмущений выделяет некоторый класс теорий, именно перенормируемые теории, в которых число таких констант конечно и определяется единственным образом. В данный момент все еще остается неясным, имеет ли смысл выделение класса перенормируемых теорий вне рамок теории возмущений или нет.

## Глава 7

### ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ

В приложениях теории поля к проблемам расчета формфакторов и анализу процессов распада центральную роль играют вакуумные средние произведения двух и трех операторов поля и их фурье-образы; их часто называют двух- и трехточечными функциями. Кроме такого непосредственного применения эти функции служат также важным средством исследования некоторых основных особенностей теорий поля вообще. В этой книге делается упор на конкретные вопросы и поэтому не предпринимается никаких попыток дать исчерпывающие комментарии к более абстрактным аспектам теории; некоторые из них рассматривались в простейшем виде в моей предыдущей книге (Barton, 1963)\*. В гл. 3 уже подчеркивался контраст между тем вниманием, которое уделяется двух- и

---

\* См. гл. 8, 17—19 настоящего издания.— *Прим. перев.*

трехточечным функциям в теории поля, и тем сравнительным пренебрежением ими в теории чистой S-матрицы, в которой тот факт, что они не приводят к отличным от нуля матричным элементам, сразу отодвигает их в лучшем случае на вторые роли.

Настоящая глава посвящена двухточечным функциям. Они содержат в себе информацию о константе перенормировки поля  $Z_3$ , которая входит в одновременной коммутатор для интерполирующего поля (см. гл. 3), и являются первым примером доказанного дисперсионного представления. Сразу предупреждаем, что в дальнейшем наш подход к проблемам сходимости будет представлять собой многоступенчатую лестницу усовершенствований, так что некоторые из первоначально написанных соотношений в дальнейшем могут оказаться модифицированными. Мы используем также это первое знакомство с дисперсионными интегралами как повод для обсуждения математической теоремы, которая может служить полезным орудием исследования подобных проблем сходимости вообще.

## § 7.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕМАНА И КОНСТАНТЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ПОЛЯ

Возвращаясь к рассмотрению самодействующих нейтральных скалярных частиц, будем следовать работе Лемана (Lehmann, 1954), в которой исследовалось вакуумное среднее обычного произведения двух интерполирующих полей:

$$\Delta^{(+)\prime}(x-y) \equiv \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle. \quad (7.1)$$

В таких обозначениях уже учтен тот факт, что в силу лоренцевой ковариантности правая часть равенства зависит только от  $x-y$ . Чтобы убедиться в этом, определим унитарный оператор  $U(\Lambda, a)$ , осуществляющий преобразование Лоренца  $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$ , и запишем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | U^{-1}(\Lambda, a) U(\Lambda, a) \varphi(x) \times \\ &\times U^{-1}(\Lambda, a) U(\Lambda, a) \varphi(y) U^{-1}(\Lambda, a) U(\Lambda, a) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку вакуум инвариантен, т. е.

$$U | 0 \rangle = | 0 \rangle; \quad \langle 0 | U^{-1} = \langle 0 |,$$

а в силу закона преобразования поля имеем

$$U(\Lambda, a) \varphi(x) U^{-1}(\Lambda, a) = \varphi(\Lambda x + a),$$

то в результате получаем

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(\Lambda x + a) \varphi(\Lambda y + a) | 0 \rangle.$$

Поэтому функция  $\Delta^{(+)'}$  может зависеть только от лоренц-инвариантных аргументов, образованных из  $x$  и  $y$ ; такими инвариантными комбинациями являются только  $(x-y)^2$  и в специальном случае времениподобных четырех-векторов  $x-y$  также функция  $\text{sign}(x_0-y_0)$ .

Подставим теперь в формулу (7.1) полную систему промежуточных состояний:

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = \sum_s \langle 0 | \varphi(x) | s \rangle \langle s | \varphi(y) | 0 \rangle.$$

В качестве состояний  $|s\rangle$  можно выбрать либо ин-, либо аут-состояния, либо можно положить

$$\sum_s |s\rangle \langle s| = \frac{1}{2} \sum_s \{ |s, in\rangle \langle s, in| + |s, out\rangle \langle s, out| \}.$$

Используя равенство [см. (2.39)]

$$\langle 0 | \varphi(x) | s \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | s \rangle e^{-ip_s x},$$

где  $p_s$  — четыре-импульс в состоянии  $|s\rangle$ , находим

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = \sum_s \{ \langle 0 | \varphi(0) | s \rangle^2 \exp\{-ip_s(x-y)\} \}.$$

Введем тождество

$$\sum_s = \int dp \sum_s \delta(p_s - p) \theta(p)$$

и определим

$$\sum_s \delta(p_s - p) \{ \langle 0 | \varphi | s \rangle \}^2 \theta(p) = (2\pi)^{-3} \rho(p^2). \quad (7.2)$$

В качестве тривиального упражнения читатели могут показать, что в силу ковариантности функция  $\rho$  действительно зависит только от  $p^2$ . Слева без потери общности можно вставить множитель  $\theta(p)$ , поскольку никаких состояний с отрицательной энергией  $p_0$  не существует. Тогда имеем

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = (2\pi)^{-3} \int dp \rho(p^2) \theta(p) e^{-ip(x-y)}. \quad (7.3)$$



Запишем теперь

$$\rho(p^2) = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \delta(p^2 - a^2);$$

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = (2\pi)^{-3} \int dp \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \delta(p^2 - a^2) \theta(p) e^{-ip(x-y)}.$$

Предположим, что изменение порядка интегрирования по  $p$  и  $a^2$  является законной процедурой. Вообще говоря, это будет так, если только возникающие выражения явно бессмысленны. Эта проблема более подробно будет обсуждаться ниже. Итак, формально изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \int (2\pi)^{-3} dp \cdot \theta(p) \delta(p^2 - a^2) e^{-ip(x-y)}. \quad (7.4)$$

Во внутреннем интеграле можно без труда узнать представление Фурье для функции свободного поля  $\Delta^{(+)}(x-y|a^2)$ , введенное соотношением (2.33). Тогда

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \Delta^{(+)}(x-y|a^2).$$

Это и есть представление Лемана для функции  $\Delta^{(+)'}$ . Оно позволяет представить функцию  $\Delta^{(+)'}$  в виде линейной суперпозиции соответствующих функций свободного поля  $\Delta^{(+)}$  с массой, изменяющейся от нуля до  $\infty$ , и с неотрицательной весовой функцией  $\rho$ , определенной формулой (7.2).

Аналогичные рассуждения приводят к представлениям Лемана для всех других двухточечных функций, а также для их фурье-образов; при этом спектральная функция  $\rho$  оказывается одной и той же для всех представлений. Нас будут особенно интересовать представления для вакуумного среднего коммутатора полей

$$\Delta'(x-y) = \int da^2 \rho(a^2) \Delta(x-y|a^2) \quad (7.5)$$

и для фурье-образа вакуумного среднего хронологического произведения полей

$$\Delta'_F(k^2) = (2\pi)^{-4} \int da^2 \rho(a^2) (a^2 - k^2 - i\epsilon)^{-1}. \quad (7.6)$$

Из последнего выражения, называемого функцией Фейнмана, непосредственно следует, оправдано ли изменение

порядка интегрирования в формуле (7.4) или нет. Если интеграл в формуле (7.6) сходится, т. е. если

$$\int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2)/a^2 < \infty, \quad (7.7)$$

то изменение порядка интегрирования — законная процедура, в противном случае — нет. Будем предполагать пока, что неравенство (7.7) действительно имеет место.

Вспомним выражения (2.44) (см. гл. 2) для канонических одновременных соотношений коммутации интерполирующего поля. Образовав от них вакуумные средние, сравним результат с соответствующими выражениями, вытекающими из формулы (7.5). Из соотношений (2.44) прежде всего следует равенство

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0 | [\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] | 0 \rangle &= \Delta'(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= \int da^2 \rho(a^2) \Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y} | a^2). \end{aligned}$$

Оно определено справедливо, поскольку ранее было установлено, что функция  $\Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y} | a^2)$  обращается в нуль. С другой стороны, согласно (2.44),

$$\langle 0 | [\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] | 0 \rangle = i Z_3^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

в то время как из (7.5) имеем

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial y_0} \Delta'(x - y) |_{x_0=y_0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_0} \int da^2 \rho(a^2) \Delta(x - y | a^2) |_{x_0=y_0} = i \int da^2 \rho(a^2) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial y_0} \Delta(x - y | a^2) |_{x_0=y_0} = i \int da^2 \rho(a^2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.8) \end{aligned}$$

На предпоследнем этапе мы осуществили дифференцирование по  $y_0$  под знаком интеграла; справедливость этого шага следует обсудить отдельно. На последнем же этапе была использована формула (2.31), которая в точности представляет собой стандартное соотношение коммутации для свободного поля. Сравнивая эти два результата, получаем

$$Z_3^{-1} = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2). \quad (7.9)$$

Если интеграл здесь сходится, то формула (7.9) определяет константу  $Z_3$  с помощью функции  $\rho$  через матричные элементы между физическими состояниями интерполирующего поля. Таким образом, константа  $Z_3$  не относится к числу фундаментальных параметров теории и может быть вычислена. Если же интеграл (7.9) расходится, то следует заключить, что  $Z_3=0$ . Отметим, что сходимость интеграла (7.9) не гарантируется сделанным ранее предположением (7.7). Когда интеграл (7.9) расходится, то вызывает сомнения законность дифференцирования  $\partial/\partial y_0$  под знаком интеграла в формуле (7.8). В такой ситуации используют следующий трюк. Заметим, что если бы выражение (7.9) имело смысл, то на основании сравнения с выражением (7.6) можно было бы определить константу  $Z_3^{-1}$  согласно формуле

$$Z_3^{-1} = - \lim_{k^2 \rightarrow \infty} k^2 \Delta'_F(k^2). \quad (7.10)$$

Поскольку при всех конечных значениях  $k^2$  выражение  $k^2 \Delta'_F(k^2)$  конечно [при выполнении предположения (7.7)], формула (7.10) позволяет решить вопрос о конечности или бесконечности константы  $Z_3^{-1}$  путем исследования асимптотического поведения строго определенного выражения.

В качестве упражнения по ковариантным преобразованиям Фурье предоставляем читателям возможность показать, что конечность или бесконечность константы  $Z_3^{-1}$  является просто-напросто отражением характера особенностей инвариантных функций  $\Delta'(x)$  на световом конусе. Например, вблизи точки  $x^2=0$  поведение коммутатора свободных частиц подчиняется закону

$$\Delta(x|a^2) \sim (2\pi)^{-1} \varepsilon(x) \delta(x^2) - (a^2/8\pi) \varepsilon(x) \theta(x^2). \quad (7.11)$$

Важно отметить, что основная особенность  $\varepsilon(x)\delta(x^2)$  от  $a^2$  не зависит. Поэтому у функции  $\Delta'(x)$ , заданной формулой (7.5), главная особенность будет, очевидно, того же самого типа, что и в (7.11), но с коэффициентом  $\int da^2 \rho(a^2)/2\pi$  вместо  $(2\pi)^{-1}$ , если только интеграл  $\int da^2 \rho(a^2)$  существует. В противном случае особенность функции  $\Delta'$  будет даже более сильной, чем особенность функции  $\Delta$ . Вероятно, наиболее важное следствие представления Лемана состоит в том, что вне зависимости от конкретных динамических деталей взаимодействий частиц указанная особенность функции  $\Delta'$  на световом

конусе не может быть слабее соответствующей особенности функции  $\Delta$  для свободных частиц. С точки зрения канонического формализма одновременной коммутатор (2.44) не бывает менее сингулярен, чем  $\delta$ -функция.

Аналогичная аргументация применима и к вакуумному среднему от произведения любых двух локальных операторов с той лишь разницей, что в смешанных случаях спектральная функция  $\rho$  не обязана быть положительно определенной (а в особых случаях даже вещественной). В качестве иллюстрации представим, что существуют две различные нейтральные скалярные частицы, причем обе они элементарны в смысле их соответствия независимым степеням свободы, так что смешанный канонический одновременной коммутатор их интерполирующих полей обращается в нуль, т. е.

$$[\varphi_1(t, \mathbf{x}), \varphi_2(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (7.12)$$

Тогда можно доказать, что существует представление Лемана

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(x-y) &= \langle 0 | [\varphi_1'(x), \varphi_2(y)] | 0 \rangle = \\ &= \int da^2 \rho_{12}(a^2) \Delta(x-y|a^2), \end{aligned}$$

где

$$\rho_{12}(a^2) = (2\pi)^{-3} \sum_s \langle 0 | \varphi_1(0) | s \rangle \langle s | \varphi_2(0) | 0 \rangle \delta(p_s - a).$$

Используя равенство  $\sum_s = \frac{1}{2} \left( \sum_{s, in} + \sum_{s, out} \right)$  и требования *TP*-инвариантности, можно доказать, что функция  $\rho_{12}$  вещественна. Но тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \Delta'_{12}(x-y) |_{x_0=y_0} = 0 = i \int da^2 \rho_{12}(a^2) \delta(x-y),$$

из которого следует, что функция  $\rho_{12}$  не может быть неотрицательной для всех значений  $a^2$ .

Возвращаясь к обычным представлениям Лемана (7.5), (7.6) и т. д., рассмотрим более подробно спектральную функцию  $\rho$ . Наличие  $\delta$ -функции в ее определении (7.2) означает, что функция  $\rho(p^2)$  не равна нулю только для тех значений своего аргумента  $p^2$ , которые соответствуют квадрату полной массы некоторого физического состояния; более того, это состояние должно обладать теми же трансформационными свойствами, что

и поле  $\varphi$ , поскольку в противном случае матричный элемент  $\langle 0|\varphi|s\rangle$  обращается в нуль\*. Поэтому для нейтральных самодействующих скалярных частиц состояния  $|s\rangle$ , дающие вклад в спектральную функцию, есть прежде всего одночастичные состояния, приводящие к изолированному вкладу в функцию  $\rho(p^2)$  при  $p^2=\mu^2$ ; далее идут двухчастичные состояния, для которых  $p_s = p_1+p_2$ , так что эти состояния дают вклад в функцию  $\rho$  только при  $p^2\geq 4\mu^2$ ; затем следуют трехчастичные состояния, дающие вклад в  $\rho$  при  $p^2\geq 9\mu^2$  и т. д. Наоборот, для псевдоскалярных частиц не существует двухчастичных состояний, обладающих трансформационными свойствами псевдоскаляра, так что в этом случае следующим после одночастичного вклада в функцию  $\rho$  будет вклад трехчастичных состояний с  $p^2\geq 9\mu^2$ .

Выражение для вклада в функцию  $\rho$  от одночастичных состояний представляет особый интерес и может быть определено либо из общих соображений, либо прямым вычислением. Мы намерены продемонстрировать здесь оба способа.

Для невзаимодействующих частиц поле  $\varphi$  удовлетворяет свободному уравнению Клейна—Гордона, и поэтому должно иметь место, например, равенство  $\Delta_F(x) = \Delta_F(x|\mu^2)$ , которое может быть реализовано только при  $\rho(p^2) = \rho(p^2 - \mu^2)$ . Последнее выражение должно представлять вклад только самих одночастичных состояний, поскольку в случае свободных частиц поле  $\varphi$  линейно по операторам рождения и уничтожения частиц ( $\varphi = \varphi_{in} = \varphi_{out}$ ) и не может связывать вакуум с какими-либо иными состояниями, кроме одночастичных. Но, как показывает соотношение (2.40), даже для взаимодействующих полей матричный элемент оператора интерполирующего поля между вакуумом и одночастичным состоянием совпадает с соответствующими матричными элементами асимптотических полей. Иначе говоря, матричные элементы  $\langle 0|\varphi|k\rangle$  для свободных и взаимодействующих полей одинаковы, так что в этих случаях должен быть одинаковым и вклад изолирован-

\* Рассмотрим гипотетический пример, когда  $\varphi$  — скалярное поле, а  $|s\rangle$  содержит фермион — антифермионную пару в состоянии  ${}^1S_0$ . При действии унитарного оператора пространственной инверсии  $P$  имеет место  $P\varphi(x)P^{-1} = \varphi(-x)$ , тогда как  $P|0\rangle = |0\rangle$  и  $P|s\rangle = -|s\rangle$  (Roman, 1964). Следовательно,  $\langle 0|\varphi(0)|s\rangle = \langle 0|P^{-1}P\varphi(0)P^{-1}P|s\rangle = -\langle 0|\varphi(0)|s\rangle = 0$ .

ного состояния в функцию  $\rho(p^2)$ . Поэтому, например, имеем

$$(2\pi)^4 \Delta'_F(k^2) = \int da^2 \{ \delta(a^2 - \mu^2) + \sigma(a^2) \} (a^2 - k^2 - i\varepsilon)^{-1} = \\ = (\mu^2 - k^2)^{-1} + \int_{4\mu^2}^{\infty} da^2 \sigma(a^2) (a^2 - k^2 - i\varepsilon)^{-1}. \quad (7.13)$$

Для псевдоскалярных частиц нижний предел интегрирования должен равняться  $9\mu^2$ .

Почувительно и полезно для дальнейшего получить тот же результат также и путем непосредственного вычисления. Одночастичный вклад  $\rho_{S.P.}$  в функцию  $\rho$  определяется выражением

$$\rho_{S.P.}(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} | \langle 0 | \varphi | \mathbf{k} \rangle |^2 \delta(p - k).$$

Заменяя  $\varphi$ , например, на  $\varphi_{in}$  [с учетом (2.40)] и используя (2.35), получаем

$$\rho_{S.P.}(p^2) = \\ = \int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta(\omega - p_0)/2\omega = \frac{\delta[(\mu^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} - (p^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}]}{2(\mu^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}}.$$

Интегрирование осуществлено с использованием свойств  $\delta$ -функции с учетом того, что  $\omega = (\mu^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2} = (\mu^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ ,  $p_0 = (p^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ . Полученный результат можно переписать в виде

$$\rho_{S.P.}(p^2) = \\ = \left\{ \delta |(\mu^2 + \mathbf{p}^2) - (p^2 + \mathbf{p}^2)| - \frac{\delta[(\mu^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} + (p^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}]}{2(\mu^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}} \right\},$$

если воспользоваться стандартным тождеством  $\delta(a^2 - x^2) = \{ \delta(a+x) + \delta(a-x) \} / 2|a|$ . Однако вторую  $\delta$ -функцию можно опустить, поскольку ее аргумент положительно определен. Тогда, как и ожидалось,

$$\rho_{S.P.}(p^2) = \delta(\mu^2 - p^2).$$

Выделяя явно одночастичный вклад в функцию  $\rho$ , переписываем ее в виде  $\rho(p^2) = \delta(\mu^2 - p^2) + \sigma(p^2)$ , где функция  $\sigma(p^2)$  включает в себя только вклады состояний непрерывного спектра и отлична от нуля только при  $p^2 \geq 4\mu^2$ . Конечно, функция  $\sigma$ , так же как и  $\rho$ , неотрицательна. Сравнение с формулой (7.9) приводит к фун-

даментальному неравенству, которому должна подчиняться константа  $Z_3$ :

$$Z_3^{-1} = \int_0^{\infty} dp^2 \{ \delta(\mu^2 - p^2) + \sigma(p^2) \},$$

$$Z_3^{-1} = 1 + \int dp^2 \sigma(p^2) \geq 1,$$

откуда

$$0 \leq Z_3 \leq 1. \quad (7.14)$$

Отметим, что  $Z_3=1$  только тогда, когда функция  $\sigma$  обращается в нуль тождественно. Последнее, в свою очередь, означало бы, что все матричные элементы поля  $\phi$ , связывающие вакуум и многочастичные состояния, равны нулю. В этом случае поле  $\phi$  должно было бы выражаться линейно, например через операторы  $a_k(in)$ ,  $a_k^*(in)$ , т. е. быть свободным полем. Следовательно, равенство  $Z_3=1$  означает, что мы имеем дело с теорией свободного поля; наоборот, в теории взаимодействующих полей равенство  $Z_3=1$  realizоваться не может.

Представление Лемана (7.13) — первый пример дисперсионного представления. Под этими словами мы подразумеваем следующее. Правую часть выражения (7.13) можно использовать для *определения* некоей функции *комплексной* переменной  $z$ :

$$(2\pi)^4 \Delta'_{F_1}(z) = \frac{i}{\mu^2 - z} + \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{da^2 \sigma(a^2)}{a^2 - z} \quad (7.15)$$

Эта функция аналитична всюду в комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль вещественной оси от точки ветвления  $z=4\mu^2$  до бесконечности, исключая полюс в точке  $z=\mu^2$ . В действительности существуют и другие точки ветвления (на обоих берегах разреза) в точках разрыва функции  $\sigma$ , т. е. при  $z=(n\mu)^2$ ,  $n=3, 4, \dots$ . Вещественная функция  $\Delta'_F(k^2)$  получится, если переменную  $z$  устремить к вещественной оси сверху. Иными словами, первоначальная функция представляет собой граничное значение аналитической функции, определенной представлением Лемана. Или же представление Лемана позволяет продолжить функцию  $\Delta'_F(k^2)$  аналитически в комплексную плоскость, в которой она обладает сингулярной структурой, описанной выше.

Обращаем особенное внимание на следующие моменты: 1) положение полюса отвечает квадрату массы стабильной частицы; 2) положения точек ветвления соответствуют порогам состояний непрерывного спектра с теми же трансформационными свойствами, что и у дискретной частицы, функция распространения которой рассматривается; 3) вычет в полюсе определяется асимптотическим условием; 4) скачок на разрезе имеет вид \*

$$(2\pi)^4 \text{disc } \Delta'_F(p^2) = 2\pi i z(p^2) = (2\pi)^4 2i \text{Im} \Delta'_F(p^2) / \pi \quad (7.16)$$

и определяется формулой (7.2), если только не возникает проблемы сходимости; скачок является чисто мнимой величиной; 5) входящий в представление интеграл можно рассматривать как интеграл Коши, сходимость которого определяется поведением функции  $\Delta'_F(z)$  на бесконечности.

Важно понять, что представленная выше общая аргументация позволила установить строго все перечисленные выше свойства, но с ее помощью невозможно обосновать (без специальных предположений) проблему сходимости, затронутую в п. 5. Мы займемся этим в § 7.3.

Наконец, приведем представление Лемана для диракова поля, оставляя доказательство его читателям в качестве упражнения:

$$S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) \equiv \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty da^2 \times \\ \times \{ \rho_1(a^2) S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y | a^2) + \rho_2(a^2) \delta_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-y | a^2) \}, \quad (7.17)$$

где  $\alpha, \beta$  — спинорные индексы. Константа перенормировки  $Z_2$  для поля  $\psi$  определяется формулой

$$Z_2^{-1} = \int da^2 \rho_1(a^2),$$

причем имеют место неравенства

$$0 \leq \rho_2(a^2) \leq 2\rho_1(a^2)(a^2)^{1/2};$$

$$0 \leq Z_2 \leq 1.$$

\* disc  $f$  — скачок функции  $f$ . — Прим. перев.



## § 7.2. ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Теперь мы в состоянии проиллюстрировать абсурдность попыток сформулировать асимптотическое условие в сильном смысле, т. е. как условие на операторы поля, а не на их матричные элементы. Действительно, если всерьез предположить, что

$$\Phi(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Phi_{in}(x),$$

то с необходимостью следует

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle \xrightarrow[\substack{x_0 \rightarrow -\infty \\ y_0 \rightarrow -\infty}]{t \rightarrow -\infty} \langle 0 | \Phi_{in}(x) \Phi_{in}(y) | 0 \rangle \quad (\text{неверно}).$$

Однако  $\Phi_{in}$  — операторы свободных полей, так что выражение справа равно функции  $\Delta^{(+)}(x-y)$ . С другой стороны, выражение слева в точности совпадает с функцией  $\Delta^{(+)\prime}(x-y)$ , которая (подобно правой части) зависит только от  $(x-y)$ . Поэтому левая часть не может изменяться, если, например,  $x_0, y_0 \rightarrow -\infty$ , в то время как разность  $x-y$  остается фиксированной. Резюмируя сказанное, рассмотрим соотношение (7.1). В силу асимптотического условия каждый член в правой части стремится к соответствующему пределу для свободных частиц, когда  $x_0, y_0 \rightarrow -\infty$ . Следовательно, предельный переход под знаком суммы незаконен: *ряд сходится неравномерно*. Иными словами, хотя все члены ряда, помимо членов, возникающих от одночастичных состояний, в пределе  $x_0, y_0 \rightarrow -\infty$  обращаются в нуль, все же сумма ряда остается без изменения, пока разность  $x-y$  фиксирована.

Другое важное следствие неравенства (7.14) было отмечено в предыдущей главе. Из формулы (6.49) следует, что если  $Z_3 \neq 1$ , то никакого унитарного оператора, преобразующего ин- или аут-поля в интерполирующее поле, существовать не может. Но константа  $Z_3$  может равняться единице только тогда, когда оператор  $\Phi(x)$  не обладает ненулевыми матричными элементами, связывающими вакуум с любым вектором состояния, кроме одночастичного, ибо только в этом случае может иметь место равенство  $\sigma=0$ . Последнее требование есть просто условие того, что оператор  $\Phi(x)$  линеен по операторам рождения и уничтожения асимптотических частиц, т. е. алгебра операторов рождения и уничтожения для поля  $\Phi(x)$  совпадает с алгеброй свободного поля. В гл. 18 будет подробно разобран этот вопрос для нейт-

рального скалярного поля, связанного с классическими ( $c$ -числовыми) источниками.

Другим весьма полезным определением константы  $Z_3$  оказывается формула (7.10) в сочетании с формулой (7.15). Умножив обе части равенства (7.15) на  $\mu^2 - z$  и устремив  $z = k^2$  к бесконечности, получим

$$-\lim_{k^2 \rightarrow \infty} k^2 \Delta'_F(k^2) = 1 + \int da^2 \sigma(a^2) = Z_3^{-1}.$$

В перенормируемых теориях функция  $\sigma(a^2)$  при больших  $a^2$  ведет себя как  $a^{-2}$ , так что интеграл в написанной формуле расходится логарифмически. Хотя и в этом случае формула не имеет строгого смысла, ее, по крайней мере, можно получить посредством очевидной предельной процедуры из вполне определенных выражений типа (7.15).

Подчеркнем, что, хотя нам только что удалось справиться с проблемой придания некоего смысла пределу  $Z_3 \rightarrow 0$  на основе представления Лемана (7.15) без вычитаний, к определению константы  $Z_3$  невозможно даже приступить, если в этом представлении необходимо сделать вычитания.

Формально аналогичные выражения можно получить также и для констант перенормировки масс  $\delta M$  и  $\delta m^2$ , которые входят в лагранжиан вида (6.52). Подробный вывод читатели найдут в работе Лемана (Lehmann, 1954). Например,

$$\delta M = Z_2 \int_0^{\infty} da^2 \{ (M - a) \rho_1(a^2) + \rho_2(a^2) \}.$$

Чрезвычайно сомнительно, чтобы подобные формулы имели бы хоть какой-то смысл; здесь не только все интегралы расходятся, но даже в перенормируемых теориях не существует сколько-нибудь простого способа проинтерпретировать их в качестве предела неких имеющих смысл выражений.

Проведенное обсуждение случая, когда  $Z_3 \rightarrow 0$  из-за расходимости спектрального интеграла, может создать впечатление, что в теории обязательно присутствует некий численный параметр (типа константы связи), который контролирует сходимость этого интеграла. Будь это так, можно было бы ожидать, что этот интеграл сходится при малых значениях константы связи и расходится при больших. Подобная ситуация соответствует

интуитивному предчувствию, что для достаточно малых значений константы связи теория должна пренебрежимо мало отличаться от теории свободных полей. Такая точка зрения может иметь некоторый успех при рассмотрении наблюдаемых амплитуд, подобных элементам  $S$ -матрицы. Однако наиболее вероятно, что в реалистических теориях поля для двухточечных функций справедливо прямо противоположное утверждение, как это станет понятно после обсуждения теоремы Хаага (см. гл. 19). Нечего и говорить, что такую возможность нельзя даже представить в виде решения, полученного итерациями.

На самом деле поведение спектральной функции  $\sigma(a^2)$  при  $a^2 \rightarrow \infty$  совершенно не фиксируется теми основными аксиомами теории поля, которые обсуждались выше. Поэтому задание его является чисто делом динамики теории. Тем самым со строго логической точки зрения перенормируемая теория обычного типа — это такая теория, которая удовлетворяет дополнительному независимому ограничению  $\sigma(a^2) \sim a^{-2}$ . Вытекающие из него следствия относительно сходимости или расходимости обсуждались выше и еще будут обсуждаться в § 7.3. Например, уравнения поля, получаемые из (6.52), можно скомбинировать непосредственно с представлением Лемана и показать, что при решении методом итераций функция  $\sigma(a^2)$  действительно обладает подобным асимптотическим поведением. За подробностями отсылаем читателей к работе Лемана (Lehmann, 1954).

Если представление Лемана без вычитаний не сходится, то фейнманову функцию распространения нельзя определить единственным образом только через спектральную плотность  $\sigma(a^2)$ ; необходимо ввести дополнительно некоторые константы, число которых зависит от скорости роста функции  $\sigma$  на бесконечности. Например, если функция  $\sigma$  стремится к константе, то, как мы покажем ниже в этой главе, необходим один дополнительный параметр, именно значение функции  $\Delta'_F$  в некоторой избранной точке. Эти константы нужно считать независимыми параметрами; по крайней мере при решении по теории возмущений они не могут быть вычислены через параметры, входящие в лагранжиан. Это есть еще один пример того, какое огромное различие существует между перенормируемыми и неперенормируемыми теориями.

### § 7.3. СХОДИМОСТЬ: ТЕОРЕМА СУГАВАРА И КАНАЗАВА

Мы уже отмечали, что представление Лемана для функции  $\Delta'_F(k^2)$  имеет форму стандартного дисперсионного соотношения. В следующем параграфе мы дадим другое доказательство такого представления, следуя нормальным методам дисперсионной теории; это будет строгое доказательство, сопровождающееся явным обсуждением вопросов сходимости. Чтобы подготовить

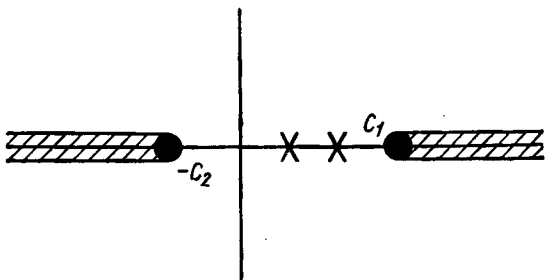


Рис. 7.1.

почву для рассмотрения асимптотического поведения функции  $\Delta'_F(k^2)$ , мы посвятим этот раздел обсуждению фундаментального математического результата (по крайней мере, с физической точки зрения), который впервые был четко сформулирован в работе Сугавара и Каназава (Sugawara, Kanazawa, 1961).

Грубо говоря, эта теорема утверждает, что всякая функция, которая аналитична всюду, кроме разрывов вдоль вещественной оси до бесконечности (и имеет, возможно, полюса на вещественной оси), и полиномиально ограничена по  $|z|$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , обладает *таким же* асимптотическим поведением при  $|z| \rightarrow \infty$  по *любому* направлению в комплексной плоскости. В действительности мы будем применять эту теорему только к функциям, которые *ограничены* при  $z \rightarrow \infty + i\epsilon$ .

Точная формулировка теоремы, которую мы будем называть теоремой Сугавара -- Каназава, гласит:

допустим, что функция  $f(z)$  аналитична всюду в комплексной плоскости  $z$ , за исключением двух разрывов и полюсов на вещественной оси (рис. 7.1). Пусть при  $|z| \rightarrow \infty$  функция  $|f(z)|$  возрастает не быстрее  $|z|^N$ , где  $N$  -- произвольно большое, но конечное число.

Тогда, если функция  $f(z)$  при  $z \rightarrow \infty \pm i\varepsilon$  вдоль разреза  $C_1$  имеет конечные пределы  $f(\infty \pm i\varepsilon)$  ( $\varepsilon$  — положительное произвольно малое число), то пределы функции  $f(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  по любому другому направлению имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) &= f(\infty + i\varepsilon) \text{ п.и } \operatorname{Im} z > 0, \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) &= f(\infty - i\varepsilon) \text{ при } \operatorname{Im} z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

при условии, что функция  $f(z)$  достигает определенных (необязательно конечных) пределов при  $z \rightarrow \infty$  вдоль разреза  $C_2$ . Кроме того, в этом случае функция  $f(z)$  может быть представлена в виде

$$f(z) = \sum_i \frac{R_i}{z - z_i} + \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{C_1} + \int_{-C_2} \right\} \frac{dx \Delta f(x)}{x - z} + \bar{f}(\infty), \quad (7.19)$$

где

$$\Delta f(x) := \{f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)\}/2i,$$

$$\bar{f}(x) = \{f_+(x + i\varepsilon) + f(x - i\varepsilon)\}/2.$$

Отметим также, что рассмотрение лишь функций, ограниченных при  $z \rightarrow \infty + i\varepsilon$ , не приводит к потере общности, если  $|f(z)| \leq |z|^N$ ; действительно, такую функцию  $f(z)$  всегда можно разделить на полином  $P(z)$ , в результате чего полученное отношение будет ограниченным (или даже обратится в нуль) на бесконечности. Платой за это будет лишь то, что новая функция  $f/P$  приобретет ряд дополнительных (по сравнению с функцией  $f$ ) полюсов, которые не нарушают утверждений теоремы.

За доказательством теоремы мы отсылаем читателей к работе Сугавара и Каназава. Здесь же мы ограничимся лишь некоторыми комментариями, иллюстрирующими правдоподобность ее утверждений и важность результатов. Вероятно, лучше всего сконцентрировать внимание на специальном случае, когда левый разрез отсутствует. Подобная ситуация действительно встречается как в представлении Лемана, так и в представлениях для формфакторов, тогда как наличие обоих разрезов играет решающую роль в теореме Померанчука.

Сначала выясним смысл допущения о мажорировании функции на бесконечности некоторой степенью мо-

дуля  $|z|$ . В ходе своего доказательства Сугавара и Каназава показали, что в этом случае функция  $f$  содержит *полином* по  $z$  порядка не выше некоторого конечного  $N$  [для функций, ограниченных вдоль разреза, этот полином сводится к константе  $F(\infty)$ ]. Ниже будет показано, что коэффициенты такого полинома нельзя вычислить с помощью матричных элементов операторов поля. Оказывается, что они фигурируют в теории в качестве независимых параметров. В то время как даже конечное число таких параметров было бы нежелательно, при отсутствии сделанных выше ограничений на  $z$  число таких параметров с необходимостью становится бесконечным.

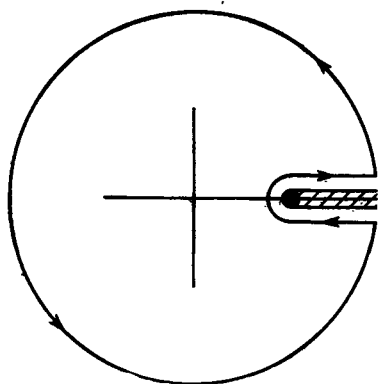


Рис. 7.2.

(Если  $N$  возрастает неограниченно, полином превращается в бесконечный ряд).

Итак, будем рассматривать функции, удовлетворяющие условиям теоремы. Если левый разрез отсутствует, то из формулы (7.19) с очевидностью следует, что пределы функции  $f(z)$  в верхней и нижней полуплоскостях одинаковы, ибо они совпадают при  $z \rightarrow -\infty$ . Кроме того, это означает, что  $\Delta f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , поскольку в этом случае расходимость одного из двух интегралов в формуле (7.19) не может компенсироваться расходимостью другого.

Для дальнейшей иллюстрации значения обсуждаемой теоремы, заметим, что если функция  $f(z)$  аналитична в плоскости с разрезом, то ее сразу можно представить интегралом Коши:

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_C f(x) dx / (x - z), \quad (7.20)$$

где  $C$  — контур, показанный на рис. 7.2. Выделяя интеграл вдоль действительной оси, запишем

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}_1} dx \frac{\Delta f(x)}{x - z} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i)} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} i d\theta}{Re^{i\theta} - z} f(Re^{i\theta}). \quad (7.21)$$

Первый член в формуле (7.21) в точности совпадает с интегральным членом в формуле (7.19). С помощью теоремы Сугавара—Каназава можно получить некоторые сведения о вкладе интеграла по бесконечно удаленной окружности. Не будь этой теоремы, мы не могли бы утверждать, что  $f(Re^{i\theta}) < \infty$  при  $R \rightarrow \infty$  независимо от величины  $\theta$ , даже если бы имело место неравенство  $f(\infty + i\varepsilon) < \infty$ . Согласно же теореме Сугавара—Каназава,  $f(Re^{i\theta}) < \infty$  для любого  $\theta$ , если ни при каких значениях  $\theta$  функция  $f(Re^{i\theta})$  не возрастает с ростом  $R$  экспоненциально (последнее, как уже указывалось выше, привело бы к появлению бесконечного числа произвольных констант). Поэтому в силу теоремы Сугавара—Каназава из условия  $f(\infty + i\varepsilon) < \infty$  вытекает, что  $f(Re^{i\theta}) = f(\infty + i\varepsilon) = f(\infty)$  и, следовательно, вклад от интеграла до бесконечно удаленной окружности в точности равен константе  $f(\infty)$ . (В случае двух разрезов пришлось бы более аккуратно оценить отдельно вклад от верхней и нижней полуплоскостей, но окончательный результат был бы по существу таким же.) Таким образом, установлено, что в рассматриваемом частном случае можно смело писать

$$f(z) = f(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{C_1}^{\infty} dx \frac{\Delta f(x)}{x-z}. \quad (7.22)$$

#### § 7.4. ДРУГОЙ ВЫВОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛЕМАНА ДЛЯ ФУНКЦИИ $\Delta'_F$

Получим заново представление Лемана для функции  $\Delta'_F(p^2)$ , не делая никаких предположений о степени ее роста на бесконечности. При этом покажем, каким образом вводятся независимые параметры (см. § 7.3), если они вообще существуют. Мы воспользуемся здесь методом, совершенно непохожим на предыдущий. Он более близок к обычным доказательствам дисперсионных соотношений в теории поля. Начнем с определения функции  $\Delta'_F(p)$  и запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \Delta'_F(p_0, \mathbf{p}) = & \int dx e^{ipx} \{ \theta(x) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle + \\ & + \theta(-x) \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle \}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Выражение в фигурной скобке, будучи инвариантной функцией в силу трансляционной инвариантности симметрично относительно замены  $x \leftrightarrow -x$ . Чтобы убедиться в этом, обозначим выражение в фигурной скобке через  $A(x)$  и запишем,

$$A(-x) = \{\theta(-x) \langle 0 | \varphi(-x) \varphi(0) | 0 \rangle + \theta(x) \langle 0 | \varphi(0) \varphi(-x) | 0 \rangle\}.$$

Но всякое вакуумное среднее зависит только от разности двух своих аргументов (см. § 7.1). Поэтому

$$\langle 0 | \varphi(-x) \varphi(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle$$

и

$$A(-x) = \{\theta(-x) \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle + \theta(x) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle\} = A(x).$$

В силу такой симметрии функция  $A(x)$  зависит только от  $x^2$ , но не зависит от знака  $x_0$ . Поэтому ее фурье-образ  $\Delta'_F(p_0, \mathbf{p})$  зависит только от  $p^2$ . Воспользуемся этим, чтобы продолжить функцию  $\Delta'_F(p^2)$  в область комплексных значений переменной  $p^2$ , оставляя переменную  $\mathbf{p}$  фиксированной, и установим дисперсионное соотношение по переменной  $p_0$ . Затем это соотношение с помощью равенства  $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$  будет переписано в виде дисперсионного соотношения по переменной  $p^2$ .

Далее, введем в формулу (7.23) стандартное тождество

$$e^{ip_0 x_0} \theta(\pm x_0) = \pm (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{d}p'_0 e^{ip'_0 x_0} \{p'_0 - p_0 \mp i\varepsilon\}^{-1}. \quad (7.24)$$

Чтобы обойти все проблемы, связанные со сходимостью и законностью изменения порядка интегрирования, будем считать, что тождество (7.24) с самого начала записано в форме с вычитаниями. Иначе говоря,

$$e^{ip_0 x_0} \theta(\pm x_0) = \pm (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{d}p'_0 e^{ip'_0 x_0} \left\{ \frac{1}{p'_0 - q_0} + \frac{p_0 - q_0}{(p'_0 - q_0)(p'_0 - p_0)} \right\}. \quad (7.25)$$



Вычитания следует производить столько раз, сколько нужно для обеспечения должной сходимости всех выражений, зависящих от  $p_0$ . Члены, не зависящие от  $p_0$ , подобно первому члену в формуле (7.25), будут скомбинированы в произвольные константы.

С учетом должного числа вычитаний подстановка формулы (7.24) в выражение (7.23) приводит к соотношению

$$\Delta'_F(p_0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int dx e^{ip'_0 x_0 - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left\{ \frac{\langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle}{p'_0 - p_0 - i\epsilon} - \frac{\langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} \right\}. \quad (7.26)$$

Во втором члене справа произведем замену переменных интегрирования  $p'_0 \rightarrow -p'_0$  и  $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ . Тогда входящий в него матричный элемент превратится в  $\langle 0 | \varphi(0) \varphi(-x) | 0 \rangle$ , что в силу трансляционной инвариантности равно  $\langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle$ . Окончательно

$$\Delta'_F(p_0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int dx \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle \times \left\{ \frac{\exp i(p'_0 x_0 - \mathbf{p}\mathbf{x})}{p'_0 - p_0 - i\epsilon} + \frac{\exp i(p'_0 x_0 + \mathbf{p}\mathbf{x})}{p'_0 + p_0 - i\epsilon} \right\}. \quad (7.27)$$

Отметим, что теперь член  $i\epsilon$  в оба слагаемые входит с одинаковыми знаками. Матричный элемент в формуле (7.27) можно преобразовать, записав его в виде (см. § 7.1)

$$\sum_s \langle 0 | \varphi(x) | s \rangle \langle s | \varphi(0) | 0 \rangle = \sum_s |\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle|^2 e^{-ip_s x}.$$

Затем в (7.27) можно осуществить интегрирование по  $x$ , что приведет к появлению  $\delta$ -функций, отражающих закон сохранения четырехимпульса

$$\Delta'_F(p_0, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \sum_s |\langle 0 | \varphi | s \rangle|^2 \times \left\{ \frac{\delta(p'_0 - p_{s_0}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_s)}{p'_0 - p_0 - i\epsilon} + \frac{\delta(p'_0 - p_{s_0}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_s)}{p'_0 + p_0 - i\epsilon} \right\}.$$

Под знаком суммы функции  $\delta(\mathbf{p} \pm \mathbf{p}_s)$  эквивалентны. Поэтому, определяя  $p^\mu$  как четыре-вектор  $(p'_0, \mathbf{p})$  получаем

$$\Delta'_F(p_0, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \left\{ \sum_s |\langle 0 | \varphi | s \rangle|^2 \delta(p' - p_s) \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{p'_0 - p_0 - i\varepsilon} + \frac{1}{p'_0 + p_0 - i\varepsilon} \right\}. \quad (7.28)$$

Сравнивая выражение в первой фигурной скобке с равенством (7.2), видим, что оно в точности совпадает со спектральной функцией  $(2\pi)^{-3} \rho(p'^2)$ . Вторую фигурную скобку в соотношении (7.28) можно переписать в виде

$$\left\{ \frac{1}{p'_0 - p_0 - i\varepsilon} + \frac{1}{p'_0 + p_0 - i\varepsilon} \right\} = \frac{2p'_0}{(p'_0 - i\varepsilon)^2 - p_0^2},$$

откуда

$$\Delta'_F(p^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp'^2 \rho(p'^2) \{(p'_0 - i\varepsilon)^2 - p_0^2\}^{-1}.$$

На этом этапе следует воспользоваться характерными особенностями спектральной функции  $\rho$ . Если на нее не накладывать никаких ограничений, то мнимая часть знаменателя в зависимости от величины  $p'_0$  будет иметь разные знаки относительно  $p_0^2$ , так что функцию  $\Delta'_F(p^2)$  нельзя будет интерпретировать как граничное значение функции, зависящей только от  $p^2$ .

Однако функция  $\rho(p'^2)$ , очевидно, обращается в нуль, если  $p'$  не является четыре-импульсом некоторого физического состояния. Это означает, что четыре-вектор  $p'$  положительно времениподобен, т. е.  $p'^2 \geq 0$ ,  $p'_0 \geq 0$ . Поэтому имеет место равенство  $(p'_0 - i\varepsilon)^2 - p_0^2 = p_0'^2 - p_0^2 - i\varepsilon$ , правую часть которого можно записать как  $(p'^2 - p^2 - i\varepsilon)$ , тогда как  $dp'^2 = dp^2$ . Одновременно пределы интегрирования ограничиваются положительными вещественными значениями  $p^2$ . (В действительности, конечно, существует еще ряд ограничений, но это уже зависит от деталей динамики и правил отбора). Итак, окончательно имеем

$$\Delta'_F(p^2) = \int_0^{\infty} dp'^2 \rho(p'^2) (p'^2 - p^2 - i\varepsilon)^{-1}. \quad (7.29)$$

Это знакомый результат, справедливый при условии, что 1) интеграл в (7.29) сходится и 2)  $\Delta'_F(\infty) = 0$ .

Следует подчеркнуть, что последние два предположения не эквивалентны друг другу. Вполне возможна и такая ситуация, когда интеграл в (7.29) сходится и все же это выражение неверно, поскольку  $\Delta'_F(\infty) \neq 0$ . В то же время, если интеграл в (7.29) расходится, то равенство  $\Delta'_F(\infty) = 0$  невозможно, и проблема сводится к вопросу о конечности или бесконечности  $\Delta'_F(\infty)$ . Иными словами, из условия 2-го следует 1-е, в то время как условие 1-е не влечет 2-го.

Во всяком случае, обычно пытаются требовать выполнения условия

$$\Delta'_F(\infty) = 0, \quad (7.30)$$

которое обеспечивает справедливость представления (7.29) в первоначальном виде без вычитаний. Например, условие (7.30) выполняется для каждого члена ряда теории возмущений в перенормируемых теориях поля.

Обычно считают функцию  $\rho(p^2)$  поддающейся вычислению, поскольку ее можно выразить через матричные элементы оператора поля. Таким способом нельзя, конечно, проверить справедливость равенства (7.30); однако результаты расчета позволяют установить, совместима ли полученная функция с условием (7.30), т. е. решить вопрос о сходимости интеграла (7.29).

Предположим теперь, что интеграл (7.29) расходится. Тогда вновь следует обратиться к формуле с вычитаниями (7.25). В качестве упражнения читатели могут самостоятельно убедиться в том, что она приводит непосредственно к соотношению

$$\Delta'_F(p^2) = \Delta'_F(0) + p^2 \int dp'^2 \rho(p'^2)/p'^2 (p'^2 - p^2 - i\epsilon), \quad (7.31)$$

где для простоты положено  $q^2 = 0$ .

Константу  $\Delta'_F(0)$  нельзя выразить через матричные элементы оператора поля, так что она будет новым фундаментальным параметром теории.

Из соотношения (7.31) также следует, что  $\Delta'_F(\infty)$  растет, по крайней мере не медленнее, чем интеграл  $\int_{p^2} dp'^2 \rho(p'^2)/p'^2$ . Конечно, если граничное условие

$\Delta'_F(\infty) < \infty$  нарушено, то возможно появление в формуле (7.31) *дополнительного* произвольного полинома по  $p^2$ . Если это так, то интеграл в (7.31) может не характеризовать доминирующее поведение функции  $\Delta'_F(p^2)$  на бесконечности.

Резюмируя изложенное, следует отметить, что из общих соображений можно установить аналитические свойства функции  $\Delta'_F$  и получить сведения о ее скачках на разрезах, положении полюсов и значении вычетов в них. Эти свойства фиксируют функцию  $\Delta'_F$  только с точностью до произвольного полинома по  $p^2$ . В зависимости от асимптотического поведения спектральной функции такой полином может быть либо исключен, либо нет путем наложения граничных условий на функцию  $\Delta'_F$  на бесконечности. Если его исключить не удастся, то минимально допустимая степень полинома в точности равна числу необходимых вычитаний, а его коэффициенты — константам вычитания. Теперь можно также понять ситуацию, при которой функция  $\Delta'_F(p^2)$  не является полиномиально ограниченной, т. е. не подчиняется основному условию теоремы Сугавара—Каназава и, как следствие, требует бесконечного числа вычитаний. Это означает, что вместо полинома с произвольными коэффициентами необходимо вводить бесконечный ряд с произвольными коэффициентами. Однако подобный бесконечный ряд можно рассматривать как ряд Тейлора некой функции от  $p^2$  и, следовательно функцию  $\Delta'_F(p^2)$  по существу нельзя вычислить в замкнутой форме.

Такая ситуация с физической точки зрения кажется неестественной, чем и объясняются требования, накладываемые теоремой Сугавара—Каназава.

Предлагаем читателям обсудить самостоятельно следующие вопросы: 1) как применить подобную вычитательную процедуру в конфигурационном пространстве и как модифицировать должным образом вывод представления Лемана в применении к функциям, отличным от функций распространения; 2) в каком смысле можно говорить о константе перенормировки поля, если представление для функции  $\Delta'_F$  должно иметь вычитания.

## § 7.5. ПРИМЕРЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Чтобы развить какие-то интуитивные физические представления о спектральной функции Лемана, рассчитаем формально вклад в нее, вносимый двухчастичными промежуточными состояниями в трех частных случаях. Из дальнейшего станет ясно, почему это вычисление мы называем формальным. Рассмотрим: 1) функцию распространения самодействующих нейтральных скалярных частиц с учетом вкладов от двухчастичных состояний; 2) функцию распространения нейтральных скалярных частиц с учетом вкладов состояний с фермион-антифермионными парами; 3) функцию распространения нейтральных псевдоскалярных частиц также с учетом вкладов состояний с фермион-антифермионными парами. Последние два случая до некоторого момента можно рассматривать параллельно. В этом разделе через  $\rho$  мы всегда будем обозначать соответствующий двухчастичный вклад в спектральную функцию.

Для самодействующих бесспиновых частиц в силу формулы (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \rho(s) &= (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{l} - \mathbf{p}) |\langle 0 | \varphi(0) | \mathbf{k} \mathbf{l}, in \rangle|^2 = \\ &= (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{l} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{l} - \mathbf{p}) |\langle 0 | \varphi | \mathbf{k} \mathbf{l}, in \rangle|^2, \quad s = p^2. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Для определенности выбраны ин-состояния; как уже отмечалось в гл. 4, множитель  $1/2$  введен для компенсации, поскольку при независимом суммировании по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{l}$  состояния  $|\mathbf{k} \mathbf{l}\rangle$  и  $|\mathbf{l} \mathbf{k}\rangle$  учитываются отдельно, хотя они ввиду неразличимости частиц одинаковы.

Выражение (7.32) удобнее вычислять в специальной лоренцевой системе отсчета, когда  $\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{l} = 0$ , т. е. в системе покоя состояний  $|\mathbf{k} \mathbf{l}\rangle$ . Поскольку функция  $\rho$  зависит только от  $p^2$ , это не приводит к потере общности. В системе центра масс имеем

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{l}} \equiv \omega; \quad p_0 = \sqrt{s};$$

с учетом наличия  $\delta$ -функций в выражении для  $\rho$  можно также положить

$$\omega = (s/4)^{1/2}.$$

Матричный элемент  $\langle 0|\varphi|kl, in\rangle$  связан с матричным элементом оператора источника соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} (\square^2 + \mu^2) \langle 0|\varphi|kl, in\rangle &= \langle 0|\eta|kl, in\rangle; \\ \langle 0|\varphi|kl, in\rangle &= (\mu^2 - s)^{-1} \langle 0|\eta|kl, in\rangle. \end{aligned} \right\} (7.33)$$

Наконец, матричный элемент  $\langle 0|\eta|kl, in\rangle$  связан со скалярной функцией  $L(s)$  равенством

$$\langle 0|\eta|kl, in\rangle = L(s) [2\omega_k [2\omega_l]^{-1/2} = L(s)/s^{1/2}.$$

Функция  $L$  в силу ковариантности зависит только от  $s$ . Это утверждение будет обосновано в гл. 8, посвященной трехточечным функциям, а пока выяснение его мы оставляем читателям в качестве упражнения. Вторая часть последнего равенства справедлива в системе центра масс. Подставляя (7.33) в выражение для функции  $\rho$  и вынося все множители, зависящие только от  $s$ , из-под интегралов, получаем

$$\rho(s) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \cdot \frac{|L(s)|^2}{s} \times \\ \times \frac{1}{(\mu^2 - s)^2} \int dk dl \delta(k+1) \delta(2\omega - \sqrt{s}).$$

Интегрирование по  $l$  можно выполнить с учетом свойств функции  $\delta(k+1)$ ; поскольку подынтегральное выражение не зависит от направления три-вектора  $k$ , можно выполнить также интегрирование по  $\Omega_k$ , что даст множитель  $4\pi$ :

$$\rho(s) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \cdot \frac{|L(s)|^2}{s(\mu^2 - s)^2} 4\pi \int_0^\infty k^2 dk \delta(2\omega - \sqrt{s}).$$

Оставшийся интеграл имеет вид

$$\int_0^\infty k^2 dk \delta(2\omega - \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \int_\mu^\infty k \omega d\omega \delta(\omega - \sqrt{s}) = \\ = \frac{1}{8} [s(s - 4\mu^2)]^{1/2}.$$

Тогда окончательно можно написать

$$\rho(s) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \cdot \frac{|L(s)|^2}{s(\mu^2 - s)^2} 4\pi \frac{1}{8} [s(s - 4\mu^2)]^{1/2} = \\ = \frac{1}{32\pi^3} \left[ \frac{s - 4\mu^2}{s} \right]^{1/2} \frac{|L(s)|^2}{(\mu^2 - s)^2}. \quad (7.34)$$

Таким образом, двухчастичный вклад в функцию  $\rho$  (и поэтому соответствующее приближение для функции распространения) выражается через неизвестную пока функцию  $L(s)$ , связанную с трехточечной функцией. Подобные функции, называемые формфакторами, будут в основном занимать наше внимание в последующих главах. Чтобы понять смысл функции  $L(s)$ , проще всего вспомнить, что в теории возмущений простейший вариант самодействия нейтральных скалярных частиц определяется лагранжианом

$$L(x) = \lambda_0 \varphi^3(x), \quad (7.35)$$

который приводит к оператору тока

$$\eta(x) = 3\lambda_0 \varphi^2(x). \quad (7.36)$$

В первом порядке по  $\lambda_0$  функция  $L$  определяется выражением  $\langle 0 | \eta | kl, in \rangle \sqrt{V s}$ , которое следует вычислять с помощью приведенного выше оператора  $\eta$ , пренебрегая различием между операторами  $\varphi$  и  $\varphi_{in}$  (или  $\varphi_{out}$ ). Тогда получаем

$$L(s) = (3! \lambda_0) = \text{const.}$$

Возвращаясь к реальной ситуации, уместно определить «перенормированную», или «наблюдаемую», константу связи  $\lambda$  как значение функции  $L(s)/3!$  на энергетической поверхности, т. е.

$$3! \lambda \equiv L(\mu^2). \quad (7.37)$$

[В первом порядке по  $\lambda_0$  имеет место равенство  $\lambda = \lambda_0$ , так что  $L(s) = L(\mu^2)$ .] Определим теперь в соответствии со сказанным выше новую функцию

$$\left. \begin{aligned} L(s) &= L(\mu^2) \Omega(s) = (3! \lambda) \Omega(s); \\ \Omega(\mu^2) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Тогда

$$\rho(s) = \frac{(3! \lambda)^2}{32\pi^2} \left[ \frac{s - 4\mu^2}{s} \right]^{1/2} \frac{|\Omega(s)|^2}{(\mu^2 - s)^2}. \quad (7.39)$$

Поэтому, согласно теории возмущений, в первом порядке по  $\lambda$  асимптотическое поведение функции  $\rho$  подчиняется закону

$$\rho(s) \sim 1/s^2.$$

В действительности, если функцию  $\Omega$  разложить в ряд по  $\lambda$ , то при  $s \rightarrow \infty$  каждый член этого ряда будет стремиться к постоянному значению. То же самое можно сказать относительно поведения каждого члена в аналогичном разложении для самой функции  $\rho$ . Следовательно, в этой так называемой  $\varphi^3$ -теории константа  $Z_3$  конечна по крайней мере для любого члена разложения в рамках теории возмущений. (Конечно, здесь это было продемонстрировано только в первом порядке по  $\lambda$ ).

Рассмотрим теперь фермион-антифермионные вклады в спектральную функцию для функций распространения нейтральных скалярного и псевдоскалярного полей. В этом случае

$$\rho(s) = (2\pi)^{-3} \sum_{q, \bar{q}} \sum_{\text{спины}} \delta(q + \bar{q} - p) |\langle 0 | \varphi | q \bar{q}, in \rangle|^2.$$

Следуя изложенной выше процедуре, перейдем к системе отсчета, в которой  $q + \bar{q} = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi | q \bar{q}, in \rangle &= (\mu^2 - s)^{-1} \langle 0 | \eta | q \bar{q}, in \rangle = \\ &= (\mu^2 - s)^{-1} \bar{v}(\bar{q}) \Gamma u(q) \left[ \frac{m^2}{\omega_q \omega_{\bar{q}}} \right]^{1/2} K(s), \end{aligned}$$

где  $K(s)$  — скалярные (разные в рассматриваемых двух случаях) функции;  $m$  — масса фермиона, а  $\Gamma = 1$  или  $\gamma_5$  соответственно для скалярного и псевдоскалярного полей\*. Тогда

$$\begin{aligned} \rho &= (2\pi)^{-3} \int dq d\bar{q} \delta(q + \bar{q} - p) \frac{4m^2}{s} \times \\ &\times \frac{|K(s)|^2}{(\mu^2 - s)^2} \sum_{\text{спины}} [\bar{u}(q) \Gamma v(\bar{q})] [\bar{v}(\bar{q}) \Gamma u(q)]. \end{aligned}$$

\* Чтобы убедиться в возможности представления этого матричного элемента в такой форме, необходимо сначала учесть, что получится в результате свертывания обеих частиц (см. гл. 5). Далее следует учесть, что при пространственном отражении (как и при любом другом лоренцевом преобразовании) обе части равенства должны, конечно, преобразовываться одинаково. В качестве грубого мнемонического приема можно также заменить оператор источника  $\eta$  по возможности простейшим его выражением через фермионные поля согласно теории возмущений, а затем выполнить свертывание как если бы поля были не интерполирующими, а ин-полями.



Суммирование по спинам выполняется стандартным образом с помощью операторов проектирования:

$$\sum_{\text{спины}} \dots = (4m^2)^{-1} \text{Sp} \{ (\gamma^{\mu} q_{\mu} + m) \Gamma (\gamma^{\nu} \bar{q}_{\nu} - m) \Gamma \}.$$

Для скалярного поля ( $\Gamma = 1$ ) имеем

$$\sum_{\text{спины}} \dots = (4m^2)^{-1} (4q\bar{q} - 4m^2) = (s - 4m)/2m^2:$$

для псевдоскалярного поля

$$\sum_{\text{спины}} \dots = s/2m^2.$$

В обоих случаях суммирование по спинам приводит к независимости подынтегрального выражения от ориентации три-векторов  $\mathbf{q}$  и  $\bar{\mathbf{q}}$ , так что дальнейшая процедура интегрирования аналогична описанной выше. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \rho_S(s) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{s - 4m^2}{s} \right]^{1/2} (s - 4m^2) \frac{|K(s)|^2}{(\mu^2 - s)^2}; \\ \rho_{PS}(s) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{s - 4m^2}{s} \right]^{1/2} s \frac{|K(s)|^2}{(\mu^2 - s)^2}. \end{aligned} \right\} (7.40)$$

[Напомним, что это — вклады от одной фермион-антифермионной пары. Функция распространения  $\pi^0$ -мезона, например, содержит вклады как  $n\bar{n}$ -, так и  $pp$ -состояний, поэтому соответствующая спектральная функция будет отличаться от (7.40) множителем 2.]

Если рассматривать лагранжиан

$$L(x) = g_0 \bar{\psi} \Gamma \psi \phi,$$

то обычное определение перенормированной константы связи следующее:

$$K(\mu^2) = g; \quad K(s) = g\Omega(s); \quad \Omega(\mu^2) = 1. \quad (7.41)$$

Может быть, следует еще раз заметить, что в рамках теории возмущений функция  $\Omega(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к конечной константе. Следовательно, в этом случае для любого конечного порядка по  $g$  асимптотическое поведение функции  $\rho$  имеет вид  $\rho \sim 1/s$ , так что, хотя представление Лемана еще не требует вычитаний, константа  $Z^{-1}_3$  уже не может быть конечной.

В качестве упражнения читатели могут оценить, следуя намеченному выше направлению, вклад в две фермионные спектральные функции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (см. формулу (7.17) фермион-скалярного и фермион-псевдоскалярного состояний и, наконец, рассмотреть трехпсевдоскалярные вклады в псевдоскалярную спектральную функцию, соответствующую на языке лагранжева формализма  $\varphi^4$ -теории.

## Глава 8

### ТЕОРЕМА

### ЛЕМАНА—СИМАНЗИКА—ЦИММЕРМАНА О ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

#### § 8.1. ВВЕДЕНИЕ

Представление Лемана для двухточечных функций содержит всю информацию о них, точнее, ту ее часть, которую можно получить без рассмотрения детальных динамических свойств системы. Никаких результатов для трехточечных функций, сравнимых по глубине и простоте со сведениями о двухточечных функциях, пока не известно. Они представляют собой второй тип вспомогательных вакуумных средних в том смысле, что они, как и двухточечные функции, не могут непосредственно генерировать элементы  $S$ -матрицы. Тем не менее существует ряд причин, как указывалось в предыдущей главе, в силу которых представляет интерес изучение функций обоих типов. Здесь мы изучим один особенно важный фурье-образ от хронологического произведения трех полей, так называемую вершинную функцию, и докажем фундаментальную теорему о ее асимптотическом поведении. Формулировка теоремы и ее доказательство принадлежит Леману, Симанзику и Циммерману (Lehmann, Symanzik, Zimmermann, 1955). Она гласит, что в рамках теории без «духовых» состояний при условии сходимости представления Лемана без вычитаний (т. е. в рамках перенормируемых теорий обычного рода) вершинная функция обращается в нуль, когда передача импульса стремится к бесконечности. Позднее мы сформулируем ее точно. (Можно рекомендовать читателям в качестве упражнения самостоятельно продумать доказательство этой теоремы для случая,

когда в представлении Лемана должны быть сделаны вычитания.).

Будем изучать теорию нейтрального псевдоскалярного поля, взаимодействующего со спинорами. Рассмотрим величину

$$\tau(x, y, z) \equiv \langle 0 | T \{ \psi(x) \varphi(y) \bar{\psi}(z) \} | 0 \rangle, \quad (8.1)$$

которая с точки зрения теории возмущений включает все графы Фейнмана, содержащие одну входящую и

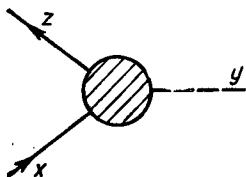


Рис. 8.1.

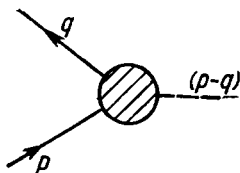


Рис. 8.2.

одну выходящую фермионные линии и одну внешнюю бозонную линию. Иными словами, она может быть представлена заштрихованным кружком (рис. 8.1) в конфигурационном пространстве. Соответствующий фурье-образ этой функции, представленный заштрихованным кружком в импульсном пространстве на рис. 8.2, характеризует амплитуду рассеяния фермиона во внешнем поле  $\varphi(y)$  в первом порядке по величине этого потенциала, но во всех порядках по величине взаимодействия, дающего вклад в структуру фермиона. Сделав эти предположения и считая, что импульсы фермионов находятся на энергетической поверхности, т. е.  $p^2 = M^2 = q^2$ , назовем заштрихованный кружок на рис. 8.2 формфактором. Тем самым формфактор — это функция единственного остающегося инварианта, именно  $(p-q)^2$ . Мы сохраним наименование «вершинная функция» за связанной с ним величиной, определенной ниже.

## § 8.2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

С помощью функции  $\tau$  определим функцию  $\Gamma$  следующим образом:

$$\tau(x, y, z) = \int d\xi d\eta d\zeta S'_F(x - \xi) \Delta'_F(y - \eta) S'_F(\zeta - z) \Gamma(\xi, \eta, \zeta). \quad (8.2)$$

Здесь  $S'_F$  и  $\Delta'_F$  — точные функции распространения. Форма выражения (8.2) явным образом инспирирована теорией возмущений: можно представлять себе, что оно возникло вследствие того, что один фермион распространяется от точки  $x$  к точке  $\xi$  [это описывается функцией  $S'_F(x-\xi)$ ], а другой — от точки  $z$  к точке  $\zeta$ , тогда как бозон распространяется от точки  $y$  к точке  $\eta$ ; в точках

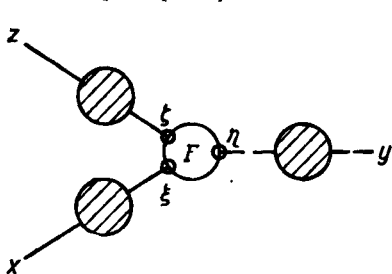


Рис. 8.3.

$\xi, \eta, \zeta$  они вступают во взаимодействие и перетасовываются. Это интуитивное описание в точности соответствует вкладу всех графов Фейнмана, которые можно выделить в соответствии с диаграммой на рис. 8.3. В этом случае функция  $\Gamma$  уже никаких новых поправок к внешним линиям не со-

держит: все поправки такого типа уже включены в точные функции распространения. В стандартных обозначениях функция  $\Gamma$  соответствует сумме только собственных графов. Ниже будем называть  $\Gamma$  «вершинной функцией».

Совершенно независимо от теории возмущений можно без какой-либо потери общности переписать определение (8.2) в импульсном пространстве. В силу трансляционной инвариантности функции  $\tau$  и  $\Gamma$  зависят только от двух разностей координат, так что их можно представить в виде:

$$\tau(x, y, z) = \int dldk e^{ik(x-y)} e^{il(y-z)} \tau(k, l); \quad (8.3)$$

$$\Gamma(\xi, \eta, \zeta) = \int dldk e^{ik(\xi-\eta)} e^{il(\eta-\zeta)} \Gamma(k, l). \quad (8.4)$$

Тогда фурье-образ функции (8.2) примет вид

$$\tau(k, l) = S'_F(k) \bar{S}'_F(l) \Delta'_F(l-k) \Gamma(k, l), \quad (8.5)$$

что есть просто определение  $\Gamma(k, l)$  через  $\tau(k, l)$ . (При этом, если функции распространения имеют нули, может возникнуть некоторая неопределенность. Мы обсудим этот вопрос несколько позже.)

Соотношение (8.5) также можно проинтерпретировать весьма непосредственно с помощью фейнмановых графов, как это показано на рис. 8.4, представляющем

собой двойник рис. 8.3 в импульсном пространстве. В то время как функция  $\tau(k, l)$  включает в себя весь заштрихованный кружок из рис. 8.2, функция  $\Gamma(k, l)$  соответствует лишь центральной (собственной) части на рис. 8.4. На практике очень часто интересуются ситуацией, когда концы фермионных линий находятся на энергетической поверхности (реальные фермионы). В этом случае вклады заштрихованных кружков на фермионных линиях равны единице, т. е. вычету точной двухточечной функции в одночастичном полюсе. Вклад от внешней бозонной линии на рис. 8.4 равен  $\Delta'_F(k^2)$ , в то время как ее вклад на рис. 8.2 равен функции распространения  $\Delta_F(k^2)$  свободной частицы. Значит, если концы фермионных линий находятся на энергетической поверхности, то

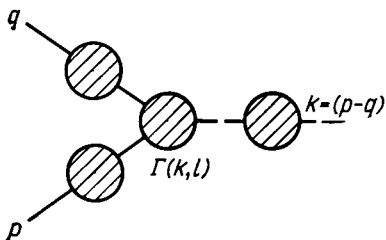


Рис. 8.4.

$$\tau \Delta_F = \Gamma \Delta'_F. \quad (8.6)$$

Мы стремимся найти соотношения между спектральной плотностью бозонной функции распространения, с одной стороны, и функцией  $\Gamma(k, l)$ , с другой. С этой целью рассмотрим выражение для функции  $\Delta^{(+)}(x-y)$  (см. гл. 7) и вычислим вклад тех состояний  $|n\rangle$ , которые содержат одну фермион-антифермионную пару. Их вклад определяется суммой

$$\sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \varphi(x) | \alpha\beta, in \rangle \langle \alpha\beta, in | \varphi(y) | 0 \rangle. \quad (8.7)$$

(С тем же успехом мы могли бы использовать и набор аут-состояний.) С помощью стандартной процедуры свертывания (теперь роль оператора Клейна—Гордона  $K$  играет оператор Дирака  $\mathcal{D}$ ) запишем выражение для  $\langle 0 | \varphi(x) | \alpha\beta, in \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) | \alpha\beta, in \rangle &= \int d\xi_1 d\xi_2 \bar{f}_\alpha(\xi_1) f_\beta(\xi_2) \times \\ &\times \mathcal{D}_{\xi_1} \mathcal{D}_{\xi_2} \langle 0 | T \{ \psi(\xi_1) \varphi(x) \bar{\psi}(\xi_2) \} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где  $f$  — нормированные волновые функции свободной дираковой частицы. Переписывая вакуумное среднее в формуле (8.8) с помощью (8.2), получаем

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \bar{f}_\alpha(\xi_1) f_\beta(\xi_2) \mathcal{D}_{\xi_1} \mathcal{D}_{\xi_2} \int d\eta_0 d\eta_1 d\eta_2 \Delta'_F(x - \eta_0) \times \\ \times S'_F(\xi_1 - \eta_1) \bar{S}'_F(\xi_2 - \eta_2) \Gamma(\eta_0, \eta_1, \eta_2). \quad (8.9)$$

Внесем оператор  $\mathcal{D}_{\xi_1}$  под знак интеграла; он действует только на функцию  $S'_F(\xi_1 - \eta_1)$ , для которой мы запишем представление Лемана:

$$\mathcal{D}_{\xi_1} S'_F(\xi_1 - \eta_1) = \delta(\xi_1 - \eta_1) + \int_{(M+m^2)}^{\infty} da^2 \{ \rho_1(a^2) \mathcal{D}_{\xi_1} \times \\ \times S_F(\xi_1 - \eta_1 | a^2) + \rho_2(a^2) \mathcal{D}_{\xi_1} \Delta_F(\xi_1 - \eta_1 | a^2) \}. \quad (8.10)$$

Вклады второго и третьего членов выражения (8.10) в соотношение (8.9) обращаются в нуль, поскольку в формуле (8.9) они умножаются на  $\bar{f}_\alpha(\xi_1)$  и интегрируются по  $\xi_1$ ; нормируемая функция  $\bar{f}_\alpha(\xi_1)$  содержит частоты, соответствующие только одночастичным состояниям, тогда как члены, входящие в леманов интеграл, содержат частоты, относящиеся только к состояниям непрерывного спектра с двумя частицами по крайней мере. (Подчеркнем, что эта аргументация опирается на свойство интегрируемости волновой функции  $f_\alpha$ .) Таким образом, вклад выражения (8.10) в соотношение (8.9) сводится к вкладу только  $\delta$ -функции. Аналогичная аргументация применима и к интегралу по  $\xi_2$ . Итак,

$$\langle 0 | \varphi(x) | \alpha\beta, in \rangle = \int d\eta_0 d\eta_1 d\eta_2 \bar{f}_\alpha(\eta_1) f_\beta(\eta_2) \times \\ \times \Delta'_F(x - \eta_0) \Gamma(\eta_0, \eta_1, \eta_2). \quad (8.11)$$

Аналогичное (комплексно сопряженное) уравнение позволяет преобразовать второй множитель под знаком суммы (8.7), так что формула (8.7) принимает вид

$$\sum_{\alpha, \beta} \int d\eta_0 d\eta_1 d\eta_2 \int d\xi_0 d\xi_1 d\xi_2 \bar{f}_\alpha(\eta_1) f_\beta(\eta_2) \Delta'_F(x - \eta_0) \times \\ \times \Gamma(\eta_0, \eta_1, \eta_2) f_\alpha(\xi_1) \bar{f}_\beta(\xi_2) \bar{\Delta}'_F(\xi_0 - y) \bar{\Gamma}(\xi_0, \xi_1, \xi_2). \quad (8.12)$$

Воспользуемся теперь свойством полноты системы волновых функций  $f$ :

$$\sum \bar{f}(\eta_1) f(\xi_1) = S^{(+)}(\eta_1 - \xi_1). \quad (8.13)$$

Напомним, что в сумму по  $\alpha$  и  $\beta$  включено и суммирование по всем спиновым состояниям. Тогда для вклада от нуклон-антинуклонных состояний получим

$$\sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \varphi(x) | \alpha\beta, in \rangle \langle \alpha\beta, in | \varphi(t) | 0 \rangle = \\ = \int d\eta_0 \dots d\xi_2 \Delta'_F(x - \eta_0) \text{Sp} \{ \Gamma(\eta_0, \eta_1, \eta_2) S^{(+)}(\xi_2 - \eta_2) \times \\ \times \bar{\Gamma}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) S^{(-)}(\xi_1 - \eta_1) \} \bar{\Delta}'_F(\xi_0 - y). \quad (8.14)$$

Этому выражению можно придать общую форму

$$\int d\xi d\eta \Delta'_F(x - \xi) F(\xi - \eta) \bar{\Delta}'_F(\eta - y), \quad (8.15)$$

и изобразить его так, как на рис. 8.5, чередуя переменные  $\xi$  и  $\eta$  в соответствии с формулой (8.14).

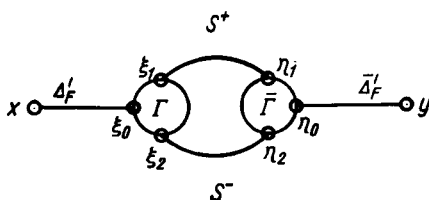


Рис. 8.5.

В действительности очевидно, что вклад любого набора промежуточных состояний в выражение для функции  $\Delta^{(+)'}(x-y)$  можно представить в форме (8.15), т. е.

$$\Delta^{(+)'}(x-y) = \int d\xi d\eta \Delta'_F(x - \xi) F(\xi - \eta) \bar{\Delta}'_F(\eta - y); \quad (8.16)$$

$$F(\xi - \eta) = \sum_n F_n(\xi - \eta), \quad (8.17)$$

где функции  $F_n$  соответствуют состояниям, содержащим  $n$  частиц. Функции  $F_n$  обладают следующими существенными свойствами:

1) фурье-образы этих функций положительны, т. е.

$$F_n(k) \geq 0;$$

2) они содержат только положительные частоты.

Чтобы доказать эти утверждения, рассмотрим фурье-образ функции  $\Delta^{(+)'}$ , определяемый формулой (7.3). Запишем для функции  $\rho$  равенство  $\rho = \sum \rho_n$ , где  $\rho_n(k^2)$  — вклад в спектральную плотность Лемана состояний ти-

па  $|n\rangle$ . Нам уже известно, что  $\rho_n(k^2) \geq 0$ . В то же время фурье-образ выражения (8.16) имеет вид

$$\sum_n F_n(k^2) |\Delta'_F(k^2)|^2. \quad (8.18)$$

Приравнивая его фурье-образу функции  $\Delta^{(+)}$ , получаем

$$\sum_n \rho_n(k^2) \theta(k_0) = \sum_n F_n(k) |\Delta'_F(k^2)|^2. \quad (8.19)$$

Поскольку пороги ( $\theta$ -функции) для разных функций  $\rho_n$  и  $F_n$  различны, приравнивая почленно слагаемые справа и слева в формуле (8.19), установим оба указанных выше свойства 1) и 2).

Используя представление Лемана (7.6), можно множитель  $|\Delta'_F(k^2)|^2$  вне энергетической поверхности выразить следующим образом:

$$|\Delta'_F(k^2)|^2 = \pi^2 \sigma^2(k^2) + \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} + P \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{k^2 - a^2} \right]^2. \quad (8.20)$$

Тогда из формул (8.19) и (8.20) с учетом множителей типа  $(2\pi)$  получим

$$\sigma(k^2) = \frac{1}{2\pi} F(k^2) \left\{ \pi^2 \sigma^2(k^2) + \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} + P \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{k^2 - a^2} \right]^2 \right\}. \quad (8.21)$$

Мы будем рассматривать это соотношение как интегральное уравнение, которое следует разрешить относительно неизвестной функции  $\sigma(k^2)$ , выразив ее через функцию  $F(k^2)$ . Заметим, что оно нелинейно и задача его решения представляется весьма трудной.

Для нас, однако, решение уравнения (8.21) полезно не само по себе; еще полезнее тот факт, что это уравнение имеет решение с необходимыми свойствами только тогда, когда функция  $F(k^2)$  убывает достаточно быстро при  $k^2 \rightarrow \infty$ . Поскольку  $F(k^2) \geq F_n(k^2) \geq 0$ , то определенные ограничения накладываются, в частности, и на асимптотическое поведение функции  $F_2(k^2)$ , которая связана с вершинной функцией. Прежде всего установим именно эту связь.

Сравнивая формулы (8.14) и (8.16) и переходя в импульсное пространство, получаем

$$F_2(k^2) = -(2\pi)^4 \int dq \text{Sp} \{ \Gamma(q - k, q) S^{(+)}(q) \times \\ \times \bar{\Gamma}(q, q - k) S^{(-)}(q - k) \}. \quad (8.22)$$



В подынтегральном выражении импульсы обоих фермионов на энергетической поверхности совпадают. Иными словами, с учетом свойств  $\delta$ -функций, входящих в функции  $S^{(\pm)}(q)$ , имеет место равенство  $(q-k)^2 = M^2 = = q^2$ . В силу этого, как мы уже знаем, функция  $\Gamma(q-k, q)$  зависит только от единственного независимого скаляра, который можно образовать из ее аргументов, а именно от  $k^2$ . Поэтому для псевдоскалярных бозонов удастся определить скалярную (инвариантную) вершинную функцию  $f(k^2)$  с помощью равенства

$$\Gamma(q-k, q) = f(k^2) \gamma_5, \quad (8.23)$$

где следует считать  $q^2 = M^2$ .

Теперь интеграл в формуле (8.22) можно вычислить непосредственно, поскольку множители  $f$  не зависят от  $q$ . В результате получим

$$F_2(k^2) = (4\pi)^{-1} |f(k^2)|^2 \theta(k^2 - 4M^2) (k^2)^{1/2} (k^2 - 4M^2)^{1/2}. \quad (8.24)$$

Это и есть то искомое соотношение между функцией  $F_2(k^2)$  и вершинной функцией  $f(k^2)$ , которое будет главным объектом нашего рассмотрения.

Вернемся теперь к проблеме получения информации о точной функции  $F$  из условия разрешимости уравнения (8.21). Удобно несколько упростить внешний вид уравнения, обозначив

$$\frac{k^2 - 9m^2}{8m^2} = t; \quad 8m^2 \sigma(k^2) = \rho(t); \quad \frac{F(k^2)}{16\pi m^2} = k(t). \quad (8.25)$$

Тогда формула (8.21) примет вид

$$\rho(t) = k(t) \left\{ \pi^2 \rho^2(t) + \left[ \frac{1}{t+1} + P \int_0^\infty \frac{dt' \rho(t')}{t-t'} \right]^2 \right\}. \quad (8.26)$$

Стоит отметить, что нижний предел в интеграле соответствует  $k^2 = 9m^2$ ; поскольку  $\pi$ -мезоны псевдоскалярны, то промежуточное состояние с наименьшей массой, дающее отличный от нуля вклад в функцию  $\rho$ , — это состояние с тремя  $\pi$ -мезонами.

Искомое условие будет получено в следующем параграфе с помощью искусных приемов. Пока же установим, что уравнение (8.26) можно решить относительно

функции  $\rho(t)$ , обладающей необходимыми свойствами, тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\int_0^{\infty} \frac{dt k(t)}{(t+1)^2} \equiv I \leq 1. \quad (8.27)$$

Перепишывая формулу (8.27) в терминах  $F$  и  $k^2$ , получаем

$$I = \frac{1}{(2\pi)} \int_{(3m)^2}^{\infty} dk^2 \frac{F(k^2)}{(k^2 - m^2)^2} \leq 1.$$

Поскольку  $F(k^2) \geq F_2(k^2) \geq 0$ , то в точности такое же неравенство имеет место для интеграла  $I_2$ , построенного с помощью функции  $F_2$ . Используя выражение (8.24), получим

$$I_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{4M^2}^{\infty} dk^2 \frac{(k^2)^{1/2} (k^2 - 4M^2)^{1/2}}{(k^2 - m^2)^2} |f(k^2)|^2 \leq 1. \quad (8.28)$$

Иными словами, должен существовать интеграл

$$\int dk^2 |f(k^2)|^2 / k^2,$$

и поэтому обязательно должен иметь место предельный переход

$$f(k^2) \rightarrow 0 \text{ при } k^2 \rightarrow \infty. \quad (8.29)$$

Это и есть та теорема, которую мы собирались установить. Остается только провести доказательство неравенства (8.27) и выяснить ее физический смысл.

### § 8.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим центральное неравенство (8.27) как условие разрешимости уравнения (8.26) относительно функции  $\rho(t)$ , выраженной через  $k(t)$ . Прежде всего важно отметить, что уравнение (8.26) можно переписать в виде

$$H(t) \equiv \left\{ \frac{1}{1+t} + \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{t-t'+i\epsilon} \right\}^{-1} \left. \vphantom{H(t)} \right\} \quad (8.30)$$

Действительно, избавившись от иррациональности в знаменателе справа, можно снова восстановить уравнение (8.26). Безусловно решающим является обстоятельство, на которое мы уже указывали: функция  $H^{-1}(t)$  — это точное представление Лемана для функции распространения. Кроме того, можно видеть, что наличие возможных нулей у функции распространения должно привести к появлению дополнительных полюсов функции  $H(t)$ .

Определим далее вспомогательную функцию  $g(z)$  комплексной переменной  $z$  следующим равенством:

$$g(z) = \int_0^{\infty} \frac{dtk(t)}{(t+1)^2} \cdot \frac{1}{z-t}. \quad (8.31)$$

Функция  $g(z)$  аналитична в комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль действительной оси от 0 до  $+\infty$ . Используя (8.30), мы можем записать  $g(z)$  в виде

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2(z-t)} \frac{1}{2\pi i} [H(t) - H^*(t)] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)(z-t)} \left\{ \frac{1}{1 + (t+1) \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{t-t'+i\epsilon}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 + (t+1) \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{t-t'-i\epsilon}} \right\}. \quad (8.32) \end{aligned}$$

Правую часть этого соотношения можно рассматривать как контурный интеграл вдоль замкнутого контура  $C$  в направлении против часовой стрелки в комплексной плоскости переменной  $t$ . Контур  $C$  состоит из окружности бесконечно большого радиуса, прямой, примыкающей вплотную к вещественной оси снизу от  $+\infty$  до 0; окружности малого радиуса, огибающей начало координат; прямой, примыкающей вплотную к вещественной оси сверху от 0 до  $+\infty$ . Интеграл по окружности бесконечно большого радиуса обращается в нуль, так что

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt}{(z-t)(t+1) \left[ 1 + (t+1) \int_0^\infty \frac{dt' \rho(t')}{t-t'} \right]}. \quad (8.33)$$

Интеграл в правой части равенства (8.33) можно вычислить с помощью теоремы Коши, если известны все полюса подынтегрального выражения, т. е. все нули знаменателя. Всегда существует один нуль при  $t=-1$  с вычетом  $(z+1)^{-1}$  и другой нуль при  $t=z$  с вычетом

$$\frac{-1}{(z+1) \left[ 1 + (z+1) \int_0^\infty \frac{dt' \rho(t')}{z-t'} \right]}.$$

Наконец, следует выяснить, может ли обращаться в нуль последний множитель в знаменателе соотношения (8.33), т. е. можно ли удовлетворить равенству

$$\frac{1}{t+1} = - \int_0^\infty \frac{dt' \rho(t')}{t-t'}, \quad (8.34)$$

или, иными словами, имеет ли функция распространения нули. Комплексные нули можно сразу исключить из рассмотрения. Действительно, предположим, что  $t = x + iy$  является решением уравнения (8.34) и приравняв мнимые части, найдем

$$\frac{-iy}{(x+1)^2 + y^2} = +iy \int_0^\infty \frac{dt' \rho(t')}{(x-t')^2 + y^2}.$$

Но поскольку  $\rho \geq 0$ , последнее соотношение может иметь место только при  $y=0$ .

Итак, исследуем уравнение (8.34) для вещественных  $t=x$ . Левая часть этого уравнения всегда вещественна; правая же часть вещественна только при  $x < 0$ , если, конечно, функция  $\rho(t')$  не имеет нулей. (Исследование исключительного случая, когда  $\rho(t')$  обладает нулем, мы предоставляем читателям в качестве упражнения.) В соответствии со сказанным положим в (8.34)  $t = -|x|$ . Правая часть соотношения (8.34) при  $x < 0$  положительно определена, следовательно, то же самое утверж-

дение справедливо и для левой части уравнения. Поэтому

$$-1 \leq x \leq 0. \quad (8.35)$$

Правая часть равенства (8.34) — монотонно убывающая функция, в то же время при условии (8.35) его левая часть оказывается возрастающей функцией с минимальным значением  $+1$ . Значит, если

$$\int_0^{\infty} dt' \rho(t')/t' < 1,$$

то уравнение вообще не имеет решений. При

$$\int_0^{\infty} dt' \rho(t')/t' > 1$$

в пределах области значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству (8.35), существует одно и только одно решение. Наконец, если

$$\int_0^{\infty} dt' \rho(t')/t' = 1,$$

то решением уравнения (8.34) является конечная точка интервала  $x=0$ . Итак, если

$$\int_0^{\infty} dt' \rho(t')/t' \geq 1,$$

то подынтегральное выражение (8.33) имеет дополнительный полюс при  $t=x$ , обязанный своим происхождением соответствующему нулю функции распространения. Вычет в этом полюсе можно найти, анализируя поведение подынтегрального выражения в окрестности точки  $t=x$ . Тогда множитель в знаменателе, обращающийся в нуль, в точке  $t=x$  можно записать в виде

$$(t-x) \left\{ \frac{d}{dt} \left[ 1 + (t+1) \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{t-t'} \right] \right\} \Big|_{t=x}.$$

Положив  $t=x$  и в других множителях знаменателя, получим следующее выражение для вычета:

$$\frac{1}{(z-x)(x+1) \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{x-t'} - (x+1) \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{(x-t')^2}}.$$

Это выражение можно упростить, заметив, что при  $t=x$  уравнение (8.34) выполняется в полюсе тождественно; поэтому если дополнительный полюс существует, то вычет в нем равен

$$\frac{-1}{(z-x) \left[ 1 + (x+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{(x-t')^2} \right]} \equiv \frac{-1}{(z-x) C} \quad (8.36)$$

Уравнение (8.36) служит для определения константы  $C$ . Очевидно, что  $C \geq 0$ . Объединяя все три вычета, перепишем формулу (8.33) в виде

$$g(z) = \left\{ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1) \left[ 1 + (z+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dt' \rho(t')}{z-t'} \right]} - \frac{1}{C(z-x)} \right\}. \quad (8.37)$$

Когда дополнительный полюс отсутствует, последний член в равенстве (8.37) следует отбросить. Если вспомнить определения (8.31) и (8.30) для функций  $g(z)$  и  $H(z)$  соответственно, то (8.37) можно переписать следующим образом:

$$H(z) = (z+1) \left\{ 1 - (z+1) \int_0^{\infty} \frac{dtk(t)}{(t+1)^2(z-t)} - C \frac{z+1}{z-x} \right\}. \quad (8.38)$$

Фактически необходимый критерий разрешимости уравнения (8.26) можно вывести непосредственно из формулы (8.38), не находя самого решения в замкнутом виде. Тем не менее сначала получим решение, а затем вернемся к формуле (8.38) и установим соответствующий критерий.

Итак, займемся процедурой нахождения решения уравнения (8.26). Для этого, обратив обе части соотношения (8.38), устремим переменную  $z$  сверху к вещественной оси:  $z \rightarrow t+i\varepsilon$ . Далее используем для функции  $H^{-1}(t+i\varepsilon)$  формулу (8.30), выделим слева и справа

мнимые части и избавимся от иррациональности в знаменателях в правой части. В результате получим выражение

$$\rho(t) = \frac{k(t)}{(t+1)^2} \left\{ \left[ 1 - (t+1) P \int_0^{\infty} \frac{dt' k(t')}{(t-t')(t'+1)^2} - C \frac{t+1}{t-x} \right]^2 + \frac{\pi^2 k^2(t)}{(t+1)^2} \right\}^{-1}. \quad (8.39)$$

Это и есть решение исходного уравнения (8.26), выражающее функцию  $\rho(t)$  через  $k(t)$ .

Возвратимся теперь к формуле (8.38) и запишем условие, приводящее к приемлемой функции  $\rho(t)$ , т. е. к функции, обладающей всеми свойствами, присущими спектральной функции Лемана.

В силу свойств функции распространения функция  $H(z)$  вещественна и отрицательна при  $z < -1$ ; поэтому такое же утверждение справедливо и относительно правой части выражения (8.38). В этой области значений  $z$  первый множитель справа, т. е.  $(z+1)$ , уже отрицателен; следовательно, выражение в фигурных скобках должно быть положительным. В частности, такая же ситуация должна иметь место и при  $z \rightarrow -\infty$ . Осуществляя предельный переход в фигурных скобках, получим

$$\left\{ 1 - \int_0^{\infty} \frac{dk(t)}{(t+1)^2} - C \right\} \geq 0. \quad (8.40)$$

Нетрудно узнать в интеграле неравенства (8.40) выражение  $I$ , фигурирующее в формуле (8.27). Поскольку константа  $C$ , если она существует, положительна, то из формулы (8.40) немедленно следует искомое неравенство

$$I \leq 1. \quad (8.41)$$

#### § 8.4. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, доказано, что вершинная функция  $f(k^2)$  при  $k^2 \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Сделаем здесь лишь несколько заключительных замечаний о физической стороне обсуждаемой проблемы.

Все установленные выше неравенства были получены в предположении о положительной определенности лемановой спектральной функции  $\sigma(k^2)$ . Поэтому нарушение полученного результата должно было бы означать наличие состояний с отрицательной нормой, т. е. «дúхов».

*Всякая теория, (точная) вершинная функция которой не стремится к нулю, включает дúхи.*

Это положение находит подтверждение в модели Ли, разрешимость которой определяется тем фактом, что ее точная вершинная функция равна своему первому приближению в теории возмущений, т. е. константе. В силу сформулированной выше теоремы модель должна включать дúхи, и они действительно были найдены явно еще до того, как стала известна эта теорема.

В этой связи отметим, что в обычной перенормированной теории возмущений вершинная функция, вычисленная с точностью до любого конечного порядка, не обладает должным асимптотическим убыванием.

Далее необходимо отметить наличие связи между использованным выше центральным условием (8.27) и неравенством Лемана для константы перенормировки поля  $Z_3$ . Вспомним, что отождествить константу перенормировки можно, в частности, с помощью соотношения (7.10). Используя его совместно с выражением (8.38) для функции  $H(z)$ , получим

$$Z_3^{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} zH^{-1}(z) = \{1 - I - C\}^{-1},$$

$$Z_3 = 1 - I - C. \quad (8.42)$$

Последнее равенство несколько проясняет физический смысл неравенства (8.40) по сравнению с результатом Лемана (7.14) относительно  $Z_3$ .

Наконец, коснемся еще одного вопроса, имеющего некоторое значение для приложений. Он связан с различием между вершинной функцией  $\Gamma = \gamma_5 f(k^2)$  на рис. 8.4 и формфактором  $\tau$  на рис. 8.2. Экспериментатора в конечном счете интересует сумма *всех* фейнмановых графов, т. е. величина  $\tau$ . Однако, когда обе фермионные линии принадлежат энергетической поверхности (как выше), функции  $\tau$  и  $\Gamma$  связаны формулой (8.6). В пределе при больших значениях  $k^2$ , используя соот-



ношение  $\Delta_F'/\Delta_F \sim k^2 \Delta_F'$  совместно с соотношением (7.10), находим

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} \tau(k^2) = \gamma_5 Z_3^{-1} \lim_{k^2 \rightarrow \infty} f(k^2). \quad (8.43)$$

Итак, хотя выше точно доказано предельное равенство  $\lim_{k^2 \rightarrow \infty} f(k^2) = 0$ , из выражения (8.43) следует, что при  $Z_3 \rightarrow 0$  (что должно иметь место в перенормируемых теориях) о более удобной для использования функции  $\tau(k^2)$  ничего нельзя сказать. Поэтому теорема Лемана—Симанзика—Циммермана, так же как и представление Лемана, более полезна как пробный камень аппарата теории поля, чем как механизм для интерпретации непосредственно наблюдаемых величин; об этом, в частности, свидетельствует высказанное выше следствие из теории модели Ли.

В то же время стоит, быть может, подчеркнуть следующее обстоятельство. Если заведомо ослабить полученный нами результат относительно вершинной функции, предположив с самого начала, что константа  $Z_3^{-1}$  конечна (это, разумеется, совершенно нереалистическая гипотеза), то можно найти гораздо более простое доказательство рассматриваемой теоремы. Достаточно просто непосредственно рассчитать вклад нуклон-антинуклонных состояний в спектральные функции Лемана и потребовать в качестве необходимого условия конечности  $Z_3$  более быстрого, чем  $1/k^2$ , убывания этих функций. Разобраться в деталях этого доказательства мы предоставляем читателям в качестве упражнения.

## § 8.5. «ДУХИ» В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом параграфе будет показано, что при нарушении определенных условий векторное пространство состояний должно содержать состояния с отрицательной нормой. Последнее приводит к отрицательным вероятностям и делает трудной и, вообще говоря, невозможной последовательную физическую интерпретацию теории. Прежде всего мы увидим, что даже в пределах теории возмущений приходится сталкиваться с духовыми состояниями, не говоря уже о более экзотических теориях. Затем в гл. 17 будет рассмотрена полностью разрешимая нерелятивистская модель (модель Ли), в которой можно выяснить источник подобных усложнений, вызываемых состояниями с отрицательными нор-

мами. В этом частном случае им оказывается неэрмитовость гамильтониана. Будет показано, что для модели Ли не существует, вообще говоря, никакой физической интерпретации, совместной с теорией частиц, в противоположность формализму Гупта—Блейлера в квантовой электродинамике, где соответствующие трудности не связаны с неэрмитовостью наблюдаемых и могут быть устранены.

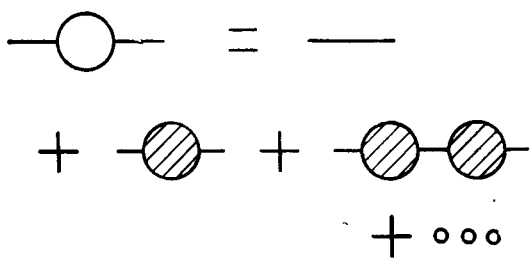


Рис. 8.6.

Величиной, чувствительной к наличию духовых состояний, является, конечно, функция распространения (фeyнманова двухточечная функция). В (перенормируемой) теории возмущений функция распространения представляет собой сумму вкладов всех графов Фейнмана с двумя внешними линиями. Удобно ввести сумму  $\Pi(p^2)$  всех *собственных* графов с двумя внешними линиями. Собственными графами называются те графы, которые нельзя расщепить на две несвязные части, разорвав одну внутреннюю линию. С помощью  $\Pi$  точную функцию распространения  $\Delta_F'(p^2)$  можно представить в виде

$$\Delta_F'(p^2) = \Delta_F + \Delta_F \Pi \Delta_F + \Delta_F \Pi \Delta_F \Pi \Delta_F + \dots, \quad (8.44)$$

как это показано на рис. 8.6.

Формула (8.44) характерна для теории возмущений: она не имеет двойников ни в какой другой схеме, не включающей итерационную процедуру. Правая часть выражения (8.44) — геометрическая прогрессия, которая сходится при

$$|\Pi(p^2) \Delta_F(p^2)| < 1. \quad (8.45)$$

Если неравенство (8.45) имеет место, то ряд (8.44) можно просуммировать:

$$\Delta'_F(p^2) = \Delta_F(p^2) \{1 - \Delta_F(p^2) \Pi(p^2)\}^{-1}. \quad (8.46)$$

Равенство (8.46) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_F &= \{\Delta_F^{-1} - \Pi\}^{-1}; \\ [\Delta'_F]^{-1} &= [\Delta_F]^{-1} - \Pi = H(p^2). \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

Здесь мы воспользовались формулой (8.30) для функции  $H(p^2)$ .

В то же время если неравенство (8.45) не выполнено, то соответствующий ряд расходится и теряет смысл. Можно предполагать, что условие (8.45) нарушается либо при изменении  $p^2$ , либо при увеличении какого-то другого параметра, характеризующего  $\Pi(p^2)$ . Заметим, что сама функция  $\Pi(p^2)$  представляет собой бесконечный ряд по степеням константы связи  $g$ , который не всегда можно аппроксимировать каким-либо конечным числом членов. Если желательно остаться в пределах строгой формулировки законов, управляющих итерационной процедурой, то выражение (8.46) следует перегруппировать, сохранив только те степени  $g$ , с точностью до которых известна сама функция  $\Pi$ . В данном параграфе, наоборот, сделаны попытки использовать полное выражение (8.46) в сочетании с неким приближением для функции  $\Pi$ . Подобные попытки обусловлены стремлением расширить область применимости результатов, полученных итерационной процедурой. Поэтому предполагается, что то специфическое выражение для  $\Pi$ , которое мы имеем в виду, должным образом аппроксимирует точную функцию.

Существует несколько возможностей, позволяющих обеспечить сходимость ряда (8.44), и важно четко их различать. Аналогичные возможности имеются и для разложений по теории возмущений любых других амплитуд, подобных формфакторам или элементам  $S$ -матрицы.

1. Неравенство (8.45) справедливо при всех значениях  $g$  и всех значениях  $p^2$ .

2. Неравенство (8.45) имеет место только для ограниченной области значений  $g$  и  $p^2$ ; предельное значение  $p^2$  может зависеть от  $g$ , и наоборот. Эта возмож-

ность представляется наиболее разумной, хотя бы по аналогии с обычной квантовой механикой. Та же самая аналогия наводит на мысль просуммировать этот ряд в его области сходимости в замкнутой форме (8.46). Затем функцию (8.46) можно аналитически продолжить, постулируя, таким образом, справедливость формулы (8.46) для всех значений  $g$  и  $p^2$ , даже для тех, для которых первоначальное разложение расходилось. Именно эту возможность мы будем использовать в дальнейшем.

3. Неравенство (8.45) несправедливо ни для одного значения  $g$  и  $p^2$ , и соответствующий ряд расходится при всех (ненулевых) значениях  $g$ . В этом случае можно сделать два противоположных вывода: либо незаконна аппроксимация функции  $\Pi$  конечным числом членов, либо теория возмущений, строго говоря, лишена смысла. Не существует ни одного сколько-нибудь серьезного аргумента против любого из этих выводов.

Предположим временно, что из перечисленных выше возможностей реализуется возможность 2. Аналитическое продолжение функции (8.46), конечно, единственно. Поэтому задача сводится фактически к исследованию разумности аналитического продолжения с физической точки зрения. По аналогии с результатами анализа  $s$ -числовых дифференциальных уравнений наиболее правдоподобной представляется мысль о том, что аналитическое продолжение приводит к правильным математическим решениям надлежащих уравнений поля. Если это так, то подлежит исследованию следующий вопрос. Претерпевают ли соответствующие физические характеристики разрывное изменение в точке нарушения неравенства (8.45)? Трудно вообразить себе возможность утвердительного ответа, если нарушение неравенства (8.45) связано с изменением  $p^2$ . Напротив, представляется вполне реальным существование некоторого критического параметра типа константы связи, при котором должно измениться соответствие между физической интерпретацией и математическим формализмом. Мы рассмотрим эту проблему некоторым косвенным путем.

Заметим, что подобное сравнительно рациональное перечисление допустимых вариантов возможно только после проведения перенормировки; до осуществления перенормировки массы и поля функция  $\Pi(p^2)$  является

расходящейся величиной, так что параметр разложения сам оказывается бесконечным.

Итак, рассмотрим функцию распространения в рамках теории возмущений в соответствии с возможностью 2. Для начала свяжем функцию  $\Pi(p^2)$  с функциями, которые встречались выше при обсуждении теоремы Лемана—Симанзика—Циммермана. Для этого вспомним выражение (8.38) для обратной функции распространения:

$$\Delta'_F(z) = \left\{ (z+1) \left[ 1 - (z+1) \int_0^\infty \frac{dtk(t)}{(t+1)^2(z-t)} - C \frac{z+1}{z-x} \right] \right\}^{-1}.$$

(В этих обозначениях  $t = (p^2 - 9m^2)/8m^2$ , так что однополюсный полюс находится в точке  $t = -1$ , состояния непрерывного спектра начинаются с  $t = 0$ , в то время как вакуумное состояние с  $p^2 = 0$  находится при  $t = -9/8$ .)

Член, включающий множитель  $C$ , присутствует в этой формуле только при условии

$$\int_0^\infty dt p(t)/t \geq 1. \quad (8.48)$$

Поскольку интеграл (8.48) конечен, то это неравенство будет всегда нарушаться для достаточно малых  $g$ ; поэтому в рамках теории возмущений обязательно имеет место равенство

$$\Delta'_F(z) = \left\{ (z+1) - (z+1)^2 \int_0^\infty \frac{dtk(t)}{(t+1)^2(z-t)} \right\}^{-1}. \quad (8.49)$$

Сравнивая формулы (8.49) и (8.47), немедленно получаем

$$\Pi(t) = [(t+1)^2]^{-1} \int_0^\infty \frac{dt'k(t')}{(t'+1)^2(t-t')}. \quad (8.50)$$

Множитель  $(t+1)^2$ , приводящий в точке  $t = -1$  к нулю второго порядка, фигурирует в обычной перенормированной теории. Представление (8.50) можно также вывести непосредственно в любом конечном порядке по  $g$ , исследуя вклады от соответствующих графов Фейнмана.

Соотношение (8.49) очевидным образом (хотя, по-видимому, и вводя в заблуждение) указывает на физическую интерпретацию радиуса сходимости ряда теории возмущений. Из формулы

$$\Delta'_F(z) = \{z + 1 - \Pi(z)\}^{-1} \quad (8.51)$$

следует, что этот ряд начинает расходиться в той точке, в которой у функции распространения возникает дополнительный полюс. Но из представления Лемана известно, что появление такого полюса сигнализирует о существовании состояния с дискретной массой, т. е. связанного со значением массы, соответствующим  $t = t_B$ :

$$t_B + 1 - \Pi(t_B) = 0. \quad (8.52)$$

Мы вновь подчеркиваем, что вывод подобного рода считался бы вполне естественным в обычной квантовой механике.

В данном же случае необходимо, прежде чем делать какие-либо заключения, установить следующие два факта. Во-первых, полюс должен быть расположен при некотором положительном значении квадрата массы:

$$-9/8 \leq t_B. \quad (8.53)$$

Во-вторых, вычет  $R$  в этом полюсе должен быть положительным, поскольку в силу представления Лемана знак вычета совпадает со знаком нормы «связанного состояния». Подставив функцию (8.50) в выражение (8.52), нетрудно убедиться (см. § 8.3), что величина  $t_B$  должна быть отрицательной. Обозначив

$$-t_B = B > 0, \quad (8.54)$$

перепишем равенство (8.52) в виде

$$-\frac{1}{1-B} = \int_0^{\infty} \frac{dtk(t)}{(B+t)(t+1)^2}. \quad (8.55)$$

Поскольку правая часть в этой формуле положительна, то  $B > 1$ ; последнее неравенство представляется несколько неестественным, ибо в этом случае связанное состояние имеет массу меньше массы пиона. Кроме того, не существует, очевидно, никаких твердых гарантий, обеспечивающих отсутствие у уравнения (8.55) решений при  $B > 9/8$ , приводящих к связанному состоянию с мнимой массой.

Однако наиболее неблагоприятная ситуация складывается при исследовании вычета  $R$ . Исходя из соотношений (8.51) и (8.50) можно написать

$$R = \left\{ \frac{d}{dz} \left[ z + 1 - (z + 1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dk(t)}{(t + 1)^2 (z - 1)} \right] \right\}^{-1} \Big|_{z=-B},$$

где  $B$  определяется формулой (8.55). Непосредственное дифференцирование и подстановка выражения (8.55) приводит к следующему равенству:

$$R = \left\{ -1 + \frac{(B-1) \int_0^{\infty} \frac{dk(t)}{(t+1)^2 (B+t)^2}}{\int_0^{\infty} \frac{dk(t)}{(B+t)(t+1)^2}} \right\}^{-1}. \quad (8.56)$$

Поэтому вычет  $R$  положителен или отрицателен в соответствии с соотношениями

$$\int_0^{\infty} \frac{dk(t)}{(t+1)^2 (B+t)^2} [(B-1) - (B+t)] \geq 0. \quad (8.57)$$

Но подынтегральное выражение слева отрицательно (функция  $k(t)$  положительно определена); значит, связанное состояние, если оно существует, действительно имеет отрицательную норму, поскольку вычет в форме (8.56) отрицателен.

Чтобы несколько прояснить ситуацию, предположим, для простоты, что функция  $k(t)$  имеет вид  $g^2 k_0(t)$ , где  $g$  играет роль константы связи, а  $k_0(t)$  имеет заданную функциональную форму. Тогда формула (8.55) принимает вид

$$\frac{1}{g^2} = (B-1) \int_0^{\infty} \frac{dk_0(t)}{(B+t)(t+1)^2} \equiv J_0(B). \quad (8.58)$$

Рассмотрим поведение  $J_0$  в зависимости от  $B$ . Поскольку  $J_0(1) = 0$  и

$$\frac{dJ_0}{dB} = \int_0^{\infty} \frac{dk_0(t)}{(t+1)(B+t)^2} > 0,$$

то  $J_0(B)$  с ростом  $B$  увеличивается монотонно и

$$\lim_{B \rightarrow \infty} J_0(B) = \int_0^{\infty} \frac{dtk_0(t)}{(t+1)^2} = I_0,$$

где интеграл  $I_0$  определяется аналогично интегралу  $I$  [см. (8.27)]. Поэтому, если интеграл  $I_0$  конечен, то существует критическое значение  $g_{crit}^2$  такое, что для  $g^2 < g_{crit}^2$  никаких дѹховых полюсов не появляется. С другой стороны, если  $J_0(B) \rightarrow \infty$  при  $B \rightarrow \infty$ , то  $g_{crit}^2 = 0$  и при всяком конечном значении  $g^2$  появляется дѹховое состояние. Именно эта ситуация реально имеет место в рамках любого конечного порядка теории возмущений. Правда, при малых значениях  $g^2$  дѹховый полюс лежит далеко слева от физической области, где его влияние можно считать малым, чем и остается утешиться.

Итак, напрашивается вывод, что непосредственное аналитическое продолжение рядов теории возмущений с помощью замкнутого выражения (8.46) не является физически оправданной процедурой, пока не найдена приемлемая физическая интерпретация состояний с отрицательной нормой. А ргіогі нельзя отрицать возможность такой интерпретации, о чем, в частности, свидетельствует успешное применение индефинитной метрики Гупта и Блейлером в электродинамике. Чтобы получить более детальное представление о сверхъестественном мире дѹхов, мы рассмотрим в гл. 17 одну точно решаемую, хотя и нековариантную, модель Ли, в которой также фигурируют дѹхи.

## Глава 9

### ФОРМФАКТОР

#### § 9.1. ВВЕДЕНИЕ

В начале предыдущей главы уже говорилось, что по сравнению с двухточечными функциями трехточечные практически не изучены. Однако область их физических применений значительно шире. Здесь мы ограничимся рассмотрением фурье-образов тех конкрет-



ных трехточечных функций, которые представляют наиболее прямой физический интерес.

Чтобы продемонстрировать физический смысл трехточечных функций, рассмотрим для определенности рассеяние электронов на заряженных скалярных мезонах. Рассеяние вызвано электромагнитным взаимодействием. Поскольку константа этого взаимодействия мала, мы

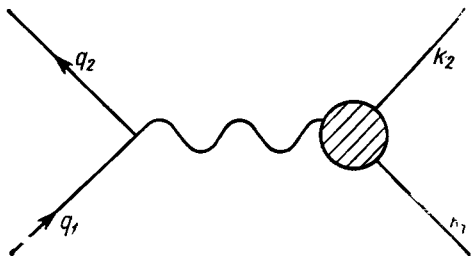


Рис. 9.1

учитываем его лишь в низшем порядке. Со своей стороны, мезоны участвуют еще и в других, сильных, неэлектромагнитных взаимодействиях, которые усложняют эффективную связь их с электромагнитным полем. Все диаграммы Фейнмана, дающие вклад в такое рассеяние, можно изобразить рис. 9.1. Здесь  $q_1$  и  $q_2$  — импульсы налетающего и рассеянного электронов,  $k_1$  и  $k_2$  — импульсы налетающего и рассеянного мезонов соответственно. В обозначениях гл. 4 относящаяся к этой диаграмме инвариантная амплитуда рассеяния имеет вид

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\frac{\omega_{q_1} \omega_{q_2}}{m_e^2}} \langle q_2 | s^\lambda(0) | q_1 \rangle \times \\ \times \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \sqrt{4\omega_{k_1} \omega_{k_2}} \langle k_2 | s_\lambda(0) | k_1 \rangle, \quad (9.1)$$

где  $s_\lambda$  — оператор плотности электромагнитного тока, а  $(k_1 - k_2)^{-2}$  — фотонная функция распространения. Поскольку мы учитываем лишь низший возможный порядок по  $e$  и поскольку электроны не участвуют в сильных взаимодействиях, можно сразу написать

$$\sqrt{\frac{\omega_{q_1} \omega_{q_2}}{m_e^2}} \langle q_2 | s^\lambda(0) | q_1 \rangle = e \bar{u}(q_2) \gamma^\lambda u(q_1). \quad (9.2)$$

Это выражение соответствует электрон-фотонной вершине на рис. 9.1. Напротив, сильные взаимодействия мезонов усложняют фотон-мезонную вершину, и для нее нельзя написать такую простую формулу. Предмет настоящей главы — определение выражения для этой вершины и для других, подобных ей.

Мезон-фотонная вершина представляет собой вектор. Поскольку в нашем распоряжении только два линейно независимых вектора  $(k_1 \pm k_2)$ , можно, не теряя общности, записать

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle = (k_1 + k_2)_\lambda f + (k_1 - k_2)_\lambda g. \quad (9.3)$$

Две функции  $f$  и  $g$  называются формфакторами; они зависят от импульсов  $k_1$  и  $k_2$ . Из этих импульсов можно построить три независимых скаляра:  $k_1^2$ ,  $k_2^2$  и  $k_1 k_2$ . Первые два равны квадрату массы мезона  $\mu^2$ , так что  $f$  и  $g$  зависят лишь от одной скалярной переменной, в качестве которой можно выбрать либо  $k_1 k_2$ , либо  $(k_1 + k_2)^2$ , либо  $(k_1 - k_2)^2 = t$ .

Однако в силу двух независимых причин  $g$  обращается в нуль. Одна из этих причин появляется лишь в частном случае, когда ток  $s_\lambda$  сохраняется:

$$\partial^\lambda s_\lambda = 0 = [P^\lambda, s_\lambda]. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в соотношение (9.3), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | [P^\lambda, s^\lambda] | k_1 \rangle = \\ &= \sqrt{4\omega_1\omega_2} (k_2 - k_1)_\lambda \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle = \\ &= (k_2^2 - k_1^2) f + (k_1 - k_2)^2 g. \end{aligned}$$

Но  $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$ , и поэтому коэффициент при  $f$  тождественно обращается в нуль; с коэффициентом при  $g$  этого не происходит, и поэтому обратиться в нуль должна сама функция  $g$ .

Второй, более общий аргумент опирается не на сохранение тока, а на трансформационные свойства при пространственном и временном отражениях. Поэтому эти же рассуждения применимы к любой эрмитовой плотности вектора, преобразующегося аналогично  $s_\lambda$  (т. е. к любой плотности вектора, который можно добавить к  $s_\lambda$ , не изменив свойств вещественности и сим-

метрий последнего). Прежде всего отметим, что из эрмитовости оператора  $s_\lambda$  следуют соотношения:

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle^* = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 | s_\lambda | k_2 \rangle;$$

$$(k_1 + k_2)_\lambda f^* + (k_1 - k_2)_\lambda g^* = (k_1 + k_2)_\lambda f - (k_1 - k_2)_\lambda g,$$

т. е.

$$f = f^*; \quad g = -g^*.$$

С другой стороны, оператор  $s_\lambda$  инвариантен относительно комбинированного отражения пространства и обращения времени. Его пространственные компоненты меняют знак при каждом отражении, а знак временной компоненты не меняется. Воспользуемся этим обстоятельством. Пусть  $P$  — (унитарный) оператор пространственного отражения, а  $T$  — (антиунитарный) оператор обращения времени. Тогда одночастичные состояния с нулевым спином  $|k_1\rangle$  и  $|k_2\rangle$  не меняются при действии на них оператора  $PT$ , поскольку каждый пространственный импульс дважды меняет знак: сначала под действием  $P$ , а затем под действием  $T$ . Учитывая, что оператор  $T$  антиунитарен, получаем, как следствие инвариантности  $s_\lambda$  относительно  $PT$ -преобразования, соотношение

$$(TP) s_\lambda (TP)^{-1} = s_\lambda^c,$$

где индекс  $c$  означает результат действия оператора комплексного сопряжения; иными словами, матричные элементы  $s_\lambda^c$  получаются из матричных элементов  $s_\lambda$  как результат операции комплексного сопряжения. Таким образом, имеем

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \{ \langle k_2 | (TP)^{-1} \} \times$$

$$\times (TP) s_\lambda (TP)^{-1} \{ (TP) | k_1 \rangle \} = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda^c | k_1 \rangle =$$

$$= \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle^*;$$

$$(k_1 + k_2)_\lambda f + (k_1 - k_2)_\lambda g = (k_1 + k_2)_\lambda f^* + (k_1 - k_2)_\lambda g^*;$$

$$f = f^*; \quad g = g^*.$$

В соответствии со свойствами вещественности, выведенными выше из эрмитовости оператора  $s_\lambda$ , имеет место равенство  $g = -g^* = g^* = 0$ . (Отметим, что для обоих

доказательств обращения  $g$  в нуль существенно иметь частицы одного и того же сорта в бра- и кет-векторах. Матричные же элементы токов между различными одночастичными состояниями содержат оба члена  $(k_1 \pm k_2)$ . Такая ситуация возникает при слабом распаде  $K \rightarrow \pi + e + \bar{\nu}$ .

Итак, имеем

$$|\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | s_\lambda | k_1 \rangle = (k_1 + k_2) f(t), \quad (9.5)$$

где по определению заряда

$$f(0) = e. \quad (9.6)$$

При такой нормировке нетрудно проверить, что в пределе  $k \rightarrow 0$  должно выполняться равенство  $\langle k | s_\lambda | k \rangle = \delta_{\lambda 0} e$ .

Чтобы упростить в дальнейшем некоторые рассуждения, рассмотрим также гипотетическую ситуацию, в которой роль электромагнитного поля играет безмассовое скалярное поле  $\alpha$ , а электроны заменены скалярными частицами, слабо связанными с  $\alpha$ . Тогда взаимодействие  $A^\lambda s_\lambda$  заменяется взаимодействием с лагранжианом

$$L = \alpha(x) j(x),$$

где источник  $j$  — эрмитов скалярный оператор. Выражение, соответствующее тождеству (9.1), принимает теперь вид

$$\mathfrak{M} = g \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \{ \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | j(0) | k_1 \rangle \}, \quad (9.7)$$

где  $g$  — константа связи «электронов» с полем  $\alpha$ , а величина в фигурных скобках называется скалярным формфактором. Она представляет собой скалярный аналог функции  $f(t)$ , входящей в формулу (9.5).

## § 9.2. СКАЛЯРНЫЙ ФОРМФАКТОР. ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ И ДИСПЕРСИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Здесь мы ограничимся скалярными формфакторами во избежание связанных со спином и зарядом усложнений, не существенных с точки зрения чисто дисперсионной теории. Наша цель — получить максимально воз-

можную информацию о формфакторах без рассмотрения динамических деталей сильных взаимодействий. Результаты полезны и для динамических теорий, поскольку соответствующие рассуждения применимы к матричным элементам *любого* локального оператора  $j(x)$ . Для анализа общих свойств формфактора безразлично, является ли  $j$  источником слабо связанного поля, взаимодействия с которым учитываются лишь в низшем порядке, или это оператор источника сильно взаимодействующего поля, каким был введенный в предыдущих главах оператор  $\eta$ .

Определим три связанные друг с другом функции:

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | j(0) | k_1 \rangle = I(t), \quad t = (k_1 - k_2)^2; \quad (9.8)$$

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, out | j(0) | 0 \rangle = J(s), \quad s = (k_1 + k_2)^2; \quad (9.9)$$

$$\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, in | j(0) | 0 \rangle = K(s), \quad s = (k_1 + k_2)^2. \quad (9.10)$$

Векторный аналог функций  $J$  входит, например, в выражение инвариантной амплитуды процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ , которая, подобно (9.1), записывается в виде

$$\left\{ \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle \pi^+ \pi^-, out | s_\lambda(0) | 0 \rangle \right\} \frac{1}{(k_{\pi^+} + k_{\pi^-})^2} \times \\ \times \left\{ \langle 0 | s_\lambda(0) | e^+ e^-, in \rangle (\omega_{e^+} \omega_{e^-} m_e^2)^{1/2} \right\}.$$

Точно так же векторный аналог функции  $K$  связан с процессом  $\pi^+\pi^- \rightarrow e^+e^-$ . В дальнейшем будет ясно, почему именно  $s$  и  $t$  выбраны в качестве аргументов. Физически осмысленны их значения в области  $t \leq 0$  и  $s \geq 4 \mu^2$ . Предположим, что оператор  $j$  инвариантен относительно комбинации пространственного отражения  $P$  и обращения времени  $T$ . Тогда, повторяя рассуждения предыдущего параграфа, получим

$$J(s) = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, out | (TP)^{-1} (TP) j(0) (TP)^{-1} (TP) | 0 \rangle = \\ = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, in | j^c(0) | 0 \rangle = \\ = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, in | j(0) | 0 \rangle^*; \quad (9.11) \\ J(s) = K^*(s).$$

Эти соотношения установлены, конечно, лишь для физически реализуемых значений  $s$ , т. е. для  $s \geq 4 \mu^2$ . Ана-

логично нетрудно видеть, что для физически допустимых значений  $t$ ,  $t \leq 0$  функция  $I$  вещественна, т. е.

$$\begin{aligned} I(t) &= \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | (TP)^{-1} (TP) j(0) (TP)^{-1} (TP) | k_1 \rangle = \\ &= \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | j^c(0) | k_1 \rangle = \sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_2 | j(0) | k_1 \rangle^*; \\ I(t) &= I^*(t). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Проведем для  $I(t)$  свертывание частицы  $k_1$ , применив схему свертывания с запаздывающим коммутатором и считая  $|k_1\rangle$  состоянием  $|k_1, in\rangle$ :

$$I(t) = -i \sqrt{2\omega_2} \int_{x_0 \rightarrow -\infty} dx e^{-ik_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle k_2 | j(0) \varphi_{in}(x) | 0 \rangle.$$

Можно заменить  $j(0)\varphi_{in}(x)$  на  $\theta(-x)[j(0), \varphi_{in}(x)]$ , поскольку выбор  $\theta$ -функции обусловлен пределом  $x_0 \rightarrow -\infty$ , а добавляемый при этом компенсирующий член равен

$$-\sqrt{2\omega_2} \langle k_2 | a_{k_1}^*(in) j(0) | 0 \rangle = -\delta_{k_1, k_2} \langle 0 | j | 0 \rangle.$$

Во всех реальных случаях вакуумное среднее оператора  $j$  обращается в нуль по соображениям симметрии. Например,  $j$  может оказаться псевдоскаляром либо нечетным относительно зарядового сопряжения. В результате несложных выкладок получим

$$\begin{aligned} I(t) &= i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{-ik_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle k_2 | \theta(-x) [j(0), \varphi(x)] | 0 \rangle = \\ &= i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{-ik_1 x} K_x \langle k_2 | \theta(-x) [j(0), \varphi(x)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Аналогично, свертывая частицу  $k_1$  в выражении для  $K(s)$ , имеем

$$K(s) = i \sqrt{2\omega_2} \int_{x_0 \rightarrow -\infty} dx e^{ik_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle k_2 | \varphi_{in}(x) j(0) | 0 \rangle.$$

В силу указанных выше причин можно заменить  $\varphi_{in}(x)j(0)$  на  $\theta(-x)[\varphi_{in}(x), j(0)] = -\theta(-x)[j(0), \varphi_{in}(x)]$ . Тогда

$$\begin{aligned} K(s) &= i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \times \\ &\times K_x \langle k_2 | \theta(-x) [j(0), \varphi(x)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Рассматривая  $K$  и  $I$  как функции двух векторных аргументов  $[K(s) = K(a, b), s = (a+b)^2$  и  $I(t) = I(a, b), t =$

$= (a-b)^2]$  и сравнивая формулы (9.13) и (9.14), получаем

$$I(a, b) = K(-a, b).$$

Это и есть соотношение перекрестной симметрии, имеющее следующий смысл: если скалярный аргумент  $t$  функции  $I$  численно равен скалярному аргументу  $s$  функции  $K$ , то  $I$  и  $K$  равны друг другу. Иными словами,

$$I(s) = K(s). \quad (9.15)$$

Поскольку  $K(s)$  физически измерима только для  $s \geq 4\mu^2$ , а  $I(s)$  — только для  $s \leq 0$ , формуле (9.15), как и всем соотношениям перекрестной симметрии, можно придать смысл только посредством аналитического продолжения. Возможность аналитического продолжения будет гарантирована дисперсионным представлением, которое мы сейчас установим. Однако сначала обсудим роль оператора Клейна — Гордона  $K_x$ . Поскольку функции  $I$ ,  $K$  и  $J$  связаны теперь соотношениями (9.11) и (9.15), ограничимся рассмотрением  $K$ .

Внося оператор  $K_x$  внутрь матричного элемента в равенстве (9.13), получаем

$$K(s) = i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \langle k_2 | \{ \theta(-x) |j(0), \eta(x)\} - \\ - 2\delta(x_0) |j(0), \dot{\varphi}(x)\} - \dot{\delta}(x_0) |j(0), \varphi(x)\} | 0 \rangle. \quad (9.16)$$

Назовем первый член невырожденным, а последние два — вырожденными. Оба вырожденных члена — одновременные коммутаторы, и для сохранения явной ковариантности их необходимо рассматривать совместно. Осуществив в последнем члене интегрирование по частям по  $x_0$ , получим

$$i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \langle k_2 | \{ i\omega_1 |j(0), \varphi(x)\} + \\ + |j(0), \dot{\varphi}(x)\} \delta(x_0) | 0 \rangle.$$

Вводя обозначение

$$K(s) = K_{\text{выр}}(s) + K_{\text{невыр}}(s), \quad (9.17)$$

мы можем записать

$$K_{\text{выр}}(s) = \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \langle k_2 | \{ -\omega_1 \delta(x_0) \times \\ \times |j(0), \varphi(x)\} + i\delta(x_0) |j(0), \dot{\varphi}(x)\} | 0 \rangle.$$

Согласно аксиоме причинности, одновременные коммутаторы должны исчезать всюду, за исключением точки  $x=0$ . Для простоты предположим, что  $j$  содержит  $\varphi$ , но не содержит  $\partial_0\varphi$ . Тогда коммутационные соотношения (2.46) дают:

$$\delta(x_0) [j(0), \varphi(x)] = 0;$$

$$\delta(x_0) [j(0), \dot{\varphi}(x)] = -i\delta(x) Z_3^{-1} \frac{\partial j}{\partial \varphi}.$$

Сейчас мы не хотим конкретизировать вид оператора  $j$  и поэтому просто обозначим оператор  $Z_3^{-1} \delta j / \delta \varphi$  через  $\Lambda$ . Тогда можно преобразовать интеграл в выражении для  $K_{\text{выр}}$  к виду

$$K_{\text{выр}} = \sqrt{2\omega_2} \langle k_2 | \Lambda(0) | 0 \rangle = \text{const.}$$

С другой стороны, если  $j$  содержит производные оператора  $\varphi$ , то первый коммутатор также дает вклад в  $K_{\text{выр}}$ . Предлагаем показать в качестве упражнения, что вырожденные члены, вообще говоря, имеют вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1x} \langle k_2 | \{ Q(x) \delta(x) + Q^\mu(x) \partial_\mu \delta(x) + \dots \} | 0 \rangle = \\ & = \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1x} \langle k_2 | \{ Q(x) \delta(x) - ik_{1\mu} Q^\mu(x) + \\ & + \partial_\mu Q^\mu(x) \} \delta(x) + \dots \} | 0 \rangle = \sqrt{2\omega_2} \{ \langle k_2 | Q(0) | 0 \rangle - \\ & - ik_{1\mu} \langle k_2 | Q^\mu(0) | 0 \rangle + \dots \}. \end{aligned}$$

Первый член, очевидно, представляет собой скалярную константу; второй член  $\sqrt{2\omega_2} \langle k_2 | Q^\mu | 0 \rangle$  является четырех-вектором и поэтому имеет вид  $\text{const} \cdot k^\mu$ ; итак, в самом общем случае

$$\begin{aligned} K_{\text{выр}} &= A_0 + A_1(k_1 k_2) + \dots = \\ &= B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_n s^n, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — константы. Именно из-за простой полиномиальной зависимости  $K_{\text{выр}}$  от  $s$  эту компоненту и называют вырожденной. Напротив,  $K_{\text{невyr}}$  оказывается значительно более сложной функцией  $s$ .

Теперь, отбросив вырожденные члены и опустив соответствующие индексы, посмотрим, какова ожидаемая форма дисперсионного представления для  $K$  и, если это возможно, как его доказать. Поскольку уже известно, что  $K$  — функция только одной переменной  $s$ , то можно



без потери общности рассматривать  $K$  в определенной системе отсчета. Выберем в качестве таковой систему покоя частицы  $k_2$ , в которой

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= 0, \quad \omega_2 = \mu, \quad |k_2\rangle = |\mu\rangle; \\ s &= (k_1 + k_2)^2 = 2(\mu^2 + k_1 k_2) = 2(\mu^2 + \mu\omega_1); \\ \omega_1 &= (s - 2\mu^2)/2\mu; \\ k_1 &= \mathbf{n} |k_1| = \mathbf{n} \sqrt{s(s - 4\mu^2)/4\mu^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

(здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{k}_1$ ). Впредь систематически будем рассматривать  $K$  как функцию  $\omega_1$ ; итак,

$$\begin{aligned} K(\omega_1) &= i \sqrt{2\mu} \int dx e^{i\omega_1 x_0 - i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \theta(-x_0) \times \\ &\times \langle \mu | |j(0), \eta(x)| | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.20)$$

( $\mathbf{k}$  есть сокращенный символ для  $\mathbf{n} \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2}$ ).

Теперь займемся множителем  $\theta(-x_0) e^{i\omega_1 x_0}$  под знаком интеграла в выражении (9.20). Поскольку  $x_0$  отрицательна, этот множитель экспоненциально убывает в нижней полуплоскости комплексного  $\omega_1$ . Поэтому можно считать, что весь интеграл как функция  $\omega_1$  должен быть аналитичен в нижней полуплоскости. Иными словами, можно ожидать, что для  $\text{Im} \omega_1 < 0$  интеграл по  $x$  должен сходиться. Однако это утверждение нуждается в доказательстве, поскольку под знаком интеграла есть еще множитель  $\exp\{-inx \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2}\}$ , который может экспоненциально расти (по  $x$ ) для некоторых значений  $\omega_1$ , мешая тем самым сходимости интеграла по  $x$ . Проблема строгого доказательства дисперсионного представления и состоит в преодолении этой трудности. Для нашего случая строгое доказательство существует; оно дано, например, Гольдбергером (Goldberger, 1961) и Гольдбергером и Ватсоном (Goldberger, Watson, 1964). Однако во многих физически интересных случаях доказательства нет, но с практической и педагогической точки зрения овладеть доказательством утверждения менее важно, чем усвоить эвристическую основу его для различных частных случаев, один из которых мы рассматривали выше. При этом наиболее разумно перейти в частную систему отсчета и оперировать конкретной переменной, подобной  $\omega_1$ , а не ковариантными величинами.

Примем теперь без доказательства предполагаемые аналитические свойства и будем игнорировать любые проблемы сходимости, к которым мы вернемся позднее. Тогда можно записать функцию  $K(z)$  с помощью интеграла Коши по контуру  $C_1$ , изображенному на рис. 9.2.

Такое представление справедливо для  $\text{Im } z < 0$ :

$$K(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_1} dz' K(z') / (z' - z).$$

Предположив, что вклад от интеграла по полуокружности исчезает на бесконечности (т. е. что  $K$  достаточно быстро стремится к нулю для больших  $|z|$ ), можем написать

$$K(z) = -(2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' K(\omega') / (\omega' - z). \quad (9.21)$$

Представляющая физический интерес функция  $K(\omega_1)$  получается как граничное значение  $K(z)$ , когда  $z$  стремится снизу к точке  $\omega_1$  на действительной оси. Отметим, что определенная таким образом функция  $K(z)$  обращается в нуль, когда  $\text{Im } z > 0$ .

Далее, определим вспомогательную функцию  $J(\omega_1)$ , которая получается из  $K(\omega_1)$  при замене  $\theta(x)$  на  $\theta(-x)$  и изменении общего знака:

$$J(\omega_1) = -i \sqrt{2\mu} \int dx e^{i\omega_1 x_0 - i k_1 x} \theta(x) < \mu | |j(0), \eta(x)| | 0 >. \quad (9.22)$$

Мы обозначили эту функцию  $J$ , поскольку она совпадает с выражением (точнее, с его невырожденной компонентой), возникающим в результате применения процедуры свертывания к формфактору (9.9) и последующего перехода к системе отсчета, где  $k_2 = 0$ . Проверить это предлагается в качестве упражнения. В силу тех же эвристических аргументов, согласно которым функция  $K(\omega)$  аналитична в нижней полуплоскости, функция  $J(\omega)$  аналитична в верхней полуплоскости. Поэтому ее можно выразить через интеграл Коши по контуру  $C_2$  (см. рис. 9.2) для  $\text{Im } z > 0$ :

$$J(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} dz' J(z') / (z' - z).$$

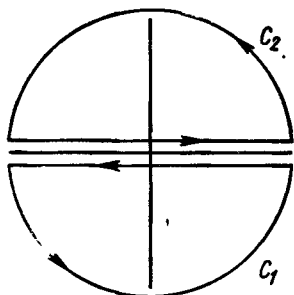


Рис. 9.2

Снова предполагая, что вклад от интеграла по полуокружности на бесконечности обращается в нуль, имеем

$$J(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' J(\omega') / (\omega' - z).$$

Функция  $J(z)$  дает  $J(\omega_1)$ , когда  $z$  стремится к  $\omega_1$  сверху, и исчезает автоматически, когда  $\text{Im} z < 0$ .

Наконец, можно определить функцию  $H(z)$ , обладающую следующими свойствами: 1)  $H(z) = K(z)$ , когда  $\text{Im} z < 0$ ; 2)  $H(z) = J(z)$ , когда  $\text{Im} z > 0$ ; 3)  $H(z)$  аналитична в  $z$ -плоскости всюду, исключая возможные разрывы вдоль вещественной оси и полюсы на ней. Все эти свойства очевидным образом удовлетворяются, если  $H(z)$  определена тождеством

$$\begin{aligned} H(z) &= K(z) + J(z) = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' [J(\omega') - K(\omega')] / (\omega' - z). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Конечно, в выражении (9.23) верхняя и нижняя полуплоскости разделены разрезом, идущим вдоль всей вещественной оси. Поэтому пока невозможно заключить что-либо о поведении функции  $H(z)$  в одной полуплоскости, исходя из ее поведения в другой полуплоскости. Рассмотрим теперь выражение в квадратных скобках под знаком интеграла (9.23). Согласно соотношениям (9.20) и (9.22)

$$\begin{aligned} |J(\omega_1) - K(\omega_1)| &= -i \sqrt{2\mu} \int dx e^{i\omega_1 x_0 - i k_1 x} \times \\ &\times \{\theta(x) + \theta(-x)\} \langle \mu | j(0), \eta(x) | 0 \rangle = \\ &= -i \sqrt{2\mu} \int dx e^{i k_1 x} \langle \mu | j(0), \eta(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.24)$$

(Здесь  $k_1$  — сокращенный символ для вектора  $\{\omega_1, \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2}\}$ .) Отметим, что в выражении (9.23) соотношение (9.24) должно выполняться для всех вещественных  $\omega_1$ , как физических (т. е.  $\omega_1 > \mu$ ), так и нефизических.

Подставив в соотношение (9.24) полную систему промежуточных состояний (см. § 6.3), получим

$$|J(\omega_1) - K(\omega_1)| = -i \sqrt{2\mu} \sum_s \int dx e^{i k_1 x} \langle \mu | j(0) | s \rangle \times$$

$$\begin{aligned} & \times \langle s | \eta(0) | 0 \rangle e^{i p_s x} - \langle \mu | \eta(0) | s \rangle \times \\ & \times \langle s | j(0) | 0 \rangle e^{i(k_2 - p_s)x} \end{aligned}$$

( $k_2$  — сокращенный символ вектора  $\{\mu, 0\}$ ). Выполняя интегрирование по  $x$ , можем написать

$$\begin{aligned} |J(\omega_1) - K(\omega_1)| &= -i(2\pi)^4 \sqrt{2\mu} \sum_s \{ \langle \mu | j | s \rangle \times \\ & \times \langle s | \eta | 0 \rangle \delta(k_1 + p_s) - \langle \mu | \eta | s \rangle \times \\ & \times \langle s | j | 0 \rangle \delta(k_1 + k_2 - p_s) \}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Наличие  $\delta$ -функции в первой сумме показывает, что  $p_s^2 = k_1^2 = \mu^2$ , т. е. вклад могут дать только одночастичные состояния. Но этот вклад равен нулю, поскольку  $\langle k | \eta | 0 \rangle = 0$ . Присутствие  $\delta$ -функции во второй сумме означает, что вклад в нее дают члены только с такими значениями  $k_{10} = \omega_1$ , которые можно представить в виде  $(p_{s0} - k_{20}) = (p_{s0} - \mu)$ , где  $p_{s0}$  — энергия некоторого физического состояния. Однако вакуумное состояние  $|0\rangle = |s\rangle$  вклада не дает из-за наличия множителя  $\langle \mu | \eta | 0 \rangle = 0$ . Ни в одном из реальных случаев не дают вклада и одночастичные состояния. Дело в том, что обязательно обращается в нуль матричный элемент тока между вакуумом и одночастичным состоянием,  $\langle k | j | 0 \rangle$ , даже если исходный матричный элемент тока между вакуумом и двухчастичным состоянием (т. е.  $K$ ) не равен нулю. Например, для псевдоскалярных частиц и скалярного оператора  $j$  матричный элемент  $\langle k | j | 0 \rangle$  должен обращаться в нуль в силу требования инвариантности относительно отражений. В этом случае сумма начинается с двухчастичных состояний, для которых  $(p_{s0})_{\min} = 2\mu$ , что дает  $\omega_{\min} = \mu$ . Следовательно, разность  $[J(\omega) - K(\omega)]$  равна нулю для  $\omega < \mu$ , и поэтому

$$H(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\mu}^{\infty} d\omega [J(\omega) - K(\omega)] / (\omega - z). \quad (9.26)$$

Правая часть равенства (9.26) определяет функцию, аналитическую в комплексной плоскости переменной  $z$  с разрезом вдоль вещественной оси от  $\mu$  до  $+\infty$ . Следовательно,  $H(z)$  допускает однозначное аналитическое продолжение с нижнего берега разреза, где она совпадает с  $K(\omega)$ , сначала на вещественную ось слева от раз-

реза, где она совпадает с  $I(\omega)$ , а затем на верхний берег разреза, где она совпадает с  $J(\omega)$ . Итак, функции  $J(z)$  и  $K(z)$ , определенные первоначально в разных полуплоскостях, фактически совпадают на вещественной оси ниже точки  $\omega = \mu$ .

Теперь перейдем из системы отсчета, в которой  $k_2 = 0$ , к ковариантной переменной  $s$ , воспользовавшись для этого соотношениями (9.19). В то же время пере-

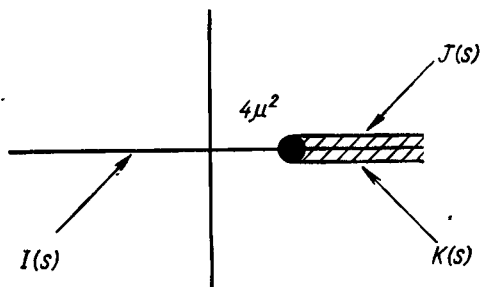


Рис. 9.3

именуем функцию  $H(z)$  в  $J(z)$  и избавимся от лишнего обозначения, которое, как показано выше, не необходимо. Поскольку переменная  $\omega_1$  линейно связана с  $s$  и поскольку значению  $\omega_1 = \mu$  соответствует  $s = 4\mu^2$ , равенства (9.26) и (9.25) можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} J(z) &= \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \sigma(s)/(s-z); \\ \sigma(s) &= (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \times \\ &\times \sum_s \langle k_2 | \gamma_1 | s \rangle \langle s | j | 0 \rangle \delta(k_1 + k_2 - p_s); \\ & \quad s = (k_1 + k_2)^2. \end{aligned} \right\} (9.27)$$

Физическая функция  $K(s)$  получается из  $J(z)$ , если положить  $z \rightarrow s - i\epsilon$  ( $s \geq 4\mu^2$ ); физическая функция  $J(s)$  получается, если положить  $s \rightarrow s + i\epsilon$  ( $s \geq 4\mu^2$ ); физическая функция  $I(s)$  получается при  $z \rightarrow s$  ( $s \leq 0$ ), причем предельный переход можно реализовать по любому направлению, поскольку ниже  $4\mu^2$  на вещественной оси нет разреза. Рис. 9.3 иллюстрирует сказанное.

Выше показано, что при  $s < 0$  функция  $I(s)$  вещественна. Это означает, что спектральная функция  $\sigma(s)$  должна быть вещественной; следовательно,

$$\pi \tau(s) = \pm \operatorname{Im} J(s \pm i\varepsilon), \quad (9.28)$$

в чем легко убедиться, воспользовавшись известным тождеством  $(s' - s \mp i\varepsilon)^{-1} = P/(s' - s) \pm i\pi\delta(s' - s)$ .

Полезно вывести вещественность функции  $\sigma(s)$  и непосредственно из (9.27). Взяв сумму по полному набору ин-состояний, получим

$$\begin{aligned} \sigma^*(s) &= (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \sum_s \langle k_2 | \eta | s, in \rangle^* \times \\ &\times \langle s, in | j | 0 \rangle^* \delta(k_1 + k_2 - p_s). \end{aligned}$$

Но благодаря  $TP$ -инвариантности имеет место равенство  $\langle k_2 | \eta | s, in \rangle^* = \langle k_2 | \eta | s', out \rangle$ , и аналогичное утверждение справедливо для матричного элемента  $\langle s, in | j | 0 \rangle^*$ . Операция  $TP$  обращает спины и не меняет импульсов; таким образом, состояние  $|s'\rangle$  получается из  $|s\rangle$  в результате обращения спинов; состояние бесспиновых частиц  $|k_2\rangle$  при этом не меняется. Кроме того, оператор  $T$  переводит ин-состояния в аут-состояния. Итак,

$$\begin{aligned} \sigma^*(s) &= (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \sum_s \langle k_2 | \eta | s', out \rangle \langle s', out | j | 0 \rangle \times \\ &\times \delta(k_1 + k_2 - p_s). \end{aligned}$$

Но сумма берется по всем состояниям; поэтому штрих над  $s'$  означает изменение порядка суммирования и может быть опущен. Аналогично суммирование можно производить как по ин-, так и по аут-состояниям, поскольку обе системы состояний полны и поскольку начинать можно с любой; поэтому, как и ожидалось,  $\sigma^*(s) = \sigma(s)$ .

Таким образом, функция  $J(z)$  обладает следующими свойствами.

1. Она аналитична в плоскости с разрезом и точкой ветвления на так называемом нормальном пороге  $z = 4\mu^2$  [и с другими точками ветвления дальше на разрезе, соответствующими порогам высших промежуточных состояний, дающих вклад в  $\sigma(s)$ ].

2.  $J(z)$  — вещественная аналитическая функция, т. е.

$$\left. \begin{aligned} [J(s + i\varepsilon) - J(s - i\varepsilon)] &= 2\pi i \operatorname{Im} J(s + i\varepsilon); \\ J^*(z) &= J(z^*). \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

3. В качестве своих граничных значений она имеет физические функции  $J(s)$ ,  $K(s)$  и  $I(s)$ , как это показано на рис. 9.3; точнее, ее граничными значениями являются невырожденные компоненты этих функций.

Свойства 1—3 — основной результат. Конкретное представление функции  $J(z)$  можно рассматривать как интеграл Коши по контуру, показанному на рис. 9.2; это представление влечет свойства 1—3; кроме того, оно подразумевает, что интеграл по большому кругу обращается в нуль на бесконечности. Этот вопрос мы обсудим в дальнейшем; пока же отметим, что если интеграл в (9.27) не сходится, необходимо сделать в нем достаточное число «вычитаний». Например, после одного вычитания в точке  $z=0$  мы получили бы

$$J(z) = J(0) + z \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'-z)} \sigma(s'). \quad (9.30)$$

При этом константу от вырожденной части можно было бы включить в  $J(0)$ , и тогда бы функция  $J(z)$  представляла собой полный формфактор.

### § 9.3. НЕСКАЛЯРНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Теперь следует перейти к некоторым техническим проблемам, непременно возникающим при рассмотрении дисперсионных представлений для всех формфакторов, кроме скалярного формфактора для скалярных частиц. Уже в § 9.1 можно было понять, что в таких случаях формфакторы содержат, как правило, несколько лоренц-инвариантных функций. В гл. 10 и в последующих главах это утверждение станет очевидным. Каждая из таких функций является коэффициентом при одном из линейно независимых тензоров, построенных из импульсов и векторов поляризации частиц. (Иногда именно эти скалярные функции и называют формфакторами.) В любом конкретном случае необходимо определить: 1) сколько имеется таких скалярных коэффициентных функций,

2) каковы их аналитические свойства и 3) как выбрать эти функции наиболее удобным образом.

Число независимых функций находят обычно прямым подсчетом. Выписывают все тензоры с нужными трансформационными свойствами относительно собственных преобразований Лоренца. Затем определяют минимальное число независимых тензоров с помощью свободных уравнений для ин- и аут-полей с учетом свойств инвариантности системы относительно пространственных и временных отражений, зарядового сопряжения, изотопических вращений и т. п.

Проблемы 2 и 3 связаны друг с другом, и им посвящена обширная и временами трудно читаемая литература. Мы ограничимся детальным разбором проблемы 2 для некоторых конкретных случаев, которые могут пролить свет на общий метод. Вопрос о выборе наиболее удобных формфакторов будет рассмотрен на примере электромагнитных формфакторов нуклона в гл. 15.

Простейший нетривиальный случай — это электромагнитный формфактор скалярных частиц, определенный соотношением (9.5). Как мы видели, в этом случае имеется единственная скалярная функция  $f$ . Задача сводится, таким образом, к эвристическим рассуждениям (см. § 9.2), выявляющим ее аналитическую структуру. Осуществим, как и ранее, свертку одной из частиц, например, из кет-состояния, перейдем в систему, где  $k_2=0$ . Рассмотрим отдельные компоненты вектора:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\equiv i\sqrt{2\mu} \int dx e^{-ik_1x} K_x \langle \mu | \theta(-x) |s_0(0), \varphi(x)| |0\rangle = \\ &= (\mu + k_{10}) f(k_{10}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv i\sqrt{2\mu} \int dx e^{-ik_1x} K_x \langle \nu | \theta(-x) |s(0), \varphi(x)| |0\rangle = \\ &= n\sqrt{k_{10}^2 - \mu^2} f(k_{10}). \end{aligned}$$

В силу приведенных выше эвристических аргументов  $\Gamma_\lambda$  как функции  $k_{10}$ , аналитичны в плоскости с разрезом. Эту информацию следует использовать для анализа свойств скалярной функции  $f$ . Наиболее удобно это сделать косвенным путем. Первый решающий шаг — опера-



ция скалярного умножения компонент  $\Gamma_\lambda$  на  $(k_1+k_2)^\lambda$ , в результате чего вводится скалярная функция  $T(t)[t = (k_1-k_2)^2]$ :

$$T = (k_1 + k_2)^\lambda \Gamma_\lambda = (k_1 + k_2)^2 f(t) = (4\mu^2 - t) f(t).$$

Отметим, что  $T$  не является матричным элементом какого-либо скалярного локального оператора; единственный такой оператор,  $\partial^2 s_\lambda$ , который можно построить из  $s_\lambda$ , обращается в нуль. Тем не менее последние два равенства позволяют предположить, что функция  $T$  удовлетворяет дисперсионному представлению обычного вида, и идентифицировать ее точки ветвления обычным методом, ссылаясь на суммы по промежуточным состояниям. Другими словами, вспомогательная функция  $T$  обладает лишь стандартными особенностями, выявляемыми такими суммами; они называются «динамическими» особенностями. Напротив, функция  $f(t) = T(t)/(4\mu^2 - t)$  может обладать дополнительным по сравнению с  $T$  полюсом в точке  $t=4\mu^2$ . Такие дополнительные особенности коэффициентных функций, не содержащиеся в суммах по промежуточным состояниям, называются «кинематическими» особенностями. Имеются ли в действительности такие особенности или нет, всегда необходимо определять с помощью детального физического анализа.

В данном случае функция  $T(t)$  имеет при  $t=4\mu^2$  точку ветвления — нормальный порог. Остается выяснить, обращается ли  $f(t)$  в этой точке в бесконечность. Но нормальный порог — это низшая граничная точка физической области, в которой  $(k_1+k_2)_\lambda f(t)$  представляет собой наблюдаемый матричный элемент  $\sqrt{4\omega_1\omega_2} \times \langle k_1 k_2, out | s_\lambda | 0 \rangle$ . В своей физической области матричный элемент не может обратиться в бесконечность; следовательно, не может обращаться в бесконечность и функция  $f(t)$ . Поэтому функция  $T(t)$  должна иметь на пороге нуль достаточно высокого порядка, чтобы  $f$  оставалась конечной. Итак, показано, что  $f(t)$  не имеет кинематических особенностей.

В качестве упражнения предлагаем рассмотреть матричные элементы как сохраняющегося, так и несохраняющегося векторного тока, взятые между одночастичными бесспиновыми состояниями с неравными массами. Здесь полезно напомнить, что нормальный порог не

обязательно совпадает с границей физической области. (Эта проблема связана с лептонным распадом  $K \rightarrow \mu e \nu$ .)

В качестве второго примера рассмотрим электромагнитные формфакторы частиц с половинным спином, которые будут предметом подробного обсуждения в гл. 10 и 15. Допустим пока, что, не теряя общности, можно написать

$$\Gamma_\lambda = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{m^2}} \langle p | s_\lambda | q \rangle = \bar{u}(p) \{ \gamma_\lambda e F_1(t) - i (p_\mu - q)_\mu \sigma_{\lambda\mu} F_2(t) \} u(q),$$

т. е. имеется только два линейно независимых вектора и соответственно только два скалярных формфактора  $F_1$  и  $F_2$ . Постараемся найти выражения для  $F_1$  и  $F_2$ , не содержащие спиноров. Дисперсионное представление для  $\Gamma_\lambda$  получается в результате однократного применения операции свертывания (например, к частице в кет-состоянии). Построим следующие скалярные произведения:

$$\tilde{T}_1 \equiv \bar{u}(q) \gamma^\lambda u(p) \Gamma_\lambda;$$

$$\tilde{T}_2 \equiv \bar{u}(q) i (p - q)_\mu \sigma_{\mu\lambda} u(p) \Gamma_\lambda.$$

Свернутая форма  $\Gamma_\lambda$  может служить основанием для рабочей гипотезы: при любом конкретном выборе начальных и конечных спиновых состояний величины  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют обычному дисперсионному представлению и имеют только динамические особенности. (В качестве упражнения предлагается проверить, что спинорные комбинации, на которые умножается  $\Gamma_\lambda$ , сами аналитичны в  $t$ -плоскости с разрезом.) Следовательно, можно исключить спиноры, просуммировав по начальным и конечным спиновым состояниям, поскольку такое суммирование аналитически сходных выражений не меняет аналитических свойств. Проведя суммирование при помощи обычной техники проекционных операторов, получим

$$T_1(t) = \sum_{\text{спин}} \tilde{T}_1(t) =$$

$$= \text{Sp} \{ \gamma^\lambda (\hat{p} + m) [ \gamma_\lambda e F_1 - i (p - q)_\mu \sigma_{\mu\lambda} F_2 ] (\hat{q} + m) \} / 4m^2.$$

Аналогичное выражение можно написать для  $T_2$ . Окончательно имеем

$$eF_1 = m^2 \left\{ -T_1 \left( \frac{t}{2m^2} - 4 \right) + 6T_2 \right\} / 2(4m^2 - t)^2;$$

$$F_2 = -m \{ -6tT_1 + 4(2m^2 + t)T_2 \} / 4t(4m^2 - t)^2.$$

Поскольку  $T_1$  и  $T_2$  обладают лишь динамическими особенностями, из окончательных формул следует, что  $F_1$  может иметь кинематическую особенность лишь на нормальном пороге  $t=4m^2$ , а  $F_2$  — лишь в точках  $t=0$  и  $t=4m^2$ . Те же соображения, что и для скалярного формфактора, запрещают  $F_i$  обращаться в бесконечность при  $t=4m^2$ . В свою очередь,  $F_i$  не может обращаться в бесконечность при  $t=0$ , поскольку ее значение в этой точке представляет собой (наблюдаемый) аномальный магнитный момент частицы. Итак,  $F_1$  и  $F_2$  также не имеют кинематических особенностей. Более детальное обсуждение кинематических особенностей и выбора формфакторов и дальнейшие ссылки можно найти в работах Хирна (Hearn, 1961) и Дюрана и др. (Durand et al., 1962).

#### § 9.4. ФОРМФАКТОРЫ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Наиболее интуитивно понятный смысл электромагнитного формфактора — его связь с распределением заряда частицы в обычном трехмерном пространстве. Лучше всего эта связь демонстрируется на примере экспериментов, нацеленных на изучение распределения заряда, а именно экспериментов по рассеянию частиц слабым внешним электростатическим полем  $A^0(\mathbf{x})$ . Анализ рассеяния способен выявить всю информацию о распределении заряда вплоть до самых тонких деталей. Однако, в соответствии с принципом неопределенности, эти тонкие эффекты, соответствующие высшим компонентам фурье-образа функции распределения заряда, нельзя измерить, не сообщив частице некоторой отдачи. Поэтому физически бессмысленно говорить о статическом распределении заряда частицы, находящейся в покое. Все кажущиеся статическими измерения всегда можно считать измерением рассеяния в пределе очень малых передач импульса.

С другой стороны, в релятивистской теории нельзя говорить о жестком трехмерном распределении заряда. Поэтому лишь в нерелятивистском пределе такое распределение приобретает однозначный смысл. Но не существует какого-либо одного предпочтительного с физической точки зрения (тем более единственного) обобщения на релятивистский случай. Поэтому, к сожалению, нельзя даже говорить о распределении заряда на малых расстояниях в каком-нибудь едином для всех систем отсчета смысле. Для прощупывания его понадобились бы большие передачи импульса, которые нельзя реализовать в нерелятивистском пределе. Поэтому в дополнение к интуитивным соображениям можно привести следующие аргументы. В качестве первого шага введем понятие зарядового распределения, проведя аналогию между теорией поля и нерелятивистской теорией рассеяния на потенциале для бесспиновых частиц. Далее модифицируем потенциальную теорию, сделав ее в некотором смысле релятивистской. В начале гл. 15 будут затронуты соответствующие проблемы для частиц со спином  $1/2$ .

Прежде чем перейти к каким-либо деталям, отметим, что другие, неэлектромагнитные формфакторы допускают аналогичную интерпретацию. Разница состоит только в том, что другие формфакторы характеризуют распределение «заряда» не сохраняющегося, что «плотность заряда» не обязательно является в этих случаях плотностью временной компоненты четырех-вектора. Поэтому их конкретный физический смысл менее очевиден, хотя трехмерное распределение понимается так же, как и в электромагнитном случае.

Допустим, что внешний, не зависящий от времени потенциал  $A^0$  настолько слаб, что его влияние на частицу можно учитывать лишь в первом порядке теории возмущений. Введем распределение заряда частицы, приравняв два выражения для амплитуды рассеяния в поле такого потенциала: одно — полученное непосредственно, а второе — из теории потенциального рассеяния для частицы с протяженным распределением заряда.

Прямой метод основан на рассмотрении возмущения  $\int dx s_0(x) A^0(x)$ , которое в первом порядке приводит к следующему стандартному выражению для вероятности перехода в единицу времени из состояния, описываемого

плоской волной  $|k\rangle$ , в состоянии, описываемое плоской волной  $|k'\rangle$  с разбросом  $d^3k' = k'^2 dk' d\Omega'$ :

$$\begin{aligned} \omega d\Omega' &= 2\pi \left| \langle k' | \int dx s_0(x) A^0(\mathbf{x}) | k \rangle \right|^2 \frac{k'^2 dk' d\Omega'}{(2\pi)^3 dk_0} = \\ &= (2\pi)^{-2} \left| \tilde{A}_0(\mathbf{K}) \frac{k'_0 + k_0}{\sqrt{2k'_0 2k_0}} f(-\mathbf{K}^2) \right|^2 |k'| k'_0 d\Omega', \end{aligned} \quad (9.31)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ , а  $\tilde{A}_0(\mathbf{K})$  — фурье-образ внешнего потенциала:

$$\tilde{A}_0(\mathbf{K}) = \int dx e^{-i\mathbf{K}\mathbf{x}} A_0(\mathbf{x}). \quad (9.32)$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии  $k'_0 = k_0$ , запишем

$$\omega d\Omega = |\tilde{A}_0(\mathbf{K}) f(-\mathbf{K}^2)/2\pi|^2 k k_0 d\Omega.$$

Но дифференциальное сечение определяется формулой

$$d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = d\Omega \omega / \text{поток} = \omega d\Omega k_0 / k,$$

откуда, вводя амплитуду рассеяния  $\mathcal{A}$ , находим

$$\left. \begin{aligned} d\sigma/d\Omega &= |\mathcal{A}|^2 = |\tilde{A}_0(\mathbf{K}) f(t)/2\pi|^2 k_0^2; \\ \mathcal{A} &= \tilde{A}_0(\mathbf{K}) f(t) k_0/2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Чтобы получить нерелятивистский предел, заменим  $k_0$  на  $\mu$ :

$$\mathcal{A}_{\text{нерел}} = \tilde{A}_0(\mathbf{K}) f(t) \mu/2\pi. \quad (9.34)$$

Далее рассмотрим ту же задачу (пока еще в нерелятивистском пределе) с точки зрения уравнения Шредингера для рассеяния на потенциале. Пусть плотность заряда в точке  $\mathbf{y}$  равна  $\rho(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ , когда сама частица находится в точке  $\mathbf{x}$ . При этом частица будет обладать полной потенциальной энергией

$$V(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} A_0(\mathbf{y}) \rho(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (9.35)$$

Подставив выражение (9.35) в уравнение Шредингера

$$(\nabla^2 + \mathbf{k}^2 - 2\mu V) \psi = 0, \quad (9.36)$$

вычислим амплитуду рассеяния в первом порядке по  $V$ , т. е. в первом борновском приближении. Стандартный ответ следующий:

$$\mathcal{A}_{\text{пот}} = \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{Kx}} V(\mathbf{x}). \quad (9.37)$$

Определив фурье-образ  $\rho$  формулой

$$\rho(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{l}(\mathbf{y} - \mathbf{x})} \rho(\mathbf{l}) \quad (9.38)$$

и воспользовавшись уравнением (9.32), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{пот}} &= \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{Kx}} \int d\mathbf{y} A_0(\mathbf{y}) (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{l}(\mathbf{y} - \mathbf{x})} \rho(\mathbf{l}) = \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{y} A_0(\mathbf{y}) (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{l} e^{-i\mathbf{l}\mathbf{y}} (2\pi)^3 \times \\ &\times \delta(\mathbf{K} - \mathbf{l}) \rho(\mathbf{l}) = \frac{\mu}{2\pi} \rho(\mathbf{K}) \tilde{A}_0(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

Сравнение соотношения (9.39) с нерелятивистским пределом (9.34), полученным в прямом методе, позволяет идентифицировать формфактор  $f$  с фурье-образом функции распределения заряда  $\rho$ . Релятивистский случай мы обсудим несколько позже.

Следующая задача — связать  $\rho(\mathbf{r})$  с дисперсионным представлением для  $f$ . Запишем это представление в виде

$$f(-\mathbf{K}^2) = f(\infty) + \int ds \sigma(s)/(s + \mathbf{K}^2). \quad (9.40)$$

Подставим это выражение вместо  $\rho$  в формулу (9.38) и изменим порядок интегрирования по  $s$  и  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-3} f(\infty) \int d\mathbf{K} e^{-i\mathbf{Kr}} + \\ &+ (2\pi)^{-3} \int ds \sigma(s) \int d\mathbf{K} e^{-i\mathbf{Kr}}/(s + \mathbf{K}^2). \end{aligned}$$

Стандартные формулы

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{K} e^{-i\mathbf{Kr}} &= \delta(\mathbf{r}); \\ (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{K} e^{-i\mathbf{Kr}}/(s + \mathbf{K}^2) &= e^{-r\sqrt{s}}/4\pi r \end{aligned}$$

приводят к выражению

$$\rho(\mathbf{r}) = f(\infty) \delta(\mathbf{r}) + \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \sigma(s) e^{-r\sqrt{s}}/4\pi r. \quad (9.41)$$

Физическая интерпретация соотношения (9.41) прозрачна. Заряд величиной  $f(+\infty)$  сконцентрирован в центре мезона, в «жестком остове», представленном  $\delta$ -функцией  $\delta(\mathbf{r})$ . Остальной заряд представляет собой суперпозицию облаков с распределением по закону Юкавы в каждом. Функция  $\sigma(s)$  характеризует распределение заряда в облаке с радиусом действия  $(s)^{-1/2}$ . Нетрудно проверить, что  $\int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = f(0) = e$ , как и следовало ожидать. Ничто не запрещает величине  $f(\infty)$  иметь знак, противоположный знаку полного заряда  $e$ , но в свете изложенной интерпретации было бы удивительным (хотя и не невозможным), если бы  $f(\infty)$  оказалась бесконечной.

Предлагаем в качестве упражнения показать, что если вместо точечного (описываемого  $\delta$ -функцией) ядра заряд распределен внутри сердцевинки малого радиуса  $R$  с конечным полным зарядом в ней, то формфактор будет иметь плоский участок ниже точки  $|s| \approx R^{-2}$ . Тогда, если передачи импульсов порядка  $R^{-2}$  достижимы экспериментально, в опыте будет обнаружено наличие «жесткого остова».

Высшие моменты распределения заряда также легко выражаются через  $f$ . Например, второй момент,  $\langle r^2 \rangle$ , определяется как

$$\langle r^2 \rangle = e^{-1} \int d\mathbf{r} r^2 \rho(\mathbf{r})$$

и выражается через  $f$  следующим образом:

$$\begin{aligned} e \langle r^2 \rangle &= \int d\mathbf{r} (2\pi)^{-3} r^2 \int d\mathbf{K} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} f(-\mathbf{K}^2) = \\ &= \int d\mathbf{r} (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{K} (-\nabla_{\mathbf{K}}^2 e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}) f(-\mathbf{K}^2) = \\ &= - \int d\mathbf{r} (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{K} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{K}}^2 f(-\mathbf{K}^2) = \\ &= - \int d\mathbf{K} \delta(\mathbf{K}) \nabla_{\mathbf{K}}^2 f(-\mathbf{K}^2); \\ e \langle r^2 \rangle &= -6df(-\mathbf{K}^2)/d\mathbf{K}^2|_{\mathbf{K}=0}; \\ \langle r^2 \rangle &= e^{-1} 6df(s)/ds|_{s=0} = e^{-1} 6 \int ds \sigma(s)/s^2. \end{aligned} \quad \left. \right\} (9.42)$$

Как и ожидалось, точечная сердцевина, т. е. значение  $f(\infty)$ , не влияет на  $\langle r^2 \rangle$ , равно как и на все высшие моменты. Следует отметить, что при достаточно больших значениях  $\sigma$  момент  $\langle r^2 \rangle$  может стать сколь угодно большим, причем его величина не ограничена эффективной длиной, соответствующей пороговой массе.

Иногда полезно иметь более прямые выражения для

моментов распределения заряда, не опирающиеся на явную формулу для  $\rho$ . Чтобы получить их, воспользуемся соотношениями (9.35) и (9.37) и разложим  $A_0(\mathbf{y})$  в ряд Тейлора по степеням  $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{пот}} = & \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{x}} \int d\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \left\{ A_0(\mathbf{x}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \nabla A_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (y-x)_i (y-x)_j \nabla_{ij}^2 A_0(\mathbf{x}) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Выполним интегрирование по  $\mathbf{y}$  с учетом того, что

$$\int d\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = e; \quad \int d\mathbf{y} (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$$

(поскольку  $\rho$  сферически симметрична), а

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}-\mathbf{x}) (y-x)_i (y-x)_j &= \frac{1}{6} \delta_{ij} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^2 = \\ &= \delta_{ij} \langle r^2 \rangle / 6. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{пот}} &= \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{x}} \left\{ e A_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle \nabla^2 A_0(\mathbf{x}) + \dots \right\} = \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \left\{ e - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle \mathbf{K}^2 + \dots \right\} \tilde{A}_0(\mathbf{K}). \quad (9.43) \end{aligned}$$

Из первой части равенства (9.43) ясно видно, что величина  $\langle r^2 \rangle$  является мерой контактной связи рассеиваемой частицы с источником внешнего поля, поскольку, согласно уравнению Пуассона,  $\nabla^2 A_0 = 4\pi (s_0)_{\text{внешн.}}$ . Вторая часть равенства (9.43) получена посредством двух интегрирований по частям.

Наконец, установим, в какой мере предыдущие рассуждения можно обобщить на релятивистский случай. Очевидно, релятивистскую формулу (9.33) следует сравнивать с борновским приближением в уравнении Клейна—Гордона. Для точечной частицы во внешнем поле это уравнение имеет вид

$$\{(p_0 - eA_0)^2 - \mathbf{p}^2 - \mu^2\} \psi = 0. \quad (9.44)$$

В первом порядке по  $A_0$  оно дает (поскольку  $A_0$  не зависит от времени)

$$\{(p_0^2 - \mu^2) + \nabla^2 - 2p_0 e A_0\} \psi = \{\nabla^2 + \mathbf{k}^2 - 2k_0 e A_0\} \psi = 0. \quad (9.45)$$



Сравнивая уравнение (9.45) с уравнением Шредингера (9.36), видим, что для получения борновского приближения, основанного на разложении (9.45), нужно просто умножить на  $k_0/\mu$  соответствующее приближение, основанное на уравнении (9.36). Другими словами, дополнительный множитель  $k_0$  перед членом с потенциалом в уравнении (9.45) в точности компенсирует релятивистский множитель  $k_0$  в формулах (9.33). Попытки модифицировать уравнение (9.45) для описания протяженной частицы сопряжены с некоторой трудностью, продемонстрировать которую можно по крайней мере двумя способами. Прежде всего в релятивистской теории нельзя говорить о «плотности заряда в точке  $y$ , когда частица находится в точке  $x$ », игнорируя вопросы запаздывания и одновременности. Предположим, однако, что эту трудность можно обойти, заменив член  $2k_0eA_0$  в уравнении (9.45) произведением  $2k_0V$ , в котором потенциал  $V$  определяется уравнением (9.35); но тогда будет нарушена явная ковариантность окончательного уравнения и, следовательно, указанная процедура не может быть оправдана ссылками на исходное уравнение типа (9.44). Как подчеркивалось в начале этого параграфа, мы считаем неразумной любую попытку дать детальную физическую интерпретацию релятивистскому формфактору.

По-видимому, наиболее естественно интерпретировать результаты эксперимента по рассеянию следующим образом. Если намеренно игнорировать все указанные проблемы и анализировать результаты на основе уравнения  $(\nabla^2 + k^2 - 2k_0V)\psi = 0$ , то они *выглядят* так, как если бы мы сохранили прежнюю интерпретацию  $f$  как фурье-образа реального распределения заряда. Поскольку такая интерпретация продиктована главным образом интуицией, ее дефекты сами по себе не имеют никакой физической подоплеки.

Еще одно определение трехмерного распределения заряда предложено Саксом (Sachs, 1962). Мы опишем его метод в качестве примера, иллюстрирующего произвол, присущий всем таким определениям. Процедура Сакса (после исправления ошибки) дает для скалярных частиц результаты, сходные с описанными выше; но для частиц со спином  $1/2$  метод Сакса приводит к иным результатам. В применении к нуклонам мы обсудим эту проблему в гл. 15.

Рассмотрим нормированное одночастичное состояние

$$| \rangle = \int d\mathbf{k} \psi(\mathbf{k}) | \mathbf{k} \rangle,$$

где  $\psi(\mathbf{k})$  — нормированная волновая функция:

$$\langle | \rangle = 1 = \int d\mathbf{k} |\psi|^2.$$

Среднее значение плотности заряда в этом состоянии равно

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \langle | s_0(x) | \rangle = \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \psi^*(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}') \langle \mathbf{k} | s_0(x) | \mathbf{k}' \rangle = \\ &= \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \psi^*(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}') \frac{k_0 + k'_0}{V^4 k_0 k'_0} e^{i(k-k')x} f(t), \end{aligned}$$

где  $t = (k - k')^2$ . Конечно, функция  $\rho$  зависит в какой-то мере от реальной пространственной протяженности волнового пакета, причем такая зависимость наблюдается даже для точечной частицы. Чтобы выделить эффект собственной протяженности, Сакс предлагает путем предельного перехода  $|\psi(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k})$  свести задачу к рассмотрению покоящейся частицы, пренебрегая всеми членами, содержащими производные функции  $\psi$ . Очевидно, эти члены зависят от конкретного вида волнового пакета. После замены переменных интегрирования по формулам  $\mathbf{P} = (\mathbf{k} + \mathbf{k}')/2$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int d\mathbf{P} d\mathbf{Q} \psi^* \left( \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \right) \psi \left( \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \right) \frac{\omega_+ + \omega_-}{\sqrt{4\omega_+ \omega_-}} \times \\ &\times e^{i(\omega_+ - \omega_-)x_0 - i\mathbf{Q}x} f(t), \end{aligned}$$

где  $\omega_{\pm} = \sqrt{\left( \mathbf{P} \pm \frac{1}{2} \mathbf{Q} \right)^2 + \mu^2}$ .

Разложив функции  $\psi^*$  и  $\psi$  в ряд Тейлора вблизи точки  $\mathbf{P}$  с сохранением только главного члена  $|\psi(\mathbf{P})|^2$ , в результате предельного перехода  $|\psi|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{P})$  получим предельное равенство  $\omega_+ = \omega_-$ . Следовательно, зависимость от времени исчезает, зависящий от  $\omega$  множитель аннулируется и окончательно получается уже знакомая формула:

$$\rho_{\text{собств}} = \int d\mathbf{Q} e^{-i\mathbf{Q}x} f(-\mathbf{Q}^2).$$

Результат, который будет получен тем же методом для частиц со спином 1/2 в § 15.1, совсем иной. Недостаток метода состоит в том, что хотя *среднее значение*  $s_0(x)$

интуитивно наиболее привлекательно как определение  $\rho$ , оно все же менее непосредственно связано с наблюдаемыми в реальных опытах величинами, нежели недиагональные матричные элементы, фигурирующие в альтернативном определении, основанном на борновском приближении.

## § 9.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО МАССОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Этот параграф включен в настоящую главу для полноты изложения. Его следует читать после того, как будет просмотрен материал гл. 11.

Формфакторы зависят от двух четырех-векторов. Рассмотрим в качестве примера формфактор  $J(s)$ , определенный уравнением (9.9). Мы видели, что вследствие лоренц-инвариантности он может быть функцией только скаляров, построенных из  $k_1$  и  $k_2$ . Поскольку  $k_1^2$  и  $k_2^2$  фиксированы значением массы и равны  $\mu^2$ , непосредственный физический интерес представляет зависимость  $J$  от единственного независимого скаляра  $(k_1 + k_2)^2 = s$ . В развитой до сих пор дисперсионной теории мы интересовались лишь этой зависимостью. Но можно поставить и другие вопросы. В этом параграфе мы покажем, откуда они возникают и как, по крайней мере эвристически, решаются.

Применив процедуру свертывания к обеим частицам в соотношении (9.9), приходим к невырожденной компоненте

$$\iint dx dy e^{ik_1 x + ik_2 y} \langle 0 | T \{ \eta(x) \eta'(y) j(0) \} | 0 \rangle \quad (9.46)$$

или к аналогу этого выражения с запаздывающим коммутатором. До сих пор нас интересовала зависимость таких выражений от  $s$  как от комплексной переменной при фиксированных значениях  $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$ . Формально можно поставить также вопрос о способах продолжения функции (9.46) как функции комплексного  $k_1^2$  при фиксированных  $k_2^2 = \mu^2$  и  $s$ . Хотя эта задача, возможно, менее актуальна, чем задача продолжения по  $s$ , в дальнейшем мы увидим, что ее нельзя считать чисто академической. Если массы двух частиц различны, возникает и третий вопрос: о продолжении по  $k_2^2$  при фиксированных  $k_1^2$  и  $s$ . По поводу конкретных приложений (и доказательств) отсылаем читателя к работе Бинсера (Bin-

сег, 1960), в которой обсуждается электромагнитный формфактор нуклона.

Если переменная  $k_2^2$  фиксирована, удобно исходить из однократно свернутого выражения:

$$J_{\text{нечыр}}(k_1, k_2) = i \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \langle k_2 | \theta(x) [\eta(x), j(0)] | 0 \rangle. \quad (9.47)$$

Предлагаем, что в системе, где  $k_2=0$ , это выражение является аналитической функцией комплексной переменной  $k_{10}$  в верхней полуплоскости. В этой системе отсчета правая часть равенства (9.47) явно зависит от  $k_{10}$  и  $k_1^2$ , но не зависит от направления  $\mathbf{k}_1$ . Будем считать  $s$  фиксированной, а  $k_1^2$  — переменной. В выбранной системе отсчета эти скалярные величины связаны с  $k_{10}$  и  $k_1^2$  следующим образом:

$$k_{10} = (k_1 k_2) / \mu = (s - \mu^2 - k_1^2) / 2\mu; \quad (9.48)$$

$$k_1^2 = k_{10}^2 - k_2^2 = \{ [k_1^2 - (\mu + \sqrt{s})^2] [k_1^2 - (\mu - \sqrt{s})^2] / (2\mu)^2 \}. \quad (9.49)$$

Следовательно, *теперь* из аналитичности по  $k_{10}$  вытекает аналитичность и дисперсионное представление по  $k_1^2$ .

Применяя к (9.49) прежние рассуждения, мы видим, что дисперсионное представление по  $k_1^2$  без труда доказывается для отрицательных (и нулевого) значений  $s$ , т. е. для обобщенного матричного элемента  $\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 | j | k_2 \rangle$ . В рассматриваемом же случае для матричного элемента  $\sqrt{4\omega_1\omega_2} \langle k_1 k_2, \text{out} | j | 0 \rangle$  при  $s > 4\mu^2 > 0$  мы снова привлечем эвристические соображения. Однако пользоваться такими представлениями следует весьма и весьма осторожно, поскольку они могут оказаться просто неверными, когда внешняя переменная (подобная  $s$ ) фиксирована значением выше своего порога. Такие случаи обнаруживаются обычно при исследовании аналитических свойств некоторых простейших графов Фейнмана, дающих вклад в рассматриваемый формфактор. Имеется, однако, один строго доказанный результат, более слабый, нежели высказанные выше предположения, но достаточный в рассматриваемых ниже применениях. Речь идет о теореме Челлена и Вайтмана (Källén, Wightman, 1958), гласящей, что фи-

зическая трехточечная функция является граничным значением аналитической функции внешних масс, когда массы устремлены к вещественной оси сверху. Функцию  $J(\mu^2, z)$  всегда можно считать пределом функции  $J(\zeta, z)$  при  $\zeta \rightarrow \mu^2 + i\epsilon$ , причем  $J(\zeta, z)$  аналитична, по крайней мере, в окрестности вещественной оси  $\zeta$ . Наши эвристические соображения эквивалентны утверждению об аналитичности по  $\zeta$  в гораздо большей области. Мы не мо-

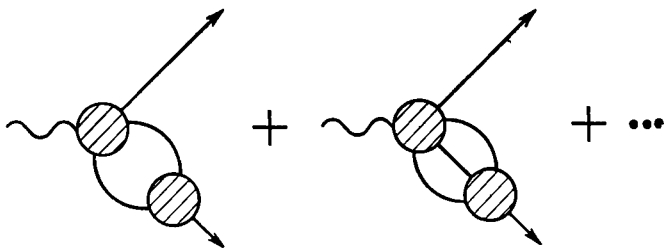


Рис. 9.4

жем входить в детали доказательства Челлена и Вайтмана и заметим только, что их результат весьма трудно доказать. Однако он выглядит чрезвычайно правдоподобным с точки зрения теории возмущений, где он очевиден и явно справедлив для каждого графа.

Формально предлагаемое дисперсионное представление по  $k_1^2$  при фиксированном  $s$  имеет ту же спектральную функцию, что и прежнее представление по  $s$  при фиксированном  $k_1^2 = \mu^2$ :

$$\begin{aligned} \sigma(s, k_1^2) &= \frac{1}{2} \sqrt{2\omega_2} \int dx e^{ik_1 x} \langle k_2 | [\eta(x), j(0)] | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2\omega_2} (2\pi)^4 \sum_n \{ \langle k_2 | \eta | n \rangle \langle n | j | 0 \rangle \delta(k_1 + k_2 - n) - \\ &\quad - \langle k_2 | j | n \rangle \langle n | \eta | 0 \rangle \delta(k_1 + n) \}. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Вторая сумма, обращавшаяся ранее в нуль в силу равенства  $k_1^2 = \mu^2$  для состояния  $|n\rangle = |k\rangle$  (для которого  $\langle k | \eta | 0 \rangle = 0$ ), теперь включает в себя все обычные дисперсионные члены, представленные на рис. 9.4. Однако первый член *вовсе не зависит от спектральной переменной  $k_1^2$* . При  $s < 4\mu^2$  он обращается в нуль; при

$s \geq 4\mu^2$ , но лежащей ниже неупругого порога единственный вклад дают сами двухмезонные состояния с тем же самым значением энергии, которому соответствует фиксированное значение  $s$ . В качестве забавного, но не совсем тривиального упражнения (браться за него следует лишь по прочтении гл. 11) мы предлагаем показать, что именно этот первый член согласует дисперсионное представление по  $k_1^2$  с теоремой Ватсона о взаимодействии в конечном состоянии (Watson, 1952; Goldberger, Watson, 1964).

## Глава 10

### ВЫЧИТАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Мы уже подчеркивали, что на основании выдвинутых эвристических соображений (и доказательств) можно говорить только об аналитических свойствах формфакторов, но нельзя ничего сказать ни о сходимости интегрального представления для невырожденной компоненты, ни о вырожденной компоненте, возникшей из одновременных коммутаторов. Вопросы эти, составляющие предмет настоящей главы, всецело лежат вне рамок чисто дисперсионной теории. Чтобы подойти к ним, необходимо привести физические аргументы или информацию иного рода, а в отсутствие таковых — какие-то новые правдоподобные предположения. Всякая вырожденная компонента и всякое вычитание, необходимое для сходимости, вводят в теорию новые константы. В отличие от спектральной функции  $\sigma$  их нельзя представить через матричные элементы операторов поля. Следовательно, эти константы играют роль фундаментальных, т. е. невычисляемых параметров, если нет возможности определить их или исключить, приняв какие-то физически обоснованные граничные условия для  $J(s)$  в некоторой конечной точке  $s$  либо при  $s \rightarrow \infty$ . Поскольку увеличение числа вспомогательных параметров — симптом плохой или, по крайней мере, слабой теории, эта сторона теории дает важное средство контроля над ней на любом ее этапе.

## § 10.1. ВЫЧИТАНИЯ И ОДНОВРЕМЕННЫЕ КОММУТАТОРЫ

Для простоты предположим, что и сам формфактор  $J(s)$ , и его вырожденная компонента конечны при бесконечных  $s$ :

$$J(z) = J_{\text{выр}} + J_{\text{невыр}}(z); \quad (10.1)$$

$$J(\infty) < \infty, J_{\text{невыр}}(\infty) < \infty. \quad (10.2)$$

Это ограничение не существенно, и читатель легко может распространить последующие рассуждения на случай, когда функция  $J(s)$  растет не быстрее некоторой степени  $s$ . Однако в свете изложенного в § 9.4 ограничение (10.2) физически привлекательно, а иногда и необходимо. Для краткости обозначим

$$J_{\text{выр}} = A; J_{\text{невыр}}(s) = F(s). \quad (10.3)$$

Тогда, по теореме Сугавара — Каназава, в самом общем случае можно написать:

$$J(z) = A + F(\infty) + \int ds \sigma(s)/(s-z); \quad (10.4)$$

$$J(z) = J(\infty) + \int ds \sigma(s)/(s-z); \quad (10.5)$$

$$J(\infty) = A + F(\infty); \quad (10.6)$$

$$F(z) = F(0) + z \int ds \sigma(s)/s(s-z); \quad (10.7)$$

$$J(z) = J(0) + z \int ds \sigma(s)/s(s-z); \quad (10.8)$$

$$J(0) = A + F(0) = J(\infty) + \int ds \sigma(s)/s. \quad (10.9)$$

Все эти соотношения мы выписали для того, чтобы понять, когда или при каких предположениях можно вычислить не только закон изменения  $J(z)$  относительно  $z$ , но и абсолютную величину  $J(z)$ .

Прежде всего, поскольку  $J(0)$  — физическая величина, она должна быть конечной. Тогда соотношение (10.9) показывает, что первоначальное предположение о конечности  $J(\infty)$  становится неверным, когда  $\int ds \sigma(s)/s$  расходится.

Далее, вспомним, что при  $A \neq 0$  ток  $j$  содержит мезонное поле. На лагранжевом языке это означает, что существует прямая связь с соответствующей фундаментальной константой, так что нечего и надеяться вычислить абсолютную величину  $J(s)$  из выписанных уравнений. В этом случае различают две возможности. Во-первых, величина постоянной  $A$  может быть известна. Так

обстоит дело для аксиального тока, рассматриваемого ниже. Тогда  $J(0)$  можно вычислить, если принять граничное условие типа  $F(\infty)=0$  (что дает  $J(0)=A + \int ds\sigma(s)/s$ ) или типа  $J(\infty)=0$ , т. е.  $F(\infty)=-A$  ( $J(0)=\int ds\sigma(s)/s$ ). Естественно, остается открытым вопрос о физической обоснованности этих условий. Во-вторых,  $A$  может формально выражаться через ненаблюдаемые перенормировочные константы, например в случае  $\pi$ -мезонного формфактора нуклона. Тогда величина  $J$  в некоторой конечной точке [в последнем примере  $J(\mu_\pi^2)$ ] называется «физической» или «перенормированной» константой связи. Она должна определяться из эксперимента, в полном согласии с перенормировочной идеологией. Может случиться, что величину  $J(0)$  удастся найти непосредственно на основании некоторых общих соображений, независимо от того, обращается  $A$  в нуль или нет. Такая ситуация характерна для важного частного случая формфактора плотности сохраняющегося тока, который мы рассмотрим более подробно в § 10.2. Во всех вариантах по иным причинам может оказаться интересным и асимптотическое поведение.

Наконец, в простейшем случае, когда по физическим соображениям прямой связи не существует,  $A=0$ . Тогда для вычисления  $J(0)$  обычно принимают дополнительное граничное условие  $F(\infty)=0$ , т. е.  $J(\infty)=0$ . Однако в гл. 16 мы рассмотрим интересный пример, когда  $J(0)$  можно вычислить исходя из более слабого условия  $F(\infty)<\infty$ .

Все эти замечания мы проиллюстрируем двумя примерами. В качестве упражнения рекомендуем показать, что лоренц-инвариантные формфакторы в обоих примерах не обладают кинематическими особенностями.

1. *Нулевая, но не определяемая вырожденная компонента;  $\pi$ -мезонный формфактор нуклона.*

Пусть  $\vec{\eta}$  — источник  $\pi$ -мезонного поля. Мезонный формфактор нуклона определяется уравнением

$$\left( V \sqrt{\frac{M^2}{\omega_N \omega_{\bar{N}}}} \right)^{-1} \langle N\bar{N}, out | \vec{\eta}(0) | 0 \rangle = \bar{u}(N) \gamma_5 \vec{\tau} v(\bar{N}) f(s), \quad (10.10)$$

где  $s=(N+\bar{N})^2$ , а спиновые индексы опущены. Мезон-нуклонная константа связи  $g$  определяется формулой

$$f(\mu^2) = g. \quad (10.11)$$



Проведя свертывание фермиона в (10.10), получим вырожденную компоненту:

$$(M/\omega_{\bar{N}})^{-1/2} \int dx e^{iN x} \bar{u}(N) \gamma_0 < \bar{N} | \delta(x_0) |\psi(x), \vec{\eta}(0)| | 0 >. \quad (10.12)$$

Если мы действительно хотим узнать больше о ее свойствах, мы должны выписать явное выражение для  $\vec{\eta}$ , имея в виду, что это источник интерполирующего поля, которое соответствует перенормированному полю лагранжевой теории. Стандартная теория перенормировок приводит к выражению

$$\vec{\eta} = g Z_1 Z_3^{-1} \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi - \delta \mu^2 \vec{\varphi} + \lambda Z_3 (\vec{\varphi} \varphi) \vec{\varphi}, \quad (10.13)$$

где  $Z_3$  — константа перенормировки волновой функции  $\pi$ -мезона;  $Z_1$  — константа перенормировки вершинной функции  $\vec{\tau} \gamma_5$ , а  $\delta \mu^2$  — константа перенормировки массы  $\pi$ -мезона. Напомним также, что перенормированная константа  $g$  формально связана с неперенормированной, или «голой», константой  $g_0$  соотношением

$$g = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} g_0. \quad (10.14)$$

При равных временах с  $\psi$  не коммутирует лишь первый член из (10.13). Воспользовавшись соотношениями антикоммутиации для интерполирующих полей

$$\left. \begin{aligned} \delta(x_0) \{ \psi(x), \bar{\psi}(0) \} &= \delta(x) Z_2^{-1} \gamma_0; \\ \delta(x_0) \{ \psi(x), \psi(0) \} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

получим

$$\delta(x_0) [\psi(x), \vec{\eta}(0)] = g Z_1 Z_3^{-1} \delta(x) Z_2^{-1} \gamma_0 \gamma_5 \vec{\tau} \psi(0).$$

Следовательно, вырожденная компонента равна

$$\begin{aligned} (M/\omega_{\bar{N}})^{-1/2} \bar{u}(N) < \bar{N} | \gamma_5 \vec{\tau} \psi(0) | 0 > g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1} = \\ = \bar{u}(N) \gamma_5 \vec{\tau} v(\bar{N}) g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1}, \end{aligned}$$

откуда в результате сравнения с (10.10) найдем

$$f_{\text{выр}} = g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1} = g_0 Z_3^{-1/2}. \quad (10.16)$$

В действительности ни одна из констант  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $g_0$  не может быть измерена. Следовательно, мы не лишим себя никакой полезной информации, сделав в точке  $\mu^2$  вычитание в дисперсионном представлении для  $f(z)$  и написав

$$f(z) = g + (z - \mu^2) \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{ds \sigma(s)}{(s - \mu^2)(s - z)}. \quad (10.17)$$

Поскольку вычитание в конечной точке оказалось необходимым, можно больше не беспокоиться о поведении компоненты  $f_{\text{невыр}}(\infty)$ , хотя асимптотическое поведение функции  $f$  остается интересным. Для больших  $|z|$  равенство (10.17) дает

$$f(z) \approx g - \int ds \sigma(s)/s. \quad (10.18)$$

На этом этапе следует напомнить доказанную в гл. 8 теорему Лемана — Симанзика — Циммермана (Lehmann et al., 1955), которая представляет собой единственный известный фундаментальный результат об асимптотическом поведении функции  $f$ .

Если в представлении Лемана для  $\pi$ -мезонной функции распространения не требуется вычитаний (т. е. если  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta'_F(s) = 0$ ), то мезон-нуклонная вершинная функция, определяемая уравнением

$$f(s) = V(s) \Delta'_F(s) / \Delta_F(s | \mu^2) = V(s) \Delta'_F(s) (s - \mu^2),$$

обращается в нуль на бесконечности, т. е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V(s) = 0.$$

Отметим, что в силу соотношения  $\lim_{s \rightarrow \infty} s \Delta'_F(s) = Z^{-1}_3$  на основании теоремы ничего нельзя сказать о поведении  $f(\infty)$ , если только исключить весьма маловероятную ситуацию, когда  $Z_3$  конечна. Следует помнить также, что в любом конечном порядке теории возмущений функция  $V(s)$  не удовлетворяет теореме. Теорема Лемана—Симанзика—Циммермана инспирировала недавние работы Гебеля и Сакиты (Goebel, Sakita, 1963), Дрелла, Финна и Хирна (Drell et al., 1964), Джина и Мак-Дауэлла (Jin, McDowell, 1965) и Ида (Ida, 1965).

2. Известная конечная вырожденная компонента; аксиальный формфактор для  $\beta$ -распада нуклонов.

Чтобы подготовить почву для этого примера, сначала рассмотрим кратко стандартную теорию слабых взаимодействий, не меняющих странность. Полное изложение и подробную библиографию можно найти в недавнем обзоре Тейлора (Taylor, 1964).

Лагранжиан, ответственный за эти взаимодействия, в данном случае имеет вид

$$L = G J_\lambda J^{\lambda H}, \quad (10.19)$$

где индекс  $H$  означает эрмитово сопряжение, а ток  $J_\lambda$  определяется формулой

$$J_\lambda = V_\lambda - A_\lambda + \bar{\psi}_e \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \gamma_\lambda \psi_e + \bar{\psi}_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \gamma_\lambda \psi_\mu. \quad (10.20)$$

(Усложнения, связанные с промежуточными бозонами, не повлияют на наши рассуждения.) В соотношении (10.20)  $\psi_e$  и  $\psi_\mu$  — поля электронного и  $\mu$ -мезонного нейтрино;  $\psi_e$  и  $\psi_\mu$  — поля электронов и  $\mu$ -мезонов;  $V_\lambda$  и  $A_\lambda$  — плотности векторного и аксиального токов, построенных из полей сильно взаимодействующих частиц (нуклонов,  $\pi$ -мезонов и т. п.). Без учета электромагнитных взаимодействий и в первом порядке по слабой константе  $G$  лептонные поля (поля  $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ) можно считать свободными (другими словами, в этом порядке нет различий между ин-, аут- и интерполирующим полями лептонов). Поэтому амплитуду для процесса  $\mu$ -распада

$$\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

можно вычислить из соотношений (10.19) и (10.20) в низшем порядке теории возмущений, и ее экспериментальная величина определит значение  $G$ .

Напротив, для  $\beta$ -распада нуклона, например для процесса

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

следует записать матричный элемент в виде

$$\langle p e^- \bar{\nu}_e, out | G (V_\lambda - A_\lambda) \psi_e \gamma^\lambda \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \psi_e | n \rangle$$

и «свернуть» лептоны, что делается тривиально. Тогда получим матричный элемент

$$\sqrt{\frac{\omega_p \omega_n}{M^2}} \langle p | G (V_\lambda - A_\lambda) | n \rangle, \quad (10.21)$$

который и управляет распадом.

Если выразить  $(V_\lambda - A_\lambda)$  либо через интерполирующие, либо через неперенормированные канонические поля, получится довольно сложное выражение, содержащее члены разной структуры. Однако относительно величины  $(V_\lambda - A_\lambda)$  обычно делают два упрощающих предположения. Согласно первому допущению, нуклонные поля появляются лишь в простой комбинации

$$\bar{\psi}_{0p} \gamma_\lambda \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \psi_{0n} = \bar{\psi}_0 \gamma_\lambda \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \tau_+ \psi_0, \quad (10.22)$$

где индекс 0 относится к неперенормированным полям. Они удовлетворяют каноническим соотношениям коммутации

$$\delta(x_0) \{ \psi_0(x), \bar{\psi}_0(0) \} = \delta(x) \gamma_0 \quad (10.23)$$

и связаны с интерполирующим полем формулой

$$\psi_0(x) = Z^{1/2} \psi(x). \quad (10.24)$$

Второе упрощение состоит в предположении, что векторный ток  $V_\lambda$  сохраняется, т. е.

$$\partial^\lambda V_\lambda = 0. \quad (10.25)$$

В сочетании с соотношением (10.22) равенство (10.25) означает, что  $V_\lambda$  фактически является изотопической (+)-компонентой изоспинового тока  $\vec{T}_\lambda$ :

$$V_\lambda(x) = T_\lambda^{(+)}(x). \quad (10.26)$$

Сохранение тока  $\vec{T}_\lambda(x)$  следует из зарядовой независимости (инвариантности относительно вращений в изотопическом пространстве) сильных взаимодействий.

Некоторые следствия соотношения (10.25) будут рассмотрены в следующем параграфе. Сейчас нас интересует матричный элемент аксиального тока. В качестве упражнения предлагаем проверить, исходя из обычных

свойств инвариантности (включая зарядовую независимость), что в самом общем виде можно написать

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &\equiv \sqrt{\frac{\omega_p \omega_n}{M^2}} \langle p | GA_\lambda | n \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}(p) \{ -i \gamma_\lambda \gamma_5 a(s) + i \gamma_5 (n-p)_\lambda b(s) \} u(n); \quad (10.27) \\ & \quad s = (p-n)^2. \end{aligned}$$

Подробные выкладки можно найти в обзоре Тейлора (Taylor, 1964). Второй член в выражении (10.27) называется индуцированным псевдоскаляром; термин «индуцированный» напоминает о том, что исходное соотношение связи (10.22) не содержит члена, соответствующего непосредственно этой компоненте [т. е. члена, пропорционального  $\partial_\lambda (\bar{\psi}_0 \gamma_5 \tau^+ \psi_0)$ ]. В то же время член  $-i \bar{\psi} \gamma_\lambda \gamma_5 \psi$  соответствует «аксиальной» компоненте  $-i \gamma_\lambda \gamma_5 a(s)$ . Это различие непосредственно отразится на вырожденных компонентах  $\in \mathcal{L}_\lambda$ .

Свертывая  $n$  в выражении (10.27), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &= \sqrt{\omega_p / M} \int dx e^{-inx} \langle p | \theta(\lambda) [GA_\lambda(0), \bar{\psi}(x)] | 0 \rangle \mathcal{D}_x u(n) = \\ &= \sqrt{\omega_p / M} \int dx e^{-inx} \langle p | [\theta(x) [GA_\lambda(0), \bar{\chi}(x)] + \\ & \quad + \delta(x_0) [GA_\lambda(0), \bar{\psi}(x)] \gamma_0] | 0 \rangle u(n). \quad (10.28) \end{aligned}$$

Вырожденная компонента вычисляется с привлечением соотношений (10.22), (10.24) и (10.23):

$$\begin{aligned} \partial(x_0) [GA_\lambda(0), \bar{\psi}(x)] &= -\frac{i}{2} G \delta(x_0) [\bar{\psi}_0(0) \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+ \psi_0(0), \bar{\psi}(x)] = \\ &= -\frac{i}{2} \delta(x_0) \hat{z}_2^{1/2} G [\bar{\psi}_0(0) \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+ \psi_0(0), \bar{\psi}_0(x)] = \\ &= -\frac{i}{2} \hat{z}(x) \hat{z}_2^{1/2} G \bar{\psi}_0(0) \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+ = -\frac{i}{2} G \delta(x) \bar{\psi}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+. \quad (10.29) \end{aligned}$$

Подставив это выражение в равенство (10.28) и воспользовавшись спинорным аналогом уравнения (2.42), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda \text{ выр} &= -\frac{iG}{2} \sqrt{\omega_p / M} \langle p | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+ u(n) = \\ &= -\frac{iG}{2} \bar{u}(p) \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^+ u(n). \quad (10.30) \end{aligned}$$

Переход от канонического поля к интерполирующему в предыдущих рассуждениях следует проводить аккуратно. Сравнивая выражения (10.30) и (10.27), видим, что

$$a_{\text{выр}} = G; \quad b_{\text{выр}} = 0. \quad (10.31)$$

При стандартных предположениях, в соответствии с которыми  $a(\infty) < \infty$ ,  $b(\infty) < \infty$ , дисперсионные представления для  $a$  и  $b$  примут вид:

$$a(z) = G + a_{\text{невыр}}(\infty) + \pi^{-1} \int ds \operatorname{Im} a(s)/(s-z); \quad (10.32)$$

$$b(z) = b_{\text{невыр}}(\infty) + \pi^{-1} \int ds \operatorname{Im} b(s)/(s-z). \quad (10.33)$$

«Перенормированная» аксиальная константа, т. е. константа связи Гамова—Теллера, наблюдаемая при реальном распаде нейтрона с присущей ему малой (практически нулевой) передачей импульса, определяется равенством

$$G_A = a(0).$$

Экспериментально найдено, что

$$G_A = 1,25G. \quad (10.34)$$

При вычислении  $G_A$  через  $G$  с помощью соотношения (10.32) можно положить либо  $a_{\text{невыр}}(\infty) = 0$ , что даст

$$G_A = G + \pi^{-1} \int ds \operatorname{Im} a(s)/s,$$

либо  $a(\infty) = 0$ , т. е.  $G + a_{\text{невыр}}(\infty) = 0$ , и тогда

$$G_A = \pi^{-1} \int ds \operatorname{Im} a(s)/s.$$

Другой подход к проблеме вычисления  $G_A/G$  будет описан в § 10.4, а более детальный анализ материала, изложенного в настоящем параграфе, можно найти в работе Симанзика (Suzmanzik, 1959).

Что касается псевдоскалярного формфактора  $b$ , то всегда полагают  $b(\infty) = 0$ , так что  $b(z)$  можно вычислить по его мнимой части. Необходимо отметить еще одну важную черту всей проблемы. Выражение для амплитуды  $\mathcal{A}_{\lambda, \text{выр}}$  можно найти, если знать явный вид  $\mathcal{A}_{\lambda}$  и если пренебречь всеми усложнениями, связанными с сильными взаимодействиями. В частности, удовлетворительный ответ можно получить, если некорректно игнорировать различия между  $\psi$ ,  $\psi_0$  и  $\psi_{in, out}$  для нуклонов (по аналогии с лептонами). Каким образом такая совершенно необоснованная процедура может дать оценку для  $G_A$ , совпадающую в пределах 25% с опытом, — остается одной из основных загадок в физике.

## § 10.2. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕКТОРНЫЕ ТОКИ

Наиболее важные формфакторы связаны с электромагнитными взаимодействиями нуклонов. Только о них мы уже имеем и надеемся получить еще самую широкую экспериментальную информацию. Эту информацию, дающую сведения о формфакторах для пространственно-подобных аргументов (т. е. для отрицательных  $s$  вне разреза), доставляют нам опыты по рассеянию электронов высоких энергий. Ее могут существенно пополнить измерения для реакций типа  $e^+e^- \rightarrow N\bar{N}$ , проводимые на встречных пучках. Они могут дать сведения о формфакторах при времениподобных аргументах (т. е. при  $s \geq 4M^2$  на разрезе). Дисперсионной теорией нуклонных формфакторов мы займемся позднее. Здесь мы отметим только, что помимо экспериментальной важности формфакторы сохраняющихся токов как таковые имеют особое значение и в теории. Это обусловлено некоторыми специальными свойствами, связанными с сохранением тока, к которым мы теперь и переходим.

В лангранжевой теории поля существование сохраняющегося тока всегда вызвано инвариантностью лагранжиана относительно непрерывной группы преобразований. Сохраняющаяся величина является ее генератором (см., например, Roman, 1964). В частности, сохранение электромагнитного тока обусловлено инвариантностью относительно калибровочных преобразований (первого рода). При калибровочном преобразовании оператор поля  $\varphi$ , соответствующий *любой* частице с зарядом  $Ne$ , удовлетворяет соотношению

$$U(\lambda) \varphi(x) U^{-1}(\lambda) = \exp(i\lambda Ne) \varphi(x). \quad (10.35)$$

Здесь  $\lambda$  — непрерывный вещественный параметр, а  $U(\lambda)$  — унитарный оператор, индуцирующий преобразование. Инвариантность относительно преобразования (10.35) приводит к дифференциальному закону сохранения

$$\partial^\lambda s_\lambda(x) = 0, \quad (10.36)$$

из которого следует сохранение заряда:

$$Q = \int d\mathbf{x} s_0(x_0, \mathbf{x}); \quad dQ/dx_0 = 0. \quad (10.37)$$

Утверждение, что  $Q$  является генератором преобразований, приводит к соотношению

$$U_i^\dagger(\lambda) = \exp(i\lambda Q). \quad (10.38)$$

Осуществляя бесконечно малое преобразование и оставляя в разложении (10.35) лишь члены первого порядка по  $\lambda$ , получаем

$$[Q, \varphi(y)] = Ne\varphi(y). \quad (10.39)$$

Коммутационному соотношению (10.39) удовлетворяют как канонические поля  $\varphi_0$ , так и интерполирующие  $\varphi$ , поскольку они связаны множителем  $\varphi = Z_3^{-1/2} \varphi_0$ . Так как  $Q$  не зависит от времени, можно в (10.37) положить  $x_0 = y_0$ ; тогда

$$\int dx [s_0(y_0, x), \varphi(y)] = Ne\varphi(y).$$

Поскольку  $s_\lambda$  — локальный оператор, коммутатор равен нулю всюду, кроме точки  $x=y$ . Итак, равенства (10.39) и (10.37) приводят к следующему коммутационному соотношению для любого локального оператора с  $N$ -кратным зарядом:

$$[s_0(t, x), \varphi(t, y)] = Ne\delta(x-y)\varphi(y). \quad (10.40)$$

Сохранение векторного тока слабых взаимодействий соответствует инвариантности относительно вращений в изотопическом пространстве. При этом, например, нулевой заряд преобразуется следующим образом:

$$U(\vec{\lambda})\psi(x)U^{-1}(\vec{\lambda}) = \exp(i\vec{\lambda}\cdot\vec{\tau}/2)\psi(x). \quad (10.41)$$

Формулы, аналогичные в этом случае формулам (10.37), (10.38) и (10.40), имеют вид\*:

---

\* Плотности  $V_0^i$ , где  $i$  — изотопический индекс, удовлетворяют соотношению  $[V_0^i(t, x), V_0^j(t, y)] = i\epsilon^{ijk} V_0^k(t, x)\delta(x-y)$ . Отметим, что  $T^i$  представляют собой операторы полного момента в изотопическом пространстве и поэтому удовлетворяют соотношению  $[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk} T^k$ . Поскольку они не зависят от времени, можно представить их в виде пространственных интегралов, отнесенных к одному моменту времени  $t$ , и сослаться на аксиому причинности. Это приведет к написанному выше соотношению для  $V_0^i$ . Аналогичные аргументы показывают, что любой локальный оператор  $O^j(x)$ , преобразующийся как компонента изовектора, удовлетворяет соотношению  $[V_0^i(t, x), O^j(t, y)] = i\epsilon^{ijk} O^k(t, x)\delta(x-y)$ . Такие аргументы использовались в недавних работах о внутренних симметриях сильно взаимодействующих частиц. (См., например, Gell-Mann, 1964).



$$\left. \begin{aligned}
 \vec{T} &= \int dx \vec{V}_3(x_0, \mathbf{x}); \quad d\vec{T}/dx_0 = 0; \\
 U(\vec{\lambda}) &= \exp\{i\vec{\lambda}\vec{T}\}; \\
 |\vec{T}, \psi(x)\rangle &= (\vec{\tau}/2)\psi(x); \\
 |\vec{V}_0(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})\rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\vec{\tau}/2)\psi(y).
 \end{aligned} \right\} (10.42)$$

Наиболее интересное для нас на этом этапе свойство сохраняющихся токов состоит в том, что константы в правых частях основных коммутационных соотношений (10.39) или (10.40) определяют величины формфакторов токов  $s_\lambda$  при нулевых значениях их аргументов. Мы докажем это утверждение двумя различными методами. Для разнообразия один из них применим к слабому току  $V_\lambda$ , а второй — к электромагнитному току  $s_\lambda$ . Вторым методом приведет нас (в следующем параграфе) к известному тождеству Уорда, которое связывает формфактор сохраняющегося тока частицы с ее фейнмановской функцией распространения.

Рассмотрим матричный элемент тока  $V_\lambda$ , аналогичный выражению (10.27). Введем обозначение  $V_\lambda^+$ , поскольку по предположению  $V_\lambda^+$  является (+)-компонентой плотности изоспинового тока, и определим формфактор уравнением

$$\mathcal{V}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega p^0 n}{M^2}} \langle p | G V_\lambda^+ | n \rangle. \quad (10.43)$$

Как и для аксиального тока, предлагаем в качестве упражнения показать, что свойства тока при пространственных и временных отражениях позволяют в самом общем виде написать

$$\mathcal{V}_\lambda^*(s) = \bar{u}(p) \{ \gamma_\lambda c(s) + i\sigma_{\lambda\mu} (n-p)^\mu d(s) \} u(n), \quad (10.44)$$

где, по определению,  $c(0) = \frac{G_V}{2}$ , а  $G_V$  — константа связи Ферми, наблюдаемая при распаде нейтрона. (Мы встретимся с альтернативной возможностью записи этого матричного элемента, когда будем рассматривать электромагнитные формфакторы в гл. 15.) Наша задача — показать, что условие  $\partial^\lambda V_\lambda = 0$  влечет равенство  $G_V = G$ , т. е.  $c(0) = \frac{G}{2}$ .

Отметим, что вид соотношения (10.44), конечно, совместим с условием  $\partial^\lambda V_\lambda = 0$ , поскольку умножение на  $(p-n)^\lambda$  автоматически обращает это выражение в нуль. Подобно всем электромагнитным эффектам, разностью масс нейтрона и протона пренебрегаем. Отметим также, что при  $s \rightarrow 0$  второй член в выражении для  $\mathcal{V}_\lambda$  обращается в нуль, так что только  $c(0)$  определяет  $\mathcal{V}_\lambda(0)$ . (Такое утверждение оправдывается тем, что  $d(s)$  не имеет полюса при  $s=0$ ; доказать это мы предлагаем в качестве упражнения.) Проведем свертку нейтрона:

$$\mathcal{V}_\lambda = G \sqrt{\omega_p/M} \int dx e^{-inx} \langle p | \{ \theta(x) [V_\lambda^+(0), \bar{\chi}_n(x)] + \delta(x_0) [V_\lambda^+(0), \bar{\psi}_n(x)] \gamma_0 \} | 0 \rangle u(n).$$

Займемся временной компонентой  $\lambda=0$ . Заменяя переменную интегрирования  $x$  на  $-x$  и воспользовавшись трансляционной инвариантностью матричного элемента, получим

$$\mathcal{V}_0 = G \sqrt{\omega_p/M} \int dx e^{i(n-p)x} \langle p | \{ \theta(-x) [V_0^+(x), \bar{\chi}_n(0)] + \delta(x_0) [V_0^+(x), \bar{\psi}_n(0)] \gamma_0 \} | 0 \rangle u(n). \quad (10.45)$$

Из локальности следует, что множитель  $\delta(x_0)$  под знаком интеграла от вырожденной компоненты в конце концов даст множитель  $\delta(x)$ . Поэтому для этой компоненты мы можем заменить экспоненту единицей и написать

$$\mathcal{V}_{0, \text{выр}} = G \sqrt{\omega_p/M} \int dx_0 \delta(x_0) \langle p | [ \int dx V_0^+(x_0, x), \bar{\psi}_n(0) ] | 0 \rangle \times \times \gamma_0 u(n).$$

Но интеграл по пространству в матричном элементе равен  $T_0^+$ . Тогда соотношения (10.42) влекут равенства

$$[T_0^+, \bar{\psi}_n(0)] = \frac{\tau^+}{2} \bar{\psi}_n(0) = \bar{\psi}_p(0)/2.$$

Итак,

$$\mathcal{V}_{0, \text{выр}} = G \sqrt{\omega_p/M} \langle p | \bar{\psi}_p(0) | 0 \rangle / 2 = \frac{G}{2}. \quad (10.46)$$

Сравнивая (10.46) с (10.44), получаем

$$c_{\text{выр}} = \frac{G}{2}; \quad d_{\text{выр}} = 0. \quad (10.47)$$

[Второе равенство не имеет отношения к  $\mathcal{Y}_\lambda(0)$ .] Чтобы завершить доказательство равенства  $c(0) = \frac{G}{2}$ , осталось показать, что  $\mathcal{Y}_{0, \text{ невыр}}$  обращается в нуль при  $s=0$ .

Наиболее удобно начать вычисление  $\mathcal{Y}_{0, \text{ невыр}}$  при  $s=0$  с замечания, что  $s=0$  реализуется в (10.45) при  $\mathbf{p}=\mathbf{p}$ . Проведя пространственное интегрирование внутри матричного элемента, найдем

$$\mathcal{Y}_{0, \text{ невыр}}(0) = G \sqrt{\omega_p/M} \int dx_0 e^{i(n_0 - p_0)x_0} \theta(-x_0) \times \\ \times \langle p | [T^+, \bar{\chi}_n(0)] | 0 \rangle u(n). \quad (10.48)$$

На первый взгляд интеграл по  $x_0$  кажется расходящимся, так как при  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$   $n_0 \rightarrow p_0$ . Но это впечатление обманчиво: оно порождено стандартной упрощающей заменой в самой схеме свертки нормированных волновых пакетов плоскими волнами. Любое нормированное решение уравнения Дирака будет при  $|x_0| \rightarrow \infty$  спадать достаточно быстро, обеспечивая сходимость интеграла. В матричном элементе  $T^+|0\rangle = 0$ , а  $\langle p | T^+ = \langle n |$ . Следовательно, под знаком интеграла стоит множитель  $\langle n | \bar{\chi}_n(0) | 0 \rangle$ , обращаящийся в нуль. Итак, мы действительно получили

$$\mathcal{Y}_{0, \text{ невыр}}(0) = 0. \quad (10.49)$$

Поскольку из (10.44) следует, что

$$\mathcal{Y}_\lambda(0) = \delta_{\lambda 0} c(0),$$

на этом завершается доказательство соотношения

$$c(0) = \mathcal{Y}_{0, \text{ выр}} = \mathcal{Y}_0(0) = \frac{G}{2}.$$

Другими словами, мы доказали, что вследствие сохранения тока константа связи Ферми «не перенормируется» сильными взаимодействиями в противоположность случаю аксиального тока, рассмотренному в предыдущем параграфе.

Вероятно, полезно отметить (хотя в литературе и делаются иногда противоположные утверждения), что аргументы такого рода никоим образом неприменимы к аксиальному току, даже если выполнено условие  $\partial^\lambda A_\lambda = 0$ . (При  $\beta$ -распаде  $\partial^\lambda A_\lambda = 0$  по нескольким различным причинам.) Покажем, почему теряет силу доказательство неперенормируемости для  $A_\lambda$ .

Из  $\partial^\lambda A_\lambda = 0$  следует, что  $\int dx A_0(t, \mathbf{x})$  — константа движения. Но этот интеграл — псевдоскаляр, а сохраняющийся псевдоскаляр тождественно равен нулю вследствие инвариантности относительно отражений. Таким образом, в применении к  $A_\lambda$  предыдущее рассуждение оказывается несостоятельным при попытке интерпретировать  $\int dx A_0(x)$  как генератор некоторого калибровочного преобразования. Ясно, что если  $\int dx A_0(x)$  обращается в нуль, соотношение

$$|\int dx A_0(x), \psi| = \text{const } \psi$$

не может выполняться. Более того, можно явно вычислить вырожденную компоненту в предположении, что нуклонная часть  $A_\lambda$  равна  $\bar{\psi}_0 \gamma_\lambda \gamma_5 \psi_0$ . Как мы уже видели, это приводит к равенству  $a_{\text{выр}} = G/2$ . Но утверждать, что  $a_{\text{невыр}}(0) = 0$ , нельзя, так как, хотя

$$\bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_5 \tau^+ u(n) a_{\text{невыр}}(0) = 0,$$

первый множитель (комбинация спиноров) обращается в нуль при  $p=n$  и равенство  $a_{\text{невыр}}(0) = 0$  отсюда не следует.

### § 10.3. ТОЖДЕСТВО УОРДА

Результаты предыдущего параграфа показывают, что формфактор  $f(s)$ , определенный, например, соотношением

$$\sqrt{4\omega_p \omega_q} \langle p | s_\lambda | q \rangle = (p + q)_\lambda f(s) \quad (10.50)$$

[где  $s = (p - q)_\lambda^2$ ],

удовлетворяет граничному условию

$$f(0) = e. \quad (10.51)$$

Это обусловлено сохранением тока

$$\partial^\lambda s_\lambda = 0 \quad (10.52)$$

и коммутационными соотношениями, которые по теореме Нетер соответствуют сохранению тока:

$$\left. \begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) [s_0(x), \varphi(y)] &= e \delta(x - y) \varphi(y). \\ \delta(x_0 - y_0) [s_0(x), \varphi^*(y)] &= -e \delta(x - y) \varphi^*(y). \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

Результат (10.51) следует также из важного соотношения, называемого тождеством Уорда, которое связывает формфактор частицы с ее фейнмановской функцией пространства  $\Delta'_F$ . Этот параграф посвящен выводу тождества Уорда методом, предложенным Такахаши (Takahashi, 1957). Доказательство самого Уорда (Ward, 1950) основано на анализе отдельных графов Фейнмана. Вывод Такахаши типичен для теории поля, поскольку в нем существенно использованы фурье-образы трехточечных функций с импульсами вне энергетической поверхности.

Начнем с преобразования свертки обеих частиц в соотношении (10.50) методом приведения к  $T$ -произведению:

$$(p+q)_\lambda f(s) = \int dx dy e^{ipx-iqy} K_x K_y \times \\ \times \langle 0 | T \{ \varphi^*(x) s_\lambda(0) \varphi(y) \} | 0 \rangle.$$

Будем пользоваться этим представлением для  $p$  и  $q$  вне энергетической поверхности, т. е. при  $p^2 \neq \mu^2 \neq q^2$ . Наше первоначальное заключение о возможности представления формфактора в виде  $(p+q)_\lambda f(s)$  применимо только тогда, когда  $p^2 = q^2$ . В общем случае следует писать

$$(p+q)_\lambda f(s, p^2, q^2) + (p-q)_\lambda g(s, p^2, q^2) = \\ = \int dx dy e^{ipx-iqy} K_x K_y \langle 0 | T \{ \varphi^*(x) s_\lambda(0) \varphi(y) \} | 0 \rangle = \\ = (-p^2 + \mu^2)(-q^2 + \mu^2) \int dx dy e^{ipx-iqy} \times \\ \times \langle 0 | T \{ \varphi^*(x) s_\lambda(0) \varphi(y) \} | 0 \rangle. \quad (10.54)$$

На втором шаге мы проинтегрировали по частям, с тем чтобы подействовать на экспоненты операторами Клейна — Гордона. Прежние соображения относительно сохранения тока показывают, что  $g(s, p^2, p^2) = 0$ .

Для удобства введем обозначение

$$\langle 0 | T \{ \varphi^*(x) s_\lambda(z) \varphi(y) \} | 0 \rangle = \tau_\lambda(x, z, y). \quad (10.55)$$

Вследствие трансляционной инвариантности  $\tau_\lambda$  является функцией только двух разностей координат. С учетом этого замечания в сочетании с (10.54) запишем фурье-образ  $\tau_\lambda$ :

$$\tau_\lambda(p|q) = \iint dx dy \exp \{ ip(x-z) + iq(z-y) \} \tau_\lambda(x, z, y). \quad (10.56)$$

Затем подействуем на  $\tau_\lambda$  оператором  $\partial/\partial z_\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\lambda} \tau_\lambda(x, z, y) = \frac{\partial}{\partial z_\lambda} \langle 0 | & [\theta(x-z)\theta(z-y)\varphi^*(x)s_\lambda(z)]\varphi(y) + \\ & + \theta(x-y)\theta(y-z)\varphi^*(x)\varphi(y)s_\lambda(z) + \theta(z-x)\theta(x-y) \times \\ & \times s_\lambda(z)\varphi^*(x)\varphi(y) + \theta(z-y)\theta(y-x)s_\lambda(z)\varphi(y)\varphi^*(x) + \\ & + \theta(y-z)\theta(z-x)\varphi(y)s_\lambda(z)\varphi^*(x) + \\ & + \theta(y-x)\theta(x-z)\varphi(y)\varphi^*(x)s_\lambda(z) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку  $\partial s_\lambda/\partial z_\lambda = 0$ , остаются лишь члены, в которых  $\partial/\partial z_\lambda$  действует на  $\theta$ -функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\lambda} \tau_\lambda(x, z, y) = \langle 0 | & [ -\delta(x_0 - z_0)\theta(z-y) + \\ & + \theta(x-z)\delta(z_0 - y_0) ] \varphi^*(x)s_\lambda(z)\varphi(y) - \theta(x-y) \times \\ & \times \delta(y_0 - z_0)\varphi^*(x)\varphi(y)s_\lambda(z) + \delta(z_0 - x_0)\theta(x-y) \times \\ & \times s_\lambda(z)\varphi^*(x)\varphi(y) + \delta(z_0 - y_0)\theta(y-x)s_\lambda(z)\varphi(y)\varphi^*(x) + \\ & + [ -\delta(y_0 - z_0)\theta(z-x) + \theta(y-z)\delta(z_0 - x_0) ] \varphi(y) \times \\ & \times s_\lambda(z)\varphi^*(x) - \theta(y-x)\delta(x_0 - z_0)\varphi(y)\varphi^*(x)s_\lambda(z) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Собирая все члены с множителем  $\delta(x_0 - z_0)$ , получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - z_0) \langle 0 | & \theta(z-y)[s_\lambda(z), \varphi^*(x)]\varphi(y) + \\ & + \theta(y-z)\varphi^*(y)[s_\lambda(z), \varphi^*(x)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

В силу соотношений (10.53) и (2.35) можно написать

$$\begin{aligned} -e\delta(x-z) \langle 0 | & [\theta(z-y)\varphi^*(x)\varphi(y) + \theta(y-z)\varphi(y) \times \\ & \times \varphi^*(x)] | 0 \rangle = ie\delta(x-z)\Delta'_F(z-y). \end{aligned}$$

Аналогично члены с множителем  $\delta(y_0 - z_0)$  дают вклад  $-ie\delta(z-y)\Delta'_F(x-z)$ , так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\lambda} \tau_\lambda(x, z, y) = ie \{ & \delta(x-z)\Delta'_F(z-y) - \\ & - \Delta'_F(x-z)\delta(z-y) \}. \end{aligned} \quad (10.57)$$

В соответствии с равенством (10.56) фурье-образ этого выражения равен

$$-i(p-q)^\lambda \tau_\lambda(p|q) = ie \{ \Delta'_F(p^2) - \Delta'_F(q^2) \}. \quad (10.58)$$

Это и есть тождество Уорда. Из него мы извлечем информацию о самом формфакторе. Используем для этого соотношение

$$\begin{aligned} (p+q)_\lambda f(s, p^2, q^2) + (p-q)_\lambda g(s, p^2, q^2) = \\ = (-p^2 + \mu^2)(-q^2 + \mu^2) \tau_\lambda(p|q). \end{aligned} \quad (10.59)$$

Умножая обе части (10.59) на  $(p-q)^\lambda$ , с учетом тождества (10.58) находим

$$\begin{aligned} (p^2 - q^2) f(s, p^2, q^2) + s g(s, p^2, q^2) = \\ = (-p^2 + \mu^2)(-q^2 + \mu^2) e \{ \Delta'_F(p^2) - \Delta'_F(q^2) \}. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Отметим, что, забыв ввести функцию  $g$ , мы столкнулись бы в этом месте с парадоксом. Правая часть соотношения (10.60) зависит от  $p^2$  и  $q^2$ , но не зависит от  $s$ ; в отсутствие  $g$  мы пришли бы к абсурдному заключению, что функция  $f$  не зависит от  $s$ .

Наконец, осуществим в (10.60) три предельных перехода. Во-первых, положив  $s=0$ , исключим функцию  $g$ :

$$\begin{aligned} (p^2 - q^2) f(0, p^2, q^2) = (-p^2 + \mu^2)(-q^2 + \mu^2) e \times \\ \times \{ \Delta'_F(p^2) - \Delta'_F(q^2) \}. \end{aligned}$$

Во-вторых, разделив последнее равенство на  $(p^2 - q^2)$ , устремим  $p^2 \rightarrow q^2$ ; это даст

$$f(0, p^2, p^2) = (-p^2 + \mu^2)^2 e \frac{d}{dp^2} \Delta'_F(p^2). \quad (10.61)$$

Иногда именно эту формулу называют тождеством Уорда. Наконец, устремим  $p^2 \rightarrow \mu^2$ . Но представление Лемана показывает, что при  $p^2 \sim \mu^2$  функция  $\Delta'_F$  ведет себя как  $(\mu^2 - p^2)^{-1}$ . Поэтому

$$\frac{d}{dp^2} \Delta'_F(p^2) \sim \frac{1}{(\mu^2 - p^2)^2} \text{ при } p^2 \rightarrow \mu^2.$$

Подставив это выражение в равенство (10.61), как и следовало ожидать, получим

$$f(0) = \lim_{p^2 \rightarrow \mu^2} f(0, p^2, p^2) = e. \quad (10.62)$$

В качестве упражнения предлагаем провести соответствующее доказательство для фермионов.

Имеет смысл осуществить и другие предельные переходы в равенстве (10.60). Пусть сначала  $q^2 \rightarrow \mu^2$ . Тогда справа остается только член  $(-q^2 + \mu^2) \times \{-\Delta'_F(q^2)\}$ , и мы получаем

$$(p^2 - \mu^2) f(s, p^2, \mu^2) + sg(s, p^2, \mu^2) = -(-p^2 + \mu^2)e.$$

Разделив обе части равенства на  $(p^2 - \mu^2)$ , придем к тождеству (с учетом того, что  $g(s, \mu^2, \mu^2) = 0$ )

$$\lim_{p^2 \rightarrow \mu^2} \frac{1}{p^2 - \mu^2} g(s, p^2, \mu^2) = \frac{\partial}{\partial p^2} g(s, p^2, \mu^2) \Big|_{p^2 = \mu^2} \equiv \gamma(s),$$

где  $\gamma(s)$  — некоторая функция, о которой на данном этапе пока ничего не известно. Итак,

$$f(s, \mu^2, \mu^2) = f(s) = e - s\gamma(s).$$

Поскольку в теории нет частиц с нулевой массой,  $\gamma$  не может иметь полюса при  $s=0$ , и поэтому  $f(0) = e$ .

#### § 10.4. СВЕДЕНИЯ ОБ АСИМПТОТИКАХ ИЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Нет никаких разумных обоснований асимптотического поведения формфакторов, хотя предположения  $J_{\text{невыр}}(\infty) = 0$  или  $J(\infty) = 0$  временами считают правдоподобными. В этом параграфе мы обсудим некоторые гипотезы, рожденные слишком легковерным отношением к результатам теории возмущений. В качестве конкретных примеров рассмотрим аксиальный формфактор  $a(s)$  и векторный формфактор  $c(s)$  теории слабых взаимодействий. Для удобства переименуем  $c(s)$  и  $a(s)$ , обозначив их соответственно символами  $J_c(s)$  и  $J_{\text{нс}}(s)$  в знак того, что первый из них — формфактор сохраняющегося, а второй — формфактор несохраняющегося тока. Для дальнейших рассуждений совершенно неважно, что  $A_\lambda$  имеет (псевдо-) векторный индекс. Существенно лишь то, что  $J_{\text{нс}}$  не является формфактором *сохраняющегося* векторного тока.

Основу рассуждений составляют следствия, вытекающие из существования ренормализационной группы в теории возмущений. При наличии обрезания  $p^2 \sim \Lambda^2$  имеет место зависимость  $Z_1 = Z_1(\Lambda^2)$ , где  $Z_1$  — константа перенормировки соответствующей току вершины, т. е.



вершины  $\gamma_5\gamma_\lambda$  для  $J_{nc}$  и вершины  $\gamma_\lambda$  для  $J_c$ . В теории возмущений (во всех порядках по константе сильной связи) можно показать (см. Gell-Mann, Zow, 1954; Gell-Mann, Zachariasen, 1961), что

$$J_i(s)/J_i(0) \sim [Z_1(s)]_i, \quad s \rightarrow \infty.$$

Здесь индекс  $i$  можно толковать как индексы «с» или «нс». Отметим, что в левой части стоит наблюдаемая функция  $J(s)/J(0)$ , а аргумент  $s$  справа играет роль обрезания  $\Lambda^2$ . Если теория сохраняет свой первоначальный смысл в пределе, когда обрезание отсутствует (а это весьма проблематично), мы получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} J_i(s) = J_i(\infty) = J_i(0) (Z_1)_i. \quad (10.63)$$

Хотя этот результат выглядит весьма привлекательным, мы подчеркиваем, что он получен только в рамках теории возмущений, правда, с учетом всех ее порядков. (Асимптотики любого *конечного* порядка совершенно иные). Приняв тем не менее условия (10.63), мы должны пользоваться стандартным для теории возмущений определением:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{Неперенормированная константа связи} \\ \text{несохраняющегося тока} \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{c} \text{Перенормированная константа связи} \\ \text{несохраняющегося тока} \end{array} \right) \times (Z_1)_{nc} Z_2^{-1}. \end{aligned}$$

Как упоминалось ранее, это означает

$$G = J_{nc}(0) (Z_1)_{nc} Z_2^{-1} = G_A (Z_1)_{nc} Z_2^{-1}. \quad (10.64)$$

Аналогично для сохраняющегося тока

$$G = J_c(0) (Z_1)_c Z_2^{-1} = G_V (Z_1)_c Z_2^{-1}. \quad (10.65)$$

Но выше было показано, что сохраняющийся ток не перенормируется, т. е. что  $G_V = G$ . Поэтому совместно с равенствами (10.63) и (10.65) получаем

$$(Z_1)_c = J_c(\infty)/J_c(0) = Z_2. \quad (10.66)$$

Теперь соотношения (10.63), (10.64) и (10.66) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_{nc}(\infty)}{J_{nc}(0)} = (Z_1)_{nc} = \frac{G}{G_A} Z_2 = \frac{G}{G_A} \cdot \frac{J_c(\infty)}{J_c(0)}; \\ \frac{J_{nc}(\infty)/J_{nc}(0)}{J_c(\infty)/J_c(0)} = \frac{G}{G_A}. \end{aligned} \right\} \quad (10.67)$$

Хотя в основе полученного результата лежит весьма смелое предположение, привлекательно то, что его можно проверить на опыте. В соответствии с данными о  $\mu$ -распаде и распаде нейтрона правая часть равна примерно 1,25. Числитель левой части в принципе можно найти из экспериментов по рассеянию нейтрино высоких энергий на нуклонах, знаменатель — из опытов по нуклон-электронному рассеянию. Значения  $J_i(\infty)$ , конечно, недостижимы, и равенство (10.67) следует интерпретировать как асимптотическое соотношение

$$\frac{J_{nc}(s)/J_{nc}(0)}{J_c(s)/J_c(0)} \sim \frac{G}{G_A},$$

справедливое «для больших  $s$ ». К сожалению, мы не знаем, насколько большим  $s$  соответствует асимптотический режим.

Наконец, формула (10.66), т. е.

$$J_c(\infty) = Z_2 J_c(0), \quad (10.68)$$

заслуживает дополнительного комментария, особенно в свете фундаментального неравенства  $0 \leq Z_2 \leq 1$  и в соответствии с интерпретацией  $J_c(\infty)$  как величины «заряда», сконцентрированного в «жестком острове» распределения «заряда». Эта формула наводит на мысль, что константу перенормировки волновой функции можно принять за вероятность того, что весь заряд частицы сконцентрирован в острове. Действительно, в теории возмущений константа  $Z_2$  интерпретируется иногда как вероятность найти «голую» частицу в состоянии, соответствующем «физической» частице, какой бы смысл ни придавался этим словам. Помимо этого, в перенормированной теории возмущений имеются теоретические основания считать весьма правдоподобным (но не обязательным), что  $Z_2$  всегда равна нулю (по крайней мере в теориях, отличных от теории « $\phi^3$ », описывающей самодействие скалярных частиц). Если это так, то доступным опытной проверке оказывается само соотношение (10.68), согласно которому в данном случае  $J_c(\infty) = 0$ . Однако по-прежнему не известно, как быстро может наступить асимптотический режим. Впрочем, можно, по-видимому, считать, что скорость асимптотического спада  $J_c$  обратно пропорциональна скорости стремления к бесконечности выражения (7.10), формально опреде-

ляющего  $Z_2$ . Иными словами, вполне можно предположить, что

$$J_c(s)/J_c(0) \sim \{s\Delta'_F(s)\}^{-1}.$$

Такое соотношение сразу же даст закон

$$J_c(s)/J_c(0) \sim \frac{\text{const}}{\ln s},$$

## Глава 11

### УРАВНЕНИЕ ОМНЕСА

Дисперсионные представления наименее спекулятивны и наиболее эффективны в своих применениях, когда они используются для вычисления законов изменения формфакторов, парциальных амплитуд и подобных им величин в ограниченной области их аргументов. Абсолютная нормировка осуществляется при этом непосредственно на основании результатов эксперимента в форме констант вычитания. Здесь применяется техника учета «ближайших особенностей». В настоящей главе мы используем ее для изучения свойств формфактора  $J(z)$ .

Формфакторы появляются в двух совершенно различных физических ситуациях. При рассмотрении формфакторов слабо связанных источников, таких, как плотность электромагнитного тока или слабые токи  $V_\lambda$  и  $A_\lambda$ , задача сводится к использованию любой имеющейся информации о сильных взаимодействиях в качестве исходных данных при вычислениях функциональной зависимости формфактора. С такой наиболее прямой постановкой вопроса мы будем иметь дело в этой главе. Однако возникает ряд интересных проблем и при вычислении *абсолютных значений* некоторых «индуцированных» формфакторов. Возможность применения метода к решению указанных задач весьма спорна, поскольку приходится опираться на асимптотическое поведение выражений, выведенных лишь для низких энергий. Пример такой ситуации мы встретим в гл. 16.

Иная картина наблюдается в случае формфакторов источников сильно взаимодействующих частиц. Примером может служить  $\pi$ -мезон-нуклонный формфактор,

введенный в § 10.1. Эти «сильные» формфакторы необходимы не только как исходные данные для вычислений, о которых говорилось в предыдущем параграфе. Они играют роль и в самих динамических теориях сильных взаимодействий при попытке вычисления формфактора на основе какого-нибудь разумного динамического приближения. При этом мы снова сталкиваемся с асимптотическим поведением; основания для приложения снова становятся шаткими, и в дальнейшем мы не будем их касаться.

### § 11.1. УРАВНЕНИЕ ОМНЕСА

Рассмотрим скалярный формфактор  $J(z)$  (см. гл. 9). Предположим, что величина  $J(0)$  известна из опыта, и проанализируем поведение функции  $J(z)$  при малых  $|z|$ . Разумно предположить, что это поведение определяется в основном ближайшей точкой ветвления и скачком на ближайшей части разреза, т. е. функцией  $\sigma(s)$  при малых  $s$ . Такая картина весьма привлекательна, особенно при использовании представления с вычитанием:

$$J(z) = J(0) + z \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \sigma(s)/s(s-z), \quad (11.1)$$

когда подынтегральное выражение спадает достаточно быстро (или, по крайней мере, предполагается быстро спадающим) при удалении от точки ветвления.

Тогда естественно учитывать в  $\sigma$  вклад только от низшего промежуточного состояния, т. е. только от самого двухмезонного состояния. Вплоть до точки  $s=16\mu^2$  выражение для функции  $\sigma(s)$  будет при этом точным, а выше этой точки его следует рассматривать как приближенное. До конца главы мы будем действовать в рамках именно такого приближения.

Вспомним, что, согласно (9.27),  $\sigma(s)$  имеет вид

$$\sigma(s) = (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \sum_n \langle k_2 | \eta | n \rangle \langle n | j | 0 \rangle \delta(n - k_1 - k_2), \quad (11.2)$$

$$s = (k_1 + k_2)^2.$$

Можно выбрать в качестве  $|n\rangle$  полный набор как ин-, так и аут-состояний. Рассмотрим для определенности

ин-состояния. Поскольку мы обнаружили, что  $J(s) \equiv \equiv J(s+i\epsilon)$ , то

$$\langle n|i|0\rangle = \langle kl, in|j|0\rangle = (\sqrt{4\omega_k\omega_l})^{-1} J^*(s). \quad (11.3)$$

В силу свойств  $\delta$ -функции в (11.2)  $n^2 = (k+l)^2 = = (k_1+k_2)^2 = s$ . Первый множитель равен  $\langle k_2|\eta|kl, in\rangle$ . Вспомним, что в гл. 4 инвариантная амплитуда процесса упругого рассеяния  $k+l \rightarrow k_1+k_2$  определена следующим образом:

$$(16\omega_1\omega_2\omega_k\omega_l)^{-1/2} \mathfrak{M}_{fi} = (2\omega_1)^{-1/2} \langle k_2|\eta|kl, in\rangle.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \langle k_2|\eta|kl, in\rangle = & \left\{ \frac{32\pi\omega}{k} \sum_l (2l+1) \times \right. \\ & \left. \times P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right\} (8\omega^3)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Это выражение снова записано в системе общего центра масс, в которой  $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0=\mathbf{k}+\mathbf{l}$  и в которой все  $\omega$  равны. Подставим (11.3) и (11.4) в соотношение (11.2)

и вспомним, что  $\sum_n := \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ , а множитель  $1/2$  возник

вследствие неразличимости частиц. Выполняя суммирование в системе центра масс, находим

$$\begin{aligned} \sigma(s) = & (2\pi)^3 \sqrt{2\omega} (2\pi)^{-6} \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{l} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{l}) \delta(\sqrt{s}-2\omega) \times \\ & \times \left\{ \frac{32\pi\omega}{k} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right\} \times \\ & \times (8\omega^3)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2\omega} J^*(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

Мы учли действие  $\delta$ -функции, приравняв друг к другу все  $\omega$ .

Перепишем предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} \sigma(s) = & (2\pi)^{-3} (32\pi) \frac{1}{2} \int_0^\infty k\omega d\omega \delta(\omega - \sqrt{s/2}) \times \\ & \times \frac{1}{2} \int d\Omega \sqrt{2\omega} \frac{\omega}{k} (8\omega^3)^{-1/2} \frac{1}{2\omega} J^*(\omega) \sum_l (2l+1) \times \\ & \times P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Наконец, отметим, что после интегрирования по  $\Omega$  сохраняется только  $S$ -волна, поскольку от  $\Omega$  зависят лишь полиномы Лежандра. Итак,  $\int d\Omega P_l = 4\pi\delta_{l0}$ . Следовательно, обозначив для краткости  $\delta_0 = \delta$ , получим:

$$\sigma(s) = (32\pi)(2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} J^*(s) e^{i\delta} \sin \delta \cdot 4\pi;$$

$$\sigma(s) = \pi^{-1} \exp[i\delta(s)] \sin \delta(s) J^*(s). \quad (11.6)$$

Эта формула замечательна тем, что в результате ее применения дисперсионное представление превращается в интегральное уравнение, так называемое уравнение Омнеса:

$$J(z) = J(0) + \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} e^{i\delta(s)} \sin \delta(s) J^*(s).$$

Поскольку из общих соображений уже известно, что спектральная функция справа вещественна, можно переписать это уравнение в эквивалентном виде:

$$J(z) = J(0) + \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} e^{-i\delta(s)} \sin \delta(s) J(s). \quad (11.7)$$

Итак, фаза функции  $J(s)$  есть  $\delta(s)$ . В этом состоит известная теорема *Ватсона о взаимодействии в конечном состоянии* (Watson, 1952; Goldberger, Watson, 1964). Учитывая, что

$$e^{-i\delta} \sin \delta J = e^{-i\delta} \sin \delta |J| e^{i\delta} = \sin \delta |J| =$$

$$= \sin |\delta| \operatorname{Re} J / \cos \delta = \operatorname{tg} \delta \operatorname{Re} J,$$

запишем уравнение (11.7) в стандартном виде:

$$J(z) = J(0) + \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \operatorname{tg} \delta(s) \operatorname{Re} J(s). \quad (11.8)$$

Отметим, что, исходя из дисперсионного представления, явно выражающего аналитические свойства функции  $J$ , получено интегральное уравнение для  $J$ . Конечно, уравнение выведено в приближении, когда сохранены лишь двухмезонные состояния в «унитарной сумме», определяющей спектральную функцию.

Из физических соображений очевидно, что уравнение Омнеса содержит фазы тех парциальных волн, квантовые числа которых соответствуют трансформационным свойствам оператора источника  $j$ . Как мы только что видели, для скалярного источника, обладающего квантовыми числами  $0^+$ , и скалярных частиц остается  $S$ -волна. Напротив, уравнение Омнеса для электромагнитного формфактора  $f$  скалярных частиц [определенного, например, уравнением (9.5)] содержит только фазу  $P$ -волны. Ее квантовые числа  $J^P = 1^-$ , такие же, как у (пространственных компонент) полярного вектора  $s_\lambda$ . Чтобы понять это, следует напомнить результаты § 9.3. Там отмечалось, что векторный формфактор, как целое, является объектом обычных эвристических рассуждений, приводящих к дисперсионному представлению и выражению для его спектральной функции. Таким образом, пренебрегая вычитаниями, в двухчастичном приближении получаем

$$(k_2 - k_1)_\lambda f(s) = \int ds' \sigma_\lambda(s') / (s' - s),$$

$$\sigma_\lambda(s) = (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \sum_{k, l} \langle k_2 | \eta | kl \rangle \times$$

$$\times \langle kl | s_\lambda | 0 \rangle \delta(k_1 + k_2 - k - l).$$

Переходя к системе центра масс и подставляя  $(k_2 - k_1)_\lambda f^*(s)$  вместо второго матричного элемента, мы видим, что из-за наличия  $\delta$ -функции временная компонента  $\sigma_0$  обращается в нуль. Вспоминая, что теперь мы имеем дело с противоположно заряженными и, следовательно, различными частицами для пространственных компонент, находим

$$\sigma(s) = (2\pi)^{-3} \int dk \delta(2\omega_k - \sqrt{s}) \frac{16\pi\omega}{k} \times$$

$$\times \sum (2l + 1) P_l(\cos \theta_{k_2, k}) e^{i\delta_l} \sin \delta_l 2k f^*(s) / 4\omega^2.$$

Направим ось  $z$  вдоль  $k_2$  и выберем  $\theta, \varphi$  в качестве сферических углов вектора  $k$ , так что  $\theta_{k_2, k} \equiv \theta$ . Заметим, наконец, что написанное выше векторное равенство для  $\sigma$  должно выполняться покомпонентно. Поэтому для

$z$ -компоненты с учетом того, что  $k_3 = |\mathbf{k}| \cos \theta$ , непосредственно получаем

$$\sigma_3(s) = |\mathbf{k}_2| f^*(s) \pi^{-1} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \sum (2l + 1) P_l(\cos \theta) \times \\ \times e^{i\delta_l} \sin \delta_l \cdot \cos \theta = 2 |\mathbf{k}_2| f^*(s) \pi^{-1} e^{i\delta_1} \sin \delta_1.$$

Воспользовавшись инвариантностью относительно вращений, мы можем заключить, что в системе центра масс

$$\sigma(s) = 2\mathbf{k}_2 \pi^{-1} e^{i\delta_1} \sin \delta_1 f^*(s).$$

Поскольку в этой системе  $2\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ , можно подставить выражение для  $\sigma$  в дисперсионное представление и сократить множитель  $(k_2 - k_1)_\lambda$  в обеих частях его. Тогда ожидаемое представление для самой коэффициентной функции  $f$  будет иметь вид

$$f(s) = \int ds' \sigma(s') / (s' - s); \quad \sigma = \pi^{-1} e^{i\delta_1} \sin \delta_1 f^*.$$

Аналогично уравнение Омнеса для фермионных электромагнитных формфакторов будет содержать парциальные волны системы фермион-антифермион, квантовые числа которых равны  $1^-$ , т. е. волны  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$ . Таким образом, получается система уравнений, в которую входят две парциальные волны. Это соответствует тому факту, что имеются два различных формфактора. Для слабого векторного тока следует рассматривать две функции  $c(s)$  и  $d(s)$ , определяемые уравнением (10.44). Наконец, скалярный и псевдоскалярный формфакторы фермионов будут содержать парциальные волны  ${}^3P_0$  и  ${}^1S_0$  соответственно, а в нуль обратятся компоненты  $\bar{u}i$  и  $\bar{u}\gamma_5 u$ . Последний случай важен тем, что он относится и к  $\pi$ -мезон-нуклонному формфактору, обсуждавшемуся в § 10.1, и к «индуцированному псевдоскалярному» формфактору  $b(s)$  плотности слабого аксиального тока, введенному в (10.27).

Прежде чем заняться решением уравнения (11.8), обобщим его в применении к комплексной фазе. При этом, однако, мы исключаем ее из самой функции  $J(z)$ . В таком случае мы учитываем и неупругие промежуточные состояния в той мере, в какой они ответственны за комплексную фазу. Необходимо проявлять особую осторожность, чтобы на всех этапах приближения сохранить вещественность функции  $\sigma$ . В этом отношении помогает



известный искусный прием Гольдбергера и Треймана: вернемся к равенству (11.2) и перепишем сумму  $\sum_n$  в

виде  $\frac{1}{2} \left( \sum_{n, in} + \sum_{n, out} \right)$ . С ин-суммой мы только что имели

дело; для аут-суммы следует заменить множитель

$$\langle k_2 | \eta | kl, in \rangle \langle kl, in | j | 0 \rangle \sim e^{i\delta} \sin \delta J^*$$

на

$$\langle k_2 | \eta | kl, out \rangle \langle kl, out | j | 0 \rangle \sim (e^{i\delta} \sin \delta)^* J.$$

Отметим, что поскольку  $\delta$  больше не предполагается вещественной, то  $(e^{i\delta} \sin \delta)^* \neq e^{-i\delta} \sin \delta$ . Во втором соотношении была использована  $TP$ -инвариантность. Итак, в общем случае мы должны написать

$$\pi\sigma(s) = \text{Re} \{ e^{i\delta} \sin \delta J^*(s) \}. \quad (11.9)$$

Удобно снова выразить  $\sigma$  через  $\delta$  и  $\text{Re} J$ . Обозначим

$$f(s) \equiv e^{i\delta} \sin \delta = [e^{2i\delta} - 1]/2i \quad (11.10)$$

и

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad (11.11)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  вещественны. Из унитарности следует, что  $\delta_2$  положительна. Поскольку  $\text{Im} J = \pi\sigma$  [именно для того, чтобы это соотношение осталось в силе на всех стадиях приближения, мы вынуждены были перейти к соотношению (11.9)], имеем:

$$\pi\sigma(s) = \text{Im} J = \text{Re} f \text{Re} J^* - \text{Im} f \text{Im} J^*;$$

$$\text{Im} J = \text{Re} f \text{Re} J + \text{Im} f \text{Im} J;$$

$$\text{Im} J = \frac{\text{Re} f}{1 - \text{Im} f} \text{Re} J.$$

Введем фазовый угол  $\varphi$ :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{Re} f}{1 - \text{Im} f} = \frac{e^{-2\delta_2} \sin 2\delta_1}{1 + e^{-2\delta_2} \cos 2\delta_1} \quad (11.12)$$

и окончательно получим

$$J(z) = J(0) = \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \text{tg } \varphi(s) \text{Re} J(s). \quad (11.13)$$

Отметим, что если  $\delta$  вещественна, т. е.  $\delta_2=0$  (в области ниже точки  $s=16\mu^2$  это так), из (11.12) следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \sin 2\delta_1 / (1 + 2 \cos 2\delta_1) = \operatorname{tg} \delta_1, \text{ т. е. } \varphi = \delta;$$

с другой стороны, угол  $\varphi$  не равен фазе функции  $f$ , когда  $\delta$  комплексна.

Полезно, наконец, обсудить, что дает полученное дисперсионное представление. Отдельные члены суммы,

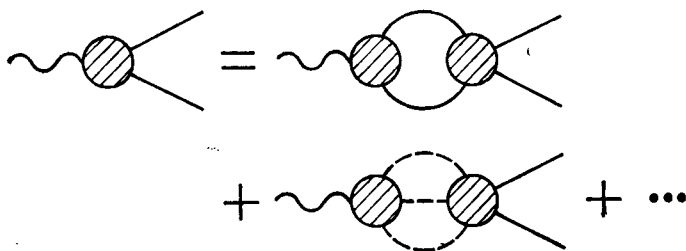


Рис. 11.1

описывающей спектральную функцию, схематически изображены на рис. 11.1. Необходимо отличать такие диаграммы от графов Фейнмана. Интерпретируются они следующим образом. Слева представлен рассматриваемый процесс: источник  $j$  испускает две частицы. Поле, источником которого является  $j$ , изображено волнистой линией. Справа последовательно изображены вклады в абсорбтивную часть. Первый из них учитывается в уравнении Омнеса. Следовательно, обычно применяемый знак «равенства» нужно понимать весьма условно. Изображенное на рисунке «разложение», как правило, считается законным для задач о функциональной зависимости  $J$  в ограниченной области. При этом низшие по массам состояния предполагаются более важными, нежели высшие. Для соотношения без вычитаний, в котором подлежит вычислению и сама величина  $J(0)$ , конечно, нет гарантии, что большие числители не скомпенсируют или даже перекроют эффект дисперсионного знаменателя. Напротив, их влияние может оказаться настолько серьезным, что высшие промежуточные состояния начнут давать в  $J(0)$  вклад, сравнимый с вкладом низших.

Вернемся к рассматриваемому конкретному случаю. Итак, мы достигли поставленной цели и имеем теперь

дело лишь с непосредственно наблюдаемыми характеристиками мезонной системы: в полученные формулы входит лишь фаза  $S$ -волны. Зная это, мы надеемся правильно описать низкоэнергетическое поведение функции  $J(z)$ . Обратим внимание на полное отсутствие даже ссылок на «виртуальные», или «голые», частицы и на разложения по степеням константы связи. Все состояния, входящие в вычисления, — реальные физические состояния. Единственная непредусмотренная опасность — возможная расходимость интеграла. Однако, если на бесконечности функция  $\sigma$  ограничена полиномом, эту трудность всегда можно обойти, введя конечное число констант, определяемых непосредственно из опыта. В некотором смысле они соответствуют перенормированным константам связи в теории возмущений. В то же время спектральная функция, не ограниченная полиномом, ассоциируется с неперенормируемыми теориями.

## § 11.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОМНЕСА

Решение уравнений общего типа (11.13) подробно обсуждалось Джексоном (Jackson, 1961; см. также Goldberger, Watson, 1964; Omnés, 1958; Мухелишвили, 1953). Здесь мы ограничимся простейшим возможным случаем, а именно уравнением без вычитаний

$$J(z) = \pi^{-1} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \operatorname{tg} \varphi(s) \operatorname{Re} J(s)/(s-z), \quad (11.14)$$

и просто перечислим результаты для более общего случая. Особенности метода полностью выявляются на этом примере.

Сначала заметим, что уравнение (11.14) однородно и поэтому определяет  $J(z)$  в лучшем случае с точностью до произвольного множителя. Причина этой неопределенности лежит в самой природе задачи, и ее с самого начала следовало ожидать. Абсолютное значение  $J(0)$  можно *вычислить* лишь с привлечением дополнительных соображений: можно либо сделать уравнение неоднородным, приняв во внимание вклад в  $\sigma$  от неупругих промежуточных состояний, либо привлечь к рассмотрению законы сохранения, как обсуждалось ранее.

Решение можно было бы выписать сразу, но полезнее описать детали его получения.

Введем вспомогательную функцию  $F(z)$ :

$$F(z) = (2\pi i)^{-1} \int ds \operatorname{tg} \varphi(s) \operatorname{Re} J(s)/(s-z). \quad (11.15)$$

Из этого равенства немедленно следует соотношение

$$J(z) = 2iF(z).$$

Имея в виду сделанные выше замечания, напишем:

$$J(z)/J(0) = F(z)/F(0); \quad (11.16)$$

$$F(s+i\varepsilon) - F(s-i\varepsilon) = \theta(s-4\mu^2) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Re} J; \quad (11.17)$$

$$\operatorname{Re} J(s) = i[F(s+i\varepsilon) + F(s-i\varepsilon)]. \quad (11.18)$$

Мы выделили неявно содержащуюся  $\theta$ -функцию. Подстановка выражения (11.18) в формулу (11.17) дает:

$$F(s+i\varepsilon) - F(s-i\varepsilon) = i \operatorname{tg} \varphi [F(s+i\varepsilon) + F(s-i\varepsilon)];$$

$$F(s+i\varepsilon)(1-i \operatorname{tg} \varphi) = F(s-i\varepsilon)(1+i \operatorname{tg} \varphi).$$

Разделив последнее уравнение на  $1+i \operatorname{tg} \varphi$  и заметив, что

$$(1-i \operatorname{tg} \varphi)/(1+i \operatorname{tg} \varphi) = e^{-2i\varphi},$$

получим

$$F(s+i\varepsilon) \exp(-2i\varphi) = F(s-i\varepsilon).$$

Логарифмируя обе части последнего соотношения, приходим к соотношению

$$\ln F(s+i\varepsilon) - \ln F(s-i\varepsilon) = 2i\varphi \theta(s-4\mu^2). \quad (11.19)$$

Мы уже знаем, что  $\ln F(z)$  имеет разрез вдоль вещественной оси от  $4\mu^2$  до  $\infty$ , поскольку этот разрез есть у функции  $F$ . Уравнение (11.19) определяет скачок на этом разрезе, так что можно написать интегральное представление Коши\*:

$$\ln F(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds [\ln F(s+i\varepsilon) - \ln F(s-i\varepsilon)]/(s-z) =$$

\* На данном этапе предполагается, что вспомогательная функция  $F$  не имеет нулей. В противном случае логарифм имел бы дополнительные разрезы. Поскольку сама функция  $F$  выражается через  $\operatorname{Re} J$  и поэтому связана с искомым решением, это предположение приводит к новому условию на решение. В остальном это решение может быть весьма произвольным. Степень произвола мы обсудим позднее. В качестве упражнения предлагаем провести рассуждения для случая, когда  $F$  имеет нули.

$$= \pi^{-1} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \varphi(s)/(s-z),$$

откуда

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds}{s-z} \varphi(s) \right\} \quad (11.20)$$

и с учетом соотношения (11.16)

$$\left. \begin{aligned} J(z) &= \frac{J(0) \exp \{ \pi^{-1} \int ds \varphi(s)/(s-z) \}}{\exp \{ \pi^{-1} \int ds \varphi(s)/s \}}; \\ J(z) &= J(0) \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \frac{\varphi(s)}{s(s-z)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

Это — простейшее стандартное решение. Оно годится также и для уравнения с одним вычитанием.

Решение, разумеется, не однозначно. Прежде всего решение можно умножить на константу. Помимо константы допустимы множители, зависящие от  $z$ . Выясним, какими они могут быть.

Проанализируем уравнение (11.14) и перечислим всю информацию, которая содержится в этом уравнении. В силу этого уравнения функция  $J$  должна быть вещественной функцией всюду, кроме разреза от  $4\mu^2$  до  $\infty$ , и не должна иметь других особенностей. Соотношение

$$\operatorname{Im} J(s+i\epsilon) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Re} J$$

позволяет считать  $\varphi$  фазой функции  $J$  на верхнем берегу разреза. Никаких других ограничений не налагается.

Всем этим ограничениям можно удовлетворить, если заметить, что функция

$$\pi^{-1} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \varphi(s)/(s-z) \equiv u(s) \quad (11.22)$$

имеет мнимую часть

$$\operatorname{Im} u(s+i\epsilon) = \varphi(s) \theta(s-4\mu^2)$$

и аналитична всюду, кроме разреза от  $4\mu^2$  до  $\infty$ . Следовательно, функция  $\exp u(z)$  будет удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к  $J$ . Добавив условие нор-

мировки при  $z=0$ , мы сразу получим выписанное выше решение. Для дальнейшего мы введем функцию Омнеса

$$\Omega(z) = \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int ds \frac{\varphi(s)}{s(s-z)} \right\}. \quad (11.23)$$

Ясно, кроме того, что следующие модификации не повлияют на выполнение требований, предъявляемых к  $J$ :

1) в формуле (11.22) можно выполнить произвольное число вычитаний;

2) функцию  $\Omega(z)$  можно умножить на произвольный полином по  $z$  с вещественными коэффициентами. Нельзя, однако, умножать  $\Omega(z)$  на произвольную вещественную рациональную функцию от  $z$ , поскольку первоначальное дисперсионное соотношение исключает наличие возможных полюсов.

Существование таких вещественных полиномов и их коэффициенты можно установить лишь с привлечением дополнительных физических соображений: можно, например, сослаться на формальное соответствие с теорией возмущений в пределе слабой связи или на свойства одновременных коммутаторов; чаще всего, однако, накладывают физически мотивированные граничные условия прямо на  $J(z)$  либо при  $z=0$ , либо при  $z=\infty$ , либо одновременно при  $z=0$  и  $z=\infty$ . В любой конкретной ситуации выбор полинома, как правило, очевиден; в большинстве случаев его полагают равным единице. Отметим также очень существенный факт, что функция  $\Omega(z)$  не имеет ни нулей, ни полюсов всюду, за исключением, может быть, бесконечности.

Асимптотическое поведение функции Омнеса будет весьма существенным для дальнейшего, хотя само двухчастичное приближение, использовавшееся при выводе уравнения Омнеса, не может отразить всей картины в асимптотической области. Если интеграл без вычитаний от фазы сходится, то

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} u(z) = 0; \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \exp u(z) = 1. \quad (11.24)$$

Но если интеграл (11.22) расходится, следует нормировать функцию  $\Omega$  в некоторой конечной точке. Поэтому  $\Omega$  представлена в виде (11.23) с  $\Omega(0)=1$ . Ее асимптотическое поведение описывается формулой

$$\Omega(z) \sim \exp \left\{ -\pi^{-1} \int ds \varphi(s)/s \right\}. \quad (11.25)$$

Например, если  $\varphi(\infty)$  есть конечная постоянная, так что интеграл (11.22) расходится, то из формулы (11.25) следует

$$\Omega(z) \sim \exp\{-\pi^{-1} \varphi(\infty) \ln s\}; \quad (11.26)$$

$$\Omega(z) \sim s^{-\varphi(\infty)/\pi}. \quad (11.27)$$

Итак, величина  $\Omega(\infty)$  может быть конечной только тогда, когда функция  $\varphi(s)$  достаточно быстро убывает к нулю на бесконечности, что необходимо для существования интеграла (11.22). В противном случае функция  $\Omega$  либо обращается в нуль, либо расходится при  $|z| \rightarrow \infty$ . Значение  $\varphi(\infty)$  легко найти. Например, если  $|\delta|$  не превосходит  $\pi/2$  нигде ниже неупругого порога (в частности, если  $\delta$  положительна, но в области упругого рассеяния нет резонансов), то из соотношения (11.12) следует, что  $|\varphi| < \pi/2$ . Тогда в отсутствие упругих резонансов  $\Omega$  не может расти быстрее  $s^{1/2}$  и спадать быстрее  $s^{-1/2}$ . В качестве упражнения предлагаем воспользоваться асимптотическим поведением функции Омнеса для оценки двухчастичного вклада в спектральную функцию представления Лемана из § 7.4.

Далее, напомним, что фазы обычно идентифицируются с точностью до произвольного слагаемого, кратного  $\pi$ . Посмотрим, как изменится  $\Omega$ , если заменить  $\delta$  на  $\delta + n\pi$ . Ограничиваясь при этом вещественными фазами, предлагаем в качестве простого упражнения показать, что такая замена приводит к преобразованию

$$\Omega(z) \rightarrow \tilde{\Omega}(z) = \Omega(z) \left[ \frac{4\mu^2}{4\mu^2 - z} \right]^n.$$

Как правило, по физическим соображениям формфактор на пороге не может ни резонировать, ни обращаться в нуль. Поэтому всегда выбирают  $n=0$  с конечной величиной  $\delta$  на пороге для  $S$ -волны и обращаемой в нуль для высших гармоник.

### § 11.3. УРАВНЕНИЕ ОМНЕСА ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

При рассмотрении скалярного формфактора нейтральных скалярных мезонов с массой  $\mu$  предположим, что существует еще одна нейтральная скалярная частица. Назовем ее  $\sigma$  и обозначим ее массу через  $m$ . Пусть

квантовые числа таковы, что частицу  $\sigma$  можно (хотя и не обязательно) считать связанным  $S$ -состоянием двух частиц массы  $\mu$ . Ясно, что должно выполняться неравенство  $m < 2\mu$ , поскольку в противном случае частица  $\sigma$  оказалась бы нестабильной. В этом параграфе мы увидим, как наличие частицы  $\sigma$  модифицирует дисперсионное представление для  $J(s)$  и как, при некоторых предположениях, новое представление опять приведет нас к разрешимому уравнению Омнеса.

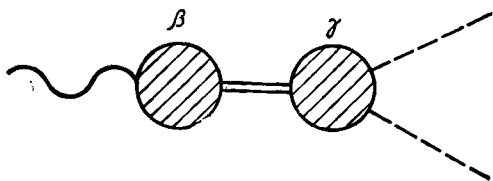


Рис. 11.2

Для начала следует включить одночастичные  $\sigma$ -состояния в систему промежуточных состояний (9.27) для спектральной функции. В качестве упражнения предлагаем показать, что их вклад равен

$$\beta\gamma\delta(s - m^2), \quad (11.28)$$

где

$$\beta = \sqrt{2\omega_\sigma} \langle \sigma | j(0) | 0 \rangle, \quad (11.29)$$

а  $\gamma$  определена соотношениями:

$$\gamma = L(m^2);$$

$$L(s) = \sqrt{4\omega_2\omega_\sigma} \langle k_2 | \eta(0) | \sigma \rangle, \quad s = (\sigma - k_2)^2. \quad (11.30)$$

Диаграмма, представляющая этот вклад, изображена на рис. 11.2. Очевидно,  $\gamma$  — это константа связи первоначального мезона с  $\pi$ -мезоном, а  $\beta$  — эффективная константа связи, измеряющая интенсивность взаимодействия  $\sigma$ -частицы с источником  $j$ . В общем случае следует считать  $\gamma$  параметром, присущим сильным взаимодействиям, однако можно надеяться вычислить  $\beta$  через более фундаментальные величины, по крайней мере тогда, когда  $\sigma$  действительно является связанным состоянием. Позднее мы столкнемся с подобными примерами. Итак,



частица  $\sigma$  вносит в формфактор  $J(s)$  полюс. Теперь дисперсионное представление с одним вычитанием имеет вид

$$J(z) = J(0) + \frac{z\beta\gamma}{m^2(m^2 - z)} + z \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{s(s - z)}. \quad (11.31)$$

С другой стороны, исходя из представления без вычитаний, мы получили бы

$$J(z) = \frac{\beta\gamma}{m^2 - z^2} + \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{s - z}. \quad (11.32)$$

Если вклад в  $\sigma$  от разреза, как и ранее, приближать только двухмезонными состояниями (мезон с массой  $\mu$ ), то будет сразу получено уравнение типа Омнеса. Неоднородная компонента этого уравнения содержит, помимо константы вычитания  $J(0)$ , полюсной член

$$J(z) = J(0) + \frac{z\beta\gamma}{m^2(m^2 - z)} + \frac{z}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \frac{\text{tg } \varphi(s) \text{Re } J(s)}{s(s - z)}. \quad (11.33)$$

Другими словами, теперь следует искать функцию, аналитическую в плоскости с разрезом, фаза которой на верхнем берегу разреза по-прежнему равна  $\varphi$ , но обладающую полюсом в точке  $z=m^2$  с вычетом  $\beta\gamma$ . Кроме того, значение ее при  $z=0$  должно равняться  $J(0)$ . Решение этой задачи можно выписать сразу, выразив его через функцию Омнеса (11.23):

$$J(z) = \left\{ J(0) + \frac{z\beta\gamma}{m^2(m^2 - z)} \frac{1}{\Omega(m^2)} \right\} \Omega(z). \quad (11.34)$$

## Глава 12

### АППРОКСИМАЦИИ АМПЛИТУД ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН И ФУНКЦИЙ ОМНЕСА

В дальнейшем будем вести рассмотрение в рамках двухчастичного приближения спектральной функции формфактора. При этом функция Омнеса, удовлетворяющая физически разумным граничным усло-

виям, полностью решает проблему выражения формфактора через наблюдаемые характеристики сильно взаимодействующих частиц. В принципе нужна лишь одна функция  $\delta_l$  для всех вещественных  $s$  выше порога. Однако для практического применения таких решений желательно кое-что знать об аналитических свойствах самих парциальных амплитуд  $f_l$ , определяемых соотношением

$$f_l(s) = e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s). \quad (12.1)$$

Такая информация полезна в силу ряда причин. Во-первых, в гл. 13 она потребуется для обсуждения аналитической структуры функции Омнеса на ее втором римановом листе. Во-вторых, на основе этой информации можно найти простую замкнутую форму для  $\Omega$  в тех случаях, когда для  $f_l$  выбрана разумная упрощенная параметризация. В-третьих, когда фазы не известны из опыта, а должны вычисляться в некотором динамическом приближении, соблазнительно вычислить непосредственно формфактор. В такой ситуации знание аналитической структуры амплитуды  $f_l$  поможет разумно выбрать приближение для  $\Omega$ .

В § 12.1 кратко описываются некоторые общие свойства функции  $f_l$ . Последовательно они выводятся в динамических теориях сильных взаимодействий, выходящих за рамки этой книги. Здесь мы просто перечислим результаты и попытаемся дать некоторым из них грубое объяснение в привычных для нас терминах. В § 12.2 мы обсудим некоторые приближения для  $f_l$  и  $\Omega$ , а в § 12.3 вычислим функции Омнеса для случаев, когда  $f_l$  можно параметризовать с помощью некоторых простых алгебраических выражений.

## § 12.1. СВОЙСТВА ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Представляется вероятным (и для всех практических задач это действительно так), что парциальные амплитуды упругого рассеяния частиц с равной массой обладают простыми аналитическими свойствами. Такое утверждение основано как на анализе представления Манделстама в теории поля, так и релятивистского обобщения обычной потенциальной теории. Ниже мы перечислим и кратко разберем наиболее существенные свойства; детальное их обсуждение и ссылки имеются в работе Фраучи (Frautshi, 1963).

Проще всего рассмотреть функции

$$h_l(s) = \frac{\omega}{k} e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s) = \frac{\omega}{k} f_l(s), \quad (12.2)$$

которые возникают в разложении инвариантной амплитуды на парциальные волны, как показано в гл. 4. Величина  $\omega$  определяется в данном случае как  $\sqrt{s/4}$ ; она вещественна и положительна на верхнем берегу разреза от  $-\infty$  до 0 в  $s$ -плоскости. Величина  $k$ , равная  $\sqrt{(s-4M^2)/4}$ , вещественна и положительна на верхнем

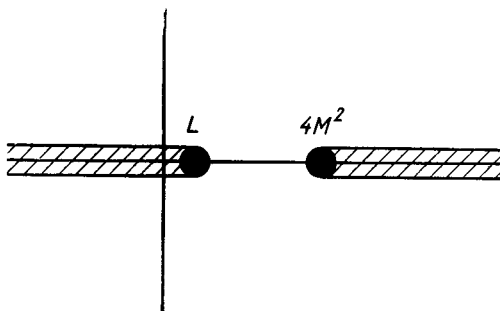


Рис. 12.1

берегу разреза от  $4M^2$  до  $\infty$ . Тогда представление Манделстама позволяет утверждать следующее.

Функция  $h_l(s)$  является граничным значением при  $z \rightarrow s + i\epsilon$  функции  $h_l(z)$  комплексной переменной  $z$ . Функция  $h_l(z)$  аналитична в  $z$ -плоскости с разрезами вдоль вещественной оси от  $4M^2$  до  $\infty$  и от  $-\infty$  до некоторой точки  $L$ ,  $0 \leq L < 4M^2$  (см. рис. 12.1). Существование правого разреза следует из унитарности. «Упругое» условие унитарности, принятое всюду далее, требует, чтобы на верхнем берегу правого разреза выполнялось соотношение

$$\text{Im } h_l(s) = \frac{k}{\omega} |h_l(s)|^2, \quad \text{Im } h_l^{-1}(s) = -\frac{k}{\omega}, \quad (12.3)$$

согласующееся с соотношением (12.2) при вещественных  $\delta$ . Уравнение (12.3) показывает, что на правом разрезе функция двулистка, т. е. корневого типа.

Напротив, левый разрез определяется конкретной динамикой взаимодействия. Положение левой точки

ветвления зависит от радиуса взаимодействия. Если  $m$  — низшая возможная масса систем, которыми могут обмениваться (виртуально) рассеивающиеся частицы, чья собственная масса равна  $M$ , то

$$L = 4M^2 - m^2.$$

Далее, если возможен обмен одной частицей, то  $L$  — логарифмическая точка ветвления. (Такова, например, ситуация в нуклон-нуклонном, но не мезон-мезонном рассеянии).

Эти следствия представления Манделстама можно получить и в обычной теории рассеяния в поле потенциала, рассматриваемой как нерелятивистский предел, переход к которому означает просто замену  $\omega \rightarrow M$ . Точка ветвления при  $s=0$ , которую на первый взгляд имеет функция (12.2) ввиду наличия множителя  $\sqrt{s/4}$ , в пределе потенциального рассеяния отсутствует. Отсюда ясно, что ее не следует путать с точками на динамическом левом разрезе.

В отсутствие связанных состояний функция  $h_l$  не имеет других особенностей. Если существует дискретное (связанное) состояние при инвариантной энергии  $B$  и если квантовые числа его совпадают с квантовыми числами  $l$ -й парциальной волны, то  $h_l$  имеет полюс при  $s=B$ .

Наконец,  $h_l$  — вещественная аналитическая функция и в представлении Манделстама, и в потенциальной теории. Другими словами,

$$h_l^*(z) = h_l(z^*), \quad (12.4)$$

что в сочетании с соотношением (12.2) дает

$$f_l^*(z) = -f_l(z^*). \quad (12.5)$$

Аналитическая структура функции  $h_l$  позволяет записать ее через интеграл Коши

$$h_l(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^L ds [h_l(s + i\varepsilon) - h_l(s - i\varepsilon)]/(s - z) + \\ + (2\pi i)^{-1} \int_{4M^2}^{\infty} ds [h_l(s + i\varepsilon) - h_l(s - i\varepsilon)]/(s - z).$$

В силу соотношения (12.4) имеет место равенство  $h(s-i\epsilon) = h^*(s+i\epsilon)$ . Тогда с учетом сходимости получим

$$\left. \begin{aligned} h_l(z) &= \pi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^L + \int_{4M^2}^{\infty} \right\} ds \operatorname{Im} h_l(s)/(s-z); \\ h_l(s) &\equiv h_l(s+i\epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Для парциальных волн нетрудно получить сведения о числе вычитаний (хотя в общем случае это сделать весьма трудно, если вообще возможно). Переписав соотношение (12.2) в виде

$$h_l(s) = \frac{\omega}{2ik} [\exp(-2\delta_2 + 2i\delta_1) - 1]$$

(где  $\delta \equiv \delta_1 + i\delta_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  вещественны и  $\delta_2 > 0$ ), получим, что при  $s \rightarrow \infty$  (при этом  $\omega/k \rightarrow 1$ ) на правом разрезе

$$\operatorname{Im} h_l(s) \leq [1 - \exp(-2\delta_2) \cos 2\delta_1] < 1.$$

Следовательно, интеграл по правому разрезу требует не более одного вычитания. По теореме Сугавара — Каназава это справедливо и для интеграла по левому разрезу. Итак, можно написать

$$h_l(z) = h_l(s_0) + \frac{z-s_0}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^L + \int_{4M^2}^{\infty} \right\} ds \frac{\operatorname{Im} h_l(s)}{(s-s_0)(s-z)}, \quad (12.7)$$

причем оба интеграла в отдельности сходятся. Однако, вспомнив, что по теореме Сугавара — Каназава  $\operatorname{Re} h_l$  на правом разрезе также ограничена постоянной, вычитание практически можно провести на бесконечности и переписать (12.7) в следующей форме:

$$h_l(z) = h_l(\infty) + \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^L + \int_{4M^2}^{\infty} \right\} ds \frac{\operatorname{Im} h_l(s)}{s-z}.$$

В этом случае сходимость каждого из интегралов уже не может быть гарантирована, но их расходящиеся части сокращаются. Все, что мы должны сделать в обоих случаях, — это воспользоваться обычным геометрическим ограничением полного сечения и связать его с параметрами столкновения, соответствующими различным  $l$ .

Имеется другое, почти столь же важное ограничение

на функцию  $h_l$  на пороге. И из представления Манделстама, и из потенциальной теории (вспомним о центробежном барьере) следует, что на пороге, т. е. при  $k \rightarrow 0$ , фаза  $\delta_l$  ведет себя как  $k^{2l+1}$ , вследствие чего  $h_l$  убывает к нулю по закону

$$h_l \sim k^{2l} \sim (s - 4M^2)^l. \quad (12.8)$$

Поэтому выгодно выбрать точку вычитания на пороге,  $s_0 = 4M^2$ , поскольку все величины  $h_l(4M^2)$ , кроме  $h_0(4M^2)$ , обращаются в нуль. Тогда

$$\left. \begin{aligned} h_0(z) &= h_0(4M^2) + \frac{z - 4M^2}{\pi} \left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_0(s)}{(s - 4M^2)(s - z)}, \\ h_1(z) &= \frac{z - 4M^2}{\pi} \left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_1(s)}{(s - 4M^2)(s - z)}, \\ h_2(z) &= \frac{z - 4M^2}{\pi} \left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_2(s)}{(s - 4M^2)(s - z)} \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

и т. д. Сходимость интеграла по правому разрезу никогда не является проблемой, даже если  $z \rightarrow 4M^2$ , так как  $\operatorname{Im} h_l \sim k^{-1} \sin^2 \delta_l$ . Для  $S$ -волны условие  $h_0 \sim \text{const}$  на пороге автоматически согласуется с соотношениями (12.9); то же самое верно и для условия  $h_1 \sim (z - 4M^2)$  на  $P$ -волну. Однако для  $D$ -волны и волн с еще большими значениями  $l$  должно осуществляться взаимное уничтожение интегралов по правому и левому разрезам. Например, для  $D$ -волны соотношение (12.8) влечет

$$\frac{z - 4M^2}{\pi} \left\{ \int_{\text{прав}} + \int_{\text{лев}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_2(s)}{(s - 4M^2)(s - z)} \sim (z - 4M^2)^2; \quad z \rightarrow 4M^2.$$

Подставив тождество

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s - 4M^2} + \frac{z - 4M^2}{(s - 4M^2)(s - z)},$$

находим

$$\begin{aligned} & \frac{z - 4M^2}{\pi} \left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_2(s)}{(s - 4M^2)^2} + \frac{(z - 4M^2)^2}{\pi} \times \\ & \times \left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \operatorname{Im} h_2(s)}{(s - 4M^2)(s - z)} \sim (z - 4M^2)^2; \quad z \rightarrow 4M^2. \end{aligned}$$

Следовательно, величина  $\text{Im} h_2$  должна удовлетворять правилу сумм

$$\left\{ \int_{\text{лев}} + \int_{\text{прав}} \right\} \frac{ds \text{Im} h_2(s)}{(s - 4M^2)^2} = 0. \quad (12.10)$$

Высшие парциальные волны удовлетворяют правилам еще быстрее сходящихся сумм. В качестве упражнения предлагаем показать, что если  $h_1$  обращается на бесконечности в нуль (т. е. если  $h_1(\infty) = 0$ ), то правилу сумм подчиняется и  $h_1$ . Таким образом, лишь для  $h_0$  правило сумм в таком простом виде не выполняется. Полезно также детально рассмотреть, к чему приведет вычитание величины  $h_l$  в какой-либо точке не на пороге.

Проблема выполнения этих правил сумм осложняет любые попытки провести динамические вычисления на основе дисперсионных представлений для парциальных волн. Многие такие попытки оказываются безнадежными из-за невозможности удовлетворить этим правилам. В дальнейшем, при обсуждении некоторых динамических схем, следует не забывать об этом обстоятельстве. Однако наши примеры большей частью будут относиться к  $S$ -волне, для которой не возникает осложнений. Подробное обсуждение этой проблемы и ссылки можно найти в работах Моравчика (Moravcsik, 1964) и Балахандрана и Хиппеля (Balachandran, van Hippel, 1964).

Часто полезно представить  $h_l$  в виде

$$h_l(z) = N_l(z)/D_l(z), \quad (12.11)$$

где, по определению,  $N_l$  и  $D_l$  — вещественные аналитические функции, причем  $N_l$  аналитична в  $z$ -плоскости с разрезом (только) от  $-\infty$  до  $L$ , а  $D_l$  аналитична в  $z$ -плоскости с разрезом (только) от  $4M^2$  до  $+\infty$ . Представление (12.11) согласуется с условием унитарности (12.3), если

$$\text{Im} D_l(s + i\varepsilon) = -\frac{k}{\omega} N_l(s);$$

тогда интеграл Коши сразу дает

$$D_l(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \cdot \frac{k}{\omega} N_l(s). \quad (12.12)$$

Здесь мы воспользовались произволом, допускаемым соотношением (12.11) на условие нормировки  $D_l$ , положив  $D_l(0) = 1$ . (Часто используется также нормировка  $D_l(\infty) = 1$ .)

Разумеется, соотношение (12.12) — не единственное выражение, удовлетворяющее всем указанным выше требованиям аналитичности и унитарности. С математической точки зрения приемлемо также выражение

$$D_l(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int \frac{ds}{s(s-z)} \cdot \frac{k}{\omega} N_l(s) + \frac{zR/a^2}{a^2 - z}, \quad (12.13)$$

где  $R$  и  $a^2$  — подбираемые впоследствии вещественные константы. Такие дополнительные полюса  $D$ -функции называются КДД-полюсами по именам Кастильехо, Далитца и Дайсона (Castillejo, Dalitz, Dyson, 1956; см. также Frautshi, 1963).

Вопрос о необходимости введения КДД-полюсов можно решить лишь на основании физических соображений. Ниже будут приведены аргументы, свидетельствующие, что эти полюса соответствуют элементарным частицам. Смысл сказанного заключается в том, что массы таких частиц и константы связи не вычисляются из данных о взаимодействии рассеивающихся частиц, а их приходится вводить как дополнительные параметры (подробнее см. Gell-Mann, Zachariasen, 1961). В дальнейшем мы ограничимся случаем без КДД-полюсов.

Предположим, что скачок функции  $h_l$  на левом разрезе задан, например, соотношением

$$\theta(L - s) \operatorname{Im} h_l(s) = \theta(L - s) \Delta_l(s).$$

Тогда для  $N_l$  можно написать следующий интеграл Коши:

$$N_l(z) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^L ds \Delta_l(s) D_l(s)/(s - z). \quad (12.14)$$

Возможность существования дополнительных полюсов у функций  $N_l$  и  $D_l$  не принесет ничего принципиально нового. Функция  $h_l$  определяется теперь как решение системы интегральных уравнений (12.12) и (12.14). Форма записи этих уравнений показывает, что абсолютная нормировка определяется функцией  $\Delta_l(s)$ . В некоторых случаях вводят добавочные вычитания, но здесь



мы не будем их касаться. Мы опустим также и вопрос о неоднозначности в абсолютной нормировке  $h$ , возникающей из возможности нормировать  $D$  на единицу в точке  $s \neq 0$ .

Допустим, что для заданной функции  $\Delta_l$  решение  $D_l$  уравнения (12.12) имеет нуль в точке  $B$ , лежащей между  $s=0$  и порогом. Это означает, что взаимодействие, выражаемое функцией  $\Delta_l$ , приводит к связанному состоянию в точке  $s=B$ . При этом, конечно, у функции  $N_l$  не должно быть нуля в этой точке, иначе  $h_l$  вовсе не будет иметь там полюса.

В свете такой интерпретации динамического происхождения связанного состояния понятно, почему КДД-полюс у функции  $D$  соответствует элементарной частице. Предположим, что исходная функция  $\Delta$  приводит к решению  $D$ , не имеющему нулей. Если осуществить замену  $D \rightarrow \tilde{D} = D + zR/[a^2(a^2 - z)]$ , то при достаточно больших  $R$  функция  $\tilde{D}$  будет иметь нуль вблизи точки  $s=a^2$ . Подбором  $R$  и  $a^2$  можно добиться, чтобы нуль функции  $\text{Re}\tilde{D}$  лежал ниже порога, в области, где  $\text{Im}D = 0$ , так что у функции  $h$  будет полюс. Если, напротив,  $\text{Re}\tilde{D}$  обращается в нуль выше порога, где  $\text{Im}D \neq 0$ , то в этой точке значение функции  $h$  окажется чисто мнимым, и мы получим резонанс. Подробности можно найти в работе Гелл-Манна и Захариасена (Gell-Mann, Zachariasen, 1961).

Возвращаясь к решениям без КДД-полюсов, отметим, что функция  $D$  тесно связана с функцией Омнеса  $\Omega$ . Чтобы понять это, надо лишь вспомнить, что  $D^{-1}$  аналитична всюду, кроме правого разреза, а ее фаза при  $z=s+i\epsilon$  совпадает с фазой амплитуд  $h_l$  и  $f_l$ . Но именно эти условия определяют функцию  $\Omega$ . Функция  $\Omega^{-1}$  не может иметь нулей; поэтому, если их нет и у функций  $D$ , то должно иметь место тождество

$$D_l^{-1}(z) = \Omega(z) = \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds \varphi(s)}{s(s-z)} \right\}. \quad (12.15)$$

Пусть теперь  $D_l$  имеет нуль в точке  $z=B$ . Тогда определим новые функции  $\tilde{D}_l$  и  $\tilde{N}_l$  соотношениями:

$$\tilde{D}_l(z) = \frac{B}{B-z} D(z); \quad \tilde{N}_l(z) = \frac{B}{B-z} N_l(z).$$

В силу соотношения (12.11) с равным правом можно написать

$$h_l(z) = \tilde{N}_l(z)/\tilde{D}_l(z).$$

Но  $\tilde{D}_l$  уже не имеет нуля при  $z=B$ , поэтому следует отождествить функции  $\tilde{D}_l^{-1}$  и  $\Omega$ .

$N/D$ -метод, в частности, полезен тем, что он допускает итерационное решение, обеспечивающее унитарность  $f_l$  на каждом шаге, в отличие от теории возмущений. (Следует помнить, однако, о проблеме правил сумм для высших парциальных волн.) В следующем параграфе мы кратко обсудим философию, лежащую в основе этой итерационной схемы, а также выбор исходной функции  $\Delta_l$ . В качестве нулевого приближения полагаем на левом разрезе  $D_l(s) = D_l^{(0)}(s) = 1$  и находим первое приближение к  $N_l$  по формуле

$$N_l^{(1)}(z) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^L ds \Delta_l(s)/(s-z). \quad (12.16)$$

Подставляя  $N_l^{(1)}$  вместо  $N_l$  в равенство (12.12), получаем первое приближение для  $D_l$ :

$$D_l^{(1)}(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \cdot \frac{k}{\omega} N_l^{(1)}(s), \quad (12.17)$$

так что в первом приближении  $h_l(z)$  имеет вид

$$h_l^{(1)} = N_l^{(1)}/D_l^{(1)}. \quad (12.18)$$

Легко видеть, что  $h_l^{(1)}$  удовлетворяет условию унитарности.

## § 12.2. НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для систематического анализа скачка на левом разрезе необходим весь аппарат унитарности, перекрестной симметрии и представления Манделстама, в связи с чем мы снова рекомендуем работу Фраучи (Frautschi, 1963). Однако одно из достоинств  $N/D$ -метода состоит в том, что в его рамках очевидны интуитивные, физически правдоподобные предположения о функции  $\Delta_l$ . Их можно принять в качестве начальных данных для итераци-

онного расчета параметров парциальной волны. Здесь мы покажем, как прийти к таким предположениям и какой приближенный вид для функций  $h_l$  и  $\Omega$  они дают.

Рассмотрим задачу о нахождении  $S$ -волны рассеяния двух (гипотетических) заряженных скалярных «нуклонов» с массой  $M$ , взаимодействующих с нейтральным скалярным « $\pi$ -мезонным» полем массы  $\mu$ . Обозначим через  $g$  константу  $NN\pi$ -связи и предположим, что связь сильная.

В обычной теории возмущений следовало бы рассмотреть только диаграмму порядка  $g^2$ , изображенную на рис. 12.2. Ей соответствует инвариантная амплитуда

$$\mathfrak{M}^0 = g^2/(\mu^2 - s_2). \quad (12.19)$$

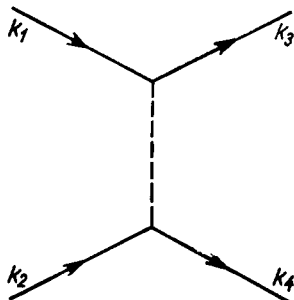


Рис. 12.2

Здесь используются обозначения, принятые в гл. 4. Выделив из выражения (12.19)  $S$ -волну в системе центра масс, получим соответствующее приближение для  $h_0$ :

$$h_0^{(0)} = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{g^2}{\mu^2 + 2k^2 (1 - \cos \theta)};$$

$$h_0^{(0)}(s) = \frac{g^2}{64\pi k^2} \ln \left\{ 1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \right\} =$$

$$= \frac{g^2}{64\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} s - M^2} \ln \left\{ 1 + \frac{s - 4M^2}{\mu^2} \right\}. \quad (12.20)$$

Конечно, для случая сильной связи такое приближение с самого начала неадекватно; более того,  $\mathfrak{M}^{(0)}$  и  $h_0^{(0)}$  вещественны в физической области и поэтому не удовлетворяют условию унитарности. С другой стороны, интуитивно ясно, что на сравнительно больших расстояниях взаимодействие (потенциальное) между нуклонами связано своим происхождением одномезонному обмену. Поэтому, по крайней мере при низких энергиях,  $S$ -волну должно хорошо описывать подобное приближение. Поскольку левый разрез (скачок  $\Delta_l$  на котором являет-

ся исходной величиной итерационной процедуры  $N/D$ -метода) играет роль потенциала и поскольку диаграмма на рис. 12.2 воплощает в себе одномезонный обмен, соблазнительно выбрать выражение (12.20) в качестве исходного для  $\Delta_l$ . Однако при этом вряд ли стоит проводить более одного итерационного цикла, ибо начальное выражение для  $\Delta_l$  имеет лишь приближенный характер.

Наиболее поразительно то, насколько естественно само выражение (12.20) действительно пригодно для наших целей. Прежде всего  $h_0^{(0)}$  имеет *только* левый разрез в  $s$ -плоскости, от  $-\infty$  до точки ветвления логарифма, а именно до  $L=4M^2 - \mu^2$ . [Мнимая часть функции  $h_0^{(0)}$  на верхнем берегу этого разреза равна  $g^2/(32k^2)$ .] Легко проверить, что правый разрез отсутствует, а в точке  $s=4M^2$  особенности нет. Поэтому можно было бы взять  $\Delta_0$  в качестве  $\text{Im}h_0^0$  и подставить его в (12.16). Но получающийся при этом интеграл — не что иное, как интеграл Коши для самой функции  $h_0^{(0)}$ , так как  $h_0^{(0)}$  имеет *только* левый разрез. Итак, тотчас получаем

$$N_0^{(1)}(z) = h_0^{(0)}(z).$$

Подставим это приближение в (12.17) и предположим, что *получающееся выражение для  $D_0^{(1)}$  не имеет нулей*; тогда соотношение (12.15) даст функцию Омнеса:

$$\Omega^{(1)}(z) = \left\{ 1 - \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \cdot \frac{k}{\omega} h_0^{(0)}(s) \right\}^{-1}. \quad (12.21)$$

Можно было бы, конечно, вычислить  $\text{arg}(D_0)^{-1}$  и подставить его в фазовый интеграл с тем, чтобы прийти к обычной экспоненте Омнеса. Однако выписанное выражение короче и удобней для практических целей.

Полезно сравнить выражение (12.21) с другим известным приближением, часто называемым лестничным. Лестничное приближение также основано на диаграмме 12.2, однако вместо использования ее для вычисления  $D$ -функции  $\mathfrak{M}^{(0)}$  подставляют непосредственно в выражение для двухчастичного вклада в спектральную функцию формфактора. Прделаем это с помощью равенства (11.2), переписав его как полусумму по ин- и

аут-состояниям. Поскольку в нашем приближении инвариантная амплитуда

$$V \sqrt{8\omega_2\omega_k\omega_l} \langle k_2 | \gamma_l | kl \rangle = \mathfrak{M}^{(0)}$$

вещественна, равенство (11.2) дает

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= (2\pi)^{-3} \int_0^\infty k\omega d\omega \delta(\omega - \sqrt{s/2}) \frac{1}{2} \operatorname{Re} [J(s)/4\omega^2] \times \\ &\times 2\pi \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \mathfrak{M}^{(0)} = \frac{k}{32\pi^2\omega} \operatorname{Re} J(s) \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \times \\ &\times \frac{g^2}{\mu^2 + 2k^2(1 - \cos \theta)}; \\ \sigma(s) &= \frac{g^2}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{k\omega} \ln \left\{ 1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \right\} \operatorname{Re} J(s). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с известной формой решения Омнеса, получаем

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int \frac{ds}{s(s-z)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{g^2}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{k\omega} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \ln \left( 1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Аналогичные приближения применялись и исследовались, например, Федербушем, Гольдбергером и Трейманом (Federbuch et al., 1958) и Нишиджимой (Nishijima, 1964).

Очевидно, что функция Омнеса (12.22) соответствует амплитуде рассеяния,  $\mathcal{S}$ -фаза которой находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{g^2}{64\pi^2} \frac{1}{k\omega} \ln \left( 1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \right). \quad (12.23)$$

С другой стороны, предыдущее  $N/D$ -приближение приводит к фазе

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_0(s) &= -\operatorname{arg} \left\{ 1 - \frac{g^2 s}{64\pi^2} \int_{4M^2}^\infty \frac{ds'}{s'(s'-s)} \cdot \frac{1}{\omega'k'} \times \right. \\ &\left. \times \ln \left( 1 + \frac{4k'^2}{\mu^2} \right) \right\} = -\operatorname{arg} D. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Но из выражения (12.24) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tilde{\delta}_0 &= -\frac{\operatorname{Im} D}{\operatorname{Re} D} = \\ &= \frac{\frac{g^2}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{k\omega} \ln\left(1 + \frac{4k^2}{\mu^2}\right)}{1 - \frac{g^2}{64\pi^2} s \frac{1}{\pi} \int \frac{ds'}{s'(s'-s)} \cdot \frac{1}{k'\omega'} \ln\left(1 + \frac{4k'^2}{\mu^2}\right)}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Сравнивая соотношения (12.25) и (12.23), видим, что приближенные фазы  $\delta_0$  и  $\tilde{\delta}_0$  совершенно различны. [Они совпадают лишь с точностью до  $O(g^2)$ .] Читателю предлагается сравнить их поведение при  $g^2 \rightarrow \infty$ . При этом следует иметь в виду, что  $|\tilde{\delta}_0|$  меняется на целые кратные  $\pi/2$  в точках, где знаменатель  $\operatorname{Re} D$  выражения (12.25) обращается в нуль. Весьма полезно также найти область значений  $s$ , в которой  $D$  или  $\operatorname{Re} D$  могут обращаться в нуль при увеличении  $g^2$ , и определить качественную зависимость  $\operatorname{Im} D$ ,  $\operatorname{Re} D$  и  $\operatorname{tg} \tilde{\delta}_0$  от  $s$ .

Поскольку последовательная схема динамического расчета отсутствует, нельзя сделать достоверного выбора между  $\delta_0$  и  $\tilde{\delta}_0$ . Довольно очевидно лишь то, что в рамках применяемого сейчас двухчастичного приближения любое предлагаемое выражение для функции Омнеса не более надежно, нежели выражение для фазы, которой оно соответствует. Таким образом, формулы (12.21) и (12.22) для функции Омнеса могут вступить в свои права только за счет доверия к выражениям (12.24) и (12.23) как к приближенным  $S$ -фазам. Но при этом мы сталкиваемся с проблемами физики сильных взаимодействий, уклоняясь от приближенных динамических вычислений формфакторов.

### § 12.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Когда фазы не известны из эксперимента, дело сводится к попыткам динамического вычисления формфактора. При этом неизбежно возникает проблема вычисления самих парциальных амплитуд; в предыдущем параграфе мы обсудили некоторые приближенные схемы расчета. Напротив, теперь нас интересуют ситуации, в которых фазы считаются известными либо из опыта, либо как результат некоторого разумного динамического

расчета. Будем предполагать, что в некоторой ограниченной части физической области амплитуды  $f_l$  хорошо аппроксимируются некоторыми алгебраическими функциями. В частности, мы рассмотрим приближение длинами рассеяния (нулевой эффективный радиус) с использованием резонансных параметрических формул в рамках нерелятивистской теории рассеяния в поле потенциала. Мы покажем, что в этом случае функции Омнеса можно представить в простом алгебраическом виде. Конечно, такие параметризации теряют силу за пределами некоторой ограниченной области энергий хотя бы потому, что они основаны на упругом условии унитарности для  $f_l$  (т. е. справедливы лишь при вещественных фазах). При больших (релятивистских) энергиях они становятся просто бессмысленными. Однако наши примеры ясно показывают влияние некоторых характерных типов поведения фаз на формфактор. Они окажутся также полезными как конкретные иллюстрации поведения на втором римановом листе (см. гл. 13).

Общая черта, приводящая к простому алгебраическому виду для  $\Omega$ , — отсутствие левого разреза в исходной параметризации функции  $f_l$ . Следует, однако, тщательно заботиться о сохранении прочих аналитических свойств  $f_l$ , таких, как правый разрез, отсутствие полюсов, не относящихся к связанным состояниям, условия унитарности

$$\text{Im } f_l^{-1} = -1 \quad (12.26)$$

и поведения на пороге при  $k \rightarrow 0$

$$\delta_l \sim k^{2l+1}. \quad (12.27)$$

Допустимо отсутствие только левого разреза, так как соответствующие ему особенности лежат далеко за пределами физической области. Поэтому некорректное рассмотрение этих особенностей не нарушает все же справедливости выражений для амплитуды в физической области. Фраучи (Frautshi, 1963) дает пример более разумной параметризации, нежели описываемая ниже, когда левый разрез заменяется полюсом, положение которого и значение вычета в нем подбираются впоследствии.

Рассматриваемая ниже параметризация инспирирована результатами теории нерелятивистского рассеяния в поле потенциала, согласно которым функция  $k \text{ctg} \delta$

аналитична по  $k^2$  вблизи нуля, и поэтому ее можно разложить в ряд по степеням  $k^2$  с конечным радиусом сходимости. Среди прочих имеются две возможности: положить  $k \operatorname{ctg} \delta = a = \operatorname{const}$  либо  $k \operatorname{ctg} \delta = (r-s)/\gamma$ , где  $r$  и  $\gamma$  — константы.

Рассмотрим сначала параметризацию длиной рассеяния (в системе центра масс):

$$\operatorname{tg} \delta_0 = ka;$$

$$f_0(s) = e^{i\delta_0} \sin \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{1 - i \operatorname{tg} \delta_0} = \frac{ka}{1 - ika}; \quad (12.28)$$

$$f_0(s) = \frac{a \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}}{1 - ia \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}}. \quad (12.29)$$

Квадратный корень определен вещественным на верхнем берегу разреза от  $4M^2$  до  $\infty$  и с положительной мнимой частью. Тогда для положительных длин рассеяния ( $a > 0$ ) знаменатель не может обратиться в нуль, и поэтому  $f_0$  не имеет полюсов. (Действительно, при  $s > 4M^2$  знаменатель комплексный и имеет ненулевую вещественную часть, а при  $s < 4M^2$  он вещественный и положительно определенный.) Если величина  $a$  отрицательна, то функция  $f_0$  имеет полюс в точке

$$\left. \begin{aligned} s = B = 4 \left( M^2 - \frac{1}{|a|} \right); \\ |a| = \left( M^2 - \frac{B}{4} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

Существование такого полюса свидетельствует о наличии связанного состояния (При этом формально мы не ограничены условием  $B > 0$ , поскольку мы не стремимся релятивизовать параметризацию.) Напомним, что, согласно изложенному в § 11.3, в таком случае формфактор не исчерпывается функцией Омнеса. В дальнейшем мы займемся только ею.

Очевидно, можно написать

$$\Omega(s) = \exp \left\{ \frac{s}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'-s)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( a \sqrt{\frac{s'}{4} - M^2} \right) \right\} \quad (12.31)$$



и не вдаваться в детали. Однако полезно рассмотреть функцию

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{P(s)}{1 - ika}, \quad (12.32)$$

где  $P(s)$  — полином с вещественными коэффициентами.  $\tilde{\Omega}(s)$  удовлетворяет всем свойствам аналитичности и вещественности, предъявляемым к  $\Omega$ . Легко проверить, что она имеет лишь правый разрез, на верхнем берегу которого ее фаза совпадает с фазой функции  $f_0$ . Наконец,  $\Omega$  не может иметь ни нулей, ни полюсов; это требование позволяет фиксировать полином  $P$  таким образом, что  $\tilde{\Omega} = \Omega$ . Если  $a > 0$ , так что  $(1 - ika)^{-1}$  не имеет полюсов, следует взять  $P(s) = \text{const}$ . Константу подберем так, чтобы  $\tilde{\Omega}$  была нормирована на единицу при  $s=0$ :

$$\Omega(s) = \frac{1 + Ma}{1 - ika}, \quad a > 0. \quad (12.33)$$

Если  $a < 0$ , необходимо выбором полинома  $P(s)$  обеспечить сокращение нуля в знаменателе и нормировку  $\tilde{\Omega}(0) = 1$ . В итоге получим

$$\Omega(s) = \frac{B - s}{B} \cdot \frac{1 - |a|M}{1 + ik|a|}, \quad a < 0, \quad (12.34)$$

где точка  $B$  определена равенством (12.30). При положительных  $a$  выражение для формфактора имеет вид  $J(s) = J(0)\Omega(s)$ . При отрицательных  $a$  для получения окончательного выражения необходимо знать вычет формфактора в полюсе, соответствующем связанному состоянию. В § 11.3 было показано, как вычислить  $J(s)$  через  $J(0)$  и значение вычета  $R$ .

Возвращаясь к положительным  $a$ , находим из соотношения (12.33) спектральную функцию формфактора:

$$\sigma = \pi^{-1} J(0) \text{Im} \Omega(s) = \pi^{-1} J(0) \frac{(1 + Ma)^2}{1 + k^2 a^2}. \quad (12.35)$$

Распределение «заряда»  $\rho$  в конфигурационном пространстве, которое по формуле (9.41) соответствует этому формфактору, меняется довольно гладко. Подробные свойства  $\rho$  предлагаем читателю найти самостоятельно

в качестве упражнения. Другое полезное упражнение — рассмотреть параметризацию эффективным радиусом

$$k \operatorname{ctg} \delta = a + \frac{1}{2} r_0 k^2, \quad (12.36)$$

где  $r_0$  — эффективный радиус.

Наконец, рассмотрим стандартную резонансную параметризацию

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = \frac{r-s}{\gamma}, \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{k\gamma}{r-s}; \quad (12.37)$$

$$f_0 = \frac{k\gamma}{r-s-ik\gamma}, \quad (12.38)$$

где  $\gamma$  и  $(r-4M^2)$  положительны, а  $\gamma$  мала. Мы выписали формулу для резонанса  $S$ -волн с правильным пограничным поведением фазы  $\delta_0$ , хотя резонансы  $S$ -волн не наблюдаются. Для более реальных  $P$ -резонансов следует просто заменить все явно выписанные  $k$  в соотношениях (12.37) и (12.38) на  $k^3$ . Мы выбрали формулу (12.38) с  $r > 4M^2$  только потому, что она соответствует физически интересным ситуациям. Константу  $\gamma$  следует считать положительной; иначе функция (12.34) будет иметь полюсы при комплексных  $s$ , что противоречит общим свойствам, подразумеваемым для  $f$ . Чтобы показать, как возникают комплексные полюсы (при  $\gamma < 0$ ), заметим, что  $(r-s-ik\gamma)$  может обратиться в нуль только при условии

$$\left. \begin{aligned} r-s &= ik\gamma, \quad (r-s)^2 = -k^2\gamma^2 = -\left(\frac{s}{4} - M^2\right)\gamma^2, \\ s = s_{\pm} &= \left(r - \frac{\gamma^2}{8}\right) \pm i|\gamma| \sqrt{r-4M^2 + \frac{\gamma^2}{16}}. \end{aligned} \right\} (12.39)$$

(где выбирается положительная ветвь корня). Для малых  $\gamma$  в первом порядке по  $\gamma$

$$s_{\pm} = r \pm i|\gamma| k_r; \quad k_r \equiv \sqrt{r-4M^2}. \quad (12.40)$$

Поскольку эти точки расположены вблизи  $r$ , то при  $s$ , близких к  $s_+$  или  $s_-$ ,

$$k(s) \equiv \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} \approx k_r \frac{\operatorname{Im} s}{|\operatorname{Im} s|},$$

согласно выбору ветвей  $k(s)$ . Соответственно при  $s \sim s_{\pm}$  это дает

$$\begin{aligned} [r - s - i\gamma k(s)] &= \left[ r - (r \pm i|\gamma|k_r) - i\gamma k_r \frac{\text{Im } s}{|\text{Im } s|} \right] \approx \\ &\approx [r - (r \pm i|\gamma|k_r) \mp i\gamma k_r] = \mp i(|\gamma| + \gamma)k_r. \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль при отрицательных  $\gamma$  и не может обратиться в нуль при положительных.

Рассуждая, как и выше, приходим к функции Омнеса:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \exp \left\{ \frac{s}{\pi} \int \frac{ds'}{s'(s'-s)} \arctg \left[ \frac{k'\gamma}{r-s'} \right] \right\} = \\ &= \frac{r + 2\gamma M}{r - s - i k \gamma}. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Подобно парциальным амплитудам, сама функция  $\Omega$  становится чисто мнимой при  $s=r$ , а ее абсолютное значение в этой точке имеет максимум. Для малых  $\gamma$  резонанс острый. Любопытно рассмотреть бесконечно острый резонанс, когда  $\delta_0$  скачком меняется от 0 до  $\pi$ , если  $s$  проходит через резонансную точку  $r$ . Написав

$$\delta = \pi\theta(-r + s),$$

можно вычислить фазовый интеграл Омнеса

$$u(s) = \frac{s}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds'\delta(s')}{s'(s'-s)} = \ln \frac{r}{|r-s|} + i\pi\theta(s-r),$$

откуда

$$\Omega(s) = \exp u(s) = \frac{r}{r-s}. \quad (12.42)$$

В пределе (физически нереальном) резонанса с нулевой шириной формфактор ведет себя так, как если бы в точке резонанса он имел полюс, а разрез бы отсутствовал вовсе. Тот же результат следует из соотношения (12.41) при  $\gamma=0$ .

В качестве последнего предупреждения отметим, что асимптотическое поведение при таких алгебраических параметризациях физически совершенно неправдоподобно. Например, формулы с длиной рассеяния (12.28) и (12.33) дают  $\delta(\infty) = \text{const} \neq 0$ , а резонансные формулы

для  $S$ -волны (12.37) и (12.41) дают  $\delta(\infty) = \pi$ . В последнем случае дело обстоит так, как если бы резонанс объяснялся КДД-полюсом (т. е. нестабильной частицей) (см. Gell-Mann, Zachariasen, 1961b). Соответствующая формула для  $P$ -волны, с  $k^3\gamma$  вместо  $k\gamma$ , дает  $\delta(\infty) = \frac{\pi}{2}$ , что равным образом нереально. Эти обстоятельства, конечно, не мешают пользоваться при случае алгебраическими формулами в ограниченной области энергий.

## Глава 13

### ВТОРОЙ РИМАНОВ ЛИСТ

Функциональная зависимость формфактора или амплитуды рассеяния в их физической области главным образом определяется особенностями, ближайшими к этой области. Этот факт является основой дисперсионной теории. Однако распознать ближайшие особенности не так-то легко; на простом примере мы продемонстрируем тонкости подобной задачи. Ниже мы будем рассматривать скалярный формфактор  $J$  и амплитуду  $S$ -волны  $f$ , опуская индекс  $l=0$  и (если не будет оговорено особо) принимая двухчастичное приближение для спектральной функции формфактора и упругое условие унитарности для  $f$ .

Пусть связь между мезонами носит характер притяжения и достаточно сильна, чтобы образовать связанное состояние, скажем, с массой  $m$ . Этот динамический факт отразится в аналитической структуре формфактора: у него появится полюс при  $z = m^2$ . Наоборот, ясно, что в отсутствие связанных состояний динамические детали мезонного взаимодействия не повлияют на аналитическую структуру функции  $J$ . Мы уже показали, что в этом случае единственными особенностями являются нормальные точки ветвления при  $z = (n\mu)^2$ . Но для острого резонанса при рассеянии показано, что сопутствующая такому резонансу зависимость  $J$  в его физической области может быть ярко выраженной, даже если не выявлена особенность, ответственная за эту зависимость. На самом деле это обстоятельство менее пара-

доксально, нежели представляется на первый взгляд. Действительно, оказывается, что динамику довольно полно отражают особенности формфактора  $J$  на его втором, так называемом нефизическом римановом листе. Попасть на этот лист можно, «поднырнув» под нормальный разрез. Термин «нефизический» довольно неудачен, поскольку особенности на этом листе сильно влияют на наблюдаемое поведение  $J$ . Перед тем как исследовать этот вопрос, полезно, во-первых, поговорить об общей проблеме аналитического продолжения функции через разрез, а во-вторых, — кратко обсудить свойства амплитуды  $S$ -волны на нефизическом листе. Одному чрезвычайно важному приложению, основанному на анализе особенностей на втором листе, мы посвятим следующую главу, главу об аномальных порогах.

Обозначим  $J_+(z)$  и  $J_-(z)$  аналитические продолжения формфактора на римановы листы, отвечающие переходу через разрез с верхнего и нижнего берегов соответственно. Символ  $J_I$  будем использовать для обозначения формфактора на его физическом листе (т. е.  $J_I$  и символ  $J$ , использованный в предыдущих главах, характеризуют одно и то же понятие). Обозначение  $J$  мы сохраним для аналитической функции в целом, т. е. с учетом ее поведения на всех ее листах. Другими словами, мы имеем дело с единой аналитической функцией, но на всех ее листах.

Ввиду непрерывности можно написать:

$$\left. \begin{aligned} J_+(s - i\epsilon) &= J_I(s + i\epsilon); \\ J_-(s + i\epsilon) &= J_I(s - i\epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Но согласно дисперсионному представлению для  $J_I$

$$J_I(z) = J_I(0) + z \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \sigma(s)/s(s-z)$$

выполняется равенство

$$J_I(s + i\epsilon) - J_I(s - i\epsilon) = 2\pi i \sigma(s). \quad (13.2)$$

Если бы можно было рассматривать само функцию  $\sigma(s)$  как граничное значение аналитической функции, например

$$\sigma(s) \equiv \sigma(s + i\epsilon),$$

то равенства (13.1) и (13.2) привели бы к соотношению

$$J_-(s + i\epsilon) = J_1(s + i\epsilon) - 2\pi i\sigma(s + i\epsilon).$$

Поскольку это выражение оказалось бы соотношением между аналитическими функциями, установленным в полосе конечной ширины над разрезом, оно допускало бы аналитическое продолжение

$$J_-(z) = J_1(z) - 2\pi i\sigma(z).$$

Важно подчеркнуть, что предполагаемая аналитичность функции  $\sigma$ , на которой основано продолжение, а priori не зависит от (предполагаемой или доказанной) аналитичности  $J_1$ . Оказывается, что такое предположение относительно  $\sigma$  действительно весьма правдоподобно. Все дело в формулах, следующих из условия унитарности (формулы с суммами по промежуточным состояниям) и выражающих  $\sigma$  через произведения других функций. Функции эти (той же природы, что и  $J$ , и  $f$ ) сами с равным успехом могут считаться аналитическими, что и приводит к аналитичности функции  $\sigma$ .

Аналогичные рассуждения применимы и к парциальной амплитуде  $f$ . Примем упругое условие унитарности и будем обращать внимание только на правый разрез. Хотя уже известно, что упругий разрез соединяет два листа римановой поверхности функции  $f$ , можно еще раз доказать это по-другому, развив полезный для дальнейшего изложения метод. Будем исходить из двух основных уравнений: условия унитарности

$$\text{Im}^* f(s + i\epsilon) = |f(s + i\epsilon)|^2 \quad (13.3)$$

и свойства отражения (12.5), которое дает

$$f^*(s + i\epsilon) = -f(s - i\epsilon). \quad (13.4)$$

Но на вещественной оси

$$2i \text{Im} f(s + i\epsilon) = f(s + i\epsilon) - f^*(s + i\epsilon).$$

Воспользовавшись уравнением (13.3) для левой части, а уравнением (13.4) — для обеих, получим:

$$\left. \begin{aligned} 2if(s + i\epsilon)f^*(s + i\epsilon) &= f(s + i\epsilon) - f^*(s + i\epsilon); \\ -2if(s + i\epsilon)f(s - i\epsilon) &= f(s + i\epsilon) + f(s - i\epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Определим теперь две функции  $f_{\pm}(z)$  на втором листе, переобозначив функцию на физическом листе и назвав ее  $f_1$ .

Как и выше [см. соотношение (13.1)], имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_+(s - i\varepsilon) &= f_I(s + i\varepsilon); \\ f_-(s + i\varepsilon) &= f_I(s - i\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Подставив написанные выражения в уравнения (13.5), найдем

$$-2if_I(s + i\varepsilon)f_-(s + i\varepsilon) = f_I(s + i\varepsilon) + f_-(s + i\varepsilon);$$

$$f_-(s + i\varepsilon) = \frac{-f_I(s + i\varepsilon)}{1 + 2if_I(s + i\varepsilon)},$$

и после аналитического продолжения получим

$$f_-(z) = \frac{-f_I(z)}{1 + 2if_I(z)}. \quad (13.7)$$

Аналогично

$$f_+(s - i\varepsilon) = \frac{-f_I(s - i\varepsilon)}{1 + 2if_I(s - i\varepsilon)}.$$

Осуществляя аналитическое продолжение и сопоставляя результат с равенством (13.7), находим

$$f_+(z) = \frac{-f_I(z)}{1 + 2if_I(z)} = f_-(z). \quad (13.8)$$

Итак, нормальный разрез склеивает два листа, поскольку функциональная форма для  $f_+$  и  $f_-$  одинакова. Определим поэтому функцию

$$f_{II}(z) = f_+(z) = f_-(z)$$

или

$$f_{II}(z) = \frac{-f_I(z)}{1 + 2if_I(z)} \equiv -\frac{f_I(z)}{S_I(z)}. \quad (13.9)$$

В выражении (13.9) введено стандартное обозначение

$$S_I = 1 + 2if_I = e^{2i\gamma}, \quad (13.10)$$

$S_I$  фактически представляет собой (диагональный) матричный элемент  $S$ -матрицы, соответствующий  $S$ -волне.

Заметим, что унитарность  $S$ -матрицы и свойство вещественности, следующее из (12.5) для функции  $f$ , влекут

$$\left. \begin{aligned} S_I(z) &= S_I^{-1}(z^*); \\ S_I(s + i\varepsilon) S_I^*(s + i\varepsilon) &= S_I(s + i\varepsilon) S_I(s - i\varepsilon) = 1. \end{aligned} \right\} (13.11)$$

Отсюда с учетом равенства  $S_{II}(s \pm i\varepsilon) = S_I(s \mp i\varepsilon)$  после аналитического продолжения получаем

$$S_I(z) = S_{II}^{-1}(z). \quad (13.12)$$

Поэтому соотношение (13.9) можно переписать в виде

$$f_{II}(z) = -f_I(z) S_{II}(z). \quad (13.13)$$

Равенства (13.9) или (13.13) показывают, что функция  $f_{II}$ , т. е.  $f$  на втором листе, имеет все точки ветвления, принадлежащие  $f_I$ , но не имеет ни одного из полюсов  $f_I$ . Кроме этого,  $f_{II}$  имеет полюсы в точках, где  $S_I$  имеет нули. После проведения соответствующих рассуждений для формфактора мы проиллюстрируем эти утверждения. Теперь же заметим, что относительная простота наших результатов связана с тем обстоятельством, что функция  $f$  и ее скачок имеют одинаковые точки ветвления.

Что касается формфактора, в гл. 9 было установлено его свойство вещественности

$$J_I(z^*) = J_I^*(z), \quad (13.14)$$

а в гл. 11 показано, что в двухчастичном приближении мы имеем

$$\operatorname{Im} J_I(s + i\varepsilon) = J_I(s + i\varepsilon) f_I^*(s + i\varepsilon) \quad (13.15)$$

и

$$J_I(s - i\varepsilon) = J_I(s + i\varepsilon) - 2i \operatorname{Im} J_I(s + i\varepsilon). \quad (13.16)$$

Воспользовавшись уравнением (13.15) и полученным ранее результатом

$$f_I^*(s + i\varepsilon) = -f_I(s - i\varepsilon) = -f_{II}(s + i\varepsilon),$$

найдем из уравнения (13.16)

$$J_I(s - i\varepsilon) = J_-(s + i\varepsilon) = J_I(s + i\varepsilon) + 2i J_I(s + i\varepsilon) f_{II}(s + i\varepsilon).$$



Это уравнение определяет функцию  $J_-(z)$ . В качестве упражнения предлагаем показать, что  $J_- = J_+ \equiv J_{II}$ . Окончательно выводим представление

$$J_{II}(z) = J_I(z) [1 + 2if_{II}(z)] = J_I(z) S_{II}(z) = \frac{J_I(z)}{S_I(z)} = \frac{J_I(z)}{1 + 2if_I(z)}. \quad (13.17)$$

Таким образом,  $J_{II}$ , т. е.  $J$  на втором листе, имеет все точки ветвления функции  $J_I$  и *вдобавок* еще и точки ветвления функции  $f_I$ . Следовательно,  $J_{II}$  — более сложная функция, нежели  $J_I$ , в отличие от  $f_{II}$ , имеющей те же точки ветвления, что и  $f_I$ . Однако  $J_I$  и  $S_I$  имеют совпадающие полюсы (соответствующие стабильным частицам). Поэтому равенство (13.17) показывает, что  $J_{II}$  *не имеет* этих полюсов. Вместо них  $J_{II}$  обладает полюсами, присущими  $S_{II}$ , т. е. полюсами в точках, где  $S_I$  имеет нули.

Проиллюстрируем эту общую ситуацию более конкретным примером. Влияние полюсов второго листа мы исследуем для простой алгебраической параметризации, введенной в § 12.3, без полюсов на физическом листе. Отметим сразу, что интересующие нас простые выражения продолжаются через разрез посредством «изменения знака у  $k$ », т. е. отказа от определения корня  $\sqrt{\frac{z}{4} - M^2}$  как вещественного и положительного при  $z \rightarrow s + i\epsilon > 4M^2$  выражения, имеющего в других точках положительно мнимую часть. Тогда из (12.29) и (12.33) находим:

$$\left. \begin{aligned} f_{II}(z) &= \frac{-a \sqrt{\frac{z}{4} - M^2}}{1 - ia \sqrt{\frac{z}{4} - M^2}}; \\ \Omega_{II}(z) &= \frac{1 + Ma}{1 + ia \sqrt{\frac{z}{4} - M^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

Очевидно,  $f_{II}$  и  $\Omega_{II}$  имеют полюсы в той же точке  $B$ , где расположены полюсы функций  $f_I$  и  $\Omega_I$ , при равных по величине и противоположных по знаку длинах рас-

сеяния. Что касается самой функции  $f$ , то эта разница не приводит к наблюдаемым отличиям, поскольку парциальное сечение  $|f|^2$  зависит лишь от абсолютного значения  $a$ .

Такие полюсы на втором листе функции  $f$  ниже порога называются виртуальными, или антисвязанными, состояниями. Они проявляют себя при очень больших положительных длинах рассеяния, когда полюс близок к порогу. Они характерны большей частью для  $S$ -волн, когда силы притяжения недостаточно велики для порождения связанного состояния. Наиболее изучен случай синглетной  $S$ -волны рассеяния нейтрона на протоне, для которой силы несколько слабее, чем в триплетной  $S$ -волне, содержащей дейтрон. По-видимому, другим примером является  $\pi$ - $\pi$ -рассеяние в состоянии с  $T=0$ . Замечательно, что в рассматриваемом приближении парциальное сечение не зависит от знака  $a$ , а определяется лишь тем, насколько близок к порогу полюс, на каком бы листе он ни лежал. Это одно из наиболее ярких иллюстраций значения особенностей на втором листе.

Напротив, в случае равных положительных и отрицательных  $a$ , вообще говоря, нет такой простой связи между формфакторами. При наличии связанного состояния вычет в полюсе представляет собой некий физический параметр, определяющий вместе со значением  $J(0)$  функцию  $J(z)$ , но не имеющий дубликата в виртуальном состоянии.

Рассмотрим далее резонансные параметризации (12.34) и (12.35). В этом случае имеем

$$f_{II} = \frac{-k\gamma}{r-s+ik\gamma} = \frac{-\gamma \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}}{r-s+i\gamma \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}}. \quad (13.19)$$

Рассуждения, аналогичные излагаемым выше [после выражения (12.38)], показывают, что  $f_{II}$  имеет полюс в точке  $p$ , определяемой равенством

$$p \approx r \pm i\gamma k_r + O(\gamma^2). \quad (13.20)$$

Таким образом, резонанс соответствует двум полюсам на втором листе, лежащим в комплексно сопряженных точках. При этом полюс в нижней полуплоскости ближе

к физической области: расстояние до него отсчитывается по линии, изображенной на рис. 13.1. Второй полюс, лежащий на таком же расстоянии от нижнего берега разреза, не оказывает прямого влияния на сечение, поскольку нижний берег не соответствует физической области. Аналогично  $\Omega_{II}$  получается теперь из соотношения (12.41):

$$\Omega_{II}(s) = \frac{r + 2\gamma M}{r - s + ik\gamma}. \quad (13.21)$$

Подобно  $t_{II}$ , функция  $\Omega_{II}$  имеет полюсы в точках  $p$ . Но для  $\Omega$  оба полюса важны с точки зрения физики, поскольку  $\Omega(s \pm i\varepsilon)$  есть в обоих случаях физический предел наблюдаемого формфактора, как это отмечалось в гл. 9.

До сих пор мы ограничивались двухчастичным приближением (упругой унитарностью). Однако легко видеть, что произойдет, если ослабить это условие. Тогда все неупругие пороги на правом разрезе станут точками ветвления функций  $f$  и  $J$ , поскольку  $\text{Im}f$  и  $\text{Im}J$  имеют в этих точках особенности. (Фактически вследствие наличия фазовых множителей, обращающихся на пороге в нуль, лишь производные мнимых частей разрывны на порогах.) Если мы пересекаем разрез ниже первого неупругого порога, предыдущее рассуждение остается в силе. Однако, если мы будем пересекать разрез, скажем, между первым и вторым неупругими порогами, т. е. между  $(3\mu)^2$  и  $(4\mu)^2$ , мы должны учитывать вклад в  $\text{Im}J$  от трехчастичных состояний:

До сих пор мы ограничивались двухчастичным приближением (упругой унитарностью). Однако легко видеть, что произойдет, если ослабить это условие. Тогда все неупругие пороги на правом разрезе станут точками ветвления функций  $f$  и  $J$ , поскольку  $\text{Im}f$  и  $\text{Im}J$  имеют в этих точках особенности. (Фактически вследствие наличия фазовых множителей, обращающихся на пороге в нуль, лишь производные мнимых частей разрывны на порогах.) Если мы пересекаем разрез ниже первого неупругого порога, предыдущее рассуждение остается в силе. Однако, если мы будем пересекать разрез, скажем, между первым и вторым неупругими порогами, т. е. между  $(3\mu)^2$  и  $(4\mu)^2$ , мы должны учитывать вклад в  $\text{Im}J$  от трехчастичных состояний:

$$(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_2} \sum \langle k_2 | \gamma | 3 \text{ мезона} \rangle \langle 3 \text{ мезона} | j | 0 \rangle \times \\ \times \delta [p(3 \text{ мезона}) - k_1 - k_2].$$

На таком новом листе функция  $J$  будет обладать всеми особенностями амплитуды ( $S$ -волны) для процесса 2 мезона  $\rightarrow$  3 мезона, имеющимися у первого из выписанных в правой части матричных элементов. Нетрудно убедиться, что трехчастичная точка ветвления — логарифмическая, что получается как следствие вида трехчастичного фазового множителя.

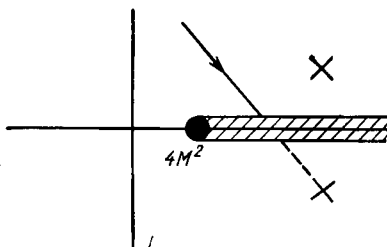


Рис. 13.1

Любопытно продолжить через разрез фейнмановскую функцию распространения. На присущих ей листах она хранит следы большинства своих физических особенностей. В качестве конкретного примера возьмем случай нейтрального скалярного « $\pi$ -мезона» массы  $\mu$ , взаимодействующего с заряженным скалярным «нуклоном» массы  $M$ . Рассмотрим  $\Delta'_{F, I}$  на листе, достигаемом в результате пересечения разреза  $\Delta'_{F, I}$  ниже первого неупругого порога. Пусть  $\rho$  — спектральная функция в представлении Лемана. Рассуждения, проводимые в § 7.4, в применении к заряженным, т. е. различимым, нуклонам дают:

$$\Delta'_{F, II}(z) = \Delta'_{F, I}(z) - 2\pi i \rho(z);$$

$$\Delta'_{F, II}(z) = \Delta'_{F, I}(z) - 2\pi i \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{\frac{z - 4M^2}{z}} \frac{g^2 |\Omega(z)|^2}{(\mu^2 - z)^2},$$

где  $g$  —  $\pi NN$ -константа связи, а  $\Omega$  — соответствующая функция Омнеса, нормированная на единицу в точке  $s = \mu^2$ . Из результатов настоящего параграфа следует формула

$$|\Omega(s + i\varepsilon)|^2 = \Omega_I(s + i\varepsilon) \Omega_{II}(s + i\varepsilon) = \frac{\Omega_I^2(s + i\varepsilon)}{1 + 2if_0(s)},$$

где  $f_0(s) = e^{i\delta_0} \sin \delta_0$ , а  $\delta_0$  — фаза  $S$ -волны «нуклон-нуклонного рассеяния». Поэтому окончательно

$$\Delta'_{F, II} = \Delta'_{F, I} - \frac{ig^2}{8\pi} \sqrt{\frac{s - 4M^2}{s}} \cdot \frac{\Omega^2(s)}{(\mu^2 - s)^2 (1 + 2if_0(s))}.$$

Итак, на своем втором листе фейнмановская функция распространения «знает» об амплитуде рассеяния  $f_0$ . Предоставляем в качестве упражнения проверить, что  $\Delta'_{F, II}$  не имеет полюса в точке  $s = \mu^2$ ; при этом существенно знать, что сама  $f_0$  обладает полюсом в этой точке.

По поводу дальнейших обсуждений нефизического листа мы рекомендуем работы Бланкенбеклера и др. (Blancensbecler et al., 1961), Ландсхофа (Landshoff, 1963), а библиографию по проблеме полюсов на втором листе можно найти в работе Далитца и Раджасекарана (Dalitz, Rajasekaran, 1963).

## Глава 14

### АНОМАЛЬНЫЕ ПОРОГИ

#### § 14.1 АНОМАЛЬНЫЕ ПОРОГИ

В § 9.4 было показано, что спектральная функция электромагнитного формфактора определяет трехмерную плотность заряда, представляющую собой суперпозицию распределений по закону Юкавы:

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} ds \sigma(s) e^{-r\sqrt{s}} / 4\pi r. \quad (14.1)$$

Компонента с наибольшим радиусом действия соответствует пороговой массе. Ею является масса самого легкого промежуточного состояния, дающего вклад в дисперсионное представление. Например, в случае  $\pi$ -мезонного формфактора это двухмезонное состояние. Тогда, если  $\mu$  — масса мезона, то радиус действия силы  $\sim \frac{1}{2\mu}$ .

Рассмотрим теперь формфактор гипотетического скалярного дейтрона с массой  $M_D$ . Предположим, что число нуклонов сохраняется, несмотря на то что наши нуклоны с массой  $M$  также взяты скалярными\*. Тогда формфактор определяется соотношением

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{4\omega_D \omega_{\bar{D}}} \langle D\bar{D}, out | s_\lambda(0) | 0 \rangle &= (D_\lambda - \bar{D}_\lambda) J(s), \\ s &= (D + \bar{D})^2. \end{aligned} \right\} (14.2)$$

Эвристические аргументы, которые мы уже использовали в гл. 9, приводят к дисперсионному представлению для  $J$ :

$$J(z) = e + z \int_{T^2}^{\infty} ds \sigma(s) / s(s-z). \quad (14.3)$$

Далее мы увидим, что вплоть до этого места рассуждения не требуют модификации.

Что можно сказать о пороговой массе  $T$ ? В голову

---

\* Мы избегаем дальнейших упрощений и не вводим скалярного фотона. Это помешало бы нам качественно сравнить дисперсионную теорию с уравнением Шредингера для дейтрона. Проверить это утверждение мы предоставляем в качестве полезного упражнения.

сразу приходят две диаграммы, изображенные на рис. 14.1. Мы интерпретируем их так же, как в гл. 11. Волнистой линией обозначен фотон, пунктирными —  $\pi$ -мезоны, сплошными линиями — нуклоны (и антинуклоны), а двойными — дейтроны (и антидейтроны). С первого взгляда кажется, что двухмезонное состояние дает  $T_{\pi\pi}^2 = 4\mu^2$ , а состояние  $N\bar{N}$  дает  $T_{N\bar{N}}^2 = 4M^2$ . Поскольку  $M^2 \gg \mu^2$ , можно было бы заключить, что низ-

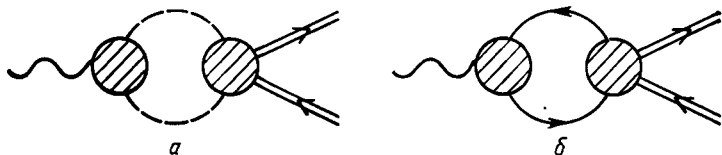


Рис. 14.1

ший порог есть  $T_{\pi\pi}^2$ , а распределение заряда дейтрона имеет радиус порядка  $1/(2\mu)$ .

Однако преждевременность этого заключения станет явной, как только мы вспомним, что дейтрон с успехом можно рассматривать в рамках нерелятивистской квантовой механики и трактовать его как связанное состояние нейтрона и протона с очень малой энергией связи  $\varepsilon$ :

$$M_D = 2M - \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll M. \quad (14.4)$$

Шредингеровская волновая функция, как функция относительных координат нейтрона и протона  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$ , обладает экспоненциальным «хвостом», выходящим за радиус действия сил:

$$\psi(\mathbf{r}) \sim r^{-1} \exp\{-r\sqrt{M\varepsilon}\}.$$

(Напомним, что приведенная масса равна  $M/2$ .) Действительно, оставаясь в пределах разумного приближения, радиусом действия сил ( $\sim 1/\mu$ ) можно пренебречь по сравнению с эффективным радиусом  $(\sqrt{M\varepsilon})^{-1}$  волновой функции. Поэтому можно приблизить функцию  $\psi(\mathbf{r})$  для всех  $\mathbf{r}$  нормированным выражением

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\sqrt{M\varepsilon}}{4\pi}} \frac{1}{r} e^{-r\sqrt{M\varepsilon}}.$$

Поскольку координата протона в системе центра масс равна  $r/2$ , плотность заряда в этой системе есть

$$\rho(r) = 8 |\psi(2r)|^2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{M\varepsilon} \frac{1}{r^2} e^{-r\sqrt{M\varepsilon}}. \quad (14.5)$$

Ясно, что эффективный радиус  $\rho$  равен  $(M\varepsilon)^{-1/2}$ , а не  $(2\mu)^{-1}$ . Например, средний квадратичный радиус выражается формулой

$$\langle r^2 \rangle_S = \frac{1}{8M\varepsilon}. \quad (14.6)$$

Индекс  $S$  означает, что  $\langle r^2 \rangle$  получен из уравнения Шредингера в приближении нулевого эффективного радиуса, т. е. в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Поэтому к дисперсионной теории мы предъявляем серьезное требование: необходимо, чтобы она давала это соотношение в приближении нулевого эффективного радиуса, которое следовало бы непосредственно из допущения, что дейтрон — связанное состояние, а не элементарная частица. Цель настоящей главы состоит в том, чтобы показать, как дисперсионная теория может привести к такому результату. Прежде всего мы увидим, что безотносительно к элементарности дейтрона порог в представлении (14.3) в пределе малых  $\varepsilon$  равен  $T^2 = 16M\varepsilon$ . Кроме того, мы покажем, что если считать дейтрон составной частицей в смысле соответствия ему нуля  $D$ -функции в  $S$ -волне нейтрон-протонного рассеяния, то нетрудно также получить равенство (14.6).

Следует ясно отдавать себе отчет в том, что приближение нулевого эффективного радиуса (реализующееся в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) используется лишь как удобная иллюстрация. Если принять во внимание конечность эффективного радиуса, качественно аргументы не изменятся. Здесь существенно лишь то, что волновая функция дейтрона обладает экспоненциальным «хвостом» радиуса  $(M\varepsilon)^{-1/2}$ , хотя ее вид при малых расстояниях может быть другим.

Решающую роль играют  $N\bar{N}$ -состояния, изображенные на рис. 14.1, б. Фактически это состояния  $p\bar{p}$ , непосредственно взаимодействующие с фотоном (в отличие от состояний  $n\bar{n}$ ). Вклад  $p\bar{p}$ -состояний в спектральную функцию будем обозначать теперь  $\sigma$ . Вспомнив результаты, полученные для спектральной функции векторного

оператора в § 11.1, и учтя, что частицы  $p$  и  $\bar{p}$ , конечно, различимы, получим

$$(D - \bar{D})_\lambda \sigma(s) = (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_D} \sum_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}} \langle D | \eta_D | p\bar{p} \rangle \times \\ \times \langle p\bar{p} | s_\lambda | 0 \rangle \delta(p + \bar{p} - D - \bar{D}). \quad (14.7)$$

Итак, функция  $\sigma$  получается в результате свертывания протонного формфактора

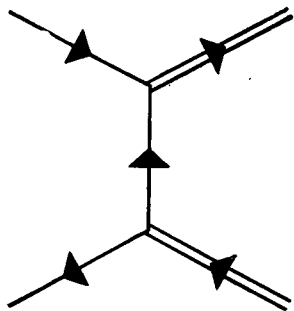


Рис. 14.2

$$\langle p\bar{p} | s_\lambda | 0 \rangle = \frac{(p - \bar{p})_\lambda J_p(s)}{\sqrt{4\omega_p \omega_{\bar{p}}}}$$

с амплитудой процесса  $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D}$  (пропорциональной матричному элементу  $\langle D | \eta_D | p\bar{p} \rangle$ ). Здесь  $\eta_D$  — оператор источника дейтронов. Пространственная протяженность распределения протонного заряда несущественна для наших целей, и мы примем просто  $J_p(s) = e$ . Как мы увидим в

дальнейшем, это ограничение легко может быть снято.

Амплитуду процесса  $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D}$  возьмем в полюсном приближении, соответствующем обмену одним нейтроном, как показано на рис. 14.2. В обычных манделставовских обозначениях:

$$\left. \begin{aligned} s &= (p + \bar{p})^2; & t &= (D - p)^2; \\ \sqrt{2\omega_D} \langle D | \eta_D | p\bar{p} \rangle &= \frac{\Gamma^2}{M^2 - t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_{\bar{p}}}}, \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

где  $\Gamma$  — константа связи  $Dpn$ . (Далее станет ясно, что в данном случае полюсного приближения достаточно.) В итоге находим

$$(D - \bar{D})_\lambda \sigma(s) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}} \frac{\delta(p + \bar{p} - K)}{4\omega_p \omega_{\bar{p}}} \times \\ \times \frac{e\Gamma^2 (p - \bar{p})_\lambda}{M^2 - t}. \quad (14.9)$$



Обратим внимание на следующую трудность. Физическая область процесса  $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D}$  ограничена значениями:

$$s \geq 4M_D^2; \quad t < 0.$$

Однако  $\delta$ -функция в выражении (14.9) указывает, что функция  $\sigma$  отлична от нуля по крайней мере до  $s=4M^2$ . (Ниже будет показано, что область ненулевых значений  $\sigma$  простирается далеко ниже вещественной оси в комплексной плоскости.) Но ниже  $s=4M_D^2$  значение  $t$  может быть положительным, а знаменатель  $M^2 - t$  может обратиться в нуль, так что без дополнительных соображений не ясно, как провести суммирование. С такой трудностью часто сталкиваются в дисперсионной теории. Например, она возникает в дисперсионном представлении для самой амплитуды процесса  $D\bar{D} \rightarrow N\bar{N}$  и (что гораздо важнее) для процесса  $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ . Ее обычно называют «проблемой продолжения условия унитарности в нефизическую область».

Для разрешения проблемы представим сначала, что дейтронная масса равна нуклонной. Тогда можно непосредственно выписать дисперсионное представление. Второй шаг, по предложению Манделстама (Mandelstam, 1961), — использовать фундаментальную теорему теории поля, утверждающую, что формфактор является граничным значением аналитической функции, зависящей от внешних масс. Это граничное значение достигается, когда массы стремятся к вещественной оси сверху. Другими словами, можно считать, что

$$J(M^2, z) = \lim_{\zeta \rightarrow M^2 + i\epsilon} J(\zeta, z).$$

Это предельное равенство уже приводилось в § 9.5; доказательство его можно найти в работе Челлена и Вайтмана (Källén, Wightman, 1958). Из теоремы следует, что достаточно продолжить  $J$  аналитически по массе дейтрона, начиная с гипотетического значения  $M_D^2 = M^2$ , к настоящему физическому значению, для которого характерна малая энергия связи:

$$M_D^2 = (2M - \epsilon)^2 \approx 4M^2 - 4M\epsilon. \quad (14.10)$$

Реально процедура аналитического продолжения проходит безболезненно. Существенно, что меняется внешняя

масса  $M_D$ , в то время как внутренняя масса  $M$  остается фиксированной.

Сначала проведем интегрирование в выражении (14.9) и вычислим спектральную функцию  $\sigma$ . Вспомним, что в рассматриваемом случае  $M_D^2 = M^2$ ; однако будем различать эти равные массы, сохранив индекс  $D$  у  $M_D$ . Перейдем к системе центра масс, выберем  $\theta$  в качестве угла между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{D}$  и положим  $k_p = |\mathbf{p}|$ ,  $k_D = |\mathbf{D}|$ . Тогда  $t = (p - D)^2 = -(\mathbf{p} - \mathbf{D})^2 = -(k_p^2 + k_D^2 - 2k_p k_D \cos \theta)$ .

Напомним, что в системе центра масс  $(\mathbf{D} - \bar{\mathbf{D}}) = 2\mathbf{D}$ , а  $(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) = 2\mathbf{p}$ . Удобно выбрать ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{D}$ , так что в левой части уравнения (14.9) останется лишь  $z$ -компонента, а именно  $2k_D \sigma$ . В правой части множитель  $(p - \bar{p})_\lambda$  в  $z$ -компоненте обратится тогда в  $2k_p \cos \theta$ . Наконец, отметим, что

$$\left. \begin{aligned} k_p &= \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}; \quad k_D = \sqrt{\frac{s}{4} - M_D^2}; \\ \omega_p &= \omega_{\bar{p}} = \omega_D = \omega_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{s}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Выбор ветвей квадратных корней — стандартный. Таким образом, уравнение (14.9) принимает вид

$$\begin{aligned} 2k_D \sigma(s) &= (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{p} \frac{\delta(2\omega_p - \sqrt{s})}{4\omega_p^2} \times \\ &\quad \times \frac{e\Gamma^2 2k_p \cos \theta}{M^2 + k_p^2 + k_D^2 - 2k_p k_D \cos \theta}; \\ \sigma(s) &= \frac{k_p}{k_D} e\Gamma^2 (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{1}{4\omega_p^2} k_p \omega_p d\omega_p \delta\left(\omega_p - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \times \\ &\quad \times \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{\cos \theta}{M^2 + k_p^2 + k_D^2 - 2k_p k_D \cos \theta}; \\ \sigma(s) &= \frac{k_p}{k_D} (2\pi)^{-2} \frac{k_p}{8\omega_p} e\Gamma^2 \times \\ &\quad \times \left[ \frac{-2}{2k_p k_D} - \frac{k_p^2 + k_D^2 + M^2}{4k_p^2 k_D^2} \ln \frac{k_p^2 + k_D^2 + M^2 + 2k_p k_D}{k_p^2 + k_D^2 + M^2 - 2k_p k_D} \right]. \end{aligned} \quad (14.12)$$

[Если бы мы рассматривали скалярный «фотон», общий множитель  $k_p/k_D$  отсутствовал бы, а в квадратных скобках стояло бы произведение  $(2k_p k_D)^{-1}$  на логарифм.]

Из-за наличия множителя  $k_p/\omega_p$  функция  $\sigma$  имеет точку ветвления при  $s=4M^2$ . Это нормальный порог любой амплитуды, включающей двухчастичное промежуточное состояние  $N\bar{N}$ . Как правило, эта точка ветвления приводит к нормальной пороговой особенности у амплитуды, для которой  $\sigma$  является спектральной функцией. Напротив, нуль функции  $k_D$  не есть, как легко проверить, точка ветвления. Однако  $\sigma$  обладает еще другими точками ветвления, в которых обращается в нуль числитель или знаменатель дроби, стоящей под знаком логарифма. Это случается, когда:

$$\left. \begin{aligned} (k_p^2 + k_D^2 + M^2)^2 &= 4k_p^2 k_D^2; \\ \left(\frac{s}{4} - M^2 + \frac{s}{4} + M^2 - M_D^2\right)^2 &= 4\left(\frac{s}{4} - M^2\right) \times \\ &\times \left(\frac{s}{4} - M_D^2\right); \\ \left(\frac{s}{2} - M_D^2\right)^2 &= \frac{s^2}{4} - s(M_D^2 + M^2) + 4M^2 M_D^2; \\ s = s_0 &\equiv 4M_D^2 \left(1 - \frac{M_D^2}{4M^2}\right). \end{aligned} \right\} (14.13)$$

Если  $M_D^2 = M^2$ , то  $s_0 = 3M_D^2 = 3M^2 < 4M^2$ , так что точка  $s_0$  расположена левее нормального порога. (Здесь  $k_p$  и  $k_D$  — чисто мнимые, поэтому в точке  $s_0$  числитель действительно обращается в нуль.) Заметим еще, что сейчас для  $J$  справедливо нормальное дисперсионное представление с  $\sigma$  в качестве спектральной функции. Поэтому (см. гл. 13)  $s_0$  есть особая точка функции  $J$  на ее втором римановом листе, где  $J_{II} = J_I + 2\pi i\sigma$ , а в точке  $s_0$  на первом листе  $J$  особенности не имеет.

Посмотрим теперь, что произойдет при увеличении  $M_D^2$ . Поскольку  $ds_0/dM_D^2 = 4 - \frac{2M_D^2}{M^2}$ ,  $s_0$  будет перемещаться вправо (по нефизическому листу) до тех пор, пока не достигнет своего крайнего правого положения, при  $M_D^2 = 2M^2$ . До сих пор функция  $J$  удовлетворяла нормальному дисперсионному представлению на своем физическом листе с порогом в точке  $(2M)^2$ . Но при

$M_D^2 = 2M^2$  особенность функции  $\sigma$  попадает на точку ветвления (общую для обоих листов функции  $J$ ), поскольку

$$s_0 (M_D^2 = 2M^2) = 4M_D^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2M_D^2 = 4M^2.$$

При дальнейшем увеличении  $M_D^2$  точка  $s_0$  меняет направление своего движения и начинает перемещаться влево вдоль вещественной оси. Следует помнить, однако, о возможности обхода точкой  $s_0$  вокруг точки ветвления. Если обход не совершен, то путь точки  $s_0$  будет таким, как показано на рис. 14.3.

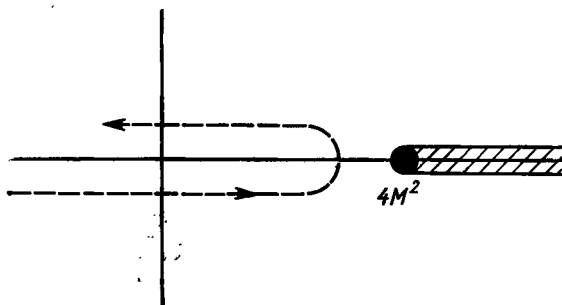


Рис. 14.3

В случае обхода точки ветвления  $s_0$  будет стремиться пересечь разрез *выше* точки  $4M^2$ . Следовательно, для аналитического продолжения функции  $J$  следует деформировать нормальный разрез, чтобы не наткнуться на особенность  $s_0$ . При этом контур интегрирования станет таким, как на рис. 14.4. Отметим, что  $s_0$  «тянет» за собой разрез, простирающийся до  $-\infty$  вдоль пунктирной линии на рисунке.

Чтобы определить, какая из возможностей реализуется, достаточно просто вспомнить, что  $J$  является граничным значением аналитической функции, когда ее аргумент  $M_D^2$  стремится к вещественной оси сверху. Заменяем  $M_D^2$  на  $M_D^2 + i\eta$  ( $\eta \rightarrow 0+$ ) в выражении (14.13) и проследим за движением  $s_0$ . При этом

$$s_0 = 4M_D^2 \left(1 - \frac{M_D^2}{4M^2}\right) + i\eta 4 \left(1 - \frac{M_D^2}{2M^2}\right) + \eta^2 \frac{M_D^2}{M^2}. \quad (14.14)$$

Исследование равенства (14.14) показывает, что  $s_0$  действительно обходит нормальную точку ветвления, так что реализуется ситуация, изображенная на рис. 14.4. По мере возрастания  $M_D^2$  до своего реального физического значения контур интегрирования деформируется

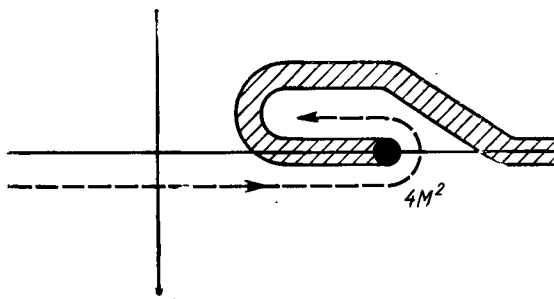


Рис. 14.4

все дальше и дальше влево. В конце концов он достигает точки

$$T^2 = 4M_D^2 \left[ 1 - \frac{(2M - \epsilon)^2}{4M^2} \right]. \quad (14.15)$$

Поскольку практически  $\epsilon \ll M$ , приближенно можно написать:

$$\left. \begin{aligned} T^2 &\approx 16M^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon}{2M} \right)^2 \right] \approx 16M\epsilon; \\ T &\approx 4\sqrt{M\epsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

что по порядку величины совпадает с ожидаемым результатом.

Итак, установлено, что порог  $T^2$  дисперсионного представления для формфактора дейтрона равен  $16M\epsilon$  (независимо от того, является ли дейтрон составной частицей или нет).

Чтобы получить некоторое представление о порядках величин, проверим, действительно ли  $T$  лежит ниже двух-мезонного порога  $2\mu$ . При  $\mu \approx 140$  Мэв,  $M \approx 1000$  Мэв, а  $\epsilon \approx 2$  Мэв находим, что  $T \approx 180$  Мэв, т. е. ниже  $2\mu \approx 280$  Мэв.

Прежде чем упомянуть о других формфакторах с аномальными порогами и сравнить полученные выше

результаты с уравнением Шредингера, обсудим кратко приближение, в котором формфактор протона заменен величиной  $e$ , а амплитуда процесса  $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D}$  — простым полюсом, показанным на рис. 14.2. Очевидно, в нашем вычислении фигурировала  $P$ -волна этой амплитуды. В любом реалистическом дисперсионном представлении и на формфактор, и на эту парциальную волну оказывают сильное влияние двумезонные промежуточные состояния. В результате обе величины имеют точки ветвления при  $s=4\mu^2$ . С количественной точки зрения такие особенности могут оказаться важными. Однако, воспользовавшись сохранением числа нуклонов, можно показать, что обмен одним нуклоном на деле представляет собой взаимодействие *потенциального типа* (ему соответствует левый разрез) с наибольшим эффективным радиусом для реакции  $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D}$ . Поэтому аргументы гл. 12 показывают, что такой обмен соответствует ближайшим на левом разрезе точкам ветвления парциальных амплитуд. Рассуждения, приведшие к вычислению  $T^2$ , основывались лишь на сведениях о положении этой ближайшей точки ветвления. Следовательно, характер нашего приближения не оказывает влияния на результат.

В следующем параграфе нам понадобятся детальные сведения о скачке функции  $J$  на аномальной части разреза с учетом неэлементарности дейтрона. Следует напомнить, что ближайшие части левых разрезов корректно учитываются даже в наших приближенных уравнениях. Для правых же разрезов необходимо ввести множители, обязанные своим происхождением двумезонным (а возможно, и другим многомезонным) промежуточным состояниям. Эта проблема обсуждается в общем виде Бланкенбеклером и Намбу (Blankenbecler, Nambu, 1960), к работе которых мы и отсылаем интересующегося деталями читателя. Однако уравнение Шредингера не дает аналога таким многомезонным промежуточным состояниям. В этом уравнении не допускается и пространственной протяженности протонного заряда. Следовательно, принятые нами приближения позволят с успехом сравнить дисперсионную теорию с результатами решения уравнения Шредингера, по крайней мере по порядку величин.

Подведем итог процедуре, с помощью которой мы обнаружили аномальный порог. Было установлено, что

спектральная функция дейтронного формфактора отлична от нуля в области ниже нормального  $DD\bar{D}$ -порога. За это ответственны промежуточные состояния  $N\bar{N}$ . Найти спектральную функцию ниже порога оказалось возможным только с помощью аналитического продолжения по (внешней) дейтронной массе. Осуществляя это продолжение, мы учли тот существенный факт, что амплитуда процесса  $N\bar{N} \rightarrow DD\bar{D}$  имеет полюс при  $t=M^2$ . Наличие

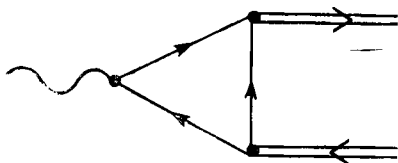


Рис. 14.5

полюса является следствием того, что число нуклонов в дейтроне равно двум. Когда величина  $M_D^2$  близка к  $M^2$ ,  $P$ -волновая компонента этого члена порождает особенность у формфактора на его втором листе. По мере увеличения  $M_D^2$  особенность начинает смещаться в сторону нормального порога, достигая его при  $M_D^2 = 2M^2$ . Затем особенность попадает на физический лист функции  $J$  и движется назад, влево по вещественной оси к ожидаемому порогу  $T^2$ , «толкая» впереди себя нормальный разрез. Соответствующие диаграммы, изображенные ранее на рис. 14.1, б и 14.2, можно объединить в один эффективный граф Фейнмана, как это показано на рис. 14.5. Итак, критерием существования аномального порога на физическом листе является неравенство

$$M_D^2 > 2M^2. \quad (14.17)$$

В это неравенство входят массы только трех частиц, составляющих вершину  $DNN$ . Общее правило состоит в следующем. Амплитуда или формфактор имеют аномальный порог, если в них дает вклад фейнмановский граф, содержащий вершину, в которую входит внешняя линия с массой  $M_e$  и внутренние линии с массами  $m_1$  и  $m_2$ , причем выполнено неравенство

$$M_e^2 > m_1^2 + m_2^2. \quad (14.18)$$

Фактически аномальные пороги были впервые открыты как свойство фейнмановских графов. Если, увеличиваясь далее, внешняя масса становится нестабильной [т. е. при  $M_e^2 > (m_1 + m_2)^2$ ], аномальные точки ветвления графов выходят на комплексную плоскость  $s$ . Мы не имеем возможности входить в детали такого случая. Отметим лишь возрастающую сложность аналитической структуры при увеличении внешних масс по сравнению с внутренними.

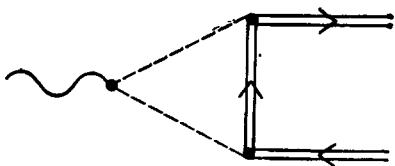


Рис. 14.6

Если угодно, можно воспользоваться неравенством (14.18) для заманчивого *определения* того, что мы понимаем под элементарностью дейтрона. Согласно этому неравенству, дейтрон следует считать «элементарным» при  $M_D^2 < 2M^2$  и «составным» при  $M_D^2 > 2M^2$ . Однако неясно, много ли пользы принесет такое определение вне рамок нашей ограниченной проблемы формфакторов. В следующем же параграфе мы покажем, что даже и в этом случае указанный критерий сам по себе недостаточен.

С первого взгляда казалось, что двухмезонные промежуточные состояния дают в дейтронный формфактор вклад, эффективный радиус которого больше, чем для вклада от состояний  $N\bar{N}$ . Теперь мы можем видеть, что состояние  $\pi\pi$  не приводит к аномальному порогу. В нашей схеме этому состоянию отвечает диаграмма на рис. 14.6 (сравни ее с рис. 14.5), для которой критерий (14.18) не выполняется. Поэтому аномальный порог при  $16M_e$  — действительно самый низший.

Заметим наконец, что аномальные пороги вовсе не связаны только с такой широко известной составной частицей, как дейтрон. С учетом значений квадратов масс (в  $M_e^2$ ).

$$M_\Sigma^2 = 1,42 \cdot 10^6; \quad M_\Lambda^2 = 1,24 \cdot 10^6; \quad M_N^2 = 0,88 \cdot 10^6; \\ \mu_K^2 = 0,244 \cdot 10^6; \quad \mu_\pi^2 = 0,196 \cdot 10^6$$



графы на рис. 14.7 показывают, что формфакторы частиц  $\Sigma$  и  $\Lambda$  имеют аномальные пороги, поскольку критерию удовлетворяет вершина  $YNK$  ( $M_N^2 + \mu_K^2 = 1,12 \cdot 10^6 < M_\Lambda^2$ ). Напротив, вершина  $\Sigma\Lambda\pi$  не дает аномального порога ( $M_\Lambda^2 + \mu_\pi^2 = 1,44 \cdot 10^6 > M_\Sigma^2$ ). Тогда (в согласии с не слишком глубоким определением, упомянутым выше) можно было бы сказать, что  $\Sigma$  и  $\Lambda$  являются связан-

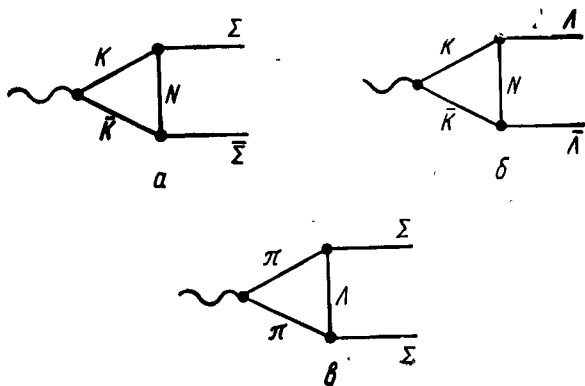


Рис. 14.7

ными состояниями системы  $(NK)$ , но  $\Sigma$  не является связанным состоянием системы  $(\Lambda\pi)$ . (При положительной относительной четности  $\Sigma$  и  $\Lambda$  это было бы связанное  $P$ -состояние.) Следует еще раз предупредить читателя, что существуют другие критерии «элементарности», которые не хуже, а может быть, и лучше этого. Один из них мы рассмотрим в следующем параграфе.

#### § 14.2. СРАВНЕНИЕ С ШРЕДИНГЕРОВСКОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИЕЙ: СОСТАВНАЯ ПРИРОДА ДЕЙТРОНА

В предыдущем параграфе показано, что наиболее протяженное облако Юкавы в распределении заряда дейтрона имеет эффективный радиус того же порядка, что и радиус шредингеровской волновой функции дейтрона, рассматриваемого как очень слабо связанное состояние двух нуклонов. Мы вывели это из дисперсионной теории независимо от того, является ли дейтрон составной частицей или нет.

Однако из физических соображений ясно, что шредингеровская волновая функция не может дать полной

информации о дейтроне, если только не предположить, что он — связанное состояние. Следовательно, дисперсионные соотношения для формфактора  $J$  дейтрона должны быть достаточно гибкими, чтобы можно было отождествить компоненту, отвечающую наибольшему эффективному радиусу, с соответствующей компонентой волновой функции связанного состояния. Параметр, которым мы можем распоряжаться, — это константа связи дейтрона с нуклоном  $G$ . Настоящий параграф посвящен сравнению с шредингеровской теорией. Мы намерены установить самосогласованный внутренний динамический критерий того, является ли очень слабо связанная частица «элементарной» или «составной». Критерий основан на  $N/D$ -методе для парциальных амплитуд, обсуждавшемся в гл. 12. Он разработан в статьях Ландау (1960) и Науенберга (Nauenberg, 1961), которые и содержат детальный анализ проблемы.

В качестве объекта для сравнения возьмем средний квадратичный радиус распределения заряда. Шредингеровская волновая функция приводит к равенству (14.6). Дисперсионная теория дает ответ, полученный в § 9.4:

$$\left. \begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= e^{-1} 6dJ(s)/ds|_{s=0}; \\ \langle r^2 \rangle &= \frac{6}{e\pi} \int_{T^2}^{\infty} ds \operatorname{Im} J(s)/s^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Вклады в  $\operatorname{Im} J$  от любых промежуточных состояний выше их нормальных порогов не имеют никакого отношения к шредингеровскому методу, в котором все внимание сосредоточено на вкладе от состояний  $N\bar{N}$  в аномальной области, от  $T^2$  до  $4M^2$ . Помимо этого, в дальнейшем мы будем иметь дело только с предельным случаем очень малой энергии связи, т. е. произвольно малой (но конечной) величины  $\varepsilon$ . Мы увидим, что в этом пределе существенна область лишь вблизи значения  $T^2$  (расположенная выше него). Поэтому достаточно учесть только аномальные вклады от  $N\bar{N}$ -состояний — единственные вклады от этой области. Итак, определим аномальный вклад в  $\langle r^2 \rangle$  интегралом

$$\langle r^2 \rangle_A = \frac{6}{e\pi} \int_{T^2}^{4M^2} ds \frac{\operatorname{Im} J(s)}{s^2} \quad (14.20)$$

и сравним  $\langle r^2 \rangle_A$  с  $\langle r^2 \rangle_S$ .

Необходимо найти скачок  $J(s)$  в аномальной области  $\Delta_A J(s)$ . Нормальный разрез функции  $J$  здесь сдвоен, так что скачок на верхнем его берегу сокращается со скачком на нижнем берегу. Таким образом,  $\Delta_A J(s)$  есть скачок на разрезе, простирающемся от особой точки на втором листе, которая теперь вышла через нормальную точку ветвления на физический лист. Первоначально (т. е. при  $M_D^2 = M^2$ ) выражение для  $J$  на втором листе имело вид

$$J_{II} = J_I - 2\pi i \sigma.$$

Поэтому

$$\Delta_A J = -\Delta_A(-2\pi i \sigma) - 2\pi i \Delta_A \sigma.$$

Дополнительный знак минус отражает тот факт, что разрез функции  $\sigma$ , выйдя на верхний лист, сменил свое направление. Скачок функции  $\sigma$  — это скачок логарифма в соотношении (14.12); он равен  $2\pi i$ . Другой, нелогарифмический член в квадратных скобках в формуле (14.12) не дает вклада в  $\Delta_A \sigma$ . Итак,

$$\Delta_A J = \frac{e\Gamma^2}{32} \cdot \frac{k_p^2 + k_D^2 + M^2}{\omega_p k_D^3} = \frac{e\Gamma^2}{16} \cdot \frac{i \left( M_D^2 - \frac{s}{2} \right)}{V^{\sqrt{s}} \left( M_D^2 - \frac{s}{4} \right)^{3/2}}.$$

Здесь мы явно учли то обстоятельство, что  $k_p$  и  $k_D$  чисто мнимые. Сам скачок  $\Delta_A J$  также чисто мнимый, как и должно быть в силу доказанной вещественности функции  $J$ . Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} 2i \operatorname{Im}_A J' &= \Delta_A J; \\ \operatorname{Im}_A J &= \frac{e\Gamma^2}{32} \frac{M_D^2 - \frac{s}{2}}{V^{\sqrt{s}} \left( M_D^2 - \frac{s}{4} \right)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

Подставляя выражение (14.21) в формулу (14.19), находим

$$\langle r^2 \rangle_A = \frac{3\Gamma^2}{16\pi} \int_{T^2}^{4M^2} \frac{ds \left( M_D^2 - \frac{s}{2} \right)}{s^2 V^{\sqrt{s}} \left( M_D^2 - \frac{s}{4} \right)^{3/2}}. \quad (14.22)$$

Для очень малых  $\varepsilon$  величина  $T^2 = 16M\varepsilon$  также мала, и основной вклад в интеграл дает область интегрирования, близкая к нижнему пределу. Если положить  $\varepsilon = 0$ , интеграл будет расходящимся. Таким образом, все множители в подынтегральном выражении, кроме  $s^{-5/2}$ , можно заменить их значениями при  $s = 0$  и с учетом приближенного равенства  $M_D^2 \approx 4M^2$  получить

$$\langle r^2 \rangle_A \approx \frac{3\Gamma^2}{16\pi} \frac{1}{2M} \int_{16M\varepsilon}^{4M^2} ds s^{-5/2};$$

$$\langle r^2 \rangle_A \approx \Gamma^2 [\pi 2^{10} M (M\varepsilon)^{3/2}]^{-1}. \quad (14.23)$$

Вклад от верхнего предела интегрирования опущен, поскольку он конечен при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Сравнивая теперь формулы (14.23) и (14.6), мы видим, что дисперсионная теория согласуется с шредингеровской лишь при одном конкретном значении константы связи  $\Gamma$ , а именно при

$$\Gamma^2 = 128\pi M \sqrt{M\varepsilon}. \quad (14.24)$$

Предоставляем в качестве упражнения проверить, что замена  $\text{Im}_A J$  его приближением при малых  $s$ , т. е. выражением

$$e\Gamma^2 / (\sqrt{s} M_D) \approx e\Gamma^2 / (2M\sqrt{s}),$$

приводит в точности к той же спектральной функции, как и использование фурье-образа шредингеровской плотности заряда (14.5), если только  $\Gamma$  выбрано согласно равенству (14.24). Следовательно, если  $\Gamma$  имеет такое значение, разумно считать дейтрон связанным состоянием, поскольку предсказания дисперсионной теории согласуются в этом случае со следствиями уравнения Шредингера. Если же величина  $\Gamma$  сильно отличается от выражения (14.24), следует считать дейтрон не составным, а «элементарным», по крайней мере в том смысле, что уравнение Шредингера, оставаясь, конечно, справедливым само по себе, неприменимо к дейтрону. (Разумеется, небольшое численное различие можно было бы приписать грубости некоторых численных приближений.)

Важный качественный вывод из формулы (14.24) заключается в следующем. Если имеется простое соответствие между шредингеровским и дисперсионным мето-

дами, то для составного дейтрона константа связи дейтрона с нуклоном  $\Gamma$  обращается в нуль, когда энергия связи стремится к нулю, иными словами, когда дейтрон перестает существовать как стабильная частица. Такого же результата следовало бы ожидать из физических соображений: нестабильная составная частица вообще не может существовать, а поэтому не может взаимодействовать как целое с чем бы то ни было. Напротив, элементарная частица соответствует независимой степени свободы системы, даже если бы по какой-то второстепенной причине она и оказалась бы нестабильной. Поэтому характеризующие ее параметры — а  $\Gamma$  есть один из них — вовсе не обязаны обращаться в нуль при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Конечно, если дейтрон — составная частица, его связь с нуклоном должна определяться теми же динамическими уравнениями, что и его масса. До сих пор в наши аргументы не входила такая динамическая информация, так что пока мы не имели оснований утверждать, что для слабо связанного составного дейтрона условие (14.24) обязательно должно выполняться. Можно лишь надеяться, что динамически удовлетворительная теория также приведет к условию (14.24) и поэтому оправдает ожидания, основанные на шредингеровской теории. Следующий параграф продемонстрирует, что эта надежда действительно реализуется.

### **§ 14.3. КОНСТАНТА СВЯЗИ ДЕЙТРОНА С НУКЛОНОМ ДЛЯ СОСТАВНОГО ДЕЙТРОНА**

Следуя методу Ландау (1960), значительно развитому Науенбергом (Nauenberg, 1961), мы сейчас покажем, что наиболее удовлетворительное динамическое определение составной частицы действительно приводит к условию (14.24) в пределе малой энергии связи. Для определенности рассмотрим скалярные дейтрон и нуклоны. Детальный анализ можно найти в статье Науенберга. Следует особо отметить, что наши рассуждения необходимо дополнить исследованием того, насколько мала должна быть энергия связи, чтобы была применима предельная процедура. Критерий существенно и нетривиально зависит от радиуса действия сил. Оказывается, что этому критерию удовлетворяет дейтрон, но не удовлетворяет ни один из перечисленных в конце

§ 14.1 примеров аномальных порогов. Наконец, отметим, что та же физическая проблема с другой точки зрения обсуждалась Вейнбергом (Weinberg, 1965).

Будучи стабильным, дейтрон соответствует полюсу инвариантной амплитуды протон-нейтронного рассеяния с вычетом  $\Gamma^2$ , так что вблизи полюса

$$\mathfrak{M} \sim \Gamma^2 / (M_D^2 - s). \quad (14.25)$$

При нормировке, введенной в гл. 4 и использовавшейся в гл. 12, соотношение (14.25) приводит к полюсу в точке  $s = M_D^2$  для амплитуды  $h_0$   $S$ -волны  $pn$ -рассеяния с вычетом  $R = \Gamma^2 / (16\pi)$ . Все это справедливо независимо от того, элементарен дейтрон или нет.

Легко видеть, что уравнение Шредингера, примененное к  $pn$ -рассеянию, приводит к условию (14.24), если эффективный радиус мал по сравнению с длиной рассеяния. В этом случае для фазы можно использовать параметризацию (12.29) и непосредственно проверить, что положение полюса и вычет в нем связаны соотношением (14.24), которое, как мы сейчас покажем, можно получить на основании  $N/D$ -метода для  $h_0$ .

Как уже отмечалось в гл. 12, полезно считать составным связанное состояние  $pn$ -системы, если соответствующий полюс функции  $h_0 = N/D$  обусловлен нулем функции  $D$ , найденной из уравнения (12.12) с разумно заданной функцией  $N$ . Конечно, в таком случае  $N$  определяет и положение полюса, и вычет в нем, и любая неопределенность в  $N$  сказывается на обеих этих величинах. Но, как мы покажем, в пределе слабой связи положение полюса сразу определяет значение вычета независимо от детального поведения функции  $N$ . Правда, существенно отсутствие КДД-полюсов (т. е. элементарных частиц). Предоставляем в качестве упражнения проверить, что последующие рассуждения остаются в силе при наличии полюса у функции  $N$  и что они становятся неверными *только* при наличии КДД-полюсов.

Итак, начнем с формулы

$$D(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s-z)} \cdot \frac{k}{\omega} N(s). \quad (14.26)$$

(Критерий, найденный в конце § 14.1, показывает, что для  $pn$ -системы не возникает проблемы аномальных по-

рогов.) Предположив, что  $D$  обращается в нуль при  $z = M_D^2 = (2M - \varepsilon)^2$ , находим

$$1 = \frac{M_D^{21}}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{s(s - M_D^2)} \cdot \frac{k}{\omega} N(s). \quad (14.27)$$

Вычет  $R$  функции  $h_0 = N/D$  определяется формулой

$$R = -N(M_D^2) \left[ \frac{dD}{dz} \Big|_{z=M_D^2} \right]^{-1};$$

$$R^{-1} = \frac{1}{N(M_D^2)} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds}{(s - M_D^2)^2} \cdot \frac{k}{\omega} N(s). \quad (14.28)$$

Для малых энергий связи  $\varepsilon$  знаменатель  $(s - M_D^2)^2$  весьма близок к нулю в окрестности нижнего предела интегрирования, так что значение интеграла в основном определяется именно этой областью. Следовательно, относительно медленно меняющийся множитель  $N/\omega$  можно вынести из-под знака интеграла и взять в качестве его аргумента  $s = 4M^2$ . По тем же причинам  $N(M_D^2) \approx \approx N(4M^2)$ , так что правая часть не зависит от  $N$  (в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), как и предполагалось. Тогда находим

$$R^{-1} \approx \frac{1}{\pi M} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds \sqrt{\frac{s}{4} - M^2}}{(s - 4M^2 + 4M\varepsilon)^2}$$

и, заменив переменную интегрирования на  $x = (s - 4M^2)/(4M\varepsilon)$ , получаем

$$R^{-1} \approx \frac{1}{4\pi M \sqrt{M\varepsilon}} \int_0^{\infty} \frac{dx \sqrt{x}}{(x+1)^2}.$$

Интеграл равен  $\pi/2$ , откуда

$$R = 8M \sqrt{M\varepsilon} \quad (14.29)$$

и, наконец,

$$\Gamma^2 = 16\pi R = 128\pi M \sqrt{M\varepsilon}, \quad (14.30)$$

как мы и обещали.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СТРУКТУРА НУКЛОНОВ

Эта глава не представляет собой систематического обзора нуклонных формфакторов. Они служат главным образом иллюстрацией того, как применяется развитая нами теория. Как и прежде, мы позволим себе ряд серьезных вольностей при учете спина. Более последовательную трактовку, экспериментальные данные и ссылки можно найти в работах Дрелла и Захариасена (Drell, Zachariasen, 1961), Ханда и др. (Hund et al., 1963) и Даннинга и др. (Dunning et al., 1964).

Экспериментальная информация берется из опытов по рассеянию электронов высокой энергии на протонах и дейтронах, а в специальном случае нейтронных формфакторов в пределе малых передач импульсов — из опытов по рассеянию медленных нейтронов электронами атомов. Всюду далее мы принимаем, что электрон-нуклонное взаимодействие целиком обусловлено однофотонным обменом (что уже обсуждалось в начале гл. 9). При этом мы считаем, что все отклонения от предсказаний теории возмущений низшего порядка вызваны влиянием сильных взаимодействий, а не нарушением квантовой электродинамики. Предположение об однофотонном обмене экспериментально подтверждается корректностью формулы Розенблюта, которая следует из этого предположения.

В § 15.1 речь пойдет главным образом о кинематике и выборе формфакторов. В § 15.2 мы обсудим экспериментальные данные и сделаем ряд общих замечаний, а в последнем параграфе этой главы перейдем к более детальному обсуждению дисперсионного подхода.

### § 15.1. ВЫБОР ФОРМФАКТОРОВ

Электромагнитные формфакторы протона можно определить формулой

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda &\equiv \sqrt{N_0 N'_0 / m^2} \langle N' s_\lambda(0) | N \rangle = \\ &= \bar{u}(N') \{ \gamma_\lambda e F_1^{(p)}(s) + i(N' - N)^\mu \sigma_{\lambda\mu} F_2^{(p)}(s) \} \bar{u}(N); \quad (15.1) \\ s &= (N'_1 - N)^2 \equiv \Delta^2. \end{aligned}$$



В гл. 10 в связи со слабыми токами уже упоминалось, что сами по себе трансформационные свойства  $s_\lambda$  относительно несобственной группы Лоренца достаточны для утверждения, что вид формулы (15.1) самый общий. Помимо этого, соотношение (15.1) автоматически удовлетворяет равенству  $(N' - N)^\lambda \Gamma_\lambda = 0$ , которое следует из условия сохранения тока  $\partial^\lambda s_\lambda = 0$ . Как мы видели при обсуждении тождества Уорда, сохранение тока и связанная с ним градиентная инвариантность приводят к добавочному ограничению  $F_1^{(p)}(0) = 1$ . Далее, формула (15.1) идентифицирует  $F_2^{(p)}(0)$  как аномальный магнитный момент:

$$F_2^{(p)}(0) = e\mu_p/(2m) = 1,79e/(2m) \equiv \kappa_p. \quad (15.2)$$

Таким образом,  $F_2$  имеет размерность  $[M^{-1}]$ . Мы не хотим делать его безразмерным, дописав перед ним дополнительный множитель  $\sim 1/m$  в формуле (15.1), потому что не желаем создать впечатление, что масса нуклона связана с его аномальным магнитным моментом. Во всех последующих формулах масса  $m$  появляется только тогда, когда это диктуется соображениями кинематики. Наконец, эрмитовость  $s_\lambda$  показывает, что функции  $F_i$  вещественны при  $s < 0$  (для этого и введен множитель  $i$  перед  $F_2$ ), а в § 9.3 мы видели, что с точки зрения дисперсионной теории они свободны от кинематических особенностей.

Назовем  $F_1$  дираковским формфактором, а  $F_2$  — паулиевским формфактором. Мы настоятельно подчеркиваем, что существует довольно большая путаница в выборе и названии формфакторов, равно как и в их нормировке. Нет никакой гарантии в том, что одно и то же наименование не используется разными авторами для разных функций.

Формфакторы нейтрона определяются точно так же, а их нормировки имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(n)}(0) &= 0; \\ F_2^{(n)}(0) &= e\mu_n/(2m) = -1,91e/(2m) \equiv \kappa_n. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Часто используют изоскалярный и изовекторный форм-факторы, определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} F_i^{(p)} &= F_i^{(S)} + F_i^{(V)}, & F_i^{(S)} &= \frac{1}{2} [F_i^{(p)} + F_i^{(n)}]; \\ F_i^{(n)} &= F_i^{(S)} - F_i^{(V)}, & F_i^{(V)} &= \frac{1}{2} [F_i^{(p)} - F_i^{(n)}], \end{aligned} \right\} (15.4)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(S)}(0) &= F_1^{(V)}(0) = \frac{e}{2}; \\ F_2^{(S)}(0) &= -0,06e/(2m), & F_2^{(V)}(0) &= 1,85e/(2m). \end{aligned} \right\} (15.5)$$

Задача дисперсионной теории — вычислить всю зависимость функций  $F_i$ , исключая значения  $F_i^{(i)}(0)$ . В частности, должны быть вычислены величины  $\mu^{(i)}$ . Особенно важно объяснить резкое численное различие между  $\mu^{(S)}$  и  $\mu^{(V)}$ ; до сих пор не найдено удовлетворительного ответа на этот вопрос.

Формула (15.1) — достаточно общий, но не единственно возможный вид. Выбор  $\gamma_\lambda$  и  $i\Delta^\nu \sigma_{\lambda\mu}$  в качестве независимых тензоров диктуется лагранжевой теорией и одновременными соотношениями коммутации. Однако с других точек зрения может оказаться полезным другой выбор. Альтернативный вид можно получить, воспользовавшись уравнением Дирака (5.28) для спиноров  $u$ . Например, дираковский член в (13.1) можно разбить на «конвекционную» и «поляризационную» компоненты:

$$\bar{u}(N') \gamma_\lambda u(N) = \bar{u}(N') \left\{ \frac{P_\lambda}{2m} + i \frac{\Delta^\mu}{2m} \sigma_{\lambda\mu} \right\} u(N), \quad (15.6)$$

где  $P \equiv N' + N$ . Следовательно, можно определить новые формфакторы  $E_1$  и  $E_2$ :

$$\Gamma_\lambda \equiv \bar{u}(N') \left\{ \frac{P_\lambda}{2m} e E_1(s) + i \Delta^\mu \sigma_{\lambda\mu} E_2(s) \right\} u(N), \quad (15.7)$$

где

$$E_1 = F_1, \quad E_2 = \frac{F_1}{2m} + F_2. \quad (15.8)$$

Очевидно,  $E_2(0)$  — это полный магнитный момент частицы.

Другое полезное иногда разложение проводится тем же образом, как в соотношении (15.7); при этом явно разделяются зависящая и не зависящая от спина компоненты:

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{1 - s/(4m^2)} \bar{u}(N') \left\{ \frac{P_\lambda}{2m} G_E(s) + \frac{1}{4m} [\gamma_\lambda (P\gamma) (\Delta\gamma) - (\Delta\gamma) (P\gamma) \gamma_\lambda] G_M(s) \right\} u(N). \quad (15.9)$$

«Электрический» и «магнитный» формфакторы  $G_E$  и  $G_M$  определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} G_E &= eF_1 + \frac{sF_2}{2m}, & G_E^{(p)}(0) &= e, & G_E^{(n)}(0) &= 0; \\ G_M &= \frac{eF_1}{2m} + F_2, & G_M^{(p)}(0) &= 1 + x_p, & G_M^{(n)}(0) &= x_n. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Формфакторы  $G_E$  и  $G_M$  важны, поскольку они «диагонализуют» формулу Розенблюта для дифференциального сечения рассеяния неполяризованных электронов на нуклонах. Для электронов с начальной энергией  $E$  и конечной энергией  $E'$ , рассеянных на угол  $\theta$  (все величины относятся к лабораторной системе), в ультрарелятивистском пределе по электронам формула Розенблюта гласит:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 E'}{4E^3 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{\text{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{2} [G_E^2 - sG_M^2] - 2sG_M^2 \right\}. \quad (15.11)$$

Другими словами, формула не содержит интерференционных членов типа  $G_E G_M$ , что весьма удобно при анализе экспериментальных данных. Например, для больших  $s$  оказывается, что  $G_M$  в отличие от  $G_E$  дает основной вклад в сечение, и поэтому ошибки в определении  $F_1$  и  $F_2$  почти полностью скоррелированы.

Основное различие между формфакторами  $G_i$  состоит в том, что  $G_M$  соответствует обмену единичной компонентой углового момента вдоль направления  $\Delta$ , а  $G_E$  — обмену нулевым моментом. Лучше всего это видно в брейтовской системе координат, где  $N' + N = 0$ :

$$(\Gamma_0)_i = G_E; \quad (\Gamma_i)_0 = G_M \sigma \times \Delta. \quad (15.12)$$

В этой системе виртуальные фотоны, связанные с  $\Gamma_0$  (с интенсивностью  $G_E$ ), не влияют на поведение спина нуклона; их называют скалярными фотонами. Фотоны же, связанные с  $\Gamma$ , переворачивают спин нуклона; их называют поперечными.

Поскольку  $F_1$  и  $F_2$  не имеют кинематических особенностей, то же самое справедливо и для  $G_E$  и  $G_M$ . Кроме того, соотношения (15.10) показывают, что  $G_E$  и  $2mG_M$  равны друг другу на пороге, где  $s=4m^2$ .

С интуитивных позиций можно попытаться также связать  $G_i$  с трехмерными плотностями заряда и тока нуклона. Неоднозначность такого сопоставления уже обсуждалась в § 9.4 в связи со скалярными частицами; здесь мы снова подчеркнем это обстоятельство. Наименее спорной является идентификация формфактора  $G_M$  с фурье-образом пространственного распределения магнитного момента  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$ . Она кажется почти очевидной, поскольку  $G_M(0)$  является полным магнитным дипольным моментом частицы.

Труднее найти удовлетворительную идентификацию плотности заряда. Мы применим и метод борновского приближения, и метод Сакса (Sachs, 1962), уже использовавшиеся нами для скалярных частиц. Однако в данном случае (в отличие от предыдущего) эти методы приводят к разным результатам.

Как и в § 9.4, выпишем борновское приближение для амплитуды рассеяния во внешнем электростатическом поле  $A_0(\mathbf{x})$ :

$$\mathcal{A} = \frac{N_0}{2\pi} \left[ \frac{m}{N_0} \Gamma_0 \tilde{A}_0(\Delta) \right] = \frac{m}{2\pi} \Gamma_0(N, N') \tilde{A}_0(\Delta). \quad (15.13)$$

Вычислив явно  $\Gamma_0$  как матричный элемент между начальным и конечным двухкомпонентными (паулиевскими) спинорами, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \frac{m}{2\pi} \tilde{A}_0(\Delta) \left\{ eF_1 \left[ \frac{N_0}{m} + \frac{s}{4m(N_0 + m)} \right] + \frac{s}{2m} F_2 + \right. \\ \left. + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{N}' \left[ \frac{F_1}{2m(N_0 + m)} + \frac{F_2}{m} \right] \right\}. \quad (15.14) \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что для статического потенциала  $N_0 = N'_0$ . Нельзя, очевидно, провести аналогию между зависящей от спина компонентой и интуитивной

картиной пространственного распределения заряда. Ввиду этого мы отбрасываем такую компоненту.

Предел малых скоростей для не зависящей от спина компоненты получается при  $m \rightarrow \infty$ , что влечет за собой  $N_0 \rightarrow m$ ; поэтому остается лишь общий множитель с размерностью  $m$ . Мы видим, что в таком нерелятивистском пределе сохраняется лишь главный член  $eF_1 N_0 / m \rightarrow eF_1$ , и уравнение (15.14) в нерелятивистском пределе становится полностью аналогичным соответствующему уравнению для скалярного случая с подстановкой  $F_1 \rightleftharpoons f$ .

Можно уточнить предельное выражение, оставив члены порядка  $m^{-1}$  и  $m^{-2}$ . Тогда

$$\mathcal{A} = \frac{m}{2\pi} \tilde{A}_0(\Delta) \left\{ F_1 \left( 1 - \frac{\Delta^2}{8m^2} \right) - \Delta^2 \frac{F_2}{2m} \right\}. \quad (15.15)$$

Члены, пропорциональные  $\Delta^2$ , можно получить, воспользовавшись преобразованием Фолди — Вотхойзена для частицы со спином  $1/2$  и аномальным магнитным моментом  $F_2(0)$  и вычислив затем борновское приближение для оставшегося гамильтониана взаимодействия (Foldy, 1952). Выражение  $\Delta^2 F_1 / (8m^2)$  — это фурье-образ дарвиновского члена, а  $\Delta^2 F_2 / (2m)$  — известный член Фолди, ответственный за взаимодействие электронов с медленными нейтронами. Следует отметить, что с точки зрения преобразования Фолди — Вотхойзена члены Дарвина и Фолди равноправны (хотя их порядки по  $m$  различны). К сожалению, при этом соотношение (15.14) становится зависящим от скорости (т. е. от  $N_0$ ), если отказываться от нерелятивистского предела. В скалярном же случае только множитель  $N_0$  в главном члене  $eF_1 N_0 / m$  можно считать чисто кинематическим.

В данном случае (в противоположность скалярному) метод Сакса приводит к результатам, отличающимся от борновского приближения. Рассмотрим состояние

$$| \rangle = \int dN \psi(N) | N \rangle, \quad (15.16)$$

нормированное условием

$$\langle | \rangle = 1 = \int dN |\psi(N)|^2. \quad (15.17)$$

Для простоты спиновые индексы опущены. Нормировка (15.17) соответствует обычной нормировке в лабораторной системе,  $\langle N | N' \rangle = \delta(N - N')$ . При инвариантной нормировке, т. е. при  $\langle N' | N \rangle = \delta(N' - N) N_0 / m$ , условие (15.17) следует заменить условием  $1 = \int dN |\psi|^2 m / N_0$ .

[Сакс (Sachs, 1962) одновременно рассматривает и инвариантную нормировку плоских волн, и нормировку (15.17).] Среднее значение плотности заряда определяется соотношением

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \int dN dN' \psi^*(N') \psi(N) \langle N | s_0(x) | N' \rangle = \\ &= \int dN dN' \psi^*(N') \psi(N) \sqrt{\frac{m^2}{N_0 N'_0}} \Gamma_0(N, N') e^{i(N-N')x}. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Как и в § 9.4, мы выделяем «внутреннюю» компоненту  $\rho$  посредством предельного перехода  $|\psi(N)|^2 \rightarrow \delta(N)$  и опускаем все члены, зависящие от производных функции  $\psi$ . Обозначив

$$\mathbf{P} = \mathbf{N} + \mathbf{N}', \quad \mathbf{\Delta} = \mathbf{N} - \mathbf{N}', \quad \omega_{\pm} = \sqrt{m^2 + \left(\mathbf{P} \pm \frac{\mathbf{\Delta}}{2}\right)^2},$$

в итоге получим

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{P} d\mathbf{\Delta} \{ |\psi(\mathbf{P})|^2 \exp[i(\omega_+ - \omega_-)x_0 - i\mathbf{\Delta}\mathbf{x}] \times \\ &\times \sqrt{m^2/(\omega_+ \omega_-)} \Gamma_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{\Delta}}{2}, \mathbf{P} - \frac{\mathbf{\Delta}}{2}\right) + [\text{члены, зависящие от} \\ &\nabla\psi] \}. \end{aligned}$$

Далее в пределе при  $|\psi|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{P})$  имеем

$$\omega_+ \rightarrow \omega_- \rightarrow \sqrt{m^2 + \frac{1}{4} \mathbf{\Delta}^2}$$

и

$$\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0\left(\frac{\mathbf{\Delta}}{2}, -\frac{\mathbf{\Delta}}{2}\right) = \left(\Gamma_0\left(\frac{\mathbf{\Delta}}{2}\right)\right)_i = G_E(-\mathbf{\Delta}^2) = G_E(s).$$

Следовательно,

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{\Delta} e^{-i\mathbf{\Delta}\mathbf{x}} G_E(-\mathbf{\Delta}^2) / \sqrt{1 + \frac{\mathbf{\Delta}^2}{4m^2}}. \quad (15.19)$$

Разложив знаменатель в ряд с точностью до членов порядка  $m^{-2}$ , находим

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &\approx \int d\mathbf{\Delta} e^{-i\mathbf{\Delta}\mathbf{x}} \{ F_1 - [\mathbf{\Delta}^2/(2m)] F_2 \} [1 - \mathbf{\Delta}^2/(8m^2) + \dots] \approx \\ &\approx \int d\mathbf{\Delta} e^{-i\mathbf{\Delta}\mathbf{x}} \{ F_1 - [\mathbf{\Delta}^2/(2m)] F_2 - [\mathbf{\Delta}^2/(8m^2)] F_1 \}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Таким образом, с точностью до  $m^{-2}$  выражение (15.20) совпадает с формулой для  $2\pi \mathcal{A} / [m\tilde{A}_0(\mathbf{\Delta})]$ , полученной из

соотношения (15.15). Однако выражение (15.19) резко отличается от формулы (15.14) для не зависящей от спина компоненты. [Сакс (Sachs, 1962) пренебрегает знаменателем в выражении (15.19) и поэтому теряет дарвиновский член.]

Как уже неоднократно подчеркивалось, мы не можем приписать никакого однозначного смысла функции  $\rho(\mathbf{x})$  и вследствие этого не хотим обсуждать далее неоднозначность ее смысла.

## § 15.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В свете изложенного в гл. 10 дисперсионные представления для функций  $F_i$  можно написать в виде:

$$F_1(z) = F_1(0) + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds \operatorname{Im} F_1(s)}{s(s-z)}; \quad (15.21)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds \operatorname{Im} F_2(s)}{s-z}. \quad (15.22)$$

Для их обоснования напомним, что величину заряда  $F_1(0)$  не нужно вычислять в отличие от аномального магнитного момента  $F_2(0)$ . В соответствии с этим следует предположить, что  $F_2$  стремится к нулю на бесконечности. Функция  $F_1$  также может исчезать на бесконечности, но, согласно (15.21), она не обязана асимптотически равняться нулю. О значениях нижних пределов интегрирований мы поговорим позднее. В этом простом подходе следовало бы писать и для  $G_E$ , и для  $G_M$  представление с одним вычитанием. Естественно выражать  $F_1^{(p)}$  в единицах  $e = F_1^{(p)}(0)$ , поскольку все вклады в  $\operatorname{Im} F_1$  сами содержат множитель  $e$ . Наоборот, для  $F_2$  нет причины а priori считать  $F_2(0)$  естественной единицей измерения, т. е. думать, что отношение  $F_2(z)/F_2(0)$  имеет конкретное значение. Отсутствие естественной нормировки у функции  $F_1^{(n)}$  еще более ярко выражено. Аналогичные заключения справедливы для  $G_E$  и  $G_M$ . Например, в задаче о пространственной протяженности плотности намагниченности нет априорных причин определять среднеквадратичный радиус с помощью от-

ношения  $G'_M(0)/G_M(0)$ , а не выражать его через  $G'_M(0)$  в любых других подходящих единицах (например, магнетонах Бора).

Наконец, отметим, что в гипотетическом пределе, когда нуклоны не связаны сильными взаимодействиями, выполнялись бы, конечно, равенства  $F_1^{(p)}=1$ ,  $F_1^{(n)}=F_2^{(n)}=F_2^{(p)}=0$  и соответственно  $G_E^{(p)}=e$ ,  $G_E^{(n)}=G_M^{(n)}=0$ ,  $G_M^{(p)}=e/(2m)$ . В этом пределе все мнимые части формфакторов обращаются в нуль, а сами формфакторы постоянны.

В настоящее время доступны передачи импульса порядка  $175 \phi^{-2}$  ( $1 \phi = 1 \text{ ферми} = 10^{-13} \text{ см}$ ), или примерно до  $350 \mu_\pi^2$ . Общая картина поведения формфакторов довольно проста и вместе с тем поразительна. Из данных по рассеянию (Dunning et al., 1964) выяснилось, что

$$\frac{G_E^{(p)}(z)}{G_E^{(p)}(0)} = \frac{G_M^{(p)}(z)}{G_M^{(p)}(0)} = \frac{G_M^{(n)}(z)}{G_M^{(n)}(0)}. \quad (15.23)$$

С другой стороны, по-видимому, в пределах ошибок имеет место равенство

$$G_E^{(n)} = 0, \quad (15.24)$$

исключая, возможно, малую область вблизи  $|s|=0$ , интерпретация  $G_E^{(n)}$  в которой противоречива. Пока разумнее считать вопрос о  $G_E^{(n)}$  отдельной проблемой. Тогда эффективно остается лишь один формфактор, который мы назовем  $G$ :  $G = G_E^{(p)}(z)/G_E^{(p)}(0)$ . Он монотонно падает при увеличении передач импульса (пространственноподобных). Хорошим приближением является функция

$$G(s) = \left(1 + \frac{|s|}{18,7\phi^{-2}}\right)^{-2} (18,7\phi^{-2} \approx 37\mu_\pi^2). \quad (15.25)$$

Таким образом, средний квадратичный радиус, определяемый формулой

$$\langle r^2 \rangle = -6G'(0),$$

принимает значение

$$\langle r^2 \rangle = 0,64\phi^2 \approx 0,32\mu_\pi^{-2}. \quad (15.26)$$

Рассмотрим теперь вопрос об определении величины  $G_E^{(n)}$ . Хотя данные по рассеянию электронов свидетель-



ствуют о том, что формфактор  $G_E^{(n)}$  близок к нулю и, во всяком случае, очень мал, и хотя по определению  $G_E^{(n)}(0) = 0$ , тем не менее данные по рассеянию медленных нейтронов дают

$$-6G_E^{(n)'}(0) = \langle r^2 \rangle_E^{(n)} = 0,126\phi^2. \quad (15.27)$$

Эта величина вполне сравнима (хотя и меньше), например, с  $\langle r^2 \rangle_E^{(p)}$ . Основной нерешенный вопрос — вопрос о том, почему  $G_E^{(n)}$  так быстро меняется вблизи у порога, равен нулю на пороге и непосредственно над ним. В частности, неясно, что должно быть объектом общих теоретических рассуждений, призванных объяснить поведение  $G_E^{(n)}$  при малых передачах импульса: низший участок области, доступной в опытах по рассеянию электронов (где  $G_E^{(n)} \approx 0$ ), или истинный предел нулевой передачи, где справедлива формула (15.27). Непонятно и то обстоятельство, что численное значение (15.27) в точности совпадает с величиной производной  $F_2^{(n)}(0)/(2m)$  компоненты  $sF_2/(2m)$  формфактора  $G_E^{(n)}$ . Этот факт указывает на существенное различие между дираковским и паулиевским формфакторами как таковыми, различие, не подтверждающееся данными по рассеянию, для интерпретации которых разумнее рассуждать в терминах  $G_E$  и  $G_M$ .

Функцию (15.25) следует рассматривать лишь как чистую аппроксимацию экспериментальных точек при  $s < 0$ . Очевидно, что истинная функция  $G$  не может иметь двойного полюса и обязана иметь особенности неполюсного типа. Кроме того, функция (15.25) не удовлетворяет общему требованию  $G_E(4m^2) = G_M(4m^2)$ , выведенному в предыдущем параграфе. Ниже мы увидим, что изоскалярный и изовекторный формфакторы не могут быть в точности пропорциональными друг другу. Наконец, маловероятно, чтобы один и тот же параметр ( $\sim 18,7 \phi^{-2}$ ) в выражении (15.25) отвечал и за низкоэнергетическое поведение (характеризуемое, например, величиной  $\langle r^2 \rangle$ ), и за асимптотическое. Тем не менее весьма существенно, что при  $|s| \rightarrow \infty$  функция  $G$ , по-видимому, действительно убывает как  $|s|^{-2}$ . Это еще одна неразрешенная проблема, которой мы коснемся в дальнейшем. Особенно ярко она выражена для формфакто-

ров  $F$ . Например, асимптотические формулы для про-  
тонных формфакторов имеют вид

$$G_M = e \frac{F_1}{2m} + F_2 \sim (\nu_p + 1) \frac{e}{2m} |s^2|;$$

$$G_E = eF_1 + \frac{sF_1}{2m} \sim e/s^2,$$

откуда

$$\left(\frac{s}{2m} - 2m\right) F_2 \sim -\nu_p/s^2.$$

Таким образом, если формула (15.25) справедлива для  
области

$$|s| \geq 4m^2 \approx 91\phi^{-2}, \quad (15.28)$$

что представляется весьма достоверным в настоящее  
время, то

$$F_2 \sim \nu_p/s^3. \quad (15.29)$$

Сравнение этого соотношения с формулой (15.22) пока-  
зывает, что формфактор  $F_2$  не только обращается в нуль  
на бесконечности (как и ожидалось), но выполняются  
также и условия

$$F_2(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \operatorname{Im} F_2(s) \left\{ \frac{1}{z} + \frac{s}{z^2} + \frac{s^2}{z^3} + \frac{s^3}{z^3(z-s)} \right\} \sim \frac{1}{z^3},$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} ds \operatorname{Im} F_2(s) = 0 = \int_0^{\infty} ds \operatorname{Im} F_2(s) s. \quad (15.30)$$

Такие соотношения называются правилами сумм. Бу-  
дучи справедливыми, они несомненно должны иметь  
глубокое значение, хотя их природа пока еще совершен-  
но не ясна. Аналогичные и столь же непонятные прави-  
ла сумм, по-видимому, справедливы и для  $F_1$ .

Теоретические обоснования асимптотического пове-  
дения обычно основываются на гипотезе, что  $F_1(s) \rightarrow$   
 $\rightarrow Z_2 F_1(0)$ , которую мы обсуждали в гл. 10. Но даже в  
предположении, что  $Z_2=0$ , наблюдаемый спад, экстра-  
полированный в асимптотическую область, гораздо  
сильнее, нежели может объяснить теория.

### § 15.3. ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ

Первая, наиболее скромная и наиболее характерная цель дисперсионной теории — объяснить низкоэнергетическое поведение формфакторов. Мы уже говорили, что вряд ли одни и те же эффекты могут быть ответственны одновременно и за низкоэнергетическое, и за асимптотическое поведение. Прежде всего перечислим наиболее

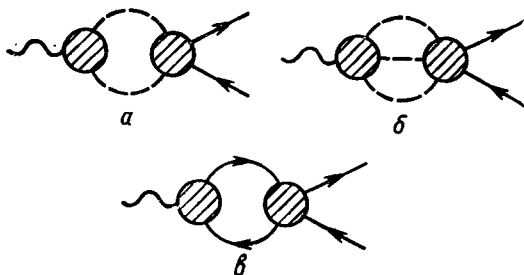


Рис. 15.1

более подходящие промежуточные состояния. При их выборе следует учесть два требования: близость порогов, соответствующих этим состояниям, к началу координат и их простоту (малость числа частиц в них). Наиболее очевидные дисперсионные диаграммы изображены на рис. 15.1; пунктирными линиями изображены  $\pi$ -мезоны, а сплошными — нуклоны и антинуклоны. Предполагается, что странными частицами можно пренебречь. Особое достоинство дисперсионного подхода заключается в том, что такие диаграммы можно рассматривать последовательно, одну за другой, поскольку требования градиентной инвариантности уже учтены (в силу тождества Уорда) самим выбором констант вычитания. (В теории же возмущений, например, диаграммы *a* и *б* всегда следует рассматривать совместно.)

Состояния  $N\bar{N}$  дают вклад и в изоскалярный, и в изовекторный формфакторы. Учитывая состояния  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$ , мы приходим к системе двух уравнений типа Омнеса, решить которую пока не удалось. Однако ожидается, что основной вклад в дальнедействующие силы дают менее массивные мезонные состояния. Мы сразу встречаем камень преткновения: вследствие  $G$ -инвари-

антности  $2\pi$ -мезонные состояния\* могут давать вклад лишь в изовекторные функции, а состояния  $3\pi$  — лишь в изоскалярные. Поэтому а priori следовало бы ожидать, что  $\langle r^2 \rangle^{(V)}$  заметно больше, нежели  $\langle r^2 \rangle^{(S)}$ , а это противоречит точным данным (Hand et al., 1963):

$$\left. \begin{aligned} -6G_E^{(S)'}(0) &= \langle r^2 \rangle_E^{(S)} = 0,14\mu_\pi^{-2}; \\ -6G_E^{(V)'}(0) &= \langle r^2 \rangle_E^{(V)} = 0,2\mu_\pi^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

(Величина  $\langle r^2 \rangle_E^{(n)}$  получена на основании данных по рассеянию медленных нейтронов.) Эти цифры следует сравнить с  $3\pi$ - и  $2\pi$ -порогами, равными  $0,11\mu_\pi^{-2}$  и  $0,25\mu_\pi^{-2}$  соответственно. К счастью, можно избежать значительных технических сложностей расчета  $3\pi$ -состояний, поскольку существуют мезонные резонансы с квантовыми числами  $J^{PG}=1^\pm$ . На первое же время мы ограничимся изовекторными формфакторами.

Для начала установим величину верхнего предела для вклада от состояний  $N\bar{N}$  в  $\langle r^2 \rangle_E$ . Мы найдем этот предел для гипотетического случая скалярных нуклонов, чтобы не затемнять основную идею усложнениями, связанными с учетом спина. Тогда вклад  $N\bar{N}$ -состояний приводит к простой функции Омнеса

$$\Omega(z) = \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds \varphi(s)}{s(s-z)} \right\},$$

которая дает

$$\Omega'(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} ds \varphi(s)/s^2.$$

Но  $N\bar{N}$ -фазы наверняка комплексны в физической области, так как всюду выше  $4m^2$  открыты аннигиляционные каналы. Поэтому функция  $\varphi$  ограничена, как показано в гл. 11,  $|\varphi| < \pi/2$ . Следовательно,

$$\Omega'(0) \leq 1/(8m^2);$$

$$\langle r^2 \rangle_{N\bar{N}} = 6\Omega'(0) \leq 3/(4m^2) \approx 0,03\phi^2 \approx 0,015\mu_\pi^{-2}. \quad (15.32)$$

\* G-инвариантность — инвариантность относительно комбинации зарядового сопряжения и поворота на  $180^\circ$  вокруг второй оси в изотопическом пространстве. — Прим. перев.

Эта величина на порядок меньше наблюдаемых значений, что позволяет пренебречь состояниями  $N\bar{N}$ , по крайней мере при рассмотрении моментов  $\langle r^2 \rangle$ .

Простое сравнение порогового значения  $(4\mu_\pi^2)^{-1} = 0,25 \mu_\pi^{-2}$  и наблюдаемой величины момента  $\langle r^2 \rangle_E^{(V)} = 0,2 \mu_\pi^{-2}$  приводит к довольно серьезной количественной проблеме, хотя и подтверждает правильность качественных выводов. Коротко говоря, следует ожидать, что спектральные функции достигают своих максимумов значительно выше порога (вследствие ограничений, налагаемых фазовым объемом). Следовательно, близость двух этих чисел объяснить трудно, если только в  $2\pi$ -мезонной системе не происходит чего-то необычного. Именно эта проблема привела Фрейзера и Фулко [см. превосходный обзор Фрейзера (Frazer, 1961)] к точному предсказанию  $2\pi$ -мезонного резонанса  $\rho$ , что явилось одним из наиболее блестящих успехов дисперсионной теории. Существование  $\rho$  и подобных ему резонансов полностью изменило теоретическую картину. Поэтому мы ограничимся качественным описанием вычислений Фрейзера и Фулко, а затем заново начнем рассмотрение, с самого начала учитывая резонансы.  $2\pi$ -вклад и в  $\text{Im}F_1^{(V)}$ , и в  $\text{Im}F_2^{(V)}$  схематически можно записать в виде

$\text{Im}F \sim (N\bar{N} \rightleftharpoons 2\pi) (2\pi \rightleftharpoons \gamma) \times$  (фазовый объем),  
 где  $(N\bar{N} \rightleftharpoons 2\pi)$  — инвариантная амплитуда  $N\bar{N}$ -аннигиляции с образованием двух  $\pi$ -мезонов (аналитически продолженная в нефизическую область ниже порога  $N\bar{N}$  к порогу  $2\pi$ ), а  $(2\pi \rightleftharpoons \gamma)$  —  $\pi$ -мезонный формфактор, функцию Омнеса для которого мы запишем в виде

$$\exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int ds \delta(s) / [s(s-z)] \right\}.$$

(Здесь  $\delta$  — фаза  $P$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния.) Функцию Омнеса можно ввести, поскольку предполагается, что предварительно *отдельно* проведено дисперсионное вычисление  $\pi$ -мезонного формфактора. Амплитуду  $(N\bar{N} \rightleftharpoons 2\pi)$  также следует вычислять отдельно, используя метод, аналогичный  $N/D$ -методу для обычных парциальных волн (парциальных волн упругого рассеяния). Скачок на левом разрезе, задаваемый в качестве начальных данных итерационной процедуры, берется из парциального разложения вклада от фейнмановского графа

на рис. 15.2. Как и в упругом случае,  $D$ -функция ниже  $N\bar{N}$ -порога идентифицируется с обратной функцией Омнеса для  $\pi\pi$ -рассеяния ( $D^{-1}=\Omega$ ). Конечно,  $N$ -функции также неявно зависят от  $D$ . Окончательно схематически можно написать

$$\text{Im}F \sim N|\Omega|^2 \times (\text{фазовый объем}).$$

Для дираковского и паулиевского формфакторов  $N$ -функции различны, но множитель  $|\Omega|^2$  для них общий. Важно отметить, что  $N$ -функции слишком медленно меняются с изменением  $z$ , и поэтому поведение функции  $\text{Im}F$  (а следовательно, и  $F$ ) не может удовлетворительно объяснить наблюдаемые значения среднеквадратичных радиусов (если  $\Omega$  не является быстро меняющейся функцией с острым пиком, а это может быть лишь при условии, что фаза  $\delta$  проходит через резонанс).

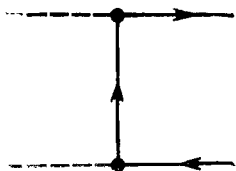


Рис. 15.2

Поскольку  $\delta$  представляет в этом вычислении входную величину, Фрейзер и Фулко подобрали ее так, чтобы подогнать ответ под экспериментальные данные, и в итоге предсказали резонанс. В то же время, вычислив  $N$ -функции, они получили довольно разумное значение для паулиевского изовекторного магнитного момента. Позднее мы вернемся к общей проблеме паулиевских моментов при наличии резонансов. Отметим, что метод Фрейзера и Фулко годится лишь для  $2\pi$ -состояний и не может служить даже основой для решения задачи, включающей  $3\pi$ -состояния.

Существование  $\rho$ -мезона (квантовые числа  $I=1$ ,  $J^{PG}=1^{+-}$ , масса  $M=750$  Мэв и полная ширина  $\Gamma=100$  Мэв) кардинально упрощает проблему низкоэнергетического поведения изовекторного формфактора. Более того, открытия изоскалярных  $3\pi$ -мезонных резонансов,  $\omega$ -мезона ( $J^{PG}=1^{--}$ ,  $M=780$  Мэв,  $\Gamma \approx 10$  Мэв) и  $\phi$ -мезона ( $J^{PG}=1^{--}$ ,  $M=1020$  Мэв,  $\Gamma \approx 3$  Мэв) позволили применить в точности тот же самый анализ при рассмотрении изоскалярных формфакторов, полностью обходя трудности, связанные с трехчастичными состояниями. Чтобы прояснить постановку вопроса, начнем с задачи с одним резонансом в каждом формфакторе, взяв для определенности  $\rho$  и  $\omega$ . Модификации, связан-

ные с наличием нескольких резонансов, будут совершенно очевидными. Детальное обсуждение проблемы нестабильных частиц в теории поля (напомним о КДД-полясах, кратко обсуждавшихся в § 12.1) можно найти в статьях Гелл-Манна и Захариасена (Gell-Mann, Zachariasen, 1961) и Фелдмана и Мэтьюса (Feldman, Matthews, 1963).

Резонанс  $\rho$  обуславливает наличие пика во вкладе  $\pi\pi$  в абсорбтивные части компоненты функции  $F_i^{(V)}$ , более или менее острого в зависимости от ширины резонанса. К опытам по рассеянию электронов имеют отношение функции  $F_i$  при отрицательных  $s$ , значительно удаленных от положения резонанса. Поэтому реальный пик функции  $\text{Im } F$  можно аппроксимировать  $\delta$ -функцией. (Напомним, что  $m_\rho^2 = 14,7 \phi^{-2}$ ). Такое приближение трактует резонанс как дискретную частицу и пренебрегает всеми нерезонансными  $\pi\pi$ -вкладами, так что диаграмму на рис. 15.1, *a* полностью заменяет рис. 15.3, где двойной линией изображен  $\rho$ -мезон. Мы увидим, к чему ведет такая замена, вспомнив стандартное выражение для  $2\pi$ -мезонного вклада в функцию  $\text{Im } F_i$ :

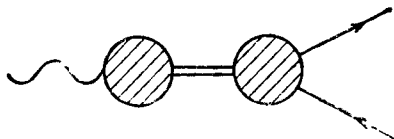


Рис. 15.3

$$\begin{aligned} & \bar{u}(N') \{ \gamma_\lambda e \text{Im } F_1 + i \sigma_{\lambda\mu} (N' - N)^\mu \text{Im } F_2 \} u(N) = \\ & = \sqrt{\omega_{N'}/m} \sum_{\pi_1 \pi_2} \langle N' | \chi | \pi_1 \pi_2 \rangle \langle \pi_1 \pi_2 | s_\lambda | 0 \rangle \times \\ & \quad \times \delta(\pi_1 + \pi_2 - \Delta) u(N), \end{aligned} \quad (15.33)$$

где  $s = \Delta^2 = (N - N')^2$ . Переход к рис. 15.3 эквивалентен замене правой части выражением

$$\sqrt{\omega_{N'}/m} \sum \langle N' | \chi | \rho \rangle \langle \rho | s_\lambda | 0 \rangle \delta(\rho - \Delta) u(N), \quad (15.34)$$

где сумма распространяется по всем импульсам и поляризациям  $\rho$ -мезона. Первый множитель, входящий в сум-

му только при  $(N' - \rho)^2 = m^2$ , выражается через две константы связи  $\rho$ -мезона с нуклоном  $f_1^V$  и  $f_2^V$ , определяемые соотношением

$$\sqrt{\frac{\omega_{N'}}{m}} \langle N' | \chi | \rho \rangle u(N) = \bar{u}(N') \{ \gamma_\lambda f_1^V + i \Delta^\mu \sigma_{\lambda\mu} f_2^V \} u(N). \quad (15.35)$$

Второй множитель в выражении (15.34) можно переписать в виде

$$\langle \rho | s_\lambda | 0 \rangle = (2\omega_\rho)^{-1/2} \epsilon_\lambda m_\rho^2 f_{\rho\gamma}, \quad (15.36)$$

где  $\epsilon_\lambda$  — вектор поляризации  $\rho$ -мезона;  $f_{\rho\gamma}$  — безразмерная константа связи, а  $m_\rho^2$  — коэффициент, согласующий размерности. В правую часть не должны входить компоненты, пропорциональные импульсу  $k_\rho$   $\rho$ -мезона, потому что закон сохранения  $\partial^\lambda s_\lambda = 0$  приводит к равенству  $\langle \rho | \partial^\lambda s_\lambda | 0 \rangle = k_\rho^\lambda \langle \rho | s_\lambda | 0 \rangle = 0$ . О константе связи  $f_{\rho\gamma}$  мы поговорим позднее. Подставив (15.35) и (15.36) в выражение (15.34) и проведя суммирование, получим:

$$\left. \begin{aligned} e \operatorname{Im} F_1^{(V)} &= \pi f_1^{(V)} f_{\rho\gamma} m_\rho^2 \delta(s - m_\rho^2); \\ \operatorname{Im} F_2^{(V)} &= \pi f_2^{(V)} f_{\rho\gamma} m_\rho^2 \delta(s - m_\rho^2). \end{aligned} \right\} \quad (15.37)$$

Подстановка этих выражений в формулы (15.21) и (15.22) приводит к приближенным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} eF_1^{(V)}(z) &= \frac{e}{2} + \frac{z}{m_\rho^2 - z} f_1^{(V)} f_{\rho\gamma} = \\ &= \left[ \frac{e}{2} - f_1^V f_{\rho\gamma} \right] + \frac{f_1^V f_{\rho\gamma} m_\rho^2}{m_\rho^2 - z}; \\ F_2^{(V)}(z) &= \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - z} f_2^V f_{\rho\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (15.38)$$

Очевидно,

$$eF_1^{(V)'}(0) = \frac{f_1^V f_{\rho\gamma}}{m_\rho^2}; \quad \frac{F_2^{(V)'}(0)}{F_2^{(V)}(0)} = \frac{1}{m_\rho^2}. \quad (15.39)$$



Аналогичные выражения получаются для изоскалярных функций; если имеется несколько резонансов, то их вклады суммируются.

Такие однополюсные приближения широко использовались для аппроксимации экспериментальных данных, особенно в ограниченных областях изменения  $s$ . Например, если из эксперимента известна величина  $m_\rho^2$ , то комбинация  $f_1^V f_{\rho\gamma}$  определяет  $F_1^{(V)}$ , и наоборот.  $F_2^{(V)}$  однозначно определяется величинами  $m_\rho^2$  и  $\mu^V$ , однако  $\mu^V$  и  $f_2^V$  сами по себе не могут быть вычислены в рамках такого приближения. Сравнение с экспериментом показывает, что однополюсное приближение годится для низких значений  $|s|$ , но получающиеся выражения слишком быстро убывают с увеличением  $|s|$ .

Сравнивая эту процедуру с процедурой Фрейзера и Фулко, мы видим, что обе они эффективно определяют  $f_1^V$  и  $f_2^V$  в терминах константы связи  $\pi$ -мезона с нуклоном через скачок парциальной волны на левом разрезе, взятой из диаграммы 15.2. Наоборот, считая  $\rho$  элементарной частицей со всеми присущими ей свойствами, в принципе нельзя вычислить  $f_i^V$  подобным путем. В таком случае эти константы следует считать равноправными с константой связи  $\pi$ -мезона с нуклоном; следовательно, их нельзя выразить через другие константы связи. Впрочем, вполне можно себе представить некую еще неизвестную процедуру, с помощью которой все константы связи вычисляются одновременно, на общих основаниях. Фрейзер и Фулко подогнали также положение резонанса, т. е.  $m_\rho^2$ , под экспериментальное поведение формфактора. Неявно они заранее фиксировали  $f_{\rho\gamma}$  посредством параметризации формфактора  $\pi$ -мезона. Чтобы понять, как это делается, напомним (см. гл. 12), что в пределе бесконечно острого резонанса при  $z = m_\rho^2$  электромагнитный формфактор  $\pi$ -мезона принимает вид

$$-J_\pi(z) = e \frac{m_\rho^2}{z - m_\rho^2}. \quad (15.40)$$

Если считать, что величина  $J_\pi$  находится из диаграммы на рис. 15.4, то необходимо сделать отождествление:

$$f_{\rho\pi} m_\rho^2 \frac{1}{m_\rho^2 - z} f_{\rho\pi\pi} = J_\pi(z) = \frac{em_\rho^2}{m_\rho^2 - z}; \quad (15.41)$$

$$f_{\rho\pi} f_{\rho\pi\pi} = e. \quad (15.42)$$

Безразмерная константа связи  $f_{\rho\pi\pi}$  определяется соотношением, аналогичным (15.35):

$$\sqrt{4\omega_\pi\omega_\rho} \langle \pi_1^+ | \eta_{\pi^0} | \rho \rangle \Big|_{(\rho - \pi_1^+)^2 = \mu_\pi^2} = \epsilon_\lambda(\rho) (\pi_1 - \pi_2)^\lambda f_{\rho\pi\pi}. \quad (15.43)$$

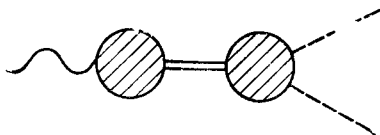


Рис. 15.4

[Из схемы свертывания следует, что в правой части должен присутствовать множитель  $\epsilon_\lambda$ ; его нельзя заменить на  $(\pi_1 + \pi_2)^\lambda = \rho^\lambda$ , поскольку вектор поляризации  $\epsilon_\lambda$  подчиняется условию Лоренца  $\rho^\lambda \epsilon_\lambda(\rho) = 0$ , служащему для исключения компоненты векторного поля с нулевым спином.] Итак, соотношение (15.42) выражает  $f_{\rho\pi}$  через  $f_{\rho\pi\pi}$ ; последняя же величина определяется наблюдаемой шириной распада  $\rho$  на два  $\pi$ -мезона:

$$\Gamma(\rho \rightarrow 2\pi) \approx 100 \text{ Мэв} = \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \cdot \frac{(m_\rho^2 - 4\mu_\pi^2)^{3/2}}{12m_\rho^2}; \quad f_{\rho\pi\pi} \approx 5. \quad (15.44)$$

Свяжем теперь величину  $f_{\rho\pi\pi}$ , а следовательно, и  $f_{\rho\pi}$  с  $f_1^V$ . Однако прежде всего отметим, что резонансная параметризация  $J_\pi$  влечет за собой (с принятой нами точки зрения совершенно случайно) тот факт, что  $J_\pi$  убывает как  $z^{-1}$  при больших  $z$ .

В однополюсной параметризации остаются свободными лишь две константы связи  $\rho$ -мезона с нуклоном:  $f_1^V$  и  $f_2^V$ . Знание величины  $f_1^V$  позволило бы предсказать (а не подогнать) момент  $\langle r^2 \rangle_1^V$ , а величина  $f_2^V$  определила бы  $\mu^V$ . Для нахождения константы  $f_1^V$  примем пло-

дотворную и весьма разумную гипотезу Сакураи (Sakurai, 1963), согласно которой  $\rho$ -мезон связан с сохраняющимся изовекторным током точно так же, как фотон с электромагнитным током. Поскольку  $\pi$ -мезоны обладают изотопическим спином 1, а нуклоны — изотопическим спином 1/2, гипотеза Сакураи дает

$$f_1^V = \frac{1}{2} f_{\rho\pi\pi}. \quad (15.45)$$

Совместно с соотношением (15.42) это равенство дает

$$f_1^V f_{\rho V} = \frac{e}{2}. \quad (15.46)$$

Полученное равенство приводит к глубокому следствию: если верить в однополюсную формулу (15.38), то  $F_1^{(V)}(\infty) = 0$ . Таким образом, динамический факт существования  $\rho$ -мезона обуславливает более быстрое убывание функции  $F_1$  на бесконечности, нежели можно было бы ожидать с любых теоретических позиций. Ввиду наблюдаемого и еще не объясненного быстрого спада, это обстоятельство может послужить важным ключом к построению удовлетворительной теории. В действительности же однополюсное приближение может оказаться неудовлетворительным в асимптотической области [свидетельством этому служит соотношение (15.25)].

Аналогично можно построить полюсное приближение для изоскалярных формфакторов на основе гипотезы Сакураи о том, что два изоскалярных резонанса  $\phi$  и  $\omega$  «универсально» связаны с током гиперзаряда и барионным током. Практические расчеты осложнены смешиванием между этими двумя мезонами, так что однополюсная параметризация вызывает недоверие даже при малых  $|s|$ . (См., например, Barton и Smith, 1965). Разумеется, однополюсная параметризация никогда не может быть согласована с правилами сумм типа (15.30). Уже первое из них потребовало бы по крайней мере наличия двух полюсов, сумма вычетов в которых равна нулю.

Хотя концепция векторных мезонов совместно с гипотезой Сакураи кардинально упрощают наши представления о формфакторах, они, к сожалению, не дают никакой информации о паулиевских моментах (например,  $of_2^V$ ), неблагоприятно отличаясь в этом отношении

от альтернативного подхода Фрейзера и Фулко. Тем не менее, считая  $f_{\text{р-т}}$  и  $f_1^V$  фундаментальными константами, мы должны вычислить  $f_2^V$  через  $f_1^V$  и другие фундаментальные константы. Например, можно надеяться, что  $f_2^V$  и  $\mu^V$  удастся найти из решения интегральных уравнений типа Омнеса для  $F_1$  и  $F_2$ , если исходить из вклада  $N\bar{N}$  в дисперсионный интеграл. Однако ничего не известно об удачных попытках в этом направлении.

До сих пор в этом параграфе мы рассматривали существенно низкоэнергетические приближения, которые можно считать разумными, грубо говоря, до  $|s| \approx m_p^2 \approx \approx 29\mu_\pi^2 = 14,7\phi^{-2}$ . При больших  $|s|$ , в частности при  $|s| \geq 4m^2 = 91\phi^{-2}$ , несомненно следует учесть вклады  $N\bar{N}$ , которые мы будем называть поправками на рассеяние в конечном состоянии. Серьезный теоретический учет этих поправок еще не проведен. Пренебрегая осложнениями, связанными со спином, и обратившись к выражению (11.34), можно грубо представить себе, как могли бы выглядеть окончательные выражения. Выражение в скобках в этом соотношении весьма сходно с обсуждавшимися выше простыми однополюсными приближениями, в то время как множитель Омнеса  $\Omega$  соответствует поправкам на рассеяние. Если при этом учесть конечность ширины резонансов, выражение в скобках окажется значительно сложнее. Но качественно можно мыслить, что поправки на рассеяние, по-видимому, выразятся множителем, нормированным на единицу при  $z = 0$ ; поэтому любое сверхбыстрое убывание в асимптотической области, обязанное полюсным членам, вероятно, сохранится в модифицированной теории. Здесь следует отметить устойчивость полюсных приближений в отношении асимптотического поведения: например, при подгонке с помощью полюсов никак нельзя получить логарифмического или логарифмически степенного убывания. Предположим, например, что поправки на рассеяния на бесконечности подчиняются закону  $1/\ln s$ , но выражение в скобках в соотношении (11.34) почти точно удовлетворяют равенству  $\left\{ J(0) - \frac{\beta\gamma}{m^2\Omega(m^2)} \right\} = 0$ . Тогда в любой конечной области  $J$  ведет себя как  $1/z$ , и лишь при очень больших  $|z|$  отношение  $J/\Omega$  становится постоянным, т. е. за дальнейшее асимптотическое поведение будет ответственна функция  $\Omega$ . С другой стороны, если

$\Omega$  стремится к конечной константе, функция  $J$  может стремиться к весьма малой константе, хотя  $\Omega$  и будет явно отлична от нуля.

В заключение перечислим вопросы, оставшиеся открытыми:

1. Почему формфакторы столь быстро убывают при больших  $|s|$ ?

2. Почему  $G_E^{(p)}$ ,  $G_M^{(p)}/G_M^{(p)}(0)$  и  $G_M^{(n)}/G_M^{(n)}(0)$  идентичны друг другу?

3. Как можно подойти к вычислению аномальных моментов, даже в принципе, т. е. какая начальная информация при этом нужна?

4. В чем причина необычного поведения функции  $G_E^{(n)}$  вблизи начала координат? Связана ли эта аномалия просто с очень резким спадом около нуля или производная не так уж велика, но при увеличении  $|s|$  кривая вновь опускается почти до нуля?

5. Почему изоскалярный паулиевский момент так мал, в то время как величина  $\langle r^2 \rangle_2^S$  вполне нормальна?

Мы имеем право заявить, что единственные разумно описываемые нами характеристики — это среднеквадратичные радиусы, вычисленные по резонансам.

## Глава 16

### АКСИАЛЬНЫЙ ТОК И ФОРМУЛА ГОЛЬДБЕРГЕРА — ТРЕЙМАНА

Понятие об аксиальном токе, не меняющем странность в слабых взаимодействиях, уже было введено в гл. 10. Общие вопросы слабых взаимодействий изложены в работах Домби (Dombey, 1965) и Тейлора (Taylor, 1964). Как и при обсуждении электромагнитных формфакторов, наша цель состоит в том, чтобы проиллюстрировать дисперсионные методы, не вдаваясь в детали физики слабых взаимодействий. Кроме того, мы не будем касаться проблемы перенормировки аксиального тока (т. е. вопроса о справедливости отношения  $G_A/G=1,25$ , о чем в гл. 10 были сделаны некоторые замечания).

В § 16.1 мы формулируем две взаимосвязанные проблемы относительно нуклонных формфакторов и распада заряженного  $\pi$ -мезона, обсудим некоторые особенности несохраняющегося тока и опишем способ вычисления нуклонных формфакторов с использованием экспериментального значения постоянной распада пиона. В § 14.2 мы обсудим собственно распад заряженного  $\pi$ -мезона, используя и сравнивая как оригинальный метод Гольдбергера и Треймана (Goldberger, Treiman, 1958), так и метод Намбу (Nambu, 1960), который ныне развит в обширную теорию «частично сохраняющихся» токов.

В пределах этой главы будем предполагать, что оператор  $A_\lambda$  обладает в точности теми же трансформационными свойствами, как и оператор  $i\psi\gamma_5\gamma_\lambda\tau^+\psi$ , т. е. он является изовектором и имеет  $G$ -четность\* — 1. Это утверждение определенно может служить хорошим приближением, если только не является точным вообще (см. Blin — Stoyle, Rosina, 1964).

## § 16.1 ПОСТАНОВКА ВОПРОСА И НУКЛОННЫЕ ФОРМФАКТОРЫ

Рассматривая лептоны так, как это делалось в § 10.1, мы видим, что такие процессы, как нуклонный  $\beta$ -распад,  $\mu$ -захват и отчасти рассеяние нейтрино высоких энергий на нуклонах, определяются матричным элементом

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\lambda &= [\omega_p\omega_n/M^2]^{1/2} \langle p | GA_\lambda | n \rangle = \\ &= \bar{u}(p) \{ -i\gamma_\lambda\gamma_5 a(s) + i\gamma_5(n-p)_\lambda b(s) \} u(n), \quad (16.1) \end{aligned}$$

где  $s = (p-n)^2$ , а  $a(0) = G_A$  есть наблюдаемая константа связи Гамова — Теллера. На практике обычно имеют дело со скалярным произведением величины  $\mathfrak{M}_\lambda$  и лептонного множителя  $\bar{u}(l)\gamma_\lambda(1-i\gamma_5)u(\nu)$ , где в силу закона сохранения четыре-импульса  $(n-p)_\lambda = (l+\nu)_\lambda$ . Поэтому множитель  $(n-p)_\lambda$  перед функцией  $b(s)$  в выра-

\*  $G$ -четность (или изотопическая четность) — собственные значения оператора  $G$ , представляющего собой произведение оператора зарядового сопряжения  $C$  на оператор поворота на  $180^\circ$  вокруг второй оси в изотопическом пространстве. — Прим. перев.

жении (16.1) можно объединить с лептонным множителем:

$$\bar{u}(l) \gamma_\lambda (1 - i\gamma_5) (l + \nu)^\lambda u(\nu) = m_l \bar{u}(l) u(\nu).$$

Мы воспользовались уравнением Дирака для свободных лептонов. Иначе говоря, при  $\beta$ -распаде, когда  $m_l = m_e$ , введенный выше псевдоскалярный член с количественной точки зрения несуществен, кроме некоторых особо подобранных запрещенных переходов ( $0^- \rightarrow 0^+$ ), даже если сама функция  $b(s)$  численно достаточно велика. Однако член, включающий функцию  $b(s)$ , весьма важно учитывать при рассмотрении  $\mu$ -захвата, когда  $m_l = m_\mu$ .

Очевидно также, что распад

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu \quad (16.2)$$

характеризуется матричным элементом

$$(2\omega_\pi)^{1/2} \langle 0 | A_\lambda | \pi \rangle \equiv \pi_\lambda F, \quad (16.3)$$

где  $\pi_\lambda$  — четыре-импульс  $\pi$ -мезона. Матричный элемент  $\langle 0 | V_\lambda | \pi \rangle$  обращается в нуль в силу требования  $G$ -инвариантности, так как для оператора  $V_\lambda$   $G = +1$ , а  $\pi$ -мезону соответствует  $G = -1$ .

Поскольку векторный ток  $V_\lambda$  сохраняется, на первый взгляд кажется заманчивым проверить гипотезу, не сохраняется ли также и ток  $A_\lambda$ , т. е. проверить, выполняется ли условие

$$\partial^\lambda A_\lambda = 0 \text{ [неверно]}. \quad (16.4)$$

В гл. 10 показано, что такое предположение не влечет равенства  $G_A/G = 1$ . Более того, предположение (16.4) абсурдно в любом случае. Если бы оно было верно, то из соотношения (16.3) следовало бы, что

$$(2\omega_\pi)^{1/2} \langle 0 | \partial^\lambda A_\lambda | \pi \rangle = 0 = \mu_\pi^2 F \text{ [неверно]}.$$

Это означало бы, что  $F = 0$ , т. е. что распад (16.2) не может осуществляться. Аналогичное использование гипотезы (16.4) в применении к выражению (16.1) приводит к соотношению

$$(p - n)^\lambda \mathfrak{M}_\lambda = \bar{u}_i(p) \{-2ma(s) + sb(s)\} \gamma_5 u(n) = 0. \quad (16.5)$$

В пределе  $s = (m_p - m_n)^2$  (например, при распаде нейтрона) условие (16.5) означало бы, что

$$b(m_p^2) = -2ma(m_p^2)/(m_p - m_n)^2 \approx -2mG_A/\delta m^2,$$

т. е. функция  $b$  по порядку величины была бы слишком большой.

Следуя рассуждениям гл. 10, выпишем спектральные представления:

$$a(z) = G_A + \frac{z}{\pi} \int_{(\ )}^{\infty} ds \frac{\text{Im } a(s)}{s(s-z)}; \quad (16.6)$$

$$b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{(\ )}^{\infty} ds \frac{\text{Im } b(s)}{s-z}. \quad (16.7)$$

В написанных выражениях можно вычислить все величины, кроме константы  $G_A$ . Абсорбтивные компоненты формфакторов имеют вид [см. (10.28)]

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p) \{ -i\gamma_\lambda \gamma_5 \text{Im } a(s) + i\gamma_5 (n-p)_\lambda \text{Im } b(s) \} u(n) = \\ & = (\omega_p/M)^{1/2} \int dx e^{-inx} \langle p | [GA_\lambda(0), \bar{\chi}(x)] | 0 \rangle u(n) (2\pi)^{-1} = \\ & = -(\omega_p/M)^{1/2} \sum_j (2\pi)^3 \delta(p-n-j) \langle p | \bar{\chi} | j \rangle \langle j | GA_\lambda | 0 \rangle u(n). \end{aligned}$$

Очевидно, существенными промежуточными состояниями являются состояния с нечетным числом  $\pi$ -мезонов и  $N\bar{N}$ -состояния. Одночастичные  $\pi$ -мезонные состояния дают вклад только в  $\text{Im } b$ , поскольку они приводят к абсорбтивной части:

$$\begin{aligned} & (\omega_p/M)^{1/2} \sum_\pi (2\pi)^3 \delta(p-n-\pi) \langle p | \bar{\chi} | \pi \rangle \langle \pi | GA_\lambda | 0 \rangle u(n) = \\ & = \sqrt{2g} \bar{u}(p) \gamma_5 u(n) (n-p)_\lambda F\delta(s-\mu_\pi^2). \end{aligned}$$

Именно такое выражение и должно было получиться при использовании графа на рис. 16.1, где заштрихованный блок справа символизирует множитель, пропорциональный  $\langle \pi | GA_\lambda | 0 \rangle$ . Множитель  $\sqrt{2g}$  — это просто константа связи протонов и нейтронов с заряженными  $\pi$ -мезонами.

Трехчастичные  $\pi$ -мезонные состояния для рассмотрения оказываются слишком сложными. Насколько сейчас известно, никаких мезонных резонансов с квантовыми



числами  $J^{PG} = 1^-$  не существует, так что в этом случае не наблюдается никаких усиливающих эффектов, как для изоскалярного ( $1^-$ ) формфактора. Поэтому мы игнорируем многочастичные  $\pi$ -мезонные состояния и переходим к рассмотрению  $N\bar{N}$ -состояний. Подробное изложение можно найти в оригинальных работах Гольдбергера и Треймана (Goldberger, Treiman, 1958).

Поскольку псевдоскалярная проекция  $\partial^\lambda A_\lambda$  оператора  $A_\lambda$  в нуль не обращается, то в  $\text{Im } b$  дают вклад состояния с  $J=0$  и  $J=1$ . Они отвечают парциальным волнам

с  $J^{PG} = 0^{--}$  и  $1^{+-}$ , т. е.  ${}^3P_0$ - и  ${}^3P_1$ -волнам (с  $T=1$ ). Естественно, что в  $\text{Im } a$  дает вклад только волна  ${}^3P_1$ . Поскольку состояния с различными значениями  $J$ , конечно, не взаимосвязаны, то возникают уравнения Омнеса, которые обычно разрешимы. Пусть  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  — фазовые углы парциальных  ${}^3P_0$ - и  ${}^3P_1$ -волн, связанные с фазами формулой (11.12). Тогда

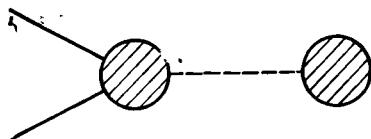


Рис. 16.1

$$a(z) = G_A \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds \frac{\varphi_1(s)}{s(s-z)} \right\}; \quad (16.8)$$

$$b(z) = \frac{-\sqrt{2}gF}{\mu_\pi^2 - z} \exp \left\{ \frac{z - \mu_\pi^2}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds \frac{\varphi_0(s)}{(s - \mu_\pi^2)(s - z)} \right\} -$$

$$- \frac{2MG_A}{z} \left[ \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds \frac{\varphi_1(s)}{s(s-z)} \right\} - \right.$$

$$\left. - \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds \frac{\varphi_0(s)}{s(s-z)} \right\} \right]. \quad (16.9)$$

При любом разумном выборе оценки  $N\bar{N}$ -фаз углы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  будут достаточно малы, так что все экспоненты можно положить равными единице, если  $|z|$  порядка  $\mu_\pi^2$  или меньше. Именно такая ситуация имеет место при  $\beta$ -распаде и  $\mu$ -захвате. Следовательно, в подобных случаях можно уверенно принять

$$a(s) \approx G_A; \quad b_1(s) \approx \sqrt{2}gF/(\mu_\pi^2 - s). \quad (16.10)$$

Используя значение  $|F|$ , полученное в экспериментах по  $\pi$ -распаду, Гольдбергер и Трейман для псевдоскалярного вклада в  $\mu$ -захват нашли

$$|g_p| \equiv m_\mu |b(m_\mu^2)| \approx |8G_A|. \quad (16.11)$$

Эта оценка, а также то, что при низких энергиях функция  $a(s)$  почти постоянна, довольно хорошо подтверждается на опыте. Однако необходимо тщательно проанализировать, какие в действительности результаты обязаны своим происхождением дисперсионной теории как таковой. Очевидно, что при *любом* теоретическом подходе к вычислению функций  $a$  и  $b$  не следует забывать о возможности использования графа на рис. 16.1 и пренебрегать возможностью использования экспериментального значения  $|F|$ . Результаты же (16.10) кажутся воплощающими лишь эти факты и теорию возмущений. Довольно характерно, что дисперсионная теория определяет главным образом границы, в пределах которых можно рационально обсуждать эти очевидные приближения; в данном частном случае, например, их удастся грубо обосновать с помощью представлений (16.8) и (16.9).

## § 16. 2. РАСПАД ЗАРЯЖЕННОГО $\pi$ -МЕЗОНА И «ЧАСТИЧНО СОХРАНЯЮЩИЙСЯ» ТОК

При вычислении нуклонных формфакторов  $a$  и  $b$  значение амплитуды  $F$  для распада заряженного  $\pi$ -мезона разумно взять из опыта. Однако амплитуда  $F$ , очевидно, должна быть вычисляемой нефундаментальной константой, и наша задача — найти способ ее расчета. Известны два различных метода; мы отложим на некоторое время обсуждение оригинального метода Гольдбергера и Треймана (Goldberger, Treiman, 1958 a, b) и начнем с изложения другой идеи, принадлежащей Намбу (Nambu, 1960), которая была развита Гелл-Манном и Леви (Gell-Mann, Levy, 1960) и Бернштейном с соавторами (Bernstein, 1960 a, b). При обсуждении и сравнении этих методов мы будем учитывать лишь одночастичные  $\pi$ -мезонные и  $N\bar{N}$ -вклады в абсорбтивные части соответствующих дисперсионных представлений. Это приближение можно рассматривать как определение осуществимой модели, и нет никаких оснований утверждать, что она совсем бессмысленна с качественной

точки зрения. Заранее подчеркнем, что оба обсуждаемых метода существенно основываются на предположениях о поведении различных рассматриваемых функций при высоких энергиях. Это утверждение явно используется в методе Гольдбергера—Треймана и неявно (а иногда неосознанию) в другом методе.

Удобно определить псевдоскалярную плотность  $\Pi$  формулой

$$\Pi = G\partial^\lambda A_\lambda \quad (16.12)$$

и начать рассмотрение с ее матричного элемента между однонуклонными состояниями, который, согласно (16.1), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} [\omega_p \omega_n / m^2]^{1/2} \langle p | \Pi | n \rangle &= \bar{u}(p) \gamma_5 u(n) f(s); \\ f(s) &= 2ma(s) + sb(s), \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

откуда

$$f(0) = 2mG_A. \quad (16.14)$$

Когда учитываются только  $N\bar{N}$ -состояния, функцию  $f(s)$  можно получить либо из соотношений (16.8) и (16.9), либо непосредственно из уравнения Омнеса, к которому приводится соотношение (16.13) (см. § 11.3). Из последнего метода с очевидностью следует, что вклад должны давать только псевдоскалярные состояния, т. е. только парциальная волна  ${}^1S_0$ . Пренебрегая в экспоненте Омнеса величиной  $\mu^2$  по сравнению с  $m^2$  (чисто численное и хорошо оправданное приближение), получаем:

$$\left. \begin{aligned} f(s) &= \left[ 2mG_A + V\sqrt{2}gF \frac{s}{s - \mu^2} \right] K(s); \\ K(s) &= \exp \left[ \frac{s}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s' - s)} \Phi_0(s') \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

С учетом принятого приближения для экспонент функция  $V\sqrt{2}gK(s)$  может служить формфактором системы заряженный  $\pi$ -мезон—нуклон (т. е. матричным элементом между однонуклонными состояниями оператора источника  $\pi$ -мезонов). Для дальнейшего этот факт имеет решающее значение. Следует, в частности, вспомнить, каким образом асимптотическое поведение функ-

ции  $K(s)$  зависело от асимптотического поведения  $\varphi_0(s)$  (см. гл. 11). Существуют две важные альтернативы: либо  $K(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к нулю, либо  $K(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к конечной постоянной. Первая альтернатива имеет место, если фаза  $\delta_0$  состояния  $^1S_0$  на бесконечности имеет конечную вещественную часть. Вторая возможность осуществляется, если  $\text{Re} \delta_0$  стремится к нулю достаточно быстро, так что  $\int_{\infty} ds \text{Re} \delta_0/s$  существует (например, в случае параметризации  $\delta_0$  с помощью простого полюса Редже).

Гипотеза Намбу (1960) состоит в том, что оператор  $A_\lambda$  сохраняется в предельном случае, когда передача импульса намного превышает соответствующие массы покоя. Иными словами, хотя оператор  $\partial^\lambda A_\lambda = \Pi$  не есть тождественный нуль, предполагается, что его матричные элементы между состояниями с произвольно возрастающей разностью импульсов стремятся к нулю. Токи, дивергенции которых удовлетворяют такой гипотезе, называют «частично сохраняющимися». Конечно, быстрота убывания различных матричных элементов в окончательной теории должна быть также конкретизирована. Фактически один из последующих изысканных постулатов состоит в том, что асимптотическое поведение матричных элементов  $\Pi$  совпадает с поведением соответствующих матричных элементов  $\pi$ -мезонного поля  $\varphi_\pi$ . Мы обсудим этот постулат несколько позднее.

Согласно гипотезе Намбу, на бесконечности функция  $f(s)$  должна обращаться в нуль. Если функция  $K(s)$  обращается в нуль, то эта гипотеза будет верна при любом значении  $F$ . Однако если  $K(s)$  стремится к конечной постоянной при  $s \rightarrow \infty$ , то гипотеза приводит к следующим соотношениям:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ 2mG_A + \sqrt{2}gF \frac{s}{s - \mu^2} \right\} = 0; \quad (16.16)$$

$$F = - \frac{\sqrt{2}mG_A}{g}. \quad (16.17)$$

Формула (16.17) — это известная формула Гольдбергера — Треймана, которая согласуется с экспериментальными данными с точностью около 20%; в рамках различных приближений, использованных при выводе формулы, такое согласие представляется превосходным.

Наиболее примечательно то, что константа связи  $g$  сильного  $\pi$ -мезон-нуклонного взаимодействия входит в знаменатель; такой результат никогда не мог бы быть получен в рамках теории возмущений.

Если, как указывалось выше, дополнить гипотезу Намбу предположением о том, что асимптотически  $\Pi \approx \varphi_\pi$ , то функция  $f(s)$  должна убывать как  $\frac{1}{s} K(s)$ ,

поскольку  $K(s)$  — это матричный элемент не оператора  $\varphi_\pi$ , а оператора  $\eta_\pi = (\square^2 + \mu^2)\varphi_\pi = (-s + \mu^2)\varphi_\pi$ . В этом случае уничтожение двух членов в формуле (16.16) должно иметь место независимо от асимптотического поведения функции  $K(s)$ .

Другой вариант той же гипотезы принадлежит Гелл-Манну, Бернштейну и др. Постулируя обращение функции  $f(s)$  в нуль на бесконечности, они используют это предположение, чтобы написать для  $f(s)$  дисперсионное представление без вычитаний:

$$f(s) = \frac{\sqrt{2g\mu^2 F}}{\mu^2 - s} + \frac{1}{\pi} \int_{(\ )}^{\infty} \frac{ds' \operatorname{Im} f(s')}{s' - s}. \quad (16.18)$$

Нижний предел интеграла равен  $9\mu^2$ , но можно надеяться, что существенные вклады в функцию  $\operatorname{Im} f$  фактически будут начинаться с состояний  $N\bar{N}$ , порог появления которых лежит гораздо выше. В этом случае при малых  $s$  можно пренебречь интегралом по сравнению с полюсным членом. В частности, при  $s=0$  с учетом равенства  $f(0) = 2mG_A$  [см. (16.14)] вновь получаем формулу Гольдбергера — Треймана (16.17).

Эта последняя версия предпочтительна только тогда, когда функция  $K \rightarrow 0$ . В противном случае из (16.15) следует, что основное предположение гипотезы, согласно которому  $f(s) \rightarrow 0$ , справедливо только в случае справедливости условия (16.16). Однако условие (16.16) приводит к нужному ответу и непосредственно без предположения о том, что  $s=0$  и что в соотношении (16.18) можно пренебречь интегралом. Но если формфактор  $K$  действительно стремится к нулю на бесконечности, то этим интегралом почти наверняка можно пренебречь, т. е. аргументация Гелл-Манна будет в силе без дополнительного постулата о том, что функция  $f$  убывает быстрее функции  $K$ .

Итак, если формфактор  $K$  на бесконечности обращается в нуль, то второй метод справедлив без дополнительных предположений, тогда как метод Намбу применим только при дополнительном условии, что функция  $f$  убывает *быстрее* функции  $K$ . Если же формфактор  $K$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к конечной постоянной, то в обоих методах правильный ответ будет получен только в предположении, что функция  $f$  асимптотически равна нулю: дополнительное предположение непосредственно приводит к требуемому ответу. Тем самым, если формфактор  $K$  на бесконечности стремится к конечной постоянной, какое-либо дополнительное предположение неизбежно.

Обратимся теперь к методу, первоначально использованному Гольдбергером и Трейманом (Goldberger, Treiman, 1958). Начнем с рассмотрения матричного элемента (16.3): свернем оператор  $\pi$ -мезона и используем результирующее выражение для определения функции  $F(s)$ , положив  $s = k^2$  и  $F = F(\mu^2)$ :

$$ik_{\lambda} F(s) = -i \int dx e^{-ikx} (\square^2 + \mu^2) \langle 0 | T \{ A_{\lambda}(0) \varphi_{\pi}(x) | 0 \rangle. \quad (16.19)$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на  $k^{\lambda}$ . Введение такого множителя справа эквивалентно действию оператора  $i\partial_{\lambda}$  на экспоненту и, следовательно, действию оператора  $(-i\partial_{\lambda})$  на матричный элемент. Такая процедура может привести к одновременному коммутатору операторов  $A_0$  и  $\varphi_{\pi}$ . Мы назовем его вырожденным членом  $C$ . Член  $C$  обращается в нуль, если в оператор  $A_{\lambda}$  не входит оператор  $\pi$ -мезонного поля. Таким образом, получаем

$$sF(s) = i \int dx e^{-ikx} (\square^2 + \mu^2) \{ \langle 0 | T \{ \Pi(0) \varphi_{\pi}(x) | 0 \rangle \}'_j + C.$$

Конечно, если оператор Клейна — Гордона ввести внутрь матричного элемента, то может, разумеется, появиться еще одна вырожденная компонента, т. е. вещественный полином  $P(s)$ . Тогда окончательно

$$sF(s) = i \int dx e^{-ikx} \langle 0 | T \{ \Pi(0) \eta_{\pi}(x) | 0 \rangle + P(s) + C. \quad (16.20)$$

В качестве упражнения рекомендуем читателям показать, что операции дифференцирования операторов  $A_{\lambda}$  и  $\varphi_{\pi}$  в рассматриваемом матричном элементе эквивалентны. Полезно также доказать, что, несмотря на мно-

житель  $s$  слева, функция  $F(s)$  в начале координат не имеет кинематического полюса.

Формула (16.20) показывает, что функция  $F(s)$  удовлетворяет дисперсионному представлению Лемана. Обсудим вопрос о числе вычитаний. Если в спектральную функцию включать вклад только  $N\bar{N}$ -состояний, то

$$\pi \operatorname{Im} F(s) = (2\pi)^3 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{N\bar{N}, in} + \sum_{N\bar{N}, out} \right\} \delta(N + \bar{N} - k) \times \\ \times \langle 0 | \Pi | N\bar{N} \rangle \langle \eta_{\pi} | 0 \rangle.$$

С учетом перекрестной симметрии первый матричный элемент определяется формулами (16.13) и (16.14), тогда как второй матричный элемент это  $\pi$ -мезон-нуклонный формфактор  $K$ . Чтобы обеспечить должные свойства вещественности, сумма по промежуточным состояниям записана в виде  $\frac{1}{2} \left( \sum_{in} + \sum_{out} \right)$ . Осуществляя суммирование (см. § 8.4), получаем

$$\pi \operatorname{Im} F(s) = -\theta(s - 4m^2) \frac{\sqrt{2}g}{8\pi} \left[ \frac{s - 4m^2}{s} \right]^{1/2} |K(s)|^2 \times \\ \times \left\{ 2mG_A + \sqrt{2}gF(\mu^2) \frac{s}{s - \mu^2} \right\}. \quad (16.21)$$

Действуя осторожно, запишем представление Лемана для функции  $F$  в форме

$$F(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \operatorname{Im} F(s') + F(\infty). \quad (16.22)$$

Особенности дальнейших вычислений связаны с тем, что искомая величина  $F(\mu^2)$  входит в  $\operatorname{Im} F$ . При этом существенную роль играет по-прежнему асимптотическое поведение формфактора  $K$ . Гольдбергер и Трейман предположили, что он убывает достаточно быстро, так что интеграл в представлении (16.22) сходится. Они также предположили, что  $F(\infty) = 0$  (сравни с гл. 10). Положив  $s = \mu^2$ , в данном случае получим

$$\{1 + g^2 \mathcal{Y}\} F = -\sqrt{2}mgG_A \mathcal{Y}, \quad (16.23)$$

где

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \left[ \frac{s-4m^2}{s} \right]^{1/2} |K(s)|^2. \quad (16.24)$$

Гольдбергер и Трейман произвели различные оценки  $\Phi_0$  путем параметризации фазы  $\delta_0$  с помощью комплексной длины рассеяния. Они получили, что в довольно широком диапазоне значений параметров величина  $g^2 \mathcal{Y}$  намного больше единицы, и поэтому из формулы (16.23) следует

$$F = -\frac{\sqrt{2} m G_A g \mathcal{Y}}{1 + g^2 \mathcal{Y}} \approx -\sqrt{2} m G_A / g.$$

Такой подход следует сравнить со вторым методом, описанным выше, при  $K \rightarrow 0$ .

Назовем компоненту, пропорциональную самой  $F(\mu^2)$ , в правой части представления (16.22) «затухающей компонентой». В работе Ида (Ida, 1963) было показано в самом общем случае, что интеграл в затухающей компоненте расходится, если константа перенормировки волновой функции  $\pi$ -мезона равна нулю, т. е. если величина  $Z_\pi^{-1}$  бесконечна. Такая ситуация имеет место только при  $K(s) \rightarrow \text{const}$  (см. § 8.4). Поскольку эта возможность небезынтересна и поскольку в любом случае ее надо иметь в виду, возникает вопрос, каким образом можно модифицировать метод Гольдбергера — Треймана в применении к представлению с расходящейся затухающей компонентой.

Как и в других методах, обсуждаемых в этой главе, случай  $K \rightarrow \text{const}$  нуждается в дополнительном предположении, что функция  $F(s)$  на бесконечности должна вести себя не хуже константы [см. также формулу (16.22)]. Но интеграл в формуле (16.22) будет расходящимся, если подынтегральное выражение не удовлетворяет условию (16.16) (см. Barrett, Bartop, 1963). При выполнении же этого условия сходимости нет необходимости оценивать интеграл, ибо оно само непосредственно приводит к ответу для  $F(\mu^2)$ . Оказывается также, что константа  $F(\infty)$  не может равняться нулю. Чтобы убедиться в этом, введем  $m G_A = -g F(\mu^2) / \sqrt{2}$  в соотношение (16.21); затем подста-



вим полученное выражение в представлении (16.22) и, положив  $s = \mu^2$ , разделим обе части на  $F(\mu^2)$ . Тогда получим

$$1 = -\frac{g^2 \mu^2}{4\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{(s - \mu^2)^2} |K(s)|^2 \left[ \frac{s - 4m^2}{s} \right]^{1/2} + \frac{F(\infty)}{F}, \quad (16.25)$$

что наверняка абсурдно, если  $F(\infty) = 0$ . Формула (16.25) просто определяет численное значение константы  $F(\infty)$ , не представляя какого-либо интереса сама по себе.

Такой модифицированный метод Гольдбергера — Треймана вновь следует сравнить при  $K \rightarrow \text{const}$  с методами Намбу и Гелл-Манна — Бернштейна, описанными ранее. Главное различие состоит в следующем. В первом методе результат вытекает непосредственно из условия согласования поведения функции  $\text{Im } F(s)$  с предполагаемым слабым асимптотическим изменением  $F(s)$ . Во втором методе аналогичное предположение о поведении функции  $f(s)$  используется для оправдания дисперсионного соотношения (16.18) без вычитаний. Но даже в этом последнем случае основное предположение относительно  $f(s)$  безмолвно подразумевает необходимость выполнения условия сходимости, которое уже содержит требуемый ответ.

В качестве упражнения предлагаем читателям обсудить совместимость модифицированного метода Гольдбергера — Треймана с предположением о том, что матричные элементы плотности  $\Pi$  имеют такое же асимптотическое поведение, как и матричные элементы оператора  $\varphi_\pi$ .

Таким образом, выбор между различными методами вывода формулы Гольдбергера — Треймана оказывается всецело делом вкуса. Аргументация с использованием гипотезы «частично сохраняющегося» тока, вероятно, более изящна и более удобна для применения на практике. В то же время в модифицированном методе Гольдбергера — Треймана явно подчеркивается роль асимптотического поведения при высоких энергиях. Этот метод можно применять к некоторым двух- и трехточечным функциям, когда никакие «частично сохраняющиеся» токи уже не имеют отношения к делу. Например, он был использован для приближения амплитуд

электромагнитных распадов  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  и  $\rho \rightarrow \pi\gamma$  (Barton, Smith, 1965) и электромагнитного смешивания  $\eta$ - и  $\pi^0$ -мезонов (Barrett, Barton, 1964). Были также предложены другие решения основной проблемы сходимости. Особое внимание следует обратить на работу Нишиджима (Nishijima, 1964).

## Глава 17

### МОДЕЛЬ ЛИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

#### § 17.1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжевы теории поля столь сложны, что по существу об их решениях ничего не известно. Поэтому прежде всего было бы полезно направить усилия на исследование моделей, которые по крайней мере в некоторых основных своих чертах могут претендовать на роль теории поля и в то же время могут быть решены точно. Конечно, их разрешимость всегда оказывается следствием пренебрежения какими-то важными чертами настоящей теории (ковариантностью, локальностью или перекрестной симметрией). Можно бесконечно размышлять над вопросом, какие из приятных или дурных свойств таких решений сохранятся, если ликвидировать те упрощения, которые сделали данную модель разрешимой. До сих пор ответы на подобные вопросы все еще остаются делом вкуса, и мы не собираемся заниматься их выяснением. Мы будем придерживаться той точки зрения, что изучение моделей полезно прежде всего потому, что они предупреждают нас о возможных патологических чертах настоящих теорий поля. Иными словами, они обеспечивают возможность диагностирования, даже если их прогнозы неизменны.

Превосходную модель теории поля изобрел Ли. Она позволяет, в частности, ясно представить трудности, возникающие в теории возмущений (см. § 8.5). Эта модель приобрела столь большое значение в качестве пробного камня для новых разработок, что мы изучим ее довольно подробно саму по себе, а затем дополнительно обсудим проблему «дúхов».

Модель Ли описывает мир, заполненный фиксированными (бесконечно тяжелыми) бесспиновыми фер-

мионами, которые могут существовать в двух различных внутренних состояниях, называемых  $V$  и  $N$ . Никаких антифермионов не существует. Эти фермионы взаимодействуют с нейтральным скалярным бозонным полем  $\theta$  таким образом, что единственный виртуальный элементарный процесс, разрешенный правилами отбора, имеет вид

$$V \leftrightarrow N + \theta \text{ (разрешен)}. \quad (17.1)$$

В то же время перекрестный процесс запрещен

$$N \leftrightarrow V + \theta \text{ (запрещен)}. \quad (17.2)$$

Некоторые из упомянутых выше особенностей модели можно модифицировать, не нарушая ее разрешимости. Существенное упрощение в ней — нарушение перекрестной симметрии, обусловленное отсутствием у частиц  $V$  и  $N$  античастиц и правилами отбора (17.1) и (17.2).

Будем вести рассмотрение в представлении Шредингера. Гамильтониан в импульсном пространстве имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 + H_{int}; \\ H_0 &= m_V \bar{\psi}_V \psi_V + m_N \bar{\psi}_N \psi_N + \sum_k \omega_k a_k^* a_k, \\ H_{int} &= \delta m_V \bar{\psi}_V \psi_V - g_0 V^{-1/2} \sum \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \times \\ &\quad \times \{ \bar{\psi}_V \psi_N a_k + \bar{\psi}_N \psi_V a_k^* \}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Соотношения коммутации записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{\psi}_V, \psi_V \}_+ &= \{ \bar{\psi}_N, \psi_N \}_+ = 1; \\ [a_k, a_{k'}^*] &= \delta_{k, k'} \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

а все другие пары операторов коммутируют или антикоммутируют как обычно.

В соотношениях (17.3) подразумевается, что поля  $\psi_V$  и  $\psi_N$  действуют только на некую внутреннюю степень свободы источника, и поэтому отдача не учитывается. Сам же источник раз и навсегда «прибит» к началу координат. (С этим связано и отсутствие фазовых множителей в  $H_{int}$ .) Следовательно, константы  $m_V$  и  $m_N$  представляют собой энергии, а не массы. Тем не менее мы

по-прежнему будем называть их массами, чтобы сохранить терминологию, принятую для аналогичной величины в теории поля. Наоборот, частицы  $\theta$  считаются релятивистскими и  $\omega_k = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$ .

Функция  $u(\omega)$  играет роль безразмерного параметра обрезания. Мы выбираем ее вещественной и положительно определенной, стремящейся при больших энергиях к нулю:

$$u(\omega) \xrightarrow{(\omega \rightarrow \infty)} 0.$$

Будем называть случай, когда  $u(\omega) = 1$  при всех  $\omega$ , «пределом отсутствия обрезания».

Гамильтониан был выше записан через неперенормированные операторы поля. Очевидно также, что  $g_0$  — это неперенормированная константа связи. Наоборот,  $m_V$ ,  $m_N$  и  $\mu$  — это физические массы. Величина  $\delta m_V$  — перенормировка массы частицы  $V$ ; мы заранее предвосхищаем вывод, что необходимость в перенормировке масс  $N$ - или  $\theta$ -частиц отсутствует. Будем рассматривать только случай, когда  $V$ -частица стабильна, т. е.  $m_V < (m_N + \mu)$ , так что реакция (17.1) не может быть реальным процессом. Без дальнейшего ограничения общности можно считать, что

$$m_V = m_N = 0,$$

и переписать  $H_0$  в виде

$$H_0 = \sum_k \omega_k a_k^* a_k. \quad (17.5)$$

Гамильтониан  $H$  эрмитов; если константа  $g_0$  вещественна, будем считать это условие выполненным, по крайней мере вплоть до специального предупреждения. Удобно описывать состояния в представлении, в котором диагональны операторы числа частиц:

$$n_V = \bar{\psi}_V \psi_V = 0, 1;$$

$$n_N = \bar{\psi}_N \psi_N = 0, 1;$$

$$n_k = a_k^* a_k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем называть их операторами числа «голых» частиц и обозначать их собственные векторы как

$$|> = |n_V^r n_N, \{n_k\}>.$$

Эпитет «голые» используется здесь для удобства и не несет в себе никакого философского смысла.

Определим

$$N_{\theta} = \sum n_k.$$

Рассматриваемый гамильтониан, очевидно, удовлетворяет правилам отбора (17.1) и (17.2). Поэтому следующие два оператора будут константами движения:

$$B = n_V + n_N; \quad Q = N_{\theta} - n_N$$

( $B$  — это просто полное число фермионов). Следовательно, все векторное пространство можно разложить на невзаимодействующие подпространства, так называемые секторы, которые характеризуются определенными значениями констант  $B$  и  $Q$ . Прежде чем перечислить первые несколько секторов, необходимо четко сформулировать философию, лежащую в основе гамильтонова формализма, применительно к нашему частному гамильтониану. Эта философия действительно типична для гамильтоновых (или лагранжевых) теорий поля и заслуживает тщательной проверки. Исследуется такая ситуация.

Стабильные частицы трех различных сортов  $V$ ,  $N$  и  $\theta$  существуют изолированно друг от друга; эта информация воплощена в свободном гамильтониане  $H_0$ , в котором  $m_V$ ,  $m_N$  и  $\mu$  — наблюдаемые значения масс. Далее, оказывается, что эти частицы взаимодействуют друг с другом так, что числа  $B$  и  $Q$  сохраняются; последнее означает, что правила отбора (17.1) и (17.2) справедливы для виртуальных переходов. Эта информация воплощается в гамильтониане взаимодействия  $H_{int}$ . Объединяя  $H_{int}$  с  $H_0$ , необходимо одновременно ввести контрольный член перенормировки массы, что позволит сохранить *наблюдаемые* массы в выражении для  $H_0$ .

Таким образом, форма гамильтониана определяется или по крайней мере подсказывается простым наблюдением. Что же касается численных значений параметров, входящих в  $H$ , то массы берутся непосредственно из эксперимента,  $\delta m_V$  зависит неявно от  $g_0$ , а самую константу  $g_0$  можно определить из какого-нибудь другого эксперимента. В действительности константу  $g_0$  находят в результате соответствующей подгонки под наблюдаемое значение сечения рассеяния частиц  $N$  и  $\theta$ . Все остальные экспериментальные результаты, т. е. все

наблюдаемые величины, кроме значений масс и интенсивности рассеяния частиц  $N$  и  $\theta$ , в этом случае предсказываются теорией.

Повторяем, что такое описание в точности аналогично процедуре, применяемой, например, в электродинамике, когда значения масс электрона и фотона берутся из опыта, а численное значение перенормированного электрического заряда определяется по наблюдаемому томсонову сечению рассеяния. Единственное незначительное различие состоит в том, что в модели Ли мы все еще не перенормировали константу связи; это будет сделано несколько ниже в ходе изложения. Пока будем иметь в виду, что, согласно определению, непосредственно из опытов по рассеянию частиц  $N$  и  $\theta$  находят перенормированную константу связи  $g$ . Соотношение же между  $g_0$  и  $g$  должно вытекать из теории.

Теперь перечислим более подробно первые несколько секторов модели.

**Сектор ( $B=0, Q=0$ ).** Единственное состояние в этом секторе — это вакуумное состояние голых частиц  $|0, 0, 0\rangle$ . Поскольку одновременно оно является собственным состоянием оператора полной энергии, то голый и физический вакуумы совпадают.

**Сектор ( $B=0, Q=1$ ).** Этот сектор включает только состояния  $|0, 0, 1_k\rangle$  с одной частицей  $\theta$ , для которых без труда можно установить соотношение

$$H|0, 0, 1_k\rangle = \omega_k|0, 0, 1_k\rangle.$$

Таким образом, состояния одной голой и физической частицы  $\theta$  совпадают; в частности,  $\mu$  — физическая масса частицы  $\theta$ . Отсюда немедленно следует, что состояния без фермионов, но с любым числом  $\theta$ -частиц являются собственными состояниями полного гамильтониана. Поэтому в отсутствие фермионов никакого взаимодействия между  $\theta$ -частицами нет.

С этого момента мы будем рассматривать исключительно секторы с  $B=1$ .

**Сектор ( $B=1, Q=-1$ ).** В нем имеется лишь одно состояние  $|0, 1, 0\rangle$ , для которого

$$H|0, 1, 0\rangle = m_N|0, 1, 0\rangle = 0|0, 1, 0\rangle,$$

так что состояния одной голой и физической  $N$ -частицы совпадают: перенормировки массы  $N$ -частицы нет.

**Сектор ( $B=1, Q=0$ ).** Это первый нетривиальный сектор. В представлении операторов голых частиц он включает векторы

$$|1, 0, 0\rangle \text{ и } |0, 1, 1_k\rangle;$$

иначе говоря, в него входят одночастичное состояние физической  $V$ -частицы и состояния рассеяния частиц  $N$  и  $\theta$ .

Найдем сначала дискретное одночастичное состояние  $V$ -частицы. Собственный вектор гамильтониана имеет вид

$$|V\rangle = C_V \left\{ |1, 0, 0\rangle + \sum_k \varphi_k |0, 1, 1_k\rangle \right\}, \quad (17.6)$$

где  $C_V$  — константа нормировки, обеспечивающая выполнение условия  $\langle V|V\rangle=1$ . Без потери общности можно выбрать фазу состояния  $|V\rangle$  такой, чтобы константа  $C_V$  была бы вещественной. Уравнение на собственные значения, которое превращается в уравнение для определения  $\delta m_V$ , имеет вид

$$H|V\rangle = m_V|V\rangle = 0. \quad (17.7)$$

Вычислив  $H|V\rangle$  непосредственно, получим

$$0 = \left\{ \sum_k \omega_k \varphi_k |0, 1, 1_k\rangle + \delta m_V |1, 0, 0\rangle - \right. \\ \left. - g_0 V^{-1/2} \sum_k \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} [\varphi_k |1, 0, 0\rangle + |0, 1, 1_k\rangle] \right\}.$$

(Там, где не возникает опасность путаницы, мы пишем вместо  $\omega_k$  просто  $\omega$ .) Приравняв нулю коэффициенты при ортогональных векторах, получим

$$\varphi_k = g_0 V^{-1/2} \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (17.8)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \delta m_V &= g_0 V^{-1/2} \sum_k \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \varphi_k; \\ \delta m_V &= g_0^2 V^{-1} \sum_k \frac{u^2(\omega)}{2\omega^2} = \frac{g_0^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk k^2 u^2(\omega)}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

Конечно, а priori не существует никакой гарантии, что этот сектор не содержит других дискретных состояний, кроме состояния с одной  $V$ -частицей. Такие состояния удовлетворяли бы уравнению на собственные значения вида

$$H|E\rangle = E|E\rangle \quad (17.10)$$

с  $E < \mu$ . Поскольку в этой модели энергетическая шкала произвольна, то здесь нет никакого аналога условию положительности масс в ковариантной теории, и поэтому следует быть готовым к любому значению  $E < \mu$ . Вычислив  $H|E\rangle$  и приравняв коэффициенты, как это сделано для состояния  $|V\rangle$ , получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= g_0 V^{-1/2} \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega_k - E}; \\ \delta m_V - E &= g_0 V^{-1/2} \sum_k \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \varphi_k. \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Комбинируя их и подставляя выражение для  $\delta m_V$  из равенств (17.9), получаем

$$-E = E \frac{g_0^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk k^2 u^2}{\omega^2 (\omega - E)}. \quad (17.12)$$

Конечно, уравнение (17.12) всегда обладает одним корнем при  $E=0$ , соответствующим физической  $V$ -частице; этот факт обеспечивается указанным выбором константы  $\delta m_V$ . Другие корни должны бы подчиняться уравнению

$$-1 = \frac{g_0^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^2 u^2}{\omega^2 (\omega - E)}, \quad (17.13)$$

но оно не может быть удовлетворено, поскольку при  $E < \mu$  правая часть его положительно определена. (Очевидно, что не может быть и комплексных корней, ибо левая часть уравнения вещественна.) Следовательно, не существует никаких связанных состояний в системе  $N\theta$ .

Функция, появившаяся в правой части уравнения



(17.13), будет встречаться в дальнейшем изложении неоднократно. Назовем ее

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dkk^2 u^2(\omega)}{\omega^2(\omega - z)} = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega k u^2(\omega)}{\omega(\omega - z)} \quad (17.14)$$

(мы воспользовались тем, что  $kkk = \omega d\omega$ ). Отметим, что  $f(z)$  — вещественная аналитическая функция, у которой единственная особая точка — это точка ветвления при  $z = \mu$ . Функция  $f$  вещественна и положительна при  $z < \mu$ , монотонно возрастает при возрастании  $z$  от  $-\infty$  до  $\mu$ , и, кроме того,

$$\text{Im} f(\omega \pm i\epsilon) = \pm \theta(\omega - \mu) \frac{k u^2(\omega)}{\omega}. \quad (17.15)$$

Определим также для краткости рационализированную константу связи  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0^2 = \frac{g_0^2}{4\pi}. \quad (17.16)$$

Вычислим заранее нормировочную константу  $C_V$  в соотношении (17.6):

$$C_V^{-2} = 1 + \sum_{\mathbf{k}} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = 1 + \gamma_0^2 f(0). \quad (17.17)$$

Рассмотрим далее состояния рассеяния частиц  $N$  и  $\theta$ , которые записываются в виде

$$\begin{aligned} |N\theta_{\mathbf{k}_0}, in\rangle = & \{ C(\mathbf{k}_0) |1, 0, 0\rangle + |0, 1, 1_{\mathbf{k}_0}\rangle + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) |0, 1, 1_{\mathbf{k}}\rangle \}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Константу  $C(\mathbf{k}_0)$  и функцию  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  не следует путать с соответствующими величинами для состояния  $|V\rangle$ . В дальнейшем мы для краткости будем писать  $\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_0$ ,  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega$ , а обозначения  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_0$  используем для абсолютных величин три-векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_0$ . В этой главе мы их не сможем перепутать с четыре-векторами.

Заметим, что формула (17.18) дает правильно нормированное описание одной физической  $\theta$ -частицы с импульсом  $\mathbf{k}_0$ , падающей на физическую  $N$ -частицу, что и представлено компонентой  $|0, 1, 1_{\mathbf{k}_0}\rangle$ . Такая простота обусловлена тем, что, как известно, асимптотически голое и физическое состояния  $N$  (и  $\theta$ )-частиц

совпадают. Граничное условие сводится к тому, что в функцию  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  входят только расходящиеся сферические волны. Уравнения на собственные значения имеют вид

$$H |N\theta_{\mathbf{k}_0}, in\rangle = \omega_0 |N\theta_{\mathbf{k}_0}, in\rangle.$$

Вычисляя левую часть уравнения и приравнявая коэффициенты, получаем

$$\omega_0 \varphi = \omega \varphi - g_0 V^{-1/2} C u(\omega) (2\omega)^{-1/2}; \quad (17.19)$$

$$\omega_0 C = \delta m_V C - g_0 V^{-1/2} \left\{ \frac{u(\omega_0)}{(2\omega_0)^{1/2}} + \sum_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \right\}. \quad (17.20)$$

Как будет видно из дальнейшего, граничное условие можно учесть, если переписать выражение (17.19) в виде

$$\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = g_0 V^{-1/2} C \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon}. \quad (17.21)$$

Исключая  $\varphi$  и подставляя для  $\delta m_V$  выражение (17.9), получаем выражение для константы  $C$  через  $\omega_0$ :

$$C = \frac{-g_0 V^{-1/2} \frac{u(\omega_0)}{(2\omega_0)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega_0}}{\left\{ 1 + g_0^2 V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{u^2(\omega)}{2\omega^2 (\omega - \omega_0)} \right\}}. \quad (17.22)$$

Подставив (17.22) в формулу (17.21), найдем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = & -g_0^2 V^{-1} \frac{u(\omega_0) u(\omega)}{(2\omega_0 2\omega)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon} \times \\ & \times \{1 + \gamma_0^2 f(\omega_0 + i\varepsilon)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Заметим, в частности, что функция  $\varphi$  сферически симметрична; поэтому можно писать  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \varphi(k, k_0)$ . Конечно, функция  $\varphi(k, k_0)$  задана не только на энергетической поверхности голых частиц, где  $\omega = \omega_0$ . Однако очевидно, что амплитуда рассеяния будет определяться полностью своим поведением вблизи особой точки  $\omega = \omega_0$ . Чтобы понять это, рассмотрим рассеянную вол-

новую функцию в конфигурационном пространстве  $\theta$ -частиц, т. е. фурье-образ  $F(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0)$  функции  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  по переменной  $\mathbf{k}$ . Получим

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0) &= \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V\varphi = \\
 &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} V\varphi = (2\pi)^{-2} \frac{1}{ir} \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty dk k (e^{ikr} - e^{-ikr}) V\varphi(k, k_0). \quad (17.24)
 \end{aligned}$$

Множитель  $(\omega - \omega_0 - i\varepsilon)^{-1}$  в  $V\varphi$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon} &= \frac{\omega + \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\varepsilon} = \frac{\omega + \omega_0}{k^2 - k_0^2 - i\varepsilon} = \\
 &= \frac{\omega + \omega_0}{(k + k_0 + i\varepsilon)(k - k_0 - i\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (17.24), замечаем, что подынтегральное выражение становится симметричной функцией  $k$ . Поэтому интегрирование можно распространить на всю числовую ось от  $-\infty$  до  $+\infty$ , умножив интеграл на  $1/2$ . Чтобы проинтегрировать член с  $\exp(ikr)$ , замкнем контур интегрирования на бесконечности в верхней комплексной полуплоскости переменной  $k$ . Чтобы исключить положительную мнимую полуось между  $+i\infty$  и  $i\mu$ , проведем контур интегрирования вокруг нее. Это позволит обойти точку ветвления, которой обладает функция  $\varphi$  при  $k = i\mu$  в силу своей зависимости от  $\omega$ . Вклад этого «объезда» имеет вид

$$\int_{\mu}^{\infty} dk e^{-kr} (\dots).$$

При  $r \rightarrow \infty$  он обращается в нуль и описывает локализованное возмущение  $\theta$ -поля вблизи рассеивателя. Он не дает никакого вклада в амплитуду рассеяния.

При вычислении интеграла по контуру мы не обращали внимания на функцию обрезания. Поскольку эти интегралы сходятся даже в отсутствие обрезания, то это довольно естественно. Но если действовать фор-

мально, необходимо обеспечить, чтобы функция  $u(\omega)$  не имела особенностей в комплексной плоскости переменной  $k$ , исключая мнимую ось выше точки  $i\mu$  и ниже точки  $(-i\mu)$ . Например, была бы приемлема функция  $u = (k^2 + b^2)^{-1/2}$  с  $b > \mu$ . Мы не будем обсуждать, в какой степени и в каком смысле такая процедура нарушает «причинность».

При этих условиях значение рассматриваемого интеграла просто равно произведению коэффициента  $2\pi i$  на вычет в полосе подынтегрального выражения при  $k = k_0 + i\epsilon$ , т. е.

$$I_1 = -\frac{g_0^2}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_0 r}}{r} \cdot \frac{u^2(\omega_0)}{2\omega_0} \{1 + \gamma_0^2 f(\omega_0 + i\epsilon)\}^{-1} + \int_{\mu}^{\infty} dk e^{-kr} (\dots). \quad (17.25)$$

Член с  $\exp(-ikr)$  в выражении (17.24) можно проинтегрировать точно таким же способом, но замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости. Его вклад просто дублирует формулу (17.25). Амплитуда рассеяния  $A$  определяется как коэффициент при  $\exp(ik_0 r)/r$  в выражении для  $F$ . Поэтому

$$A = [-\gamma_0^2 u^2(\omega)/\omega] [1 + \gamma_0^2 f(\omega + i\epsilon)]^{-1}. \quad (17.26)$$

Опустим индекс при переменной  $\omega$ , которая теперь обозначает энергию падающей частицы. Предоставляем читателю в качестве упражнения показать, что формулу (17.26) можно также получить (более ортодоксальным способом), используя определение матричного элемента  $S$ -матрицы для упругого рассеяния:

$$S_{k, k'} = \langle N\theta_{k'}, out | N\theta_k, in \rangle.$$

Состояние  $|N\theta_k, in\rangle$  известно, а состояние  $|N\theta_k, out\rangle$  можно получить из него, либо используя инвариантность относительно отражения пространства и обращения времени, либо заменив условно в выражении (17.21)  $+i\epsilon$  на  $-i\epsilon$ .

Отметим прежде всего, что амплитуда  $A(k)$  не зависит от направления вектора  $k$ , так что рассеяние происходит только в  $S$ -состоянии. Проверить справедливость условия унитарности можно следующим образом. При рассеянии  $N$ - и  $\theta$ -частиц неупругие каналы запре-

щены правилами отбора, поскольку все состояния  $N+2\theta$  и т. д. принадлежат к различным секторам, в то время как  $|V\rangle$  — это дискретное состояние с энергией ниже порога  $N\theta$ -рассеяния. Следовательно, условие унитарности  $S$ -матрицы сводится к соответствующему условию для упругого рассеяния, а именно к оптической теореме. Для рассеяния только в  $S$ -состоянии его можно записать в виде (здесь  $\sigma_T$  — полное сечение рассеяния)

$$\text{Im } A = k\sigma_T/(4\pi) = k|A|^2 \quad (17.27)$$

или

$$\text{Im } A^{-1} = -k. \quad (17.28)$$

Справедливость такого условия действительно вытекает непосредственно из формул (17.26) и (17.15):

$$\text{Im } A^{-1} = -\omega u^{-2}(\omega) \text{Im } f(\omega + i\varepsilon) = -k.$$

Отметим, что амплитуда рассеяния имеет полюс при нефизическом значении энергии  $\omega=0$ . На языке дисперсионной теории он называется одночастичным полюсом  $V$ -частицы; этот полюс появляется вследствие того, что дискретное состояние  $|V\rangle$  обладает теми же квантовыми числами, что и состояние  $N\theta$ -рассеяния.

Нетрудно видеть, что вычет в полюсе как функция константы связи  $\gamma_0$  ограничен. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_0^2 \rightarrow \infty} \omega \dot{A}(\omega) \Big|_{\omega=0} &= - \lim_{\gamma_0^2 \rightarrow \infty} u^2(0) \frac{\gamma_0^2}{1 + \gamma_0^2 f(0)} = \\ &= -u^2(0)/f(0), \end{aligned} \quad (17.29)$$

и для всех конечных значений  $\gamma_0^2$  вычет будет меньше этой величины.

## § 17.2. ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЙ ФОРМАЛИЗМ И «ДУХОВОЕ» СОСТОЯНИЕ

До сих пор мы имели дело исключительно с перенормированной константой связи и с перенормированным оператором поля  $\psi_V$ . Поскольку все уравнения удастся решить, против такого способа действий не может быть никаких возражений. Однако обычные теории станут намного прозрачнее, если с самого начала перенормировать рассматриваемый гамильтониан и выра-

зять все величины через перенормированную константу связи  $g$  (которую мы вскоре определим) и перенормированный оператор поля:

$$(\psi_V)_{renorm} \equiv \Psi_V = Z^{-1/2} \psi_V. \quad (17.30)$$

По аналогии со стандартной нормировкой (2.40) определим константу  $Z$  условием

$$\langle 0 | \Psi_V | V \rangle = Z^{-1/2} \langle 0 | \psi_V | V \rangle = 1. \quad (17.31)$$

В рамках перенормированного формализма мы временно будем игнорировать как точное решение, полученное в неперенормированных терминах, так и всякую связь между этими двумя наборами параметров. Такой способ действий вновь оказывается аналогом реальной процедуры, где считаются доступными лишь перенормированные формулы, а константы перенормировки не могут служить объектом исследования. Осуществив процедуру перенормировки, мы увидим, что она может приводить к «дúхам» точно так же, как и обычная теория возмущений. При этом мы вновь используем связь с исходными неперенормированными операторами, чтобы с ее помощью выявить источник возникающей трудности.

Перенормированная константа связи определяется обычно условием, что вычет точной амплитуды  $N\theta$ -рассеяния в одночастичном полюсе, соответствующем  $V$ -частице, полагается равным первому приближению теории возмущений с заменой  $g^2_0$  на  $g^2$ . Это первое приближение просто дает амплитуду  $A$  с точностью до  $\gamma^2_0$ . Оно получается из формулы (17.26) в результате отбрасывания знаменателя:

$$-\gamma^2 u^2(0) = -\gamma^2_0 u^2(0) [1 + \gamma^2_0 f(0)]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\gamma^2 = \frac{\gamma^2_0}{1 + \gamma^2_0 f(0)}; \quad \gamma^2_0 = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2 f(0)}. \quad (17.32)$$

Амплитуда рассеяния, выраженная через  $\gamma^2$ , имеет вид

$$A = -\gamma^2 u^2 \omega^{-1} \{1 + \gamma^2 [f(\omega) - f(0)]\}^{-1}.$$

Определим функцию  $f$  равенством

$$\widehat{f}(z) = f(z) - f(0) = \frac{z}{\pi} \int_{-\mu}^{\infty} \frac{d\omega k u^2(\omega)}{\omega^2(\omega - z)}. \quad (17.33)$$

Заметим, что

$$\text{Im} \widehat{f}(\omega \pm i\epsilon) = \text{Im} f(\omega \pm i\epsilon) = \pm \theta(\omega - \mu) k u^2(\omega)/\omega. \quad (17.34)$$

С помощью этой новой величины можно записать

$$A = -\gamma^2 u^2 \omega^{-1} [1 + \gamma^2 \widehat{f}(\omega + i\epsilon)]^{-1}. \quad (17.35)$$

Нетрудно проверить, что выражение (17.35) удовлетворяет условию унитарности (17.28). Действительно, из (17.34) немедленно следует

$$\text{Im} A^{-1} = -(\gamma^2 u^2 \omega^{-1})^{-1} \gamma^2 (k u^2 \omega^{-1}) = -k.$$

Различие между перенормированным и перенормированным выражениями для амплитуды  $A$  в действительности весьма существенно. Прежде всего заметим, что в пределе отсутствия обрезания перенормированное выражение (17.35) формально конечно, поскольку при больших  $k$  подынтегральное выражение в функции  $\widehat{f}$  ведет себя как  $k^{-2}$ , в то время как перенормированная функция  $f$  неограниченна. Конечно, именно этого мы и ожидали от перенормировки, и такое изменение обычно желательно.

Другое главное отличие состоит в том, что вычет перенормированной амплитуды в полюсе, отвечающем одной  $V$ -частице, при  $\gamma^2 \rightarrow \infty$  более не имеет горизонтальной асимптоты. Как следует из формул (17.35) и (17.33),

$$\omega A(\omega) \xrightarrow{\gamma^2 \rightarrow \infty} -u^2 \left\{ \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk' k'^2 u^2(\omega')}{\omega'^3 (\omega' - \omega)} \right\}^{-1}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$  знаменатель в правой части обращается в нуль, так что если величина  $\gamma^2$  становится достаточно большой, эта формула может формально применяться к произвольному вычету, полученному экстраполяцией наблюдаемой амплитуды рассеяния к нулевой полной энергии. Тогда формула при заданном вычете определяет формально пригодное (т. е. унитарное) выражение

для амплитуды рассеяния при всех конечных энергиях. Если эту особенность удастся сохранить без всякого ущерба для последующего рассмотрения, то такую гибкость перенормированного формализма следует только приветствовать.

Выразим теперь константу  $\delta m_V$  и константу перенормировки поля  $Z$  через  $\gamma$ . Из формул (17.31), (17.6) и (17.17) следует, что

$$\left. \begin{aligned} Z &= |\langle 0 | \psi_V | V \rangle|^2 = C_V^2; \\ Z &= [1 + \gamma_0^2 f(0)]^{-1} = [1 - \gamma^2 f(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (17.36)$$

Наконец, чтобы завершить формулировку модели в перенормированных терминах, необходимо иметь пропагатор  $V$ -частицы. Поскольку оператор  $\psi_V$  зависит только от времени  $t$ , то роль переменной  $p^2$  в релятивистской теории в данном случае переходит к частоте  $\omega$ : одночастичный полюс (с вычетом единица) имеет место при  $\omega=0$ , а точка ветвления, отмечающая нижнюю границу состояний рассеяния с непрерывным спектром, соответствует  $\omega=\mu$ .

Перенормированная фейнманова функция распространения имеет вид

$$\begin{aligned} G'_F(t) &= \langle 0 | [\theta(t) \Psi_V(t) \bar{\Psi}_V(0) - \\ &\quad - \theta(-t) \bar{\Psi}_V(0) \Psi_V(t)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Дополнительный знак минус здесь — особенность, обычно присущая хронологическому упорядочению ферми-полей.

Прежде всего рассмотрим вакуумное среднее обычного произведения:

$$\begin{aligned} G'_+(t) &= \langle 0 | \Psi_V(t) \bar{\Psi}_V(0) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \Psi_V(t) | n \rangle \times \\ &\quad \times \langle n | \bar{\Psi}_V(0) | 0 \rangle = \sum_n e^{iE_n t} |\langle 0 | \Psi_V(0) | n \rangle|^2. \end{aligned}$$

В силу соотношения (17.31) и с учетом того, что  $E_V=0$ , состояние  $|n\rangle = |V\rangle$  дает вклад, равный 1. Остальные состояния, которые могут дать нетривиальный вклад и допускаются правилами отбора, — это состояния  $N\theta$ -рассеяния  $|N\theta_k, in\rangle$  (конечно, в равной мере подошли бы и аут-состояния).



Векторы для этих состояний были выписаны в формулах (17.18) и (17.22). Используя равенство (17.30), находим

$$\langle 0 | \Psi_V | N\theta_k, in \rangle = Z^{-1/2} C_k = \frac{-g_0 Z^{1/2} (2\omega V)^{-1/2} u(\omega)/\omega}{1 + \gamma_0^2 f(\omega + i\varepsilon)}.$$

Тогда, подставляя выражение для  $Z$ , получим

$$\begin{aligned} G'_+(t) &= 1 + \frac{\gamma_0^2}{Z\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^2 u^2(\omega)}{\omega^3 |1 + \gamma_0^2 f(\omega)|^2} e^{i\omega t} = \\ &= 1 - \frac{1}{Z\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} [1 + \gamma_0^2 f(\omega + i\varepsilon)]^{-1} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Для невзаимодействующих фиксированных частиц с энергией  $E$  должно иметь место равенство  $G_+(t|E) = \exp(iEt)$ , так что формула (17.38) позволяет ввести спектральную функцию Лемана следующим образом:

$$\rho(\omega) = \delta(\omega) - (Z\pi\omega)^{-1} \operatorname{Im} [1 + \gamma_0^2 f(\omega + i\varepsilon)]^{-1}. \quad (17.39)$$

Поэтому фейнманову функцию распространения можно представить в виде

$$\begin{aligned} G'_F(z) &= \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) (z - \omega)^{-1} = \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{Z\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega(z - \omega)} \operatorname{Im} [1 + \gamma_0^2 f(\omega + i\varepsilon)]^{-1} = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega}{\omega(\omega - z)} [1 + \gamma_0^2 f(\omega)]^{-1}. \end{aligned} \quad (17.40)$$

Здесь  $C$  — стандартный контур интегрирования, конкретный вид которого указан в § 8.3. Из проведенного выше исследования проблемы связанных состояний в этом секторе мы выяснили, что множитель  $1 + \gamma_0^2 f(\omega)$  в знаменателе подынтегрального выражения (17.40) нулей не имеет, так что

$$G'_F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{Z} \left\{ -\frac{1}{z [1 + \gamma_0^2 f(0)]} + \frac{1}{z [1 + \gamma_0^2 f(z)]} \right\}.$$

Обратившись к соотношению (17.36), найдем (в обозначениях для перенормированной амплитуды  $N\theta$ -рассеяния)

$$G'_F(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1 + \gamma_0^2 f(0)}{z [1 + \gamma_0^2 f(z)]} = \{z [1 + \gamma^2 \hat{f}(z)]\}^{-1}. \quad (17.41)$$

Столь близкая аналогия между амплитудой рассеяния и функцией распространения специфична для модели Ли и не обобщается на реальные теории поля. Аналогично равенство между константой перенормировки поля  $Z$  и константой перенормировки заряда, т. е. равенство  $\gamma^2/\gamma_0^2 = Z$ , представляет собой случайное совпадение, не подлежащее обобщению. Оба результата зиждутся на том факте, что все графы  $N\theta$ -рассеяния состоят просто из двух вершин типа  $N\theta V$ , соединенных пропагатором частицы  $V$ ; единственное отклонение от первого порядка теории возмущений связано со свойствами именно этой функции.

Получив точное выражение для функции распространения (17.41), вспомним, что мы допускаем отсутствие всякой связи между перенормированным и непере- нормированным выражениями. Поэтому предположим, что нам удалось подогнать наблюдаемое сечение  $N\theta$ -рассеяния, выбрав надлежащее численное значение  $\gamma^2$ . Наша следующая задача — найти полюсы функций  $G'_F(z)$ . Полюс в нуле возникает, конечно, в результате вклада  $V$ -частицы. Однако теперь появляются и другие связанные состояния в точках  $z=B$ , определяемых уравнением

$$-1 = \gamma^2 \hat{f}(B) = \frac{\gamma^2 B}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega k u^2(\omega)}{\omega^2 (\omega - B)}. \quad (17.42)$$

Очевидно,  $B < \mu$ . Можно проверить, что в этой области

$$d\hat{f}(B)/dB > 0.$$

Поэтому, если значение  $B$  изменяется от  $\mu$  до  $-\infty$ , функция  $\hat{f}(B)$  изменяется монотонно от нуля до своего асимптотического значения

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{\gamma^2 B}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega k u^2(\omega)}{\omega^2 (\omega - B)} = -\gamma^2 f(0),$$

причем в точке  $B=0$  она меняет знак. С учетом этого монотонного изменения функции  $\hat{f}(B)$  уравнение (17.42) может иметь не более одного корня. Если этот корень существует, то он лежит в области  $B < 0$ . Корень будет существовать в том, и только в том случае, если выполнено условие

$$\gamma^2 f(0) \geq 1, \text{ т. е. } \gamma^2 > \gamma_{crit}^2 = f^{-1}(0). \quad (17.43)$$

Невозможно обнаружить какие-либо недостатки в формуле (17.43), исходя из всего сказанного до сих пор в рамках *перенормированного формализма*. Опасения возникают лишь после исследования вычета в этом полюсе, равного  $[Bd\hat{f}(B)/dB]^{-1}$ , поскольку выясняется, что он отрицателен. Подчеркнем еще раз, что вплоть до этого момента все результаты, полученные для рассматриваемых секторов, с физической точки зрения не были бессмысленными.

Однако появление отрицательного вычета не может не вызывать беспокойства, и в данном случае источник этой трудности может быть найден немедленно, если вспомнить соответствующий *неперенормированный формализм*. Из (17.43) следует, что

$$\gamma_0^2 = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2 f(0)} < 0.$$

т. е. константа  $\gamma_0^2$  — чисто мнимая (Källén, Pauli, 1955). Рассматриваемый гамильтониан  $H$  оказался, таким образом, неэрмитовым вопреки тому факту, что вплоть до этого сектора у него не было никаких комплексных собственных значений. Более того, из формулы (17.36) следует, что константа  $Z$  стала отрицательной, а это противоречит неравенству Лемана (7.14) и также указывает на появление *дúхового* состояния.

В данный момент необходимо внести ясность в вопрос о возможной неопределенности. *Дúховый* полюс был идентифицирован следующим образом. Сначала была рассчитана функция распространения в рамках *неперенормированного формализма*. При интегрировании по контуру, которое позволило выразить пропагатор через спектральную функцию, явно предполагалось, что  $\gamma_0^2 > 0$ , т. е. что никаких связанных состояний не существует. Полученный результат был выражен через  $\gamma^2$  и продолжен аналитически к значениям  $\gamma^2 > \gamma_{crit}^2$ , т. е. к значениям  $\gamma_0^2 < 0$ . В результате такого продолжения

функции распространения был найден новый полюс с отрицательным вычетом в нем. Далее можно было бы рассуждать так. При  $\gamma^2 \geq \gamma_{crit}^2$  возникает новое связанное состояние, и поэтому следует заново вычислить контурный интеграл, приводящий к функции распространения, чтобы учесть это новое состояние. Вновь вычисленный контурный интеграл приведет к пропагатору без этого полюса. Кроме того, раз новое дискретное состояние учитывается явно, то его следует включить в сумму по всем состояниям, которые дают вклад в спектральную функцию Лемана. Если мы это сделаем, то у нас появится возможность свободного выбора нормы состояния, которую мы, разумеется, должны выбрать положительной. Подобная процедура вновь воссоздаст полученную выше перенормированную функцию распространения, но уже с вычетом противоположного знака в этом новом полюсе. (Детальное осуществление этой программы мы оставляем читателям в качестве упражнения.) Теперь возникает вопрос: что же плохого в такой процедуре, которая позволяет рассматривать дух просто как связанное состояние обычного типа?

Ответ на этот парадокс был уже дан выше. Функция распространения с положительным вычетом в новом полюсе оказывается противоречащей функции распространения, полученной с помощью аналитического продолжения. Поэтому следует пересмотреть физическую интерпретацию соответствующих уравнений поля, и впереди еще много работы. Кроме того, а posteriori известно, что гамильтониан модели неэрмитов, какую бы норму ни приписывали этому новому состоянию.

Подводя итоги, можно с полным основанием сказать, что в этом примере классическая перенормировочная программа приводит к весьма плачевным результатам. Если автоматически подчиняться ее указаниям и не исследовать значения констант перенормировки, то мы никогда не смогли бы понять, что такое духовые состояния и проанализировать их, как это мы попытаемся сделать в следующем разделе.

В заключение настоящего параграфа сделаем несколько замечаний.

В отсутствие обрезания функция  $f(0) \rightarrow \infty$ , так что критическое значение перенормированной константы связи равно нулю. Иначе говоря, *в предделе отсутствия обрезания никакого  $N\theta$ -рассеяния без духов не наблю-*

дается. Такой же результат, как утверждал, например, Ландау (1955), характерен для любой теории поля и, в частности, для квантовой электродинамики.

Небезынтересно выяснить положение духового полюса в пределе малой константы связи и отсутствия обрезания. При малых значениях  $\gamma^2$  значение  $|B|$ , очевидно, должно быть большим, так что соотношение (17.42) можно аппроксимировать следующим образом:

$$1 = \gamma^2 |B| \pi^{-1} \int_{\mu}^{\infty} dk k^{-1} (k + |B|)^{-1};$$

$$\pi/\gamma^2 = \ln \left( \frac{k}{k + |B|} \right) \Big|_{k=\mu}^{\infty} = \ln \left[ 1 + \frac{|B|}{\mu} \right].$$

Поэтому при больших значениях  $|B|/\mu$  выполняется приближенное соотношение

$$|B|/\mu \approx \exp(\pi/\gamma^2).$$

Иначе говоря, при  $\gamma^2 \rightarrow 0$  величина  $B$  стремится к  $-\infty$ . Какое бы то ни было разложение в ряд по  $\gamma$  невозможно: рассматриваемая теория приводит к существенной особенности по  $\gamma^2$  при  $\gamma^2 = 0$ .

Единственным собственным графом Фейнмана, дающим вклад в точную вершинную функцию, является вершина  $N\theta V$  первого порядка, которая равна просто  $\gamma u(\omega)$ . Если при  $\omega \rightarrow \infty$  функция  $u(\omega)$  не стремится к нулю, то при любом конечном значении константы  $\gamma$  нарушается теорема Лемана — Симанзика — Циммермана, поскольку существенный с точки зрения этой теоремы интеграл  $I$  расходится. При наличии обрезания всегда существует конечная область значений  $\gamma$ , в которой  $I < 1$  и в которой никаких духов не появляется.

Обычно подразумевают, что в «пределе отсутствия обрезания» восстанавливается локальность взаимодействия. Такое свойство отсутствует в модели Ли, как в этом можно убедиться, переписав  $H_{int}$  в конфигурационном пространстве. (Рекомендуем читателю показать это самостоятельно.) Справедливость этого утверждения наиболее просто установить, вспомнив, что оператор поля  $\phi(x)$  для  $\theta$ -частицы имеет вид

$$\phi(x) = V^{-1/2} \sum_k (2\omega)^{-1/2} \{a_k + a_{-k}^*\} \exp(ikx).$$

Следовательно, чтобы отделить операторы  $a_k$  и  $a_k^*$  (как это сделано в выражении для  $H_{int}$ ), необходимо ввести положительно и отрицательно частотные компоненты поля, что, как нам уже известно, является нелокальной операцией. Действительно, оператор  $H_{int}$  оказывается суммой членов, отвечающих взаимодействиям без производной и с производной (т. е.  $\dot{\phi}$ ), причем в отсутствие обрезания взаимодействие без производной становится локальным, а взаимодействие с производной нет.

Решения для функций  $A$  и  $G_F$ , полученные путем диагонализации гамильтониана в секторе  $N\theta$ , можно было бы с равным успехом получить, просуммировав ряды теории возмущений для этих величин. Эти ряды имеют вид геометрических прогрессий, поскольку единственный граф собственной энергии  $V$ -частицы — это петля  $N\theta$ . Ряды теории возмущений оказываются сходящимися, пока не появляется дух. Вспомним, что в обычной квантовой механике радиус сходимости рядов теории возмущений также определяется соседними связанными состояниями: в этом отношении формализм совершенно нечувствителен к эрмитовости соответствующего гамильтониана (см. § 8.5).

Наконец, последнее замечание совершенно выпадает из контекста, поскольку оно не имеет никакого отношения к духам. Рассмотрим предел амплитуды рассеяния  $A$  [см. (17.26)] при высоких энергиях. Имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0,$$

так что при  $\omega \rightarrow \infty$  получаем

$$A(\omega) \sim -\gamma_0^2 u^2(\omega)/\omega.$$

Иными словами, в пределе высоких энергий амплитуда рассеяния стремится к своему выражению в первом порядке теории возмущений, так называемому борновскому приближению, но записанному через неперенормированную константу связи. Эта особенность модели также вряд ли может быть обобщена на реальные теории поля. Если бы такое обобщение оказалось возможным, оно выявило бы одну из наиболее уязвимых сторон теории поля, поддающуюся непосредственной экспериментальной проверке. Поучительно получить тот же

самый результат из перенормированного выражения для амплитуды (17.35). Имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega' k' u^2(\omega')}{\omega'^2} = -f(0),$$

откуда

$$A \sim -\frac{\gamma^2 u^2(\omega)/\omega}{1 - \gamma^2 f(0)},$$

что с учетом (17.32) совпадает с результатом, выписанным выше.

### § 17.3. ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА

В последнем параграфе было детально показано, что духовое состояние появляется в результате применения данного перенормированного гамильтонова формализма к экспериментальной ситуации, которую в действительности нельзя рассматривать с помощью соответствующего неперенормированного гамильтониана. Что касается самого сектора  $N\theta$ , то духовой полюс вызывает беспокойство не непосредственно в силу отрицательности его вклада в спектральную функцию, но вследствие того, что его появление приводит к беспрецедентному нарушению эрмитовости гамильтониана. Неэрмитов гамильтониан неприемлем отчасти потому, что он может приводить к комплексным собственным значениям; кроме того (и это главное), соответствующая ему  $S$ -матрица неунитарна, вследствие чего нарушается сохранение вероятности и становится невозможной общепринятая физическая интерпретация. Ни одна из этих трудностей в действительности не возникает в секторе  $N\theta$ , пока мы считаем, что духового полюса в нем нет: мы явным образом проверили, что в этом секторе не наблюдается никаких комплексных значений энергии, а соответствующая  $S$ -матрица унитарна. Однако можно предвидеть появление трудностей в высших секторах модели. В связи с этим мы попытаемся предупредить их, видоизменив физическую интерпретацию векторного пространства модели.

Сначала следует пересмотреть понятие вещественности наблюдаемых и сохранения вероятности. После этого надо попытаться наложить на векторы, которые

будут представлять физически реализуемые состояния, самосогласованные и интуитивно естественные «дополнительные условия». Точное содержание этой программы станет более ясным в ходе ее осуществления.

Поскольку рассматриваемый гамильтониан неэрмитов, он может иметь комплексные собственные значения. Мы пытаемся интерпретировать замкнутую систему таким образом, что комплексные энергии нельзя приписывать распадающимся состояниям. Ни один экспериментатор не надеется наблюдать когда-либо комплексные энергии, и поэтому нам придется отказаться от квантовомеханического догмата, в силу которого все возможные результаты измерения наблюдаемых являются собственными значениями соответствующего оператора. Однако стандартную интерпретацию можно полностью переформулировать в терминах средних значений и матричных элементов операторов вместо их собственных значений. Так средняя энергия некоего состояния — это среднее от  $H$  в этом состоянии. Флуктуации энергии определяются средними значениями различных степеней  $H$ ; состояние с определенной энергией — это состояние с нулевыми флуктуациями энергии и т. д.

Именно эту вторую интерпретацию в терминах средних значений мы и попытаемся сохранить, переопределив *физическую норму* векторов. Пусть существует основное стандартное гильбертово пространство с положительно определенной нормой. Введем оператор метрики  $\eta$  и определим *физическую норму* любого состояния  $|\rangle$  следующим образом:

$$N = \langle |\eta| \rangle. \quad (17.44)$$

(Норму  $N$  следует тщательно отличать от обычной положительно определенной нормы  $\langle | \rangle$ . Обе нормы определены и существуют одновременно.) Соответственно физическое среднее значение некоего оператора  $O$  определяется так

$$O = \langle |\eta O| \rangle, \quad (17.45)$$

т. е. формула (17.44) оказывается частным случаем (17.45) при  $O=1$ . Для краткости, начиная с этого момента, мы вместо слов «физическая норма» и «физическое среднее значение» будем писать просто «норма» и «среднее значение».



Чтобы свести дополнительные усложнения к минимуму, будем считать, что оператор метрики  $\eta$  эрмитов (это позволит избежать появления комплексных вероятностей) и что квадрат его является единичным оператором

$$\eta = \eta^H; \eta^2 = 1. \quad (17.46)$$

Иными словами, оператор  $\eta$  имеет только два собственных значения ( $\pm 1$ ). Определим оператор  $O^A$ , сопряженный (относительно данной метрики) оператору  $O$ , с помощью эрмитово сопряженного оператора  $O^H$  равенством

$$A^A \equiv \eta O^H \eta. \quad (17.47)$$

Будем для простоты называть эту процедуру «сопряжением». Тогда самосопряженный оператор определится равенством

$$O^A = O. \quad (17.48)$$

Чтобы гарантировать отсутствие у какого-то оператора комплексных средних значений, следует считать, что он самосопряжен (относительно данной метрики), поскольку в этом случае

$$\begin{aligned} \langle |\eta O| \rangle^* &= \langle |O^H \eta^H| \rangle = \langle |\eta O^A \eta \eta| \rangle = \\ &= \langle |\eta O^A| \rangle = \langle |\eta O| \rangle. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Поэтому выберем оператор метрики  $\eta$  таким образом, чтобы гамильтониан  $H$  стал бы самосопряженным. Прежде чем рассмотреть частное применение такой процедуры к модели Ли, обсудим некоторые современные математические понятия, которые нам ниже потребуются.

В качестве весьма полезного обзора математических проблем рекомендуем читателям статью Пандита (Pandit, 1959). У нас не будет возможности применять столь общую теорию. Мы просто проиллюстрируем ее на примере одного поразительного результата.

*Собственный вектор самосопряженного оператора, соответствующий комплексному собственному значению, обладает нулевой нормой.*

Докажем это. По предположению

$$\eta Q \eta = Q^H; Q|q\rangle = q|q\rangle; q^* \neq q.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle q|\eta Q|q\rangle &= \langle q|\eta|q\rangle q = \langle q|\eta\eta Q^H\eta|q\rangle = \\ &= \langle q|Q^H\eta|q\rangle = q^* \langle q|\eta|q\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что

$$(q^* - q)\langle q|\eta|q\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Этот результат тесным образом связан с вещественностью средних значений самосопряженных операторов. Если разложить произвольный вектор по собственным векторам самосопряженного оператора  $Q$

$$|> = \sum_i \alpha(q_i) |q_i> ,$$

то получим

$$\begin{aligned}\langle |\eta Q|> &= \sum_i |\alpha(q_i)|^2 q_i \langle q_i|\eta|q_i\rangle = \\ &= \sum_i |\alpha(q_i)|^2 q_i N(q_i).\end{aligned}$$

Иначе говоря, проекции вектора  $|>$  на собственные векторы, соответствующие комплексным собственным значениям, не дают вклада в средние значения. Заметим, что мы предполагали полноту системы собственных векторов  $|q_i>$ , что никоим образом не очевидно и даже не обязательно верно. В равной мере было бы уместно рассматривать этот результат в качестве расширения обычного понятия ортогональности собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Более подробное обсуждение этого вопроса можно найти в статье Пандита (Pandit, 1959).

В то время как наблюдаемые должны теперь быть не эрмитовыми, а самосопряженными, преобразования, сохраняющие норму, должны быть не унитарными, а «псевдоунитарными». По определению, псевдоунитарный оператор  $U$  удовлетворяет условию

$$U^{-1} = \eta U^H \eta = U^A. \quad (17.50)$$

Нетрудно проверить, что векторы  $|>$  и  $U|>$  действительно имеют одинаковую норму:

$$\begin{aligned}\langle |U^A \eta U|> &= \langle |\eta U^A \eta \eta U|> = \langle |\eta U^A U|> = \\ &= \langle |\eta U^{-1} U|> = \langle |\eta|>.\end{aligned} \quad (17.51)$$

Самосопряженный гамильтониан автоматически приводит к псевдоунитарной  $S$ -матрице аналогично тому, как эрмитов гамильтониан приводит к унитарной  $S$ -матрице.

В нашем распоряжении теперь есть формализм, который позволяет рассматривать неэрмитовы наблюдаемые без предположения, что результаты экспериментов должны быть комплексными. Выполнены также условия сохранения нормы или вероятности. Формализм имеет только один недостаток — соответствующее векторное пространство включает состояния с отрицательной нормой. Очевидно, обойти эту последнюю трудность можно, если наложить дополнительное условие, согласно которому только векторы с положительной нормой могут представлять физически реализуемые состояния. Хотя такое условие звучит правдоподобно, оно определенно не является достаточно сильным. Чтобы убедиться в этом, разложим произвольное состояние по собственным векторам оператора метрики  $\eta$ :

$$|\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle, \quad (17.52)$$

где  $|\pm\rangle$  — состояния, нормы которых равны  $(\pm 1)$ :

$$\langle +|\eta|+\rangle = +1 = -\langle -|\eta|-\rangle.$$

Тогда норма состояния  $|\rangle$  имеет вид

$$\langle |\eta| \rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

Если принять всерьез сформулированное выше дополнительное условие, то следует заключить, что при  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  состояние  $|\rangle$  — это допустимое нормируемое состояние. Тогда амплитуда вероятности того, что система, первоначально приготовленная в состоянии  $|\rangle$ , будет затем найдена в состоянии  $|+\rangle$ , равна

$$\begin{aligned} \langle +|\eta| \rangle &= \langle +|\eta\{\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle\} = \\ &= \alpha \langle +|\eta|+\rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Вероятность же последнего события равна  $|\alpha|^2$ , что превышает единицу и, разумеется, абсурдно.

Чтобы избежать подобного рода противоречий, необходимое дополнительное условие следует уточнить по крайней мере так: при заданном полном наборе базисных векторов любой вектор состояния допустим с физической точки зрения лишь в том случае, если он, будучи

разложен по набору базисных векторов, содержит компоненты только с положительной нормой.

Кроме того, это дополнительное условие, очевидно, должно оставаться справедливым во все моменты времени, т. е. оно должно коммутировать с гамильтонианом, который определяет временную эволюцию системы. Это означает, что единственным возможным набором базисных векторов является набор собственных векторов гамильтониана. Попытаемся теперь сформулировать обсуждаемое дополнительное условие следующим образом.

*Вектор состояния может представлять физически реализуемое (т. е. допустимое) состояние тогда и только тогда, когда принадлежит подпространству, натянутому на собственные векторы гамильтониана с положительной нормой.* (17.53)

В свете основ квантовой механики дополнительное условие (17.53) имеет почти приемлемую форму. Очевиден лишь один его дефект — неопределенность в тех случаях, когда гамильтониан вырожден и имеет несколько собственных векторов, принадлежащих одному и тому же собственному значению. Нетрудно представить усложнения, скрытые в подобной ситуации. Эта проблема далека от академичности, ибо в теории элементарных частиц в основном рассматриваются процессы рассеяния, которые, очевидно, происходят между состояниями непрерывного спектра, т. е. между вырожденными состояниями. Мы вернемся к обсуждению этой проблемы в следующем параграфе, где выяснится, что, хотя теории с индефинитной метрикой можно сделать самосогласованными, их, вообще говоря, невозможно использовать для описания системы взаимодействующих элементарных частиц.

Пока же заметим, что сформулированное условие ограничивает рассмотрение подпространством с положительно определенной нормой. Поэтому, по крайней мере в принципе, оказывается возможным изложить всю теорию в форме, в которой векторы с отрицательной нормой никогда не возникают. Подобная переформулировка достигается ценой чрезвычайного усложнения соответствующей системы уравнений. Таким образом, формально *проще* оперировать индефинитной метрикой совместно с дополнительным условием, нежели с положительно определенной метрикой. Такое рассмотрение

было впервые в явном виде предложено Судершаном (Sudershan, 1961).

Отметим наконец, что  $S$ -матрица будет автоматически преобразовывать всякий вектор, удовлетворяющий условию (17.53), в другой такой же вектор, поскольку  $S$ -матрица и гамильтониан можно диагонализировать совместно.

Обратимся теперь к модели Ли. Необходимо найти оператор метрики  $\eta$ , относительно которого гамильтониан  $H$  будет самосопряжен, когда константа  $g_0$  чисто мнимая. Тогда нетрудно понять [см. формулу (17.3)], что, исключая член с  $\delta m_V$ , оператор  $H_{int}$  будет антиэрмитовым:

$$H_{int} = -(H_{int})^H. \quad (17.54)$$

Поэтому выберем

$$\eta = (-1)^{n_V} = (-1)^{\frac{1}{2}V^{\dagger}V}, \quad (17.55)$$

так что

$$\eta |n_V, n_N, \{n_k\}\rangle = (-1)^{n_V} |n_V, n_N, \{n_k\}\rangle. \quad (17.56)$$

Используя соотношения коммутации (17.4), сразу можно получить

$$\begin{aligned} \{\psi_V, \eta\} = 0 &= \{\bar{\psi}_V, \eta\}; \\ (H_{int})^A = \eta (H_{int})^H \eta &= -\eta (H_{int}) \eta = H_{int}, \end{aligned} \quad (17.57)$$

что и требовалось установить.

Норма одночастичного состояния  $V$ -частицы с учетом соотношений (17.6), (17.8) и (17.17) принимает вид

$$\begin{aligned} |V\rangle &= C_V \left\{ |1, 0, 0\rangle + \sum g_0 V^{-1/2} \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} \frac{1}{\omega} |0, 1, 1_k\rangle \right\}, \\ \langle V | \eta | V \rangle &= C_V^2 \left\{ -1 + |g_0|^2 V^{-1} \sum u^2(\omega)/(2\omega^3) \right\} = \\ &= C_V^2 \left\{ -1 + \gamma_0^2 f(0) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку без потери общности можно всегда выбрать константу  $C_V$  вещественной, то выражение  $\langle V | \eta | V \rangle$  будет положительным, если  $|\gamma_0|^2 > 1/f(0)$ . Но, согласно (17.32), всякий раз, когда константа  $\gamma^2$  превышает критическое значение, так что константа  $\gamma_0^2$  становится отрицательной, последняя действительно будет по

абсолютной величине больше  $1/f(0)$ . Поэтому физическое состояние  $V$ -частицы всегда имеет положительную норму. Аналогично можно найти разложение и для духового состояния и убедиться в том, что его норма всегда отрицательна, чего мы и ожидали. Выяснение этого мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Нормы состояний рассеяния  $N\theta$  также всегда положительны.

Таким образом, в секторе  $N\theta$  легко воссоздать порядок из хаоса, наложив дополнительное условие (17.53), которое просто позволяет забыть о существовании духового состояния. Это успешное решение вопроса заставляет подумать о возможности применения всего формализма к высшим секторам модели за счет введения индефинитной метрики.

#### § 17.4. ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ

Рассмотрим теперь вопрос о возможности применения модификации теории, справедливой для сектора  $N\theta$  в присутствии духа, также и к высшим секторам модели. Мы выясним, что эта модификация ничего там не спасает. Очевидно, что подобного рода трудности всегда будут препятствовать согласованной интерпретации любого формализма с индефинитной метрикой в качестве теории, описывающей частицы.

Рассмотрим следующий после  $N\theta$  сектор с  $B=1$ ,  $Q=1$ . Его принято называть сектором  $V\theta$ ; в представлении голых частиц в него входят следующие векторы:

$$|0, 1, 1_k, 1_{k'}\rangle \text{ и } |1, 0, 1_k\rangle.$$

Они характеризуют состояния, в которых правилами отбора разрешены следующие процессы столкновения (и обратные им реакции):

I. Упругое рассеяние:  $V+\theta \rightarrow V+\theta$ .

II.  $\theta$ -рождение:  $V+\theta \rightarrow N+\theta+\theta$ .

III. Рождение духа:  $V+\theta \rightarrow \text{Дух}+\theta$ .

IV. Трехчастичное рассеяние:  $N+\theta+\theta \rightarrow N+\theta+\theta$ .

V. Трехчастичное рассеяние с образованием духа:  
 $N+\theta+\theta \rightarrow \text{Дух}+\theta$ .

В лучшем случае можно рассчитывать на то, что столкновения между частицами, каждая из которых в отдельности является собственным состоянием гамильтониана  $H$  с положительной нормой, породят конечные

состояния без уходящих дѳугов. Иными словами, можно надеяться, что реакции III и V просто не имеют места. Если бы такое предположение в секторе  $V\theta$  было реализовано, то можно было бы надеяться также и на возможность его реализации во всех высших секторах. Желательные ин-состояния (с положительной нормой) — это те состояния, которые содержат падающие  $N$ -,  $\theta$ - и  $V$ -частицы, но не содержат падающих дѳугов. На языке стандартного формализма наше предположение сводится к тому, что  $S$ -матрица, действуя на такие ин-состояния, не порождает аут-состояний, содержащих уходящие дѳухи. Чтобы формализовать это условие, допустим, что  $|i, in\rangle$  — допустимое ин-состояние и определим

$$|f\rangle = S|i, in\rangle.$$

Здесь  $|f\rangle$  — некоторая сложная суперпозиция аут-состояний. Условие псевдоунитарности, конечно, выполняется автоматически, т. е.

$$\langle f|\eta|f\rangle = \langle i, in|\eta|i, in\rangle; S^{-1} = \eta S^{\dagger}\eta.$$

Однако сформулированное выше предположение приводит теперь дополнительно к тому, что состояние  $|f\rangle$  не должно содержать никаких компонент с отрицательной нормой. Поскольку состояние  $|i, in\rangle$  уже удовлетворяет тому же условию (по определению), то

$$\langle f|f\rangle = \langle i, in|i, in\rangle, S^{-1} = S^H. \quad (17.58)$$

Иными словами,  $S$ -матрица должна быть одновременно и унитарной, и псевдоунитарной. Мы уже проверили, что это утверждение действительно справедливо для подматрицы  $S$  в секторе  $N\theta$ ; остается выяснить, выполняется ли такое условие и в общем случае. Эта возможность никоим образом не исключена и реализуется, например, в электродинамике.

К сожалению, еще никому не удалось привести к диагональному виду гамильтониан модели в секторе  $V\theta$ . Но можно высказать ряд общих соображений, скажем, о матричном элементе  $S$ -матрицы для процесса I ниже неупругого порога процесса II, т. е. для энергий  $\omega < 2\mu$ . Если бы все было в порядке, то он играл бы роль просто амплитуды упругого рассеяния  $V\theta$ . Однако в действительности  $S$ -матрица, соответствующая данному процессу, оказывается неунитарной, иначе говоря, полный поток упруго рассеянных  $\theta$ -частиц не равен па-

дающему потоку. Это указывает, хотя и косвенно, на то, что одновременно должна протекать и реакция III, поскольку реакция II запрещена по энергетическим соображениям. (Вспомним, что дух расположен в энергетическом спектре ниже частиц  $V$  и  $N$ .) Матричный элемент  $S$ -матрицы для упругого  $V\theta$ -рассеяния недавно был в замкнутой форме найден Амадо (Amado, 1961); мы воспользуемся этим результатом, чтобы проиллюстрировать наше утверждение подробно. Амадо исходил из соотношения

$$S_{kk'} = \delta_{kk'} + 2\pi i \delta(\omega - \omega') \frac{u^2(\omega)}{2\omega V} T(\omega)$$

с

$$T(\omega) = \frac{g^2}{\omega} \left\{ \frac{1 - \gamma^2 \omega C(\omega)}{1 + \gamma^2 \omega C(\omega)} + \gamma^2 \hat{f}(\omega + i\varepsilon) \right\}^{-1}, \quad (17.59)$$

где функция  $\hat{f}(\omega)$  была определена формулой (17.33), а функция  $C(\omega)$  имеет вид

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\omega'}{\omega'} \operatorname{Im} [1 + \gamma^2 \hat{f}(\omega')]^{-1} \frac{\hat{f}(\omega - \omega')}{1 + \gamma^2 \hat{f}(\omega - \omega')}. \quad (17.60)$$

Условие унитарности  $S$ -матрицы  $S^H S = 1$  приводит к знакомому соотношению

$$\operatorname{Im} T(\omega) = \frac{ku^2(\omega)}{4\pi} |T(\omega)|^2,$$

которое мы перепишем в виде

$$\operatorname{Im} T^{-1}(\omega) = -ku^2(\omega)/(4\pi). \quad (17.61)$$

Проверим теперь, удовлетворяет ли этому соотношению амплитуда  $T(\omega)$  вида (17.59) при  $\omega < 2\mu$ . Рассмотрим сначала случай, когда никаких духов нет, т. е. функция  $[1 + \gamma^2 \hat{f}(\omega)]$  не имеет нулей. Тогда при  $\omega < 2\mu$  интеграл (17.60) веществен, так что из соотношения (17.59) следует

$$\operatorname{Im} T^{-1}(\omega) = \frac{\omega}{g^2} \gamma^2 \operatorname{Im} \hat{f}(\omega) = -ku^2(\omega)/(4\pi)$$

и условие (17.61) действительно выполняется.

С другой стороны, если дух существует, так что функция  $[1 + \gamma^2 \hat{f}(\omega)]$  имеет нуль, то функция  $C(\omega)$  будет комплексной при всех значениях  $\omega$ , и условие унитарности, очевидно, нарушится. Читателям в качестве



упражнения предлагается убедиться в этом, показав, что падающий поток ослабляется меньше, чем при (допустимом) рассеянии в упругом канале. Поэтому не надо даже проверять, существует ли в этом секторе дополнительное связанное состояние (которое может привести к появлению допустимого неупругого канала).

Подводя итоги, отметим, что  $\theta$ -частицы, налетающие на  $V$ -частицу, порождают конечные состояния, включающие фермион в  $\theta$ -состоянии и уходящую  $\theta$ -частицу, так что состояние  $|V\theta, in\rangle$  физически не приемлемо.

Имея столь явный контрпример, мы попытаемся установить теперь общую причину, в силу которой теория частиц не может быть сформулирована в векторном пространстве с индефинитной метрикой. Только что мы показали, что для самосогласованности теории необходимо ограничиться подпространством, в котором  $S$ -матрица унитарна; в противном случае в состоянии, в котором первоначально содержались только падающие компоненты с положительной нормой, будут со временем появляться компоненты, содержащие также и уходящие  $\theta$ -кванты. Такое подпространство проще всего охарактеризовать как подпространство, натянутое на собственные векторы  $S$ -матрицы с положительной нормой. Предлагаем читателям проверить, что это условие фактически эквивалентно условию (17.58). Поскольку  $S$ -матрицу можно привести к диагональному виду одновременно с гамильтонианом, то это условие, очевидно, совместимо с сформулированным выше дополнительным условием (17.53). В действительности оно как раз представляет собой то уточнение, которое необходимо в любом случае внести в условие (17.53), прежде чем его можно будет недвусмысленно применять к состояниям, принадлежащим к вырожденному непрерывному спектру. Таким образом, окончательно дополнительное условие принимает следующую форму.

*Произвольный вектор может представлять физически реализуемое (т. е. допустимое) состояние тогда и только тогда, когда он принадлежит подпространству, натянутому на собственные векторы  $S$ -матрицы с положительной нормой.* (17.62)

Такое условие гарантирует возможность интерпретации обсуждаемого квантовомеханического формализма физически осмысленным и самосогласованным образом.

( $S$ -матрице можно придать смысл и вне рамок теории частиц.) Однако мы уже не в состоянии приспособить к этому условию еще и асимптотическое условие, т. е. то единственное условие, которое позволяет интерпретировать всякую теорию поля в терминах частиц. Чтобы понять, как это происходит, достаточно заметить, что анализ асимптотического поведения собственных векторов  $S$ -матрицы показывает, что они содержат, за исключением счастливых случайных совпадений, смесь *всех* сортов ин- и аут-состояний. Следовательно, невозможно добиться интерпретации допустимых ин- и аут-состояний как состояний рассеяния частиц, каждое из которых в отдельности имеет положительную норму.

Иными словами, если разложить все векторы сначала по ин-состояниям, а затем по аут-состояниям, то можно будет наложить дополнительное условие, допускающее *либо* только ин-состояния с положительной нормой, *либо* только аут-состояния с положительной нормой. Но теория исключает возможность выполнения *обоих* этих условий одновременно.

Итак, можно заключить, что при наличии духовых состояний формализм модели Ли нельзя больше интерпретировать как теорию частиц. Важно понимать, что источник этой трудности связан не с индефинитной метрикой как таковой, а с существованием духов. Например, в электродинамике метрика также индефинитна, но уязвимой особенностью гамильтониана, которую необходимо устранить, оказывается отнюдь не его неэрмитовость, а отсутствие приемлемых нормируемых собственных состояний. Поэтому  $S$ -матрица может быть сделана одновременно унитарной и псевдоунитарной, и последовательная физическая интерпретация оказывается возможной.

Вместе с тем нет оснований считать, что ни при каких обстоятельствах никакую теорию с индефинитной метрикой нельзя интерпретировать как теорию частиц. Это утверждение относится к общему случаю; исключения устанавливаются путем особого рассмотрения.

Окончательная разумность выводов, которые можно сделать из изучения модели Ли, зависит от ответов на два разных вопроса. Встречаются ли духи в реальной теории поля? Если да, то связано ли их появление с причинами, схожими с соответствующими причинами в модели Ли, и также ли их трудно интерпретировать?

Поскольку в настоящих теориях все еще не удается найти точных решений, ни на один из этих вопросов нельзя дать определенного ответа. Однако было сделано несколько вполне серьезных утверждений, которые заслуживают беспристрастного обсуждения. В частности, Ландау (Landau, 1955) и его ученики неоднократно утверждали, что ряды теории возмущений в электродинамике испытывают «насыщение», подобно соответствующим рядам в модели Ли, сохраняя ту же поразительную особенность: критическое значение перенормированной постоянной тонкой структуры оказывается равным нулю. В этом случае успехи теории возмущений необходимо приписать тому, что эти ряды оказываются асимптотическими. Вопрос о том, какой в точности ряд оказывается асимптотическим, все еще является спорным.

Другой и совершенно отличной проблемой, в которой духи играют доминирующую роль, является теория Гейзенберга. Гейзенберг поставил задачу получить всю совокупность элементарных частиц, исходя из одного основного нелинейного спинорного уравнения поля, в которое для установления масштаба в спектре масс введена элементарная длина. Эта теория, при использовании ее для получения спектра масс частиц, не может мириться с расходимостями обычных инвариантных функций на световом конусе. Но эти расходимости удастся смягчить, только допустив возможность отрицательных вкладов в спектральную функцию, отрицательные же вклады могут реализоваться только при наличии духовых состояний. Иначе говоря, теория Гейзенберга обязательно действует в векторном пространстве с индефинитной метрикой. Она является наиболее важным примером такого специального исследования, о котором мы говорили выше.

## Глава 18

### БЕСКОНЕЧНОЕ ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

#### § 18.1. ВВЕДЕНИЕ

Характерная особенность, отличающая поле от любой другой физической системы, состоит в том, что оно обладает бесконечным числом степеней свобо-

ды. Было бы удивительно и досадно, если бы эта отличительная черта не нашла бы отражения в соответствующем квантовомеханическом формализме, поскольку в этом случае не было бы никакой возможности извлечь все то огромное богатство, которое заложено в теории поля. С другой стороны, следует ожидать, что более обширное физическое содержание приведет к дополнительным математическим усложнениям. И хотя напоминание об этом вызывает у большинства физиков нечто вроде головной боли, мы повторяем, что в принципе такие дополнительные усложнения должны только приветствоваться.

В связи с этим содержание предыдущих глав может послужить «обвинением» в желании вернуться от решения этих существенных проблем теории поля. В этом «преступлении» признают себя виновными большинство физиков. Действительно, важнейшее достижение теории элементарных частиц состояло до сих пор в надежном выделении тех предсказаний, которые *не* зависят от этих главных трудностей. Чтобы их преодолеть, придется, по крайней мере временно, поручить «следствие» детальной динамике, с точки зрения которой, например, «ненаблюдаемость» бесконечных констант перенормировки не может более служить в качестве алиби.

Бесконечность числа степеней свободы поля устанавливается почти тривиально посредством рассмотрения гильбертова пространства, натянутого на обычное представление операторов свободного поля. В то же время можно определить, является ли размерность этого пространства бесконечно счетной или несчетной. Это различие весьма важно.

Рассмотрим нормировочный ящик с периодическими граничными условиями. Нейтральное скалярное поле, которое в этом отношении является типичным представителем бозонных полей, может быть разложено на взаимно независимые нормальные колебания типа плоских волн

$$\varphi(x) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} (2\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2} [a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} + a_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}x}]. \quad (18.1)$$

В этой главе мы будем обозначать величину  $\omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$  через  $\omega$ , а величину  $|\mathbf{k}|$  — через  $k$  всюду, где это не будет приводить к недоразумениям. Следствием одновременных канонических соотношений коммутации

$$[\varphi(x), \varphi(x')]_{x_0=x'_0} = i\delta(x - x') \quad (18.2)$$

является равенство

$$[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}, \quad (18.3)$$

из которого видно, что каждое нормальное колебание имеет ту же квантовомеханическую структуру, что и простой гармонический осциллятор. Каждый такой осциллятор поля имеет свое собственное гильбертово пространство с основным состоянием  $|0\rangle_k$ , характеризующимся соотношениями:

$$a_k|0\rangle_k; \quad k\langle 0|0\rangle_k = 1, \quad (18.4)$$

и бесконечную последовательность собственных состояний оператора числа частиц  $N_k = a_k^* a_k$ . Гильбертово пространство всего поля является прямым произведением соответствующих пространств таких простых осцилляторов. Поскольку каждый осциллятор имеет бесконечное счетное множество ( $M$ ) состояний и существует бесконечное счетное множество ( $N$ ) осцилляторов, то число измерений полного гильбертова пространства равно

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} M^N,$$

где  $M$  и  $N$  стремятся к бесконечности, принимая целочисленные значения. Математикам известно, что такой предел несчетен (и равен мощности континуума).

Если разложить на нормальные колебания некое ферми-поле, то операторные коэффициенты  $a_k$  будут удовлетворять соотношению антикоммутиации

$$\{a_k, a_{k'}^*\} = \delta_{kk'}, \quad (18.5)$$

так что оператор числа частиц  $N_k$  будет иметь только два собственных значения: 0 и 1. Поэтому число измерений соответствующего полного гильбертова пространства равно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2^N,$$

что снова есть континуум.

Эти вводные замечания, возможно, поразят читателей своей абстрактностью, поскольку в любой заданной конкретной физической ситуации они вряд ли имеют

отношение к делу. Чтобы рассеять такое ошибочное впечатление, мы рассмотрим теперь самую простую и наиболее тривиальную из всех моделей теории поля, а именно модель нейтрального скалярного поля, взаимодействующего с фиксированными классическими точечными источниками. Всем известно, что в этой модели можно найти точное решение путем диагонализации модельного гамильтониана с помощью простого унитарного преобразования. Ниже мы покажем, что это унитарное преобразование в обычном смысле не существует. Ему нельзя придать хоть какой-то смысл без полного знания существенно теоретико-полевых аспектов гильбертова пространства. К тому же можно показать, что в отличие от ситуации в модели Ли указанные существенные черты данной модели обобщаются на случай реальных теорий поля. Это обобщение будет рассмотрено в следующей главе.

## § 18.2. НЕЙТРАЛЬНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ С ФИКСИРОВАННЫМИ КЛАССИЧЕСКИМИ ТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Эта модель рассмотрена в книгах Вентцеля (Вентцель, 1947) и Хенли и Тирринга (Хенли, Тирринг, 1963). Ее парадоксальные черты в этих книгах подробно не обсуждались; они были впервые отмечены Фридрихсом (Fridrichs, 1953) и Ван Ховом (Van Hove, 1952). Наш подход несколько отличается от всех этих работ.

Будем действовать в представлении Шредингера. Гамильтониан в случае протяженных источников имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 + H_{int}; \\ H_0 &= \int \frac{1}{2} \{ \pi^2(x) + [\nabla\varphi(x)]^2 + \mu^2\varphi^2(x) \} dx; \\ H_{int} &= g \sum_i \{ f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \varphi(x) dx. \end{aligned} \right\} (18.6)$$

Отметим, что в этой модели не существует никаких степеней свободы и, следовательно, никаких операторов, относящихся к источникам. Источники расположены в точках  $\mathbf{x}_i$  и характеризуются формфакторами  $f$ , которые сферически симметричны и быстро убывают с увеличе-

нием расстояния от источника. Если определить фурье-образ формфактора в виде

$$f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u(k),$$

то его предел в случае точечного источника, т. е. при отсутствии обрезания, будет:

$$f(\mathbf{r}) \rightarrow \delta(\mathbf{r}); \quad u(k) \rightarrow 1.$$

Отметим, что в противоположность ситуации в модели Ли здесь предельный случай точечного источника соответствует локальной связи.

Наличие обрезания означает, что мезоны по мере увеличения их импульсов все менее и менее сильно взаимодействуют с источником. Поэтому не следует ожидать появления отличительных теоретико-полевых черт модели иначе, как в пределе точечного источника. Чтобы представить себе это наглядно, вспомним, что в теориях с обрезанием точная форма обрезания обычно не существенна. Поэтому если положить просто  $u(k) = \theta(K-k)$ , так что мезоны с импульсами, превышающими  $K$ , не будут взаимодействовать с источниками вовсе, то (в нормировочном ящике) число соответствующих степеней свободы естественно станет конечным.

Выразим модельный гамильтониан через нормальные колебания оператора поля, введенные соотношением (18.1); правда, в данном случае, поскольку используется представление Шредингера, отсутствуют зависящие от времени фазовые множители. Тогда получим

$$H = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} [(H_{\mathbf{k}})_0 + (H_{\mathbf{k}})_{int}], \quad (18.7)$$

где

$$(H_{\mathbf{k}})_0 = \omega a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}};$$

$$(H_{\mathbf{k}})_{int} = gV^{-1/2} \sum_i \frac{u(\omega)}{(2\omega)^{1/2}} [a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_i} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_i}]. \quad (18.8)$$

Значение энергии в начале координат здесь опущено. Разрешимость модели основана на том, что оператор  $H$  распадается на взаимно независимые (т. е. коммутирующие) компоненты  $H_{\mathbf{k}}$ .

Решающий шаг при диагонализации оператора  $H_{\mathbf{k}}$  (и следовательно,  $H$ ) — представление каждого оператора  $H_{\mathbf{k}}$  в виде

$$H_{\mathbf{k}} = \omega b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} + c_{\mathbf{k}}, \quad (18.9)$$

где  $c_k$  —  $c$ -число, а операторы  $b_k, b_k^*$  отличаются от операторов  $a_k, a_k^*$  только на  $c$ -числа  $\alpha_k, \alpha_k^*$ :

$$b_k = a_k + \alpha_k; \quad b_k^* = a_k^* + \alpha_k^*. \quad (18.10)$$

Выражения для констант  $\alpha_k$  и  $c_k$  можно получить путем прямого сравнения формул (18.8) и (18.9):

$$\alpha_k = gV^{-1/2} \frac{u(\omega)}{(2\omega^3)^{1/2}} \sum_i e^{-ikx_i}; \quad (18.11)$$

$$c_k = -g^2V^{-1} \frac{u^2(\omega)}{2\omega^2} \sum_{i,j} e^{-ik(x_i - x_j)}. \quad (18.12)$$

Отметим, что

$$\alpha_k = \alpha_{-k}^*.$$

В силу равенств (18.10) оператор  $b_k$  подчиняется тем же самым соотношениям коммутации (18.3), что и  $a_k$ . Но можно доказать, что неприводимое представление этих соотношений коммутации единственно с точностью до унитарного преобразования. Поэтому существует унитарный оператор  $U_k$  такой, что

$$U_k a_k U_k^{-1} = b_k. \quad (18.13)$$

Применяя преобразование  $U_k^{-1} \dots U_k$  к оператору  $H_k$ , представленному в виде (18.9), и используя соотношения (18.3), получаем

$$U_k^{-1} H_k U_k = \omega a_k^* a_k + c_k = (H_k)_0 + c_k. \quad (18.14)$$

Иначе говоря, унитарный оператор  $U_k$  диагонализует оператор  $H_k$  в том же представлении, в котором диагонален сам оператор  $(H_k)_0$ . Спектры этих операторов имеют одинаковую структуру и только смещены друг относительно друга на величину  $c_k$ .

Чтобы найти выражение для оператора  $U_k$ , полезно вспомнить, что из операторов  $a_k$  и  $a_k^*$  можно составить две линейные комбинации  $q_k$  и  $p_k$ , которые удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и опера-



торы координаты и импульса в обычной квантовой механике. Эти комбинации имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} q_k &= (a_k^* + a_k)/\sqrt{2}; \\ p_k &= i(a_k^* - a_{-k})/\sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

Каждая из них представляет собой смесь двух нормальных колебаний с равными и противоположно направленными импульсами. При преобразовании  $a_k \rightarrow b_k$  операторы  $q_k$  и  $p_k$  переходят в операторы  $q'_k$  и  $p'_k$  вида:

$$\left. \begin{aligned} q'_k &= q_k + (\alpha_k^* + \alpha_{-k})/\sqrt{2} = q_k + \sqrt{2}\alpha_k^*; \\ p'_k &= p_k + i(\alpha_k^* - \alpha_{-k})/\sqrt{2} = p_k. \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Во вспомогательном пространстве, в котором оператор  $q_k$  играет роль оператора координаты, преобразование (18.16), очевидно, представляет собой просто сдвиг начала координат на расстояние  $\sqrt{2}\alpha_k^*$  относительно каждой из координатных осей. Порождающий это преобразование оператор  $U_k$  может быть записан с помощью канонического импульса  $p_k$  в виде

$$\begin{aligned} U_k &= \exp \{i\sqrt{2}\alpha_k^* p_k\} = \\ &= \exp \left\{ -gV^{-1/2} \frac{u(\omega)}{(2\omega^3)^{1/2}} (a_k^* - a_{-k}) \sum_i e^{ikx_i} \right\}. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Для краткости запишем его следующим образом:

$$U_k = \exp \{ -(\alpha_k^* - \alpha_{-k}) y_k \}, \quad (18.18)$$

где  $y_k$  определяется путем сопоставления формул (18.17) и (18.18). Унитарный оператор  $U$  для всей системы является просто произведением операторов

$$U = \prod_{(k)} U_k. \quad (18.19)$$

Поскольку в действительности оператор  $U_k$  смешивает два нормальных колебания с импульсами  $\mathbf{k}$  и  $(-\mathbf{k})$ , то удобно из (18.19) выделить произведение

$$\hat{U}_k = U_k U_{-k}, \quad (18.20)$$

где индекс  $\mathbf{k}$  в  $\hat{U}_k$  ограничен только одной полусферой (например,  $k_2 \geq 0$ ).

Для дальнейшего удобно переписать  $\hat{U}_k$  в нормальной форме, т. е. таким образом, чтобы все операторы рождения были под знаком одной экспоненты, а все операторы уничтожения — под знаком другой. Для этой цели воспользуемся тождеством\*, применимым к операторам  $A$  и  $B$ , коммутатор которых перестановочен с  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp(A) \exp(B) \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right) = \\ &= \exp(B) \exp(A) \exp\left(\frac{1}{2}[A, B]\right), \end{aligned} \quad (18.21)$$

и, следовательно,

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A) \exp(-[A, B]).$$

С учетом соотношения (18.21) перепишем  $U_k$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{U}_k &= e^{-y_k a_k^*} e^{y_k a_{-k}} e^{-y_{-k} a_{-k}^*} e^{y_{-k} a_k} = e^{-y_k a_k^*} e^{-y_{-k} a_{-k}^*} \times \\ &\times e^{y_k a_{-k}} e^{y_{-k} a_k} \exp([y_k a_{-k}, -y_{-k} a_{-k}^*]); \\ \hat{U}_k &= \exp(-y_k a_k^* - y_{-k} a_{-k}^*) \times \\ &\times \exp(y_k a_{-k} + y_{-k} a_k) \exp(-y_k y_{-k}). \end{aligned}$$

Тогда оператор  $U$  можно представить в виде, в котором суммирование вновь осуществляется по всем векторам  $k$ :

$$U = \exp\left\{-\sum_k a_k^* y_k\right\} \exp\left\{\sum_k a_k y_{-k}\right\} \exp\left\{-\sum_k y_k y_{-k}\right\}.$$

Воспользовавшись конкретным выражением для  $y_k$ , получим

$$U = \exp\left\{-gV^{-1/2} \sum_k \frac{u(\omega)}{(2\omega^3)^{1/2}} \sum_i e^{ikx} a_k^*\right\} \times$$

\* Это формула Бекера — Хаусдорфа, справедливая для коммутатора, являющегося  $c$ -числом. Ссылки на литературу см., например, в работе G. H. Weiss, A. A. Maradudin. [J. Math. Phys., 3, 771 (1962)].

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ gV^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{u(\omega)}{(2\omega^3)^{1/2}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_i} a_{\mathbf{k}} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -g^2V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{u^2(\omega)}{2\omega^3} \sum_{i,j} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \right\}. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Согласно построению [см. (18.14)] оператор  $U$  диагонализует полный гамильтониан

$$U^{-1}HU = H_0 + W, \quad (18.23)$$

где

$$W = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} = -g^2V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{u^2(\omega)}{2\omega^3} \sum_{i,j} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \right\}.$$

Физический смысл преобразования (18.23) совершенно ясен. После диагонализации в полный гамильтониан модели входит  $c$ -числовая потенциальная энергия  $W$ , которая включает как собственную энергию каждого источника (члены с  $i=j$ ), так и энергию взаимного притяжения различных источников (члены с  $i \neq j$ ); последняя представляет собой просто потенциал Юкавы. В то же время  $g$ -числовая часть  $H$  — это просто гамильтониан свободного мезонного поля. Следовательно, физические мезоны, которые рождаются при действии операторов  $b_{\mathbf{k}}^*$  на физический вакуум, не взаимодействуют друг с другом или с источниками. Физические  $n$ -мезонные состояния (собственные состояния оператора  $H$ ) получаются при действии оператора  $U$  на соответствующие состояния голых частиц. (Мы используем здесь термин «голые» в том же смысле, что и в модели Ли. Иными словами, «голое» состояние — это просто собственное состояние операторов  $a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}$ ). Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} |\text{Физический вакуум}\rangle &\equiv | \rangle_0 = U|0\rangle; \\ |\text{Физическое одномезонное состояние}\rangle &\equiv | \rangle_{\mathbf{k}} = \\ &= U| \mathbf{k} \rangle = U a_{\mathbf{k}}^* |0\rangle = b_{\mathbf{k}}^* | \rangle_0. \end{aligned} \right\} (18.24)$$

Можно было бы вполне удовлетвориться таким решением проблемы. Однако для более детального исследования необходимо рассмотреть вопрос о разложении физического вакуума (основного состояния полного га-

мильтониана  $H$ ) по состояниям голых частиц, т. е. по собственным состояниям гамильтониана свободного поля  $H_0$ . Иными словами, желательно выразить состояние  $|\rangle_0$ , характеризующее условиями

$$b_{\mathbf{k}}|\rangle_0 = 0 \text{ для всех } \mathbf{k}; \quad {}_0\langle|\rangle_0 = 1,$$

в представлении, натянутом на собственные векторы операторов числа голых частиц  $a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}$ . Эти последние строятся обычным образом путем многократного действия операторов  $a_{\mathbf{k}}^*$  на состояние голого вакуума  $|0\rangle$ , характеризующее условиями (18.4). Соответствующее разложение имеет вид

$$|\rangle_0 = U|0\rangle = \sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle\{n\}|U|0\rangle. \quad (18.25)$$

Если бы мы хотели вычислить это выражение по теории возмущений, необходимо было бы найти разложение коэффициентов  $\langle\{n\}|U|0\rangle$  по степеням  $g$ . Оказывается, что для иллюстрации ситуации в целом вполне достаточно проанализировать простейший коэффициент  $\langle 0|U|0\rangle$ . Подставляя выражение (18.22) в разложение (18.25), получаем

$$\begin{aligned} \langle|\rangle_0 &= \langle 0|U|0\rangle = \\ &= \exp\left\{-g^2 V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{u^2(\omega)}{2\omega^3} \sum_{i,j} e^{ik(x_i - x_j)}\right\}, \end{aligned} \quad (18.26)$$

поскольку  $q$ -числа в показателях экспонент, входящих в  $U$ , при действии на  $|0\rangle$  дают нуль. В результате каждая такая экспонента обращается в единицу, и единственный нетривиальный член разложения возникает от вклада  $c$ -чисел.

Для простоты мы рассмотрим случай, когда имеется только один источник. Тогда из всей суммы остается только член с  $i=j=1$  и выражение (18.26) принимает вид

$$\langle 0|\rangle_0 = \exp\left\{-\frac{g^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^2 u^2(\omega)}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}}\right\}. \quad (18.27)$$

В предельном случае отсутствия обрезания [ $u(\omega) = 1$ ] интеграл в экспоненте (18.27) расходится, и рассматриваемый матричный элемент стремится к нулю. Иными словами, в случае локального взаимодействия состояния голого и физического вакуума ортогональны. Совершенно аналогичные аргументы применимы к любому состоянию.

*Для локального взаимодействия любое собственное состояние полного гамильтониана  $H$  ортогонально любому собственному состоянию гамильтониана свободного поля  $H_0$ .*

Поэтому теория возмущений, которая полностью основана на разложении одного набора состояний по другому набору состояний, в локальном пределе явно теряет смысл. Кроме того, имеет место более сильное утверждение.

*В локальном пределе любое собственное состояние гамильтониана  $H$  с заданным численным значением константы связи  $g$  ортогонально любому собственному состоянию  $H$  с любым другим значением  $g$  независимо от степени различия этих значений  $g$ .*

Таким образом, если принять гипотезу об «адиабатическом включении взаимодействия», то любое изменение в константе связи приведет к тому, что векторы, на которые натянута рассматриваемая система, окажутся вытолкнутыми в ортогональное к ним подпространство. Наличие *несчетного* числа измерений очевидно.

Операторы, подобные  $U$ , мы будем называть *несобственными унитарными операторами*\*. Они унитарны по внешнему виду, но любой их матричный элемент в данном представлении равен нулю. По той же причине, если имеются представления соотношений коммутаций (такие, как  $a_k$  и  $b_k$ ), которые связаны между собой несобственными операторами, то мы будем называть их «неэквивалентными» (или «несобственно эквивалентными»).

В этом частном случае можно допустить, что несобственный характер оператора  $U$  связан с расходимостью собственной энергии источника, поскольку в данном слу-

---

\* Иногда эти операторы называют «псевдоунитарными». Подробно их формально алгебраические свойства и возможности конструктивного использования в квантовой теории поля обсуждаются в работе W. Weidlich [Nuovo Cim., 30, 803 (1963)]. — *Прим. перев.*

чае эти оба аспекта определяются одним и тем же выражением. Следовательно, остается надежда, что если физические состояния нельзя разложить (как того требует формализм в теории возмущений), то все-таки можно сохранить перенормированную  $S$ -матрицу. В данном случае, когда нет рассеяния,  $S$ -матрица должна быть единичным оператором. Это можно показать фактически непосредственно; подробное доказательство читатели могут найти в работе Ван Хова (Van Hove, 1952). Неперенормированная  $S$ -матрица оказывается единичным оператором, умноженным на бесконечный фазовый множитель, который устраняется простой перенормировкой энергии.

Такова ситуация, которая может возникнуть в гильбертовых пространствах, число измерений которых является несчетным множеством. В следующем разделе мы продолжим систематическое изложение в некоторых весьма скромных пределах нашей точки зрения на математическую сторону этой проблемы.

### § 18.3. НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ КОММУТАЦИИ

В предыдущем параграфе мы ознакомились с различными наборами операторов рождения и уничтожения, которые подчиняются одним и тем же соотношениям коммутации и приводят к операторам энергии и числа частиц, имеющим одинаковые спектры. Тем не менее все одновременные собственные состояния операторов числа частиц любого набора оказались ортогональными всем собственным состояниям всех других наборов. Иными словами, операторы  $U$ , которые неисклюшному читателю могут показаться операторами, порождающими унитарные преобразования одного из наборов операторов в другой, не имеют какого-либо смысла вне пределов того гильбертова пространства, которое натянуто на любое из обычных представлений. Рассмотрим теперь эту ситуацию несколько более подробно. Будем иметь дело с соотношениями как коммутации, так и антикоммутации. В действительности случай антикоммутаторов проще, и мы начнем с него. Это рассмотрение вовсе не претендует на какую-либо строгость. Оно подсказано одной лишь интуицией и не преследует никакой цели, кроме пробуждения у читателей

интереса к более серьезной литературе по данному вопросу.

Рассмотрим антикоммутиатор для *одного* осциллятора, удовлетворяющего статистике Ферми:

$$\{a, a^*\} = \{aa^* + a^*a\} = 1; \quad (18.28)$$

$$\{a, a\} = 0 = \{a^*, a^*\}. \quad (18.29)$$

Известно стандартное представление:

$$\left. \begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}; & a^* &= \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}; \\ N = a^*a &= \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (18.30)$$

Можно доказать, что это представление — единственное неприводимое представление с точностью до унитарно эквивалентных. (Здесь и в дальнейшем понятие «унитарной эквивалентности» всегда будет включать также и «антиунитарную эквивалентность».) Под этим мы понимаем следующее. Любое представление, описываемое матрицами с размерностью больше чем  $2 \times 2$ , сведется к прямой сумме представлений размерности  $2 \times 2$ , каждое из которых унитарно эквивалентно представлению (18.30).

Поскольку матрицы  $1$ ,  $a$ ,  $a^*$  и  $N$  образуют полный набор операторов, результат любого преобразования может быть записан в виде

$$a \rightarrow b = \alpha a + \beta a^* + \gamma N + \delta,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  —  $c$ -числа. В качестве иллюстрации ограничимся унитарными преобразованиями специального вида, когда постоянные  $\gamma$  и  $\delta$  выбираются равными нулю, так что

$$UaU^{-1} = b = \alpha a + \beta a^*. \quad (18.31)$$

Используя тот факт, что унитарное преобразование оставляет антикоммутиаторы неизменными, можно показать, что постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  в соотношении (18.31) связаны условиями:

$$\left. \begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1; \\ 2\alpha\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.32)$$

Поэтому, если отвлечься от тривиальных изменений фазовых множителей, единственными возможными преобразованиями специального вида (18.31) являются преобразования, при которых

$$\left. \begin{array}{l} \text{либо } \alpha = 1, \quad \beta = 0, \\ \text{либо } \alpha = 0, \quad \beta = 1, \end{array} \right\} \quad (18.33)$$

т. е. оператор  $U$  является либо единичным, либо он меняет местами вакуумное и одночастичное состояния. В последнем случае  $U = \sigma_x$ , где  $\sigma_x$  — обычная матрица Паули. Иными словами, любое нетривиальное преобразование вида (18.31) (которое не смешивает оператор  $N$  и единичный оператор с операторами  $a$  и  $a^*$ ) должно быть отмечено дискретным индексом «+» или «—», т. е. оно не может зависеть от непрерывно меняющегося параметра. Для таких преобразований непрерывный параметр можно ввести только в том случае, если смешать операторы рождения и уничтожения одного нормального колебания с соответствующими операторами другого нормального колебания. Одним из примеров оператора, приводящего к смешиванию подобного рода, является матрица Паули, упомянутая выше.

Введем теперь бесконечный набор таких операторов:  $a_k$  с  $k=0, 1, 2, \dots$ , которые подчиняются стандартному обобщению соотношений (18.29):

$$\left. \begin{array}{l} \{a_k, a_{k'}^*\} = \delta_{kk'}; \\ \{a_k, a_{k'}\} = 0 = \{a_k^*, a_{k'}^*\}. \end{array} \right\} \quad (18.34)$$

Операторы  $a_k$  действуют в гильбертовом пространстве, представляющем собой прямое произведение пространств отдельных осцилляторов. Каждый вектор в нем характеризуется набором  $\{n\}$  чисел заполнения; каждое число заполнения в наборе равно либо 0, либо 1.

Предположим, что для некоторых осцилляторов мы поменяли ролями операторы  $a_k$  и  $a_k^*$ . Этого можно добиться с помощью унитарного оператора  $U$ :

$$U a_k U^{-1} = b_k,$$

$$b_k = a_k \text{ для определенных значений } k;$$

$$b_k = a_k^* \text{ для остальных значений } k.$$



Тогда

$$U = \prod_{(k)} U_k,$$

где каждый осциллятор, для которого операторы  $a_k$  и  $a_k^*$  поменялись (не поменялись) ролями, дает в прямое произведение  $U$  вклад  $\sigma_x(k) (1(k))$ . Рассмотрим теперь матричные элементы оператора  $U$  в пространстве, натянутом на собственные состояния оператора  $N = \sum N_k$ , принадлежащие произвольно большому, но конечному собственным значениям. Если оператор  $U$  меняет ролями операторы  $a_k$  и  $a_k^*$  только у конечного числа осцилляторов, то в этом пространстве некоторые его матричные элементы заведомо будут отличны от нуля. С другой стороны, если оператор  $U$  меняет ролями бесконечное число осцилляторов, например, если  $U_k = \sigma_x(k)$  для каждого  $k$ , то *все* его матричные элементы в этом пространстве обратятся в нуль. Чтобы охарактеризовать эту ситуацию, классифицируем векторы состояния полного гильбертова пространства по взаимно исключающим «классам эквивалентности». Именно будем считать, что векторы определенного класса эквивалентности отличаются друг от друга не более чем конечным числом чисел заполнения. Во взаимно однозначном соответствии с такой классификацией векторов состояния можно также ввести и классификацию наборов операторов  $b_k$ . Каждый класс эквивалентности состоит из наборов таких операторов, которые унитарно эквивалентны друг другу. В то же время никаких собственных унитарных операторов, преобразующих некий набор операторов  $b_k$ , относящийся к одному классу эквивалентности, в набор, относящийся к другому классу, не существует.

Таким образом, мы продемонстрировали существование унитарно неэквивалентных представлений соотношений антикоммутации (18.34) для *бесконечного* набора осцилляторов, подчиняющихся статистике Ферми. Некоторые соображения показывают, что таких представлений существует несчетное множество. Это находится в соответствии с нашим предыдущим результатом: размерность гильбертова пространства любого поля континуальна независимо от статистики, которой это поле подчиняется.

Рассмотрим теперь очень кратко случай бозонных полей. Фундаментальное соотношение коммутации для

одного осциллятора, подчиняющегося статистике Бозе, имеет вид  $[a, a^*] = 1$ , и стандартное представление операторов  $a$  и  $a^*$  с помощью бесконечномерных матриц может опять оказаться единственным с точностью до унитарно эквивалентных представлений. (Соответствующее доказательство провести по сравнению со случаем статистики Ферми значительно труднее, поскольку операторы  $a$  и  $a^*$  теперь неограниченны.)

Здесь, однако, мы имеем несравненно больше возможностей для выбора нетривиальных унитарных преобразований операторов  $a$  и  $a^*$ , нежели для осциллятора, подчиняющегося статистике Ферми, даже если по-прежнему не учитывать примеси операторов  $1$  и  $N$ . Простейшим из таких преобразований является преобразование, с которым мы ознакомились в предыдущем параграфе:

$$UaU^{-1} = b = a + \alpha, \quad (18.35)$$

где  $\alpha$  может быть любым  $c$ -числом. Мы убедились, что такое преобразование соответствует сдвигу, ассоциируемому с оператором  $q$ .

Другое простейшее преобразование имеет вид

$$UaU^{-1} = b = \alpha a + \beta a^*, \quad (18.36)$$

где в отличие от (18.32) постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  подчиняются только соотношению

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Это преобразование соответствует масштабному преобразованию операторов  $q$  и  $p$ . В отличие от случая статистики Ферми, оба эти преобразования зависят от непрерывно меняющегося параметра  $\alpha$ .

Перейдем теперь к бесконечному набору операторов  $a_n$ , которые подчиняются обычным соотношениям коммутации (18.3); все же другие пары операторов коммутируют. В этом случае величины  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (18.35) и (18.36) превращаются в функции  $k$ . Как и в случае статистики Ферми, можно провести классификацию по классам эквивалентности. Характерные особенности ее должны быть ясны из примера, обсуждавшегося в предыдущем параграфе. Поэтому, в частности, в обобщении формулы (18.35) оператор  $U = \prod U_n$  является несобственным только тогда, когда расходится сумма

$\sum_k |\alpha_k|^2$ . Последнее замечание дает возможность найти соответствующие ограничения на соотношение (18.36).

Более подробное изложение рассмотренных вопросов можно найти в работе Вайтмана и Швебера (Wightman, Schweber, 1955) и в цитированных там работах. Эту главу мы заканчиваем замечанием, посвященным несколькими иллюстрирующим примерам и комментариям.

#### § 18.4. ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Сделаем важное замечание. Оно относится к пропасти, которую мы совершенно непреднамеренно обошли при изложении основных аксиом, сформулированных в гл. 2. Вспомним, что мы ввели два набора операторов рождения и уничтожения  $a_k^{in}$  и  $a_k^{out}$ . Далее мы утверждали, что эти наборы операторов должны быть связаны унитарным преобразованием  $S$ , согласно формуле (2.6), поскольку оба набора подчиняются одним и тем же соотношениям коммутации или антикоммутации.  $S$ -матрица была просто матрицей этого преобразования в пространстве, натянутом на ин-состояния:

$$S_{ij} = \langle f(out) | i(in) \rangle = \langle f(in) | S | i(in) \rangle. \quad (18.37)$$

В свете результатов данной главы следует заключить, что такой вывод совершенно недопустим. Эти два набора операторов могут с успехом принадлежать различным классам эквивалентности, а в этом случае матричные элементы (18.37)  $S$ -матрицы просто-напросто не существуют. Поэтому предположение об их существовании должно составить содержание независимой аксиомы.

Фактически мы возместили этот недостаток в гл. 2, введя аксиому 0, которая постулирует существование состояния вакуума  $|0\rangle$  со «всеми желательными свойствами». Подразумевается, конечно, что состояние  $|0\rangle$  является вакуумом одновременно для ин- и аут-операторов или, иными словами, состояние  $|0\rangle$  стабильно:

$$a_k^{in}|0\rangle = 0 = a_k^{out}|0\rangle; \quad S|0\rangle = |0\rangle. \quad (18.38)$$

Кроме того, состояние вакуума, будучи дискретным, должно быть нормируемо:

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (18.39)$$

Эти условия автоматически приводят к тому, что  $S$ -матрица оказывается собственным унитарным оператором, поскольку из них следует

$$\langle 0|0 \rangle = \langle 0|S|0 \rangle = 1,$$

в то время как для несобственного оператора  $S$  имело бы место равенство  $\langle 0|S|0 \rangle = 0$ . Резюмируя эти соображения, можно сказать, что существование собственного унитарного оператора  $S$  следует из нашей системы аксиом, но лишь после включения в нее аксиомы  $0^*$ .

Подчеркиваем, что мы, вообще говоря, вовсе не считаем несобственный характер несобственных операторов столь уж отрицательным качеством. Наоборот, мы убеждены в том, что коль скоро будет придан смысл теории поля, такие операторы станут играть в ней центральную роль. Тогда их история окажется аналогичной истории  $\delta$ -функции Дирака, которая также долгое время была в немилости, пока не выяснилось, что подобные обобщенные (несобственные) функции в действительности являются ключом к надлежащему пониманию ковариантности и причинности в теории поля. Разумеется, однако, что хотя такие несобственные унитарные преобразования могут оказаться важными для понимания динамики полей, имеются случаи, когда в силу природы вещей их появление совершенно недопустимо. Например, как мы выяснили в предыдущем параграфе,  $S$ -матрица не может быть несобственным оператором, поскольку из эксперимента известно, что все элементы  $S$ -матрицы равны нулю.

Теперь мы продолжим рассмотрение некоторых примеров. С их помощью мы хотим убедить читателей в том, что несобственные преобразования никоим образом не являются чем-то экзотическим. Напротив, с ними можно столкнуться на каждом шагу в любое время; и они вовсе не являются особенностью моделей, в которых взаимодействия становятся локальными благодаря

---

\* Это утверждение не вполне строго, поскольку в нем предполагается, что всякое унитарное преобразование обязательно является собственным, если любой из его матричных элементов в данном представлении отличен от нуля. Можно проверить, что такой вывод подтверждается во всех частных случаях, которые обсуждаются в этой книге. Есть подозрение, что контрпримеры, если они и существуют, могут быть либо явно искусственными, либо патологическими.

некоему искусственным образом введенному обрезанию, стремящемуся в импульсном пространстве к единице.

Простым преобразованием, включающим только свободные поля, несобственная природа которого впервые была отмечена Яухом (Jauch, 1960), является преобразование Паули для спинорного поля. Оно проливает свет на вопрос о несохранении четности. Это преобразование сводится к следующему:

$$\left. \begin{aligned} \psi \rightarrow U\psi U^{-1} = \psi' = \alpha\psi + i\beta\gamma_5\psi^c; \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \end{aligned} \right\} \quad (18.40)$$

где оператор  $\psi^c$  является зарядово сопряженным к оператору  $\psi$ . Если переписать соотношение (18.40) в импульсном пространстве, то несобственный характер преобразования  $U$  станет очевидным. Проверку этого утверждения мы предлагаем читателям в качестве упражнения. То же самое преобразование фигурирует в нелинейной теории поля Гейзенберга, где оно выражает свойство инвариантности полного лагранжиана (включая взаимодействие). Заметим, что это преобразование не имеет никакого отношения к константам связи и что при обсуждении его обычное обрезание совершенно не играет роли. Если бы мы хотели проинтерпретировать  $U$  как предел некоего собственного преобразования, то это собственное преобразование должно было бы быть обязательно нелокальным. Иначе говоря, преобразованное поле  $\psi'(x)$  должно было бы до перехода к пределу зависеть от первоначального поля  $\psi$  не только в точке  $x$ , но также и в соседних точках.

Еще более простой пример можно заимствовать из работы Намбу и Иона-Лазино (Namby, Jona-Lasinio, 1961). В ней введены два поля  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , подчиняющиеся уравнениям Дирака с различными массами, одну из которых можно выбрать для простоты равной нулю:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi_1 = 0 = \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2.$$

Эти поля также удовлетворяют каноническим одновременным соотношениям антикоммутации:

$$\begin{aligned} \{\psi_1(x), \bar{\psi}_1(y)\}|_{x_0=y_0} &= \gamma_0 \delta(x-y) = \\ &= \{\psi_2(x), \bar{\psi}_2(y)\}|_{x_0=y_0} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (18.41)$$

Наложим на эти поля граничное условие, согласно которому при  $x_0=0$  поля  $\psi_1$  и  $\psi_2$  должны совпадать:

$$\psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0). \quad (18.42)$$

Таким образом, операторы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  не независимы.

Введем обычное разложение поля  $\psi_1$  по плоским волнам [ $k_0 = (k^2 + m^2)^{1/2}$ ]

$$\psi_1(x) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \{ u_1(\mathbf{k}, s) e^{ikx} a_1(\mathbf{k}, s) + v_1(\mathbf{k}, s) e^{-ikx} b_1^*(\mathbf{k}, s) \} \quad (18.43)$$

и аналогичное разложение для  $\psi_2(k_0 = |\mathbf{k}|)$ . Здесь  $a_i$  — оператор уничтожения фермиона сорта  $i$ ;  $b_i^*$  — оператор рождения антифермиона;  $s$  — спиновая степень свободы. Мы выбрали в качестве  $u$  и  $v$  состояния с определенной спиральностью, т. е. собственные состояния оператора  $\sigma_{\mathbf{p}}/|\mathbf{p}|$ , отвечающие собственным значениям  $\pm 1$ . Эти состояния также отмечаются индексом 1 или 2, поскольку они зависят от массы поля. Два вакуумных состояния  $|0_1\rangle$  и  $|0_2\rangle$  характеризуются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1(\mathbf{k}, s)|0_1\rangle = 0 = b_1(\mathbf{k}, s)|0_1\rangle, & \langle 0_1|0_1\rangle = 1; \\ a_2(\mathbf{k}, s)|0_2\rangle = 0 = b_2(\mathbf{k}, s)|0_2\rangle, & \langle 0_2|0_2\rangle = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

Поскольку два рассматриваемых свободных поля не являются независимыми и особенно в свете соотношений (18.41) и (18.43), возникает искушение считать алгебры операторов рождения и уничтожения, лежащих в основе этих двух полей, унитарно эквивалентными. Поэтому будем искать унитарный оператор  $U$  со следующими свойствами:

$$U a_1(\mathbf{k}, s) U^{-1} = a_2(\mathbf{k}, s) \text{ и т. д., } U | \{n\}_1 \rangle = | \{n\}_2 \rangle.$$

Здесь символом  $\{n\}_1$  обозначен набор чисел заполнения частиц первого сорта, тогда как  $\{n\}_2$  обозначает соответствующий набор чисел заполнения частиц второго сорта. Особенно подробно мы рассмотрим частный случай

$$U |0_1\rangle = |0_2\rangle \quad (18.45)$$

и назовем перекрыванием матричный элемент вида

$$\mathcal{O} = \langle 0_1|0_2\rangle = \langle 0_1|U|0_2\rangle. \quad (18.46)$$

Чтобы получить информацию об операторе  $U$ , будем действовать несколько обходным путем. Подставив (18.43) в (18.42), приравняем коэффициенты при каждой плоской волне и выделим отдельные операторы  $a$  и  $b$ , образовав внутреннее произведение с соответствующим спинором в  $4 \times 4$  спиновом пространстве. Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_1(\mathbf{k}, s) &= \alpha_k a_2(\mathbf{k}, s) + \beta_k b_2^*(-\mathbf{k}, s); \\ b_1(\mathbf{k}, s) &= \alpha_k b_2(\mathbf{k}, s) - \beta_k a_2^*(-\mathbf{k}, s); \end{aligned} \right\} \quad (18.47)$$

где с учетом  $\omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $k = |\mathbf{k}|$  коэффициенты имеют вид

$$\alpha_k = \left[ \frac{\omega + k}{2\omega} \right]^{1/2}; \quad \beta_k = \left[ \frac{\omega - k}{2\omega} \right]^{1/2}. \quad (18.48)$$

Формулы (18.47) определяют оператор  $U$ . Рекомендуем читателям в качестве упражнения выписать оператор  $U$  в замкнутой форме. Очевидно  $U = \prod_{\mathbf{k}, s} U_{\mathbf{k}, s}$ , где операторы  $U_{\mathbf{k}, s}$  смешивают только состояния с заданным значением  $s$  и противоположно направленными импульсами  $\mathbf{k}$ .

Используя непосредственно формулы (18.44) и (18.47), находим соотношение

$$|0_1\rangle = \prod_{\mathbf{k}, s} \{ \alpha_k - \beta_k a_2^*(\mathbf{k}, s) b_2^*(-\mathbf{k}, s) \} |0_2\rangle. \quad (18.49)$$

Заметим, что в терминах частиц поля  $\psi_2$  вакуумное состояние поля  $\psi_1$  представляет собой суперпозицию двухчастичных состояний, причем каждая такая пара обладает нулевым полным импульсом и спиральностью  $\pm 2$ .

Вопрос о том, является ли оператор  $U$  собственным оператором, теперь может быть решен, если удастся установить, что перекрывание  $\mathcal{O}$  двух вакуумных состояний отлично от нуля. Подставив (18.49) в (18.46), получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{O} &= \prod_{\mathbf{k}, s} \alpha_k = \prod_{\mathbf{k}, s} \exp \{ \ln \alpha_k \}; \\ \mathcal{O} &= \exp \left\{ 2 \sum_{\mathbf{k}} \ln \alpha_k \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.50)$$

Что касается выяснения сходимости суммы в показателе экспоненты в выражении (18.50), то для этого

достаточно рассмотреть поведение выражения под знаком суммы при больших  $k$ . Когда  $k \rightarrow \infty$ , то

$$\alpha_k \sim 1 - m^2/(8k^2); \quad \ln \alpha_k \sim -m^2/(8k^2). \quad (18.51)$$

Поэтому сумма в показателе экспоненты в формуле (18.50) стремится к  $-\infty$ , так что перекрывание  $\mathcal{O}$  обращается в нуль.

Указанный аргумент, связывающий обращение величины  $\mathcal{O}$  в нуль с расходимостью рассматриваемой суммы, правильный сам по себе, несколько дезориентирует, ибо поведение перекрывания  $\mathcal{O}$  уже определено совершенно другими и гораздо более сильными требованиями. В действительности необходимо исследовать выражение (18.50) несколько более аккуратно: в показатель экспоненты входит сумма по  $k$  без обычного множителя  $V^{-1}$ , где  $V$  — нормировочный объем. Но с точки зрения стандартного соответствия (2.1) выражение (18.50) в действительности ведет себя как

$$\mathcal{O} \approx \exp \left\{ -\frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty m^2 dk \right\}. \quad (18.52)$$

т. е. стремится к нулю независимо от сходимости или расходимости рассматриваемого интеграла, если мы интересуемся лишь результатами, имеющими физический смысл, т. е. теми, которые получаются в пределе  $V \rightarrow \infty$ .

Прежде чем исследовать эту, возможно, неожиданную роль нормировочного объема, заметим, что различие между двумя группами обстоятельств, приводящих к обращению в нуль перекрывания  $\mathcal{O}$ , не является чисто академичным, как это можно установить из рассмотрения аналогичного случая для бозонных полей. Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — два свободных бозонных поля с различными массами:

$$(\square^2 + \mu_1^2) \varphi_1 = 0 = (\square^2 + \mu_2^2) \varphi_2.$$

Пусть также каждое из них подчиняется каноническим одновременным соотношениям коммутации

$$[\varphi_1(x), \dot{\varphi}_1(y)]|_{x_0=y_0} = i\delta(x-y)$$



(и аналогично для  $\varphi_2$ ). Предположим далее, что при  $t=0$  поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а также их первые производные по времени совпадают, т. е.

$$\varphi_1(0, \mathbf{x}) = \varphi_2(0, \mathbf{y}), \quad \dot{\varphi}_1(0, \mathbf{x}) = \dot{\varphi}_2(0, \mathbf{y}).$$

Приравнивая коэффициенты разложения в ряд Фурье слева и справа, получаем

$$a_{1\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\omega_{1\mathbf{k}}2\omega_{2\mathbf{k}})^{1/2}} \{a_{2\mathbf{k}}(\omega_{1\mathbf{k}} + \omega_{2\mathbf{k}}) + a_{2-\mathbf{k}}^*(\omega_{1\mathbf{k}} - \omega_{2\mathbf{k}})\}, \quad (18.53)$$

где

$$\omega_{1\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + \mu_1^2)^{1/2}, \quad \omega_{2\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + \mu_2^2)^{1/2}.$$

Предлагаем читателям в качестве упражнения показать, что равенство (18.53) совместно с

$$a_{1\mathbf{k}}|0_1\rangle = 0 = a_{2\mathbf{k}}|0_2\rangle$$

влечет за собой соотношения:

$$\langle 0_1|0_2\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{2(\omega_{1\mathbf{k}}\omega_{2\mathbf{k}})^{1/2}}{\omega_{1\mathbf{k}} + \omega_{2\mathbf{k}}} \right\} \approx \exp \left\{ - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}{32k^4} \right\};$$

$$\langle 0_1|0_2\rangle \approx \exp \left\{ - \frac{V}{64\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}{k^3} \right\},$$

где интеграл сходится, но тем не менее  $\mathcal{O} \rightarrow 0$  по второй из двух приведенных выше причин, именно в силу предельного соотношения  $V \rightarrow \infty$ . Физический смысл (если он вообще существует) такого различия между случаями фермионных и бозонных полей неясен.

Чтобы установить причины появления объема  $V$  в выражении для перекрывания  $\mathcal{O}$ , рассмотрим еще раз вакуумное состояние  $|0_1\rangle$ , записанное в представлении, соответствующем полю  $\varphi_2$ , т. е. выражение (18.49). Выше уже отмечалось, что оно представляет собой суперпозицию пар частиц и античастиц с противоположно направленными импульсами, т. е. с нулевым полным импульсом. Последнее обстоятельство можно было предвидеть, поскольку вакуум обязательно должен быть трансляционно инвариантным состоянием (имеются в виду сдвиги в обычном евклидовом пространстве); по-

этому три-импульс может иметь только нулевые компоненты. Следовательно, представление, соответствующее полю  $\psi_2$ , порождает следующий вопрос: существует ли вообще трансляционно инвариантное состояние  $|0_1\rangle$  (отличное от соответствующего вакуумного состояния  $|0_2\rangle$ ), которое должно быть нормировано на единицу, ибо оно возникает при действии на  $|0_2\rangle$  преобразования, сохраняющего норму?

Раз уж сущность проблемы была обнажена таким образом до предела, то ответ, очевидно, гласит: нет. Любое трансляционно инвариантное состояние, отличное от вакуума, принадлежит непрерывному спектру оператора полного три-импульса  $\mathbf{P}$ , так что оно может быть нормировано только на  $\delta$ -функцию:

$$\langle \mathbf{P} | \mathbf{P}' \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}'). \quad (18.54)$$

Единственный путь конструирования нормируемого вектора — «размазывание» по  $\mathbf{P}$ :

$$| \rangle = \int d\mathbf{P}' f(\mathbf{P}') | \mathbf{P}' \rangle.$$

Но такое размазывание запрещено требованием трансляционной инвариантности, которое приводит к точному значению  $\mathbf{P}=0$ . Таким образом, не существует никаких нормируемых состояний, пригодных для смешивания с состоянием  $|0_2\rangle$  с целью получения какого-либо нормируемого трансляционно инвариантного состояния, отличного от самого  $|0_2\rangle$ . Более точно, не существует никаких состояний, которые можно было бы смешать с  $|0_2\rangle$  с помощью собственного унитарного преобразования, но мы только что наглядно убедились, что для этой цели пригодны несобственные операторы.

Это частное различие между вакуумом, который является единственным, истинно нормируемым состоянием, и всеми другими состояниями, нормируемыми на  $\delta$ -функцию, в обозначениях, принятых в (18.1), (18.3) для нормировочного ящика, остается до некоторой степени неясным. Следует иметь в виду, что переход к бесконечному объему  $V$  можно осуществить только посредством соотношения эквивалентности (2.1), для чего необходимо переписать (18.1) в виде

$$\varphi(x) = V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} (2\omega)^{-1/2} \{ V^{1/2} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} + V^{1/2} a_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}x} \},$$

где

$$[V/(2\pi)^3]^{1/2} a_{\mathbf{k}} \equiv a(\mathbf{k}).$$

Только теперь можно перейти к пределу  $V \rightarrow \infty$ ; в результате получим

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} (2\omega)^{-1/2} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}].$$

Операторные коэффициенты  $a(\mathbf{k})$  подчиняются теперь соотношениям коммутации вида

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = V (2\pi)^{-3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

которые непосредственно демонстрируют, что в пределе  $V \rightarrow \infty$  все состояния, кроме  $|0\rangle$ , т. е. все состояния типа

$$a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) |0\rangle$$

нормированы на  $\delta$ -функцию.

Переформулируем теперь наши результаты. Вообще говоря, чтобы определить полностью теорию поля, предполагается, что нужно в качестве начальных условий задать значение ( $q$ -числовое) поля, скажем, в момент  $t=0$  (а также значение его первой производной по времени в случае бозонных полей) плюс уравнения движения. Должны выполняться канонические одновременные соотношения коммутации, а поля при  $t=0$  должны составлять полный набор операторов. (Это условие полноты можно в случае необходимости заменить значительно более изощренными, но в данный момент нас это не интересует.) Если упростить ситуацию, ограничившись рассмотрением фиктивного мира, про который известно, что он полностью заполнен теориями свободных, скажем, скалярных полей, то уравнение движения определится единственным образом заданием значения массы.

Кроме того, хотя операторы  $\varphi(x, 0)$  и  $\dot{\varphi}(x, 0)$  предполагаются известными, мы в состоянии сконструировать обычные операторы рождения и уничтожения  $a^*(\mathbf{k})$  и  $a(\mathbf{k})$  из операторов  $\varphi(x, 0)$  и  $\dot{\varphi}(x, 0)$  только в том случае, если величина массы также задана; и только в этом случае можно фиксировать вакуумное состояние условиями типа (18.4) [с заменой  $a_{\mathbf{k}}$  на  $a(\mathbf{k})$ ].

Но мы видели, что для данных значений  $\varphi(\mathbf{x}, 0)$ ,  $\dot{\varphi}(\mathbf{x}, 0)$  вакуумные состояния, определяемые условиями (18.4), для разных значений масс взаимно ортогональны. Иными словами, хотя соответствующая алгебра операторов, определяемая одновременными соотношениями коммутации, одна и та же для всех значений масс, каждое значение массы определяет частное представление этой алгебры; и представления, определяемые различными значениями масс, неэквивалентны (несобственно эквивалентны). Этот же результат можно сформулировать, сказав, что вместо задания значения массы можно с тем же успехом фиксировать теорию свободного поля заданием класса эквивалентности его вакуумного состояния.

То обстоятельство, что простое требование трансляционной инвариантности ограничивает различные теории свободного поля разными (неэквивалентными) подпространствами всего гильбертова пространства, являющегося реализацией представления одновременных соотношений коммутации (18.2), в действительности обобщается на случай взаимодействующих полей. Этому обобщению будет посвящена следующая глава.

Забегаая вперед, укажем следующее.

Допустим, что два свободных бозонных поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  связаны в момент  $t=0$  собственным унитарным преобразованием  $U$ :

$$\varphi_1(\mathbf{x}, 0) = U\varphi_2(\mathbf{x}, 0)U^{-1};$$

$$\dot{\varphi}_1(\mathbf{x}, 0) = U\dot{\varphi}_2(\mathbf{x}, 0)U^{-1}.$$

Оказывается, что если две теории не тождественны (т. е. поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют разные массы), то их одновременные вакуумные средние не могут совпадать, т. е. если  $m_1 \neq m_2$ , то

$$\begin{aligned} & \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) \dots \dot{\varphi}_1(x_j) \dots | 0_1 \rangle \neq \\ & \neq \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) \dots \dot{\varphi}_2(x_j) \dots | 0_2 \rangle. \end{aligned}$$

где  $(x_1)_0 = (x_j)_0 = \dots$  и порядок расположения операторов  $\varphi_i$  и  $\dot{\varphi}_i$  справа и слева одинаков.

## ТЕОРЕМА ХААГА

## § 19.1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля чрезвычайно страдает от того, что хотя в ней многое правдоподобно, однако мало что известно точно. Эта ситуация существует настолько давно, что в предмете в целом возобладала тенденция «лучше иметь синицу в руках, чем журавля в небе». Другими словами, в квантовой теории поля отдается предпочтение получению конкретных результатов перед строгостью, обычно пользующейся вниманием в других областях теоретической физики. Тем не менее даже в квантовой теории поля некоторые результаты действительно известны. Большинство из них получено Вайтманом и его коллегами\*, и соответствующие доказательства, вообще говоря, базируются на основательном использовании самых общих требований теории, подобных ковариантности и локальности.

Вероятно, наиболее эффективный и убедительный результат из тех, которые были получены до сих пор, — чрезвычайная узость ограничений, накладываемых этими общими требованиями на корреляции вакуумных средних в различных пространственно-временных областях. Этот результат может быть использован, чтобы доказать взаимную несовместимость популярных предположений ковариантности, существования канонических одновременных соотношений коммутации, полноты системы канонических переменных и возможности избежать несобственных преобразований. Подобное положение было впервые установлено и сделано доступным пониманию Хаагом (Haag, 1955) — отсюда и название этой главы.

Наиболее подходящим математическим методом исследования указанных корреляций является установление аналитических свойств вакуумных средних как функций соответствующих переменных. Вспомним, что в случае одной переменной можно определить ее аналитическую функцию всюду по ее поведению в любой конечной области.

---

\* См., в частности, Р. Стритер, А. Вайтман. «PCT, спин и статистика и все такое». (М., «Наука», 1966). — *Прим. перев.*

Наше рассмотрение не претендует на полноту или строгость и должно служить в высшей степени интуитивным введением в изучаемый вопрос. В данном случае, когда приводимые результаты могут быть установлены строго, особенно важно делать четкое различие между точными и просто правдоподобными доводами. Чтобы отрезать себе пути отступления, мы цитируем с самого начала основную литературу: Хаг (Haag, 1955); Вайтман (Wightman, 1956); Холл, Вайтман (Hall, Wightman, 1957); Гринберг (Greenberg, 1959).

- В § 19.2 мы изложим без излишней строгости некоторые результаты Вайтмана, касающиеся вакуумных средних; из этих результатов вытекают аналитические свойства, лежащие в основе всего последующего рассмотрения (Wightman, 1956). В § 19.3 мы продолжим обсуждение теоремы Холла и Вайтмана (Hall, Wightman, 1957), которая позволяет перейти от аналитических свойств некоторой инвариантной функции четырехвекторов к аналитическим свойствам той же функции, но зависящей от скалярных произведений этих четырехвекторов. (В действительности мы обсудим только некоторые следствия, а не подробное доказательство этой теоремы.) Наконец, § 19.4 будет посвящен применению предыдущих результатов к теории поля.

## § 19.2. ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА

Функцией Вайтмана называется вакуумное среднее от обычного  $n$ -точечного произведения полей (опять мы имеем в виду самодействующее нейтральное скалярное поле):

$$W_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) | 0 \rangle. \quad (19.1)$$

В дальнейшем будем, если это не ведет к путанице, обозначать эту функцию просто  $W_n(x)$ . Конечно, функция  $W_n$  является не обычной, а обобщенной функцией. Это обстоятельство требует некоторой утонченности изложения, которой в дальнейшем мы будем пренебрегать. Наше изложение следует работе Вайтмана (Wightman, 1956), которая представляет собой обобщение работы Лемана (Lehmann, 1954) для двухточечной функции. Мы уже знаем, что функции  $W$  определяют матричные элементы  $S$ -матрицы, а в действительности даже больше: например,  $S$ -матрица сама по себе не определяет

функцию распространения. (Другими словами, то, что мы обсуждаем, является именно теорией поля, а не общей теорией  $S$ -матрицы.)

Приступим к выводу некоторых условий, которым должна удовлетворять функция  $W_n$  в силу требований лоренцевой ковариантности, положительной определенности нормы и энергетического спектра и локальности. Эти условия составляют основу теоремы Хаага.

Поскольку мы рассматриваем нейтральные частицы, т. е. поле  $\varphi$  эрмитово, то

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = W_n^*(x_n, \dots, x_1). \quad (19.2)$$

Рассматриваемая теория должна быть ковариантна относительно неоднородной группы Лоренца:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a. \quad (19.3)$$

Этой группе (если исключить обращение времени) в гильбертовом пространстве соответствует унитарный оператор  $U(a, \Lambda)$ , преобразующий скалярное поле  $\varphi(x)$  по закону

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x'),$$

где

$$\varphi'(x) = U\varphi(x)U^{-1} = \varphi(\Lambda x + a). \quad (19.4)$$

Состояние вакуума должно быть инвариантно относительно преобразования  $U$  и нормировано

$$U|0\rangle = |0\rangle; \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (19.5)$$

Из соотношений (19.4) и (19.5) получаем

$$\left. \begin{aligned} W_n(x) &= \langle 0|U^{-1} \dots U\varphi(x)U^{-1} \dots U|0\rangle = \\ &= \langle 0| \dots \varphi(\Lambda x + a) \dots |0\rangle; \\ W_n(x) &= W_n(\Lambda x + a). \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

Таким образом, ковариантность теории влечет инвариантность функций  $W_n$ .

Если группа преобразований  $\Lambda$  включает обращение времени (которое является антиунитарным преобразованием), то равенство (19.6) следует заменить формулой

$$W_n(x) = W_n^*(\Lambda x + a). \quad (19.7)$$

Из формулы (14.6) с очевидностью следует, что функции  $W$  зависят только от разностей координат; мы уже использовали этот факт как характерное следствие трансляционной инвариантности. Вводя

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \xi_2 = x_2 - x_3 \text{ и т. д.} \quad (19.8)$$

получаем

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \equiv W_n(\xi). \quad (19.9)$$

Следует подчеркнуть, что функции  $W_n$  фактически зависят только от  $n-1$  четырех-вектора  $\xi_i$ . Определим фурье-образ  $G_n$  функции  $W_n$  согласно соотношению

$$W_n(\xi) = \int dp_1 \dots dp_{n-1} \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^{n-1} p_j \xi_j \right\} G_n(p). \quad (19.10)$$

Отметим, что функция  $G_n(p)$  также зависит только от  $n-1$  аргумента. В силу лоренцевой ковариантности имеем

$$G_n(p) = G_n(\Lambda p). \quad (19.11)$$

Оказывается, что вследствие свойства положительной определенности энергетического спектра (т. е. вещественности значений масс) функция  $G_n(p)$  равна нулю, если все ее аргументы не являются положительными времениподобными, т. е. если не выполнены условия

$$p_j^2 = p_{j_0}^2 - \mathbf{p}_j^2 > 0, \quad p_{j_0} > 0. \quad (19.12)$$

Чтобы доказать это, выделим прежде всего компоненту с импульсом  $p$  произвольного состояния  $|\psi\rangle$ ; под компонентой с импульсом  $p$  мы понимаем член  $|p\rangle\langle p|\psi\rangle$  в разложении вектора  $|\psi\rangle$  по полной системе собственных векторов оператора четыре-импульса  $P$ :

$$|\psi\rangle = \int dp |p\rangle \langle p|\psi\rangle.$$

Поскольку  $\exp(iPa)$  порождает преобразования сдвига  $x \rightarrow x' = x + a$ , то можно записать это соотношение в виде

$$\begin{aligned} |p\rangle \langle p|\psi\rangle &= \int da e^{-ip a} e^{iPa} |\psi\rangle = \\ &= \int da e^{-ip a} U(a, 1) |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Поскольку  $|\psi\rangle$  — физически реализуемый вектор состояния, выражение (19.13) должно обращаться в нуль, если  $p$  не удовлетворяет условиям (19.12). Рассмотрим



теперь функцию  $W_n(\xi)$ , в которой  $j$ -й векторный аргумент  $\xi_j$  увеличен на  $a$ . Осуществим фурье-преобразование:

$$\begin{aligned} & \int da e^{ipa} W_n(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{n-1}) = \\ & = \int da e^{ipa} \langle 0 | \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_j) \varphi(x_{j+1} - a), \dots \\ & \quad \dots, \varphi(x_n - a) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_j) \times \\ & \times \int da e^{ipa} U(-a, 1) \varphi(x_{j+1}), \dots, \varphi(x_n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Часть этого выражения, которая стоит под знаком интеграла в последней строке, — это просто компонента с импульсом  $p$  состояния  $\varphi(x_{j+1}), \dots, \varphi(x_n) | 0 \rangle$ . Следовательно, все выражение обращается в нуль, если  $p$  не является положительным времениподобным вектором, что и требовалось доказать.

Полученный результат был использован Вайтманом для доказательства того, что функции  $W_n$  являются граничными значениями некоторых аналитических функций. Это доказательство совершенно тривиально. Необходимо просто ввести новый набор из  $n-1$  координатных четыре-векторов  $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ , лежащих внутри будущего светового конуса, т. е. положительных пространственноподобных векторов; иными словами, эти векторы должны удовлетворять тем же ограничениям, что и векторы  $p_j$  в соотношениях (19.12). С помощью этих векторов определим функцию  $n-1$  комплексного четыре-вектора  $z_j = \xi_j - i\eta_j$  согласно формуле

$$\begin{aligned} W_n(\xi_j - i\eta_j) &= W_n(z_j) = \\ &= \int dp G(p) \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^{n-1} p_j (\xi_j - i\eta_j) \right\}. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Поскольку как  $p_j$ , так и  $\eta_j$  — положительные времениподобные векторы, из (19.15) непосредственно видно, что  $W_n(z_j)$  является аналитической функцией аргумента  $z_j$ : достаточно просто заметить, что в силу указанных условий действительная часть экспоненты всегда отрицательна. В пределе при  $\eta_j \rightarrow 0$  получаем физические вакуумные средние. Поэтому функции Вайтмана действительных аргументов будем называть «физическими».

Область, в которой заключены векторы  $z_j$ , называется будущей трубой (или просто трубой). Она представляет собой  $8(n-1)$ -мерное многообразие, принадле-

жащее пространству векторов  $\xi_\mu, \tau_{\mu\nu}$  [которое само  $8(n-1)$ -мерно]. Теорема Вайтмана, которую мы только что доказали, гласит:

*Функция  $W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  представляет собой граничное значение функции  $W_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ , которая аналитична в будущей трубе.* (19.16)

В данный момент функция  $W_n$  еще считается функцией всех компонент ее четыре-векторных аргументов. Теорема (19.16) становится неизмеримо мощнее, когда ее объединяют со следующей теоремой Холла и Вайтмана:

*Функция  $f(z_1, \dots, z_n)$  четыре-векторных аргументов  $z_j (j=1, 2, \dots, n)$ , аналитичная в будущей трубе*

$$-\infty < \operatorname{Re} z_{j\mu} < \infty$$

*( $\operatorname{Im} z_j$  в будущем конусе) и инвариантная относительно однородной группы Лоренца без обращения времени*

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_n),$$

*является функцией скалярных произведений  $(z_j, z_k)$ . Она аналитична в комплексной области, в которой изменяются эти скалярные произведения, когда сами векторы изменяются в будущей трубе.* (19.17)

Хотя теорема (19.17) выглядит чрезвычайно правдоподобной, доказательство ее заняло у Холла и Вайтмана двадцать четыре страницы. Мы не будем воспроизводить это доказательство и ограничимся в следующем параграфе лишь попытками наглядно представить себе некоторые следствия, вытекающие из применения этой теоремы к функциям Вайтмана. Заметим только, что, вообще говоря, указанные скалярные произведения не все линейно независимы; поэтому хотя теорема касается проблемы аналитичности, чтобы охватить данную ситуацию, следует расширить обычные представления об этом свойстве. Кроме того, теорема относится к инвариантным аналитическим функциям вообще; в частности, она может применяться к функциям  $W$  в силу их аналитичности в будущей трубе, которая установлена теоремой Вайтмана (19.16).

В своей работе Вайтман придает новую форму теории скалярного поля  $\phi$  целиком в терминах функций  $W$ . В качестве иллюстрации получим следствия условия локальности, т. е. аксиомы IV (см. гл. 2), которое часто называют также условием причинности.

Удобно ввести комплексные четыре-векторы

$$z_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} z_k = (i < j), \quad (19.18)$$

например,  $z_{12} = z_1$ ,  $z_{13} = z_1 + z_2$  и т. д.; согласно теореме (19.17)  $W_n$  есть аналитическая функция квадратов длины этих векторов. В то время как каждая векторная переменная  $z_j$  изменяется внутри трубы, каждая переменная  $z_{ij}^2$  изменяется в определенной области своей комплексной плоскости.

Если временно опустить индексы  $ij$ , то из формулы

$$z^2 = (\xi - i\eta)^2 = \xi^2 - \eta^2 - 2i\xi\eta \quad (19.19)$$

будет следовать, что область изменения  $z^2$  в действительности охватывает всю комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной вещественной оси от начала координат до бесконечности. Этот разрез необходим, потому что значение  $z^2$  не может быть изменено от верхнего к нижнему берегу положительной вещественной оси посредством произвольно малого смещения вектора  $z$ . Следуя Вайтману, проиллюстрируем это утверждение (и сообщим некоторую дальнейшую информацию о комплексной плоскости переменной  $z^2$ ) с помощью рис. 19.1. Смысл рисунка не-

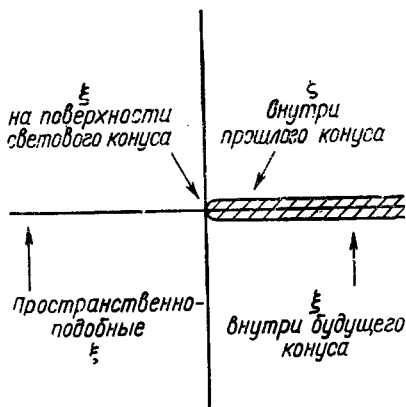


Рис. 19.1

трудно понять, если вспомнить, что  $\eta$  — положительный времениподобный четыре-вектор. Например, если  $z^2$  — вещественная величина, то с необходимостью  $\xi\eta = 0$ . Если  $\xi$  — времениподобный четыре-вектор (т. е.  $\xi_0 \neq 0$ ), то можно всегда найти такую систему отсчета, в которой  $\xi\eta = \xi_0\eta_0$ . Далее при  $\eta \rightarrow 0$  переменная  $z^2$  стремится к вещественной оси. При этом поскольку  $\eta_0 > 0$ ,  $z^2$  стремится к вещественной оси сверху или снизу в зависимости от знака неравенства  $\xi_0 \leq 0$ , как можно видеть из формулы (19.19). Из этой же формулы также следует, что в этом

случае переменная  $z^2$  стремится к положительной вещественной оси. С другой стороны, если  $\xi$  — пространственноподобный четыре-вектор, то знак величины  $\xi_0$  не инвариантен, так что при  $\eta \rightarrow 0$   $z^2$  может стремиться к вещественной оси по любому направлению в зависимости от ориентации вектора  $\xi$ . Но из формулы (19.19) следует, что при  $\eta \rightarrow 0$  достигается отрицательная часть вещественной оси. В действительности ситуация несколько более сложна: дело в том, что отрицательная вещественная ось  $z^2$  может быть достигнута даже при ненулевых значениях  $\eta$ . Этот вопрос будет рассмотрен более подробно ниже, в § 19.3, хотя читателям полезно исследовать его самим в качестве упражнения.

Из аксиомы локальности IV следует, что при  $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$

$$\begin{aligned} W_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ = W_n(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (19.20)$$

В терминах комплексных переменных  $z_{ij}^2$  это означает, что если переменная  $z_{ij}^2$  находится на отрицательной вещественной оси, то

$$W_n(z_{ij}^2) = W_n(Pz_{ij}^2), \quad (19.21)$$

где оператор  $P$  меняет местами индексы  $j$  и  $(j+1)$ . Но если соотношение (19.21) справедливо вдоль отрицательной вещественной оси, то благодаря возможности аналитического продолжения оно справедливо всюду. По словам Вайтмана, «свойство локальности поля  $\phi(x)$  характеризуется соотношением глобальной симметрии аналитической функции  $W$ ».

Переход от условия локальности к конкретным одно-временным соотношениям коммутации требует более подробного обсуждения, которое можно найти в работе Вайтмана. В частности, Вайтман строго рассмотрел двухточечную функцию  $W_2$  для случаев, когда константа перенормировки волновой функции  $Z_3$  бесконечна и представление Лемана без вычитаний теряет смысл.

### § 19.3. СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ ХОЛЛА И ВАЙТМАНА

Одной из самых замечательных особенностей теоремы Холла — Вайтмана (19.17) является то, что она дает возможность по известным аналитическим свойствам

функции  $W_n(z)$  *внутри* будущей трубы сделать выводы о поведении этой функции *на границе* трубы. (Мы говорим, что набор векторов лежит на границе трубы, когда все  $\eta_j=0$ .) В силу очевидных причин такой набор вещественных четыре-векторов также относится к «физическим». Аналогично «физическая функция  $W_n(z)$ » — это та же самая функция вещественных аргументов, т. е. аргументов, лежащих на границе трубы. Мы не собираемся высказывать каких-либо конкретных соображений в пользу этой точки зрения, а удовлетворимся указанием на центральный факт, вокруг которого они группируются. Этот факт является чисто геометрическим и поэтому может быть понят относительно легко. Чтобы его сформулировать, введем ряд обозначений.

Обозначим через  $W_n$  множество комплексных симметричных  $n \times n$ -матриц  $Z$ , матричные элементы которых представляют собой скалярные произведения

$$Z_{jk} = (z_j z_k), \quad (19.22)$$

образованные из  $n$  комплексных четыре-векторов  $z_j = \xi_j - i\eta_j$ , введенных в предыдущем параграфе. Таким образом, матрица  $Z$  пробегает множество  $M_n$ , когда векторы  $z_j$  изменяются в трубе. Согласно теореме Холла — Вайтмана,  $M_n$  — это область аналитичности инвариантных аналитических функций  $W_{n+1}(z_1, \dots, z_n) = W_{n+1}(z_i z_j)$ , граничными значениями которых (когда все  $\eta_j \rightarrow 0$ ) являются физические функции Вайтмана  $W_{n+1}(\xi)$ . Из рис. 19.1 нетрудно видеть, что граница множества  $M_n$  состоит из матриц, матричные элементы которых ( $z_i, z_j$ ) вещественны и *положительны*.

Матрицы внутри множества  $M_n$  не обязательно соответствуют четыре-векторам внутри трубы. Геометрический факт, который мы должны установить, состоит просто в том, что *существуют наборы четыре-векторов* ( $z_1, \dots, z_n$ ) *на границе трубы, которые приводят к матрицам скалярных произведений, находящимся внутри*  $M_n$ . Коль скоро это будет установлено, станет весьма правдоподобным, что уже доказанная аналитичность внутри  $M_n$  в действительности ограничивает поведение функции  $W$  также и на границе трубы. Отметим, что такая взаимосвязь решающим образом определяется тем, что инвариантная аналитическая функция четыре-векторов является инвариантной аналитической функ-

цией их скалярных произведений. Схематически последовательность рассуждений следующая: аналитичность функции  $W_{n+1}(z)$  внутри трубы  $\rightarrow$  аналитичность функции  $W_{n+1}(z_i z_j)$  внутри  $\mathcal{M}_n \rightarrow$  ограничения на поведение функции  $W_{n+1}(z)$  на границе трубы. Исходный пункт рассуждений — это теорема (19.16); первая стрелка отражает содержание теоремы Холла — Вайтмана (19.17); вторая стрелка подразумевает использование обсуждаемого геометрического факта.

Установим теперь справедливость этого факта. Прежде всего найдем связь между произвольными матрицами множества  $\mathcal{M}_n$  и теми специальными матрицами, которые можно записать в особом виде:

$$Z_{ij} = \xi_i \xi_j, \text{ когда все } \xi_i \text{ вещественны.}$$

Векторы  $\xi_i$  лежат на границе трубы, т. е. они «физические». Поэтому назовем такую матрицу «физической». Физическая матрица (подобно любой другой матрице из множества  $\mathcal{M}_n$ ) лежит либо внутри множества  $\mathcal{M}_n$ , либо на его границе. Предположим на время, что если внутри  $\mathcal{M}_n$  существуют физические матрицы, то все их векторные аргументы  $\xi_j$  пространственноподобны. Чтобы убедиться в этом, применим рассуждения, подобные использованным нами при рассмотрении рис. 19.1. Запишем набор четыре-векторов в трубе в виде  $\alpha_j - i\beta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . Матричные элементы соответствующей матрицы  $A$  представим следующим образом:

$$A_{jk} = \alpha_j \alpha_k - \beta_j \beta_k - i(\beta_j \alpha_k + \beta_k \alpha_j). \quad (19.23)$$

Чтобы все  $A_{jk}$  были вещественны и, следовательно, матрица  $A$  совпала бы с матрицей соответствующей некоторому набору физических четыре-векторов  $\xi_j$ , т. е. выполнялось бы соотношение

$$A_{jk} = \xi_j \xi_k, \quad (19.24)$$

мнимая часть выражения (19.23) должна равняться нулю. Для этого необходимо, чтобы каждый вектор  $\alpha$  был ортогонален некоторому вектору  $\beta$  внутри светового конуса, т. е. каждый вектор  $\alpha$  был бы пространственноподобным. Но в этом случае все диагональные элементы матрицы  $A$ , определяемые соотношением (19.23), будут отрицательны, так что в силу равенства (19.24) все  $\xi_j$  окажутся пространственноподобными, что и требовалось доказать.

Остается установить, что действительно существуют

пространственноподобные четыре-векторы  $\xi$ , удовлетворяющие соотношениям (19.23) и (19.24). Покажем это, построив непосредственно эти векторы. Для удобства обозначим через  $S_n$  множество всех физических матриц  $Z$ , которые получаются из вещественных пространственноподобных четыре-векторов  $\xi$ , а через  $T_n$  — подмножество множества  $S_n$ , который получается из четыре-векторов, лежащих в трехмерном пространстве, определяемом равенством  $\xi_{j0}=0$ . Очевидно,  $T_n$  представляет собой область постоянного времени. Сконструируем теперь набор  $n$  вещественных четыре-векторов  $\xi_j$ , которые образуют подмножество  $T_n$  и лежат внутри  $\mathcal{M}_n$ .

Рассмотрим набор  $n$  четыре-векторов вида

$$\zeta_j = \alpha_j - i\lambda_j \hat{\beta}, \quad (19.25)$$

где  $\lambda_j$  — вещественные положительные числа;  $\hat{\beta}$  — единичный четыре-вектор, направленный вдоль оси времени;  $\alpha_j$  — вещественные четыре-векторы с нулевой временной компонентой и с нулевой компонентой вдоль одной из пространственных осей, например вдоль третьей. Тогда матрица  $\mathcal{M}_n$ , соответствующая набору векторов  $\zeta$  (обозначим ее  $\hat{Z}$ ), состоит из элементов

$$\hat{Z}_{jk} = \zeta_j \zeta_k = (\alpha_j - i\lambda_j \hat{\beta})(\alpha_k - i\lambda_k \hat{\beta}) = \alpha_j \alpha_k - \lambda_j \lambda_k. \quad (19.26)$$

Векторы  $\zeta_j$  обязательно лежать внутри трубы, а матрица  $\hat{Z}_{jk}$  — обязательно внутри  $\mathcal{M}_n$ . Набор векторов  $\xi_j$ , который необходимо найти, можно теперь сконструировать согласно следующему правилу:

$$\xi_j = \alpha_j + \begin{matrix} \text{(вектор, направленный вдоль третьей пространственной оси и имеющий абсолютную величину } \lambda_j) \\ \vdots \\ \end{matrix} \quad (19.27),$$

поскольку в этом случае нетрудно установить, что

$$\xi_j \xi_k = \hat{Z}_{jk} = \zeta_j \zeta_k. \quad (19.28)$$

По построению все векторы  $\xi_j$  имеют нулевые временные компоненты и, следовательно, образуют подмножество  $T_n$ ; поскольку эти векторы также удовлетворяют соотношению (19.28), они соответствуют той же самой матрице из  $\mathcal{M}_n$ , что и набор  $n$  векторов  $\zeta_j$  внутри трубы.

Итак, установлен решающий геометрический факт, который лежит в основе последующего рассмотрения.

Вернемся теперь к результатам Холла и Вайтмана. Холл и Вайтман доказали ряд лемм, с помощью которых они получили следующую последовательность результатов (в свете изложенного эти результаты представляются, во всяком случае, правдоподобными).

I. Пересечение множеств  $S_n$  и  $\mathcal{M}_n(S_n \cap \mathcal{M}_n)$  имеет ту же самую размерность, что и само множество  $\mathcal{M}_n$ ; в силу аналитичности функции  $W_{n+1}$  на множестве  $\mathcal{M}_n$  она определяется единственным образом всюду на этом множестве, если эта функция известна в  $S_n \cap \mathcal{M}_n$ . Кроме того, функция  $W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  является аналитической функцией *вещественных* переменных  $\xi_i \xi_j$  на пересечении  $S_n \cap \mathcal{M}_n$ .

II. При  $n \leq 4$  те же самые результаты справедливы даже для пересечения  $T_{n-1} \cap \mathcal{M}_{n-1}$ .

III. Из утверждения I следует, что функция  $W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = W_n(x_1, \dots, x_n)$  определяется всюду единственным образом по ее значениям в точках  $x$ , разделенных пространственноподобными интервалами. Грубо говоря, это утверждение аналогично известному результату о единственности аналитического продолжения. По словам Холла и Вайтмана, «их результат можно рассматривать как количественное выражение того интуитивно ощущаемого факта, что в лоренц-инвариантной теории эквивалентность описания в различных лоренцевых системах отсчета должна в каком-то смысле ограничивать возможные корреляции значений физических величин в различных точках пространства — времени».

IV. На основании пункта II можно сделать весьма сильное утверждение о том, что вакуумные средние полей

$$\langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle; \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) | 0 \rangle$$

и

$$\langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) | 0 \rangle$$

определяются всюду единственным образом по их значениям в одинаковые моменты времени. (19.29).

Теорема (19.29) является фундаментом, на котором основана теорема Хаага. Вспомним, что единственными физическими допущениями, необходимыми для установления теоремы (19.29), являются допущения, обеспечивающие аналитичность функций  $W$  в будущей трубе; все



остальное делает математика. Но необходимая аналитичность функций  $\mathcal{W}$  была установлена в предыдущем параграфе в предположении выполнения следующих требований:

- а) лоренцевой ковариантности;
- б) существования инвариантного и нормируемого вакуумного состояния;
- в) положительной определенности энергетического спектра.

Эти условия позволили интерпретировать физические функции  $\mathcal{W}$  как граничные значения соответствующих аналитических функций.

Не исключена возможность, что гильбертово пространство содержит более одного вакуумного состояния (т. е. состояние со свойствами п. б). Необходимо только потребовать, чтобы все функции  $\mathcal{W}$  конструировались с помощью одного и того же вакуумного состояния.

#### § 19.4. ТЕОРЕМА ХААГА

Теперь можно объединить следствия теоремы Холла и Вайтмана с другими известными результатами теории поля. Для установления того, что функции  $\mathcal{W}$  удовлетворяют условиям теоремы Холла — Вайтмана, использовались требования лоренцевой инвариантности, положительной определенности энергетического спектра и существования инвариантного нормируемого вакуумного состояния, относительно которого определяются все функции  $\mathcal{W}$ . Мы, разумеется, не будем отказываться ни от одного из этих условий и, следовательно, можем смело основываться на теореме Холла и Вайтмана для функций  $\mathcal{W}$ . С другой стороны, необходимые дополнительные требования далеко не столь твердо установлены. Поэтому, если результаты объединения их с теоремой Холла и Вайтмана для функций  $\mathcal{W}$  окажутся неудобоваримыми, то это означает, что следует рассмотреть теории, в которых эти дополнительные требования смягчены.

Обычно вводят два дополнительных предположения:

- г) существует только одно состояние (называемое вакуумом), которое нормируемо и инвариантно относительно преобразований Лоренца (в действительности достаточно потребовать инвариантности только относительно евклидовых преобразований и использовать предположение о лоренцевой ковариантности теории

лишь неявно, через теорему Холла и Вайтмана); грубо говоря вакуумное состояние единственно;

д) теорию можно полностью сформулировать в терминах канонических переменных, удовлетворяющих каноническим одновременным соотношениям коммутации; например, для нейтральных скалярных полей

$$[\varphi(x), \pi(y)]|_{x_0=y_0} = i\delta(x' - y), \quad (19.30)$$

а операторы  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  образуют полный неприводимый набор переменных (понятие «неприводимый» означает, что любой оператор, коммутирующий со всеми операторами  $\varphi$  и  $\pi$ , кратен единичному оператору).

В свете изложенного в гл. 18, видно, что условия п. г и п. д совместно приводят к следующему ограничению:

теорию можно полностью сформулировать в векторном пространстве, охватывающем только одно (из нескольких неэквивалентных) представлений канонических соотношений коммутации (19.30), которые записываются в импульсном пространстве в виде

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k - k') \text{ и т. д.;} \quad (19.31)$$

иными словами, нет необходимости вводить два или более неэквивалентных представления (19.31), т. е. несобственные унитарные преобразования исключаются из рассмотрения.

Если включить в теорию дополнительные предположения п. г и п. д, то трудности возникают быстро и в большом количестве. Следуя Холлу и Вайтману, сформулируем главные из них в виде двух теорем, которые они называют I и II частями теоремы Хаага. Часть I касается только непосредственных следствий предположений п. г. и п. д. В то же время часть II объединяет эти следствия с результатами теоремы Холла и Вайтмана. Для простоты будем по-прежнему ограничиваться действующими нейтральными скалярными полями.

#### *Теорема Хаага, часть I*

Даны два поля, канонические переменные которых связаны в момент времени  $t$  с помощью (собственного) унитарного преобразования  $V$ :

$$[\varphi_j(x, t), \pi_j(y, t)] = i\delta(x - y), \quad j = 1, 2; \quad (19.32)$$

$$\left. \begin{aligned} V\varphi_1(x, t)V^{-1} &= \varphi_2(x, t), \\ V\pi_1(x, t)V^{-1} &= \pi_2(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Евклидовы преобразования  $(\mathbf{a}, R)$  полей  $\varphi_j$  вводятся с помощью унитарных операторов  $U_j(\mathbf{a}, R)$ :

$$U_j(\mathbf{a}, R) \begin{Bmatrix} \varphi_j(\mathbf{x}, t) \\ \pi_j(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} U_j^{-1}(\mathbf{a}, R) = \begin{Bmatrix} \varphi_j(R\mathbf{x} + \mathbf{a}, t) \\ \pi_j(R\mathbf{x} + \mathbf{a}, t) \end{Bmatrix} \quad (19.34)$$

Кроме того,

$$U_j(\mathbf{a}, R) |0_j\rangle = |0_j\rangle; \quad \langle 0_j | 0_j \rangle = 1, \quad (19.35)$$

причем каждое состояние  $|0_j\rangle$  является единственным состоянием, удовлетворяющим условиям (19.35). Тогда теорема содержит два следующих утверждения:

$$U_2(\mathbf{a}, R) = V U_1(\mathbf{a}, R) V^{-1}; \quad (19.36)$$

$$|0_2\rangle = V |0_1\rangle. \quad (19.37)$$

[Соотношение (19.37) выполняется с точностью до соответствующего фазового множителя, равного по модулю единице].

Другими словами, вакуум теории 2 связан с вакуумом теории 1 посредством того же (собственного) унитарного преобразования, что и сами пары канонических переменных\*.

Доказательство теоремы почти тривиально. Из соотношений (19.33) и (19.34) следует, что оператор

$$U_1^{-1}(\mathbf{a}, R) V^{-1} U_2(\mathbf{a}, R) V$$

коммутирует с  $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$  и  $\pi_1(\mathbf{x}, t)$  для всех  $\mathbf{x}$ . В силу условия п. д. это может иметь место только тогда, когда указанный оператор кратен единичному, т. е. представляет собой  $c$ -число:

$$U_2(\mathbf{a}, R) = c(\mathbf{a}, R) V U_1(\mathbf{a}, R) V^{-1}. \quad (19.38)$$

---

\* В предшествующем обсуждении в качестве «вакуума» было выбрано нормируемое состояние, инвариантное относительно евклидовых преобразований. Вспомним, что в гл. 18, где рассматривались только теории поля свободных частиц с различными массами, мы определили «вакуум» каждой теории как нормируемое состояние без частиц. В свете этого последнего определения  $|0_1\rangle \neq |0_2\rangle$ , даже когда  $\varphi_1 = \varphi_2$  и  $\pi_1 = \pi_2$ , так что  $V = 1$ . Таким образом, объединяя условие (19.37) с результатами гл. 18 [например, с условием (18.49)], мы убеждаемся в том, что предположения п. а — д уже содержат противоречие, ибо они препятствуют физически обоснованному отождествлению нормируемого состояния без частиц с нормируемым евклидово инвариантным состоянием.

Но определенное таким образом число  $c(a, R)$  есть непрерывное унитарное одномерное представление евклидовой группы. Специалисты по теории групп знают, что единственным представлением такого рода является тождественное. Поэтому

$$c(a, R) = 1. \quad (19.39)$$

Тогда из формул (19.38) и (19.39) непосредственно следует соотношение (19.36).

Чтобы доказать условие (19.37), заметим, что соотношения (19.33), (19.35) и (19.36) влекут равенство

$$U_2 V |0_2\rangle = V |0_1\rangle. \quad (19.40)$$

Отсюда с учетом предположения п. г о единственности вакуума получаем условие (19.37).

Теперь мы можем совершить роковой шаг и объединить часть I теоремы Хаага с теоремой Холла и Вайтмана, что приведет к части II теоремы Хаага.

#### *Теорема Хаага, часть II*

Рассмотрим два поля, удовлетворяющие требованиям части I теоремы Хаага и предположениям п. а—д, так что соответствующие им функции  $\mathcal{W}$  удовлетворяют условиям теоремы Холла и Вайтмана. Тогда первые четыре функции Вайтмана одного поля равны соответствующим функциям другого поля:

$$\begin{aligned} \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) | 0_1 \rangle &= \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) | 0_2 \rangle; \\ \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) \varphi_1(x_2) | 0_1 \rangle &= \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) \varphi_2(x_2) | 0_2 \rangle; \\ \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) \varphi_1(x_2) \varphi_1(x_3) | 0_1 \rangle &= \\ &= \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_2(x_3) | 0_2 \rangle; \\ \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_4) | 0_1 \rangle &= \\ &= \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) \dots \varphi_2(x_4) | 0_2 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что функции распространения, вершинные функции и амплитуды упругого рассеяния в двух теориях совпадают.

Доказательство вновь получаем почти немедленно. В одинаковые моменты времени с учетом соотношений (19.33) и (19.37) имеем

$$\begin{aligned}
& \langle 0_1 | \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_n) | 0_1 \rangle = \\
& = \langle 0_1 | V^{-1} V \varphi_1(x_1) V^{-1} \dots V \varphi_1(x_n) V^{-1} V | 0_1 \rangle = \\
& = \langle 0_2 | \varphi_2(x_1) \dots \varphi_2(x_n) | 0_2 \rangle,
\end{aligned}$$

так что все одновременные вакуумные средние совпадают. Но в силу теоремы Холла и Вайтмана для частных случаев  $n=1, 2, 3, 4$ , этого достаточно для равенства функций  $\mathcal{W}$ , что и требовалось доказать.

Теорема имеет непосредственные дальнейшие следствия. Поскольку свободное поле заведомо удовлетворяет каноническим одновременным соотношениям коммутации, то его можно выбрать в качестве одного из двух рассматриваемых полей. Применяя часть II теоремы Хаага к этому специальному случаю, нетрудно получить следующее утверждение. Если справедливы допущения п. а—д (каждое из которых в свое время выглядело более или менее разумным), то не существует полевой теории взаимодействующих частиц, в которой первые четыре функции Вайтмана отличались бы от соответствующих функций свободных полей, *по крайней мере в векторном пространстве, реализующем представление соотношений коммутации свободных полей.*

В таком виде это утверждение не имеет общего характера; недостаток был восполнен Гринбергом (Greenberg, 1959), который доказал, что в теории, удовлетворяющей предположениям п. а—д, все вакуумные средние равны соответствующим вакуумным средним свободных полей. Доказательство он проводил по индукции, в нем в каждом цикле рассуждений под требования теоремы подводятся два новых вакуумных средних.

Суммируем еще раз полученные результаты. Выше были введены следующие предположения:

- 1) лоренцева ковариантность теории;
- 2) положительная определенность нормы;
- 3) локальность;
- 4) существование инвариантного и нормируемого вакуума;
- 5) положительная определенность энергетического спектра.

От этих предположений отказываться весьма нежелательно. Далее следовали более специфические и спорные предположения:

6) выполнение канонических одновременных соотношений коммутации и полнота набора канонических переменных;

7) отсутствие несобственных унитарных преобразований, т. е. отсутствие неэквивалентных представлений канонических соотношений коммутации;

8) предположение о том, что векторное пространство, соответствующее данной теории поля, приспособлено к представлению операторов свободного поля.

Существует ряд других способов формулировки и классификации этих предположений. Мы, например, не предпринимали никаких усилий к достижению максимальной экономии в их формулировке. В частности, предположение п. 5 можно переформулировать таким образом, чтобы мнимые массы и пространственноподобные четыре-импульсы были запрещены. Условия п. 7 и п. 8 эквивалентны требованию (дающему несколько меньше информации) единственности состояния вакуума, определяемого условием п. 4, и т. д.

*В рамках предположений п. 1—8 было показано, что не существует ни одной теории поля, которая отличалась бы от теории свободного поля. Это утверждение широко известно как теорема Хаага.*

Заметим, что асимптотическое условие использовано не было. Однако предположение п. 8 всегда выполняется в любой полевой теории частиц только в силу асимптотического условия. Тем самым именно асимптотическое условие делает теорему Хаага применимой к физически интересным случаям. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что в любой полевой теории частиц именно асимптотическое условие осуществляет связь между оператором поля и двумя типами операторов свободных полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$ . В частности, предположение о полноте ин- и аут-состояний непосредственно демонстрирует, что в любой теории частиц векторное пространство должно быть приспособлено к представлению канонических соотношений коммутации свободных полей.

Может быть, не лишне отметить, что оператор поля, фигурирующий в теореме Хаага, следует отождествлять не непосредственно с интерполирующим полем (которое не удовлетворяет обычным каноническим соотношениям коммутации), а с «неперенормированным» полем  $\varphi_0$  (см. гл. 6). Конечно, интерполирующее и неперенормирован-

ное поля формально связаны константой пропорциональности  $Z_3$ .

Итак, окончательно теорема Хаага устанавливает, что связь между векторным пространством, в котором определены вспомогательные ин- и аут-поля, и тем векторным пространством, в котором определено поле  $\phi_0$ , с необходимостью осуществляется посредством несобственного преобразования.

Если мы хотим иметь полевую теорию взаимодействующих частиц, то соответствующее векторное пространство должно обязательно включать в себя оба указанных пространства; кроме того, это пространство должно быть приспособлено к действию несобственных преобразований.

Существуют, по крайней мере, три различные точки зрения на дальнейшие перспективы развития теории. Согласно первой из них теория поля совершенно несостоятельна. Сторонники второго направления склонны отказаться от предположения п. 6. Но тогда предположение п. 7 станет необязательным, а предположение п. 8 — безвредным. Поэтому многие из результатов, разобранных выше, окажутся неэффективными. В частности, схема свертывания, представление Лемана и теорема Лемана — Симанзика — Циммермана останутся справедливыми (последние два с дополнительным предположением о вычитаниях), однако величины, подобные  $Z_3$  и  $\delta m^2$ , полностью потеряют свой смысл. Третья и самая оптимистическая позиция состоит в отказе от предположения п. 7.

Мы, пожалуй, не ошибемся, если заметим, что в настоящее время выбор между этими тремя альтернативами представляется всецело делом вкуса. Автор этой книги склоняется к третьей точке зрения, поэтому следующие ниже замечания могут оказаться в какой-то мере пристрастными.

Если отказаться от предположения п. 7, то предположение п. 6 можно сохранить. Таким образом, тогда можно продолжать изложение в традиционном стиле классической и квантовой механики. Однако в этом случае необходимо будет явным образом учесть тот факт, что рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы и что размерность соответствующего векторного пространства равна мощности континуума.

Ситуации и теории такого типа исследованы еще совершенно недостаточно и, конечно, весьма далеки от системы обычных математических понятий. Воспользуемся этим и, последовав легкомысленно за своим воображением, попытаемся наглядно представить, какими простыми свойствами будут характеризоваться такие теории, если допустить возможность использования несобственных преобразований и отказаться от условия единственности вакуума. Мы называем наши действия легкомысленными отнюдь не потому, что считаем их несовместимыми с физикой, а как раз наоборот. Некоторая доля неуверенности обусловлена просто временным отсутствием строгого математического аппарата для рассмотрения обсуждаемой проблемы.

Если допустить, что вакуумное состояние единственно, то, вероятно, наиболее наглядное применение несобственных унитарных преобразований — обычная ковариантная теория возмущений. Окончательные предсказания этой процедуры относятся только к матричным элементам  $S$ -матрицы, которая преобразует ин-состояния в аут-состояния и в силу этого должна быть собственным унитарным оператором. Тем не менее формально метод основан на использовании унитарного оператора  $U(-\infty, t)$ , преобразующего собственные состояния свободной (невозмущенной) системы в собственные состояния взаимодействующей системы. Но мы как раз убедились, что любой такой оператор должен быть несобственным. С учетом этого факта нужно ожидать появления формальных расходимостей в теории и никоим образом не следует этому удивляться. Насколько нам известно, никакого систематического рассмотрения теории перенормировок с этой точки зрения не существует, хотя, вероятно, такое рассмотрение возможно. Ввиду отсутствия такого систематического рассмотрения последующие замечания носят чисто эвристический характер.

Вспомним, например, что константа перенормировки волновой функции широко интерпретировалась как вероятность обнаружения одной голой частицы в состоянии одной физической частицы. Но эти два состояния, если они оба имеют смысл, принадлежат, очевидно, к неэквивалентным (т. е. несобственно эквивалентным) пространствам; следовательно, перекрывание этих двух состояний с необходимостью равно



нулю. Но в такой ситуации конечность константы  $Z_3$  должна быть более тревожным симптомом, нежели ее бесконечность. Мы подозреваем, что аналогичные соображения существуют и для проблемы расходимости собственной массы, но оставляем выяснение этого вопроса читателям в качестве упражнения.

Попробуем теперь ослабить условие единственности вакуума. Выражение «вакуум не единствен» означает, что гильбертово пространство содержит несколько нормируемых и лоренц-инвариантных векторов. Эти векторы обязательно неэквивалентны в том смысле, о котором шла речь в гл. 18.

В этом случае обычное отождествление «вакуума» и «основного состояния» не является более возможным. Необходимо найти собственное основное состояние системы путем явного обращения к рассмотрению ее динамики. Естественно также потребовать, чтобы реальное основное состояние системы было лоренц-инвариантным; поэтому оно должно быть либо одним из конкретных возможных вакуумных состояний, либо линейной суперпозицией некоторых из них или даже всех.

Поскольку вакуумные состояния, по определению, лоренц-инвариантны, разности соответствующих им энергий должны быть также инвариантны. Последнее возможно только в том случае, если эти разности равны или нулю, или бесконечности. Иными словами, любые два различных вакуумных состояния либо вырождены, либо отделены друг от друга бесконечной энергетической щелью. А priori нельзя исключить возможность того, что физическое основное состояние вырождено; выяснение этого вопроса является чисто динамической проблемой. Если основное состояние системы вырождено, оно, разумеется, должно характеризоваться рядом квантовых чисел. Это означает, что лагранжиан системы может иметь более высокий порядок симметрии, нежели основное состояние. Гейзенберг высказывался в пользу такой возможности; он указывал, что аналогичным примером является атом водорода (дираков электрон в центральном поле), для которого гамильтониан сферически симметричен, а основное состояние нет. Наличие основного состояния, которое вырождено относительно некоторого внутреннего квантового числа, связанного с эле-

ментарными частицами, постулируется в нескольких теориях с так называемой нарушенной симметрией: в них постулируется существование лагранжиана, инвариантного относительно соответствующей операции симметрии, и основного состояния — физического вакуума, который не инвариантен относительно этой операции\*.

В заключение заметим, что в свете третьей и наиболее оптимистической точки зрения будущее теории поля естественно рисуется теперь менее мрачным, чем оно казалось еще в не слишком далеком прошлом: теорема Хаага оказывается довольно надежным компасом дальнейшего развития теории. Весьма вдохновляющим является тот факт, что стрелка этого «компаса» направлена в сторону несобственных преобразований, ибо именно они характерны для теории поля.

### Обозначения

1. Используются естественные единицы, в которых  $\hbar = c = 1$ . Поэтому в теории фигурирует только одна размерность и  $[L] = [T] = [M]^{-1}$ . В частности, бозонное поле имеет размерность  $[M]$ , а фермионное поле — размерность  $[M]^{3/2}$ .

2. Принято соглашение о немых индексах, т. е. по всем повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Метрический тензор имеет вид  $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ ; делается различие между ковариантными и контравариантными индексами. Таким образом,

$$ab \equiv a_\mu g_{\mu\nu} b_\nu \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}.$$

Три-векторы выделяются жирным шрифтом. Введены обозначения  $d\mathbf{p} \equiv dp_0 dp_x dp_y dp_z$ ;  $d\mathbf{p} \equiv dp_x dp_y dp_z$  (аналогично для других векторов).

3. Свободная частица обладает массой  $m$  и четырёх-импульсом  $p$ , удовлетворяющим соотношению

$$p^2 \equiv p_\mu p^\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$

---

\* По этому вопросу существует обширная литература. См., например, С. Газиорович. «Физика элементарных частиц» (готовится русский перевод в изд-ве «Наука», 1968). — Прим. перев.

4. Заметим, что

$$x_\mu = (x_0, \mathbf{x}), \quad x^\mu = (x_0, -\mathbf{x})$$

и что

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial x_0, -\nabla),$$

в то время как

$$\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial x_0, \nabla).$$

5. Четырехмерный оператор Лапласа определен так:

$$\square^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = -p^2.$$

Оператор Клейна—Гордона для частиц с массой  $\mu$  имеет вид  $K = \square^2 + \mu^2$ , а оператор Дирака для частиц с массой  $m$  имеет вид  $\mathcal{D} = (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ .

6. Векторы  $\vec{\tau}$  в изотопическом пространстве отмечены стрелкой:  $\tau$ .

7. Звездочка обозначает операцию эрмитова сопряжения операторов в гильбертовом пространстве ( $q$ -чисел) и комплексного сопряжения  $c$ -чисел. В более деликатных ситуациях мы обозначаем эрмитово сопряженные, комплексно сопряженные и транспонированные операторы в гильбертовом пространстве верхними индексами  $H, C$  и  $T$  соответственно.

8. Ступенчатая функция  $\theta$  определяется равенствами:

$$\theta(x) = +1, \quad x > 0;$$

$$\theta(x) = 0, \quad x < 0.$$

Знаковая функция  $\varepsilon$  определяется равенством

$$\varepsilon(x) = 2\theta(x) - 1.$$

Если в качестве аргумента в функциях  $\theta$  и  $\varepsilon$  используется четыре-вектор, то подразумевается лишь его временная компонента. Иначе говоря,

$$\theta(x) \equiv \theta(x_0).$$

**Соглашение о знаках плоских волн и операторов импульса**

В представлении Шредингера в обычной нерелятивистской квантовой механике выбирается универсальное соглашение о знаках:

$$= +i\partial/\partial t = +\partial/\partial x_0 = +i\partial^0 = i\partial_0, \quad (1)$$

В этом случае плоская волна с положительной энергией  $k_0$  и импульсом  $k$  записывается в виде

$$\exp\{-ik_0t + ikx\} = \exp\{-ikx\}. \quad (2)$$

В качестве первого шага при переходе к обозначениям теории поля обратимся к представлению Гейзенберга. На время введем индексы  $S$  и  $H$ , чтобы различать операторы и векторы состояния в представлениях Шредингера и Гейзенберга соответственно. Будем считать, что оба представления совпадают в момент времени  $t=0$ . Тогда для векторов состояния (т. е. для волновых функций) имеем

$$\psi_S(t) = \exp(-iEt) \psi_H,$$

а для операторов

$$O_S = e^{-iEt} O_H(t) e^{iEt}; \quad O_H(t) = e^{iEt} O_S e^{-iEt}. \quad (3)$$

Заметим, что  $E_S = E_H \equiv E$ . Тогда из (3) следует, что

$$\partial O_H(t) / \partial t = i [E, O_H].$$

Начиная с этого момента будем рассматривать только представление Гейзенберга и опустим индекс  $H$ . Тогда запишем:

$$\left. \begin{aligned} [O, E] &= +i\partial O / \partial t; \\ [O, P_0] &= +i\partial_0 O. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Это соотношение в неизменном виде переносится в теорию поля, в которой операторы  $O$  становятся функциями операторов поля, зависящих не только от  $t$ , но также и от  $x$ . Оператор  $E$  — теперь уже оператор полной энергии системы. Уравнение (4) можно обобщить ковариантным образом

$$[O(x), P_\mu] = +i\partial_\mu O(x) \quad (5)$$

или покомпонентно

$$[O(x), P_0] = +i \frac{\partial O}{\partial x_0} = +i \frac{\partial O}{\partial t}; \quad (6)$$

$$[O(x), \mathbf{P}] = +i \frac{\partial O}{\partial(-\mathbf{x})} = -i\nabla O.$$

Рассмотрим теперь для бесконечно малых  $a_\mu$  выражение

$$\begin{aligned} e^{-iPa} \varphi(x) e^{iPa} &\approx (1 - ia^\mu P_\mu) \varphi(x) (1 + ia^\nu P_\nu) \approx \\ &\approx \varphi(x) + ia^\mu [\varphi(x), P_\mu] = \varphi(x) + ia^\mu (i\partial_\mu \varphi(x)) = \\ &= \varphi(x) - a^\mu \partial_\mu \varphi(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что  $\partial_\mu = (\partial_0, \partial/\partial x^k) = (\partial_0, -\nabla)$ , так что  $a^\mu \partial_\mu = a_0 \partial/\partial t - \mathbf{a}(-\nabla) = a_0 \partial/\partial t + \mathbf{a} \nabla$ . Таким образом, правая часть (7) представляет собой в точности первые члены ряда Тейлора функции  $\varphi(x-a)$ . Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} e^{-iPa} \varphi(x) e^{iPa} &= \varphi(x-a); \\ \varphi(x) &= e^{iPa} \varphi(x-a) e^{-iPa}; \\ \varphi(x) &= e^{iPx} \varphi(0) e^{-iPx}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (5) и (8) — это стандартные выражения, используемые на протяжении всего текста.

## Библиография

- Amado R. Phys. Rev., **122**, 696 (1961).  
Amati D., Fubini S. Ann. Rev. Nucl. Sci., **12**, 359 (1962).  
Balachandran A. P., von Hippel F. Ann. Phys., **30**, 446 (1964).  
Barret B., Barton G. Nuovo Cim., **29**, 703 (1963); Phys. Rev., **133**, B, 446 (1964).  
Barton G. Introduction to Advanced Field Theory. New York, Interscience, (1963).  
Barton G., Smith B. G. Nuovo Cim., **36**, 436 (1965).  
Bernstein J. et al. Nuovo Cim., **16**, 560 (1960a); Nuovo Cim., **17**, 757 (1960b).  
Bincer A. M. Phys. Rev., **118**, 855 (1960).  
Blancensbecler R. et al. Phys. Rev., **123**, 692 (1961).  
Blancensbecler R., Nambu Y. Nuovo Cim., **18**, 595 (1960).  
Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.  
Blin-Stoyle R. J., Rosina M. Nucl. Phys., **70**, 321 (1965).  
Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М.—Л., Гостехиздат, 1957.  
Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J. Phys. Rev., **101**, 453 (1956).  
Chew G. F. S-matrix Theory of Strong Interactions. New York, Benjamin, (1961).  
Chew G. F. Phys. Today, **17**, 30 (1964).  
Cooper L. N. Phys. Rev., **100**, 362 (1955).  
Dalitz R. H., Rajasekaran G. Phys. Rev. Lett., **7**, 373 (1963).  
Dombey N. Lectures in Theoretical Physics (University of Colorado). New York, Interscience, (1965).  
Drell S. D., Finn A. S., Hearn A. S. Phys. Rev., **136**, B 1439 (1964).  
Drell S. D., Zachariasen F. Phys. Rev., **119**, 463 (1960).  
Дрелл С., Захарьясен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.  
Dunning J. K. et al. Phys. Rev., Lett., **13**, 631 (1964).  
Durand L., Decelles P. S., Marr R. B. Phys. Rev., **126**, 1882 (1962).  
Dürr H. P., Heisenberg W., Mitter H., Schlieder S., Yamazaki K. Naturforsch., **14a**, 441 (1959).  
Eden R. J. Lectures in Theoretical Physics. Vol. 1. Brandeis Summer Institute. New York, Benjamin. (1962).  
Federbush P., Goldberger M. L., Treiman S. B. Phys., Rev., **112**, 642 (1958).  
Feinberg G., Pais A. Phys. Rev., **131**, 2724 (1963); Phys. Rev., **133**, B 477 (1964).

- Feldman G., Matthews P. T. *Phys. Rev.*, **132**, 823 (1963).
- Ferrari E., Jona-Lasimo G. *Nuovo Cim.*, **16**, 867 (1960).
- Foldy L. *Phys. Rev.*, **87**, 688 (1952).
- Frautshi S. C. *Regge Poles and S-matrix Theory*. New York, Benjamin, (1963).
- Fraser W. R. *Dispersion Relations* (ed. Screaton G. R.). Edinburgh, Oliver and Boyd (1961).
- Friedrichs K. O. *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*. New York, Interscience (1953). [Книгу составили пять работ, опубликованных в *Comm. Pure and Applied Math.*, **4**, 161 (1951); **5**, 1, 349 (1952); **6**, 1 (1953).]
- Gell-Mann M. *Physics*, **1**, 63 (1964).
- Gell-Mann M., Levy M. *Nuovo Cim.*, **16**, 705 (1960).
- Gell-Mann M., Low F. *Phys. Rev.*, **95**, 1300 (1954).
- Gell-Mann M., Neeman Y. *The Eightfold Way*. New York, Benjamin, (1964).
- Gell-Mann M., Zachariassen F. *Phys. Rev.*, **123**, 1065 (1961a); *Phys. Rev.*, **124**, 953 (1961b).
- Goebel C. J., Sakita B. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 293 (1963).
- Goldberger M. L. *Dispersion Theory and Elementary Particles*. New York, Wiley, (1961).
- Goldberger M. L., Treiman S. B. *Phys. Rev.*, **110**, 1178 (1958a); *Phys. Rev.*, **111**, 354 (1958b).
- Гольдбергер М., Ватсон К. *Теория рассеяния*. М., «Мир», 1967.
- Greenberg O. W. *Phys. Rev.*, **115**, 706 (1959).
- Haag R. *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **29**, No. 12 (1955).
- Hagedorn R. *Relativistic Kinematics*. New York, Benjamin (1963).
- Hagedorn R. *Introduction to Field Theory and Dispersion Relations*. Oxford, Pergamon, 1964).
- Hall D., Wightmann A. S. *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **31**, No. 5 (1957).
- Hamilton J. *Strong Interactions and High-Energy Physics* (ed. Moorhouse R. G.). Edinburgh, Oliver and Boyd (1964).
- Hand L. N., Miller D. G., Wilson R. *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 335 (1963).
- Hearn A. S. *Nuovo Cim.*, **21**, 333 (1961).
- Heisenberg W. *Nucl. Phys.*, **4**, 532 (1957).
- Хенли Э., Тирринг В. *Элементарная квантовая теория поля*. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
- Ida M. *Phys. Rev.*, **132**, 401 (1963).
- Ida M. *Progr. Theor. Phys.*, **34**, 92 (1965).
- Jackson J. D. *Dispersion Relations* (ed. Screaton G. R.). Edinburgh, Oliver and Boyd (1961).
- Jacob M., Chew G. *Strong-Interaction Physics*. New York, Benjamin (1965).
- Jauch J. M., Rohrlich F. *The Theory of Photons and Electrons*. Massachusetts, Addison-Wesley Cambridge, (1955).
- Jauch J. M. *Nuovo Cim.*, **16**, 1068 (1960).
- Jin Y. S., MacDowell S. W. *Phys. Rev.*, **137**, B 688 (1965).
- Иост Р. В. в кн. «Теоретическая физика XX века». Под ред. М. Фирца, В. Вайскопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
- Jost R. *Helv. Phys. Acta*, **36**, 77 (1963).
- Källén G., Pauli W. *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **30**, No. 7 (1955).
- Källén G., Wightman A. S. *Mat.-fys. Skrifth.*, **1**, No. 6 (1958).

- Khuri N. N., Treiman S. B. *Phys. Rev.*, **119**, 1115 (1960).  
 Kibble T. W. B. *Phys. Rev.*, **117**, 1159 (1960).  
 Ландау Л. Д. В кн. «Нильс Бор и развитие физики». М., Изд-во иностр. лит., 1958.  
 Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 1856 (1960).  
 Landshoff P. V. *Nuovo Cim.*, **28**, 123 (1963).  
 Lee T. D. *Phys. Rev.*, **95**, 1329 (1954).  
 Lee T. D., Yang C. N. *Phys. Rev.*, **128**, 885 (1963).  
 Lee T. D. *Phys. Rev.*, **128**, 899 (1963).  
 Lehmann H. *Nuovo Cim.*, **11**, 342 (1954). [См. на русском языке «Проблемы современной физики», № 3, 133 (1955)].  
 Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W. *Nuovo Cim.*, **1**, 205 (1955a); *Nuovo Cim.*, **2**, 425 (1955b); *Nuovo Cim.*, **6**, 319 (1957).  
 Lüders G. *Lectures on Field Theory and the Many-body Problem* (ed. Caianiello E. R.), New York; Academic Press (1961).  
 Mandelstam S. *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 84 (1960).  
 Mandelstam S. *Rept. Progr. Phys.*, **25**, 99 (1962).  
 Маршак Р., Судершан Э. Введение в физику элементарных частиц. М., Изд-во иностр. лит., 1962.  
 Moravcsik M. *Ann. Phys.*, **30**, 10 (1964).  
 Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.  
 Nambu Y. *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1960).  
 Nambu Y., Jona-Lasini G. *Phys. Rev.*, **122**, 345 (1961).  
 Nauenberg M. *Phys. Rev.*, **124**, 2011 (1961).  
 Nishijima K. *Phys. Rev.*, **133**, B 1092 (1964).  
 Okubo S. *Nuovo Cim.*, **19**, 574 (1961).  
 Omnès R. *Nuovo Cim.*, **8**, 316 (1958).  
 Omnès R., Froissart M. *Mandelstam Theory and Regge Poles*. New York, Benjamin, (1963).  
 Pandit L. K. *Suppl. Nuovo Cim.*, **11**, 157 (1959).  
 Polkinghorne J. *Lectures in Theoretical Physics*. Vol. 1. Brandeis Summer Institute, 1962. New York, Benjamin, (1962).  
 Pugh R. E. *Ann. Phys.*, **30**, 422 (1964).  
 Redmond P. J. *Phys. Rev.*, **112**, 1404 (1958).  
 Roman P. *Theory of Elementary Particles*. North Holland (1964).  
 Sachs R. G. *Phys. Rev.*, **126**, 2256 (1962).  
 Sakurai J. *Theoretical Physics*. Vienna, IAEA, (1963).  
 Schlieder S. *Z. Naturforsch.*, **15a**, 448, 460, 555 (1960).  
 Schnitzer H. J., Sudarshan E. C. G. *Phys. Rev.*, **123**, 2193 (1961).  
 Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. лит., 1963.  
 Squires E. J. *Strong Interactions and High-Energy Physics* (ed. Moorhouse R. G.). Edinburgh, Oliver and Boyd (1964).  
 Стритер Р., Вайтман А. (1966) PCT, Спин и статистика и всё такое. М., «Наука», 1966.  
 Sudarshan E. C. G. *Phys. Rev.*, **123**, 2183 (1961).  
 Sugawara M., Kanazawa A. *Phys. Rev.*, **123**, 1895 (1961).  
 Symanzik K. *Nuovo Cim.*, **11**, 269 (1959).  
 Taylor J. C. *Rept. Progr. Phys.*, **27** (1964).  
 Takahashi Y. *Nuovo Cim.*, **6**, 371 (1957).  
 Van Hove L. *Physika*, **18**, 145 (1962).  
 Ward J. C. *Phys. Rev.*, **78**, 182 (1950).



- Watson K. M. Phys. Rev., **88**, 1163 (1952).  
Weinberg S. Phys. Rev., (1965).  
Вейтцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей  
М.—Л., Гостехиздат, 1947.  
Wick G. C. Rev. Mod. Phys., **27**, 339 (1955).  
Wightman A. S., Schweber S. Phys. Rev., **98**, 812 (1955).  
Wightman A. S. Phys. Rev., **101**, 860 (1956).  
Wightman A. S. Theoretical Physics. Vienna, IAEA (1963).  
Yang C. N., Feldman D. Phys. Rev., **79**, 972 (1950).

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиальный ток	184, 187, 194, 285	Граничные значения	167
Аксиальный формфактор	186	Грина функция	83
Амплитуда рассеяния	62	Гупта—Блейлера формализм	20
Аналитическое продолжение	48	Дарвина член	269
— — по массе	179	Двухточечная функция	102
— — условия унитарности	249	Дейтрон	245
— — формфактора	159, 164	Динамические особенности	169
Аномальный магнитный момент	265	Дисперсионное представление	111
— порог	37, 169	Длина рассеяния	66, 231
Асимптотическое поведение формфактора	184	Духовые состояния	145, 298
— условие	30	Жесткий остов	175, 202
Аут-состояние	16	Запаздывающая функция Грина	83
Бета-распад	186, 286	Заряд	70
Ближайшие особенности	203	Заряда распределение	171
Бозон промежуточный	187	— —, Сакса интерпретация	177
Борновское приближение	174	Зарядовая независимость	188
Вакуум	19	Изовекторный формфактор	266
Ватсона теорема	206	Изоскалярный формфактор	266
Векторный ток	187	Изоспиновый ток	188
Вершина фотонная	154	Ин-состояние	16
Вершинная функция	130	Инвариантная амплитуда	55
Взаимодействие в конечном состоянии	182	Индукцированный псевдоскаляр	189, 208
Виртуальное состояние	242	Интерполирующее поле	30, 185, 190
Вспомогательные поля	23	Источник поля	32
Встречные пучки	191	КДД-полюс	224
Вычитание	167, 182, 221	Калибровочная инвариантность	191
Вырожденная компонента	159, 182, 185	Канонические соотношения коммутации	25, 188
Гамова—Теллера связь	190	Кинематические особенности	169, 184
Гейзенберга теория	331		
Гольдбергера—Треймана формула	292		
Голые частицы	300		

Класс эквивалентности	345	Приближение длины рассеяния	231
Коммутатор одновременной	160	— лестничное	228
Комплексная фаза	208	— одномезонное	227
Константа перенормировки массы	185	— резонансное для фазы	234
— — поля	37	— эффективного радиуса	234
— связи мезон—нуклон	184	Протяженная частица	177
— — перенормированная	184	Прямая связь	184
Коши интеграл	162, 212	$R$ -произведение (запаздывающее)	45
Лемана представление	103, 186	Радиус взаимодействия	220
— — для спинорного поля	112	Распад пи-мезона	286
Лемана—Симанзика—Циммермана теорема	130	Рассеяние в поле потенциала	220
Лептоны	187	Ренормализационная группа	206
Магнитный момент	265	$\rho$ -мезон	274
— формфактор	267	$S$ -матрица	18
Манделстама переменные	50	Сакса метод	177, 268
Мезонный формфактор нуклона	184	Связанное состояние	215
Мю-распад	187	Сильная сходимость	31
Мю-захват	287	Сильные взаимодействия	190
Невырожденная компонента	159	Скалярный формфактор	156
Неперенормированное поле	37	Слабая сходимость	31
Нетер теорема	196	Слабые взаимодействия	188
Нефизический лист	237	Собственная протяженность	178
Нормальный порог	57	Собственный граф Фейнмана	140
Обрезание	300	Сохранение тока	154
Омнеса функция	214	Спектральная функция Лемана	105
Оператор заряда	70	— — формфактора	129
— источника	32	— —, вещественность	166
— рождения, уничтожения	17	Странность 2	265
— четыре-импульса	21	Сугавара—Каназава теорема	116
— числа частиц	17	Схема свертывания	39
Осциллятор	333	$T$ -произведение (хронологическое)	41, 45
Отрицательная норма	323	Ток сохраняющийся	184
Паули преобразование	349	— — частично сохраняющийся	286
Перекрестная симметрия	48, 159	Трансформационные свойства тока	154
Перекрестные соотношения	47	Трехточечная функция	130
Перенормированная константа связи	185	— —, физический смысл	153
Перенормированное поле	37	Условие локальности	33
Полнота наборов ин- и аут-состояний	20	— стабильности	20
Полус Редже	292	— унитарности	55
Порог	57, 169		
Правила сумм	223, 274		
Правило подстановки			

Фазовый угол	209	Холла—Вайтмана теорема	358
Ферми связь	193	Центробежный барьер	222
Физическая область	157, 159	Челлена—Вайтмана теорема	180
Фолди—Вотхойзена преобразование	269	Электромагнитный форм-фактор иуклона	191
Формфактор	127	Энергия связи	246
Формфактор электрический	267	Эффективная длина	175
Функция распространения	193, 197		
Хаага теорема	357		

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
Предисловие к английскому изданию . . . . .	6
Глава 1. Введение и план изложения . . . . .	8
Глава 2. Гипотеза поля в физике элементарных частиц . . . . .	14
§ 2.1. Элементарные частицы . . . . .	14
§ 2.2. Вспомогательные поля . . . . .	23
§ 2.3. Интерполирующее поле и асимптотическое условие . . . . .	29
Глава 3. Схема свертывания и перекрестная симметрия . . . . .	38
Глава 4. Кинематика, перекрестная симметрия и сечения рассеяния . . . . .	49
§ 4.1. Кинематика, перекрестная симметрия и физические области . . . . .	50
§ 4.2. Свернутые амплитуды и сечения рассеяния . . . . .	54
§ 4.3. Иллюстрация из теории возмущений . . . . .	63
Глава 5. Заряд и спин . . . . .	67
§ 5.1. Заряженные мезоны с нулевым спином . . . . .	67
§ 5.2. Частицы со спином $1/2$ . . . . .	73
Глава 6. Переход к взаимодействию полей . . . . .	81
§ 6.1. Функции Грина . . . . .	81
§ 6.2. Неоднородное уравнение поля . . . . .	87
§ 6.3. Построение оператора интерполирующего поля по $S$ -матрице . . . . .	91
§ 6.4. Некоторые замечания о лагранжианах взаимодействующих полей . . . . .	97
Глава 7. Двухточечные функции . . . . .	102
§ 7.1. Представление Лемана и константы перенормировки поля . . . . .	103
§ 7.2. Замечания и приложения . . . . .	113
§ 7.3. Сходимость: теорема Сугавара и Каназава . . . . .	116
§ 7.4. Другой вывод представления Лемана для функции $\Delta'_F$ . . . . .	119
§ 7.5. Примеры спектральных функций . . . . .	125
Глава 8. Теорема Лемана—Симаизика—Циммермана о вершинной функции . . . . .	130
§ 8.1. Введение . . . . .	130

§ 8.2.	Формулировка проблемы . . . . .	131
§ 8.3.	Доказательство . . . . .	138
§ 8.4.	Обсуждение . . . . .	143
§ 8.5.	«Духи» в теории возмущений . . . . .	145
<b>Глава 9.</b>	<b>Формфактор . . . . .</b>	<b>152</b>
§ 9.1.	Введение . . . . .	152
§ 9.2.	Скалярный формфактор. Перекрестная симметрия и дисперсионное представление . . . . .	156
§ 9.3.	Нескалярные формфакторы и кинематические особенности . . . . .	167
§ 9.4.	Формфактор в конфигурационном пространстве . . . . .	171
§ 9.5.	Представления по массовым переменным . . . . .	179
<b>Глава 10.</b>	<b>Вычитания, сохраняющиеся токи и асимптотическое поведение . . . . .</b>	<b>182</b>
§ 10.1.	Вычитания и одновременные коммутаторы . . . . .	183
§ 10.2.	Сохраняющиеся векторные токи . . . . .	191
§ 10.3.	Тождество Уорда . . . . .	196
§ 10.4.	Сведения об асимптотиках из теории возмущений . . . . .	200
<b>Глава 11.</b>	<b>Уравнение Омнеса . . . . .</b>	<b>203</b>
§ 11.1.	Уравнение Омнеса . . . . .	204
§ 11.2.	Решение уравнения Омнеса . . . . .	211
§ 11.3.	Уравнение Омнеса при наличии связанных состояний . . . . .	215
<b>Глава 12.</b>	<b>Аппроксимации амплитуд парциальных волн и функций Омнеса . . . . .</b>	<b>217</b>
§ 12.1.	Свойства парциальных амплитуд . . . . .	218
§ 12.2.	Некоторые динамические приближения . . . . .	226
§ 12.3.	Алгебраические параметризации . . . . .	230
<b>Глава 13.</b>	<b>Второй риманов лист . . . . .</b>	<b>236</b>
<b>Глава 14.</b>	<b>Аномальные пороги . . . . .</b>	<b>245</b>
§ 14.1.	Аномальные пороги . . . . .	245
§ 14.2.	Сравнение с шредингеровской волновой функцией: составная природа дейтрона . . . . .	257
§ 14.3.	Константа связи дейтрона с нуклоном для составного дейтрона . . . . .	261
<b>Глава 15.</b>	<b>Электромагнитная структура нуклонов . . . . .</b>	<b>264</b>
§ 15.1.	Выбор формфакторов . . . . .	264
§ 15.2.	Экспериментальные данные и общие замечания . . . . .	271
§ 15.3.	Дисперсионная теория . . . . .	275
<b>Глава 16.</b>	<b>Аксиальный ток и формула Гольдбергера — Треймана . . . . .</b>	<b>285</b>
§ 16.1.	Постановка вопроса и нуклонные формфакторы . . . . .	286
§ 16.2.	Распад заряженного $\pi$ -мезона и «частично сохраняющийся» ток . . . . .	290
<b>Глава 17.</b>	<b>Модель Ли и отрицательные вероятности . . . . .</b>	<b>298</b>
§ 17.1.	Введение . . . . .	298
§ 17.2.	Переномированный формализм и «духовое» состояние . . . . .	309
§ 17.3.	И indefinitная метрика . . . . .	319
§ 17.4.	И indefinitная метрика и асимптотическое условие . . . . .	326

<b>Глава 18. Бесконечное число степеней свободы . . . . .</b>	<b>331</b>
§ 18.1. Введение . . . . .	331
§ 18.2. Нейтральное скалярное поле с фиксированными классическими точечными источниками . . . . .	334
§ 18.3. Неэквивалентные представления соотношений коммутации . . . . .	342
§ 18.4. Замечания и примеры . . . . .	347
<b>Глава 19. Теорема Хаага . . . . .</b>	<b>357</b>
§ 19.1. Введение . . . . .	357
§ 19.2. Функции Вайтмана . . . . .	358
§ 19.3. Следствия теоремы Холла и Вайтмана . . . . .	364
§ 19.4. Теорема Хаага . . . . .	369
Обозначения . . . . .	378
Соглашение о знаках плоских волн и операторов импульса . . . . .	379
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>382</b>
<b>Алфавитный указатель . . . . .</b>	<b>386</b>