

Р. БАСАКЕР, Т. СААТИ

КОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ И СЕТИ

Перевод с английского

В. Н. БУРКОВА, С. Е. ЛОВЕЦКОГО, В. Б. СОКОЛОВА

Под редакцией
А. И. ТЕЙМАНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

6Ф6.5

Б 27

УДК 62-50

Конечные графы и сети, Б а с а к е р Р., С а а т н Т., перевод с английского. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», Москва, 1973, 368 стр.

Монография известных американских специалистов по исследованию операций посвящена теоретическим и прикладным вопросам теории графов. Книга состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основные понятия и проблемы теории графов. Во второй части книги приводится множество интересных приложений теории графов в различных областях науки и техники, таких, как экономика, исследование операций, кибернетика, теория игр, лингвистика, передача данных и др. Книга снабжена подробной библиографией, упоминаниями и ответами к ним.

Монография рассчитана на математиков, специалистов по исследованию операций, инженеров, научных работников и аспирантов, занимающихся теоретическими и прикладными вопросами теории графов.

Илл. 175. Библ. 233 назв.

FINITE GRAPHS AND NETWORKS:

An Introduction with Applications

Robert G. Busacker & Thomas L. Saaty

Research Analysis
Corporation

U. S. Arms Control
and Disarmament
Agency

Mc Graw-Hill Book Company
New York — St. Louis — San Francisco — Toronto
London — Sydney

© Перевод на русский язык. Издательство «Наука», 1974

Б $\frac{3314-1853}{042(02)-73}$

162-73 ~

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	6
Предисловие	7

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Глава 1. Основные понятия: неориентированные графы . . .	11
1.1. Введение	11
1.2. Геометрические графы	12
1.3. Абстрактные графы	14
1.4. Изоморфизмы и реализации	16
1.5. Термины, описывающие локальные свойства	19
1.6. Маршруты, цепи и циклы	21
1.7. Связность	24
1.8. Деревья и леса	26
1.9. Разделяющие множества и разрезы	29
1.10. Некоторые специальные классы графов	32
Литература	35
Глава 2. Основные понятия: ориентированные графы . . .	37
2.1. Введение	37
2.2. Ориентированные графы	37
2.3. Термины для описания локальной структуры	40
2.4. Ориентированные маршруты, пути и контуры	41
2.5. Сильная связность	43
2.6. Деревья и разрезы	44
2.7. Ориентированные графы и бинарные отношения	46
Глава 3. Разбиения и расстояния на графах	49
3.1. Введение	49
3.2. Разбиения ребер	49
3.3. Разбиения дуг	54
3.4. Гамильтоновы цепи и циклы	61
3.5. Разбиения вершин	75
3.6. Радиус и диаметр	80
3.7. Задачи о минимальных расстояниях	82
Литература	89

Глава 4. Плоские и неплоские графы. Теорема о раскраске	90
4.1. Введение	90
4.2. Плоские графы	91
4.3. Дополнительный граф	108
4.4. Раскраска ребер графа	112
4.5. Раскраска граней и вершин. Задача о четырех красках	115
4.6. Графы и поверхности	127
Литература	133
Глава 5. Матричное представление графов	136
5.1. Введение	136
5.2. Матрица инциденций	139
5.3. Матрица циклов	143
5.4. Матрица разрезов	144
5.5. Матрица смежности вершин	149
5.6. Матрица путей	157
5.7. Реализуемость матриц циклов и разрезов	158
5.8. Матрица графов и комбинаторная топология	161
Литература	164

ЧАСТЬ II.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Глава 6. Прикладные задачи теории графов	166
6.1. Введение	166
Приложения к экономике и исследованию операций	167
6.2. Экономика и снабжение	167
6.3. Линейное программирование и потоки в сетях	172
6.4. Задачи типа ПЕРТ	173
Комбинаторные задачи	183
6.5. Примеры комбинаторных задач в теории графов	183
6.6. Минимальное число аварий на кирпичном заводе	197
6.7. Минимальное число пересечений в полных графах	202
Головоломки и игры	205
6.8. Задача соединения раскрашенных кубов	205
6.9. Задачи изменения состояний системы	207
6.10. Матричная форма задачи о переправе	213
6.11. Задача деления треугольника	219
6.12. Игра двух лиц	220
6.13. Игры на шахматной доске	224
Паросочетания	226
6.14. Максимальные паросочетания	226
Технические приложения	238
6.15. Анализ технических систем	238
6.16. Сети связи	244
6.17. Граф потока сигналов	248
6.18. Переключательные сети (схемы)	254
6.19. Объединение электростанций в энергосистему	257
6.20. Печатные схемы	258

Естественные науки	260
6.21. Идентификация в химии	250
6.22. Простая модель из органической химии	265
6.23. Два примера из статистической механики	258
6.24. Генетическая задача	270
Задачи изучения человека и общества	272
6.25. Графы и кибернетика	272
6.26. Применения в социологии	277
6.27. Математические модели разоружения	281
6.28. Лингвистика	284
Литература к разделу 6.28	289
Дополнительные приложения	289
6.29. Математические машины и цепи Маркова	289
6.30. Группы и обыкновенные графы	295
6.31. Построение деревьев минимальной общей длины	297
6.32. Графы и собственные значения неотрицательных матриц	298
6.33. Задача ранжирования	300
Литература	304
Глава 7. Потoki в сетях	309
7.1. Введение	309
7.2. Основная терминология	309
7.3. Отношения между потоками и операции над ними	313
7.4. Простые потоки	314
7.5. Другое представление потока	315
7.6. Потoki с ограничениями на дугах	318
7.7. Максимальный поток в транспортной сети	325
7.8. Максимальные потоки в сетях общего вида с ограниченными пропускными способностями дуг	327
7.9. Потoki минимальной стоимости	332
7.10. Некоторые специальные задачи о потоках	338
7.11. Задачи о многопродуктовых потоках	340
7.12. Стохастические потоки в сетях	343
Литература	346
Ответы к упражнениям	348
Краткий терминологический словарь	362

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Басакера и Саати «Конечные графы и сети» рассчитана на лиц, занимающихся использованием теории графов при решении различных задач в области техники, экономики, социологии. Она содержит основные понятия теории графов, достаточно полный перечень научных результатов и описание методов решения различных задач.

Для лучшего понимания и усвоения материала в книге приводится большое число примеров, а также имеются учебные упражнения.

Следует заметить, что книга в целом написана не везде ровно и наряду с элементарными сведениями приводятся данные, требующие от читателя солидной математической подготовки.

Перевод книги представлял известные трудности. В русской литературе до настоящего времени отсутствует единая терминология по теории графов, и переводчикам в процессе работы над книгой пришлось приложить много труда при выборе терминов. Дополнительные трудности возникли в связи с тем, что терминология авторов далеко не бесспорна.

В процессе перевода поддерживался контакт с авторами, что позволило уточнить ряд мест. Кроме того, исправлены имевшиеся в оригинале неточности и опечатки.

Несмотря на то, что с момента выхода книги на английском языке прошло относительно длительное время, можно надеяться, что ее русское издание окажется полезным для широкого круга лиц, занимающихся прикладными математическими вопросами, инженеров и экономистов.

А. Тейман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория графов дает простой, доступный и мощный инструмент построения моделей и решения задач упорядочения объектов. В настоящее время существует множество проблем, где требуется построить некоторые сложные системы с помощью определенного упорядочения их элементов. Сюда относятся календарное планирование промышленного производства, задачи теории сетевого планирования и управления (СПУ), тактические и логические задачи, проблемы построения систем связи и исследования процессов передачи информации, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, методы построения электрических сетей, задачи идентификации в органической химии и способы построения переключаемых схем. Таким же являются большой круг экономических задач, проблемы выбора структуры социальных групп, игровые задачи и головоломки и т. д. Таким образом, область возможных применений теории графов очень широка. Комбинаторные методы нахождения нужного упорядочения объектов существенно отличаются от классических методов анализа поведения систем с помощью уравнений. Кроме языка теории графов задачи упорядочения объектов можно формулировать в терминах теории матриц с элементами ноль — один, или в терминах теории конечных множеств.

Однако с полным основанием можно сказать, что теория графов является одним из простейших и наиболее элегантных разделов современной математики с широкой областью применения. Имея в своей основе простейшие идеи и элементы: точки, соединенные линиями, теория графов строит из них богатое многообразие форм, наделяет эти формы интересными свойствами и в результате

становится полезным инструментом при исследовании самых разнообразных систем. Кроме того, теория графов внесла большой вклад в разработку методов анализа широкого круга комбинаторных проблем.

Вместо понятия графа часто используется понятие «сеть». Это особенно относится к случаям, когда кроме основных чисто структурных соотношений в графе задаются некоторые количественные характеристики точек и линий, образующих граф. В качестве примера можно назвать электрические сети, сети выполнения работ в проектах, сети потоков. При этом ребрам сети ставятся в соответствие определенные количественные характеристики энергии, затрат и потока.

Данная книга рассчитана на преподавателей, работающих со студентами выпускных курсов и аспирантами первого года обучения по специальности математика, естественные и общественные науки, технические науки, экономика и исследование операций. Как показал опыт практической работы со студентами, книга дает достаточно широкое общее представление о теории графов и разнообразных сферах ее применения и стимулирует развитие творческой активности учащихся. Материал книги является развитием курса, читавшегося в течение нескольких лет аспирантам университета Джорджа Вашингтона и студентам некоторых зарубежных учебных заведений.

Нам кажется, что любой человек, который готовит себя к работе в области науки или техники, должен познакомиться хотя бы с основами теории графов, так как эта теория является фундаментальной по своей природе и имеет широкую область применения. Одна из целей настоящей книги состоит как раз в том, чтобы обеспечить такое знакомство. Книгу можно рассматривать как вводный курс в теорию графов, или как пособие для самостоятельной работы. В использованной литературе имеется много статей, посвященных разнообразным частным проблемам, но они, конечно, не являются исчерпывающими.

Материал книги преподносится в форме неформального обсуждения основных идей. Четкость обсуждения усиливается за счет их иллюстрации разнообразными приложениями. Мы надеемся, что такой способ изложения

позволит читателю соотнести основные понятия теории графов с его собственными задачами, а убедившись в важности этой теории, читатель захочет и сам участвовать в ее дальнейшем развитии.

Книга состоит из двух частей. В первой части, включающей главы 1÷5, дается основной теоретический материал. В главе 1 приводятся основные определения, термины и символы, необходимые для описания и классификации неориентированных графов. Глава заканчивается большим списком широко известных книг по основной теме и связанным с ней вопросам. В конце книги приводится исчерпывающая библиография, составленная Мунном и Мозером. Она показывает чрезвычайно широкий диапазон обсуждаемых вопросов. В главе 2 приводятся определения, понятия и символы, используемые при рассмотрении ориентированных или направленных графов. Глава 3 является продолжением развития основных понятий. Основное внимание в ней уделяется способам разбиения элементов графа и измерению расстояния на графах. В главе 4 рассматриваются свойства и характеристики важного класса плоских графов и обсуждается класс проблем, получивших название задачи раскраски. В последней, пятой главе первой части помимо геометрических понятий для характеристики графов начинают использоваться алгебраические понятия. Обсуждается роль матриц при описании и структурном анализе графов.

Вторая часть книги состоит из глав 6 и 7. Она иллюстрирует приложение развитой теории к самым различным областям. В большой и разнообразной по материалу в главе 6 кратко рассматриваются вопросы использования теории графов в самых различных ситуациях. В главе 7 проводится графотеоретическое рассмотрение потоков в сетях при наличии ограничений. Обсуждаются общие методы максимизации потоков и минимизации стоимости. Проводится краткое обсуждение потоков в стохастических сетях и показана связь основных идей в этой области с теорией массового обслуживания.

Для успешной работы с книгой читатель должен быть знаком с основной терминологией теории множеств и с элементарными понятиями аппарата теории матриц и векторных пространств.

Интересный вывод позволяет сделать теорема 1.2, которая приведена в главе 1. Из нее следует, что любой граф, число вершин и ребер которого выражается континуумом, может быть представлен в трехмерном пространстве без самопересечений. Хотя переход к более высокой размерности может упростить описание потоков, однако при этом совершенно не обязательно будут становиться более богатыми аналитические результаты. Важность последнего наблюдения становится особенно очевидной, если учесть, что человека можно в общих чертах описывать с помощью потоков в его нервной системе (характеризующейся неограниченными возможностями, в том числе способностью к многомерной абстракции). Эти потоки человек использует для управления своим собственным организмом и установления связи с внешней средой. Представляется, что использование трехмерного пространства является весьма адекватным и экономичным при реализации модели человека в виде системы потоков.

Мы благодарны Д. Эдмондсу за большое число предложений и добавлений, которые он сделал, особенно в части главы 6, и доктору Х. Тренту за полезные идеи и обсуждение различных вопросов, связанных с содержанием книги. Мы признательны также за полезные предложения, в частности по главе 6, и за помощь при подборе и написании материала доктору Д. Розенблату (§ 6.2), Ч. Маклину (§ 6.10), доктору К. Фею (§ 6.4), Дж. Бушке, С. Мидору (§ 6.22), У. Муррею (§ 6.28), П. Риану и Э. Стерну.

*Роберт Басакер
Томас Саати*

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Первая часть книги состоит из пяти глав. В главах 1 и 2 даны основные определения и теоремы, касающиеся соответственно неориентированных и ориентированных графов. В главе 3 продолжается развитие теории, причем основное внимание концентрируется на различных методах разбиения и измерения расстояний в графах. В четвертой главе рассматриваются плоские графы и задачи раскраски, наиболее ярким примером которых является классическая проблема четырех красок. В главе 5 основное внимание уделяется использованию алгебраических методов для исследования свойств графа с помощью представляющих его матриц.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ: НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

1.1. Введение

В настоящей главе вводится понятие графа. *Граф* определяется сначала как геометрическая структура, состоящая из разбросанных в пространстве точек (вершин), соединенных системой кривых (ребер). В последующем дается его определение в абстрактных терминах теории множеств. Приводится основная терминология и вводятся обозначения, необходимые для описания локальных и глобальных структурных свойств графа. Таким образом, данная глава, вместе со второй главой, в которой рассматриваются графы с ориентированными ребрами, дает необходимый словарь для описания графов. Чтобы

оживить чтение необходимого предварительного материала, в главу включен ряд результатов, которые непосредственно следуют из определений.

Учитывая, что в настоящее время в теории графов нет стандартной терминологии и обозначений, мы настоятельно советуем читателю изучить содержание этих двух глав до того, как он перейдет к последующему материалу.

1.2. Геометрические графы

Прежде чем определить понятие графа в наиболее общей форме, рассмотрим класс графов, известных под названием *геометрических графов*. Это позволит с самого начала получить удобное, наглядное представление различных понятий и структур, которые будут рассматриваться в дальнейшем. Ниже будет показано, что любой граф в абстрактном смысле эквивалентен (по отношению к свойствам, изучаемым в теории графов) некоторому геометрическому графу. Таким образом, геометрический граф можно рассматривать как удобное представление любых графов, а не просто как частный пример.

Обозначим n -мерное евклидово пространство через ϵ^n . (Далее при обсуждении результатов теорем 1.1 и 1.2 нас будут интересовать в основном двух- и трехмерные пространства.)

Евклидово n -мерное пространство есть множество последовательностей из n действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, в котором расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ определено следующим образом:

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Простой незамкнутой кривой в пространстве ϵ^n называется непрерывная, самонепересекающаяся кривая, соединяющая две различные точки в ϵ^n (т. е. кривая, получаемая непрерывной деформацией прямолинейного отрезка).

Аналогично, *простой замкнутой кривой* называется непрерывная самонепересекающаяся кривая, конечные точки которой совпадают.

Геометрический граф в пространстве ϵ^n есть множество $V = \{v_i\}$ точек пространства ϵ^n и множество $E = \{e_i\}$ простых кривых, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Каждая замкнутая кривая в E содержит только одну точку v множества V .

2. Каждая незамкнутая кривая в E содержит ровно две точки множества V , которые являются ее граничными точками.

3. Кривые в E не имеют общих точек, за исключением точек из множества V .

Таким образом, геометрический граф есть просто геометрическая конфигурация или структура в пространстве ϵ^n , состоящая из множества точек, взаимосвязанных множеством непрерывных, самонепересекающихся кривых.

При некоторой идеализации многие известные структуры можно рассматривать как геометрические графы и изучать с помощью излагаемых ниже методов. Например, в виде графа можно представить систему автомобильных дорог, если пренебречь шириной последних, а пересечения считать точками. Далее будут приведены и другие примеры реальных структур, которые можно изобразить в форме графа.

Обычная форма представления геометрического графа показана на рис. 1.1. С позиций теории графов элементы

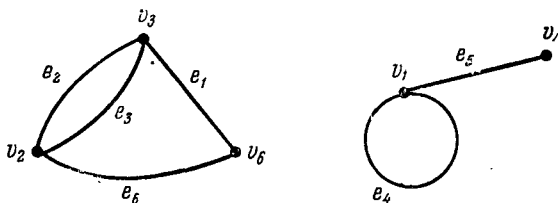


Рис. 1.1.

v и e называются *геометрическими вершинами* и *геометрическими ребрами* соответственно. Введем теперь различные описательные термины, которые составляют основной словарь теории графов. (Например, ребра e_2 и e_3 на рис. 1.1 называются *параллельными*, вершина v_5 назы-

вается *изолированной*, вершины v_3 и v_6 называются *смежными* и т. д.).

Предварительно дадим определение графа в более общем виде.

1.3. Абстрактные графы

Хотя многие графы, представляющие реальные объекты (после их идеализации), являются геометрическими графами, с точки зрения теории графов их единственная структурная особенность состоит в том, что с каждым геометрическим ребром связаны две (возможно совпадающие) геометрические вершины. Теория графов построена с учетом именно этой особенности и не учитывает реальной природы вершин и ребер. Таким образом, нумерация ребер и вершин, задаваемая нижеследующей таблицей, содержит всю информацию, необходимую для описания геометрического графа рис. 1.1.

Ребра	Вершины, соответствующие ребрам
e_1	v_3, v_6
e_2	v_2, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_1
e_5	v_1, v_4
e_6	v_2, v_6
	v_5

Для облегчения общего определения графа введем понятие неупорядоченного произведения множества само на себя. Напомним, что *упорядоченным* или *декартовым (прямым) произведением множества S само на себя* (которое обозначается $S \times S$) называется множество всех упорядоченных пар (s, t) , где $s \in S$ и $t \in S$. Здесь (s, t) и (t, s) рассматриваются как различные элементы, исключая случай $s=t$. Аналогично, символом $(s \& t)$ будем обозначать *неупорядоченную* пару элементов множества S , а множество всех различных неупорядоченных пар будет обозначаться как $S \& S$ и называться *неупорядоченным произведением множества S само на себя*. В данном случае $(s \& t)$ и $(t \& s)$ эквивалентны и так же, как при декартовом произведении, допускается совпадение элементов пары, т. е. $s=t$. Заметим, что если s имеет k элементов, то $S \times S$ состоит из k^2 упорядоченных пар, а $S \& S$ — из $k(k+1)/2$ различных неупорядоченных пар.

Абстрактный граф или просто *граф* можно определить теперь следующим образом.

Граф есть совокупность непустого множества V , изолированного от него множества E (возможно пустого) и отображения Φ множества E на $V \times V$. Элементы множеств V и E называются *вершинами* и *ребрами* графа соответственно, а Φ называется *отображением инцидентности графа*.

Если $e \in E$ — ребро, а $v \in V$ и $w \in V$ — вершины такие, что $\Phi(e) = v \& w$, говорят, что ребро e *инцидентно* каждой из вершин v и w и обратно. Все остальные вершины рассматриваются как не инцидентные ребру e . Вершины, инцидентные ребру, называются его *граничными точками*. Иногда говорят, что они соединяются ребром e .

Хотя отношение инцидентности является фундаментальным в понятии графа, отображение Φ часто можно не задавать в явном виде. В таких случаях, если v и w — граничные точки ребра e , то это обозначается $e \sim (v \& w)$ и читается « e соединяет вершины v и w ».

Будем обозначать граф через G или (V, E, Φ) или (V, E) . Последнее обозначение используем, когда отношение инцидентности определяется не явно. Заметим, что множество E (но не V) может быть пустым. Говорят, что граф *вырожденный* тогда и только тогда, когда он не имеет ребер. Хотя графы, не имеющие ребер, сами по себе не интересны, их рассмотрение иногда оказывается полезным, например, при работе с процедурами разборки графа, основанными на последовательном удалении ребер.

Если V и E — конечные множества (пустое множество тоже рассматривается как конечное), то G называется *конечным графом*. В противном случае говорят, что граф не является конечным.

Введение понятия абстрактного графа позволяет не только избавиться от случайных геометрических характеристик, сохранив наиболее существенные комбинаторные свойства графа. Оно расширяет возможности приложения теории, так как многие реальные структуры имеют комбинаторные свойства, которые полезно рассматривать как граф. Например, в виде графа можно задать соотношение между отдельными работами, которые составляют сложные проекты. В этом случае ребра (после того как задана их ориентация или направление, см. главу 2) представляют отдельные работы, а отношения

инцидентности графа отражают последовательность выполнения определенных работ. Далее мы еще вернемся к рассмотрению этого важного класса графов в п. 6.4. Отметим только, что в этом случае геометрическое изображение ситуации является в действительности искусством, а не простой идеализацией реальных физических соотношений, существующих между объектами в пространстве.

1.4. Изоморфизмы и реализации

Очевидно, что геометрический граф есть частный случай графа, в котором вершины и ребра являются соответственно точками и простыми кривыми в пространстве ϵ^n , а выражение $\Phi(e) = (v \& w)$ означает, что v и w являются граничными точками кривой e или что v — единственная вершина, содержащаяся в замкнутой кривой e , если $v = w$.

Ранее было отмечено, что любой граф в абстрактном смысле идентичен, или, используя более принятый термин, изоморфен некоторому геометрическому графу. Изоморфизм графов формально определяется следующим образом: говорят, что графы $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ *изоморфны* друг другу, если существует взаимно однозначное соотношение между V и V' и между E и E' , сохраняющее отношения инцидентности. Иначе говоря, ребро e инцидентно вершине v графа G тогда и только тогда, когда инцидентны соответствующие элементы e' и v' в графе G' . Если граф G изоморфен геометрическому графу G' , тогда G' называется *геометрической реализацией* графа G . (В частности, геометрический граф можно рассматривать как геометрическую реализацию самого себя.)

Граф называется *плоским* тогда и только тогда, когда он имеет геометрическую реализацию в пространстве ϵ^2 . Например, граф G , изображенный на рис. 1.2, а, плоский, так как он изоморфен графу, изображенному на рис. 1.2, в.

Рис. 1.2 иллюстрирует очевидный, но важный факт: геометрический граф может быть плоским, даже если его нельзя преобразовать в плоский граф с помощью непрерывной деформации. Хотя G и G' имеют

существенные отличия с точки зрения топологии, с точки зрения теории графов они эквивалентны.

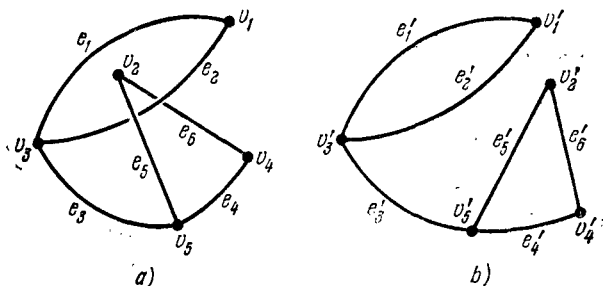


Рис. 1.2.

На рис. 1.3 показан неплоский граф, т. е. граф, не имеющий геометрической реализации в пространстве ϵ^2 . Граф иллюстрирует одну из двух фундаментальных конфигураций, которые характеризуют все неплоские конечные графы. Этот результат, следующий из важной теоремы, принадлежащей Куратовскому*), устанавливается в главе 4, где исследуются особенности плоских графов. Если в пространстве ϵ^2 только ограниченный класс конечных графов имеет геометрическую реализацию, то для пространства ϵ^3 справедливо следующее утверждение.

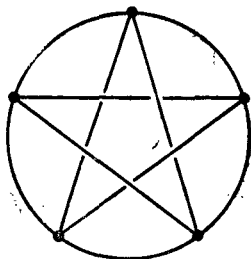


Рис. 1.3.

Теорема 1.1. Любой конечный граф G имеет геометрическую реализацию в ϵ^3 .

Доказательство. Обозначим через L произвольную прямую в ϵ^3 . Поставим в соответствие каждой вершине $v \in V$ определенную точку v' на L (различным вершинам v будут соответствовать различные v'), а каждой неупорядоченной паре $(v, w) \in V \times V$ — определенную полуплоскость $H_{v, w}$, границей которой является L .

*) Эта теорема впервые установлена, но не опубликована Л. С. Понтрягиным. Позднее независимо от него доказана Куратовским. В дальнейшем мы будем ее называть второй теоремой Понтрягина — Куратовского. (Прим. ред.)

Для каждого ребра e из G такого, что $e \sim (v \& w)$, построим в полуплоскости $H_{v, w}$ простую кривую e' , соединяющую v' и w' и не имеющую других общих точек с L или с другими кривыми в $H_{v, w}$. (Очевидно, что это возможно.) Полученная структура является геометрической реализацией графа G в ϵ^3 .

Хотя справедливость теоремы 1.1 почти очевидна, мы указали этот способ построения геометрической реализации главным образом потому, что его можно непосредственно обобщить для доказательства следующей, менее очевидной теоремы, которая определяет наличие геометрической реализации в самом общем виде.

Теорема 1.2. Граф $G = (V, E)$ имеет геометрическую реализацию в ϵ^3 тогда и только тогда, когда элементам V и E можно поставить во взаимно однозначное соответствие некоторое подмножество множества действительных чисел.

Для читателя, знакомого с понятием кардинального числа, сказанное означает, что G имеет реализации в ϵ^3 тогда и только тогда, когда кардинальные числа множеств V и E совпадают с кардинальными числами континуума.

Далее мы почти всегда будем иметь дело с конечными графами и исключим из рассмотрения графы, которые не удовлетворяют условиям теоремы 1.2. Более того, все изучаемые структурные свойства сохраняются за счет изоморфизма, так как они в конечном счете основываются на понятии инцидентности. Из сказанного следует, что далее без потери общности можно все рассуждения проводить полностью в терминах геометрических реализаций в ϵ^3 . В частности, все графы, которые будут иллюстрировать излагаемый материал, являются геометрическими графами.

Идея доказательства теоремы 1.2 состоит в следующем. Точки пространства ϵ^n можно взаимно однозначно отобразить на множество действительных чисел. Очевидно, что граф $G(V, E)$ не имеет реализации в ϵ^3 (и даже в ϵ^n для любого положительного целого n), если нельзя установить взаимно однозначного соответствия между некоторым множеством его вершин или ребер и подмножеством точек в ϵ^3 . С другой стороны, если такое соответствие существует, то можно (в терминологии доказа-

тельства теоремы 1.1) выбрать различные точки v' на L для каждой вершины и различные полуплоскости $H_{v, w}$ для каждой неупорядоченной пары вершин. Как только это сделано, в плоскости $H_{v, w}$ можно построить кривые согласно схеме, показанной на рис. 1.4. Каждая точка на

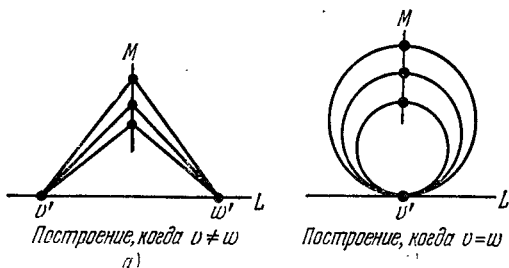


Рис. 1.4.

отрезке M определяет простую кривую (ломаную линию или круг), которая не совпадает с другими такими же кривыми, за исключением точек v' и w' .

1.5. Термины, описывающие локальные свойства

Чтобы получить возможность четкого описания различных структурных свойств графов, полезно ввести ряд дополнительных понятий, которые особенно наглядно иллюстрируются на примере геометрических графов.

Если $e \sim (v \& w)$, то будем называть v и w *граничными точками* e независимо от того, является граф геометрическим или нет. Если $v = w$, тогда v — единственная граничная точка e , а e называется *петлей*. Если $e_1 \sim (v \& w)$ и $e_2 \sim (v \& w)$, тогда e_1 и e_2 называются *параллельными ребрами*. В частности, две петли, инцидентные одной и той же вершине, являются параллельными. Говорят, что вершины v и w *смежные*, если существует, по крайней мере, одно ребро e такое, что $e \sim (v \& w)$. В частности, вершина v смежна сама с собой, если существует петля, инцидентная v ; в противном случае v не может быть смежной сама с собой. Аналогично ребра e_1 и e_2 называются смежными, если они имеют, по крайней мере, одну общую граничную точку. Заметим, что *смежность* является отношением между двумя подобными эле-

ментами (между вершинами или между ребрами), тогда как *инцидентность* есть отношение между разнородными элементами.

Число ребер, инцидентных вершине v (петля учитывается дважды), называется *степенью* вершины v и обозначается $\delta(v)$. Говорят, что вершина v *изолирована*, если $\delta(v) = 0$. В частности, *вырожденным* графом называется граф, у которого все вершины изолированы.

Пусть S — любое конечное множество. Обозначим через $|S|$ число элементов в множестве S . Таким образом, $|V|$ и $|E|$ — число вершин и ребер конечного графа $G = (V, E)$ соответственно. Учитывая, что появление каждого нового ребра добавляет по единице к степеням двух вершин (или в случае петли два к степени одной вершины), имеем

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Если V_0 и V_1 — множества вершин, имеющих четные и нечетные степени соответственно, то, очевидно, $\sum_{v \in V_0} \delta(v)$ четно, так как это конечная сумма четных чисел. Отсюда следует, что

$$\sum_{v \in V} \delta(v) - \sum_{v \in V_0} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v)$$

также обязательно четно, что доказывает следующую теорему.

Теорема 1.3. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

Для лучшего усвоения введенной выше терминологии проиллюстрируем ее на примере графа, изображенного на рис. 1.5. Граничными точками ребра e_1 являются вершины v_3 и v_2 . Петля e_4 имеет единственную

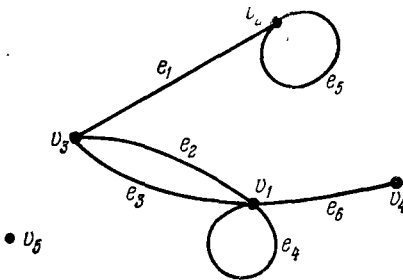


Рис. 1.5.

граничную точку v_1 . Ребро e_2 смежно ребру e_1 и параллельно ребру e_3 . (Заметим, что параллельные ребра яв-

ляются также и смежными). Вершина v_1 смежна с v_4 и сама с собой, однако v_4 с собой не смежна. Вершина v_5 является изолированной вершиной. Четыре вершины, а именно, v_1 , v_2 , v_3 и v_4 , имеют нечетную степень.

Пусть задан граф $G(V, E, \Phi)$. Систему $G_1 = (V_1, E_1, \Phi_1)$ будем называть *подграфом* графа G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

1. $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$.

2. $\Phi_1(e) = \Phi(e)$ для каждого $e \in E_1$.

3. Если $e \in E_1$ и $\Phi(e) = (v \& w)$, то $v \in V_1$ и $w \in V_1$.

Иначе говоря, подграф графа G состоит из части ребер и вершин G , для которых сохраняются отношения инцидентности, имеющие место в графе G при выполнении разумного требования о том, что множество вершин подграфа G должно включать все граничные точки множества его ребер. Граф G называется также *надграфом* графа G_1 *).

Упражнение 1.1. Рассмотрите граф, ребра которого изображают отрезки улиц и переулков, а вершины — их пересечения в системе городских улиц. Интерпретируйте введенные выше термины, связанные с локальной структурой графа, на этом графе. (Читатель может, забегая вперед, попытаться определить и некоторые глобальные характеристики, например дать разумное определение свойства связности графа.)

1.6. Маршруты, цепи и циклы

Рассматривая геометрический граф, можно зафиксировать некоторую вершину и, последовательно двигаясь по смежным ребрам к вершинам, прийти в другую вершину или вернуться в исходную. В геометрическом графе это означает, что мы непрерывным образом двигаемся по последовательности простых кривых. Последовательности ребер, по которым можно двигаться непрерывным образом, играют фундаментальную роль в теории графов. В частности, такие структуры, как цепи и циклы, в которых ни одно ребро не встречается дважды

* Термином *подграф* авторы обозначают произвольную часть графа, удовлетворяющую определениям раздела 1.3. В литературе используются специальные термины для выделения важнейших частей графа. Так, в [21] условия 1.3 определяют *часть* графа. Если E_1 — все ребра из E , концы которых лежат в V_1 , то $G_1 = (V_1, E)$ называется подграфом; в том случае, когда $V_1 = V$, то G_1 — *суграф*. (Прим. ред.).

и которые мы определим ниже, будут постоянно встречаться во всех последующих главах. Перейдем теперь к формальным определениям.

Конечная последовательность ребер графа e_1, e_2, \dots, e_n (не обязательно различных) называется *маршрутом** длины n , если существует последовательность v_0, v_1, \dots, v_n из $n+1$ (не обязательно различных) вершин таких, что

$$e_i \sim (v_{i-1} \& v_i) \text{ для } i=1, 2, \dots, n.$$

Говорят, что *маршрут замкнут*, если $v_0 = v_n$, и *не замкнут*, если $v_0 \neq v_n$. В последнем случае также говорят, что маршрут соединяет вершины v_0 и v_n . Заметим, что одно ребро можно рассматривать как маршрут длины 1.

Обращаясь к рис. 1.6, видим, что последовательность ребер $e_7, e_1, e_8, e_3, e_4, e_5$ образует незамкнутый маршрут,

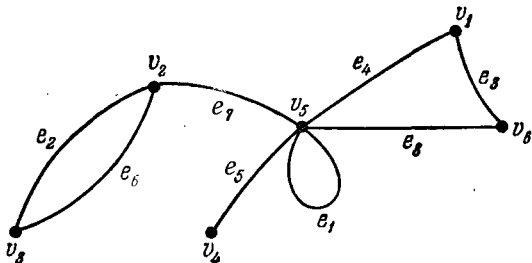


Рис. 1.6.

соединяющий вершины v_2 и v_4 , длины 6. Ему соответствует последовательность вершин $v_2, v_5, v_5, v_6, v_1, v_5, v_4$. Заменяя ребро e_5 на e_7 , получим пример замкнутого маршрута длины 6. Если все ребра, составляющие маршрут различны, то такой маршрут называется *цепью*, если она не замкнута, и *циклом*, если он замкнут**). Множество ребер, которое можно упорядочить так, что оно образует цепь, называется *неупорядоченной цепью*, а множество ребер, образующих после упорядочения цикл, — *неупорядоченным циклом***)*. Например множество

*) В тексте «edge progression». (Прим. перев.)

**) В оригинале «chain progression» и «circuit progression». (Прим. перев.)

***) В оригинале «chain» и «circuit». (Прим. перев.)

ребер e_3, e_4, e_7, e_8 на рис. 1.6 образует неупорядоченную цепь, так как последовательность e_4, e_3, e_8, e_7 , полученная упорядочением предыдущей последовательности, является цепью с соответствующей последовательностью вершин v_5, v_1, v_6, v_5, v_2 . Этой же неупорядоченной цепи можно поставить в соответствие другую цепь e_8, e_3, e_4, e_7 с соответствующей последовательностью вершин v_5, v_6, v_1, v_5, v_2 .

Иногда важно различать разные способы упорядочения ребер при образовании цепей или циклов, в других случаях упорядочение не существует. Обе ситуации встречаются достаточно часто, поэтому введение различных терминов для упорядоченных и неупорядоченных последовательностей ребер вполне оправдано.

Если все $n+1$ вершин v_0, v_1, \dots, v_n различны (очевидно, что в этом случае ребра обязательно различны), то соответствующая цепь называется *простой цепью*, а соответствующее неупорядоченное множество ребер называется *неупорядоченной простой цепью*. Если $v_0 = v_n$, но все остальные вершины различны, то последовательность ребер называется *простым циклом*, а соответствующее неупорядоченное множество ребер — *неупорядоченным простым циклом*. Заметим, что в геометрическом графе простые цепи образуют простые незамкнутые кривые (см. определение выше), а простые циклы — простые замкнутые кривые.

Введенные понятия цепи, простой цепи и цикла полезно интерпретировать для различных прикладных задач. Рассмотрим, например, граф, вершины которого изображают отдельных людей в некоторой организации, а ребра — соответствуют паре людей, между которыми возможен непосредственный обмен информацией.

Опишите процесс информационного взаимодействия в такой организации, пользуясь введенными выше понятиями.

Упражнения

1.2. Доказать, что любой незамкнутый маршрут, соединяющий вершину v с вершиной w , содержит в себе простую цепь, соединяющую те же вершины. В частности, любая цепь содержит простую цепь.

1.3. Показать на примере, что следующее утверждение, вообще говоря, неверно: если P — некоторый маршрут, соединяющий вершины v_1 и v_2 и проходящий через вершину v_3 , причем $v_3 \neq v_1$ и $v_3 \neq v_2$,

то P содержит в себе простую цепь, соединяющую v_1 с v_2 , которая проходит через v_3 .

1.4. Почему следующее утверждение неверно: маршрут есть последовательность ребер таких, что смежные ребра графа являются всегда смежными ребрами в последовательности ребер, образующей рассматриваемый маршрут?

1.5. Доказать, что если v_1 , v_2 и v_3 — различные вершины такие, что v_2 и v_3 соединены цепью и v_1 и v_2 соединены цепью, то v_1 и v_3 также соединены цепью.

1.6. В условиях упражнения 1.5 построить пример, показывающий, что может не существовать простой цепи, соединяющей v_1 с v_3 и проходящей через v_2 .

1.7. Доказать, что если ребра неупорядоченной цепи можно упорядочить более чем двумя способами, то эта цепь не может быть простой цепью.

1.8. Утверждение, обратное предыдущему, вообще говоря, неверно. Это означает, что существуют неупорядоченные цепи, не являющиеся простыми цепями, но которые нельзя упорядочить в цепь более чем двумя способами. Дать пример и попытаться описать все такие цепи.

1.9. Доказать, что каждый непростой цикл можно разбить на два или более простых цикла.

1.10. Доказать, что каждая непростая цепь, соединяющая v и w , может быть разбита на простую цепь, соединяющую v и w и один или более простых циклов. Таким образом, только простые цепи минимальны в том смысле, что они не содержат собственного подмножества ребер, соединяющих их граничные точки.

1.11. Если в упражнении 1.10 заменить слова «непростая цепь» на «незамкнутый маршрут», а в упражнении 1.9 «непростой цикл» на «замкнутый маршрут», то получим, вообще говоря, неверные утверждения. Привести опровергающие примеры.

1.12. Показать, что любое конечное множество неотрицательных целых чисел может быть реализовано, как степени некоторого графа, при условии, что число четных чисел нечетно.

Если появление петель в графе недопустимо, то реализация множества целых чисел в качестве степеней вершин некоторого графа, вообще говоря, невозможна. Необходимо наложить более сильные требования на заданное множество целых чисел. Татт получил необходимые и достаточные условия, при которых данный граф содержит подграф, у которого вершины имеют заданные степени.

1.7. Связность

Говорят, что граф *связен*, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере, одной цепью. В противном случае граф называется *несвязным*. Для конечных геометрических графов эти опреде-

ления совпадают с общепринятым определением связности множеств, т. е. конечный геометрический граф связан в смысле теории графов тогда и только тогда, когда он связан в смысле теории множеств. Однако это не всегда так для графов, не являющихся конечными. Рассмотрим геометрический граф $G = (V, E)$ в пространстве ϵ^2 , где V состоит из всех точек с координатами (x, y) , $x = 0$ или 1 и $0 \leq y \leq 1$, и в котором для каждого y вершины $(0, y)$ и $(1, y)$ соединяются ребром, представляющим собой отрезок прямой. Если рассмотреть G как точечное множество, то это просто единичный квадрат в ϵ^2 , который является односвязным. Однако как граф, он в сильной степени не связан, так как вершина $(0, y)$ соединяется цепью только с вершиной $(1, y)$ и ни с какой другой.

Другое определение связности графа дается следующей теоремой.

Теорема 1.4. Граф $G = (V, E)$ связан тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2 так, что обе граничные точки каждого ребра находятся в одном и том же подмножестве.

Доказательство. Пусть G несвязен. Выберем произвольную вершину v_1 , и пусть множество V_1 состоит из вершины v_1 вместе со всеми вершинами, которые могут быть соединены с v_1 цепью. Так как G несвязен, $V_1 \neq V$ (оставляем читателю показать почему). Поэтому дополнение $V_2 = V - V_1$ непусто. Согласно методу построения множества V_1 ни одно ребро не соединяет вершину из V_1 ни с одной вершиной из V_2 , откуда и получаем разбиение, указанное в формулировке теоремы.

Обратно, если такое разбиение существует, произвольно выбираем вершины $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Цепь, соединяющая v_1 и v_2 , обязательно должна содержать, по крайней мере, одно ребро, имеющее граничные точки в обоих множествах V_1 и V_2 , а так как такого ребра не существует, то граф G несвязен. Доказательство закончено.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Рассмотрим бинарное отношение ρ , определенное между некоторыми упорядоченными парами вершин следующим образом: $v\rho w$ тогда и только тогда, когда $v = w$ или когда существует цепь, соединяющая v с w . Очевидно, что отношение

ρ рефлексивно (uv для любого v), симметрично (из uv следует, что vu) и транзитивно (из uv и vw следует uw). Таким образом, ρ есть отношение эквивалентности. Оно разбивает множество V единственным образом на классы эквивалентности взаимно связанных вершин. Для графа, изображенного на рис. 1.1, такими классами эквивалентности являются $\{v_2, v_3, v_6\}$, $\{v_1, v_4\}$ и $\{v_5\}$. Каждый класс эквивалентности вершин вместе с ребрами из E , инцидентными этим вершинам, образует связный подграф, называемый просто *компонентой* G . Легко видеть, что компонента G_1 графа G является максимальным связным подграфом в том смысле, что граф G_1 не имеет связного собственного надграфа.

Упражнения

1.13. Доказать, что связный граф остается связным после удаления ребра тогда и только тогда, когда это ребро содержится в некотором цикле.

1.14. Построить пример связного графа, который становится несвязным при удалении любого ребра. (Согласно утверждению упражнения 1.13 такой граф не должен иметь циклов.) Графы такого типа называются деревьями и будут рассматриваться в следующем разделе.

1.15. Доказать, что связный граф, имеющий k вершин, должен содержать, по крайней мере, $k - 1$ ребер.

1.16. Доказать, что множество всех ребер связного конечного графа образует неупорядоченный простой цикл тогда и только тогда, когда каждая вершина имеет степень, равную двум. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для связного графа, множество всех ребер которого образует неупорядоченную простую цепь.

1.17. Показать, что все ребра конечного связного графа могут быть включены в соответствующим образом построенный маршрут (в третьей главе мы сформулируем условия, при которых их можно упорядочить в цепь или цикл).

1.8. Деревья и леса

Граф называется *деревом*, если он связан и не имеет циклов. Граф, не имеющий циклов и состоящий из k компонент, называется *лесом* из k деревьев. Понятие дерева играет важную роль во многих разделах теории графов. Граф является деревом тогда и только тогда, когда каждая пара различных вершин соединяется одной и только одной цепью. (Связность означает существование, по крайней мере, одной цепи, а из отсутствия циклов следует существование единственной такой цепи.)

Удаление любого ребра из дерева делает его несвязным, так как удаляемое ребро составляет единственную цепь, соединяющую его граничные точки. С другой стороны, из любого связного графа, который не является деревом, можно удалить некоторые ребра, не нарушая связности (например, любое ребро, входящее в цикл). Следовательно, дерево можно также определить как минимальный связный граф, где минимальность понимается в том смысле, что он не содержит подграфа, который состоит из всех его вершин и является связным.

Если дерево T является подграфом графа G , ребра G , которые принадлежат дереву T , называются *ветвями* дерева T , а ребра, не принадлежащие дереву T , — *хордами* относительно дерева T . Если все вершины G принадлежат дереву T , то говорят, что дерево *покрывает**) граф G . Очевидно, что только связные графы имеют покрывающие деревья и только деревья имеют единственные покрывающие деревья.

На рис. 1.7 жирными линиями выделены два различных покрывающих дерева для одного и того же графа.

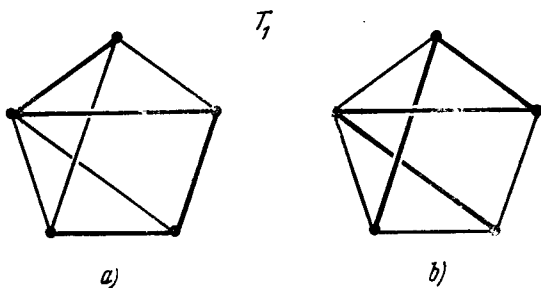


Рис. 1.7.

Тот факт, что каждое из этих деревьев имеет по четыре ребра, является следствием общего свойства деревьев, которое устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1.5. Каждое дерево с n вершинами имеет в точности $n - 1$ ребро.

Доказательство. Удаление одного произвольно-го ребра разбивает дерево на две компоненты, т. е. пре-

*) В оригинале «span». (Прим. ред.)

вращает его в лес из двух деревьев (оставляем читателю показать, что при этом не может получиться более двух компонент). Аналогично, удаление второго ребра превращает дерево в лес из трех деревьев. Вообще, после удаления любых $k-1$ ребер получим лес из k деревьев. С другой стороны, после удаления всех ребер, очевидно, получим лес, состоящий из n деревьев (каждое из которых является изолированной вершиной). Отсюда и следует, что максимальное число ребер, которое мы можем удалить из дерева, равно $n-1$. Теорема доказана.

Применив предыдущий результат к каждому дереву леса, получим следующее «обобщение».

Теорема 1.6. Лес из k деревьев, содержащий n вершин имеет в точности $n-k$ ребер.

Любые два дерева, покрывающие один и тот же граф, можно преобразовать одно в другое, строя последовательность покрывающих деревьев, каждое из которых отличается от предыдущего только одним ребром. Рассмотрим, например, последовательность деревьев T_1, T_2, T_3, T_4 , где дерево T_1 изображено на рис. 1.7, а, а остальные деревья на рис. 1.8. Заметим, что дерево T_4 на рис. 1.8

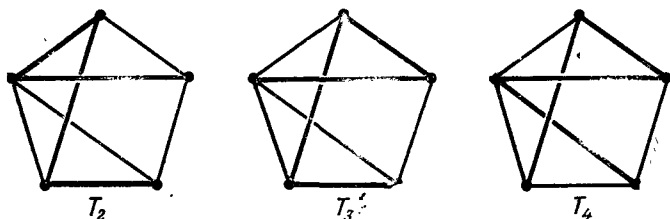


Рис. 1.8.

совпадает с деревом, изображенным на рис. 1.7, б).

Указанные четыре дерева образуют «монотонный» переход от T_1 к T_4 в том смысле, что каждое последующее дерево имеет на единицу большее число общих ребер с конечным деревом. В общем случае переход от одного покрывающего дерева T к другому T' всегда можно осуществить с помощью следующей процедуры.

Пусть e_1 — любое ребро, принадлежащее T' , но не принадлежащее T . Тогда (единственная) цепь в T , которая соединяет граничные точки ребра e_1 , должна со-

держат, по крайней мере, одно ребро \bar{e}_1 , не содержащееся в T' , так как T' не имеет циклов. Построим дерево T_1 , которое отличается от T только тем, что в нем удалено ребро \bar{e}_1 и введено новое ребро e_1 . Тогда T_1 также будет покрывающим деревом (почему?). Если T_1 и T' не совпадают, то повторяем рассмотренный процесс. Если граф G имеет k вершин, тогда каждое покрывающее дерево имеет $k-1$ ребро и процесс перехода к дереву T' обязательно закончится не более чем за $k-1$ промежуточных шагов.

1.9. Разделяющие множества и разрезы

Понятие разреза играет важную роль при изучении вопросов, связанных с отделением одного множества вершин данного графа от другого. Такие задачи возникают, например, при изучении потоков в сетях. В этих задачах фундаментальную роль играет изучение поперечных сечений сети, отделяющих источник потока от стока, и нахождение ограничивающего поперечного сечения, которое является самым узким местом. Ясно, что узкие места определяют пропускную способность сети в целом.

Перед тем, как дать формальное определение разреза, введем более общее понятие. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $F \subset E$ — подмножество множества его ребер. При этом F называется *разделяющим множеством* тогда и только тогда, когда подграф $G' = (V, E - F)$ несвязен. Здесь через $E - F$ обозначено множество ребер, которые принадлежат E , но не принадлежат F . Разделяющие множества всегда существуют (если граф G имеет, по крайней мере, две вершины), так как всегда можно положить $F = E$. В дальнейшем без ограничения общности¹ будем считать, что рассматриваемые графы не имеют петель, так как петли не влияют на связность графа.

Примеры двух разделяющих множеств графа G (второе разделяющее множество является подмножеством первого) показаны пунктиром на рис. 1.9. Разделяющее множество, изображенное на рис. 1.9, *a*, разбивает граф на три компоненты, одна из которых содержит вершины множества W , обведенного кружком на рисунке. Очевидно, что для разбиения графа достаточно удалить только те ребра, ко-

торые соединяют множество вершин W с вершинами $W' = V - W$. Эти ребра изображены пунктиром на рис. 1.9, *b*.

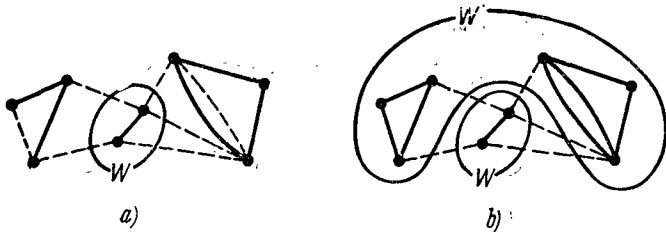


Рис. 1.9.

В общем случае, если задан связный граф $G = (V, E)$ и множество его вершин разбито на два непустых подмножества W и W' , множество ребер, соединяющих W с W' , называется *разрезом*. Для любого множества W это множество ребер будет непусто в силу связности графа G , и следовательно, разрез определен. Для любого заданного графа совокупность разрезов, определенных различными множествами W , образует подкласс класса всех разделяющих множеств и, более того, любое разделяющее множество содержит, по крайней мере, один разрез в качестве своего подмножества.

Особый интерес для изучения представляют минимальные разделяющие множества, т. е. такие разделяющие множества, которые не содержат собственного подмножества, разделяющего граф. Минимальные разделяющие множества называются *простыми* *) разрезами. Из предыдущих определений ясно, что простой разрез обязательно является разрезом, однако не каждый разрез является простым. Например, разрез, изображенный на рис. 1.9, *b*, не является простым. В общем случае, если удаление ребер, принадлежащих разрезу F , делит граф на три или более компоненты, то разрез не может быть простым. В самом деле, возвращение любого одного ребра из F может соединить не более двух компонент, и граф, полученный в результате, будет содержать все же, по крайней мере, две компоненты, что и означает

*) В тексте «proper cut-sets». (Прим. ред.)

существование собственного подмножества разреза F , пересекающего граф.

Пусть $G=(V, E)$ — связный граф, содержащий, по крайней мере, две вершины, и пусть $v \in V$, тогда множество всех ребер (исключая петли), инцидентных v , является разрезом, соответствующим разбиению $\{v\}, \{V - v\}$. Обратим внимание читателя на дополнительность понятий покрывающего дерева и разреза. Первое понятие характеризует минимальное множество ребер, которое связывает все вершины графа, а второе — минимальное множество ребер, отделяющее некоторые вершины графа от остальных. Объединяя сделанные замечания и определения, получаем следующий результат.

Теорема 1.7. Покрывающее дерево имеет, по крайней мере, одно общее ребро с любым из разрезов графа.

Пусть вершины связного графа G разбиты на два непустых подмножества W и W' , и пусть $P=e_1, e_2, \dots, e_n$ — замкнутый маршрут, который начинается и кончается в вершине v_0 . Без потери общности можно положить $v_0 \in W'$ (рис. 1.10). Двигаясь по цепи P , мы все

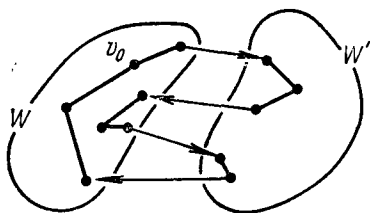


Рис. 1.10.

время остаемся в W или переходим из множества W в W' и обратно четное число раз. Отсюда следует

Теорема 1.8. В связном графе замкнутый маршрут имеет с произвольным разрезом четное число (возможно равное нулю) общих элементов. Следовательно, каждый цикл и каждый из разрезов имеют четное число общих ребер.

Упражнения

1.18. Разделяющее множество, изображенное на рис. 1.9, а, содержит два разреза, которые отличаются от разреза, изображенного на рис. 1.9, б. Укажите их.

1.19. Разрез, изображенный на рис. 1.9, *b*, является на самом деле объединением двух различных простых разрезов. Установить, является ли этот факт случайным совпадением или общим свойством непростых разрезов.

1.20. Если задан связный граф и два множества вершин W_1 и W_2 , причем $W_2 \neq W_1$ и $W_2 \neq W'_1$, где W'_1 — множество всех вершин графа, за исключением W_1 , то можно ли найти общий разрез для W_1 и W_2 ?

1.21. Связные графы, которые имеют разрезы, состоящие из одного ребра, могут быть описаны в терминах циклов. Дать такое описание.

1.22. Доказать, что разрез F в связном графе $G = (V, E)$ является простым тогда и только тогда, когда подграф $G' = (V, E - F)$ содержит точно две компоненты.

1.10. Некоторые специальные классы графов

Графы можно классифицировать различными способами, в зависимости от структурных признаков, которые используются в качестве основы для классификации. Мы уже видели, что графы можно разбить на связные и несвязные, на плоские и неплоские и т. д. Введем теперь еще ряд полезных классификаций.

Граф называется *обыкновенным* *), если он не содержит петель и параллельных ребер. Заметим, что обыкновенный граф можно также определить как граф, не имеющий циклов, которые содержат менее трех ребер. Во многих случаях достаточно рассматривать только обыкновенные графы. Например, связность графа (или отсутствие ее) не меняется, если удалить все петли и параллельные ребра. Аналогично, если каждому ребру графа приписана неотрицательная длина, то процедура поиска кратчайшего пути между некоторыми двумя вершинами не меняется, если удалить все петли и параллельные ребра, кроме кратчайших.

Граф называется *полным*, если любые две различные вершины являются смежными, т. е. соединяются ребром. Обычно этот термин применяется к обыкновенным графам. Для таких графов существует только один полный граф с фиксированным числом вершин, все остальные будут ему изоморфны. Следовательно, выражение «полный граф с k вершинами» однозначно определяет граф. На рис. 1.3 изображен полный граф с пятью вершинами.

*) В тексте «simple». (Прим. ред.)

Граф называется *двудольным* *), если его вершины могут быть разбиты на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что каждое ребро имеет одну граничную точку в V_1 , а другую в V_2 . В общем случае граф называется *k-дольным*, если множество его вершин можно разбить на k непересекающихся подмножеств $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ так, что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества. Чтобы подчеркнуть отмеченную особенность двудольного графа, его часто изображают, размещая множества вершин V_1 и V_2 в разных столбцах (или строках), как показано на рис. 1.11.

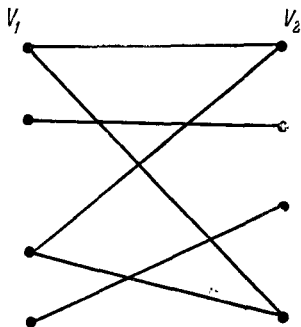


Рис. 1.11.

Граф называется *k-связным*, если любая пара различных вершин v и w соединена, по крайней мере, k цепями, которые не имеют общих вершин, исключая, конечно, v и w . Например, любой простой цикл (исключая петли) образует 2-связный граф. При $k=1$ это понятие совпадает с понятием обычной связности.

Если $\delta(v) = k$ для всех вершин графа, то граф называется *однородным графом степени k* или просто *k-однородным*. Например, на рис. 1.12 изображено несколько

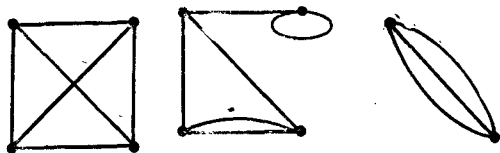


Рис. 12.

связных 3-однородных графов. Заметим, что обыкновенный полный граф, имеющий k вершин, является $(k-1)$ -однородным. Можно еще отметить, что согласно теореме 1.3 k -однородный граф имеет четное число вершин, если k нечетно.

*) Иногда «бихроматическим»; обыкновенный двудольный граф называют *графом Кёнига*. (Прим. ред.)

Упражнения

1.23. Найти наибольшее целое p такое, что полный граф (обыкновенный) имеющий q вершин, является p -связным.

1.24. Есть ли среди полных графов двудольные? Каково наименьшее целое число p , при котором полный граф, имеющий q вершин, является p -дольным?

1.25. На рис. 1.12 показаны два связных графа, имеющих по четыре вершины, которые не являются изоморфными, несмотря на то, что оба они однородны, степени 3. Заметим, что один из них является обыкновенным. Построить два связных, обыкновенных графа, имеющих одинаковое число вершин так, чтобы они были k -однородны для одного и того же k , но не изоморфны. Заметим, что этого нельзя сделать для $k=2$ (почему?).

1.26. Выяснить, является ли следующее определение двудольного графа эквивалентным данному выше: граф является двудольным тогда и только тогда, когда совокупность его ребер образует разрез.

1.27. Приведите несколько примеров прикладных задач, в которых рассматриваемые графы являются двудольными по самой физике задачи. Такие графы, как правило, характерны для случаев, когда вершины изображают объекты двух различных типов, а ребра служат для описания отношений между разнородными объектами, например, люди — работы, или посетители театра — номера занимаемых мест.

З а м е ч а н и е. На предыдущих страницах читатель мог заметить появление ряда понятий, связанных с идеей оптимальности. Напомним некоторые из них: простая цепь есть минимальное множество ребер, связывающее две заданные вершины. Покрывающее дерево есть максимальный подграф связного графа, который не содержит циклов, и минимальный подграф, который соединяет все вершины. Простой разрез есть минимальное множество ребер, удаление которых делает связный граф несвязным. Простой цикл является минимальным связным графом. Во всех этих понятиях минимальность (максимальность) означает, что не существует собственного подмножества (надмножества), или подграфа (надграфа), которое обладает тем же свойством.

Развитию этих идей уделено много внимания на последующих страницах как при введении дополнительных понятий, связанных с оптимальностью, так и при составлении упражнений. Будут рассмотрены задачи, связанные с нахождением кратчайших и длиннейших путей, максимальных потоков в сетях, потоков минимальной стоимости, разбиения множества вершин на наименьшее число его независимых подмножеств и т. д. Читателю рекомендуется обратить внимание на различные проявления идей оптимальности в последующих главах.

Упражнение 1.28. Перечислите 10 знакомых вам различных родов деятельности, где приложимы понятия теории графов. В рамках каждого рода деятельности выделите направления, которые можно изучать с помощью графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Комбинаторная топология. Гостехиздаг, 1947.
2. Arnold B. H., *Intuitive Concepts in Elementary Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
3. Avondo-Bodino G., *Economic Applications of the Theory of Graphs*. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1962.
4. Ball W. W. R., *Mathematical Recreations and Essays*. The Macmillan Company, New York, 1960.
5. Berge C., *Theory of Graphs and Its Application*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962. [Русск. перев.: Берж К., Теория графов и ее применение, ИЛ, 1962.]
6. Courant R., Robbins H., *What Is Mathematics*. Oxford University Press, London, 1941. [Русск. перев.: Курант Р., Роббинс Г., Что такое математика? «Просвещение», 1967.]
7. Dirac G. A., Stojakovich M. D., *The Four—Colour Problem*. *Matematicka Biblioteka*, 16: (1960). MR 22—1946.
8. Dynkin E. B., Uspenski W. A., *Multicolor Problems*. D. C. Heath and Company; Boston, 1952 (Original in German).
- 8a. Fidler M., *Theory of Graphs and Its Applications*. Proc. Symp. Smolenice, Czech., June 17—20, 1963; Academic Press Inc., New York, 1964.
9. Flament C., *Applications of Graph Theory to Group Structure*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.
10. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962. [Русск. перев.: Форд Л., Фалкерсон Д., Поток в сетях, «Мир», 1966.]
11. Franklin P., *The Four Color Problem*. *Scripta Mathematica*, 1961.
12. Gale D., *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1960. [Русск. перев.: Гейл Д., Теория линейных экономических моделей, «Мир», 1963.]
13. Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, 1952.
14. Kim W. H., Chien R. T., *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*. Columbia University Press, New York, 1962.
15. Koenig H. E., Blackwell W. A., *Electromechanical System Theory*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
16. König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Acad. Verl. M. B. H., Leipzig, 1936. Reprint, Chelsea Publishing Company, New York, 1950, Zbl.
17. Le Corbeiller P., *Matrix Analysis of Electric Networks*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.

- 17a. Lorenz C. S., Flowgraphs. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
18. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1942.
19. Olson H. F., Dynamical Analogies. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1943.
20. Ore O., Graphs and Their Uses. Random House, Inc., New York, 1963.
21. Ore O., Theory of Graphs. Colloquium Publications, vol. 38. American Mathematical Society, Providence R. I., 1962. [Русск. перев.: Оре О., Теория графов, «Наука», 1968.]
22. Reed M. B., Foundation for Electrical Network Theory. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.
23. Ringel G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
24. Riordan J., An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958. [Русск. перев.: Риордан Д., Введение в комбинаторный анализ, 1963.]
25. Ryser H. J., Combinatorial Mathematics. Carus Mathematical Monograph No. 14, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
26. Sainte Lague A., Les Reseaux (au Graphes). Memorial des Sciences Mathematiques, vol. 18, Paris, 1926.
27. Seshu S., Reed M. B., Linear Graphs and Electrical Networks. Addison-Wisley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1961.
28. Veblen O., Analysis Situs, American Mathematica Society. Providence, R. I., 1931.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ: ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

2.1. Введение

В настоящей главе вводятся основные понятия и термины, связанные с *ориентированными* графами. Эти графы имеют дополнительную характерную особенность, которая состоит в том, что на каждом ребре задано направление, другими словами, оно ориентировано. Материал главы сокращен по сравнению с главой 1 за счет того, что понятия здесь полностью аналогичны понятиям, введенным для неориентированных графов. С другой стороны, рассматриваются некоторые новые понятия, которые по своей природе свойственны только ориентированным графам.

2.2. Ориентированные графы

Во многих случаях ребрам графа необходимо задать ориентацию или направление. Применительно к геометрическому графу ориентацию можно интерпретировать как направление передвижения по ребру. В случае же абстрактного графа задание направления означает, что граничные точки каждого ребра отличаются упорядочением. Таким образом, единственное структурное различие между неориентированным графом и ориентированным (называемым также *орграфом*) состоит в том, что в первом случае граничные точки ребра образуют неупорядоченную, а во втором — упорядоченную пару вершин.

В прикладных задачах теории графов необходимость введения ориентации ребер возникает по двум причинам.

Иногда ребро представляет отношение между парой несимметричных вершин. Например, в системе городских улиц необходимо изображать улицы с односторонним движением. При описании систем связи между людьми или машинами необходимо учитывать существенно одноподнаправленные устройства.

С другой стороны, введение ориентации необходимо для установления системы координат и устранения неоднозначностей. Например, при соединении электрических приборов одно направление необходимо обозначить как «положительное» для того, чтобы однозначно описать распределение электрического тока, хотя действительное направление может и не быть жестко ограниченным.

С формальной точки зрения ориентированный граф состоит из непустого множества V , множества A , не пересекающегося с V , и отображения Δ множества A на $V \times V$. Элементы V и A соответственно называются вершинами и дугами (или направленными ребрами), а Δ называется ориентированным отображением инцидентий ориентированного графа. Если $a \in A$ и $\Delta(a) = (v, w)$, то говорят, что дуга a имеет начальную вершину v и конечную вершину w . Обозначение $a \simeq (v, w)$ будет употребляться для того, чтобы передать тот же самый смысл там, где Δ не задано в явном виде. (Как и в неориентированном случае, здесь редко появляется необходимость символически изображать само отображение инцидентий, хотя его существование является фундаментальным в понятии ориентированного графа.) Будем снова предполагать, что число вершин и дуг конечно.

Ориентированные графы будут обозначаться через D , (V, A, Δ) или через (V, A) , когда Δ не задано в явном виде. Если дан ориентированный граф $D = (V, A, \Delta)$, то соответствующим неориентированным графом для него является граф $G = (V, A, \Phi)$, для которого отображение инцидентий $\Phi(a) = (v \& w)$, если $\Delta(a) = (v, w)$. Таким образом, граф G получается из графа D отбрасыванием требования упорядоченности граничных точек каждой дуги. Структурные термины, введенные в главе I, применимы также и к ориентированным графам. При их описании необходимо использовать соответствующие неориентированные графы. Например, две дуги графа D называются параллельными (смежными), если соответству-

ющие им ребра неориентированного графа G параллельны (смежны).

Говорят, что два ориентированных графа изоморфны, если их соответствующие неориентированные графы изоморфны в обычном смысле и, кроме того, граничные точки каждой пары соответствующих дуг упорядочены одинаковым образом. Формально ориентированные графы $D = (V, A, \Delta)$ и $D' = (V', A', \Delta')$ называются изоморфными, если элементы V и A могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами V' и A' таким образом, что

$$\Delta'(a') = (v', \omega')$$

тогда и только тогда, когда

$$\Delta(a) = (v, \omega),$$

где a' , v' и ω' обозначают соответственно образы a , v и ω . Таким образом, два ориентированных графа рис. 2.1, a и b изоморфны. С другой стороны, ориентированный граф, приведенный на рис. 2.1, c , не изоморфен

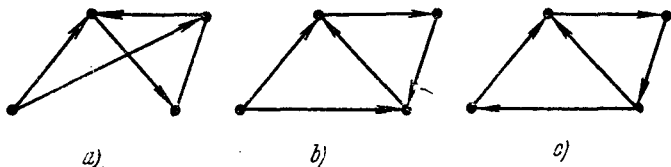


Рис. 2.1.

с ними, несмотря на то, что все три соответствующих неориентированных графа изоморфны в обычном смысле.

Если D и D' — изоморфные ориентированные графы и D' ориентированный геометрический граф, то D' называется *геометрической реализацией* D . Теоремы 1.1 и 1.2, которые характеризуют реализуемость неориентированных графов, одинаково применимы и к ориентированным графам, т. е. возможность выполнения необходимых построений в пространстве ϵ^3 не зависит от ориентации кривых. Аналогично, ориентированный граф является *плоским* (реализуемым в пространстве ϵ^2) тогда и только тогда, когда соответствующий ему неориентированный граф является плоским.

2.3. Термины для описания локальной структуры

Рассмотрим термины, полезные для описания некоторых структурных свойств ориентированных графов и не используемые в неориентированном случае. Если $a_1 \simeq (v, w)$ и $a_2 \simeq (v, w)$, то дуги a_1 и a_2 называются *строго параллельными*. Если $a_3 \simeq (w, v)$, то a_1 и a_3 не строго параллельны. Если $a \simeq (v, w)$, то говорят, что дуга a направлена от вершины v к вершине w . Дуга a считается *положительно инцидентной* ее конечной вершине w . Число дуг, положительно инцидентных вершине v , называется *положительной степенью* v и обозначается через $\delta^+(v)$. *Отрицательная степень* v определяется аналогично и обозначается через $\delta^-(v)$. (Ориентированная петля, инцидентная v , считается положительно и отрицательно инцидентной с v .) Индексированные степени вершин $\delta^+(v)$ и $\delta^-(v)$, очевидно, связаны с введенной ранее степенью $\delta(v)$ следующим образом:

$$\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v).$$

(Для графов, не являющихся конечными, эта взаимосвязь остается верной, если ее интерпретировать как соотношение кардинальных чисел.)

Учитывая, что каждая дуга положительно инцидентна одной вершине и отрицательно инцидентна также одной вершине, получим

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |A|,$$

где $|A|$ означает число дуг графа. Напомним, что в неориентированном случае мы имеем

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|A|,$$

Ориентированный граф называется *обыкновенным*, если он не имеет строго параллельных дуг и петель. Заметим, что если обыкновенный ориентированный граф имеет параллельные, но противоположно ориентированные дуги, то соответствующий неориентированный граф уже не будет обыкновенным графом в неориентированном смысле, так как он содержит параллельные ребра. Дуги обыкновенно ориентированного графа могут быть

однозначно представлены упорядоченными парами вершин, так как между любой данной парой вершин может быть не более одной дуги с заданным направлением. (Заметим, что такое представление есть частный случай представления графа с помощью множества вершин V и множества дуг A , а не особая форма представления графа. На природу элементов A не наложено никаких ограничений, в частности, они могут быть элементами $V \times V$.)

2.4. Ориентированные маршруты, пути и контуры*)

Ориентированным маршрутом (ормаршрутом) длины n является последовательность (не обязательно различных) дуг a_1, a_2, \dots, a_n таких, что для соответствующей последовательности $n+1$ вершин v_0, v_1, \dots, v_n справедливо $a_i \simeq (v_{i-1}, v_i)$ для $i=1, 2, \dots, n$. Например, на рис. 2.2 последовательность a_1, a_5, a_5, a_3 образует ориентированный маршрут длины 4 (соответствующая последовательность вершин v_3, v_2, v_2, v_1).

Ориентированный маршрут называется *замкнутым*, если $v_0 = v_n$, и *незамкнутым*, если $v_0 \neq v_n$. В последнем случае говорят, что ориентированный маршрут *соединяет* v_0 и v_n или, точнее, что он *идет из* v_0 *в* v_n .

Очевидно, незамкнутый (замкнутый) ориентированный маршрут в ориентированном графе определяет соответствующий незамкнутый (замкнутый) маршрут в соответствующем неориентированном графе. Однако, обратное, вообще говоря, неверно. Например, на рис. 2.2 последовательность a_1, a_2, a_6 определяет незамкнутый маршрут, соединяющий вершины v_2 и v_4 , но из-за различной ориентации дуг не образует ориентированный маршрут.

Ориентированный маршрут, в котором нет повторяющихся дуг, называется *путем* или *контуром (ориентированным циклом)* в зависимости от того, явля-

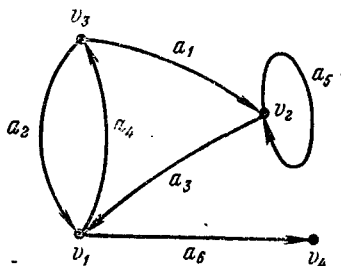


Рис. 2.2.

*) В тексте arc progressions, paths, cycles. (Прим. ред.)

ется ли он замкнутым или нет. Соответствующее множество дуг, без учета упорядоченности, называется *неупорядоченным путем* или *неупорядоченным контуром* соответственно. Если все вершины v_0, v_1, \dots, v_n различны (в этом случае дуги также различны), то путь или контур, так же как и соответствующие неупорядоченные пути и контуры, называется *простым*. Ориентированный граф называется *циклическим, контурным*, если он содержит, по крайней мере, один контур, и *ациклическим (бесконтурным)* в противном случае. (Заметим, что петля является специальным видом контура.)

Упражнения

2.1. Показать, что если неупорядоченный путь является простым, то существует единственное упорядочение дуг, образующее путь. Показать, что обратное, вообще говоря, неверно.

2.2. Доказать, что если существуют пути из v_1 в v_2 и из v_2 в v_3 , где $v_1 \neq v_3$, то существует путь из v_1 в v_3 .

2.3. Доказать, что любой контур, не являющийся простым, может быть разделен на два или более простых контуров.

2.4. Доказать, что любой непростой путь из v в w может быть разделен на простой путь из v в w и один или более простых контуров.

2.5. Верно ли в общем случае, что если $\delta^+(v) \geq 1$ и $\delta^-(v) \geq 1$ для каждой вершины v конечного ориентированного графа, то любая вершина такого графа принадлежит, по крайней мере, одному контуру?

2.6. Доказать, что если в графе D имеется путь из вершины w в вершину v и из вершины v в вершину w , то граф D содержит контур. Приведите пример, иллюстрирующий, что может не существовать контур, содержащий обе вершины v и w .

2.7. Доказать, что если $\delta^+(v) > 0$ для каждой вершины ориентированного графа D , то D обязательно имеет, по крайней мере, один контур. (То же самое верно, если $\delta^-(v) > 0$ для каждой вершины v .)

2.8. Показать, что вне зависимости от того, как ориентируются ребра, в графе рис. 2.3 не существует пути, который проходил бы через каждую вершину один и только один раз.

2.9. Используя аргументацию, аналогичную предыдущей, доказать, что

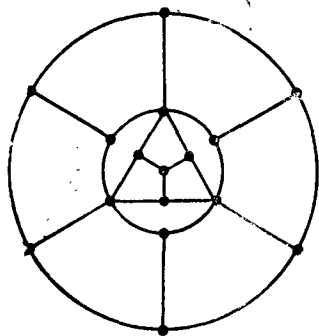


Рис. 2.3.

невозможно пройти ладьей от юго-западной клетки шахматной доски до северо-восточной, попадая на каждую клетку один и только один раз. Заметим, что в каждом ходе ладья может передвигаться относительно клетки, в которой она расположена, на любое число клеток по горизонтали или вертикали.

2.5. Сильная связность

Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для каждой пары различных вершин v и w существует путь из v в w и из w в v . Очевидно, что сильная связность ориентированного графа означает связность соответствующего неориентированного графа. Обратное, вообще говоря, неверно. На рис. 2.4, граф D_1

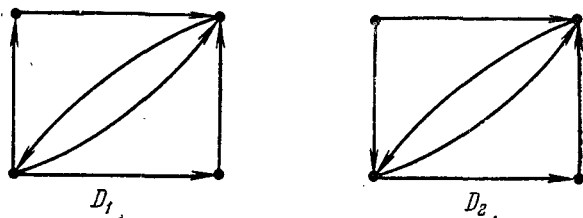


Рис. 2.4.

является сильно связным графом, а граф D_2 не является таковым. В главе 3 будут даны необходимые и достаточные условия того, что при соответствующей ориентации ребер неориентированного графа он будет преобразован в сильно связный ориентированный граф.

Ориентированный граф называется *сильно k -связным*, если для каждой пары различных вершин v и w существует, по крайней мере, k путей из v в w , которые не имеют общих вершин (а следовательно, и дуг), за исключением, конечно, v и w . Для того чтобы ориентированный граф был сильно k -связным, очевидно, необходимо, но недостаточно, чтобы соответствующий неориентированный граф был k -связным в неориентированном смысле.

Рассмотрим ориентированный граф, дуги которого соответствуют каналам связи (направленным) в некоторой группе людей. Если граф сильно связан, то каждый человек может связаться с любым другим членом группы, по крайней мере, одним способом (т. е. посредством, по крайней мере, одного пути). Если граф сильно k -связный, то существует, по крайней мере, k различных путей связи от любого лица к любому другому. Таким образом, чтобы полностью прекратить связь между любой определенной парой лиц, необходимо разорвать информационные каналы, по крайней мере, в k точках.

Упражнения

2.10. Доказать, что конечный ориентированный граф сильно связан, тогда и только тогда, когда существует замкнутый ориентированный маршрут, в который каждая дуга входит, по крайней мере, один раз.

2.11. Доказать, что ориентированный граф $D = (V, A)$ является сильно связным тогда и только тогда, когда для каждого разбиения вершин $\{W, V - W\}$ разрез в соответствующем неориентированном графе включает, по крайней мере, одну дугу, направленную из W к $V - W$, и, по крайней мере, одну дугу, направленную из $V - W$ к W .

2.12. Доказать, что если C_1, C_2, \dots, C_k является последовательностью контуров в ориентированном графе D такой, что каждые два соседних контура имеют, по крайней мере, одну общую вершину, то подграф, определяемый объединением этих контуров, сильно связан.

2.13. Пусть D -ориентированный граф, имеющий вершину v , которая соединена с каждой из оставшихся вершин D дугой в каждом направлении. Допустим, что существует, по крайней мере, одна дуга, которая не инцидентна v . Доказать, что для любого целого $k \geq 4$ и для любых двух (не обязательно различных) вершин v и w существует ориентированный маршрут из v к w , содержащий точно k дуг.

2.6. Деревья и разрезы

При использовании терминов «дерево», «лес», «разделяющее множество», «разрез» и «простой разрез» без специальной оговорки считается, что направления дуг не учитываются и рассматривается соответствующий неориентированный граф. Однако, при учете направления дуг, возникает несколько дополнительных понятий.

Ориентированный граф является *ориентированным деревом*, растущим из корня v_0 *), если (1) он образует дерево в неориентированном смысле и (2) — единственная цепь между v_0 и любой другой вершиной w является путем из v_0 к w . Очевидно, что дерево может иметь самое большее один корень и что, вообще говоря, деревья в ориентированном графе могут быть неориентированными. На рис. 2.5, *a*, например, нельзя найти ориентированное дерево, покрывающее граф (почему?). С другой стороны, на рис. 2.5, *b* утолщенные дуги показывают ориентированное дерево с корнем в вершине v_0 , покрывающее изображенный ориентированный граф. В главе 3 будет рассмотрена систематическая процедура нахождения ориен-

*) Его называют также *прадерево*, см., например, [3, гл. IV]. (Прим. перев.)

тированного дерева с корнем в заданной вершине v_0 , для которого пути ко всем остальным вершинам являются кратчайшими с точки зрения некоторой функции расстояния, определенной на дугах.

Напомним, что разрез и, в частности, простой разрез являются множеством ребер, соединяющих W и W' , где

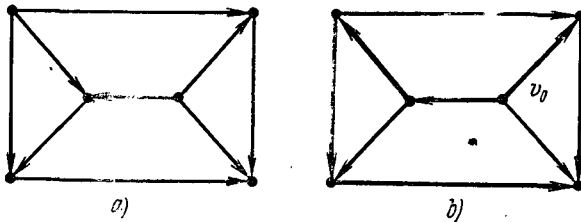


Рис. 2.5.

$\{W, W'\}$ является разбиением вершин связного графа на два непересекающихся непустых множества. Удаление разреза приводит к тому, что граф распадается на две или более компоненты. Удаление простого разреза разделяет граф точно на две компоненты. В ориентированном графе дуги разреза могут быть разделены на два множества: дуги, направленные из W к W' , и дуги,

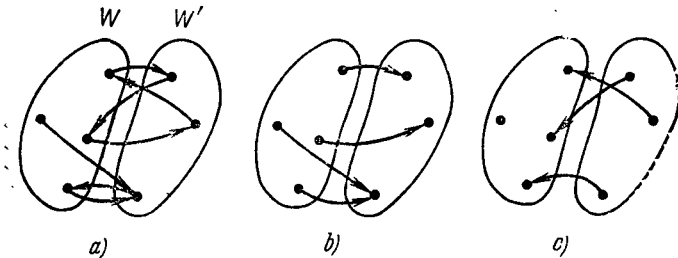


Рис. 2.6.

направленные из W' к W . Удаление первого множества разрывает все пути из W' к W , в то время как удаление последнего разрывает все пути из W' к W . Позже (в разделе о потоках в сетях) мы рассмотрим эти два множества отдельно. Назовем первое множество разрезом $W \rightarrow W'$, а второе — разрезом $W' \rightarrow W$. На

рис. 2.6, b и c представлены эти множества для разреза, изображенного на рис. 2.6, a .

Заметим, что если D сильно связан, то оба ориентированных разреза для любого разбиения $\{W, W'\}$ всегда будут непустыми (см. упражнение 2.11, где содержится утверждение, обратное данному).

Упражнения

2.14. Определить вероятность того, что получится ориентированное дерево с корнем в некоторой вершине, если ребра дерева, содержащего n ребер, ориентируются случайным образом. (Ответ зависит от n , а не от структуры дерева.)

2.15. Доказать, что если ребра полного обыкновенного графа случайным образом ориентированы, то полученный ориентированный граф обязательно содержит ориентированное дерево, которое покрывает этот граф.

2.16. Доказать, что если обыкновенный граф не является полным, то существует, по крайней мере, один способ ориентации его ребер, при котором граф не содержит покрывающего ориентированного растущего дерева с корнем в некоторой его вершине.

2.7. Ориентированные графы и бинарные отношения

Если ρ является бинарным отношением на множестве S , то граф отношения ρ , обозначаемый через D_ρ , является ориентированным графом, вершины которого есть элементы S такие, что существует дуга $a \simeq (s, t)$ тогда и только тогда, когда $s\rho t$. Обратно, если $D = (V, A)$ — ориентированный граф, не имеющий строго параллельных дуг, то бинарное отношение ρ_D , соответствующее D , является бинарным отношением на множестве V таким, что $v\rho_D w$ тогда и только тогда, когда $a \simeq (v, w)$.

Ориентированный граф, показанный на рис. 2.7, можно рассматривать, например, как соответствующим образом определенное бинарное отношение на множестве из восьми элементов. В действительности, любое бинарное отношение R , определенное на множестве S , может быть представлено соответствующим ориентированным графом, вершины которого соответствуют элементам S . Граф полностью описывает отношение перечислением всех пар связанных элементов. Таким образом, ориентированный граф, в некотором смысле, является исчерпывающей формой представления отношения, т. е. он полностью перечисляет все пары, для которых рассматриваемое отношение имеет место.

Бинарное отношение, заданное некоторым ориентированным графом, иногда можно представить более простым способом, не требующим полного перечисления. Например, граф на рис. 2.7, является фактически одним из возможных представлений отношения включения \subseteq , определенного на подмножествах множества, содержащего три элемента. Это видно из рис. 2.8, где вершины отождествляются с соответствующими подмножествами множества $\{x, y, z\}$.

Заметим, что в общем случае не имеет смысла брать бинарное отношение, заданное первоначально в некоторой «замкнутой форме», и строить соответствующий граф для изучения свойства этого отношения. С другой стороны, по данному ориентированному графу часто невозможно найти простую замкнутую форму отношения, которому он соответствует. В тех случаях, когда это удается сделать, средства одной теории могут быть применены для решения задач, возникших в другой. В любом случае

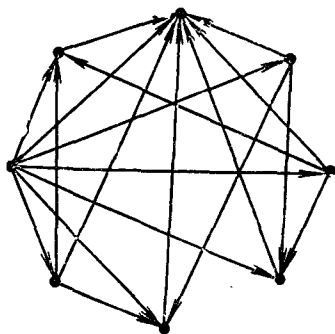


Рис. 2.7.

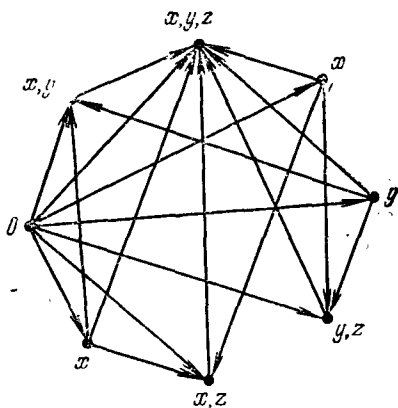


Рис. 2.8.

всегда необходимо учитывать концептуальное отношение между двумя введенными понятиями. Заметим, что в некотором смысле понятие ориентированного графа является более общим, так как оно позволяет использовать для отражения количественной характеристики степени связности переменное число строго параллельных дуг.

Воспользуемся для описания специального класса ориентированных графов, не имеющих строго параллельных ребер, некоторой терминологией бинарных отношений. *Рефлексивным* графом будем называть граф, имеющий петлю в каждой вершине. *Симметрическим* графом является граф, в котором каждой дуге $a \simeq (v, w)$ соответствует дуга $a' \simeq (w, v)$. *Транзитивным* графом называется граф, в котором существование дуг $a \simeq (v, w)$ и $b \simeq (w, x)$ означает существование дуги $c \simeq (v, x)$. Из этого следует, что в транзитивном графе существование любого пути из вершины v в вершину y означает существование дуги из v в y .

Граф, показанный на рис. 2.8, является транзитивным, но нереклексивным и несимметрическим. В действительности он является антисимметрическим в том смысле, что существование дуги $a \simeq (v, w)$ гарантирует отсутствие дуги $a' \simeq (w, v)$.

Упражнения

2.17. Приведенное в тексте определение транзитивного графа не требует, чтобы вершины v, w, u, x были различными. Используя это, показать, что если D является транзитивным, но нереклексивным графом, то для произвольного контура существует вершина, которая ему не принадлежит.

2.18. Симметрический и транзитивный граф может не быть рефлексивным.

(а) Привести пример такого графа.

(б) Каким общим свойством обладают все такие графы?

2.19. Пусть вершины соответствуют целым числам от 0 до 12. Построить графы, характеризующие бинарное отношение R , где vRw означает: (а) $v = w^2$; (б) v и w сравнимы по модулю 4 (т. е. $v - w$ кратно 4); (с) v и w взаимно простые.

2.20. Генеалогическое дерево T является ориентированным графом, отражающим отношение родства для выбранной группы лиц. Разработать систематическую процедуру для получения из T графа отношения пра-прародительства, определенного для той же группы лиц.

З а м е ч а н и е. Далее, за исключением специально оговоренных случаев, будут рассматриваться только конечные графы.

Глава 3

РАЗБИЕНИЯ И РАССТОЯНИЯ НА ГРАФАХ

3.1. Введение

В данной главе рассматриваются два основных вопроса. Первый связан с разбиением ребер, дуг или вершин графа на множество определенного структурного типа. Например, знаменитая задача о семи кенигсбергских мостах состоит в разбиении ребер данного графа на наименьшее число (желательно 1) циклов или цепей. Второй вопрос связан с измерением расстояний на графах. Примером задачи такого типа служит определение длиннейшего или «критического» пути в сети ПЕРТ. В этом случае кратчайшее время выполнения проекта находится как наибольший по продолжительности путь, образованный из операций этой сети.

3.2. Разбиения ребер

Рассмотрим общую задачу разбиения ребер графа на наименьшее число непересекающихся подмножеств, каждое из которых является либо цепью, либо циклом (не обязательно простым). Разбиения такого типа будут называться *реберными делениями* *), а состоящие из наименьшего возможного числа цепей и циклов, будут называться *минимальными реберными делениями*. Говорят также в этом случае, что реберное деление *покрывает* граф. Заметим, что каждое отдельное ребро графа является цепью или (в случае петли) циклом. Следовательно, каждый граф имеет реберное деление. Оче-

*) В тексте «covering». (Прим. перев.)

видно также, что всегда существуют минимальные реберные разделения, так как мы рассматриваем конечные графы. Например, на рис. 3.1 показаны два различных реберных разделения одного и того же графа, каждое из которых состоит из двух цепей и одного цикла. Если

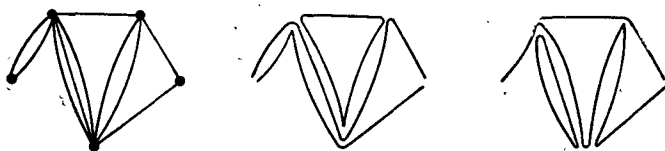


Рис. 3.1.

в любом из этих реберных разделений объединить цикл с одной из цепей, то образуется не простая цепь, а число множеств уменьшается на 1.

Очевидно, изолированные вершины не влияют на вид реберного разделения. Минимальное реберное разделение для несвязного графа может быть получено путем нахождения минимального реберного разделения отдельно для каждой компоненты, имеющей ребра. С учетом сказанного, мы будем рассматривать далее только связные графы.

Особый интерес представляют графы, реберные разделения которых представляют собой единственную цепь или цикл, т. е. графы, совокупность ребер которых образует цепь или цикл. Такие графы называются *уникурсальными*, поскольку здесь существует возможность непрерывного прохождения всех ребер, без повторения какого-либо ребра.

Возвращаясь к общей задаче, заметим, что свойства минимальных реберных разделений существенно зависят от наличия в графе вершин четной степени. (Напомним, что когда такие вершины существуют, они образуют пары). Графы, не обязательно связные, все вершины которых имеют четную степень, называются *эйлеровыми графами*. Минимальные реберные разделения для связных эйлеровых графов определяются следующей теоремой.

Теорема 3.1. Если $G = (V, E)$ — связный эйлеров граф, то E является циклом, образующим единственное минимальное реберное разделение, покрывающее граф G .

Доказательство. Если граф G содержит петли, то удалим их и рассмотрим полученный таким образом новый граф, все вершины которого сохраняют четную степень. Начнем движение с любой вершины v_1 по некоторому ребру к другой граничной точке ребра, скажем v_2 . Так как вершина v_2 имеет четную степень, то она инцидентна второму ребру, которое приводит нас к вершине v_3 . Продолжая такой процесс обхода, мы всегда дойдем до вершины $v_n \neq v_1$, так как четность всех вершин гарантирует, что в любом случае мы можем «покинуть» любую вершину, используя ребро, отличное от того, по которому мы пришли в эту вершину. Так как число ребер конечно, то в результате для некоторого n мы имеем $v_n = v_1$. Пройденные ребра образуют цикл. Если при этом оказалось, что пройдены все ребра, то теорема доказана. В противном случае мы удалим полученный цикл и рассмотрим оставшийся подграф. Каждая вершина этого подграфа имеет четную степень (почему?), и следовательно, мы можем повторить предыдущее построение, найти и удалить второй цикл. За конечное число шагов удаление очередного цикла приведет к тому, что в подграфе не останется ребер. Полученное множество циклов вместе с удаленными вначале петлями образует реберное разделение графа G . А так как G связан, то объединение этих циклов, т. е. E , снова является циклом. (Проверьте это.) Теорема доказана.

Цикл, который покрывает граф, называется *эйлеровым циклом*. Таким образом, согласно теореме 3.1 каждый связный эйлеров граф обладает эйлеровым циклом. Нетрудно показать обратное, что граф, обладающий эйлеровым циклом, является связным эйлеровым графом (при условии, что он не имеет изолированных вершин).

В отличие от полученного результата, минимальные реберные разделения связных графов, имеющих вершины нечетной степени, состоят только из цепей. (Конечно, здесь не требуется, чтобы цепи были простыми.) Более точно справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. Если дан связный граф $G = (V, E)$, имеющий $2n$ вершин нечетной степени, где $n \geq 1$, то каждое минимальное реберное разделение графа G состоит из цепей, каждая из которых соединяет две вершины нечетной степени.

Доказательство. Дополним граф G n ребрами, каждое из которых соединяет две вершины нечетной степени так, чтобы каждая такая вершина была инцидентна одному из добавленных ребер. Пусть F обозначает множество добавленных ребер. Тогда $G' = (V, E \cup F)$ является связным эйлеровым графом и, следовательно, $E \cup F$ образует цикл. Если ребра F (множество F не содержит смежных ребер) удалить, то цикл распадается на n цепей, которые покрывают G и имеют в качестве граничных точек $2n$ вершин нечетной степени. Следовательно, реберные разделения, о которых говорилось в формулировке теоремы, существуют.

Рассмотрим теперь произвольное реберное разделение графа G . Оно должно включать, по крайней мере, n цепей для того, чтобы получить $2n$ вершин нечетной степени (почему?). Если это разделение включает в себя более n цепей или любые циклы, то оно не может быть минимальным, так как выше было показано существование реберных разделений, состоящих из n элементов. Если реберное разделение состоит точно из n цепей, то цепи эти должны обладать свойством, указанным в теореме (почему?). Следовательно, только такие множества из n цепей образуют минимальные реберные разделения. Теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно следует следующее свойство уникурсальных графов.

Теорема 3.3. Связный граф является уникурсальным тогда и только тогда, когда он имеет 0 или точно 2 вершины нечетной степени. В первом случае он покрывается циклом; в последнем — цепью, соединяющей две вершины нечетной степени.

Классической задачей, имеющей отношение к уникурсальным графам, является задача о кенигсбергских мостах, которая возникла в связи с прогулкой горожан по городу. Вопрос состоял в том, можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя только один раз по каждому из семи мостов, связывающих части города, расположенного на берегах реки Прегель и двух островах. Предположим, что v_1 и v_2 обозначают два берега реки, а v_3 и v_4 — острова, тогда граф на рис. 3.2 показывает, каким образом мосты связывают части города. Задача была сформули-

рована Эйлером в 1736 г. в следующем виде: Определить, существует ли непрерывный маршрут, который проходит по каждому мосту точно один раз, другими словами, является ли граф, показанный на рис. 3.2, уникурсальным.

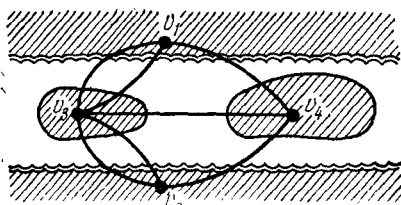


Рис. 3.2.

Так как все четыре вершины имеют нечетную степень, то граф не является уникурсальным. Согласно

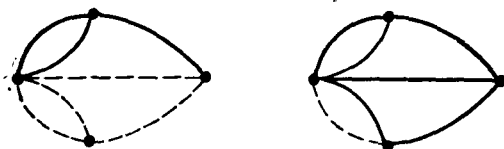


Рис. 3.3.

теореме 3.2 требуется, по крайней мере, две цепи для того, чтобы покрыть этот граф.

На рис. 3.3 показаны два минимальных реберных разделения. (В обоих случаях одна из цепей показана пунктиром, а другие — сплошной линией.)

Упражнения

3.1. Найти минимальные реберные разделения для графов, изображенных на рис. 1.2, 1.3, 1.5 и 1.6.

3.2. Если связный граф не является уникурсальным (и, следовательно, имеет, по крайней мере, четыре вершины нечетной степени), то доказать, что он имеет, по крайней мере, два различных минимальных реберных разделения.

3.3. Если минимальное реберное разделение связного графа G имеет k цепей и (или) циклов ($k > 1$), то удаление произвольного ребра приводит к подграфу, минимальные реберные разделения которого могут содержать $k - 1$, k или $k + 1$ элементов.

Дать примеры, иллюстрирующие все три возможности.

3.4. Доказать, что любой разрез связного эйлерова графа содержит, по крайней мере, два ребра и что он обязательно состоит из четного числа ребер.

3.3. Разбиения дуг

Рассмотрим теперь аналогичную общую задачу для ориентированных графов. В этом случае реберное разделение представляет собой разбиение дуг на непересекающиеся пути и контуры. Формально задача остается той же самой: дать характеристику минимальных ориентированных реберных разделений, покрывающих произвольный связный ориентированный граф.

Для удобства разобьем вершины произвольного ориентированного графа $D = (V, A)$ на непересекающиеся множества R , S и T следующим образом:

$$R = \{v \in V \mid \delta^+(v) = \delta^-(v)\},$$

$$S = \{v \in V \mid \delta^+(v) > \delta^-(v)\},$$

$$T = \{v \in V \mid \delta^+(v) < \delta^-(v)\}.$$

Символы R , S и T будут сохранять свой смысл до конца данного раздела. Ориентированный граф называется *равновесным* *) по вершине v , если $\delta^+(v) = \delta^-(v)$. Ориентированный граф, который является равновесным, по каждой вершине, называется *ориентированным эйлеровым графом*. (Заметим, что тогда соответствующий неориентированный граф обязательно является эйлеровым графом в неориентированном смысле.) Таким образом, ориентированный эйлеров граф является таким графом, для которого $R = V$. Ранее было показано (см. гл. 2), что для любого ориентированного графа (V, A) мы имеем

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v).$$

Из этого следует, что S непусто тогда и только тогда, когда T непусто, и кроме того, что

$$\sum_{v \in V} [\delta^+(v) - \delta^-(v)] = \sum_{v \in T} [\delta^-(v) - \delta^+(v)],$$

если S и T — непустые множества. Свойства минимальных реберных разделений для ориентированных графов существенно зависят от того, являются ли S и T пустыми или нет. Если они пустые, то справедлива следующая теорема.

*) В тексте «pseudosymmetric». (Прим. ред.)

Теорема 3.4. В связном ориентированном эйлеровом графе $D=(V, A)$ множество A образует контур и, следовательно, единственное минимальное реберное разделение D .

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.1.

В случае непустых множеств S и T имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.5. Если ориентированный граф $D=(V, A)$ связан, но не является равновесным, то всякое минимальное реберное разделение D состоит из k путей, каждый из которых соединяет вершину из S с вершиной из T . При этом

$$k = \sum_{v \in S} [\delta^+(v) - \delta^-(v)] = \sum_{v \in T} [\delta^-(v) - \delta^+(v)].$$

Доказательство. В граф D добавим k дуг таким образом, чтобы расширенный граф стал ориентированным эйлеровым графом. Конкретно, каждая вершина $w \in T$ должна быть начальной для $\delta^-(w) - \delta^+(w)$ новых дуг, оканчивающихся в некоторых вершинах множества S . Кроме того, новые дуги можно ввести так, чтобы точно $\delta^+(v) - \delta^-(v)$ дуг имели $v \in S$ в качестве конечной вершины. Пусть B означает такое множество k дуг, и пусть $D'=(V, A \cup B)$.

Так как D' является ориентированным эйлеровым графом, то $A \cup B$ является контуром. Если удалить дугу $b_1 \in B$, то оставшиеся дуги образуют путь из некоторой вершины $v \in S$ к вершине $w \in T$. Если удалить вторую дугу $b_2 \in B$, то этот путь разбивается на два пути, каждый из которых соединяет вершину в S с вершиной в T . Этого не произойдет в единственном случае, если b_1 и b_2 будут смежными дугами, но это невозможно (почему?). Таким образом, после удаления всех k дуг мы получим k путей, имеющих названное выше свойство. Эти пути образуют реберное разделение и покрывают граф D .

Нам осталось доказать, что реберное разделение такого типа является минимальным и что не существует других минимальных разделений. Заметим, что произвольное покрытие объединяет, по крайней мере, $\delta^+(v) - \delta^-(v)$ путей, имеющих $v \in S$ в качестве начальной вершины. (Число путей будет больше тогда и только тогда,

когда некоторые пути реберного разделения имеют u в качестве конечной вершины.) Таким образом, по крайней мере, k путей берут начало в S . По тем же самым причинам, по крайней мере, k путей заканчиваются в T . Если рассматриваемое реберное разделение имеет более чем k путей или содержит контуры, то оно не может быть минимальным, так как мы предварительно получили реберное разделение, имеющее k путей. Если оно содержит точно k путей и не содержит контуров, то k путей, выходящих из S и k путей, оканчивающихся в T , являются одними и теми же. В этом случае реберное разделение удовлетворяет условию теоремы. Таким образом, теорема доказана.

Следующий интересный класс задач, рассмотренный Бержем ([5] в библиографии к гл. 1), связан с применением теоремы 3.4. Ее использование в этих задачах показывает, что удачный выбор графа для анализа является часто решающим шагом для успешного применения теории графов и что такой граф не всегда очевиден из существа задачи. Будем рассматривать конечное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ в качестве «алфавита», элементами которого являются «буквы». Последовательность y_1, y_2, \dots, y_q , где каждый y_i является буквой, будет рассматриваться как «слово из q букв» в алфавите X .

Циклической последовательностью букв z_1, z_2, \dots, z_r считается последовательность букв, в которой z_1 рассматривается как элемент, следующий за z_r (так, например, z_{r-1}, z_r, z_1, z_2 рассматривается как последовательность четырех букв циклической последовательности).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задан алфавит X , имеющий p букв и положительное целое число q . Требуется найти кратчайшую циклическую последовательность S такую, в которой, по крайней мере, один раз появится каждое слово из q букв. Заметим, что в алфавите X существует точно p^q различных слов из q букв. Таким образом, S обязательно содержит самое большее $q \cdot p^q$ (так как мы можем просто перечислить по отдельности все слова одно за другим) и p^q элементов. Далее будет показано, что для $p \geq 2$ и $q \geq 2$ последняя граница является точной, т. е. будет построена циклическая последовательность, содержащая каждое слово из q букв и состоящая из p^q элементов.

Построим ориентированный граф D , вершины которого соответствуют p^{q-1} различным словам из $(q-1)$ буквы, а дуги p^q — различным словам из q букв алфавита X . Начальная и конечная вершина дуги $y_1, y_2, \dots, y_{h-1} - y_1, y_2, \dots, y_{h-1}$ и y_2, y_3, \dots, y_h соответственно.

Легко проверить, что D является связным эйлеровым графом и, следовательно, содержит, по крайней мере, один эйлеров контур, который обязательно имеет точно p^q элементов.

Описанное построение иллюстрируется рис. 3.4. В данном случае $p=3$, алфавитом является $X = \{a, b, c\}$

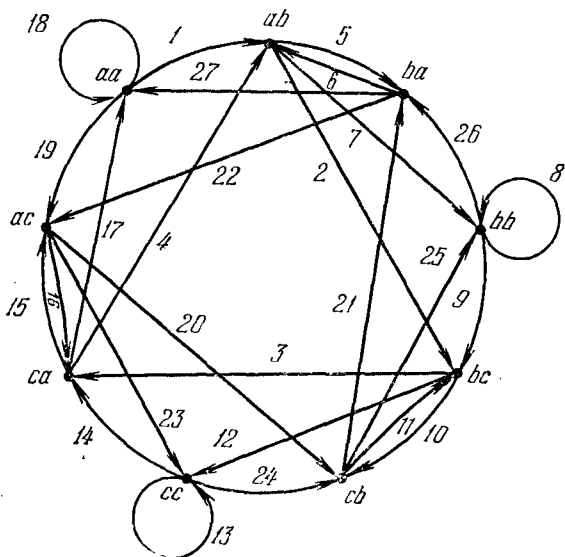


Рис. 3.4.

и $q=3$. Дуга из ba и ac , например, есть дуга bac . (Для простоты запятые между буквами опущены.) Дуги, пронумерованные от 1 до 27, образуют эйлеров контур. Вообще говоря, найдя эйлеров контур, мы тем самым определим циклическую последовательность, имеющую p^q элементов z_1, z_2, \dots, z_{p^q} , где z_i — первая буква i -й дуги в эйлеровом контуре. Например, в нашем примере такой последовательностью (без запятых) является

$aabcsababbbcbccsacaaacsbaccbb$.

Циклическая последовательность S , построенная таким образом, обладает требуемыми свойствами. Чтобы показать это, заметим, что $q-1$ дуг, которые следуют за любой дугой y_1, y_2, \dots, y_q , в эйлеровом контуре обязательно имеют вид

$$\begin{array}{c} y_2 y_3 \dots y_{q-1} y_q x_1, \\ y_3 y_4 \dots y_q x_1 x_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_q x_1 \dots x_{q-2} x_{q-1} \end{array}$$

для выбранных букв x_1, x_2, \dots, x_{q-1} . Соответствующие члены S имеют вид

$$y_1 y_2 \dots y_q,$$

т. е. образуют дугу (слово из q букв), с которой мы произвольно начали рассмотрение. Таким образом S , очевидно, содержит все слова из q букв и является максимально короткой последовательностью. S является также решением задачи о нахождении длиннейшей циклической последовательности, в которой слово из q букв не встречается более одного раза (почему?).

Заметим, что кратчайшая циклическая последовательность, содержащая все слова из q букв, имеет p^q элементов и в случае, когда $q=1$ и (или) $p=1$. (Если $q=1$, то любая последовательность из p букв удовлетворяет нашему условию, а если $p=1$, то единственная буква алфавита составляет соответствующую последовательность.) В частности, приведенное выше построение очень просто осуществляется при $p=1$ и $q>1$.

Упражнения

3.5. Построить ориентированный граф, найти эйлеров контур и соответствующую циклическую последовательность для случая, когда $X = \{a, b\}$ и $q=4$.

3.6. Повторить упражнение 3.5 для случая, когда $X = \{a, b, c, d\}$ и $q=2$.

3.7. Какова структура графа в случае, когда $X = \{a\}$ и $q>1$?

3.8. Доказать, что если каждое слово из q букв встречается в циклической последовательности ровно один раз, то каждое слово из $(q-1)$ буквы встречается ровно p раз и, вообще говоря, каждое слово из $(q-k)$ букв встречается ровно p^k раз ($k=1, 2, \dots, p-1$).

Используя теоремы 3.4 и 3.5 и интерпретируя unicursalность как возможность покрытия графа единственным путем или контуром, получим следующую

теорему, характеризующую уникальные ориентированные графы.

Теорема 3.6. Ориентированный связный граф $D = (V, A)$ является уникальным тогда и только тогда, когда он является либо ориентированным эйлеровым графом, либо таким, что $|S| = |T| = 1$ и $\delta^+(v) - \delta^-(v) = 1$ для единственной вершины $v \in S$.

Теоремы 3.5 и 3.6 играют основную роль при описании потоков в сетях, о чем речь будет идти ниже. В той же связи полезна следующая теорема.

Теорема 3.7. Если $D = (V, A)$ — ориентированный граф, для которого $|S| = |T| = 1$ и s и t обозначают единственные вершины S и T соответственно и

$$k = \delta^+(s) - \delta^-(s) = \delta^-(t) - \delta^+(t),$$

то D может быть покрыт k элементарными путями из s к t , возможно, в сочетании с некоторым числом контуров.

Доказательство. Если граф D связан, то теорема 3.5 утверждает, что D может быть покрыт k путями, принадлежащими требуемому множеству. Раньше было показано, что любой простой путь может быть разбит на простой путь, соединяющий те же самые вершины одним или более простых контуров. Если D несвязен, то пусть D_1, D_2, \dots, D_n обозначают его компоненты. Вершины s и t обязательно принадлежат одной компоненте (почему?). Эта компонента, как мы только что видели, может быть покрыта k простыми путями из s к t и, возможно, некоторым числом контуров. Каждая оставшаяся компонента является ориентированным эйлеровым графом, который связан. А раз это так, то его дуги образуют контур. Если этот контур окажется непростым, то он может быть разбит на простые контуры. Теорема доказана.

Упражнения

3.9. Найти минимальные реберные разбиения для ориентированных графов на рис. 2.2, 2.4 и 2.7.

3.10. Показать, что всегда существует возможность так ориентировать ребра эйлерова графа, чтобы в результате получился ориентированный эйлеров граф.

3.11. Если ориентированный эйлеров граф связан, то он обязательно является сильно связным.

3.12. Дать подробное доказательство теоремы 3.4.

Близкой к рассмотренной является следующая задача: Найти условия, при которых ребра неориентированного графа могут быть ориентированными так, чтобы получившийся ориентированный граф являлся сильно связным.

Например, найти, при каких условиях все улицы города можно перевести на одностороннее движение, сохранив возможность проезда из любой точки города в любую другую точку? Эти условия задаются [11] следующей теоремой.

Теорема 3.8. Связный граф $G = (V, E)$ является ориентируемым (в вышеупомянутом смысле) тогда и только тогда, когда каждое ребро G принадлежит, по крайней мере, одному циклу.

Доказательство. Сначала заметим, что если теорема верна для обыкновенных графов, то она верна и для любых других графов. Будем поэтому считать, что граф является обыкновенным. Очевидно, что G не может быть ориентируемым, если существует ребро $e \sim (v \& w)$, которое не содержится хотя бы в одном цикле; такое ребро представляет собой единственную простую цепь в графе, соединяющую v и w , а коль скоро e ориентируется, то одна из этих вершин не может быть достигнута из другой.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим построение, которое дает требуемую ориентацию. Возьмем некоторый простой цикл $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, включающий вершины $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Если мы ориентируем этот цикл в любом направлении, то получим сильно связный подграф, состоящий из n дуг и вершин.

Предположим, что в графе существует, по крайней мере, одна вершина w , отличная от v_1, v_2, \dots, v_n . (В противном случае теорема доказана.) Тогда, по крайней мере, одна вершина w смежна с некоторой вершиной v_i . Пусть e будет такое ребро, что $e \sim (v_i \& w)$. По сделанному предположению e содержится в некотором простом цикле C . Ориентируем все ребра C , не имевшие до сих пор направления. Припишем им направления, соответствующие обходу C в любом направлении. Полученный в результате расширенный ориентированный граф является также сильно связным (про-

верьте это) и содержит, по крайней мере, одну новую вершину, а именно, w . Если не все вершины включены в расширенный граф, то выбирается новая вершина w и процесс повторяется до тех пор, пока все вершины не будут просмотрены.

3.4. Гамильтоновы цепи и циклы

В предыдущем разделе нами была рассмотрена задача определения уникурсальности заданного конечного графа. Естественной также является постановка следующей близкой задачи: Найти, при каких условиях конечный связный граф содержит цепь или цикл, проходящие через все вершины? Если такие цепь или цикл существуют и являются простыми, то они называются соответственно *гамильтоновой цепью* или *гамильтоновым циклом*.

Если граф обладает гамильтоновым циклом S , то, очевидно, он обладает и гамильтоновой цепью. Обратное, вообще говоря, неверно. Так, например, двудольный граф на рис. 3.5 обладает несколькими гамильтоновыми цепями, но не обладает гамильтоновым циклом. И, конечно, многие графы не содержат ни того, ни другого. Для некоторых специальных классов конечных графов факт существования или отсутствия гамильтоновой цепи или цикла легко устанавливается. Например, дерево не может содержать гамильтоновой цепи, если оно само не является цепью. (Докажите это!)

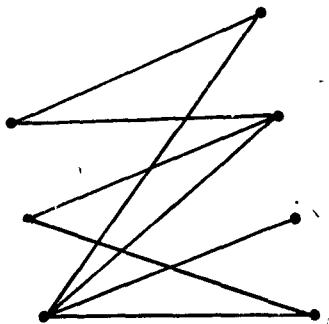


Рис. 3.5.

Аналогично, рис. 3.5 иллюстрирует общий факт, что двудольный граф, имеющий нечетное число вершин, не содержит гамильтонового цикла. (Каждый простой цикл в двудольном графе имеет четное число ребер и, следовательно, содержит четное число вершин.) С другой стороны, каждый полный граф, очевидно, содержит множество гамильтоновых циклов,

Несмотря на наличие частных результатов, относящихся к специальным классам графов, в общем случае задача определения гамильтоновых цепей и циклов недостаточно изучена. Так, например, до сих пор нет эффективной процедуры нахождения гамильтоновой цепи в произвольном графе. Более того, нет даже хороших методов доказательства существования такой цепи.

Знаменитый математик Гамильтон придумал в свое время деловую игру, цель которой состояла в нахождении гамильтонова цикла в графе, определенном вершинами и ребрами заданного многогранника. Описание ее можно найти в работе [20] (библ. к гл. 1).

Замечание. Задача нахождения гамильтонова цикла может рассматриваться как частный случай следующей задачи. В графе G , каждое ребро которого имеет положительную длину $L(e)$, найти простой цикл максимальной длины. Если положить $L(e)=1$ для каждого ребра, то длина простого цикла определяется числом входящих в него ребер или числом вершин, через которые он проходит. Если при этом G имеет n вершин, то G содержит гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда максимальный простой цикл имеет длину n .

Упражнения

3.13. Плоский граф, изображенный на рис. 3.6, соответствует вершинам и ребрам двенадцатигранника (последний содержит 20 вершин и 12 пятиугольных граней. Внешняя область также считается

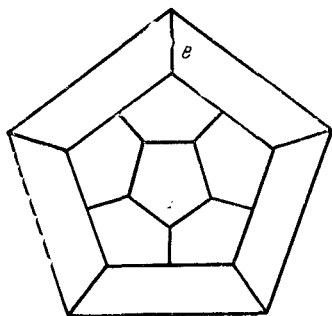


Рис. 3.6.

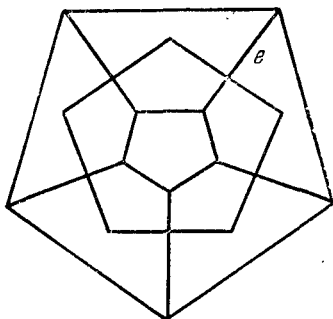


Рис. 3.7.

гранью). Найти гамильтонов цикл в этом графе. Данный граф был использован в упомянутой выше игре Гамильтона.

3.14. Граф, показанный на рис. 3.7, получается из графа рис. 3.6 поворотом внешнего пятиугольника на 36° и соответствующим изменением граничных точек пяти ребер (таких, например, как e). Заметим, что полученный граф также имеет 20 вершин и 12 пятиугольных граней (включая внешнюю область). Доказать, что в нем не существует гамильтоновых циклов.

Указание. При доказательстве используйте пять вершин степени 2.

3.15. Граф G , соответствующий ромбическому двенадцатиграннику, имеет восемь вершин степени 3 и шесть — степени 4. Кроме того, он является двудольным: две вершины одинаковой степени не смежны. Доказать, что не содержит гамильтоновой цепи (а, следовательно, и гамильтонового цикла [13]).

3.16. Используйте упражнение 3.15 как основу для получения более общего необходимого условия существования гамильтоновой цепи или цикла в связанном двудольном графе.

Вернемся теперь к очень интересной теме, связанной с понятием гамильтоновых циклов. Неориентированный граф является *гипогамильтоновым* (НН для краткости), если он не имеет гамильтонового цикла, но каждый его подграф, имеющий на 1 меньший порядок*), содержит такой цикл [8]. Задача состоит в том, чтобы найти НН-граф минимального порядка и показать, что найденное решение единственно. Будем предполагать, что искомым графом имеет n вершин и m ребер и является обыкновенным.

Лемма 3.9. Если G является НН-графом, то $n \geq 3$.

Лемма 3.10. Если G является НН-графом, то $\delta(v) \geq 3$ для каждой вершины v .

Доказательство. Каждая вершина принадлежит простому циклу длины $(n-1)$ и, следовательно, $\delta(v) \geq 2$. Если w смежна с v , то в подграфе, полученном удалением w , мы тоже имеем $\delta(v) \geq 2$. Таким образом $\delta(v) \geq 3$.

Лемма 3.11. Если G является НН-графом и если w и x — последовательные вершины простого цикла длины $n-1$ в графе, в котором вершина v удалена, то v не смежна ни с w , ни с x .

Доказательство. Если v смежна с одной из вершин w или x , то при введении v в граф образуется гамильтонов цикл, а это противоречит условию леммы.

*) Здесь под порядком графа понимается число его вершин.
(Прим. ред.)

Лемма 3.12. Если G является НН-графом, то $\delta(v) \leq \leq (n-1)/2$ для каждой v .

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 3.11.

Лемма 3.13. Если G является однородным графом со степенью вершин $\delta(v) = \delta$, то $\delta \cdot n = 2m$.

Лемма 3.14. Если v, w, x, w', x' — различные вершины графа G такие, что v смежна с w и w' и x смежны с x' , и если (w, x) и (w', x') — два ребра одного и того же гамильтонова цикла в графе, полученном удалением v , то граф G содержит гамильтонов цикл.

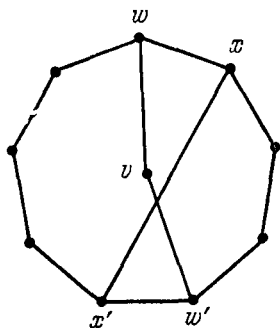


Рис. 3.8.

Доказательство. Искомый цикл показан на рис. 3.8.

Теорема 3.15. Если G является НН-графом, то $n \geq 7$.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 3.10 и 3.12.

Теорема 3.16. Если G является НН-графом, то $n \neq 7$.

Доказательство. Из лемм 3.10 и 3.12 следует, что при $n=7$ имеет место $d(v) = 3$ для каждой v , а это противоречит лемме 3.13.

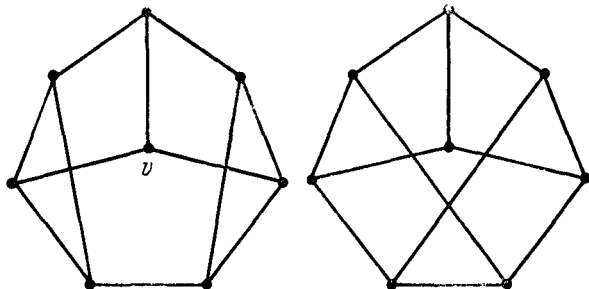


Рис. 3.9 и 3.10.

Теорема 3.17. Если G является НН-графом, то $n \neq 8$.

Доказательство. Из лемм 3.10 и 3.12 следует, что при $n=8$ имеет место $\delta(v) = 3$. Если G является

НН-графом порядка 8, то по лемме 3.11 он является одним из двух графов, приведенных на рис. 3.9 и 3.10, каждый из которых имеет гамильтонов цикл в соответствии с леммой 3.14.

Теорема 3.18. Если G является НН-графом, то $n \neq 9$.

Доказательство. По лемме 3.13, если G является НН-графом порядка 9, то он не может быть однородным графом степени 3, а по лемме 3.12 он имеет, по крайней мере, одну вершину степени 4. Из леммы 3.11 следует, что часть вершин и ребер G образуют граф, показанный на рис. 3.11. При этом вершина 2 должна быть смежной, по крайней мере, с одной из вершин $4 \div 8$, так как $\delta(2) \geq 3$. Но каждое из ребер $2-4$, $2-6$ и $2-8$ приводит к гамильтонову циклу (по лемме 3.14). Поэтому, если вершина 2 смежна с вершиной 5, то вершина 8, которая по той же причине не может быть смежна ни с какой вершиной, кроме вершин 3 и 5, не смежна с 5, так как в противном случае всегда $\delta(5) > 4$, что противоречит лемме 3.12. Таким образом, вершина 8 смежна с вершиной 3. Аналогично, вершина 6 смежна с вершиной 1, а вершина 4 с вершиной 7. Граф не может иметь других ребер, так как вершины 9, 1, 3, 5, 7 насыщены.

Ту же картину можно было бы получить (рис. 3.12), если вершина 2 оказалась смежна с вершиной 7. Заметим, что каждое ребро соединяет две вершины, номера которых имеют разную четность. Таким образом, граф, полученный из G удалением вершины 1, не имеет гамильтонова цикла, и, следовательно, G не может быть НН-графом.

Теорема 3.19. Если G является НН-графом порядка 10, то он является однородным степени 3.

Доказательство. Пусть некоторая вершина имеет степень 4, тогда G содержит в качестве своей части граф, показанный на рис. 3.13. По лемме 3.14 каждая из вершин 2, 4, 5, 7, 9 не может быть смежна ни с одной вершиной, кроме одной или двух вершин из набора 1, 3, 6, 8. Так как каждая из последних вершин не может быть смежна ни с какой другой, кроме, самое большое, с одной из вершин первого набора, то мы получаем противоречие.

Теорема 3.20. Граф рис. 3.14 является НН-графом.

Доказательство. Удаляя вершину 1, мы получим цикл $(10, 4, 3, 2, 6, 5, 9, 8, 7, 10)$; а удаляя вершину 2, получаем цикл $(10, 1, 9, 8, 3, 4, 5, 6, 7, 10)$. Другие

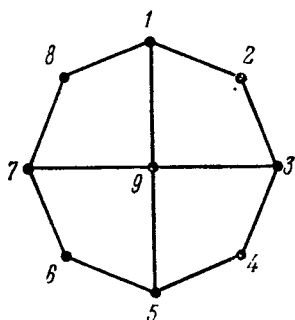


Рис. 3.11.

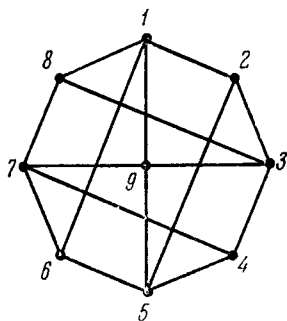


Рис. 3.12.

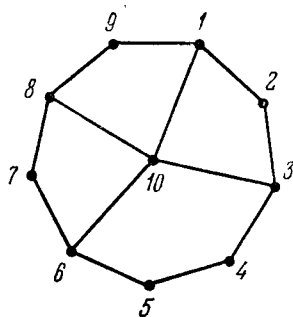


Рис. 3.13.

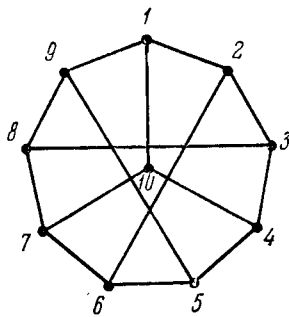


Рис. 3.14.

случаи получаются симметрично. Таким образом, исходный граф не содержит гамильтонова цикла. Последовательность вершин $(10, 1$ и $2)$ является началом максимальных простых цепей $(6, 5, 4, 3, 8, 7)$, $(6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $(6, 5, 9, 8, 3, 4)$, $(6, 5, 9, 8, 7)$, $(6, 7, 8, 3, 4, 5, 9)$, $(6, 7, 8, 9, 5, 4, 3)$, $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, $(3, 4, 5, 9, 8, 7, 6)$, $(3, 8, 7, 6, 5, 4)$, $(3, 8, 7, 6, 5, 9)$, $(3, 8, 9, 5, 4)$, $(3, 8, 9, 5, 6, 7)$ и ни одна из них не образует гамильтонова цикла. В силу симметрии то же самое справедливо для всех других цепей.

Теорема 3.21. Если G является НН-графом порядка 10, то он изоморфен графу теоремы 3.20.

Доказательство. Перенумеруем вершины $1, 2, \dots, 9$ цикла в графе. В зависимости от положения вершины 10 получим три возможных типа графа G .

1. Граф, в котором вершина 10 смежна с вершинами $1, 4, 7$ и который по лемме 3.14 и теореме 3.19 дает граф рис. 3.13 или граф рис. 3.15. Но последний имеет гамильтонов цикл $(10, 1, 2, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 10)$.

2. Граф, в котором вершина 10 смежна с вершинами $1, 3, 6$ и который приводит к графу рис. 3.16, имеющему гамильтонов цикл $(10, 6, 7, 5, 4, 3, 2, 8, 9, 1, 10)$.

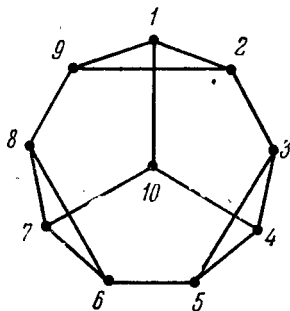


Рис. 3.15.

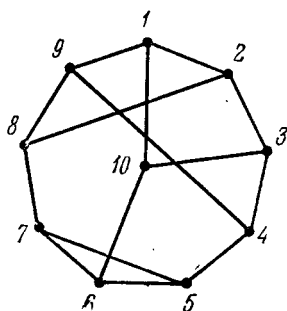


Рис. 3.16.

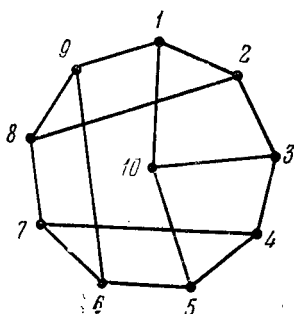


Рис. 3.17.

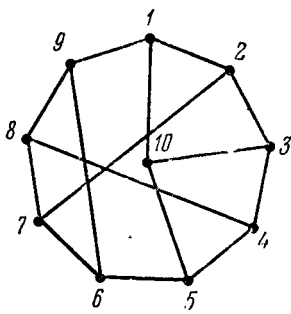


Рис. 3.18.

3. Граф, в котором вершина 10 смежна с вершинами $1, 3, 5$ и который приводит к графам, показанным на рис. 3.17 и 3.18, имеющим соответственно гамильтоновы циклы $(10, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 6, 5, 10)$ и $(10, 1, 2, 7, 8, 9, 6, 5, 4, 3, 10)$.

Понятия гамильтоновых цепей и циклов могут быть непосредственно обобщены на случай ориентированных графов. Простой путь или контур, который проходит через все вершины графа, называется соответственно гамильтоновым путем или гамильтоновым контуром. Гамильтоновы пути и контуры в ориентированном графе определяют гамильтоновы цепи и циклы в соответствующем неориентированном графе. Они, кроме всего прочего, требуют определенной ориентации дуг; поэтому появление их в графах будет еще более редким. Приведем несколько результатов, относящихся к специальному классу ориентированных графов.

Обыкновенный ориентированный граф (антисимметрический граф) будет называться *полным*, если каждая пара различных вершин связана дугой. Таким образом, такой полный граф можно получить из полного обыкновенного неориентированного графа (который не имеет петель и параллельных ребер) с помощью произвольной ориентации его ребер. В отличие от обыкновенного полного ориентированного графа, который имеет множество гамильтоновых циклов, полный антисимметрический граф может и не иметь гамильтоновых контуров. Например, если в графе существует вершина v , для которой $\delta^+(v) = 0$ или $\delta^-(v) = 0$, то в таком графе не могут существовать гамильтоновы контуры. Вообще говоря, очевидно, что существование гамильтонова контура подразумевает сильную связность соответствующего графа (почему?).

Если мы не требуем возвращения в начальную вершину (т. е. ищем гамильтонов путь), то задача несколько упрощается. Кёниг доказал, что каждый антисимметрический полный граф содержит, по крайней мере, один гамильтонов путь. (Доказательство см. на стр. 30 и 31 у Кёнига в книге [16] библ. к главе 1.) Редди [12] показал, что на самом деле в таком графе существует нечетное число гамильтоновых путей. Камьон [2], исследуя единственность, получил следующую теорему.

Теорема 3.22. Антисимметрический полный граф G содержит единственный гамильтонов путь тогда и только тогда, когда он не содержит контуров.

Доказательство. Если G содержит два различных гамильтоновых пути, то они определяют две

перестановки вершин и отличаются, по крайней мере, одной инверсией. Следовательно, существуют две вершины, каждая из которых соединяется с другой путем. Это означает существование контура. С другой стороны, если контур существует, то способ построения, предложенный Кёнигом и описанный в его книге [16, библиограф. к гл. 1], отмеченной выше, приводит к различным гамильтоновым путям.

Ориентированный граф называется *тотальным*, если каждая пара различных вершин соединяется, по крайней мере, в одном направлении путем. Заметим, что антисимметрический полный граф является частным случаем тотального графа, в котором вышеупомянутые пути представляются одиночными дугами. Все сильно связанные графы также являются тотальными. Следующий результат, полученный Камьоном и приводимый без доказательства, применим ко всем тотальным графам.

Теорема 3.23. Необходимым и достаточным условием того, что ориентированный граф без контуров содержит в точности один гамильтонов путь, является тотальность графа.

Интересной задачей, связанной с поиском кратчайшего гамильтонова контура, является задача коммивояжера. Коммивояжер должен посетить по одному разу каждый из n городов (каждая пара городов связана дорогой) и вернуться в исходный город. При этом он должен выбрать кратчайший маршрут. Очевидно, что определение кратчайшего маршрута с помощью просмотра всех гамильтоновых циклов приводит к перебору $(n-1)!/2$ возможных циклов, а эта величина является астрономической для больших n . Необходимо найти эффективный алгоритм решения этой задачи. Заметим, что такого алгоритма до сих пор не существует. Вычислительные алгоритмы, предложенные для решения задачи коммивояжера, приведены в работах [3, 7, 9].

Упражнение 3.17. Пусть d_{ij} — расстояние между i -м и j -м городами и задана матрица расстояний. Для решения задачи коммивояжера, казалось бы, нужно выбрать наименьшее расстояние между любой парой городов, вычеркнуть соответствующие строку и столбец и повторить процесс. Однако такая процедура в общем случае не приводит к оптимальному решению. Для того чтобы убедиться в этом, возьмите пять городов, задайте матрицу расстояний и найдите оптимальный гамильтонов цикл, перебирая все возможные циклы. Найдите

те решение с помощью названной ранее процедуры и сравните результаты. Покажите, что в некоторых случаях оптимальное решение не содержит кратчайшего ребра, а может даже содержать наиболее длинное ребро.

Интересно заметить, что кратчайший замкнутый маршрут, связывающий n точек на плоскости в случае, если не все точки находятся на одной прямой, является замкнутой ломаной с непересекающимися сторонами. В частности, если выпуклая оболочка множества не содержит ни одной из n точек внутри себя, то ее граница является кратчайшим замкнутым маршрутом. (Таким образом, в соответствующей задаче коммивояжера не будет каких-либо пересечений маршрутов.) Чтобы доказать это [15], соединим n точек любым замкнутым путем и заметим, что более короткий путь получается при соединении точек в том же самом порядке отрезками прямых линий. (Рассматриваемые точки соответствуют вершинам.) Если отрезки $v_i v_{i+1}$ и $v_j v_{j+1}$ пересекаются в точке v , то мы полагаем, что выбран следующий путь $v_i v v_{i+1} \dots v_j v v_{j+1} \dots v_i$. Если v не совпадает ни с одной из заданных точек, то $v_i v_j \dots v_{i+1} v_{j+1} \dots v_i$ образует более короткий кусочно-линейный путь, который не содержит пересечения v . Если же v принадлежит заданному множеству точек, то $v_i v v_j \dots v_{i+1} v_{j+1} \dots v_i$ образует кусочно-линейный путь, который не содержит v в качестве точки пересечения. (Смысл сказанного удобно пояснить с помощью рисунка).

Рассмотрим интересный и простой подход к решению задачи коммивояжера, предложенный П. С. Райяном (P. S. Ryan), сотрудником Лаборатории военно-морских исследований. Этот подход не более эффективен, чем другие, однако он способствует несколько более глубокому пониманию существа вопроса.

Напомним, что задача состоит в нахождении кратчайшего гамильтонова цикла, когда каждому ребру графа приписана некоторая длина. Граф не обязательно должен быть полным. Если граф неполный, то существование гамильтоновых циклов не гарантируется, и следовательно, задача может и не иметь решения. Если в графе присутствуют параллельные ребра, то, очевидно, можно отбросить все ребра, кроме кратчайшего в каждой группе параллельных ребер. Предлагае-

мый алгоритм за конечное число шагов находит кратчайший гамильтонов цикл или устанавливает его отсутствие.

Будем предполагать, что рассматриваемый граф является плоским и обыкновенный плоский граф имеет, по крайней мере, одну вершину степени 5 или меньше (факт, установленный в главе 4). Кроме того, предполагается также, что длины ребер выражаются положительными числами.

Начиная с произвольной вершины v_1 минимальной степени $\delta \leq 5$, можно определить $\binom{\delta}{2}^* \leq 10$ различных подграфов, каждый из которых состоит из всех вершин исходного графа, всех ребер, не инцидентных с v_1 , и двух из δ ребер, инцидентных v_1 . Очевидно, задача нахождения всех гамильтоновых циклов исходного графа эквивалентна задаче нахождения всех гамильтоновых циклов в полученных подграфах, каждый из которых содержит вершину (v_1) степени 2.

Рассмотрим теперь один из подграфов $G_i = (V, E_i, \Phi_i)$, где $|V| = n$, $\Phi_i = \Phi/E_i$ (ограничения накладываемые Φ на множество E_i) и степень $v_1 = 2$. Начиная с ребра e_1 , инцидентного v_1 , и смежной вершины наименьшей степени (если обе смежные вершины одной степени, то выбираем любую), строим гамильтонов цикл C_n из последовательности n простых цепей $C_k = \{e_1, \dots, e_k\}$, где $e_j \approx (v_j \& v_{j+1})$ для $j = 1, \dots, k$, помня при этом, что $v_{n+1} \approx v_1$. (Это обозначение подразумевает, что ребра и вершины помечаются в той последовательности, в какой они встречаются при построении цепи.) Ребро e_k может присоединяться к C_{k-1} , если выполняются следующие условия.

1. $v_{k+1} \neq v_j$ ($j = 1, \dots, k$), если $k \neq n$. Случай $k = 1$ является единственным исключением, оговоренным выше.

2. $C_k = C_{k-1} \cup \{e_k\}$ не разделяет оставшийся граф в том смысле, что любые две вершины $v_p, v_q \in \{v_{k+2}, \dots, v_{n+1} = v_1\}$ могут быть связаны цепью из ребер, не инцидентных ни одной вершине $\{v_2, \dots, v_{k+1}\}$.

* $\binom{\delta}{2}$ — число сочетаний из δ по 2. (Прим. перев.)

Условия 1 и 2 гарантируют, что полученная цепь является простым циклом. Возможно, на некотором шаге несколько ребер могут удовлетворять условиям добавления к цепи в одной и той же вершине. В этом случае выбирается ребро наименьшей длины, а остальные ребра запоминаются. Позднее должно быть проверено каждое из оставшихся ребер.

Если ни одно ребро не удовлетворяет условиям 1 и 2 и не может быть присоединено к конечной вершине v_{k+1} цепи C_k ($k < n$), то такая цепь не является частью гамильтонова цикла и отбрасывается. При этом производится возврат в последнюю вершину произвольного выбранного ребра и исследуется новая цепь. Когда описанный процесс закончится, все существующие в G_i гамильтоновы циклы будут найдены. Применяя такую процедуру для каждого подграфа G_i , найдем все гамильтоновы циклы исходного графа.

Пусть s_i — длина кратчайшего ребра в i -м подграфе (т. е. $s_i = \min_{e \in E_i} \lambda(e)$, где λ — функция расстояния, определенная на E). После того как найден первый гамильтонов цикл C_n (в любом подграфе), можно вычислить его длину $|C_n|$. Пусть C'_k обозначает некоторую часть строящейся цепи в i -м подграфе длиной $|C'_k|$. Для того чтобы C'_k вошла в гамильтонов цикл C длины меньше C_n , необходимо обеспечить

$$|C'_k| + (n - k) s_i < |C_n|$$

на каждом шаге описанной процедуры (т. е. для каждого значения $k=1, \dots, n$). Приведенное неравенство дает еще один критерий для отбрасывания ребер, добавляемых в процессе построения цепи.

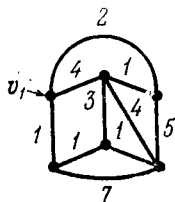


Рис. 3.19.

Поясним метод на примере графа G рис. 3.19. Целые числа обозначают длины ребер. На рис. 3.20, a , b и c показаны три подграфа, полученных при определенном выборе v_1 и соответствующих значений s_i .

На рис. 3.21 показана последовательность шагов, требуемых для построения первого гамильтонова цикла

в (G_1) . Ребра, показанные жирными линиями, являются ребрами цикла. Условие 2 исходного метода эквивалентно требованию того, чтобы граф, получаемый из G_1 удалением жирных и пунктирных ребер и обведенных

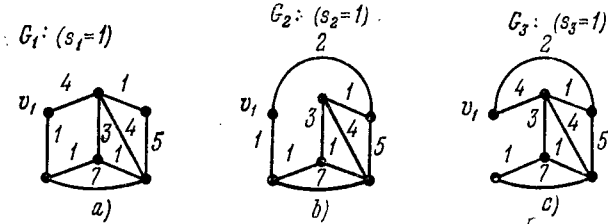


Рис. 3.20.

жирными кружками вершин (на каждом шаге), был связным. Числа в круглых скобках у вершин означают число ребер (отмеченных), оставшихся для исследования в данной вершине.

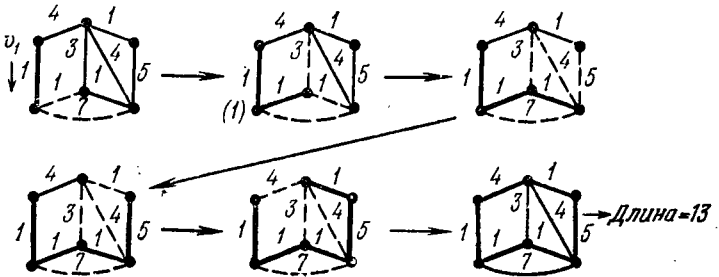


Рис. 3.21.

Возвращаясь к рассмотрению альтернатив на шаге 2 (см. выше), получим картину, показанную на рис. 3.22.

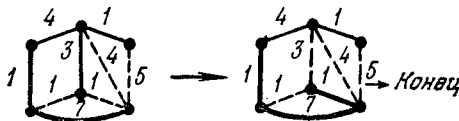


Рис. 3.22.

Заметим, что ребро длины 5 не является допустимой альтернативой на шаге 2 (рис. 3.22), ибо мы уже

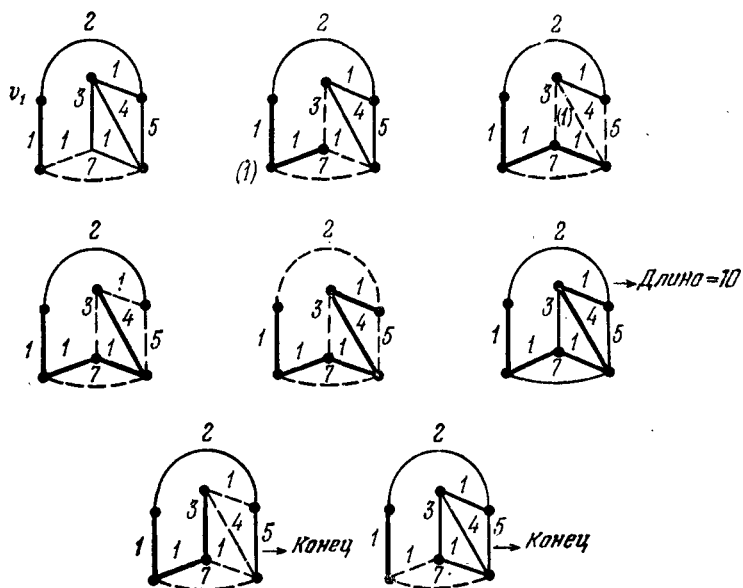


Рис. 3.23.

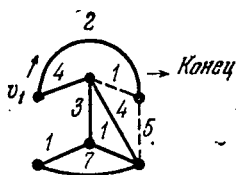


Рис. 3.24.

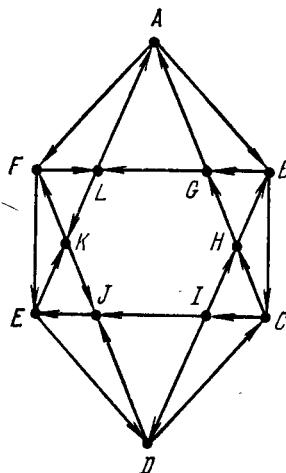


Рис. 3.25.

получили гамильтонов цикл длины 13. Так как к полученной цепи нельзя добавить ни одного оставшегося ребра, то эта цепь забывается и граф G_1 может быть удален из рассмотрения.

Рис. 3.23 и 3.24 поясняют шаги, необходимые для полного рассмотрения графов G_2 и G_3 . Заметим, что неиспользованная альтернатива на второй картинке рис. 3.23 отбрасывается (ввиду ограничения на длину цепи) после того, как найден гамильтонов цикл длины 10 (см. рис. 3.23).

Рассмотренный метод хорошо работает для небольших графов, подобных приведенному в примере, и, вероятно, применим к плоским графам несколько большей размерности (при его графической реализации). Однако реализация метода на вычислительной машине сопряжена со значительными трудностями, особенно при проверке условия 2 (которое очень просто проверяется графически).

Упражнение 3.18. В ориентированном графе рис. 3.25, начав с A , обойти каждую вершину только один раз и вернуться в A . В графе существует замкнутый маршрут. Найти его [4].

3.5. Разбиения вершин

Множество вершин называется независимым*), если оно не содержит двух смежных вершин. В частности, изолированная вершина образует независимое множество. Иногда возникает задача нахождения наибольшего независимого множества вершин в данном графе.

Предположим, например, что мы хотим сформировать наибольшую возможную комиссию из группы лиц, некоторые из которых попарно несовместимы. Такая задача принадлежит к упомянутому выше типу. При этом вершины графа соответствуют различным лицам, а ребра указывают конфликтные пары. Мы можем также предположить, что граф, определенный таким образом, является связным. (Если это не так, то можно выбрать максимальную подкомиссию в каждой

*) Оно называется также *несвязным* или *внутренне устойчивым* множеством. (Прим. ред.)

компоненте и, объединив подкомиссии, получить решение задачи).

Для получения решения задачи можно было бы начать с одного произвольного лица и к нему добавлять последовательно другие, причем лицо, выбираемое на каждом шаге, не должно конфликтовать ни с одним из выбранных. Такой процесс даст в конечном счете максимальное независимое множество W , т. е. множество, которое не является подмножеством любого большего независимого множества. Однако у нас не может быть полной уверенности в том, что W будет наибольшим из всех возможных независимых множеств (maximum maximum), так как объем W зависит от того, какие вершины выбираются на каждом шаге процесса.

В качестве предельного случая рассмотрим граф, показанный на рис. 3.26. Если мы начинаем процесс

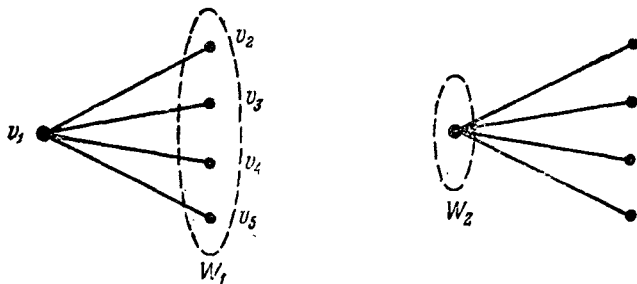


Рис. 3.26.

с любой вершины, отличной от v_1 , и на каждом шаге выбираем любую вершину, кроме v_1 , то в конце концов получим максимальное независимое множество W_1 , которое включает все вершины графа, кроме одной. С другой стороны, если нам не повезло и мы выбрали на первом шаге v_1 , то в результате получится максимальное независимое множество W_2 , состоящее из единственной вершины. Совпадение дополнения одного максимального независимого множества с другим максимальным множеством в данном примере является случайностью. На рис. 3.27 независимое множество $W = \{v_3, v_4\}$ является максимальным, однако его дополнение не является независимым множеством.

Максимальное независимое множество обладает свойством доминирования в графе в том смысле, что каждая вершина графа является либо элементом W , либо смежна с элементом W . Действительно, если какое-то независимое множество не доминирует в графе, то существует, по крайней мере, одна вершина, не принадлежащая множеству W и не смежная с ним. Такую вершину можно включить в множество W , не нарушая его свойств. Таким образом, исходное множество не было максимальным.

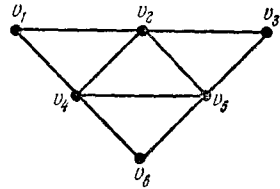


Рис. 3.27.

Множество вершин, обладающих свойством доминирования, называется доминирующим множеством*), вне зависимости от того, является ли оно независимым или нет. Принимая во внимание предыдущие замечания, нетрудно видеть, что число вершин в наибольшем независимом множестве по меньшей мере равно числу вершин в наименьшем доминирующем множестве (на рис. 3.26 W_2 является наименьшим доминирующим множеством, а W_1 — наибольшим независимым множеством).

В обыкновенном графе G вершина v доминирует над собой и над $\delta(v)$ вершинами, с которыми она смежна. Следовательно, множество из k вершин $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ доминирует самое большое над $k + \sum_1^k \delta(v_i)$ вершинами. Если граф G содержит n вершин, то необходимым условием того, что S будет внешне устойчивым множеством, является

$$k + \sum_1^k \delta(v_i) \geq n.$$

В частности, внешне устойчивое множество для обыкновенного графа, который является p -однородным ($\delta(v_i) = p$ для всех i), должно содержать по меньшей мере $n/(p+1)$ вершин.

*) В неориентированном графе понятие доминирующего множества соответствует понятию внешне устойчивого множества. В ориентированном графе понятию внешне устойчивого множества соответствует понятие обратного доминирующего множества. (Прим. ред.).

Упражнения

3.19. Привести несколько графов, для которых наибольшее независимое множество совпадает с наименьшим доминирующим множеством. Существуют ли классы графов, которые обладают этим свойством?

3.20. Как отмечалось выше, предложенный процесс получения максимального независимого множества вершин не всегда приводит к наибольшему независимому множеству. Рассмотрите следующую модификацию: (1) начать с вершины, имеющей наименьшую степень, и (2) на каждом шаге выбирать в качестве следующей для включения в множество вершину, которая смежна с наименьшим возможным множеством вершин, не включенных в независимое множество и, конечно, не смежная ни с одной из выбранных. Такая процедура даст наибольшее независимое множество для графа, изображенного на рис. 3.26. Тем не менее, постройте граф, для которого она не дает наибольшего независимого множества.

3.21. Мы видели, что максимальное независимое множество обязательно является доминирующим множеством. Минимальное доминирующее множество может быть независимым (см., например, рис. 3.26). Покажите на примере, что это не обязательно так.

С рассмотренными задачами тесно связан еще один класс задач, который является предметом многих исследований. Требуется разделить вершины данного графа на наименьшее число независимых множеств. Задачи подобного типа часто называются *задачами раскраски* и формулируются следующим образом: назначить каждой вершине цвет (или абстрактную пометку) таким образом, чтобы смежные вершины всегда имели различные цвета (пометки) и число различных используемых цветов (пометок) было как можно меньше.

Это наименьшее число называется *хроматическим числом* графа в соответствии с приведенной выше формулировкой задачи раскраски. Хроматическое число обыкновенного графа G , имеющего n вершин, меньше чем n , если G неполный, и больше 1, если G вообще содержит какие-нибудь ребра. Хроматическое число данного класса графов определяется как наибольшее из всех хроматических чисел графов, входящих в класс, т. е. это наименьшее число цветов, достаточное для раскраски любого графа в данном классе. Хроматическое число можно определить для различных классов графов. Читатель может доказать следующую теорему.

Теорема 3.24. Каждое дерево (исключая вырожденное дерево, состоящее из одной изолированной вершины) имеет хроматическое число, равное 2.

Очень важно отметить тесную связь между хроматическим числом графа и понятием k -дольного графа. Хроматическое число G является просто наименьшим k , при котором G является k -дольным. В частности, теорема 3.24 утверждает, что каждое дерево является простым графом (двудольным). На рис. 3.28 два изображения

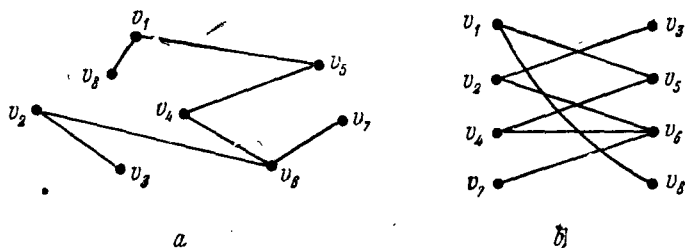


Рис. 3.28.

одного и того же дерева. При втором изображении ясно видно свойство двудольности, в то время как связность и отсутствие циклов более очевидны при первом.

Далее мы еще вернемся к задачам раскраски и, в частности, к задаче определения хроматического числа класса плоских графов, являющейся знаменитой задачей о четырех красках (так как предполагается, что хроматическое число плоских графов равно четырем).

З а м е ч а н и е. Татт предположил, что граф любого выпуклого многогранника содержит гамильтонов цикл. Отсюда следует гипотеза о четырех красках. Ясно, что граф является скелетной

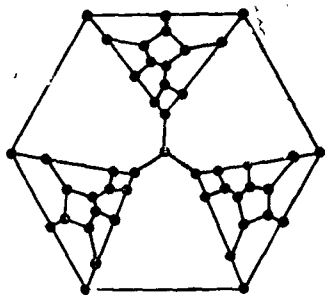


Рис. 3.29.

схемой выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда он плоский и 3-связный. Таким образом, предположение Татт эквивалентно тому, что каждый 3-связный плоский граф имеет гамильтонов цикл. Татт [14] доказал, что плоский граф рис. 3.29 не содержит гамильтонова цикла.

3.6. Радиус и диаметр

Пусть $G=(V, E)$ — связный граф. Определим расстояние между вершинами следующим образом. Если $v \neq w$, то $d(v, w)$ есть число ребер, содержащееся в кратчайшей (по количеству ребер) цепи, соединяющей v и w . Тогда $d(v, v) = 0$ для всех v .

Для фиксированной вершины v целое число

$$R(v) = \max_{w \in V} d(v, w)$$

соответствует расстоянию от v до вершины (или вершин), наиболее удаленной от v . Интуитивно понятно, что вершина является относительно центральной, если $R(v)$ относительно мало. Поэтому естественно назвать

$$R_0 = \min_{v \in V} R(v)$$

радиусом графа и считать вершину v_0 *центром* графа, если $R(v_0) = R_0$. На рис. 3.30, *a* и *b* показаны графы,

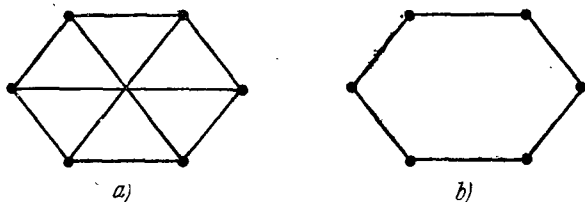


Рис. 3.30.

имеющие соответственно радиусы 1 и 3. Граф может иметь несколько центров. Например, на рис. 3.30, *b* каждая вершина является центром*).

Диаметром T связного графа является максимальное расстояние между парами вершин или в символической записи

$$T = \max_{v, w \in V} d(v, w).$$

Графы, показанные на рис. 3.30, имеют соответственно диаметры 2 и 3. Из второго примера видно, что радиус и диаметр связного графа могут быть равны.

*) Другая мера центральности вводится в разделе 6.16 в связи с сетями связи.

Упражнения

3.22. Пусть G — граф, определяемый простой цепью, имеющей $2n$ ребер. Определить его радиус, диаметр и число центров.

3.23. Повторить упражнение 3.22 для простой цепи, содержащей нечетное число ребер, и для простых циклов, содержащих четное и нечетное число ребер.

3.24. Дать определение обыкновенных полных графов, используя понятие диаметра.

3.25. (а). Показать, что радиус и диаметр связного графа обязательно удовлетворяют отношению $T/2 \leq R \leq T$. (б) привести примеры, для которых достигаются крайние точки этого отношения.

3.26. Показать, что в дереве, имеющем по меньшей мере два ребра, радиус R и диаметр T обычно удовлетворяют неравенству $R < T$.

3.27. Показать, что $d(v, w)$ обладает обычными свойствами метрики или функции расстояния:

$$\begin{aligned} d(v, v) &= 0, & d(v, w) &> 0, & \text{если } w \neq v, \\ d(v, w) &= d(w, v), & d(u, v) + d(v, w) &\geq d(u, w). \end{aligned}$$

Понятия радиус, центр и диаметр могут быть обобщены на ориентированные графы определенных типов. Если мы переопределим $d(v, w)$ как число дуг в кратчайшем пути из v к w , то нужно либо предположить, что существует путь из v к w для каждой v и w , либо считать, что понятие радиусов и диаметров не определены для некоторых ориентированных графов. Последнее условие можно устранить, считая, что рассматриваются только сильно связные графы.

Если $D = (V, A)$ является сильно связным графом, то радиус, диаметр и центр формально определяются в точности, как в неориентированном случае при использовании нового определения $d(v, w)$. Чтобы избежать двусмысленности, радиус и диаметр в ориентированном случае будем обозначать \vec{R} и \vec{T} .

На рис. 3.31 показан ориентированный граф D , полученный из неориентированного графа рис. 3.30, а наиболее неудачной ориентацией ребер. Нетрудно видеть, что этот граф сильно связан

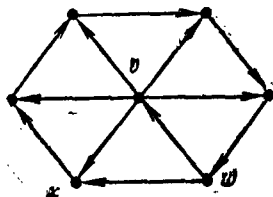


Рис. 3.31.

и что $\vec{R} = 2$, вершины v и w являются центрами. Кроме того, $\vec{T} = 6$ и соответствует единственному простому пути из x к v . Таким образом, в ориентированном случае радиус мо-

жет быть меньше диаметра более чем вдвое. Это в конечном счете следует из асимметрии расстояния в ориентированном случае. (Заметим, например, что на рис. 3.31 мы имеем $d(x, v) = 6$, а $d(v, x) = 1$).

Этих несколько необычных свойств можно избежать, ограничивая дальнейшее рассмотрение еще более узким классом связных, симметричных ориентированных графов. Для таких графов нет принципиального различия между понятиями ориентированных радиусов и диаметров и неориентированных. Каждая цепь, соединяющая v и w в неориентированном графе, определяет путь из v к w в соответствующем ориентированном графе (то же относится к паре w, v), причем цепь и путь имеют одинаковое число дуг. Таким образом, два определения $d(v, w)$ приводят к одинаковому численному значению расстояния.

* 3.7. Задачи о минимальных расстояниях

Рассмотрим граф, каждому ребру (или дуге, если граф ориентирован) которого поставлено в соответствие действительное число, называемое *длиной* ребра (или дуги). В зависимости от конкретного приложения, это число может быть мерой физического расстояния, времени, стоимости или другого важного параметра. В дальнейшем мы будем пользоваться терминологией, соответствующей физическим расстояниям, хотя всегда нужно помнить и о других возможных интерпретациях. Отметим две важные характеристики длины, существенные для дальнейшего рассмотрения.

1. Длина должна быть аддитивна (длина совокупности ребер или дуг равна сумме длин отдельных ребер или дуг).

2. Длина должна использоваться в качестве целевой функции, которую необходимо минимизировать или максимизировать при ограничениях на допустимые множества ребер или дуг.

Например, в задаче коммивояжера допустимыми ребрами являются ребра, образующие гамильтоновы циклы. В разделе 6.31 допустимыми множествами являются покрывающие деревья.

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентирован-

ном графе. Пусть v_0 и v_1 — различные вершины в ориентированном графе $D = (V, A)$ и $\lambda(a)$ обозначает длину дуги a . Если предположить, что существует, по крайней мере, один путь из v_0 в v_1 , то задача состоит в нахождении пути $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ минимальной длины из v_0 в v_1 .

Заметим прежде всего, что кратчайший путь из v_0 в v_1 обязательно существует, даже если некоторые или все дуги имеют отрицательную длину, так как существует только конечное число путей из v_0 в v_1 (по предположению, по крайней мере, один). Однако, на самом деле, при определенных обстоятельствах может не существовать кратчайшего пути из v_0 в v_1 . Действительно, если имеется контур C такой, что $\lambda(C) < 0$, и если существует путь P из v_0 в v_1 , проходящий через вершину w , входящую в C , то можно построить маршруты, длины которых (алгебраические) можно сделать сколь угодно малыми, проводя P из v_0 к w , после чего обходя C требуемое число раз, а затем продолжая P из w к v_1 . Поэтому мы будем считать, что $\lambda(C) \geq 0$ для любого контура C . При таком предположении кратчайшим может оказаться не простой путь P , для всех контуров которого $\lambda(C) = 0$, однако, достаточно рассмотреть только простые пути.

Заметим, что в процессе поиска кратчайшего пути из v_0 в v_1 мы получим кратчайшие пути из v_0 в каждую вершину $w \neq v_0$, которая связана с v_0 путем. Таким образом, можно решать более общую задачу нахождения пути из некоторой фиксированной «исходной точки» v_0 в любую вершину w , достижимую из v_0 . Введем следующие определения.

Деревом кратчайших расстояний T относительно исходной вершины v_0 называется ориентированное дерево с корнем в v_0 такое, что путь (единственный) из v_0 до каждой вершины дерева $w \neq v_0$ является на самом деле кратчайшим путем из v_0 в w .

Максимальным деревом кратчайших расстояний относительно v_0 является дерево кратчайших расстояний, которое включает в себя все вершины графа, достижимые из v_0 . Далее будет показано, что для любого ориентированного графа D , функция расстояния λ которого удовлетворяет условию $\lambda(C) \geq 0$ для любого контура C

и для любой фиксированной исходной вершины v , D действительно содержит в качестве подграфа, по крайней мере, одно максимальное дерево кратчайших расстояний относительно v_0 . Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 3.25. Пусть T — растущее дерево в ориентированном графе $D = (V, A)$ с корнем v_0 , которое содержит все вершины, достижимые из v_0 . Если v есть некоторая вершина T , то пусть $L(v)$ обозначает расстояние на дереве от v_0 до v . Таким образом, $L(v_0) = 0$. Дерево T является деревом кратчайших расстояний относительно v_0 тогда и только тогда, когда хорда (v, w) , граничные точки которой принадлежат T , удовлетворяют соотношению

$$L(w) \leq L(v) + \lambda(v, w).$$

Доказательство. Если для некоторой хорды $L(w) > L(v) + \lambda(v, w)$, то путь по дереву из v_0 до v вместе с хордой (v, w) имеет длину $L(v) + \lambda(v, w)$. Так как эта длина меньше чем $L(w)$, то длина пути до w по дереву не является, очевидно, минимальной.

Предположим обратное, что T не является деревом кратчайших расстояний. Пусть v будет вершина T , до которой путь по дереву не является кратчайшим, и пусть $P = a_1, a_2, \dots, a_n$ будет кратчайшим путем из v_0 к v . Пусть

$$a_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$$

является первой (т. е. с наименьшим индексом) дугой пути P , которая не принадлежит T . Так как P является кратчайшим путем из v_0 к v , $P_j = a_1, a_2, \dots, a_j$ должен быть кратчайшим путем до v_j при $j = 1, 2, \dots, n$. (Проверка этого утверждения представляется читателю.) Но $\lambda(P_i) = L(v_i)$, так как P_i и путь в дереве совпадают до вершины v_i . По предположению $L(v_{i+1}) > \lambda(P_{i+1}) = L(v_i) + \lambda(a_{i+1})$. Таким образом, мы получили дугу, а именно, a_{i+1} , граничные точки которой удовлетворяют условию

$$L(w) > L(v) + \lambda(v, w).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.25 дает теоретическую основу для итеративной процедуры, которая фактически будет давать

максимальное дерево кратчайших расстояний относительно данной исходной вершины v_0 при условии, что $\lambda(C) \geq 0$ для каждого контура рассматриваемого графа. Процедура состоит в следующем.

1. Возьмем в качестве T_0 любое дерево с корнем в v_0 , включающее в себя все вершины, достижимые из v_0 .

2. Обозначим расстояние от v_0 до v в дереве T_i , полученном на i -м шаге через $L_i(v)$. Если каждая хорда (v, w) удовлетворяет условию

$$L_i(w) \leq L_i(v) + \lambda(v, w),$$

то по теореме 3.25 T_i есть максимальное дерево кратчайших расстояний. Если условие не выполняется, то пусть (v^*, w^*) — хорда такая, что

$$L_i(w^*) > L_i(v^*) + \lambda(v^*, w^*).$$

Пусть T_{i+1} — граф, получаемый из T_i добавлением дуги (v^*, w^*) и вычеркиванием дуги, конечной вершиной которой является w^* . Из условия, что T_i есть растущее дерево с корнем v_0 и что $\lambda(C) \geq 0$ для любого контура, получаем, что T_{i+1} также является растущим деревом с корнем v_0 . (Это утверждение предлагается доказать читателю в качестве упражнения.) Далее шаг 2 повторяется с предварительной заменой индекса i на $i+1$.

Для любой вершины v , которая достижима из v_0 , последовательность значений $L_0(v)$, $L_1(v)$, $L_2(v)$, ... является невозрастающей. Кроме того, на каждом шаге i $L_i(v) < L_{i-1}(v)$, по крайней мере, для одной вершины (а именно, для вершины w^*). И, наконец, значения $L_i(v)$ ограничены снизу, так как не существует путей из v_0 к v , имеющих бесконечно малую длины.

В результате на некотором шаге i итеративной процедуры получим

$$L_i(w) \leq L_i(v) + \lambda(v, w)$$

для каждой дуги (v, w) , являющейся хордой дерева T_i . В этом случае согласно теореме 3.25 T_i оказывается максимальным ориентированным деревом кратчайших расстояний.

Пример. Предложенный метод нахождения дерева кратчайших расстояний иллюстрируется на рис. 3.32. В данном случае v_0 является исходной вершиной. Длины дуг заданы рис. 3.32, *a*. Сплошные дуги на рис. 3.32, *b*

соответствуют начальному дереву T_0 с корнем в v_0 , которое покрывает граф. Здесь же показаны значения $L_0(v)$. Пунктирная дуга является «улучшающей»

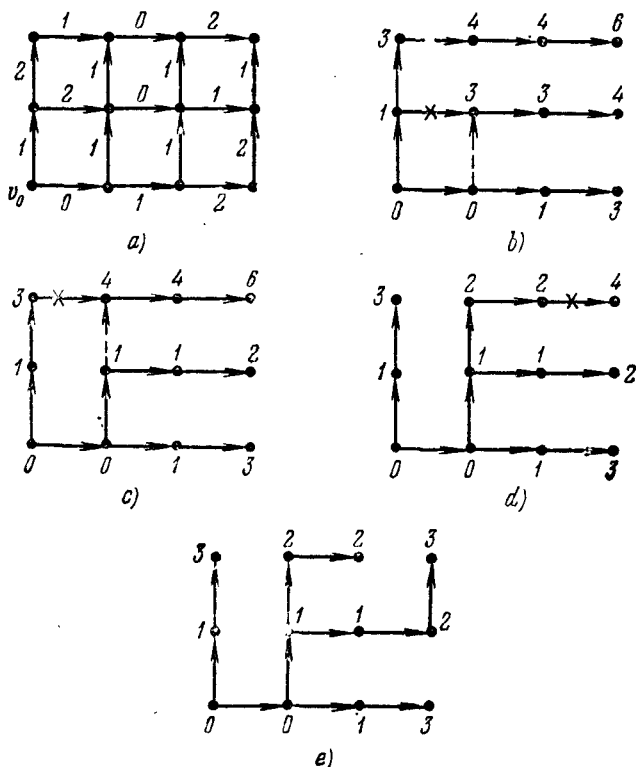


Рис. 3.32.

хордой (т. е. $3 > 0 + 1$). После того как эта дуга добавлена, а соответствующая дуга удалена, мы получаем новое покрывающее дерево T_1 , показанное на рис. 3.32, c. Аналогичным образом получены T_2 и T_3 , которые показаны соответственно на рис. 3.32, d, e. Проверив все хорды дерева T_3 , мы можем убедиться, что T_3 действительно является деревом кратчайших расстояний. Заметим, что на некотором шаге процедуры может быть несколько «улучшающих» хорд. В этом случае вы-

бирается любая из них. Различные хорды могут привести к разным конечным деревьям (и, возможно, за различное число шагов), т. е. дерево кратчайших расстояний, вообще говоря, не является единственным.

Полагая $\lambda(a) = 1$ для всех $a \in A$, мы можем найти пути, которые являются кратчайшими в том смысле, что они содержат наименьшее число дуг. В настоящее время разработано множество методов для нахождения деревьев кратчайших расстояний в ориентированных графах. В работе [10] проводится сравнение нескольких алгоритмов. Алгоритм, рассмотренный выше, основан на методе «пометок» или «уменьшении индексов», который описан в работах [5] и [6].

Упражнения

3.28. Повторить предыдущий пример, но выбрать другую улучшающую хорду и перейти от T_1 к другому дереву T_2 .

3.29. Применяя алгоритм модификации дерева для ориентированного графа рис. 3.33, найти кратчайшие пути из v_1 до всех других вершин, считая, что функция расстояния $\lambda(a) = 1$ для всех дуг.

3.30. Повторить упражнение 3.29 с длинами дуг, показанными на рис. 3.33.

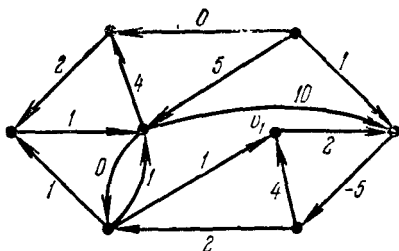


Рис. 3.33.

Можно предложить другой алгоритм для нахождения кратчайших путей в ориентированном графе, который основан на методе динамического программирования [1]. Рассмотрим ориентированный граф, показанный на рис. 3.34. (Предполагается, что все дуги ориентированы слева направо, но для простоты стрелки опущены.) Число у каждой дуги должно интерпретироваться как ее длина, и задача состоит в нахождении кратчайшего пути из любой вершины x (отличной от w) к вершине w .

Важная особенность этой задачи, с точки зрения применения динамического программирования, состоит в следующем. Если последовательность вершин $x_1, x_2, \dots, x_n, \omega$ определяет кратчайший путь от x_1 до ω , то последовательность $x_2, x_3, \dots, x_n, \omega$ также определяет кратчайший путь от x_2 до ω . Это позволяет нам просматривать вершины по шагам, рассматривая на i -м шаге только те вершины, которые удалены от v на i дуг. (Заметим, что для рассматриваемого графа все пути из вершины x до ω содержат одно и то же число, скажем k ,

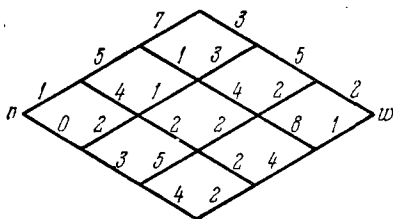


Рис. 3.34.

вершин. Следовательно, обозначение шагов является однозначным.)

Поставим в соответствие каждой вершине x , удаленной от ω на одну дугу, дугу $A(x)$ (в нашем случае единственную), содержащую x в качестве начальной вершины. Вершине x соответ-

ствует расстояние $D(x)$, которое равно длине этой дуги. В нашем примере это расстояние равно 2 (для верхней вершины) и 1 (для нижней).

В общем случае, найдя $A(x)$ и $D(x)$ для всех вершин, которые отстоят от ω на k или меньшее число дуг, мы находим $A(x)$ и $D(x)$ для каждой вершины x , удаленной на $k+1$ дугу. При этом воспользуемся следующим правилом:

$$D(x) = \min \{ \lambda(x, y) + D(y) \},$$

где минимум берется по всем дугам $a \simeq (x, y)$, имеющим x в качестве начальной вершины. (В нашем примере существуют самое большое две такие дуги.) В качестве $A(x)$ берется дуга, на которой достигается минимум. Из ранее упомянутого свойства задачи и того факта, что расстояния, определенные на первом шаге,

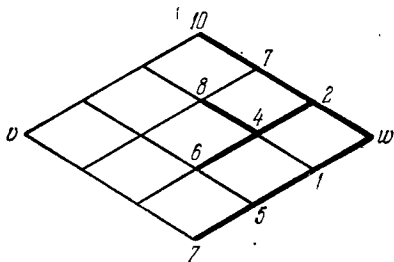


Рис. 3.35.

являются минимальными, следует, что расстояния, определенные на любом $(k+1)$ -м шаге, также являются минимальными. Утолщенные дуги (снова изображенные без стрелок) и числа на рис. 3.35 показывают $A(x)$ и $D(x)$ для первых трех шагов процедуры.

Упражнение 3.31. Найти $A(x)$ и $D(x)$ для вершин, соответствующих шагам 4÷6 рис. 3.35. В частности, найти кратчайший путь от u к w .

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. E., Dreyfus S. E., Applied Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962. [Русск. перев.: Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, «Наука», 1965.]
2. Camion P., Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *Compt. Rend.*, 249 2151—2152 (1959).
3. Danzig G., Fulkerson D., Jonson S., Solution of a Large-scale Traveling Salesman Problem, *Operations Res.*, **2**: 393—410 (1954).
4. Eureka, October, 1961.
5. Ford L. R., Jr., Network Flow Theory. The RAND Corp., P-923, August, 1956.
6. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem. The RAND Corp., RM-1604, December, 1955.
7. Gonzalez R., Solution of the Traveling Salesman Problem by Dynamic Programming on the Hypercube MIT Operations Res. Ctr. Interim Tech. Rept 18, 1962.
8. Herz J. C., Gaudin T., Rossi P., Solution du Problème No. 29. *Rev. Francaise Rech. Operationelle*, **8** (2); 214—218 (1964).
9. Little J., Murty K., Swenney D., Karel C., An Algorithm for the Traveling Salesman Problem. *Operations Res.*, **11**: 972—989 (1963).
10. Pollack M. and Wiebenson W., Solutions of the Shortest-route Problem. *A Review Operations Res.*, **8**: 224—230 (1960).
11. Robbins H. E., Theorem on Graphs, with an Application to a Problem of Traffic Control. *Am. Math. Monthly*, **46**, (5): 281—283. (1929).
12. Rédei L., Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5**: 17—25 (1954).
13. Rosenthal A., Solution to Problem E 711. *Am. Math. Monthly*, **53**: 593 (1946).
14. Tutte W. T., On Hamiltonian Circuits. *J. London Math. Soc.*, **21**: 98—101 (1946).
15. Ungar P., *Am. Math. Monthly*, **57**: 261 (1950),

Глава 4

ПЛОСКИЕ И НЕПЛОСКИЕ ГРАФЫ. ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ

4.1. Введение

Настоящая глава преследует две основные цели. Первая заключается в том, чтобы найти и описать условия, при которых граф является плоским, т. е. может быть отображен на плоскость. Широко известное условие существования плоского графа задается теоремой Понтрягина — Куратовского, в которой утверждается, что плоский граф не должен содержать в качестве подграфов два графа специального типа. Другое интересное необходимое условие существования плоского графа заключается в том, чтобы он был изоморфен графу, ребра которого являются прямыми линиями. Вторая цель главы состоит в том, чтобы изучить хроматические графы и сформулировать некоторые теоремы о раскраске.

При этом будут рассматриваться задачи следующих типов.

1) Задана некоторая карта, т. е. плоский граф вместе с областями, на которые циклы графа разбивают плоскость. Определить, можно ли раскрасить этот граф n цветами таким образом, чтобы ни одна пара смежных областей не была окрашена одним цветом.

2) Имеются n красок. Найти условия, которым должна удовлетворять карта, чтобы n было минимальным хроматическим числом. В процессе изложения основное внимание будет уделяться вопросам существования,

а не фактическому построению схем раскраски. Понятие двойственного графа позволяет дать другое определение плоского графа. Оно оказывается также полезным при изучении задачи раскраски.

4.2. Плоские графы

Напомним, что плоским графом называется граф, изоморфный геометрическому графу на плоскости, т. е. граф, который может быть изображен на плоскости таким образом, что его ребра пересекаются только в их граничных точках.

Граф можно отобразить с плоскости на сферу, помещая сферу в некоторой точке плоскости и рассматривая точку касания как южный полюс. Северный полюс используется при этом как центр проекций прямых линий, соединяющих северный полюс с каждой точкой графа на плоскости. Пересечение этих линий со сферой дает требуемую проекцию, называемую *стереографической*. Эта проекция находится во взаимно однозначном соответствии с исходным графом.

Возможен и обратный процесс, т. е. граф со сферы можно отобразить на плоскость при условии, что выбранный северный полюс не совпадает ни с одной точкой графа. (Интересные осложнения возникают, если северный полюс совпадает с вершиной графа. Последний в этом случае отображается в бесконечность, что приводит к дополнительным трудностям.) Заметим, что любая область графа, изображенного на плоскости, может быть сделана внешней с помощью двух отображений. Сначала граф отображается на сферу таким, чтобы южный полюс соприкасался с точкой внутри рассматриваемой грани. Затем производится обратное отображение на плоскость. При этом бывший северный полюс используется как точка контакта сферы с плоскостью, а бывший южный полюс — как центр проекций.



Рис. 41.

Упражнение 4.1. Показать, как с помощью двойной проекции треугольная грань графа на рис. 4.1 может быть помещена в прямоугольную.

Часто возникают задачи раскраски на сфере. Как видно из принципа построения стереографической проекции, эти задачи можно свести к задачам раскраски на плоскости, если множество граней, подлежащих раскраске, включает в себя бесконечную грань.

Вернемся теперь к вопросу определения плоских графов и приведем основные сведения, необходимые для доказательства теоремы Понтрягина — Куратовского. Обыкновенный граф, который имеет наименьшее число вершин и не является плоским, есть полный граф из пяти вершин, показанный на рис. 4.2. Такой граф

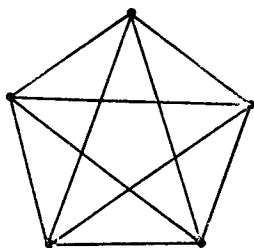


Рис. 4.2.

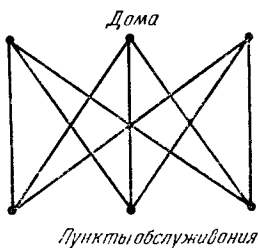


Рис. 4.3.

будем называть *графом Понтрягина — Куратовского 1-го типа* (см. лемму 4.4). Очевидно, что если любой граф содержит такой пятивершинный граф (или, вообще, любой неплоский граф) в качестве подграфа, то он обязательно неплоский. Примером неплоского графа, который не содержит упомянутого полного графа, является граф в задаче «о трех пунктах обслуживания и трех домах»*), приведенный на рис. 4.3. Будем называть такой граф *графом Понтрягина — Куратовского 2-го типа*. Название «граф обслуживания» возникает из задачи соединения n домов с каждым из n пунктов обслуживания посредством коммуникаций, которые не пересекаются друг с другом (т. е. образуют плоский граф). Как показано в лемме 4.4, это невозможно сделать для $n \geq 3$. Графы Понтрягина — Куратовского 1-го и 2-го типов позволяют определить наиболее общее условие существования плоского графа.

*) В литературе она часто фигурирует как «задача о трех домах и трех колодцах». (Прим. ред.)

Определение. Вершина v является точкой сочленения связного графа G , если граф $H = G - v$, получаемый удалением v и всех ребер, инцидентных с v , несвязен.

Граф называется *сепарабельным*, если он содержит, по крайней мере, одну точку сочленения.

Лемма 4.1. Необходимое и достаточное условие, при котором вершина v связного графа является точкой сочленения, состоит в том, что v должна принадлежать всем цепям, соединяющим некоторую пару вершин.

Доказательство. Если v является точкой сочленения, то удаление ее из связного графа разбивает последний, по крайней мере, на две компоненты и, следовательно, все цепи, связывающие любую пару вершин, взятых из различных компонент, должны проходить через v . С другой стороны, если все цепи, связывающие некоторую пару вершин, проходят через v , то удаление v делает граф несвязным, и, следовательно, v есть точка сочленения.

Лемма 4.2 (теорема Менгера — Дирака [14]). Если v_a и v_b — две вершины графа без точек сочленения с числом вершин $n > 2$ и если $U = \{v_a, v_1, \dots, v_n, v_b\}$ — цепь, соединяющая эти вершины, то существуют две цепи U_1 и U_2 , связывающие v_a и v_b , которые не имеют других общих вершин и при движении вдоль каждой, из которых вершины цепи U встречаются в порядке возрастания их индексов.

Доказательство. Теорема доказывается по индукции. Теорема справедлива, если цепь состоит из пары вершин, связанных единственным ребром. Предположим теперь, что теорема верна для любой пары вершин, если длина цепи, связывающей их, равна самое большее m , и покажем, что она верна для простой цепи длины $m+1$. Обозначим, $v_0 = v_a$, $v_{m+1} = v_b$ и предположим, что U — цепь, соединяющая v_0 с v_{m+1} . Пусть вершины U расположены в порядке $v_0, v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$. По предположению индукции, v_0 и v_m связаны двумя цепями \bar{U}_1 и \bar{U}_2 , удовлетворяющими условиям теоремы. Заметим, что часть U , которая соединяет v_0 с v_m , может быть одной из двух простых цепей \bar{U}_1 или \bar{U}_2 . Так как v_m не является точкой сочленения, то она не разделяет v_0 и v_{m+1} , и следовательно, существует цепь, соединяющая v_0 и v_{m+1} и не проходящая через v_m . Эта цепь

содержит часть W , которая соединяет последнюю вершину в последовательности v_0, v_1, \dots, v_{m-1} с вершиной v_{m+1} .

Пусть v^* будет первая вершина (отличная от v_{m+1}), которая входит, по крайней мере, в одну из цепей \bar{U}_1, \bar{U}_2 или U и которая встречается при движении по цепи U^* от v_{m+1} к v_0 . Пусть $W = U^*(v^*, v_{m+1})$, т. е. подцепь U^* , соединяющая v^* и v_{m+1} . Если v^* входит в \bar{U}_1 , то

$$U_1 = \bar{U}_1(v_0, v^*) \cup W,$$

и

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_2 \cup U(v_m, v_{m+1}),$$

удовлетворяют условиям теоремы.

Аналогичная ситуация возникает, если v^* входит в \bar{U}_2 . Наконец, если v^* содержится только в U , то $v^* = v_k$ для некоторого k такого, что $0 \leq k \leq m-1$. Пусть v_p — вершина с наибольшим индексом, не превышающим $k-1$ и входящая в \bar{U}_1 или \bar{U}_2 . Если v_p входит в \bar{U}_1 , то

$$U_1 = \bar{U}_1(v_0, v_p) \cup U(v_p, v_q) \cup W,$$

и

$$U_2 = \bar{U}_2 \cup U(v_m, v_{m+1})$$

— требуемые цепи. Если $v_0 = v_p$, то первая подцепь, соответствующая U_1 , отбрасывается. Аналогичная пара цепей существует, если v_p содержится в \bar{U}_2 . Лемма доказана.

Лемма 4.3. Связный плоский граф с n вершинами, m ребрами и r гранями (включая внешнюю или бесконечную грань) удовлетворяет формуле Эйлера

$$n - m + r = 2.$$

Доказательство. Заметим, что величина $(n - m + r)$ не изменится, если вершину графа соединить ребром с другой вершиной (не пересекая при этом другие ребра), так как в результате этой операции получается дополнительная грань. (Добавление ребра порождает цикл, так как граф связный.) Аналогично, эта величина останется той же самой, если вводится новая вершина, которая соединяется с двумя вершинами графа с помощью двух ребер, так как при этом снова до-

бавляется грань. Левая часть формулы Эйлера также остается неизменной, если вместо добавления вершин и ребер, как описывалось выше, они удаляются согласно той же процедуре. Операции добавления и удаления вершин и ребер позволяют в конце концов свести граф к треугольнику, т. е. к графу с $n=3$, $m=3$ и $r=2$, так как внешняя грань треугольника тоже учитывается. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 4.4. Подграфы Понтрягина — Куратовского являются неплоскими.

Первое доказательство. Если бы граф 2-го типа был плоским, то по формуле Эйлера мы бы нашли, что $r=5$. Каждая грань должна иметь, по крайней мере, четыре ограничивающих ребра; так как если грань ограничивается тремя ребрами, то две из трех вершин должны быть либо домами, либо пунктами обслуживания и оказались бы смежными, что противоречит определению графа. Так как каждое ребро является границей двух граней и таким образом учитывается дважды, то мы должны получить $4r \leq 2m$ или $m \geq 2r$, т. е. $9 \geq 10$. Полученные противоречия показывают, что граф 2-го типа неплоский.

В случае графа 1-го типа каждая грань ограничивается, по крайней мере, тремя ребрами, откуда $3r \leq 2m$, а так как $r=7$ и $m=10$, то мы снова получили противоречие: $21 \leq 20$.

Второе доказательство. Другое доказательство леммы 4.4 основано на теореме Жордана о кривой, в которой утверждается, что простая замкнутая кривая (гемеоморфная окружности) делит плоскость на две области, общей границей которых является сама кривая. Следствием этой теоремы является тот очевидный факт, что простая кривая, соединяющая две точки, каждая из которых лежит в разной области, пересекает границу. Для доказательства того, что граф 2-го типа является плоским, соединим два пункта обслуживания с двумя домами, как показано на рис. 4.4, образовав жорданову кривую. Третий пункт расположен либо внутри, либо снаружи грани, ограниченной этой кривой. Предположим, он расположен внутри грани. (Если он расположен снаружи и связан с домом, то другой пункт должен быть внутри грани.) Соединим этот пункт с дву-

мя домами. Тогда вне зависимости от того, какой грани принадлежит третий дом (потребитель), он в любом случае будет отделен жордановой кривой от одного из пунктов обслуживания и не сможет быть связан с этим пунктом. Следовательно, граф неплоский.

Для доказательства того, что граф 1-го типа является неплоским, рассмотрим четыре точки, попарно соединенные друг с другом (рис. 4.5). Как видно из рисунка,

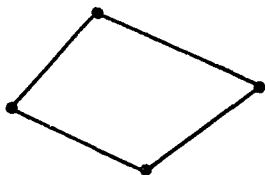


Рис. 4.4.

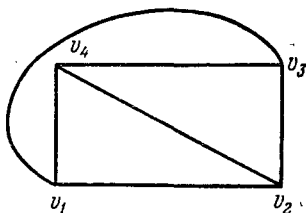


Рис. 4.5.

для того чтобы v_1 соединялась с v_3 , а v_2 с v_4 без пересечений, необходимо, чтобы одно ребро было внутри, а другое снаружи прямоугольника. Вне зависимости от расположения пятой вершины, она в любом случае будет отделена жордановой кривой от одной из вершин, и мы снова приходим к выводу, что граф неплоский.

Очевидно, что свойства плоскости графа не изменяются, если некоторое ребро разделить на два введением новой вершины степени 2 или если два ребра, инцидентные вершине степени 2, заменить на одно, удалив при этом данную вершину. Такие рассуждения приводят к следующему определению: графы G и G' называются изоморфными с точностью до вершин степени 2, если они изоморфны или если они могут быть превращены в изоморфные графы с помощью указанных выше преобразований.

Теорема 4.5. (теорема Понтрягина — Куратовского). Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, изоморфного с точностью до вершин степени 2 одному из подграфов Понтрягина — Куратовского.

Упражнение 4.2. Показать, что существование подграфа, изоморфного с точностью до вершин степени 2 графу Понтрягина — Куратовского, эквивалентно существованию пяти или шести вершин,

а также множеству цепей, не имеющих общих вершин (кроме их граничных точек), совокупность которых, если цепи рассматриваются как единичные ребра, образует подграф Понтрягина — Куратовского.

Приведем доказательство теоремы 4.5, данное Бержем [3]. Оно существенно переработано по сравнению с вариантом первоначального доказательства Куратовского [30].

Доказательство. Мы уже показали, что плоский граф не содержит подграф Понтрягина — Куратовского или подграфов, которые изоморфны им с точностью до вершин степени 2. Доказательство обратного, т. е. того, что неплоский граф содержит один или оба подграфа Понтрягина — Куратовского, выполняется индукцией по числу ребер. Воспользуемся эквивалентным утверждением, что если граф не содержит подграфов Понтрягина — Куратовского, то он должен быть плоским. Очевидно, что это верно для графов с одним, двумя и тремя ребрами. Пусть обратное утверждение верно для графа с числом ребер, меньшим чем m . Покажем с помощью доказательства от противного, что оно верно в случае m ребер.

Предположим, что G состоит из m ребер, является неплоским и не содержит подграфов Куратовского, но каждый подграф его с $m-1$ ребрами является плоским. Противоречие будет состоять в том, что G содержит подграф Куратовского.

1. Граф G должен быть связан; в противном случае, так как все его компоненты имеют меньше m ребер и являются плоскими, то и G был бы плоским.

2. G является графом без сочленений*). В самом деле, точка сочленения может быть отображена на границу бесконечной грани с помощью помещения сферы на грань, содержащую эту точку на своей границе и инверсии исходного графа относительно этой сферы. При удалении точки сочленения все компоненты графа остаются плоскими, так как каждая из них будет содержать менее чем по m ребер. Таким образом, введение такой точки дает плоский граф.

*) Граф называется *графом без сочленений*, если он не связан и не имеет точек сочленения. (Прим. ред.)

3. Покажем, что в G существует некоторый простой цикл S , проходящий через произвольные вершины a и b , который сохраняется в графе при удалении ребра $[a, b]$. Рассмотрим подграф $G' = G - [a, b]$, который должен быть либо (1) подграфом с точкой сочленения, либо (2) подграфом без точки сочленения.

В случае (1) существует точка сочленения c , через которую проходит каждая цепь между a и b в G' . Однако это приводит к противоречию, так как при удалении c граф распадается на две компоненты C_a и C_b . Пусть из C_a и C_b получены C'_a и C'_b соответственно присоединением ребер $[a, c]$ и $[b, c]$.

Из первоначального (прямого) утверждения следует, что ни C'_a ни C'_b не содержат подграф Понтрягина — Куратовского, так как такого подграфа нет в G . С помощью стереографической проекции $[a, c]$ и $[b, c]$ могут быть переведены в ребра бесконечной грани. Если a и b соединяются в этой грани, то в результате получается все еще плоский граф, так как связывающее ребро полностью лежит внутри внешней грани. Таким образом получен граф, являющийся плоским и содержащим G , что противоречит предположению о том, что G неплоский. Следовательно, G' является графом без сочленений.

В силу этого по лемме 4.2 существуют две цепи, соединяющие a и b и образующие простой цикл (т. е. они не имеют других общих точек). Следовательно, G' содержит простой цикл. Используем наличие этого цикла для опровержения предположения о том, что граф G неплоский.

4. Пусть S — простой цикл, проходящий через a и b в G' и заключающий в себе максимальное число граней. Придадим циклу S произвольную ориентацию. Часть графа G' внутри S назовем внутренним графом, а часть снаружи — внешним графом.

Вершины $A \subset V$ образуют множество сочленения, если при их удалении граф G оказывается несвязным. Часть графа G , связанная с A , представляет собой связную компоненту C подграфа $V - A$ плюс ребра из C к A .

Внешний граф не может содержать более одной вершины, принадлежащей полуциклу $S[a, b]$. В противном случае можно построить цикл, проходящий через a и b

п охватывающий большее число граней. То же самое справедливо и для полуцикла $S[b, a]$. Однако внешний граф должен содержать одну или две точки, общие с S , так как в противном случае граф G был бы несвязен. С другой стороны, существует, по крайней мере, один связный подграф I внутреннего графа и один связный подграф E внешнего графа, каждый из которых пересекает как $S]a, b[$, так и $S]b, a[$. (Здесь $S]a, b[$ обозначает граф, получаемый из $S[a, b]$ удалением вершин a и b .) Чтобы убедиться в этом, заметим, что G' является плоским графом, а добавление $[a, b]$ должно сделать его неплоским. Но чтобы G был неплоским, $[a, b]$ должно пересекать либо подграф, состоящий из $S]a, b[$, $S]b, a[$ и внутреннего графа, либо подграф, состоящий из $S]a, b[$, $S]b, a[$ и внешнего графа.

Покажем теперь, что S содержит четыре вершины, которые являются общими точками (точками пересечений) с I и E и расположены на S в чередующемся порядке. Чтобы доказать это, предположим обратное, и пусть e_1 и f_1 — две последовательные точки пересечения связного подграфа I_1 внутреннего графа, который пересекается $S]a, b[$ и $S]b, a[$. Эти две точки могут быть соединены путем P , проходящим снаружи S и непересекающим имеющихся ребер, так как по предположению не существует связного подграфа E внешнего графа, который пересекает как с $S]a, b[$ и $S]b, a[$, так и $S]e, f[$ и $S]f, e[$. Каждый связный подграф внутреннего графа, включая I_1 , который пересекается только с $S]f_1e_1[$, можно перевести во внешний граф на грань, ограниченную P и S . Но при этом обязательно останется, по крайней мере, один связный подграф I_2 внутреннего графа, который пересекается с $S]a, b[$ и $S]b, a[$ и содержит две точки пересечения e_2 и f_2 , принадлежащие $S[e_1f_1]$, из которых, по крайней мере, одна принадлежит $S]e_1f_1[$. Мы можем теперь заменить I_1 на I_2 и продолжить процесс переноса. Так как граф конечен, то весь внутренний граф может быть перенесен во внешний. Но при этом исходный граф должен быть плоским, так как ни одно ребро не пересекает $[a, b]$, а это противоречит основному предположению. Таким образом, существуют связные подграфы I и E соответственно внутреннего и внешнего графов, которые пересекают $S]a, b[$

и $S]b, a[$ и, кроме того, пересекают S в чередующихся между собой точках c, d (в E) и e, f (в I).

Случай, когда внешняя и внутренняя компоненты имеют общие точки пересечения с S или совпадают с a или b , исключается введением дополнительных точек, удовлетворяющих требованию чередования. Все возможные случаи могут быть исчерпаны при рассмотрении четырех точек на внутренней компоненте. Предположим, что e, f, g, h — точки пересечения I с S такие, что $e \in S]c, d[; f \in S]d, c[; g \in S]a, b[; h \in S]b, a[$ (рис. 4.6).

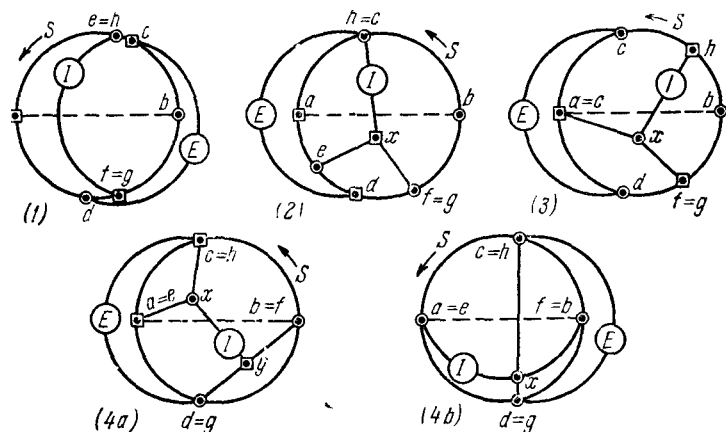


Рис. 4.6.

Очевидно e не может совпасть с f , а g с h . Но может случиться, что $e=g$ и $e=h$ и т. д. Рассмотрим все эти случаи.

1. Пусть $e \in S]b, a[; f \in S]a, b[; e=h$ и $f=g$. Это приводит к графу 2-го типа, который противоречит гипотезе.

2. Пусть e и f принадлежат $S]a, b[$ и $h=c$ (если $h \neq c$, то $h \in S]b, a[$, и мы получаем граф 2-го типа).

3. Если $e=a$ и $f \neq b$, то, предположив, например, что $f \in S]b, a[$, мы получим граф 2-го типа.

4. Если $e=a$ и $f=b$, то мы можем положить $g=d$ и $h=c$; если это не так, то получаем либо случай 1,

либо 3. При сделанном предположении нужно рассмотреть две возможности.

(а) Цепи I , соединяющие cd и ef , имеют более одной общей вершины. В этой ситуации мы получаем граф 2-го типа.

(в) Цепи I , соединяющие cd и ef , имеют только одну общую вершину. Данная ситуация приводит к графу 1-го типа.

Как показано на рис. 4.6, случай (4b) приводит к графу 1-го типа, а все остальные случаи — к графу 2-го типа. Таким образом, мы в любом случае получаем противоречие, т. е. приходим к неплоскому графу, и теорема доказана. (Заметим, что на рис. 4.6 кружками и квадратиками показаны вершины, определяющие подграфы Понтрягина — Куратовского. Вершины b и d на рис. 4.6 (2) и (3) соответственно должны рассматриваться как вершины степени 2.)

Кроме теоремы Понтрягина — Куратовского существуют другие теоремы, характеризующие плоский граф. Приведем их без доказательства.

Теорема 4.6. (Маклейн). Необходимое и достаточное условие, при котором граф является плоским, состоит в том, что граф должен содержать базис цикла (см. матричное представление графов) и один дополнительный цикл такой, чтобы эта совокупность циклов ровно дважды содержала каждое ребро графа.

Теорема 4.7. (Уитни). Необходимое и достаточное условие, при котором граф является плоским, состоит в том, чтобы он имел двойственный граф (см. ниже).

Двойственный граф

Рассмотрим плоский граф G с гранями $R_i (i=1, \dots, \dots, n)$. Поставим в соответствие каждой грани R_i точку p_i (т. е. возьмем точку на грани). Если две грани R_i и R_j смежные, то соединим p_i и p_j ребром $p_i p_j$, которое пересекает один раз общую границу граней R_i и R_j и не имеет общих точек ни с какой другой границей графа. Ребро графа G , которое не является его границей, находится внутри грани и образует петлю. Такой процесс построения дает новый граф \bar{G} с вершинами p_1, \dots, p_n , который называется *двойственным графом* для G .

На рис. 4.7 показана идея построения двойственного графа, изображенного пунктирными линиями. Из этого построения видно, что все графы, двойственные G , являются топологически эквивалентными, поэтому обычно

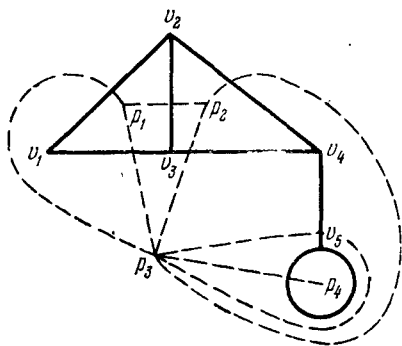


Рис. 4.7.

говорят просто о двойственном графе. (Заметим, что если $\overline{\overline{G}}$ — граф, двойственный к \overline{G} , то $\overline{\overline{G}} \neq G$, когда G несвязен.)

Упражнения

4.3. Построить двойственный граф для двойственного графа, изображенного на рис. 4.7, показать, что полученный двойственный граф эквивалентен исходному.

4.4. Показать, что на плоскости не существует карты с пятью областями, каждая пара которых была бы смежна.

Определение. Граф называется *тривалентным* или *кубическим*, если он является однородным графом степени 3.

Теорема 4.8. Все грани графа, двойственного плоской трехзначной связной карте, являются трехсторонними и число их четно.

Доказательство. Нетрудно видеть, что каждой вершине исходного графа соответствует треугольная грань двойственного. Таким образом, для двойственного графа имеем $3r = 2m$, что после подстановки в формулу Эйлера дает $r = 2(n - 2)$.

З а м е ч а н и е. Поставим в соответствие каждому ребру графа вершину. Если две вершины теперь соединить ребром всякий раз, когда соответствующие ребра смежны, то в результате получим граф, называемый *смежностным графом* или *графом смежности* *).

Теорема 4.9. (Краус) [29]. Необходимое и достаточное условие, при котором граф является смежностным, состоит в том, что существует разбиение его ребер на полные подграфы такое, что нет вершины графа, принадлежащей более чем двум подграфам.

Упражнения

4.5. Проверьте справедливость следующих утверждений для графа, смежностного с полным графом, имеющим n вершин:

(а) каждая вершина имеет степень $2(n-2)$;

(б) с любыми двумя несмежными вершинами смежны точно четыре вершины;

(с) любые две смежные вершины взаимно смежны точно с $n-2$ вершинами.

Эти три необходимых условия являются также и достаточными (кроме случая $n=8$) для того, чтобы граф был смежностным к полному графу с n вершинами.

4.6. Показать, что точно $4n-12$ вершин смежно с одной из вершин любой пары несмежных вершин смежностного графа в упражнении 4.5.

Покажем теперь, что необходимое условие, при котором обыкновенный граф является плоским, состоит в том, чтобы граф можно было изобразить на плоскости с помощью прямых линий. (Любой обыкновенный граф, плоский или нет, может быть изображен прямыми линиями в трехмерном пространстве.)

Определение. *Прямолинейным графом* называется плоский граф, в котором каждое ребро является отрезком прямой линии.

Определение. Если каждая грань плоского графа ограничена циклом из трех ребер, то такой граф называется *плоской триангуляцией*.

Фари доказал следующую теорему.

Теорема 4.10. Каждый обыкновенный плоский граф изоморфен прямолинейному графу.

Докажем эту теорему с помощью последовательности лемм 4.11÷4.15.

*) В оригинале «line graph», его называют также *сопряженным графом*. (Прим. ред.)

Лемма 4.11. Если граф G изоморфен прямолинейному графу, то каждый из его подграфов также изоморфен прямолинейному графу.

Доказательство. Если G изоморфен прямолинейному графу \bar{G} , а подграф G получается удалением вершин и дуг, не входящих в этот подграф, то соответствующая операция в \bar{G} дает прямолинейный подграф, изоморфный рассматриваемому подграфу в G . (Здесь \bar{G} не есть граф, двойственный G .)

Лемма 4.12. Каждый обыкновенный плоский граф G является подграфом плоской триангуляции с тем же самым числом вершин.

Доказательство. Предположим, что G содержит, по крайней мере, четыре вершины. (Случай трех или большего числа вершин оставляем для упражнения.) Построим плоскую триангуляцию G' , которая содержит G в качестве подграфа. Если R — грань G , а v_1 и v_2 — две вершины R , не связанные ребром, то соединим v_1 и v_2 ребром, целиком лежащим в R . Получаем новый граф, который опять является обыкновенным. Продолжим такой процесс соединения несвязных пар вершин на грани, пока каждая пара вершин не будет связана ребром. После окончания процесса получим обыкновенный граф G' с тем же самым числом вершин. Очевидно, G' связан, ибо в противном случае существует грань R , смежная с двумя компонентами G , для которой можно выбрать v_1 внутри одной из компонент, а v_2 внутри другой и соединить их ребром в R , что противоречит построению G' . Покажем, что G' — плоская триангуляция, предварительно заметив, что если некоторая грань ограничена только одним ребром, то граф состоит из этого ребра и двух его вершин. Грань не может быть ограничена двумя ребрами, так как тогда граф содержал бы только три вершины. Оба случая противоречат сделанному предположению о четырех вершинах. Таким образом, граница каждой грани R' состоит, по крайней мере, из трех ребер e_1, e_2, e_3 . Если они не образуют цикла, то существует, по крайней мере, четыре вершины v_1, v_2, v_3, v_4 на границе R' . Теперь G' содержит ребра, связывающие эти вершины, т. е. $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4$ (рис. 4.8), и делящие плоскость на четыре грани, граница каждой из которых включает

только три вершины. Но это есть дальнейшее разбиение R' , которая сама является гранью G' . Получили противоречие. Таким образом, e_1, e_2, e_3 образуют цикл и каждая грань G' ограничена циклом из трех ребер.

Следующие две леммы необходимы для доказательства леммы 4.15.

Лемма 4.13. G — обыкновенный граф, являющийся плоской триангуляцией и содержащий, по крайней мере, четыре вершины. Если uv_1, uv_2, \dots, uv_k — ребра, выходящие из v и расположенные в циклическом порядке (т. е. по направлению движения часовой стрелки), то ребра $C_v = (v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_1)$ принадлежат G и образуют цикл, отделяющий v от других вершин G .

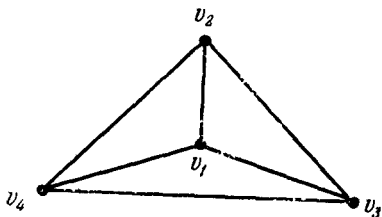


Рис. 4.8.

Доказательство. Достаточно доказать лемму в предположении, что v не лежит на границе бесконечной грани, содержащей требуемую точку в бесконечности, так как с помощью сферической проекции можно сделать так, чтобы v лежала на границе внутренней грани. Так как граф есть плоская триангуляция, то v должна лежать внутри некоторых циклов, и следовательно, существует внутренний цикл C'_v с вершинами v'_1, v'_2, \dots, v'_m , который включает v . Каждая последовательная пара вершин v'_i, v'_{i+1} лежит на границе треугольной грани, которая, следовательно, содержит третью вершину. Мы утверждаем, что $v' = v$ в противном случае цикл $(v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_iv', v'v'_{i+1}, \dots, v'_mv_1)$ содержит внутри себя v и лежит внутри C'_v , что противоречит сказанному выше. Следовательно, треугольные грани, смежные с C'_v , включают общую вершину v , а так как G является обыкновенным графом, то C'_v должен совпадать с C_v и лемма доказана.

Если v в лемме 4.13 (предполагается, что она лежит на внутренней грани R) и связанные с ней ребра удаляются, то образуется пустая область внутри C_v , и если затем v_1 соединить с v_3, \dots, v_{k-1} не пересекающимися

друг с другом ребрами, лежащими внутри C_v , то получившийся в результате граф \bar{G} может и не быть обыкновенным. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.14. Если граф \bar{G} не является обыкновенным, то G содержит цикл из трех ребер, который разделяет две вершины.

Доказательство. \bar{G} может быть обыкновенным только в том случае, если v_1 связана с некоторой вершиной v_i ($3 \leq i \leq k-1$) новым ребром и ребром, находящимся снаружи C_v . Цикл (v_1v, vv_i, v_iv_1) в графе G с ребром v_iv_1 , находящимся снаружи C_v , разделяет v_2 и v_k . Лемма доказана.

Лемма 4.15. Каждая плоская триангуляция обыкновенно плоского графа изоморфна прямолинейному графу.

Доказательство. Очевидно, лемма верна для графов с тремя вершинами. Предположим, она верна для графов с n вершинами, и пусть G будет графом с $n+1$ вершинами. Построим \bar{G} , как описывалось выше, при условии, что вершина v графа G находится на границе внутренней грани R . Бесконечная грань ограничена той же самой границей в графе \bar{G} , что и в графе G .

Если \bar{G} — обыкновенный граф, то по индуктивному предположению существует прямолинейный граф \bar{S} , изоморфный \bar{G} . Теперь нужно доказать, что вершина \bar{v} , соответствующая v , может быть выбрана таким образом, чтобы ее можно было связать отрезками прямых с требуемыми вершинами, не пересекая при этом другие отрезки. Рассмотрим цикл $\bar{C}_v = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\bar{v}_1)$ графа \bar{S} , соответствующий C_v в лемме 4.13, где \bar{v}_i в \bar{S} соответствует v_i в \bar{G} . Прямые линии $\bar{v}_i\bar{v}_{i+1}$ ($2 \leq i \leq k-1$) не проходят через \bar{v}_1 , иначе $\bar{v}_1\bar{v}_i$ и $\bar{v}_1\bar{v}_{i+1}$ имели бы общий отрезок. Таким образом, \bar{v}_1 принадлежит к одной из двух полуплоскостей, образуемых прямой $\bar{v}_i\bar{v}_{i+1}$ ($2 \leq i \leq k-1$), и пересечение этих полуплоскостей образует выпуклую грань с внутренними точками. Рассмотрим общую часть k этой грани и внутренней области \bar{C}_v . Отрезок, соединяющий произвольную точку k с граничной вершиной \bar{C}_v , лежит внутри \bar{C}_v , за исключением его граничной точки. Если бы отрезки $\bar{v}_1\bar{v}_3, \bar{v}_1\bar{v}_4, \dots, v_1v_{k-1}$ были удалены

из \bar{S} , то внутренняя область \bar{C}_v оказалась бы пустой. Выбирая точку \bar{v} внутри k и проводя отрезки $\bar{v}\bar{v}_1, \bar{v}\bar{v}_2, \dots, \bar{v}\bar{v}_k$, мы получим граф, изоморфный G . Если G не обыкновенный, то по лемме 4.14 в G существует цикл Δ из трех ребер, разделяющий две вершины. Цикл Δ вместе с наружными ребрами образует плоскую триангуляцию графа G_1 , а с внутренними ребрами — плоскую триангуляцию графа G_2 . Оба графа содержат самое большее n вершин и, следовательно, по индуктивному предположению они изоморфны прямолинейным графам \bar{S}_1 и \bar{S}_2 соответственно. В графе \bar{S}_1 внутренняя область цикла $\bar{\Delta}_1$, соответствующая Δ , оказывается пустой. С другой стороны, \bar{S}_2 лежит внутри цикла $\bar{\Delta}_2$, соответствующего Δ в \bar{S}_2 .

При соответствующем выборе аффинного преобразования $\bar{\Delta}_2$ можно отобразить на $\bar{\Delta}_1$ так, чтобы смежные грани в G отображались на смежные грани. В результате получим прямолинейный граф, изоморфный G . Теорема 4.10 доказана.

Многогранные графы

Читатель, незнакомый с терминологией следующих двух параграфов, может пропустить их, не теряя нити изложения.

Граф называется *многогранным*, если его вершины и ребра могут быть отождествлены с вершинами и ребрами выпуклого многогранника в евклидовом пространстве. При этом многогранник называется *реализацией* графа. Будем говорить, что граф является n -многогранным, если он соответствует n -мерному многограннику. Таким образом, граф является 1-многогранным тогда и только тогда, когда он оказывается полным графом из двух вершин; 2-многогранным тогда и только тогда, когда он представляет собой цикл; 3-многогранным тогда и только тогда, когда он представляет собой 3-связный граф (утверждение не столь очевидно, как предыдущие). Известно также, что каждый k -многогранный граф является k -связным и содержит подграф, который изоморфен с точностью до вершин степени 2 полному графу с $k+1$ вершинами (т. е. графу, который получается введением дополнительных вершин на ребрах этого

полного графа). Любой 3-связный подграф 3-многогранного графа снова является 3-многогранным. Это свойство не сохраняется при $k \geq 4$. Сформулированные условия не являются достаточными для многогранника, по крайней мере, с $k=4$ [25].

Полный граф с n вершинами является $(n-1)$ -многогранным, и соответствующий многогранник называется *симплексом*.

Интересно, что каждый полный граф с n вершинами ($n \geq 5$) может быть представлен 4-многогранным. Однако до сих пор не решены вопросы о том, существует ли для любого графа множество последовательных целых чисел k , при которых граф является k -многогранным, или можно ли объединить любые две реализации в заданном пространстве с помощью непрерывного семейства реализаций. Новые многогранные графы могут быть получены из соответствующих им многогранников с помощью: (1) двойственного многогранника, в котором роли граней изменены, т. е. k -мерной грани многогранника ставится в соответствие $(n-1)$ -мерная грань двойственного ему многогранника, причем соответствующие соотношения инцидентности сохраняются, (2) разрезания k -мерной грани n -многогранника новой, близкой к ней $(n-1)$ -мерной гранью, (3) объединения двух n -многогранников по общей грани, (4) образования выпуклой оболочки двух многогранников, имеющих возможно разную размерность и находящихся в асимметрических линейных пространствах; например, формирования пирамид, (5) взятия прямого (декартова) произведения двух многогранников, имеющих возможно различную размерность n и m ; например, образования призм. Полученный многогранник является $(n+m)$ -мерным.

4.3. Дополнительный граф

Рассмотрим обыкновенный граф с n вершинами. Дополнительный граф получается, если из полного (обыкновенного) графа с n вершинами вычеркнуть все ребра, содержащиеся в исходном графе. Граф является самодополнительным, если он изоморфен своим дополнением. Так, например, граф на рис. 4.9 самодополнительный.

Упражнение 4.7. Решить следующую задачу с помощью теории графов. Том, Дик и Гарри женаты на Джейн, Мэри и Сьюзен в указанном порядке. Каждая пара имеет по одному ребенку. Имена детей Эмилия, Алан и Майкл. Определить состав каждой семьи, используя следующую информацию: (1) дети Мэри и Гарри — две звезды в школьной футбольной команде, (2) Алан не является сыном Тома, (3) Сьюзен не является женой Дика.

Краткое указание. В полученном графе будет девять вершин, сгруппированных по три. Член каждой группы связан точно с одним членом каждой другой. Рассмотрите дополнительный граф, не учитывая ребер, соединяющих вершины одной и той же группы.

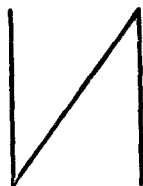


Рис. 4.9.

Прежде чем предложить вниманию читателя интересную теорему о дополнительных графах, рассмотрим формулу Эйлера

$$n - m + r = 2$$

и всегда выполняемые соотношения

$$3n \leq 2m, \quad n \geq 4$$

(не очень полезное соотношение, но оно потребуется здесь),

$$3r \leq 2m, \quad r \geq 4.$$

Если подставить второе неравенство в формулу Эйлера, то получим

$$n - \frac{3}{2}r + r \geq 2,$$

или $r \leq 2n - 4$. Подставляя в формулу Эйлера и производя упрощения, получим неравенство $m \leq 3n - 6$, которое справедливо для любого плоского графа. Следовательно, граф неплоский, если $m > 3n - 6$.

Теорема 4.16. Если G — граф с n вершинами и G' — его дополнительный граф, то: (1) при $n < 8$, по крайней мере, один из них плоский, (2) при $n > 8$, по крайней мере, один из них неплоский, и (3) при $n = 8$ первый или второй или сразу оба могут быть как плоскими, так и неплоскими.

Доказательство. Заметим, что для случая $n > 11$ имеем $m + \bar{m} = n(n-1)/2$, где \bar{m} — число ребер в G' . Если $\bar{m} \geq m$, то $\bar{m} \geq n(n-1)/4$, иначе $m \geq n(n-1)/4$.

В любом случае для $n=1$ мы имеем $n(n-1)/4=27,5$ и $3n-6=27$, откуда следует, что m или \bar{m} больше, чем $3n-6$, и теорема доказана. Для $n>11$ можно провести аналогичное доказательство.

Доказательство для случаев 9 и 10 здесь не приводится из-за сложности. С помощью перебора можно показать [36 а], что при $n=9$ каждый плоский граф с $3n-6$ ребрами имеет дополнительный граф, содержащий один из двух подграфов Понтрягина — Куратовского. Отсюда также следует, что графу с $n=10$ вершинами и $3n-6$ ребрами соответствует неплоский дополнительный граф, так как если мы удалим некоторую вершину вместе с инцидентными ей ребрами, то получим плоский граф с девятью вершинами, дополнительный граф которого в соответствии со сказанным является неплоским и содержится в дополнительном графе рассматриваемого графа с $n=10$ вершинами.

Прежде чем переходить к случаю $n=8$, рассмотрим граф для задачи с четырьмя пунктами обслуживания и четырьмя домами. Этот граф является неплоским, а его дополнительный граф, очевидно, плоский. Снова рассмотрим подграф Понтрягина — Куратовского 2-го типа с двумя изолированными вершинами. Он содержит 9 ребер, а его дополнение — 19 ребер, что превышает 18, т. е. максимально возможное число ребер в плоском графе с восемью вершинами. В заключение рассмотрим два concentрических квадрата. Пометим вершины внутреннего квадрата числами 1, 2, 3, 4, а вершины внешнего квадрата числами 5, 6, 7, 8 так, чтобы вершина 5 являлась ближайшей к 1, 6 — к 2, 7 — к 3, а 8 — к 4. Пары вершин должны быть связаны прямыми ребрами (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 8), (5, 6), (5, 8), (6, 7), (7, 8) и внешним ребром (6, 8). Полученный граф является плоским. Можно показать, что его дополнительный граф также является плоским.

Случай $n<8$ представляется читателю в качестве упражнений. При доказательстве полезно помнить, что если изолировать вершину графа, то его дополнение будет содержать большее число ребер.

Теорема 4.17. Если k и k' — хроматические числа графа G с n вершинами и его дополнительного графа

G' соответственно, то

$$2\sqrt{n} \leq k + k' \leq n + 1, \quad n \leq kk' \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Доказательство. Пусть n_i — число вершин графа G , которые будут окрашены i -м цветом. Тогда

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \text{и} \quad \max_i n_i \geq \frac{n}{k}.$$

Две вершины одного цвета в G связаны ребром в G' и, следовательно, будут окрашены в нем по-разному. Таким образом,

$$k' \geq \max_i n_i \geq \frac{n}{k} \quad \text{или} \quad kk' \geq n.$$

Теперь из

$$(k-k')^2 \geq 0$$

мы имеем

$$(k+k')^2 \geq 4kk'.$$

Это значит, что

$$k + k' \geq 2\sqrt{n}.$$

С помощью индукции по n покажем, что $k+k' \leq n+1$. Теорема справедлива для $n=1$. Предположим, что она справедлива для n вершин. Включим вершину v в полный граф, получаемый объединением G и G' . Так как v связана с n другими вершинами, то пусть m из них, которые включены в G , образуют граф H (с хроматическим числом h), а $n-m$, которые включены в G' , образуют граф H' (с хроматическим числом h'). Очевидно, что для раскраски H и H' мы можем использовать самое большее один дополнительный цвет, кроме цветов, использованных в G и G' . Таким образом, $h \leq k+1$, $h' \leq k'+1$ и $h+h' \leq n+3$.

Если действительно $h=k+1$, $h'=k'+1$ и вершина v вместе с инцидентными ребрами в H удаляется, то хроматическое число H уменьшится. В этом случае $m \geq k$ и $n-m \geq k'$, откуда $k+k' \leq n$ и снова $h+h' \leq n+2$.

Таким образом, индуктивная часть доказательства закончена.

Наконец, из $(k+k')^2 \geq 4k-1$ и из $(k+k') \leq n+1$, очевидно, следует, что

$$kk' \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Теорема доказана.

4.4. Раскраска ребер графа

Рассмотрим полный граф с n вершинами (который, очевидно, неплоский при $n \geq 5$) и предположим, что некоторые его ребра окрашиваются в красный цвет, а оставшиеся ребра — в голубой. Найдем наименьшее число треугольников, все три стороны которых будут окрашены при этом одним цветом (монохроматические треугольники). Эта задача была впервые решена Гудманом [23], но мы приведем здесь более простое доказательство, предложенное Саувом [40].

Теорема 4.18. Пусть в полном графе с n вершинами b — число треугольников с тремя голубыми сторонами, а r — соответствующее число треугольников с красными сторонами; тогда число монохроматических треугольников $(b+r)$ удовлетворяет неравенству

$$b+r \geq \begin{cases} \frac{s(s-1)(s-2)}{3}, & \text{если } n=2s, \\ \frac{2s(s-1)(4s+1)}{3}, & \text{если } n=4s+1, \\ \frac{2s(s+1)(4s+1)}{3}, & \text{если } n=4s+3, \end{cases}$$

где s — неотрицательное целое число. Граница является точной, т. е. равенство выполняется для каждого n и некоторого (красно-голубого) раскрашивания.

Доказательство. Припишем каждой паре ребер, пересекающихся в вершине, вес 2, если они окрашены в один цвет, и 1, если в разные цвета. Вес некоторой вершины равняется сумме весов пар ребер, пересекающихся в этой вершине. Вес треугольника есть сумма весов пар ребер, пересекающихся в каждой его вершине. В общем случае, каждая пара ребер принадлежит к единственному треугольнику и, следовательно, сумма весов всех треугольников w равняется сумме

весов всех вершин. Вес монохроматического треугольника равен шести, а всех остальных — нулю. Отсюда $b+r=w/6$. Задача теперь состоит в том, чтобы определить наименьшее значение $w/6$ при всех возможных раскрасках. Если $n=2s$, то вес каждой вершины минимален тогда, когда максимальное число пар ребер в вершине имеет различный цвет. Пусть теперь каждая вершина имеет $2s-1$ ребер. Если в вершине v пересекаются t ребер одного цвета, то здесь же будет пересекаться $2s-1-t$ ребер другого цвета и вес v определяется как

$$2C_t^2 + 2C_{2s-1-t}^2 - t(2-1+t),$$

где C_t^2 — число сочетаний из t вершин по две, т. е.

$$C_t^2 = \frac{t!}{(t-2)! 2!}.$$

Аналогично,

$$C_{2s-1-t}^2 = \frac{(2s-1-t)!}{(2s-t-3)! 2!}.$$

Легко проверить, что найденный вес минимален при $t=s$.

Таким образом, общий вес всех вершин удовлетворяет неравенству

$$w \geq 2s(s-1)(s-2)$$

и

$$r + b = \frac{w}{6} \geq \frac{s(s-1)(s-2)}{3}.$$

Точно так же можно провести анализ для случая $n=4s+1$ при $2s$ ребрах каждого цвета в каждой вершине. Если $n=4s+3$, то $2s+1$ не может быть числом ребер каждого цвета в каждой вершине, так как общая величина $1/2(4s+3)(2s+1)$ не является целочисленной. Следовательно, $4s+2$ вершин имеют $2s+1$ ребер каждого цвета, а оставшаяся вершина имеет $2s$ ребер одного цвета и $2s+2$ другого.

Для того чтобы доказать равенство при $n=2s$, приведем рассуждения Лордена [32].

Пометим вершины v_1, \dots, v_n и окрасим в красный цвет ребра, соединяющие пары вершин, сумма индексов

которых четна, и в голубой цвет, если эта сумма нечетна. Вершины, имеющие четные индексы, соединяются красными ребрами, совокупность которых называется красной сетью. Вершины с нечетными индексами (превышающими четные на единицу, если n нечетно) также соединятся попарно красными ребрами и также образуют красную сеть. Каждый треугольник должен содержать, по крайней мере, одно ребро, принадлежащее одной из двух красных сетей, и, следовательно, не существует треугольника, в котором все три ребра были бы окрашены в голубой цвет. При $n=2s$ каждая из двух красных сетей имеет s вершин и, следовательно, C_s^3 красных треугольников, а всего в графе оказывается $2C_s^3$ красных треугольников.

Покажите, что при $n=2s+1$ существует $C_s^3 + C_{s+1}^3$ красных треугольников. Доказательство этого равенства при нечетном n дано в работе [40].

Теорема 4.19. В любом полном графе с n вершинами

$$b + r = C_n^3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i(n-1-I_i),$$

где I_i — число вершин, с каждой из которых i -я вершина связана красными ребрами [32].

Доказательство. Вершине v_i инцидентны I_i красных ребер и $n-1-I_i$ голубых ребер. Следовательно, существует $I_i(n-1-I_i)$ пар разноцветных ребер, причем каждая пара образует две стороны разноцветного треугольника. Так как третье ребро треугольника либо красное, либо голубое, то две оставшиеся вершины будут иметь красно-голубые пары. Следовательно, число разноцветных треугольников равно

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i(n-1-I_i).$$

Общее число треугольников C_n^3 равно сумме числа одноцветных треугольников $b+r$ и числа разноцветных треугольников. Таким образом, теорема доказана. Аналогичные задачи могут возникнуть при раскраске графа в несколько цветов, однако в этом случае не существует столь же простых теорем.

4.5. Раскраска граней и вершин. Задача о четырех красках

Задача о четырех красках состоит в доказательстве возможности раскраски любого плоского графа в четыре цвета так, чтобы любая пара смежных граней имела разные цвета.

Не меньший интерес представляет доказательство невозможности такой раскраски. (Грани, пересекающиеся в вершинах, не считаются смежными.) Необходи-

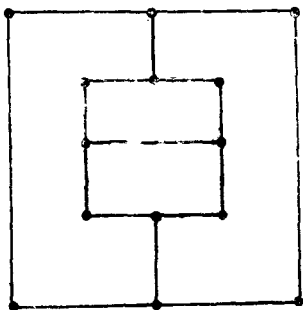


Рис 4.10.

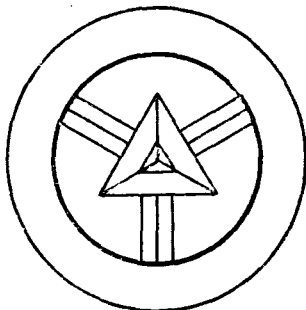


Рис 4.11.

мость четырех цветов иллюстрируется рис. 4.10. Гипотеза четырех красок была впервые высказана в лекциях Мёбиуса в 1840 г. и стала хорошо известной благодаря Де Моргану, который получил ее через Ф. Гутри (*Franci Gutrie*) приблизительно в 1850 г. В 1878 г. Келей отмечал, что ему не удалось получить строгого доказательства гипотезы. В 1890 г. Хивуд опроверг ошибочное доказательство, предложенное Кемпс (1879), и доказал достаточность пяти цветов. Прекрасный обзор ранних взглядов на задачу приводится в работе [2].

Упражнение 4.8. Раскрасить четырьмя цветами карту, приведенную на рис. 4.11.

З а м е ч а н и е. Если степень каждой вершины графа не более k , то интуитивно понятно, что такой граф может быть раскрашен $(k+1)$ цветом, так как ни одна вершина не связана более чем с k другими вершинами. Но возникает вопрос, можно ли при этом уменьшить число цветов раскраски? В полном графе с $(k+1)$ вершинами степень каждой вершины равна k , но для раскраски такого графа требуется $(k+1)$ цветов.

Оказывается, что для всех графов максимальной степени k , исключая графы, которые содержат одну компоненту, являющуюся полным графом, достаточно меньшего числа цветов. Этот результат сформулирован в теореме Брукса [10], применимой не только к плоским графам. Теорема приводится без доказательства.

Теорема 4.20. Пусть G — обыкновенный граф с n вершинами, в котором каждой вершине инцидентны не более чем k ребер ($k > 2$). Предположим, что в G не существует связной компоненты, которая является полным графом с $k+1$ вершинами. Тогда вершины G можно раскрасить k цветами так, чтобы не было двух смежных вершин, окрашенных одним цветом.

Число смежных граней

Рассмотрим процесс построения граней на плоской карте, при котором каждая грань смежна с возможно большим числом других граней. Начнем с двух смежных граней A и B . Для того чтобы построить грань C , соединим ребром точку на границе A с точкой на границе B .

Для построения грани D соединяем границу C с границей A так, чтобы B была смежна с D и т. д. Продолжая эту операцию n раз, мы получим $n+3$ граней, так как в их число мы включаем также внешнюю грань. Каждый раз, когда мы рисуем дугу, мы получаем три дополнительные дуги, — одну новую и две другие, получаемые при делении на два отрезка двух построенных ранее дуг (рис. 4.11а).

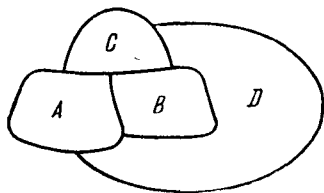


Рис. 4.11а.

Таким образом, общее число отрезков, на которые делятся дуги, равно $3n+3$, включая три исходные дуги между A и B . Так как каждая дуга соединяет две грани, то в общей сложности мы имеем $6n+6$ смежных граней. Среднее число граней

смежных с некоторой гранью, равно $(6n+6)/(n+3) = 6 - 12/(n+3)$. Заметим, что процедуру можно было бы изменить, построив сначала A и B , а затем выполнить оставшиеся $(n-2)$ операции. При этом общее число

граней, смежных с заданной, оказывается равным $6 - 12/n + 1$ при общем числе смежных граней $n + 1$ (включая внешнюю грань). Таким образом, среднее число граней, смежных с любой гранью, в произвольной карте меньше, чем 6. Заметим, что мы говорим о среднем числе. Реальные числа смежных граней могут, конечно, оказаться большими, чем средние, для одних граней и меньшими для других.

Приведем другое доказательство того, что среднее число ребер, ограничивающих грани карты, меньше шести.

Используем формулу Эйлера, в которой не учтена внешняя грань, т. е. $n - m + r = 1$ и отношение $3n \leq 2m$. Отсюда следует, что $m \leq 3r - 3$. Если грани нумеруются индексами $i = 1, \dots, r$ и если число ребер i -й грани обозначить через e_i , то

$$\sum_{i=1}^r e_i < 2m \leq 6r - 6,$$

так как не все ребра принадлежат двум граням, а только некоторые. Следовательно,

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r e_i < 6 - \frac{6}{r} < 6.$$

Отсюда получаем, что существует, по крайней мере, одна вершина со степенью 5 или меньше.

Другое доказательство справедливости этого факта содержится в доказательстве теоремы 4.21.

Теорема о достаточности пяти красок и другие теоремы

Рассмотрим теоремы, частично иллюстрирующие, как далеко удалось продвинуться в доказательстве гипотезы о четырех красках.

Теорема 4.21. Для раскраски граней плоской карты достаточно пяти цветов.

Доказательство. Докажем теорему по индукции на двойственном графе, т. е. будем раскрашивать вершины двойственного графа. Предположим, что теорема верна для графа с $n - 1$ вершинами. Тогда граф содержит, по крайней мере, одну вершину v степени ≤ 5 . Ес-

ли это не так, то, используя соотношение между числом граней и ребер $3r \leq 2n$ и $6n \leq 2m$ (т. е. предполагая обратное, что каждая вершина имеет, по крайней мере, степень 6) и подставляя в формулу Эйлера, получим противоречие: $0 = 2m/6 - m + 2n/3 \geq 2$. Теперь если удалить v из графа, то получится граф, который по индуктивному предположению может быть раскрашен пятью цветами. Рассмотрим худший случай, когда пять вершин v_1, \dots, v_5 смежны с v (пусть они упорядочены в направлении движения часовой стрелки).

Предположим, что при раскрашивании графа без v (когда v удалена вместе с инцидентными ребрами) каждой из этих вершин поставлен в соответствие свой цвет (в противном случае один из оставшихся цветов может быть поставлен в соответствие v и теорема доказана). Пусть соответствующими цветами будут c_1, \dots, c_5 . Покажем теперь, что можно перераспределить цвета так, чтобы вершина v получила цвет, отличный от цветов вершин, с которыми она смежна, т. е., по крайней мере, двум из вершин v_1, \dots, v_5 будет приписан один и тот же цвет. Рассмотрим подграф, вершины которого окрашены цветами c_1 и c_3 (цвета соответствуют вершинам v_1 и v_3). Если v_1 и v_3 не соединены (т. е. не существует пути между ними) в этом подграфе, то вершины, входящие в компоненту, которая содержит v_1 , окрашенные в c_1 , могут быть перекрашены в c_3 , а вершины этой же компоненты, окрашенные в c_3 , могут быть перекрашены в c_1 . Таким образом, v_1 и v_3 получают цвет c_3 и v может быть окрашена в c_1 . Если же v_1 и v_3 связаны в подграфе, содержащем цвета c_1 и c_3 , то, например, v_2 и v_4 не могут быть соединены в подграфе вершин, окрашенных в c_2 и c_4 . В противном случае связывающий их путь должен пересекать путь, связывающий v_1 и v_3 , и вершине, в которой эти пути пересекаются, будет назначен один цвет из одного и второй цвет из другого подграфа. Тогда подграф, который включает v_2 и v_4 , может быть перекрашен описанным выше способом. При этом v_2 и v_4 получают одинаковый цвет. Освободившийся цвет ставится затем в соответствие v .

Теорема 4.22. Для раскраски граней, получаемых пересечением прямых линий на плоскости, достаточно двух цветов.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Плоскость делится прямой линией на две грани, и следовательно, в этом случае достаточно двух цветов. Когда проводится вторая линия, то для раскраски новой карты нужно изменить цвета с одной стороны новой линии. Предположим, что теорема верна для $n-1$ линии. Тогда если после проведения n -й линии поменять цвета всех граней с одной стороны от нее, то мы получим граф, раскрашенный двумя цветами.

Теорема 4.23. Необходимое и достаточное условие того, что карта может быть правильно раскрашена (т. е. грани с общим ребром будут окрашены в разные цвета) двумя цветами, состоит в следующем: каждая вершина имеет четную степень, которая больше или равна 2.

Доказательство. Грани плоского графа могут быть раскрашены двумя цветами тогда и только тогда, когда вершины двойственного ему графа могут быть раскрашены двумя цветами, т. е. когда двойственный граф является двудольным. Используя тот факт, что дерево является двудольным графом, и рассматривая его хорды, можно показать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда каждый цикл содержит четное число ребер. В свою очередь в плоских графах каждый цикл будет содержать четное число ребер тогда и только тогда, когда каждый цикл, ограничивающий некоторую грань, обладает этим свойством. Читателю рекомендуется провести детальное доказательство этого шага. Но это эквивалентно утверждению, что каждая вершина исходного графа имеет четную степень.

Упражнения

4.9. Доказать, что карта, полученная изображением некоторого конечного числа окружностей на плоскости, может быть раскрашена двумя цветами.

4.10. Дайте краткое индуктивное доказательство того, что шесть цветов достаточно для раскраски (правильной) любой плоской карты. Используйте тот факт, что если каждая вершина имеет степень, по меньшей мере 3, то, по крайней мере, одна грань имеет самое большое пять сторон.

4.11. Показать, что если каждая вершина карты имеет степень, по крайней мере, равную 3, то число ребер и граней удовлетворяет неравенству $3r \geq 6 + n$.

4.12. Используя результат упражнения 4.11, показать, что если каждая вершина имеет степень, по крайней мере, равную 3, и если

число граней меньше 12, то найдется хотя бы одна грань, ограниченная 4 или меньшим числом сторон.

4.13. Доказать, что четырех цветов достаточно для раскраски любой карты, которая содержит менее чем 12 граней и каждая вершина которой имеет степень, по крайней мере, равную 3.

Потоковым отношением (отношением потоков) цикла)* в ориентированном графе называется отношение числа дуг, ориентированных в одном направлении, к числу дуг, ориентированных в другом направлении, где знаменатель не должен быть больше числителя [35]. Заметим, что это отношение может быть равно бесконечности.

Теорема 4.24. Необходимое и достаточное условие возможности раскраски вершин графа k цветами, состоит в том, что существует ориентация ребер графа, при которой потоковое отношение каждого цикла не превышает $k-1$.

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим, что граф раскрашивается k цветами, пронумерованными числами $0, 1, \dots, k-1$. Пусть каждая дуга направляется из вершины с меньшим номером цвета к вершине с большим номером. Тогда каждый цикл имеет потоковое отношение, которое меньше или равно $k-1$. Это следует из того, что наибольшее потоковое отношение получается при ориентации наибольшего возможного числа дуг в одном направлении и наименьшего числа дуг — в обратном. Такое отношение получится, например, при последовательном раскрашивании вершин в возрастающем порядке и повторении процесса после того, как все цвета использованы. Таким образом, каждое множество $(k-1)$ дуг ориентируется в одном направлении и только одна дуга ориентируется в противоположном направлении.

Для доказательства достаточности предположим, что граф связан, и пусть потоковое отношение для каждого цикла меньше или равно $k-1$. Выберем начальную вершину v_0 , окрасим ее в цвет 0 и перейдем к рассмотрению некоторой другой вершины v_p .

Определим вспомогательную целочисленную функцию $g(v_p)$, значения которой по $\text{mod } k$ дают требуемую рас-

*) В оригинале «flow ratio». (Прим. ред.)

краску. В качестве предварительного шага, для определения $g(v_p)$, введем понятие дохода цены из дуг, при движении вдоль нее от v_0 к v_p . Пусть он равен числу дуг, проходимых в направлении их ориентации, минус число дуг, проходимых в обратном направлении, умноженное на $(k-1)$.

Чтобы убедиться в том, что цепь с максимальным доходом существует, заметим, что если цепь не является простой и, следовательно, содержит цикл, то этот цикл не может увеличивать доход из-за условия, наложенного на потоковое отношение, и, следовательно, его можно удалить из цепи. При этом доход останется прежним или увеличится. Если вновь полученная цепь опять не является простой, то удалим очередной цикл и т. д. до тех пор, пока не получим простую цепь. Так как число простых цепей конечно, то среди них существует цепь с максимальным доходом. Если каждой вершине цепи, выходящей из v_0 , поставить в соответствие максимальный доход $g(v_p)$, то для двух вершин v_{p_1} и v_{p_2} , связанных дугой, мы получим

$$0 \leq |g(v_{p_1}) - g(v_{p_2})| < k,$$

так как если абсолютная величина этой разности превышает $k-1$, то максимальный доход на одной из этих вершин мог бы быть найден как больший доход минус потери, равные $k-1$ вдоль соединяющей дуги. Таким образом, значения $g(v_p)$ по $\text{mod } k$ определяют раскраску вершин в k цветов, так как значения g для смежных вершин отличаются менее чем на k и, следовательно, не могут дать одно и то же целое число по $\text{mod } k$. Гипотеза о четырех красках может быть теперь сформулирована следующим образом: ребра плоского графа можно ориентировать таким образом, что потоковое отношение каждого цикла будет меньше или равно 3.

Тривалентные карты. Однородные карты степени три

Прежде чем показать возможность сведения задачи раскраски граней любой карты к задаче раскраски граней однородной карты степени 3, покажем, что вершины исходной карты, степень которых отличается от 3, могут

быть сведены к вершинам степени 3. Это сведение выполняется заменой любой вершины степени, не равной 3, замкнутой многоугольной гранью с числом вершин, равным числу ребер, инцидентных заменяемой вершине. Каждая новая вершина инцидентна одному из этих ребер и, следовательно, имеет степень, равную 3. В результате получаем однородную карту степени 3 (рис. 4.12).



Рис. 4.12.

Раскраска исходной карты получается после раскраски новой стягиванием каждой новой грани назад к ее первоначальной вершине. Таким образом, если четыре цвета достаточны для раскраски однородной карты степени 3, то они также достаточны для раскраски исходной карты.

Будем говорить, что грани или ребра плоского графа *раскрашены правильно*, если им поставлены в соответствие цвета таким образом, что нет двух смежных граней (или ребер), имеющих один и тот же цвет.

Следующая теорема, которая в основном принадлежит Тейту и рассмотрена в работах [3] и [34], связывает задачу о раскраске четырьмя цветами граней плоского однородного графа степени 3 с задачей о раскраске его ребер тремя цветами.

Теорема 4.25. Если G плоский однородный граф степени 3, являющийся 2-связным (т. е. графом без сочленений), то грани могут быть правильно раскрашены четырьмя цветами тогда и только тогда, когда ребра G могут быть правильно окрашены тремя цветами.

Доказательство. Предположим, что грани графа правильно раскрашены четырьмя цветами a, b, c и d . Поставим в соответствие каждому ребру G цвета 1, 2 или 3 в зависимости от цветов граней, которые его ограничивают.

Воспользуемся следующей таблицей:

	a	b	c	d
a	—	1	2	3
b	1	—	3	2
c	2	3	—	1
d	3	2	1	—

(Заметим, что предположение о том, что G не имеет сочленений, гарантирует нам, что каждое ребро на самом деле граничит с двумя различными гранями.) Два смежных ребра никогда не могут оказаться окрашенными одним и тем же цветом, так как в этом случае имелись бы две смежные, одинаково окрашенные грани, что противоречит условию теоремы.

Предположим обратное, что ребра графа правильно раскрашены цветами 1, 2 и 3. Подграф, определяемый ребрами, окрашенными в цвета 1 и 2, является однородным степени 2, следовательно, его грани могут быть раскрашены двумя цветами a и b (почему?). Подобным образом однородный граф степени 2, определенный ребрами, раскрашенными цветами 1 и 3, может быть раскрашен двумя цветами c и d . После того как два последних графа совмещены, каждая грань исходного графа получила в соответствие одну из четырех пар цветов ac , ad , bc , bd . Если каждой паре поставить в соответствие один определенный цвет, то G окажется правильно раскрашенным четырьмя цветами. Теорема доказана.

Теорема 4.25 вместе с теоремой 4.26 устанавливает еще одно свойство задачи о раскрашивании четырьмя красками регулярного графа степени 3. Это свойство выражается в терминах чисел, поставленных в соответствие вершинам графа, и впервые было подмечено Хивудом [27]. (См. также [4], гл. 1 и [3], гл. 4.)

Теорема 4.26. Пусть G — плоский однородный 2-связный граф степени 3. Тогда ребра G могут быть правильно раскрашены тремя цветами тогда и только тогда, когда каждой вершине v может быть поставлен в соответствие коэффициент $k(v)$, равный $+1$ или -1 , таким образом, что

$$\sum k(v) \equiv 0 \pmod{3},$$

где суммирование осуществляется по вершинам, расположенным на границе любой грани G .

Схема доказательства. Предположим, что ребра G правильно раскрашены цветами 1, 2 и 3. Припишем каждой вершине v коэффициент $+1$ или -1 , в зависимости от того, в каком порядке 1, 2, 3 или 1, 3, 2 встречаются цвета ребер, инцидентных v при движении вокруг v по часовой стрелке. Начнем теперь с любого ребра e и будем двигаться по ребрам, ограничивающим некоторую грань, до тех пор, пока снова не встретится ребро e . Будем определять цвет каждого последующего ребра с помощью цвета предшествующего ребра и коэффициента их общей вершины. Для того чтобы в конечном счете цвет, определенный для e , совпадал с ее исходным цветом, должно выполняться условие сравнения по mod 3.

Предположим обратное, что каждой вершине поставлен в соответствие коэффициент таким образом, что условие сравнения по mod 3 выполняется для любой грани. Назначим цвет 1 произвольному ребру, а оставшиеся ребра окрасим следующим образом: Если неокрашенное ребро e смежно с окрашенным ребром f , то назначим ему цвет e , который соответствует цвету f и коэффициенту их общей вершины, используя при этом предложенное ранее условие движения по часовой стрелке. Условие сравнимости по mod 3 гарантирует правильность получаемой при этом раскраски, так как оно позволяет раскрашивать ребра в любом порядке без возникновения противоречий в процессе раскраски. На этом набросок доказательства заканчивается.

Теоремы 4.25 и 4.26 могут быть также рассмотрены в двойственных понятиях для плоских триангуляций (триангуляционных графов), т. е. плоских графов, в которых каждая грань (включая бесконечную грань) ограничена точно тремя ребрами. Граф, двойственный триангуляционному графу (плоской триангуляции), является 2-связным, плоским и однородным степени 3; верно и обратное. Правильная 3-цветная раскраска ребер соответствует в терминах двойственного графа такой 3-цветной раскраске ребер плоской триангуляции, при которой три ребра, ограничивающие любую грань, будут иметь разные цвета.

Упражнения 4.14. Переформулируйте условие сравнения по mod 3 теореме 4.26 применительно к плоским триангуляциям (триангуляционным графам).

Теорема 4.27. (теорема о трех красках). Грани однородной карты степени 3 могут быть раскрашены тремя цветами тогда и только тогда, когда каждая грань ограничена четным числом ребер.

Доказательство. Необходимость доказывается индукцией по числу граней с использованием доказанного в теореме 4.21 факта о том, что существует, по крайней мере, одна вершина степени не более чем 5. В двойственном графе это означает, что существует, по крайней мере, одна грань, ограниченная самое большее пятью ребрами, так что существует грань, ограниченная точно двумя или четырьмя ребрами. Пусть в случае двухреберной границы R_1 и R_2 будут грани, смежные с рассматриваемой. Если мы удалим одно из двух ограничивающих ребер, удалив тем самым рассматриваемую грань, и устроим вершины степени 2, заменяя их ребра одним ребром, которое инцидентно смежным вершинам, то согласно индуктивному предположению (индукция по числу граней) полученную карту можно окрасить тремя цветами. Введение отброшенной грани требует третьего цвета, который не совпадает ни с одним цветом граней R_1 или R_2 . Случай, когда некоторая грань R ограничена четырьмя ребрами и смежна с гранями R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , требует удаления двух противоположных ребер, а также исключения четырех вершин степени 2. Предположим, что удалены ребра, ограничивающие грани R_1 и R_3 . Нетрудно показать, что все получившиеся грани имеют четное число ребер и что полученная карта все еще является однородной степени 3 с числом граней, уменьшенным на два. Первоначально грань R_1 имела четное число соседних граней, учитывая R . При раскраске усеченного графа две грани, соседние с R_1 , которые являются также соседними с R , как R_2 и R_4 , обязательно получают один цвет, так как граням, соседним с R_1 , должно быть попеременно назначено два цвета. R_1 и R_3 также получают один цвет, так как они являются частью одной грани в приведенном графе. После возвращения двух удаленных ребер грань R может быть окрашена третьим, оставшимся цветом.

Чтобы доказать достаточность, предположим, что R ограничена нечетным числом ребер и, следовательно, она имеет нечетное число соседних граней. Соседние грани должны быть поочередно раскрашены двумя цветами, отличными от цвета, назначенного R , что невозможно.

Упражнение 4.15. Сформулировать предыдущую теорему для двойственного графа и доказать ее.

Хроматические полиномы

Пусть $P_n(\lambda)$ — число способов, которыми карта с n гранями, покрывающая сферу, может быть раскрашена при числе цветов, меньшим или равным λ . В гипотезе о четырех красках утверждается, что 4 не является корнем ни одного из уравнений $P_n(\lambda) = 0$. Две раскраски существенно отличаются друг от друга, если ни одна из них не может быть получена из другой перестановкой цветов. Если пренебречь возможной перестановкой цветов и если m_i (т. е. $1, \dots, n$) — число способов раскраски карты точно i цветами, то существует $m_i \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-i+1)$ способов раскраски карты i цветами из набора λ цветов. Очевидно, общее число способов раскраски определяется следующим полиномом n -й степени, называемым хроматическим полиномом:

$$P_n(\lambda) = m_1 \lambda + m_2 \lambda(\lambda-1) + \dots + m_n \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1).$$

Биркгоф [4], определив значения m_i , предложил выражение для $P_n(\lambda)$ в явном виде

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k (i, k),$$

где (i, k) — число способов, которыми карта с n -гранями разбивается на подкарты с i гранями с помощью k простых или множественных соединений граней (т. е. слиянием двух или большего числа граней при удалении ребер). Таким образом, $(i, k) = 0$ для $k > n-i$, и по определению, $(n, 0) = 1$, $(i, 0) = 0$ для $i < n$. При этом $(i, n-i)$ — число способов получения $n-i$ последовательных простых соединений граней. Таким образом, полагая $n=3$, мы получим $(2, 1) = 3$; $(1, 1) = 1$; $(1, 2) = 3$ и

$$P_3(\lambda) = (3, 0)\lambda^3 - (2, 1)\lambda^2 + [-(1, 1) + (1, 2)]\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Упражнения

4.16. Нарисуйте карту из пяти граней, образованную кольцом из трех граней, внутренней и внешней гранью. Показать, что

$$\begin{aligned} (4,1) &= 9, & (3,1) &= 22, & (3,2) &= 51, \\ (2,1) &= 14, & (2,2) &= 125, & (2,3) &= 150, \\ (1,1) &= 1, & (1,2) &= 45, & (1,3) &= 176, & (1,4) &= 150. \end{aligned}$$

$$\text{и } P_5(\lambda) = \lambda^5 - 9\lambda^4 + 29\lambda^3 - 39\lambda^2 + 18\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

Биркгоф [5] показал также, что для карты на сфере

$$P_n(\lambda) \geq \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^{n-3} \quad (n \geq 3, n \neq 4).$$

Это, очевидно, справедливо для $\lambda = 1, 2, 3$ и для $\lambda > 4$ при $n = 3, 4$. Карта называется *максимальной*, если каждая ее грань соприкасается (по ребрам) с наибольшим возможным числом граней, т. е. не существует другой карты с той же самой смежностью соответствующих граней и дополнительной местной смежностью. Необходимые и достаточные условия, при которых карта с числом граней $n \geq 3$ будет максимальной, состоят в том, что все ее грани должны представлять собой простые связные области (т. е. гомеоморфны кругу), вершины должны иметь степень 3 и ни одна пара граней не должна касаться друг друга более одного раза. Количество смежностей в такой карте равно $3n - 6$.

Карта называется *неприводимой*, если все ее грани — связные области, любые две смежные грани образуют простую связную область и любые три грани, которые попарно смежны, образуют простую связную область вокруг вершины степени 3 [8]. Для такой карты

$$P_n(\lambda) = \frac{\prod P_{n_i}(\lambda)}{\lambda^{\alpha + \beta + \gamma + 1} (\lambda - 1)^{\beta + \gamma} (\lambda - 2)^\gamma} \quad (n_i < n),$$

где полиномы $P_{n_i}(\lambda)$ относятся к неприводимым картам, и их число $\alpha + \beta + \gamma + 1$, а $n = \sum n_i - \alpha - 2\beta - 3\gamma$.

Полная характеристика $P_n(\lambda)$ для различных значений λ приводится в работах [8] и [9].

4.6. Графы и поверхности

Там, где строгие определения не могут существенно улучшить понимания изучаемого материала, часто избегают строгого определения понятия поверхности, апел-

лируя к интуиции читателя. Такой же точки зрения мы будем в общем придерживаться и здесь, но для любознательных читателей мы все же приведем некоторые определения, которые требуют знакомства с понятиями из топологии, предмета, дающего основу для понимания многих новых математических понятий.

Взаимно однозначное преобразование, которое вместе со своим обратным является непрерывным, называется *гомеоморфизмом*. Примером гомеоморфизма является непрерывная деформация пирамиды в сферу и наоборот. Заметим, что отношение гомеоморфности между сферой и тором установить невозможно, так как последний имеет отверстие. *n -мерное топологическое многообразие* или просто *n -многообразие* есть связное локально компактное топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную n -мерному евклидову пространству [1].

Если многообразие компактно, то оно называется *замкнутым*. Например, n -мерная сфера. В противном случае оно *незамкнутое*. Замкнутое двухмерное многообразие, гомеоморфное многограннику, называется *замкнутой поверхностью*. Известно, что каждое замкнутое двумерное многообразие гомеоморфно некоторому многограннику. Примером замкнутой поверхности является двумерная сфера. Плоскость является незамкнутой поверхностью.

Геометрический n -мерный симплекс σ^n ($n > 0$) есть множество точек $X = \{x_i\}$ ($i = 1, \dots, n$), определенных с помощью $n+1$ линейных независимых точек P_0, \dots

\dots, P_n следующим образом: $x_i = \sum_{j=0}^n a_j p_{ij}$, где $\sum_{j=0}^n a_j = 1$,

$0 < a_j < 1$, $j = 0, \dots, n$ и p_{ij} есть i -я координата $i = 1, \dots, \dots, n$, p_j ($j = 0, \dots, n$). n -симплекс замкнут, если выполняется условие $0 \leq a_j \leq 1$, $j = 0, \dots, n$.

Геометрический симплициальный комплекс K есть конечное множество непересекающихся n симплексов, $n = 0, \dots, p$, в n -мерном евклидовом пространстве таких, что если симплекс принадлежит комплексу, то ему принадлежат и все его грани и два различных симплекса не могут иметь полностью совпадающих граней. Размерность комплекса есть p . Многогранник есть точечное множество, объединяющее все симплексы комп-

лекса K и, следовательно, множество точек, принадлежащих некоторому симплексу в K .

Поверхность S является *неориентируемой*, если существует некоторая точка, вокруг которой устанавливается направление вращения, и можно двигать точку по поверхности, соблюдая одну и ту же ориентацию относительно точки задания вращения, а затем вернуться в начальное положение с обратным ощущением направления вращения. Если не существует такой точки, то поверхность называется *ориентируемой*.

Если правый конец прямоугольника, изображенного на рис. 4.13, повернуть наполоборота и затем соединить с левым концом, то мы получим ленту, отличающуюся от обычного кольца, выполненным полуоборотом. Это так называемый *лист Мёбиуса*. Заметим, что он является односторонней поверхностью, т. е. начав

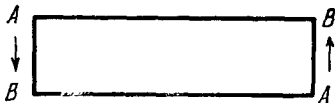


Рис. 4.13.

свое движение с некоторой точки поверхности, мы можем вернуться в нее, не пересекая при этом края поверхности. Нетрудно видеть, что лист Мёбиуса является неориентируемой поверхностью. С другой стороны, сфера и плоскость являются примерами двусторонних ориентируемых поверхностей.

Картой называется граф вместе с поверхностью, содержащей этот граф, ребра которого пересекаются только в их граничных точках.

Фактически формула Эйлера применима к многогранникам в трехмерном пространстве. В этом случае мы имеем $V - E + F = 2$, где V — число вершин, E — число ребер и F — число граней. Доказательство получается путем отбрасывания одной из граней и растягивания многогранника на плоскости без пересечения его ребер. Доказательство проводится точно так же, как в случае плоского графа, за исключением того, что внешняя грань не учитывается. Вместо нее вводится недостающая грань, которая была отброшена.

Следующая теорема, касающаяся многогранников, приводится здесь из-за сходства рассуждений, применяемых при ее доказательстве и доказательстве теорем теории графов.

Теорема 4.28. Каждый замкнутый многогранник имеет, по крайней мере, две грани с одинаковым числом ребер.

Доказательство. Пусть e_i — число ребер i -й грани, причем грани упорядочены так, что $e_i \leq e_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, r-1$) [31], где r — число граней. Если ни одна пара граней не содержит одинакового числа ребер, то $e_{i+1} - e_i \geq 1$ для всех i . Таким образом,

$$e_r - e_1 = \sum_{i=1}^{r-1} (e_{i+1} - e_i) \geq r - 1.$$

Так как $e_i \geq 3$, то мы имеем $e_r \geq r+2$, т. е. r -я грань смежна, по крайней мере, с $r+2$ гранями, что невозможно.

Замечание 1. Можно доказать более сильное утверждение, что если k — наименьшее число ребер грани, то существует, по крайней мере, k индексов i , для которых $e_i = e_{i+1}$.

Замечание 2. Формула Эйлера может быть обобщена на многогранник в n -мерном пространстве, если обозначить через F_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) число граней i -й размерности. Например, F_0 — число вершин. В этом случае формула Эйлера будет иметь вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F_i = 1 - (-1)^n,$$

где правая часть равна 0 или 2 в зависимости от четности n .

Возвращаясь в трехмерное пространство, заметим, что формула Эйлера для поверхностей с дырками имеет вид

$$V - E + F = 2 - 2p,$$

где p — число независимых дырок, называемое *родом поверхности*. Род поверхности — это наибольшее число простых замкнутых кривых на поверхности, которые не разъединяют поверхность. Сфера является поверхностью нулевого рода, так как любая замкнутая кривая на этой поверхности разъединяет ее. Тор является поверхностью 1-го рода. Любая поверхность p -го рода эквивалентна сфере с p ручками (подобно ручке на чайной чашке).

Для неориентируемой поверхности правая часть формулы Эйлера заменяется на $2-q$, где q — род поверхности.

Чтобы вывести эту формулу, можно представить себе сферу в виде многогранника с ручками. Ручка может быть отрезана в одном месте прикрепления (при этом под ней останется многогранное отверстие) и вставлена в другое место прикрепления (при этом образуется такое же многогранное отверстие). Можно показать, что выражение $V-E+F=2$, справедливое для любого разделения целой сферы, должно быть сокращено на $2p$ (число заплат на поверхности).

Теперь мы получаем формулу Хивуда, которая для $p \geq 1$ определяет достаточное число цветов для раскраски карты на поверхности p -го рода в виде

$$\left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right].$$

Квадратные скобки означают, что берется наибольшее целое число, не превосходящее числа внутри скобок. Заметим, что при неориентируемой поверхности для достаточного числа цветов мы имеем $[(7 + \sqrt{1 + 24q})/2]$.

Обе предыдущие формулы дают нижнюю границу необходимого числа цветов, когда каждая уменьшается на 2 [39]. Та же самая процедура получения однородной карты степени 3 из плоской карты применима также для карты на поверхности p -го рода. Далее мы будем рассматривать только связные карты, так как нетрудно видеть, что раскраска несвязной карты является частным случаем раскраски связной.

Теперь для однородной карты степени 3 мы имеем $3V=2E=aF$, где a — среднее число ребер для данной грани. Подстановкой в формулу Эйлера для поверхности p -го рода мы получим

$$a = 6 + \frac{12(p-1)}{F}.$$

Прибавим по 1 к каждой части выражения, обозначим $a+1=F$ и решим полученное квадратное уравнение, беря для получения формулы Хивуда только положительный корень α . Чтобы доказать, что наибольшее целое, не превосходящее α , определяет достаточное число цветов для поверхности p -го рода, заметим, что если $F \leq \alpha$, то число α достаточно, так как F цветов доста-

точно для раскрашивания F граней. Если $F > \alpha$, то из рис. 4.14 следует, что всегда $a+1 < \alpha$.

Учитывая, что a есть среднее число сторон грани, можно утверждать, что существует грань R , имею-

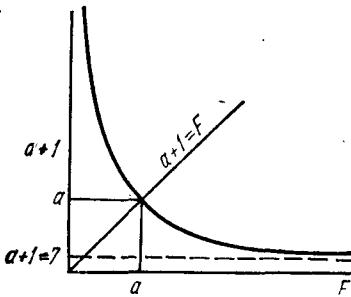


Рис. 4.14.

щая самое большое a или $[\alpha]-1$ сторон, так как $a+1 \leq [\alpha]$. Если устранить некоторое ребро этой грани, объединив ее с одной из смежных граней R' , то можно показать, что если $[\alpha]$ цветов достаточно для сокращенного графа, то их достаточно и для исходного. Предположим, что сокращенный граф раскрашен $[\alpha]$ цветами. Тогда, учитывая,

что R' и другие грани сокращенного графа, которые ограничивали R , в совокупности дают число не более $[\alpha]-1$, грань R можно окрасить оставшимся, не занятым цветом. Если сокращенный граф имеет более чем $[\alpha]$ граней, то повторим приведенное рассуждение, так как покажем, что если мы объединим какую-то грань, имеющую самое большое $[\alpha]-1$ сторон, с одной из соседних граней и полученный новый сокращенный граф можно раскрасить в $[\alpha]$ цветов, то тогда и исходный граф можно раскрасить в $[\alpha]$ цветов. (Такая грань снова должна существовать, так как среднее число сторон a по-прежнему удовлетворяет $a+1 < [\alpha]$ в силу того, что число граней $F > [\alpha]$.) Таким образом, возможность раскраски исходного графа в $[\alpha]$ цветов в конечном счете основана на возможности раскраски сокращенного графа с $[\alpha]$ гранями в $[\alpha]$ цветов, что, очевидно, всегда возможно.

Заметим, что каждая из объединенных граней, имеющих самое большое $[\alpha]-1$ сторон, может быть разделена на исходные составные части, которые можно раскрасить без противоречий с соседями. Доказательство закончено.

Необходимость доказана для различных значений p и требует построения специальных карт (см. [2]).

Необходимость семи цветов для тора показана на карте рис. 4.15. Из формулы Хивуда следует также их достаточность.

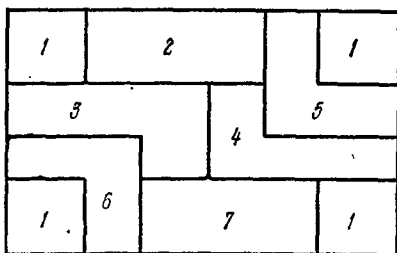


Рис. 4.15.

4.17. Показать, что для раскраски карты на листе Мёбиуса необходимо шесть цветов.

Существует интересная теорема, предложенная Эдмондсом, в которой рассматривается связь между графом G и порождаемыми им картами (S, G) на поверхности S . Задача состоит в том, чтобы охарактеризовать карты на ориентируемой поверхности, представляющие собой изображения данного графа на этой поверхности.

Интуитивно ясно, что если мы имеем карту (S, G) , соответствующую графу G , то эта карта определяет в каждой вершине единственное циклическое упорядочение. Оказывается, что такие циклические упорядочения ребер в каждой вершине точно определяют связь между графами и картами, отраженную в следующей теореме.

Теорема 4.29 (Эдмондс). Для любого связного графа G с произвольно определенным циклическим упорядочением ребер в каждой вершине существует топологически единственная карта (S, G) на ориентированной поверхности такая, что упорядочение ребер по часовой стрелке в каждой вершине точно совпадает с выбранным (исходным) упорядочением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, Гостехиздат, 1947.
2. Ball W. W. R., Mathematical Recreations and Essays. The Macmillan Company, New York, 1960.

3. Berge C., *Theory of Graphs and Its Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962. [Русск. перев.: Берг К., *Теория графов и ее применение*, ИЛ, 1962.]
4. Birkhoff G. D., *A Determinant Formula for the Number of Ways of Colouring a Map*, *Ann. Math.*, **14** (2): 42—46 (1912).
5. Birkhoff G. D., *On the Number of Ways of Coloring a Map*. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **2** (2), 83—91 (1930).
6. Birkhoff G. D., *The Coloring of Graphs*. *Ann. Math.*, **33** (2): 688—718 (1932).
7. Birkhoff G. D., *The Reducibility of Maps*. *Am. J. Math.*, **35**: 115—128 (1913).
8. Birkhoff G. D., *On the Polynomial Expressions for the Number of Ways of Coloring a Map*. *Ann. Scuola Normale Superiore, Pisa*, Ser. 2, **3**: 85—104 (1934)
9. Birkhoff G. D., Lewis D. C., *Chromatic Polynomials*. *Trans. Am. Math. Soc.*, **60**: 355—451 (1946).
10. Brooks R. L., *On Colouring the Nodes of a Network*. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **37**: 194—197 (1941).
11. Dynkin E. B. and W. A. Uspenski, *Multicolor Problems*. D. C. Heath and Company, Boston, 1952 (Original in German).
12. Dirac G. A., *Note on the Colouring of Graphs*. *Math. Z.*, **54**: 347—353 (1951).
13. Dirac G. A., *A Property of 4-Chromatic Graphs and Some Remarks on Critical Graphs*. *J. London Math. Soc.*, **27**: 85—92 (1952).
14. Dirac G. A., *Some Theorems on Abstract Graphs*. *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3, **2**: 69—81 (1952).
15. Dirac G. A., *The Structure of k -Chromatic Graphs*. *Fund. Math.*, **40**: 42—45 (1953).
16. Dirac G. A., *Map Colour Theorems Related to the Heawood Colour Formula*. *J. London Math. Soc.*, **31**: 460 (1956).
17. Dirac G. A. and M. D. Stojakovic, *The Four-colour Problem*. *Matematica Biblioteka*, **16**: 1960, MR 22—1946.
18. Erdős P. and de Bruijn N. G., *A Color Problem for Infinite Graphs and a Problem in the Theory of Relations*. *Indagationes Mathe.*, **13**: 369—373 (1951).
19. Errera J., *Du Coloriage des Cartes*, These, Bruxelles, 1921, *Mathesis*, **36**: 56 (1922).
20. A problem in *Eureka*, October, 1960.
21. Fary I., *On Straight Line Representation of Planar Graphs*. *Acta Sci. Math.* **11** (4): 229—233 (1948).
22. Franklin P., *The Four Color Problem*. *Scripta Mathematica*, No. 5, 1941.
23. Goodman A. W., *On Sets of Acquaintances and Strangers at Any Party*. *Am. Math. Monthly*, **66**: 778—783 (1959).
24. Greenwood R. E., Gleason A. M., *Combinatorial Relations and Chromatic Graphs*. *Can. J. Math.*, **7**: 1—7 (1955).
25. Grünbaum B., Motzkin T. S., *On Polyhedral Graphs*. *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 7, Convexity, 1963.
26. Harary F., *A Complementary Problem on Nonplanar Graphs*. *Math. Mag.*, **35**: 301—303 (1962).
27. Heawood P. J., *Map Color Theorem*. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, No. 24, p. 332, 1890.

28. Kneebone G. T., The Three Houses Problem. *Math. Gaz.*, 25: 78—81 (1941).
29. Krausz J., Demonstration Nouvelle d'une Théorème de Whitney sur les Reseaux. *Mat. Fiz. Lapok*, 50: 75—85 (1943). (In Hungarian.)
30. Kuratowski G., Sur problème des Courbes Gauches en Topologie. *Fund. Math.* 15—16 (1930).
31. Linis V., *Math. Mag.*, 36 (4) (1963).
32. Lorden G., Blue—Empty Chromatic Graphs. *Am. Math. Monthly*, 69 (2) : 114—119 (1962).
33. MacLane S., A Combinatorial Condition for Planar Graphs. *Fund. Math.*, 28—22—32 (1937), *Zbl. Math.* 15, 375.
34. Marathe C. R., On the Dual of a Trivalent Map. *Am. Math. Monthly*, 68 (5) : 448—455 (1961).
35. Minty G. J., A Theorem on n -Coloring the Points of a Linear Graph. *Am. Math. Monthly*, 69 (7) : 623—624 (1962).
36. Nordhaus, E. A., Gaddum J. W., On Complémentary Graphs. *Am. Math. Monthly*, 63 : 175—177 (1956).
- 36a. Picard C., Graphes Complementaires et Graphes Planaires. *Rev. Franc. Recherche Operationelle*, 8 : 329—343 (1964).
37. Rapaport E. S., Cayley Color Groups and Hamilton Lines. *Scripta Math.* 24: 51—58 (1959).
38. Ratib L., Winn C. E., Généralisation d'une Réduction d'Errera dans le Problème des Quatre Couleurs. *Intern. Congr. Math. Oslo*, 1936.
39. Ringel G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
40. Sauvè L., On Chromatic Graphs. *Am. Math. Monthly*, 68: 107—111 (1961).
41. Seshu S., Reed M. B., *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison—Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1961.
42. Tietze H., Einige Bemerkungen über das Problem der Karten farbens auf einseitigen Flächen. *Jahresber., Deutsh. Math. Vereinigung*, 19: 155—159 (1910).
43. Zeidl B., Über 4- und 5-chrome Graphen. *Monatsh. Math.*, 62 : 212—218 (1958).

Глава 5

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

5.1. Введение

В главе 5 вводится ряд матриц, с помощью которых можно описывать, используя алгебраический аппарат, ориентированные и неориентированные графы. Эти матрицы задают отношения инциденций между вершинами и ребрами и в более общем случае между циклами, разрезами, цепями и соответствующими ребрами. Они являются удобной формой представления структурных свойств графа.

Между матрицами инциденций, циклов и разрезов существует тесная взаимосвязь, которая позволяет выразить базис векторного пространства, связанного с одним типом матриц, через базис пространства, связанного с другим типом. Это облегчает, например, задачу нахождения всех разрезов графа при известных его циклах.

В главе 7 будет показано, что свойства разрезов тесно связаны с максимальным потоком в соответствующей сети. Определение основных матриц для циклов и разрезов в существенной мере основывается на понятиях дерева, ветвей дерева и хорд.

При описании неориентированных графов мы будем иметь дело с матрицами инциденций, элементами которых могут быть только нули и единицы. Сложение чисел всегда будет производиться по модулю 2. В этом случае $1+1=0$ (по модулю 2), $1+0=0+1=1$, и $0+0=0$. Таким образом, для выполнения операции сложения по модулю 2 необходимо просто сложить соответствующие элементы, затем разделить результат на 2 и остаток

записать как результат сложения по модулю 2. Такой выбор элементов матриц позволяет определить наличие некоторого свойства между двумя элементами (тогда соответствующий элемент равен 1) или его отсутствие (тогда элемент равен 0).

Матрицы перемножаются и складываются как обычно, однако результат всегда записывается по модулю 2.

При описании ориентированных графов элементов 0 и 1 оказывается недостаточно, так как дуга может быть инцидентна данной вершине и направлена к ней, инцидентна и направлена от нее, или не инцидентна вершине. Поэтому для обозначения ориентированной инцидентности или ее отсутствия воспользуемся символами 1, -1 , 0. Здесь мы уже не можем пользоваться приведением по модулю 2 и должны рассматривать матрицы с целочисленными элементами.

Конечно, с такими матрицами работать гораздо труднее. Однако принципиально к матрицам ориентированных графов применима теория, аналогичная теории для неориентированных графов.

Отметим, что с понятием матриц тесно связано понятие векторного линейного пространства, базиса и линейной комбинации векторов.

Определение. *Векторным пространством* называется множество элементов (называемых *векторами*), в котором для каждого двух векторов x и y однозначно определена операция сложения, дающая единственный вектор $x+y$, называемый *суммой*, и задана операция умножения вектора на действительное число (или на элемент любого другого поля, например, поля комплексных чисел или целых чисел по модулю 2), которая любому вектору x ставит в соответствие единственный вектор ax для каждого числа a .

Для существования векторного пространства, для любых векторов x , y и z из этого пространства и при любых числах a , b должны выполняться следующие аксиомы.

Векторы должны образовывать коммутативную группу относительно сложения, т. е.

1. $x+y=y+x$.

2. $x+(y+z)=(x+y)+z$.

3. $0+x=x$ для всех x , где 0 обозначает нулевой вектор.

4. Каждый вектор x имеет противоположный вектор y такой, что

$$x+y=0.$$

Должны выполняться следующие аксиомы умножения на число.

5. $a(bx) = (ab)x.$

6. $(a+b)x = ax+bx.$

7. $a(x+y) = ax+ay.$

8. Существует множество векторов, называемое базисом. Векторы, принадлежащие базису, линейно независимы и стягивают пространство в том смысле, что каждый вектор пространства может быть представлен линейной комбинацией базисных векторов. Каждый базис пространства содержит одно и тоже число векторов, называемое рангом базиса.

Два векторных пространства V и U называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет операцию сложения и умножения на число, т. е. если v_1 и v_2 — элементы V , а u_1 и u_2 — соответствующие элементы U , то v_1+v_2 соответствует u_1+u_2 , аналогично, kv соответствует ku , если v соответствует u , а k — произвольное число.

В случае неориентированного графа элементами векторного пространства при матричном представлении являются векторы, каждый из которых представляет подмножество ребер. Элементами этих векторов являются 0 или 1 в зависимости от того, принадлежит ли данное ребро рассматриваемому подмножеству или нет. В случае, когда ориентированный граф имеет m ребер, соответствующее векторное пространство состоит из всех векторов (x_1, \dots, x_m) , где $x_i=0$ или 1. i -я компонента соответствует i -му ребру, и каждый вектор однозначно характеризует подмножество ребер, для которых $x_i=1$. В частности, каждый цикл и разрез имеют векторное представление. Сумма двух таких векторов также является вектором того же вида. Их скалярное произведение (сумма произведений соответствующих компонент) рав-

но 0 или 1 в зависимости от четности или нечетности числа общих дуг в подмножествах, соответствующих этим векторам.

Множество всех линейных комбинаций векторов, соответствующих циклам, определяет подпространство, состоящее в точности из векторов, которые соответствуют циклам и множествам циклов, не пересекающихся по ребрам.

Аналогичное утверждение справедливо и для векторов, соответствующих разрезам.

Совсем недавно удалось ответить на важный и трудный вопрос, когда данная матрица представляет базис пространства, связанного с циклами или разрезами графа, или, другими словами, решить *проблему реализуемости матрицы*.

На этой проблеме мы остановимся очень кратко, так как для глубокого ее рассмотрения необходим материал, выходящий за рамки этой книги.

5.2. Матрица инцидентий

Пусть G — граф, имеющий n вершин и m ребер. Графу G можно сопоставить матрицу инцидентий размером $n \times m$, строки и столбцы которой соответствуют

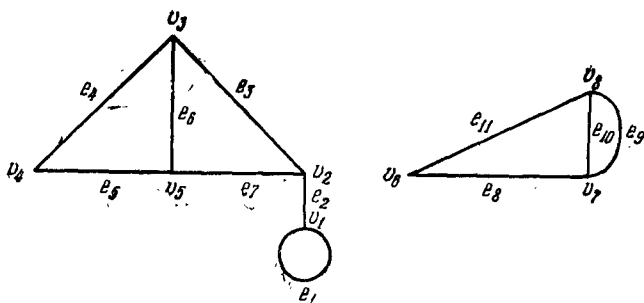


Рис. 5.1.

вершинам и ребрам графа соответственно. Элемент матрицы a_{ij} принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, инцидентно j -е ребро i -й вершине или нет. Для петли все элементы столбца считаются равными 0. На-

пример, двухкомпонентный граф, показанный на рис. 5.1, имеет следующую матрицу инциденций:

$$A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \hline v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \begin{array}{c} e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \\ \hline e_8 \ e_9 \ e_{10} \ e_{11} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Некоторые интересные свойства графа проявляются в его матрице инциденций. Например, так как ребро графа инцидентно точно двум вершинам, то каждый столбец матрицы инциденций содержит равно два единичных элемента. Единственное исключение составляет петля, так как она (дважды) инцидентна одной и той же вершине. Следовательно, столбец, соответствующий петле, состоит из нулевых элементов. Таким образом, матрица инциденций не указывает на существование петель, так как мы не знаем, соответствует ли нулевой столбец петле или нет.

С учетом сказанного при изучении графов с помощью матриц желательно исключать петли, что мы и будем делать в дальнейшем.

При соответствующей нумерации ребер и вершин графа каждая его компонента соответствует подматрице матрицы инциденций, которая в этом случае имеет блочную структуру следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & A_2 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 \dots A_n \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица инциденций, соответствующая i -й компоненте графа. Блочнo-диагональное представление такого типа всегда можно получить последовательной нумерацией ребер и вершин внутри каждой компоненты и между компонентами, как показано в примере, или не-

посредственно с помощью перестановки строк и столбцов матрицы инцидентий. Теперь можно утверждать, что два графа изоморфны, если они имеют одни и те же матрицы инцидентий с точностью до перестановок строк и столбцов. Таким образом, матрица инцидентий обеспечивает полное описание графа (если петли исключены).

Упражнение 5.1. Показать эквивалентность данного определения изоморфизма графов и определения, приведенного выше в главе 1.

• **Теорема 5.1.** Ранг матрицы инцидентий p -компонентного графа с n вершинами равен $n-p$ (подразумевается, что арифметические операции производятся по модулю 2).

З а м е ч а н и е. Ранг матрицы инцидентий может оказаться совершенно другим, если ее рассматривать как обычную числовую матрицу.

Доказательство. Пусть n_i — число вершин, принадлежащих компоненте P_i ($i=1, \dots, p$), которая представляется подматрицей A_i . Покажем, что A_i имеет ранг, равный n_i-1 . Легко показать, что ранг матрицы A_i не более n_i-1 . Это следует из того факта, что сумма всех строк A_i равна 0 по модулю 2, так как каждый столбец имеет два отличных от нуля элемента и, следовательно, если n_i-1 первых строк A_i прибавить к последней строке, то в результате получится строка, состоящая из нулей. Так как ранг матрицы не меняется при элементарной операции сложения строк, ранг новой матрицы, которая имеет строку, состоящую из нулей, не может превосходить n_i-1 . Сумма любых n_i-1 или меньше числа строк A_i должна иметь некоторый ненулевой элемент. Если все элементы равны нулю, тогда исходные строки образуют подматрицу компоненты графа, так как ни одна из вершин, соответствующих этим строкам, не связана ребром ни с одной из вершин, не принадлежащих рассматриваемому подмножеству. Это противоречит тому, что P_i — максимальный связный подграф, и доказывает, что ранг P_i равен n_i-1 , так как каждое множество n_i-1 строк независимо.

Существует другой метод, с помощью которого можно показать, что ранг A_i точно равен n_i-1 . Начнем с

первой строки A_1 и, переставляя ее столбцы, получим в левом верхнем углу на главной диагонали ненулевой элемент. Прибавляя первую строку к любой строке, которая имеет ненулевой элемент в первом столбце, получим, что все элементы первого столбца, исключая первый, равны нулю. Вторая строка должна иметь другой ненулевой элемент, который перестановкой столбцов помещаем на место $(2,2)$ и с помощью сложения снова делаем все остальные элементы второго столбца равными нулю. Процесс повторяется

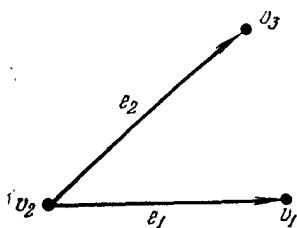


Рис. 5.2.

для третьей строки и т. д. до тех пор, пока не получится диагональная матрица. Как указывалось выше, все элементы последней строки могут быть сделаны равными нулю. Таким образом мы получили в результате треугольную матрицу с n_1 строками, которая имеет единичные элементы на главной

диагонали, за исключением последнего. Так как операции сложения строк и перестановки столбцов не влияют на ранг, величина ранга A_1 должна быть равна $n_1 - 1$. Таким образом, ранг A равен $n - p$, где p — число компонент.

Как указывалось выше, элементы матрицы инцидентий ориентированного графа принимают значения 0, 1, -1 . Элемент равен нулю, если вершина не инцидентна дуге, $+1$, если дуга ориентирована от вершины, и -1 в противном случае. Таким образом, граф, показанный на рис. 5.2, имеет следующую матрицу инцидентий:

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 \\ v_1 & (-1 & 0) \\ v_2 & (1 & 1) \\ v_3 & (0 & -1) \end{matrix}$$

Матрица ориентированного графа с n вершинами и p компонентами также имеет ранг $n - p$. Термин ранг относится к графу, независимо от того, ориентирован он или нет, и характеризует ранг матрицы инцидентий.

Упражнение 5.2. Выписать матрицу инцидентий ориентированного графа, показанного на рис. 5.3, пронумеровав предварительно его дуги.

5.3. Матрица циклов

Циклы C_i графа рис. 5.3 (перенумерованные, как показано на рис. 5.4) можно характеризовать матрицей, каждая строка которой характеризует один из циклов:

$$C = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

(Принадлежность каждого ребра, за исключением e_2 , в точности двум циклам является в данном случае совпадением.) Можно заметить, что матрица циклов также

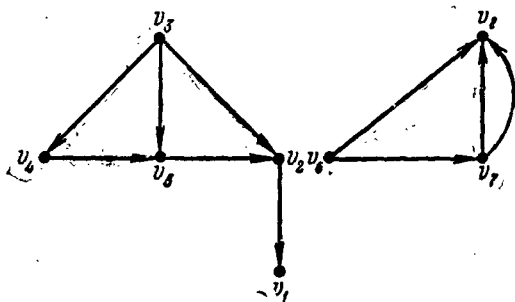


Рис. 5.3.

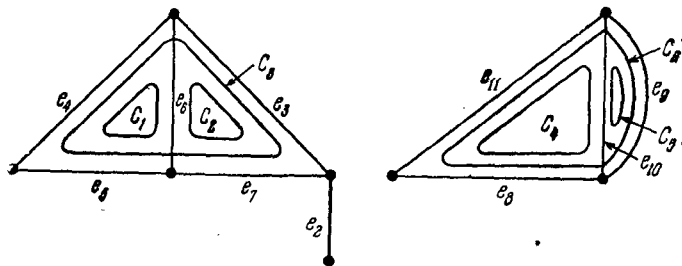


Рис. 5.4.

является блочно-диагональной. Это является следствием того факта, что каждый цикл полностью содержится в

одной из компонент и ребра каждой компоненты перенумерованы последовательно во избежание необходимой в противном случае перестановки столбцов.

Теорема 5.2. Матрица инциденций A ортогональна транспонированной матрице циклов C' , т. е. $AC' = 0$, если обе матрицы получены при одном и том же порядке дуг.

Идея доказательства заключается в следующем: каждая вершина, принадлежащая некоторому циклу, инцидентна четному числу ребер, принадлежащих этому же циклу. Поэтому при умножении строки матрицы A на столбец C' мы получаем либо сумму элементов, каждый из которых равен нулю (если вершина не принадлежит циклу), либо сумму, равную нулю по модулю 2.

Упражнение 5.3. Проверить теорему 5.2 для матрицы инциденций и матрицы циклов графа, показанного на рис. 5.3.

З а м е ч а н и е. Если граф не связан, то матрицы инциденций, циклов и разрезов могут исследоваться отдельно для каждой компоненты, так как ни одно из свойств, изучаемых ниже, не зависит от факта существования более одной компоненты. Ограничимся поэтому изучением связных графов (т. е. $p=1$) без петель с m ребрами и n вершинами.

5.4. Матрица разрезов

Опишем теперь простые разрезы графа, изображенного на рис. 5.5, с помощью матрицы разрезов, каждая строка которой характеризует один простой разрез. В данном случае мы имеем следующие простые разрезы:

$$K_1 = \{e_2\}, K_2 = \{e_3, e_7\}, K_3 = \{e_4, e_5\}, K_4 = \{e_8, e_4, e_6\}, \\ K_5 = \{e_3, e_5, e_6\}, K_6 = \{e_4, e_6, e_7\}, K_7 = \{e_5, e_6, e_7\}.$$

При этом матрица разрезов имеет вид

$$K = \begin{matrix} & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Отметим следующее свойство ортогональности матрицы циклов и матрицы разрезов при одинаковом упорядочении дуг.

Теорема 5.3. Матрица циклов C и матрица разрезов K любого графа удовлетворяют соотношению $CK' = 0$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того факта, что разрез всегда имеет четное число ребер (возможно 0), общих с каждым циклом.

Действительно, так как простой разрез разделяет граф на две части, он либо делит, либо не делит некоторый цикл. В последнем случае число общих ребер равно нулю, в предыдущем случае по теореме 1.8 разрез должен иметь четное число ребер, общих с данным циклом.

Упражнение 5.4. Показать, что если граф связан и не имеет точки сочленения, то его матрица разрезов содержит матрицу инцидентий.

З а м е ч а н и е. Для плоских графов задача перечисления разрезов эквивалентна задаче перечисления циклов двойственного графа.

Укажем теперь процедуру определения базисной матрицы для циклов связного графа. Прежде всего определим полное дерево графа.

Далее, когда речь будет идти о деревьях, под ними имеются в виду покрывающие деревья графа. Дерево содержит $n-1$ ветвей и $m-n+1$ хорду. Из определения дерева мы знаем, что каждой хорде соответствует цикл графа, который состоит из хорды и единственной цепи в дереве, соединяющей ее конечные точки. Каждый цикл имеет, по крайней мере, одно ребро, не принадлежащее ни одному другому циклу. Таким образом, векторы, соответствующие этим $m-n+1$ циклам, линейно независимы и ранг матрицы циклов, по крайней мере, $m-n+1$. Покажем теперь, что имеет место точное равенство и, следовательно, циклы, определяемые хордами, образуют базис для всех циклов графа.

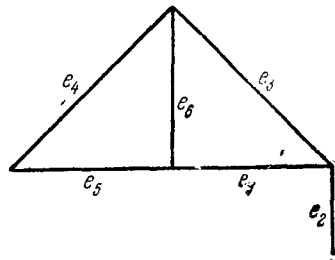


Рис. 5.5.

10 Р. Басакер, Т. Саати

Воспользуемся следующей теоремой из теории матриц: ранг R произведения двух матриц, первая из которых имеет размер (порядок) $p \times q$ и ранг k_1 , а вторая — размер $q \times r$ и ранг k_2 , удовлетворяет неравенству

$$R \geq k_1 + k_2 - q.$$

Если эти матрицы ортогональны, то $R=0$ и $k_2 \leq q - k_1$. Возьмем в качестве первой матрицы матрицу инцидентий, а в качестве второй — матрицу циклов. Так как ранг матрицы инцидентий равен $k_1 = n - 1$ и $q = m$ есть порядок матрицы циклов и матрицы инцидентий, получаем, что ранг матрицы циклов k_2 удовлетворяет неравенству $k_2 \leq m - n + 1$. Однако ранее мы показали, что $k_2 \geq m - n + 1$. Следовательно, $k_2 = m - n + 1$. В результате мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.4. Ранг матрицы циклов связного графа с m ребрами и n вершинами равен $m - (n - 1)$.

Если граф содержит p компонент, ранг матрицы циклов равен $m - n + p$. Это число известно также под названием *цикломатического числа* графа.

Упражнение 5.5. Используя теорему 5.4 о ранге произведения двух матриц, доказать, что ранг матрицы разрезов не превышает $n - 1$.

З а м е ч а н и е. Существует взаимно однозначное соответствие между неособыми подматрицами ранга $n - 1$ матрицы инцидентий связного графа и деревьями графа. Аналогичное соответствие существует между подматрицами ранга $m - n + 1$ матрицы циклов и дополнениями деревьев графа.

Поясним первую часть замечания. Матрица инцидентий покрывающего дерева является подматрицей матрицы инцидентий всего графа. Она содержит все вершины (строки) и $n - 1$ ребер (столбцов) дерева. Так как дерево является связным графом, его матрица имеет ранг $n - 1$. Обратное, подматрица ранга $n - 1$ соответствует n строкам и $n - 1$ столбцам. Так как столбцы линейно независимы, все вершины соединены и мы имеем дерево.

Для иллюстрации метода получения базисной матрицы циклов*) рассмотрим снова граф, показанный на

*) Базисную матрицу циклов называют также *цикломатической матрицей*. (Прим. ред.)

рис. 5.6. Жирными линиями показаны ребра выбранного дерева, хордами которого являются ребра e_4 и e_7 .

Базисная матрица циклов, которая является подматрицей матрицы циклов, включает только циклы, определяемые хордами выбранного дерева. Ее можно записать в виде

$$\bar{C} = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|ccc} e_4 & e_7 & e_2 & e_3 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

или

$$\bar{C} = (I / \bar{C}_{12}),$$

где I — единичная матрица, определяемая вхождением

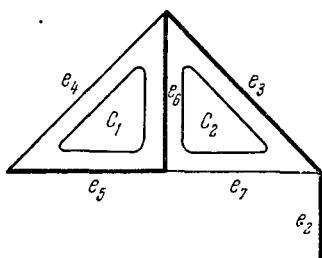


Рис. 5.6.

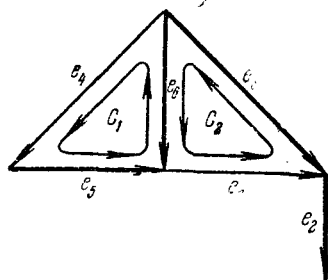


Рис. 5.7.

хорд в циклы, а \bar{C}_{12} — соответствующая подматрица для ветвей.

В случае ориентированного графа вводится ориентация циклов, как показано на рис. 5.7. Ориентация каждого базисного цикла определяется ориентацией соответствующей хорды. В этом случае базисная матрица циклов имеет вид

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|ccc} e_4 & e_7 & e_2 & e_3 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Заметим, что -1 появляется там, где ориентация цикла противоположна ориентации дуги. Так как ранг матрицы инцидентий A равен $n-1$, мы можем записать

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{12} — квадратная неособая подматрица размера $n-1$. Мы видели, что такие неособые матрицы соответ-

ствуют деревьям. Следовательно, A_{12} — подматрица, соответствующая дереву, которое, например, может быть деревом, выбранным для построения \bar{C} в рассмотренном примере.

Из теоремы 5.2 имеем $A\bar{C}=0$, откуда следует, что $A\bar{C}'=0$, где \bar{C}' — базисная матрица циклов. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \bar{C}'_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

где ребра A должны быть упорядочены так же, как в \bar{C} . Перемножение дает

$$A_{11}I + A_{12}\bar{C}'_{12} = 0.$$

Учитывая, что A_{12} — неособая матрица, имеем

$$\bar{C}'_{12} = -A_{12}^{-1}A_{11} = A_{12}^{-1}A_{11},$$

так как $-1=1$ по мод. 2. Таким образом, мы получили \bar{C} из A .

Упражнение 5.6. Используя предложенный метод, получить \bar{C} из A для графа, изображенного на рис. 5.6. Пусть первые два столбца соответствуют хордам. Заметим, что A_{12} должна соответствовать дереву.

Базисная матрица для разрезов получается с помощью выделения дерева и поочередного рассмотрения каждой из его ветвей. Удаление некоторой ветви разбивает дерево на два поддерева. Соответственно разбиваются и вершины дерева. Удаленная ветвь и любые хорды, общие обоим поддеревам, образуют базисный разрез. (В ориентированном графе -1 указывает ориентацию, противоположную ориентации ветви.)

Упражнение 5.7. Используя то же самое дерево, которое применялось при построении базисной матрицы циклов, показать, что предложенный способ дает следующие разрезы: K_1, K_2, K_3, K_6 .

Из базисной матрицы циклов \bar{C} можно получить базисную матрицу разрезов \bar{K} и наоборот. С помощью сложения строк и переставления столбцов \bar{K} может быть приведена к виду

$$\bar{K} = (\bar{K}_{11}/I),$$

где \bar{K}_{11} — подматрица, соответствующая хордам, а I — единичная подматрица, соответствующая ветвям. Из

соотношения ортогональности, которое существует между матрицей циклов и транспонированной матрицей разрезов, имеем $\bar{C}\bar{K}'=0$. Таким образом,

$$(I/\bar{C}_{12})\left(\frac{\bar{K}'_{11}}{I}\right)=0,$$

следовательно, $\bar{K}'_{11}+\bar{C}_{12}=0$. Отсюда заключаем, что $\bar{K}'_{11}=\bar{C}_{12}$, так как $-1\equiv 1 \pmod{2}$.

Упражнения

5.8. Используя последний результат, получить \bar{K}'_{11} из \bar{C}_{12} в упражнении 5.6 и проверить совпадение ответа с ответом упражнения 5.7.

5.9. Выписать матрицы инцидентий, циклов и разрезов полного графа, имеющего пять вершин.

5.5. Матрица смежности вершин

Для ориентированных и неориентированных графов можно определить *матрицу смежности вершин* (или просто *матрицу смежности*)*). Элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца этой матрицы равен числу ребер, инцидентных одновременно i -й и j -й вершинам (или направленных от вершины i к вершине j в случае ориентированного графа). Таким образом, для ориентированного графа, изображенного на рис. 5.3 (см. также упражнение 5.2), имеем матрицу смежности:

$$\vec{V} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

В общем случае, имеет место следующая теорема, касающаяся матрицы смежности \vec{V} графа.

Теорема 5.5. Матрица \vec{V}^n дает число ориентированных маршрутов длины n между любыми двумя вершинами ориентированного графа.

*) В тексте Vertex matrix, adjacency matrix. (Прим. перев.)

Доказательство. Если a_{ik} — число дуг, соединяющих v_i с v_k , а a_{kj} — число дуг, соединяющих v_k с v_j , то $a_{ik}a_{kj}$ есть число различных ориентированных маршрутов, каждый из которых состоит из двух дуг, соединяющих v_i с v_j и проходящих через v_k . Если это произведение просуммировать по всем k , т. е. по всем промежуточным вершинам, то получим число ориентированных маршрутов длины два между вершинами v_i и v_j . Используем теперь a_{ij} для получения $a_{ij}a_{jm}$. В результате найдем число различных ориентированных маршрутов длины 3 между вершинами v_i и v_m , проходящих через v_j , и так далее. Таким образом, если мы предположим, что теорема верна для \vec{V}^{n-1} , то элементы матрицы $\vec{V}^n = \vec{V}^{n-1}\vec{V}$ дадут число ориентированных маршрутов длины n между соответствующими вершинами. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, если при некотором N , $\vec{V}^n = 0$ для $n \geq N$, то в графе нет циклов. Если в графе нет циклов, то элементы \vec{V}^n дают число простых путей между любыми двумя вершинами графа.

Упражнение 5.10. Доказать аналогичную теорему для неориентированных графов. Обозначить матрицу смежности неориентированного графа через V .

З а м е ч а н и е. Матрицу смежности можно использовать для исследования свойств бинарного отношения R на конечном множестве

$$S = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Пусть $\vec{V} = (v_{ij})$ — матрица смежности вершин, связанная с R . Если R рефлексивно (нерефлексивно), то \vec{V} имеет единицы (нули) ниже главной диагонали. Если R симметрично, то \vec{V} — симметрическая матрица. Если R асимметрично, то \vec{V}^2 будет иметь те же элементы на главной диагонали, что и V . Действительно, единственный путь длины два из a_i в a_i получается двукратным проходом по петле ba_i (если она существует), если нет такого элемента a_j , что a_iRa_j и a_jRa_i . (В последнем слу-

чае будет существовать еще один путь длины два из a_i в a_j и матрица $\vec{V}^2 = (v_{ij}^{(2)})$ будет иметь элементы $v_{ii}^{(2)} = v_{ii} + 1$ и $v_{jj}^{(2)} = v_{jj} + 1$.)

Транзитивность также легко определяется на языке теории графов. Это свойство формулируется следующим образом. Если существует путь длины 2 от a_i к a_j , то существует дуга из a_i в a_j . Таким образом, необходимо только проверить положительность v_{ij} при положительном $v_{ij}^{(2)}$. Если это так, то R транзитивно.

Индекс примитивности

Заметим, что матрица вершин как в случае ориентированных, так и в случае неориентированных графов имеет неотрицательные элементы. Нулевой элемент означает, что вершина, соответствующая строке рассматриваемого элемента, не связана ребром с вершиной, соответствующей столбцу. Однако эти вершины могут быть связаны путем (или цепью) определенной длины. Может оказаться, что $V^m > 0$ для некоторого целого $m \geq 1$, т. е. после возведения V в степень m все ее элементы становятся положительными.

В этом случае каждая вершина достижима из любой другой вершины ориентированным маршрутом, состоящим из m дуг, и граф, соответствующий V^m , является полным (действительно, он имеет дугу, направленную от любой другой) и имеет петли у каждой вершины.

Рассмотрим теперь ориентированный граф D . Если D сильно связан, то его матрицу смежности \vec{V} будем называть неприводимой. В общем случае, не требуется, чтобы неотрицательная квадратная матрица U (из которой мы формируем ориентированный граф в зависимости от того, является ли некоторый ее элемент нулем или положительным числом) была неприводимой. Если она неразложима, т. е. граф сильно связан, и $U^m > 0$ для некоторого целого $m > 1$, то U называется *примитивной* (соответствующий ей граф также называется *примитивным*), а наименьшее целое m , для которого это верно (т. е. каждая вершина достижима из любой другой вершины с помощью последовательности дуг длины m),

называется *индексом примитивности* U и обозначается $\gamma(U)$ *).

Покажем, что неразложимая матрица примитивна тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель длины всех его простых циклов равен единице (см. [73], гл. 6).

Определение. Если H — подграф графа G , то *порядком* H назовем число вершин подграфа H .

Определение. Если P — ориентированный маршрут (ориентированная последовательность дуг) в ориентированном графе D , то *длиной* P называется число дуг в P (считая и повторения).

Лемма 5.6. Если $D = (V, A)$ — примитивный граф, с индексом примитивности m , и $v, w \in V$, то для всех целых $q \geq m$ существует ориентированный маршрут длины q из v в w и ориентированный маршрут длины q из w в v .

Доказательство. Заметим, что если U — примитивная матрица, то каждая строка и каждый столбец U должны содержать, по крайней мере, один ненулевой элемент. Из этого следует, что произведение $U^m \cdot U$ содержит только положительные элементы. Действительно, произведение $U^{m+n} \cdot U \equiv U^q$, где n — любое положительное целое число, содержит только положительные элементы.

Теорема 5.7. Необходимым и достаточным условием примитивности сильно связного графа $D = (V, A)$ с числом вершин $n \geq 2$ является равенство единице наибольшего общего делителя длины всех простых циклов графа D .

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что $D = (V, A)$ — сильно связный граф с $n \geq 2$. Пусть D имеет r простых циклов с порядками p_1, p_2, \dots, p_r ,

*) Понятие примитивной матрицы можно ввести другим путем. Если неразложимая матрица $U \geq 0$ имеет h характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ с максимальным модулем r ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_h| = r$), то матрица U называется *примитивной* при $h=1$ и *импримитивной* при $h>1$. Число h называется *индексом импримитивности* матрицы U .

Можно показать, что в этом смысле матрица $U \geq 0$ является примитивной в том и только в том случае, когда некоторая степень матрицы U положительна, т. е. $U^m > 0$ ($m \geq 1$). См., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967. (Прим. ред.)

и предположим, что наибольший общий делитель этих порядков равен единице. Выберем замкнутую последовательность дуг (ориентированный маршрут) P такую, что P проходит через все вершины D . Начальная и конечная вершины не обязательно должны фиксироваться. Символ P будет обозначать любую последовательность, эквивалентную первоначально выбранной в том смысле, что все дуги расположены в одной и той же последовательности, хотя начальная и конечная вершины могут быть различными. Пусть P имеет длину j .

Так как D сильно связан, то для каждой пары $v, w \in V$ существует путь из v в w . Сопоставим с каждой такой упорядоченной парой (v, w) положительное целое число $i \leq n$, определяющее длину некоторого пути из v в w . Теперь при желании можно пройти из v в w следующим образом: (1) начать движение с обхода P (из v в v) и, начиная с различных заранее определенных вершин, проходить все простые циклы, которым они принадлежат, и (2) затем пройти путь с i дугами. Длина всего «путешествия» может быть выражена формулой

$$s = j + \sum_{k=1}^r e_{ik} p_k + i,$$

где e_{ik} — неотрицательное целое число для каждого k .

Покажем теперь, что для каждого i можно так выбрать e_{ik} , что s окажется константой, т. е. не будет зависеть от i . (Зависимость от i исключается выбором e_{ik} .)

Напомним, что если k — множество целых чисел, для которых наибольший общий делитель равен 1, то 1 можно представить как линейную комбинацию этих чисел. Следовательно, мы можем выбрать положительные целые числа a_1, a_2, \dots, a_r , которые можно разбить на два взаимно дополнительных множества X и Y так, что

$$\sum_{k \in X} a_k p_k - \sum_{k \in Y} a_k p_k = 1.$$

Теперь для каждого целого i ($1 \leq i \leq n$) и каждого целого k ($1 \leq k \leq r$) определяем (при достаточно больших целых m)

$$e_{ik} = \begin{cases} (m+1-i) a_k, & \text{если } k \in X, \\ (i-1) a_k, & \text{если } k \in Y. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r e_{ik} \rho_k + i &= \sum_{k \in X} (m+1-i) a_k \rho_k + \sum_{k \in Y} (i-1) a_k \rho_k + i = \\ &= m \sum_{k \in X} a_k \rho_k + \sum_{k \in X} a_k \rho_k - \sum_{k \in Y} a_k \rho_k - i \sum_{k \in X} a_k \rho_k + \\ &\quad + i \sum_{k \in Y} a_k \rho_k + i = m \sum_{k \in X} a_k \rho_k + 1. \end{aligned}$$

Последнее выражение является константой, так как не зависит от i . Следовательно, существует фиксированное целое

$$s = j + m \sum_{k \in X} a_k \rho_k + 1$$

такое, что для каждой упорядоченной пары $v, w \in V$ существует ориентированный маршрут длины s из v в w . Таким образом, существует целое число s такое, что если U — матрица вершин графа D , то $U^s > 0$. (Чтобы показать, как реализуется требуемый путь длины s , напомним, что

$$s = j + \left(\sum_{k=1}^r e_{ik} \rho_k + i \right)$$

Необходимость. Предположим, что $D = (V, A)$ — примитивный граф с $n \geq 2$ и индекс примитивности равен m . По предположению (в силу примитивности), граф D сильно связан. Выберем контур P (из некоторой вершины $v \in V$ в v) так, чтобы каждый простой контур в D проходился, по крайней мере, один раз и $t \geq m$, где t — длина P . Так как P можно разбить на последовательность простых контуров (обобщение упражнения 2.3 на замкнутые последовательности дуг), то число t можно записать как линейную комбинацию порядков $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ простых контуров, где все коэффициенты положительны. Далее по лемме 4.6 существует замкнутая последовательность дуг длины $t+1$ из v в v . Тогда по той же лемме существует замкнутая последовательность дуг R (дважды P) и S длины $2t$ и $2t+1$ соответственно. Заметим, что оба числа $2t$ и $2t+1$ могут быть записаны как линейные комбинации чисел ρ_i ($i=1, 2, \dots, r$) (со строго положительными коэффициентами). Отмеченное выше обобщение упражнения 2.3 можно применить к

замкнутой последовательности дуг длины $r+1$ и последовательность S , длина которой

$$t+t+1=2t+1$$

может быть записана в качестве желаемой линейной комбинации. Но два последовательных числа можно представить как линейную комбинацию одного и того же множества целых чисел p_i только в этом случае, если наибольший общий делитель p_i этих чисел равен единице. Теорема доказана.

Примером неориентированного непримитивного графа является двудольный граф. Специальным случаем этого графа является решетчатый граф, представляемый, например, границами квадратов шахматной доски. В таком графе некоторые пары вершин можно соединить цепями только четной длины, а другие пары вершин — только цепями нечетной длины. (Докажите в качестве упражнения, что это справедливо для всех двудольных графов.) При этом все простые циклы имеют четное число ребер, поэтому граф не удовлетворяет условию примитивности, так как общий делитель равен 2.

Взяв t -ую степень матрицы \vec{V} ориентированного графа D , получим матрицу ориентированного графа, который имеет те же вершины, что и D , и для которого упорядоченная пара (v_i, v_j) является ребром тогда и только тогда, когда существует последовательность дуг длины t , соединяющая v_i с v_j в \vec{V} .

Упражнения

5.11. Показать, что если \vec{V} примитивна, то матрица \vec{V}^t также примитивна для $t > 0$.

5.12. Показать, что в примитивном графе для каждой вершины v_i существует целое число h такое, что существует путь длины h из v_i в любую другую вершину v_j . Наименьшее значение h называется радиусом охвата v_i и обозначается через h_i .

5.13. Показать, что в примитивном графе, если $p \geq h_i$, существует ориентированный маршрут длины p из v_i в любую v_j . (Заметим, что так как граф сильно связан, то существует дуга из некоторой v_k в v_j и, следовательно, имеется путь из v_i через v_k в v_j длины $h+1$ и т. д. по индукции.)

5.14. Показать, что в примитивном графе D индекс примитивности $\nu(D)$ определяется выражением $\nu(D) = \max [h_1, \dots, h_n]$.

5.15. Показать, что если в вершине v_i сильно связанного графа имеется петля, то $h_i \leq n - 1$.

Понятие индекса примитивности является очень важным. Рассмотрим, например, гипотетическую химическую реакцию с «обратной связью», т. е. циклическим восстановлением компонент. Здесь вершинам графа будут соответствовать различные химические ингредиенты. Требуется определить возможность получения некоторого определенного продукта с помощью процесса, начинающегося в любой из вершин и состоящего из фиксированного числа шагов. В математической экономике, если U — примитивная матрица, то показатель степени m соответствует m -му такту функционирования системы. При этом если $\gamma(D) = m$, то все секторы экономической модели затраты — выпуск, начиная с m -го такта и на всех последующих, связаны.

Возникает вопрос, когда неотрицательная неразложимая матрица примитивна, и чему равен ее показатель примитивности, или какова его оценка? Остановимся на второй части вопроса.

Одна из наиболее ранних оценок показателя примитивности, полученная Ловенгеймом и Виландом, утверждает, что он не может превосходить $(n-1)^2 + 1$, где n — число вершин (и, конечно, также порядок матрицы). Эта оценка является следствием следующей теоремы.

Теорема 5.8. Пусть D — примитивный граф и \vec{V} — его матрица смежности. Если s — длина кратчайшего простого контура в D , то индекс примитивности матрицы \vec{V} удовлетворяет неравенству $\gamma(\vec{V}) \leq n + s(n-2)$.

Доказательство. Согласно утверждению упражнения 5.11 D^s (граф, соответствующий матрице \vec{V}^s) является примитивным. Учитывая, что D имеет простой контур длины s , получим, что граф D^s имеет, по крайней мере, s вершин с петлями. Следовательно, существует последовательность дуг длины $p_i \leq n-s$ из любой вершины v_i к некоторой вершине v_k , которая имеет петлю в D^s .

Далее согласно упражнению 5.15, в D^s существует последовательность дуг длины $n-1$ из v_k в любую v_j . Таким образом, в графе D последовательность дуг из v_k в v_j имеет длину $(n-1)s$, а последовательность из v_i в v_j имеет длину $p_i + (n-1)s$.

Следовательно, $h_i \leq p_i + (n-1)s$ и

$$\gamma(D) = \max[h_1, \dots, h_n] \leq n - s + (n-1)s = n + s(n-2).$$

Следствие 5.9. В примитивном графе наибольший общий делитель длин всех простых циклов равен единице и, следовательно, $s \leq n-1$. Отсюда следует, что

$$\gamma(\vec{V}) \leq n + (n-1)(n-2) = (n-1)^2 + 1.$$

Хип и Линн [11] показали, что если граф, соответствующий матрице U , имеет, по крайней мере, $k \geq 2$ простых циклов, длины которых различны и взаимно простые, то показатель примитивности не превышает

$$(n-1)^2 + 1 - (k-2)(2n-k-3)/2.$$

5.6. Матрица путей

Для связного графа, вершины которого перенумерованы, можно построить матрицу путей (или цепей) P следующим образом: строки матрицы должны соответствовать путям из первой вершины в последнюю, а столбцы — ребрам графа. Следовательно, элемент матрицы принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит ли данное ребро данному пути или нет. Например, граф, изображенный на рис. 5.8, имеет следующую матрицу путей между вершинами v_1 и v_5 :

$$P = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Теорема 5.10. Произведение AP' матрицы инцидентий на транспонированную матрицу путей дает в результате матрицу, все строки которой, исключая первую и последнюю, содержат нули, а первая и последняя — единицы.

Доказательство. Элемент матрицы AP' принимает значение 1 тогда и только тогда, когда

некоторое ребро одновременно принадлежит данному пути и инцидентно первой или последней вершине. В каж-

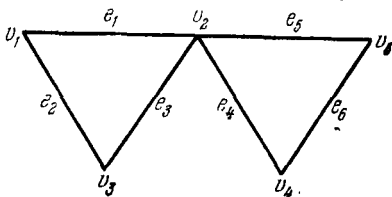


Рис. 5.8.

дой цепи между двумя вершинами существует только одно такое ребро. Вершины любого пути, не являющиеся конечными, имеют степени 0 или 2, и следовательно, все остальные элементы матрицы равны нулю по модулю 2 [21].

З а м е ч а н и е. Ранг матрицы путей графа с n вершинами и m ребрами равен $m - n + 2 - c$, где c — число независимых циклов в таких разделимых подграфах между конечными вершинами, удаление которых из графа не удаляет ни одной из конечных вершин. Из теоремы 5.10 следует, что ранг P не превосходит $m - n + 2$. Заметим также, что хорды деревьев в подграфах, описанных выше, не принадлежат ни одному пути.

5.7. Реализуемость матриц циклов и разрезов

До сих пор мы занимались задачами построения и описания различных матриц, соответствующих графам. Обратная задача построения графа, соответствующего заданной матрице, в общем случае, или тривиальна, или весьма сложна. Первый случай легко проиллюстрировать с помощью матрицы, которая имеет в точности два единичных элемента в каждом столбце и нули во всех остальных местах.

Граф всегда можно построить, если заданная матрица является матрицей инцидентий. Задача построения графа по матрице циклов не является столь же простой в силу того, что ребро может принадлежать более чем двум циклам или двум разрезам.

Вопрос о реализуемости графа изучался многими исследователями. Интересный обзор работ в этом направлении дан в статье Аша и Кима [1]. Строгая и глубокая теория, дающая необходимые и достаточные условия реализуемости, была развита Таттом [17, 18]. Здесь мы ограничимся только самым общим рассмотрением основной теоремы.

Рассмотрим вектор-столбцы некоторой матрицы. Подмножество этих столбцов может оказаться линейно зависимым или линейно независимым. В общем такие подмножества распадаются на два класса, которые не являются произвольными в силу, например, следующих двух теорем [19].

1. Любое подмножество независимого множества также независимо.

2. Если N_p и N_{p+1} — независимые множества, содержащие p и $p+1$ вектор-столбцов соответственно, то N_p вместе с некоторым столбцом из N_{p+1} образует независимое множество, содержащее $p+1$ столбцов.

Система, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *матроидом*. Существуют теоремы, не выводимые из (1) и (2), т. е. имеются матроиды, которые не имеют соответствующих матриц. Таким образом, каждая матрица является матроидом, но обратное, вообще говоря, неверно.

Приведенное определение матроида является модификацией следующего общего определения. *Матроидом на конечном множестве M* называется класс \mathcal{M} ненулевых подмножеств M , которые удовлетворяют следующим условиям.

1. Ни один из элементов \mathcal{M} не содержит другого в качестве собственного подмножества.

2. Если $X, Y \in \mathcal{M}$, $a \in X \cap Y$ и $b \in X - (X \cap Y)$, то существует $Z \in \mathcal{M}$ такое, что $b \in Z \subseteq (X \cup Y) - \{a\}$.

Легко проверить, что множество всех простых циклов или множество всех простых разрезов связного графа образует матроид на множестве ребер графа. Обозначим через R кольцо целых чисел или кольцо вычетов по модулю простого числа.

Цепью на конечном множестве M по R называется отображение f множества M в R , т. е. если $a \in M$, то $f(a)$ — образ a в R . Можно определить сумму $f+g$ двух цепей f и g и произведение kf , где $k \in R$, с помощью соотношений

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \quad \text{и} \quad (kf)(a) = kf(a)$$

для $a \in M$ и показать, что цепи на M по R являются элементами некоторой аддитивной абелевой группы $A(M, R)$. Группа цепей на M по R есть любая подгруппа $A(M, R)$.

Цепь f из группы цепей N является элементарной, если она отлична от нуля и не существует ненулевой цепи $g \in N$ такой, что $|g|$ есть подмножество $|f|$. Здесь носитель $|f|$ цепи f определяется, как множество всех $a \in M$ таких, что $f(a) \neq 0$.

Если R — кольцо целых чисел, то примитивная цепь из N определяется как элементарная цепь, где $f(a)$ принимают значения $0, 1, -1$.

Группа цепей N называется *бинарной*, если R — кольцо вычетов по модулю 2. Она *регулярна*, если R есть кольцо целых чисел и если каждой элементарной цепи соответствует примитивная цепь, имеющая тот же самый носитель.

Если $M(N)$ — класс носителей элементарных цепей группы N , то $M(N)$ является матроидом на M , который называется матроидом N . Этот матроид называется бинарным или регулярным, если он соответствует бинарным или регулярным группам цепей соответственно.

Пусть $K(G)$ и $C(G)$ обозначают матроид простых разрезов и матроид простых циклов графа G соответственно. Матроид M называется *графическим (кографическим)*, если существует граф G такой, что $M=K(G)$ (или $M=C(G)$).

Пусть M — матроид на множестве E , $S \subseteq E$, и пусть $M \cdot S$ обозначает множество минимальных непустых пересечений элементов S с M (где минимальное непустое перечисление обозначает пересечение, не содержащее другого в качестве подмножества). Тогда $M \cdot S$ есть матроид на S , называемый *редукцией* M к S . (Пусть $G \cdot S$ обозначает подграф графа G , определяемый множеством S ребер. Если M — матроид разрезов графа G , то $M \cdot S$ есть матроид разрезов $G \cdot S$.)

Аналогично, множество элементов M , которые являются подмножествами S , есть матроид на S , который обозначается $M \times S$ и называется *сжатием* M в S . (Пусть $G \times S$ обозначает подграф графа G , полученный сжатием в точку всех ребер, не содержащихся в S . Если M — матроид разрезов графа G , то $M \times S$ есть матроид разрезов $G \times S$. В циклах роли «нулей» и «единиц» должны поменяться.)

Наконец, если M — матроид на E , то матроид вида $(M \cdot S) \times T$, где $T \subseteq S \subseteq E$, называется *минором* M .

Теорема 5.11. Матроид M является графическим (кографическим) тогда и только тогда, когда он регулярен и не имеет минора, являющегося матроидом циклов (матроидом разрезов) графа Понтрягина — Куратовского.

5.8. Матрица графов и комбинаторная топология

Свяжем введенные выше понятия с основными идеями комбинаторной топологии. При этом некоторые из результатов будут повторять материал, изложенный ранее, но он будет представлен с другой точки зрения. В частности, будет дано еще одно доказательство теоремы о раскрашивании.

1-цепью ориентированного графа G с n вершинами v_i и m ребрами e_k назовем линейную комбинацию ребер, т. е. $\sum_{k=1}^m a_k e_k$, где a_k — действительные числа. В общем случае, такое ограничение не обязательно, a_k могут быть комплексными или просто рациональными. Множество всех 1-цепей определяет векторное пространство \mathcal{V}_1 на G , при этом множество ребер образует базис размерности m . Сложение цепей в векторном пространстве определяется сложением соответствующих коэффициентов. Аналогично можно определить векторное пространство \mathcal{V}_0 , элементами которого являются 0-цепи, используя линейные комбинации вершин с действительными числами b_i , т. е. суммы вида $\sum_{i=1}^n b_i v_i$. Скалярное произведение двух 1-цепей или двух 0-цепей определяется как сумма произведений соответствующих коэффициентов. Если эта сумма равна нулю, то соответствующие цепи называются ортогональными.

Можно ввести граничный (краевой) оператор ∂ (и кограничный оператор δ), который преобразует \mathcal{V}_1 в \mathcal{V}_0 и \mathcal{V}_0 в \mathcal{V}_1 соответственно. Если ∂ определен на ребре e , то его также можно определить на 1-цепи, потребовав, чтобы он был линеен.

Пусть ребро e ориентировано от граничной точки p_1 к граничной точке p_2 . Тогда определим

$$\partial e = p_2 - p_1 \quad \text{и} \quad \partial \sum_{k=1}^m a_k e_k = \sum_{k=1}^m a_k \partial e_k.$$

Заметим, что p_1 и p_2 могут совпадать, образуя одну вершину графа. Если v — некоторая вершина графа, то

кограница v определяется «пучком в v »:

$$\delta v = \vec{\sum} e - \overleftarrow{\sum} e,$$

где первая сумма берется по ребрам, ориентированным по направлению к v , а вторая — по ребрам, ориентированным по направлению от v . Аналогично, кограница 0-цепи определяется следующим образом:

$$\delta \sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^n b_i \delta v_i.$$

Заметим, что граница цикла или линейной комбинации циклов равна нулю. 1-цепи, имеющие нулевую границу, образуют векторное пространство, являющееся подпространством \mathcal{V}_1 . Коциклом называется некоторая 1-цепь и кограница некоторой 0-цепи. Множество кограниц также образует векторное пространство, являющееся подпространством \mathcal{V}_0 . Отметим, следующие интересные теоремы [8].

1. Скалярное произведение границы любой 1-цепи и любой 0-цепи равно скалярному произведению 1-цепи и кограницы 0-цепи.

2. Скалярное произведение цикла и кограницы равно нулю.

3. 1-цепь, являющаяся циклом и кограницей, есть нулевой вектор пространства \mathcal{V}_1 .

4. 1-цепь, ортогональная каждой когранице, есть цикл.

5. 0-цепь, ортогональная каждому циклу, есть кограница.

6. 1-цепь единственным образом выражается в виде суммы цикла и кограницы.

7. Размерность пространства циклов равна $m-n+1$, а размерность пространства кограниц равна $n-1$.

8. При использовании в качестве коэффициентов целых чисел по модулю 2 множество ребер есть разрез тогда и только тогда, когда оно является кограницей.

Существует интересный способ построения матриц инциденций путем использования граничного оператора δ . Рассмотрим вектор $e = (e_1, \dots, e_m)$ и определим вектор $\delta e = (\delta e_1, \dots, \delta e_m)$. Рассмотрим теперь множество граничных точек p_1, p_2, \dots, p_{2m} ребер e_1, e_2, \dots, e_m

и образуем вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_{2m})$. Пусть D — матрица размером $2m \times m$, элементы которой d_{ij} равны 0, 1 или -1 в зависимости от того, является ли данная точка p_i инцидентной данному ребру e_j или нет, а также от того, является ли она начальной или конечной точкой данного ребра e_j . Тогда $de = pD$. Если мы теперь свяжем с каждой граничной точкой p_j соответствующую вершину v_i , построим вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ и образуем $n \times 2m$ матрицу \mathcal{D} , элемент i, j которой равен нулю или единице в зависимости от того, связана ли данная граничная точка p_j с вершиной v_i или нет, то мы получим $p = v\mathcal{D}$. Таким образом, $de = v\mathcal{D}D$, где $\mathcal{D}D$ есть матрица инцидентий A графа.

Упражнение 5.16. Постройте матрицы \mathcal{D} и D для графа, изображенного на рис. 5.3, и получите матрицу инцидентий как произведение $\mathcal{D}D$.

Теорема 5.12. Карта на сфере, каждая вершина которой имеет четную степень, может быть раскрашена двумя цветами.

Лемма 5.13. Замкнутая кривая C , не проходящая через вершины карты с четными степенями вершин, пересекает ребра граней четное число раз.

Доказательство теоремы. Лемма (которую мы докажем ниже) позволяет сразу доказать теорему. В самом деле, если мы будем использовать красный и синий цвета и начнем раскрашивать грань R_1 красным цветом, то цвет любой другой грани R_i определяется числом ребер, которые пересекаются произвольной кривой, соединяющей некоторую точку в R_1 с некоторой точкой в R_i . Окрасим R_i красным цветом, если это число четно, и синим, если оно нечетно. Из леммы следует, что любые две кривые, идущие из R_1 в R_i , дадут один и тот же цвет для грани R_i . Таким образом, соседние грани будут окрашены в различные цвета, так как кривая, идущая из R_1 в одну из соседних, дает один цвет, а при пересечении любого граничного ребра должен появиться другой цвет.

Доказательство леммы. Пусть $f^1(e_i) = 0$, если C пересекает ребро e_i четное число раз, и $f^1(e_i) = 1$, если C пересекает ребро e_i нечетное число раз (нуль — четное число).

Так как общее число пересечений S с границей каждой грани четно (каждый раз, когда она входит в грань, она должна выйти из нее), f^1 должна быть коциклом, и следовательно, f^1 является границей некоторой 0-цепи f^0 . Пусть v_1, \dots, v_i — все вершины, на каждой из которых f^0 принимает значение 1. Так как общее число ребер, инцидентных этим вершинам, четно (ребро, инцидентное двум из этих вершин, считается дважды), общее число ребер, инцидентных только одной вершине (а не двум), тоже четно. Сюда относятся только такие ребра, для которых $\partial f^0 = f^1$ принимает единичное значение и, следовательно, f^1 приписывает единичное значение четному числу ребер. Из определения f^1 получаем, что существует четное число граничных ребер граней, которые пересекаются S нечетное число раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ash R. B., Kim W. H., On Realizability of a Circuit Matrix. IRE Trans. Circuit Theory, CT-6 (3): 219—223 (1959).
2. Auslander L., Trent H. M., Incidence Matrices and Linear Graphs. J. Math. Mech., 8: 827—835 (1959). MR 21—757.
3. Auslander L., Trent H. M., On the Realization of a Linear Graph Given Its Algebraic Specification. J. Acoust. Soc. Am., 33: 1183—1192 (1961).
4. Cederbaum I., Applications of Matrix Algebra to Network Theory, IRE Trans. Circuit Theory, CT-6: 152—157 (1959).
5. Dulmage A. L., Mendelsohn N. S., Gaps in the Exponent Set of Primitive Matrices, III. J. Math.
6. Gould R., Graphs and Vector Spaces. J. Math. Phys., 37: 193—214 (1958), MR 20—1229.
7. Harary F., Richardson M., A Matrix Algorithm for Solutions and r -Bases of a Finite Irreflexive Relation. Naval Res. Logistics Quart., 6 (4). 307—314 (1959).
8. Harary F., Graph Theory and Electric Networks. IRE Trans. Circuit Theory, CT-6: 95—109 (1959); IRE Trans. Inform. Theory, IT-5: 95—109 (1959).
9. Harary F., A Matrix Criterion for Structural Balance. Naval Res. Logistics Quart. 7 (2): 195—199 (1960).
10. Harary F., On the Consistency of Precedence Matrices. J. Assoc. Computing Mach., 7 (3) (1960).
11. Heap B. R., Lynn M. S., The Index of Primitivity of a Non-negative Matrix. Numerische Math., 6 (2); 120—141 (1964).
12. Iri, Masao, A Necessary and Sufficient Condition for a Matrix to be the Loop or Cut-set Matrix of a Graph and Practical Method for the Topological Synthesis of Networks. Res. Assoc. Appl. Geometry (Tokyo) Notes 50.

13. Lowenheim L., Potenzen, im Relativkalkul und Potenzen allgemeiner endlicher. Sitz. ber Berliner Math. Ges., 12: 137--148 (1913).
14. Olum P., Some Elementary Cohomology Theory. Pi Mu Epsilon J., November, 1951.
15. Parker F. D., Matrices, Relations and Graphs. Math. Mag. 34 (1): 5--9 (1960).
16. Seshu S., Reed M. B., Linear Graphs and Electrical Networks. Addison—Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1961.
17. Tutte W. T., A Homotopy Theorem for Matroids, I, II. Trans. Am. Math. Soc., 88: 144--174 (1958).
18. Tutte W. T., Matroids and Graphs. Trans. Am. Math. Soc. 90: 527--552 (1959).
19. Whitney H., On the Abstract Properties of Linear Dependence. Am. J. Math., 57: 507--533 (1935).
20. Wielandt H., Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z., 52: 642--648 (1950).
21. Wing O., Kim W. H., The Path Matrix and Its Realizability. IRE Trans. Circuit Theory, CT-6(3): 267--272 (1959).

ЧАСТЬ II

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Во второй части книги обсуждается широкий круг прикладных задач теории графов. Наиболее длинная глава 6 посвящается краткому рассмотрению большого числа примеров, иллюстрирующих возможные приложения. Некоторые из задач, затронутых в этих примерах, сформулированы и решены, некоторые — только сформулированы. Часть же задач вообще дается на очень общем описательном уровне просто для того, чтобы читатель смог «почувствовать вкус» к использованию теории графов. Более подробное рассмотрение задач можно найти в соответствующей литературе.

В отличие от главы 6, материал главы 7, посвященный двум особенно важным прикладным разделам теории графов, дается на гораздо более глубоком уровне.

В этой главе рассмотрены линейные потоки в сетях, сформулированы с графотеоретической точки зрения общие методы максимизации потоков и минимизации стоимости.

Глава 6

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

6.1. Введение

Изучать теорию графов без учета возможных приложений — значит потерять основную ее сущность. Учитывая важность сказанного, мы разделили книгу на две части. Вторая часть полностью посвящена краткому изложению некоторых интересных прикладных задач. Цель настоящей главы состоит в том, чтобы с помощью при-

меров научить читателя описывать модели научных и технических задач на языке теорий графов и проиллюстрировать различные способы использования графов для формулировки и решения задач. После проработки каждого раздела читателю рекомендуется исследовать основные свойства рассмотренных графов. В некоторых случаях, таких, например, как в задаче о раскрашенных кубах, использование простой идеи графа, при правильном его выборе, оказывается очень эффективным. Решение этой задачи с помощью графов дает четкое объяснение головоломке, известной под названием «танталовы» муки («ложные надежды»), решение которой методом проб и ошибки оказывается очень громоздким. В других случаях проявляются более сложные графотеоретические свойства. Некоторые из этих свойств нашли применение в промышленном и государственном управлении. Например, ПЕРТ является теперь основным инструментом планирования, который обеспечивает наиболее эффективное достижение поставленных целей. Простое понятие графа возникает и используется в очень многих случаях.

Очевидно, мы должны быть достаточно кратки при описании прикладных задач, так как подробное рассмотрение большинства из них может занять целую главу. Поэтому в некоторых разделах мы ограничились только изложением основных идей в надежде, что читатель продолжит изучение предмета, обратясь к библиографии. Наиболее близкие на наш взгляд разделы мы попытались сгруппировать под общими заголовками. Однако предлагаемая группировка является достаточно гибкой и возможно, что читатель сможет найти гораздо более удачную.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭКОНОМИКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИИ

6.2. Экономика и снабжение

Одной из наиболее значительных макромоделей математической экономики и снабжения является модель «затраты — выпуск», связанная с именем Леонтьева. Эта модель, которую мы будем рассматривать с графотеоре-

тической точки зрения, есть, по сути дела, современное представление знаменитой экономической таблицы (tableau economique), предложенной в 1758—1759 гг. Франсуа Кенэ [75].

В модели «затраты — выпуск» на все операции в экономической системе, состоящей из m наборов элементов (учреждений, фирм, хозяйств), накладывается классификационная сетка. Каждый набор элементов системы, в котором производятся (или потребляются) однотипные товары или услуги, называется *отраслью промышленности, сектором экономики* или *сферой экономической деятельности*. Пусть на некотором историческом периоде в рамках цен, присущих этому периоду, $x_{ij} \geq 0$ обозначает объем товара, закупленного i -й отраслью у j -й ($i, j=1, 2, \dots, m$).

Назовем x_{ij} *объемом затрат* (потребления) товара j -го вида в i -й отрасли. Таким образом, x_{ij} будет являться мерой потока средств, поступающих от i к j , в обмен на ресурсы, поступающие от j к i .

Назовем $x_i = \sum_{h=1}^m x_{hi} > 0$ *объемом выпуска* отрасли i .

Пусть b_{ij} обозначает относительную величину затрат (потребления), т. е. $b_{ij} = x_{ij}/x_i \geq 0$ и называется *удельной затратой* j -го товара в i -й отрасли ($i, j=1, \dots, m$).

Будем считать, что существует баланс

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \equiv \sum_{h=1}^m x_{hi}$$

для всех $i=1, \dots, m$, т. е. сумма элементов i -й строки матрицы затраты — выпуск точно равна сумме элементов i -го столбца.

Рассмотрим теперь определенную выше матрицу $B^* = \|b_{ij}\|$ ($i, j=1, \dots, m$) и любую главную подматрицу B матрицы B^* такую, что $B = \|b_{ij}\|$ ($i, j=1, \dots, r$ и $r < m$). Тогда система $x(I - B^*) = \theta$, где θ — нуль-вектор порядка m , называется *замкнутой моделью типа затраты — выпуск*, а система $x(I - B) = \omega$, где B — любая подматрица порядка $r \leq m$ и ω — неотрицательный вектор, будет называться *незамкнутой моделью типа затраты — выпуск*. Решение x незамкнутой или замкнутой модели называется допустимым тогда и только тогда, когда век-

тор x является конечным, неотрицательным, но ненулевым. Неотрицательный вектор w для незамкнутой модели строится как обусловленный «список товаров» или «список окончательной потребности» для тех отраслей промышленности, которые соответствуют строкам и столбцам, содержащимся в B^* и не содержащимся в B . Допустимые решения x моделей типа затраты — выпуск (незамкнутых или замкнутых) строятся как векторы уровня производства (величины выпуска), определяющие выпуск каждой отрасли. Если для незамкнутой модели существует матрица, обратная матрице $(I - B)$, то можно показать, что она представлена в виде хорошо известного степенного ряда [75]

$$(I - B)^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} B^h.$$

Попытаемся теперь дать графотеоретическую формулировку необходимых и достаточных условий существования матрицы, обратной матрице $(I - B)$ в незамкнутой модели типа затраты — выпуск. Для этого введем некоторые дополнительные определения [73]. Пусть D — ориентированный граф и H — сильно связный подграф D . Сильно связный подграф H будет называться *максимальным* в D тогда и только тогда, когда каждый сильно связный подграф D либо является подграфом H , либо не содержит вершин, общих с H . Сильно связный подграф H в D называется *замкнутым* в D тогда и только тогда, когда H является максимальным и каждая вершина D , достижимая (посредством ориентированного пути) из любой вершины H , содержится в H . Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — неотрицательная квадратная матрица порядка n , т. е. $a_{ij} \geq 0$ для $i, j = 1, \dots, n$. Конечный ориентированный граф $D(A)$ матрицы A определяется как граф, который состоит из n вершин $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и множества дуг (α_k, α_l) таких, что дуга (α_i, α_j) существует в $D(A)$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} > 0$ в A . Можно показать, что ориентированные графы $D(B^*)$ и $D(B)$, соответствующие введенным выше замкнутым и незамкнутым моделям, играют важную роль при исследовании протекания технологических процессов и движения потоков ресурсов.

Неотрицательная квадратная матрица A называется *субстохастической* (по строкам), если сумма по каждой строке A не превышает единицы, т. е. $a_{ij} \geq 0$, $r_i \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$. Если сумма по каждой строке A точно

равна единице, то матрица называется *стохастической*. Из приведенных выше рассуждений следует, что в замкнутой модели $x(I-A^*)=0$ матрица A^* — стохастическая, а в незамкнутой модели $x(I-A)=\omega$ матрица A — субстохастическая. Приведем без доказательства следующую теорему (доказательство см. в [75]).

Теорема 6.1. Пусть A — субстохастическая матрица. Обратная матрица $(I-A)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда в ориентированном графе $D(A)$ нет замкнутых сильно связных подграфов или когда в каждом сильно связном подграфе H , замкнутом в $D(A)$, существует вершина, для которой сумма элементов соответствующей строки A меньше чем единица.

Эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 6.2. Пусть A^* — стохастическая матрица и A — любая главная подматрица A^* . Обратная матрица $(I-A)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда не существует сильно связного подграфа, который является замкнутым в $D(A)$ и в $D(A^*)$.

Доказательство. Предположим, что H является сильно связным подграфом $D(A)$. Тогда H замкнут в $D(A)$, а соответствующая ему матрица A является стохастической тогда и только тогда, когда H замкнут в $D(A^*)$. Из теоремы 6.1 следует, что ни один замкнутый сильно связный подграф в $D(A)$ не замкнут в $D(A^*)$.

Следствие 6.3. Пусть A^* — стохастическая матрица. Если $D(A^*)$ — сильно связный граф (т. е. A^* неприводима или неразложима), то $(I-A)^{-1}$ существует для любой главной подматрицы A матрицы A^* .

Упражнения

6.1. Пусть A — неотрицательная квадратная матрица порядка n , в которой сумма по каждой строке положительная. Показать, что в ориентированном графе $D(A)$, построенном для матрицы A : (1) существует, по крайней мере, один замкнутый сильно связный подграф; (2) каждая вершина $D(A)$ связана не менее чем с одним замкнутым сильно связным подграфом в $D(A)$.

6.2. Показать, что любая незамкнутая модель затраты — выпуск, имеющая, по крайней мере, одно допустимое решение, эквивалентна замкнутой модели затраты — выпуск с ограничениями.

6.3. Пусть A — неотрицательная квадратная матрица порядка n , x — положительный $(n \times 1)$ вектор-столбец и y — положительная $(1 \times n)$ вектор-строка. Пусть \bar{A} обозначает ограниченную матрицу порядка $n+1$ следующего вида: $\begin{vmatrix} A & x \\ y & 0 \end{vmatrix}$. Ориентированный граф $D(\bar{A})$ сильно связный. Показать, что если A в \bar{A} отличается от нуль-матрицы, то \bar{A} является примитивной и точная верхняя граница — индекс примитивности $\gamma(\bar{A})$ равна 4.

Другая, предлагаемая ниже формулировка экономической модели затраты — выпуск, основывается на теореме, которую довольно трудно доказать в рамках ограниченного объема главы. Рассмотрим следующую

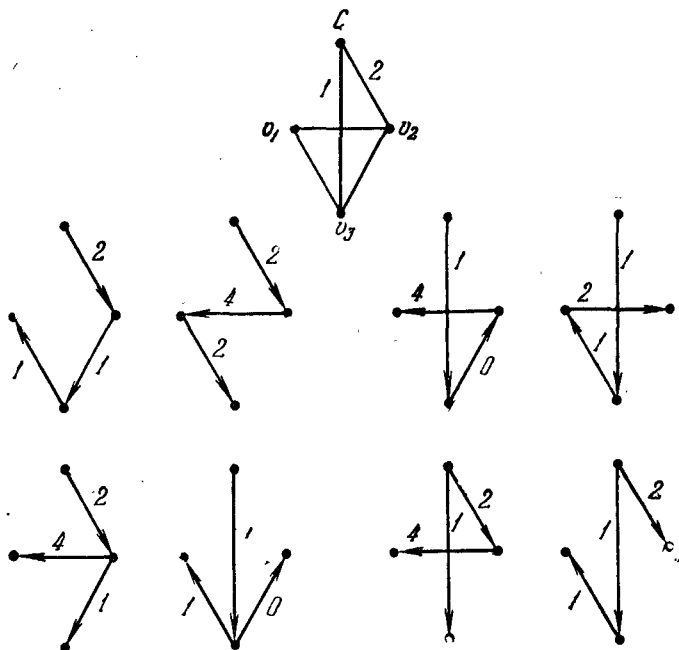


Рис. 6.1.

матрицу, элементы которой дают удельные величины затрат каждой отрасли на покупку товаров у других отраслей (указаны со знаком минус) и удельные значе-

ния выпуска (указаны со знаком плюс). Значения выпуска расположены на главной диагонали [8], [92]:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & \\ \hline 5 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \right\} \text{Потребление (сумма по строкам).}$$

Определитель этой матрицы равен 38.

Рассмотрим граф, соответствующий этой межотраслевой модели. Введем вершину общего потребления C и зададим поток (потребление) из этой вершины в каждую отрасль. Величина этого потока равна чистому выпуску отрасли и находится как сумма элементов соответствующей строки матрицы. Поток к v_1 равен нулю. Следовательно, соответствующее ребро можно не рисовать на графе. Построим все возможные деревья графа (рис. 6.1) и найдем произведение пропускных способностей ребер. Сумма этих произведений, взятая по всем деревьям равна определителю приведенной выше матрицы. Таким образом, $2+16+0+2+8+0+8+2=38$. Положительные деревья соответствуют матрицам, суммы элементов строк которых больше или равны нулю, а элементы, расположенные вне главной диагонали, не являются положительным. Таким образом, единственное положительное дерево гарантирует положительный определитель. Такие матрицы (например, матрицы Леонтьева) с доминирующей диагональю представляют большой интерес для математической экономики.

6.3. Линейное программирование и потоки в сетях

Потоки в сетях будут подробно рассматриваться далее в главе 7. В данном случае будет дано лишь неформальное пояснение основной идеи потока с тем, чтобы продемонстрировать связь задач о потоках с задачами линейного программирования.

Пусть вершины v_0 и v_n ориентированного графа обозначают источник и сток некоторого вещества, протекающего по дугам. Кроме того, предположим, что дуге из вершины v_i в вершину v_j поставлена в соответствие пропускная способность или верхнее ограничение на величину потока \bar{C}_{ij} . Наконец, пусть C_{ij} обозначает стоимость

единицы потока по дуге. Теперь задачу о потоке можно представить в виде задачи линейного программирования, в которой требуется минимизировать $\sum_{i,j} C_{ij}x_{ij}$ для общего потока c из v_0 в v_n при условиях

$$\sum_j (x_{0j} - x_{j0}) = c,$$

$$\sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_j (x_{nj} - x_{jn}) = -c,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \text{для каждой дуги.}$$

Потоки в сетях иногда оказываются удобным средством решения задачи линейного программирования такого типа, которая известна под названием транспортной задачи.

6.4. Задачи типа ПЕРТ*)

Ориентированный граф является естественным средством для описания и анализа сложных проектов, требующих выполнения большого числа взаимосвязанных операций (работ). Проектом может быть, например, процесс разработки, построения и проверки некоторого узла или процесс проектирования и строительства здания, включая этапы получения и подготовки места строительства. В общем случае предположим, что рассматривается некоторый хорошо определенный проект и множество всех операций, связанных с выполнением проекта, можно разделить на отдельные непересекающиеся операции a_1, a_2, \dots, a_n .

Конечно, существуют различные способы разбиения проекта на отдельные части. Выбор конкретного разбиения зависит от соображений, которые будут рассмотрены ниже. (Вообще говоря, отдельные операции должны выбираться так, чтобы можно было получить всю необходимую количественную информацию, определяе-

*) В отечественной литературе принят термин СПУ (сетевое планирование и управление). (Прим. ред.)

мую ниже, и установить все существенные отношения предшествования.)

Хотя некоторые операции проекта независимы друг от друга, в общем случае между ними существует достаточно сильная зависимость по времени, например, операция a_i должна быть закончена прежде, чем может быть начата операция a_j . Если заданы все такие временные зависимости, то их можно удобно представить в виде ориентированного графа, как показано на рис. 6.2. Каждая дуга графа соответствует одной операции, а каждая вершина, называемая событием, соответствует некоторому моменту времени. В частности, вершина v_1 представляет собой начало всего проекта, а v_3 — его окончание. Промежуточные вершины служат для отражения взаимосвязи операций во времени. Вершины выбираются и сопоставляются с дугами так, что для каждой операции (дуги) и события (вершины) справедливо следующее основное утверждение: если операция a имеет начальное событие в виде вершины v , то она не может быть начата до тех пор, пока все операции, заканчивающиеся в v , не будут выполнены. Естественно a может начаться в любой другой момент после того, как выполнены все предшествующие операции. Например, на рис. 6.2 операция 10 (так же как и 12) может быть

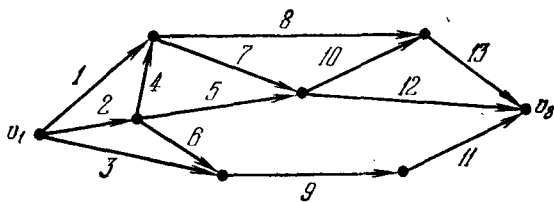


Рис. 6.2.

начата только после выполнения операций 5 и 7. Косвенно начало операции 10 зависит также от моментов выполнения операций 1, 2 и 4, так как они непосредственно определяют начало операций 5 и 7. В начале проекта могут выполняться только операции 1, 2 и 3. Проект считается законченным после выполнения операций 11, 12 и 13 (а, следовательно, всех операций проекта).

Граф такого типа, представляющий процесс выполнения операций, является основой многих методов организационного управления и, в частности, широко известного метода ПЕРТ и метода критического пути. Он позволяет проводить анализ различных вариантов выполнения проектов.

Для иллюстрации основного типа проводимого анализа предположим, что для выполнения каждой операции a требуется известное время $t(a)$.

Несколько операций можно, конечно, выполнить одновременно, если ни одна из операций рассматриваемой группы не ограничена моментами выполнения других операций, входящих в группу. (Это произойдет в случае, если ни одна из рассматриваемых операций не входит в путь, ведущий из v_1 в начальное событие другой операции).

Предположим, что числа на дугах графа рис. 6.3 соответствуют продолжительностям операций. (В данном

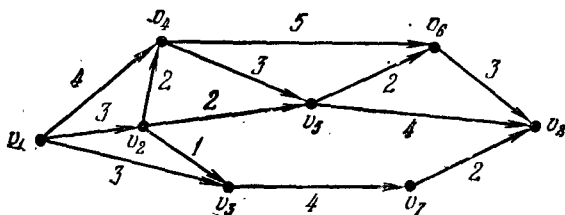


Рис. 6.3.

случае считается, что продолжительность каждой операции известна и постоянна. На самом деле продолжительность операций часто меняется, и ее описывают некоторым распределением вероятности, общий вид которого известен, а оценки его параметров могут быть получены.)

Длина (т. е. сумма временных интервалов) любого пути из v_1 в v_8 соответствует нижней границе времени, измеряемого от начала проекта до наступления события v_8 , после которого могут быть начаты операции, имеющие v_8 в качестве начальной вершины. При расчетах каждой вершине удобно поставить в соответствие число

(время) следующим образом:

$$T(v_1) = 0, \quad T(v_i) = \max \{t(P)\} \quad (i \neq 1),$$

где $t(P)$ обозначает длину пути P и максимум берется по всем путям из v_1 к v_i .

Заметим, что по своей природе граф, представляющий процесс выполнения операций, является ациклическим. (Наличие цикла создало бы невозможную ситуацию, в которой ни одна из операций, входящих в цикл, не могла бы начаться первой, так как ее начало зависело бы от выполнения другой операции цикла.) Поэтому можно найти покрывающее дерево с корнем в v_1 , используя метод главы 3. В результате мы сразу определим пути максимальной длины из v_1 к любой другой

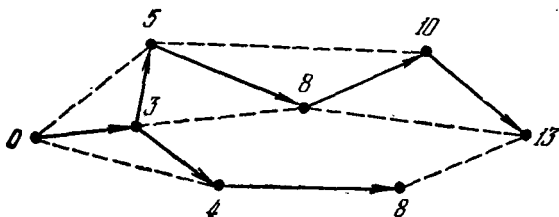


Рис. 6.4.

вершине. (Предполагается, что каждая вершина графа достижима, по крайней мере, по одному пути.)

Соответствующее дерево показано на рис. 6.4, продолжительности операций для него даны на рис. 6.3, а значения $T(v_i)$ приведены в вершинах.

Как уже упоминалось, наиболее ранний возможный момент начала операции (v_i, v_j) удален, по крайней мере, на $T(v_i)$ единиц времени от начала проекта. С другой стороны, график выполнения проекта, основанный на $T(v_i)$, является практически реализуемым. Более точно, если мы запланируем, что каждая операция (v_i, v_j) начинается в момент $T(v_i)$ и заканчивается в момент $T(v_i) + t_{ij}$ (где t_{ij} — длительность соответствующей операции), то ни одна операция не может быть начата раньше момента, определенного основными правилами,

и проект в целом будет выполнен за $T(v_8) = 13$ единиц времени, что соответствует наиболее раннему возможному моменту его окончания.

Упражнение 6.4. Доказать, что при предложенном способе планирования операций отношение предшествования операций не нарушается.

Длиннейший по времени путь от начального события v_1 до конечного v_n называется *критическим путем*. Его длина (в нашем примере 13) соответствует кратчайшему времени, за которое может быть выполнен проект. Минимальное время достигается только в случае, если каждая операция критического пути начинается сразу же после окончания предшествующей. Вообще говоря, критический путь не является единственным. (Читатель может заметить другой критический путь в нашем примере.) Операция называется критической, если она принадлежит одному или нескольким критическим путям. Если проект нужно выполнить за минимальное время, некоторые операции проекта остаются не критическими и существует определенная свобода в их планировании. Измерение этой свободы приводит к определению резерва времени операций. Задача нахождения резерва времени операций будет рассмотрена ниже.

Заметим, что каждое событие должно произойти (т. е. все операции, приводящие к нему, должны быть выполнены) достаточно рано, чтобы обеспечить последовательное выполнение всех операций некоторого пути от него до конечного события. С учетом этого всем событиям, кроме значений $T(v_i)$, удобно сопоставить второе множество чисел (времен). Эти числа аналогичны $T(v_i)$, но их измерение должно производиться относительно конечного события, а не начального.

Таким образом, пусть

$$X(v_n) = 0, \quad X(v_i) = \max\{t(P)\} \quad \text{для } i \neq n,$$

где $t(P)$ — длина пути от v_i до v_n и максимум берется по всем возможным путям. Заметим, что в этом случае для определения $X(v_i)$ мы снова можем воспользоваться методом главы 3. Необходимо только временно поменять ориентацию каждой операции на обратную, найти длиннейшее покрывающее дерево с корнем v_n , а затем

восстановить первоначальную ориентацию дуг. На рис. 6.5 показано дерево, соответствующее нашему примеру. В вершинах графа указаны значения $X(v_i)$. Так

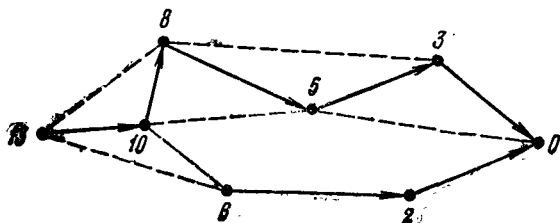


Рис. 6.5.

как величины $X(v_i)$ измеряются от конца проекта, а время выполнения всего проекта $T(v_n)$, то удобно связать эти времена следующим соотношением:

$$L(v_i) = T(v_n) - X(v_i),$$

где $L(v_i)$ определяет самое позднее время осуществления события v_i , не увеличивающее длительности всего

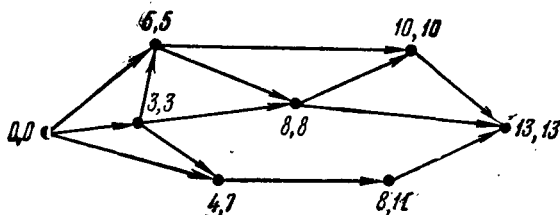


Рис. 6.6.

проекта. На рис. 6.6 показаны значения $L(v_i)$ для каждой вершины одновременно с определенными ранее значениями $T(v_i)$. Величины $T(v_i)$ и $L(v_i)$ удовлетворяют отношению $T(v_i) \leq L(v_i)$.

Упражнение 6.5. Доказать предшествующее утверждение. Кроме того, доказать, что $T(v_i) = L(v_i)$ тогда и только тогда, когда v_i принадлежит некоторому критическому пути.

Величины $T(v_i)$ и $L(v_i)$ позволяют определить резерв времени при планировании отдельных операций (при постоянном минимальном времени проекта). На-

пример, время операции, соответствующей дуге от v_2 к v_3 (см. рис. 6.3), равно одной единице, и мы определили, что $T(v_2) = 3$, $L(v_2) = 3$, $T(v_3) = 4$, $L(v_3) = 7$. Следовательно, эту операцию можно было бы начать самое раннее в момент 3 и самое позднее в момент 6. При этом событие v_3 наступило бы не позднее момента 7. Естественно, что если мы использовали некоторую часть резерва времени рассматриваемой операции, начав ее позже момента 3, то мы тем самым сократили резервы времени у последующих операций, в нашем случае у операций (v_3, v_7) и (v_7, v_8) . Вообще говоря, каждое событие v будет происходить в интервале между $T(v)$ и $L(v)$ в зависимости от распределения резерва времени.

До сих пор мы предполагали, что на каждую операцию требуется постоянное время и что эта величина времени заранее известна. Если это не так (а на самом деле это почти всегда не так), то разумно предположить, что продолжительность каждой операции есть некоторая случайная величина, определяемая распределением вероятностей, соответствующим данной операции. Далее нужно получить возможно лучшие оценки параметров этого распределения и использовать их при последующем анализе. В первоначальном варианте метода ПЕРТ, например, предполагалось, что продолжительность операции получается из так называемого «бета-распределения» (природа «бета-распределения» для нас сейчас не существенна, интересующиеся могут найти подробности в литературе, посвященной ПЕРТ). При этом для каждой операции находят три временные оценки: a , m и b , где a и b соответственно оптимистическая и пессимистическая оценка времени выполнения операции, а m — наиболее вероятная оценка. Среднее значение времени выполнения операций и ее стандартное отклонение оцениваются по следующим формулам:

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad \sigma = \frac{b - a}{6}.$$

По вычисленным средним временам, описанным выше способом, определяются $T(v_i)$, $L(v_i)$ и резерв времени. Кроме того, возможный разброс продолжительности операции можно использовать для оценки вероятности окончания проекта в заданный срок.

При работе с переменной длительностью операций возникают серьезные математические трудности, даже если точно известно распределение, соответствующее каждой операции, и все распределения считаются независимыми. В этом случае приходится использовать различные приближенные методы. Проиллюстрируем одно из возможных осложнений общего характера. Предположим, что путь P является критическим, а P' — некоторый путь из начального события в конечное, очень

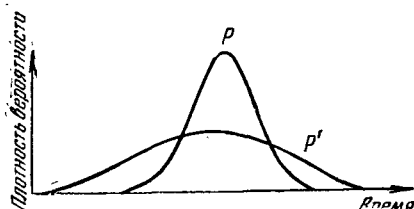


Рис. 6.7.

мало отличающийся от P . Пусть P и P' найдены на основе средних значений времен выполнения операций. Может оказаться, что времена операций пути P имеют малый разброс, а пути P' — большой. Например, соответствующие распределения могут иметь вид рис. 6.7. В этом случае существует достаточно большая вероятность того, что время выполнения проекта будет определяться путем P' , а не P и выводы, сделанные из расчета того, что P является критическим путем, окажутся неточными.

Кроме длительности проекта часто необходимо рассматривать другие количественные характеристики, например, требуемые затраты людских или денежных ресурсов. Более того, эти характеристики могут оказаться взаимосвязанными. Например, иногда можно сократить длительность операции с помощью дополнительных вложений денежных или людских ресурсов. Много внимания уделялось и уделяется решению различных задач планирования при изменяющихся целевых функциях или ограничениях в условиях различного взаимоотношения разработчика с проектом. (Например, метод решения задачи распределения ресурсов по операциям существенно зависит от того, в какой момент принимается решение о распределении до начала выполнения проекта или в процессе его выполнения.) Многие из предложенных методов сейчас успешно реализованы с помощью цифровых вычислительных машин. Наша цель в

данном случае состояла только в том, чтобы показать принципиальное значение графов, представляющих процессы выполнения операций при решении задач планирования проектов. Основные методы решения таких задач рассмотрены в работах [53], [54], [61]. Интересное обсуждение основных допущений дается в работе [60].

Дополнительные сведения

Метод ПЕРТ показывает, что теория графов является мощным инструментом решения задач планирования реализации проектов. С графотеоретической точки зрения ПЕРТ оперирует с временными характеристиками, определенными на графе. Такие временные характеристики позволяют найти график выполнения операций, распределение событий во времени и дерево длинейших путей (критический путь).

Успех метода ПЕРТ содействовал применению теории графов для решения других задач управления проектами. Как указывалось выше, первоначальный метод ПЕРТ был основан на определении временных параметров на графе. Не удивительно, что впоследствии были введены на графе и характеристики другого типа, например, такие, как стоимость, ресурсы. (Под ресурсами имеются в виду люди, материалы, механизмы.) Помимо чисел, каждой дуге графа можно сопоставить такие функции, как, например, время-стоимость, или время-ресурсы. Эти функции показывают, как изменяются стоимость или ресурсы операции в зависимости от ее длительности. Задание функции стоимости на каждой дуге графа проекта позволяет найти кривую стоимость-время для всего проекта. Для вычисления таких кривых было предложено множество алгоритмов. Эти алгоритмы можно использовать также для нахождения такого графика выполнения проекта, который обеспечивает минимальную стоимость выполнения при заданном времени.

Алгоритмы Келли (1961), Фалкерсона (1962), Гросмана и Лерха (1961), оптимизирующие проект по стоимости, иллюстрируют возможности теории графов при построении моделей задач, разработке вычислительных алгоритмов и проведении простых доказательств. Трудность восприятия названных работ обратно пропорцио-

нальна степени использования теории графов. Доказательства Келли, основанные на методике параметрического линейного программирования Гасса и Саати (1955), оказываются очень громоздкими. Метод Фалкерсона, заключающийся в сведении исходной задачи параметрического линейного программирования к задаче определения потока в сети, проще метода Келли. Наконец полностью графотеоретический подход Гроссмана и Лерха представляется почти очевидным, но вместе с тем он является достаточно строгим. Аналогичный подход использован Берманом (1964) при нелинейных функциях стоимости и Фейем (1964) для планирования много-темных разработок.

Делается довольно много попыток решения задач на графах при заданных функциях ресурсов (Ламбурн, 1963, Фей, 1964). В этом случае типичная задача состоит в том, чтобы найти такое распределение ресурсов, при котором выдерживаются все требуемые графики выполнения проектов и количество ресурсов, необходимое для их выполнения, никогда не превышает имеющегося на данном интервале времени. Решение такого рода задач пока еще вызывает серьезные затруднения.

Основные допущения, лежащие в основе метода ПЕРТ, были исследованы Мак-Криммом (1964), который показал, что одна из проблем обусловлена заданием длительности операций не в виде действительных чисел, а в виде распределений вероятности. Для преодоления осложнений, вызванных стохастическими переменными, Фей (1963) и Ван Слейк (1963) предложили метод статистического моделирования сетей.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 6.4

Berman E. B., Resource Allocation in a PERT Network under Continuous Time — Cost Functions. *Management Sci.*, 10: 734—745 (1964).

Bigelow C. G., Bibliography on Project Planning and Control by Network Analysis: 1959—1961. *Operations Res.*, 10: 728—731 (1962).

Elmaghraby S. E., An Algebra for the Analysis of Generalized Activity Networks. *Management Sci.*, 10: 494—514 (1964).

Fey C. F., *Methods of Resource Allocation*, I and II. IBM, 1963, 1964.

Fulkerson D. R., A Network Flow Computation for Project Cost Curves. *Management Sci.*, 7: 167—178 (1961).

Gass S., Saaty T., The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function. Naval Res., Logistics Quart., 10: 39—46 (1955).

Goldberg C. R., An Algorithm for the Sequential Solution of Schedule Networks. Operations Res., 12: 499—503 (1964).

Grossman I. F., Lerchs H., An Algorithm for Directed Graphs with Application to the Project Cost Curve and In-Process Inventory, Third Annual Conference of the Canadian Operational Research Society, Ottawa, May 4—5, 1961.

Kelley J. E., Jr., Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis. Operations Res., 9: 296—320 (1961).

MacCrimmon K. R., Ryavec C. A., An Analytical Study of the PERT Assumptions. Operations Res., 12: 16—37 (1964).

Van Slyke R. M., Monte Carlo Methods and the PERT Problem. Operations Res., 11: 839—860 (1963).

Wiest J. D., Some Properties of Schedules for Large Projects with Limited Resources. Operations Res., 12: 395—418 (1964).

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

6.5. Примеры комбинаторных задач в теории графов

Ниже будут кратко рассмотрены комбинаторные задачи, возникающие в теории графов. Так как некоторые методы, применяемые в комбинаторике, являются сложными и их рассмотрение выходит за рамки данной книги, мы удовлетворимся одной или двумя интересными задачами.

При решении задач перечисления следует различать *помеченный* и *непомеченный* или *свободный* (топологический) граф.

Два графа, вершины которых помечены, считаются тождественными (неразличимыми) в том и только в том случае, когда любые две вершины, помеченные одинаково в обоих графах, имеют одинаковое число инцидентных им ребер. Так, два графа могут считаться различными, даже если они изоморфны.

Можно, наоборот, рассматривать графы с заданным числом непомеченных вершин и заданным числом помеченных ребер. Так как помеченные графы могут различаться, несмотря на топологическую эквивалентность, вычисления для них оказываются более простыми. Действительно, здесь нет необходимости определять число эквивалентных графов, поэтому общее число вычислений уменьшается. Во многих случаях возникает задача

определения числа графов, обладающих определенным свойством, например, содержащих циклы длины 3.

Число помеченных графов (не обязательно связных) с n помеченными вершинами и k непомеченными ребрами, в которых каждая пара вершин связана не более чем одним ребром, равно $\binom{n(n-1)/2}{k}$. Для того чтобы получить это число, последовательно выбираем по k различных ребер из $n(n-1)/2$ ребер полного n -вершинного графа. Если взять 4 вершины и 4 ребра, то существует 15 возможных пометок на двух топологически различных графах. На рис. 6.8 показано число



Рис. 6.8.

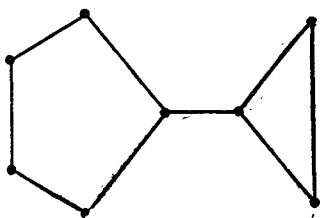


Рис. 6.9.

пометок для двух топологически неэквивалентных графов с четырьмя вершинами и тремя, четырьмя, пятью и шестью ребрами [48].

Многие задачи перечисления в теории графов являются абстракциями физических задач (например, задач статистической механики). Графическая формулировка таких задач облегчает вычислительный процесс. Некоторые из используемых при этом понятий связаны с деревьями специального типа. Граф без точек сочленения называется *звездой*, и следовательно, связный граф можно представить как объединение звезд, связанных в точках сочленения. Из обычного определения дерева следует, что дерево есть граф с точками сочленения, составляющие звезды которого состоят из единственного ребра. Если составляющие звезды являются многоугольниками, то граф называется *деревом Хусими*. Граф, показанный на рис. 6.9, становится деревом Хусими, если две его точки сочленения соединить второй цепью.

Если звезды, составляющие граф, более сложны, то граф называется *звездчатым деревом* (*деревом звезд*). Если все звезды изоморфны, то имеем чистое звездчатое дерево, в противном случае граф называется *смешанным звездчатым деревом*. Когда типы звезд не оговариваются, мы имеем просто связный граф. Дерево, ребра которого помечены значками плюс или минус, называется *знаковым деревом*.

Многие комбинаторные задачи теории графов приводят к интересным формулам. Например, с помощью довольно сложных выкладок можно показать, что число графов с n помеченными вершинами, состоящих из k непересекающихся деревьев, дается выражением

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{k}{j} \binom{n-1}{k+j-1} n^{n-k-j} (k+j)!$$

В процессе этих выкладок можно определить число деревьев полного графа с n помеченными вершинами. Кэли впервые доказал, что это число равно n^{n-2} . Приведем интересное доказательство этого факта по индукции [72].

Теорема 6.4. Число деревьев полного графа с n помеченными вершинами равно n^{n-2} .

Доказательство. Для того чтобы избежать лишних выкладок, укажем сразу следующее известное в анализе тождество:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} j^{j-1} (n-j)^{n-j-1} = 2n^{n-2} (n-1).$$

Теорема, очевидно, справедлива для одновершинного графа, так как $1^{1-2} = 1$. Предположим, что теорема справедлива для полного графа с числом вершин, меньшим n , и докажем, что она справедлива для n -вершинного полного графа. Обозначим через T_n число деревьев полного графа с n вершинами. Разделим n вершин на два множества, одно из i элементов и второе из $n-i$ элементов, где i может быть любым из чисел $1, 2, \dots, n-1$. По индуктивному предположению, число деревьев первого подграфа равно i^{i-2} , а второго — $(n-i)^{n-i-2}$. Исследуем все способы связи дерева первого

подграфа с деревом второго подграфа, при которых образуется дерево полного графа. Так как такая связь может быть образована между любой из i вершин первого подграфа и любой из $(n-i)$ вершин второго подграфа, то общее число возможных связей $i(n-i)$. Таким образом, число деревьев в полном графе, получаемое при данном выборе i , равно

$$i(n-1)i^{i-2}(n-i)^{n-i-2} = i^{i-1}(n-i)^{n-i-1}.$$

Однако i вершин можно выбрать среди n вершин

$$\frac{n!}{(n-i)!i!} = \binom{n}{i}$$

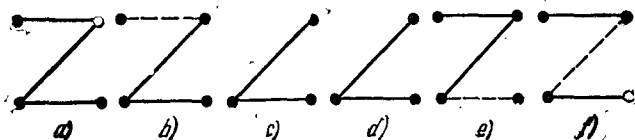
способами, и следовательно, если мы умножим полученное выше число деревьев для одного разбиения на число всевозможных разбиений при данном i и просуммируем по i , то получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1} (n-i)^{n-i-1}.$$

Остается рассмотреть вопрос дублирования. Некоторые деревья исходного графа могут входить в последнюю сумму более одного раза. Действительно, так как существует $(n-1)$ способ выбора подграфа с i вершинами, то по мере увеличения i и приближения i к $(n-1)$ величина $(n-i)$ уменьшается до 1. Таким образом, роли подграфов с i и $(n-i)$ вершинами взаимно меняются. В результате оказывается, что существует $(n-1)$ пар подграфов с $(1, n-1), (2, n-2), \dots, (i, n-i), \dots, (n-1, 1)$ вершинами. Каждая из этих пар порождает два дерева в исходном графе, так как, например, пару $(1, n-1)$ можно образовать двумя способами: $(1, n-1)$ и $(n-1, 1)$. Таким образом, чтобы получить общее число различных деревьев первоначального графа, последнюю сумму следует разделить на $2(n-1)$. Применяя названный выше результат из анализа, получим, что число деревьев полного графа равно n^{n-2} .

Упражнение 6.6. Проверить утверждение о том, что число дублированных равно $2(n-1)$, на примере полного графа с четырьмя вершинами. Заметим, например, что дерево (а), показанное ниже, получается шестью способами. Два способа заключаются в связывании подграфов, как показано в (б), причем в первом способе изолирован-

ная вершина является первым подграфом разбиения, а (с) соответствует второму, во втором способе (d) соответствует первому подграфу разбиения, а изолированная вершина — второму. Другие два способа получаются из (e) и два последних — из (f).



Рассмотрим доказательство этой теоремы, предложенное Трентом [89]. Пусть A — матрица инцидентий (без одной строки) полного n вершинного графа с $n-1$ независимыми строками. Известно, что число различных деревьев в любом графе определяется детерминантом матрицы AA' , который мы обозначим $|AA'|$. В нашем случае AA' имеет вид

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (n-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & (n-1) \end{pmatrix}.$$

Пусть T — вторая матрица порядка $(n-1)$, элементы которой даются выражениями

$$\begin{aligned} t_{ii} &= 2 & (i < n-1), \\ t_{ij} &= 1 & (i \neq j), \\ t_{n-1, n-1} &= 1. \end{aligned}$$

Легко показать, что $|T|=1$. Рассмотрим детерминант произведения

$$|T(AA')| = |T||AA'| = \det \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = n^{n-2}.$$

Так как $|T|=1$, то $|AA'| = n^{n-2}$. Теорема доказана.

В качестве еще одной иллюстрации возможных задач определим максимальное число контуров длины 3 (т. е. состоящих из трех дуг), которое может иметь полный антисимметрический граф с n вершинами [5, гл. 1]. Рассмотрим матрицу вершин этого графа. i -я строка

матрицы дает отношения инцидентности для дуг, положительно инцидентных i -й вершине (т. е. исходящих из нее), а i -й столбец дает инцидентности для дуг, отрицательно инцидентных этой вершине (входящих в нее). Если r_i означает сумму элементов i -й строки, а c_i — соответствующую сумму i -го столбца, то $r_i + c_i = n - 1$, так как i -я вершина связана $(n - 1)$ ребрами с остальными $(n - 1)$ вершинами.

Общее число циклов длины 3 равно $\binom{n}{3}$. Однако это число не является числом контуров. В контуре все дуги ориентированы по направлению контура. Поэтому если две дуги положительно инцидентны одной вершине, то они не могут обе входить в контур, потому что их ориентация противоположна.

Так как сумма r_i элементов i -й строки дает число дуг, исходящих из i -й вершины, мы должны исключить из общего числа циклов $\sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2}$, т. е. сумму по всем строкам числа сочетаний суммы элементов каждой строки по два. Это дает для числа контуров

$$\binom{n}{3} - \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (r_i^2 - r_i).$$

Так как граф полный, то число его ребер равно $\binom{n}{2}$ и должно выполняться равенство $\sum_{i=1}^n r_i = \binom{n}{2}$, потому что общая сумма всех строк должна учитывать все ребра графа.

Теперь для числа контуров имеем

$$\binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2$$

и задача заключается в определении r_i , при которых это количество максимально. Такой выбор r_i соответствует специальной ориентации дуг графа, при которой число контуров максимально. При решении этой задачи доста-

точно определить r_i так, чтобы $\sum_{i=1}^n r_i^2$ была минимальной, потому что эта сумма вычитается из постоянного числа в написанном выше выражении, которое должно быть максимизировано. Предыдущие рассуждения будут также справедливыми, если мы возьмем сумму c_i элементов столбцов и воспользуемся тем, что дуги, входящие в одну и ту же вершину, не могут быть сторонами одного контура. В этом случае наша задача сведется к определению c_i , которые максимизируют

$$\binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Таким образом, найдя c_i , минимизирующие $\sum_{i=1}^n c_i^2$, мы определим максимальное число контуров в графе. Заметим, что выражения для максимального числа контуров симметричны относительно c_i и r_i . Отсюда следует, что c_i должно быть равно r_i . Так как $r_i + c_i = n - 1$, то в случае нечетных n получаем $r_i = (n - 1) / 2$.

Упражнение 6.7. Подставить полученное значение r_i и получить точное выражение для максимального числа контуров. Определить также r_i для случая четного n и найти максимальное число контуров для этого случая.

З а м е ч а н и е. Другая интересная задача состоит в получении формулы для среднего числа висячих вершин дерева, задаваемого случайным образом. При решении этой задачи часто не удается получить удобную формулу для результата. Однако предполагая n достаточно большим, мы можем получить асимптотическую формулу, которая удобна для вычислений. Например, среднее число висячих вершин дерева, выбранного случайно среди всех деревьев, число которых было подсчитано выше, равно n/e , где e — основание натурального логарифма, т. е. $e = 2,718\dots$

Были получены формулы для числа корневых графов, т. е. для графов, в которых выделена одна вершина, названная корнем, а также формулы для подсчета корневых звездчатых деревьев. Ряд результатов связан с ориентированными графами и с графами, имеющими

кратные ребра, т. е. графами, в которых между каждой парой вершин может быть до k ребер.

В полном графе с n помеченными вершинами имеется $\binom{n}{2}$ ребер. Число графов с N ребрами равно

$$\left(\binom{n}{2} \right)_N,$$

т. е. числу возможных сочетаний из $\binom{n}{2}$ ребер по N .

Предположим, что из $\binom{n}{2}$ ребер случайным образом выбраны N ребер. Какова вероятность того, что полученный граф связан? Граф может состоять из нескольких компонент; чему равен размер самого большого дерева, т. е. сколько ребер оно имеет? Заметим, что в этих задачах две вершины могут быть связаны только одним ребром. Однако такие же задачи можно поставить и для мультиграфов с кратными ребрами.

Можно показать, что для больших N общее число связных графов равно $2^{\binom{n}{2}}$ в случае помеченных вершин и $2^{\binom{n}{2}}/n!$ в случае непомеченных вершин.

Процесс рождения или стационарный ветвящийся процесс, (называемый также *процессом размножения*) можно представить деревом, растущим из некоторого корня (корневым деревом), и рассмотреть ряд задач для этого прадерева. Пусть имеется частица u_0 (соответствующая корню дерева), которая порождает ω частиц u_1, u_2, \dots , где $\omega = j$ с вероятностью p_j . Каждая из появившихся новых частиц в свою очередь рождает u_{j1}, u_{j2}, \dots и так далее. Рождение частиц происходит взаимно независимо, и все частицы имеют одно и то же распределение вероятностей для числа рождаемых частиц. Вероятность P_n того, что дерево состоит из n вершин, можно представить для больших n асимптотическим вы-

ражением $P_n \sim A^{-n} n^{-\frac{3}{2}}$ ($n \equiv 1 \pmod{q}$), где A — постоянная величина, а q является наибольшим общим делителем для всех j таких, что $p_j \neq 0$. Для других значений n $P_n = 0$. Можно получить также асимптотические вы-

ражения для вероятности того, что $\omega = j$, и для распределения числа вершин с k исходящими дугами в деревьях, имеющих n вершин.

Применение теоремы Пойя к задачам перечисления

Некоторые из основных задач перечисления в теории графов могут быть решены при помощи фундаментальной комбинаторной теоремы Пойя [71]. Сюда относятся задачи подсчета числа неизоморфных обыкновенных графов, имеющих p вершин и q ребер, или числа неизоморфных обыкновенных ориентированных графов, имеющих p вершин и q дуг, а также обобщения этих задач на случай, когда графы не обязательно обыкновенные (но когда максимальное число параллельных ребер или строго параллельных дуг ограничено).

Решение этих и близких к ним задач подсчета при помощи теоремы Пойя было предложено Харари [44]. Для иллюстрации идей метода рассмотрим несколько простых примеров в виде следующих частных задач.

1. Для любых q определить число неизоморфных обыкновенных графов, имеющих 5 вершин и q ребер.

2. Для любых q определить число неизоморфных регулярных обыкновенных ориентированных графов, имеющих 4 вершины и q дуг.

3. Для любых q определить число неизоморфных графов, имеющих 4 вершины и q ребер, в которых любая пара вершин соединяется не более чем двумя ребрами и нет петель.

Прежде чем сформулировать теорему Пойя и показать ее применение к этим задачам, необходимо дать некоторые предварительные пояснения. Первое из них касается группы перестановок. *Перестановка* степени k есть оператор, применение которого к любой упорядоченной системе из k элементов дает переупорядочение этой системы. (Если каждый элемент остается на прежней позиции, то перестановка называется *тождественной*.) Так как физическая природа переставляемых элементов в данном случае несущественна, перестановку степени k можно характеризовать при помощи чисел от 1 до k , которые указывают позиции (места) элементов в их упорядоченной последовательности.

Например, схема

Старая позиция	1	2	3	4	5	6
Новая позиция	3	2	5	6	1	4

характеризует перестановку степени 6, в которой первый элемент становится третьим, второй остается вторым, третий становится пятым и т. д.

Предыдущая перестановка очевидным образом представляется в виде ориентированного графа, который показан на рис. 6.10. Вообще, любую перестановку степени k можно представить ориентированным графом, вершины которого соответствуют числам от 1 до k , причем положительные и отрицательные степени каждой вершины равны 1. Было показано, что такой ориентированный граф обязательно распадается на один или несколько простых контуров без общих вершин (некоторые из них могут быть петлями). Действительно, другое используемое обозначение предыдущей перестановки есть так называемое *циклическое представление*: (1, 3, 5) (2) (4, 6). В общем случае, циклическое представление интерпретируется так: позиция, представленная любым числом, отображается в позицию, соответствующую следующему числу справа, за исключением самой правой позиции внутри данной группы, которая отображается в позицию, соответствующую самому левому числу в группе.

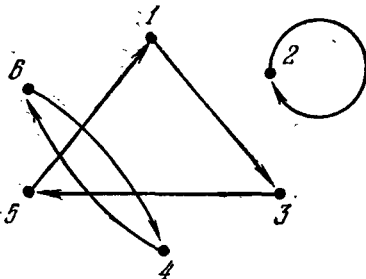


Рис. 6.10.

Тип данной перестановки степени k определяется в зависимости от числа контуров длины i , которое она содержит, для $i=1, 2, \dots, k$. Если n_i обозначает число контуров длины i , то тип перестановки удобно описывать вектором (n_1, n_2, \dots, n_k) . Очевидно, тип должен удовлетворять условию $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + k \cdot n_k = k$ (почему?). Тип предыдущей перестановки есть $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, а перестановка степени 12, циклическое представление которой

(1, 4, 2, 6) (3) (5, 7, 9, 8) (10) (11, 12),

имеет тип

$$(2, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Другой удобный способ представления типа этой перестановки y_1^2, y_2^1, y_4^2 , где нижние индексы означают длины контуров, а верхние соответствуют числу контуров заданной длины. (Символ y не имеет специального значения и применяется как основа для расстановки индексов.) Заметим, что если в перестановке отсутствуют контуры длины i , то символ y_i^0 опускается.

Рассмотрим множество P , состоящее из k перестановок степени h . Пусть h_{j_1, j_2, \dots, j_k} обозначает число перестановок типа (j_1, j_2, \dots, j_k) . Тогда формальный ряд

$$Z(P) = \frac{1}{h} \sum h_{j_1, j_2, \dots, j_k} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_k^{j_k},$$

где суммирование ведется по всем типам, называется *циклическим индексом* P . Будем рассматривать множества P перестановок (одной и той же степени), которые образуют группу относительно бинарной операции последовательного применения двух перестановок. Таким образом, P должно содержать тождественную перестановку, обратную перестановку для каждой из перестановок и произведение любых двух перестановок группы.

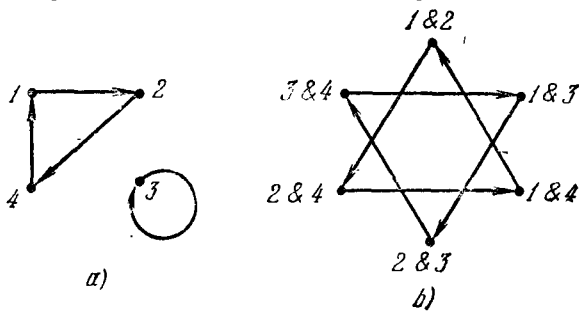


Рис. 6.11.

В данном случае нас интересуют перестановки множества всех неупорядоченных пар (или в случае направленного графа упорядоченных пар) вершин графа, которые получаются в результате перестановки вершин графа. Например, если вершины четырехвершинного графа переставлены, как показано на рис. 6.11, а, то

получается перестановка неупорядоченных пар вершин, показанная на рис. 6.11, *b*. Для данного частного примера заметим, что перестановка четырех вершин, имеющая тип $y_1^1 y_3^1$, индуцирует перестановку шести неупорядоченных пар вершин, тип которой y_3^2 . Подобным же образом, каждая из $n!$ возможных перестановок n вершин индуцирует вполне определенную перестановку $n(n-1)/2$ неупорядоченных пар вершин (или $n(n-1)$ упорядоченных пар, если мы изучаем ориентированные графы).

Далее нам потребуется знать число перестановок как для упорядоченных, так и для неупорядоченных пар каждого типа, индуцированных всеми возможными перестановками четырех вершин, а также число перестановок неупорядоченных пар, индуцированных всеми возможными перестановками пяти вершин. Метод получения такой информации в общем случае рассмотрен в работе [44]. Для интересующих нас случаев информация о числе перестановок каждого типа содержится в следующих циклических индексах:

четыре вершины, неупорядоченные пары:

$$\frac{1}{24} (y_1^6 + 9y_1^2 y_2^2 + 8y_3^2 + 6y_2^1 y_4^1);$$

четыре вершины, упорядоченные пары:

$$\frac{1}{24} (y_1^{12} + 6y_1^2 y_2^5 + 3y_2^6 + 8y_3^4 + 6y_4^3);$$

пять вершин, неупорядоченные пары:

$$\frac{1}{120} (y_1^{10} + 10y_1^4 y_2^3 + 20y_1^1 y_3^3 + 30y_4^2 y_4^1 + 15y_2^4 y_1^2 + 20y_1^1 y_3^1 y_5^1 + 24y_5^2).$$

Введем еще несколько вспомогательных понятий. Рассмотрим множество абстрактных объемов, называемых *фигурами*, и предположим, что с каждой фигурой связано одно из нескольких неотрицательных чисел (мы будем использовать только числа 0, 1 и 2), которое будем называть ее *объемом* (в более общей форме, теорема Пойя позволяет связывать с каждой фигурой неко-

торый целочисленный вектор). Если a_k обозначает число различных фигур, имеющих объем k , то формальный ряд

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

называется *рядом, перечисляющим фигуры* (здесь x является фиктивной переменной).

Конфигурация длины s есть последовательность или упорядоченное множество s фигур. Под *объемом конфигурации* понимается простая сумма объемов фигур. Некоторые конфигурации длины s считаются эквивалентными. В частности, пусть P — группа перестановок степени s , и пусть h — число перестановок в группе. Тогда говорят, что две конфигурации *эквивалентны относительно P* в том и только в том случае, когда одна получается из другой подходящей перестановкой из P .

Если b_k обозначает число неэквивалентных конфигураций (длины s), имеющих объем k , то формальный ряд

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

называется *рядом подсчета*, перечисляющим конфигурации (относительно P).

Теорема Пойя позволяет определить $B(x)$, зная ряд, перечисляющий фигуры $A(x)$, и циклический индекс $Z(P)$ подгруппы перестановок P . В частности, мы имеем (без доказательства) следующую теорему.

Теорема 6.5. (Пойя). Если $A(x)$ и $Z(P)$ обозначают ряд, перечисляющий фигуры, и циклический индекс P соответственно, то ряд, перечисляющий конфигурации, можно получить подстановкой $A(x^h)$ вместо каждого y_k в циклический индекс группы P .

Рассмотрим снова задачу подсчета всех неизоморфных обыкновенных графов, имеющих пять вершин. Возьмем в качестве фигур 10 неупорядоченных пар различных вершин. Будем считать, что фигуры имеют объем 1 или 0 в зависимости от того, соединены соответствующие вершины ребрами или нет. Тогда ряд, перечисляющий фигуры, принимает простую форму

$$A(x) = 1 + x.$$

Рассмотрим затем конфигурации длины 10, соответству-

ющие последовательностям, образованным из 10 фигур. В данном случае группа перестановок P состоит из множества перестановок 10 фигур (т. е. неупорядоченных пар различных вершин). Она индуцирована группой P^* всех возможных перестановок пяти вершин (заметьте, что имеется $5!$ таких перестановок).

Подставляя $1+x^h$ вместо каждого y_h в циклический индекс $Z(P)$, определенный ранее, и упрощая полученное выражение, получим

$$B(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 4x^7 + 2x^8 + x^9 + x^{10}.$$

На основе этого можно, например, сделать вывод, что существуют 6 различных графов с четырьмя ребрами, так как в выражении присутствует член $6x^4$. Эти графы показаны на рис. 6.12.

Для того чтобы найти число различных обыкновенных ориентированных графов, имеющих 4 вершины,

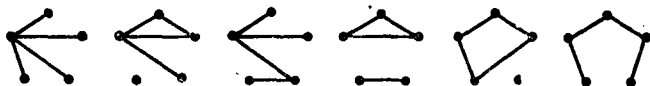


Рис. 6.12.

представим фигуры как упорядоченные пары вершин. В этом случае ряд, перечисляющий фигуры, останется прежним $A(x) = 1+x$, так как упорядоченная пара вершин либо соединена, либо не соединена дугой. Циклический индекс $Z(P)$ для группы P перестановок 12 упорядоченных пар вершин, индуцированных всеми возможными перестановками вершин, был выписан выше. Подставляя $A(x^h)$ вместо y_h в $Z(P)$ и делая упрощения, получим

$$B(x) = 1 + x + 5x^2 + 13x^3 + 26x^4 + 38x^5 + 48x^6 + 38x^7 + 26x^8 + 13x^9 + 5x^{10} + x^{11} + x^{12}.$$

Наличие члена $5x^2$, например, позволяет сделать вывод, что имеется 5 различных графов с двумя дугами. Эти графы показаны на рис. 6.13.

Вернемся снова к задаче подсчета числа различных графов, имеющих 4 вершины, в которых нет петель, а любая пара вершин соединяется самое большее двумя

ребрами. В этом случае в качестве фигуры снова берется неупорядоченная пара вершин. Однако при этом объем может принимать три значения 0, 1 или 2 в



Рис 6.13.

зависимости от числа ребер, соединяющих вершины. Поэтому ряд, перечисляющий фигуры, имеет вид

$$A(x) = 1 + x + x^2.$$

Подставляя $A(x^h) = 1 + x^h + x^{2h}$ вместо каждого y_h в соответствующий циклический индекс (определенный ранее), получим

$$B(x) = 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 9x^5 + 12x^6 + 9x^7 + 8x^8 + 5x^9 + \\ + 3x^{10} + x^{11} + x^{12}.$$

Так, имеется, например, 8 различных графов рассматриваемого типа с четырьмя ребрами. Они показаны на рис. 6.14.

Изменяя определения фигур, объемов и P , мы можем решить другие графотеоретические задачи перечисления (см., например, [44]). Дальнейшее развитие проблемы

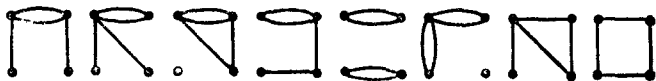


Рис. 6.14.

и доказательство теоремы Поия в более общей форме имеется, например, в [24] (библ. к гл. 1). Интересный обзор решенных и нерешенных задач перечисления можно найти в [43].

6.6. Минимальное число аварий на кирпичном заводе

На кирпичном заводе имеется m печей, в которых обжигаются кирпичи. После обжига кирпичи грузятся на небольшую специальную вагонетку и направляются к одной из n платформ, где их перегружают на грузовой. Так как каждая печь должна быть связана рельсо-

вым путем с каждой погрузочной платформой, то пути имеют большое число пересечений. Когда вагонетки проходят пересечения, они часто сходят с рельсов. В результате возникают потери кирпичей вследствие их боя и транспортные пробки. Задача заключается в проведении железнодорожных путей от печей к местам назначения с минимальным числом пересечений, чтобы уменьшить опасность схода вагонеток с рельсов.

Эту задачу можно решить в рамках теории графов, приняв железнодорожные пути за ребра графов, связы-

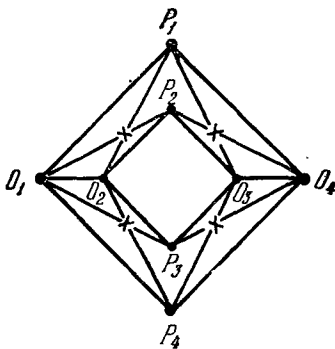


Рис. 6.15.

вающие вершины (соответствующие погрузочным платформам). При этом накладывается условие, запрещающее трем (или более) ребрам пересекаться в одной точке, которая не является вершиной. Два ребра, однако, могут пересекаться в промежуточной точке. Например, в случае четырех печей O_1, O_2, O_3, O_4 и четырех платформ P_1, \dots, P_4 имеется четыре таких пересечения, отмеченных знаком x на рис. 6.15.

Теорема 6.6. Минимальное число внутренних пересечений ребер, соединяющих каждую из m точек с каждой из n точек на плоскости (предполагается, что два ребра пересекаются не более чем в одной точке), не меньше чем

$$\begin{aligned} (r^2 - r)(s^2 - s), & \text{ если } m = 2r, \quad n = 2s, \\ (r^2 - r)s^2, & \text{ если } m = 2r, \quad n = 2s + 1, \\ r^2(s^2 - s), & \text{ если } m = 2r + 1, \quad n = 2s, \\ r^2s^2, & \text{ если } m = 2r + 1, \quad n = 2s + 1. \end{aligned}$$

Прежде чем доказать теорему, определим понятие веера и докажем одну лемму.

Определение. Веер в вершине v состоит из всех ребер, инцидентных v , без граничных точек. Таким образом, v также исключается из веера.

З а м е ч а н и е. Заметим, что если взять на плоскости два множества из трех вершин каждое и образовать три

веера в вершинах одного множества так, чтобы три вершины второго множества являлись конечными для каждого веера, то получим граф Понтрягина — Куратовского, который не является плоским, и следовательно, вееры должны иметь, по крайней мере, одну точку пересечения, которая не является вершиной.

Лемма 6.7. Рассмотрим плоский граф, состоящий из трех вееров в вершинах u_1, u_2, u_3 , каждый из которых имеет одни и те же граничные точки v_1, v_2, \dots, v_m вместе с соответствующими вершинами. Число внутренних пересечений при условии, что в одной точке пересекаются, по крайней мере, не более двух ребер,

$$\begin{aligned} r^2 - r, & \quad \text{если} \quad m = 2r, \\ r^2, & \quad \text{если} \quad m = 2r + 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Согласно предыдущему замечанию лемма справедлива, если $r = 1$. Предположим, что лемма справедлива для r , и докажем, что она справедлива для $r + 1$. В последнем случае число пересечений должно быть, по крайней мере,

$$\begin{aligned} r^2 + r, & \quad \text{если} \quad m = 2r + 2, \\ (r + 1)^2, & \quad \text{если} \quad m = 2r + 3. \end{aligned}$$

Рассмотрим подграфы C_k ($k = 1, 2, \dots, m$), состоящие из вершин v_k ($k = 1, 2, \dots, m$), вееров в v_k ($k = 1, 2, \dots, m$), определяемых вершинами u_1, u_2, u_3 , и вершин u_1, u_2, u_3 . Если бы каждая пара таких подграфов имела общую точку, отличную от конечных точек вееров, то число пересечений получалось бы при рассмотрении всех сочетаний подграфов по два. В этом случае число пересечений равно

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} \equiv a.$$

Но если $m = 2r + 2$, то $a = 2r^2 + 3r + 1 > r^2 + r$; а если $m = 2r + 3$, то $a = 2r^2 + 5r + 3 > (r + 1)^2$. В этом случае лемма была бы доказана.

Пусть теперь некоторая пара подграфов C_{k_1} и C_{k_2} не имеет ни одной общей точки кроме u_1, u_2, u_3 . Рассмотрим подграф C' , состоящий из объединения C_{k_1} и C_{k_2} . Согласно замечанию каждый другой подграф должен

иметь, по крайней мере, одну внутреннюю точку пересечения с C' . Так как число оставшихся подграфов равно $m-2$, то имеется, по крайней мере, $m-2$ пересечений с C' , и все $m-2$ точки пересечения различны, поскольку никакие три линии не могут пересечься в одной точке, если она не является граничной точкой. Добавим к этому числу получаемое, по предположению индукции, минимально возможное число пересечений в нашем графе без v_{k_1} и v_{k_2} и вееро C_{k_1} и C_{k_2} . Получим

$$\begin{aligned} 2r + (r^2 - r) &= r^2 + r, & \text{если } m-2 &= 2r, \\ (2r+1) + r^2 &= (r+1)^2, & \text{если } m-2 &= 2r+1. \end{aligned}$$

Заметим, например, что если число вершин равно $2r$, то имеется, по крайней мере, r^2-r пересечений, которые мы добавляем к $2r$ пересечениям с C' . Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Снова применим индукцию. Согласно сделанному замечанию теорема справедлива для случая $r=1, s=1$. Докажем, что если теорема справедлива для m и n , то она также справедлива для комбинаций $(m, n+1)$, $(m+1, n)$ и $(m+1, n+1)$. Предположим, что имеется m печей O_1, O_2, \dots, O_m и $(n+1)$ платформа P_1, P_2, \dots, P_{n+1} . Граф взаимосвязей печей и платформ можно получить из графа G задачи с O_1, O_2, \dots, O_m и P_1, P_2, \dots, P_n , добавив вершину P_{n+1} и связав ее ребрами с O_1, O_2, \dots, O_m . Граф G можно рассматривать как множество вееро в вершинах P_1, \dots, P_n с одними и теми же граничными точками O_1, \dots, O_m . Пусть n — четное, т. е. $n=2s$; будем рассматривать минимальное число пересечений веера в P_{n+1} с веерами в P_1 и P_2 , взятыми вместе, затем с веерами P_3 и P_4 , взятыми вместе и т. д. Имеем s таких пар, и согласно лемме, если $m=2r$, то существует, по крайней мере, (r^2-r) пересечений с каждой парой, и следовательно, общее число пересечений равно, по крайней мере, $(r^2-r)s$; если же $m=2r+1$, то число пересечений равно, по крайней мере, r^2s . Если n — нечетное, т. е. $n=2s+1$, то можно пренебречь единственным веером, оставшимся в P_n , и получить те же самые числа $(r^2-r)s$ и r^2s . Согласно предположению индукции сам граф G имеет, по крайней мере, $(r^2-r)(s^2-s)$ пересечений. Добавив это число к полученным выше результа-

там, получаем выражение для наименьшего возможного числа пересечений

$$(r^2-r)(s^2-s) + (r^2-r)s = (r^2-r)s^2,$$

если $m=2r, n=2s+1,$

из которого имеем

$$(r^2-r)s^2 + (r^2-r)s = (r^2-r)[(s+1)^2 - (s+1)],$$

если $m=2r, n=2s+2.$

Аналогично получаем, что наименьшее число пересечений равно

$$r^2(s^2-s) + r^2s = r^2s^2,$$

если $m=2r+1, n=2s+1,$

откуда

$$r^2s^2 + r^2s = r^2[(s+1)^2 - (s+1)],$$

если $m=2r+1, n=2s+2.$

Теорема доказана.

Построение путей с минимальным числом пересечений можно выполнить следующим образом. Рассмотрим прямоугольные координаты на плоскости. Если $m=2r$, возьмем на оси x точки с абсциссами

$$-r, -(r-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, r,$$

а если $m=2r+1$, то возьмем на оси x точки с абсциссами

$$-r, -(r-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, r, r+1.$$

Если $n=2s$, возьмем на оси y точки с ординатами

$$-s, -(s-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s,$$

а если $n=2s+1$, возьмем на оси y точки с ординатами

$$-s, -(s-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s, s+1.$$

Затем соединим отрезками каждую точку оси x с каждой точкой оси y . Все пересечения в данном случае могут быть легко подсчитаны.

З а м е ч а н и е. С помощью индукции можно также доказать, что минимальное число областей на плоско-

сти получаемое при построении рассмотренного графа путей, равно

$$(r^2 - r)(s^2 - s) + 4rs - 2(r + s) + 2, \text{ если } m = 2r, n = 2s,$$

$$(r^2 - r)s^2 + 4rs + 2s + 1, \text{ если } m = 2r, n = 2s + 1,$$

$$r^2s^2 + 4rs + 1, \text{ если } m = 2r + 1, n = 2s + 1.$$

Упражнения

6.8. Построить связи для задачи с пятью печами и четырьмя платформами согласно описанной выше процедуре.

6.9. Повторить упражнение 6.8 для задачи с пятью печами и шестью платформами.

6.7. Минимальное число пересечений в полных графах

Описанный выше результат Заранкевича [93] дает оценку минимального числа пересечений ребер для изображенного на плоскости простого графа, состоящего из двух множеств вершин, таких, что каждая вершина одного множества соединена с каждой вершиной второго только одним ребром. Когда каждое множество содержит по три вершины, мы имеем один из двух основных неплоских графов, фигурирующих в теореме Понтрягина — Куратовского о плоских графах. Построив граф более общего типа, Заранкевич смог доказать результат о минимальном числе пересечений, а также указать схему реализации простых графов с минимальным числом пересечений.

Подобные же исследования можно провести [35], [45], [80] для n -вершинного обобщения другого основного графа Понтрягина — Куратовского, полного графа из пяти вершин. Приведем основные результаты [80].

Пусть G_n обозначает полный граф из n вершин. Требуется определить I_n минимальное число пересечений ребер, когда G_n изображен на плоскости так, что в любой точке, отличной от вершин, пересекается не более двух ребер.

Нам достаточно рассмотреть случай $n \geq 5$, так как очевидно, что для $n < 5$ $I_n = 0$. Для того чтобы получить верхнюю границу M_n для I_n , рассмотрим следующее специфическое изображение G_n на плоскости, которое будем называть чередующейся «линейной моделью». Вы-

берем горизонтальный отрезок S на плоскости и разделим S на $n-1$ отрезков точками p_1, \dots, p_n , которые соответствуют (слева направо) вершинам графа G_n . Соединим p_1 с $p_3, p_4, p_5, \dots, p_n$ полуокружностями, лежащими выше S . Затем соединим p_2 с p_4, p_5, \dots, p_n полуокружности, лежащими ниже S . В общем случае, соединим p_i с $p_{i+2}, p_{i+3}, \dots, p_n$ для $i=1, 2, \dots, n-2$ при помощи полуокружностей, лежащих выше (ниже) S , если i — нечетное (четное).

Подобное построение выполнено для $n=6$ и $n=7$ на рис. 6.16. Заметим, что число пересечений ребер равно 4 для G_6 и 11 для G_7 . В общем случае, если M_n означает число пересечений ребер в некоторой линейной

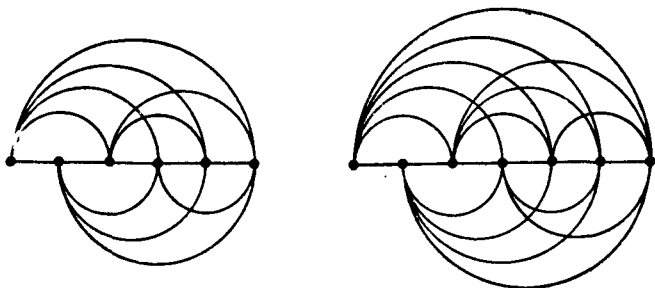


Рис. 6.16.

модели графа G_n , то можно показать (предлагаем сделать это в качестве упражнения), что

$$M_n = \begin{cases} \frac{n(n-2)^2(n-4)}{48}, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ \frac{(n-1)(n-3)(n^2-4n+1)}{48}, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, полученное выше значение M_n является оценкой сверху для I_n . В [80] показано, что несколько лучшая оценка сверху M_n для I_n дается следующими выражениями:

$$M'_n = \begin{cases} \frac{n(n-2)^2(n-4)}{64}, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ \frac{(n-1)^2(n-3)^2}{64}, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Заметим, что для n четных $M'_n = 3/4 M_n$. Для n нечетных, M'_n составляет $3/4 M_n$ относительно коэффициентов при n^4 и n^3 .

Предыдущий результат можно также получить, например, для случая четного n путем выделения $r = n/2$ пар и образования всех полных графов G_4 между парами. Каждый такой граф G_4 изображается без пересечений ребер. Тогда можно показать, что имеется, по крайней мере, $\binom{r}{2} \binom{r-1}{2}$ пересечений. Положив $r = n/2$, получим прежний результат для M'_n .

Если существует представление графа G_n с минимальным числом пересечений такое, что оно содержит представление с минимальным числом пересечений графа G_{n-k} для каждого четного $k < n$ (достаточно для $k = 2, 4, 6$), то можно показать по индукции, что оценка M'_n , определенная выше, совпадает с I_n .

Значения M'_6 и M'_7 равны 3 и 9 соответственно. Сплошные линии на рис. 6.17 показывают представление

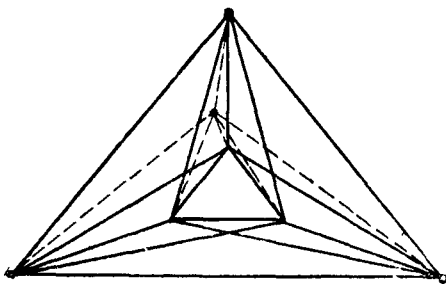


Рис. 6.17.

G_6 , которое реализует M'_6 . Добавив пунктирные линии, мы получим представление G_7 , которое реализует M'_7 . Полезно попробовать найти прямолинейные конструкции G_n для всех $n \geq 5$.

Упражнения

6.10. Нарисуйте графы, сравнимые с графом рис. 6.17 для $n = 8, 9$.

6.11. Используйте два concentрических многоугольника с одинаковым числом вершин для построения графа с минимальным числом

пересечений при $l=10$. Соедините вершины внешнего многоугольника симметрично во внешней области, вершины внутреннего многоугольника — прямыми линиями во внутренней области и вершины двух многоугольников — симметрично в промежуточной области. Обобщите этот метод.

ГОЛОВОЛОМКИ И ИГРЫ

6.8. Задача соединения раскрашенных кубов [7]

Во всех задачах, рассмотренных ранее, первоначальная формулировка либо непосредственно давалась на языке графов, либо ее можно было привести к такому виду. Иногда, однако, основная трудность заключается в нахождении соответствующего графа, структура которого может иметь лишь незначительное внешнее сходство с первоначальной задачей. Проиллюстрируем сказанное на следующем простом примере.

Пусть C_1, C_2, C_3, C_4 обозначают четыре одинаковые куба, и пусть Y, R, B и G обозначают цвета: желтый, красный, синий и зеленый соответственно. Предположим, что каждая грань каждого куба окрашена одним из этих цветов таким образом, что каждый цвет имеется на каждом кубе (в остальном цвета назначаются граням куба независимо). Рассмотрим следующую задачу: при заданной раскраске кубов поставить кубы друг на друга (образуя призму с квадратным основанием) так, чтобы четыре квадрата на каждой боковой стороне призмы имели различные цвета.

З а м е ч а н и е. Если не вводить дополнительных условий, задача может в некоторых случаях не иметь решения. Например, предположим, что у каждого куба все три грани, имеющие общую вершину, окрашены в красный цвет. Тогда, независимо от положения кубов, боковые стороны призмы будут иметь восемь красных квадратов. В решении же должно быть точно четыре.

Для любой раскраски кубов определим следующий граф, имеющий 4 вершины и 12 ребер. Вершины соответствуют цветам Y, R, B и G . Для каждого куба C_i существуют три ребра, обозначенные числом i . Эти ребра соответствуют трем парам противоположных граней и соединяют соответствующие вершины (цвета). Раскрас-

ка кубов иллюстрируется рис. 6.18 (заметим, что петля соответствует окраске противоположных граней в один цвет). В общем случае, такой граф соответствует допустимой раскраске, если каждая вершина инцидентна, по крайней мере, одному

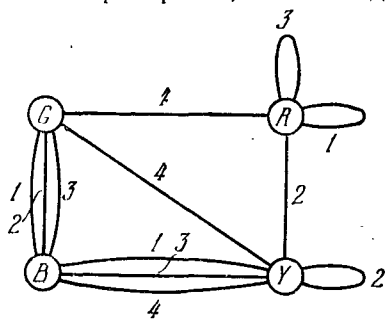


Рис. 6.18.

ребру, помеченному любым из чисел 1, 2, 3 и 4.

Предположим далее, что задача имеет решение. Рассмотрим две противоположные боковые стороны полученной призмы. Восемь соответствующих квадратов представляют одну пару противоположных граней каждого куба, и каждый цвет

встречается дважды. На языке теории графов это означает, что существует подграф, имеющий четыре ребра, все помеченные различными числами, такой, что каждая вершина имеет степень 2 (иначе говоря, фактороид, у которого все ребра помечены различно). Другая пара противоположных сторон определяет второй подграф, который имеет те же свойства, что и первый. При этом второй подграф не имеет общих ребер с первым.

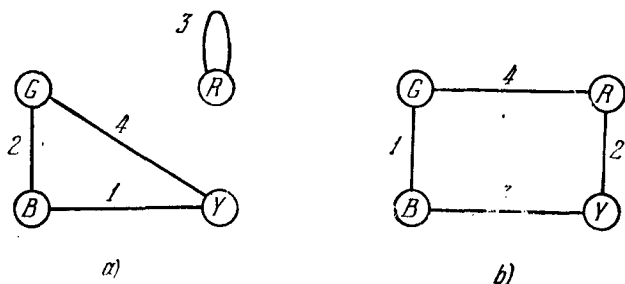


Рис. 6.19.

С другой стороны, можно показать, что если граф задачи имеет два пографа без общих ребер с отмеченными свойствами, то решение задачи существует. На рис. 6.19 показаны два определенных выше подграфа для графа рис. 6.18.

Упражнение 6.12. Зафиксируйте положение призмы. Обозначьте переднюю грань, правую грань и верхнюю грань каждого куба x , y и z , а соответствующие противоположные стороны x' , y' и z' . Используя подграфы рис. 6.19, определите цвет каждой грани каждого куба.

З а м е ч а н и е. Заметим, что имеется 41 472 возможных расположения кубов. Самый нижний куб имеет 3 возможных положения (3 существенно различных способа его расположения на столе). Каждый из остальных кубов имеет 24 возможных ориентации: 6 возможностей для выбора грани, на которой он стоит, и затем 4 возможных поворота.

6.9. Задачи изменения состояний системы

Многие задачи в их абстрактной формулировке относятся к следующему общему типу: задана некоторая система, которая в любой момент времени может находиться только в одном из конечного числа состояний. Множество возможных прямых (т. е. одношаговых) переходов задано либо путем непосредственного перечисления, либо при помощи некоторого правила. Требуется определить, можно ли переместить систему из заданного начального состояния в требуемое конечное состояние с помощью последовательности одношаговых переходов (если каждому переходу соответствует определенная стоимость, можно потребовать перевести систему в нужное состояние с минимальными затратами).

Если состояния и одношаговые переходы представлены соответственно вершинами и дугами ориентированного графа, то задача сводится к нахождению пути, соединяющего пару заданных вершин (состояний). Во многих случаях основным этапом анализа таких задач является определение системы или, более точно, определение множества состояний, адекватных возможным состояниям реальной системы и позволяющих удобно определять одношаговые переходы.

Рассмотрим с иллюстративной целью задачу миссионеров и людоедов [83], помня при этом, что в реальной жизни читатель может столкнуться с задачами более серьезного характера.

Три миссионера и три людоеда подошли к берегу A реки и должны переправиться на противоположный

берег B при помощи одной лодки, которая поднимает не более двух человек. Все миссионеры и один из людоедов умеют грести. Можно ли найти такую последовательность переездов, при которой число людоедов никогда не превышает число миссионеров на любом берегу реки, за исключением, конечно, случая, когда на одном берегу нет ни одного миссионера? (Миссионеры очень хорошо чувствуют необходимость в этом основном правиле.)

Для решения этой задачи рассмотрим в качестве системы множество миссионеров и людоедов на берегу A . Пусть M , S и K обозначают миссионера, людоеда и умеющего грести людоеда соответственно. Тогда система имеет 24 возможности состояния (так как числа M , S и K находящихся на берегу A могут принимать соответственно 4, 3 и 2 различных значения). Из них допустимыми являются следующие 16:

$МММССК$	$МММК$	$ССК$	$СК$
$МММСС$	$ММСС$	$МС$	$С$
$МММСК$	$ММСК$	$МК$	$К$
$МММС$	$МММ$	$СС$	0

Здесь 0 означает, что на берегу A нет ни одного человека (читатель может проверить, что в остальных восьми состояниях основное правило нарушается либо на одном, либо на другом берегу). Изменения состояний этой системы соответствуют отъезду или возвращению лодки. На графе рис. 6.20 показаны все (25) возможных переходов. Для упрощения переходы изображены в виде ребра, так как возможно любое направление. Однако каждое ребро следует рассматривать как две противоположно ориентированные дуги, соответствующие отъезду лодки (направление по часовой стрелке) и возвращению лодки (направление против часовой стрелки). Новая формулировка задачи выглядит так: найти (если возможно) путь из $МММССК$ в 0 , в котором дуги, соответствующие отъезду и возвращению, чередуются.

Без последнего условия задача решается легко. (Например, последовательность состояний $МММССК$, $ММСК$, $СК$, 0 дает решение.) С учетом этого условия задача становится значительно более трудной. Прежде чем двигаться дальше, читатель может поработать

некоторое время с графом рис. 6.20 и либо найти решение, либо убедиться, что его нет. Для того чтобы дать систематический способ поиска решения, определим вспомогательный граф, имеющий те же самые вершины. Вспомогательный граф вводится для того, чтобы отразить возможные изменения состояния системы между

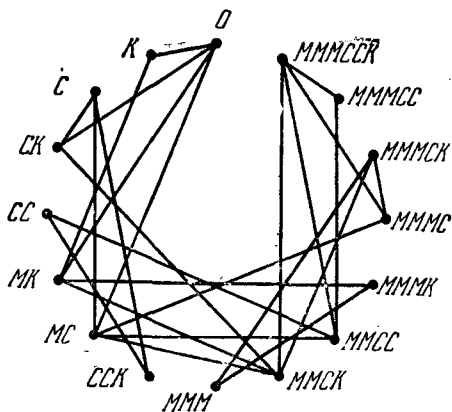


Рис. 6.20.

двумя последовательными возвращениями лодки. Тем самым исключается необходимость чередовать дуги, соответствующие отъезду и возвращению лодки.

Пусть, например, лодка стоит у берега A , а система находится в состоянии $МММС$. Из рис. 6.20 мы видим, что система может перейти в состояние $ММСС$ или $ММСК$ через состояние $МС$ (заметим, что при этом лодка снова окажется у берега A). Поэтому соединяем ребра $МММС$ с $ММСС$ и $ММСК$. На рис. 6.21 показаны все такие ребра (включая ориентированные ребра, ведущие в конечное состояние O , которые соответствуют последнему проезду без возвращения лодки на берег A). Для вспомогательного графа рис. 6.21 задача заключается в следующем: определить цепь из $МММС$ в O . Легко видеть, что такая цепь существует. Например, $МММС$, $ММСК$, $МММК$, $ММСК$, $ММСС$, $ССК$, $МС$, O является искомым цепью. Добавляя (в скобках) промежуточные состояния, получим следующее ре-

шение для первоначального графа рис. 6.20: $MMMCCK$, $(MMCK)$, $MMMCK$, (MMM) , $MMMK$, (MK) , $MMCK$, (MC) , $MMCC$, (CC) , CCK , (C) , MC , 0 . Это решение

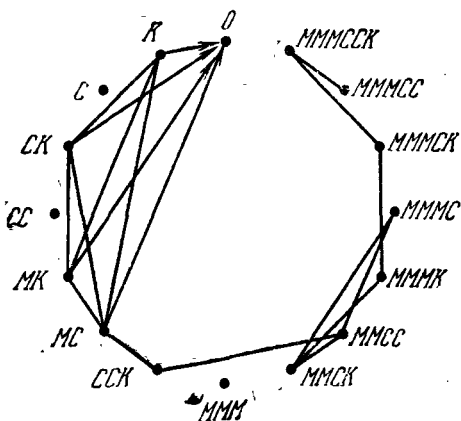


Рис. 6.21.

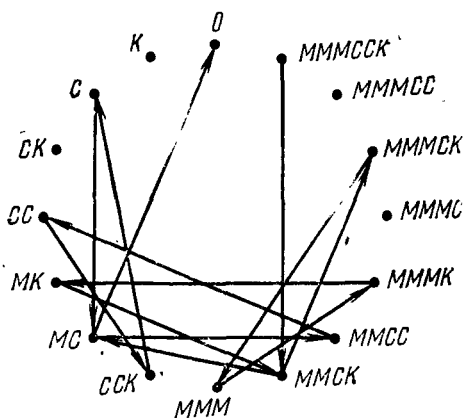


Рис. 6.22.

показано на рис. 6.22. Отметим, что найденный путь не является простым, так как две дуги входят в $MMCK$ и MC (в каждом случае одна дуга соответствует отъезду лодки от берега A , а вторая — возвращению лодки).

Упражнения

6.13. Определить, имеет ли задача о миссионерах и людоедах решение с меньшим числом переездов, при менее сильном предположении, что все людоеды умеют грести. (Заметим, что при более сильном предположении, что только один миссионер может грести, задача становится более интересной.)

6.14. Для ориентированного графа, показанного на рис. 6.23, определить путь из v в w , в котором чередуются сплошные и пунктирные дуги, причем первая дуга является сплошной.

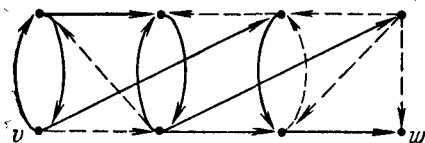


Рис. 6.23.

а) Решить задачу, используя для исследования исходного графа рис. 6.23.

б) Решить задачу, применяя описанный выше метод построения вспомогательного графа, каждая из дуг которого соответствует паре чередующихся дуг (или одной сплошной дуге, оканчивающейся в w) первоначального графа.

с) Отметим, что решение не является простым путем в первоначальном графе. (Действительно, путь возвращается в v .)

В некоторых случаях допустимые переходы очевидны, в других же совершенно неясно, можно ли достичь из заданного начального состояния желаемого конечного. Примером последнего является задача отыскания пути в сложной путанице лабиринта, которая часто встречается в литературе по занимательной математике. Это в сущности задача определения цепи, соединяющей две заданные вершины соответствующего графа, который характеризует структуру лабиринта.

Рассмотрим, например, плоский лабиринт, показанный на рис. 6.24. Этот лабиринт состоит из 36 отделений, некоторые из которых соединены «проходами» (указанными разрывами в линиях). Предположим, что задача заключается в том, чтобы достигнуть точки Q вне лабиринта, начиная из отделения P . Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют отделениям, а ребра указывают, какие пары соседних отделений соединены проходом. Этот граф показан на рис. 6.24. Для данного графа задача заключается в определении цепи, соединяющей P и Q . В такой формулировке задача

является очень простой. Построив граф, соответствующий данному лабиринту, мы можем применить методы пометок главы 3 и определить дерево, соединяющее P со всеми другими вершинами (отделениями). При этом,

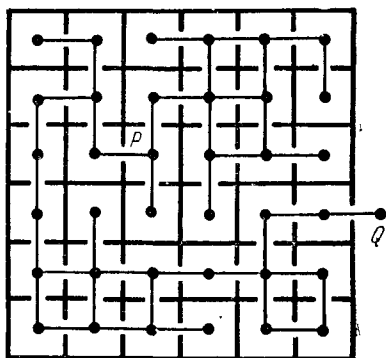


Рис. 6.24.

в частности, мы пойдем и цепь, соединяющую P и Q (если задача имеет решение).

Однако мы не заметили одного серьезного затруднения. Метод непосредственной пометки требует систематического перебора ребер и вершин и предполагает, что мы фактически знаем структуру всего лабиринта. Практически же, если мы находимся в лабиринте, скажем, в точке P , то вначале у нас есть очень мало информации, а именно, мы знаем только, в какие отделения можно попасть непосредственно из P . Добавочная информация поступает только постепенно, при исследовании различных направлений.

Все многочисленные существующие методы отыскания выхода из такого лабиринта основаны на систематизации процедуры исследования путей, позволяющей избежать излишних повторений одного и того же пути (некоторые повторения неизбежны). Существование тупика нельзя предсказать, его можно только обнаружить. (Когда тупик обнаружен, повторение части пути неизбежно.) Однако, отмечая вершины и ребра по мере того, как они встречаются и исследуются, можно предло-

жить способ, при котором ни одно ребро не проходится дважды в одном направлении независимо от структуры лабиринта (заметим, что лабиринт может быть пространственным и в этом случае связанный с ним граф оказывается неплоским).

6.10. Матричная форма задачи о переправе

Решим предложенную в предыдущем разделе задачу о переправе через реку миссионеров и людоедов, используя при этом матрицу смежности вершин.

Напомним условие задачи: лодка выдерживает не более двух человек, и на одном и том же берегу не должно находиться больше людоедов, чем миссионеров, поскольку первые имеют привычку съедать своих святых наставников. Рассмотрим простой случай переправы через реку группы из двух миссионеров и двух людоедов.

Прежде чем выписывать матрицу смежности, поставим в соответствие вершинам графа состояния на одном из берегов реки. Предположим, что вся группа появляется на левом берегу реки. Рассмотрим все возможные состояния (с учетом наших двух условий) на левом берегу. Состояние будет обозначаться парой чисел, первое из которых указывает число миссионеров, а второе — число людоедов. Мы имеем следующие возможные состояния на левом берегу.

$$v_1 = (2, 2), v_5 = (0, 2),$$

$$v_2 = (2, 1), v_6 = (0, 1).$$

$$v_3 = (2, 0), v_7 = (0, 0).$$

$$v_4 = (1, 1),$$

Заметим, что состояние $(1, 0)$ недопустимо, так как соответствующее состояние на правом берегу будет $(1, 2)$ и единственный миссионер будет съеден. Аналогично, состояние $(1, 2)$ недопустимо и на левом берегу. Образую матрицу смежности, элементы которой равны 1 или 0 в зависимости от того, возможен ли переход из одного состояния на левом берегу к другому состоянию также на левом берегу. Переходы, конечно, определяются отъездами лодки. Таким образом, мы выписываем названия вершин слева и сверху матрицы и расставляем элемен-

ты 0 или 1 в зависимости от возможности перехода из состояния, представленного вершиной слева матрицы к другому состоянию, представленному вершиной сверху. Получаем матрицу смежности

$$V = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Для правого берега реки мы будем иметь идентичное множество состояний, которые являются дополнительными к состояниям левого берега. Их матрица V' является транспонированной относительно выписанной выше матрицы V . Нетрудно проверить, что для получения матрицы возможных переходов после одного переезда лодки туда и обратно необходимо перемножить $V_4 V'$. В общем случае, чтобы получить матрицу переходов после m переездов лодки туда и обратно, нужно вычислить $(VV')^m$. А так как наша цель заключается в переправе группы на правый берег, то необходимо $(VV')^m$ умножить на V . Это даст $(VV')^m V$, и задача свелась к определению числа m двусторонних (т. е. туда и обратно) переездов лодки, при котором элемент, стоящий на пересечении строки v_1 и столбца v_7 матрицы $(VV')^m V$, равен 1, т. е. на левом берегу имеет место переход из состояния (2, 2) в состояние (0, 0) и вся группа оказывается на правом берегу. Заметим, что величина элементов произведений VV' , $VV'V$, $VV'VV'$ и т. д. указывает на число способов, которыми можно осуществить соответствующий переход. Это число может быть больше 1. Так как наша цель состоит в определении для каждого состояния одного возможного перехода, то все ненулевые элементы произведений можно положить равными 1. Оказывается, что исходную задачу можно решить путем $m=2$ двусторонних переездов и одного (последнего) одностороннего (т. е. единичный элемент впервые появляется на пересечении строки v_1 и столбца v_7 в матрице $(VV')^2 V$). Результаты последовательных

вычислений имеют следующий вид:

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad VV' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$VV'V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (VV')^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(VV')^2 V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Теперь задача состоит в том, чтобы восстановить решение по найденным матрицам. Рассмотрим элемент (v_1, v_7) последней матрицы $(VV')^2 \cdot V$. Этот элемент является единичным. Найдем возможные ненулевые элементы первой строки матрицы $(VV')^2$, которые при умножении на седьмой столбец v давали бы единичное значение рассматриваемого элемента. Одним из таких элементов является $(1, 4)$, элемент в первой строке и четвертом столбце матрицы $(VV')^2$, так как элемент $(4, 7)$ матрицы V также является единичным. Другим элементом V с таким же свойством является $(5, 7)$. Выберем первый из названных элементов. Таким образом, получаем, что последний переход есть $v_4 \rightarrow v_7$. Далее смотрим, каким способом мог получиться единичный элемент $(1, 4)$ матрицы $(VV')^2$. Проверив первую строку $(VV') \times V$ и четвертый столбец V' , получаем, что рассматриваемый единичный элемент есть результат наличия ненулевого элемента $(6, 4)$ в матрице V' (так как соответствующий элемент матрицы $(VV') \cdot V$ также отличен от ну-

ля). Таким образом, предпоследний переход есть $v_6 \rightarrow v_4$. Снова проверяем причину наличия ненулевого элемента (6, 1) матрицы $(VV') \cdot V$. Находим, что он образован единичными элементами (2, 1) в матрице VV' и (2, 6) в матрице V . Таким образом, третий от конца переход есть $v_2 \rightarrow v_6$. Аналогично находим, что четвертый и пятый от конца переходы $v_3 \rightarrow v_2$ и $v_1 \rightarrow v_3$ соответственно. Вся результирующая совокупность переходов есть $v_1 \rightarrow v_3, v_3 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_6, v_6 \rightarrow v_4, v_4 \rightarrow v_7$ или в более простом виде: v_1, v_3, v_2, v_6, v_4 и v_7 . В принципе можно было бы найти другие допустимые переходы.

Дадим словесную интерпретацию полученного решения. Так как v_3 есть (2, 0), оба людоеда должны переправиться одновременно, причем один из них должен вернуться (из-за v_2). Затем вернувшийся людоед должен высадиться, а два миссионера должны занять место в лодке. После причаливания к правому берегу один из миссионеров должен высадиться (чтобы получить v_6), а другой вернуться обратно, чтобы получить v_4 . Наконец, последний миссионер и людоед переправляются вместе на правый берег. При этом достигается конечное состояние v_7 .

Упражнение 6.15. Состояния системы в задаче о трех миссионерах и трех людоедах, когда умеют грести все три миссионера и только один людоед, можно представить тройкой (m, r, c) , где $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq r \leq 1$ и $0 \leq c \leq 2$, причем m соответствует миссионерам, r — умеющему грести людоеду и c — двум остальным людоедам. В этом случае существует 16 возможных состояний системы. Запишите матрицу переходов системы.

Чтобы определить существование решения без использования всех процедур, необходимых для его фактического получения, воспользуемся следующим методом.

Заметим, что решение должно иметь вид $(VV')^m \times \times V$. Пусть начальное состояние системы соответствует вершине v_1 , а конечное — вершине v_k . Тогда, если решение существует, то можно найти m такое, что элемент (1, k) матрицы $(VV')^m \cdot V$ оказывается ненулевым. Как было показано выше, чтобы этот элемент был равен единице, необходимо существование, по крайней мере, одного ненулевого элемента в первой строке матрицы $(VV')^m$, соответствующего ненулевому элементу в k -м столбце матрицы V . Таким образом, задача сводится к определению ненулевых элементов первой строки мат-

В 13-м столбце элементы v_8 , v_{11} и v_{12} не равны нулю. Следовательно, если задача имеет решение, то элементы v_8 , v_{11} , и v_{12} первой строки матрицы $(VV')^m$ также должны быть ненулевыми:

$$VV' = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Множество вершин, в которые можно попасть из v_1 , состоит из $\{v_1, v_2\}$. Из v_2 можно попасть в v_1 , v_2 и v_3 . Поэтому добавим v_3 к первоначальному множеству и получим расширенное множество $\{v_1, v_2, v_3\}$. Из v_3 можно попасть в v_2 , v_3 , v_4 и v_6 . Вводя новые вершины, получим множество $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$. Из v_4 можно перейти в v_3 и v_4 . Оба эти перехода не изменяют множества. На этом все возможности исчерпаны. Следовательно, из v_1 можно попасть только в v_1, v_2, v_3, v_4 и v_6 и нельзя попасть в $v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ ни при каком числе круговых проходов. Но в 13-м столбце матрицы V ненулевыми являются только элементы v_8, v_{11} и v_{12} . Так как ни один из этих элементов не вошел в окончательное множество, можно сделать вывод, что исходная задача не имеет решения.

З а м е ч а н и е. Матрица переходов (булева) может использоваться также для представления ориентированного графа, соответствующего постулатам на множестве состояний E_1, E_2, \dots, E_n , которые задают соотношения типа $E_i \rightarrow E_j$. Заметим, что постулат $E_i \rightarrow E_i$ всегда выполняется. Возведя исходную матрицу в квадрат, мы получим новую матрицу, каждый единичный элемент которой указывает либо постулат, либо утверждение,

доказываемое за 2 шага, например, $E_6 \rightarrow E_7$, $E_7 \rightarrow E_{10}$ вместе означают $E_6 \rightarrow E_{10}$. Единичные элементы матрицы, являющейся третьей степенью исходной, указывают постулаты или утверждения, которые могут быть доказаны за 2 или за 3 шага. Наконец, $(n-1)$ -я степень показывает все утверждения. Возникает интересная задача нахождения наименьшего числа постулатов, из которых можно вывести заданное множество утверждений. Заметим, что существует, по крайней мере, 2^n множеств эквивалентных постулатов, позволяющих получить n теорем [70], [73].

Упражнение 6.16. Показать, что общее число матриц размером $n \times n$, элементы которых принимают значения 0 или 1, а все диагональные элементы единичные, равно 2^{n^2-n} .

6.11. Задача деления треугольника

Допустим, что мы разделили треугольник ABC на несколько треугольников меньшего размера, проводя n линий, параллельных его сторонам (рис. 6.25, где $n=2$). Расставим буквы A , B и C в точках пересечения линий со сторонами следующим образом: точки на стороне BC могут помечаться только буквами B , C (но не A), точки на сторонах AC и AB помечаются по аналогичному правилу. Точки, находящиеся внутри большого треугольника, могут помечаться любой из трех букв. Требуется показать, что число маленьких треугольников, вершины которых помечены разными буквами, нечетно.

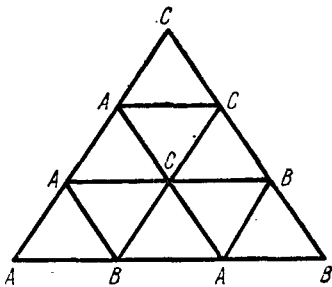


Рис. 6.25.

Для доказательства припишем символ нуль всем отрезкам с одинаково помеченными граничными точками и символ 1 — отрезкам с разными пометками. Сумма символов ребер для любого треугольника ABC равна 3. Для всех других треугольников эта сумма равна 0 или 2. Легко проверить, что сумма символов, соответствующих отрезкам каждой стороны большого треугольника, должна быть нечетной. Сумма символов по всем сто-

ронам всех маленьких треугольников должна быть нечетной, так как все внутренние отрезки считаются дважды. Следовательно, число треугольников (маленьких) с суммой символов сторон 3 оказывается нечетным.

6.12. Игра двух лиц

Ориентированный граф является удобной математической моделью для описания и анализа некоторых типов ситуаций, в которых проявляется соревнование (конкуренция) двух лиц или двух групп лиц, имеющих противоречивые (конфликтные) цели. Предлагаемое ниже краткое обсуждение такого аспекта использования графов не следует рассматривать как попытку формулирования наиболее общих понятий, в рамках которых теория графов применима к описанию таких «игр». Оно не является также попыткой установления соответствия между понятиями теории графов и понятиями формальной теории игр.

Рассмотрим ситуацию, в которой два лица поочередно вносят частичные изменения в некоторую структуру. (Например, в систему размещения фигур на шахматной доске.) Пусть имеется некое стандартное начальное состояние (например, исходное положение фигур шахматистов) и «Книга правил», которая полностью определяет список допустимых ходов, т. е. допустимые изменения состояния каждого игрока за 1 шаг. Если существует конечное число различных состояний игры, то правила игры можно полностью характеризовать конечным направленным графом с двумя типами дуг. При этом каждое состояние рассматривается как вершина v_i . Вершины v_i и v_j соединены дугой типа 1 (или 2) тогда и только тогда, когда игра может быть переведена из состояния i в состояние j с помощью некоторого допустимого хода первого (второго) игрока. Полная партия игры представляется на графе в виде пути, который состоит из дуг чередующихся типов и начинается в вершине начального состояния дугой, соответствующей ходу начинающего игру лица.

Предположим, что рассматриваемая игра такова, что ни одно из ее состояний не повторяется, т. е. соответствующий ей граф не имеет контуров. В этом случае

число отдельных ходов в партии игры ограничено. Пусть далее «выигрыш» соответствует первому достижению определенного множества состояний, или вершин. Например, можно считать, что в графе без контуров рис. 6.26 y и z соответствуют выигрывающим состояниям, а x — начальному. (В данном примере предполагается, что множество допустимых ходов одинаково для обоих игроков, поэтому здесь нет необходимости выделять два типа дуг.)

З а м е ч а н и е. Необходимо четко различать партию игры и полную игру. Например, в играх более общего вида некоторый игрок может находиться в «выигрывающем состоянии» и проиграть игру в конечном итоге. И, наоборот, он может находиться в «проигрывающем состоянии» и выиграть в конце игры. Рассматриваемый здесь частный вид игры можно назвать «игрой двух лиц с полной информацией, двумя исходами (проиграл — выиграл), заданной в полной форме». Эта игра является,

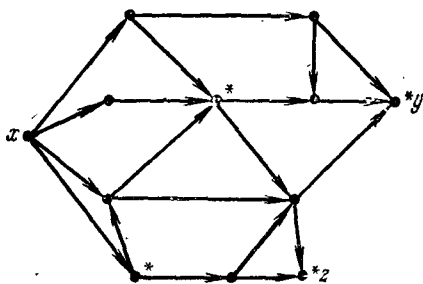


Рис. 6.26.

пожалуй, простейшим видом игры, в которой участвует более одного игрока. Заметим, что множество S вершин графа (помеченных звездочкой на рис. 6.26) обладает следующими свойствами.

1. Ни одна пара вершин, принадлежащих S , не связана дугой.

2. Любая вершина, не принадлежащая S , связана дугой, по крайней мере, с одной вершиной из S .

3. Все выигрывающие состояния принадлежат S .

Свойства 1 и 2 иногда называются *внутренней* и *внешней устойчивостью* соответственно. Множество вер-

шин подобное S , обладающее свойствами 1 и 2, называется *ядром*. Пусть теперь первый ход игры делает игрок 1, который знает ядро S , и пусть начальное состояние не принадлежит S . В этом случае в силу свойства 2 игрок 1 может попасть в одно из состояний S . Если это состояние не оказывается выигрышным, то независимо от хода игрока 2 вследствие свойства 1 оно приведет игрока 1 в состояние, не принадлежащее S (и не являющееся выигрышным по свойству 3). Следующий продуманный шаг игрока 1 вернет игру в S . В результате рассмотренной процедуры партия игры оканчивается в конечном итоге выигрышем игрока 1.

Таким образом, если структура игры полностью определена и выделено ядро S , то игрок 1 в принципе имеет выигрышную стратегию при начальном состоянии вне S . (Если начальное состояние принадлежит S , то игрок 2 имеет выигрышную стратегию.) На практике структура нетривиальных игр оказывается, конечно, слишком сложной для представления в виде такого полного графа переходов. Однако, если правила игры таковы, что соответствующий граф, несмотря на сложность, имеет систематическую структуру, то можно найти методы получения элементов S , как и требуется в окрестности текущего состояния игры.

З а м е ч а н и е. Читателям, знакомым с игрой «Ним» и с выигрышными стратегиями этой игры, рассмотренные действия помогают определить принадлежность текущего состояния, т. е. оставшегося числа палочек в каждой кучке, к множеству S и, кроме того, найти переход в S , если текущее состояние не принадлежит этому множеству.

Игра типа «переключение»

Рассматриваемая ниже игра была впервые сформулирована Шенноном, а ее решение предложено Леманом [58]. Игра проводится на графе двумя игроками. Оба игрока по договоренности выделяют две вершины, называемые конечными. Затем они поочередно делают ходы.

В соответствии с правилами ходов один из игроков на каждом ходе удаляет из графа одно из ребер и стре-

мится в конечном итоге разорвать все цепи, связывающие конечные вершины. Другой игрок на каждом ходе помечает одно из ребер. При этом помеченное ребро не может быть удалено из графа. Цель его состоит в сохранении хотя бы одной цепи между конечными вершинами. Игра, в которой может выиграть первый игрок, независимо от того, кто делает первый ход, называется игрой 1-го типа. Игра, в которой может выиграть второй игрок, — игрой 2-го типа. Игра, в которой может выиграть любой из игроков, сделавший первый ход, называется нейтральной. Далее мы остановимся кратко только на условиях, определяющих игру 2-го типа.

Теорема 6.8. Игра принадлежит ко 2-му типу тогда и только тогда, когда соответствующий граф содержит 2 дерева без общих ребер, все вершины которых одинаковы и имеют в своем составе обе конечные вершины.

Условие теоремы является достаточным. Действительно, если второй игрок может выиграть, делая второй ход, то, очевидно, он может выиграть и пойдя первым. Его ход должен всегда сохранять ребро, которое связывает две компоненты одного дерева, получающиеся в результате удаления некоторого ребра первым игроком. Так как оба дерева имеют одинаковое число ребер, второй игрок всегда сможет соединить две образовавшиеся компоненты одного дерева ребром, принадлежащим другому дереву.

Необходимость доказывается гораздо сложнее. Это доказательство здесь не рассматривается.

Разновидностью рассмотренной игры является игра «Gale» или «Bridge-it» (перекидывание мостов), которая описана в работах [27], [58]. Граф этой игры аналогичен показанному жирными линиями на рис. 6.27. Для большего удобства выполнения ходов игра делается симметричной. При такой форме первый игрок делает ходы на графе, показанном тонкими линиями, а второй — на графе, показанном жирными линиями. Цель первого состоит в построении цепи, соединяющей w' и w'' , а цель второго — соединить цепью v' и v'' . На каждом шаге игрок помечает одно из непомеченных ребер на своем графе (в начальный момент все ребра не помечены) такое, что оно не пересекает ни одно из ребер, помеченных его соперником. Графы, показанные на

рисунке, с небольшой погрешностью можно считать двойственными (чем вызвана погрешность?).

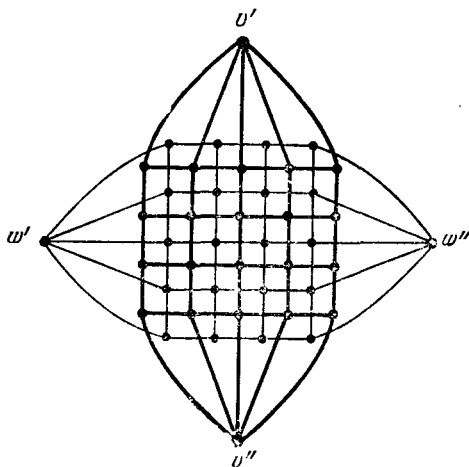


Рис. 6.27.

Для данного частного вида игры О. Гросс предложил простую выигрышную стратегию [27]. Эта игра относится к типу нейтральных, поэтому выигрышной оказывается «парная стратегия», при которой первый игрок всегда выбирает ребро, противоположное соответствующему (парному) ребру, выбранному вторым игроком (за исключением случая, когда это противоположное ребро уже выбиралось).

6.13. Игры на шахматной доске

Пусть задано множество клеток шахматной доски (рис. 6.28) и известно, что из клетки с четным номером можно сделать ход на соседнюю клетку по горизонтали и вертикали, а из клетки с нечетным номером можно сделать ход на соседнюю клетку по диагонали. Составляя с каждой клеткой вершину графа, можно получить матрицу смежности вершин V для соответствующего графа.

Упражнение 6.17. С помощью элементов седьмой строки и третьего столбца матрицы V^4 найти число способов, которыми можно перейти из седьмой клетки в третью за четыре хода. Найти элемент $(7, 3)$ из

$V+V^2+\dots+V^5$ и определить число способов перехода из седьмой клетки в третью при числе ходов меньше чем шесть. Наконец, пользуясь диагональными элементами V^5 , определить число способов возврата фигуры в исходное положение за пять ходов.

Вероятно, читатель сталкивался с различными головоломками, в которых конечная цель состоит в точном покрытии заданной плоской «доски» множеством плоских «фигур», общая площадь которых равна площади доски. В случае, когда каждая фигура имеет только конечное множество допустимых положений на доске, задача покрытия может быть сформулирована (по крайней мере, в принципе) и решена в терминах теории графов. Рассмотрим один из подходов к решению таких задач — подход, основанный на работе П. Жульена [52a].

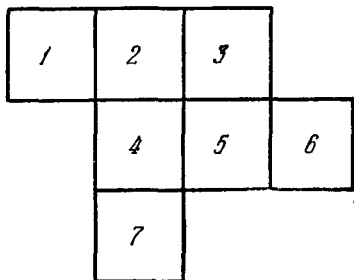


Рис. 6.28.

Пусть для конкретности доска и каждая фигура имеют вид прямоугольников, размеры которых определяются целыми числами. (Можно делать и более общее предположение.) Предположим, что доска разделена на квадраты единичных размеров и допустимыми считаются только такие положения фигур, при которых все квадраты оказываются полностью покрытыми (нет частично покрытых квадратов).

При сделанных предположениях можно выделить все допустимые положения каждой фигуры. Два положения считаются совместимыми тогда и только тогда, когда они соответствуют различным фигурам и взаимно не пересекаются (не имеют общей площади).

Обозначим число фигур через k , и пусть n_i — число допустимых положений i -й фигуры. Рассмотрим граф G , имеющий $\sum_1^k n_i$ вершин, соответствующих всем возможным положениям фигур. Будем считать, что в графе G вершины v и w являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие положения оказываются совместными в названном смысле. Легко видеть, что каждое решение исходной головоломки соответствует

полному подграфу из k вершин и наоборот. Таким образом, задача нахождения всех решений головоломки эквивалентна нахождению всех полных подграфов из k вершин.

Пусть, наконец, A, B, \dots, Z обозначают фигуры, а A_i означает некоторое положение (т. е. вершину) фигуры A . Жюльен предложил последовательность преобразований, позволяющую получить из исходного графа некоторый конечный граф, вершины которого представляют собой различные решения, т. е. полные подграфы исходного графа.

На первом шаге удаляются все вершины, соответствующие фигурам A и B (в качестве A и B могут выбираться любые фигуры). Они заменяются вершинами типа AB_{ij} при условии, что рассматриваемые комбинации A_i и B_j являются совместимыми. Кроме того, AB_{ij} соединяется со всеми положениями фигур C, D, \dots, Z , которые оказываются совместимыми как с A_i , так и с B_j . Легко видеть, что существует взаимнооднозначное соответствие между полными подграфами с k вершинами в исходном графе и полными подграфами с $(k-1)$ вершинами в новом графе.

Повторяя названную процедуру, в конечном итоге мы получим граф, вершины которого имеют вид $ABC \dots Z_{ij} \dots q$. При этом A_i, B_j, \dots, Z_q обозначает полный подграф исходного графа. Можно ли заполнить куб $12 \times 12 \times 12$ кирпичами размером $2 \times 4 \times 8$? (Ответ обосновать!)

ПАРСОЧЕТАНИЯ

6.14. Максимальные паросочетания

Паросочетания до сих пор считаются областью чистой теории, еще не нашедшей практического приложения. Примеры обобщений основной задачи о паросочетаниях приводятся в разделе, посвященном задаче объединения электростанций.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, не имеющий петель. Множество ребер $M \subseteq E$ называется *паросочетанием* графа G , если в M нет двух смежных ребер. Таким образом, каждая вершина G инцидентна самое большее одному ребру M . Говорят, что вершина покрыта (или не покрыта)

относительно M , если она инцидентна (или нет) ребру в M . Пустое множество образует (хотя и неинтересный) случай паросочетания, относительно которого каждая вершина является непокрытой.

Паросочетание графа G будем называть *максимальным*, если не существует паросочетания большей мощности.

В случае, когда каждая вершина покрыта, говорят, что паросочетание — *совершенно*. Совершенное паросочетание иногда называют 1-факторным [90]. Если существует совершенное паросочетание для G , то, очевидно, оно является максимальным. (Заметим, что совершенное паросочетание не может существовать, если $|V|$ — нечетное.) Татт [90] выделил множество графов, обладающих совершенными паросочетаниями.

Основная цель данного раздела состоит в описании алгоритма, предложенного Эдмондсом [20] для нахождения максимального паросочетания в произвольном графе.

В частности, алгоритм находит совершенное паросочетание, если оно существует. В отличие от других известных подходов, максимальное число операций в данном алгоритме растет как степенная функция, а не экспоненциально с ростом числа вершин в G .

Предположим, что G — двудольный граф, в котором существует такое разбиение вершин $\{V_1, V_2\}$, что каждое ребро соединяет вершину в V_1 с вершиной в V_2 . Задачи о паросочетаниях часто возникают в двудольных графах, особенно, когда вершины в V_1 и V_2 представляют различные типы объектов (например, мужчины — женщины, мужчины — работы — машины). При этом часто требуется «попарно связать» или «отобразить» разные типы объектов друг на друга таким образом, чтобы осталось как можно меньше несвязанных объектов (т. е. непокрытых вершин). Структура исходного графа используется для выделения всех допустимых парных соединений.

Пусть M — паросочетание графа $G = (V, E)$. Тогда простая цепь C в G называется *чередующейся цепью* относительно M , если ее ребра (при прохождении цепи от одного конца до другого) являются поочередно ребрами паросочетания (ребрами M) и ребрами непаросо-

четания (ребрами $E-M$). Допустим, что дано паросочетание M и чередующая цепь C . Рассмотрим множество ребер $M' = M \oplus C$, состоящее из ребер, принадлежащих M или C , но не одновременно обоим множествам. Таким образом, M' получается вычеркиванием из M ребер паросочетания, входящих в C , и добавлением к M ребер, не входящих в паросочетание, но принадлежащих C . Так как число ребер в C , принадлежащих паросочетанию, отличается от числа ребер, не принадлежащих паросочетанию, самое большее на 1, число ребер в M и M' также различается самое большее на 1.

Для иллюстрации сделанных замечаний рассмотрим паросочетание M , выделенное жирными линиями на рис. 6.29, *a*. Множество $M' = M \oplus C$, показанное на

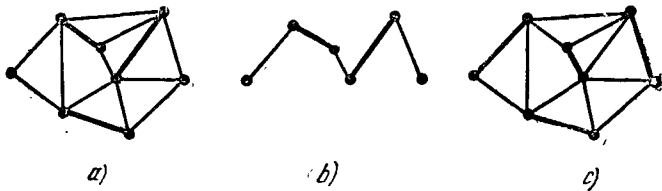


Рис. 6.29.

рис. 6.29, *c*, получается при использовании чередующейся цепи C , проведенной на рис. 6.29, *b*. Если, как в предшествующем примере, конечные точки чередующейся цепи C не покрыты ребрами M , то легко видеть, что M' обязательно является паросочетанием и $|M'| = |M| + 1$. По этой причине чередующаяся цепь, обе конечные точки которой не покрыты, называется чередующимся расширением. Существование чередующегося расширения (или просто расширения) является необходимым и достаточным условием того, что M не является максимальным паросочетанием. Сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы, предложенной Бержем [3] и доказанной на основе идей Эдмондса [20].

Теорема 6.9. Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда G не содержит чередующегося расширения относительно M .

Доказательство. Для завершения доказательства остается показать, что если M не является макси-

мальным, то существует чередующаяся цепь, соединяющая две вершины, не покрытые множеством M . (Обратное уже было установлено.) Допустим, что паросочетание M' имеет на одно ребро больше, чем M , и рассмотрим граф $G' = (V', M \oplus M')$, содержащий только те ребра, которые встречаются в M или M' , но не в обоих одновременно.

В графе G' не существует вершины v степени больше чем 2, так как вершине v инцидентно самое большее одно ребро в M и одно в M' . Компоненты G' , исключая изолированные вершины, соответствуют чередующимся цепям и чередующимся простым циклам относительно M (и M'). Каждый из циклов содержит одинаковое число ребер из M и из M' . Следовательно, должна быть, по крайней мере, одна компонента, которая соответствует чередующейся цепи и в которой число ребер, принадлежащих M' , на единицу больше числа ребер, принадлежащих M . Конечные точки такой цепи обязательно останутся непокрытыми ребрами M . Теорема доказана.

На основе предыдущей теоремы можно решать задачу нахождения максимального паросочетания, если найти удобный метод поиска чередующегося расширения в том случае, когда оно существует. Действительно, мы могли бы начать с «пустого» паросочетания M_0 , найти чередующую цепь C_1 (единственное ребро в этом случае) и определить $M_1 = M_0 \oplus C_1$. В общем случае, можно также определить $M_i = M_{i-1} \otimes C_i$, где C_i — чередующаяся цепь, соединяющая две вершины, непокрытые относительно M . В конечном счете мы придем к некоторому i -му этапу, на котором чередующееся расширение C_{i+1} не существует. Тогда M_i — максимальное паросочетание.

Известно несколько эффективных алгоритмов нахождения максимальных паросочетаний в двудольных графах (см., например, [22] и [49]). Алгоритм, описанный выше, применим для любых графов. Он основан на систематическом поиске чередующихся расширений и последовательном расширении паросочетаний. В процессе его функционирования находятся определенные области графа (соответствующие так называемым венгерским деревьям), которые могут быть удалены при дальней-

шем поиске без опасности потери каких-то чередующихся расширений. Алгоритм может также стягивать определенные подграфы (связанные с соответствующими циклами нечетной длины) в одну «псевдовершину», упрощая тем самым процедуру поиска.

Перед тем как переходить к описанию алгоритма, введем несколько вспомогательных понятий. *Чередующееся дерево* — это дерево, вершины которого разбиты на два класса (называемые *внутренними* и *внешними вершинами*) так, что каждая внутренняя вершина имеет степень 2 и каждое ребро соединяет внутреннюю вершину с внешней. (Заметим, что все «конечные» вершины, т. е. вершины степени 1, обязательно внешние.) Пример

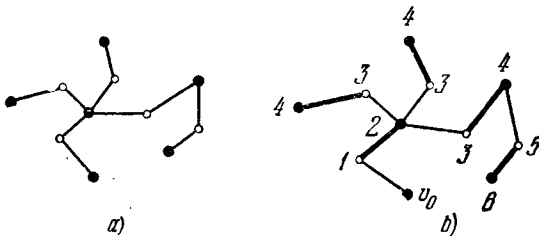


Рис. 6.30.

чередующегося дерева показан на рис. 6.30, *a* (зачерненные вершины соответствуют внешним). Число внешних вершин чередующегося дерева всегда точно на единицу больше числа внутренних вершин. Действительно, каждое ребро дерева инцидентно в точности одной внутренней вершине. Следовательно, если существует m ребер, то существуют $m/2$ внутренних вершин и $(m+1) - m/2 = m/2 + 1$ внешних вершин.

Чтобы найти максимальное паросочетание чередующегося дерева, нужно выбрать любую внешнюю вершину в качестве v_0 и определить d_i , число ребер в цепи, соединяющей v_0 с любой другой вершиной v_i . Считается, что $d_0 = 0$ (этот процесс иллюстрируется рис. 6.30, *b*). Каждая внутренняя вершина v_i смежна в точности с одной внешней вершиной v_j так, что $d_j = d_i + 1$ (т. е. v_i лежит «между» v_0 и v_j). Множество ребер, соединяющих все такие пары v_i и v_j , образует паросочетание. Это паросочетание обязательно будет максимальным, так как

только одна вершина v_0 не покрыта. Соответственно для каждой внешней вершины существует максимальное паросочетание, оставляющее только эту вершину непокрытой, и каждое максимальное паросочетание чередующегося дерева принадлежит к названному типу.

Упражнения

6.18. Доказать, что множество ребер, определенных в предыдущем абзаце, образует паросочетание.

6.19. Доказать, что вершина, оставшаяся непокрытой максимальным паросочетанием в чередующемся дереве, не может быть внутренней вершиной.

6.20. Доказать, что максимальное паросочетание в чередующемся дереве обладает тем свойством, что цепь, соединяющая непокрытую вершину с любой другой вершиной, является чередующейся цепью. (Другие вершины, в общем случае, не обладают этим свойством.)

Если M — паросочетание в графе G , то *растущее дерево* в G есть чередующееся дерево T в G такое, что все ребра паросочетания, которые инцидентны вершинам T , являются ребрами дерева и эти ребра образуют максимальное паросочетание для T . Единственная непокрытая вершина T называется корнем растущего дерева T .

Пусть T будет растущее дерево в G относительно паросочетания M и v_0 — его корень. Если существует ребро e графа G , соединяющее внешнюю вершину T с непокрытой вершиной в G , отличной от v_0 , то T называется расширяющимся относительно e . Очевидно, что существует чередующаяся цепь, соединяющая две непокрытые вершины, и M может быть увеличено описанным ранее способом.

Цветущее дерево есть растущее дерево T вместе с ребром в G , соединяющим две внешние вершины T . Если C_1 и C_2 обозначают чередующиеся цепи, соединяющие эти вершины с v_0 , то $C_1 \cup C_2$ называется *цветком*, $C_1 \cap C_2$ называется *стволом* и $C_1 \oplus C_2$ называется *соцветием*. Введенные понятия иллюстрируются рис. 6.31. (Если корень дерева инцидентен с соцветием, то в стволе нет ребер.) Вершина, в которой ствол соединяется с соцветием, называется *верхушкой ствола*.

Пусть T — растущее дерево графа G относительно паросочетания M , и предположим, что некоторое ребро e соединяет внешнюю вершину $v \in T$ с покрытой вер-

шиной $w \notin T$. Тогда ребро f , которое покрывает w вместе со своей другой граничной точкой x , не принадлежит T (почему?). В этом случае мы можем увеличить T , добавляя ребра e и f и вершины w и x (как внутреннюю и внешнюю соответственно).

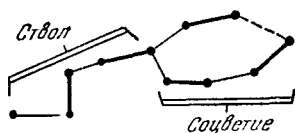


Рис. 6.31.

Заметим, что все три приведенных понятия (расширяющееся дерево, цветущее дерево и дерево, которое может быть увеличено) связаны с рас-

смотрением растущего дерева и ребра, инцидентного одной из его внешних вершин. Они различаются в зависимости от типа другой конечной точки рассматриваемого ребра (принадлежит дереву, покрыта или не покрыта). Естественно одно и то же растущее дерево может удовлетворять нескольким из этих условий относительно различных ребер. Если оно не удовлетворяет ни одному из названных условий при рассмотрении любого ребра, инцидентного любой внешней вершиной, то мы приходим к понятию венгерского дерева. Растущее дерево T в G называется *венгерским деревом*, если каждое ребро G , которое инцидентно некоторой внешней вершиной T , соединяет ее с внутренней вершиной T . Таким образом, T не является расширяемым или цветущим деревом относительно произвольного ребра e графа G и его нельзя увеличить, как делалось в предыдущем абзаце.

Рассмотрим теорему, очень важную для понимания алгоритма поиска максимального паросочетания в графе.

Теорема 6.10. Растущее дерево T в G может быть увеличено до расширяющегося дерева, до цветущего дерева, либо до венгерского дерева.

Для доказательства достаточно рассмотреть определения и найти ребро e графа G , относительно которого T является расширяющимся или цветущим деревом. Если такого ребра не существует и T не может быть увеличено, то T является венгерским деревом.

Перейдем теперь к описанию алгоритма нахождения максимального паросочетания. Возьмем любое паросочетание M в G и любое растущее дерево T относительно M . (В качестве M можно взять пустое множество, а в качестве T — любую вершину.)

1. Если T — расширяющееся дерево относительно некоторого ребра e графа G , то, используя чередующуюся цепь, увеличим M до паросочетания M' , имеющего на одно ребро больше. Если M' — не совершенное паросочетание, то выбираем новое растущее дерево T (например, с началом в любой непокрытой вершине).

2. Если T — цветущее дерево относительно некоторого ребра e , то стянем вершины и ребра цветения в новую псевдовершину и удалим получившиеся петли.

3. Если T может быть увеличено добавлением двух новых вершин и ребер, как это было описано выше, то увеличим T .

4. Повторим шаги 1—3 до тех пор, пока не будет найдено либо венгерское дерево, либо максимальное паросочетание (в преобразованном графе, где ряд соцветий может быть стянут).

В результате, если венгерское дерево T содержит все вершины преобразованного графа G^* , то текущее паросочетание M , очевидно, является максимальным в G^* . Если это не так, то удалим из G^* вершины T и все ребра, инцидентные с этими вершинами, и повторим шаги 1—3 для оставшегося графа. Таким образом, мы постепенно удаляем одно венгерское дерево за другим до тех пор, пока не получим совершенное паросочетание в оставшейся части графа или оставшаяся часть графа оказывается венгерским деревом.

Максимальные паросочетания, полученные для нескольких выделенных частей графа, используются затем для восстановления максимального паросочетания исходного графа путем растягивания ранее стянутых соцветий (в порядке, обратном порядку стягивания) и добавления соответствующих ребер к паросочетанию. Если соцветие имеет $2n+1$ вершину, то к паросочетанию добавляется n ребер соцветия (одним из возможных способов), за исключением ребра, инцидентного верхушке ствола (которая может быть уже инцидентна с ребром паросочетания).

Проиллюстрируем алгоритм нахождения максимального паросочетания на примере графа рис. 6.32, а. Будем помечать ребра и корень текущего варианта растущего дерева утолщенными линиями, а ребра паросочетания — звездочками.

Возьмем сначала в качестве M пустое множество и выберем в качестве начала растущего дерева T любую непокрытую вершину, скажем F . Дерево T является расширяющимся относительно ребра 13 . Таким образом,

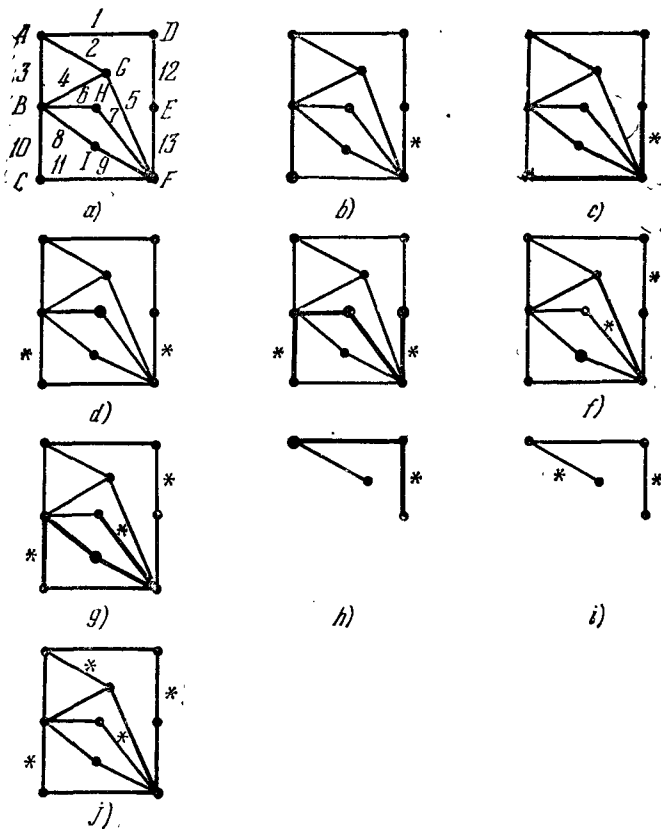


Рис. 6.32.

мы добавляем ребро 13 к M и начинаем новое растущее дерево в вершине C , как показано на рис. 6.32, b . Относительно нового T ребра 11 и 13 удовлетворяют условиям увеличения T (рис. 6.32, c). Текущее дерево является расширяющимся относительно ребра 10 . Увеличиваем M , отбрасываем T и начинаем новое дерево в H , как показано на рис. 6.32, d . Дважды расширениями (на

основе ребер 6 и 7) мы увеличиваем T (рис. 6.32, *e*). Теперь T расширяющееся относительно ребра 12. Увеличиваем M и начинаем новое дерево в 1, как показано на рис. 6.32, *f*. Два расширения (на основе ребер 8 и 9) образуют дерево, показанное на рис. 6.32, *d*, которое является венгерским. Его внешние вершины (C , H и I) связаны только с внутренними вершинами дерева. Теперь временно удалим дерево из рассмотрения и выделим подграф G_1 , полученный удалением вершин венгерского дерева и всех ребер, инцидентных его вершинам. Этот подграф показан на рис. 6.32, *h*. Здесь мы выбрали новый корень A и увеличили дерево за счет ребра 1. Полученное дерево является расширяющимся по отношению к ребру 2 и дает новое паросочетание в G_1 , состоящее из двух ребер (рис. 6.32, *i*). Это паросочетание является, очевидно, максимальным (точнее, совершенным) в G_1 . Объединяя его с найденным ранее максимальным паросочетанием венгерского дерева, получим (как будет показано далее) максимальное паросочетание для G (рис. 6.32, *j*). В рассмотренном примере нам не потребовалось прибегать к процедуре стягивания соцветий.

В более сложных графах необходимо находить и последовательно удалять несколько венгерских деревьев T_1, T_2, \dots , и, следовательно, рассматривать несколько оставшихся подграфов G_1, G_2, \dots , прежде чем будет получен граф, в котором мы обнаружим либо совершенное паросочетание, либо венгерское дерево, содержащее все оставшиеся вершины. Восстанавливая последовательно венгерские деревья в обратном порядке и находя максимальное паросочетание для каждого вновь добавленного дерева, получаем максимальное паросочетание для всего графа.

Чтобы проиллюстрировать стягивание и последующее разворачивание соцветий, предположим, что кроме ребер, показанных на рис. 6.32, *a*, вершина C инцидентна структуре, представленной на рис. 6.33, *a*. По отношению к растущему дереву и ребрам паросочетания, показанным на рис. 6.32, *a*, цикл C, P, Q, T, N является соцветием. После его стягивания получим рис. 6.33, *b*. По отношению к новому растущему дереву (рис. 6.33, *b*) оставшийся граф является соцветием, которое можно стянуть в одну псевдо-псевдовершину, показанную на

рис. 6.33, *c*. Растягивая соцветия в обратном порядке и восстанавливая паросочетания, удаленные при стягивании, получим максимальное паросочетание, показанное на рис. 6.33, *d*. Предположим, что вершина *C* в нашем

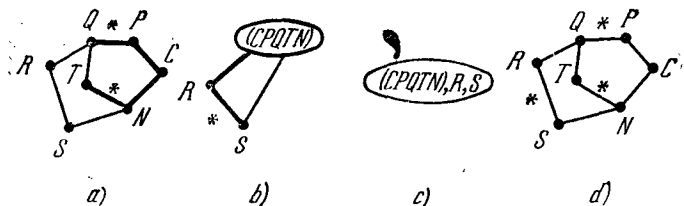


Рис. 6.33.

исходном примере фактически была вышеупомянутой псевдо-псевдовершиной (т. е. что процедурам, показанным на рис. 6.32, предшествовало двойное стягивание). Тогда максимальное паросочетание для всего графа будет иметь вид рис. 6.34.

Упражнение 6.21. Найти максимальное паросочетание для графов, показанных на рис. 6.15 и 6.17.

Итак, в предыдущих разделах мы ввели терминологию и предварительные сведения, необходимые для описания алгоритма, и проиллюстрировали его работу на

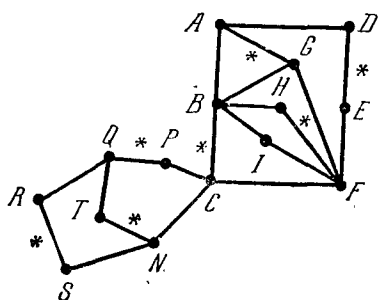


Рис. 6.34.

небольшом частном примере. Опишем теперь алгоритм в общем виде.

Описание алгоритма. Пусть $G = (V, E)$ обозначает граф, для которого требуется найти максимальное паросочетание, M — исходное паросочетание в G (возможно, пустое множество), а S — множество ребер, первоначально пустое, которое будет последовательно расширяться добавлением определенных ребер.

Если некоторые вершины G не покрыты относительно M , то выберем одну из них в качестве начала растущего дерева T . Рассмотрим в любом

порядке ребра, которые не входят в T , но инцидентны внешним вершинам T . Если T — цветущее дерево относительно некоторого ребра, то стянем соответствующее соцветие в одну псевдовершину, зафиксируем стянутое соцветие и будем считать псевдовершину внешней вершиной T . Если T может быть увеличено присоединением двух ребер и вершин, как описывалось ранее, то увеличим его. Если T является расширяющимся по отношению к некоторому ребру, то увеличим M , используя соответствующее чередующееся расширение. (В этом случае T не является более растущим деревом. Образует новое растущее дерево, выбирая, если она существует, непокрытую вершину относительно M .) Если текущий вариант растущего дерева T оказывается венгерским и если не все вершины графа принадлежат T , то временно удалим все вершины T и все ребра, которые инцидентны этим вершинам. Оставшийся граф обозначим G_1 и повторим описанный процесс для этого графа.

В конечном счете, после удаления конечного числа венгерских деревьев T_1, T_2, \dots, T_n и рассмотрения соответствующих оставшихся графов G_1, G_2, \dots, G_n оказывается, что либо (1) G_n и есть пустой граф, либо (2) M содержит совершенное паросочетание для G_n . После этого восстанавливаем поочередно T_n, T_{n-1}, \dots, T_1 и их максимальные паросочетания. Если некоторые вершины являются псевдовершинами, то растянем их в соцветия. (Во избежание ошибок лучше всего это делать в порядке, обратном их стягиванию.) При этом после растягивания найдем для соответствующего соцветия максимальное паросочетание, ни одно ребро которого не инцидентно вершине, служившей верхушкой ствола в момент стягивания. После растягивания всех соцветий получим паросочетание, которое является максимальным для первоначального графа. Подробное обоснование предложенного алгоритма приводится в работе [20].

Пусть $G = (V, E)$ — граф, каждой из вершин v которого поставлено в соответствие неотрицательное целое число $d(v)$. Подграфом с ограниченными степенями графа G считается подграф $G' = (V, F)$ такой, что степень каждой его вершины v не больше $d(v)$. Максимальным подграфом с ограниченными степенями считается подграф, имеющий наибольшее число ребер.

Легко видеть, что задача о максимальном паросочетании соответствует частному случаю, когда $d(v) = 1$ для каждой вершины v .

Эдмондс непосредственно обобщил приведенный выше алгоритм на решение общей задачи нахождения максимального подграфа с ограниченными степенями для произвольных неотрицательных $d(v)$. Он также рассмотрел еще одно важное обобщение задачи о максимальном паросочетании, когда требуется найти паросочетание с максимальным общим весом при условии, что каждому ребру графа поставлено в соответствие число, называемое «весом» (исходная задача о паросочетании соответствует случаю, когда все веса равны единице). Алгоритм решения этой задачи [18] можно объединить с алгоритмом нахождения кратчайших путей (глава 3) и решить на их основе «задачу китайского почтальона», впервые предложенную Кваном [56а]. Эта задача сводится к нахождению замкнутой цепи, в которую каждое ребро связного графа входит по крайней мере один раз и которая имеет минимальный общий вес. (Другими словами, задача состоит в том, чтобы получить *уникурсальный граф* за счет дублирования ребер при минимальном дополнительном весе.)

ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.15. Анализ технических систем

Покажем, как можно использовать соответственным образом построенные ориентированные графы для получения существенной информации о поведении реальных технических систем на основе информации, характеризующей их составные части при заданном способе связи этих частей. Излагаемый ниже метод, разработанный в числе прочих Трентом [86], наиболее широко используется для анализа электрических цепей. Однако его можно также применять и к любым другим системам, в которых происходит преобразование энергии, например к механическим устройствам с поступательными или вращательными движениями, или к гидравлическим системам. Кроме «чистых» систем (т. е. использующих

только один вид энергии) этот метод может быть распространен на «смешанные» системы, в которых различные элементы работают с различными видами энергии и связаны между собой через соответствующие устройства согласования.

Рассмотрим набор из m двухполюсников, которые образуют элементы системы E_1, \dots, E_m . Пусть клеммы двухполюсников соединены некоторым образом в n узлах P_1, \dots, P_n . Примером такой системы может служить набор сопротивлений, конденсаторов, индуктивностей и источников напряжения (в простейшем случае — батареи, в более сложных случаях — источники переменного напряжения). Предположим, что каждый отдельный элемент системы можно адекватно охарактеризовать известным уравнением, связывающим две основные переменные: ток x_i и напряжение y_i элемента E_i . Считается, что x_i и y_i измеряются в определенном направлении. Выбор переменных и использование терминов «ток» и «напряжение» будут скоро понятны.

Если, например, x_i и y_i обозначают электрический ток и разность потенциалов соответственно, то пассивный элемент (элемент, не являющийся источником) может характеризоваться одним из уравнений вида

$$y_i = kx_i \text{ — сопротивление,}$$

$$y_i = k \frac{d}{dt} x_i \text{ — индуктивность,}$$

$$y_i = k \int_{t_0}^t x_i dt \text{ — конденсатор,}$$

где t обозначает время. Активный элемент, или источник, характеризуется уравнением, выражающим одну из основных переменных как функцию времени (это может быть и константа). Например, $y_i = f(t)$ характеризует источник напряжения.

Допустим теперь, что каждому элементу E соответствует дуга a_i , а каждому узлу P_j — вершина v_j . Если конечные точки дуг взяты в качестве соответствующих узлов, то полученный ориентированный граф дает удобную характеристику структуры соответствующей реальной технической системы. Важное для нашего рассмот-

рения свойство токов состоит в том, что в каждой вершине их поведение подчинено так называемому правилу *вершин*. Оно состоит в следующем.

Правило вершин. Алгебраическая сумма токов, соответствующих дугам, инцидентным любой заданной вершиной, равна нулю.

Под алгебраической суммой понимается следующее: каждый ток добавляется или вычитается в зависимости от того, является ли соответствующая дуга положительно или отрицательно инцидентной рассматриваемой вершиной. На рис. 6.35 правило выполняется, например,

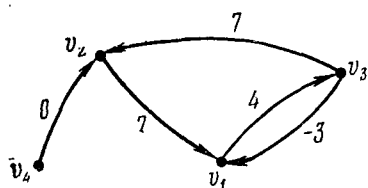


Рис. 6.35.

в v_1 , так как $(4) - (7) - (-3) = 0$. Нетрудно видеть, что оно выполняется также и в других вершинах. В теории электрических цепей это правило называется *законом Кирхгофа для токов*. В общем случае, в качестве

одной из базисных переменных, а именно той, которая имеет смысл тока, должна выбираться переменная, размерность которой обеспечивает выполнение условий вершинного постулата.

Напряжения также удовлетворяют следующему основному так называемому *циклическому правилу*.

Циклическое правило. Алгебраическая сумма напряжений, соответствующих дугам любого элементарного цикла, равна нулю.

В этом случае предполагается, что циклу задается некоторая ориентация (в любом из направлений) и каждое напряжение добавляется или вычитается в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление соответствующей дуги с выбранной ориентацией цикла. На рис. 6.36 это правило выполняется, например, для ориентированного элементарного цикла C , так как $(3) - (-2) + (-4) - (1) = 0$. Можно проверить, что правило выполняется также для всех остальных пяти элементарных циклов этого графа. В теории электрических цепей *циклическому правилу* соответствует *закон Кирхгофа для напряжений*.

Приведем еще одну формулировку циклического правила. Если v_1 — фиксированная вершина, а v_i — лю-

бая другая вершина, отличная от v_1 , то алгебраическая сумма напряжений по любой цепи, ориентированной от v_1 к v_n , не зависит от выбранной цепи. (Здесь предполагается, что граф связан и, следовательно, существует,

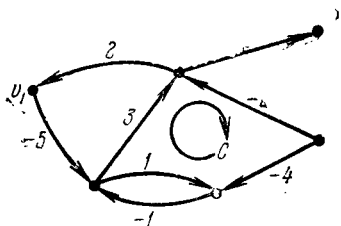


Рис. 6.36.

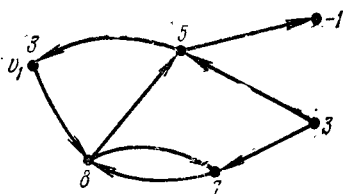


Рис. 6.37.

по крайней мере, одна такая цепь.) Используя эту формулировку для каждой вершины v_j , мы можем определить числа S_j следующим образом. Назначим S_1 произвольно. Полагаем $S_j = S_1 - K$, где K есть алгебраическая сумма напряжений по любой цепи, направленной от v_1 к v_j . Полагая, например, $S_1 = 3$ в предыдущем примере, мы получим значения S_j , показанные на рис. 6.37. Напряжения определяют значения S_j с точностью до аддитивной константы. В качестве исходной можно выбирать любую удобную вершину. В электротехнике величины S_j могут рассматриваться как потенциалы относительно выбранного потенциала исходной вершины. Очевидно, величины напряжений будут соответствовать разностям потенциалов.

Процесс получения уравнений, характеризующих систему в целом, на основе уравнений ее элементов и заданной структуры проводится в два этапа. Сначала с помощью вершинного и циклического правил уменьшается количество переменных, соответствующих токам и напряжениям. В результате выделяется множество независимых переменных, через которые можно выразить все переменные системы. Затем выписываются уравнения связи переменных тока и напряжения. Рассмотрим первый этап процесса.

Применяя к вершине v_i правило вершин, получим

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 0,$$

где $a_{ij} = +1$ (-1), если i -я вершина положительно (отрицательно) инцидентна j -й дуге. a_{ij} равно нулю в случае отсутствия инцидентности. Другими словами, векторы

$$A_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \quad \text{и} \quad X' = (x_1, \dots, x_m)$$

являются ортогональными. Заметим, что A_i есть строка A матрицы инцидентности графа. Так как пространство, натянутое на строки A , совпадает с пространством, натянутым на строки матрицы разрезов K , X' есть линейная комбинация векторов циклов (строк матрицы циклов C). Действительно, A (или K) и C определяют ортогональные подпространства, которые вместе образуют пространство размерности m .

Используя материал главы 5, \bar{K} и \bar{C} можно записать в виде

$$\bar{K} = (\bar{K}_{11}/I) \quad \text{и} \quad \bar{C} = (I/C_{12})$$

при выборе хорд стягивающего дерева в качестве первых $m-n+1$ столбцов. Здесь I — единичные матрицы. Разбивая таким же способом вектор токовых переменных, получим

$$X = \begin{pmatrix} X_c \\ X_b \end{pmatrix},$$

где X_c и X_b относятся к хордам и ветвям дерева соответственно. Правило вершин означает, что

$$(\bar{K}_{11}/I) \begin{pmatrix} X_c \\ X_b \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$X_b = -\bar{K}_{11}X_c = \bar{C}'_{12}X_c. \quad (6.1)$$

Таким образом, мы выразили токи в ветвях через токи в хордах. Аналогичным образом, циклическое правило приводит к матричным уравнениям

$$(I/\bar{C}_{12}) \begin{pmatrix} Y_c \\ Y_b \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad Y_c = -\bar{C}_{12}Y_b = \bar{K}'_{11}Y_b, \quad (6.2)$$

последнее из которых выражает напряжения на хордах через напряжения на ветвях. Применение этих соотношений составляет первый этап анализа. В результате число рассматриваемых в явном виде переменных, со-

ответствующих токовым напряжениям, сводится к минимуму. (В конкретной ситуации выбор переменных зависит, конечно, от выбора покрывающего дерева.)

Основные уравнения элементов удобно записать в матричной форме, если напряжения заданы в виде явных функций от токов. При этом получаем

$$Y = \Omega_x X - Y_g,$$

где Ω_x есть диагональная $m \times m$ -матрица, i -й диагональный элемент которой является либо константой, либо дифференциальным или интегральным оператором, а Y_g — вектор-столбец, элементы которого равны нулю для позиций, соответствующих пассивным элементам и функциям $f(t)$ для позиций, соответствующих источникам. (Соответствующие диагональные элементы Ω_x равны 0.) Если токи выражаются как явные функции напряжения, то получим

$$X = \Omega_y Y - X_g.$$

Предыдущее выражение может быть переписано в виде

$$\Omega_x \bar{C}' X_c = Y + Y_g.$$

Умножение обеих частей уравнения на \bar{C} дает

$$\bar{C} \Omega_x \bar{C}' X_c = \bar{C} Y + \bar{C} Y_g = \bar{C} Y_g, \quad (6.1)$$

где неизвестными являются только напряжения на хордах. Последнее выражение может быть переписано:

$$\Omega_y \bar{K}' Y_b = X + X_g$$

и, далее,

$$\bar{K} \Omega_y \bar{K}' Y_b = \bar{K} X + \bar{K} X_g = \bar{K} X_g, \quad (6.2)'$$

где неизвестными являются только токи в ветвях.

Уравнения (6.1) и (6.2) соответствуют формулировкам задачи для циклов и вершин (или узлов) соответственно. В случае, когда полученная система уравнений может быть решена известными математическими методами, оставшиеся неизвестными токи и напряжения легко находятся из приведенных выше соотношений. В частности, заметим, что \bar{K}' и \bar{C}' могут быть получены при визуальном анализе графа, после выбора дерева. В случае, если некоторые элементы системы имеют

более двух полюсов или если рассматриваются элементы сопряжения, которые служат для согласования различных видов энергии в одной и той же системе, то матрица, характеризующая основные уравнения, имеет более сложную структуру и решение результирующей системы уравнений получается более сложно. Тем не менее, роль графа, представляющего систему, остается по существу той же самой. Более подробные сведения читатель сможет получить в работах [14], [15], [17], [22] и [27], приведенных в литературе к главе 1.

6.16. Сети связи

Рассмотрим сначала некоторые качественные аспекты связи между членами некоторой группы. Члены группы могут общаться несколькими способами, например устно, письменно или жестами. Средства общения, используемые членами группы, образуют в результате сеть связи для этой группы. Сеть в данном случае есть граф, вершины которого соответствуют членам группы, а ребра (называемые каналами связи) означают возможность непосредственной связи между парами членов группы.

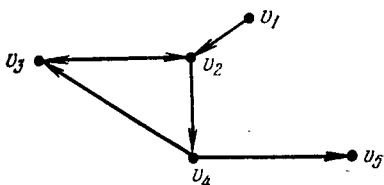


Рис. 6.38.

Ориентированный граф рис. 6.38 показывает возможности связи между некоторыми лицами или

пунктами, соответствующими вершинам, причем стрелки показывают направления возможной передачи сообщений. Матрица вершин этого графа имеет вид

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Упражнение 6.22. Используя матрицу вершин, ответьте на следующие вопросы.

а) Со сколькими пунктами непосредственно связан каждый отдельный пункт системы?

- б) Сколько пунктов непосредственно связано с каждым отдельным пунктом системы?
- с) Сколькими способами каждый пункт связан с любым другим через один промежуточный пункт?
- д) Может ли каждый пункт быть связан непосредственно или косвенно с каждым другим пунктом?

Пусть в сети связи задано подмножество соединений вершин (непосредственно через дуги или косвенно через пути), что является необходимым условием обеспечения связи между пунктами. Возникает вопрос, можно ли решить требуемую задачу взаимодействия пунктов связи с помощью заданной сети. Как правило, существуют различные способы изменения взаимодействия пунктов сети. Каждый такой способ соответствует определенной структуре сети. Структура может быть оптимальной по некоторому критерию, например по минимуму общей стоимости работы.

З а м е ч а н и е. На сильно связанных графах определяется интересная мера, называемая индексом центральности. Она характеризует степень разброса вершин графа. Если мы определим матрицу отклонений, элементы которой m_{ij} задают минимальную длину пути от вершины v_i до вершины v_j , и вычислим $\sum_{j=1}^n m_{ij}$, то индекс центральности вершины v_i есть

$$\frac{\sum_{i,j=1}^n m_{ij}}{\sum_{j=1}^n m_{ij}}$$

Глобальный индекс центральности графа получается суммированием по всем i .

Упражнение 6.23. Вычислите индексы центральности и глобальный индекс центральности для нескольких графов. Сравните с понятием радиуса.

Синтез сети связи

Рассмотрим теперь ряд задач, в которых важны количественные характеристики каналов связи. В сети связи (представляющей собой связный обыкновенный граф)

каждому ребру может быть поставлена в соответствие его пропускная способность, т. е. число, которое ограничивает общее количество сообщений, передаваемых между двумя точками (например, городами в телефонной сети связи). Таким образом, мы получаем симметрическую вершинную матрицу B , известную как *матрицу пропускных способностей ребер*. Каждый элемент B определяет пропускную способность ребра, инцидентного двум вершинам, соответствующим этому элементу. Элементы на главной диагонали одинаковы и равны произвольному числу d . Из матрицы B можно получить терминальную матрицу пропускных способностей T , которая также является симметрической и определяет максимально возможные потоки сообщений между любыми парами вершин.

Элементы матрицы T получаются с помощью нахождения всех разрезов, разделяющих рассматриваемую пару вершин, считающихся терминалами, вычисления суммы пропускных способностей ребер в каждом разрезе и определения минимальной суммы.

Приводимые ниже рассуждения несколько превосходят результаты, строго обоснованные в главе 7, где, в частности, показывается, что максимально допустимый поток между двумя определенными вершинами в направленном графе равен минимальной пропускной способности разреза, разделяющего эти вершины. Там же предлагается систематический метод определения такого критического разреза.

Таким образом, матрица B однозначно определяет матрицу T . Одна из интересных задач заключается в определении условий, при которых данная симметрическая матрица может рассматриваться (реализуется) как терминальная матрица пропускных способностей T . Другая задача состоит в том, чтобы найти систематическую процедуру получения B из T (здесь может быть несколько матриц B), которая обеспечивала бы минимально возможную сумму пропускных способностей ребер. Эта задача известна как задача синтеза сети связи с заданными терминальными характеристиками.

Вернемся к задаче реализуемости матриц. Рассмотрим разрез, соответствующий минимальному элементу t_i в T . Этот разрез разделяет граф на две компоненты;

C_1 , C_2 , и позволяет записать T в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_{C_1} & T(t_1) \\ T'(t_1) & T_{C_2} \end{pmatrix},$$

где T_{C_1} и T_{C_2} — терминальные матрицы пропускных способностей для C_1 и C_2 , а $T(t_1)$ и ее транспонированная матрица $T'(t_1)$ дают элемент (везде равный t_1), показывающий связь между парами вершин по одной из каждой компоненты (величина t_1 соответствует пропускной способности разреза).

Опишем следующий процесс, предложенный в [12], [63], как необходимое и достаточное условие реализуемости матриц. Перегруппируем рассматриваемую матрицу, как это сделано с матрицей T , где $t_{ij} \geq t_1$, T_{C_1} и T_{C_2} — терминальные матрицы пропускных способностей.

Таким образом, можно построить два графа, разрезы которых имеют пропускные способности, указанные в этих матрицах, и объединить их разрезом с минимальной пропускной способностью. Путем соответствующих перестановок строк и столбцов каждая из матриц T_{C_1} и T_{C_2} может быть представлена в такой же форме, как и T . Следовательно, каждая матрица может быть в дальнейшем разбита на четыре подматрицы (если последняя не представляет собой единственный элемент). Процесс перестроения матриц и их разбиения может быть продолжен до тех пор, пока диагональные подматрицы разбитой матрицы T не окажутся одиночными элементами и/или симметрическими матрицами 2×2 .

Чен сформулировал следующее простое правило. На каждом этапе разбиения пропускная способность каждого ребра, которое связывает разделяемые подграфы, делится поровну между этими двумя подграфами. Пропускная способность новой дуги есть разность новой терминальной пропускной способности и половины исходной пропускной способности дуг между разделяемым и всеми другими подграфами.

В задаче синтеза сумма неизвестных пропускных способностей ребер, которые соответствуют разрезу с минимальной пропускной способностью, при-

равнивается пропускной способности этого разреза в матрице пропускных способностей. Каждому элементу (но так, чтобы уравнение удовлетворялось) произвольно присваивается значение 0 или 1. Затем снова путем проверки всех возможных разрезов, разделяющих вершины на группы, определяются пропускные способности оставшихся ребер. Чен предложил процедуру нахождения общей пропускной способности дуг без синтеза матрицы B .

6.17. Граф потока сигналов

Введем общее понятие потока сигналов в ориентированных графах или сетях, которые имеют источники [$\delta^-(v)=0$], стоки [$\delta^+(v)=0$] и, возможно, контуры и петли. Наличие контуров и петель соответствует понятиям обратных связей в сетях. Кроме понятий коэффициентов усиления, соответствующих каждой дуге, используем понятие сигнала x_j , передаваемого из вершины v_j . Величина x_j называется *весом* v_j . Задача анализа сетей состоит в том, чтобы найти выражения для полного потока сигналов от источника к стоку (который часто называется коэффициентом усиления в стоке) через значения сигналов и коэффициенты усиления дуг. Связь между сигналами в различных вершинах может быть представлена в общей функциональной форме или в специальной форме линейных отношений. В последнем случае можно ввести соответствующие операции на сети и установить соответствие между этими операциями, например, и решением системы совместных линейных уравнений.

Сама сеть может представлять некую реальную физическую систему. От такой системы, вообще говоря, можно непосредственно перейти к ее уравнениям. Однако часто удобно переходить к сетевому представлению и с учетом его соответствия линейным системам попытаться найти составляющие отдельных элементов сети в общем потоке.

Введем в общем виде несколько полезных для нас понятий, относящихся к сети.

Дуги сети могут быть разделены на два класса: (1) *дуги обратных связей*, т. е. те, которые принадлежат

контурам или образуют петли, и (2) каскадные дуги, т. е. дуги, не принадлежащие обратным связям [62]. На рис. 6.39 дуги u_2u_3 , u_3u_2 , u_4u_5 являются дугами обратных связей, а u_1u_2 , u_2u_4 , u_4u_5 — каскадные дуги. Вершины могут быть также классифицированы в зависимости от того, принадлежат они контурам или нет.

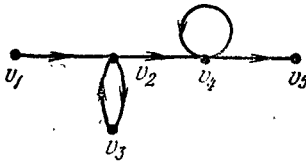


Рис. 6.39.

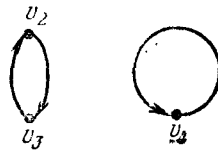


Рис. 6.40.

Каскадной сетью называется сеть, в которой каждая дуга является каскадной. Вершины каскадной сети могут быть помечены так, что индексы вершин на каждом пути будут расположены в возрастающем порядке. Процедура пометок начинается с вершины источника (их может быть несколько). После удаления этой вершины вместе с инцидентными ей дугами получается новая сеть, имеющая, по крайней мере, один источник. Новый источник помечается u_2 и удаляется вместе с инцидентными ему дугами и т. д. до тех пор, пока не будут помечены изолированные вершины, которые являются стоками исходного графа. Полученная система пометок может не быть единственной. В сети с обратной связью существует, по крайней мере, одна вершина обратной связи. *Блок обратной связи* есть подграф, состоящий только из дуг и вершин обратной связи. Блоки обратных связей сети рис. 6.39 приведены на рис. 6.40.

Любая вершина блока обратной связи может быть разделена на две вершины, одна из которых инцидентна только исходящим дугам исходной вершины, а другая — входящим дугам. При этом все дуги обратных связей, инцидентные исходной вершине, становятся каскадными дугами новой сети. На рис. 6.41 слева приведен блок обратной связи, а справа показан его вид после деления вершины u_2 . Индекс блока обратной связи равен минимальному числу вершин, разделение которых переводит все дуги в каскадные (т. е. разрывает все контуры об-

ратных связей). Операция разделения вершин существенно упрощает сеть и позволяет вычислить общий поток без учета влияния контуров. После нахождения вершин, участвующих в вычислении индекса блока (может быть несколько групп таких вершин с одинаковым числом

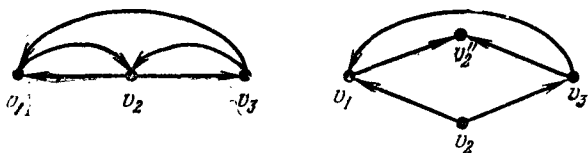


Рис. 6.41.

вершин в каждой), образуется остаточная сеть, включающая в себя выделенные вершины, источники и стоки. Все другие вершины удаляются. Дуги между двумя вершинами и петли в остаточной сети соответствуют (1) дугам, инцидентным этим вершинам в исходной сети, (2) путям, связывающим эти вершины в исходной сети и проходящим только через отброшенные вершины, и (3) петлям, которые могут быть либо петлями в исходной сети, либо контурами, проходящими через удаленные вершины.

На рис. 6.42 слева изображена сеть, а справа остаточная сеть. Источник и сток помечены знаком \times . Здесь

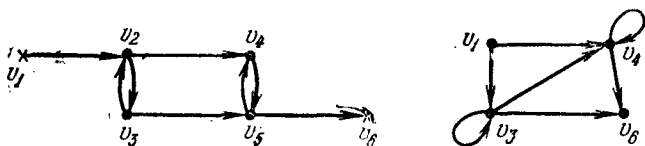


Рис. 6.42.

индекс определяется вершинами v_3 и v_4 . Сеть можно упростить путем стягивания каждого полного блока обратной связи в одну вершину. При этом новая вершина, как это показано, связывается со всеми другими вершинами с помощью каскадных дуг. Если между вершинами блока и другой вершиной или другим блоком проходило более одной дуги, то все они заменяются одной дугой.

Наконец, введем понятие *инверсии пути* в сети, под которой будем понимать переориентирование всех дуг

в обратном направлении (по отношению к исходному пути). Кроме того, будем считать, что все дуги, не входящие в рассматриваемый путь, но первоначально инцидентные конечной вершине произвольной дуги пути, при инверсии «отрываются» от этой вершины (служившей для них конечной) и соединяются с новой конечной вершиной данной дуги (ранее начальной). Такая операция делается для всех дуг пути. Инверсия дуги меняет соотношения инцидентности в графе.

Введем теперь алгебраические операции, связанные с предыдущими понятиями. В каскадной сети вес в любой вершине является функцией весов всех вершин, соответствующих начальным вершинам дуг, которые заканчиваются в данной вершине. Предполагается, что эти веса как бы трансформируются при прохождении

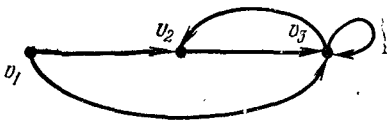


Рис. 6.43.

по дугам в соответствии с коэффициентами усиления последних. Например, запись $x_j = f_j(x_i, x_k)$ будет означать, что вершина v_j является конечной вершиной двух дуг, начинающихся в v_i и v_k . x_i и x_k также функционально связаны с другими вершинами и т. д. Подставляя выражения для x_i и x_k в f_j , получаем связи x_j с весами непосредственно предшествующих вершин и т. д. В результате, используя подстановку и последовательное исключение промежуточных вершин, получим связи x_i с источниками. Такое упрощение невозможно в сети с обратной связью. Пусть, например, на рис. 6.43 x_1 — вес v_1 , и пусть

$$x_2 = f_2(x_1, x_3), \quad x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Подстановка дает

$$x_3 = f_3(x_1, f_2(x_1, x_3), x_3) = F_3(x_1, x_3),$$

т. е. сеть не может быть упрощена.

Вернемся теперь к линейным системам, в которых все f являются линейными функциями аргументов x . Предположим, что сигнал, полученный в любой вершине, есть сумма произведений коэффициентов усиления дуг, заканчивающихся в данной вершине, на веса их начальных вершин. Таким образом, для рис. 6.44,а мы

имеем $x_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2$, а для рис. 6.44, б $x_3 = c_2 x_2$, $x_2 = c_1 x_1$ и, следовательно, $x_3 = c_1 c_2 x_1$. Таким образом, когда дуги образуют последовательность, их коэффициенты усиления перемножаются, а сами дуги могут быть заменены

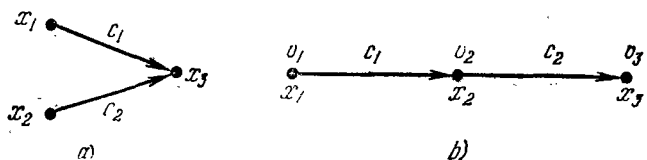


Рис. 6.44.

одной дугой (в нашем случае между u_1 и u_3) с коэффициентом усиления $c_1 c_2$. В случае параллельных дуг между двумя вершинами их коэффициенты усиления складываются, а сами дуги можно заменить одной дугой с суммарным коэффициентом усиления.

Рассмотренные операции можно применить к сети для нахождения коэффициентов усиления дуг остаточной сети, индекс которой определяет минимальное число переменных, которые не могут быть удалены с помощью четко определенных операций. Каждый блок обратной связи соответствует решению системы уравнений относительно весов его вершин, а каждая дуга в сжатом графе соответствует удалению переменной посредством ее замены переменными начальных вершин.

Для оценки влияния петель и контуров исходная сеть сводится к остаточной сети, а дугам приписываются соответствующие коэффициенты усиления согласно рассмотренным правилам. Заметим, что в остаточной сети петля может получиться в результате объединения исходящей и входящей дуги. В этом случае ее коэффициент усиления должен быть равен произведению коэффициентов усиления исходных дуг.

Пусть v — вершина с весом x , имеющая петлю с коэффициентом усиления C . Так как общий сигнал, входящий в v , должен быть равен x , а петля дает входной сигнал Cx , сигнал по другим дугам, входящим в v , должен быть равен $(1 - C)x$. В этом случае действие петли можно заменить действием дуги с коэффициентом усиления $1/(1 - C)$. Так, например, вес вершины v_3 в сети,

изображенной на рис. 6.45, записывается как

$$x_3 = c_2 x_1 + \frac{c_1 c_2}{1 - c} x_1.$$

Аналогичные преобразования могут быть выполнены при наличии нескольких петель.

Упражнение 6.24. Показать, что вес вершины v_4 в сети на рис. 6.46 определяется выражением

$$i + \frac{ab/(1-g) + cd/(1-h) + (afd + ceb)/(1-g)(1-h)}{1 - ef/(1-g)(1-h)}.$$

Для того чтобы рассмотренные операции на сети соответствовали решению системы совместных линейных уравнений, можно составить уравнения потока в сети, как показано ниже,

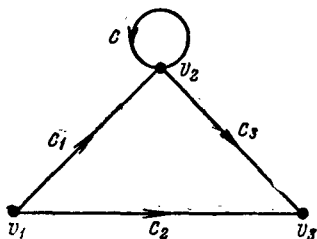


Рис. 6.45.

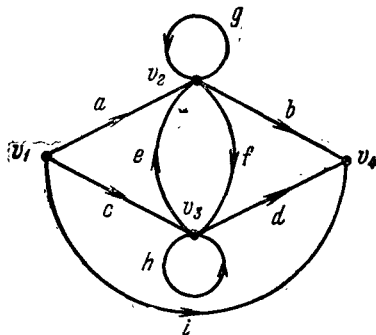


Рис. 6.46.

и выполнить операции на сети так, чтобы они соответствовали операциям, используемым при решении уравнений. Рассмотрим сеть рис. 6.47 с соответствующими ей уравнениями

$$x_3 = 4x_1 - x_4, \quad x_2 = x_1, \quad x_4 = 6x_3 - 2x_2,$$

где x_1 считается заданным. Если нам требуется, например, определить коэффициент усиления в x_3 , то путем исключения получим $x_3 = 6/7 x_1$. С другой стороны, приведение можно осуществить также с помощью конструирования остаточного графа, показанного на рис. 6.48, используя v_3 в качестве вершины, определяющей индекс. Так как v_3 желательно иметь в качестве стока, добавим фиктивную вершину v'_3 с единичным коэффициентом усиления по дуге $v_3 v'_3$. При этом обе вершины будут

иметь вес x_3 . Две параллельные дуги v_1v_3 образуют новую дугу с коэффициентом усиления 6. После замены петли с коэффициентом усиления 6 на дугу с коэффициентом усиления $1/[1-(-6)]$ и объединения результатов для получения коэффициента в v_3 получим $x_3 = 6/7x_1$.

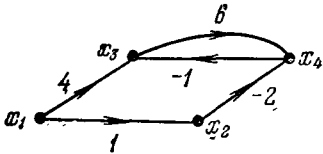


Рис. 6.47.

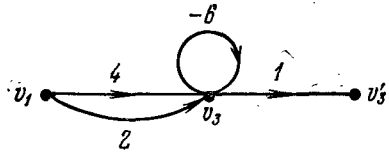


Рис. 6.48.

В действительности можно установить соответствие между последовательными этапами процесса исключения при решении системы уравнений и процесса приведения графа. Например, если x_2 всюду заменяется на x_1 , то исходный граф приводится к другому графу, в котором коэффициенты усиления дуг, проходящих через x_2 , умножаются на единичный коэффициент усиления дуги v_1v_2 и т. д. Таким образом, указанное соответствие действительно имеет место.

6.18. Переключательные сети (схемы)

Рассмотрим граф без петель $G=(V, E)$, каждому ребру e_i которого поставлена в соответствие переменная x_i , принимающая только значения 0 или 1. Такой граф может считаться математической моделью множества взаимосвязанных физических устройств, например ключей, каждый из которых может быть в любом из двух состояний: включенном ($x_i=1$) или выключенном ($x_i=0$). Пусть v_1 и v_2 — две различные фиксированные вершины G . Исходный граф вместе с переменными $\{x_i\}$ называется переключательной сетью (схемой), а v_1 и v_2 считаются ее конечными точками (терминалами).

Если в сети существует n ребер (т. е. ключей) и $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть некоторая комбинация значений переменных, то рассматриваемая сеть будет замкнутой относительно X тогда и только тогда, когда множество ребер, для которых $x_i=1$, образует элементарную цепь,

соединяющую v_1 и v_2 . В противном случае говорят, что сеть разомкнута относительно X . (Другими словами, сеть замкнута относительно X тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 лежат в одной и той же компоненте подграфа, определенного ребрами, для которых $x_i=1$.)

Рассмотрим, например, переключательную сеть рис. 6.49. Множество переменных переключения, соответствующих элементарным цепям, соединяющим v_1 и v_2 , есть

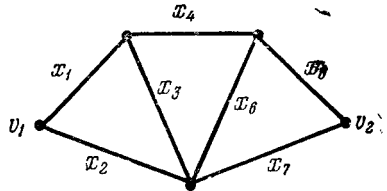


Рис. 6.49.

$((1, 4, 5), (1, 4, 6, 7), (1, 3, 6, 5), (1, 3, 7), (2, 7), (2, 6, 5), (2, 3, 4, 5))$, где цифры совпадают с индексами переменных. Векторы $X = (x_1, x_2, \dots, x_7)$, для которых сеть замкнута, являются в точности теми векторами, которые имеют 1 в каждой позиции, соответствующей одной из элементарных цепей, и произвольные значения в других позициях.

Переключательная функция $f(X)$ данной переключательной сети N с n ключами определяется на 2^n возможных значениях X следующим образом:

$$f(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } N \text{ замкнута относительно } X, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

До сих пор мы неявно предполагали, что x_i не зависит от x_j при $i \neq j$, т. е. что все n ключей управляются независимо друг от друга. Если это не так, то не все 2^n значений X являются допустимыми. Предположим, что в предыдущем примере

$$x_7 = x_1 \quad \text{и} \quad x_6 = \bar{x}_2, \quad \bar{x}_2 \equiv 1 - x_2.$$

Тогда цепь, определяемая индексами $(2, 6, 5)$, не может быть замкнутой, так как x_2 и x_6 не могут быть одновременно равны 1. Аналогично цепь $(1, 3, 7)$ замкнута всякий раз, когда

$$x_1 = x_3 = 1,$$

так как в этом случае мы обязательно имеем $x_7 = 1$.

Возникает следующая общая задача. Сформулировать условия, при которых может быть найдена переключательная

тельная сеть, реализующая заданную переключательную функцию $f(X)$ от m независимых переменных (x_1, \dots, x_m) .

Любая переключательная функция может быть реализована достаточно большой сетью, каждая переменная которой равна одной из m независимых переключательных переменных или ее дополнению. Например, если $m=3$ и $f(X) = 1$ для следующих значений X :

	x_1	x_2	x_3
X_1	1	0	1
X_2	1	1	0
X_3	0	1	1
X_4	0	0	1

то сеть рис. 6.50, очевидно, реализует заданную переключательную функцию. К сожалению, высокая степень

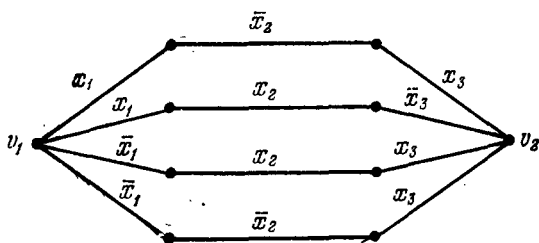


Рис. 6.50.

избыточности, возникающая при таком способе построения сети, как правило, недопустима. Естественно стремиться использовать наименьшее количество ключей (в лучшем случае m). В предыдущем примере, при $m=3$, существуют только три различных представляющих интерес конфигурации, которые показаны на рис. 6.51.

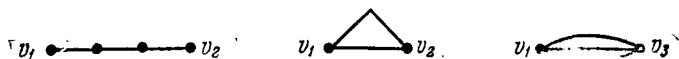


Рис. 6.51.

Они не обеспечивают достаточного разнообразия структур для реализации всех 2^8 возможных переключательных функций, которые могут быть определены на трех независимых переменных.

Идеи и методы теории графов можно использовать для реализации заданных переключательных функций при

сравнительно небольшом числе ключей. Например, в работе [64] для решения этой задачи используются свойства фундаментального цикла и матриц разрезов, рассмотренные в главе 5. Показано, что задача реализуемости переключательной функции связана с задачей реализуемости матрицы циклов соответствующего графа с помощью заданной матрицы.

6.19. Объединение электростанций в энергосистему

Допустим, что требуется объединить несколько электростанций v_i ($i=1, 2, \dots, n$) в систему так, чтобы при необходимости в моменты перегрузок можно было пользоваться энергетическими запасами любой из них. Пусть каждая станция v_i ($i=1, \dots, n$) в зависимости от ее размера и потенциальных возможностей должна быть непосредственно связана, по крайней мере, с d_i другими станциями. Стоимость прямого соединения различных станций v_i и v_j выражается действительным числом c_{ij} .

Задача объединения электростанций состоит в том, чтобы спроектировать систему связей, имеющую минимальную общую стоимость и удовлетворяющую требованиям по d_i для всех станций. Очевидно, она эквивалентна следующей задаче теории графов. Дан полный граф с вершинами v_i ($i=1, \dots, n$) и весами c_{ij} , приписанными каждому ребру e_{ij} , соединяющему v_i и v_j . Требуется найти подграф, имеющий минимальную взвешенную сумму ребер, степень вершины v_i которого, по крайней мере, d_i . Можно также искать подграф, имеющий максимальную взвешенную сумму ребер, каждая вершина которого имеет степень не больше $n-d_i-1$, а затем взять дополнительный граф. Видно, что при таком подходе исходная задача требует использования обоих обобщений задачи о максимальном паросочетании, рассмотренных в конце раздела 6.14.

В частном случае, когда вершины разделены на два класса так, что каждое ребро, соединяющее пару вершин одного и того же класса, имеет вес, равный нулю, задача объединения станций сводится к транспортной задаче. В общем случае, теория решения этой задачи значительно сложнее, чем транспортной. Хороший алгоритм ее

решения был найден Эдмондсом (но этот результат пока не опубликован).

Задача объединения электростанций или общая задача определения оптимального подграфа с ограниченными степенями вершин по существу связана с большинством экстремальных комбинаторных задач, для которых известны хорошие алгоритмы решения. Эти алгоритмы хороши в том смысле, что объемы вычислений при их применении растут как степенные функции при увеличении размерности задачи. В случае, когда все $d_i = 2$, мы получаем задачу, очень близкую к задаче коммивояжера. Действительно, небольшая модификация алгоритма объединения станций дает минимальный взвешенный подграф со степенями вершин, равными 2. Если этот подграф связан, то мы получим минимальный маршрут коммивояжера при длинах ребер c_{ij} . К сожалению, задача, получаемая после добавления к задаче объединения электростанций дополнительного ограничения связности подграфа, пока не решена.

6.20. Печатные схемы

Печатная схема представляет собой электрическую сеть, образованную соединительными проводами, нанесенными печатным способом на одной или нескольких плоских поверхностях изоляционного материала. Чаще всего она наносится с двух сторон пластмассовой платы. Соответствующие соединения между проводниками, расположенными с разных сторон платы, делаются с помощью проволочных перемычек, проходящих через отверстия в плате. Так как печатные проводники не изолированы, то они не должны пересекать друг друга (кроме специально заданных точек).

Очевидно, что такая схема может быть нанесена на одну плоскую поверхность тогда и только тогда, когда она соответствует плоскому графу. Возможность печати произвольной неплюской сети на двух сторонах платы, при наличии связей между ними, зависит от природы допустимых связей. Предположим, что соединения допускаются только в определенных узловых точках (вершинах) сети. Другими словами, будем считать, что все вершины отпечатаны с двух сторон платы, одна против

другой и каждая взаимно соответствующая пара соединена проволочной перемычкой, проходящей через отверстие в плате. Проводники схемы могут печататься на любой поверхности платы, но дополнительных отверстий в плате делать нельзя.

При таких ограничениях не всякая сеть может быть отпечатана на двух сторонах платы. В главе 4 было показано, что обыкновенный граф G и его дополнения не являются плоскими графами, если G имеет девять или более вершин. Таким образом, полный (обыкновенный) граф, имеющий девять вершин, нельзя отпечатать, на заданной плате, так как это означало бы, что некоторый подграф G (часть сети, отпечатанная на одной стороне) и его дополнение (часть, отпечатанная на другой стороне) являются плоскими.

Если допускаются дополнительные отверстия и любые перемычки через плату, то в этом случае можно отпечатать любую сеть. Можно, например, начать с вычерчивания сети на плоскости таким образом, чтобы самое большее два провода пересекались в любой точке, которая не является заранее заданным узлом. После этого сеть почти полностью можно отпечатать на одной стороне платы, а в каждом месте пересечения, где не должно быть соединения проводов, один из проводов с помощью двух отверстий и перемычек должен быть пропущен на другую сторону и частично отпечатан на этой стороне. Таким образом, на одной из сторон платы отпечатываются только небольшие участки проводов. Граничные оценки на число такого типа пересечений проводов даны в разделе 6.7.

Предположим теперь, что требуется отпечатать данную сеть при минимально возможном числе дополнительных отверстий в плате (не считая отверстий в вершинах). Любой способ печати схемы можно изобразить, вычертив сеть на плоскости, используя для этого два типа дуг. Жирными линиями можно показывать, например, дуги, располагаемые на одной стороне платы, а тонкими линиями — дуги, располагаемые на другой стороне.

Задача может быть теперь переформулирована таким образом: найти наименьшее число дополнительных вершин степени 2 (соответствующих точкам, в которых

провод переходит с одной стороны платы на другую) и изобразить граф таким образом, чтобы в любой точке, отличной от узла, пересекалось самое большее два ребра и эти ребра были различных типов. Естественно каждое ребро должно изображаться линией одного типа (жирной или тонкой).

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

6.21. Идентификация в химии

Одна из основных задач теории графов состоит в нахождении хорошего алгоритма для определения того, являются ли два конечных графа одинаковыми в абстрактном смысле или, в более общем случае, является ли один граф подграфом другого. Первая задача называется задачей идентификации графа, а вторая — задачей идентификации подграфа. Чтобы формулировка задачи была более четкой, слову «хороший» нужно придать некоторый математический смысл. Будем считать, что алгоритм является «хорошим», если объем вычислений связанных с его применением для любой пары графов, растет в худшем случае как степенная функция, а не экспоненциально с ростом числа ребер в выбранной паре графов.

Хороший алгоритм идентификации деревьев (но не поддеревьев) разработал Эдмондс. Этот алгоритм мы рассмотрим ниже. Эдмондс считает, что хорошего алгоритма идентификации произвольных подграфов или даже произвольных графов в общем случае не существует. С практической точки зрения задачи идентификации графов и подграфов важны в органической химии, где молекулы представляются в виде графов. Вершины соответствуют атомам, а ребра — связям между атомами.

Существование нескольких видов атомов не вносит серьезных трудностей в задачу идентификации. В настоящее время много внимания уделяется разработке «эвристических» алгоритмов химической идентификации — алгоритмов, не являющихся «хорошими» в нашем

смысле, но хорошо работающих на практике. Для химиков важно не только решить задачу идентификации структур, но гораздо более интересно найти удобную систему каталогизации химических препаратов так, чтобы любой препарат можно было легко найти в каталоге или внести туда. (Поиск химических патентов в настоящее время является довольно сложной задачей.)

Алгоритм идентификации деревьев использует каталожную систему, построенную на основе линейного упорядочения множества всех конечных деревьев. Однако наличие такой системы совершенно не обязательно. Например, существует хороший алгоритм для определения идентичности (в комбинаторном смысле) любых двух поверхностных карт. Карты обладают свойством комбинаторной «жесткости» — так, что если карты M_1 и M_2 идентичны и установлено, что ребро e_1 в M_1 идентично ребру e_2 в M_2 , конечная точка v_1 ребра e_1 идентична с конечной точкой v_2 ребра e_2 и грань f_1 , содержащая e_1 , идентична с гранью f_2 , содержащей e_2 , идентификация оставшихся частей M_1 и M_2 однозначна и легко устанавливается. Таким образом, для того чтобы установить идентичность карт M_1 и M_2 , необходимо только идентифицировать ребро e_1 в M_1 с каждым ребром M_2 четырьмя способами, соответствующими каждому возможному способу идентификации вершины v_1 и грани f_1 в M_2 . Из такой процедуры, конечно, непосредственно не следует система каталогизации карт.

Упомянутое выше свойство «жесткости» можно использовать для определения идентичности деревьев T_1 и T_2 , а также идентичности их способа изображения на плоскости. Под идентичностью способа изображения мы будем понимать, что для каждой пары взаимно идентичных вершин v_1 в T_1 и v_2 в T_2 ребра, которые пересекаются в v_1 в изображении T_1 , располагаются вокруг v_1 в том же самом порядке, в каком идентичные ребра расположены вокруг v_2 в изображении дерева T_2 . Различные способы изображения одинаковых деревьев T_1 и T_2 обычно усложняют проверку на идентичность, а число различных способов изображения дерева, вообще говоря, растет экспоненциально с числом ребер в дереве.

Можно считать (хотя мы и не будем придерживаться такой точки зрения), что алгоритм идентификации

деревьев есть процедура приведения деревьев к каноническому виду.

Напомним, что *корневым деревом* является дерево, в котором одна из вершин, в отличие от других, называется *корнем*. Алгоритм идентификации фактически применяется к корневым деревьям. Поэтому опишем сначала хороший алгоритм приведения любого дерева T к канонической корневой форме. Пусть T_0 есть дерево T . Будем формировать T_{i+1} из T_i , вычеркивая из T_i все вершины степени 1 и инцидентные им ребра. Такой процесс продолжим до тех пор, пока не получим T_i , которое состоит только из одной вершины или одного ребра и его конечных точек. Процесс оказывается конечным для любого исходного дерева T . Вершина или ребро, получаемые по окончании процесса, называются *центром T* .

В случае, когда получена вершина, будем считать, что она и есть корень дерева T . В случае получения ребра примем за корень одну из его конечных точек, например, вершину, которая дает корневое дерево более низкого ранга (или любую конечную точку в случае, когда они дают одинаковые корневые деревья). Упорядочим все корневые деревья так, чтобы из любых двух неодинаковых деревьев одно имело меньший ранг. (При другом подходе в качестве корня дерева T можно выбрать одну из вершин, которая образует корневое дерево с минимальным рангом. Выбор вершины в этом случае не однозначен, а результирующее корневое дерево определяется однозначно. Независимо от метода определения корня два дерева идентичны тогда и только тогда, когда соответствующие им корневые деревья одинаковы. Первый метод кажется более простым.)

Каждому корневому дереву будет соответствовать определенная конечная последовательность целых чисел. Не существует двух разных корневых деревьев, которые имели бы одинаковые последовательности. Алгоритм определения идентичности двух корневых деревьев основан на вычислении соответствующих последовательностей и их сравнении. Для сравнения последовательностей существует хороший алгоритм, так как число членов в последовательности и наибольший ее член равны числу вершин в дереве, соответствующем последовательно-

сти. Как это будет видно из определения, хороший алгоритм вычисления последовательности для данного дерева всегда существует.

Ранг корневых деревьев устанавливается в соответствии с лексикографическим упорядочением соответствующих последовательностей. Таким образом, ранг T_1 меньше, чем T_2 , если существует целое число k такое, что для $j < k$ j -е члены двух последовательностей равны и, кроме того, k -й член в последовательности T_1 либо меньше k -го члена в последовательности T_2 , либо больше.

Если удалить из корневого дерева T корень r и ребра, которые инцидентны ему, то получится несколько деревьев, каждое из которых соответствует одному из удаленных ребер. Эти деревья называются факторами корневого дерева T . Каждый фактор F содержит точно одну вершину, которая соединяется с r в T . Эта вершина рассматривается как корень фактора. Таким образом, корневое дерево T , если оно не является просто единственной вершиной, однозначно разбивается на один или несколько факторов, которые представляют собой также корневые деревья.

Последовательность для корневого дерева T , состоящего из единственной вершины, имеет один член, равный 1. Для любого другого корневого дерева T все члены последовательности S , соответствующей T , кроме первого, получаются из последовательностей S_i , соответствующих факторам T_i дерева T , упорядочением S_i по возрастанию ранга. Конечно, в случае совпадения некоторых S_i их порядок не имеет значения, важно только, чтобы все они присутствовали в S . Таким образом, совокупность членов всех S_i содержит все члены S , кроме первого. Первый член S равен единице плюс сумма первых членов S_i , т. е. числу вершин в T .

Заметим, что существует единственное взаимно однозначное соответствие между членами S и вершинами T , при котором первый член S соответствует корню T , а другие члены S соответствуют тем же самым вершинам, что и члены S_i , из которых они были получены. Каждая вершина v в T является корнем только одного корневого дерева (обозначим его через T_v), которое включается в индуктивное определение S . Другими сло-

вами, T_v является фактором фактора... фактора T . Величина члена S , который соответствует v , равна числу вершин в T_v .

Важнейшей характеристикой последовательности S с точки зрения идентификации корневого дерева является единственность упорядочения ее членов даже при отсутствии заранее заданного упорядочения вершин дерева T . Из определения S следует, что для идентичности двух деревьев необходимо, чтобы были идентичны соответствующие им последовательности.

Осталось проверить достаточность идентичности соответствующих последовательностей. Это легко сделать, убедившись, что из последовательности S действительно получается дерево T с помощью следующей однозначной процедуры.

Если S состоит из единственного члена, то он равен 1 и T состоит из одной вершины. Если членов несколько, то, отбрасывая первый член S , все остальные члены можно разбить на несвязанные подпоследовательности S_i ($i=1, \dots, n$), состоящие из следующих друг за другом членов S , так, что там, где u_i обозначает первый член S_i , u_i есть второй член S . Кроме того, u_i ($i>1$) есть ближайший к u_{i-1} член S_i , величина которого не меньше u_{i-1} . После u_n нет члена, величина которого была бы не меньше u_n .

Определенные таким образом S_i являются последовательностями, соответствующие факторам T_i дерева T . Это следует из двух фактов: (1) первый член последовательности, соответствующей корневому дереву, больше всех остальных членов; (2) последовательности, соответствующие факторам T , располагаются в S в порядке возрастания их рангов.

После построения T_i , соответствующих S_i , строится корневое дерево T . Оно получается путем соединения дополнительной вершины (корня T) с корнями всех T_i . Описание процедуры построения корневого дерева по соответствующей ему последовательности завершается индукцией по размеру последовательности.

Рассмотренный метод идентификации деревьев вряд ли может дать хороший алгоритм решения более общей задачи определения того, содержит ли данное корневое дерево подграф, идентичный другому заданному корне-

вому дереву при совпадении их корней. Такой алгоритм было бы очень интересно получить.

Упражнение 6.25. Показать, что последовательности, полученные удалением всех членов, равных 1, из последовательностей S , соответствующих корневым деревьям, так же могут использоваться для идентификации деревьев, как и исходные последовательности S .

6.22. Простая модель из органической химии

Некоторые органические молекулы могут быть представлены как плоские графы. При этом атомы соответствуют вершинам, а связи между атомами — ребрам. Простейшими из таких молекул являются углеводороды парафинового ряда C_kH_{2k+2} . Здесь k атомов углерода рассматриваются как вершины степени 4 (с учетом связей как с водородом, так и с другими атомами углерода), а $2k+2$ атомов водорода — как вершины степени 1. На приводимых ниже рисунках атомы водорода не показаны, так как они не влияют на изомеризм (т. е. на число различных типов связей в молекуле с фиксированным числом атомов).

Общее число вершин n в этом случае будет равно $3k+2$, а общее число ребер $m = \frac{1}{2}(4k+2k+2) = 3k+1$. Так как число независимых циклов $m-n+1$ в данном

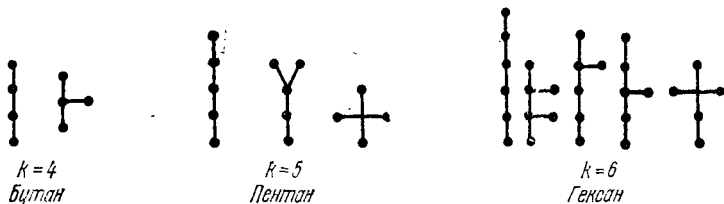


Рис. 6.52.

случае равно нулю, такие молекулы могут быть представлены в виде дерева, где кратные связи исключены. Деревья, образованные из k вершин, включают все возможные углеродные структуры, которые дают атомы. При $k \geq 4$ может быть несколько различных структур. Если добавить водородные связи в каждой части рис. 6.52 так, чтобы степени вершин, соответствующих атомам углерода, оказались равными 4, то можно убедиться в том, что в каждом соединении присутствует

необходимое число атомов водорода. Каждое такое соединение называется изомером.

Первая схема в каждой группе на рис. 6.52 соответствует так называемой прямой цепи углеводорода (происхождение названия очевидно), а остальные — разветвленным цепям углеводородов. К названиям последних часто добавляется приставка *изо-* (от понятия изомерии). Эти вещества возникают, естественно, как смеси всевозможных устойчивых изомеров. С ростом k свойства различных изомеров становятся совершенно различными. Поэтому необходимо знать, сколько различных изомеров может быть в соединении.

В 1875 г. Кэли опубликовал первую работу по применению теории графов в химии. Он предложил способ решения названной задачи «без ошибки и повторения». При этом молекула представлялась корневым деревом, рассматривались все возможные структуры, а затем принималось решение о том, какие формы являются химически эквивалентными. Например, для $k=5$ существует девять корневых деревьев, изображенных на рис. 6.53.

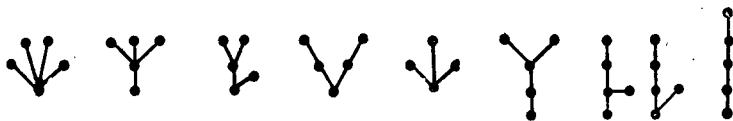


Рис 6.53.

Можно видеть, что шесть из них химически эквивалентны трем остальным. Таким образом, для $k=5$ только три структуры, показанные на рис. 6.52, действительно являются изомерами.

Задачу повторения можно решить, представляя все фигуры в качестве «одноцентровых» или «бицентровых»

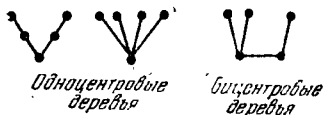


Рис. 6.54.

деревьев, как на рис. 6.54. Под *одноцентровым деревом* понимается дерево, имеющее две или более главные

ветви одинаковой высоты, инцидентные с корнем. *Бицентровое дерево* имеет два корня. Каждому корню инцидентны несколько главных ветвей. Здесь также важно, чтобы главные ветви имели одинаковую высоту. После введения названных понятий оказывается, что все дублирования устраняются и мы снова получаем три химически различных изомера.

Изображая всевозможные изомеры в соответствии с этим простым правилом, Кэли определил число структурных изомеров для парафинового ряда при всех значениях k вплоть до 13. Этот результат приведен в таблице 6.1.

Таблица 6.1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Одноцентровые	1	0	1	1	2	2	6	9	20	37	86	183	419
Бицентровые	0	1	0	1	1	3	3	9	15	38	73	174	380
Общее число	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	357	799

Более глубокий результат в этой области опубликован также в 1875 г. Шиффом [81]. Метод Шиффа требует, чтобы рассматриваемые односвязные или насыщенные углеводороды при $k \geq 5$ изображались по симметричной схеме, как показано на рис. 6.55. При таком

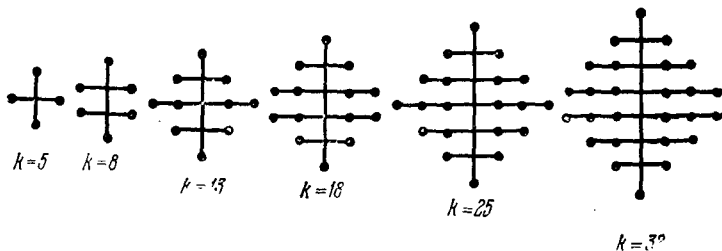


Рис. 6.55.

расположении деревьев легко установить, что общее число вершин k может быть выражено как функция числа вершин K на главном вертикальном стволе (используя четыре правых треугольника, взятых попарно). Эта

функция имеет вид

$$k = 2 \left(\frac{K}{2} \right)^2 = \frac{K^2}{2}, \quad K - \text{четное,}$$

$$k = \left(\frac{K+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{K-1}{2} \right)^2 = \frac{K^2+1}{2}, \quad K - \text{нечетное.}$$

Для нахождения числа изомеров при $k \leq 10$ можно предложить довольно сложный метод, который требует дополнительных уточнений. Метод может быть обобщен на двухсвязные молекулы $C_k H_{2k}$ и трехсвязные молекулы $C_k H_{2k-2}$. Существует метод определения числа структурных изомеров для значительно более сложных молекул.

6.23. Два примера из статистической механики

Мы уже упоминали, что многие комбинаторные задачи теории графов обязаны своим происхождением статистической механике. Так как любой конкретный пример требует достаточно полного описания физики рассматриваемого явления, мы ограничимся рассмотрением только двух, хорошо известных явлений для иллюстрации основных идей перехода от теории графов к моделям. Это задача Изинга и задача о димерах.

Начнем с задачи Изинга. Было замечено, что ферромагнитное вещество теряет свою намагниченность в зависимости от температуры. Таким образом, функция намагниченности является убывающей и резко падает при определенной температуре, называемой точкой Кюри. Задача состоит в разработке модели, которая объясняла бы явление резкого падения намагниченности. Эту задачу можно рассмотреть на некоторой решетке и попытаться записать функцию разбиения, которая для конечной решетки была бы аналитической функцией температуры и не учитывала бы наличия резкого падения. Однако в некоторых пределах эта функция все же должна обладать интересующим нас свойством. Пусть задача рассматривается на трехмерной решетке и предполагается, что ферромагнетизм вызывается взаимодействием между спинами определенных электронов в атомах, образующих кристалл. Эти взаимодействия можно описать следующей обобщенной задачей на языке теории графов.

Требуется найти производящую функцию числа допустимых помеченных подграфов с k ребрами для помеченного графа, который представляет собой n -мерную решетку. Подграф является допустимым, если все его вершины имеют четную степень. До сих пор эта задача была решена только для $n=1$ (Изинг) и $n=2$ (Онзагер).

Пример графа Изинга приведен на рис. 6.56. Подробное рассмотрение задачи Изинга можно найти в работе [65]. Интересные работы по статистике решеток опубликованы Монтроллом. Работы сопровождаются хорошей библиографией.

Рассмотрим вторую интересную задачу статистической механики (решалась Монтроллом и Пфаффиансом), которая возникает в теории абсорбции двухатомных молекул (димеров) на поверхностях. При этом каждая двухатомная молекула «прилипает» на плоскую решетку так, что каждый из атомов попадает на узел решетки. Задача состоит в определении числа возможных соединений ближайших соседей на двухпериодической решетке (прямоугольная решетка, каждая пара противоположных сторон которой объединена, в результате чего образована решетка на торе) таких, при которых не остается ни одного узла решетки, не занятого атомом.

Эта задача эквивалентна определению числа способов, которыми можно покрыть прямоугольную доску, разделенную на клетки, прямоугольными фишками, состоящими из двух клеток того же размера, что и на доске (типа домино). Очевидно, доска должна содержать четное число клеток и, кроме того, должна иметь четное число клеток, по крайней мере, вдоль одной стороны.

Более сложной математической задачей является задача раскладки, в которой требуется найти число способов покрытия двумерной решетки n квадратами. Причем квадраты могут быть двух типов: единичные и двойные. Считается, что $n=n_1+2n_2$, где n_1 — число единичных квадратов, а n_2 — число двойных квадратов (см. также раздел 6.13).

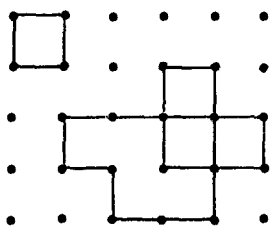


Рис. 6.56.

6.24. Генетическая задача

Бенцер [2] сформулировал следующую задачу о возможных соединениях, допустимых конфигурацией химических компонент генов. Если такими компонентами являются трехмерные молекулы, то они могут быть соединены вместе в соответствии с определенной структурой. Это объединение может быть представлено в трехмерном пространстве, если каждой молекуле поставлена в соответствие некоторая вершина и вершины соединены прямыми линиями при наличии связи между соответствующими молекулами. Возникает вопрос, можно ли расположить молекулы на одной и той же прямой линии так, чтобы они сохранили прежние связи? Каждая молекула представляется при этом отрезком прямой. Если пара молекул связана, то соответствующие им отрезки взаимно перекрываются. Таким образом, задача состоит в нахождении условий, при которых граф связей можно представить с помощью пересекающихся определенным образом отрезков одной прямой линии, т. е. необходимо так сопоставить отрезки с вершинами, чтобы два отрезка пересекались тогда и только тогда, когда они соответствуют смежным вершинам. Граф, который может быть представлен таким образом, будет называться *графом отрезков*. Например, треугольник можно представить на действительной оси перекрывающимися отрезками $(0, 3)$, $(1, 4)$ и $(2, 5)$. С другой стороны, цикл, состоящий более чем из трех вершин, не может быть представлен рассматриваемым способом.

Было показано [59], что если граф не содержит ни одного из пяти типов подграфов, представленных на рис. 6.57 (т. е. имеющих только те связи между вершинами, которые показаны на рисунке), то он может быть изображен с помощью отрезков на прямой.

Биологическая задача в ее общем виде связана с мутантными генами. Требуется проверить соответствие линейной модели гена заданной информации о пересечении (соединении) пар.

Фалкерсон и Гросс показали, что задача определения графа отрезков является частным случаем следующей задачи, которую они решили: дана $(0, 1)$ матрица A (т. е. матрица, элементы которой равны 0 или 1).

Найти условия, при которых можно путем перестановки строк матрицы получить новую матрицу, в каждом столбце которой единичные элементы расположены непосредственно друг за другом. Заметим, что сопоставление графа произвольной матрицы A оказывается неоднозначным. Один из способов, например, состоит в

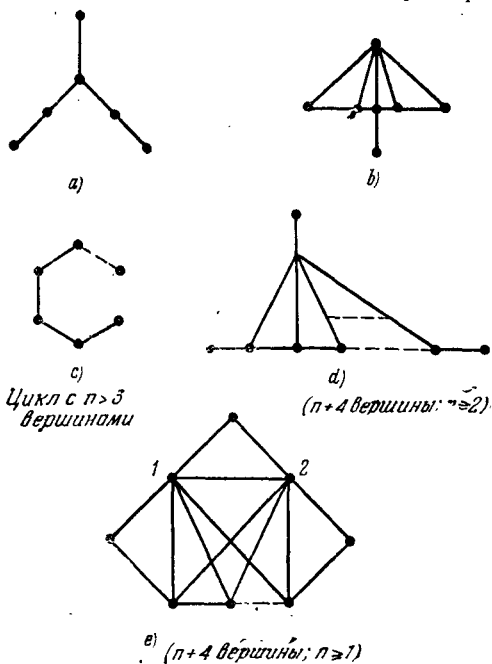


Рис. 6.57.

построении графа пересечений столбцов A . (Граф пересечений семейства из n множеств получается, если каждому множеству поставить в соответствие вершину и соединить пару вершин ребром, когда соответствующие им множества имеют непустые пересечения.)

При решении сформулированной задачи вводится понятие графа «перекрытий» (отличается от «пересечений») и понятие графа компонент.

Применительно к графу отрезков матрица A должна рассматриваться как матрица инцидентий доминирующих клик. (Множество вершин, каждая пара которых

соединена ребром, называется *кликой графа*. Если множество всех таких множеств вершин частично упорядочено по множеству включений, то максимальные элементы называются *доминирующими кликами* графа. Учитывая, что две вершины связаны ребром тогда и только тогда, когда они принадлежат некоторой доминирующей клике, можно считать, что матрица инциденций доминирующих клик полностью определяет граф.) В результате граф является графом отрезков тогда и только тогда, когда единичные элементы во всех столбцах матрицы инциденций доминирующей клики расположены последовательно друг за другом. Гилмор и Гофман [31] доказали, что граф G является графом отрезков тогда и только тогда, когда каждая квадратная решетка в G имеет диагональ и каждый цикл нечетной длины в дополнительном графе имеет треугольную хорду. Треугольная хорда цикла, проходящего через вершины v_1, \dots, v_k , есть любое ребро (v_i, v_{i+2}) , $1 \leq i \leq k-2$, (v_{k-1}, v_1) или (v_k, v_2) .

ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА И ОБЩЕСТВА

6.25. Графы и кибернетика

При чтении настоящего раздела читатель должен сравнить и противопоставить представленные здесь понятия и понятия раздела 6.30. В результате он обнаружит некоторое пересечение понятий, но общие идеи в этих двух разделах проявляются совершенно по-разному. Преобразования, обсуждаемые в данном разделе, также являются более общими, по сравнению со специальным преобразованием, при котором каждый член группы отображается в новый член добавлением (в предположении аддитивности группы) некоторого фиксированного члена группы.

Понятия изменения и выбора являются важнейшими в биологии и эволюции. Рассмотрим вначале понятие изменения, например изменение цвета человеческой кожи под воздействием солнечных лучей. Назовем бледную кожу операндом, темную кожу — результатом преобразования, солнечный свет — оператором, а само измене-

ние — переходом. Переход может быть представлен в виде

Бледная кожа → темная кожа.

Множество переходов, выполняемых одним оператором на множестве операндов, будем называть преобразованием. Схематически преобразование может быть представлено в виде

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & a' & b' & c' \end{array}$$

Преобразование замкнуто, если множество результатов преобразований не содержит элементов, которые не принадлежат множеству операндов. Так, преобразование

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & c & a & a \end{array}$$

замкнуто.

Преобразование является однозначным, если оно переводит один операнд точно в один результат преобразования (множество результатов преобразования может содержать одинаковые элементы). Так,

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & c & a & a \end{array}$$

является однозначным преобразованием. С другой стороны,

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & c \text{ или } d & e \text{ или } f & g \text{ или } h \end{array}$$

не является однозначным.

Преобразование называется *взаимно однозначным*, если множество результатов не содержит одинаковых элементов. Например,

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & c & a & b \end{array}$$

есть взаимно однозначное преобразование, а

$$\begin{array}{ccc} | & a & b & c \\ \downarrow & c & a & a \end{array}$$

им не является.

Рассмотрим теперь пример применения последовательных однозначных преобразований к некоторому множеству операндов, который проиллюстрирует принцип «выбора» на множестве операндов:

ABCDEF GHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
 DIFFERENCE BETWEEN A MERMAID
 FCRREA EWFEEAEEWDTEATDCFD
 RFAAEDEARECEEDEEAFFEEDFFRF
 ARDDEFEDAEFEFEEDREEFERRAR

(вторая строчка является частью предложения, взятого из произведения Марка Твена «Письма с Земли»). Заметим, что уже после четырех преобразований исходное множество из 26 элементов сводится к множеству из 5. Выполненные выше последовательные преобразования

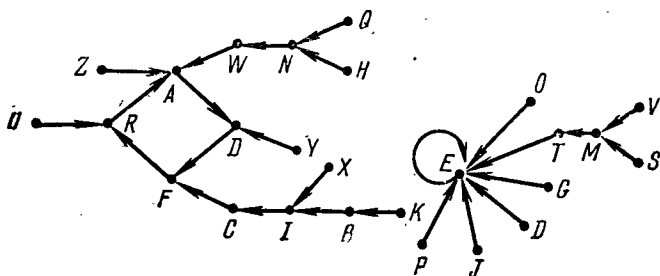


Рис. 6.58.

могут быть представлены ориентированным графом, который Эшби называет кинематическим (рис. 6.58). Заметим, что вершины, принадлежащие контурам (или петлям), при последовательных преобразованиях не удаляются. Контур в кинематическом графе называется *бассейном равновесия*, так как они инвариантны или меняются периодически при последовательных преобразованиях. В эволюционной терминологии элементы, принадлежащие контурам, называются *выживающими* при данном преобразовании. (Элементы в исходном множестве операндов могут представлять собой совокупность генов, подверженных облучению.) Заметим, что ни один из элементов не теряется при преобразовании только в случае, когда это преобразование является

взаимно однозначным. В терминах теории графов получим следующую теорему.

Теорема 6.11. Кинематический граф состоит из нескольких простых контуров, не имеющих общих вершин, тогда и только тогда, когда преобразование взаимно однозначно.

Доказательство. Если преобразование взаимно однозначно, то отрицательная и положительная степени каждой вершины равны единице. Таким образом, дуги могут быть разбиты на простые контуры, которые обязательно не будут иметь общих вершин.

С другой стороны, если дуги образуют множество контуров, не имеющих общих вершин, то положительная и отрицательная степени каждой вершины равны единице и преобразование является взаимно однозначным. Кинематический граф тождественного преобразования

$$\begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \downarrow & & & \\ & a & b & c \end{array}$$

состоит из $k=3$ петель (рис. 6.59). Если преобразование не является взаимно однозначным, то для выбора минимального числа элементов оно должно применяться столько раз, сколько дуг содержится в длиннейшем из путей от вершины вне контура до первой вершины в контуре.



Рис. 6.59.

С биологической точки зрения для Эшби важно, что при любом преобразовании, отличном от вза-

имно однозначного, многообразие множества элементов будет убывать и никогда не может возрасти. Применяемое преобразование будет «выбирать» некоторое подмножество исходного множества.

Преобразование можно представить матрицей вершин, например:

$$\begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \downarrow & & & \\ & c & a & a \end{array} \quad \text{представляется как} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Задача определения элементов, которые будут выбираться при m -кратном повторении преобразования, эквива-

лентна задаче определения столбцов матрицы, которые содержат положительные элементы после возведения матрицы в m -ую степень.

Матрица взаимно однозначного преобразования является единственной матрицей однозначного преобразования, содержащей единичный элемент в каждой строке и каждом столбце. Следовательно, это единственная матрица, которая может быть примитивной. Таким образом,

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & a & b & c \\ & c & a & b \end{array} \quad \text{дает} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Третья степень этой матрицы есть матрица, все элементы которой равны единице. Матрица будет примитивной только в том случае, если кинематический граф связан. В противном случае будут существовать k примитивных подграфов. Рассмотренный подход может быть обобщен на многозначные преобразования, эквивалентные марковским цепям.

Кроме понятия изоморфизма преобразований, которое совпадает с понятием изоморфизма графов, Эшби определил понятие *гомеоморфизма* преобразований. Требования для гомеоморфизма менее жесткие, чем для изоморфизма. Два множества операндов *гомеоморфны*, если применение преобразования объединения к более сложному множеству может свести его к множеству,

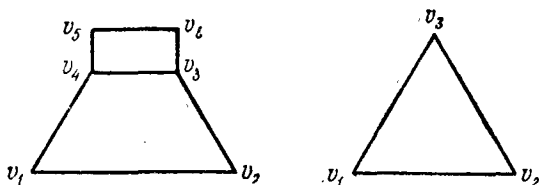


Рис. 6.60.

которое изоморфно с более простым. В терминах графов два графа будут гомеоморфными, если соответствующее стягивание подграфов графа с большим числом вершин в отдельные вершины дает граф, который изоморфен более простому графу. Два графа на рис. 6.60 гомеоморфны.

6.26. Применения в социологии

Ориентированный граф может быть использован для представления общественной иерархии или родства. Рассмотрим простой пример [91]. Пусть имеется семейная группа, состоящая из Дэвида (D), его сына Джона (J) и дочери Грейс (G), жены Джона Сильвии (S) и двух сыновей Майкла (M), Ричарда (R), дочери Эмили (E) и сына Грейс Бена (B). Связи P (означает чей-то сын) и Q (означает чей-то ребенок) иллюстрируются ориентированными графами рис. 6.61. Соответствующие матрицы для этих графов имеют вид

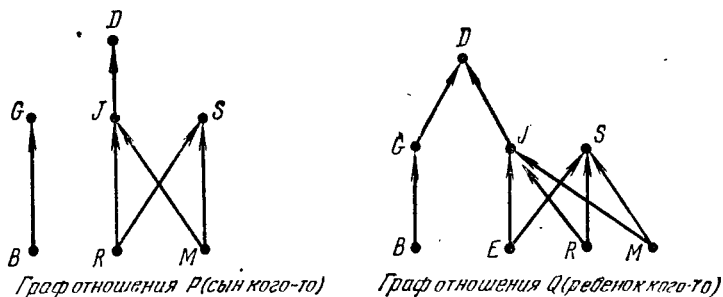


Рис. 6.61.

(E) и сына Грейс Бена (B). Связи P (означает чей-то сын) и Q (означает чей-то ребенок) иллюстрируются ориентированными графами рис. 6.61. Соответствующие матрицы для этих графов имеют вид

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & G & B & J & S & E & R & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ G \\ B \\ J \\ S \\ E \\ R \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & G & B & J & S & E & R & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ G \\ B \\ J \\ S \\ E \\ R \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Взяв произведение матриц, получим матрицу отношений PQ (сын ребенка, т. е. чей-то внук):

$$PQ = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & G & B & J & S & E & R & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ G \\ B \\ J \\ S \\ E \\ R \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Рассмотрим еще один пример.

Ставился эксперимент по изучению эффективности схем связи. Каждому из пяти лиц, участвовавших в эксперименте, выдавалось пять символов из шести [57] следующих:



В каждом опыте все участники имели только один общий символ. Для каждого участника фиксировалось число сообщений и время, необходимое для опознавания общего символа.

Использовались четыре схемы связей, изображенные на рис. 6.62 (предполагается, что связь по любому ребру возможна в двух направлениях). Эти схемы предполагают возрастание степени централизации для лица C

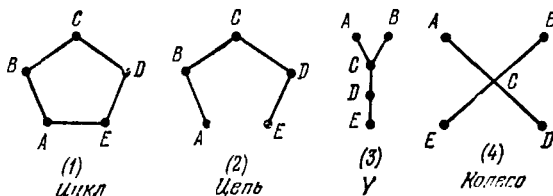


Рис. 6.62.

и степени изоляции для других четырех лиц. Структура графов обеспечивает гибкость связи, т. е. при любой схеме существует несколько способов передачи информации и лидер может представляться любой из вершин (наиболее часто лидером было лицо C).

Каждый участник давал свою оценку схем по степени удовлетворенности пребыванием в различных вершинах.

В результате эксперимента оказалось, что наилучшей схемой связи является колесо (требует меньше всего информационных обменов) и наихудшей — цикл (требует максимального числа обменов). Время решения в случае колеса меньше, чем в трех остальных случаях, где оно было примерно одинаковым.

Наибольшая удовлетворенность участников эксперимента соответствовала схеме цикла, а наименьшая — схеме колеса. Во всех случаях наиболее выгодной было положение центрального участника *C* (конечно, там, где такое положение существенно).

В другом эксперименте три участника *A*, *B* и *C* должны были восстановить общий список из 25 слов по имевшемуся у каждого из них частичному списку [45]. Списки участников содержали последовательные пары слов такие, что, например, второе слово в паре *A*-го списка было первым словом пары *B*-го или *C*-го списка. Идея построения списков иллюстрируется приводимой таблицей 6.2.

Таблица 6.2

Общий список	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1. South	south	south	
2. Through		through	through
3. Fine	fine		fine
4. Gate	gate	gate	
5. Do		do	do
6. West	west		west
7. Have	have	have	
8. Rain		rain	rain
и т. д.			

Далее участники должны были восстановить предложение из 25 слов (каждое слово имело не более трех слогов) по заданному частичному списку слов, приведенных в той же последовательности, в которой они стоят в предложении. Одним из таких предложений было: «The picture we saw was painted by an old woman

who had been taught how to mix the colours by one of the native artists»*), а один из частичных списков имел вид: picture was an who been to the colours of native.

Третий эксперимент состоял в составлении анаграммы трех буквенных слов, полученных из слов, имеющих девять букв по четыре гласные в каждом. Например, abolished courtesan.

Участники должны были максимизировать общее число очков группы. Если одно и то же слово повторялось во всех трех записках, оно считалось три раза. На рис. 6.63

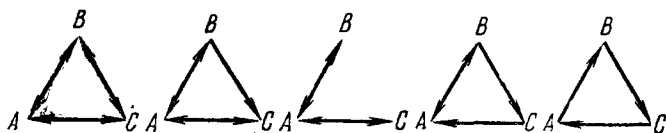


Рис. 6.63.

показано пять использовавшихся схем связи. Заметим, что в данном случае связь была направленной. Для различных схем измерялось время, число сообщений и трудности исправления ошибок при передаче сообщений. Участники эксперимента находились в различных комнатах и могли общаться только по телефону. В линии связи вводился белый шум, т. е. шум, спектр частот которого имеет одну и ту же интенсивность, чтобы заглушать звуки, которые проходили через стены. Кроме того, каждое задание выполнялось при трех различных отношениях сигнал/шум: +6, -2 и -10 децибел. Соответственно процент правильного приема был равен 85%, 66% и 24%. Было установлено, что первая схема является лучшей при выполнении первого задания, третья схема — при выполнении второго задания, наконец, все схемы одинаковы при выполнении третьего задания. Пятая схема была наихудшей для первого и второго заданий, и различные уровни шума только подчеркивали ее недостатки.

*) Картина, увиденная нами, была нарисована старой женщиной, которая училась смешивать краски у одного местного художника (Прим. ред.)

6.27. Математические модели разоружения

Определим множество Σ , состоящее из конечного числа состояний, где каждое состояние соответствует уровню вооруженности двух противников X и Y в условиях устойчивости. Устойчивость, баланс, или равновесие является важным критерием в рассматриваемой постановке. Она требуется, чтобы ни один из противников не считал свое положение, т. е. состояние (определяемое ниже), слабее положения соперника.

Элементами E_j ($j=1, \dots, p$) множества Σ являются векторы $E_j=(a_{1j}, \dots, a_{nj}; b_{1j}, \dots, b_{nj})$, где a_{kj} обозначает число единиц системы вооружений (т. е. пушки, количество информации, экономические факторы и т. д.) вида k у соперника X на j -м этапе процесса разоружения, а b_{kj} — те же самые характеристики для соперника Y . Каждый соперник X и Y будет выбирать множество правил, применение которых к начальному состоянию вооружений дает новое состояние. Те же самые или другие правила могут быть применимы к новому состоянию для получения третьего состояния и т. д. Общая схема сокращения вооружения X будет образовывать множество состояний, которые совсем не обязательно оказываются приемлемыми для Y .

Цель состоит в том, чтобы найти состояния, в которых может быть достигнуто соглашение, и затем установить правила сокращения вооружений в этих состояниях. Считается, что начальное состояние, к которому применяются правила, является равновесным с точки зрения обеих сторон. Причины этого не обязательно только военные, но и политические, экономические и др. Далее будет показано, что процесс разоружения зависит от компенсирующих факторов, используемых обеими сторонами. Рассмотрим теперь, как можно получить множество Σ . Равновесие, или устойчивое состояние, является допустимым состоянием для обеих сторон. При выборе допустимых состояний для X естественно положить, что $a_{kj}=\alpha_{kj}b_{kj}$, где α_{kj} — компенсирующий фактор. Действительно, необходимо провести сравнение по всем видам вооружений Y .

Очевидно, в такой постановке важно правильно выбрать общий знаменатель для единиц сокращаемого во-

оружия. Таким образом, если существует численное превосходство по одному виду оружия, то его можно компенсировать отсутствием превосходства по другому виду. Отсутствие превосходства (или его наличие) α_{kj} должно оцениваться в общих единицах измерения обоих рассматриваемых видов оружия. Действительно, компенсация может быть основана на нескольких видах оружия (а не на одном) и, следовательно, требуется общая единица измерения.

Единственный фактор оценки может оказаться недостаточным для определения допустимости данного состояния. Будем считать, что E_j принадлежит к множеству допустимых состояний Σ_x для стороны X , если величина $\|\alpha_j\|$, называемая нормой вектора компенсирующих факторов $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})$, не меньше, чем некоторое число α , выбранное стороной X . Норма $\|\alpha_j\|$ является некоторой мерой всех α_{kj} ($k=1, \dots, n$). Учитывая различную важность разных видов оружия, в качестве нормы удобно принять

$$\|\alpha_j\| = \sum_{k=1}^n \omega_k \alpha_{kj}$$

где ω_k — средний вес k -го вида оружия в различных конфликтных ситуациях. Аналогично можно ввести β_k и $\|\beta_j\|$ для определения множества допустимых состояний Σ_y стороны Y . Заметим, например, что состояние $(0, \dots, 1; 1, \dots, 1)$ допустимо для Y , но недопустимо для X , поэтому оно принадлежит Σ_y . Аналогично, состояние $(1, \dots, 1; 0, \dots, 0)$ принадлежит Σ_x . Легко предположить, что такие состояния допустимы, так как одна из сторон имеет нулевое вооружение. Наконец, множество допустимых равновесных состояний (для X и Y) есть $\Sigma = \Sigma_x \cap \Sigma_y$, т. е. оно соответствует общей части выделенных множеств.

Одна из задач управления вооружениями состоит в нахождении правил их сокращения (слово «сокращение» используется здесь в широком смысле, так как в процессе общего сокращения может наблюдаться рост по отдельным видам оружия). Независимо от своего конкретного вида правила сокращения вооружений должны обеспечить переход от одного состояния к другому на множестве Σ . Правила, используемые сторонами, не обязательно

должны совпадать, так как, например, множество Σ_x будет содержать состояния, не входящие в Σ_y , и наоборот. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такие правила, которые обеспечивают последовательные переходы на множестве Σ и никогда не выводят за его пределы. Практически такие правила обычно совпадают с правилами, определяющими состояния.

Пусть мы имеем теперь список всех элементов множества Σ . (Ясно, что на практике такой список получить трудно, так как ни одна из сторон обычно не хочет сообщать своих компенсирующих факторов. Однако ценность такого подхода состоит в том, что он позволяет примерно оценить компенсирующие факторы противника, предлагая различные правила, которые тот принимает или отвергает.)

Очевидно, число этих элементов является конечным, хотя эскалация вооружений увеличивает мощность множества Σ со временем. Предположим для простоты, что состояния Σ есть E_1, \dots, E_r .

Если задача нахождения правил перехода решена, то возникает следующая задача, как использовать эти правила, чтобы получить все те состояния, которые попадают на путь сокращения вооружений, идущий из заданного начального состояния, например, E в любое промежуточное состояние E_q ($q \leq r$). Если такого пути не существует, то правила оказываются неприемлемыми и должны быть изменены, чтобы обеспечить возможность выполнения шагов по разоружению. Ясно, что переход из начального состояния в заданное промежуточное можно осуществить за один шаг. Однако большие шаги в разоружении могут привести ко многим неблагоприятным последствиям, поэтому процесс необходимо осуществить сравнительно небольшими шагами. Кроме того, разоружение за один шаг может быть неприемлемо для обеих сторон и неосуществимо из соображений безопасности, так как выполнение и контроль практических действий по разоружению требует определенного времени. Такой подход можно использовать только при определении возможности достижения заданного состояния из начального при использовании данного набора правил. Другими словами, далеко не каждый метод, даже если он и кажется хорошим, может гарантированно привести

в устойчивое заданное состояние при многократном его использовании.

Первая задача, связанная с выбором правил перехода, не является математической. Ее решение зависит от многих политических, военных и экономических факторов. Однако задача использования выбранных правил для определения возможных промежуточных шагов разоружения может исследоваться математически, даже если правила меняются при переходе от шага к шагу. В последнем случае состояние, в котором произошло изменение правил, должно считаться новым начальным состоянием и к нему может быть применен тот же метод. Если теперь каждому состоянию поставить в соответствие вершину графа, то можно использовать для решения данной задачи методы, рассмотренные ранее при анализе задач переходов состояний.

6.28. Лингвистика

Язык состоит из конечного множества различных символов, образующих алфавит, и конечного множества правил соединения символов. Множество правил образует грамматику Γ ; последовательности символов, которые можно получить в соответствии с Γ , называются *цепочками* (strings) Σ языка. В частности, символы алфавита можно рассматривать как частный вид цепочек из данного символа. Таким образом, любой язык Λ полностью определяется как $\Lambda = (\Sigma, \Gamma)$.

Типичная задача математической лингвистики состоит в определении принадлежности заданной цепочки Σ_0 к некоторому языку. При решении такой задачи цепочка изображается в виде диаграммы, в ней выделяются грамматические типы, например, существительные, глаголы и группы (рис. 6.64). В общем случае естественные языки нельзя полностью характеризовать только одними грамматиками (Чомский, 1962). Важнейшие задачи состоят в том, чтобы найти:

1) подмножества, которые можно характеризовать грамматикой, 2) адекватную (неграмматическую) модель естественного языка.

При анализе цепочек естественного языка возникают следующие две задачи.

1. Задача, связанная с наличием абсурдных цепочек, например, «зеленые идеи спят свирепо».

2. Задача, связанная с грамматической неопределенностью, например, pretty little girls' camp *).

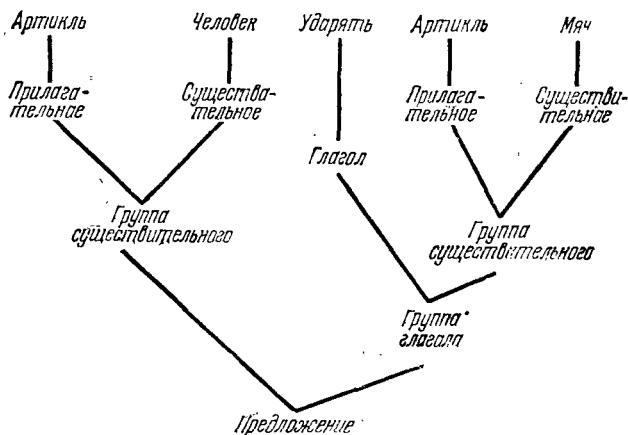


Рис. 6.64.

Второй пример можно представить схемой из нескольких различных групп существительных, хотя определенные группы существительных всегда можно использовать эквивалентным образом.

Определение грамматики [1]

Категория есть множество цепочек, обозначенных одним именем. Существуют три типа категорий.

1. Произвольные множества односимвольных цепочек.
2. Произведение категорий; $c = AB \Leftrightarrow C$ содержит все цепочки $c = ab$, где $a \in A$, $b \in B$.
3. Объединение категорий:

$$c = A \cup B \Leftrightarrow c \in A \text{ или } c \in B.$$

Грамматика есть список категорий и их производных. Категории в списке в общем случае не упорядочены.

*) Эту фазу можно понимать различным образом:

- 1) Дача прелестной маленькой девочки.
- 2) Прелестная дача маленькой девочки.
- 3) Прелестная маленькая дача девочки. (Прим. ред.)

Единственно, что требуется, это чтобы производные категории, образуемые, например, объединением некоторых исходных, стояли в списке позже исходных категорий. Такое ограничение позволяет избежать цикличности типа

$$A = B \cup C \quad B = C \cup A \quad C = A \cup B$$

Пример грамматики.

1. V .
2. U .
3. B .
4. $P = BF$.
5. $Q = P \cup U$.
6. $R = QF$.
7. $F = V \cup R$.

Пусть α , β и γ — типы вершин, соответствующие трем типам категорий. Приведенную выше грамматику можно

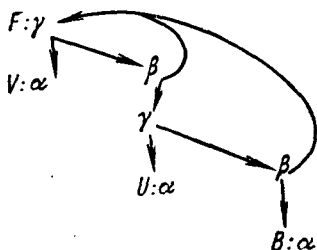


Рис. 6.65.

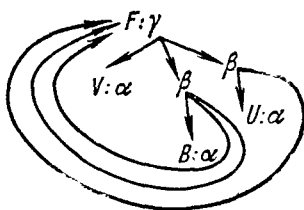


Рис. 6.66.

представить графом (рис. 6.65) [4]. Заметим, что поименованными в графе оказываются только вершины типа α и рекурсивно используемая вершина. Используя распределительное свойство и подстановки, имеем

$$\begin{aligned} F &= V \cup R, & F &= V \cup (P \cup U)F, \\ F &= V \cup QF, & F &= V \cup (BF \cup U)F, \\ & & F &= V \cup BFF \cup UF. \end{aligned}$$

Результаты можно интерпретировать как грамматику некоторого простого префиксного языка, в котором F обозначает формулу, V — переменную, B — двоичный оператор и U — единичный оператор. Рекурсивное определение формулы имеет вид:

1. Переменная.

2. Двоичный оператор, за которым следуют две формулы.

3. Единичный оператор, за которым следует одна формула.

Соответствующий граф показан на рис. 6.66. Граф грамматики называется Γ -графом языка и используется для получения всех цепочек и опознавания любых произвольно заданных цепочек. Цепочки префиксного языка имеют вид:

1. V .
2. BVV .
3. UV .
4. $BBVVV$.
5. $BVBVV$.
6. $BBVVBVV$.
7. $UBVV$.
8. $BUVV$.

.....

Заметим, что

1. Γ -граф языка конечен.
2. Множество всех цепочек Σ конечно.
3. Множество всех цепочек Σ перчислимо.

4. Произвольная цепочка Σ_k может быть представлена деревом. Например, на рис. 6.67 показано дерево, соответствующее цепочке Σ_6 , приведенной выше.

Σ -графы представляют собой ориентированные растущие из корня деревья, каждая вершина которых поименована соответствующим названием категории. Обычно требуется, чтобы Σ -графы формальных языков были связны и представляли собой деревья, а не леса (в терминологии теории графов). Кроме того, обычно предполагается, что цепочки языка определены однозначно, т. е. каждой цепочке соответствует единственный Σ -граф. Можно достаточно просто определить, является ли заданная цепочка неоднозначной при

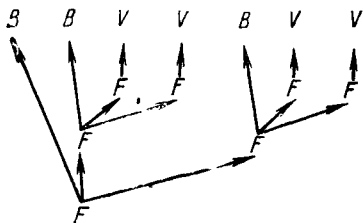


Рис. 6.67.

заданной грамматике. Задача определения неоднозначной грамматики или вообще языка (который может иметь много различных грамматик) оказывается более сложной. Действительно, было показано [2], что задача определения однозначности (или неоднозначности) формальной грамматики рассматриваемого типа неразрешима. С другой стороны, если цепочки языка перечислимы, то можно проверить на однозначность достаточно большое их число [4].

Основной задачей математической лингвистики является создание эффективных алгоритмов машинного опознавания цепочек. При этом используется много различных приемов, в частности, указатели ограничений просмотра назад и функции предшествования для каждой категории (например, «не выходить за пределы структуры предложения», «не искать глагольной группы до нахождения группы существительного»). Ряд исследований специальных классов ограниченных грамматик рассмотрен в работе [3].

Полезно найти особые ограничения или обобщения Г-графов языка. Одно из интересных обобщений связано с заданием некоторых функций длины на дугах графа. В начальный момент длины всех дуг одинаковы. По мере последовательного использования дуг значения их функции длины возрастают. Альтернативные варианты путей выбираются всегда с учетом длины. Таким образом, накапливая «опыт», машина улучшает качество своей работы. Если такую взвешивающую схему встроить, например, в транслятор с ФОРТРАНа, то транслятор сможет в некотором смысле обучиться распознаванию стиля и почерка отдельных программистов.

Необходимо помнить, что математическая лингвистика изучает не столько сам язык, сколько занимается анализом структур и методами распознавания в линейных цепочках. До настоящего времени основное внимание в ней концентрировалось на искусственных языках и специальных подмножествах естественного языка, и главная задача состояла в проведении чисто механического анализа.

Недавно был начат один из проектов, цель которого состоит в том, чтобы найти структурную характеристику больших массивов табличных данных. В этом случае

алфавит состоит из элементов таблицы — множеств взаимосвязанных свойств — которые можно распознать. Категории информации определяются структурно из элементов таблиц. Предполагается, что в конечном итоге можно будет разработать метод для работы с неоднородными данными, хранящимися в последовательной памяти (например, на магнитной ленте).

ЛИТЕРАТУРА к разделу 6.28

Специальные вопросы

1. Floyd R. W., A Note on Mathematical Induction on Phrase Structured Grammar. Inform. Control, 4: 353—358.
2. Floyd R. W., On the Non-existence of a Phrase Structured Grammar for ALGOL-60. Commun. Assoc. Computing Machinery, 5: 483 (1962).
3. Floyd R. W., Syntactic Analysis and Operator Precedence. J. Assoc. Computing Machinery, 10:3 (1963).
4. Gorn S., Detection of Generative Ambiguities in Contextfree Mechanical Languages. J. Assoc. Computing Machinery, 10:196—208 (1963).

Общие вопросы

1. Chomsky N., Syntactic Structures. Moutan, 1962.
2. Chomsky N., On Certain Formal Properties of Grammars. Inform. Control, 2:137—167.
3. Luce Bush, Galanter (eds.), «Handbook of Mathematical Psychology». John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
4. Proceedings of a Working Conference on Mechanical Language Structures, August, 1963. Commun. Assoc. Computing Machinery, 7:2 (1964).
5. Nour P. (ed.), Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL-60. Commun. Assoc. Computing Machinery, 6(1):1—17 (1963).
6. Meeting on IR-Oriented Languages, October, 1961. Commun. Assoc. Computing Machinery, 5:1 (1962).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.29. Математические машины и цепи Маркова

Многие реальные системы можно характеризовать, выделяя различные состояния, в которых они могут находиться, и задавая их реакции на поступление произвольных входных воздействий при нахождении систем в любом заданном состоянии. Как правило, реакция

системы проявляется в форме перехода из одного состояния в другое и формирования соответствующего выходного сигнала. Формализация предыдущей идеи приводит к понятию математической машины.

Последние работы по теории математических машин (называемой иногда теорией автоматов) как будто бы имеют мало общего с глубокими исследованиями Гёделя, Тьюринга и других специалистов по математической логике.

Новые теории в основном опираются на элементарные теоремы, но тем не менее приводят к трудным комбинаторным задачам, которые, вероятно, удобно решать методами теории графов.

Определение. Машина есть математическая система, которая состоит из

- 1) конечного множества $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ элементов, называемых *состояниями*,
- 2) конечного множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ элементов, называемых *входами*,
- 3) конечного множества $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ элементов, называемых *выходами*,
- 4) функции перехода T , которая отображает $S \times X$ на S ,
- 5) функции выхода Ω , которая отображает $S \times X$ на Y .

Если $s \in S$ и $x \in X$, то $s' = T(s, x)$ интерпретируется как следующее состояние, в которое попадает машина из текущего состояния s при воздействии входного сигнала x . Аналогично, $y = \Omega(s, x)$ есть выходной сигнал машины, находящейся в состоянии s при воздействии входного сигнала x . Множества X и Y называются соответственно *входным* и *выходным алфавитом* (хотя природа их элементов существенно изменяется в зависимости от рассматриваемых задач).

Машины, соответствующие данному определению, можно классифицировать по нескольким признакам. Во-первых, они являются детерминированными, так как их выходной сигнал и следующее состояние полностью определяются входным сигналом и текущим состоянием. Далее, такие машины являются последовательностными, так как входные сигналы подаются в дискретные моменты времени t_1, t_2, t_3 , а не непрерывно. Они являются

полными, т. е. каждая комбинация состояния и входного сигнала (входа) имеет смысл и дает известный выходной сигнал (выход) и новое состояние. Они не имеют памяти в том смысле, что текущий выход и следующее состояние не зависят от прошлых входов, состояний или выходов. Наконец, они стационарны в том смысле, что функция переходов T и функция выхода Ω не зависят от рассматриваемого момента времени. Изменив некоторые или все из названных предположений, можно получить определение машины более общего вида.

Иногда машину удобно изображать ориентированным графом, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги характеризуют X , Y , T и Ω .

Сказанное проще всего пояснить на примере. Рассмотрим машину, для которой

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, X = \{0, 1\} \text{ и } Y = \{a, b, c\}.$$

Одна из возможных машин с множеством состояний S и алфавитами X и Y представлена в виде графа рис. 6.68.

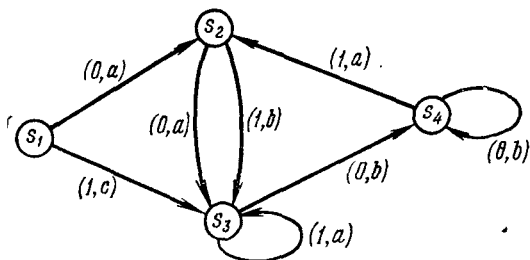


Рис. 6.68.

Каждая вершина соответствует одному состоянию. Начальная вершина инцидентна точно двум дугам (в общем случае, k дугам, где k — число различных входов). Если некоторая дуга идет из вершины s в вершину s' и ей соответствует упорядоченная пара (x, y) , то $T(s, x) = s'$, $\Omega(s, x) = y$. Например, если текущее состояние системы s_3 , то вход 0 даст выход b и переведет систему в состояние s_4 . С другой стороны, вход 1 дает выход a и система останется в состоянии s_3 . (Практически число дуг можно уменьшить, помечая некоторые дуги несколькими упорядоченными парами, если несколько входов дают одно и то же следующее состояние.)

Отдельные состояния и множества можно классифицировать по структурным признакам соответствующего графа. Например, машина называется *сильно связной*, если ей соответствует сильно связный граф. Независимо от начального состояния s такую машину можно всегда перевести в любое другое состояние s' с помощью соответствующей последовательности входов (не обязательно за один шаг). Состояние s называется *переходным*, если из соответствующей ему вершины выходит, по крайней мере, одна дуга (s, t) , где $t \neq s$, и если эта вершина не является конечной ни для одной дуги (u, s) , где $u \neq s$. Например, s_1 — переходное состояние. Состояние s_1 , которому соответствует вершина, являющаяся конечной, по крайней мере, для одной дуги (t, s) , где $t \neq s$, и не являющаяся начальной ни для одной дуги (s, u) где $s \neq u$, называется *устойчивым*. (Рассматриваемая машина не имеет отдельных устойчивых состояний. Однако состояние s_2, s_3 и s_4 совместно образует в соответствующем смысле устойчивое множество состояний).

При заданном начальном состоянии s и произвольной *ленте* или конечной последовательности входов с помощью графа можно легко определить результирующее конечное состояние s' (после t переходов) и соответствующую выходную последовательность y_1, \dots, y_t . Например, если в текущий момент машина находится в состоянии s_1 и следующие пять входов равны 1, 1, 0, 1, 0, то она последовательно перейдет в состояние s_3, s_3, s_4, s_2, s_3 и выходные сигналы будут равны c, a, b, a, a .

Отметим следующие классы задач, существующие в теории абстрактных машин.

1. Анализ реакции (переходов и выходов) заданной машины.

2. Синтез машины с заданными характеристиками реакций.

3. Приведение машины к более простой в некотором смысле эквивалентной форме.

Более подробное рассмотрение вопросов, связанных с теорией абстрактных машин, читатель может найти в работах Жилля [30] и Гинзбурга [32]. В данном случае нам хотелось лишь подчеркнуть, что одним из удобных способов представления таких машин являются

ориентированные графы с соответствующей символикой. В частности, их удобно использовать для классификации машин и некоторых видов их анализа.

Идея марковской цепи в некотором смысле является вероятностным аналогом абстрактных детерминированных машин. Здесь снова мы имеем систему, которая может находиться в одном из конечного числа состояний и изменять состояние в дискретные моменты времени. Однако при этом переходы не зависят от управляемых входов, а определяются распределениями вероятностей. Выходные переменные в данном случае отсутствуют. Наибольший интерес в такой модели представляет распределение вероятностей состояний как функция времени при заданном начальном состоянии.

Цепь Маркова формально можно определить как систему, которая состоит из

1) конечного множества $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ элементов, называемых *состояниями*,

2) $n \times n$ -матрицы переходов $P = \{p_{ij}\}$, где p_{ij} — вероятность того, что в следующий момент наблюдения система будет находиться в состоянии s_j при условии, что в текущий момент она находится в состоянии s_i . Конечно, требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Определенная таким образом цепь Маркова называется иногда *стационарной* (или не зависящей от времени), в отличие от цепи Маркова более общего вида, в которой вероятности переходов могут быть функциями времени.

Цепи Маркова соответствует ориентированный граф. Вершины графа определяются состояниями цепи. Каждой дуге из s_i в s_j поставлено в соответствие число p_{ij} в случае $p_{ij} > 0$ (т. е. в случае, когда возможен одношаговый переход из s_i в s_j). Граф цепи Маркова с пятью состояниями показан на рис. 6.69. Если текущее состояние системы s_2 , то она переходит в состояние s_3 , s_5 или остается в s_2 с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 соответственно. Другие дуги интерпретируются аналогично.

Качественную классификацию состояний или множеств состояний можно провести на основе структурных

свойств графа без учета конкретных значений вероятностей (различаются только нулевые и ненулевые вероятности). Например, множество состояний $T \subset S$ называется *поглощающим*, если ориентированный разрез $\{T, S - T\}$

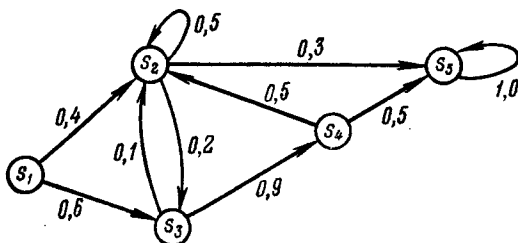


Рис. 6.69.

является пустым (т. е. из состояний в T нельзя попасть ни в какие другие состояния, не принадлежащие T). В частности, отдельное состояние является поглощающим тогда и только тогда, когда $p_{ii} = 1$. Цепь Маркова называется эргодической, если соответствующий граф сильно связан. Таким образом, эргодическая цепь это такая цепь, для которой при любом текущем состоянии s_i существует

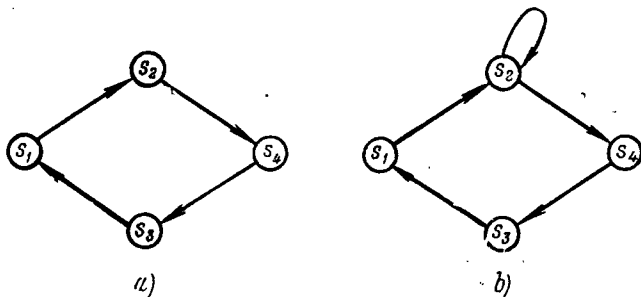


Рис. 6.70.

ненулевая вероятность достижения любого другого состояния за соответствующее число шагов (переходов). Эргодическая цепь называется *регулярной*, если существует положительное целое число t_0 такое, что для любых состояний s_i и s_j (возможно $i = j$) есть путь из v_i в v_j , имеющий в точности t дуг для всех $t \geq t_0$. Цепь на рис. 6.70, а, например, является эргодической, но

нерегулярной. (Действительно, если начать, скажем, с s_1 , то можно оказаться в s_3 только после четного числа шагов.) В отличие от нее, цепь рис. 6.70, *b* регулярна.

Упражнения

6.26. Найти минимальное значение t_0 , удовлетворяющее условию регулярности цепи рис. 6.70, *b*.

6.27. Пользуясь теорией графов, доказать, что если граф эргодической цепи имеет, по крайней мере, одну петлю, то тогда цепь обязательно является регулярной.

Читатель, интересующийся марковскими процессами, может описать в терминах теории графов дополнительные понятия, связанные с классификацией состояний (см, например, [21], [55] [73]).

6.30. Группы и обыкновенные графы

Каждый обыкновенный граф обладает, по крайней мере, одним собственным изоморфизмом, а именно, тривиальным изоморфизмом, при котором каждая вершина и ребро соответствуют самим себе. Однако кроме изоморфизма тождественности можно установить и другие виды собственного изоморфизма. Изоморфизм графа с самим собой называется *автоморфизмом*. Совокупность автоморфизмов графа образует группу, называемую *группой графа*. Такую группу всегда можно рассматривать как группу перестановок вершин графа. Автоморфизмы многоугольника с $2n$ сторонами (n -угольника) образуют группу, которая называется группой диэдра порядка n . Группа автоморфизмов полного n -вершинного графа называется *симметричной группой порядка n* . Порядок группы называется *симметрическим числом* графа. Задача о том, является ли каждая перестановочная группа в общем случае группой графа, до сих пор не решена. Она возникает при определении числа неизоморфных графов с заданной перестановочной группой.

Упражнение 6.28. Найти автоморфизмы графа рис. 6.71.

Рассмотрим операцию сложения целых чисел по модулю заданного целого числа. Укажем с помощью графа отношения между элементами, входящими в вычеты при добавлении ко всем этим элементам одного из них. Например, возьмем целые числа по $\text{mod } 6$. Получим вычеты 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Добавим ко всем выче-

там 4 и укажем полученные связи. Начнем с нуля. В результате получим два контура рис. 6.72.

С другой стороны, умножение на 4 дает граф рис. 6.73. Точки 0, 2 и 4 называются *фиксированными*, так как они отображаются на себя. Аналогично можно получить граф для функции $f(x) = ax + b \pmod 6$, например, где a и b —

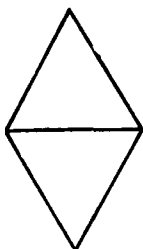


Рис. 6.71.

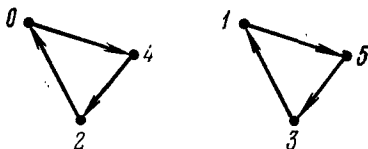


Рис. 6.72.

элементы класса вычетов, а x принимает значение из этого же класса.

Упражнение 6.29. Нарисуйте графы, соответствующие возведению в квадрат и в куб каждого из вычетов по $\pmod 6$.

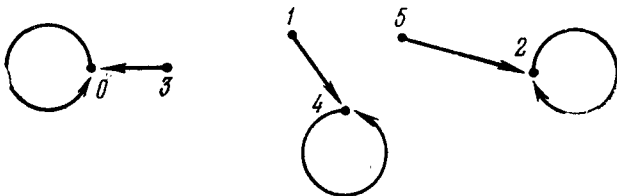


Рис. 6.73.

З а м е ч а н и е. Дробь $4/3 \pmod 7$ получается следующим образом. Сначала находится элемент x в классе вычетов, который после умножения на 3 дает $1 \pmod 7$, т. е. $1/3 \equiv x \pmod 7$; получаем, что $x=5$. Умножая 4×5 , получим $6 \pmod 7$. Следовательно, $4/3 \equiv 6 \pmod 7$.

Упражнение 6.30. Получить граф класса вычетов по $\pmod 7$, отображенного в соответствии с $f(x) = (2x+3)/(x+2)$.

Рассмотренные идеи приводят к графам, которые известны под названием *цветных графов* Кэли, или диаграмм Венна. Начнем с некоторой конечной группы и выделим ее подмножество (например, множество элементов, которые формируют группу). Поставим в соответствие каждому элементу группы некоторую верши-

ну и дугу, которая заканчивается в вершине, являющейся конечной точкой преобразования (например, умножения или сложения), выполняемого элементом выделенного подмножества над рассматриваемым элементом.

Таким образом, каждая вершина является начальной для столько дуг, сколько элементов содержится в рабочем подмножестве. Каждая дуга окрашивается в свой цвет, соответствующий цвету элемента рабочего подмножества. Заметим, что вершине соответствует петля, если воздействие тождественно. В результате формируется цветной граф Кэли. Известно, что такой граф связан тогда и только тогда, когда в процессе его получения образуется группа, т. е. существует путь между любой парой вершин, так как с помощью последовательных умножений на элементы подмножества любой рассматриваемый элемент можно преобразовать в любой другой. Таким образом, 4 не формирует группы, определенной вычетами по $\text{mod } 6$ при сложении, так как соответствующий граф не связан.

Упражнение 6.31. Показать, что 5 является генератором такой группы, доказав, что соответствующий граф связан.

6.31. Построение деревьев минимальной общей длины

Существуют задачи, в которых требуется построить дороги между несколькими центрами так, чтобы любая пара центров соединялась только одним путем. Кроме того, из всех возможных дорожных систем необходимо выбрать систему с минимальной общей длиной дорог.

В этом случае мы имеем задачу нахождения покрывающего дерева графа минимальной общей длиной. Заметим, что необходимое условие, при котором общая длина дерева минимальна, состоит в том, что длина каждой хорды должна быть больше или равной максимальной длине ветвей в фундаментальном цикле, который определяется этим деревом. В противном случае, используя данную хорду, можно сделать единственную замену. Оказывается, что сформулированное условие является также и достаточным (доказательство этого далеко не элементарно).

Для нахождения дерева минимальной общей длины пометим ребра в соответствии с увеличением их длины

так, что длина e_i меньше или равна e_j , если $i < j$. После этого выберем e_1 и добавим к этому ребру e_2 , если e_2 не образует цикла с e_1 . Далее будем продолжать рассмотрение ребер в порядке возрастания их индексов и выбирать ребро всякий раз, когда оно не образует цикла с уже выбранным множеством. В противном случае ребро отбрасывается. Во всех случаях после окончания такого процесса мы получим дерево минимальной общей длины (доказательство дано в [56]).

6.32. Графы и собственные значения неотрицательных матриц

Далмэдж и Мендельсон [17] использовали аппарат ориентированных графов для исследования различных свойств характеристических уравнений и собственных значений матриц, появляющихся при исследованиях в области стохастических процессов, экономике и численном анализе. Ориентированный граф является *контурно k -разделимым* ($k \geq 2$) тогда и только тогда, когда множество вершин V можно разделить на k множеств V_1, \dots, V_k так, что все дуги удовлетворяют следующему свойству: если некоторая дуга имеет начальную вершину в V_p , то ее конечная вершина находится в V_{p+1} при $p < k$ и в V_1 при $p = k$. Любой $n \times n$ -матрице $A = \{a_{ij}\}$ можно поставить в соответствие ориентированный граф, коэффициенты матрицы смежности которого равны единице, если соответствующие $a_{ij} \neq 0$. Если этот граф контурно k -разделимый, то разделению V_1, \dots, V_k соответствует перестановочная матрица P такая, что

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O_1 B_1 & & & & & \\ & O_2 B_2 & & & & \\ & & O_3 B_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_{k-1} \\ B_k & & & & & O_k \end{pmatrix},$$

где O_1, \dots, O_k — нулевые матрицы и каждый элемент $P^{-1}AP$, не принадлежащий B_1, \dots, B_k , равен нулю. Матрицы B_1, \dots, B_k известны под названием *циклических компонент* A .

Таким образом, контурно k -разделимый граф имеет структуру, показанную на рис. 6.74. Заметим, что любая последовательность из n дуг (в частности, каждый путь и контур) обладает следующим свойством. Если ее

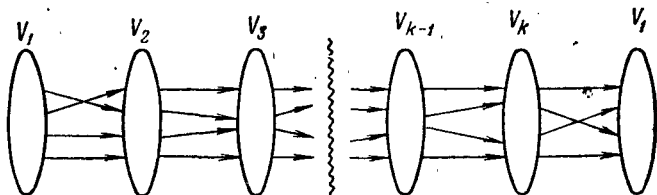


Рис. 6.74.

начальная и конечная вершины находятся в V_i и V_j соответственно, то $j \equiv i + n \pmod{k}$. В частности, длина каждого контура кратна k .

Матрица A размера $n \times n$ имеет k диагональных компонент A_1, A_2, \dots, A_k , если существует перестановочная матрица P такая, что $P^{-1}AP = \text{диагонали}$ (A_1, \dots, A_k). Указанная матрица P существует, например, если A неприводима (это аналогично требованию сильной связности графа, соответствующего A).

Многочлен, в котором коэффициент при члене высшего порядка равен единице, называется нормированным. Имеет место следующая теорема [17].

Теорема 6.12. Если A — такая матрица, что соответствующий ей ориентированный граф циклически k -разделимый и A_1, A_2, \dots, A_k — множество диагональных компонент A^k , то существует нормированный многочлен $f(\lambda)$ и неотрицательное целое число p такие, что $f(0) \neq 0$, при этом характеристический многочлен A есть $f(\lambda^k)\lambda^p$, а характеристический многочлен A^k есть $[f(\lambda^k)]\lambda^p$. Кроме того, существуют целые числа p_1, \dots, p_k с суммой, равной p , такие, что характеристический многочлен A_i есть $f(\lambda)\lambda^{p_i}$ ($i=1, \dots, k$) и для любого ненулевого корня $f(\lambda)$ простейшие делители одинаковы для каждого A_i .

Упражнение 6.32. Используя пример Далмэджа и Мендельсона для

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

показать, что соответствующий ориентированный граф является контурно 2-разделимым при разбиении вершин

$$V_1 = \{v_1, v_3\}, \quad V_2 = \{v_2, v_4\}$$

и циклических компонентах

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Показать, что граф также является контурно 2-разделимым при разбиении $V_1 = \{v_1, v_4\}$, $V_2 = \{v_2, v_3\}$, и в этом случае

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Показать, что диагональные компоненты A при обоих разбиениях одинаковы и равны

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Наконец, показать, что искомый многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 14\lambda + 24$$

и что все p в обоих случаях равны нулю.

6.33. Задача ранжирования

Рассмотрим задачу ранжирования элементов некоторого множества

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}$$

в соответствии с линейным упорядочением. Пусть известно, что такое упорядочение существует, но его действительная структура восстанавливается после проведения соответствующих попарных сравнений элементов S . Предположим, что мы хотим проранжировать множество некоторых физических объектов в соответствии с увеличением их весов (считается, что нет объектов с одинаковым весом) или множество лиц в соответствии с их возможностью победить в заданном состязании. В последнем случае необходимо, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Любое лицо побеждает любое другое, либо терпит поражение от него.

2. Отношение «может победить» — транзитивно.

В первом случае существующее линейное упорядочение восстанавливается с помощью последовательности попарных взвешиваний объектов на весах. Во втором — необходимо провести последовательность состязаний между парами лиц. Если t последовательных состязаний проводятся с $2t$ различными лицами, то можно считать, что они проходят одновременно. Однако в данном случае для нас интересно общее число состязаний, а не число уровней в иерархии частично совпадающих по времени состязаний.

В общей постановке задачи требуется найти процедуру, которая в худшем случае требует минимального числа сравнений для полного ранжирования элементов. Пусть $S_p(n)$ есть максимальное число сравнений, необходимых для ранжирования n элементов при использовании процедуры P .

Мы хотим найти процедуру, которая минимизирует $S_p(n)$. Не будем останавливаться на формальном определении того, что есть процедура. Пусть под *процедурой* имеется в виду правило выполнения последующего сравнения (или останова), которое полностью определяется исходами предыдущих сравнений и может быть реализовано при любом возможном наборе предыдущих исходов.

Для решения задачи Штейнгауз [84] предложил следующую процедуру. В первый момент сравнить два любых элемента. Затем в общем случае после полного ранжирования подмножества из k элементов взять любой $(k+1)$ -й элемент s_{k+1} и сравнить его со средним из уже проранжированных k элементов (с любым из средних, если k четно). В зависимости от исхода этого сравнения сравнить s_{k+1} со средним элементом подмножества элементов, имеющих более высокий или менее высокий ранг по отношению к элементу, участвовавшему при первом сравнении. Так, последовательными дихотомиями точно устанавливается ранг s_{k+1} элемента в совокупности $(k+1)$ элементов.

Полученная ранжировка используется далее как следующая опорная точка при определении ранга любого нового s_{k+2} -го элемента. Рассмотренный процесс продолжится до тех пор, пока не будут установлены ранги всех элементов.

Пусть в качестве примера мы проранжировали элементы от s_1 до s_{15} : $s_1 > s_2 > \dots > s_{14} > s_{15}$, а истинный ранг s_{16} находится между s_{10} и s_{11} . Последовательность выполняемых сравнений показана дугами и на рис. 6.75. Сравнимые элементы обозначены своими индексами. Таким образом, элемент s_{16} сравнивается с s_8 , s_{12} , s_{10} и s_{11} .

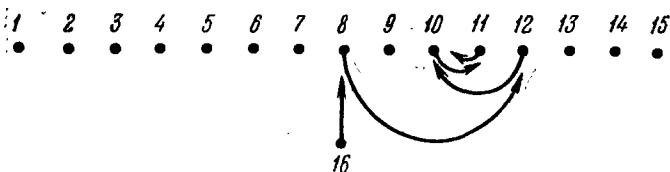


Рис. 6.75.

В общем случае, можно показать, что для установления ранга любого $(k+1)$ -го элемента при наличии полностью упорядоченного подмножества из K элементов требуется не более $S(k) = 1 + \lceil \log_2 k \rceil$ сравнений, где $\lceil \log_2 k \rceil$ обозначает целую часть $\log_2 k$. Можно также показать, что если рассмотренная процедура используется для последовательного ранжирования n элементов, то при этом потребуется выполнение не более

$$M(n) = 1 + nS(n) - 2^{S(n)}$$

и не менее

$$L(n) = 1 + \lceil \log_2(n!) \rceil$$

сравнений.

Форд и Джонсон [23] предложили более эффективный способ ранжирования, основанный на методе Штейнгауза. Пусть нужно проранжировать $2r$ или $(2r+1)$ элементов. Образует r непересекающихся пар и сравним эти пары. Возьмем r элементов, выбранных в процессе этих сравнений (т. е. элементы с максимальными рангами из $2r$ исходных) и проранжируем их по методу Штейнгауза.

На рис. 6.76, взятом из работы [23], представлены результаты ранжирования для случая множества, состоящего из 19 элементов. На первом этапе сравнения было отобрано n элементов в порядке убывания рангов J, I, H, \dots, C, B . Девять вершин, расположенных ниже

названных, соответствуют элементам, отброшенным на первом этапе, причем каждая вершина располагается под соответствующим отобраным элементом (крайний левый элемент вообще не участвовал в сравнении на первом этапе). Так как 10 элементов множества A, B, C, \dots, J уже

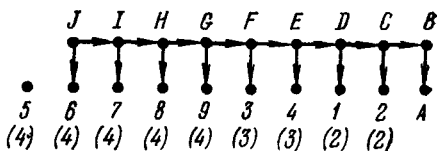


Рис. 6.76.

проранжировано, остается найти ранги остальных девяти. Для этой цели использовалась процедура Штейнгауза. Порядок ранжирования элементов показан на рис. 6.76 числами без скобок. Этот порядок выбран с учетом минимизации максимального требуемого числа сравнений. Числа в скобках указывают максимальное число сравнений при определении ранга соответствующего элемента.

В работе [23] показано, что такой метод требует (при n элементах) не более $U(n)$ сравнений, где

$$U(1) = 0, \quad U(2) = 1,$$

$$U(2k) = k + U(k) + \sum_2^k T(i),$$

$$U(2k+1) = k + U(k) + \sum_2^{k+1} T(i),$$

причем

$$T(i) = 2 \text{ для } 1 < i \leq 3, \quad T(i) = 3 \text{ для } 3 < i \leq 5,$$

$$T(i) = j \text{ для } \frac{2^i - (-1)^{j-1}}{3} < i \leq \frac{2^{i+1} - (-1)^j}{3}.$$

Известно, что $U(n) = L(n)$ для $1 < n \leq 11$, а также для $n = 20$ или 21 . Оптимальность процедуры в общем случае не доказана.

Упражнение 6.33. Пусть истинная ранжировка элементов A, \dots, O имеет вид

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
6	7	2	9	13	15	8	14	1	11	4	3	10	12	5

Начав со сравнения A и B , проведите ранжирование элементов методом Штейнгауза. Новые элементы вводите в порядке C, D, \dots, N, O . (При наличии двух средних элементов выбирайте левый.) Найдите общее число требуемых сравнений и сравните его с $M(15)$ и $L(15)$.

Задачу ранжирования можно рассмотреть с точки зрения теории графов. Пусть элементам ранжируемого множества соответствуют вершины некоторого ориентированного графа. В начальный момент дуги в графе отсутствуют. После каждого сравнения в граф вводится дуга, идущая из вершины с более высоким рангом в вершину с меньшим рангом. (Предполагается, что благодаря транзитивности отношения упорядочения, кроме дуг, возникающих непосредственно в результате сравнений, в графе имеются дополнительные дуги. Последние не обязательно нужно изображать на графе.) Цель состоит в том, чтобы ввести такое количество дуг, при котором в графе возникает путь, проходящий через все вершины (т. е. гамильтонов путь). Порядок появления вершин в гамильтоновом пути дает нужную ранжировку элементов. Вернемся к примеру рис. 6.75. После ранжировки $s_1 \div s_{15}$, показанной горизонтальными дугами на рис. 6.77,

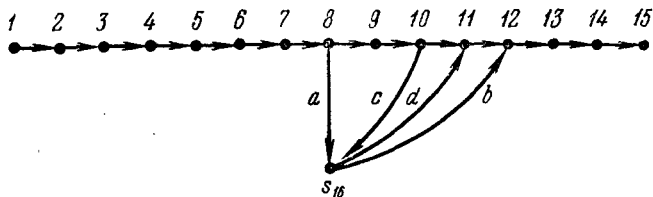


Рис. 6.77.

ранг s_{16} определяется добавлением дуг a , b , c и d (в названной последовательности). Последовательность вершин 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 11, 12, 13, 14, 15 определяет гамильтонов путь. Хорошей процедурой ранжирования будет та, которая позволит найти гамильтонов путь при минимальном числе вводимых в граф дуг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashby W. R., An Introduction to Cybernetics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956. [Русск. перев.: Эшби У., Введение в кибернетику, ИЛ, 1959.]
2. Benzer S., On the Topology of the Genetic Fine Structure. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 45: 1607—1620 (1959).
3. Berge C., Two Theorems in Graph Theory. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 43: 842—844 (1957).
4. Bloch A., On Methods for the Construction of Networks Dual to Nonplanar Networks. Proc. Phys. Soc. (London), 58: 677—694 (1946).

5. Bose R. G., Paired Comparison Designs for Testing Concordance between Judges. *Biometrika*, **43**: 113—121 (1956).
6. Bose R. C. Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs. *Pacific J. Math.*, **13**: 389—419 (1963).
7. Bose R. C., Shimamoto T., Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs. *J. Am. Statistics Assoc.*, **47**: 151—184 (1952).
8. Bott R., Mayberry J. P., Matrices and Tress, in O. Morgenstern, «Economic Activity Analysis», pp: 391—400: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.
9. Bryant P. R., The Algebra and Topology of Electrical Networks. *Proc. Inst. Elec. Engrs: (London)*, **C108**: 215—229 (1961); **MR 22—1801**.
10. Carteblanche F. de, Pile of Cubes. *Eureka*, April, 1947.
11. Cayley E., Über die Analytischen Figuren Welche in der Mathematic Bäume genannt werden und ihre Anwendung auf die Theorie chemischer Bervindungen. *Ber.*, **8**: 1056 (1875).
12. Chien R. T., Synthesis of a Communication Net. *IBM J: Res: Develop.*, **4**: 311—320 (1960). **MR 22—2276**.
13. Cherry E. C., Generalized Concepts of Networks. *Proc. Symp: Inform. Networks*, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1955, pp. 175—184. **MR 16—1077**.
14. Clarke L. E., On Cayley's Formula for Counting Trees. *J. London Math Soc.*, **33**: 471—474 (1958). **MR 20—1193**.
15. Clarke L. E., On Otter's Formula for Enumerating Trees. *Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2*, **10**: 43—45 (1959). **MR 21—623**.
16. Crowell R. H., Graphs of Linear Transformations over Finite Fields. *J. Soc. Ind. Appl: Math.*, **10** (1): 103—112 (1962):
17. Dulmage A. L., Mendelsohn N. S., The Characteristic Equation of an Imprimitve Matrix. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **11**: 1034 (1963),
18. Edmonds J., *J. Res.. Natl. Bur. Std. B*, **69**: (1965).
19. Edmonds J., Maximal Matching and a Polyhedron with 0, 1-Vertices. *Natl. Bur. Std. Rept.*, 1963 (Mimeographed).
20. Edmonds J., Paths, Trees, and Flowers. *Natl. Bur. Std. Rept.*, 1964 (Mimeographed).
21. Feller W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957. [Русск. перев.: Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её применения. «Мир», 1967.]
22. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., Flows in Networks. Princeton University Press. Princeton, N. J., 1962 [Русск. перев.: Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях. «Мир», 1968.]
23. Ford L. R., Jr., Johnson S. M., A Tournament Problem. *Am. Math. Monthly*, **66**: 387—389 (1959).
24. Fulkerson D. R., Expected Critical Path Lengths in PERT Networks. *Operations Res.*, **10**: 808—818 (1962).
25. Fulkerson D. R. Gross O. A., Incidence Matrices and Interval Graphs. *RAND Project 1057*.
26. Gaffney M., *European Sci. Notes*, Office Naval Res., London, 17—24, 22 April, 1963.
27. Gardner M., *Mathematical Games*. *Sci. Am.*, pp. 124, **129**, October, 1958.

28. Gardner M., *Mathematical Games* Sci. Am., pp. 150, 152, July, 1961
29. Gilbert E. N., Enumeration of Labelled Graphs. *Can. J. Math.*, **6**: 405—411 (1956).
30. Gill A., *Introduction to the Theory of Finite-state Machines*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
31. Gilmore P. C., Hoffman A. J., A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs. *Can. J. Math.*, **16**: 539—548 (1964).
32. Ginsburg S., *An Introduction to Mathematical Machine Theory*, Addison — Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.
- 32a. Grossman I., Magnus W., *Groups and Their Graphs*. Random House, Inc., New York, 1964.
33. Grünbaum B., Motzkin T. S., Longest Simple Paths in Polyhedral Graphs. *J. London Math. Soc.*, 152—160 (1962)
34. Guillemin E. A., How to Grow Your Own Trees from Given Cut-set or Tie-set Matrices. *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-6** (spec. suppl.): 110—126 (1959).
35. Guy R. K., A Combinatorial Problem. *Bull. Malayan Math. Soc.*, **7**: 68—72 (1960).
36. Harary F., On Local Balance and n -Balance in Signed Graphs. *Mich. Math J.*, **3**: 37—41 (1955).
37. Harary F., Ross Ian C., A Procedure for Clique Detection Using the Group Matrix. *Sociometry*, **20** (2): 205—215 (1957).
38. Harary F., Graph Theoretic Methods in the Management Sciences. *Management Sci.*, **5** (4): 387—403 (1959).
39. Harary F., Some Historical and Intuitive Aspects of Graph Theory. *SIAM Rev.*, **2** (2): 123—131 (1960).
40. Harary F., Note on the Polya and Otter Formulas for Enumerating Trees *Mich. Math. J.*, **3**: 109—112 (1956), MR 17—1231.
41. Harary F., Graph Theory. in «*Encyclopedia of Science and Technology*», vol. 6, pp. 253—256, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
42. Harary F., A Matrix Criterion for Structural Balance. *Naval Res Logistics Quart.*, **7** (2): 195—199 (1960).
43. Harary F., Unsolved Problems in the Theory of Graphs. *Publ. Math Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A*, **5**: 63—95 (1960).
44. Harary F., The Number of Linear, Directed, Rooted, and Connected Graphs. *Trans. Am. Math. Soc.*, **78**: 445—463 (1955).
45. Harary F., Hill A., On the Number of Crossings in a Complete Graph. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **13**: 333—338 (1963.)
46. Heise G. H., Miller G. A., Problem Solving by Small Groups Using Various Communication Nets. *J. Abnormal Psych.*, **46**: (1951).
47. Hohn F., Some Mathematical Aspects of Switching. *Am. Math. Monthly*, **62**: 75—90 (1955).
48. Hoffman A. J., On the Polynomial of a Graph. *Am. Math. Monthly*, **70** (1): 30—36 (1963).
49. Hoffman A. J., Some Recent Applications of the Theory of Linear Inequalities to Extremal Combinatorial Analysis. *Proc. Symp. Appl. Math.*, **10**: 315—319 (1959).
50. Hoffman A. J., Gomory R., Finding Optimum Combinations. *Intern. Sci. Tech.*, pp. 26—33, July, 1962.

51. Huggins W. H., Signal Flow Graphs and Random Signals. Proc. Inst. Radio Engrs., 45: 74—86 (1957).
52. Ingram W. H., Cramlet C. M., On the Foundations of Electrical Networks Theory. J. Math. Phys. 23: 134—155 (1944). MR 7—403.
- 52a. Jullien P., Essai sur la Theorie des Puzzles. Rev. Franc. Recherche Operationelle, 33: 375—384 (1964).
53. Kelley J. E., Jr., Critical Path Planning and Scheduling, Mathematical Basis Operations Res., 9: 296—320 (1961).
54. Kelley J. E., Jr., Walker M. R., Critical Path Planning and Scheduling. Proc. Eastern Joint Computer Conf., Boston, 1959.
55. Kemeny J., Snell J., Finite Markov Chains. D. Van Nostrand, Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.
56. Kruskal J. B., Jr., On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. Proc. Am. Math. Soc., 7: 48—50 (1956).
- 56a. Kwan, Mei-ko, Graphic Programming Using Odd or Even Points. Chinese Math. I: 273—277 (1962).
57. Leavitt H., Some Effects of Certain Communication Patterns on Group Performance. J. Abnormal Psych., 46 (1951).
58. Leliman A., A Solution of the Shannon Switching Game. U. S. Army Math. Res. Ctr. Tech. Summary Rept. 308. July, 1962.
59. Lekkerkerker C. G., Boland J. C., Fund. Math., pp: 45—64, 1962.
60. MacGrimmon K. R., Ryavec C. A., An Analytic Study of the PERT Assumptions. Operations Res., 12: 16—37 (1964).
61. Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W., Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation. Operations Res., 7: 646—670 (1959).
62. Mason S. J., Feedback Theory: Some Properties of Linear Flow Graphs. Proc. IRE, September, 1953.
63. Mayeda W., Terminal and Branch Capacity Matrices of a Communication Net. IRE Trans. Circuit Theory, 1961.
64. Mayeda W., Synthesis of Switching Functions by Linear Graph Theory. IBM J. Res. Develop., 4: 320—328 (1960).
65. Montrolé E. W., Potts R. B., Correlation and Spontaneous Magnetization of the Two-dimensional Ising Model J. Math. Phys 4 (2) (1963).
66. Ore O., Graphs and Correspondences; Festschrift Zum 60 Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, Orell Füssli Verlag, Zurich, 1945.
67. Otter R., The Number of Trees. Ann. Math., 49: 583—599 (1948); MR 10—53.
68. Otter R., The Multiplicative Process, Ann. Math. Statistics, 20: 206—224 (1949). MR 1950 P41.
69. Parker F. D., Matrices, Relations, and Graphs. Math. Mag., 34 (1): 5—9 (1960).
70. Parker F. D., Boolean Matrices and Logic. Math Mag 37 (11): 33—38 (1964).
71. Polyá G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math., 68: 145—254 (1937).

72. Rényi A., Some Remarks on the Theory of Trees. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **4** (1959).
73. Rosenblatt D., On the Graphs and Asymptotic Forms of Finite Boolean Relation Matrices and Stochastic Matrices. *Naval Res. Logistics Quart.*, **4** (2) (1957).
74. Rosenblatt D., On the Graphs of Finite Idempotent Boolean Relation Matrices. *J. Res. Natl. Bur. Std.*, **67B** (4) (1963):
75. Rosenblatt D., On Linear Models and the Graphs of Minkowski — Leontief matrices. *Econometrica*, **25**: 325—338 (1957).
76. Roth J. P., Algebraic Topological Methods for the Synthesis of Switching Systems, I. *Trans. Am. Math. Soc.*, **88**: 301—326 (1958). MR 20—619.
77. Roth J. P., Algebraic Topological Methods in Synthesis. *Ann. Harvard Computation Lab.*, **29**: 57—73 (1959).
78. Roth J. P., Wagner E. G., Algebraic Topological Methods for the Synthesis of Switching Systems. III, Minimization of Non-singular Boolean Trees. *IBM. J. Res. Develop.*, **3**: 326—344 (1959). MR 22—920.
79. Saaty T. L., On the Minimum Number of Intersections for Complete Graphs. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.* September, 1964:
80. Saaty T. L., Model for the Control of Arms. *Operations Res.*, pp. 586—609, September — October, 1964.
81. Schiff H., *Zur Statistik Chemischer Verbindungen*. Ber. 8: 1542 (1875).
83. Schwartz B. L., An Analytic Method for the «Difficult Crossing» Puzzles. *Math. Mag.*, **34** (4): 187—193 (1961).
83. Sholander M. C., The Linear Graph. *Am. Math. Monthly*, **43**: 543—545 (1942).
84. Steinhaus H., *Mathematical Snapshots*, pp. 37—40, New York, 1950.
85. Synge J. L., The Fundamental Theorem of Electrical Networks, *Quart. Appl. Math.* **9**: 113—127 (1951). MR 13—189.
86. Trent H. M., Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, **27** (3): 500—527 (1955).
87. Trent H. M., On the Construction of Schematic Diagrams for Mechanical Systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, **30** (8): 795—800 (1958).
88. Trent H. M., On the Conceptual Necessity and Use of Perfect Couplers in Schematic Diagrams. *J. Acoust. Soc. Am.*, **31** (3): 326—332 (1959).
89. Trent H. M., A Note on the Enumeration and Listings of All Possible Trees in a Connected Linear Graph. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, **40**: 1004—1007 (1954).
90. Tutte W. T., The Factorization of Linear Graphs. *J. London Math. Soc.*, **22**: 107—111 (1947).
91. Western D. E., Graphs of Composite Relations. *Am. Math. Monthly*, **69** (5): 418—421 (1962).
92. Whitin T. M., An Economic Application of «Matrices and Trees», in O. Morgenstern, «Economic Activity Analysis», pp. 401—408, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.
93. Zarankiewicz K., On a Problem of P. Turan Concerning Graphs. *Fund. Math.*, **41**: 137—145 (1954).

Глава 7

ПОТОКИ В СЕТЯХ

7.1. Введение

Если мы припишем каждой дуге ориентированного графа поток некоторого вещества, граф становится удобной моделью при исследовании целого ряда проблем в транспорте, связи и других областях, связанных с действительным или воображаемым движением товаров, информации или людей. В данной главе дается формальное определение понятия потока в сети и изучается структура потоков. Исследуются две основные задачи: задача максимизации суммарного потока между некоторыми двумя заданными вершинами при условии, что поток через каждую дугу ограничен сверху и снизу (например максимизации транспортного потока при ограниченной пропускной способности отдельных участков дорог), и задача нахождения ограниченных потоков минимальной стоимостью, когда каждой дуге приписана стоимость единицы потока. В разделе 7.9 рассматривается достаточно общий пример. Подробное исследование названных задач можно найти в работе [10] (см. библиогл. 1).

7.2. Основная терминология

При изучении потоков достаточно ограничиться рассмотрением ориентированных связных графов, не имеющих петель. Такие графы будут называться *сетями*. (Потоки в несвязных графах могут изучаться при отдельном рассмотрении каждой компоненты, а поток в петле не влияет на распределение потока между вер-

шинами. Таким образом, класс графов, называемых сетями, является достаточно представительным для наших целей.) Чтобы отличить сеть от обычного ориентированного графа, мы будем обозначать ее через N , а не через D . Пусть задана сеть $N(V, A)$. *Потоком в сети N* называется целочисленная функция φ , определенная на A . Целое число $\varphi(a)$ называется *поток по дуге a* . Более точно, если $a \simeq (v, w)$, то говорят, что поток направлен от v к w при $\varphi(a) \geq 0$ и от w к v при $\varphi(a) \leq 0$.

Большинство идей и результатов, которые будут изложены ниже, становятся особенно очевидными, если рассмотреть геометрическую реализацию сети и интерпретировать $|\varphi(a)|$ как постоянную скорость потока однородного вещества через a . Направление потока определяется знаком $\varphi(a)$ с учетом приведенного выше условия.

Вершины сети N обычно классифицируются по их воздействию на поток φ (создают, поглощают или сохраняют поток). Чтобы формализовать классификацию, обозначим через $v \rightarrow V$ множество дуг, для которых v является начальной вершиной, а через $V \rightarrow v$ — множество дуг, для которых v является конечной вершиной. Тогда целое число $Q(v, \varphi)$, определяемое соотношением

$$Q(v, \varphi) = \sum_{v \rightarrow V} \varphi(a) - \sum_{V \rightarrow v} \varphi(a),$$

называется *чистым потоком* из v относительно φ . Будем далее писать просто $Q(v)$, если наличие φ очевидно из контекста. Если $\varphi(a) \geq 0$ в каждой дуге, то первая сумма есть просто общий поток, вытекающий из вершины v , а вторая — общий поток, вытекающий в вершину v . Если в некоторых дугах потоки отрицательны, то выделенные суммы не имеют названной интерпретации, но их разность по-прежнему представляет собой чистый поток из вершины v . Например, на рис. 7.1 множество $v \rightarrow V$ состоит из дуг $\{a_1 a_2\}$, множество $V \rightarrow v$ — из дуг $\{a_3 a_4\}$ и

$$Q(v) = [(2) + (-1)] - [(4) + (-7)] = 4.$$

Заметим, что чистый поток из вершины не изменится,

если мы изменим направление дуги и знак ее потока на противоположные. Следовательно, все потоки через дуги можно сделать неотрицательными, не изменяя чистого потока в любой вершине. Однако здесь более полезно оставить направление дуг неизменным и допустить в определенных случаях отрицательные потоки.

Сгруппируем теперь вершины сети N в множества V^+ , V^- и V^0 следующим образом:

$$V^+ = \{v \in V \mid Q(v) > 0\},$$

$$V^- = \{v \in V \mid Q(v) < 0\},$$

$$V^0 = \{v \in V \mid Q(v) = 0\}.$$

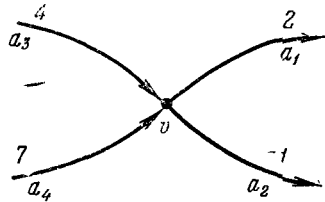


Рис. 7.1.

Элементы множеств V^+ , V^- и V^0 называются *источниками*, *стоками* и *промежуточными вершинами* соответственно. Интуитивно можно считать, что эти вершины соответственно *создают*, *потребляют* и *сохраняют* поток.

Сеть в целом сохраняет любой поток φ в том смысле, что $\sum_{v \in V} Q(v) = 0$. Это легко видеть, записав следующее выражение:

$$\sum_{v \in V} Q(v) = \sum_{v \in V} \sum_{a_{-} (v \rightarrow V)} \varphi(a) - \sum_{v \in V} \sum_{a_{+} (V \rightarrow v)} \varphi(a)$$

и замечая, что каждая дуга сети входит точно один раз

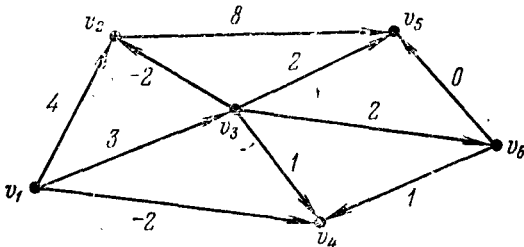


Рис. 7.2.

в каждую двойную сумму. Пример классификации вершин сети рис. 7.2 дан в приведенной ниже таблице. Если

в сети имеется единственный источник v_i и единственный сток v_j , то рассматривается поток из v_i в v_j , а величина $Q(v_i)$ или $-Q(v_j)$ называется *величиной потока*. (Для удобства эта же терминология распространяется на случай потоков нулевой величины, для которых $Q(v) = 0$ во всех вершинах.)

i	$Q(v_i)$	Тип
1	5	Источник
2	6	Источник
3	0	Промежуточная
4	0	Промежуточная
5	-10	Сток
6	-1	Сток

Любой поток в сети можно преобразовать в поток, который имеет только один источник и один сток, увеличив количество вершин в сети. Например, добавим новую вершину w_1 и дуги $b_i \simeq (\omega_1, v_i)$, ведущие от w_1 , к каждому источнику сети. Этим дугам припишем поток

$$\varphi(b_i) = Q(v_i).$$

Аналогичным образом, добавим вторую вершину w_2 и дуги $c_j \simeq (v_j, \omega_2)$, которые ведут от каждого стока к вершине w_2 и имеют поток

$$\varphi(c_j) = -Q(v_j).$$

В результате получим сеть с одним источником и одним стоком. Рис. 7.3 показывает расширение сети, требуемое для приведения потока в сети рис. 7.2 к стандартной форме. Результирующий поток из w_1 в w_2 имеет величину 11.

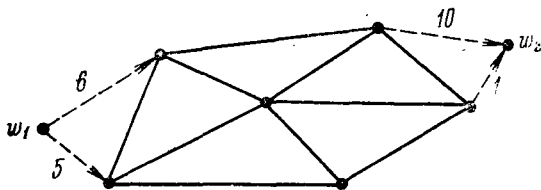


Рис. 7.3.

Большая часть последующего материала относится именно к потокам с единственным источником и единственным стоком. Однако, учитывая возможность указанных выше преобразований, получаемые результаты можно распространить на потоки, имеющие несколько источников и стоков,

7.3. Отношения между потоками и операции над ними

Пусть φ_1 и φ_2 — потоки в одной и той же сети $N = (V, A)$, и пусть p — целое число. Тогда для каждой дуги $a \in A$ потоки $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$ и $p\varphi$ определяются с помощью следующих соотношений:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(a) = \varphi_1(a) + \varphi_2(a),$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(a) = \varphi_1(a) - \varphi_2(a),$$

$$(p\varphi_1)(a) = p\varphi_1(a).$$

Легко видеть, что

$$Q(v, \varphi_1 \pm \varphi_2) = Q(v, \varphi_1) \pm Q(v, \varphi_2), \quad Q(v, p\varphi_1) = pQ(v, \varphi_1).$$

Отсюда следует, что если φ_1 и φ_2 — потоки из v в w , имеющие величины k_1 и k_2 соответственно, то $\varphi_1 + \varphi_2$ также является потоком из v в w и имеет величину $k_1 + k_2$. Аналогично, $\varphi_1 - \varphi_2$ есть поток, имеющий величину $|k_1 - k_2|$ и направленный от v к w , если $k_1 \geq k_2$, или от w к v , если $k_1 \leq k_2$. (Поток величины нуль можно считать направленным как от v к w , так и от w к v .) И наконец, поток $p\varphi$ имеет величину $|pk_1|$ и направлен от v к w , если $p \geq 0$, и от w к v , если $p \leq 0$.

Упражнение 7.1. На рис. 7.2 введите второй поток с единичной величиной по каждой дуге и проверьте приведенные выше соотношения.

Будем писать $\varphi_1 < \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1(a) < \varphi_2(a)$ для каждой дуги $a \in A$. Отношения между потоками $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $\varphi_1 > \varphi_2$ и $\varphi_1 \geq \varphi_2$ определяются аналогично. Говорят, что поток φ ограничен значениями φ_1 и φ_2 , если величина $\varphi(a)$ заключена между $\varphi_1(a)$ и $\varphi_2(a)$ для каждой дуги сети. Очевидно, что достаточным условием ограниченности потока φ потоками φ_1 и φ_2 является выполнение одного из следующих соотношений: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ или $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Вообще, по некоторым дугам поток φ может быть ограничен сверху потоком φ_1 , а по другим — потоком φ_2 .

Потоки φ_1 и φ_2 называются *согласованными*, если $\varphi_1(a) \cdot \varphi_2(a) \geq 0$ для каждой дуги $a \in A$. Другими словами, φ_1 и φ_2 согласованы, если не существует дуг a , для которых $\varphi_1(a)$ и $\varphi_2(a)$ отличны от нуля и противоположно направлены. Потоки $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ в одной и той же

сети называются *совместно согласованными*, если они попарно согласованы.

Упражнение 7.2. Проверить, являются ли потоки упражнения 7.1 и рис. 7.2 совместно согласованными. Если нет, построить поток, согласованный с потоком рис. 7.2.

Как будет показано ниже, каждый поток можно рассматривать состоящим из ряда простых потоков (определенных в следующем разделе), соответствующих цепям и циклам в сети. Более того, эти простые потоки совместно согласованы, т. е. распространяются в одном направлении по любой заданной дуге. Это простой, но важный факт, имеет место во многих прикладных задачах, где конфликтующие (не согласованные) множества потоков не имеют смысла и не могут быть интерпретированы. Связь понятий согласованных и ограниченных потоков устанавливается теоремой 7.1 и играет важную роль при дальнейшем обсуждении.

Теорема 7.1. Если $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ — множество совместно согласованных потоков в сети N , ψ — произвольный поток в N и $T \subset S$, то поток $\psi + \sum_T \varphi_i$ ограничен потоками ψ и $\psi + \sum_S \varphi_i$.

Доказательство. Пусть a — любая дуга сети. Если $\varphi_i(a) \geq 0$ для $i=1, 2, \dots, n$, то, очевидно,

$$\psi(a) \leq \psi(a) + \sum_T \varphi_i(a) \leq \psi(a) + \sum_S \varphi_i(a).$$

Аналогично, если $\varphi_i(a) \leq 0$ для $i=1, 2, \dots, n$, то

$$\psi(a) \geq \psi(a) + \sum_T \varphi_i(a) \geq \psi(a) + \sum_S \varphi_i(a).$$

Так как для любой дуги a имеет место одна из этих ситуаций, то теорема доказана.

Упражнение 7.3. Пусть φ_1 — поток, изображенный на рис. 7.2, и φ_2 — поток, построенный в упражнении 7.2. Взять $S = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ и положить $T = \{\varphi_1\}$. Построить произвольный поток ψ и проверить утверждение теоремы.

7.4. Простые потоки

Пусть в данной сети $N(V, A)C$ есть множество дуг, образующих простую цепь или простой цикл в соответствующем неориентированном графе. Предположим,

что мы ориентируем ребра, проходя эти простые цепи и циклы в одном из возможных направлений. Дуга C будет называться *нормальной*, если ее вновь введенная ориентация совпадает с исходной и *обращенной* (инвертированной) в противном случае.

Определим φ_c на A следующим образом:

$$\varphi_c(\cdot) = \begin{cases} +1 & \text{для нормальных дуг } C, \\ -1 & \text{для обращенных дуг } C, \\ \emptyset & \text{для дуг, не принадлежащих } C. \end{cases}$$

На рис. 7.4 показаны простая цепь C , ориентированная от v к w , ориентированный простой цикл S и соответствующие функции φ_c и φ_s .

Легко проверить, что если C — простая цепь, соединяющая v и w и ориентированная от v к w , то φ_c является потоком из v к w , величина которого равна 1. Этот

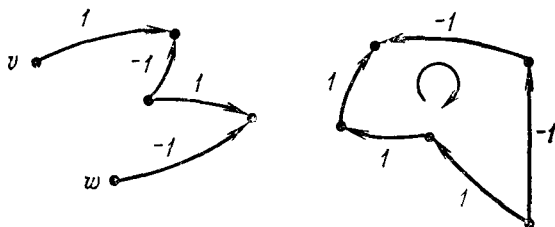


Рис. 7.4.

поток называется *простым потоком* по цепи из v в w . Аналогично, если S — цикл, ориентированный в одном из двух направлений, то φ_s — поток в N , имеющий величину, равную нулю, называется *простым потоком по циклу*. Потоки этих двух типов (и только этих) называются далее простыми потоками. Простые потоки рассматриваются как элементарные блоки, из которых можно построить и на которые можно разложить любой поток.

7.5. Другое представление потока

Иногда удобно рассматривать другое представление потока, при котором структура сети и величины потоков по дугам задаются структурой некоторого ориентированного графа. Пусть φ обозначает поток в сети $N(V, A)$.

Построим ориентированный граф $U(N, \varphi) = (V', A')$, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами сети N . Для каждой дуги $a \in A$ такой, что $\varphi(a) \neq 0$ в A' мы строим $|\varphi(a)|$ строго параллельных дуг, соединяющих соответствующие вершины. Если $a \simeq (v, w)$ и $\varphi(a) > 0$, то эти дуги ориентированы от v' к w' в графе A' . Если $\varphi(a) < 0$, то дуги ориентированы от w' к v' . Таким образом, ориентация дуг графа $U(N, \varphi)$ указывает действительное направление потока в дугах N , а их число — величины соответствующих потоков в дугах сети. Ориентированный граф $U(N, \varphi)$ называется *унитарным* графом (с единичной пропускной способностью дуг), соответствующим потоку φ в сети N . На рис. 7.5 изображена сеть, задан поток

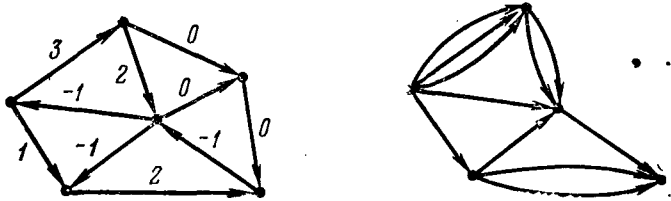


Рис. 7.5.

и показан унитарный граф, соответствующий заданному потоку в сети.

Заметим, что $U(N, \varphi)$ может не отражать полную структуру N , так как в нем не представлены дуги $a \in A$, для которых $\varphi(a) = 0$. В частности, граф $U(N, \varphi)$ может оказаться не связным и, следовательно, может не быть сетью. Если отвлечься от этой особенности, то можно считать, что, переходя к сети с единичным потоком по каждой дуге, мы исключили необходимость использования функционального определения потока.

Упражнение 7.4. Построить унитарный граф, соответствующий расширенной сети, изображенной на рис. 7.3, используя поток, показанный на рис. 7.2.

Пусть v' обозначает вершину в $U(N, \varphi)$, соответствующую вершине v в сети N . Тогда легко видеть, что

$$\delta^+(v') - \delta^-(v') = Q(v, \varphi).$$

В частности, если φ — поток величины k из v_i в v_j , то $U(N, \varphi)$ является псевдосимметрическим, во всех вершинах, исключая, может быть, вершины v_i и v_j , для которых мы имеем

$$\delta^+(v_i) - \delta^-(v_i) = \delta^-(v_j) - \delta^+(v_j) = k.$$

Из теоремы 3.7 следует, что $U(N, \varphi)$ можно покрыть k простыми путями из v_i в v_j , возможно, в сочетании с несколькими простыми контурами. Этот факт играет центральную роль при последующем построении теории, где потоки общего вида разбиваются на простые потоки или синтезируются из простых потоков. Сформулируем тот же результат на языке потоков.

Теорема 7.2. Поток φ из v в w величины k можно представить как сумму

$$\varphi = \sum_1^n \sigma_i$$

для некоторого $n \geq k$, где σ_i — согласованные простые потоки, k из которых являются простыми потоками по цепи, а остальные — простыми потоками по циклу.

Будем называть такое множество согласованных простых потоков *декомпозицией* потока φ . Естественно, что каждый поток может иметь более одной декомпозиции. На рис. 7.6 показаны, например, две декомпозиции

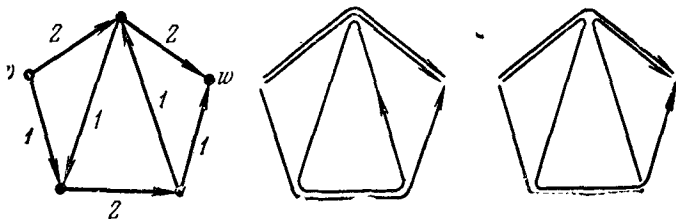


Рис. 7.6.

ции одного и того же потока из v в w величины 3. Обратим внимание на то, что одна из них содержит простой поток по циклу, а другая — нет.

Упражнение 7.5. Применить теорему 7.2 к потоку, показанному на рис. 7.2, в расширенной сети, как показано на рис. 7.3, и получить его декомпозицию.

7.6. Потоки с ограничениями на дугах

Сеть $N = (V, A)$ называется *сетью с ограниченной пропускной способностью*, если на A определены две функции α и β , принимающие целочисленные значения, удовлетворяющие соотношению $0 \leq \alpha(a) \leq \beta(a)$ для всех $a \in A$. Целые числа $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ называются *верхней* и *нижней границами* пропускной способности дуги a и интерпретируются как максимально и минимально допустимая величина потока по каждой дуге. Если $\alpha(a) = 0$ для всех $a \in A$, то $\beta(a)$ обычно называется пропускной способностью дуги a , а сеть называется *транспортной сетью*. Поток φ в сети называется *допустимым* тогда и только тогда, когда

$$\alpha(a) \leq \varphi(a) \leq \beta(a) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Если φ_1 и φ_2 — допустимые потоки, а φ — любой поток, ограниченный потоками φ_1 и φ_2 , то очевидно, что φ также является допустимым. Попытаемся ответить на следующие основные вопросы.

1. При каких условиях в данной сети с ограниченными пропускными способностями существует допустимый поток из v в w ?

2. Если допустимый поток существует, то каковы его характеристики?

3. Если существуют допустимые потоки из v в w , имеющие величину k , то как найти конкретный поток такого типа?

В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемая сеть $N = (V, A)$ с ограниченной пропускной способностью имеет n вершин, которые мы обозначим через v_1, v_2, \dots, v_n , и что мы интересуемся только допустимыми потоками из v_1 в v_n (при этом мы должны включить в рассмотрение и потоки, имеющие нулевую величину).

В качестве первого шага на пути получения ответа на поставленные вопросы отметим, что границы пропускных способностей дуг, входящих в каждый разрез, разделяющий v_1 и v_n , определяют верхнюю и нижнюю границы величин допустимых потоков. Если X и Y — два множества вершин (не обязательно непересекающиеся), $X \rightarrow Y$ обозначает множество дуг типа $a \simeq (x, y)$, где $x \in X$,

$y \in Y$. Обозначим через X' дополнение к X относительно V . Напоминая терминологию, относящуюся к разрезам, укажем, что если X и X' оба непусты, то $X \rightarrow X'$ и $X' \rightarrow X$ являются двумя ориентированными разрезами, соответствующими разбиению вершин $\{X, X'\}$.

Теорема 7.3. Если φ — любой допустимый поток из v_1 в v_n , а W — любое множество вершин такое, что $v_1 \in W$ и $v_n \in W'$, то величина k потока φ должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$\sum_{w \rightarrow w'} \alpha(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \beta(a) \leq k \leq \sum_{w \rightarrow w'} \beta(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \alpha(a).$$

Доказательство. Так как $Q(v_1) = k$ и $Q(v) = 0$ для всех остальных $v \in W$, то мы имеем

$$k = \sum_W Q(v) = \sum_{w \rightarrow v} \varphi(a) - \sum_{v \rightarrow w} \varphi(a),$$

откуда после упрощения получим

$$k = \sum_{w \rightarrow w'} \varphi(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \varphi(a).$$

Так как по условию φ — допустимый поток, то соотношение

$$\alpha(a) \leq \varphi(a) \leq \beta(a)$$

выполняется для любой дуги. Подставляя эти границы в выражение для k , получаем требуемые неравенства.

Отметим, что W было выбрано произвольно, за исключением условия $v_1 \in W$ и $v_n \in W'$. Если мы определим

$$\bar{M} = \min_W \left\{ \sum_{w \rightarrow w'} \beta(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \alpha(a) \right\}$$

и

$$\underline{M} = \max_{W'} \left\{ \sum_{w \rightarrow w'} \alpha(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \beta(a) \right\},$$

где W — пробегает все возможные множества вершин, то можно сделать вывод, что необходимым условием существования допустимого потока из v_1 в v_n является выполнение неравенства $\underline{M} \leq \bar{M}$.

Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 7.7. Пара целых чисел у некоторых дуг представляет ограничения на пропускную способность $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ соответственно. Выбирая $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, видим, что

$$\sum_{w \rightarrow w'} \alpha(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \beta(a) = 10 - 2 = 8 \leq \underline{M}.$$

С другой стороны, взяв $W = \{v_1\}$, имеем

$$\sum_{w \rightarrow w'} \beta(a) - \sum_{w' \rightarrow w} \alpha(a) = 7 - 1 = 6 \geq \bar{M}.$$

Таким образом, минимальный (чистый) поток, который допускается через первый из этих разрезов, несовместим с максимальным допустимым потоком через второй разрез. Следовательно, для данной сети допустимого потока не существует. (По этой причине величины α и β на двух вертикальных дугах несущественны.)

Упражнение 7.6. Для сети рис. 7.7 найти все возможные разбиения вершин на множества W и W' так, чтобы $v_1 \in W$ и $v_3 \in W'$. Оцените суммы в условиях теоремы 7.3 и найдите \bar{M} и \underline{M} . (Положите $\alpha = \beta = 3$ на двух вертикальных дугах.)

Естественно, что в сложной сети, имеющей большое число вершин, практически невозможно проверить все разбиения $\{W, W'\}$, чтобы оценить \bar{M} и \underline{M} . Но даже если

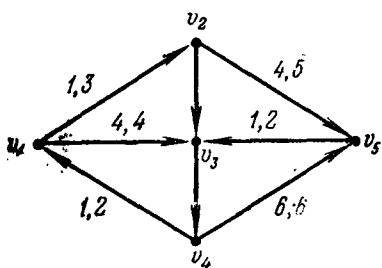


Рис. 7.7.

бы это было и возможно, какой вывод мы должны были бы сделать, установив, что $\underline{M} \leq \bar{M}$? Пока мы только доказали, что выполнение этого неравенства есть необходимое условие для существования допустимых потоков. Нужно еще доказать, что рассматриваемое неравенство или другое, похожее

на него, дает также достаточное условие существования допустимых потоков. Доказательству этого будет посвящена оставшаяся часть данного раздела. В процессе доказательства будет получена практическая процедура для построения любых допустимых потоков.

В следующей ниже теореме 7.4 утверждается, что если известен начальный допустимый поток, то можно получить все остальные допустимые потоки, добавляя или вычитая некоторые простые потоки по цепям.

Теорема 7.4. Пусть φ — допустимый поток из v_1 в v_n , имеющий величину k . Если существует допустимый поток φ^* , имеющий величину $k^* \neq k$, то существует $m = |k^* - k|$ простых потоков по цепям $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$

из v_1 в v_n таких, что $\varphi \pm \sum_1^m \sigma_i$ является допустимым потоком, имеющим величину k^* (знак плюс ставится в случае $k^* > k$, а минус в случае $k^* < k$).

Доказательство. Предположим, что $k^* > k$. Тогда $\varphi^* - \varphi$ есть поток из v_1 в v_n , имеющий величину m . Используя теорему 7.2, можем записать

$$\varphi^* - \varphi = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m + \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \dots + \bar{\sigma}_p,$$

где σ_i и $\bar{\sigma}_j$ — согласованные простые потоки по цепям и циклам соответственно (число потоков по циклам не определено, и они вообще могут отсутствовать). Тогда, используя теорему 7.1, находим, что $\varphi + \sum_1^m \sigma_i$ ограничен потоками φ и $\varphi + (\varphi^* - \varphi) = \varphi^*$. Так как поток

$\varphi + \sum_1^m \sigma_i$ ограничен двумя допустимыми потоками, то он также является допустимым и имеет величину $k + m = k^*$. Случай $k^* > k$ доказан. Если $k^* < k$, то доказательство совершенно аналогично и читатель может провести его самостоятельно.

Упражнение 7.7. Используя обозначения теоремы 7.4, нарисуйте сеть и два потока φ и φ^* (между одними и теми же парами вершин), имеющих величины $k=2$ и $k^*=5$. Определите поток $\varphi^* - \varphi$ и запишите его в виде суммы согласованных простых потоков.

З а м е ч а н и е. Теперь можно строго доказать (факт не очень удивительный), что множество значений (если оно существует) допустимых потоков является множеством последовательных целых чисел. То есть, если существуют допустимые потоки, имеющие величины k и $k^* > k$ соответственно, и r — целое число такое, что $k < r < k^*$, то существует допустимый поток, имеющий величину r . Чтобы проверить это, рассмотрим поток $\varphi + \sum \sigma_i$, где суммирование включает все $r - k$ простых потоков по цепям, использованных в доказательстве теоремы 7.4. Этот поток имеет величину r и является допустимым по ранее изложенным причинам.

Построение потоков, имеющих заданную величину, с помощью добавления к некоторому начальному допустимому потоку или исключения из него простых

потоков по цепям является не только теоретическим приемом, но и практическим методом. Перед тем как дать точное описание этого процесса, проиллюстрируем его основные особенности неформально, используя в качестве примера транспортную сеть, изображенную на рис. 7.8. Числа на рис. 7.8, *a* показывают пропускные способности дуг, а v и w — источник и сток соответственно. Предположим, что сеть симметрична, т. е. поток

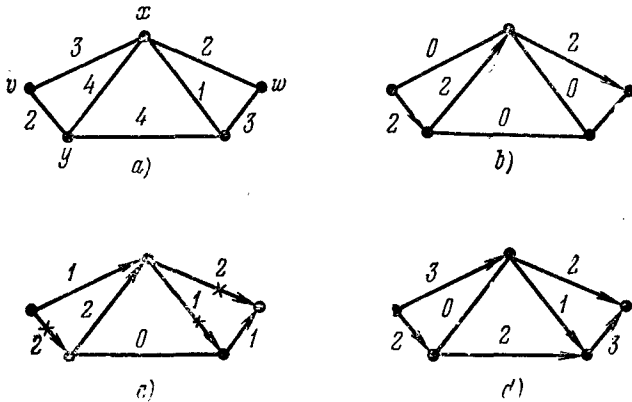


Рис. 7.8.

может распространяться в обоих направлениях по любой дуге, лишь бы он не превосходил соответствующей пропускной способности.

Наша цель — максимизировать поток из v в w . Очевидно, что максимальная величина не может быть больше 5 из-за пропускных способностей дуг, инцидентных вершине v . В начале возьмем любой путь, соединяющий v с w , например, путь, определенный следующей последовательностью вершин v, y, x, w , и припишем каждой дуге пути поток величины 2. (Любая большая величина будет выше пропускной способности некоторых дуг.) Дугам, не входящим в рассматриваемый путь, первоначально припишем потоки, равные нулю. Полученный в результате поток показан на рис. 7.8, *b*.

Найдем теперь любой другой путь, который не использует насыщенных дуг (т. е. дуг, подобных дугам (v, y) и (x, w) , для которых проходящий через них

поток уже равен пропускной способности). Возьмем, например, путь, определенный последовательностью вершин v, x, z, w , и примем единичный поток каждой из его дуг. Добавив полученный поток к предыдущему потоку рис. 7.8, *b*, получим новый поток рис. 7.8, *c*. В последнем случае три дуги насыщены (они помечены крестиками). Так как мы должны избегать насыщенных дуг, то единственный способ, с помощью которого можно увеличить величину потока из v в w , состоит в том, чтобы отказаться от ранее принятого решения пропустить поток от y к x . Добавим поток величины 2 в цепь, определяемую последовательностью вершин v, x, y, z, w . Полученный в результате поток показан на рис. 7.8, *d*. Таким образом, в результате исключения потока из ребра, соединяющего вершины x и y , получен поток, величина которого, очевидно, максимальна.

Вернемся теперь к формальному описанию синтеза потоков с помощью потоков по цепям. Эта процедура наиболее легко описывается с помощью вспомогательного ориентированного графа, так называемого графа приращений. Если φ — допустимый поток в сети $N(V, A)$, то

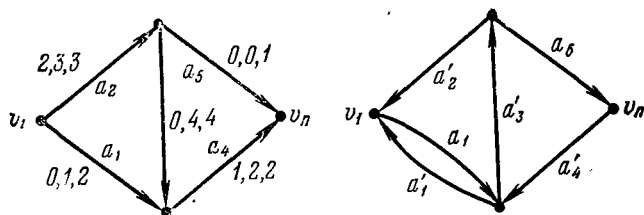


Рис. 7.9.

соответствующий *граф приращений* $I(N, \varphi)$ есть ориентированный граф, имеющий те же самые вершины, что и сеть N . Дуги этого графа определяются следующим образом: для каждой дуги $a \simeq (v, w)$ из N в графе $I(N, \varphi)$ строится дуга a , если $\varphi(a) < \beta(a)$, а дуга a' с обращенной ориентацией $a' \simeq (w, v)$, если $\varphi(a) > \alpha(a)$. Если в графе $I(N, \varphi)$ есть дуга a или a' , то можно добавить или соответственно вычесть единицу потока в a , не нарушая допустимости потока по этой дуге. На рис. 7.9 (справа) показан граф приращений, соответствующий сети. Допустимый поток изображен на рис. 7.9 слева.

(Тройка чисел у дуг обозначает $\alpha(a)$, $\varphi(a)$ и $\beta(a)$ соответственно.)

Каждый простой путь из v_1 в v_n в графе $I(N, \varphi)$ определяет простой поток по цепи из v_1 в v_n в сети N ; его можно добавить к φ , не нарушая условия допустимости. На рис. 7.9 (справа) путь $\{a_1, a_3, a_5\}$ в $I(N, \varphi)$ определяет простой поток по цепи σ в сети N , где a_1 и a_5 — нормальные дуги, а a_3 — обращенная дуга. Аналогично, каждый простой путь из v_n в v_1 в графе $I(N, \varphi)$ определяет простой поток по цепи σ^* из v_1 в v_n такой, что $\varphi - \varphi^*$ является допустимым в N . Наличие пути $\{a'_4, a'_1\}$ указывает на то, что поток по цепи, проходящий через нормальные пути a_1 и a_4 , можно вычесть из φ без нарушения условий допустимости.

Очевидно, что если φ — допустимый поток, имеющий максимальную величину, то в $I(N, \varphi)$ не существует путей из v_1 в v_n . Аналогично, если φ — допустимый поток, имеющий минимальную величину, то в $I(N, \varphi)$ не существует путей из v_n в v_1 , за исключением случая, когда φ равен нулю. (Напомним, что согласно нашему определению, величина потока должна быть неотрицательной. Если $I(N, \varphi)$ содержит путь из v_n в v_1 и величина φ равна нулю, то $\varphi - \sigma$ будет допустимым для соответствующего потока по цепи σ , но не для потока из v_1 в v_n .)

Мы видели ранее, что необходимым условием существования допустимого потока является выполнение неравенства $\underline{M} \leq \overline{M}$. Обозначим $\underline{M}^* = \max \{\underline{M}, 0\}$ для исключения потоков, имеющих отрицательные величины. Тогда теорема 7.5 утверждает, что \underline{M}^* и \overline{M} дают точные границы величин допустимых потоков, если такие потоки существуют.

Теорема 7.5. Если существует хотя бы один допустимый поток из v_1 в v_n , то \underline{M}^* и \overline{M} — соответственно минимальная и максимальная границы величин допустимых потоков.

Доказательство. Пусть φ — допустимый поток из v_1 в v_n такой, что $I(N, \varphi)$ не содержит путей из v_1 в v_n . (Такой поток всегда можно построить, начиная с любого допустимого потока и добавляя последовательность простых потоков по цепям до тех пор, пока в графе

$I(N, \varphi)$ не окажется путей из v_1 в v_n .) Пусть W состоит из v_1 и всех вершин, которые достигаются из v_1 с помощью пути. Тогда $v_n \in W'$ по предположению. Более того, для каждой дуги в $W \rightarrow W'$ мы должны иметь $\varphi(a) = \beta(a)$, а для каждой дуги в $W' \rightarrow W$ $\varphi(a) = \alpha(a)$ (почему?). Но мы знаем, что величина φ , равная, например, k , определяется выражением

$$k = \sum_{W \rightarrow W'} \varphi(a) - \sum_{W' \rightarrow W} \varphi(a) = \sum_{W \rightarrow W'} \beta(a) - \sum_{W' \rightarrow W} \alpha(a).$$

Так как

$$k \leq \sum_{W \rightarrow W'} \beta(a) - \sum_{W' \rightarrow W} \alpha(a)$$

для каждого разбиения $\{W, W'\}$, данное значение W должно реализовать \bar{M} и величина потока φ равна \bar{M} .

Аналогично обосновывается вторая часть теоремы. В этом случае, начиная с любого допустимого потока, мы можем последовательно вычитать потоки по цепям до тех пор, пока не получим поток нулевой величины, или не исключим все пути из v_n в v_1 в графе $I(N, \varphi)$. В первом случае $\underline{M}^* = 0$, существует поток нулевой величины и доказательство закончено. В последнем случае, пусть W есть множество вершин, не достижимых из v_n с помощью путей в графе $I(N, \varphi)$. Тогда $\varphi(a) = \alpha(a)$ для дуг множества $W \rightarrow W'$ и $\varphi(a) = \beta(a)$ для дуг множества $W' \rightarrow W$ и величина k потока φ удовлетворяет соотношению

$$k = \sum_{W \rightarrow W'} \varphi(a) - \sum_{W' \rightarrow W} \varphi(a) = \sum_{W \rightarrow W'} \alpha(a) - \sum_{W' \rightarrow W} \beta(a).$$

Таким образом, допустимый поток величиной \underline{M}^* существует. Теорема доказана.

При $\alpha(a) = 0$ для каждой дуги допустимый поток обязательно существует и теорема 7.5 в этом случае называется *теоремой о максимальном потоке и минимальном разрезе* [4].

7.7. Максимальный поток в транспортной сети

В транспортной сети всегда существует допустимый начальный поток, а именно поток, тождественно равный нулю. Обозначим этот поток через φ_0 . Воспользуемся процедурой увеличения потока из доказательства тео-

ремы 7.5 и найдем последовательность потоков $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, имеющих величины $1, 2, 3, \dots$. В конечном счете мы получим поток φ_k , имеющий максимальную величину. Согласно теореме 7.5 это произойдет при $k = \bar{M}$, т. е. когда один или несколько разрезов $\{W, W'\}$ будут насыщены, это означает, что $\varphi_k(a) = \beta(a)$ для каждой дуги $a \in W \rightarrow W'$ и $\varphi_k(a) = 0$ для каждой дуги $a \in W' \rightarrow W$. Прежде чем описать алгоритм построения такой последовательности допустимых потоков, видоизменим введенный ранее граф приращений. Будем считать, что каждой дуге $a \simeq (v, \omega)$ в сети N в графе $I(N, \varphi)$ соответствуют две дуги a и $a' \simeq (\omega, v)$. Припишем каждой дуге длину, пользуясь следующими соотношениями:

$$\lambda(a) = \begin{cases} 0 & \text{если } \varphi(a) < \beta(a), \\ \infty, & \text{если } \varphi(a) = \beta(a), \end{cases}$$

$$\lambda(a') = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(a) > \alpha(a), \\ \infty, & \text{если } \varphi(a) = \alpha(a). \end{cases}$$

(Заметим, что вместо ∞ мы можем использовать некоторое положительное число. Однако принятое условие позволит в дальнейшем с минимальными изменениями построить алгоритм минимизации стоимости. Таким образом, дуги, которые ранее удалялись из графа $I(N, \varphi)$, теперь восстанавливаются, но имеют бесконечную длину, и поток φ будет максимальным, если между v_1 и v_n нет путей нулевой длины.)

Далее, через I будет обозначен граф приращений (структура которого не зависит от φ), а через λ_k — функция расстояния, связанная с потоком φ_k , имеющим величину k .

Алгоритм определения максимального потока:

1. Положим $i = 0$ и возьмем в качестве φ_0 поток, тождественно равный нулю по каждой дуге.

2. Пользуясь функцией расстояния λ_i , определим кратчайшее расстояние между v_1 и v_n в I . (Это можно сделать, используя метод пометок, описанный в главе 3.)

3. Если расстояние, определенное на втором шаге, конечно, то обозначим через S любой простой путь из v_1 в v_n кратчайшей длины, и пусть σ_i обозначает соот-

ветствующий простой поток по цепи в сети N . Положим $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \sigma_c$ и повторим шаг 2, заменяя i на $i+1$.

4. Если кратчайшее расстояние от v_1 до v_n равно ∞ , то φ_1 является максимальным потоком, и на этом алгоритм работу заканчивает.

Такая процедура имеет один серьезный недостаток, а именно, величина потока увеличивается на каждом шаге только на единицу. На практике ее можно существенно ускорить. Найдя путь C на шаге 3, можно проверить, сколько единиц потока можно пропустить по этому пути. Другими словами, мы можем определить наибольшее целое t такое, при котором $\varphi_i + t\sigma_c$ является допустимым потоком. Чтобы определить t , заметим, что для каждой дуги $a \approx (v, w)$ такой, что $\lambda(a) < \infty$, к $\varphi_i(a)$ можно добавить не более $\beta(a) - \varphi_i(a)$ единиц потока, не нарушая допустимости. Аналогично, если $\lambda_i(a') < \infty$, из $\varphi_i(a)$ можно исключить не более $\varphi_i(a) - \alpha(a)$ единиц потока.

Целое число t соответствует минимуму по таким приращениям потока в дугах C , и на шаге 3 алгоритма можно определять не φ_{i+1} , а $\varphi_{i+t} = \varphi_i + t\sigma_c$.

Упражнение 7.8. Возьмите сеть рис. 7.8, для которой мы уже не формально получили максимальный поток. Решите задачу формально, пользуясь приведенным выше алгоритмом нахождения максимального потока.

7.8. Максимальные потоки в сетях общего вида с ограниченными пропускными способностями дуг

Если $\alpha(a) > 0$ для одной или более дуг и известен допустимый поток φ_i , имеющий величину i , то описанный алгоритм можно использовать для получения допустимых потоков с величинами, возрастающими от i до \bar{M} или убывающими от i до \underline{M}^* (В этом случае шаг 2 надо видоизменить и находить кратчайшее расстояние от v_n до v_1 в текущем графе приращений.)

Однако, если первоначальный допустимый поток не известен, то возникают трудности. Очевидно, что в этом случае (при $\alpha(a) > 0$) поток, тождественно равный нулю, не является допустимым.

Для нахождения начального допустимого потока сформулируем вспомогательную задачу на вспомогательной сети N' (см. [5] библи. к гл. 1). Сеть $N' = (V', A')$

получается из сети $N(V, A)$ следующим образом. Множество вершин V' состоит из вершин v_1, \dots, v_n множества V и двух добавочных вершин v_0 и v_{n+1} (которые будут соответственно источником и стоком во вспомогательной сети).

Каждой дуге $a \simeq (v, w) \in A$ в множестве A' соответствуют три дуги

$$a' \simeq (v, w), \quad a'' \simeq (v_0, w), \quad a''' \simeq (v, v_{n+1}).$$

Этим дугам приписываются следующие пропускные способности:

$$\alpha'(a') = \alpha'(a'') = \alpha'(a''') = 0,$$

$$\beta'(a') = \beta(a) - \alpha(a),$$

$$\beta'(a'') = \beta'(a''') = \alpha(a).$$

Заметим, что для дуг, у которых $\alpha(a) = 0$, построение дуг a'' и a''' является излишним, так как для них $\alpha = \beta = 0$. На практике эти дуги опускаются. В теории, однако, удобно считать, что все три дуги a' , a'' и a''' всегда существуют.

Кроме названных дуг в N' добавляется еще одна конечная дуга b' , имеющая следующие характеристики:

$$b' \simeq (v_n, v_1), \quad \alpha'(b') = 0, \quad \beta'(b') = K,$$

где K — целое число, большее чем величина любого возможного допустимого потока в первоначальной сети N . На рис. 7.10 приведен пример, иллюстрирующий вспомогательную сеть N' для заданной сети N .

З а м е ч а н и е. Вспомогательная сеть полностью определяется сетью N и ее функциями ограничений α и β . Если N — сложная сеть, то явное построение N' оказывается в лучшем случае трудным делом. Однако для построения вспомогательной сети и реализации вычислительного алгоритма можно с успехом использовать электронные цифровые вычислительные машины.

Упражнение 7.9. На рис. 7.7 положите $\alpha = 1$ и $\beta = 3$ для каждой из вертикальных дуг и постройте вспомогательную сеть, принимая v_1 в качестве источника и v_5 в качестве стока. Укажите величины α' и β' для каждой дуги сети N' .

Вспомогательная сеть представляет интерес по двум причинам. Во-первых, N' — транспортная сеть, а для

нее в предыдущем разделе дан алгоритм нахождения максимального потока. Во-вторых, можно показать, что максимальный поток φ' в сети N' можно легко преобразовать в допустимый поток φ в сети N , если допустимый

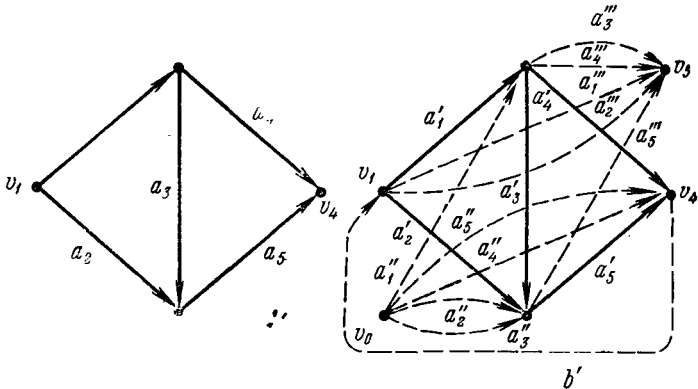


Рис. 7.10.

поток в принципе существует. Отсутствие допустимого потока также легко устанавливается по характеристикам потока φ' .

Допустимый поток φ' из v_0 в v_{n+1} в сети N' называется *насыщающим* потоком, если $\varphi'(a'') = \beta'(a'')$ для каждой дуги a'' , идущей из v_0 . Такой поток (если он существует) с необходимостью является максимальным в N' (почему?). Эквивалентным условием насыщающего потока является равенство $\varphi'(a''') = \beta'(a''')$ для каждой дуги, оканчивающейся в v_{n+1} . Если φ' — насыщающий поток в N' , то рассмотрим следующую функцию φ , определенную на дугах сети N : $\varphi(a) = \varphi'(a') + \alpha(a)$. Для определенной таким образом φ доказывается следующая

Теорема 7.6. Если φ' — насыщающий поток в сети N' и φ определено так, как показано выше, то φ есть допустимый поток из v_1 в v_n сети N . Более того, величина φ равна $\varphi'(b')$.

Упражнение 7.10. Доказать теорему 7.6. Заметим, что должны быть обоснованы три факта:

1. $\alpha(a) \leq \varphi(a) \leq \beta(a)$ для всех a .
2. $Q(v_i, \varphi) = 0$ для $i = 2, 3, \dots, n - 1$.
3. $Q(v_1, \varphi) = \varphi'(b')$.

Таким образом, если, максимизируя поток в сети N' , мы получим насыщающий поток, то из него легко можно получить допустимый поток φ в сети N . С другой стороны, если максимальный поток в N' не является насыщающим, то, как утверждается теоремой 7.7, допустимого потока в сети N не существует.

Теорема 7.7. Если φ' — максимальный, но не насыщенный поток в сети N' из v_0 в v_{n+1} , то в сети N не существует допустимого потока из v_1 в v_n .

Доказательство. Обозначим через W множество вершин, отличных от v_0 , но достижимых из v_0 путями конечной длины в графе $I(N', \varphi')$. И пусть W' обозначает вершины, не достижимые из v_0 и отличные от v_{n+1} . Так как φ' — ненасыщающий поток, оба множества W и W' непусты. (Проверьте это.) Пропускная способность (т. е. сумма верхних границ потока) разреза $\overline{W} \rightarrow \overline{W}'$, определенного разбиением V' на $\overline{W} = \{v_0\} \cup W$ и $\overline{W}' = \{v_{n+1}\} \cup W'$, задается выражением

$$k = \sum_{v_0 \rightarrow W'} \beta'(a'') + \sum_{W \rightarrow W'} \beta'(a') + \sum_{W \rightarrow v_{n+1}} \beta'(a''').$$

Используя то, что $\beta' = \beta - \alpha$ для дуг типа a' и $\beta' = \alpha$ для дуг типа a'' и a''' , выражение для k можно переписать в виде

$$k = \sum_{W \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W \rightarrow W'} \beta(a) - \\ - \sum_{W \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a).$$

Так как φ' — ненасыщающий поток, имеем

$$k > \sum_{W \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a) + \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a).$$

Сопоставляя два последних выражения, находим, что

$$\sum_{W \rightarrow W'} \beta(a) - \sum_{W' \rightarrow W'} \alpha(a) < 0.$$

Отсюда следует, что для любого допустимого потока в сети N мы должны иметь

$$\sum_{W \rightarrow W'} \varphi(a) - \sum_{W' \rightarrow W'} \varphi(a) < 0 \quad (\text{почему?}).$$

С другой стороны, если v_1 и v_n обе принадлежат W

или W' , то любой поток φ из v_1 в v_n должен удовлетворять соотношению

$$\sum_{w \rightarrow W'} \varphi(a) - \sum_{w' \rightarrow W} \varphi(a) = 0.$$

Если же $v_1 \in W$ и $v_n \in W'$, то φ должен удовлетворять соотношению

$$\sum_{w \rightarrow W'} \varphi(a) - \sum_{w' \rightarrow W} \varphi(a) = k \geq 0,$$

где через k обозначена величина потока φ . Отсюда мы заключаем, что в сети N не существует допустимого потока из v_1 в v_n , исключая, возможно, не рассмотренный здесь случай, когда $v_n \in W$ и $v_1 \in W'$. Но этот случай никогда не возникает, так как если мы можем достигнуть v_n через ненасыщенный путь в сети N' , то мы можем так же достичь v_1 , так как дуга b' никогда не бывает насыщенной. Теорема доказана.

Упражнение 7.11. Примените алгоритм построения максимального потока к транспортной сети, построенной в упражнении 7.9. Покажите, что максимальный поток не является насыщающим и, следовательно, согласно теореме 7.7 в сети N не существует допустимого потока.

Краткие выводы. Итак, мы получили следующие основные результаты. Мы можем найти максимальный поток в транспортной сети, принимая в качестве начального поток, тождественно равный нулю, и добавляя к нему последовательность простых потоков по ценам от источника к стоку. Текущее значение потока максимально, когда в графе приращений не оказывается путей конечной длины, соединяющих v_1 с v_n . Каждый промежуточный поток, найденный в процессе выполнения процедуры, является допустимым, так что фактически мы получаем потоки, реализующие все допустимые значения. Более того, мы можем ускорить процедуру поиска, выбирая подходящий множитель для каждого потока по цепи. Для сетей общего вида с ограниченными пропускными способностями, в которых $\alpha(a) > 0$ для нескольких или всех дуг, необходимо сначала построить соответствующую вспомогательную транспортную сеть N' и максимизировать поток от v_0 до v_{n+1} с помощью указанного выше алгоритма. Найденный максимальный поток φ' легко преобразуется в допустимый поток φ

в сети N или указывает на отсутствие допустимых потоков в сети N . В первом случае допустимый поток φ в сети N берется в качестве начального потока для последовательности возрастающих (убывающих) потоков, которые получаются добавлением (вычитанием) соответствующих потоков по цепям. Как и ранее, процедуру поиска максимального (минимального) потока можно ускорить после нахождения допустимого потока φ . Таким образом, для любой сети с ограниченными пропускными способностями мы имеем практический метод получения любых допустимых потоков между фиксированной парой вершин сети.

7.9. Потоки минимальной стоимости

Если N — сеть с ограниченными пропускными способностями и $\underline{M}^* \leq k \leq \bar{M}$, то существует, вообще говоря, довольно большое число допустимых потоков из v_1 в v_n , имеющих величину k . В этом случае часто требуется выбрать среди них один, который минимизирует некоторую количественную меру, которую мы будем называть *стоимостью*, но действительный смысл которой может изменяться в различных прикладных задачах.

Предположим, что $N = (V, A)$ — заданная сеть с ограничениями $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ пропускных способностей дуг. Пусть на N задана функция γ , принимающая действительные значения, которая каждой дуге $a \in A$ ставит в соответствие единичную стоимость $\gamma(a) \geq 0$. Если φ — любой допустимый поток, то общая стоимость потока φ , обозначаемая $\gamma(\varphi)$, определяется из соотношения

$$\gamma(\varphi) = \sum_{a \in A} \gamma(a) \cdot \varphi(a).$$

Если $a \simeq (v, w)$, то $\gamma(a)$ можно интерпретировать как стоимость пересылки единицы потока из v в w по дуге a . Тогда $\gamma(\varphi)$ — просто суммарная стоимость потока в сети. Важно отметить, что такая модель применима для оценки стоимости потоков, только когда стоимость потока в каждой дуге пропорциональна величине потока.

Рассмотрим сначала транспортные сети (для них $\alpha \equiv 0$). Основная задача в этом случае имеет вид: задана транспортная сеть N и функция стоимости γ . Найти

допустимый поток φ из v_1 в v_n , величина которого равна заданному целому числу k и стоимость которого минимальна.

Так как $\gamma(\varphi) \geq 0$ для каждого допустимого потока φ , то допустимый поток φ_0 , тождественно равный нулю, является, очевидно, допустимым потоком с минимальной стоимостью. Более того, далее мы увидим, что если φ_k — допустимый поток величины k , стоимость которого минимальна, то можно найти такой поток по цепи σ , что $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \sigma$ будет допустимым потоком величины $k+1$, стоимость которого так же минимальна (исключая, конечно, случай, когда φ_k — максимальный поток). Если это так, то мы можем начать с потока φ_0 и построить последовательность потоков $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, имеющих минимальную стоимость. В результате можем получить поток с минимальной стоимостью, имеющий заданную величину k . Другой метод, основанный на идеях линейного программирования, предложен Фалкерсоном [7].

Пусть φ — допустимый поток из v_1 в v_n , имеющий величину k , и $I(N, \varphi)$ — соответствующий граф приращений. Для каждой дуги a в первоначальной сети определим длину $\lambda(a)$ следующим образом:

$$\lambda(a) = \begin{cases} \gamma(a), & \text{если } \varphi(a) < \beta(a), \\ \infty, & \text{если } \varphi(a) = \beta(a). \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda(a)$ представляет собой единичную стоимость потока по дуге a при условии, что единица стоимости бесконечна, если a насыщена.

Аналогично, для каждой дуги a' в $I(N, \varphi)$, которая соответствует обращенной дуге a в сети N , определим $\lambda(a')$ следующим образом:

$$\lambda(a') = \begin{cases} -\gamma(a), & \text{если } \varphi(a) > 0, \\ \infty, & \text{если } \varphi(a) = 0. \end{cases}$$

Если P — простой путь из v_1 в v_n или простой контур в $I(N, \varphi)$, то $\lambda(P) = \sum_P \lambda(a)$, как легко видеть, есть стоимость приращения, получаемая при добавлении к φ простого потока по цепи или по контуру σ_P , определяемого P . Формально

$$\gamma(\varphi + \sigma_P) = \gamma(\varphi) + \lambda(P).$$

Это остается верным даже для недопустимых потоков $\varphi + \sigma_P$, если мы положим, что все недопустимые потоки имеют бесконечную стоимость.

Если φ не максимален, то кратчайший путь P_0 из v_1 в v_n в графе $I(N, \varphi)$ определяет наилучший поток по цепи σ , который можно добавить к φ , так как если $\lambda(P_0) \leq \lambda(P)$, то

$$\gamma(\varphi + \sigma_{P_0}) = \gamma(\varphi) + \lambda(P_0) \leq \gamma(\varphi) + \lambda(P) = \gamma(\varphi + \sigma_P).$$

Однако имеется одна трудность. Может случиться, что $\lambda(Z) < 0$ для некоторых простых контуров Z в графе $I(N, \varphi)$. В главе 3 мы видели, что наш метод нахождения кратчайшего простого пути в ориентированном графе в этом случае не работает. К счастью, если φ — поток с минимальной стоимостью, то этого произойти не может. Действительно, имеется следующая связь потоков с минимальной стоимостью и контуров отрицательной длины.

Теорема 7.8. Допустимый поток φ , имеющий величину k , является минимальным по стоимости среди всех остальных допустимых потоков величины k тогда и только тогда, когда $\lambda(Z) < 0$ для каждого простого контура Z в графе $I(N, \varphi)$.

Доказательство. Если $\lambda(Z) < 0$ для некоторого простого контура Z , соответствующий простой поток по контуру σ_Z таков, что

$$\gamma(\varphi + \sigma_Z) = \gamma(\varphi) + \lambda(\sigma_Z) < \gamma(\varphi)$$

и, следовательно, φ не является потоком, минимальным по стоимости. Значит, если φ минимизирует стоимость, то $\lambda(Z) \geq 0$ для любого контура Z .

Для доказательства обратного предположим, что $\lambda(Z) \geq 0$ для каждого контура Z , но φ не является потоком, минимальным по стоимости (мы должны прийти к противоречию). Пусть φ' — поток, минимальный по стоимости, имеющий величину k . Тогда мы можем записать

$$\varphi' - \varphi = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m,$$

где σ_i — согласованные потоки по контурам Z_1, Z_2, \dots, Z_m в графе $I(N, \varphi)$. Функция расстояния λ , соответствующая $I(N, \varphi)$, удовлетворяет (по предположению) условию

$$\lambda(Z_i) \geq 0$$

и, следовательно,

$$\gamma(\varphi + \sigma_1) = \gamma(\varphi) + \lambda(Z_1) \geq \gamma(\varphi).$$

Обозначим теперь через λ_1 функцию расстояния, соответствующую графу $I(N, \varphi + \sigma_1)$. Очевидно, что $\lambda(a)$ и $\lambda_1(a)$ совпадают на дугах, которые не входят в контур Z_1 , так как их потоки не изменились. Для дуг контура Z_1 , которые входят в сеть N имеем, $\lambda(a) = \infty$ или $\lambda_1(a) = \lambda(a)$ в зависимости от того, является ли дуга a насыщенной в данный момент или нет. Аналогично, для дуг a' контура Z_1 (которые обратны дугам сети N) имеем $\lambda_1(a') = \infty$ или $\lambda_1(a') = \lambda(a')$ в зависимости от того, является ли дуга a «холостой» или нет. Единственные дуги в графе приращений, для которых $\lambda_1 < \lambda$, это дуги, противоположные дугам Z_1 (дуга a , если $a' \in Z_1$, и дуга a' , если $a \in Z_1$). Но так как все σ_i согласованы, такие дуги не могут появиться ни в одном из оставшихся контуров Z_i , и их новые длины не имеют значения при последующем рассуждении.

С учетом полученных выше соотношений между λ_1 и λ имеем

$$\lambda_1(Z_2) \geq \lambda(Z_2) \geq 0$$

и, таким образом,

$$\gamma(\varphi + \sigma_1 + \sigma_2) = \gamma(\varphi + \sigma_1) + \lambda_1(Z_2) \geq \gamma(\varphi).$$

Повторяя этот процесс m раз, получаем, что

$$\gamma(\varphi + \sigma_1 + \dots + \sigma_m) \geq \gamma(\varphi),$$

но так как

$$\varphi + \sigma_1 + \dots + \sigma_m = \varphi',$$

это противоречит предположению, что

$$\gamma(\varphi') < \gamma(\varphi).$$

Теорема доказана.

Упражнение 7.12. Доказать, что если φ — допустимый поток с минимальной стоимостью в сети N , то в сети N существует, по крайней мере, еще один допустимый поток φ' с минимальной стоимостью тогда и только тогда, когда $\gamma(C) = 0$ для некоторого контура в графе $I(N, \varphi)$.

Алгоритм нахождения допустимого потока, минимизирующего стоимость и имеющего любую величину от 0 до M , в транспортной сети формально представляется точно так же, как и алгоритм максимального потока в разделе 7.7, с той лишь разницей, что здесь соответствующая

функция длины λ определяется через приращения стоимости потока на дугах.

Работа такого алгоритма показана на рис. 7.11 для очень небольшой сети. После изучения этого примера читателю рекомендуется в целях более глубокого ознакомления с процедурой применить ее для более сложной сети. При очень сложных сетях ручные расчеты становятся практически неприемлемы. На электронных цифровых вычислительных машинах можно легко обчислять сети, имеющие несколько тысяч дуг.

В верхней части рис. 7.11 показана структура сети и указаны стоимости потоков на дугах и их пропускные способности. Слева показана необходимая последовательность графов приращений. Числа на дугах соответствуют их длинам, дуги с бесконечными длинами опущены, дуги, входящие в кратчайший путь от источника к стоку, выделены жирными линиями. В правой части рис. 7.11 изображена последовательность потоков минимальной стоимости в порядке возрастания их величины. Эти потоки получены с помощью последовательного добавления потоков по цепям, соответствующим кратчайшим путям в графе приращений. Числа на дугах обозначают потоки, которые по ним пропущены. В общем случае, найдено четыре потока по цепям, которые имеют величины 5, 2, 3 и 1 соответственно. Конечный поток величины 11, очевидно, является максимальным, так как обе дуги, идущие к стоку, уже насыщены.

Заметим, что первый граф приращений $I(N, \varphi_0)$ структурно идентичен с исходной сетью (здесь φ_0 — поток, тождественно равный нулю во всех дугах). Это объясняется тем, что в данный момент еще нет насыщенных дуг и не существует положительных потоков, которые потенциально можно было бы аннулировать. Во всех последующих графах приращений некоторые прямые дуги (изображаемые сплошными линиями), которые являются насыщенными, отсутствуют. Кроме того, в них имеются некоторые обращенные дуги (пунктир), соответствующие дугам, имеющим положительный поток, который может быть исключен без нарушения допустимости за счет использования дуги в обратном направлении.

Простота приведенного примера позволяет визуально найти кратчайшие пути в каждом графе приращений.

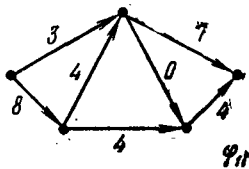
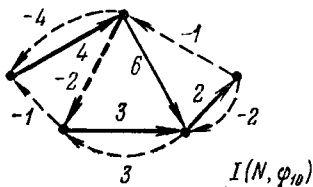
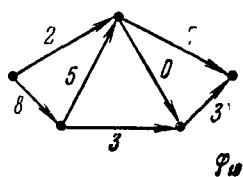
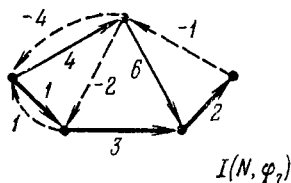
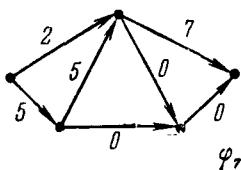
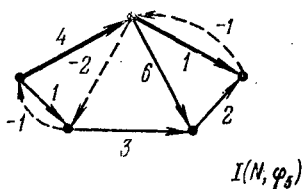
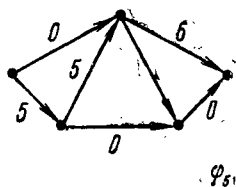
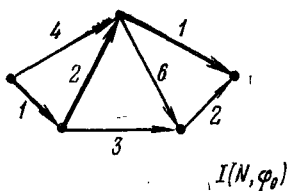
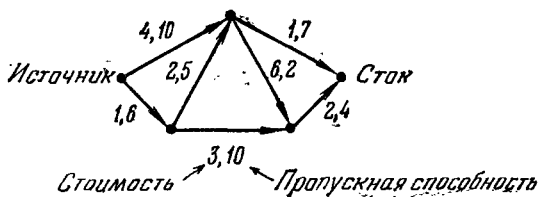


Рис. 7.11.

В более сложных случаях для нахождения каждого кратчайшего пути необходимо использовать систематические методы, например типа описанного в главе 3, так как выбор не кратчайшего пути даст в результате поток, стоимость которого не минимальна. В этом случае его нельзя использовать в качестве начальной точки при определении следующего приращения потока.

Заметим, что последний поток по цепи действительно требует использования обращенной дуги графа приращений $I(N, \varphi_{10})$. Таким образом, оптимальный поток величины 11 использует эту дугу менее интенсивно, чем оптимальный поток величины 10. В рассмотренном примере каждый последовательный граф приращений имеет только один кратчайший путь. Однако это не всегда так. Когда имеются несколько кратчайших путей, любой из них можно использовать в качестве базиса для нахождения следующего потока по цепи.

Упражнение 7.13. Возвращаясь к предыдущему примеру, начните с потока φ_3 величины 3, полученного приписыванием трех единиц потока трем нижним дугам и нулевого потока остальным. Постройте соответствующий граф приращений $I(N, \varphi)$ и убедитесь, что он содержит, по крайней мере, один контур отрицательной длины (теория показывает, что это действительно так, потому что φ_3 не является потоком величины 3 минимальной стоимости.)

Важно отметить, что хотя мы обошлись без построения потоков величины 1, 2, 3, 4, 6, 8 и 9 в рассмотренном выше примере, такие потоки минимальной стоимости можно получить с помощью интерполяции. Например, для получения потока минимальной стоимости величины 8 мы должны добавить к потоку φ_7 одну единицу потока по цепи, которая использовалась для построения φ_{10} .

Упражнение 7.14. На рис. 7.8, а ориентируйте все дуги слева направо. Пусть числа, приписанные каждой дуге, представляют единичную стоимость потока и пропускную способность дуги $a(a) = 0$, т. е. сеть является транспортной. Используя описанный метод, найдите последовательность потоков минимальной стоимости, последний из которых имеет максимальную величину.

7.10. Некоторые специальные задачи о потоках

В качестве первого примера задач, которые сводятся к задачам о потоках, рассмотрим так называемую транспортную задачу, которой посвящено много работ в литературе по исследованию операций.

Пусть S_1, \dots, S_m и T_1, \dots, T_n — множества пунктов отправления и пунктов получения соответственно, между которыми должен быть распределен некоторый однородный товар. Каждый пункт отправления S_i имеет ограниченный склад A_i и каждый пункт получения T_j — определенную потребность B_j (спрос). Известна стоимость перевозки единицы товара из S_i в T_j , равная U_{ij} . В простейшем случае на объемы перевозок из S_i в T_j не наложено никаких ограничений (конечно, они не должны нарушать ограничений, накладываемых складами A_i и спросом B_j). Задача состоит в отыскании плана перевозок от пунктов отправления к пунктам потребления, имеющего минимальную стоимость, при условиях, что спрос должен быть удовлетворен (но избытков быть не должно) и объем перевозок от данного пункта отправления не должен превышать объемы его склада.

Эту задачу можно рассматривать как задачу нахождения максимального потока, имеющего минимальную стоимость в сети, изображенной на рис. 7.12. (Упорядоченная пара чисел (x, y) , приписанная каждой дуге, представляет пропускную способность дуги (x) и единичную стоимость перевозок (y)). Если перевозки из некоторых пунктов S_i в некоторые пункты T_j не разрешаются, то соответствующие дуги в сети просто опускаются. Если имеются ограничения на количество товара, перевозимого из некоторых S_i в некоторые T_j , то соответствующим дугам приписывается конечная пропускная способность. В этом случае, конечно, может оказаться, что спрос в пунктах потребления не будет удовлетворен полностью. Однако решая задачу о потоке, мы получим план, позволяющий перевезти максимально возможное количество товара при минимальной стоимости.

Если $m=n$, а A и B соответствуют работникам и видам работ соответственно, то та же самая модель применима для решения задачи о назначениях, в которой требуется назначить m работников для выполнения m работ так, чтобы оптимально использовались их возможности. (В этом случае под U_{ij} следует понимать меру полезности при назначении i -го работника на j -ую работу.) Величины A_i и B_j полагаются равными единице; поэтому каждый работник должен быть назначен максимум на одну работу, каждая работа должна быть

выполнена только одним работником. Если какие-то работники не могут делать некоторых работ, то соответствующие дуги опускаются. Такое ограничение может привести к тому, что не все работы будут выполняться. (В этой задаче пропускные способности дуг можно отбросить, приписывая каждой дуге большие постоянные величины, и после этого производить минимизацию.)

Для двудольных графов рассматривавшаяся в главе 6 задача о максимальном паросочетании также может быть сведена к задаче о нахождении максимального потока в сети типа изображенной на рис. 7.12. В этом

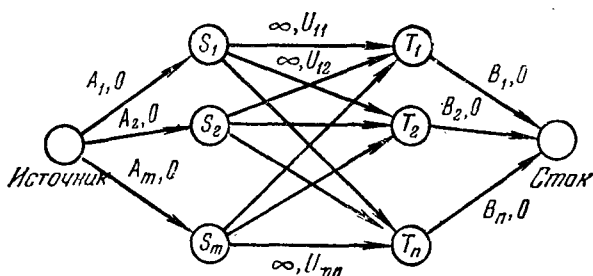


Рис. 7.12.

случае все дуги имеют единичную пропускную способность, стоимости не учитываются и решается задача максимизации потока от источника к стоку. Заметим, что задача увеличения потока с помощью нахождения пути в графе приращений на самом деле совпадает с задачей нахождения чередующейся цепи, соединяющей две непокрытые вершины, которая была описана в разделе 6.14.

Упражнение 7.15. Пусть на рис. 7.12 $m=n=8$ и каждый S_i соединяется дугой с каждым T_j , все $A_i=1$, а $B_j=2$ и $U_{ij}=i+j$. Найти максимальный допустимый поток от источника к стоку, имеющий минимальную стоимость.

7.11. Задачи о многопродуктовых потоках

До сих пор мы предполагали, что в рассматривавшихся сетях распространялся некоторый однородный поток или продукт одного вида. Если сеть имела несколько источников и несколько стоков, то мы предпола-

гали, что решение может иметь вид потока по цепи, соединяющей любой источник с любым стоком.

Пусть теперь мы имеем K продуктов, и среди вершин сети имеется $2K$ различных вершин y_i, z_i ($i=1, 2, \dots, k$) таких, что в сети одновременно существует k потоков, каждый из которых является потоком из y_i в z_i (для некоторого i) и имеет заданную величину Q_i .

Чтобы различать продукты, обозначим через f_{ij}^k поток k -го продукта из вершин v_i и вершину v_j , положив при этом, что $f_{ji}^k = -f_{ij}^k$. Пусть C_{ij} обозначает пропускную способность (в любом направлении) дуги, соединяющей вершины v_i и v_j . Возникает задача: приписать каждой дуге (i, j) целое число f_{ij}^k для каждого продукта k таким образом, чтобы для любого фиксированного k множество потоков по дугам $F^k = \{f_{ij}^k\}$ являлось потоком величины Q_k из y_i в z_i и чтобы для каждой дуги (i, j) выполнялось неравенство

$$\sum |f_{ij}^k| \leq C_{ij}.$$

(Может оказаться, что для получения решения различные продукты должны течь в противоположных направлениях по одной и той же дуге, поэтому в неравенстве стоит модуль.)

Для двухпродуктового случая, т. е. когда $k=2$, Ху [9] получил теоретический результат, аналогичный теореме о минимальном разрезе — максимальном потоке, и дал вычислительную процедуру для решения поставленной задачи. Для иллюстрации этой процедуры рассмотрим сеть, изображенную на рис. 7.13. Предположим, что каждая дуга имеет (симметричную) пропускную способность, равную 2, и что $Q_1 = Q_2 = 2$.

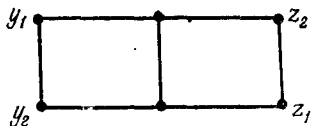


Рис. 7.13.

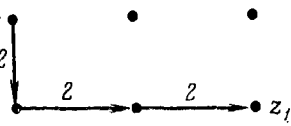


Рис. 7.14.

Прежде всего пренебрежем продуктом 2 и будем искать любой допустимый поток величины $Q_1=2$ товара 1 из y_1 в z_1 , используя описанный ранее однопродукто-

вый метод. В результате мы можем получить, например, поток, показанный на рис. 7.14.

Если такого потока не существует, то, очевидно, задача не имеет решения. Если же, как в нашем случае, хотя бы один такой поток существует, то на следующем шаге мы уменьшаем пропускные способности дуг на величины $|f_{ij}^1|$ и повторяем весь процесс уже только для второго продукта. Уменьшенные пропускные способности для данного примера показаны на рис. 7.15. Очевидно, что

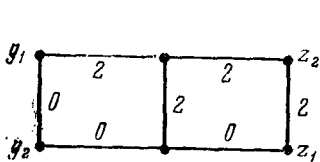


Рис. 7.15.

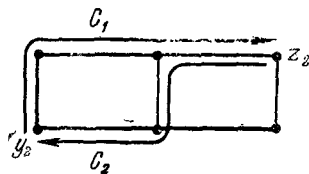


Рис. 7.16.

здесь не существует допустимого потока продукта 2, так как все дуги, инцидентные источнику y_2 , имеют нулевую остаточную пропускную способность. Отсюда мы делаем вывод, что перед тем, как пытаться пропустить поток продукта 2, нужно изменить маршрут движения потока для продукта 1.

Ху предложил следующую процедуру для изменения маршрутов. Найдем прежде всего (если возможно) некоторую цепь C_1 , ориентированную от y_2 к z_2 и обладающую тем свойством, что, по крайней мере, одна единица продукта 1 может быть добавлена к каждой дуге в направлении, определяемом ориентацией цепи. Затем находим (если возможно) некоторую цепь C_2 , ориентированную от z_2 к y_2 и имеющую то же самое свойство. (Цепи C_1 и C_2 могут содержать некоторые одинаковые дуги.) Цепи, удовлетворяющие названным условиям, показаны на рис. 7.16. Увеличим теперь поток продукта 1 в обеих цепях на единицу (на практике в некоторых случаях можно использовать и большие приращения потока). В результате получим, как показано на рис. 7.17, измененный поток продукта 1. Наконец увеличим поток продукта 2 вдоль цепи C_1 и обращенной цепи C_2 на единицу и получим потоки, изображенные пунктиром на рис. 7.18.

В данном примере мы получили решение задачи, так как нам удалось обеспечить два одновременных потока разных продуктов величины 2. Если бы поток продукта 2 был меньше чем Q_2 , то нужно было бы искать другую

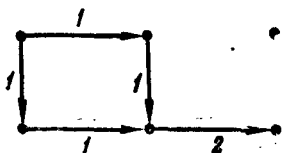


Рис. 7.17.

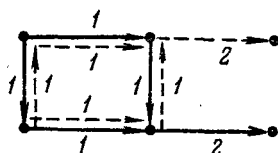


Рис. 7.18.

пару цепей C_1 и C_2 , соответствующее изменение маршрута продукта 1 и увеличение потока продукта 2. Можно показать, что если задача имеет решение, то продолжение процесса выбора пар цепей в конечном счете приводит к увеличению потока продукта 2 до величины Q_2 (при сохранении величины потока продукта 1 на уровне Q_1).

Пусть A_1 и A_2 обозначают соответственно пропускные способности минимальных разрезов, отделяющих y_1 от z_1 и y_2 от z_2 , а A_{12} — пропускная способность минимального разделяющего множества, которое пересекает все цепи, соединяющие y_1 с z_1 и y_2 с z_2 . Тогда двухпродуктовый аналог теоремы о минимальном разрезе и максимальном потоке формулируется следующим образом.

Теорема 7.9. Потоки F_1 и F_2 (из y_1 в z_1 и из y_2 в z_2 соответственно), имеющие величины Q_1 и Q_2 , совместно допустимы тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

$$Q_1 \leq A_1, \quad Q_2 \leq A_2, \quad Q_1 + Q_2 \leq A_{12}.$$

Необходимость условий очевидна. Доказательство достаточности можно найти в работе [9].

7.12. Стохастические потоки в сетях

В данном разделе мы кратко изложили идеи, которые относятся к теории потоков в сетях, но происхождение которых восходит к теории массового обслуживания.

Рассмотрим сеть, пропускные способности дуг которой задаются распределениями вероятностей, являющимися

функциями времени (т. е. описываются стохастическими процессами). Пусть мы хотим пропустить поток от источника к стоку в такой сети. Задача состоит в определении общего среднего потока в любой момент времени в этой сети. В общем случае, величина потока, поступающего из источника, также описывается стохастическим процессом. Таким образом, в каждый момент времени поток, текущий из источника к начальной вершине дуги, может существовать, а может и не существовать. Если величина поступающего потока превышает пропускную способность дуги, через которую он должен пройти, он задерживается в начальной вершине этой дуги.

Сеть с ожиданием состоит из множества взаимосвязанных специализированных каналов обслуживания, соединенных последовательно и параллельно. Перед каждым каналом обслуживания (или множеством каналов обслуживания, если они соединены параллельно) имеется линия ожидания (длина которой может равняться нулю) готовых требований, поступивших для обслуживания в этих каналах. Выход одного канала обслуживания может являться входом другого. Если каждому появлению требования в очереди поставить в соответствие одну вершину, а выбытию из очереди — другую и соединить эти вершины дугой, соответствующей факту обслуживания, то получим некоторый граф. Этот граф будет обыкновенным, если каждая очередь состоит из единственного канала и единственной линии. Если, например, существуют несколько параллельных каналов обслуживания, имеющих одну и ту же линию ожидания и один и тот же выход, то такая часть сети изображается графом типа рис. 7.19. Если же, например, каждый



Рис. 7.19.

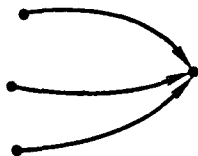


Рис. 7.20.

из параллельных каналов имеет собственную линию ожидания, но все они имеют один выход, то имеем граф вида рис. 7.20. Случай, когда часть параллельных ка-

налов может иметь выход на другие последовательные каналы или стоки, представлен рис. 7.21. В качестве источника берется начальная совокупность заявок на обслуживание, а в качестве стока та же совокупность (после удовлетворения спроса).

В теории массового обслуживания поток состоит из дискретных объектов, например покупателей. В обычных же сетевых задачах потоки рассматриваются как непрерывные величины. Однако часто интерес представляют целочисленные потоки, которые можно интерпретировать как дискретный поток. Отметим, что в задачах со стохастическими пропускными способностями дуг могут возникнуть две ситуации. Поток может «потеряться»

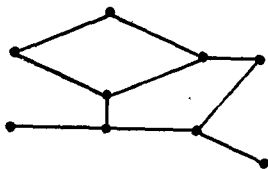


Рис. 7.21.

в начальной вершине, если дуга уже полностью насыщена текущим по ней потоком или он может задержаться, ожидая входа. Интересующая нас теорема для дискретного потока применима к сетям с ожиданием, в которых потоки обрабатываются в течение длительного времени и исследуется установившееся состояние, т. е. асимптотическое поведение потока при $t \rightarrow \infty$.

Существует довольно универсальный тип потока, в котором поступление требований происходит случайным образом и подчиняется пуассоновскому распределению

$$\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Важным свойством пуассоновских процессов является тот факт, что вероятность поступления более чем одного требования на малом интервале времени является пренебрежимо малой по сравнению с вероятностью поступления (или непоступления) одного требования.

Время между поступлениями требований в пуассоновском процессе подчиняется экспоненциальному распределению вида $\lambda e^{-\lambda t}$. Таким образом, задачи, в которых поступления требований подчиняются пуассоновскому распределению, а обслуживание — другому такому же распределению, можно изучать, считая, что интервалы между поступлениями требований и интервалы обслуживания распределены экспоненциально.

Если дуга имеет экспоненциальную пропускную способность (экспоненциальное время обслуживания) и интервалы поступлений экспоненциальны, то поток на выходе также имеет экспоненциальное распределение. При этом отношение скорости поступления требований к скорости их обслуживания не должно превышать единицы, в противном случае потоки будут задерживаться на бесконечно долгое время в начальной вершине. Пользуясь этой теоремой, можно рассчитать поток в сети, так как выходное распределение для одной конечной вершины автоматически является входным для вершины на следующем шаге.

Сеть с ожиданием можно представить иначе, если одну вершину сопоставить с линией ожидания, а другую — с линией обслуживания и считать, что дуга, инцидентная двум вершинам, указывает на переход из ожидания в обслуживание. Можно также ввести третий тип вершин, соответствующий выходному потоку потребителей. Пусть дуги, инцидентные этим вершинам и вершинам каналов обслуживания, представляют переходы из каналов обслуживания на выход или к следующей линии ожидания. Таким образом, мы можем разбить вершины на три класса: вершины каналов обслуживания, вершины линий ожидания и вершины выходов.

Упражнения

7.16. Интерпретируйте оба названных представления для параллельной и последовательной сети с ожиданием и нарисуйте диаграммы.

7.17. Перечислите десять возможных вариантов потоков в сетях, например стохастические потоки, потоки через губчатые трубки (т. е. потоки с потерями), потоки по деформируемым дугам.

Более исчерпывающее описание теории потоков в сетях с различных точек зрения дается в работах [5], [10], [12] и [14] литературы к главе I. Мы также отсылаем читателя к списку литературы в конце этой главы и к более обширной библиографии, содержащейся в перечисленных выше книгах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C., Les Problems de Flot et de Tension. Cahiers Centre Etudes Rech. Oper., 3, :69—93 (1961).
2. Dantzig G. B., Fulkerson D. R., Computation of Maximal Flows in Networks. The RAND Corp., p. 677, 1955.

3. Ford L. R., Jr., Network Flow Theory. The RAND Corp., p. 923, 1956.
4. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., Maximal Flow through a Network. *Can. J. Math.*, 8: 399—404 (1956).
5. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem. The RAND corp., RM-1604, 1955.
6. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., Constructing Maximal Dynamic Flows from Static Flows. *Operations Res.*, 6: 419—433 (1959).
7. Fulkerson D. R., An Out-of-kilter Method for Minimal-cost Flow Problems. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 9: 18—27 (1961).
8. Gomery R. E., Hu T. C., Multi-terminal Network Flows. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 9: 551—570 (1961).
9. Hu T. C., Multi-commodity Network Flows. *Operations Res.*, 11: 344—360 (1963).
10. Jewell W. S., Optimal Flow through Networks. MIT Interim Tech. Rept 8, 1958.
11. Saaty T. L., Elements of Queueing Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1961. [Русск. перев.: Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и её приложения. «Советское радио», 1965.]

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1.2. Пусть соответствующая последовательность вершин будет v_1, v_2, \dots, v_n , где $v_1 = v$ и $v_n = w$. Если все v_i различны, то маршрут обязательно является простой цепью. Если $v_i = v_j$ для некоторого $i < j$, то вычеркните ребра, соответствующие подпоследовательности вершин v_i, v_{i+1}, \dots, v_j .

Повторите такие вычеркивания до тех пор, пока все вершины в последовательности, определяемой оставшимся маршрутом, окажутся различными.

1.3. Пусть G состоит из трех вершин v_1, v_2 и v_3 , двух ребер e_1 и e_2 , где $e_1 \sim (v_1 \& v_3)$ и $e_2 \sim (v_1 \& v_2)$. Маршрут e_1, e_2 , соединяющий v_1 и v_2 , является требуемым примером.

1.4. Три или более ребер, имеющих одну общую конечную точку, а другие конечные точки различны, удовлетворяют сформулированному определению, но не обладают свойством «взаимонересечения», которое является важным в понятии маршрута.

1.5. Можно получить незамкнутый маршрут от v_1 к v_3 , просто соединяя цепь от v_2 к v_3 с цепью от v_1 к v_2 . Если эта цепь не является простой, то воспользуйтесь упражнением 1.2.

1.6. Пример, приведенный для упражнения 1.3, будет ответом к данному упражнению.

1.7. Достаточно показать, что ребра простой неупорядоченной цепи C , соединяющей v и w , могут быть пройдены только двумя путями (одним от v к w и другим от w к v). Заметим прежде всего, что точно одно ребро C инцидентно v или w и точно два ребра C инцидентны любой другой вершине, пересекаемой C . В противном случае последовательность вершин, определенных при прохождении C , будет включать повторенные вершины. Следовательно, если мы, начиная с v , хотим пройти каждое ребро только один раз, то мы имеем на каждом шаге единственный выбор для перехода на следующее ребро.

1.8. Если петля добавляется к одной или более вершинам простой цепи, то полученная в результате непростая цепь может быть пройдена только двумя путями.

1.9. Заметим прежде всего, что каждая вершина, которая принадлежит неупорядоченному циклу, имеет четную степень относительно этого цикла. Удалите сначала петли. Начиная с некоторой вершины v , выберите ребро, инцидентное v , и пройдите его. Из вершины, достигнутой таким образом, выберите и пройдите новое ребро (кото-

рое обязательно должно существовать). Повторяйте этот процесс до тех пор, пока не встретится предварительно выбранная вершина. Удалите простой цикл, полученный таким образом. Вершины, инцидентные оставшимся ребрам (если они существуют), имеют четную степень, и процесс может быть повторен.

1.10. Измените конструкцию, приведенную для упражнения 1.9, или, соединив v и w посредством нового ребра, используйте упражнение 1.9 и затем это ребро удалите.

1.11. Рассмотрите замкнутую и незамкнутую последовательности e, e и e, e, e , образованные повторением одного ребра.

1.12. Сгруппируйте попарно вершины нечетной степени. Соедините каждую пару ребром. Добавьте необходимое число петель в вершинах до получения нужной степени.

1.13. Если рассматриваемое ребро не содержится ни в одном цикле, то после удаления этого ребра его граничные точки также не связаны ни с одним циклом. Если оно входит в некоторый цикл, то его удаление оставляет цепь C , соединяющую крайние точки этого ребра. Таким образом, любая цепь, включающая в себя рассматриваемое ребро, может быть заменена на цепь C , куда это ребро не входит. Таким образом, любая пара вершин, которая была соединена, останется соединенной и после удаления ребра.

1.14. Таким свойством обладает простая цепь (и ее вершины) или Y-образный граф.

1.15. Удалите все ребра. Восстановите ребра, вводя одновременно не более одного нового ребра так, чтобы каждое новое ребро было смежно, по крайней мере, с одним из уже введенных. Каждое новое ребро будет покрывать не более одной новой вершины (за исключением первого, которое покрывает 2 вершины, если оно не представляет собой петлю).

1.16. Если некоторая вершина имеет степень меньше двух, то она не принадлежит ни одному простому циклу. Если же степень некоторой вершины больше 2, то ни один из простых циклов не может содержать всех ребер, инцидентных этой вершине. С другой стороны, если все вершины имеют степень 2, то мы можем начать с любой вершины, пройти по одному из двух инцидентных ей ребер, затем пройти по единственному ребру, смежному с первым и т. д. В конечном счете все ребра окажутся пройденными точно по одному разу, и мы вернемся в начальную вершину. Рассуждения относительно цепей отличаются тем, что в этом случае ровно две вершины имеют степень 1.

1.17. Начните с любой цепи. Если включены не все ребра, то, пользуясь связностью, покажите, что можно ввести новое ребро с помощью соединения подходящей цепи с концом рассматриваемой. Продолжая такой процесс, можно в конце концов включить все ребра.

1.18. Требуемый разрез состоит из 2 ребер, идущих влево от W , и из 3 ребер, идущих вправо.

1.19. Это является общим свойством непростых разрезов. Рассмотрите разрез, определенный некоторым множеством W вершин и его дополнением W' . Если после удаления этого разреза вершины W' определяют две (или более) связные компоненты с множествами вершин W_1', \dots, W_k' , то эти множества вершин и их соответствующие

дополнения будут определять непересекающиеся простые разрезы, объединение которых есть исходный рассматриваемый разрез.

1.20. Нет.

1.21. Единственное ребро в связном графе является разрезом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один из циклов.

1.22. Положите в основу доказательства ответ на упражнение 1 19.

1.23. $q - 1$.

1.24. Полный граф, имеющий 2 вершины, является двудольным. В общем случае, полный граф, имеющий q вершин, является q -дольным, но не p -дольным для любого меньшего p .

1.25. Рассмотрите 3-однородный граф, соответствующий вершинам и ребрам куба. Можно изменить одну граничную точку двух ребер, не трогая других, так, что результирующий граф все еще будет 3-однородным и будет содержать треугольники (т. е. циклы из трех ребер).

1.26. Так как двудольный граф не обязательно связан, а существование разрезов, по определению, требует связности, ответ — нет. Однако справедливо, что связный граф является двудольным тогда и только тогда, когда совокупность его ребер образует разрез.

Глава 2

2.1. Если рассматриваемые дуги могут быть пройдены двумя различными способами, то одна из вершин обязательно будет иметь 2 исходящие дуги. Но тогда, чтобы проход существовал по обеим дугам, такая вершина должна дважды повторяться в соответствующей последовательности вершин. Следовательно, рассматриваемый путь не является простым. Если к некоторым вершинам простого пути добавлены петли, то результирующий непростой путь также может быть пройден только одним способом.

2.2—2.4. Аналогично соответствующим доказательствам для неориентированного случая.

2.5. Нет. (Соедините два несвязных цикла с помощью пути, который имеет, по крайней мере, две дуги и внутренние вершины которого не принадлежат ни одному из циклов.)

2.6. Рассмотрите граф, имеющий вершины v , w , x и y и дуги (v, x) , (x, y) , (y, w) , (w, x) и (y, v) .

2.7. Начните с любой вершины v_1 . Так как v_1 имеет, по крайней мере, одну исходящую дугу, пройдите по любой из них. В результате вы окажетесь в вершине v_2 . Точно так же перейдите из v_2 в v_3 . Продолжите процесс перехода до появления первой повторяющейся вершины. При этом дуги, пройденные между повторением одной и той же вершины, образуют контур.

2.8. Пометьте каждую вершину символом A или B так, чтобы любая пара смежных вершин имела разные пометки. Искомый путь должен попеременно проходить через вершины A и B , но количество вершин A и B различно.

2.9. Аналогично упражнению 2.8. Так как ладья достигает черные и белые клетки попеременно, она не может начать и кончить на белой клетке после 63 ходов.

2.10. Существование такой последовательности подразумевает сильную связность. Для доказательства обратного рассмотрите сильно связный граф и замкнутую цепь P , начинающуюся и оканчиваю-

щуюся в вершине v . Если некоторая дуга (x, y) не входит в P , то добавьте к P путь из v в x , затем дугу (x, y) и затем путь из y в v . Результирующая замкнутая последовательность должна включать все дуги. Если это не так, то процесс повторите.

2.11. Если для некоторого W не существует дуги из W в $V - W$, то не может существовать пути из любой вершины W в любую вершину $V - W$.

Таким образом, D не является сильно связным. Если D не сильно связан, то выберите v и w так, чтобы между ними не существовало пути. Выберите в качестве W множество вершин, состоящее из v и всех вершин, достижимых из v с помощью пути. При этом нет дуг, идущих из W в $V - W$.

2.12. Ясно, что две вершины одного контура соединены путем. Для двух вершин в различных контурах постройте путь из одной в другую, беря соответствующие части последовательных контуров. Воспользуйтесь тем фактом, что путь содержит в качестве подпоследовательности простой путь.

2.13. Заметим, что существует, по крайней мере, один контур длины 3, содержащий вершину v , и любая вершина соединена с v контуром длины 2. Воспользуйтесь этим при доказательстве.

2.14. $(n+1)/2^n$.

2.15. Покажите, что существует не более одной вершины, не являющейся конечной вершиной ни одной из дуг. Затем покажите, что между такой вершиной и любой другой имеется путь. Наконец покажите, что существует подмножество дуг в таких путях (из рассматриваемой вершины в любую заданную), которое представляет собой корневое дерево.

2.16. Покажите, что можно так выбрать направление, что будут существовать две вершины, ни одна из которых не является конечной вершиной дуги. Затем покажите, что при таких условиях не может быть корневого дерева, покрывающего граф.

2.17. Рассмотрим произвольный контур C и вершину v , принадлежащую этому контуру. Повторное применение транзитивности показывает, что в вершине v имеется петля.

2.18. Все такие графы имеют изолированные вершины. Более того, каждая компонента, не являющаяся изолированной вершиной, имеет петлю в каждой вершине и по меньшей мере одну дугу из каждой вершины в любую другую вершину этой же компоненты.

2.19. В части (а), например, выделяются следующие дуги: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$ и $(9, 3)$.

2.20. Соедините граничные точки каждого пути, состоящего из двух дуг новой дуги. Множество таких новых дуг есть совокупность дуг, каждая из которых является «прародителем» («дедушкой»). В каждый путь, состоящий из «родительской» дуги, за которой следует «прародительская» дуга, добавьте новую прямую дугу, соединяющую его граничные точки. Эти дуги и представляют нужное соотношение.

Глава 3

3.1. На рис. 1.2, 1.3 и 1.6 полное множество ребер есть цепь или цикл.

3.2. Пусть v и w есть некоторые (не все) вершины, имеющие нечетную степень. Пусть некоторое минимальное покрытие включает

в себя цепь, соединяющую v и w . Покажите, что из связности следует возможность формирования измененного минимального покрытия, которое содержит в себе цепь, соединяющую v с любой другой вершиной, отличной от w .

3.3. Второй и третий случаи иллюстрируются циклом и цепью соответственно. В первом случае рассмотрите граф с вершинами v , w , x и y , ребрами (v, w) и (x, y) и двумя параллельными ребрами (w, x) . Удаление одного из параллельных ребер уменьшает величину разреза с 2 до 1.

3.4. При заданном разделении вершин на W и W' в процессе обхода эйлера цикла каждому переходу из W в W' соответствует переход из W' в W и каждое ребро, входящее в разрез, будет пройдено точно один раз.

3.5. Одна из возможных циклических последовательностей имеет вид *aaabbbbbaabaababbab*.

3.6. Одна из возможных циклических последовательностей имеет вид *aadabbdbccdcacb*.

3.7. Граф состоит из единственной вершины, соответствующей $(q-1)$ -буквенному слову, все буквы которого равны a , и петли в этой вершине.

3.8. Из любого заданного $(q-1)$ -буквенного слова можно получить p различных q -буквенных слов, добавляя к нему в качестве приставки любые p букв алфавита. Так как каждое из последних слов повторяется только однажды, исходное слово повторяется p раз.

3.9. На рис. 2.2, 2.4 (слева), 2.4 (справа) и 2.7 число путей и/или циклов в минимальном покрытии равно 1, 2, 2 и 13 соответственно. Найдите эти покрытия визуально.

3.10. Просто обойдите эйлеров цикл (или цепь) и задайте каждому ребру направление в соответствии с направлением обхода.

3.11. Да.

3.12. Доказательство такое же, как доказательство соответствующего результата для неориентированного случая (теорема 3.1).

3.14. Если здесь существует гамильтонов цикл, то он обязательно содержит 10 ребер, инцидентных пяти вершинам степени 2. Но эти ребра образуют цикл и поэтому не могут быть подмножеством большего простого цикла.

3.15. См. ответ на упражнение 3.16.

3.16. Так как ребра цепи или цикла в двудольном графе соединяют вершины, принадлежащие двум множествам, из существования гамильтонова цикла следует, что число вершин в этих множествах одинаково. Из существования гамильтоновой цепи следует, что число вершин в названных множествах либо равно, либо отличается на 1.

3.18. Обойдите вершины в порядке *AFLKJEDCIBGA*.

3.19. Полные графы обязательно обладают этим свойством. То же относится к графам, которые являются сами простыми циклами и цепями, имеющими четное число вершин.

3.21. Для графа, соответствующего простому циклу (отличающемуся от петли), содержащему нечетное число вершин, каждое доминирующее множество обязательно содержит пару смежных вершин.

3.22. Радиус равен h , диаметр $-2h$ и одна вершина является центром.

3.23. Для цепи, содержащей $(2n+1)$ ребро, искомые величины равны $(n+1)$, $(2n+1)$ и 2 соответственно. Для цикла, имеющего $2n$ ребер, они равны n , n и $2n$.

3.24. Обыкновенный граф является полным тогда и только тогда, когда его диаметр равен 1.

3.25. Примеры см. в упражнениях 3.22 и 3.23.

3.26. Пусть число ребер в самой длинной цепи есть n . Граничные точки такой цепи являются экстремальными вершинами графа (т. е. вершинами степени 1) и $T=n$. Покажите, что расстояние от вершины, смежной с одной из экстремальных вершин, до любой другой вершины графа не больше чем $(n-1)$. Следовательно, $R < T$.

3.29. Расстояния находятся в диапазоне от 1 до 5, две вершины имеют расстояние до v_1 , равное 4. Одна вершина из v_1 недостижима.

3.30. Расстояние от v_1 меняется от -3 до 4.

3.31. Расстояния для четвертого уровня (сверху вниз) равны 9, 8 и 11. Для пятого уровня — 12 (сверху) и 10. Кратчайшее расстояние до v равно 10.

Глава 4

4.1. Поместите южный полюс сферы внутрь квадрата и отобразите граф на сферу. Затем поверните сферу так, чтобы изображение квадрата содержало северный полюс, и сделайте обратное отображение на плоскость.

4.2. Существование такого подграфа означает, что можно взять один из двух подграфов Понтрягина — Куратовского, разделить некоторые из его ребер, введя вершины степени 2, и получить граф, изоморфный рассматриваемому подграфу. Можно также идти от исходного подграфа и удалить вершины степени 2. Для этого следует выделить цепи, граничные вершины которых имеют степени больше 2, а все степенни внутренних вершин равны 2, и считать эти цепи одним ребром.

4.3. Если граф, показанный пунктиром на рис. 4.7, рассматривается в качестве исходного, то граф, изображенный сплошными линиями, можно считать двойственным, так как его можно построить методом, описанным в тексте.

4.4. Двойственный граф был бы полным обыкновенным графом из пяти вершин, который не является плоским.

4.5. (а) Заметьте, что любое ребро полного графа смежно с $(n-2)$ другими ребрами с каждого конца. (б). Пусть две смежные вершины соответствуют ребрам (v, w) и (x, y) . Тогда только четыре вершины, соответствующие ребрам (v, x) , (v, y) , (w, x) , (w, y) , оказываются смежными с обеими выделенными вершинами. (с) Пусть две смежные вершины соответствуют ребрам (v, w) и (w, x) . Тогда каждая из них смежна с $(n-2)$ другими вершинами, которые соответствуют ребрам типа (w, y) , где $y \neq v$ или x .

4.6. В соответствии с частью (а) упражнения 4.5 каждая из этих двух вершин смежна с $2(n-2)$ вершинами. В соответствии с частью (б) в обоих множествах $2(n-2)$ вершин появляются четыре интересные нас вершины. Таким образом, существует $4(n-2) - 4$ различных вершин, смежных одной или обеим исходным вершинам.

4.7. Три семьи: Дик, Джэйн и Эмили; Том, Мэри и Майкл; Гарри, Сьюзен и Алан.

4.9. Заметьте, что каждая вершина графа, получающегося при изображении окружностей, имеет четную степень, и воспользуйтесь теоремой 4.23.

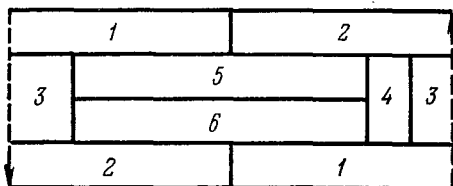
4.10. Результат, очевидно, справедлив для шести или меньшего числа граней. Предположите, что он справедлив для n . Рассмотрите карту с $(n+1)$ гранью и стяните в точку некоторую грань, ограниченную пятью или меньшим числом сторон. Раскрасьте полученную карту шестью цветами. После восстановления стянутой грани оказывается, что имеется, по крайней мере, один цвет, не использованный для раскраски соседних с ней граней.

4.11. Покажите, что число вершин и ребер удовлетворяет соотношению $2m \geq 3n$, и подставьте в формулу Эйлера.

4.12. Воспользуйтесь формулой Эйлера и покажите, что если каждая грань ограничена по меньшей мере пятью сторонами, то существует минимум 30 ребер. Пользуясь упражнением 4.11, покажите, что если число областей меньше 12, то число ребер меньше 30.

4.13. Воспользуйтесь индукцией. Предположите, что теорема справедлива для n граней. В любой карте, имеющей $(n+1)$ грань, существует одна грань, у которой не более четырех соседних. Если эта грань имеет три или меньше соседних граней, то стяните ее и затем восстановите, как в упражнении 4.10. Если имеются четыре соседние грани, то среди них существуют две грани, не являющиеся соседями друг друга. Объедините эти две грани с исходной в одну грань. Раскрасьте полученную карту и покажите возможность раскраски исходной карты после восстановления границ.

4.14. Каждой треугольной грани можно приписать одно из двух чисел (или направлений) так, чтобы для любой вершины число граней одного типа, пересекающихся в этой вершине, было сравнимо по mod 3 с числом граней другого типа.



4.17. Ниже показана карта, имеющая шесть граней — на ленте Мёбиуса (левый и правый край склеиваются так, чтобы стрелки совпали), и каждая из этих граней смежна с пятью остальными.

Глава 5

5.1. Очевидно, что возможность перестановки строк и/или столбцов в одной матрице инцидентий, при которой получаемая матрица идентична второй матрице инцидентий, эквивалентна установлению такого взаимно однозначного соответствия между вершинами (строками) и между ребрами (столбцами), чтобы отношения инцидентий сохранились.

5.2. Столбец, соответствующий дуге (v_3, v_5) , например, имеет 1 в строке, соответствующей v_3 , —1 — в строке, соответствующей v_5 ,

и нуль в других местах. Заметьте, что если вершины и дуги, относящиеся к одной компоненте, перечислены раньше (т. е. сверху слева) остальных, то матрица является блочно-диагональной.

5.3. Взяв, например, v_3 — строку матрицы A и C_2 — строку матрицы C (т. е. C_2 — столбец C'), которые равны $(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$, $(0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ соответственно, получим, что сумма почленных произведений равна 2, т. е. сравнима с 0 mod 2. Такой же результат справедлив для любой строки A и C .

5.4. Если множество ребер, инцидентных некоторой вершине v связного графа, не является простым разрезом, то удаление этих ребер делит граф по меньшей мере на 3 компоненты. Но тогда v есть точка сочленения.

5.5. Так как матрица циклов и транспонированная матрица разрезов ортогональны, то $k_1 + k_2 - q \leq 0$ (где k_1 и k_2 — ранги матриц). Более того, $k_1 = m - n + 1$ и $q = m$.

5.6. Предполагая, что строки матрицы A соответствуют (сверху вниз) вершинам $v_2 \pm v_4$ (см. рис. 5.3), получим

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12}^{-1} A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.9. В полном обыкновенном графе из пяти вершин, занумерованных от 1 до 5, упорядочите ребра в последовательность

23 24 25 34 35 45 12 13 14 15

и считайте, что рассматриваемое дерево определяется последними четырьмя ребрами. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где строки (сверху вниз) соответствуют вершинам 2, 3, 4, 5 и 1. Кроме того,

$$\bar{C}_{12} = \bar{K}'_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.11. Если $\vec{V}_i^k > 0$ для некоторого k , то $(\vec{V}^t)^n > 0$ при $tn \geq k$.

5.12. Так как рассматриваемый граф является примитивным, существует h такое, что для всех степеней матрицы инциденций, больших или равных h , каждый элемент в строке, соответствующей вершине, v_i оказывается положительным.

5.13. Так как граф является сильно связным, для некоторого k существует дуга из v_k в v_i . Таким образом, можно получить путь длины h_i+1 из v_i в v_j , если взять путь длины h_i из v_i в v_k и добавить к нему дугу из v_k в v_j . Аналогичный прием можно использовать при h_i+2, h_i+3 и т. д.

5.14. Это следует из упражнений 5.12 и 5.13 и определения индекса примитивности.

5.15. Каждый разомкнутый путь содержит простой путь, соединяющий те же вершины.

Максимальная длина такого пути $n-1$. Если длина оказывается меньше $n-1$, добавьте к такому пути петлю, которая при достаточном повторении давала бы длину $(n-1)$.

5.16. Рассмотрите левую компоненту на рис. 5.3. Пусть дуги индексированы, как на рис. 5.5, только e_7 рассматривается как e_1 . Тогда, обозначив граничные точки i -й дуги через ρ_{2i-1} и ρ_{2i} , получим

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Глава 6

6.1. Если $D(A)$ имеет контуры, то стяните один из них, заменяя все его вершины одной псевдовершиной, и уберите все получающиеся при этом петли. Стяните таким способом все контуры. (Получен-

ный в результате граф будет представлять собой одну вершину, если исходный граф был сильно связным.) Убедитесь в том, что каждая конечная вершина (т. е. вершина, не являющаяся начальной ни для одной из дуг) полученного в итоге такого преобразования графа соответствует множеству вершин исходного графа, которое определяет замкнутый сильно связный подграф. Более того, так как преобразованный граф не содержит контуров, каждая его вершина, не являющаяся конечной, связана с конечной вершиной путем.

6.2. В случае, если $x(I - B) = 10$ имеет допустимое решение, сформируйте

$$B^* = \begin{pmatrix} B & \rho \\ w & 1 \end{pmatrix},$$

где ρ — нулевой вектор-столбец. Пусть x' — переменная соответствующая новой операции.

Тогда

$$(x, x') (I - B^*) = (x(I - B) - x'w, 0).$$

Если x — допустимое решение разомкнутой модели, то $(x, 1)$ есть решение расширенной замкнутой модели.

6.3. Пусть матрице A соответствуют вершины v_1, \dots, v_n , а w — вершина, соотношенная последней строке и столбцу. Так как x и y считаются положительными, существуют дуга (v_i, w) и дуга (w, v_i) для любого i .

Следовательно, существуют контуры длины 2. Если есть хотя бы одна дуга вида (v_i, v) , то существуют также контуры длины 3. Но тогда наибольший общий делитель длины контуров равен 1, откуда и следует примитивность. Чтобы убедиться в том, что индекс примитивности равен четырем для некоторых матриц A , предположим, что существует только одна дуга вида (v_i, v) . Тогда не существует пути длины 3 из v_j в v_i .

6.4. Покажите, что если некоторая операция (v_i, v_j) не успевает закончиться до начала следующей за ней операции (v_j, v_k) , то эти операции нельзя начинать в моменты $T(v_i)$ и $T(v_j)$ соответственно.

6.5. Заметьте, что $T(v_i) + X(v_i)$ есть длина некоторого пути от v_e до v_n . Таким образом, эта сумма не превышает $T(v_n)$. Если наблюдается равенство, то рассматриваемый путь обязательно является критическим.

6.7. Для нечетного случая имеем

$$\sum r_i^2 = \frac{n(n-1)^2}{2^2},$$

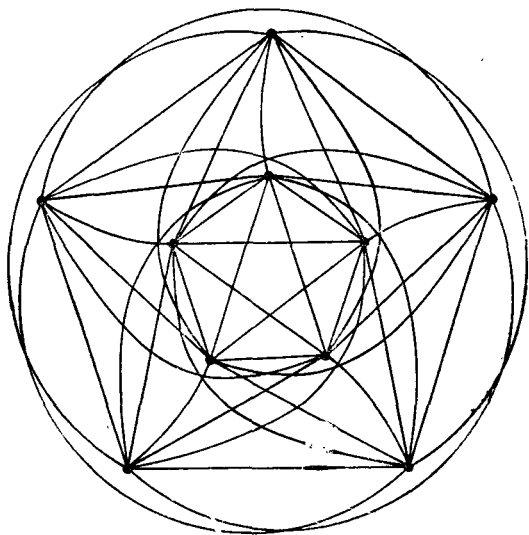
и следовательно, максимальное число контуров равно

$$\binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{8} n(n-1)^2.$$

6.8. Используйте тот же метод, что и на рис. 6.15.

6.9. Используйте тот же метод, что и на рис. 6.15.

6.11. Структура рассматриваемого графа имеет вид, показанный на рисунке. Заметьте, что здесь имеется 60 пересечений, что соответствует значению M'_{10} .



6.12. Предположите, что кубы сложены так, что их номера сверху вниз равны 1, 2, 3 и 4. Стороны x, y, x' и y' (сверху вниз) можно окрасить следующим образом: $GYBR, BGRY, BRYG$ и $YBRG$ соответственно.

6.13. Да, требуется меньше пересечений. Если устраняются различия между S и K с помощью замены K на S , то в решении подпоследовательность $MMCK, (MC), MMCC, (CC)$ может быть заменена на $MMCC, (CC)$, что устраняет один круговой обход.

6.14. Начиная с v , пронумеруйте вершины числами от 1 до 8, двигаясь по часовой стрелке. Искомый путь проходит через вершины в следующем порядке: 143821856. Вершины 1 и 8 повторяются.

6.15. Это матрица смежности графа, показанного на рис. 6.20.

6.16. Это следует из того факта, что n элементов (диагональных) имеют фиксированные значения, а остальные $(n^2 - n)$ могут принимать любые из двух возможных значений.

6.17. Используйте в качестве V ориентированную матрицу смежности, в которой единичные элементы занимают следующие положения: (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 2), (5, 7), (6, 5), (7, 5). Для получения ответов возведите V в нужную степень.

6.18. Если бы внутренняя вершина была покрыта более чем одним ребром из выбранного множества, то ее степень была бы больше 2. Если бы внешняя вершина была покрыта более чем одним ребром, то граф не мог бы быть деревом.

6.19. Заметьте, что если бы внутренняя вершина не была покрыта, то две внешние вершины тоже оказались бы непокрытыми, так как каждое ребро соединяет внутреннюю вершину с внешней.

6.20. Рассмотрите простую цепь, проходящую через вершины v_0, v_1, \dots, v_k , где v_0 — непокрытая внешняя вершина. Ребро, соединяющее v_0 с v_1 , не принадлежит M , так как v_0 не покрыта. Учтя, что v_1 имеет степень 2 и является покрытой, получаем, что ребро, соединяющее v_1 с v_2 , должно принадлежать M . Повторяя проведенные рассуждения, устанавливаем чередующуюся принадлежность ребер M .

6.21. В случае рис. 6.17 (включая пунктирную часть) можно найти паросочетания, которые оставляют только одну вершину непокрытой. Для рис. 6.15 существует совершенное паросочетание. В обоих случаях максимальное паросочетание не является единственным.

6.22. В общем случае на эти вопросы можно ответить, складывая а) строки или б) столбцы, вычисляя $V^2(c)$ и $V+V^2+V^3+V^4(d)$. Объясните почему.

6.25. Пусть t_i обозначает i -й член. Если $t_i - t_{i+1} > 1$, то вставьте $(t_i - t_{i+1} - 1)$ единиц после t_i , если $t_i \leq t_{i+1}$, то вставьте $t_i - 1$ единицу после t_i . (Если t_i — последний член, то действуйте так же, как в последнем случае.)

6.26. $t_0 = 4$.

6.27. Пусть v имеет петлю. Если граф содержит n вершин, то существуют пути из любой вершины v_i в v и из v в любую v_j , которые состоят не более чем из $(n-1)$ дуг. Таким образом, можно получить путь длины $(2n-2)$, взяв два таких пути и добавив к ним соответствующее число петель. (Сравните с обсуждением примитивных матриц, которое проводилось выше.)

6.28. Здесь имеется 4 автоморфизма. Верхние и нижние вершины можно либо переставить, либо оставить неизменными.

Независимо от этого левые и правые вершины также могут либо переставляться, либо остаться фиксированными.

6.29. Граф, соответствующий возведению вычетов в третью степень, имеет петлю в каждой вершине. Граф, соответствующий возведению вычетов в квадрат, имеет следующие дуги: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 1)$.

6.30.

$$\begin{array}{r|cccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline f(x) & 5 & 4 & 0 & 6 & 3 & * & 1 \end{array}$$

* неопределенно.

6.31. Дуги графа образуют простой контур, который последовательно проходит через 0, 5, 4, 3, 2 и 1.

6.32. Перегруппируйте строки и столбцы (по отношению к исходному разделению) в следующем порядке: 1, 3, 2, 4, взяв

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите $B = P^{-1}AP$ и заметьте, что ее подматрицы соответствуют заданным. Заметьте также, что B^2 является блочно-диагональной

матрицей. Каждый ее диагональный блок равен

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Найдите соответствующую матрицу P для другого разделения.

6.33. Требуется 41 сравнение. $L(15)$ и $N(15)$ равны 41 и 45 соответственно.

Глава 7

7.1. Пусть φ_1 — поток, заданный рис. 7.2, и φ_2 состоит из единичных потоков в каждой дуге той же сети. Тогда выходные потоки в вершинах v_1 и v_8 относительно потока $\varphi_1 + \varphi_2$ равны 8, 5, 3, —3, —13 и 0 соответственно. Относительно $\varphi_1 - \varphi_2$ получим выходные потоки 2, 7, —3, 3, —7 и —2 соответственно. Сравните полученные значения с выходными потоками в тех же вершинах, но отдельно относительно потоков φ_1 и φ_2 .

7.2. Потоки не являются согласованными. В двух дугах (v_3, v_2) и (v_1, v_4) оба потока не равны нулю и направлены противоположно.

7.3. Численный результат будет полностью зависеть от выбора потоков в упражнении 7.2 и от выбора ψ . Для каждой дуги проверьте, что $\psi(a) + \varphi_1(a)$ лежит между $\psi(a)$ и $\psi(a) + \varphi_1(a) + \varphi_2(a)$.

7.4. В унитарном графе существует, например, 3 дуги из v_1 в v_3 ; 10 дуг из v_5 в w_2 ; 2 дуги из v_2 в v_3 ; 0 дуг между v_5 и v_6 и т. д.

7.5. Ниже приводится одна декомпозиция, описанная с помощью последовательности вершин, через которые проходят ориентированные цепи и циклы. (Звездочкой помечены дуги, которые проходятся в направлении, обратном их естественному направлению.)

6 цепей $w_1 v_2 v_5 w_2$,

2 цепи $w_1 v_1 v_2 v_5 w_2$,

2 цепи $w_1 v_1 v_2^* v_3 v_5 w_2$,

1 цепь $w_1 v_1 v_3 v_6 w_2$,

1 цикл $v_1 v_3 v_6 v_4^* v_1$,

1 цикл $v_1 v_3 v_4^* v_1$.

7.6. Существует 8 разделений, представляющих интерес. Например, при $W = \{v_1, v_2, v_5\}$ выражение справа в теореме 7.3 имеет значение $(4+3+2) - (1+6)$.

7.9. Например, дуга (v_1, v_2) , нижняя граница пропускной способности которой равна 1, а верхняя — 3, заменяется на 3 дуги: (v_0, v_2) , (v, v_0) и (v_1, v_2) с пропускными способностями 1, 1 и 2 соответственно. Нижняя граница потока для всех трех дуг равна нулю (как у всех дуг вспомогательной сети).

7.11. Величина максимального потока через N' равна только 7, в то время как для насыщающего потока требуется значение 19 (сумма нижних границ потоков для всех дуг в исходной сети).

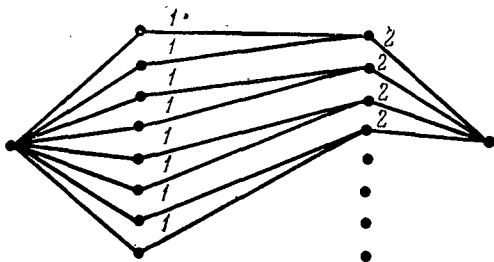
7.12. Покажите, что если такой контур существует, то поток, равный сумме φ и единичного потока в контуре, является допустимым и имеет ту же общую стоимость, что и φ . С другой стороны, покажи-

те, что если существует второй поток φ' минимальной стоимости, то каждый единичный поток по контуру в декомпозиции $\varphi' - \varphi$ определяет контур данного типа в графе приращений.

7.13. Заметьте, например, что в графе приращений самый внешний контур, ориентированный по часовой стрелке, имеет общую длину $4+1-2-3-1=-1$. Здесь имеется и другой контур, ориентированный по часовой стрелке, который включает в себя все вершины, за исключением источника, и имеет длину -2 .

7.14. Пропустите две единицы потока по цепи v, x, ω при единичной стоимости 5. Затем пропустите одну единицу по цепи v, x, r и при единичной стоимости 7. Наконец, пропустите 2 единицы по цепи v, y, r, ω при единичной стоимости 9. Общая стоимость равна 35.

7.15. Одно решение показано потоками, распространяющимися слева направо в следующей сети:



КРАТКИЙ ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

- Ациклический граф.** Ориентированный граф без контуров.
- Антисимметрический граф.** Ориентированный граф, в котором нет дуги из ω в ν , если присутствует дуга из ν в ω .
- Ветвь.** Ребро графа G , которое содержится в дереве T , являющемся подграфом G ; термин ветвь используется по отношению к определенному дереву T .
- Вершина.** См. *граф* и *ориентированный граф*.
- Граничные точки.** Вершины, которым инцидентны ребра или дуги.
- Геометрический граф.** Граф, вершины которого изображаются точками в двумерном или трехмерном пространстве и чьи ребра являются непересекающимися простыми кривыми, каждая из которых соединяет две вершины (или, в случае петли, замыкается на одной вершине) без промежуточных вершин.
- Геометрическое представление.** Геометрический граф, изоморфный данному графу.
- Граф.** Математическая система, состоящая из двух множеств V и E и отображения Γ множества E в $V \times V$ (множество неупорядоченных пар элементов V). Элементы V и E называются соответственно вершинами и ребрами графа, а Γ называется отображением инцидентности. Если $\Gamma(e) = (\nu \& \omega)$, то вершины ν и ω называются *граничными точками* e .
- Граф бинарных отношений.** Ориентированный граф, вершины которого соответствуют элементам множества, на которых определены отношения и дуги соединяют пары вершин с заданными отношениями.
- Гамильтонова цепь, цикл, контур или путь.** Простые цепи, циклы, контура или пути, содержащие все вершины рассматриваемого графа.
- Граф без сочленений.** Связный граф без точек сочленения.
- Дуга.** См. *ориентированный граф*.
- Двудольный граф.** Граф, вершины которого могут быть разбиты на два множества таким образом, что каждое ребро имеет по граничной точке в каждом из множеств.
- Дополнение графа.** Обыкновенный граф, полученный путем удаления ребер данного обыкновенного графа G из полиого графа, имеющего те же самые вершины.

- Доминирующее множество графа (внешнее устойчивое множество).* Множество W вершин таких, что каждая вершина, не принадлежащая W , смежна с вершиной в W .
- Дерево, растущее из корня (прадерево).* Ориентированный граф, который является деревом и имеет вершину v такую, что для любой другой вершины w дерева единственная цепь соединяет v и w и является фактически путем, ориентированным от v к w . В этом случае говорят, что дерево растет из корня v .
- Дерево.* Связный граф без циклов.
- Инцидентное отображение.* См. *граф*.
- Инцидентность.* Связь между ребром (или дугой) e и вершинами, в которые оно отображается отношениями инцидентности графа.
- Изоморфные графы.* Пара графов, чьи вершины и ребра (или дуги) могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие таким образом, что соотношения инцидентности сохраняются. В ориентированном графе знак инцидентности (положительный или отрицательный) также должен сохраняться.
- Источник.* Вершина сети, в которой выходной поток больше входного.
- Компонента графа.* Связный подграф, который не принадлежит ни одному большему связному подграфу.
- Контур.* Замкнутый ориентированный маршрут без повторяющихся вершин.
- Контурный граф.* Ориентированный граф, содержащий, по крайней мере, один контур.
- Конечный граф.* Граф, имеющий конечное число вершин и ребер (или дуг в случае ориентированного графа).
- Конечная вершина.* См. *ориентированный граф*.
- Лес.* Граф без циклов, каждая компонента которого является деревом.
- Матрица смежности.* То же, что и матрица смежности вершин.
- Матрица циклов.* Матрица, чьи строки и столбцы соответствуют простым циклам и ребрам графа, а каждый из ее элементов равен 1 или 0 в зависимости от того, содержится или нет в соответствующем цикле соответствующее ребро.
- Матрица разрезов.* Матрица, аналогичная матрице циклов, в которой простые циклы заменены простыми разрезами.
- Маршрут.* Конечная последовательность (не обязательно различных) ребер таких, что одна из граничных точек первого ребра является также граничной точкой второго, оставшаяся граничная точка второго ребра является также граничной точкой третьего и т. д. Маршрут является замкнутым, если свободная граничная точка первого ребра совпадает со «свободной» граничной точкой последнего. Маршрут называется незамкнутым в противном случае.
- Матрица инцидентностей.* Матрица, строки и столбцы которой соответствуют вершинам и ребрам графа. Каждый элемент матрицы равен 1 или 0 в зависимости от того, инцидентны или нет соответствующие ему вершина и ребро.
- Матрица смежности вершин.* Матрица, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а элементы означают число ребер, связывающих соответствующие пары вершин.
- Неупорядоченная цепь.* Множество ребер, которые, будучи соответственно упорядоченными, образуют цепь. В геометрическом графе это множество ребер, которые образуют незамкнутую кривую.

- Неупорядоченный цикл.** Множество ребер, которые, будучи соответственно упорядоченными, образуют цикл. В геометрическом графе это множество ребер, которые образуют замкнутую кривую.
- Неупорядоченный контур.** Множество дуг, которые будучи соответственно упорядоченными, образуют контур. В геометрическом графе это замкнутая кривая, образованная соответственно ориентированными дугами.
- Независимое множество вершин** (внутреннее устойчивое множество). Множество вершин, в котором нет двух смежных вершин.
- Неупорядоченный путь.** Множество дуг, которые будучи соответственно упорядоченными, образуют путь.
- Неориентированный граф.** То же самое, что *граф*.
- Начальная вершина.** См. *ориентированный граф*.
- Ориентированный маршрут.** Конечная последовательность (не обязательно различных) дуг таких, что конечная вершина каждой дуги (исключая последнюю) является также начальной вершиной последующей дуги. Говорят, что маршрут является замкнутым, если начальная вершина первой дуги совпадает с конечной вершиной последней дуги, и незамкнутым в противном случае.
- Ориентированный эйлеров граф** (псевдосимметрический граф). Ориентированный граф, в котором равны отрицательная и положительная степени каждой вершины.
- Ориентированный граф.** Математическая система, состоящая из двух множеств V и A и отображения Δ множества A на $V \times V$. Элементы V и A называются соответственно *вершинами* и *дугами* ориентированного графа, а Δ называется *отображением* ориентированной инцидентности. Если $\Delta(a) = (v, w)$, то v называется *начальной вершиной* дуги a , в w — *конечной вершиной*.
- Отрицательная степень вершины.** Число дуг, с которыми вершина отрицательно инцидентна.
- Отрицательная инцидентность.** Отношение между дугой и ее конечной вершиной (дуга входит в вершину).
- Однородный граф.** Граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень.
- Обыкновенный граф.** Неориентированный граф, который не содержит параллельных ребер и петель; ориентированный граф, который не содержит строго параллельных дуг и петель.
- Полный граф.** Граф, в котором каждые две различные вершины смежны.
- Поток.** Целые числа, назначенные дугам сети, которые интерпретируются как скорости потока вещества по дугам.
- Петля.** Ребро (или дуга), инцидентное только одной вершине.
- Паросочетание.** Множество ребер графа, в котором нет двух смежных ребер.
- Параллельные ребра или дуги.** Ребра или дуги, имеющие общие граничные точки.
- Путь.** Незамкнутый ориентированный маршрут без повторяющихся дуг.
- Перт — сеть.** Ориентированный граф, используемый для отражения взаимосвязи операций проекта. Дуги соответствуют операциям, а их граничные точки выбираются так, чтобы отразить ограничения на порядок, в котором операции должны выполняться.

- Плоский граф.** Граф, изоморфный геометрическому графу на плоскости.
- Подграф.** Граф $G' = (V', E', \Gamma')$ называется подграфом графа $G(V, E, \Gamma)$, если $V' \subset V$, $E' \subset E$ и $\Gamma'(e) = \Gamma(e)$ для каждого ребра $e \in E'$. Необходимо, чтобы V' включало все граничные точки (по отношению к G) ребер в E' . Ориентированный подграф ориентированного графа определяется по существу аналогичным образом, если E и Γ интерпретировать соответственно как множество дуг и ориентированное инцидентное отображение.
- Покрывающее дерево.** Подграф связного графа G , который является деревом и включает все вершины G .
- Положительная степень вершины.** Число дуг, которые положительно инцидентны вершине.
- Положительная инцидентия.** Связь между дугой и ее начальной вершиной (дуга выходит из вершины).
- Примитивный граф.** Ориентированный граф такой, что для некоторого целого числа k каждая пара разных вершин может быть соединена ориентированным маршрутом, состоящим точно из k элементов.
- Простой разрез.** Разделяющее множество, которое не содержит собственного подмножества разделяющего граф.
- Простая цепь.** Цепь, не содержащая повторяющихся вершин.
- Простой цикл.** Цикл, не содержащий повторяющихся вершин.
- Простой контур.** Контур, не содержащий повторяющихся вершин.
- Простой путь.** Путь, не содержащий повторяющихся вершин.
- Разрез.** Разделяющее множество, состоящее из всех ребер, которые соединяют некоторое множество вершин с его дополнением.
- Разделяющее множество.** Множество ребер связного графа, после удаления которых граф становится несвязным.
- Ребро.** См. граф.
- Рефлексивный граф.** Ориентированный граф, каждой вершине которого инцидентна петля.
- Смежные ребра или дуги.** Два ребра или дуги, имеющие, по крайней мере, одну общую граничную точку.
- Сеть с ограниченной пропускной способностью.** Сеть, в которой поток по каждой дуге заключен между нулем и верхней границей, называемой пропускной способностью дуги.
- Связный граф.** Граф, в котором каждая пара различных вершин соединяется, по крайней мере, одной цепью.
- Степень вершины.** Число ребер (или дуг), инцидентных вершине. Петли считаются дважды.
- Сеть.** Связный ориентированный граф без петель. Этот термин используется в теории потоков.
- Сток.** Вершина сети, в которой входной поток больше выходного.
- Строго параллельные дуги.** Дуги, имеющие одинаковые начальную и конечную вершины.
- Сильно связный граф.** Ориентированный граф, для каждой упорядоченной пары различных вершин (v, w) которого, существует, по крайней мере, один путь из v в w .
- Симметрический граф.** Ориентированный граф, дуги которого могут быть сгруппированы в пары параллельных, но противоположно направленных дуг.

- Точка сочленения.* Вершина связного графа, после удаления которой граф становится несвязен.
- Тотальный граф.* Ориентированный граф такой, что для каждой двух различных вершин u и w существует путь из u к w или путь из w к u (или оба пути).
- Транзитивный граф.* Ориентированный граф, который содержит дугу из u к w всякий раз, когда существует дуга из u к v и дуга из v к w .
- Уникурсальный граф.* Граф (ориентированный граф), совокупность ребер (дуг) которого образует цикл (контур) или цепь (путь).
- Хорда.* Ребро графа G , которое не содержится в дереве T , являющемся подграфом G ; термин хорда употребляется по отношению к определенному дереву T .
- Хроматическое число графа.* Наименьшее k такое, что вершины графа могут быть разделены на k множеств, каждое из которых является независимым множеством вершин.
- Цепь.* Незамкнутый маршрут, не содержащий повторяющихся ребер.
- Цикл.* Замкнутый маршрут, не содержащий повторяющихся ребер.
- Эйлеров граф.* Граф, не содержащий вершин нечетной степени.

Р. Басакер, Т. Саати
КОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ И СЕТИ

М., 1973 г., 368 стр. с илл.

Редактор *Д. С. Фурманов*
Техн. редактор *Е. Н. Земская*
Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 9/VIII 1973 г. Подписано к печати
11/XII 1973 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 11,5.
Условн. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 19,01. Тираж
16 000 экз. Цена книги 1 р. 61 к. Заказ № 146.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография изд-ва «Наука»
Новосибирск, 77, Станиславского, 25