

С. И. БАСКАКОВ

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
радиотехнических специальностей вузов*



Москва «Советское радио» 1973

6Ф2
Б27
УДК 621.37

Баскаков С. И.

Б27 «Основы электродинамики». Учебное пособие для вузов. М., «Сов. радио», 1973.

248 с. с ил.

Излагаются основы теории электромагнетизма, теория линий передачи объемных резонаторов. Рассматриваются задачи возбуждения электромагнитных волн, принципы анализа замедляющих систем, электродинамика анизотропных сред. Кроме студентов пособие может быть полезным для специалистов, работающих в области техники СВЧ.

Б $\frac{0341-032}{046(01)-73}$ 86-73

6Ф2

Рецензенты:

кафедра радиофизики Ленинградского политехнического института; канд. техн. наук, доц. А. И. Потехин.

СВЯТОСЛАВ ИВАНОВИЧ БАСКАКОВ
ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Редактор **И. И. Гинзбург**
Художественный редактор **З. Е. Вендрова**
Художник **Б. К. Шановалов**
Технический редактор **А. А. Белоус**
Корректор **З. Г. Галушкина**

Сдано в набор 21/XI 1972 г.

Подписано в печать 1/II 1973 г. Т-00433

Формат 84×108/32 Бумага типографская № 2

Объем 13,02 усл. п. л., 11,870 уч.-изд. л.

Тираж 30 000 экз. Зак. 1443 Цена 54 коп.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт,
п/я. 693.

Московская типография № 10 «Сбюзполиграфпрома»
при Государственном Комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава первая. Основные положения теории электромагнетизма	8
1.1. Электромагнитное поле	8
1.2. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома	11
1.3. Закон сохранения заряда	14
1.4. Закон Гаусса	15
1.5. Закон неразрывности магнитных силовых линий	16
1.6. Закон полного тока	18
1.7. Ток смещения	20
1.8. Закон электромагнитной индукции	21
1.9. Материальные уравнения электромагнитного поля	22
1.10. Поляризационные и сторонние токи	31
1.11. Сводка уравнений Максвелла	32
1.12. Уравнения Максвелла для монохроматических колебаний. Комплексные амплитуды полей	33
1.13. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь	36
1.14. Уравнения Гельмгольца. Волновой характер электромагнитного поля	37
1.15. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Теорема Пойнтинга	39
Глава вторая. Плоские электромагнитные волны	46
2.1. Общие свойства волновых процессов	46
2.2. Однородная плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией	50
2.3. Фазовая скорость и постоянная затухания плоских волн	53
2.4. Плоские электромагнитные волны в хорошо проводящих средах	55
2.5. Плоские электромагнитные волны с вращающейся поляризацией	57
2.6. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении	59
Глава третья. Граничные условия для векторов электромагнитного поля	61
3.1. Постановка задачи	61
3.2. Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля	62
3.3. Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля	63
3.4. Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля	64

3.5	Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля	67
Глава четвертая. Падение плоских электромагнитных волн на границу раздела двух сред		69
4.1.	Нормальное падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость	69
4.2.	Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство	70
4.3.	К вопросу о создании неотражающих сред	73
4.4.	Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом	74
4.5.	Угол Брюстера	79
4.6.	Полное внутреннее отражение	81
4.7.	Приближенные граничные условия Леонтовича	83
Глава пятая. Направляемые электромагнитные волны. Волны между двумя проводящими плоскостями		85
5.1.	Падение плоской волны с параллельной поляризацией	85
5.2.	Падение плоской волны с перпендикулярной поляризацией	88
5.3.	Классификация направляемых волн	88
5.4.	Фазовая скорость направляемых волн	89
5.5.	Типы волн в волноводах	92
5.6.	Критическая длина волны	93
5.7.	Связь между продольными и поперечными составляющими поля направляемых волн	95
Глава шестая. Прямоугольный металлический волновод		98
6.1.	Постановка задачи	98
6.2.	Волны типа E в прямоугольном волноводе	99
6.3.	Вычисление критической длины волны и длины волны в волноводе	106
6.4.	Волны типа H в прямоугольном волноводе	108
6.5.	Волна типа H_{10}	111
6.6.	Основы применения прямоугольных волноводов	116
6.7.	Характеристические сопротивления волноводов	121
6.8.	Мощность, переносимая по прямоугольному волноводу колебанием типа H_{10}	123
Глава седьмая. Круглый металлический волновод		125
7.1.	Постановка задачи	125
7.2.	Волны типа E в круглом волноводе	128
7.3.	Волны типа H в круглом волноводе	134
7.4.	Применение круглых волноводов	138
Глава восьмая. Линии передачи с волнами ТЕМ		141
8.1.	Некоторые общие характеристики волн ТЕМ в линиях передачи	141
8.2.	Напряжение и разность потенциалов в теории линий передачи	142
8.3.	Коаксиальная линия передачи	144
8.4.	Волновое сопротивление	147
8.5.	Некоторые применения коаксиальных линий передачи	148
8.6.	Полосковые линии передачи	148

Глава девятая. Затухание волн в полых металлических волноводах	150
9.1. Источники потерь в волноводах	150
9.2. Способ учета затухания в волноводах	151
9.3. Общие выражения для постоянной затухания	152
9.4. Анализ некоторых частных случаев	154
Глава десятая. Групповая скорость волн в волноводах	160
10.1. Постановка задачи	160
10.2. Группы волн и групповая скорость	160
10.3. Групповая скорость в металлических волноводах	163
Глава одиннадцатая. Поверхностные электромагнитные волны и замедляющие структуры	167
11.1. Спиральный волновод	167
11.2. Замедление электромагнитных волн диэлектрической пластиной. Поверхностные волны	169
11.3. Некоторые другие типы замедляющих структур и их применение	177
Глава двенадцатая. Колебательные системы СВЧ. Объемные резонаторы	180
12.1. Эволюция электромагнитных колебательных систем при повышении рабочей частоты	180
12.2. Объемный резонатор, образованный отрезком прямоугольного волновода	183
12.3. Общая задача о колебаниях в прямоугольном резонаторе. Классификация типов колебаний	187
12.4. Круглые объемные резонаторы	190
12.5. Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов	192
12.6. Добротность объемных резонаторов	194
12.7. Некоторые другие типы объемных резонаторов	197
12.8. Общая постановка задачи о колебаниях в объемном резонаторе	199
Глава тринадцатая. Решение неоднородных уравнений Максвелла. Электрический векторный потенциал	201
13.1. Постановка задачи	201
13.2. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля	202
13.3. Калибровка потенциалов. Неоднородное уравнение Гельмгольца	203
13.4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца	204
Глава четырнадцатая. Элементарные излучатели	206
14.1. Элементарный электрический излучатель	206
14.2. Векторный электрический потенциал для элементарного электрического излучателя	207
14.3. Составляющие электромагнитного поля	208
14.4. Ближняя и дальняя зоны элементарного электрического излучателя	209
14.5. Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя	211

14.6. Вычисление излученной мощности. Сопротивление излучения	213
14.7. Понятие о магнитном токе	215
14.8. Принцип перестановочной двойственности	216
14.9. Элементарный щелевой излучатель	217
Глава пятнадцатая. Некоторые дополнительные вопросы теории излучения электромагнитных волн	221
15.1. Условия излучения. Принцип предельного поглощения	221
15.2. Принцип Гюйгенса—Френеля	224
15.3. Применение формулы Кирхгофа к расчёту излучения из отверстия	227
Глава шестнадцатая. Распространение электромагнитных волн в анизотропной среде	233
16.1. Постановка задачи	233
16.2. Физический механизм анизотропии феррита. Уравнение Ландау—Лифшица	234
16.3. Тензор магнитной проницаемости феррита	239
16.4. Уравнения Максвелла в анизотропной среде	242
16.5. Распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите. Эффект Фарадея	243
Приложение. Выражение основных операций векторного анализа в различных системах координат	247
Список литературы	248

Предисловие

Настоящее учебное пособие охватывает первую часть курса «Электродинамика и распространение радиоволн», читаемого на радиотехнических факультетах высших учебных заведений. При написании книги автор использовал материал лекций, в течение ряда лет читавшихся им на радиотехническом факультете Московского ордена Ленина энергетического института. Учитывая специфику подготовки современного радиоинженера, автор сознательно уделил преимущественное внимание вопросам волновых свойств электромагнитного поля. При этом ряд других вопросов, например задачи электро- и магнитостатики, ранее по традиции входившие в курс «Теория электромагнитного поля», здесь практически не рассматриваются. Необходимость такого сокращения разделов курса диктуется требованием более подробного изучения быстропеременных волновых процессов в связи с их применением в современной технике.

При изложении всех разделов курса автор стремился использовать по возможности более простой математический аппарат для того, чтобы излишняя математическая сложность не затрудняла понимания физического смысла изучаемых явлений. Например, большинство рассматриваемых задач решается не в обобщенных криволинейных, а в декартовых координатах.

Прикладная направленность курса нашла свое отражение в том, что большинство разделов сопровождается примерами, взятыми из радиотехнической практики.

Автор приносит благодарность своим коллегам — сотрудникам кафедры Теоретических основ радиотехники МЭИ, и в особенности докт. техн. наук, профессору Н. Н. Федорову за многочисленные и плодотворные дискуссии по вопросам, затронутым в настоящем пособии. На стадии окончательной работы над книгой автор с благодарностью воспользовался замечаниями и советами рецензентов — канд. техн. наук, доц. А. И. Потехина и коллектива кафедры радиофизики ЛПИ, возглавляемой докт. техн. наук, проф. М. И. Конторовичем.

Отзывы и замечания направлять по адресу: Москва, Главный почтамт, п/я 693, изд-во «Советское радио».

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

1.1. Электромагнитное поле

Данный параграф носит вводный характер. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории электромагнетизма, излагаемыми в курсе физики.

В физике принято разграничивать окружающие нас объекты материального мира на два больших самостоятельных класса, один из которых называется веществом, а другой — полем. В основе принципа, по которому проводится подобное деление, лежит тот факт, что вещество в отличие от поля обладает инертной массой в обычном механическом смысле этого понятия. Движение макроскопических объектов, состоящих из вещества, описывается известными законами механики.

Обращаясь к полю как к самостоятельному виду материи, можно перечислить известные науке электромагнитное и гравитационное поля, а также специфические виды внутриатомных полей.

Предметом электродинамики является изучение электромагнитного поля, проявляющего себя посредством сил, действующих на частицы вещества, обладающие электрическим зарядом. Экспериментально обнаружена дискретная структура зарядов. Величины любых зарядов, встречающихся в природе, кратны заряду электрона e , равному приблизительно $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Поскольку электромагнитное поле характеризуется силами, действующими на заряды, находящиеся в области существования поля, а силы, в свою очередь, представляются векторами, имеется возможность описать электромагнитное поле с помощью абстрактных математических моделей — векторов полей.

Всю совокупность электромагнитных явлений принято разделять на две группы. К первой группе относятся электрические, а ко второй — магнитные явления. В соответствии с этим обычно выделяют две частные разновидности электромагнитного поля, носящие название электрического и магнитного полей. Важнѐ

подчеркнуть, и это будет ясно из дальнейшего изложения, что утверждение о возможности представления электромагнитного поля как суммы электрических и магнитных полей означает признание их внутреннего единства и взаимообусловленности.

Электрическое поле характеризуется силовым взаимодействием как с неподвижными, так и с движущимися зарядами, причем в результате этого взаимодействия изменяется кинетическая энергия движущейся заряженной частицы вещества. В вакууме электрическое поле может быть однозначно представлено с помощью векторного поля его напряженности \mathbf{E} по формуле

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{F} — вектор силы, действующей на пробный заряд q .

Если ограничиться только исследованием процессов в вакууме, то задание напряженности электрического поля в каждой точке пространства является достаточным. Однако, как будет показано далее, для правильного описания электрического поля в материальных средах, например в диэлектриках, требуется ввести в рассмотрение второе векторное поле \mathbf{D} , названное полем электрического смещения (или электрической индукции). Вектор \mathbf{D} в вакууме связан с вектором \mathbf{E} соотношением

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

где

$$\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

— размерная постоянная, найденная экспериментально и названная электрической постоянной вакуума. В системе единиц СИ напряженность электрического поля имеет размерность В/м; электрическое смещение обладает размерностью Кл/м².

Большое число задач практической электродинамики связано лишь с рассмотрением явлений в вакууме. Поэтому там, где это не приведет к недоразумениям, будем для краткости вектор \mathbf{E} называть электрическим вектором.

Магнитное поле характеризуется силовым взаимодействием лишь с движущимися зарядами, причем кинетическая энергия заряженных тел остается при этом постоянной. Как и при электрическом взаимодействии,

магнитное поле в вакууме может быть описано с помощью единственного векторного поля. Таким полем является поле магнитной индукции \mathbf{B} . Принцип его определения основан на том, что точечный заряд q , движущийся в электромагнитном поле со скоростью \mathbf{v} , испытывает действие силы \mathbf{F}_L , называемой силой Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (1.3)$$

Первый член суммы в правой части (1.3) является уже известной силой, обусловленной электрическим полем, в то время как второй член характеризует составляющую силы, вызванную наличием магнитного поля. Магнитная часть силы Лоренца действует всегда перпендикулярно к траектории частицы и поэтому действительно не может изменить ее кинетической энергии. Другими словами, магнитное поле может использоваться не для ускорения (торможения) заряженных частиц, а лишь для изменения конфигурации их траекторий, например, для фокусировки электронных пучков.

В природе существует довольно обширный класс веществ, помещенные в магнитное поле приводят к существенному изменению последнего. Такие вещества называются магнетиками. Для описания явлений, происходящих в магнетиках, задание одного векторного поля \mathbf{B} оказывается недостаточным. Поэтому в рассмотрение вводится второе векторное поле \mathbf{H} , называемое напряженностью магнитного поля. В вакууме векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} связаны между собой соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м}$$

— размерная постоянная, называемая магнитной постоянной вакуума. В системе единиц СИ величина \mathbf{B} имеет размерность $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, а величина \mathbf{H} — размерность $\text{А}/\text{м}$.

По установившейся традиции магнитное поле в вакууме предпочтительно характеризуют его напряженностью \mathbf{H} ; в дальнейшем этот вектор часто будем называть просто магнитным вектором.

Фундаментальной задачей теории электромагнетизма явилось обобщение многочисленных экспериментальных

результатов, касающихся электрических и магнитных явлений. Эта задача была решена в 70-х годах XIX века крупнейшим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом, сформулировавшим уравнения, носящие его имя, которые полно и однозначно описывают всю совокупность электромагнитных явлений в макроскопических масштабах. Уравнения Максвелла в теории электромагнетизма играют такую же роль, как законы Ньютона в механике.

Результаты Максвелла сыграли огромную роль первоначально в деле научного, а затем и технического прогресса. Волновой характер электромагнитного поля, предсказанный Максвеллом теоретически, а затем экспериментально подтвержденный Генрихом Герцем, явился отправным моментом в работах великого русского ученого, изобретателя радио Александра Степановича Попова.

1.2. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома

Под током проводимости в электродинамике понимается коллективное движение (упорядоченное или хаотическое) носителей электрического заряда, возникающее внутри материальных тел под действием приложенного электрического поля.

Рассмотрим систему, в которой к границе раздела между вакуумом и проводящим веществом подведены два электрода, соединенные с источником электрического тока (рис. 1.1). Очевидно, что линии тока внутри вещества распределятся таким образом, что наибольшая их часть пройдет по области, представляющей для тока наименьшее сопротивление; гораздо меньшая часть тока ответвится в глубь тела. Из рисунка видно, что для исчерпывающей характеристики состояния данной системы недостаточно указать лишь величину тока I , протекающего во внешней цепи. Здесь необходимо располагать сведениями об интенсивности и направлении движения носителей заряда в каждой точке области. С этой целью принято вводить понятие плотности тока проводимости $\mathbf{J}_{\text{пр}}$, определяя ее следующим образом:

$$\mathbf{J}_{\text{пр}} = Ne\mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Здесь N — количество носителей, содержащихся в 1 м^3 вещества; e — заряд носителя (в частности, электрона); v — скорость носителей в данной точке пространства.

Легко проверить, что в соответствии с (1.5) величина $J_{\text{пр}}$ имеет размерность $\text{А}/\text{м}^2$ и в этом смысле действительно является мерой тока, протекающего через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости носителей.

Поставим задачу связать плотность тока проводимости с величиной напряженности электрического поля,

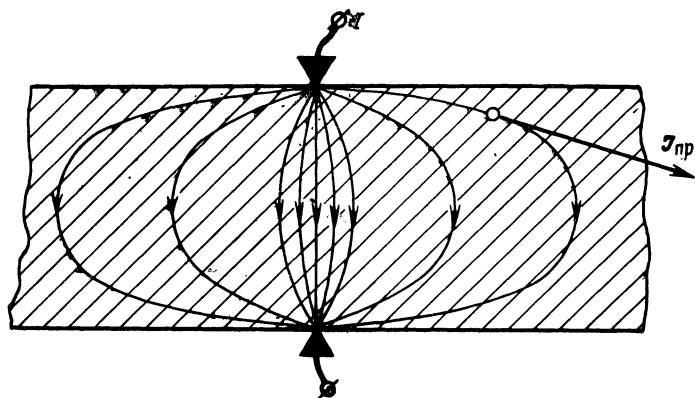


Рис. 1.1. К определению понятия плотности тока проводимости.

существующего в некоторой точке пространства. Если учесть, что носители тока при движении внутри вещества, испытывают силы внутреннего трения, то скорость носителей, а следовательно, и плотность тока проводимости должны быть пропорциональны напряженности электрического поля, т. е.

$$J_{\text{пр}} = \sigma E, \quad (1.6)$$

где σ — размерная постоянная, смысл которой будет пояснен далее.

Докажем, что последняя формула является одной из форм записи закона Ома для участка цепи. Для этого рассмотрим куб, выполненный из исследуемого вещества с ребром длиной L (рис. 1.2). Предположим далее, что две противоположные грани металлизированы и

к ним приложена разность потенциалов U ; под действием ее во внешней цепи протекает ток I .

Очевидно, что

$$I = |J_{\text{пр}}| L^2; \quad |E| = U/L,$$

откуда, используя (1.6), будем иметь

$$I = \sigma LU.$$

Последняя формула является выражением закона Ома, если положить, что

$$\sigma L = 1/R,$$

где R — сопротивление, измеренное между металлизированными гранями.

Формула (1.6) иногда называется дифференциальной формой закона Ома, поскольку здесь дается связь между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля в бесконечно малой окрестности произвольной точки пространства.

Легко убедиться, что в практической системе единиц коэффициент σ имеет размерность сименс на метр. Эта величина носит название удельной объемной проводимости и характеризует проводящие свойства того или иного вещества.

Для хороших проводников электрического тока, которыми являются металлы, типичны высокие значения удельной объемной проводимости. Приведем для справок небольшую табл. 1.1 величин σ , измеренных на постоянном токе.

Таким образом, для протекания внутри металла значительного тока достаточно существования там ничтожной напряженности электрического поля.

Удельная объемная проводимость диэлектриков и полупроводников на много порядков меньше, чем у металлов. Поэтому для описания их электропроводящих

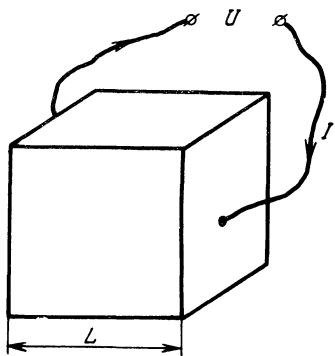


Рис. 1.2. К формулировке дифференциальной формы закона Ома.

свойств оказывается удобным применять другую характеристику — угол диэлектрических потерь, о котором будет сказано в дальнейшем.

Таблица 1.1

Металл	$\sigma \cdot 10^7$, См/м
Серебро	6,1
Медь	5,7
Алюминий	3,2

1.3. Закон сохранения заряда

Одно из основных положений теории электромагнетизма состоит в том, что ни при каких условиях электрические заряды не могут ни самопроизвольно зарождаться, ни исчезать бесследно. Это положение многократно подтверждается экспериментами и является одним из фундаментальных физических законов — законом сохранения заряда.

Предположим, что внутри произвольного замкнутого объема V с поверхностью S содержится некоторый заряд Q , величина которого может быть найдена интегрированием плотности заряда ρ по всему объему:

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (1.7)$$

Если теперь предположить, что с течением времени величина Q по каким-либо причинам изменяется, то в соответствии с законом сохранения заряда следует считать, что часть зарядов перескачет поверхность S , вызывая наличие тока проводимости с плотностью $\mathbf{J}_{\text{пр}}$.

Интегрируя $\mathbf{J}_{\text{пр}}$ по поверхности S , получаем результирующий ток проводимости

$$I = \oint_S \mathbf{J}_{\text{пр}} d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

По определению

$$dQ/dt = -I$$

(ток считается положительным, если заряд внутри объема уменьшается). Отсюда с учетом (1.7) и (1.8)

будем иметь

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{J}_{\text{np}} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав правую часть по теореме Остроградского — Гаусса, получим

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } \mathbf{J}_{\text{np}} dV.$$

Последнее тождество из-за полной произвольности объема V возможно лишь при тождественном совпадении подынтегральных выражений.

В результате приходим к математической формулировке закона сохранения заряда, носящей название уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}_{\text{np}} = 0. \quad (1.9)$$

1.4. Закон Гаусса

Этот закон (не путать с математической теоремой Остроградского — Гаусса) получен экспериментально и устанавливает связь между векторным полем \mathbf{E} и величиной порождающего его заряда. Он формулируется следующим образом. Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 1.3). Если внутри объема V заключен суммарный электрический заряд Q_{Σ} , то его величина, деленная на электрическую постоянную вакуума ϵ_0 , численно совпадает с потоком векторного поля \mathbf{E} через поверхность S . Математически закон Гаусса в вакууме записывается как

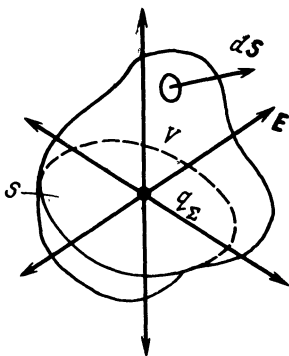


Рис. 1.3. Закон Гаусса.

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}. \quad (1.10)$$

Если рассматриваются точечные заряды, то величина Q_{Σ} может быть найдена алгебраическим суммированием. Если же заряд распределен непрерывно, то Q_{Σ} определяется интегрированием плотности заряда ρ по объему V :

$$Q_{\Sigma} = \int_V \rho dV. \quad (1.11)$$

Закон Гаусса, выражаемый формулой (1.10), связывает поток вектора электрического поля с суммарным зарядом, заключенным внутри объема. Поэтому данная формулировка носит название закона Гаусса в интегральной форме. Пользуясь методами векторного анализа, можно получить другую форму записи данного закона. Действительно, из теоремы Остроградского — Гаусса следует, что

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Учитывая (1.11), получаем

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (1.12)$$

Поскольку объем V произволен, последнее равенство возможно лишь при тождественном совпадении подынтегральных выражений. Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) носит название закона Гаусса в дифференциальной форме. Физически это соотношение в соответствии с определением понятия дивергенции означает, что источниками силовых линий электрического поля могут являться лишь электрические заряды.

Отметим попутно, что закон Гаусса может выступать в качестве основного закона электростатики; при этом другие законы, например закон Кулона, выводятся из него как следствие.

1.5. Закон неразрывности магнитных силовых линий

Экспериментально было обнаружено, что силовые линии вектора магнитной индукции \mathbf{B} независимо от того, создается ли поле постоянными магнитами или ка-

тушками с током, образуют в пространстве замкнутые линии (рис. 1.4).

Для математического описания этого факта удобно, как это делается в векторном анализе, воспользоваться представлением силовых линий магнитного поля в виде

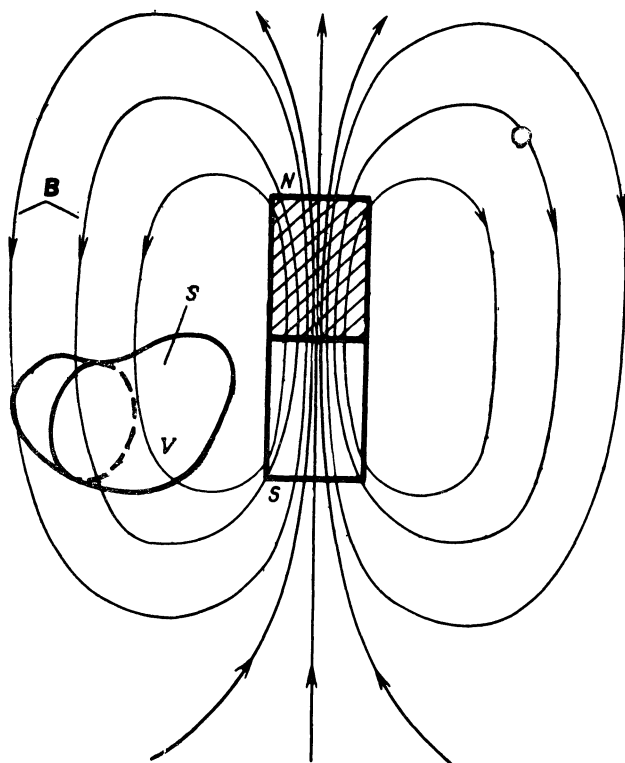


Рис. 1.4. Конфигурация магнитных силовых линий постоянного магнита.

воображаемых линий тока несжимаемой жидкости. Расположим внутри области существования магнитного поля произвольный объем, ограниченный поверхностью S . Из замкнутости линий тока следует, что поток втекающей жидкости в точности равен потоку, вытекающему из объема. Таким образом,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.14)$$

Проводя операции, аналогичные изложенным в предыдущем параграфе, будем иметь соотношение, справедливое для бесконечно малой окрестности выбранной точки пространства:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.15)$$

Формулы (1.14) и (1.15) служат математическими выражениями закона неразрывности магнитных силовых линий в интегральной и дифференциальной форме соответственно.

Эквивалентная формулировка рассмотренного закона состоит в том, что векторное поле \mathbf{B} нигде не имеет источников. Другими словами, в природе реально не существует никаких магнитных зарядов, а следовательно, и магнитные токи не имеют прямого физического смысла.

1.6. Закон полного тока

В начале XIX века датский физик Х. Эрстед установил важнейший для теории электромагнетизма экспериментальный факт, который заключается в том, что протекание электрического тока по проводникам приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля. Открытие Эрстеда позволило выдающемуся французскому ученому Амперу сформулировать закон, носящий в настоящее время название закона полного тока.

Рассмотрим в пространстве воображаемый контур L , ограничивающий поверхность S . Зададим на данном контуре направление обхода так, чтобы движение вдоль контура с конца вектора элементарной площадки dS наблюдалось в направлении против часовой стрелки (рис. 1.5).

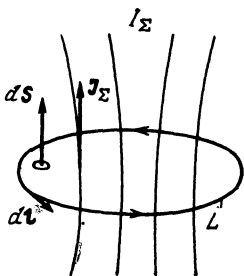


Рис. 1.5. К закону полного тока.

Предположим далее, что поверхность S пронизывается некоторой системой токов, которая может носить как дискретный характер (например, система отдельных проводников), так и быть непрерывно распределенной (примером может служить электронный поток). Не указывая пока физической природы этих токов,

будем для определенности полагать, что они распределены в пространстве непрерывно с некоторой плотностью \mathbf{J}_Σ . Тогда полный ток, пронизывающий контур, найдется в виде

$$I_\Sigma = \int_S \mathbf{J}_\Sigma d\mathbf{S}. \quad (1.16)$$

Закон полного тока гласит, что циркуляция по контуру L вектора напряженности магнитного поля, вызванного протеканием тока I_Σ , равна полному току, т. е.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_\Sigma. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) формулирует закон полного тока в интегральной форме. Для того чтобы найти дифференциальную форму этого закона, т. е. связать плотность полного тока в данной точке с напряженностью магнитного поля, следует воспользоваться известной из векторного анализа теоремой Стокса, которая гласит, что для любого векторного поля \mathbf{A} справедливо равенство

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Воспользовавшись последней формулой и преобразовав с ее помощью выражение (1.14), будем иметь

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}_\Sigma d\mathbf{S},$$

откуда из-за произвольности выбранного контура получим

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_\Sigma. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) является законом полного тока в дифференциальной форме.

Отметим, что с помощью закона полного тока в интегральной форме удастся решать ряд задач, связанных с нахождением магнитного поля заданных токов.

1.7. Ток смещения

Из практики известен факт протекания переменного электрического тока по цепи, содержащей конденсатор. Существенно важным здесь является то, что ток течет по пространству между обкладками, в котором отсутствуют какие-либо носители электрического заряда. Поэтому можно предполагать, что в рассматриваемой

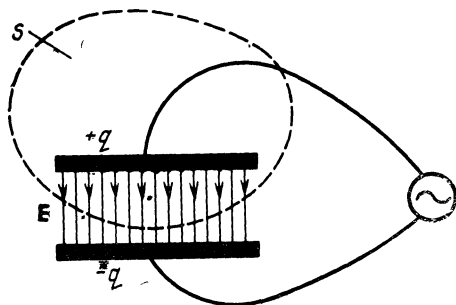


Рис. 1.6. К определению понятия тока смещения.

области протекает некий ток, природа которого принципиально отлична от природы тока проводимости, изученного ранее. Этот ток был впервые введен в электродинамику Максвеллом и назван им током смещения.

Рассмотрим цепь с конденсатором, изображенную на рис. 1.6, в которой выделена замкнутая поверхность S , окружающая одну из обкладок конденсатора. Из закона Гаусса следует, что в случае, когда между обкладками находится вакуум,

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

В свою очередь, ток в цепи найдется следующим образом:

$$I = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Из последнего выражения видно, что величина $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ имеет размерность плотности тока, который и должен

быть назван током смещения. Итак, плотность тока смещения в вакууме

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t. \quad (1.19)$$

Максвелл предложил ввести плотность тока смещения в правую часть закона полного тока (1.18) наряду с плотностью тока проводимости. Эта мысль имела огромное значение для электродинамики, поскольку при этом устанавливалась внутренняя взаимосвязь электрического и магнитного полей. Действительно, изменение во времени электрического поля в какой-либо точке пространства приводит к протеканию тока смещения, который, в свою очередь, вызывает появление магнитного поля.

1.8. Закон электромагнитной индукции

В 1831 г. М. Фарадей обнаружил возникновение напряжения на концах катушки, помещенной в переменное магнитное поле. Открытие этого явления, получившего название электромагнитной индукции, позволило Максвеллу сформулировать один из фундаментальных законов теории электромагнетизма, связывающий электрическое поле с изменением во времени магнитного поля.

Пусть в некоторой области пространства существует переменное во времени магнитное поле (рис. 1.7). Положение мгновенной ориентации векторов \mathbf{B} указано на рисунке стрелками. Рассмотрим далее произвольный замкнутый контур L , направление обхода вдоль которого выбрано против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{B} . В интегральной форме закон электромагнитной индукции имеет следующее математическое выражение:

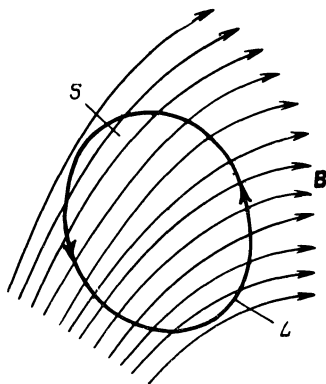


Рис. 1.7. К закону электромагнитной индукции.

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.20)$$

Циркуляция векторного поля \mathbf{E} по контуру L , стоящая в левой части формулы (1.20), носит название электродвижущей силы (э. д. с.) по данному контуру. Если на месте воображаемого контура разместить контур, выполненный из проводника, то наличие э. д. с. приведет к протеканию в нем электрического тока в направлении вектора \mathbf{E} .

В правой части (1.20) со знаком минус стоит производная по времени от полного магнитного потока, пронизывающего контур.

Воспользовавшись теоремой Стокса и внося операцию дифференцирования по времени под знак поверхностного интеграла, получим

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Отсюда непосредственно следует дифференциальная форма закона электромагнитной индукции:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (1.21)$$

Итак, согласно рассматриваемому закону, изменение во времени магнитного поля приводит к возникновению в пространстве электрического поля.

1.9. Материальные уравнения электромагнитного поля

В природе существует обширный класс веществ, которые не проводят электрического тока. Эти вещества носят название диэлектриков. Помимо изолирующих свойств диэлектрики обладают способностью специфическим образом изменять свои свойства при помещении в электрическое поле. Рассмотрим вкратце сущность этого процесса.

Как известно из атомно-молекулярной теории строения вещества, молекула представляет собой объединение положительных и отрицательных заряженных частиц, которое само по себе электрически нейтрально.

Помещенная в электрическое поле молекула диэлектрика деформируется таким образом, что может быть представлена в виде совокупности двух разноименных

зарядов, $+q$ и $-q$, отстоящих друг от друга на расстояние l . Такая сумма двух зарядов носит название электрического диполя. Очевидно, что величина l тем больше, чем выше напряженность приложенного электрического поля.

Сказанное иллюстрируется упрощенной картиной, изображенной на рис. 1.8. Здесь показана модель простейшего атома — атома водорода, содержащего поло-

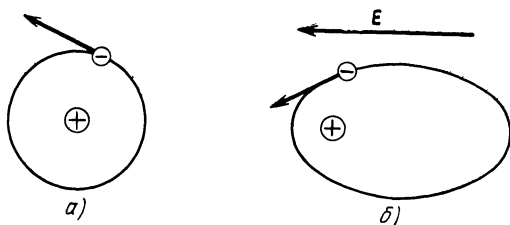


Рис. 1.8. Классическая модель процесса поляризации:

а — конфигурация орбиты электрона в отсутствие внешнего поля; *б* — то же, после приложения постоянного электрического поля.

жительно заряженное ядро и единственный электрон, вращающийся вокруг ядра. В отсутствие внешнего электрического поля электрон вращается по круговой орбите, так что в среднем центр «эффективного» отрицательного заряда совпадает с центром ядра и атом не проявляет дипольных свойств. После приложения внешнего поля орбита электрона деформируется, центры положительного и отрицательного зарядов перестают совпадать друг с другом в пространстве, и молекула начинает вести себя подобно электрическому диполю. Описанное явление носит название электронной поляризации вещества.

Следует отметить, что электронная поляризация характерна лишь для определенного класса диэлектриков, молекулы которых в отсутствие внешнего поля не обладают собственными дипольными свойствами. Подобные вещества относятся к классу неполярных диэлектриков. Примером их могут служить большинство газов и многие твердые диэлектрики как естественные, так и искусственные (кварц, стекло, полиэтилен и т. п.).

Помимо неполярных диэлектриков существует довольно много веществ, характеризующихся тем, что их

молекулы проявляют дипольные свойства и при отсутствии внешнего поля. Такие вещества носят название полярных диэлектриков. К ним относятся многие жидкие диэлектрики (вода, спирты), а также некоторые твердые вещества, например полихлорвинил. Процесс поляризации полярных диэлектриков изображен на

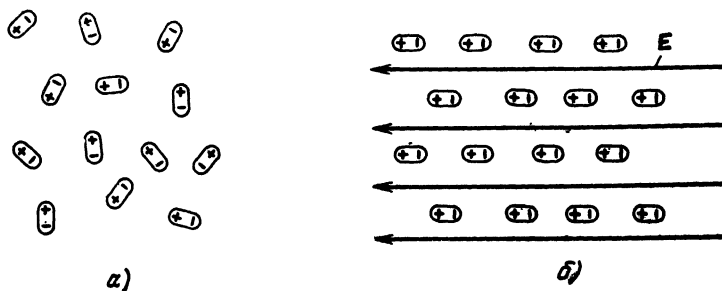


Рис. 1.9. Поляризация полярного диэлектрика:

а — в отсутствие внешнего поля; *б* — после приложения постоянного электрического поля.

рис. 1.9. Если в отсутствие внешнего поля E молекулярные диполи ориентированы в пространстве хаотично, то после приложения поля происходит некоторая ориентация молекулярных диполей. Очевидно, что степень выражённости этой ориентации будет возрастать с увеличением напряженности поля E и падать при увеличении температуры; поскольку хаотическое тепловое движение молекул нарушает их упорядоченное расположение, возникающее в процессе поляризации.

Количественной характеристикой поляризации отдельной молекулы принято считать ее дипольный момент

$$p = ql \cdot \mathbf{1}_l \quad (1.22)$$

который представляет собой вектор, коллинеарный единичному вектору $\mathbf{1}_l$, направленному вдоль оси диполя от положительного заряда к отрицательному.

Если в единице объема вещества находится N молекулярных диполей, то в качестве меры поляризации диэлектрика принято вводить вектор поляризации

$$\mathbf{P} = Np. \quad (1.23)$$

Вектор \mathbf{P} определяется в каждой точке объема поляризованного диэлектрика и зависит как от концентрации элементарных диполей, так и от направления вектора напряженности электрического поля, действующего внутри вещества.

Диэлектрик, бывший первоначально электрически нейтральным, сохраняет это свойство и после того, как произошел процесс поляризации. Однако в случае, когда поле вектора поляризации \mathbf{P} неоднородно в пространстве, внутри диэлектрика возникает специфический вид объемного электрического заряда, носящего название поляризационного заряда.

Рассмотрим бесконечно протяженную плоскую область толщиной Δx внутри диэлектрика, поляризованного вдоль оси x (рис. 1.10). При этом будем считать, что поляризация диэлектрика неоднородна в пространстве, так что

$$\mathbf{P} = P_x(x) \mathbf{i}_x. \quad (1.24)$$

В отсутствие внешнего поля \mathbf{E} внутри выделенной области положительные и отрицательные заряды, входящие в молекулы, компенсируют друг друга, так что плотность заряда $\rho = 0$. При поляризации внутрь области через единицу поверхности левой границы войдет положительный заряд

$$Q_+(x_0) = N(x_0) q l(x_0) = P_x(x_0), \quad (1.25)$$

в то время как аналогичный отрицательный заряд, вошедший через правую границу, будет равен

$$Q_-(x_0 + \Delta x) = -N(x_0 + \Delta x) q l(x_0 + \Delta x) = -P_x(x_0 + \Delta x). \quad (1.26)$$

В общем случае две последние величины (1.25) и (1.26) не равны друг другу, так что в пространстве между плоскостями будет обнаруживаться поляриза-

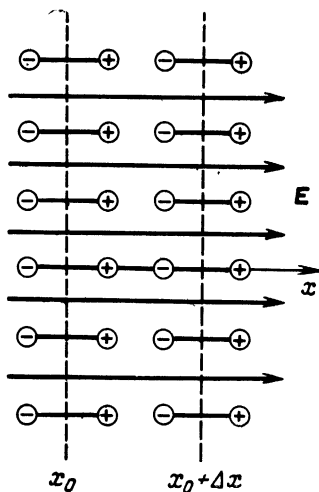


Рис. 1.10. Процесс возникновения поляризационных зарядов.

ционный электрический заряд, объемная плотность которого равна

$$\rho_{\text{пол}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_x(x_0) - P_x(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Проведенные рассуждения позволяют рассмотреть задачу и в более общем виде, когда поляризация диэлектрика неоднородна по всем трем координатным осям, т. е. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z)$. Так, поскольку величина заряда, пересекающего в процессе поляризации элементарную площадку, пропорциональна косинусу угла между векторами \mathbf{P} и $d\mathbf{S}$, заряд, вышедший за пределы ограниченного объема V с поверхностью S , равен

$$Q_+ = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S},$$

что эквивалентно появлению внутри V равного заряда с противоположным знаком

$$Q_- = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Далее, воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, будем иметь

$$Q_- = -\int_V \text{div } P dV. \quad (1.28)$$

Отсюда, переходя к дифференциальной форме записи, получаем

$$\rho_{\text{пол}} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (1.29)$$

Отметим, что поляризационные заряды являются «истинными» зарядами и должны наряду со свободными зарядами учитываться при формулировке закона Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{пол}}}{\epsilon_0} dV.$$

Подставив сюда величину $\rho_{\text{пол}}$ из (1.29), будем иметь

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = \int_V \rho_{\text{своб}} dV. \quad (1.30)$$

В электродинамике при описании явлений в диэлектрике принято вводить вектор

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.31)$$

о котором уже упоминалось в § 1.1 и который носит название вектора электрического смещения. При его вве-

дении можно как бы пренебрегать существованием поляризационных зарядов, поскольку закон Гаусса относительно вектора \mathbf{D} принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{своб.}} \quad (1.32)$$

Формула (1.32) носит название обобщенного закона Гаусса. Подавляющее большинство известных веществ характеризуется тем, что для них существует прямо пропорциональная зависимость между векторами \mathbf{E} и \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = k_3 \mathbf{E}. \quad (1.33)$$

Коэффициент k_3 носит название диэлектрической восприимчивости вещества и для различных диэлектриков может меняться в широких пределах. Физический смысл формулы (1.33) состоит в установлении известной аналогии между поляризуемой молекулой и упругой пружиной, удлинение которой пропорционально приложенной силе.

Подстановка (1.33) в (1.31) позволяет ввести универсальную характеристику диэлектрика — абсолютную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon_a = \epsilon_0 + k_3, \quad (1.34)$$

такую, что

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}. \quad (1.35)$$

В практических расчетах часто используется безразмерная характеристика — относительная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0. \quad (1.36)$$

Приведем для справок небольшую табл. 1.2 относительных диэлектрических проницаемостей для диэлек-

Таблица 1.2

Материал	ϵ
Фторопласт-4	2,08
Полиэтилен	2,25
Полистирол	2,56
Плавленый кварц	3,80

триков, часто используемых в радиоэлектронных устройствах.

Рассмотрим кратко процессы, возникающие в веществах, называемых магнетиками, при воздействии на них внешнего магнитного поля. Согласно классическим представлениям, молекулы магнетиков несут в себе

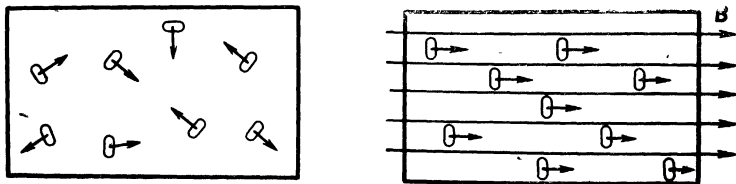


Рис. 1.11. Упорядочение ориентации молекулярных токов под влиянием внешнего магнитного поля.

замкнутые токи (гипотеза Ампера). Помещенные в магнитное поле молекулы магнетика частично ориентируются (рис. 1.11). Это явление носит тот же характер, что и процесс поляризации полярных диэлектриков. Удастся описать магнитные свойства веществ, представив вектор магнитной индукции в виде, подобном (1.31):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.37)$$

Вектор \mathbf{M} в электродинамике носит название вектора намагниченности. Некоторое различие в написании формул (1.31) и (1.37) носит традиционный характер. Если через I обозначить величину молекулярного тока, а через ΔS вектор элементарной

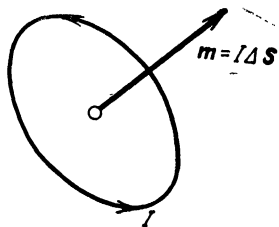


Рис. 1.12. Вектор магнитного момента молекулярного тока.

площадки, ориентированный таким образом, что с конца его направление движения тока представляется против часовой стрелки, то для характеристики каждого отдельного молекулярного тока вводится вектор его магнитного момента \mathbf{m} (рис. 1.12):

$$\mathbf{m} = I\Delta S. \quad (1.38)$$

В случае, когда в единице объема вещества находится N замкнутых токов, вектор намагниченности определяется по формуле

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m} \quad (1.39)$$

и имеет смысл суммарного магнитного момента единицы объема.

Таким образом, по крайней мере качественно, можно усмотреть аналогию в поведении поляризуемых диэлектриков в электрическом поле и магнетиков, помещаемых во внешнее магнитное поле. Например, выяснено, что у большинства веществ при не слишком сильных магнитных полях связь между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H} линейная:

$$\mathbf{M} = k_m \mathbf{H}, \quad (1.40)$$

где k_m — так называемая магнитная восприимчивость вещества.

На основании (1.37) и (1.40) будем иметь

$$\mathbf{B} = (\mu_0 + k_m) \mathbf{H} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1.41)$$

Величина μ_a носит название абсолютной магнитной проницаемости вещества. По аналогии с (1.36) можно ввести относительную магнитную проницаемость μ , определив ее формулой

$$\mu = \mu_a / \mu_0. \quad (1.42)$$

Если $\mu < 1$, то вещество называют диамагнитным, если же $\mu > 1$, то оно относится к парамагнитным веществам. Особый класс веществ составляют те, для которых $\mu \gg 1$; такие вещества носят название ферромагнетиков.

Соотношения (1.35), (1.41), именуемые материальными уравнениями электромагнитного поля, играют важную роль в электродинамике. Они описывают макроскопические свойства вещества, существенные при воздействии на них электромагнитных полей.

Основная черта записанных материальных уравнений — их линейность. В дальнейшем изложении будем предполагать, что это свойство имеет место. Это характерно для большинства прикладных радиотехнических задач. Однако следует иметь в виду, что существуют и нелинейные среды. Примером могут служить многие ферромагнитные вещества, например трансформаторная сталь, находящаяся в сравнительно сильном магнитном поле. Так, из практической электротехники известно, что, начиная с напряженности поля \mathbf{H} порядка 400 А/м, так называемая «кривая намагничивания», т. е. график зависимости $B(H)$, для стали становится весьма

нелинейной. В диэлектриках нелинейная зависимость $D(E)$ при обычных условиях наблюдается лишь среди сравнительно узкого класса веществ, называемых сегнетодиэлектриками (к ним относится широко распространенная конденсаторная керамика титанат бария). Однако за последние годы в связи с широким развитием лазерной техники удалось в экспериментальных условиях добиться получения электрических полей столь высокой напряженности, что они могут быть сравнимы с внутриатомными полями. При этом нелинейные эффекты могут наблюдаться и в обычных диэлектриках, что имеет важные технические перспективы.

Наконец, следует упомянуть о существовании весьма интересных по своим свойствам материальных сред, в которых коллинеарность векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} отсутствует. При этом, если ограничиться рассмотрением линейной среды, материальное уравнение (1.35) приобретает вид

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{a11}E_x + \varepsilon_{a12}E_y + \varepsilon_{a13}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{a21}E_x + \varepsilon_{a22}E_y + \varepsilon_{a23}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{a31}E_x + \varepsilon_{a32}E_y + \varepsilon_{a33}E_z, \end{aligned} \quad (1.43)$$

т. е. любая составляющая вектора \mathbf{D} записывается в виде линейной комбинации всех трех составляющих вектора \mathbf{E} .

Квадратная таблица из девяти чисел ε_{aij} ($i, j=1, 2, 3$) называется тензором абсолютной диэлектрической проницаемости.

Существуют среды, в которых векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} неколлинеарны. При этом

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{a11}H_x + \mu_{a12}H_y + \mu_{a13}H_z, \\ B_y &= \mu_{a21}H_x + \mu_{a22}H_y + \mu_{a23}H_z, \\ B_z &= \mu_{a31}H_x + \mu_{a32}H_y + \mu_{a33}H_z. \end{aligned} \quad (1.44)$$

По аналогии с предыдущим случаем девять величин μ_{aij} образуют тензор абсолютной магнитной проницаемости.

В физике среды с тензорными свойствами называют анизотропными средами. Анизотропия диэлектрической и магнитной проницаемостей всегда связана с тем, что в подобных веществах существует некоторое преимущественное пространственное направление. Таким направлением может служить какая-либо специфиче-

ческая ось кристаллической решетки, а также направление, в котором приложено внешнее постоянное поле. В гл. 16 будет показано, каким образом возникает анизотропия магнитных свойств в так называемых ферритах — ферромагнетиках особого вида, помещенных во внешнее постоянное подмагничивающее поле.

1.10. Поляризационные и сторонние токи

Рассмотренный в § 1.9 эффект поляризации диэлектриков связан с перемещением в пространстве заряженных частиц, что равносильно протеканию в области, занятой диэлектриком, некоторых токов, называемых поляризационными токами. Следует подчеркнуть, что принципиальной разницы между токами проводимости и поляризационными токами нет.

Запишем уравнение непрерывности для плотности поляризационного тока $\mathbf{J}_{\text{пол}}$ в виде

$$\frac{\partial \rho_{\text{пол}}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}_{\text{пол}}. \quad (1.45)$$

Одновременно с этим, дифференцируя формулу (1.29), будем иметь

$$\frac{\partial \rho_{\text{пол}}}{\partial t} = -\text{div } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (1.46)$$

откуда

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \partial \mathbf{P} / \partial t. \quad (1.47)$$

Теперь, наконец, можно полностью расшифровать физический смысл составляющих, из которых складывается вектор плотности суммарного тока \mathbf{J}_{Σ} , входящий в формулу (1.18). Два первых слагаемых уже известны — это плотность тока смещения $\mathbf{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ и плотность тока проводимости $\mathbf{J}_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$. Процесс поляризации материальной среды учитывается добавлением плотности поляризационного тока $\mathbf{J}_{\text{пол}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$. Объединить все три перечисленных тока позволило то, что они зависят только от состояния исследуемого электромагнитного процесса в выбранной точке пространства.

В большом числе инженерных задач приходится рассматривать токи, вызываемые внешними источниками. Сюда относятся, например, задачи расчета полей, возбуждаемых антеннами во внешнем пространстве. При этом, как правило, полагают, что ток в антенне целиком

определяется возбуждающим внешним источником и никак не зависит от возбуждаемого электромагнитного поля. Подобные токи принято называть сторонними и обозначать вектор их плотности как $\mathbf{J}_{\text{ст}}$.

Итак, дифференциальная форма закона полного тока принимает развернутый вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}}. \quad (1.48)$$

Поскольку

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

объединяя первые два слагаемые в правой части (1.48), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}}. \quad (1.49)$$

Данное фундаментальное соотношение известно под названием первого уравнения Максвелла.

1.11. Сводка уравнений Максвелла

В настоящем параграфе со справочными целями приведены все уравнения Максвелла, являющиеся наиболее широким обобщением экспериментальных законов электромагнетизма.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

1. $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}} \right) d\mathbf{S},$
2. $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S},$
3. $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV,$
4. $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$
5. $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E},$
6. $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

1. $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}},$
 2. $\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t,$
 3. $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$
 4. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$
 5. $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E},$
 6. $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$
- (1.51)

Чаще всего при решении задач электродинамики используют уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Входящие в них операции rot и div выражаются через комбинации первых частных производных от проекций соответствующих векторных полей (см. приложение). При этом достаточно определить один электрический и один магнитный вектор, так как остальные два вектора могут быть однозначно получены из материальных уравнений поля. Таким образом, уравнения Максвелла представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно шести неизвестных функций (например, $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$).

Решение системы из шести уравнений Максвелла является, вообще говоря, весьма сложной проблемой. Тем не менее, для исследования большого числа практически важных задач оказывается достаточным найти решение при ряде упрощающих предположений. В данной книге будут рассмотрены различные виды таких задач.

1.12. Уравнения Максвелла для монохроматических колебаний. Комплексные амплитуды полей

В систему уравнений Максвелла входят частные производные по четырем независимым переменным — x, y, z, t . Для упрощения решения было бы весьма целесообразно исключить одну из этих переменных. Такая операция оказывается действительно возможной, если рассматриваемый электромагнитный процесс является монохроматическим, т. е. изменение полей во времени представляется гармоническими колебаниями с некото-

рой частотой ω . Помимо того, что этот случай наиболее часто встречается на практике, знание поведения поля на всех частотах позволяет воссоздать любой закон изменения во времени, воспользовавшись методом интеграла Фурье.

В наиболее общем случае вектор какого-либо поля, например поля \mathbf{E} , изменяющегося во времени по гармоническому закону, в некоторой точке пространства записывается в виде

$$\mathbf{E}(t) = E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) \mathbf{1}_x + E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) \mathbf{1}_y + E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \mathbf{1}_z, \quad (1.52)$$

где E_{mx} , E_{my} , E_{mz} — амплитуды отдельных составляющих поля, φ_x , φ_y , φ_z — их фазовые углы. Все перечисленные шесть величин являются вещественными.

С течением времени конец вектора \mathbf{E} , представляемого формулой (1.52), описывает в пространстве замкнутую кривую, причем можно показать, и это в качестве упражнения предоставляется читателю, что данная кривая является эллипсом. Положение плоскости эллипса и величина эксцентриситета определяются как амплитудами, так и фазами отдельных составляющих.

Запись, эквивалентная (1.52), имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re} \{ [E_{mx} e^{j\varphi_x} \mathbf{1}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \mathbf{1}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \mathbf{1}_z] e^{j\omega t} \}. \quad (1.53)$$

Комплексный вектор вида

$$\dot{\mathbf{E}} = E_{mx} e^{j\varphi_x} \mathbf{1}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \mathbf{1}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \mathbf{1}_z \quad (1.54)$$

принято называть комплексной амплитудой*) поля \mathbf{E} . Метод комплексных амплитуд давно уже нашел широкое применение в теоретической электротехнике. Однако следует указать на одно весьма важное различие между тем методом комплексных амплитуд, который применяется в теории цепей, и тем, который находит использование в электродинамике. Дело в том, что в электродинамических задачах комплексные амплитуды

*) В дальнейшем все комплексные амплитуды будут обозначаться точками наверху.

ды полей всегда выступают как трехмерные пространственные векторы. Поэтому изображение их на чертежах в виде некоторых вспомогательных векторов, вращающихся на комплексной плоскости, принципиально невозможно. Экспоненциальные множители с мнимыми показателями, стоящие при комплексных амплитудах, характеризуют исключительно фазовые соотношения между величинами. Например, если заданы комплексные амплитуды двух полей $\dot{\mathbf{E}}_1 = E_0 \cdot \mathbf{1}_x$ и $\dot{\mathbf{E}}_2 = jE_0 \cdot \mathbf{1}_x$, то это говорит не о том, что эти два поля в пространстве образуют угол 90° (пространственная ориентация полей одинакова и задается единичным вектором $\mathbf{1}_x$), а лишь о том, что при изменении во времени поле \mathbf{E}_2 опережает поле \mathbf{E}_1 на величину, равную четверти периода.

Мгновенные значения электромагнитных полей определяются через комплексные амплитуды следующим образом:

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}). \quad (1.55)$$

Комплексные амплитуды могут быть легко введены в уравнения Максвелла. Возьмем первое уравнение Максвелла и подставим в него соответствующие поля, выраженные через их комплексные амплитуды:

$$\begin{aligned} \text{rot Re}(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}) &= \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}) + \\ &+ \sigma \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) + \text{Re}(\mathbf{J}_{\text{ст}} e^{j\omega t}). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Изменяя порядок следования дифференциальных операций и операции взятия вещественной части, что всегда допустимо, а затем сокращая на общий множитель $e^{j\omega t}$, получаем

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}} + \sigma \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_{\text{ст}}. \quad (1.57)$$

Таким образом, переход к комплексным амплитудам полей совершается по тем же правилам, что и в электротехнике, — оператор дифференцирования по времени, действующий на мгновенное значение поля, заменяется на множитель $j\omega$.

Совершенно аналогично преобразуются остальные уравнения Максвелла. Приводим их окончательную сводку:

1. $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}} + \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст}},$
2. $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}},$
3. $\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho},$
4. $\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0,$
5. $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_a \dot{\mathbf{E}},$
6. $\dot{\mathbf{B}} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}.$

(1.58)

1.13. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь

Если воспользоваться материальным уравнением, то первое уравнение Максвелла может быть записано в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст}}, \quad (1.59)$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\sigma/\omega$ носит название комплексной диэлектрической проницаемости данного вещества.

Введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет весьма просто учитывать как диэлектрические, так и проводящие свойства данного вещества. Значение вещественной части $\tilde{\epsilon}_a$ говорит об интенсивности процесса поляризации, в то время как мнимая часть характеризует плотность токов проводимости. Изображая число $\tilde{\epsilon}_a$ на комплексной плоскости (рис. 1.13), мож-

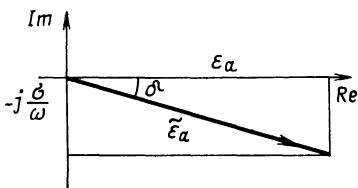


Рис. 1.13. Отображение комплексной диэлектрической проницаемости.

но характеризовать соотношение между вещественной и мнимой частями при помощи угла δ , носящего название угла диэлектрических потерь. Чем больше этот угол, тем относительно большая часть электромагнитной энергии рассеивается в виде тепла при протекании токов проводимости. На практике чаще всего пользуются тангенсом этого угла:

$$\operatorname{tg} \delta = \sigma/\omega\epsilon_a. \quad (1.60)$$

Тангенс угла потерь хороших диэлектриков на СВЧ лежит в пределах $10^{-4} \div 10^{-3}$; если $\operatorname{tg} \delta \gg 10^{-3}$, то диэлектрик обычно считается плохим.

1.14. Уравнения Гельмгольца. Волновой характер электромагнитного поля

Одним из важнейших результатов, полученных Максвеллом, явилось доказательство волновой природы электромагнитного поля. Уже упоминалось о том, что изменение во времени электрического поля приводит к возникновению магнитного поля, неоднородного в пространстве, и наоборот. Физическая картина здесь напоминает процесс обмена энергией между электрическим и магнитным полем в обычном колебательном контуре. Поэтому можно ожидать, что электромагнитный процесс в самом общем случае представляет собой также некоторые колебания. Принципиальная разница здесь заключается в том, что колебания электромагнитного поля должны рассматриваться одновременно во всех точках пространства. В физике колебательное движение непрерывной среды принято называть волновым процессом.

Докажем волновой характер электромагнитного поля математически, сведя уравнения Максвелла к другим уравнениям, которые заведомо описывают волновой процесс.

Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой области пространства, где плотность зарядов отсутствует, т. е. $\rho = 0$. Плотность сторонних электрических токов также предполагается равной нулю.

Выпишем первые два уравнения из системы (1.58) в виде:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (1.61)$$

Эти два уравнения могут быть приведены к одному. Для этого применим операцию rot к левой и правой частям второго уравнения, а затем выразим полученную правую часть через первое уравнение:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j \omega \mu_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = -\gamma^2 \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.62)$$

Здесь $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}$ — в общем случае комплексное число, являющееся, как будет показано, постоянной распро-

странения электромагнитной волны. В литературе для величины γ можно встретить также названия фазовая постоянная или волновое число.

Дальнейшее преобразование формулы (1.62) можно осуществить, если воспользоваться известным тождеством векторного анализа:

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \dot{\mathbf{E}}.$$

Здесь ∇^2 (читается „набла квадрат“) — векторный дифференциальный оператор второго порядка, конкретная форма которого полностью определяется той координатной системой, в которой проводятся вычисления. В декартовой координатной системе действие оператора ∇^2 сводится к тому, что к каждой из проекций векторного поля применяется оператор Лапласа

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если воспользоваться законом Гаусса, который в соответствии с принятым условием $\rho=0$ обеспечивает $\text{div } \dot{\mathbf{E}}=0$, то уравнение (1.62) может быть записано в следующем весьма изящном виде:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (1.63)$$

Пользуясь симметрией уравнений Максвелла, совершенно аналогично получаем также уравнение относительно векторного поля $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.64)$$

Уравнения (1.63) и (1.64) в математической физике носят название уравнений Гельмгольца по имени выдающегося немецкого физика Г. Гельмгольца. Математически можно показать, что эти уравнения описывают стационарные волновые процессы, т. е. распространение в пространстве волн с некоторой постоянной частотой.

Таким образом, получен фундаментальный вывод теории Максвелла — переменность во времени электрических или магнитных полей неизбежно приводит к распространению в пространстве электромагнитных волн.

В координатной форме уравнение Гельмгольца, например (1.63), записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\dot{E}_x \mathbf{1}_x + \dot{E}_y \mathbf{1}_y + \dot{E}_z \mathbf{1}_z) + \gamma^2 (\dot{E}_x \mathbf{1}_x + \dot{E}_y \mathbf{1}_y + \dot{E}_z \mathbf{1}_z) = 0 \quad (1.65)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{E}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{E}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{E}_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Решение системы (1.66) значительно упрощается в тех частных случаях, когда поле не имеет каких-либо составляющих, например $\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0$, а также, тогда, когда поле постоянно в каких-либо плоскостях, например

$$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0.$$

1.15. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Теорема Пойнтинга

Одной из важнейших характеристик электромагнитного поля является его энергия. Впервые вопрос об энергии электромагнитного поля был рассмотрен Максвеллом, который показал, что полная энергия поля, заключенного внутри объема V , складывается из энергии электрического поля

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV \quad (1.67)$$

и энергии магнитного поля

$$W_{\text{м}} = \int_V \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} dV. \quad (1.68)$$

Подынтегральные выражения в формулах (1.67), (1.68) могут, таким образом, рассматриваться как плотности энергии электрического поля

$$w_{\text{э}} = \mathbf{E}\mathbf{D}/2 \quad (1.69)$$

и магнитного поля

$$\omega_M = \mathbf{H}\mathbf{B}/2. \quad (1.70)$$

Из определений (1.67), (1.68) вытекают, в частности, известные в электротехнике формулы для энергии, запасенной в конденсаторе:

$$W_C = CU^2/2,$$

и в катушке индуктивности:

$$W_L = LI^2/2.$$

Энергия электромагнитного поля, заключенного внутри объема V , вообще говоря, не может оставаться постоянной. К числу факторов, обуславливающих изменение энергии поля во времени, следует отнести:

1) превращение части энергии электромагнитного поля в энергию других видов, например в механическую энергию частиц вещества, связанную с их тепловым движением, обусловленным протеканием токов проводимости;

2) работу сторонних источников, которые, в зависимости от конкретных условий, могут как увеличивать запас энергии поля, так и уменьшать его;

3) обмен энергией между выделенным объемом и окружающими его областями пространства за счет специфического процесса, присущего электромагнитному полю и носящему название процесса излучения.

Интенсивность процесса излучения в электродинамике принято характеризовать, определяя в каждой точке пространства особую векторную величину, носящую название вектора Пойнтинга \mathbf{P} . Физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что его модуль и направление характеризуют величину и направление потока энергии излучения в каждой точке пространства. В системе единиц СИ вектор Пойнтинга имеет размерность Дж/с · м², т. е. Вт/м². При этом полная убыль энергии электромагнитного поля, заключенного внутри воображаемого объема V с поверхностью S , обусловленная излучением и отнесенная к единице времени, равна

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{s}.$$

На основании изложенного последний интеграл должен рассматриваться как величина мгновенной мощности

излучения, происходящего по направлению из рассматриваемого объема в окружающее пространство. Если знак данного интеграла отрицателен, то это говорит о том, что поток энергии излучения направлен не из объема V , а внутрь него.

Физически правильные результаты, согласующиеся как с законом сохранения энергии, так и с уравнениями Максвелла, получаются в том случае, если выразить вектор Пойнтинга через мгновенные значения полей $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ следующим образом:

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (1.71)$$

Действительно, по теореме Остроградского — Гаусса для рассматриваемой замкнутой поверхности S будем иметь

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{\Pi} dV = \int_V (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV. \quad (1.72)$$

Здесь было использовано известное тождество векторного анализа

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

С учетом уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}}, \quad (1.73)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

(1.72) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = & - \sigma \int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}) dV - \\ & - \int_V (\mathbf{J}_{\text{ст}} \mathbf{E}) dV - \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Интеграл вида

$$P_{\text{пот}} = \sigma \int_V (\mathbf{E}\mathbf{E}) dV$$

может быть назван мгновенной мощностью потерь, существующих внутри объема V за счет проте-

кания токов проводимости. Другое слагаемое

$$P_{\text{ст т}} = \int_V (\mathbf{J}_{\text{ст}} \mathbf{E}) dV$$

характеризует мгновенную мощность, которая в зависимости от взаимной ориентации векторов $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ и \mathbf{E} может либо вноситься в рассматриваемый объем, либо отводиться из него сторонними токами. Используя электротехнические термины, можно говорить о том, что источники стороннего тока способны выступать как в роли генераторов, так и в роли нагрузок. Наконец, если предположить, что между векторами поля в соответствии с материальными уравнениями существует линейная связь

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H},$$

то последний интеграл в правой части формулы (1.74) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\omega_э + \omega_м) dV.$$

Итак, на основании сказанного приходим к интегральному соотношению вида

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = -P_{\text{пот}} - P_{\text{ст т}} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\omega_э + \omega_м) dV, \quad (1.75)$$

являющемуся математическим выражением теоремы Пойнтинга. Эта теорема устанавливает факт баланса энергий внутри произвольной области, в которой существует электромагнитное поле.

Для важного в практическом отношении частного случая, при котором поле изменяется во времени по гармоническому закону, вектор Пойнтинга может быть выражен через комплексные амплитуды полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , поскольку

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}), \quad (1.76)$$

$$\mathbf{H} = \text{Re}(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{H}}^* e^{-j\omega t}). \quad (1.77)$$

Здесь индекс * обозначает комплексно-сопряженные величины.

Подставляя (1.76) и (1.77) в формулу (1.71), будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{4} \{ [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] + [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] + [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t} + \\ & + [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] e^{-j2\omega t} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} ([\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t}). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (1.78) неизменно во времени, а второе слагаемое изменяется во времени с удвоенной частотой.

Таким образом, процесс переноса энергии в электромагнитном поле, изменяющемся во времени по гармоническому закону, характеризуется, с одной стороны, вещественным вектором

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*], \quad (1.79)$$

равным средней за период плотности мощности излучения, и вещественным вектором

$$\Pi_{\text{кол}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} ([\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t}), \quad (1.80)$$

который указывает на существование колеблющейся составляющей вектора Пойнтинга. Следует иметь в виду, что среднее за период значение вектора $\Pi_{\text{кол}}$ равно нулю.

Ассоциация вектора Пойнтинга с процессом переноса электромагнитной энергии от источника, например антенны, к любым другим сколь угодно удаленным точкам пространства не всегда верна. Физический опыт и теоретическое рассмотрение на основе уравнений Максвелла (см. гл. 14) позволяют утверждать, что в узком смысле слова термин «излучение» применим лишь к переменным во времени процессам в силу волнового характера распространения электромагнитного поля. Тем не менее, введенный вектор Пойнтинга позволяет правильно описать процесс передачи электромагнитной энергии в системах с неизменными во времени полями. В качестве примера на рис. 1.14 изображен эскиз двухпроводной линии передачи, в которой энергия от источника постоян-

ной э. д. с. передается к резистивной нагрузке. Здесь же изображен характер силовых линий полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Из рисунка следует, что в каждой точке пространства может быть построен отличный от нуля вектор Пойнтинга \mathbf{P} , ориентированный вдоль оси линии от генератора к нагрузке. Если проинтегрировать вектор Пойнтинга по

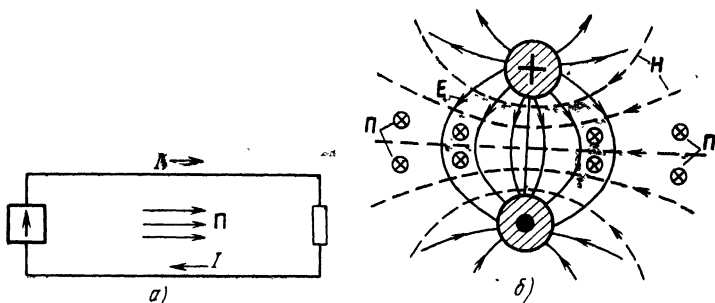


Рис. 1.14. Передача энергии электромагнитного поля от генератора к нагрузке:

a — принципиальная схема; *б* — конфигурация силовых линий поля в поперечном сечении.

поперечной плоскости в бесконечных пределах, то в результате будет получена величина переносимой мощности, выражаемая в электротехнических терминах как произведение напряжения на нагрузке и протекающего тока. Вывод, следующий отсюда, может показаться несколько неожиданным: с точки зрения электродинамики энергия в данной системе переносится не токами, текущими в проводниках, а электромагнитным полем в окружающем пространстве. Наличие проводников и токов в них выступает лишь как необходимое условие существования полей требуемой конфигурации.

В качестве другого интересного примера рассмотрим систему, состоящую из постоянного магнита и заряженного конденсатора, ориентированных друг относительно друга так, как изображено на рис. 1.15. Здесь поля \mathbf{E} и \mathbf{H} непараллельны друг другу, что позволяет ввести в каждой точке пространства отличный от нуля вектор Пойнтинга $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$. Поскольку рассматриваемые поля статические и в системе не протекают токи проводимости, в соответствии с уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0.$$

Таким образом, в данной физической задаче векторное поле $\mathbf{\Pi}$ не имеет источников; поток его через любую замкнутую поверхность равен нулю, что говорит о постоянстве во времени полной энергии электромагнитного поля внутри произвольной замкнутой поверхности.

В заключение следует указать, что при анализе электромагнитных волновых полей, гармонически изменяющихся во времени, иногда вводится комплексный вектор Пойнтинга

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \quad (1.81)$$

обладающий тем свойством, что

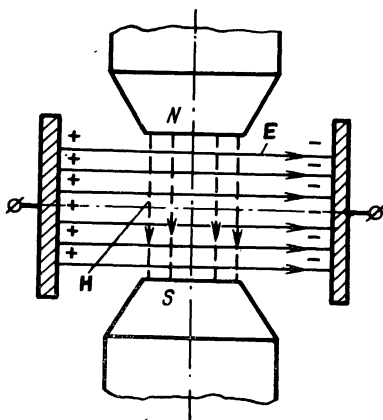


Рис. 1.15. Система из заряженного конденсатора и постоянного магнита.

$$\mathbf{\Pi}_{\text{cp}} = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}}. \quad (1.82)$$

Легко видеть аналогию между комплексным вектором Пойнтинга и известной из электротехники полной (кажущейся) мощностью гармонического колебательного процесса. Так, если комплексный вектор Пойнтинга оказывается мнимым, то это значит, что рассматриваемый волновой процесс не связан с переносом средней мощности, которая по электротехнической терминологии должна быть названа активной мощностью. Поэтому мнимый вектор Пойнтинга связывают обычно с реактивной энергией электромагнитного поля.

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В гл. 1 было указано, что переменное во времени электромагнитное поле носит волновой характер. В данной главе будет рассмотрен простейший, но весьма важный для практики вид волнового движения поля, носящий название плоских электромагнитных волн.

2.1. Общие свойства волновых процессов

С самой общей точки зрения волнами называются колебательные движения непрерывных сред. Важно отметить принципиальную разницу в математическом описании волновых процессов и таких явлений, как колебания токов и напряжений в обычных радиотехнических цепях. Если в теории цепей состояние любой системы однозначно задается значениями конечного числа токов и напряжений в отдельных ветвях, то для полного задания волнового процесса требуется, вообще говоря, знание характеристик его в бесконечно большом числе точек пространства. Иначе говоря, среда, в которой распространяются волны, представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы.

Физическая природа волновых явлений чрезвычайно разнообразна. Так, известны электромагнитные волны, звуковые — акустические волны, волны на поверхности тяжелой жидкости и т. д. Проведение всеобъемлющей классификации здесь весьма затруднительно. Для понимания структуры электромагнитных волн сравним между собой два хорошо известных и легко представимых волновых процесса — звуковые волны (рис. 2.1,а) и волны на поверхности воды (рис. 2.1,б). Пусть эти волны распространяются в направлении стрелок, указанных на рисунках. Звуковые волны, представляющие собой перемещение в пространстве областей сгущения и разрежения газа, характерны тем, что в них каждая отдельная частица газа колеблется в направлении, совпадающем с направлением распространения волны. Такие волны носят название продольных волн. В лите-

ратуре можно встретить также термины акустические или скалярные волны.

Совсем иной природой обладают волны на поверхности воды. Здесь колеблющиеся частицы перемещаются в направлении, перпендикулярном направлению распространения. Поэтому для волны данного вида недостаточно лишь указать величину смещения колеблющихся точек относительно положения равновесия, а следует ука-

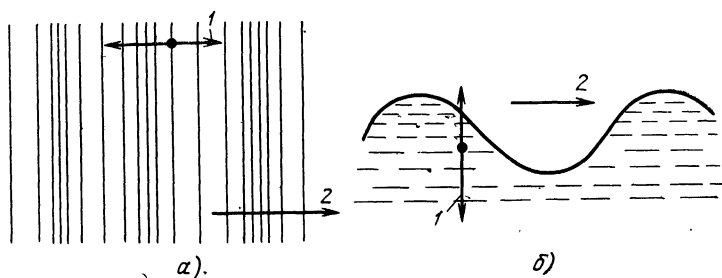


Рис. 2.1. Некоторые примеры волновых процессов: а — звуковые волны; б — волны на поверхности воды.

зать конкретно ту плоскость, в которой происходят колебания. Эта плоскость называется плоскостью поляризации волны, а сам волновой процесс — поперечными, поляризованными или векторными волнами.

Можно доказать, и это будет видно из примеров, рассмотренных в настоящей главе, что электромагнитные волны имеют вид поперечных волн.

Волны разной физической природы классифицируются в зависимости от того, какую конфигурацию они принимают в пространстве.

Плоские волны. Рассмотрим безграничное трехмерное пространство с декартовой системой координат x, y, z , в каждой точке которого задана некоторая величина A (физическая природа ее безразлична), которая во времени и в пространстве меняется по закону

$$A(z, t) = A_0 \cos(\omega t \mp \beta z). \quad (2.1)$$

При этом говорят, что в пространстве существует монохроматическая плоская волна. Аргумент косинуса, т. е. $\omega t \mp \beta z$, называемый обычно фазой волны, является функцией времени t и пространственной координаты z .

Если зафиксировать z , то величина A принимает те же самые значения через промежутки времени, кратные периоду $T=2\pi/\omega$. Если же фиксировано время, то величина A изменяется периодически вдоль оси z с периодом λ , называемым длиной волны. Легко видеть, что величины β и λ связаны друг с другом:

$$\beta = 2\pi/\lambda, 1/\text{м}. \quad (2.2)$$

Число β служит важнейшей характеристикой волнового процесса и носит название постоянной распространения волны. Употребляются также термины фазовая постоянная и волновое число. Физический смысл величины β состоит в том, что она указывает, на сколько радиан изменяется фаза волны при прохождении одного метра пути.

Наличие двух возможных знаков в формуле (2.1) связано с тем, что плоские волны могут распространяться в двух противоположных направлениях. Назовем поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$\omega t \mp \beta z = \text{const}, \quad (2.3)$$

волновым фронтом плоской волны. Очевидно, что в рассматриваемом случае волновые фронты представляют собой бесконечные плоскости, перпендикулярные оси z и перемещающиеся в пространстве со скоростью

$$v_{\text{ф}} = dz/dt = \omega/\beta, \quad (2.4)$$

носящей название фазовой скорости. Поскольку время изменяется всегда лишь в одном направлении, уравнение

$$\omega t - \beta z = \text{const} \quad (2.5)$$

соответствует фронту волны, распространяющейся в направлении положительной оси z . Изменение знака в фазе волны ведет к изменению направления ее распространения.

Введем комплексные амплитуды плоских волн. В соответствии с методом, рассмотренным в § 1.12, будем иметь для волны, распространяющейся в положительном направлении,

$$\dot{A}_+ = A_0 e^{-j\beta z}, \quad (2.6)$$

а для волны, идущей в противоположную сторону,

$$\dot{A}_- = A_0 e^{+j\beta z}. \quad (2.7)$$

Распространение волн в любой реальной среде неизбежно сопровождается уменьшением их амплитуды за счет тепловых потерь. Закон затухания легко найти из следующих простых соображений. Предположим, что в начальной плоскости $z=0$ (рис. 2.2) амплитуда волны

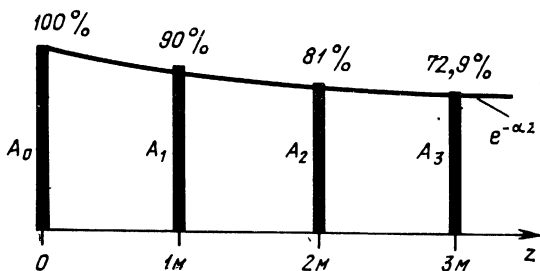


Рис. 2.2. Спадание амплитуды волны при распространении в среде с потерями.

имеет исходную величину A_0 , условно принимаемую за 100%. Положим далее, что при прохождении 1 м пути амплитуда падает на 10%, т. е. $A_1=90\%$. Легко сообразить, что $A_2=0,9 \cdot A_1=81\%$, $A_3=72,9\%$ и т. д. Общая закономерность имеет здесь вид

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots = \frac{A_{n-1}}{A_n} = \dots \quad (2.8)$$

Из элементарной алгебры известно, что именно таким свойством обладает показательная функция, т. е. в общем виде можно записать соотношение пропорциональности

$$A_0(z) \sim e^{-\alpha z}. \quad (2.9)$$

Здесь α носит название постоянной затухания волны. Величины β и α можно объединить, введя комплексную постоянную распространения γ , т. е.

$$\gamma = \beta - j\alpha. \quad (2.10)$$

Итак, вещественная часть γ определяет закон изменения фазы в распространяющейся волне, в то время как мнимая часть характеризует затухание.

Сферические волны. Данный тип волн получается в тех случаях, когда какой-либо точечный источник возбужда-

ет неограниченное однородное пространство. В силу полной симметрии задачи волновые фронты имеют вид сфер. Если ограничиться простейшим случаем, при котором амплитуда колебаний зависит лишь от радиальной координаты r , то можно показать, что при гармоническом законе изменения поля во времени справедлива следующая зависимость:

$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \beta r),$$

или, если выразить величину $A(r, t)$ через ее комплексную амплитуду,

$$\dot{A}(r) = A_0 e^{-j\beta r} / r. \quad (2.11)$$

Последний результат легко проверить, подставив (2.11) в уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{A} + \beta^2 \dot{A} = 0,$$

записанное в сферической системе координат (см. приложение) с учетом пространственной симметрии задачи. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в гл. 16.

Сферические волны являются важным объектом изучения в электродинамике, поскольку с ними связаны многие задачи об излучении антенн.

Цилиндрические волны. Волны, возбуждаемые бесконечной нитью источников, расположенных по оси z , носят название цилиндрических волн. Волновые фронты при этом имеют вид концентрических цилиндров. Можно показать, что на расстоянии от оси, значительно превышающем длину волны, справедливо следующее приближенное равенство:

$$A(r, t) \approx \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - \beta r). \quad (2.12)$$

Цилиндрические волны рассматриваются в задачах электродинамики, связанных с излучением электромагнитных волн отрезками линейных проводников.

2.2. Однородная плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией

Данный простейший вид волнового движения электромагнитного поля, несмотря на его идеализированность, имеет большое значение для решения ряда прак-

тически важных задач. Например, рассматривая сферические волны, возбужденные точечным источником, на достаточно большом удалении от него, можно из-за малой кривизны заменить малый участок сферы плоскостью. Другими словами, плоские волны являются предельным случаем сферических волн при стремлении радиуса сферы к бесконечности.

Сделаем следующие предположения относительно рассматриваемой плоской волны:

а) комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}}$ ориентирован вдоль оси z , причем единственная составляющая вещественна:

$$\dot{\mathbf{P}} = P_z \mathbf{1}_z,$$

откуда [см. формулу (1.71) — определение вектора Пойнтинга] следует, что продольные составляющие электрического и магнитного полей в рассматриваемой плоской волне равны нулю:

$$E_z = 0, \quad H_z = 0;$$

б) плоская волна однородна, т. е. амплитуды полей вдоль волнового фронта неизменны; поскольку все волновые фронты параллельны плоскости XOY , последнее условие математически записывается следующим образом:

$$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0;$$

в) из двух возможных поперечных составляющих электрического вектора \dot{E}_x и \dot{E}_y лишь \dot{E}_x отлична от нуля. Таким образом, электрический вектор колеблется в плоскости XOZ . Эта плоскость называется плоскостью поляризации, а сама волна — плоской волной с линейной поляризацией.

С учетом сделанных предположений система уравнений Гельмгольца (1.66) относительно составляющих электрического вектора превращается в единственное уравнение

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + \gamma^2 \dot{E}_x = 0. \quad (2.13)$$

В этом уравнении знак частной производной заменен на знак обыкновенной производной, поскольку неизвестная функция зависит лишь от координаты z . Общее решение

данного уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_1 e^{-j\gamma z} + \dot{A}_2 e^{j\gamma z}, \quad (2.14)$$

где \dot{A}_1, \dot{A}_2 — произвольные, вообще говоря, комплексные, постоянные.

Сравнивая вид решения (2.14) с формулами (2.6) и (2.7), убеждаемся, что оно отображает сумму двух волн с одинаковыми постоянными распространения γ , распространяющихся в разные стороны вдоль оси z .

Положим для определенности $\dot{A}_2 = 0$, тогда

$$\dot{E}_x = \dot{A}_1 e^{-j\gamma z}. \quad (2.15)$$

Найдем магнитный вектор в данной плоской волне. Для этого воспользуемся вторым уравнением Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}},$$

откуда следует

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{-j \omega \mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.16)$$

Раскрывая операцию rot , убеждаемся, что

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{-j \omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \cdot \mathbf{1}_y = \frac{\gamma}{\omega \mu_a} \dot{E}_x \mathbf{1}_y. \quad (2.17)$$

Итак, вектор магнитного поля в данной плоской волне имеет лишь составляющую \dot{H}_y и, следовательно, перпендикулярен к вектору электрического поля.

Чрезвычайно важно отметить, что, как это следует из (2.17), между составляющими электрического и магнитного полей существует пропорциональность:

$$\dot{E}_x / \dot{H}_y = \omega \mu_a / \gamma. \quad (2.18)$$

Вывод, следующий отсюда, состоит в том, что при отсутствии потерь в среде, т. е. при γ вещественном, поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ колеблются в фазе. В соответствии с (1.79) это означает, что плоская электромагнитная волна в среде без потерь переносит только активную мощность.

Из теории линий с распределенными параметрами известно, что между напряжением \dot{U} и током \dot{I} в бегу-

щей волне существует пропорциональность, причем $Z_c = \dot{U}/\dot{I}$ называется характеристическим (волновым) сопротивлением данной линии. В аналогичной форме можно представить и соотношение (2.18):

$$\dot{E}_x/\dot{H}_y = Z_c. \quad (2.19)$$

Здесь Z_c — некоторая постоянная, имеющая размерность сопротивления и называемая характеристическим (волновым) сопротивлением данной среды. Из развернутого выражения для γ следует, что

$$Z_c = \omega \mu_a / \gamma = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}, \quad (2.20)$$

т. е. Z_c полностью определяется лишь параметрами среды.

Параметром, очень важным для расчетов, является характеристическое сопротивление вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}. \quad (2.21)$$

Подставив в (2.21) значения $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м и $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ Ф/м, получим $Z_0 = 120\pi = 377$ Ом.

Знание характеристического сопротивления данной среды позволяет находить электрическое поле в плоской волне по известному магнитному полю и наоборот.

2.3. Фазовая скорость и постоянная затухания плоских волн

В данном параграфе в качестве примеров использования приведенных общих положений будут получены характеристики распространения плоских электромагнитных волн в некоторых наиболее важных средах.

Вакуум. Фазовая скорость волн в вакууме находится по общей формуле (2.4). Поскольку фазовая постоянная волн в вакууме

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0},$$

фазовая скорость определяется как

$$v_{\Phi_0} = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = c. \quad (2.22)$$

Таким образом, получен один из основных результатов теории Максвелла — отождествление скорости свега в вакууме со скоростью произвольной электромагнитной волны. Другими словами, скорость плоских электромагнитных волн в вакууме равна скорости света c независимо от частоты этих волн. В физике среды с подобными свойствами носят название сред без дисперсии.

Совершенно очевидно, что из-за отсутствия каких-либо механизмов потерь $\alpha_0 = 0$.

Диэлектрик без потерь. Рассматривая случай немагнитного диэлектрика с $\mu = 1$, что часто выполняется на практике, будем иметь

$$v_{\text{ф диэл}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (2.23)$$

Таким образом, фазовая скорость, а следовательно, и длина волны в диэлектрике уменьшаются в $\sqrt{\epsilon}$ раз по сравнению с аналогичными величинами, вычисленными для вакуума.

Поскольку потери отсутствуют, то по-прежнему $\alpha_{\text{диэл}} = 0$.

Диэлектрик с потерями. Для анализа распространения волн в данной среде нужно воспользоваться понятием комплексной диэлектрической проницаемости

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = |\tilde{\epsilon}_a| e^{-j\delta}, \quad (2.24)$$

где

$$|\tilde{\epsilon}_a| = \sqrt{\epsilon_a^2 + \sigma^2/\omega^2};$$

$$\delta = \arctg(\sigma/\omega\epsilon_a).$$

Комплексная постоянная распространения запишется следующим образом:

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{|\tilde{\epsilon}_a| \mu_a} e^{-j\delta/2}. \quad (2.25)$$

Поскольку $\gamma = \beta - j\alpha$, раскрывая выражение (2.25) по формуле Эйлера, будем иметь значение фазовой постоянной

$$\beta = \omega \sqrt{|\tilde{\epsilon}_a| \mu_a} \cos(\delta/2) \quad (2.26)$$

и постоянной затухания

$$\alpha = \omega \sqrt{|\tilde{\epsilon}_a| \mu_a} \sin(\delta/2). \quad (2.27)$$

Как уже указывалось, реальные диэлектрики характеризуются весьма малыми углами потерь, порядка $10^{-4} \div 10^{-3}$, в силу чего с точностью до величин порядка δ^2 можно считать

$$|\tilde{\epsilon}_a| \approx \epsilon_a, \quad \cos \frac{\delta}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2}. \quad (2.28)$$

Отсюда

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (2.29)$$

$$v_\phi = c/\sqrt{\epsilon}, \quad (2.30)$$

$$\alpha = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \omega \delta/2 = \beta \delta/2. \quad (2.31)$$

Вывод, следующий из формул (2.29) — (2.31), заключается в том, что при расчете фазовых соотношений в первом приближении можно не учитывать потерь в материале. С другой стороны, коэффициент затухания плоских волн в неидеальном диэлектрике прямо пропорционален углу диэлектрических потерь.

2.4. Плоские электромагнитные волны в хорошо проводящих средах

Вопрос о распространении плоских волн в реальных металлах и металлоподобных средах рассмотрим более подробно из-за его особой практической важности. По определению с электродинамической точки зрения среда является хорошо проводящей, т. е. металлоподобной, если в каждой точке ее плотность токов проводимости $\mathbf{J}_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$ значительно превосходит плотность токов смещения $\mathbf{J}_{\text{см}} = j\omega \epsilon_a \mathbf{E}$. Это же условие металлоподобности может быть сформулировано и как

$$\sigma/\omega \gg \epsilon_a, \quad (2.32)$$

т. е. мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости должна значительно превосходить вещественную часть.

Очевидно, что чем ниже частота ω , тем ближе при прочих равных условиях приближается данная среда к идеальному металлу. На достаточно низких частотах многие среды, известные как диэлектрики, становятся металлоподобными. Например, для сухой почвы с параметрами $\epsilon = 4$, $\sigma = 0,01$ См/м на частоте 1 МГц имеем $\epsilon_a = 3,56 \cdot 10^{-11}$, $\sigma/\omega = 1,6 \cdot 10^{-9}$. Таким образом, на частотах радиовещательных диапазонов сухая почва ведет себя подобно металлу. Такое свойство в ряде случаев позволяет значительно упростить решение практических задач.

Согласно сделанному предположению комплексную диэлектрическую проницаемость металлоподобной среды можно считать мнимой:

$$\tilde{\epsilon}_{ам} = -j\sigma/\omega. \quad (2.33)$$

Найдем комплексную постоянную распространения плоских электромагнитных волн в такой среде. По общему правилу,

$$\gamma_m = \beta_m - j\alpha_m = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_{ам}\mu_{ам}} = \sqrt{-j\omega\mu_{ам}\sigma}. \quad (2.34)$$

Поскольку

$$\sqrt{-j} = (1 - j)/\sqrt{2}, \quad (2.35)$$

(2.34) можно переписать в виде

$$\gamma_m = \sqrt{\omega\mu_{ам}\sigma/2}(1 - j). \quad (2.36)$$

Итак,

$$\beta_m = \alpha_m = \sqrt{\omega\mu_{ам}\sigma/2}. \quad (2.37)$$

Отсюда можно вычислить длину волны в хорошо проводящей среде:

$$\lambda_m = 2\pi/\beta_m = 2\pi \sqrt{2/\omega\mu_{ам}\sigma}. \quad (2.38)$$

Интересно отметить, что длина волны в металле значительно сокращается по сравнению с длиной волны в свободном пространстве. Действительно, легко вычислить, что

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_0} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\epsilon_{ам}}{\sigma/\omega}} \ll 1. \quad (2.39)$$

Согласно неравенству (2.39) в металле значительно снижается фазовая скорость плоских электромагнитных волн.

Как известно, амплитуда электромагнитных волн в среде с потерями уменьшается по закону $e^{-\alpha z}$. Расстояние d , на котором амплитуда электромагнитных волн падает в e раз по сравнению с ее начальным уровнем, называется глубиной проникновения или глубиной поверхностного слоя. Эта величина удовлетворяет очевидному соотношению

$$\alpha d = 1. \quad (2.40)$$

Пользуясь (2.37) и (2.40), будем иметь

$$d = 1/\alpha_M = \lambda_M/2\pi. \quad (2.41)$$

Таким образом, приходим к другому определению: металлоподобной называется такая среда, в которой поле затухает на расстоянии, меньшем одной длины волны. Формула для вычисления глубины поверхностного слоя имеет следующий вид:

$$d = \sqrt{2/\omega\mu_{ам}\sigma}, \quad (2.42)$$

т. е. глубина проникновения электромагнитных волн в металл уменьшается с ростом частоты и его удельной объемной проводимости.

Конкретный расчет по формуле (2.42) показывает, что для металлов на частотах СВЧ диапазона величина d оказывается весьма малой. Так, для меди, у которой $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м на частоте 10 ГГц ($\lambda_0 = 3$ см), имеем $d = 0,6$ мкм. Отсюда следует важный для практики вывод об использовании нанесенного на поверхность конструкции слоя хорошо проводящего вещества, например серебра толщиной порядка 0,01 мм. Такое проводящее покрытие позволяет просто и дешево выполнять элементы СВЧ устройств с малыми тепловыми потерями.

2.5. Плоские электромагнитные волны с вращающейся поляризацией

В силу линейности уравнений Максвелла, если $\{\dot{E}_1, \dot{H}_1\}$ и $\{\dot{E}_2, \dot{H}_2\}$ — их решения, сумма $\{\dot{E}_1 + \dot{E}_2, \dot{H}_1 + \dot{H}_2\}$ также является решением.

Рассмотрим две плоские электромагнитные волны частного вида, комплексные амплитуды электрических

векторов которых имеют следующий вид:

$$\dot{E}_1 = E_0 e^{-j\beta z} \mathbf{1}_x, \quad (2.43)$$

$$\dot{E}_2 = -j E_0 e^{-j\beta z} \mathbf{1}_y.$$

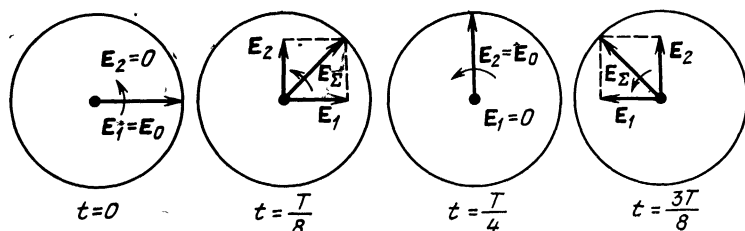


Рис. 2.3. Векторное сложение двух линейно поляризованных волн.

Соответствующие мгновенные значения запишутся как

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{1}_x,$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{1}_y. \quad (2.44)$$

Из данных формул следует, что поле E_2 повернуто относительно поля E_1 в пространстве на угол 90° и, кроме того, отстает по времени на четверть периода.

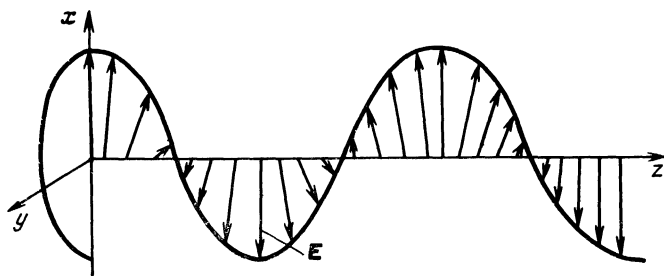


Рис. 2.4. Электромагнитная волна с круговой поляризацией.

Положим для определенности $z=0$ и рассмотрим векторную сумму этих двух колебаний $E_\Sigma = E_1 + E_2$.

Очевидно, что $|E_\Sigma| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, причем с течением времени результирующий вектор будет поворачиваться (рис. 2.3). Если теперь рассмотреть различные положения результирующего вектора в процессе распространения

ния обеих волн, то нетрудно понять, что конец вектора E_x будет описывать в пространстве винтовую линию (рис. 2.4). Очевидно, что совершенно аналогичным будет характер изменения в пространстве результирующего вектора H_x .

Волна рассмотренного типа носит название плоской электромагнитной волны с круговой вращающейся поляризацией. Различают волны с правым вращением, когда с конца оси z вращение вектора E_x наблюдается против часовой стрелки, а также волны с левым вращением.

В общем случае, при неравенстве амплитуд составляющих или при невыполнении условий как временной, так и пространственной квадратур получается эллиптическая поляризация плоской электромагнитной волны. Для определения степени эллиптичности данной волны рассматривают сечение воображаемой цилиндрической области, по боковой поверхности которой скользит вектор E_x (рис. 2.5), и вводят коэффициент эллиптичности волны как отношение большой оси эллипса к малой:

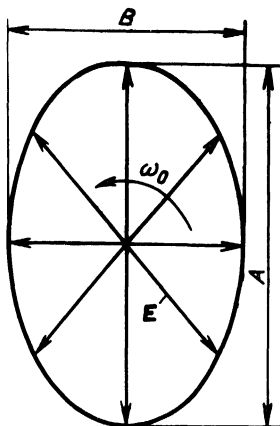


Рис. 2.5. К определению коэффициента эллиптичности.

$$k = A/B. \quad (2.45)$$

Очевидно, что волна с вращающейся эллиптической поляризацией является наиболее общим случаем плоской электромагнитной волны, который включает в себя как волну с линейной поляризацией ($k = \infty$), так и волну с круговой поляризацией ($k = 1$).

2.6. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении

В заключение рассмотрим важный для последующего случай, когда плоская электромагнитная волна распространяется вдоль некоторой произвольной оси z' , не сов-

падающей с осью z (рис. 2.6). Относительно новой оси имеем соотношение пропорциональности:

$$\dot{E} \sim e^{-j\beta z'} \quad (2.46)$$

Волновые фронты в данном случае представляют собой бесконечные плоскости, удовлетворяющие уравнению вида

$$z' = \text{const.} \quad (2.47)$$

Итак, требуется выразить величину z' через исходные координаты x , y , z . Для этого отметим, что z' является

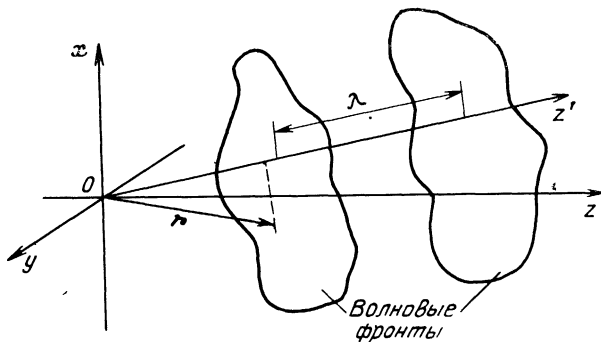


Рис. 2.6. Распространение плоской волны в произвольном направлении.

проекцией любого радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из начала координат так, что конец его лежит на волновом фронте (см. рис. 2.6). Математически это запишется так:

$$z' = \mathbf{r} \mathbf{1}_{z'} \quad (2.48)$$

В системе координат x , y , z имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z, \\ \mathbf{1}_{z'} &= \xi\mathbf{1}_x + \eta\mathbf{1}_y + \zeta\mathbf{1}_z, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $\xi = \cos(\widehat{z'}, x)$; $\eta = \cos(\widehat{z'}, y)$; $\zeta = \cos(\widehat{z'}, z)$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{1}_{z'}$.

Отсюда на основании (2.48) зависимость (2.46) запишется в виде

$$\dot{E} \sim e^{-j\beta(x\xi + y\eta + z\zeta)}. \quad (2.50)$$

Легко показать, что все использованные ранее выражения комплексных амплитуд плоских волн являются частными случаями формулы (2.50).

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Постановка задачи

Рассмотренный в гл. 2 простейший вид электромагнитного волнового процесса — плоские волны — является весьма идеализированным, поскольку здесь предполагается бесконечная протяженность волновых фронтов. В любой задаче электромагнитное поле тем или иным способом ограничено в пространстве. Естественными границами могут быть, например, металлические стенки или границы раздела между средами с различными параметрами. Если параметры сред на границе раздела изменяются скачкообразно, то в общем случае компоненты векторов электромагнитного поля также претерпевают разрыв в точках границы. В данной главе будут найдены связи между векторами электромагнитного поля на границе, которые удовлетворяли бы уравнениям Максвелла.

Математическая постановка данной задачи выглядит следующим образом. Предположим (рис. 3.1), что окружающее пространство, т. е. среда 1, обладает в каждой своей точке электродинамическими параметрами ϵ_{a1} , μ_{a1} , σ_1 . Внутри области 1 выделяется область 2, занимающая объем V , с поверхностью S . Среда 2 имеет параметры ϵ_{a2} , μ_{a2} , σ_2 . Пусть на поверхности раздела S выделена произвольная точка P , причем известно полное электромагнитное поле в бесконечно малой окрестности этой точки, относящейся к области 1. Требуется отыскать электромагнитное поле в такой же окрестности, принадлежащей области 2.

Для упрощения решения поставленной задачи векторы электромагнитного поля, принадлежащие окрестности точки P , принято разлагать на тангенциальные (касательные) и нормальные составляющие. Так, вектор \mathbf{E} (см. рис. 3.2) может быть представлен в виде

$$\mathbf{E} = E_{\tau} \mathbf{1}_{\tau} + E_n \mathbf{1}_n. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{1}_{\tau}$, $\mathbf{1}_n$ — единичные векторы тангенциального и нормального направлений. Оба единичных вектора лежат

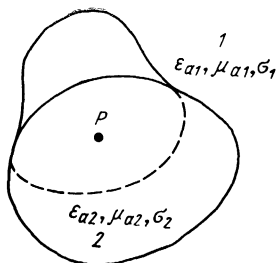


Рис. 3.1. К постановке задачи о граничных условиях.

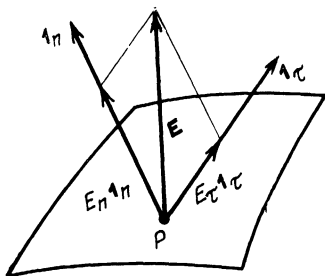


Рис. 3.2. Разложение вектора поля на тангенциальную и нормальную составляющие.

в плоскости, образованной вектором \mathbf{E} и нормалью к поверхности, проведенной в точке P .

Далее будет в отдельности рассмотрено поведение тангенциальных и нормальных составляющих векторов на границе раздела.

3.2. Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля

Обозначим через \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 векторные поля магнитной индукции в средах 1 и 2 соответственно (рис. 3.3). Выделим в окрестности точки P цилиндрический объем с ос-

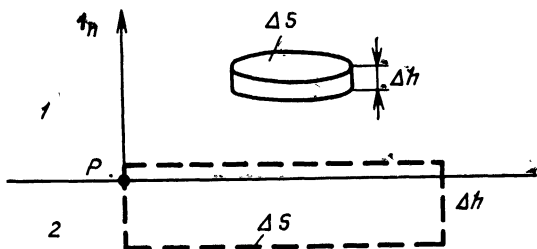


Рис. 3.3. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.

нованиями ΔS и высотой образующей Δh , достаточно малый для того, чтобы считать \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 постоянными в пределах площадей ΔS . Поток вектора магнитной индукции через суммарную поверхность запишется следующим

образом:

$$\oint_{S_{\Sigma}} \mathbf{B} d\mathbf{S} \cong \mathbf{B}_1 \mathbf{1}_n \Delta S - \mathbf{B}_2 \mathbf{1}_n \Delta S +$$

+ *поток через боковую поверхность.* (3.2)

Приближенное равенство (3.2) становится точным при стремлении ΔS к нулю.

Если же устремить к нулю высоту цилиндра Δh , то соответственно бесконечно малым станет поток вектора индукции через боковую поверхность. Следовательно

$$\lim \oint_{S_{\Sigma}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 \mathbf{1}_n \Delta S - \mathbf{B}_2 \mathbf{1}_n \Delta S. \quad (3.3)$$

Поскольку во всех случаях справедлив закон неразрывности магнитных силовых линий (§ 1.5), запишем

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{1}_n - \mathbf{B}_2 \mathbf{1}_n = 0 \quad (3.4)$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.5)$$

Таким образом, нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред непрерывны. Поскольку $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$, последнее соотношение может быть записано относительно напряженностей магнитного поля:

$$\mu_{a1} H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}. \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что в общем случае напряженность магнитного поля на границе раздела испытывает скачок.

3.3. Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля

Методика вывода граничных условий и соответствующая иллюстрация остаются здесь совершенно аналогичными тем, которые были использованы в § 3.2. Однако если ранее для магнитного поля всегда выполнялось $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, то в случае электрического поля будем иметь $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$. Отсюда возможны два случая.

1. Плотность поверхностных электрических зарядов равна нулю.

Суммарный электрический заряд, заключенный внутри малой цилиндрической области (см. рис. 3.3), при

этом равен нулю. В соответствии с теоремой Гаусса

$$\oint_{S_z} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q = 0, \quad (3.7)$$

откуда следует

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (3.8)$$

и

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}. \quad (3.9)$$

Итак, при отсутствии поверхностных электрических зарядов нормальные составляющие векторов электрического смещения на границе раздела двух сред непрерывны, в то время как нормальные составляющие напряженностей электрического поля в общем случае претерпевают скачок.

2. На границе раздела равномерно распределен поверхностный электрический заряд с плотностью $\sigma_{\text{пов}}$, Кл/м².

В этом случае, очевидно, стремление к нулю высоты цилиндра Δh не влияет на величину заряда, заключенного внутри области. Воспользовавшись законом Гаусса, можно записать формулу, аналогичную (3.3):

$$\lim \oint_{S_z} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 \mathbf{1}_n \Delta S - \mathbf{D}_2 \mathbf{1}_n \Delta S = \sigma_{\text{пов}} \Delta S, \quad (3.10)$$

откуда

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}}. \quad (3.11)$$

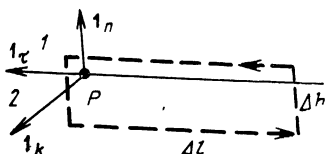
Из выражения (3.11) следует, что при наличии заряженной границы раздела нормальные составляющие векторов электрического смещения испытывают скачок на величину плотности поверхностного заряда в исследуемой точке. Физически это обусловлено тем, что заряд, расположенный на поверхности, создает собственное поле, ориентированное таким образом, что по одну сторону от границы раздела это поле складывается с внешним полем, а по другую вычитается.

3.4. Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля

Задача о поведении на границе раздела тангенциальных составляющих магнитного поля решается на основе интегральной формулировки закона полного тока (см. § 1.6) для некоторого малого контура, проведенного в окрестности точки P ,

Введем в точке P три взаимно ортогональных единичных вектора $\mathbf{1}_\tau$, $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{1}_k$ (рис. 3.4). Два из них, по-прежнему, являются единичными векторами тангенциального

Рис. 3.4. К выводу граничных условий для тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля.



и нормального направлений, а вектор $\mathbf{1}_k$ образует нормаль к плоскости, образованной первыми двумя векторами и лежит в плоскости границы раздела.

Выделим в окрестности точки P достаточно малый прямоугольный контур со сторонами Δl и Δh ($\Delta h \ll \Delta l$), лежащий в плоскости, образованной векторами $\mathbf{1}_\tau$ и $\mathbf{1}_n$. Данный контур строится так, что обе меньшие стороны пересекают границу раздела; одна из больших сторон располагается в области 1, а другая — в области 2. Наконец, будем считать, что на контуре задано такое направление обхода, которое с конца вектора $\mathbf{1}_k$ наблюдается против часовой стрелки.

В обеих областях, разделяемых границей, протекают некоторые токи, которые могут включать как токи проводимости, так и токи смещения. Применим к рассматриваемому контуру закон полного тока, причем, как в § 3.2, будем считать, что размеры сторон контура достаточно малы для того, чтобы в их пределах считать векторы поля \mathbf{H} постоянными. В результате получим

$$\oint_{L_\Sigma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = (H_1 \mathbf{1}_\tau - H_2 \mathbf{1}_\tau) \Delta l +$$

$$+ \text{циркуляция по боковым сторонам} = (\mathbf{j}_{\text{уп}} \mathbf{1}_k + \mathbf{j}_{\text{см}} \mathbf{1}_k) \Delta l \Delta h. \quad (3.12)$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая.

1. Электродинамические параметры обеих граничащих сред являются величинами конечными, т. е. не равными бесконечности. Отсюда непосредственно следует конечное значение векторов плотности токов проводимости и смещения.

Теперь совершим предельный переход, устремляя высоту контура Δh к нулю. Очевидно, что при этом величи-

на циркуляции вектора \mathbf{H} по боковым сторонам также будет равна нулю. В силу предположения о конечности векторов плотности токов смещения и проводимости будем иметь

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{J}_{\text{пр}} \mathbf{1}_k + \mathbf{J}_{\text{см}} \mathbf{1}_k) \Delta l \Delta h = 0. \quad (3.13)$$

С учетом сказанного формула (3.13) примет вид:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_{\Sigma}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \mathbf{1}_{\tau} \Delta l - \mathbf{H}_2 \mathbf{1}_{\tau} \Delta l = 0. \quad (3.14)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (3.15)$$

Таким образом, при конечных значениях электродинамических параметров сред тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля непрерывны. Отсюда сразу следует, что тангенциальные составляющие векторов магнитной индукции терпят разрыв:

$$B_{1\tau} / \mu_{a1} = B_{2\tau} / \mu_{a2}. \quad (3.16)$$

2. Проводимость одной из граничащих сред бесконечна.

Положим, например, что проводимость второй среды равна бесконечности. Подобное предположение делает неприменимой формулы (3.13). Дело в том, что при бесконечно большой проводимости среды глубина проникновения электромагнитных волн равна нулю на любой частоте. В результате токи проводимости протекают по поверхностной пленке нулевой толщины, так что предельный переход вида (3.13) дает отличный от нуля результат.

Для характеристики токов, протекающих по поверхности идеального проводника, вводят понятие вектора плотности поверхностного тока $\boldsymbol{\eta}$. Принцип введения этого вектора иллюстрируется рис. 3.5. Прежде всего проводится единичный вектор, касательный к линиям тока в данной точке. Этот вектор обозначается через $\mathbf{1}_{\eta}$. Затем находится величина тока Δi , протекающего через отрезок Δl , перпендикулярный вектору $\mathbf{1}_{\eta}$. Далее плотность поверхностного тока определяется как

$$\boldsymbol{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} \mathbf{1}_{\eta}. \quad (3.17)$$

Теперь формулу (3.12) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_{\Sigma}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \mathbf{l}_{\tau} \Delta l - \mathbf{H}_2 \mathbf{l}_{\tau} \Delta l = \boldsymbol{\eta} \mathbf{l}_k \Delta l. \quad (3.18)$$

Далее следует учесть, что внутри идеального проводника все составляющие электромагнитного поля должны равняться нулю. Поэтому $\mathbf{H}_2 = 0$ и из (3.18) получим

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{l}_{\tau} = \boldsymbol{\eta} \mathbf{l}_k. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) позволяет решить важную для практики задачу — определить плотность поверхностного тока $\boldsymbol{\eta}$ по известному магнитному полю \mathbf{H}_1 на границе идеального проводника. С учетом того, что

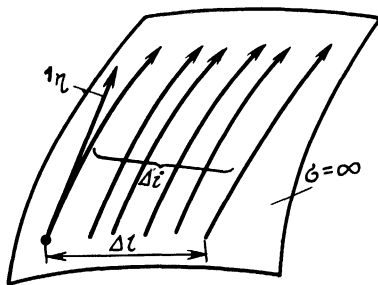


Рис. 3.5. К введению понятия плотности поверхностного тока.

$$\mathbf{l}_{\tau} = -[\mathbf{l}_n \mathbf{l}_k], \quad (3.20)$$

согласно (3.19) можно записать

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{l}_n \mathbf{H}_1]. \quad (3.21)$$

Таким образом, поверхностный ток на границе раздела с идеальным металлом протекает в направлении, перпендикулярном вектору \mathbf{H}_1 , и численно равен напряженности магнитного поля.

3.5. Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля

Методика решения данной задачи полностью совпадает с той, которая была применена в § 3.4. Отличие состоит лишь в том, что вместо закона полного тока следует воспользоваться законом электромагнитной индукции (см. § 1.8). В соответствии с этим законом для контура, изображенного на рис. 3.4, будем иметь

$$\oint_{L_{\Sigma}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \mathbf{l}_{\tau} \Delta l - \mathbf{E}_2 \mathbf{l}_{\tau} \Delta l +$$

$$+ \text{циркуляция по боковым сторонам} = - \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \mathbf{1}_n \Delta l \Delta h. \quad (3.22)$$

Функция $\partial \mathbf{B} / \partial t$, стоящая в правой части (3.22) для любых граничащих сред, является величиной конечной, поэтому предельный переход при $\Delta h \rightarrow 0$ дает

$$\lim_{L_2} \oint_{L_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_1 \mathbf{1}_\tau \Delta l - E_2 \mathbf{1}_\tau \Delta l = 0, \quad (3.23)$$

откуда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (3.24)$$

$$D_{1\tau} / \epsilon_{a1} = D_{2\tau} / \epsilon_{a2}. \quad (3.25)$$

Таким образом, тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела сред непрерывны, однако аналогичные составляющие векторов электрического смещения, вообще говоря, претерпевают разрыв.

Рассмотрим отдельно граничные условия в том случае, когда средой 2 (см. рис. 3.4) является идеальный металл. Здесь, как уже известно, всегда $E_2 = 0$. Если бы внутри идеального металла существовала конечная напряженность электрического поля, то это привело бы к протеканию здесь бесконечно больших токов проводимости и, как следствие, к выделению бесконечно большого количества тепла, что противоречит физической сущности задачи. Таким образом, с учетом сказанного граничное условие для идеального проводника принимает вид

$$E_\tau = 0. \quad (3.26)$$

В соответствии с этим условием силовые линии электрического поля должны подходить к поверхности идеального металла по направлению нормали. Понятие «идеальный металл» является абстрактным и на границе раздела с реальным металлом некоторая тангенциальная составляющая электрического поля имеется. Однако будет показано, что она весьма мала, так что во многих задачах ее можно не учитывать.

ПАДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В настоящей главе рассматривается некоторый класс задач, возникающих при падении плоских электромагнитных волн на границу раздела двух произвольных сред. При решении этих задач используются граничные условия, рассмотренные в гл. 3.

4.1. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость

Рассмотрим следующую идеализированную задачу. Пусть на идеально проводящую бесконечную плоскость по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси z декартовой

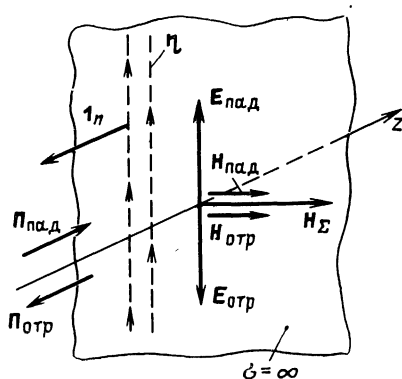


Рис. 4.1. Падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость.

системы координат (рис. 4.1). Из рисунка видно, что присутствие на поверхности идеального металла лишь вектора напряженности электрического поля падающей волны $E_{\text{пад}}$ не может обеспечить выполнение граничного условия $E_{\tau} = 0$. Для того чтобы данное условие выпол-

нялось, необходимо допустить наличие в полупространстве $z < 0$ отраженной волны, причем при $z = 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{отр}} = 0$$

(см. рис. 4.1).

Для того чтобы определить суммарное магнитное поле, существующее на поверхности идеального металла, следует учитывать, что вектор Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{P}_{\text{отр}}$ направлен в отрицательном направлении вдоль оси z . Поскольку модули векторов $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{H}_{\text{отр}}$ равны между собой, модуль суммарного вектора

$$\mathbf{H}_{\Sigma} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{отр}}$$

в два раза больше, чем модуль каждого из слагаемых. Таким образом, получается весьма важный результат — на поверхности идеального проводника суммарное магнитное поле удваивается по сравнению с магнитным полем падающей волны:

$$\mathbf{H}_{\Sigma} = 2\mathbf{H}_{\text{пад}}.$$

Знание величины и направления суммарного магнитного поля позволяет определить вектор плотности поверхностного тока по формуле

$$\boldsymbol{\eta} = [1_n \mathbf{H}_{\Sigma}].$$

Из рис. 4.1 видно, что поверхностный ток протекает в направлении вектора $\mathbf{E}_{\text{пад}}$, а его амплитуда равна удвоенной амплитуде магнитного поля падающей волны.

4.2. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство

Предположим, что полупространство $z < 0$ декартовой системы координат (область 1) представляет вакуум ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$), в то время как полупространство $z > 0$ (область 2) представляет собой произвольный диэлектрик с параметрами ϵ_a , μ_a , σ (рис. 4.2).

Пусть в области 1 по направлению положительной оси z распространяется плоская электромагнитная волна, которую будем называть падающей. Для падающей вол-

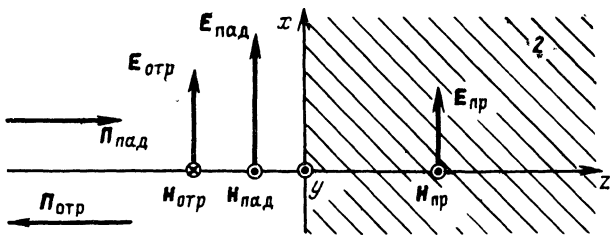


Рис. 4.2. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство.

ны заданы векторы $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{H}_{\text{пад}}$, ориентированные так, как это показано на рис. 4.2:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}} &= \dot{E}_{x\text{пад}} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{1}_x, \\ \dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}} &= \frac{\dot{E}_{x\text{пад}}}{Z_0} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{1}_y, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\beta_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — постоянная распространения плоских волн в вакууме; $Z_0 = 377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума.

Естественно предположить, что в данной системе помимо падающей существуют еще две волны:

отраженная волна, векторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}} &= \dot{E}_{x\text{отр}} e^{j\beta_1 z} \mathbf{1}_x, \\ \dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}} &= - \frac{E_{x\text{отр}}}{Z_0} e^{j\beta_1 z} \mathbf{1}_y, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где знак вектора $\mathbf{H}_{\text{отр}}$ обусловлен тем, что вектор Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{P}_{\text{отр}}$ направлен в сторону отрицательной оси z ;

прошедшая (преломленная) волна, характеризующаяся векторами

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\text{пр}} &= \dot{E}_{x\text{пр}} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{1}_x, \\ \dot{\mathbf{H}}_{\text{пр}} &= \frac{\dot{E}_{x\text{пр}}}{Z_{c2}} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{1}_y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}$, $Z_{c2} = \sqrt{\mu_{a2} / \epsilon_{a2}}$ — соответственно постоянная распространения и характеристическое сопротивление среды 2.

При записи формулы (4.3) предполагается, что, с одной стороны, область 2 не ограничена по оси z , а с другой, что есть хотя бы сколь угодно малое, но конечное затухание электромагнитных волн при распространении в данной среде. Данные предположения обеспечивают отсутствие отраженных волн в области 2, идущих по направлению отрицательной оси z .

Необходимо найти соотношения между амплитудами векторов электромагнитного поля падающей, отраженной и прошедшей волн. Для этого следует учесть, что на границе раздела, т. е. в плоскости $z=0$ должны выполняться граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих суммарных векторов электрического и магнитного полей:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{H}_{1\tau} = H_{2\tau} \quad \text{при } z=0. \quad (4.4)$$

На основании (4.1) — (4.3) соотношение (4.4) запишется как

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{хпад}} + \dot{E}_{\text{хотр}} &= \dot{E}_{\text{хпр}}, \\ \frac{E_{\text{хпад}}}{Z_0} - \frac{\dot{E}_{\text{хотр}}}{Z_0} &= \frac{\dot{E}_{\text{хпр}}}{Z_{c2}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Введем коэффициент отражения по электрическому полю \dot{R} и коэффициент прохождения по электрическому полю \dot{T} согласно соотношениям:

$$\dot{R} = \dot{E}_{\text{хотр}} / \dot{E}_{\text{хпад}}, \quad \dot{T} = \dot{E}_{\text{хпр}} / \dot{E}_{\text{хпад}}. \quad (4.6)$$

Деля в (4.5) левые и правые части равенств на амплитуду электрического поля падающей волны $\dot{E}_{\text{хпад}}$, получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно \dot{R} и \dot{T} :

$$1 + \dot{R} = \dot{T}, \quad \frac{1}{Z_0} - \frac{\dot{R}}{Z_0} = \frac{\dot{T}}{Z_{c2}}, \quad (4.7)$$

откуда

$$\dot{R} = (Z_{c2} - Z_0) / (Z_{c2} + Z_0), \quad (4.8)$$

$$\dot{T} = 2Z_{c2} / (Z_{c2} + Z_0). \quad (4.9)$$

Таким образом, коэффициенты отражения и прохождения для диэлектрического полупространства полностью определяются характеристическими сопротивлениями граничащих сред. Весьма интересно отметить, что формулы вида (4.8) и (4.9) встречаются в курсе теоретической радиотехники при рассмотрении отражения волн от стыка двух линий с распределенными постоянными, обладающих волновыми сопротивлениями $W_1 = Z_0$ и $W_2 = Z_{c2}$, причем вторая линия нагружена на некоторый импеданс, равный своему волновому сопротивлению. Это позволяет составить эквивалентную схему рассматриваемой электродинамической задачи, изображенную на рис. 4.3.

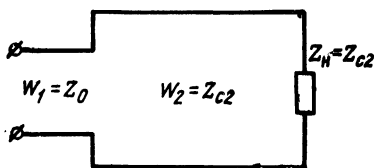


Рис. 4.3. Эквивалентная схема к задаче об отражении плоской электромагнитной волны от диэлектрического полупространства.

Отсюда, как следствие, вытекает возможность решения задач о нормальном распространении плоских электромагнитных волн в системе диэлектрических слоев путем составления эквивалентных схем и последующего использования круговой диаграммы. Нужно лишь учитывать, что длина волны в материальной среде сокращается в $\sqrt{\epsilon}$ раз.

4.3. К вопросу о создании неотражающих сред

Практическая радиотехника настойчиво выдвигает задачу создания таких материальных сред, которые не отражали бы электромагнитных волн. Частным случаем такой задачи является создание неотражающих покрытий, которые, будучи нанесены на поверхность металлических объектов, препятствовали бы возникновению отраженной волны и тем самым затрудняли обнаружение этих объектов радиолокационными методами.

Формула (4.8) устанавливает, что коэффициент отражения от границы раздела R равен нулю только в том случае, когда $Z_{c2} = Z_0$. Данное равенство эквивалентно следующему условию:

$$\mu_a / \epsilon_a = \mu_0 / \epsilon_0. \quad (4.10)$$

До сих пор нет эффективного метода синтеза сред, для которых соотношение (4.10) выполнялось бы в широком диапазоне частот.

Говоря о создании неотражающих покрытий, следует отметить, что увеличение меры затухания электромагнитных волн в среде, т. е.

рост угла потерь δ ведет не к уменьшению, а к возрастанию отражения. Действительно, чем больше $\delta = \arctg(\sigma/\omega\epsilon_a)$, тем больше модуль комплексной диэлектрической проницаемости среды. Поэтому в пределе $\lim Z_{c2} = 0$ при $\delta \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\lim R = -1$, т. е. среда с бесконечно высоким затуханием ведет себя как идеальный отражатель.

Реальный способ создания не-отражающих покрытий заключается в использовании эффекта многократных отражений. Рассмотрим, например, среду, обладающую значительным собственным поглощением, причем поверхность этой среды выполнена ребристой (рис. 4.4). При наклонном падении плоской электромагнитной волны внутри ребристой структуры происходит процесс многократных отражений, причем каждое отражение сопровождается потерей части энергии волны. В результате амплитуда отраженного поля значительно меньше, чем амплитуда падающего. Безусловно, что такой

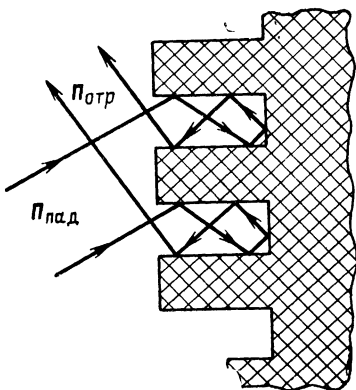
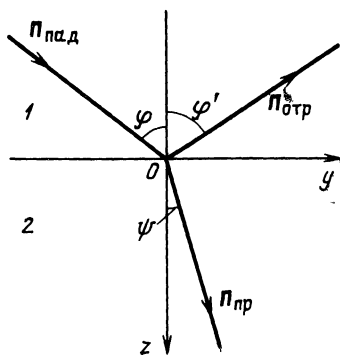


Рис. 4.4. Одна из возможных реализаций неотражающей среды.

способ компенсации отражений не свободен от многих недостатков. В частности, коэффициент отражения в значительной мере зависит от угла падения и от рабочей частоты.

4.4. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом

Рассмотрим, наконец, наиболее общий случай, при котором плоская электромагнитная волна, распространяясь в среде 1, падает на границу раздела под произвольным углом φ , удовлетворяющим условно $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Геометрия данной задачи и направление осей координат показаны на рис. 4.5.



При анализе этой системы естественно ввести три волны—падающую, отраженную и преломленную. Векторы Пойн-

Рис. 4.5. Падение плоской электромагнитной волны под произвольным углом.

тинга всех трех перечисленных волн лежат в одной плоскости, называемой плоскостью падения.

Для того чтобы записать комплексные амплитуды электромагнитных полей, следует воспользоваться результатами § 2.6. Из рис. 4.5 следует, что вектор $\mathbf{P}_{\text{пад}}$ образует с положительными направлениями осей x , y , и z углы 90° , $90^\circ - \varphi$ и φ соответственно. Поскольку $\cos 90^\circ = 0$ и $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, комплексная амплитуда падающей волны может быть записана следующим образом:

$$\dot{E}_{\text{пад}} \sim \dot{E}_{\text{пад}} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}. \quad (4.11)$$

Если через φ' и ψ обозначить углы, указанные на рис. 4.5 и называемые соответственно углами отражения и преломления, то комплексные амплитуды отраженной и преломленной волн могут быть представлены в виде

$$\dot{E}_{\text{отр}} \sim \dot{E}_{\text{отр}} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')}, \quad (4.12)$$

$$\dot{E}_{\text{пр}} \sim \dot{E}_{\text{пр}} e^{-j\beta_2(y \sin \psi + z \cos \psi)}. \quad (4.13)$$

На границе раздела, т. е. в плоскости $z = 0$, должны выполняться условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов \dot{E} и \dot{H} , т. е.

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau} \quad \text{при } z = 0. \quad (4.14)$$

Из (4.11) — (4.13) получим, например,

$$\dot{E}_{\text{пад}} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi} + \dot{E}_{\text{отр}} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi'} = \dot{E}_{\text{пр}} e^{-j\beta_2 y \sin \psi}. \quad (4.15)$$

Поскольку все точки поверхности раздела являются совершенно равноправными, соотношение (4.15) должно являться тождеством относительно переменной y . Для этого необходимо, чтобы показатели всех экспонент, входящих в (4.15), были равны при всех y . Данное условие может быть записано в виде двух равенств:

$$\varphi = \varphi', \quad (4.16)$$

$$\sin \varphi / \sin \psi = \beta_2 / \beta_1. \quad (4.17)$$

Таким образом, получены два хорошо известных из элементарной физики закона, определяющих поведение

волн на границе раздела двух сред. Первый из них — закон равенства углов падения и отражения, второй носит название закона Снелля. Естественно, что при стремлении угла падения к нулю угол преломления ψ также стремится к нулю. Поэтому для случая падения, близкого к нормальному, закон Снелля следует понимать в предельном смысле.

Поскольку $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_d \mu_d}$, формула (4.17) может быть записана в таком виде, что в нее войдут лишь электродинамические параметры граничащих сред. Для этого введем величину $n = \sqrt{\epsilon \mu}$, носящую название показателя преломления данной среды. Если, например, $n_2 > n_1$, то принято говорить, что вторая среда обладает большей оптической плотностью, чем первая. Закон Снелля примет вид

$$\sin \varphi / \sin \psi = n_2 / n_1. \quad (4.18)$$

Рассмотренные закономерности справедливы независимо от ориентации векторов поля к плоскости падения. Более тщательный анализ показывает, что в силу векторного характера электромагнитного поля ряд явлений, возникающих при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела, существенно различается в зависимости от взаимной ориентации плоскостей поляризации и падения. Поэтому рассмотрим два случая.

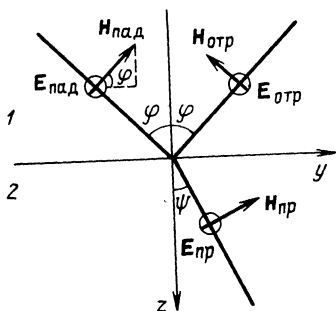


Рис. 4.6. Случай перпендикулярной поляризации.

Перпендикулярная поляризация характеризуется тем, что плоскость поляризации, т. е. плоскость, содержащая вектор \mathbf{E} , перпендикулярна плоскости падения (рис. 4.6).

Перпендикулярная поляризация характеризуется тем, что плоскость поляризации, т. е. плоскость, содержащая вектор \mathbf{E} , перпендикулярна плоскости падения (рис. 4.6).

Определять коэффициенты отражения и преломления для случая перпендикулярной поляризации будем, пользуясь принципом непрерывности тангенциальных составляющих поля на границе раздела.

Граничные условия относительно напряженности электрического поля запишутся весьма просто:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}. \quad (4.19)$$

При записи граничных условий относительно векторов напряженности магнитного поля следует учесть, прежде всего, что тангенциальные составляющие получаются за счет умножения модулей векторов \mathbf{H} на косинусы соответствующих углов. Кроме того, в данной задаче весьма удобно выразить векторы \mathbf{H} через векторы \mathbf{E} , пользуясь понятием характеристических сопротивлений сред (см. § 2.2). Таким образом, условие непрерывности тангенциальных составляющих векторов \mathbf{H} в плоскости $z=0$ примет вид

$$\frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{c2}} \cos \psi. \quad (4.20)$$

Введем коэффициенты отражения и преломления по нулю, указав значком снизу, что эти величины относятся к случаю перпендикулярной поляризации:

$$\dot{R}_{\perp} = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{T}_{\perp} = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}. \quad (4.21)$$

Теперь формулы (4.18) и (4.19) можно объединить, получив систему двух алгебраических линейных уравнений относительно \dot{R}_{\perp} и \dot{T}_{\perp} :

$$\left. \begin{aligned} 1 + \dot{R}_{\perp} &= \dot{T}_{\perp}, \\ \frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (1 - \dot{R}_{\perp}) &= \frac{\dot{T}_{\perp}}{Z_{c2}} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Решение системы (4.22) имеет вид

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}, \quad (4.23)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}. \quad (4.24)$$

Интересно отметить, что вид соотношений (4.23), (4.24) аналогичен виду формул (4.8), (4.9), полученных для случая нормального падения плоской волны на диэлектрическое полупространство. Отличие состоит лишь в том, что здесь характеристические сопротивления приходится умножить на косинусы соответствующих углов. При пользовании формулами (4.23), (4.24) необходимо, за-

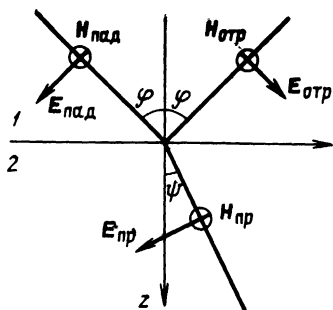


Рис. 4.7. Случай параллельной поляризации.

даваясь некоторым значением угла падения φ , одновременно вычислить угол преломления ψ на основании закона Снелля (4.17).

На практике весьма часто приходится вычислять характеристики отражения и преломления плоских волн для частного случая, когда средой 1 является вакуум или воздух ($\epsilon_1=1$, $\mu_1=1$), а средой 2 — немагнитный ($\mu_2=1$) диэлектрик с относительной диэлектрической

проницаемостью ϵ . При этом удается объединить формулы (4.22), (4.23) с законом Снелля и записать их в виде

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}, \quad (4.25)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos^2 \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}. \quad (4.26)$$

Параллельная поляризация. Здесь векторы \dot{E} во всех трех волнах параллельны плоскости падения (рис. 4.7).

Так же, как и для перпендикулярной поляризации, могут быть записаны граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля. Они принимают вид

$$(\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) \cos \varphi = \dot{E}_{\text{пр}} \cos \psi, \quad (4.27)$$

$$(\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}}) / Z_{c1} = \dot{E}_{\text{пр}} / Z_{c2}. \quad (4.28)$$

Введем коэффициенты отражения \dot{R}_{\parallel} и преломления \dot{T}_{\parallel} по электрическому полю. Значок внизу указывает на то, что данные величины относятся к случаю параллельной поляризации. Деля левые и правые части уравнений (4.27), (4.28) на амплитуду $\dot{E}_{\text{пад}}$, получаем следующую систему уравнений относительно \dot{R}_{\parallel} и \dot{T}_{\parallel} :

$$(1 - \dot{R}_{\parallel}) \cos \varphi = \dot{T}_{\parallel} \cos \psi, \quad (4.29)$$

$$(1 + \dot{R}_{\parallel})/Z_{c1} = \dot{T}_{\parallel}/Z_{c2}, \quad (4.30)$$

откуда

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \psi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \psi}, \quad (4.31)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \psi}. \quad (4.32)$$

Для случая, когда средой 2 является немагнитный диэлектрик с относительной проницаемостью ϵ , формулы (4.31), (4.32) приводятся к виду, более удобному для расчетов:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\epsilon \cos \varphi - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}{\epsilon \cos \varphi + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}, \quad (4.33)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\epsilon} \cos \varphi}{\epsilon \cos \varphi + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \varphi}}. \quad (4.34)$$

Таким образом, на основании двух последних рассмотренных случаев приходим к выводу, что при различных поляризациях законы изменения коэффициентов отражения и преломления от угла падения описываются разными функциями. Если рассмотреть наиболее общий случай, когда на границу раздела падает плоская электромагнитная волна с вращающейся эллиптической поляризацией, то отсюда следует что все три волны — падающая, отраженная и преломленная — характеризуются различными коэффициентами эллиптичности, причем коэффициенты эллиптичности отраженной и преломленной волн зависят от угла падения.

4.5. Угол Брюстера

При падении плоских электромагнитных волн на границу раздела двух сред при определенных условиях коэффициент отражения может обращаться в нуль. Угол падения, при котором падающая волна полностью, без отражения, проникает из одной среды в другую, называется углом Брюстера и обозначается как φ_B .

Из (4.22) и (4.29) следует, что φ_B удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$Z_{c2} \cos \varphi_B - Z_{c1} \cos \psi_B = 0 \quad (4.35)$$

при перпендикулярной поляризации либо

$$Z_{c1} \cos \varphi_B - Z_{c2} \cos \psi_B = 0 \quad (4.36)$$

при параллельной поляризации.

Здесь под ψ_B подразумевается угол преломления, соответствующий углу падения φ_B .

Легко видеть, что уравнения (4.35) и (4.36) взаимно противоречат друг другу, т. е. явление полного прелом-

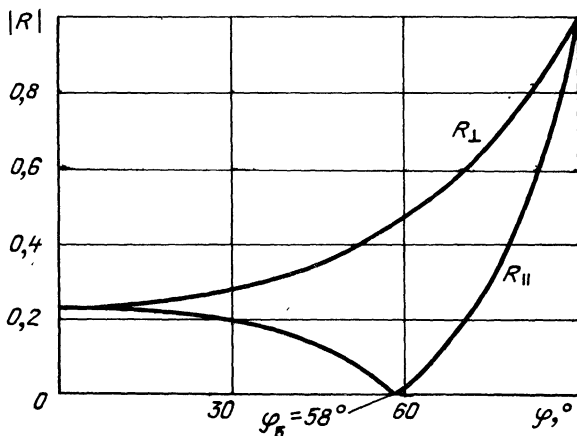


Рис. 4.8. Зависимость коэффициентов отражения от границы раздела «воздух — полистирол ($\epsilon=2,56$)» при различных поляризациях от угла падения.

ления можно наблюдать либо при перпендикулярной, либо при параллельной поляризации.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда обе граничащие среды являются немагнитными ($\mu_1=\mu_2=1$), в то время как оптическая плотность второй среды больше, чем первой ($\epsilon_2>\epsilon_1$). Из данных предположений, во-первых, следует что $Z_{c1}>Z_{c2}$. Во-вторых, в силу закона Снелля (4.17) $\varphi>\psi$, т. е. $\cos \varphi<\cos \psi$.

Обращаясь к формулам (4.35) и (4.36), видим, что первое из этих уравнений в рамках сделанных предположений принципиально не может иметь решений. Таким образом, угол Брюстера при падении плоской электромагнитной волны на немагнитный диэлектрик может существовать лишь при параллельной поляризации.

Удобную формулу для вычислений угла Брюстера можно получить из соотношения (4.33). Действительно,

φ_B должен удовлетворять уравнению

$$\varepsilon \cos \varphi_B = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi_B}, \quad (4.37)$$

откуда легко находим

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.38)$$

Сравнение графиков, зависимостей коэффициентов отражения для волн обеих поляризаций, представленных на рис. 4.8, иллюстрирует понятие угла Брюстера.

Явление полного преломления может иметь полезные технические приложения. Так, пластинка из диэлектрика, установленная под углом Брюстера по отношению к направлению распространения падающей волны, не создает отражений. В то же время эта пластинка может играть роль важного конструктивного элемента, обеспечивая, например, вакуумное уплотнение какого-либо прибора.

4.6. Полное внутреннее отражение

Обратимся вновь к формулировке закона Снелля:

$$\sin \varphi / \sin \psi = n_2 / n_1.$$

Здесь могут представиться два случая.

1. Оптическая плотность среды 2 превосходит оптическую плотность среды 1, т. е. $n_2 > n_1$. При этом условии всегда $\psi < \varphi$, а поскольку угол падения φ лежит в интервале $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, преломленная волна существует при любом угле падения.

2. Среда 2 является оптически менее плотной, т. е. $n_2 < n_1$. Здесь всегда $\psi > \varphi$, поэтому найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна пойдет параллельно границе раздела под углом $\psi = 90^\circ$. Данное критическое значение угла падения носит название угла полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{\text{пво}} = \operatorname{arc} \sin (n_2 / n_1). \quad (4.39)$$

При углах падения $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$ преломленной волны в обычном представлении не существует, энергия падающей волны полностью отражается внутрь первой среды.

Явление полного внутреннего отражения широко используется в оптике при создании призм, изменяющих направление пучка лучей (рис. 4.9). Подобные же устройства последнее время начали находить применение и в диапазоне СВЧ, например, на миллиметровых волнах.

Приведенный анализ эффекта полного внутреннего отражения является неполным, поскольку, с одной стороны, нет ответа на вопрос о том, что происходит при углах падения φ , больших, чем $\varphi_{\text{пво}}$. С другой стороны, было бы весьма целесообразно изучить структуру поля в среде 2 при наличии полного внутреннего отражения.

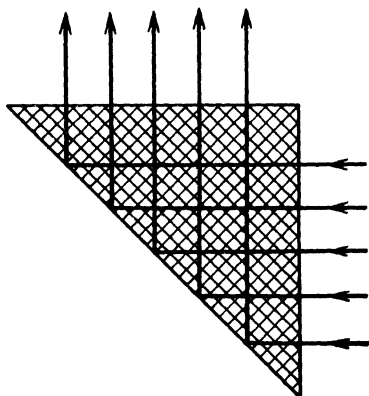


Рис. 4.9. Диэлектрическая призма.

Обращаясь к формуле (4.18) и предполагая $n_2 < n_1$, видим, что при $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$ величина $\sin \psi$ должна быть больше единицы. Очевидно, что при любых вещественных значениях угла преломления такая ситуация невозможна. Тем не менее, известно, что синус, рассматриваемый как функция комплексного аргумента, может принимать любые, в том числе и сколь угодно большие значения. В соответствии с этим предположим, что при $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$

угол преломления ψ получает мнимое приращение. При этом можно записать

$$\psi = \pi/2 + j\alpha, \quad \sin \psi = \text{ch } \alpha, \quad \cos \psi = -j \text{sh } \alpha. \quad (4.40)$$

Здесь α — мнимая часть угла преломления. Подставляя выражения (4.40) в (4.13), получаем

$$\dot{E}_{\text{нр}} \sim e^{-j\beta_2 y \text{ch } \alpha} e^{-\beta_2 z \text{sh } \alpha}. \quad (4.41)$$

По математической форме данное соотношение весьма напоминает выражение для комплексной амплитуды плоской волны, распространяющейся в среде с потерями (см. § 2.1). Однако между ними существует принципиальная разница, так как в выражении (4.41) экспоненциальное уменьшение амплитуды волны происходит вдоль координаты z , в то время как волна распространяется вдоль координаты y . Такие волны носят название неоднородных плоских волн. С физической точки зрения неоднородная плоская волна распространяется вдоль границы раздела, как бы «прилипая» к ней. Указанная особенность дает основание назвать такие волны поверхностными волнами. В дальнейшем этот вопрос будет изучен более подробно.

На первый взгляд может показаться, что понятие комплексного угла преломления введено несколько искусственно. Однако, по существу, подобное расширение понятия плоской волны справедливо, поскольку комплексная амплитуда вида (4.41) служит решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E}_{\text{нр}} + \beta_2^2 \dot{E}_{\text{нр}} = 0,$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой, приняв во внимание, что

$$\text{sh}^2 \alpha = \text{ch}^2 \alpha - 1.$$

Так как $\text{ch} \alpha > 1$, постоянная распространения поверхностной волны $\beta_{\text{пов}} = \beta_2 \text{ch} \alpha$ всегда больше, чем постоянная распространения однородной плоской волны с той же самой частотой, распространяющейся в среде 2. Ввиду того, что постоянная распространения непосредственно связана с фазовой скоростью соотношением $v_\phi = \omega/\beta$, приходим к выводу, что поверхностные волны распространяются со скоростью, меньшей, чем соответствующие однородные плоские волны. По этой причине поверхностные волны часто называются замедленными волнами. Предельное замедление получается тогда, когда падающая волна распространяется параллельно границе раздела, т. е. при $\varphi = \pi/2$. При этом

$$\text{ch} \alpha = n_1/n_2; \quad \beta_{\text{пов}} = \beta_2 n_1/n_2 = \beta_1. \quad (4.42)$$

Таким образом, в пределе фазовая скорость волн в менее плотной среде стремится к величине, свойственной более плотной среде.

Остановимся, наконец, на вопросе о глубине проникновения волн в среду 2 при явлении полного внутреннего отражения. Из формулы (4.41) следует, что глубина, на которой амплитуда поля уменьшается в e раз, равна (ср. § 2.4)

$$d = 1/\beta_2 \text{sh} \alpha. \quad (4.43)$$

Таким образом, поле в среде 2 существует лишь в поверхностном слое, толщина которого порядка одной длины волны. Важно отметить, что с замедлением фазовой скорости глубина проникновения поля в менее плотную среду уменьшается.

4.7. Приближенные граничные условия Леонтовича

В данном параграфе будут рассмотрены приближенные граничные условия для векторов электромагнитного поля, справедливые в том случае, когда одну из сред можно считать хорошим проводником. Этот вопрос впервые был исследован академиком М. А. Леонтовичем в его работах по распространению радиоволн вокруг земной поверхности.

Будем предполагать, что плоская электромагнитная волна падает из воздуха под углом φ на плоскую границу раздела с хорошо проводящей средой, описываемой комплексным показателем преломления:

$$n = \sqrt{\epsilon_a/\epsilon_0} = \sqrt{-j\sigma/\omega\epsilon_0}. \quad (4.44)$$

Из определения понятия хорошо проводящей среды следует, что $|n| \gg 1$. Последнее неравенство в соответствии с законом Снелля показывает, что угол преломления ψ должен быть очень малым. Приближенно можно считать, что преломленная волна входит внутрь среды 2 по направлению нормали при любом значении угла падения. В этом и состоит основной физический смысл условий Леонтовича.

Согласно сказанному эквивалентная схема металлоподобной среды приобретает вид однородной длинной линии с характеристическим сопротивлением $Z_{\text{см}}$, вычисляемым по общей формуле

$$Z_{\text{см}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu_a}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1 + j). \quad (4.45)$$

При этом в начале линии, т. е. на границе раздела, тангенциальные составляющие электрического и магнитного векторов должны удовлетворять очевидному соотношению, непосредственно вытекающему из определения характеристического сопротивления:

$$Z_{\text{см}} = \dot{E}_{\text{тм}} / \dot{H}_{\text{тм}}. \quad (4.46)$$

Как известно, на поверхности идеального проводника $\dot{E}_{\text{т}} = 0$. В случае большой, но конечной проводимости на границе раздела появляется отличная от нуля касательная составляющая $\dot{E}_{\text{тм}}$. Несмотря на малость этой величины (поскольку $Z_{\text{см}} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$), она обуславливает поток мощности внутрь металла, идущей на нагрев его. Если граница раздела совпадает с плоскостью XOY , а ось z направлена внутрь среды 2, то на границе раздела должны выполняться следующие условия:

$$\dot{E}_x / \dot{H}_y = \dot{Z}_{\text{см}}, \quad \dot{E}_y / \dot{H}_x = -Z_{\text{см}}. \quad (4.47)$$

При таком выборе знаков, как это легко может проверить читатель, поток вектора Пойнтинга, соответствующего тепловым потерям, будет всегда направлен по положительному направлению оси z .

Используя граничные условия Леонтовича в форме (4.46) или в форме (4.47), нужно знать касательную составляющую магнитного вектора $\dot{H}_{\text{тм}}$. Обычно приближенно полагают, что эта величина совпадает с аналогичной составляющей, вычисленной для поверхности идеального проводника. Ошибка, возникающая вследствие такого допущения, будет очень мала, поскольку модуль коэффициента отражения от поверхности реальных металлов, как правило, весьма близок к единице.

В последующих главах будет показано применение условий Леонтовича для решения практически важных задач об учете потерь, вызванных конечной проводимостью металлических стенок СВЧ устройств.

НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОВОДЯЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В радиотехнической практике особое значение приобретает задача передачи энергии электромагнитных волн от генератора к потребителю. При этом основным оказывается требование максимальной эффективности передачи. Поставленная задача решается с помощью специальных направляющих устройств, носящих название волноводов (линий передачи).

Простейшей направляющей структурой, которая ограничивает область существования электромагнитных волн, является бесконечная металлическая плоскость. С ее помощью становится возможным отделить одно полупространство от другого. В данной главе будут рассмотрены явления, происходящие при косом падении плоской электромагнитной волны на идеально проводящую металлическую плоскость. При этом будет определяться результат интерференции падающей и отраженной электромагнитных волн. Существенным при этом будет являться векторный характер электромагнитного поля.

5.1. Падение плоской волны с параллельной поляризацией

Будем полагать, что на идеально проводящую плоскость под некоторым углом φ падает монохроматическая плоская волна (рис. 5.1). Предположим также, что верхнее полупространство представляет однородную среду с проницаемостями ϵ_0, μ_0 (вакуум). На рисунке изображены мгновенные положения последовательности волновых фронтов падающей волны, отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda/2$. Ясно, что фазы поля в них отличаются при этом на величину 180° . Взаимная ориентация векторов $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$, обозначенная на волновых фронтах, соответствует принятому направлению вектора Пойнтинга $\mathbf{P}_{\text{пад}}$.

Известно, что граничные условия на поверхности идеального проводника заключаются в равенстве нулю тан-

генциальной составляющей электрического вектора на границе раздела. Выполнение данного условия возможно лишь при наличии отраженной волны. На рис. 5.1 построена система поверхностей равных фаз для отраженной волны, векторы поля которой обладают следующими свойствами:

— амплитуды $E_{\text{пад}}$ и $H_{\text{пад}}$ совпадают с амплитудами $E_{\text{отр}}$ и $H_{\text{отр}}$ соответственно, поскольку потери в идеальном

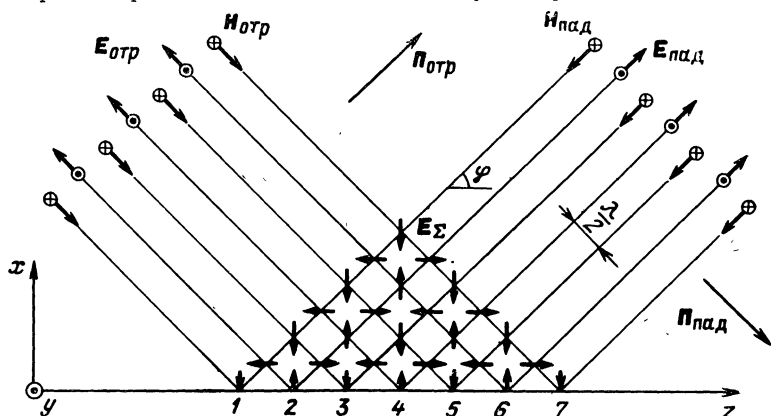


Рис. 5.1. Падение плоской электромагнитной волны с параллельной поляризацией на идеально проводящую плоскость.

проводнике отсутствуют и модуль коэффициента отражения равен единице при любом угле падения;

— направление $E_{\text{отр}}$ должно быть согласовано с направлением $E_{\text{пад}}$ таким образом, чтобы на границе раздела тангенциальная составляющая электрического вектора $E_{\Sigma} = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}$ (см. рис. 5.1) была равна нулю;

— взаимная ориентация векторов $E_{\text{отр}}$ и $H_{\text{отр}}$ обусловлена указанным на рисунке направлением вектора Пойнтинга $P_{\text{отр}}$, который перпендикулярен поверхности равных фаз отраженной волны.

Проведем теперь векторное сложение полей падающей и отраженной волн в узлах образующейся сетки волновых поверхностей. Результат его представлен на рис. 5.1, причем могут быть сделаны следующие выводы:

1) силовые линии суммарного магнитного поля имеют вид бесконечных нитей, направленных параллельно оси y ; в некоторых узлах сетки магнитное поле полностью компенсируется;

2) векторы E_x лежат в плоскости XOZ , причем ориентация этих векторов непрерывно меняется от точки к точке.

Полученная картина векторной интерференции позволяет построить эскиз силовых линий результирующего волнового процесса. Для этого, например, силовые ли-

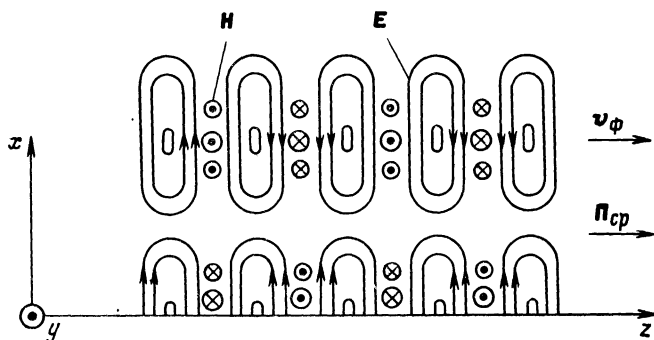


Рис. 5.2. Результирующая картина силовых линий электромагнитного поля при падении плоской волны с параллельной поляризацией.

нии поля E_x должны быть построены так, чтобы результирующие векторы в узлах сетки были бы к ним касательны.

Следует принять во внимание то, что рассматривались лишь те волновые фронты, в пределах которых мгновенные значения векторов поля максимальны. Если произвести более детальное построение, включив в рассмотрение волновые фронты с промежуточными значениями фазы, то получим окончательную картину силовых линий, изображенную на рис. 5.2. Здесь графически показано постепенное изменение напряженностей электромагнитного поля в пространстве.

В заключение параграфа укажем, что при падении плоской волны с параллельной поляризацией физически возможен предельный случай, при котором волна распространяется вдоль границы раздела при угле падения $\varphi = 90^\circ$. Понятие отраженной волны при этом теряет смысл, однако граничное условие будет автоматически удовлетворяться в силу выбранного направления поля $E_{пад}$.

5.2. Падение плоской волны с перпендикулярной поляризацией

Принципиальным отличием данного случая от рассмотренного в § 5.1 является то, что здесь в плоскости падения XOZ лежит вектор $\mathbf{H}_{\text{пад}}$, в то время как вектор $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ параллелен оси y . Не останавливаясь на уже изложенных деталях графического построения, приведем окончательную картину суммарного поля (рис. 5.3). Ха-

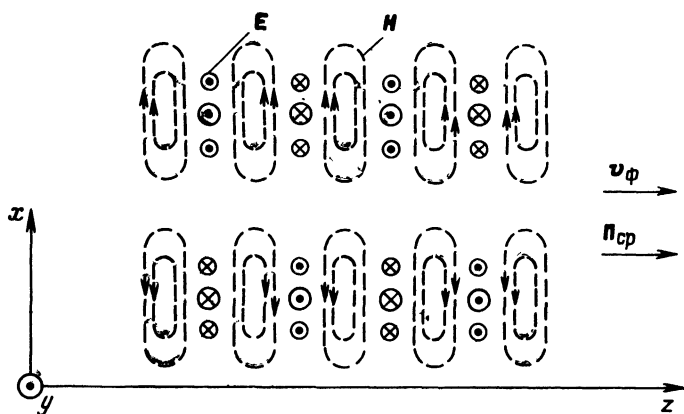


Рис. 5.3. Результирующая картина силовых линий электромагнитного поля при падении плоской волны с перпендикулярной поляризацией.

рактерной особенностью данной картины поля является то, что здесь суммарное электрическое поле направлено по оси y , т. е. поперечно по отношению к продольной оси z . В то же время магнитные силовые линии образуют замкнутые петли, лежащие в плоскости XOZ . Легко показать, что при этом магнитное поле будет иметь две декартовы составляющие H_x и H_z .

5.3. Классификация направляемых волн

В теории волноводов направляемые электромагнитные волны классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия в них продольных составляющих электрического либо магнитного векторов. При этом под продольным направлением подразумевается направление распространения волны (в данном случае это направле-

ние оси z). Как это следует из рассмотренных в § 5.1, 5.2 примеров, здесь могут быть три случая.

1. Оба вектора, электрический и магнитный, перпендикулярны оси распространения и, следовательно, не имеют продольных составляющих. Такие волны носят название поперечных электромагнитных волн или волн типа ТЕМ (Transverse Electromagnetic). В частности, волной типа ТЕМ является плоская волна в неограниченном пространстве, а также рассмотренная в § 5.1 плоская волна, распространяющаяся параллельно границе раздела и обладающая параллельной поляризацией.

2. Электрический вектор имеет отличную от нуля продольную составляющую \dot{E}_z , в то время как магнитное поле волны поперечно, т. е. $\dot{H}_z=0$. Такие направляемые волны называются волнами типа Е или ТМ-волнами (Transverse Magnetic). Примером волны типа Е служит результирующий волновой процесс, возникающий при падении на металлическую плоскость плоской волны с параллельной поляризацией (см. § 5.1).

3. Наконец, возможен случай, когда продольную составляющую \dot{H}_z имеет магнитный вектор, а электрическое поле поперечно ($\dot{E}_z=0$). Такие волны, называемые волнами типа Н или ТЕ (Transverse Electric), возникают, например, в рассмотренном ранее (§ 5.2) случае, когда на проводящую плоскость падает плоская волна с перпендикулярной поляризацией.

Данная классификация, вообще говоря, неполна, поскольку сюда не входят волны, одновременно обладающие обеими продольными составляющими \dot{E}_z и \dot{H}_z . Однако строгий анализ показывает, что подобные волны, носящие название смешанных или гибридных, физически не могут существовать в наиболее важных для практики волноводных системах.

5.4. Фазовая скорость направляемых волн

Изображенные на рис. 5.2, 5.3 картины силовых линий для волн типов Е и Н являются, по существу, «мгновенными фотографиями» поля, отображающими волновые процессы в какой-либо фиксированный момент времени. Несомненно, что эти картины перемещаются в пространстве с некоторой скоростью, которую нужно вычислить.

Для определенности будем рассматривать волну типа Е, поскольку для волн типа Н выводы будут полностью аналогичными. Пользуясь результатами § 2.6, запишем комплексные амплитуды электрических векторов падающей и отраженной волн в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{пад}} &= E_0 e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)}, \\ \dot{E}_{\text{отр}} &= E_0 e^{-j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Вектор суммарного поля будет обладать составляющими, равными суммам составляющих векторов $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$. В частности, суммарная z -я составляющая оказывается равной

$$\dot{E}_{z\Sigma} = (\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) \cos\varphi = j2E_0 \cos\varphi e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \sin(\beta_0 x \cos\varphi). \quad (5.2)$$

Первый сомножитель в формуле (5.2) является несущественной произвольной постоянной. Поэтому проанализируем второй и третий сомножители, описывающие зависимость составляющей E_z от декартовых координат.

Наличие второго сомножителя $e^{-j\beta_0 z \sin\varphi}$ показывает, что результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль координаты z , причем постоянная распространения зависит от угла падения. В дальнейшем будем называть эту постоянную распространения продольным волновым числом и обозначать через h :

$$h = \beta_0 \sin\varphi. \quad (5.3)$$

Из-за наличия третьего сомножителя в формуле (5.2) рассматриваемый волновой процесс существенно отличается от однородной плоской волны, поскольку здесь амплитуда поля уже не постоянна в пределах волнового фронта, параллельного плоскости $z = \text{const}$, а изменяется по синусоидальному закону вдоль поперечной координаты x . Легко видеть, что скорость изменения амплитуды определяется «пространственной частотой»

$$g = \beta_0 \cos\varphi, \quad (5.4)$$

которую будем называть поперечным волновым числом. Продольное и поперечное волновые числа связаны очевидным соотношением

$$h^2 + g^2 = \beta_0^2. \quad (5.5)$$

Итак, определено важное свойство направляемых волн, состоящее в следующем. Данный волновой процесс является неоднородной плоской волной, которая распространяется вдоль оси z . При этом амплитуда поля изменяется вдоль поперечной координаты x по закону стоячей волны.

Вычислим скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты z , т. е. фазовую скорость направляемой волны. Поскольку здесь роль постоянной распространения выполняет продольное волновое число h , по аналогии с § 2.3 будем иметь

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi}. \quad (5.6)$$

Отсюда следует принципиально важный вывод: за исключением предельного случая $\varphi = \pi/2$ фазовая скорость направляемых волн всегда превосходит скорость плоских электромагнитных волн в неограниченном пространстве, в частности, скорость света в вакууме. Данный вывод нуждается в обсуждении, поскольку согласно теории относительности скорость света имеет предельный характер. Однако следует учитывать, что это утверждение относится лишь к движению материальных объектов. В противоположность этому фазовая скорость является скоростью перемещения в пространстве некоторой воображаемой поверхности — плоскости равных фаз. Поэтому ограничения, накладываемые теорией относительности, в данном случае не справедливы.

Неограниченное возрастание фазовой скорости при стремлении к нулю угла падения φ можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть фазовые фронты падающей волны движутся в пространстве со скоростью c так, как это показано на рис. 5.4. Легко видеть, что скорость перемещения точки пересечения фазового фронта с направляющей поверхностью равна $c/\sin \varphi$, на что и указывает формула (5.6). В предельном случае падения волны по направлению нормали фазовая скорость вдоль оси z обращается в бесконечность.

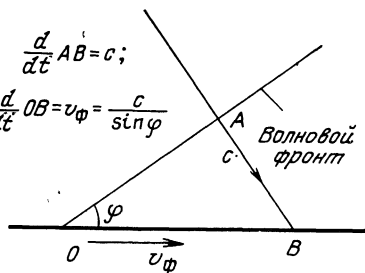


Рис. 5.4. К определению понятия фазовой скорости.

5.5. Типы волн в волноводах

Для увеличения степени локализации энергии электромагнитного поля в пространстве можно на некотором расстоянии от проводящей плоскости параллельно ей

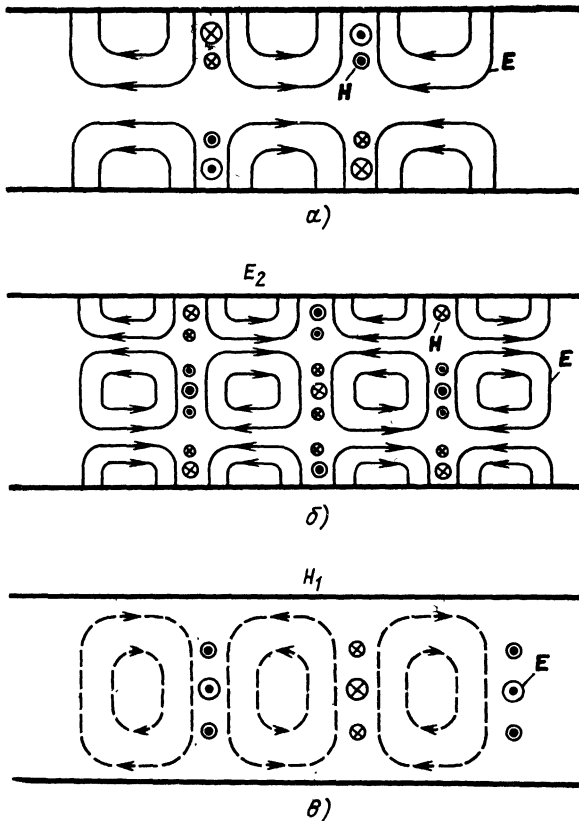


Рис. 5.5. Картины силовых линий электромагнитного поля для некоторых простейших типов волн, распространяющихся между двумя плоскостями.

установить вторую плоскость с тем, чтобы волны распространялись лишь в промежутке между двумя плоскостями. Будем называть такую направляющую систему двухплоскостным волноводом.

Очевидно, что как на верхней, так и на нижней плоскости должны выполняться одинаковые граничные условия $\dot{E}_z = 0$. При этом картина поля в волноводе должна принимать некоторый вполне определенный вид, как это показано, например, на рис. 5.5.

Характерная картина поля в волноводе носит название типа волны (типа колебаний). Из приведенного рисунка следует, что различные типы волн различаются числом стоячих полуволн, укладываемых вдоль поперечной координаты x . На этом принципе основана классификация типов волн в волноводах, которая проводится отдельно в случае волн Е- и Н-типов. Для этого каждому типу волны сопоставляется индекс — положительное целое число, равное числу стоячих полуволн, или, как иначе говорят, числу вариаций поля вдоль поперечной координаты. На этом основании тип волны, изображенный на рис. 5.5,а, следует назвать типом E_1 . На рис. 5.5 обозначены индексы изображенных типов волн, для которых приведены эпюры распределения поля в поперечном сечении.

5.6. Критическая длина волны

Выясним условия существования тех или иных типов волн в зависимости от их индекса, ширины волновода a и длины волны генератора λ_0 . При этом будем исходить из сформулированного в § 5.5 условия, которое на основании формул (5.2), (5.4) принимает вид

$$a \beta_0 \cos \varphi = m\pi, \quad (5.7)$$

где $m=1, 2, 3, \dots$ — индекс типа волны.

Действительно, при выполнении этого условия амплитудная синусоидальная функция, описывающая распределение поля в поперечном сечении волновода, обращается в нуль на верхней и нижней стенках.

Условие (5.7) может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$\cos \varphi = m\lambda_0/2a. \quad (5.8)$$

Отсюда можно сделать важный вывод: при фиксированных параметрах λ_0 и a каждому индексу m соответствует определенное значение угла падения φ , обеспечивающее условие существования волн типов E_m или H_m . От

метим при этом, что с ростом индекса угол падения должен уменьшаться.

Поскольку левая часть соотношения (5.8) ограничена в интервале $0 \leq \cos \varphi \leq 1$, данное соотношение не может быть выполнено при любых m , a и λ_0 . Действительно, для любого индекса m всегда найдется такая длина волны генератора, которую будем называть критической длиной волны данного типа и обозначать $\lambda_{кр\ m}$, для которой выполнение условий (5.8) возможно лишь при максимальном значении $\cos \varphi = 1$, т. е.

$$\lambda_{кр\ m} = 2a/m. \quad (5.9)$$

Если теперь выбрать значение $\lambda_0 > \lambda_{кр\ m}$, то граничные условия на стенках волновода не могут быть выполнены ни при каком вещественном значении угла падения. Физически это означает невозможность существования колебания данного типа в виде бегущей волны. Явления, происходящие в волноводе на критической длине волны, выглядят следующим образом. Поскольку $\varphi = 0$, образуется стоячий волновой процесс в поперечной плоскости, т. е. никакого волнового движения, а следовательно, и переноса энергии вдоль оси z не происходит. Однако важно подчеркнуть, что на критической длине волны

$$h = 0, \quad v_\varphi = \infty.$$

Теперь можно сформулировать основной вывод из приведенных рассуждений. Каждый тип колебаний с индексом m может существовать как бегущая волна в области длин волн, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda_0 \leq \lambda_{кр\ m}.$$

Волны, более длинные, чем $\lambda_{кр\ m}$, по волноводу на данном типе колебаний распространяться не могут. Принято говорить, что область частот, удовлетворяющая неравенству $\lambda_0 > \lambda_{кр\ m}$, является областью отсечки данного типа колебаний.

Тип волны, обладающий наибольшей критической длиной, носит название основного (или низшего) в данном волноводе. Для рассматриваемого здесь двухплоскостного волновода низших типов волн два — это типы E_1 и H_1 ; для них $\lambda_{кр} = 2a$. Итак, если длина волны генератора превосходит удвоенную ширину волновода, то никакие волны E - или H -типов распространяться в нем не могут. Если $2a \geq \lambda_0 \geq a$, то в волноводе могут

существовать лишь волны низших типов. При $\lambda_0 < a$ появляется возможность возникновения двух волн высших типов E_2 и H_2 и т. д.

Знание критической длины волны позволяет для конкретной длины волны генератора определить фазовую скорость на любом типе колебаний:

$$v_\phi = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \quad (5.10)$$

Аналогично находится длина волны в волноводе:

$$\lambda_{в} = \frac{v_\phi}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \quad (5.11)$$

Формулы подобного вида будут часто встречаться в дальнейшем.

5.7. Связь между продольными и поперечными составляющими поля направляемых волн

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, носили скорее качественно-геометрический характер. В данном параграфе будет развит метод анализа направляемых волн, основанный на решении уравнений Максвелла и пригодный для весьма обширного класса волноводных структур. Основным здесь является то, что анализируемая направляемая волна представляет собой неоднородную плоскую волну. В случае, когда за ось распространения выбрана ось z , комплексная амплитуда любой составляющей электромагнитного поля может быть записана в виде

$$\dot{A} = A_0(x, y) e^{-jhz}. \quad (5.12)$$

Этот, вообще говоря, довольно частный вид зависимости поля от пространственных координат позволяет весьма просто выразить производные от поля по z :

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial z} = -jh\dot{A}, \quad \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial z^2} = -h^2\dot{A} \text{ и т. д.} \quad (5.13)$$

Пусть электромагнитный процесс в области, свободной от источников, описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \dot{H} = j\omega\epsilon_a \dot{E}; \quad \text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}.$$

В развернутой форме будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Если теперь выразить производные по z в соответствии с (5.13), то системы (5.14), (5.15) упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + jh \dot{H}_y &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x, \\ -jh \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + jh \dot{E}_y &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x, \\ -jh \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Здесь принципиально важно то, что в соответствии с (5.16) и (5.17) поперечные составляющие \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{H}_x и \dot{H}_y представляются в виде линейных комбинаций из производных продольных составляющих \dot{E}_z и \dot{H}_z по поперечным координатам x и y . Действительно, рассматривая, например, совместно первое уравнение из (5.16) и второе уравнение из (5.17), получаем систему линейных

алгебраических уравнений относительно \dot{E}_x и \dot{H}_y , причем в правой части этой системы окажутся производные $\partial \dot{E}_z / \partial x$ и $\partial \dot{H}_z / \partial y$. Решая подобные системы уравнений, приходим к следующему результату:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-j}{g^2} \left(h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right), \\ \dot{E}_y &= \frac{-j}{g^2} \left(h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right), \\ \dot{H}_x &= \frac{j}{g^2} \left(\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right), \\ \dot{H}_y &= \frac{-j}{g^2} \left(\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Здесь g — поперечное волновое число данного процесса, определяемое в соответствии с (5.5) следующим образом:

$$g = \sqrt{\beta^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - h^2}. \quad (5.19)$$

Равенства (5.18) могут рассматриваться как формулы перехода между продольными и поперечными составляющими направляемого электромагнитного процесса. Важность их состоит в том, что теперь задача сведена к нахождению лишь двух функций \dot{E}_z и \dot{H}_z ; остальные составляющие определяются через них путем дифференцирования. Это еще раз подчеркивает принципиальное значение составляющих \dot{E}_z и \dot{H}_z , по наличию или отсутствию которых условлено проводить классификацию направляемых волн. Фактически решение даже несколько проще, поскольку для волн Е-типа составляющая $\dot{H}_z = 0$, а для волн Н-типа будем иметь $\dot{E}_z = 0$.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

В данной главе на основе методов, развитых в гл. 5, будут рассмотрены свойства полого металлического волновода прямоугольного сечения — линии передачи, находящей в настоящее время наибольшее применение на практике. Сама задача об электромагнитных волнах в трубах с замкнутой формой поперечного сечения представляет большой интерес и требует для своего решения математических методов более общих, чем те, которые использовались при рассмотрении волн между двумя проводящими плоскостями.

6.1. Постановка задачи

Изучаемая здесь линия передачи представляет трубу с прямоугольной формой поперечного сечения, изображенную на рис. 6.1. Размер сечения по широкой стенке будем всегда обозначать через a , размер по узкой стенке — через b . Данный волновод жестко связан с декартовой системой координат x, y, z способом, обозначенным на рисунке. Отметим, что здесь, как и всюду в дальнейшем, волновод предполагается бесконечно протяженным по оси z , которая принимается за ось распространения электромагнитных волн.

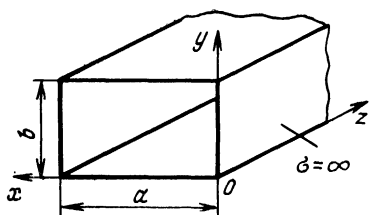


Рис. 6.1. Прямоугольный металлический волновод.

Будем полагать также, что в области внутри волновода находится воздух или вакуум, т. е. среда с электродинамическими параметрами $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$. Такая ситуация чаще всего встречается на практике. Стенки волновода предполагаются идеально проводящими, т. е. изготовленными из материала с удельной объемной проводимостью $\sigma = \infty$. Этим самым вводится предположение об отсутствии потерь в волноводе.

Будем полагать также, что в области внутри волновода находится воздух или вакуум, т. е. среда с электродинамическими параметрами $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$. Такая ситуация чаще всего встречается на практике.

Стенки волновода предполагаются идеально проводящими, т. е. изготовленными из материала с удельной объемной проводимостью $\sigma = \infty$. Этим самым вводится предположение об отсутствии потерь в волноводе.

Наконец, следует сразу оговорить, что будут рассматриваться процессы в волноводе, происходящие на всем протяжении оси z от $-\infty$ до $+\infty$. Другими словами, не будем интересоваться тем, каким образом те или иные сторонние источники возбуждают колебания в волноводе. Проводя аналогию с задачами, изучаемыми в курсе теории цепей, можно сказать, что здесь рассматриваются процессы свободных колебаний в волноводе. Изучение вынужденных колебаний в волноводах, т. е. решение задач о возбуждении волноводов заданными сторонними токами, требует развития математических методов, выходящих за пределы изучаемого курса.

6.2. Волны типа Е в прямоугольном волноводе

Как уже упоминалось, волны Е-типа в линиях передачи характеризуются тем, что в их электромагнитных полях присутствуют продольные составляющие электрического поля, в то время как магнитное поле этих волн поперечно. Другими словами, здесь $\dot{E}_z \neq 0$, $\dot{H}_z = 0$.

Этот несколько особый характер составляющей \dot{E}_z позволяет однозначно выразить все поперечные составляющие электромагнитного поля любой волны типа Е через частные производные от \dot{E}_z по поперечным координатам на основании формул (5.18). Поскольку здесь $\dot{H}_z = 0$, формулы перехода принимают следующий весьма простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, & \dot{H}_x &= \frac{j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y &= \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, & \dot{H}_y &= \frac{-j\omega\varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Таким образом, если удастся найти составляющую поля E_z в каждой точке внутренней области волновода, то задача будет решена полностью. Для этого необходимо воспользоваться уравнением Гельмгольца, которому удовлетворяет любая составляющая, в том числе и \dot{E}_z :

$$\nabla^2 \dot{E}_z + \gamma^2 \dot{E}_z = 0. \quad (6.2)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде, характерном для всех волноводных задач, которые будут рассматриваться в дальнейшем:

$$\dot{E}_z(x, y, z) = E_z(x, y) e^{-jhz}. \quad (6.3)$$

Здесь $E_z(x, y)$ — подлежащая определению вещественная функция, описывающая распределение поля в поперечной плоскости волновода. Независимость амплитуды поля от продольной координаты z объясняется тем, что, по исходному предположению, источники потерь в исследуемом волноводе отсутствуют. Изменение фазы вдоль оси распространения описывается экспоненциальным множителем вида e^{-jhz} . Знак в показателе экспоненты указывает на то, что решение вида (6.3) соответствует бегущей волне, распространяющейся в положительном направлении оси z . Продольное волновое число h в отсутствие потерь является вещественным и должно быть найдено, исходя из геометрических размеров сечения волновода и рабочей длины волны генератора λ_0 .

Избранный вид решения позволяет несколько упростить исходное уравнение (6.2). Действительно, подставив (6.3) в (6.2) и воспользовавшись правилом дифференцирования экспоненты, будем иметь следующее уравнение относительно неизвестной амплитуды $E_z(x, y)$:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + g^2 E_z = 0. \quad (6.4)$$

Здесь $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечный оператор Лапласа, действующий на неизвестную функцию лишь по координатам x и y ; $g = \sqrt{\gamma^2 - h^2}$ — поперечное волновое число.

Необходимо найти не просто общее решение уравнения (6.4), а найти такое решение, которое на идеально проводящем контуре сечения волновода удовлетворяло бы очевидным граничным условиям $E_{\tau} = 0$.

В общем случае следует предполагать наличие всех трех составляющих электрического поля. При этом составляющая \dot{E}_z является тангенциальной ко всем четырем стенкам волновода и должна обратиться на них в нуль:

$$\dot{E}_z = 0 \text{ при } \begin{matrix} x=0, & x=a, \\ y=0, & y=b. \end{matrix} \quad (6.5)$$

Составляющая \dot{E}_x должна обратиться в нуль лишь на широких стенках волновода, параллельных оси x :

$$\dot{E}_x = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b. \quad (6.6)$$

Наконец, на узких стенках следует требовать обращения в нуль составляющей \dot{E}_y :

$$\dot{E}_y = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a. \quad (6.7)$$

Однако легко убедиться в том, что граничные условия (6.5) — (6.7) не независимы. Действительно, согласно формулам перехода (6.1) в случае волн Е-типа поперечные составляющие электрического поля \dot{E}_x и \dot{E}_y пропорциональны частным производным $\partial \dot{E}_z / \partial x$ и $\partial \dot{E}_z / \partial y$ соответственно. Таким образом, приведенная система граничных условий может быть выражена через \dot{E}_z и ее производные по поперечным координатам:

$$\dot{E}_z = 0 \text{ при } \begin{matrix} x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b, \end{matrix} \quad (\text{а})$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b, \quad (\text{б}) \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a. \quad (\text{в})$$

Очевидно, что условие (а) обеспечивает постоянство E_z на контуре сечения волновода и автоматическое выполнение условий (б) и (в).

Таким образом, волны типа Е в прямоугольном волноводе описываются решениями следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_z + g^2 E_z &= 0, \\ E_z &= 0 \text{ при } \begin{matrix} x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b. \end{matrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

В математической физике краевая задача, в которой искомая функция должна обратиться в нуль на границе области, носит название однородной краевой задачи Дирихле.

Интересно отметить, что для рассматриваемой электродинамической задачи легко найти механическую аналогию. Оказывается, что краевая задача вида (6.9) возникает при рассмотрении колебаний однородной жесткой мембраны прямоугольной формы с размерами сторон a и b . Роль искомой функции выполняет смещение точки мембраны относительно положения равновесия в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Нулевое условие на границе эквивалентно жесткому закреплению краев мембраны.

Попытаемся подытожить основные результаты на данном этапе исследования. Итак, получена строгая математическая формулировка проблемы распространения волн типа E в прямоугольном волноводе в виде краевой задачи, причем уравнение (6.4) принципиально проще исходного уравнения (6.2), поскольку первое из них описывает лишь колебания поля в поперечной плоскости, в то время как второе относится к трехмерному волновому процессу.

Решать данную краевую задачу будем с помощью так называемого метода разделения переменных, часто называемого также методом Фурье (отметим, что этот метод не имеет ничего общего с рядами или интегралами Фурье). Данный метод состоит в том, что решение краевой задачи вида (6.9) ищется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной из поперечных координат:

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (6.10)$$

Вообще говоря, такой вид решения является весьма частным. Однако в математической физике показывается, что для рассматриваемого класса краевых задач общее решение действительно может быть записано в виде произведения двух независимых функций. Подставляя (6.10) в первое уравнение (6.9), будем иметь

$$X''Y + XY'' + g^2XY = 0. \quad (6.11)$$

Здесь двумя штрихами обозначена операция взятия второй производной. Деля почленно обе части уравнения (6.11) на искомое решение, получаем

$$X''/X + Y''/Y = -g^2. \quad (6.12)$$

В левой части равенства (6.12) стоят две функции, каждая из которых зависит только от координаты x или y .

Для того чтобы (6.12) выполнялось тождественно при любом x и y , необходимо выполнение равенств

$$X''/X = -g_x^2, \quad (6.13)$$

$$Y''/Y = -g_y^2, \quad (6.14)$$

где g_x, g_y — неизвестные числа, удовлетворяющие соотношению

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (6.15)$$

Теперь можно понять смысл введения метода разделения переменных. Он заключается в том, что вместо одного уравнения в частных производных получаются два уравнения (6.13) и (6.14) в обыкновенных производных с постоянными коэффициентами, которые могут быть записаны в следующем более привычном виде:

$$X'' + g_x^2 X = 0, \quad (6.16)$$

$$Y'' + g_y^2 Y = 0. \quad (6.17)$$

Общие решения уравнений (6.16), (6.17) могут быть представлены в форме:

$$X(x) = A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x), \quad (6.18)$$

$$Y(y) = C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y), \quad (6.19)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{E}_z = [A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)] [C \sin(g_y y) + \\ + D \cos(g_y y)] e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Итак, общее решение уравнения Гельмгольца получено, однако остается выбрать шесть произвольных величин — A, B, C, D, g_x, g_y таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на стенках волновода. Прежде всего, заметим, что из условия $\dot{E}_z = 0$ при $x=0$ и $y=0$ следует обращение в нуль коэффициентов при косинусоидальных слагаемых, т. е. $B=D=0$. Далее, поскольку рассматриваемый волновод является линейной системой и совершенно безразлично, при каком уровне распространяющегося сигнала проводить его анализ, произведение

двух оставшихся амплитудных коэффициентов можно обозначить через E_0 и записать

$$\dot{E}_z = E_0 \sin(g_x x) \sin(g_y y) e^{-jhz}. \quad (6.21)$$

Теперь осталось подобрать величины g_x и g_y . Из граничного условия $\dot{E}_z = 0$ при $x = a$ следует, что

$$\sin(g_x a) = 0. \quad (6.22)$$

Совершенно аналогично граничное условие $\dot{E}_z = 0$ при $y = b$ приводит к тождеству

$$\sin(g_y b) = 0. \quad (6.23)$$

Легко показать, что тождественное выполнение равенств (6.22) и (6.23) возможно лишь в том случае, если

$$g_x = m\pi/a, \quad g_y = n\pi/b, \quad (6.24)$$

где m, n — любые целые положительные числа. Отметим, что для рассматриваемых волн E-типа ни одно из этих чисел не может быть равно нулю, в противном случае составляющая поля \dot{E}_z , а следовательно, и все другие составляющие электромагнитного поля тождественно обратятся в нуль в каждой точке поперечного сечения волновода.

Итак, окончательно

$$\dot{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}. \quad (6.25)$$

Из приведенного анализа можно сделать следующий вывод. Краевая задача (6.9) имеет отличные от нуля решения не при любых значениях параметра g , а только при таких, которые связаны с геометрическими размерами волновода следующим соотношением:

$$g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (6.26)$$

Каждой паре чисел m, n соответствует величина g , носящая название собственного значения для данной краевой задачи. Каждому собственному значению

соответствует функция типа (6.25), называемая собственной функцией, описывающая распределение составляющей E_z для волны типа E_{mn} в данном волноводе. Числа m и n называются индексами данного типа колебаний. Физически они означают число стоячих полу-волн, существующих вдоль координатных осей x и y соответственно. Поскольку индексы могут быть как угодно велики, в прямоугольном металлическом волноводе воз-

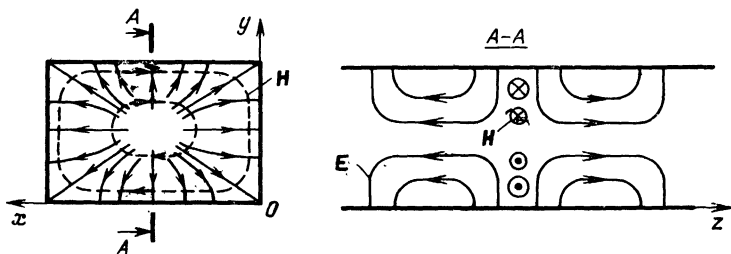


Рис. 6.2. Картина мгновенного распределения силовых линий электромагнитного поля волны типа E_{11} в прямоугольном волноводе.

можно существование сколь угодно большого числа волн типа E . Однако из сказанного следует, что волны типов E_{0n} и E_{m0} не существуют.

Для построения картин поля в волноводе на любом типе волны следует найти все остальные составляющие электромагнитного поля по формулам перехода (6.1). Не останавливаясь на деталях построения, приведем картину мгновенного распределения силовых линий векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} для простейшей волны типа E_{11} (рис. 6.2). Данная картина поля, в которой по обеим поперечным осям укладывается по одной стоячей полуволне, позволяет построить картину поля для любого более сложного колебания типа E . При этом изображенное здесь распределение следует «повторить» такое число раз, которое равно значению индекса требуемого типа волны по той или иной координатной оси. Поскольку зависимости составляющих полей описываются гармоническими функциями координат, направление стрелок на силовых линиях в соседних пучностях стоячих волн должно чередоваться.

Следует отметить, что по причинам, которые станут ясными при дальнейшем изложении, волны типа E в прямоугольном металлическом волноводе находят весьма ограниченное практическое применение.

6.3. Вычисление критической длины волны и длины волны в волноводе

Основываясь на приведенном здесь анализе волн типа Е, найдем связь между продольным волновым числом, двумя геометрическими параметрами волновода — размерами сечения a и b и длиной волны возбуждающего генератора λ_0 .

На основании материала, приведенного в § 6.2, имеем

$$h^2 = \gamma^2 - g^2. \quad (6.27)$$

Напомним, что входящие в (6.27) постоянная распространения в свободном пространстве γ и продольное волновое число h очень просто связаны с длиной волны генератора λ_0 и длиной волны в волноводе $\lambda_{\text{в}}$:

$$\gamma = 2\pi/\lambda_0; \quad h = 2\pi/\lambda_{\text{в}}. \quad (6.28)$$

В свою очередь, поперечное волновое число g , определяемое формулой (6.26) зависит лишь от геометрических размеров сечения и от индексов выбранного типа волны и совершенно не зависит от частоты.

Формула (6.27) позволяет вскрыть важнейшую особенность работы любого волновода рассматриваемого типа. Если $\gamma > g$, то продольное волновое число является вещественным, а это, как уже известно, означает распространение данного колебания в виде бегущих волн. Если длина волны генератора увеличена настолько, что $\gamma < g$, то вместо бегущей волны в волноводе существуют нераспространяющиеся колебания, амплитуда которых экспоненциально уменьшается по координате z . Об этом свидетельствует мнимый характер продольного волнового числа h .

Граничный случай возникает, когда γ равна g . При этом $h=0$ и, как следствие, $\lambda_{\text{в}} = \infty$. Принято говорить, что в данных условиях рассматриваемый тип колебаний находится в критическом режиме. Значение длины волны генератора, соответствующее случаю $\gamma=g$, называется критической длиной волны для данного типа колебаний в исследуемом волноводе и обозначается $\lambda_{\text{кр}}$. Во избежание недоразумений в ряде случаев приходится указывать, к какому типу колебаний эта величина относится, или, по крайней мере, обозначать индексы рассматриваемого типа колебаний.

Из приведенных рассуждений следует, что

$$\gamma_{кр} = 2\pi/\lambda_{кр} = g, \quad (6.29)$$

откуда

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (6.30)$$

Связь между тремя волновыми числами (6.27) может быть выражена через соответствующие длины волн следующим образом:

$$1/\lambda_{в}^2 = 1/\lambda_0^2 - 1/\lambda_{кр}^2. \quad (6.31)$$

Это равенство показывает, что при изменении величины λ_0 длина волны в волноводе изменяется не пропорционально ей. Закон зависимости длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве носит название дисперсионной характеристики волновода. В явном виде эта характеристика описывается формулой, вытекающей из (6.31):

$$\lambda_{в} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \quad (6.32)$$

Легко заметить, что вывод формулы (6.32) основан только на двух предпосылках: пропорциональности комплексных амплитуд бегущих волн множителю e^{-jhz} и существовании понятия критической длины волны. Поскольку обе предпосылки справедливы для любого типа колебаний в полном металлическом волноводе с произвольной формой поперечного сечения, то полученный результат имеет универсальное значение для всех рассматриваемых волноводов. Разница будет обнаруживаться лишь в различных способах вычисления величины $\lambda_{кр}$.

Дисперсионную характеристику волновода весьма удобно изобразить на графике, подобном приведенному на рис. 6.3. Вся область длин волн, меньших, чем $\lambda_{кр}$, является областью «прозрачности» данного волновода на рассматриваемом типе колебаний; причем, если $\lambda_0 \ll \lambda_{кр}$, то длина волны в волноводе лишь в очень ма-

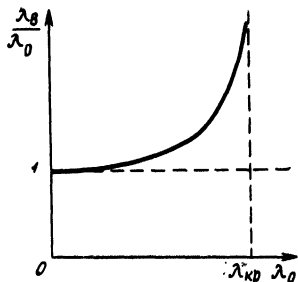


Рис. 6.3. Дисперсионная характеристика волновода.

лой степени отличается от длины волны в свободном пространстве, всегда превосходя ее. Если λ_0 на графике рис. 6.3 стремится к $\lambda_{кр}$ слева, то длина волны в волноводе стремится к бесконечности. При переходе λ_0 через граничное значение $\lambda_{кр}$ в волноводе имеются уже не бегущие, а экспоненциально затухающие волны. Всю область частот, которой соответствуют $\lambda_0 > \lambda_{кр}$, называют областью «непрозрачности» или областью отсечки.

То, что длина волны в волноводе всегда превосходит длину волны в свободном пространстве, обусловлено тем, что как волны типа Е, так и волны типа Н в волноводах с идеально проводящими стенками распространяются с фазовыми скоростями, большими, чем скорость света в вакууме c (см. § 5.4). Поскольку фазовая скорость, длина волны и частота связаны очевидным соотношением, из (6.32) следует формула для вычисления фазовой скорости

$$v_{\phi} = c / \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}. \quad (6.33)$$

6.4. Волны типа Н в прямоугольном волноводе

Волны типа Н характеризуются тем, что здесь магнитное поле имеет продольную составляющую \dot{H}_z , в то время как электрическое поле поперечно, т. е. $\dot{E}_z = 0$.

Будем предполагать, что геометрия и физические параметры волновода остаются такими же, как и при рассмотрении волн типа Е. Все составляющие электромагнитного поля могут быть выражены через составляющую \dot{H}_z с помощью формул перехода, вытекающих из (5.18):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{H}_x &= \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{E}_y &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & \dot{H}_y &= \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

По аналогии с рассмотренным в § 6.3 составляющая \dot{H}_z должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, решение которого должно искажаться в виде

$$\dot{H}_z(x, y, z) = H_z(x, y) e^{-jhz}. \quad (6.35)$$

Здесь амплитудная функция $H_z(x, y)$ является решением двумерного поперечного уравнения

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + g^2 H_z = 0. \quad (6.36)$$

Как и ранее, $g = \sqrt{\bar{\gamma}^2 - h^2}$ — поперечное волновое число.

Уравнение (6.36) должно быть дополнено граничными условиями, обеспечивающими обращение в нуль тангенциальных составляющих электрического поля на идеально проводящих стенках волновода. Эти условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \quad \text{при } y=0, \quad y=b, \\ E_y &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=a. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Формулы перехода позволяют записать данные условия через искомую функцию H_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y=0, \quad y=b, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=a. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Таким образом, исследование распространения волн типа Н в прямоугольном металлическом волноводе сводится к решению краевой задачи (6.36) — (6.38). Данная краевая задача отличается от задачи, которая описывала распространение волн типа Е, тем, что здесь на границе области, т. е. на контуре сечения волновода, обращается в нуль не сама искомая функция, а ее производная по направлению нормали. В математической физике такие краевые задачи носят название однородных краевых задач Неймана. В частности, задача, полностью подобная рассматриваемой, встречается в механике при рассмотрении колебаний упругой мембраны прямоугольной формы с незакрепленными краями. Равенство нулю нормальной производной на краях означает отсутствие в этих точках мембраны внутренних натяжений.

Рассматриваемая краевая задача решается методом разделения переменных. Отсылая за подробностями к материалу § 6.2, запишем общее решение уравнения Гельмгольца в виде

$$\begin{aligned} H_z &= [A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)] [C \sin(g_y y) + \\ &+ D \cos(g_y y)] e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Граничные условия (6.38) при $x=0$, $y=0$ могут быть удовлетворены тогда, когда $A=C=0$. Далее, обозначая произведение BD как H_0 , будем иметь

$$\dot{H}_z = H_0 \cos(g_x x) \cos(g_y y) e^{-jhz}. \quad (6.40)$$

Из условий при $x=a$, $y=b$ следует, что

$$g_x = m\pi/a, \quad g_y = n\pi/b. \quad (6.41)$$

Здесь m , n — целые положительные числа, не равные нулю одновременно. Как и раньше, поперечное волновое число g определяется соотношением

$$g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (6.42)$$

Каждой паре индексов m , n соответствует магнитный тип волны, обозначаемый как H_{mn} . Критическая длина волны для этого типа колебаний находится по формуле, совпадающей с (6.30):

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (6.43)$$

Аналогично § 6.3 для волн Н-типов справедливы выражения

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad (6.44)$$

$$v_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \quad (6.45)$$

Выясним вопрос о том, какой тип волны в прямоугольном волноводе является низшим, т. е. обладает наибольшей критической длиной волны. Из анализа формулы вида (6.43) следует, что наибольшей критической длиной волны будет характеризоваться тот тип колебаний, которому соответствуют наименьшие индексы. Поскольку для волн Н-типов

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz},$$

в данном случае один из индексов, но не оба вместе, может равняться нулю. В то же время известно, что для волн Е-типа такая ситуация невозможна. Это значит, что низший тип колебаний в прямоугольном волноводе принадлежит к классу волн Н-типа.

При обсуждении постановки задачи условились считать, что размер сечения волновода по координате x больше, чем по координате y , т. е. $a > b$. Отсюда следует, что из двух колебаний с наименьшими из возможных индексов, а именно H_{10} и H_{01} , наибольшей критической длиной волны будет обладать тип колебаний H_{10} , у которого вдоль широкой стенки укладывается одна стоячая полу-волна, а вдоль узкой стенки поле неизменно.

6.5. Волна типа H_{10}

Рассмотрим этот тип колебаний в прямоугольном волноводе более подробно как из-за большей наглядности, так и из-за широкого практического использования этого типа колебаний.

Начнем с построения картины поля. При этом в качестве исходной можно использовать структуру поля вол-

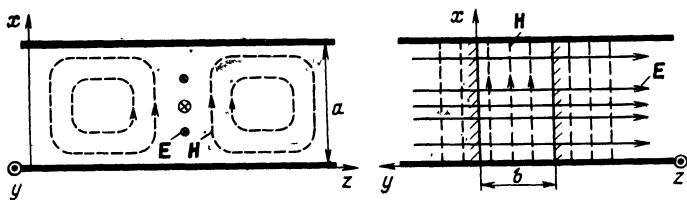


Рис. 6.4. Построение картины электромагнитного поля волны типа H_{10} .

ны H_1 в волноводе, образованном двумя идеально проводящими плоскостями (см. рис. 5.5). Обращаясь к рис. 6.4, заметим, что поскольку силовые линии электрического вектора здесь параллельны поперечной координате y , во внутреннем пространстве волновода можно установить две идеально проводящие перегородки, отстоящие друг от друга на расстояние b . В силу перпендикулярности векторов поля \mathbf{E} к этим перегородкам граничные условия на последних будут выполняться автоматически. Таким образом, можно рассматривать лишь поля, существующие в замкнутой области с прямоугольной формой сечения. Структура поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе представлена на рис. 6.5.

Чрезвычайно важно отметить, что данная картина поля останется справедливой при любом расстоянии b

между перегородками или, согласно принятой здесь терминологии, при любом размере узкой стенки волновода. Отсюда следует, что величина b не должна входить в выражение, определяющее критическую длину волны для

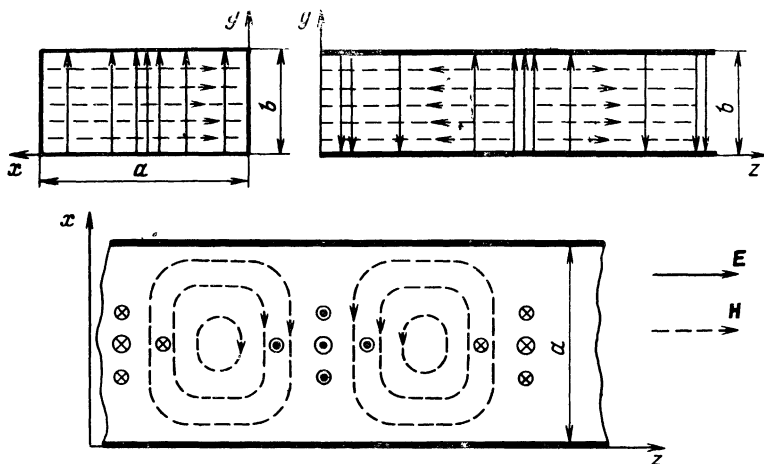


Рис. 6.5. Структура электромагнитного поля волны типа H_{10} .

данного типа колебаний. Действительно, из (6.43) при $m=1, n=0$ будем иметь

$$(\lambda_{кр})_{H_{10}} = 2a. \quad (6.46)$$

Поскольку волна типа H_{10} в рассматриваемом волноводе является нижшим типом колебаний, можно сформулировать полученный результат следующим образом: по прямоугольному волноводу могут передаваться лишь колебания с длинами волн, меньшими, чем удвоенный размер широкой стенки; более длинноволновые колебания по волноводу принципиально распространяться не могут.

Запишем сводку аналитических выражений для составляющих электромагнитного поля волны H_{10} :

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= j \frac{\pi h H_0}{ag^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \quad \dot{E}_x = 0, \\ \dot{H}_y &= 0, \quad \dot{E}_y = -j \frac{\pi \omega \mu_0 H_0}{ag^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \quad \dot{E}_z = 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Формулы (6.47) получены с помощью правил перехода (5.18). Можно дать интересное физическое толкование приведенных здесь выражений. Легко заметить, что поперечные составляющие \dot{E}_y и \dot{H}_x находятся между собой в фазе по времени. Если из этих двух составляющих образовать комплексный вектор Пойнтинга, то он окажется направленным по оси z и вещественным:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} [\dot{E}_y \mathbf{1}_y \dot{H}_x^* \mathbf{1}_x] = \frac{\pi^2 \omega \mu_0 h H_0^2}{2 a^2 g^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \mathbf{1}_z. \quad (6.48)$$

Если же образовать вектор Пойнтинга из составляющих \dot{E}_y и \dot{H}_z , которые имеют сдвиг по фазе 90° (об этом свидетельствует наличие мнимой единицы в выражении для \dot{E}_y), то этот вектор окажется направленным по координате x и мнимым:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} [\dot{E}_y \mathbf{1}_y \dot{H}_z^* \mathbf{1}_z] = j \frac{\pi \omega \mu_0 H_0^2}{4 a g^2} \sin \left(\frac{2 \pi x}{a} \right) \mathbf{1}_x. \quad (6.49)$$

Приведенные рассуждения соответствуют представлению волноводной волны как бесконечной последовательности плоских волн, испытывающих отражения от стенок

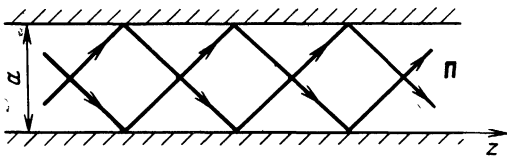


Рис. 6.6. Представление волны типа H_{10} в виде совокупности плоских волн, отраженных от узких стенок волновода.

волновода (рис. 6.6). Энергия электромагнитного поля в волноводе может быть разделена на два вида:

- 1) активную энергию, переносимую вдоль оси z ,
- 2) реактивную (запасенную) энергию, связанную с образованием поперечных стоячих волн вдоль оси x .

Токи на стенках волновода. Для нахождения плотности поверхностного тока на идеально проводящих стенках волновода воспользуемся уже известной формулой (3.21).

Поскольку картина распределения силовых линий вектора \mathbf{N} в исследуемой волне известна, построение линий тока на стенках не представляет затруднений: эти линии образуют семейство кривых,

ортогональное семейству силовых линий магнитного поля (рис. 6.7). Важно отметить, что на рис. 6.7 изображена мгновенная картина распределения токов; во времени она перемещается как единое целое со скоростью v_{ϕ} .

Физически можно представить, что ток, растекаясь, например, из центральной области нижней широкой стенки по радиальным на-

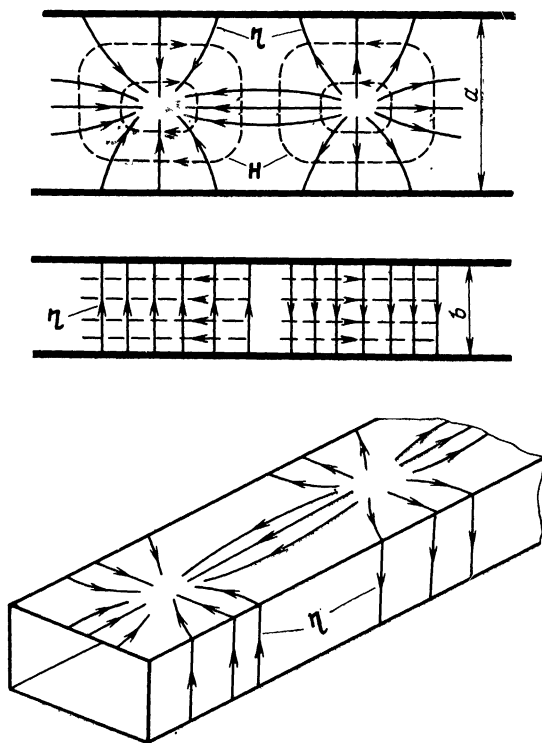


Рис. 6.7. Распределение плотности поверхностных токов на стенках прямоугольного волновода с волной H_{10} .

правлениям, затем огибает два нижних ребра и, пройдя по узким стенкам, вновь стекается в центральной области верхней широкой стенки. Через половину длины волны направления линий тока меняются на обратные.

Интересно отметить, и это видно из представленного чертежа, что точки схождения и расхождения линий тока располагаются как раз там, где напряженность электрического поля равна нулю. Это можно объяснить физически. Очевидно, что линии тока всегда должны быть замкнуты. В рассматриваемом случае токи проводимости на стенках волновода замыкаются посредством токов смещения, которые текут по внутреннему пространству волновода в направлении

оси y . Плотность токов смещения связана с напряженностью электрического поля следующим соотношением:

$$J_{см} = \epsilon_a \partial E / \partial t.$$

Поскольку для бегущей волны напряженность электрического поля записывается как

$$E(x, y, t) = E(x, y) \cos(\omega t - hz), \quad (6.50)$$

получаем

$$J_{см} = -\omega \epsilon_a E(x, y) \sin(\omega t - hz). \quad (6.51)$$

Таким образом, токи смещения максимальны не в точках, где напряженность электрического поля наибольшая, а в точках, отстоящих от последних на четверть пространственного периода, т. е. на $\lambda_B/4$.

Излучающие и неизлучающие щели. Приведенное исследование распределения поверхностных токов на стенках волновода с волной H_{10} позволяет качественно решить весьма важную для практики задачу о связи волновода с окружающим пространством посредством щелей, прорезанных в его стенках.

В волноводной технике щелью называют, как правило, прямоугольное отверстие, длина которого значительно превосходит ширину.

Предположим, что в узкой стенке волновода прорезаны две щели, одна из которых ориентирована в осевом направлении, а вто-

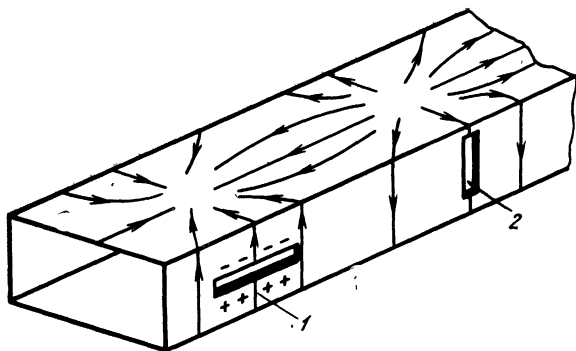


Рис. 6.8. Излучающая (1) и неизлучающая (2) щели на стенках волновода.

рая — в поперечном (рис. 6.8). Первая из них характерна тем, что она перерезает линии поверхностного тока под углом 90° . Ток, протекающий к верхней кромке разреза, вызовет здесь избыток положительных зарядов (рассматривается электротехническое направление тока). Очевидно, что на нижней кромке будет наведен равный по величине отрицательный заряд. Во времени эти заряды будут изменяться в такт с колебаниями генератора. Характеристики щелей с колеблющимися зарядами будут обсуждены в конце данного курса. Здесь достаточно упоминания о том, что подобная щель ведет себя как излучатель электромагнитных волн.

Совсем по-другому ведёт себя щель, прорезанная параллельно линиям тока. Из-за узости такой щели количество наведенных зарядов будет весьма невелико, так что излучение из щели будет незначительным.

Итак, может быть сформулирован общий принцип: щель в стенке волновода излучает в том случае, если она перерезает линии тока.

Излучающие щели находят широкое применение при создании так называемых щелевых волноводных антенн в диапазоне сантиметровых волн.

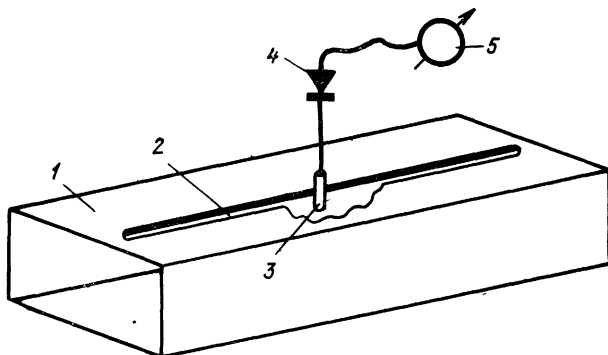


Рис. 6.9. Принципиальная схема волноводной измерительной линии: 1 — волновод, работающий на волне типа H_{10} ; 2 — продольная щель; 3 — зонд, 4 — полупроводниковый диод; 5 — измерительный прибор.

ровых волн. В ряде случаев возникает потребность в неизлучающих щелях, позволяющих вводить внутрь волновода различные измерительные устройства без искажения структуры поля. В качестве примера на рис. 6.9 показана схема волноводной щелевой измерительной линии — одного из важнейших измерительных приборов СВЧ. Здесь подвижный зонд, т. е. миниатюрная антенна, соединенный с детектором, перемещается вдоль узкой щели, прорезанной в осевом направлении точно посередине широкой стенки волновода. Выбор подобного расположения щели обеспечивает отсутствие излучения из волновода. Измеряя ток детектора в различных точках по оси волновода, можно изучать картину стоячей волны и находить параметры нагрузок, подключаемых к волноводу.

6.6. Основы применения прямоугольных волноводов

Различные волноводы используются в диапазоне длин волн приблизительно от 50 см до 1 мм. Если говорить о наиболее характерном использовании волноводов в качестве линий передачи, то на волнах дециметрового диапазона волноводы применяются лишь в мощных устройствах, а начиная с длины волны приблизительно 6 см — повсеместно. Столь широкое применение полых металлических волноводов обусловлено рядом их достоинств: высокой технологичностью волноводных конструкций, весьма малым затуханием, возможностью передачи огромных импульсных мощностей.

Чаще всего волноводные тракты строятся на основе прямоугольных металлических волноводов, по которым распространяется низший тип колебаний H_{10} . Причины этого состоят в следующем: 1) в возможности достижения наименьших поперечных габаритов, 2) в устойчивости структуры поля в волноводе при введении неоднородностей. Если первая из перечисленных здесь причин не требует пояснений, то на второй из них стоит остановиться особо.

Совершенно очевидно, что реальный волноводный тракт не может представлять собой идеально регулярный волновод. Регулярность практических конструкций всегда нарушается неизбежным наличием

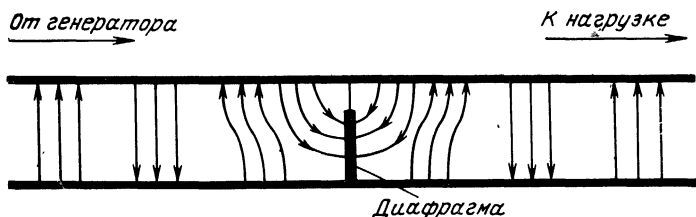


Рис. 6.10. Картина электрического поля вблизи диафрагмы, помещенной внутри волновода.

оконечных устройств, изгибов оси, регулировочных элементов и т. д. Необходимо, чтобы все эти неоднородности по возможности меньше сказывались на качестве работы волноводного тракта во всем диапазоне рабочих частот.

Для примера рассмотрим прямоугольный волновод с волной H_{10} , часть сечения которого перекрыта металлической диафрагмой, обеспечивающей согласование с какой-либо оконечной нагрузкой (рис. 6.10). Из рисунка видно, что одно лишь падающее поле не может удовлетворить граничным условиям на диафрагме. Поэтому здесь наряду с отраженной волной возникнет бесконечная последовательность волн высших типов, вообще говоря, как E -, так и H -типов; амплитуды и фазы этих волн автоматически установятся таким образом, чтобы требуемые граничные условия были удовлетворены. Здесь могут быть два случая.

1. Сечение волновода достаточно велико для того, чтобы часть этих высших волн оказалась распространяющимися. Подобные волноводы будем называть многоволновыми. При этом поле справа от диафрагмы (генератор слева) будет представляться суммой полей этих волн и прошедшей части основной волны H_{10} . Естественно, что это суммарное поле может весьма значительно отличаться от исходного поля падающей волны.

2. Поперечные размеры волновода выбраны таким образом, что все типы колебаний, кроме основного, являются затухающими. Такой волновод принято называть одноволновым. В одноволновом волноводе энергия колебаний высших типов будет сконцентрирована лишь в непосредственной близости от диафрагмы. На расстояниях порядка одной длины волны справа от препятствия структура поля окажется практически такой же, как и в падающей волне.

На практике в подавляющем большинстве случаев используются прямоугольные волноводы в одноволновом режиме. Одной из глав-

ных причин такого использования является то, что эффективность работы оконечных устройств, служащих для вывода энергии из волновода, полностью определяется структурой поля в месте их помещения. В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант часто применяемого оконечного устройства — волноводно-коаксиального перехода, сочленяющего прямоугольный волновод с коаксиальным

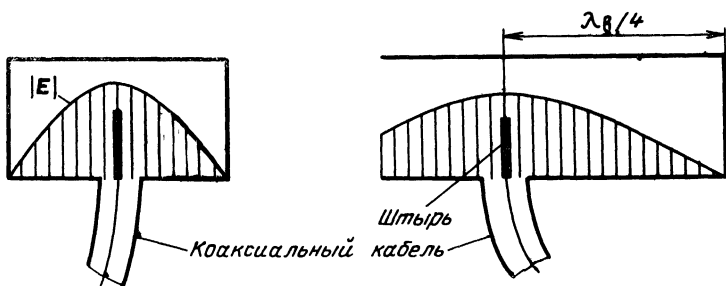


Рис. 6.11. Принципиальная схема волноводно-коаксиального перехода.

кабелем (рис. 6.11). Здесь внутренний проводник коаксиального кабеля проходит внутрь волновода через отверстие в центре широкой стенки, образуя миниатюрную штыревую антенну. Расстояние между штырем и короткозамыкающей стенкой выбирается равным $\lambda_v/4$. Из эпюр распределения напряженности электрического поля, показанных на рис. 6.11, видно,

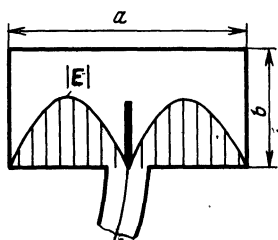


Рис. 6.12. Электрическое поле в волноводно-коаксиальном переходе на волне типа H_{20} .

что штырь находится в пучностях стоячих волн по обеим осям. Именно это и обеспечивает эффективный отбор мощности из волновода.

Если теперь допустить, что по волноводу наряду с основной волной распространяется одна из волн высших типов, например H_{20} , то, как это следует из рис. 6.12, мощность, переносимая волной высшего типа, не будет поступать в коаксиальный кабель, ибо штырь окажется в минимуме электрического поля для волны H_{20} .

Описанное положение усугубляется еще и тем, что волны различных типов распространяются по волноводу с различными фазовыми скоростями, соотношения между которыми зависят от частоты. Из-за этого интерференция между различными типами колебаний носит различный характер на разных частотах. Это ведет к тому, что частотная зависимость коэффициента передачи многоволнового волновода может быть весьма нерегулярной. На рис. 6.13 показаны возможные частотные характеристики одноволнового и многоволнового волноводов.

Итак, встает задача выбора геометрических размеров сечения волновода, которые обеспечивали бы одноволновый режим работы

в заданном частотном диапазоне. При выборе геометрических размеров волновода следует исходить из того, что для волн как Е-так и Н-типов критическая длина волны находится по одной и той же формуле:

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}},$$

причем $\lambda_{кр}$ тем меньше, чем больше индексы волны m, n .

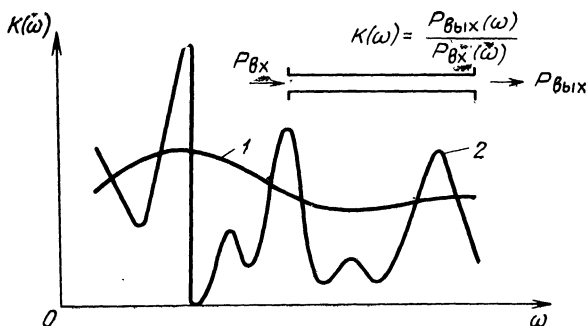


Рис. 6.13. Возможные формы частотных характеристик четырех-полюсника, образованного отрезком волновода:

1 — одноволновый волновод; 2 — многоволновый волновод.

Рассмотрим совокупность типов волн с наибольшими значениями $\lambda_{кр}$. Непосредственное вычисление дает:

$$(\lambda_{кр})_{H_{10}} = 2a, \quad (\lambda_{кр})_{H_{01}} = 2b,$$

$$(\lambda_{кр})_{H_{20}} = a, \quad (\lambda_{кр})_{H_{11}} = (\lambda_{кр})_{E_{11}} = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}}.$$

Для простоты будем полагать, что $b = a/2$, что обычно достаточно хорошо выполняется на практике. Отсюда будем иметь

$$(\lambda_{кр})_{H_{10}} = 2a, \quad (\lambda_{кр})_{H_{01}} = a,$$

$$(\lambda_{кр})_{H_{20}} = a, \quad (\lambda_{кр})_{H_{11}} = (\lambda_{кр})_{E_{11}} = 2a/\sqrt{5}$$

Последний результат позволяет построить так называемую диаграмму типов колебаний прямоугольного волновода, изображенную на рис. 6.14. Принцип построения такой диаграммы весьма прост: на оси длин волн вертикальными штрихами обозначаются критические длины волн различных типов колебаний в порядке их убывания. На диаграмме типов колебаний можно выделить три характерные области:

1) область отсеки ($\lambda_0 > 2a$), в которой распространяющихся типов колебаний не существует вообще;

2) область одноволновости ($a \leq \lambda_0 \leq 2a$), в пределах которой возможно распространение лишь основного типа колебаний H_{10} ;

3) область многоволновости ($\lambda_0 < a$), в которой помимо основной волны по волноводу принципиально могут распространяться ко-

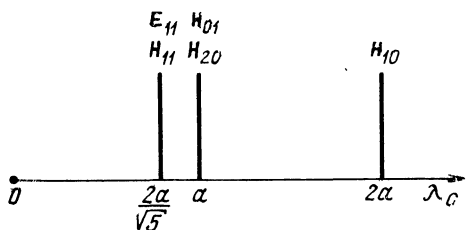


Рис. 6.14. Диаграмма типов колебаний в прямоугольном волноводе при $b/a=1/2$.

лебания высших типов. Например, если рабочая длина волны лежит в интервале между a и $2a/\sqrt{5}$, то в волноводе могут одновременно существовать три распространяющихся типа колебаний — H_{10} , H_{20} и H_{01} . Если длина волны становится меньше, чем $2a/\sqrt{5}$, то к ним добавляются еще колебания типов H_{11} и E_{11} и т. д. Разумеется, что в области многоволновости расположено бесконечное множество высших типов, не показанных на рис. 6.14.

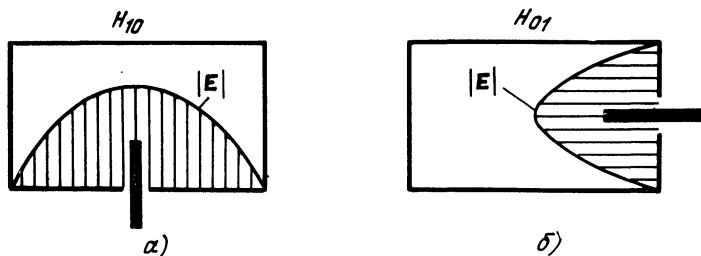


Рис. 6.15. Возможность селективного возбуждения различных типов волн в волноводе:

a — возбуждение волны типа H_{10} ; b — возбуждение волны типа H_{01} .

Подчеркнем здесь одно очень важное обстоятельство. Сам факт многоволновости какого-либо волновода еще не означает, что по нему действительно распространяются все возможные типы колебаний. Можно таким образом возбудить волновод, что в нем будет существовать только один, причем не обязательно низший, тип колебаний. Пусть, например, $\lambda_0 < a$, так что по волноводу могут распространяться волны типов H_{10} и H_{01} . На рис. 6.15 показаны два способа возбуждения такого волновода с помощью штыря. Из рисунка видно, что при первом способе возбуждения штырь оказывается параллельным вектору E для волны H_{10} и перпендикулярным к вектору E для волны H_{01} . В соответствии с принципом, речь о котором

шла ранее, при таком способе возбуждения в данном многоволновом волноводе будет создан лишь тип колебаний H_{10} , в то время как амплитуда колебаний типа H_{01} будет равна нулю тождественно. При втором способе возбуждения ситуация станет диаметрально противоположной: возбужден будет лишь тип колебаний H_{01} . Однако несмотря на принципиальную возможность селективного возбуждения низшего типа колебаний в многоволновом волноводе, практическое использование таких систем оказывается нецелесообразным ввиду неизбежного возбуждения волн высших типов на нерегулярностях передающих линий.

Итак, принципиально прямоугольный волновод с отношением сторон 2:1 может обеспечить одноволновый режим в интервале длин волн от $\lambda_{\text{мин}}=a$ до $\lambda_{\text{макс}}=2a$. Однако на практике весь этот интервал никогда не используют по следующим причинам. Во-первых слишком близкий подход к значению $\lambda_0=a$ нежелателен из-за возможности случайной перестройки генератора в область многоволновости. Во-вторых, как это будет показано в гл. 9, в окрестности критической длины волны, т. е. при $\lambda_0 \approx 2a$, резко возрастают омические потери в стенках волновода. По этим причинам существующие стандарты рекомендуют следующее использование рабочей полосы волновода:

$$\lambda_{\text{мин}} = 1,05a; \quad \lambda_{\text{макс}} = 1,6a.$$

Для любого участка СВЧ и КВЧ диапазонов существуют рекомендуемые или стандартные сечения прямоугольных волноводов. В табл. 6.1 приведены сечения волноводов для некоторых часто употребляемых диапазонов длин волн.

Таблица 6.1

Диапазон длин волн	Сечение волновода	
	a , мм	b , мм
4 мм	3,6	1,8
8 мм	7,2	3,4
3 см	23	10
10 см	72	34

6.7. Характеристические сопротивления волноводов

По физическому смыслу характеристическое сопротивление — это отношение электрической характеристики какого-либо волнового процесса к его магнитной характеристике. Напомним, что в теории линий с распределенными постоянными вводится характеристическое сопротивление

$$W = \dot{U}/\dot{i},$$

где \dot{U} и \dot{i} — комплексные амплитуды напряжения и тока в бегущей волне.

В изучаемом курсе было введено характеристическое сопротивление среды для плоской электромагнитной волны

$$Z_c = \dot{E}_x / \dot{H}_y = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}.$$

В теории волноводов целесообразно определить характеристическое сопротивление как отношение поперечных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$:

$$Z_c = \sqrt{\dot{E}_x^2 + E_y^2} / \sqrt{\dot{H}_x^2 + \dot{H}_y^2}. \quad (6.52)$$

Приведем рассмотрение для волн Е- и Н-типов в отдельности.

Волны типа Е. Здесь в соответствии с формулами перехода (5.18) имеем

$$\dot{E}_x = \frac{h}{\omega \varepsilon_a} \dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -\frac{h}{\omega \varepsilon_a} \dot{H}_x.$$

Отсюда по формуле (6.52) будем иметь

$$Z_{cE} = h / \omega \varepsilon_a. \quad (6.53)$$

Выражение (6.53) можно упростить, воспользовавшись тем, что

$$h = 2\pi / \lambda_b = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}.$$

Учитывая это, получим

$$Z_{cE} = Z \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}, \quad (6.54)$$

где Z_c — характеристическое сопротивление среды, заполняющей волновод.

Волны типа Н. Здесь все выкладки совершенно аналогичны проведенным для волн типа Е. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательный результат:

$$Z_{cH} = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}. \quad (6.55)$$

В § 6.8 будет продемонстрирована эффективность применения понятия характеристического сопротивления к одной из важных волноводных задач.

6.8. Мощность, переносимая по прямоугольному волноводу колебанием типа H_{10}

Для любого типа колебаний мощность, переносимая вдоль оси z , определится как интеграл от продольной составляющей вектора Пойнтинга, взятый по поперечному сечению волновода:

$$P = \int_0^a dx \int_0^b \Pi_{\text{ср}z} dy. \quad (6.56)$$

В случае колебания типа H_{10} продольную составляющую вектора Пойнтинга можно вычислить следующим образом. Прежде всего заметим, что комплексная амплитуда единственной составляющей электрического поля \dot{E}_y может быть записана как

$$\dot{E}_y = E_{\text{макс}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \quad (6.57)$$

где $E_{\text{макс}}$ — максимальная амплитуда напряженности электрического поля, существующая в центральном сечении волновода, т. е. при $x = a/2$.

Отсюда, воспользовавшись понятием характеристического сопротивления волновода, находим поперечную составляющую напряженности магнитного поля:

$$\dot{H}_x = \frac{-E_{\text{макс}}}{120\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}. \quad (6.58)$$

Знак в формуле (6.58) выбран так, чтобы поток энергии был направлен вдоль положительного направления оси z .

При нахождении среднего значения вектора Пойнтинга следует осуществить векторное умножение амплитуды поля \dot{E} на сопряженную амплитуду поля \dot{H} , которая в данном случае равна

$$\dot{H}_x^* = \frac{-E_{\text{макс}}}{120\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{jhz}.$$

Отсюда

$$\Pi_{\text{ср}z} = \frac{E_{\text{макс}}^2}{240\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right). \quad (6.59)$$

Аналогичный результат был получен ранее [см. формулу (6.48)], однако здесь удобнее выразить плотность

потока мощности в волноводе через амплитуду не магнитного, а электрического поля.

Интегрируя (6.59) и учитывая, что

$$\int_0^a \sin^2(\pi x/a) dx = a/2,$$

получаем

$$P = \frac{E_{\text{макс}}^2 ab}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}, \text{ Вт.} \quad (6.60)$$

Данный результат позволяет ответить на весьма важный для практики вопрос о предельно допустимой мощности, передаваемой по прямоугольному волноводу. Дело в том, что максимальная амплитуда $E_{\text{макс}}$ не должна превосходить некоторого вполне определенного уровня, выше которого наступает электрический пробой среды, заполняющей волновод. Так, для сухого воздуха при нормальном атмосферном давлении $(E_{\text{макс}})_{\text{доп}} = 30 \text{ кВ/см}$. Выделим в формуле (6.60) множитель

$$P_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{макс}}^2}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}, \quad (6.61)$$

характеризующий удельную мощность, переносимую через единичное сечение волновода. Если условиться, что на средней частоте диапазона использования волновода $\lambda_{0 \text{ ср}}/2a = 0,7$, и затем подставить в (6.61) предельно допустимую величину напряженности электрического поля, то получим, что для волны типа H_{10}

$$P_{\text{уд доп}} = 420 \text{ кВт/см}^2.$$

При расчете волноводного тракта из-за возможности возникновения стоячих волн обычно допускают трехкратный запас и полагают

$$P_{\text{уд доп}} = 150 \text{ кВт/см}^2.$$

Нужно отметить, что приведенные здесь весьма высокие значения допустимых мощностей относятся исключительно к импульсному режиму работы, поскольку рассматриваются только электрические причины пробоя и совершенно игнорируется возможность теплового пробоя при передаче значительных средних мощностей.

Повышение пробивной прочности волновода достигается за счет заполнения его какой-либо средой с более совершенными электрическими свойствами. Чаще всего это достигается путем герметизации волноводного тракта и заполнения его воздухом под давлением в несколько атмосфер.

КРУГЛЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

В данной главе решаются уравнения Гельмгольца, описывающие волны электрического и магнитного типов в полем металлическом волноводе с круговой формой поперечного сечения. Обсуждаются возможные применения круглых металлических волноводов.

7.1. Постановка задачи

Круглый металлический волновод представляет собой полую металлическую трубу с внутренним радиусом a , бесконечно протяженную вдоль оси z (рис. 7.1). Исходные предпосылки в рассматриваемом случае остаются теми же, что и при исследовании прямоугольного волновода. Так, предполагается, что проводимость стенок волновода бесконечно велика, волновод однороден по оси z

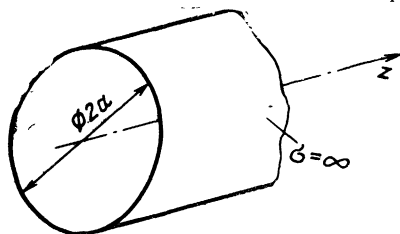


Рис. 7.1. Круглый металлический волновод.

и внутренней средой является вакуум. Требуется проанализировать распространение волн электрического и магнитного типов в подобной системе.

Вообще говоря, для решения поставленной задачи можно было бы воспользоваться теми результатами, которые получены применительно к волноводу с прямоугольной формой сечения. Например, хорошо известна структура поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе (рис. 7.2,а). Прямоугольный контур сечения может быть преобразован в круглый путем последовательных деформаций. На рис. 7.2,б изображен один из первоначальных моментов такой деформации. Принципиально

важно отметить, что силовые линии электрического вектора всегда должны подходить к металлическим стенкам волновода по направлению нормали. Этот принцип является определяющим при построении структуры поля. В конечном итоге получим картину, изображенную на рис. 7.2,в. Естественно, что она соответствует основной

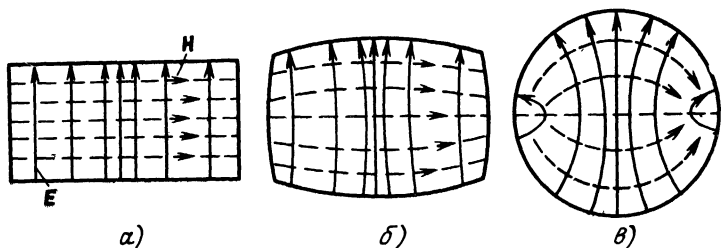


Рис. 7.2. Последовательные этапы деформации прямоугольного волновода.

волне круглого волновода, что и будет показано в дальнейшем.

Несмотря на кажущуюся простоту, метод непрерывной деформации сечения мало пригоден для поставленной цели, поскольку получение числовых характеристик сопряжено здесь с весьма значительными математическими трудностями. Поэтому дальнейшее исследование будет опираться на непосредственное решение уравнений Максвелла в той системе координат, которая в наибольшей степени отвечает геометрии данного волновода.

Легко видеть, что стенки изучаемого волновода совпадают с координатной поверхностью $r=a$ цилиндрической системы координат (r, φ, z) . По этой причине данная система координат оказывается самой подходящей для решения поставленных задач. Уравнения Максвелла без сторонних источников:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

в цилиндрической системе координат принимают следующий вид (см. приложение):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_r, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} &= j\omega\epsilon_a \dot{E}_\varphi, & \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_\varphi, & (7.3) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \varphi} &= j\omega\epsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{E}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial \varphi} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_z. \end{aligned}$$

В случае направляемых волн, распространяющихся по оси z , комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{E}(r, \varphi, z) &= \dot{E}(r, \varphi) e^{-jh z}, \\ \dot{H}(r, \varphi, z) &= \dot{H}(r, \varphi) e^{-jh z}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Частный вид зависимостей (7.4) позволяет, как это было сделано в § 5.7, выразить поперечные составляющие полей \dot{E} и \dot{H} через частные производные от продольных составляющих и получить следующие формулы перехода:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \frac{-j}{g^2} \left(h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu_a}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right), \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{-j}{g^2} \left(\frac{h}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right), \\ \dot{H}_r &= \frac{j}{g^2} \left(\frac{\omega\epsilon_a}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right), \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{-j}{g^2} \left(\omega\epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{h}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Отсюда сразу вытекает возможность существования в круглом волноводе колебаний типов E и H в отдельности. Для их исследования необходимо решить уравнения Гельмгольца для \dot{E}_z и \dot{H}_z :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{E}_z + \gamma^2 \dot{E}_z &= 0, \\ \nabla^2 \dot{H}_z + \gamma^2 \dot{H}_z &= 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

которые в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{E}_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь использовано выражение оператора Лапласа в системе координат (r, φ, z) . Для случая направляемых волн в последних уравнениях можно избавиться от частных производных по продольной координате, введя поперечное волновое число

$$g = \sqrt{\gamma^2 - k^2}.$$

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g^2 H_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Разумеется, что однозначное решение этих уравнений возможно лишь в том случае, когда они дополнены соответствующими граничными условиями на стенках волновода.

7.2. Волны типа Е в круглом волноводе

Задача о распространении по круглому металлическому волноводу колебаний электрического типа, характеризующихся условиями $\dot{H}_z = 0$, $\dot{E}_z \neq 0$, сводится к решению уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0 \quad (7.9)$$

при граничных условиях, обеспечивающих обращение в нуль тангенциальных составляющих электрического вектора на стенках волновода. Очевидно, что из трех возможных составляющих поля \dot{E} , а именно: \dot{E}_r , \dot{E}_φ , \dot{E}_z касательными к стенкам волновода могут быть только составляющие \dot{E}_φ и \dot{E}_z . Поэтому необходимо потребовать

$$E_z = 0 |_{r=a}, \quad (7.10)$$

$$E_\varphi = 0 |_{r=a}. \quad (7.11)$$

Из формул перехода (7.5) непосредственно следует, что два последних условия не являются независимыми. Так, составляющая E_φ , пропорциональная частной производной

водной $\partial E_z / \partial \varphi$, обратится в нуль при постоянстве E_z на контуре волновода. Поэтому физически достаточно, чтобы на металлических стенках волновода выполнялось граничное условие (7.10). Вместе с уравнением (7.9) оно образует однородную краевую задачу Дирихле.

Будем решать эту задачу методом разделения переменных. Положим, что

$$E_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (7.12)$$

где $R(r)$, $\Phi(\varphi)$ — неизвестные функции только от r и φ соответственно, подлежащие определению.

Подставляя (7.12) в (7.9), будем иметь

$$\Phi R'' + \Phi R'/r + R\Phi''/r^2 + g^2 R\Phi = 0. \quad (7.13)$$

Преобразуем уравнение (7.13) таким образом, чтобы в левой части располагались функции только от r , а в правой — только от φ . Для этого левую и правую части следует разделить на произведение $R\Phi$:

$$r^2 R''/R + rR'/R + g^2 r^2 = -\Phi''/\Phi. \quad (7.14)$$

Для того чтобы (7.14) удовлетворялось тождественно при любых r и φ , необходимо выполнение равенства

$$-\Phi''/\Phi = m^2. \quad (7.15)$$

Решением уравнения (7.15) служат функции

$$\Phi(\varphi) = C_0 \frac{\sin}{\cos}(m\varphi), \quad (7.16)$$

а также их любая линейная комбинация при произвольном коэффициенте C_0 . Выбор той или иной из этих функций безразличен в силу симметрии волновода по угловой координате φ . Однако для того чтобы выполнялось физически очевидное требование периодичности решения по углу φ с периодом не более 2π , m должно быть целым числом или нулем (в последнем случае приемлемо только косинусоидальное решение).

Число m служит одним из индексов типа волны.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (7.14) с целью получить новое уравнение, описывающее радиальное распределение поля. Из (7.14) и (7.15) имеем

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0, \quad (7.17)$$

Целесообразно преобразовать уравнение (7.17) к несколько другому виду, введя безразмерную независимую переменную

$$x = gr, \quad (7.18)$$

откуда получим

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (7.19)$$

Уравнение (7.19) хорошо изучено в математической физике и носит название уравнения Бесселя. С математической точки зрения уравнение Бесселя является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами.

Цилиндрические функции. Так называют частные решения уравнения (7.19). К ним относятся:

$J_m(x)$ — функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода индекса m ;

$N_m(x)$ — функция Неймана или цилиндрическая функция второго рода индекса m .

Обе цилиндрические функции являются линейно независимыми, поэтому общее решение уравнения (7.19) записывается в виде

$$R(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x), \quad (7.20)$$

где C_1 и C_2 — некоторые произвольные постоянные.

Цилиндрические функции первого и второго рода в цилиндрической системе координат играют ту же роль, что синусоидальная и косинусоидальная функции в декартовой прямоугольной системе. Из примерного вида графиков этих функций, представленного на рис. 7.3, видно, что они имеют много общего с гармоническими функциями. Однако имеются и существенные различия:

1) цилиндрические функции в отличие от синусоидальной и косинусоидальной не являются периодическими;

2) «амплитуда» этих функций также не постоянна, а уменьшается с ростом независимой переменной x ;

3) чем больше индекс m , тем сильнее смещены цилиндрические функции по оси x ; на рисунке это показано применительно к функциям $J_m(x)$ и $J_{m+1}(x)$;

4) вблизи начала координат функция $N_m(x)$ неограниченно велика:

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) = -\infty.$$

Поэтому при решении всех задач в круглых волноводах необходимо полагать $C_2=0$, ибо присутствие на оси волновода при $r=0$ бесконечно высоких напряженностей полей физически нереально.

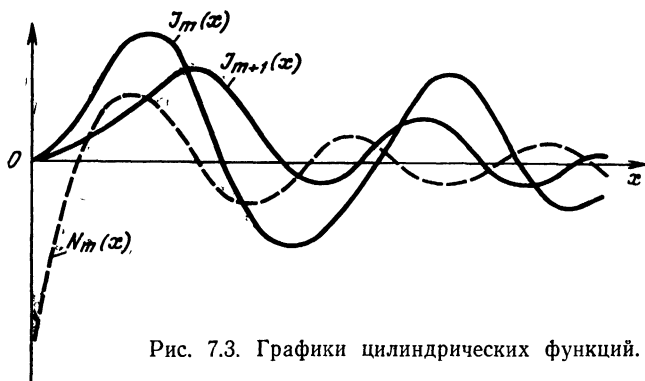


Рис. 7.3. Графики цилиндрических функций.

Для решения большинства практических задач наибольший интерес представляют простейшие цилиндрические функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$. В теории цилиндрических

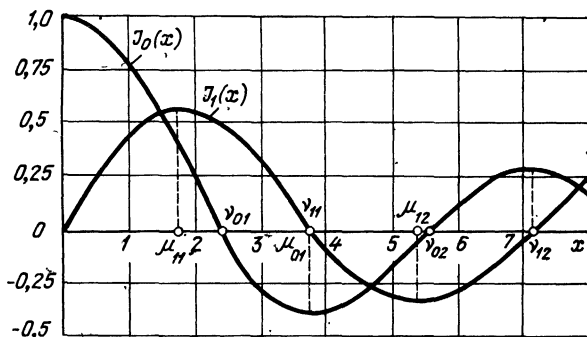


Рис. 7.4. Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

функций показано, что между ними существует следующее соотношение:

$$J_1(x) = -dJ_0(x)/dx. \quad (7.21)$$

На рис. 7.4 представлены графики этих функций. Для дальнейшего наибольший интерес представляют те значения аргумента, при которых обращаются в нуль либо

сами функции Бесселя, либо их первые производные. Введем следующие обозначения:

ν_{mn} — n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$,

μ_{mn} — n -й корень уравнения $\frac{d}{dx} J_m(x) = 0$.

Анализируя представленные графики, легко видеть, что функция $J_0(x)$ первый раз пересекает ось абсцисс в точке, приблизительно равной 2,405. В соответствии с принятой договоренностью данная точка обозначается как ν_{01} . Аналогично, первый положительный максимум функции $J_1(x)$ приходится на значение аргумента 1,841, которое должно быть обозначено как μ_{11} .

Для справочных целей приведем табл. 7.1, 7.2 наиболее часто встречающихся в расчетах корней функций Бесселя и их производных.

Таблица 7.1

n	Корни ν_{mn} функций Бесселя		
	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,174	11,620

Таблица 7.2

n	Корни μ_{mn} производных функций Бесселя		
	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	3,832	1,841	3,052
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Теперь можно вновь вернуться к исследованию волн электрического типа. В соответствии с методом разделения переменных амплитуда продольной составляющей напряженности электрического поля запишется в виде

$$E_z = E_0 J_m(gr) \frac{\sin}{\cos}(m\varphi). \quad (7.22)$$

Здесь поперечное волновое число g пока еще не определено. Чтобы найти его, заметим, что граничное условие

$$E_z = 0 \Big|_{z=a}$$

будет выполнено в том случае, если поперечные волновые числа принадлежат бесконечной дискретной последовательности, удовлетворяющей соотношению

$$g_{mn}a = \nu_{mn}, \quad (7.23)$$

откуда

$$g_{mn} = \nu_{mn}/a. \quad (7.24)$$

Номер корня n является вторым индексом волны E_{mn} . Итак, окончательно комплексная амплитуда составляющей \dot{E}_z для колебания типа E_{mn} принимает вид

$$\dot{E}_z = E_0 J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \frac{\sin(m\varphi)}{\cos} e^{-jhz}. \quad (7.25)$$

Физический смысл индексов m и n очень прост: m означает число вариаций поля по угловой координате φ , а n — число вариаций по радиальной координате r . В частном случае $m=0$ поля по углу φ не изменяются, и такие типы волн называют симметричными.

Критические длины волн находятся на основании того же самого принципа, что и в случае прямоугольного волновода (см. § 6.3):

$$(\lambda_{кр})_{E_{mn}} = 2\pi/g_{mn} = 2\pi a/\nu_{mn}. \quad (7.26)$$

Формулы для вычисления длины волны в волноводе и фазовой скорости имеют ту же структуру, что и в теории прямоугольного волновода:

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Поперечные составляющие полей для любой волны типа E_{mn} легко находятся из выражения для продольной составляющей \dot{E}_z и формул перехода (7.5). Покажем это на примере часто употребляемой простейшей симметричной волны типа E_{01} . Здесь

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= E_0 J_0 \left(\frac{\nu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, \quad \dot{H}_z = 0, \\ \dot{E}_r &= \frac{jE_0 h a}{\nu_{01}} J_1 \left(\frac{\nu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, \quad \dot{H}_r = 0, \\ \dot{E}_\varphi &= 0, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{jE_0 a \omega \varepsilon_a}{\nu_{01}} J_1 \left(\frac{\nu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Картина распределения полей в волноводе, построенная по этим формулам, показана на рис. 7.5. Интересно отметить, что данная структура поля может быть полу-

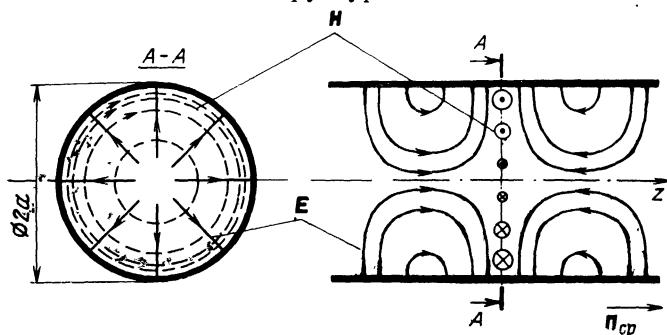


Рис. 7.5. Картина силовых линий электромагнитного поля волны типа E_{01} в круглом волноводе.

чена непрерывной деформацией структуры типа E_{11} в прямоугольном волноводе.

На рис. 7.6 показана также структура поля несимметричной волны типа E_{11} .

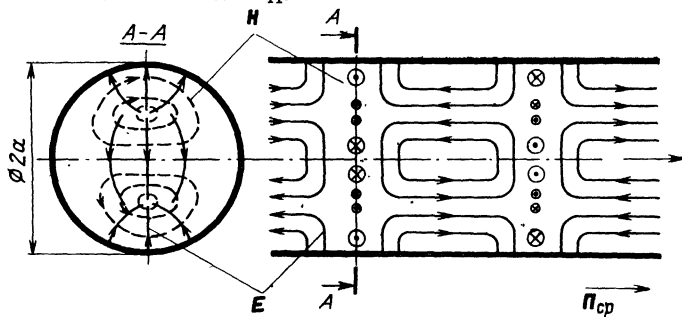


Рис. 7.6. Картина силовых линий электромагнитного поля волны типа E_{11} в круглом волноводе.

7.3. Волны типа Н в круглом волноводе

При исследовании колебаний магнитного типа нужно опираться на уравнение Гельмгольца для составляющей \dot{H}_z :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{H}_z = 0. \quad (7.28)$$

Разыскивая решение этого уравнения в виде

$$\dot{H}_z(r, \varphi, z) = H_z(r, \varphi) e^{-jhz} \quad (7.29)$$

и вводя поперечное волновое число

$$g = \sqrt{\gamma^2 - h^2},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g^2 H_z = 0. \quad (7.30)$$

В случае волн Н-типа электрическое поле имеет только поперечные составляющие, из которых только составляющая \dot{E}_φ касательна к стенкам волновода. Поскольку

$$\dot{E}_\varphi = \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}, \quad (7.31)$$

граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (7.32)$$

Таким образом, исследование распространения волн магнитного типа в круглом металлическом волноводе сводится к решению однородной краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (7.30) — (7.32).

Данная задача решается методом разделения переменных. Как и в случае волн Е-типа, частное решение, имеющее m вариаций по углу φ , запишется в виде

$$H_z = H_0 J_m(g r) \frac{\sin}{\cos}(m\varphi). \quad (7.33)$$

Для нахождения неизвестного поперечного волнового числа g вычислим частную производную

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = H_0 g \frac{dJ_m(x)}{dx} \frac{\sin}{\cos}(m\varphi). \quad (7.34)$$

Граничные условия (7.32) будут тождественно выполнены, если

$$\frac{dJ_m(x)}{dx} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (7.35)$$

Равенство (7.35), рассматриваемое как уравнение относительно x , имеет бесконечное число корней, обозначаемых здесь как μ_{mn} . Таким образом, краевая задача, описывающая распространение волн магнитного типа, имеет бесконечное множество нетривиальных решений, причем для каждого из этих решений

$$g_{mn}a = \mu_{mn}, \quad (7.36)$$

т. е.

$$g_{mn} = \mu_{mn}/a. \quad (7.37)$$

Итак, продольная составляющая магнитного поля для колебания типа H_{mn} в круглом волноводе принимает вид

$$\dot{H}_z = H_0 J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \frac{\sin(m\varphi)}{\cos} e^{-jhz}. \quad (7.38)$$

Основные расчетные формулы остаются теми же, что и для волн электрического типа:

$$(\lambda_{\text{кп}})_{H_{mn}} = 2\pi a / \mu_{mn}, \quad (7.39)$$

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{\text{кп}})^2}}, \quad (7.40)$$

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{\text{кп}})^2}}. \quad (7.41)$$

Поперечные составляющие полей для волн магнитного типа находятся на основании формул перехода (7.4). Так, например, для часто используемой волны типа H_{11} имеем:

$$\begin{aligned} \dot{H}_r &= \frac{-jH_0 h a}{\mu_{11}} J'_1 \left(\frac{\mu_{11} r}{a} \right) \sin \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_r &= \frac{-jH_0 a^2 \omega \mu_0}{r \mu_{11}^2} J_1 \left(\frac{\mu_{11} r}{a} \right) \cos \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{-jH_0 h a^2}{r \mu_{11}^2} J_1 \left(\frac{\mu_{11} r}{a} \right) \cos \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{jH_0 a \omega \mu_0}{\mu_{11}} J'_1 \left(\frac{\mu_{11} r}{a} \right) \sin \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 J_1 \left(\frac{\mu_{11} r}{a} \right) \sin \varphi e^{-jhz}, \quad \dot{E}_z = 0, \end{aligned} \quad (7.42)$$

Картина поля, построенная на основании соотношений (7.42), изображена на рис. 7.7. Она полностью совпадает с той, которая была получена путем непрерывной деформации прямоугольного волновода с волной типа H_{10} .

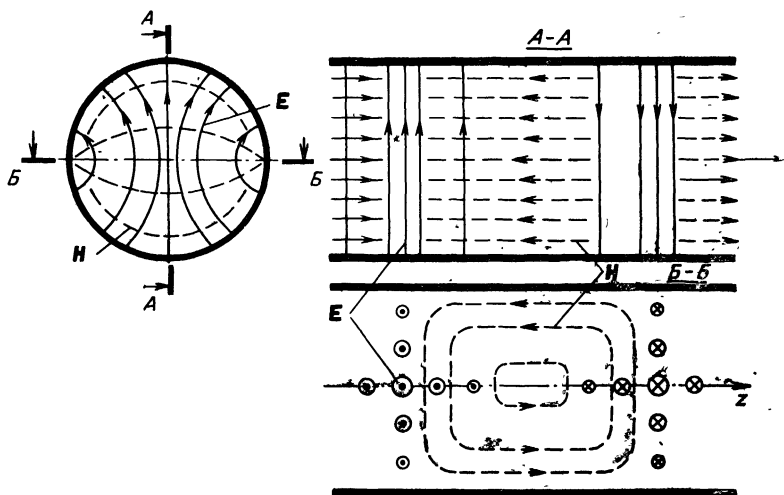


Рис. 7.7. Картина силовых линий электромагнитного поля волны типа H_{11} в круглом волноводе.

Большой интерес представляет также колебание H_{01} — простейшая симметричная магнитная волна в круглом волноводе. Составляющие поля для волны этого

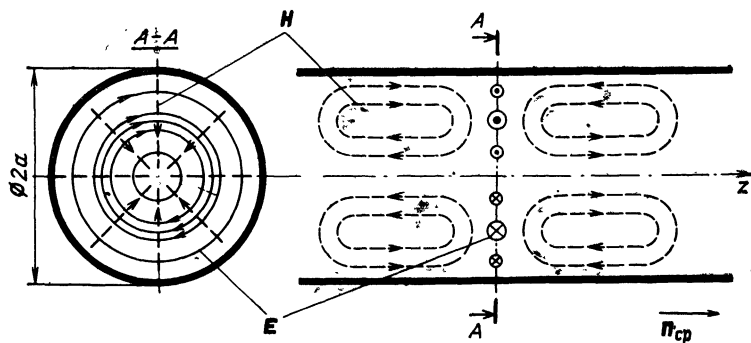


Рис. 7.8. Картина силовых линий электромагнитного поля волны типа H_{01} в круглом волноводе.

типа имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{H}_r &= \frac{jH_0 h a}{\mu_{01}} J_1 \left(\frac{\mu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, & \dot{E}_r &= 0, \\ \dot{H}_\varphi &= 0, & \dot{E}_\varphi &= \frac{-jH_0 a \omega \mu_0}{\mu_{01}} J_1 \left(\frac{\mu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 J_0 \left(\frac{\mu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, & \dot{E}_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Соответствующая картина поля изображена на рис. 7.8.

7.4. Применения круглых волноводов

Основываясь на материале §§ 7.2, 7.3, построим диаграмму типов волн в круглом металлическом волноводе. Построение такой диаграммы позволяет ответить на ряд существенных вопросов, таких, как нахождение низшего типа колебаний и определение области одноволновости данного волновода. Обращаясь к таблицам корней функций Бесселя и их производных, нужно прежде всего выделить среди этих корней наименьшие по абсолютной величине, поскольку именно таким корням в соответствии с (7.26) и (7.39) отвечают типы колебаний с наибольшими критическими длинами волн.

Прежде всего отметим, что наименьшим из всех корней оказывается корень $\mu_{11}=1,841$, которому соответствует тип колебаний H_{11} . Подставляя его в (7.42), будем иметь

$$\lambda_{кр H_{11}} = 2\pi a / 1,841 \approx 3,41a.$$

Итак, как и следовало ожидать, тип колебаний H_{11} , получаемый непрерывной деформацией основного типа колебаний прямоугольного волновода, оказывается низшим типом колебаний в круглом волноводе. Далее получаем:

$$\lambda_{кр E_{01}} = 2\pi a / 2,405 \approx 2,61a, \quad \lambda_{кр H_{21}} = 2\pi a / 3,054 \approx 2,06a,$$

$$\lambda_{кр H_{01}} = \lambda_{кр E_{11}} = 2\pi a / 3,832 \approx 1,64a.$$

Из соответствующей диаграммы типов колебаний (рис. 7.9) следует, что в круглом волноводе все волны с длинами, большими, чем $3,41a$, оказываются нераспространяющимися, в интервале длин волн $3,41a > \lambda_0 > 2,61a$ волновод является одноволновым, т. е. пропускает лишь основной тип колебаний H_{11} , а при $\lambda_0 < 2,61a$ в волноводе наблюдается уже многоволновый режим распространения.

Итак, теоретически круглый волновод может быть использован в качестве одноволновой линии передачи в диапазоне $3,41a > \lambda_0 > 2,61a$. Однако практически этот диапазон должен быть несколько сужен по причинам, изложенным в § 6.6.

Несмотря на очевидные конструктивные и технологические достоинства, круглый волновод применяется на практике значительно реже, чем прямоугольный. Это обусловлено так называемой поляризационной неустойчивостью основной волны типа H_{11} в круглом волноводе. Такая неустойчивость является прямым следствием высокой степени симметрии круглого волновода. Например, если на

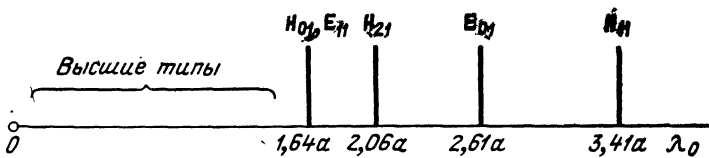


Рис. 7.9. Диаграмма типов колебаний в круглом волноводе.

входе волноводной системы волна H_{11} поляризована так, как это показано на рис. 7.10, то под влиянием различного рода случайных или преднамеренных деформаций тракта на выходе можно получить волну уже с другим направлением плоскости поляризации. Поскольку всевозможные устройства для возбуждения волноводов работают, как правило, лишь с колебаниями вполне определенной поляризации, поляризационная неустойчивость колебаний в круглом волноводе часто служит существенным препятствием к его использованию в качестве линии передачи.

Наряду с этим, полная симметрия круглого волновода по угловой координате часто находит полезное практическое применение, например, в ферритовых волноводных устройствах СВЧ.

Весьма ценным практическим свойством круглого волновода является возможность распространения в нем симметричных типов колебаний. На рис. 7.11 показан эскиз так называемого вращающегося сочленения, предназначенного для передачи энергии от передатчика к антенне радиолокационной станции, осуществляющей сканирование пространства по угловой координате. Здесь энергия из неподвижного прямоугольного волновода 1 отбирается с помощью штыря 2, который, в свою очередь, возбуждает колебание типа E_{01} в круглом волноводе 3. Наличие поперечной контактной щели в этом волноводе позволяет осуществлять круговое вращение аналогично устроенного верхнего волноводного узла 4, причем в силу симметричности структуры поля волны E_{01} коэффициент передачи всего устройства не зависит от угла поворота.

Наконец, следует остановиться на одном уникальном свойстве круглого волновода, связанном с частотными характеристиками затухания колебания типа H_{01} . Теоретически и экспериментально было показано, что погонное затухание этого типа колебаний неограниченно падает с ростом частоты, в отличие от затухания других типов колебаний как в круглом, так и в прямоугольном волноводах, которое с ростом частоты увеличивается.

Это позволяет осуществлять дальние волноводные линии связи, которые могут в полной мере реализовать огромную информационную емкость диапазона СВЧ. Для того чтобы иметь представление

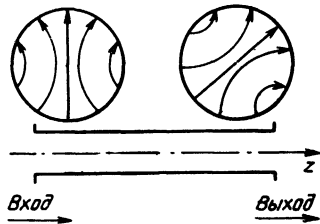


Рис. 7.10. К пояснению поляризационной неустойчивости волны типа H_{11} в круглом волноводе.

о реальных цифрах затухания, можно указать, что на волнах миллиметрового диапазона затухание в километровой отрезке круглой медной трубы диаметром 50 мм составляет всего лишь несколько децибел.

Однако на пути практического использования линий передачи с волной H_{01} возникает ряд трудностей как принципиальных, так и технических. Большинство из них связано с тем, что колебание типа H_{01} не является в круглом волноводе низшим, из-за чего по такому волноводу потенциально могут распространяться и другие типы коле-

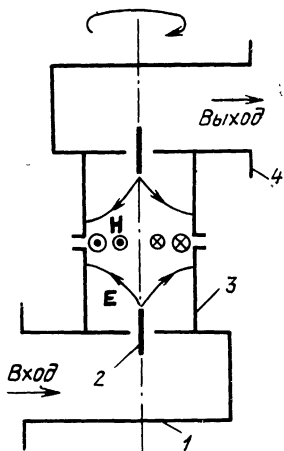


Рис. 7.11. Один из вариантов выполнения вращающегося волноводного сочленения с использованием отрезка круглого волновода:

1 — неподвижный короткозамкнутый отрезок прямоугольного волновода; 2 — возбуждающий штырь; 3 — отрезок круглого волновода с волной типа E_{01} ; 4 — вращающаяся секция прямоугольного волновода.

баний, число которых может быть весьма велико. Расчет показывает, что в трубе диаметром 50 мм на длине волны 4 мм наряду с волной H_{01} существуют еще порядка 750 распространяющихся типов колебаний. Помимо общих затруднений, изложенных в § 6.6, ситуация осложняется тем, что полезная волна H_{01} имеет тенденцию перерождаться в паразитные типы на случайных изгибах и неоднородностях волноводного тракта. Последнее ведет к тому, что фактическое затухание в волноводе становится значительно выше теоретически предельного.

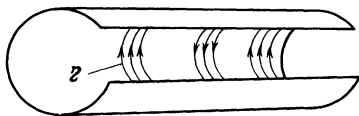


Рис. 7.12. Распределение поверхностных токов на стенках круглого волновода с волной типа H_{01} .

типа протекает лишь в азимутальном направлении, как это показано на рис. 7.12. Отсюда следует, что волновод, снабженный большим числом поперечных щелей или даже выполненный из отдельных изолированных друг от друга колец, будет обеспечивать успешное распространение желаемого типа колебаний, в то время как для паразитных типов колебаний щели окажутся излучающими, что способствует фильтрации нежелательных типов колебаний.

Наиболее эффективная мера борьбы с паразитными типами волн основана на характерной структуре поля колебания H_{01} . Легко показать, что магнитное поле в этой волне на стенках волновода, т. е. при $r=a$, имеет лишь продольную составляющую H_z . Поскольку линии поверхностного тока всегда перпендикулярны силовым линиям вектора \vec{H} , то поверхностный ток в волне данного

ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С ВОЛНАМИ ТЕМ

§.1. Некоторые общие характеристики волн ТЕМ в линиях передачи

В гл. 5, при классификации волн в линиях передачи, указано на существование особого класса решений уравнений Максвелла, для которых характерно отсутствие продольных составляющих как электрического, так и магнитного векторов. Волны подобного вида принято называть поперечными электромагнитными волнами или, сокращенно, волнами ТЕМ.

Простейшим примером волны типа ТЕМ может служить переменное электромагнитное поле, образующееся в волноводе из двух проводящих плоскостей при распространении плоской электромагнитной волны, имеющей параллельную поляризацию и падающей под углом $\varphi = 90^\circ$ (рис. 8.1). Обращает на себя внимание тот факт, что данное поле по своей конфигурации полностью совпадает с однородной плоской волной; роль идеально проводящих стенок сводится лишь к локализации поля в пространстве.

Отметим некоторые основные свойства волн типа ТЕМ.

1. Поскольку граничные условия для вектора \mathbf{E} в изображенной линии передачи удовлетворяются автоматически, структура поля не зависит от расстояния между плоскостями и от длины волны.

Следовательно,

$$(\lambda_{кр})_{ТЕМ} = \infty,$$

т. е. система пропускает колебания всех частот вплоть до постоянного тока.

2. Механизм распространения волны типа ТЕМ не связан с явлениями многократных отражений от стенок. Поэтому

$$(\lambda_{в})_{ТЕМ} = \lambda_0.$$

Здесь под λ_0 в общем случае следует понимать длину однородной плоской волны в заполняющем диэлектрике.

3. Характеристическое сопротивление волны типа ТЕМ, обозначаемое как $Z_{сТЕМ}$ и равное отношению амплитуды электрического поля к амплитуде магнитного поля, совпадает с аналогичной величиной, вычисленной

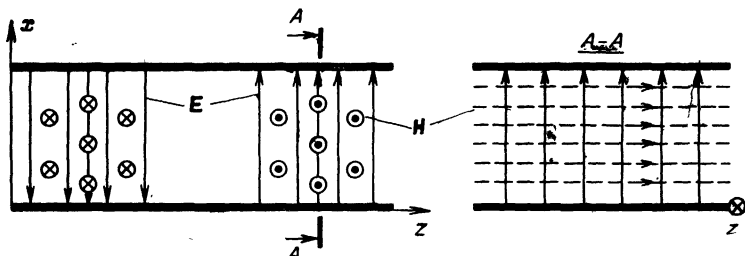


Рис. 8.1. Волна типа ТЕМ в пространстве между двумя проводящими плоскостями.

для однородной плоской волны в неограниченном пространстве. Действительно,

$$Z_{сТЕМ} = \lim_{\lambda_{кР} \rightarrow \infty} Z_{сЕ} = \lim_{\lambda_{кР} \rightarrow \infty} Z_{сН} = Z_c.$$

8.2. Напряжение и разность потенциалов в теории линий передачи

Учитывая свойство волны ТЕМ, отмеченное в п. 2 предыдущего параграфа, можно получить важный вывод, касающийся поперечного распределения электрического поля в линиях передачи с волнами ТЕМ. Для этого, как и ранее, представим распределение электрического вектора в виде волны, бегущей по оси z :

$$\underline{\dot{E}}(x, y, z) = \underline{E}(x, y) e^{-j\pi z}. \quad (8.1)$$

Подчеркнем, что из-за отсутствия многократных отражений продольное волновое число для волн типа ТЕМ определено заранее и в точности равно постоянной распространения однородной плоской волны в заполняющем диэлектрике. Далее, в соответствии с методом разделения переменных подставим (8.1) в уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \underline{\dot{E}} + \gamma^2 \underline{\dot{E}} = 0. \quad (8.2)$$

При этом получим уравнение для амплитуды поперечного распределения поля, имеющее вид

$$\nabla_{\perp}^2 E = 0. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) широко известно в математической физике и носит название уравнения Лапласа. Физически данное уравнение описывает всевозможные состояния равновесия в материальных средах. В частности, уравнение Лапласа служит основным уравнением электростатики. Это легко понять, так как (8.3) может быть получено из (8.2) при $\gamma \rightarrow 0$, т. е. при стремлении к нулю частоты колебаний.

В том, что уравнение (8.3) действительно описывает электрическое поле, возникающее в однородной среде под действием системы сосредоточенных и неизменных во времени зарядов, можно убедиться и непосредственно, записав систему уравнений Максвелла в виде, который она приобретает при обращении в нуль производных по времени:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (8.4)$$

Взяв операцию ротора от первого уравнения из системы (8.4), на основании известной формулы векторного анализа будем иметь:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad (8.5)$$

откуда, используя второе уравнение из (8.4), приходим к уравнению вида (8.3).

Итак, в любой линии передачи с волнами ТЕМ картина силовых линий электрического поля в поперечной плоскости аналогична статической картине, т. е. картина силовых линий поля в заряженном конденсаторе с расположением обкладок, повторяющим конфигурацию поперечного сечения линии передачи. Статический характер поперечного распределения электрического поля позволяет ввести понятие разности потенциалов между проводниками линии, определив ее обычным образом (см. рис. 8.2,а):

$$U = \int_L(P, Q) \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (8.6)$$

Важно подчеркнуть, что данная разность потенциалов не зависит от выбора точек P и Q , а также от выбора пути интегрирования L в поперечной плоскости.

Чрезвычайно интересно отметить, что для рассмотренных ранее полых металлических волноводов понятие разности потенциалов, удовлетворяющее перечисленным условиям, введено быть не может. Примером может слу-

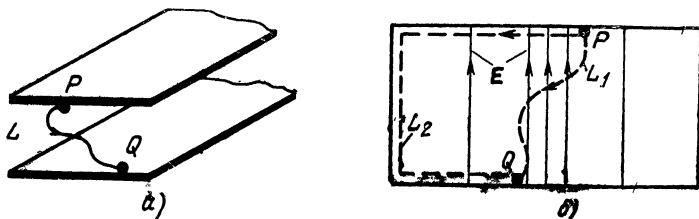


Рис. 8.2. К введению понятия напряжения в линиях передачи.

жить поперечное сечение прямоугольного волновода с волной типа H_{10} , изображенное на рис. 8.2,б. Здесь, очевидно,

$$\int_{L_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} \neq 0.$$

Тем не менее,

$$\int_{L_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

(на участках широких стенок вектор \mathbf{E} перпендикулярен элементарному вектору пути $d\mathbf{l}$, в то время как на узкой стенке вектор \mathbf{E} равен нулю в силу граничных условий).

Таким образом, для металлических волноводов с замкнутой формой поперечного сечения можно говорить не о разности потенциалов, а лишь о напряжении между конкретными точками; при этом обязательно указание о выборе пути интегрирования. Последнее делает понятие напряжения малоэффективным для теоретического анализа полых металлических волноводов.

Можно математически строго показать, что распространение волн ТЕМ возможно лишь в тех линиях передачи, где имеются по крайней мере два изолированных друг от друга токонесущих проводника, между которыми может быть создана разность потенциалов.

8.3. Коаксиальная линия передачи

Из числа линий передачи с волнами ТЕМ в технике СВЧ чаще всего используется коаксиальная линия передачи, которая представляет собой систему из двух соос-

ных металлических цилиндров с радиусами a и b , разделенных слоем диэлектрика (рис. 8.3). Для конкретности будем полагать, что диэлектрик не обладает собственными магнитными свойствами ($\mu=1$), тепловые потери в нем отсутствуют ($\sigma=0$), в то время как относительная диэлектрическая проницаемость его равна ϵ .

Анализировать структуру поля в данном устройстве целесообразно в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Ввиду полной симметрии поперечного сечения данного волновода, будем искать составляющие электромагнитного поля волны ТЕМ, удовлетворяющие следующим условиям: а) поле симметрично по координате φ , т. е. $\partial/\partial\varphi=0$; б) составляющие поля зависят только от координаты r .

Поскольку распределение электрического поля в поперечной плоскости коаксиальной линии передачи, работающей на волне типа ТЕМ, должно повторять структуру поля в цилиндрическом конденсаторе, приходим к выводу, что единственной составляющей электрического вектора здесь служит составляющая E_r . Для нахождения конкретного вида зависимости будем считать, что напряжение (разность потенциалов) между внутренним и внешним проводниками равно U . Тогда должны быть справедливы следующие соотношения:

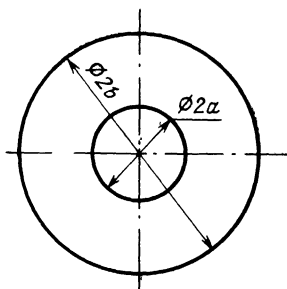


Рис. 8.3. Поперечное сечение коаксиальной линии передачи.

$$\left. \begin{aligned} E &= E_r \mathbf{1}_r, \\ \int_a^b E_r dr &= U, \\ \operatorname{div} E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Из первого соотношения (8.7), а также из формулы для вычисления операции дивергенции в цилиндрической системе координат (см. приложение) следует, что составляющая E_r должна удовлетворять соотношению

$$\frac{d}{dr}(rE_r) = 0, \quad (8.8)$$

откуда с точностью до произвольной постоянной A

$$E_r = A/r. \quad (8.9)$$

Постоянную A следует выбирать так, чтобы выполнялось второе равенство (8.7). Окончательно получим

$$E_r = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}. \quad (8.10)$$

Комплексная амплитуда вектора \mathbf{E} бегущей волны запишется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} e^{-j\gamma z} \mathbf{1}_r. \quad (8.11)$$

Принципиальной особенностью коаксиальной линии передачи является то, что ток в ней, идущий от генератора к нагрузке по внутреннему цилиндру, возвращается в генератор по наружному проводнику. В силу этого нетрудно понять, что силовые линии магнитного вектора в пространстве между цилиндрами имеют такой же вид, как и в случае протекания тока по одиночному цилиндрическому проводнику, т. е. представляют собой концентри-

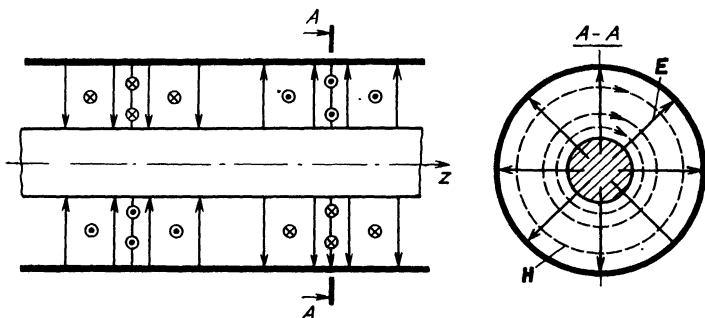


Рис. 8.4. Структура электромагнитного поля волны типа TEM в коаксиальной линии передачи.

ческие окружности; в цилиндрической системе координат вектор \mathbf{H} имеет при этом единственную составляющую H_φ (рис. 8.4). Амплитудное значение напряженности магнитного поля легко может быть найдено через характеристическое сопротивление волны TEM:

$$Z_{c\text{ TEM}} = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a} = 120\pi / \sqrt{\epsilon}, \text{ Ом.} \quad (8.12)$$

Соответствующая комплексная амплитуда принимает вид

$$\dot{H}_\varphi = \frac{U \sqrt{\epsilon}}{120\pi \ln(b/a)} \frac{1}{r} e^{-j\gamma z}. \quad (8.13)$$

8.4. Волновое сопротивление

Зная комплексные амплитуды электрического и магнитного полей в коаксиальной линии передачи, можно вычислить мощность электромагнитного поля, переносимую вдоль оси z :

$$P = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*] dS. \quad (8.14)$$

Подставляя сюда выражения (8.11) и (8.13) и проводя интегрирование, получаем

$$P = \frac{U^2 V_{\epsilon}}{120 \ln(b/a)}, \text{ Вт.} \quad (8.15)$$

Формулу (8.15) можно рассматривать как выражение для мощности, выделяемой на некотором резисторе W при подаче на него синусоидального напряжения U . Поскольку $P = U^2/2W$, можно записать

$$W = \frac{60}{V_{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{138}{V_{\epsilon}} \lg\left(\frac{b}{a}\right), \text{ Ом.} \quad (8.16)$$

Величина W носит название волнового сопротивления коаксиальной линии передачи и имеет большое значение при решении вопросов ее реализации. Это объясняется тем, что часто используют последовательное включение линий передачи, обладающих различающимися параметрами, например, диаметрами проводников. Естественным требованием, предъявляемым к стыку двух линий, является согласование, т. е. отсутствие отражений от данной сосредоточенной неоднородности. Поскольку в плоскости стыка напряжение U есть непрерывная функция координаты z , мощность может быть целиком передана из одной линии в другую лишь при условии

$$W_1 = W_2. \quad (8.17)$$

Формула (8.17) во многих случаях служит критерием согласования с достаточной для инженерных целей точностью. Приближенность ее заключается в том, что здесь не учитывается изменения структуры поля в непосредственной близости от плоскости скачка геометрических размеров, происходящее за счет возбуждения нераспространяющихся колебаний высших типов.

Возможность использования понятия волнового сопротивления для линий передачи с волнами ТЕМ объясня-

ется тем, что здесь напряжение U , в отличие от волноводов, может быть введено однозначным образом. Поэтому волновое сопротивление полностью характеризуется геометрическими параметрами поперечного сечения, а также диэлектрической проницаемостью использованного материала.

8.5. Некоторые применения коаксиальных линий передачи

В радиотехнической практике коаксиальные линии передачи чаще всего используются в виде коаксиальных кабелей — гибких линий передачи, конструкция которых изображена на рис. 8.5. Возможность изгиба линии обеспечивается путем использования в качестве диэлектриков специальных полимерных материалов, таких, как полиэтилен, фторопласт-4, полиизобутилен и др. Для этой же цели наружный проводник коаксиального кабеля выполняется в виде оплетки, сплетенной из большого числа тонких проводников.

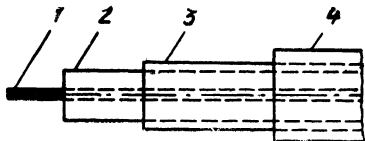


Рис. 8.5. Конструкция коаксиального кабеля:

1 — внутренний проводник; 2 — цилиндрический слой изоляции; 3 — наружная оплетка; 4 — внешнее защитное покрытие.

Промышленность выпускает большое число разновидностей коаксиальных кабелей, отличающихся по своей конструкции и областям применения. Однако номинальные значения волновых сопротивлений кабелей стандартизованы. Типичными величинами стандартных волновых сопротивлений являются 50, 75, 100, 150, 200 Ом. Такая стандартизация в существенной степени способствует унификации узлов и компонентов радиоэлектронной аппаратуры.

Как правило, коаксиальные кабели — это линии для передачи небольших мощностей в диапазоне частот от постоянного тока приблизительно до 10 ГГц. На более высоких частотах поперечные размеры кабеля становятся сравнимыми с рабочей длиной волны, и по кабелю помимо основной волны типа TEM могут распространяться волны высших типов, что бывает нежелательным.

Важной областью применения коаксиальных кабелей является создание на их основе многоканальных линий дальней связи, работающих в относительно низкочастотном диапазоне (единицы или десятки мегагерц).

8.6. Полосковые линии передачи

За последние десятилетия в технику СВЧ прочно вошли интересные линии передачи с волнами TEM, носящие название полосковых линий передачи. Полосковые линии образуются путем нанесения проводящих полосок на пластину из диэлектрика с малыми потерями. В ка-

честве примера на рис. 8.6 изображено сечение так называемой несимметричной полосковой линии, чаще всего применяемой в радиотехнике. Особенностью линии является то, что ее нижняя полоска выполняется гораздо шире верхней, образуя «заземленную плоскость».

Строгая теория несимметричной полосковой линии весьма сложна. В частности, удастся показать, что электромагнитное поле в такой системе имеет все шесть декартовых составляющих и поэтому считать данную волну принадлежащей к классу волн ТЕМ можно лишь

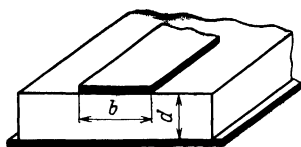


Рис. 8.6. Несимметричная полосковая линия передачи:

условно. Однако на практике, как правило, реальные линии характеризуются расстояниями между проводниками, значительно меньшими, чем ширина верхней полоски. В силу этого электрическое поле в системе весьма близко к статическому полю в плоском конденсаторе, которое, без учета краевых эффектов, можно считать однородным. Указанные предположения позволяют весьма просто найти величину волнового сопротивления несимметричной полосковой линии.

Предположим, что амплитуда переменного напряжения между проводниками равна U . Тогда, очевидно,

$$\dot{E}_y = \frac{U}{d} e^{-jrz}, \quad \dot{H}_x = \frac{U \sqrt{\epsilon}}{120\pi} \frac{1}{d} e^{-jrz}, \quad (8.18)$$

откуда интегрированием по площадке сечением $S = d \times b$, в пределах которой сконцентрировано практически все поле, получим величину переносимой мощности:

$$P = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*] dS = \frac{U^2 \sqrt{\epsilon}}{240\pi} \left(\frac{b}{d} \right), \text{ Вт.} \quad (8.19)$$

Далее, рассуждая как и в § 8.4, находим

$$W = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{d}{b} \right), \text{ Ом.} \quad (8.20)$$

Большим преимуществом полосковых линий передачи по сравнению с рассмотренными ранее системами является возможность массового изготовления их при помощи технологии печатных схем. Это приобретает особое значение в связи с наметившейся в последнее время тенденцией к микроминиатюризации устройств СВЧ.

ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В ПОЛЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

9.1. Источники потерь в волноводах

До сих пор процесс распространения электромагнитных волн по регулярным металлическим волноводам рассматривался в предположении об отсутствии каких-либо потерь энергии в них. Однако на практике всегда сталкиваются с тем, что волноводы обладают некоторым затуханием, выраженным в той или иной степени. В некоторых частных применениях, например при создании дальних волноводных линий связи, характеристики затухания становятся определяющими при выборе того или иного варианта линии передачи.

Можно выделить два основных источника потерь энергии, присущих полым металлическим волноводам:

- 1) потери, возникающие за счет конечной проводимости материала стенок;
- 2) потери, вызванные протеканием токов проводимости в диэлектрике, заполняющем волновод.

Первый из перечисленных источников потерь связан с тем, что на поверхности реального металла с конечной проводимостью тангенциальная составляющая вектора

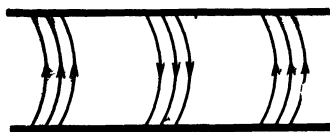


Рис. 9.1. Деформация силовых линий электрического поля за счет потерь в стенках волновода.

напряженности электрического поля уже не обращается в нуль, а равна некоторой конечной, хотя и весьма малой величине. На рисунке картины поля это отображается тем, что силовые линии поля E вместо прямых становятся слегка выпуклыми (рис. 9.1). В результате активная часть вектора Пойнтинга получает некоторую составляющую, направленную внутрь металла. Данная составляющая характеризует долю энергии, идущую на нагрев стенок. Следует указать, что картина, изображенная на

рис. 9.1, носит утрированный характер, поскольку в силу высокой проводимости металлов тангенциальные составляющие поля \mathbf{E} имеют очень малую величину.

Потери энергии в волноводе, связанные с неидеальностью диэлектрических свойств заполняющего материала, имеют, как правило, второстепенное значение, поскольку чаще всего волновод заполнен столь совершенным диэлектриком, как воздух.

9.2. Способ учета затухания в волноводах

Как уже известно, комплексные амплитуды бегущих волн в произвольном волноводе, работающем на любом типе колебаний, выражаются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-jhz}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-jhz}. \quad (9.1)$$

Отрезок регулярного волновода можно представить как каскадное соединение некоторого числа отрезков единичной длины. Если допустить, что каждый из этих отрезков обладает некоторым затуханием, то общее затухание должно являться экспоненциальной функцией суммарной длины. Другими словами, амплитуды электромагнитных полей в волноводе с потерями должны экспоненциально уменьшаться с ростом длины волновода. Аналогичная ситуация уже встречалась при учете затухания плоской волны, распространяющейся в неидеальном диэлектрике (см. § 2.1).

Таким образом, нужно полагать, что в волноводе с потерями продольное волновое число h является величиной комплексной:

$$h = h' - jh'', \quad (9.2)$$

тогда

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-h''z} e^{-jh'z}. \quad (9.3)$$

Вид формулы (9.3) показывает, что h' является фазовой постоянной, в то время как h'' служит постоянной затухания.

Потери в регулярных линиях передачи принято характеризовать погонным затуханием. Положим, например, что на входе отрезка волновода длиной l м амплитуда напряженности электрического поля равна $E_{вх}$, в то время как на выходе за счет потерь эта амплитуда умень-

шается до величины $E_{\text{вых}} < E_{\text{вх}}$. В соответствии с (9.3) будем иметь

$$h'' = \ln(E_{\text{вх}}/E_{\text{вых}}), \text{ Нп/м.} \quad (9.4)$$

Таким образом, численное значение постоянной затухания h'' является погонным затуханием рассматриваемой линии передачи, выраженным в неперах.

В радиотехнике погонное затухание чаще выражают в децибелах, пользуясь формулой вида

$$\Delta_{\text{пог}} = 20 \lg(E_{\text{вх}}/E_{\text{вых}}), \text{ дБ/м.} \quad (9.5)$$

Связь между этими двумя величинами такова:

$$\Delta_{\text{пог}} = 8,69 h''. \quad (9.6)$$

На волнах СВЧ диапазона гораздо чаще приходится оперировать не с напряженностями полей, а с величинами мощностей, легче поддающихся измерению. Поскольку мощность всегда пропорциональна квадрату напряженности поля, формулу (9.5) можно переписать и так:

$$\Delta_{\text{пог}} = 10 \lg(P_{\text{вх}}/P_{\text{вых}}), \text{ дБ/м.} \quad (9.7)$$

9.3. Общие выражения для постоянных затухания

Рассмотрим произвольную регулярную линию передачи, ориентированную вдоль оси z , и выделим бесконечно малый отрезок этой линии длиной dz . Поскольку напряженности полей в линии меняются по закону (9.3), мощность, переносимая в любом сечении $z = \text{const}$, имеет вид

$$P = P_0 e^{-2h''z}. \quad (9.8)$$

Мощность, теряемая на отрезке dz , равна

$$dQ = -(dP/dz) dz, \quad (9.9)$$

откуда

$$dQ = 2h'' P dz. \quad (9.10)$$

Таким образом,

$$h'' = \frac{dQ/dz}{2P} \quad (9.11)$$

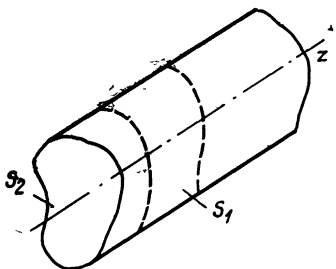


Рис. 9.2. К выводу формулы для постоянной затухания.

Обозначая через $P_{\text{пот пот}} = dQ/dz$ мощность потерь на единице длины волновода при заданном уровне переносимой мощности, получаем окончательно

$$h'' = P_{\text{пот пот}}/2P. \quad (9.12)$$

Формула (9.12) является общей и пригодна для любого волновода.

Рассмотрим наиболее важный для практики случай, при котором потери в волноводе обусловлены только неидеальной проводимостью стенок. При этом будем полагать проводимость достаточно высокой для того, чтобы могли применяться приближенные граничные условия Леонтовича (см. § 4.7). С физической точки зрения это означает, что несмотря на наличие потерь структура поля в волноводе остается такой же, как и при бесконечной проводимости стенок.

Найдем мощность потерь, возникающих в метровом отрезке регулярного волновода (см. рис. 9.2). Здесь

$$P_{\text{пот пот}} = \int_{S_1} \Pi_{\text{ср пот}} dS_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} [\dot{E}_{\text{тм}} \dot{H}_{\text{тм}}^*] dS_1. \quad (9.13)$$

Тангенциальные составляющие электромагнитного поля на стенках волновода определяются в соответствии с граничными условиями Леонтовича. Прежде всего, полагаем, что тангенциальная составляющая магнитного поля остается такой же, как и на стенках волновода без потерь, т. е.

$$\dot{H}_{\text{тм}} = \dot{H}_{\text{тм}} \Big|_{\sigma=\infty}. \quad (9.14)$$

Тангенциальную составляющую вектора напряженности электрического поля можно найти, зная характеристическое сопротивление металла $Z_{\text{см}}$:

$$|\dot{E}_{\text{тм}}| = Z_{\text{см}} |\dot{H}_{\text{тм}}|, \quad (9.15)$$

где

$$Z_{\text{см}} = \sqrt{\omega\mu_0/2\sigma} (1 + j) \quad (9.16)$$

(предполагается, что металл не обладает ферромагнитными свойствами).

Если учесть, что

$$\dot{H}_{\text{тм}} \perp \perp \dot{E}_{\text{тм}} \perp \perp dS_1, \quad (9.17)$$

то получим окончательно

$$P_{\text{пот пот}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_{S_1} |H_{\text{тм}}|^2 dS_1. \quad (9.18)$$

Мощность, переносимую по волноводу, можно найти, интегрируя среднее значение вектора Пойнтинга по поперечному сечению:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_2} [\dot{E}\dot{H}^*] dS_2. \quad (9.19)$$

Итак,

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_{S_1} |H_{\text{тм}}|^2 dS_1}{\operatorname{Re} \int_{S_2} [\dot{E}\dot{H}^*] dS_2}, \quad (9.20)$$

или в децибелах

$$\Delta_{\text{пот}} = 8,69h'', \text{ дБ/м}. \quad (9.21)$$

9.4. Анализ некоторых частных случаев

В данном параграфе на конкретных примерах, часто встречающихся на практике, будет показана методика получения расчетных формул для определения погонного затухания волноводных линий передачи.

Коаксиальная линия передачи. Данная линия передачи уже рассматривалась в § 8.3. Напомним основные обозначения: a и b — радиусы внутреннего и внешнего проводников соответственно, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость заполняющего диэлектрика. Считаем, что диэлектрик немагнитный, т. е. $\mu = 1$.

Составляющие поля в коаксиальной линии могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{E}_r = \frac{E_0}{r} e^{-j\tau z}, \quad H_\phi = \frac{\sqrt{\epsilon} E_0}{120\pi r} e^{-j\tau z}. \quad (9.22)$$

Отсюда мощность, переносимая в пространстве между проводниками по направлению оси z , равна

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \dot{E}_r \dot{H}_\phi^* r dr = \frac{\sqrt{\epsilon} E_0^2}{120} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (9.23)$$

Определяя погонную мощность потерь, следует учитывать, что интегрирование проводится по поверхности обоих проводников. Составляющая \dot{H}_φ в данной системе оказывается тангенциальной к поверхности металла, так что вычисления будут элементарными:

$$P_{\text{пот пог}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left(\frac{V \varepsilon E_0}{120} \right)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (9.24)$$

Из (9.23) и (9.24) окончательно получаем

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{8,69 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\omega \mu_0 / 8\sigma} (1/a + 1/b)}{120\pi \ln(b/a)}, \text{ дБ/м.} \quad (9.25)$$

Теоретические кривые затухания за счет потерь в металле применительно к типичной коаксиальной линии передачи с диэлектрическим заполнением показаны на рис. 9.3. График построен по (9.25) как функция рабочей частоты. Можно показать, что отношение

$$\frac{1/a + 1/b}{\ln(b/a)} \quad (9.26)$$

минимально в том случае, если параметр b/a равен приблизительно 3,6. Такая конструкция коаксиальной линии оптимальна с точки зрения минимальных потерь в металле; волновое сопротивление линии при $\varepsilon = 2,25$ (диэлектрик — полиэтилен) составит

$$W = \frac{138}{\sqrt{2,25}} \lg 3,6 = 51 \text{ Ом.} \quad (9.27)$$

Нетрудно понять физическую причину существования оптимального соотношения радиусов. При чрезмерном уменьшении радиуса внутреннего проводника потери

в нем возрастают ввиду увеличения плотности тока; если же отношение радиусов стремится к единице, то потери также растут за счет сокращения области пространства, по которой переносится электромагнитная энергия.

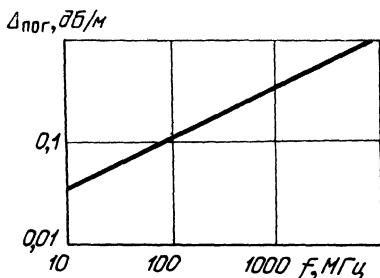


Рис. 9.3. Зависимость погонных потерь от частоты для коаксиального кабеля типа РК-50-3-13 ($a=0,45$ мм, $b=1,5$ мм, $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, $\varepsilon=2,25$).

Специфика конструкции коаксиальной линии передачи состоит в том, что здесь пространство между проводниками чаще всего заполнено твердым диэлектриком. Покажем, каким образом можно учесть затухание

$\Delta_{\text{пот}}, \text{дБ/м}$

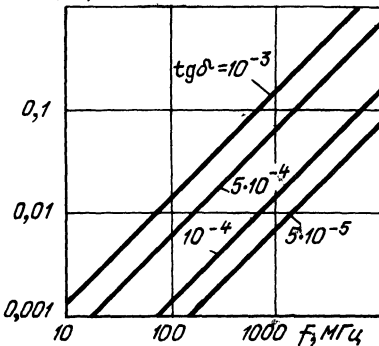


Рис. 9.4. Частотные зависимости погонных потерь, вызванных неидеальностью диэлектрика коаксиального кабеля (диэлектрик — полиэтилен, $\epsilon = 2,25$).

из-за неидеальности диэлектрических свойств. Для простоты будем полагать, что металл обладает бесконечно высокой проводимостью, заполняющий диэлектрик характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и известным фактором потерь $\text{tg } \delta$.

Для того чтобы найти погонную мощность потерь, заметим, что в соответствии с теоремой Пойнтинга плотность рассеиваемой мощности при гармоническом законе изменения полей во времени составит

$$P_{\text{ср}} = E^2 \sigma / 2. \quad (9.28)$$

Здесь σ — удельная объемная проводимость диэлектрика, связанная с $\text{tg } \delta$ соотношением

$$\text{tg } \delta = \sigma / \omega \epsilon_0 \epsilon. \quad (9.29)$$

Интегрируя (9.28) по внутренней области метрового отрезка коаксиального волновода, будем иметь

$$P_{\text{пот пог}} = \frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b E_r^2 r dr = \pi \sigma E_0^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (9.30)$$

Воспользовавшись выражением (9.23) для переносимой мощности, после некоторых преобразований получим

$$\Delta_{\text{пот}} = 9,08 \cdot 10^{-8} \cdot f \sqrt{V_s} \text{ tg } \delta, \text{ дБ/м}. \quad (9.31)$$

График зависимости погонного затухания, вызванного потерями в диэлектрике, для некоторого конкретного коаксиального волновода, вычисленный по (9.31), представлен на рис. 9.4. Параметрами для различных кривых

служит тангенс угла диэлектрических потерь. Как следует из данного рисунка, погонные потери в линии быстро возрастают с ростом частоты. Сравнение с графиком на рис. 9.3 показывает, что на волнах СВЧ диапазона потери в диэлектрике оказываются гораздо существеннее, чем потери из-за неидеальной проводимости металла.

Прямоугольный металлический волновод. Погонное затухание волн различных типов в прямоугольном металлическом волноводе вычисляется по общей формуле (9.20); обычно расчет оказывается достаточно громоздким, поэтому в практических целях удобнее всего пользоваться готовыми формулами, которые можно найти в справочниках по волноводной технике.

Приведем без вывода формулу для расчета погонного затухания волны типа H_{10} , вызванного потерями в металле:

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{8,69 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \right]}{120\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}, \text{ дБ/м.} \quad (9.32)$$

График зависимости погонного затухания от рабочей длины волны для конкретного волновода, соответствующий формуле (9.32), показан на рис. 9.5. Анализ его показывает, что зависимость затухания носит экстремальный характер, причем затухание неограниченно возрастает как при стремлении частоты к бесконечности, так и вблизи критической частоты. Физические причины роста затухания здесь различны. Рост затухания на высоких частотах объясняется уменьшением толщины поверхностного слоя, что ведет к росту сопротивления металлических стенок. С другой стороны, при приближении к критической частоте плоские волны, из которых скла-

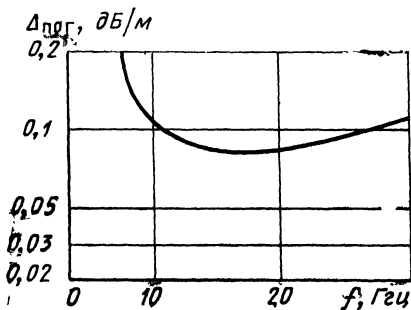


Рис. 9.5. Зависимость погонных потерь в прямоугольном волноводе на волне типа H_{10} от частоты (материал стенок — медь, $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, $a = 23$ мм, $b = 10$ мм).

дывается волноводный тип колебаний, начинают испытывать все большее число отражений от стенок, приходящихся на единицу длины волновода, что также приводит к росту погонных потерь.

При рассмотрении последнего графика становится понятным, в частности, почему нецелесообразно использовать прямоугольный волновод стандартного сечения на волнах, более длинных чем $1,6 a$.

Для волноводов с отношением сторон $2:1$ минимальное погонное затухание получается при длине волны $\lambda_0 \approx 0,8 a$. Данное значение находится вне области одноволновости, однако ввиду весьма пологого характера зависимости увеличение затухания в рабочей полосе частот по отношению к минимальному уровню невелико.

Переход от одного диапазона частот к другому сопровождается выбором нового стандартного сечения прямоугольного волновода. Интересно выяснить, как при этом меняется погонное затухание. Для стандартных волноводов отношение b/a всегда остается постоянным; отношение λ_0/a на средних частотах диапазонов также остается неизменным. Учитывая это, можно видеть, что числитель в формуле (9.32) пропорционален корню из частоты f , в то время как знаменатель, где фигурирует размер узкой стенки b , пропорционален величине $1/f$. В результате имеем

$$\Delta_{\text{пог}} \sim f^{3/2}. \quad (9.33)$$

Проиллюстрируем смысл формулы (9.33) на конкретном примере. Известно, что стандартный волновод сечением $10 \times 23 \text{ мм}^2$, изготовленный из меди, обладает на длине волны $\lambda_0 = 3 \text{ см}$ погонным затуханием $0,1 \text{ дБ/м}$. При переходе на длину волны $\lambda_0 = 3 \text{ мм}$ следует воспользоваться волноводом с десятикратно уменьшенным сечением, т. е. $1 \times 2,3 \text{ мм}^2$. Затухание в таком волноводе будет увеличено в $10^{3/2}$ раза, т. е. станет равным около 3 дБ/м .

Резкое возрастание потерь в прямоугольных волноводах стандартного сечения значительно усложняет конструирование устройств, работающих в коротковолновой части миллиметрового диапазона.

Частотные зависимости погонного затухания для волн высших типов в прямоугольном волноводе носят такой же экстремальный характер; причем с ростом индексов погонные потери для волн как Е, так и Н-типов возрастают.

Круглый металлический волновод. График зависимости погонного затухания волны типа H_{11} в круглом волноводе с радиусом $a=25$ мм, изготовленным из меди, от рабочей частоты, рассчитанный по формуле

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{0,793}{a \sqrt{\sigma \lambda} [1 - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2]} [0,418 + (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2], \text{ дБ/м}, \quad (9.34)$$

приведен на рис. 9.6. Легко видеть, что качественный характер зависимости остается таким же, как и для вол-

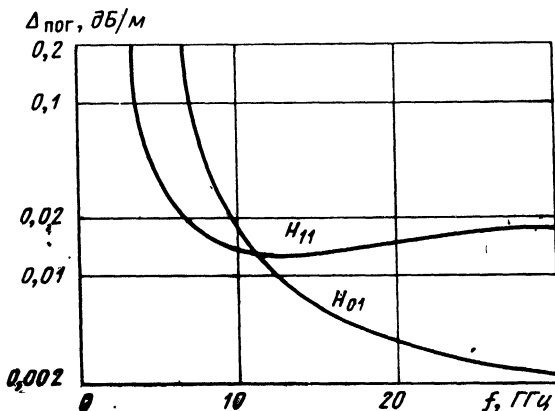


Рис. 9.6. Зависимость погонных потерь волн типа H_{11} и H_{01} в медном волноводе диаметром 50 мм от частоты.

ны H_{10} в прямоугольном волноводе, — затухание возрастает при приближении частоты к критической и при стремлении ее к бесконечности. Это в равной мере относится ко всем прочим типам колебаний в круглом волноводе, за исключением симметричных магнитных волн типа H_{0n} . Частотная зависимость затухания наиболее важной в практическом отношении волны типа H_{01} , рассчитанная по формуле

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{0,793(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}{a \sqrt{\sigma \lambda} [1 - (\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2]}, \text{ дБ/м}, \quad (9.35)$$

изображена на рис. 9.6. Как уже упоминалось, данный тип колебаний характерен неограниченным уменьшением погонных потерь с ростом частоты.

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

10.1. Постановка задачи

При рассмотрении процессы распространения волн типа Е или Н в полых металлических волноводах было показано, что фазовая скорость этих волн всегда превышает скорость однородных плоских волн в безграничной среде, аналогичной по своим свойствам заполняющему диэлектрику. Хотя, как это было показано, данный факт не противоречит фундаментальным физическим воззрениям, пользуясь лишь понятием фазовой скорости, нельзя адекватно описать многие явления в волноводах, представляющие интерес для радиотехники. Сюда прежде всего относится распространение по волноводу модулированных сигналов. Совершенно ясно, что никакой реальный сигнал не может распространяться по линии передачи со скоростью, большей, чем скорость света. В противном случае было бы нарушено основное положение теории относительности Эйнштейна, утверждающее, что скорость света является предельной скоростью распространения любых возмущений независимо от их физической природы. Отсюда следует, что, рассматривая прохождение по волноводу импульсных колебаний, необходимо несколько расширить понятие скорости.

10.2. Группы волн и групповая скорость

Немонохроматический сигнал, подаваемый на вход волноводной линии передачи, всегда может быть представлен при помощи спектрального разложения в виде ряда или интеграла Фурье. Результаты, которые будут получены в данном параграфе, в равной мере справедливы для случаев как дискретного, так и непрерывного спектров.

Предположим, что по пологому металлическому волноводу с произвольной формой поперечного сечения распространяются две волны с частотами ω_1 и ω_2 ; мгновец-

ные значения любых составляющих этих процессов могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_0 \cos(\omega_1 t - h_1 z), \\ A_2 &= A_0 \cos(\omega_2 t - h_2 z). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Спектральная диаграмма рассматриваемого сложного колебания показана на рис. 10.1. Предполагается, что относительная разность частот невелика, т. е.

$$|\omega_1 - \omega_2| / \omega_1 \ll 1. \quad (10.2)$$

Чрезвычайно важно подчеркнуть, что продольные волновые числа h_1 и h_2 , входящие в выражения (10.1), зависят от соответствующих частот и определяются дисперсионными свойствами того или иного волновода. Так или иначе, из-за малости расстройки следует очевидное неравенство

$$|h_1 - h_2| / h_1 \ll 1. \quad (10.3)$$



Рис. 10.1. Спектральная диаграмма простейшего немонохроматического колебания.

С физической точки зрения сложение двух гармонических колебаний с различными частотами приводит к образованию биений. Это в равной мере справедливо и для сложения двух волновых процессов. Для того чтобы доказать это, сложим оба мгновенных значения, входящих в (10.1):

$$\begin{aligned} A_{\Sigma} &= A_1 + A_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{h_1 - h_2}{2} z\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{h_1 + h_2}{2} z\right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Здесь прежде всего обратим внимание на то, что первый косинусоидальный множитель характеризуется частотой $(\omega_1 - \omega_2)/2$, значительно ниже, чем ω_1 или ω_2 . В то же время частота второго множителя равна среднему арифметическому от частот обоих спектральных составляющих и согласно условию (10.2) может считаться практически совпадающей с любой из этих частот. Если изобразить распределение мгновенных значений в какой-либо фиксированный момент времени, то получим характерную картину биений, изображенную на

рис. 10.2. Здесь можно выделить низкочастотную огибающую и высокочастотное заполнение. Однако следует учитывать, что изучаемый процесс носит волновой характер. Поэтому как огибающая, так и заполнение являются волнами, скорости распространения которых вдоль оси z , вообще говоря, различны.

В настоящем параграфе особый интерес для читателя представляет явление волнового распространения оги-

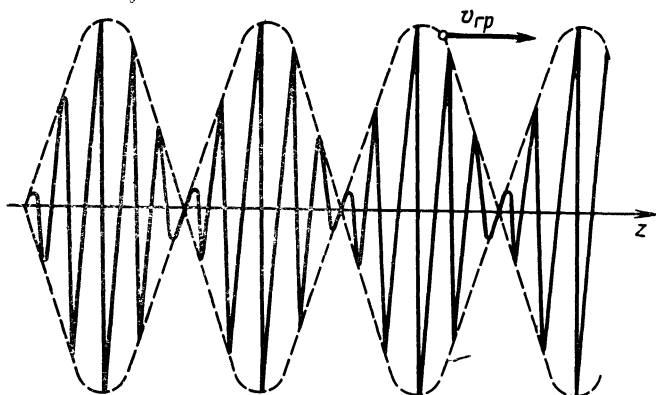


Рис. 10.2. Иллюстрация волнового распространения огибающей.

бающей. Характерная картина распределения в пространстве огибающей волнового процесса, образованного монохроматическими составляющими, близкими по частоте, называется группой волн. На рис. 10.2 отдельные группы волн показаны пунктиром.

Скорость распространения групп вдоль какой-либо оси называется групповой скоростью. Если сложное колебание, распространяющееся по волноводу, в достаточной мере узкополосно, то понятие групповой скорости адекватно описывает распространение по волноводу соответствующих импульсных сигналов. Заметим, что на частотах СВЧ диапазона такое условие выполняется, как правило, всегда, поскольку здесь частоты модуляции значительно ниже несущей частоты.

Нетрудно получить общее выражение для групповой скорости. Для этого в соответствии с (10.4) запишем уравнение плоскости постоянной фазы для огибающей

$$(\omega_1 - \omega_2)t - (h_1 - h_2)z = \text{const.} \quad (10.5)$$

Отсюда

$$v_{\text{гp}} = dz/dt = (\omega_1 - \omega_2) / (h_1 - h_2). \quad (10.6)$$

Устремляя к нулю разность между частотами двух спектральных составляющих, получаем в пределе

$$v_{\text{гp}} = \frac{d\omega}{dh} = 1 / \frac{dh}{d\omega}. \quad (10.7)$$

Итак, для того чтобы вычислить групповую скорость, необходимо, зная дисперсионную характеристику линии передачи, т. е. зависимость $h = F(\omega)$, вычислить производную в точке, соответствующей средней частоте спектра.

Заметим, что на основании общих принципов (см., например, § 2.1.) фазовая скорость любой монохроматической волны записывается следующим образом:

$$v_{\text{ф}} = \omega / h. \quad (10.8)$$

Сравнение (10.8) с (10.7) показывает, что для тех линий передачи, в которых зависимость постоянной распространения от частоты линейна, групповая и фазовая скорости тождественно совпадают. Примером может служить плоская волна, распространяющаяся в неограниченном диэлектрике. Здесь

$$h = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (10.9)$$

так что

$$v_{\text{ф}} = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = v_{\text{гp}}. \quad (10.10)$$

Другим примером линии передачи без дисперсии может служить коаксиальная линия, работающая на колебании типа ТЕМ.

10.3. Групповая скорость в металлических волноводах

Пользуясь общей формулой (10.7), вычислим групповую скорость в полном металлическом волноводе, работающем на волне произвольного типа. При этом удобно воспользоваться следующими очевидными соотношениями:

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{\text{кр}})^2}}{\lambda_0}. \quad (10.11)$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \quad (10.12)$$

Согласно формуле (10.12) можно сделать следующие выводы:

- 1) групповая скорость волн в волноводе всегда меньше фазовой скорости и меньше скорости света;
- 2) фазовая и групповая скорости связаны соотношением.

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = c^2; \quad (10.13)$$

3) групповая скорость сигналов, средняя частота которых стремится к критической частоте колебания выбранного типа, также стремится к нулю; при повышении средней частоты групповая скорость увеличивается, причем верхним пределом скорости при $\lambda_0 \rightarrow 0$ является $v_{\text{гр}} = c$.

С наличием зависимости групповой скорости от частоты приходится считаться при анализе процесса передачи по волноводным линиям очень коротких радиоимпульсов. Спектр этих импульсов может оказаться настолько широким, что уже нельзя говорить об образовании вдоль оси волновода единых групп волн в том смысле, как это было указано ранее. При анализе широкополосного колебания следует выделить отдельные группы, каждая из которых распространяется со своей собственной групповой скоростью. В результате сигнал на выходе при достаточной длине волновода претерпевает существенные искажения.

В заключение приведем решение конкретной задачи, иллюстрирующей понятие групповой скорости. Пусть линия передачи длиной $L = 10$ м выполнена на прямоугольном волноводе сечением 10×23 мм² с воздушным заполнением. По данной линии распространяется радиоимпульс с прямоугольной формой огибающей, обладающий следующими параметрами: частота заполнения $f_0 = 10^{10}$ Гц ($\lambda_0 = 3$ см), длительность импульса $\tau = 0,001$ мкс = 10^{-9} с (рис. 10.3). Требуется качественно ответить на вопрос о том, существенны ли искажения на выходе линии, обусловленные зависимостью групповой скорости от частоты.

Проанализируем, прежде всего, спектральный состав данного импульсного процесса. Как доказывается в курсе теоретической радиотехники, спектральная плотность будет иметь вид, представленный на рис. 10.3, причем, если приближенно считать, что энергия сигнала заключе-

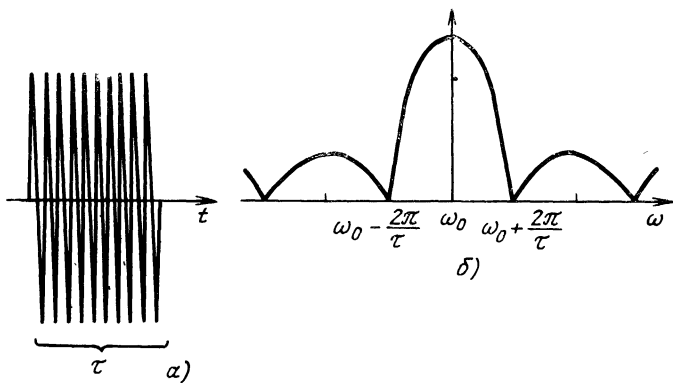


Рис. 10.3. Прямоугольный радиоимпульс (а) и его спектральная плотность (б).

на лишь в центральной лепестке спектральной диаграммы, то

$$\omega_{\text{верх}} = \omega_0 + 2\pi/\tau = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ 1/с},$$

$$\omega_{\text{ниж}} = \omega_0 - 2\pi/\tau = 5,65 \cdot 10^{10} \text{ 1/с}.$$

Легко проверить, что по данному волноводу на этих частотах может распространяться лишь колебание низшего типа H_{10} , для которого $\lambda_{\text{кр}} = 2a = 46 \text{ мм}$, $\omega_{\text{кр}} = 4,1 \cdot 10^{10} \text{ 1/с}$.

Формула для групповой скорости может быть записана в виде, эквивалентном (10.7):

$$v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - (\omega_{\text{кр}}/\omega)^2}. \quad (10.14)$$

Таким образом, группа волн, образованная низкочастотными спектральными составляющими, будет обладать групповой скоростью

$$v_{\text{гр ниж}} = c \sqrt{1 - (\omega_{\text{кр}}/\omega_{\text{ниж}})^2} = 0,690c.$$

Аналогично

$$v_{\text{гр верх}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega_{\text{верх}}}\right)^2} = 0,805c.$$

Отсюда легко убедиться, что на длине $L=10$ м низкочастотная группа волн отстанет от высокочастотной группы на отрезок времени $\Delta t=7 \cdot 10^{-9}$ с. Поскольку эта величина значительно превышает длительность импульса, несомненно, что передаваемый импульс на выходе будет существенно искажен.

Если длина линии передачи невелика, то с данным эффектом в ряде случаев можно не считаться. Однако при больших длинах волноводного тракта явление «расплывания» радиоимпульса может послужить серьезным препятствием для реализации многих устройств. Естественной мерой, позволяющей избежать этого, служит отказ от построения трактов на основе полых волноводов и переход к линиям передачи с волнами типа ТЕМ, таким, как коаксиальная или полосковая линия.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

В предыдущих главах рассматривались волноводные линии передачи, в которых фазовая скорость распространяющихся колебаний была равна скорости света или превосходила ее. Однако для нужд электроники СВЧ часто требуются волноводные системы, в которых фазовая скорость электромагнитных волн была бы уравнена со скоростью пучка электронов. Очевидно, что при этом $v_{\phi} < c$. Волноводные системы, удовлетворяющие этому условию, носят название замедляющих структур. Замедляющие структуры находят широкое применение и в других областях радиоэлектроники, в частности, при создании специальных антенн.

В данной главе будут описаны основные виды замедляющих структур и на простейших примерах исследованы важнейшие свойства электромагнитных процессов в этих волноводах.

11.1. Спиральный волновод

Одной из первых замедляющих структур, нашедших применение на практике, явился спиральный волновод, изображенный схематически на рис. 11.1. Данная система представляет собой достаточно тонкий проводник, навитый на круглый цилиндр радиуса a по винтовой линии с некоторым постоянным шагом d .

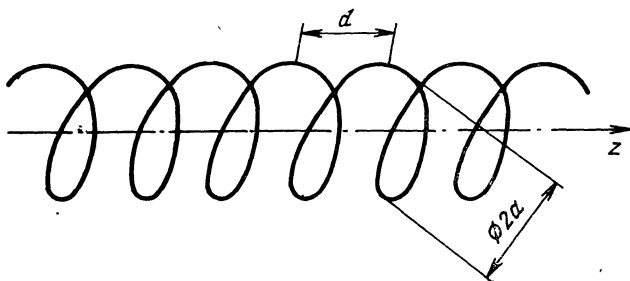


Рис. 11.1. Спиральный волновод.

Замедляющие свойства спирального волновода объясняются следующим. При возбуждении системы вдоль проводника распространяется волна тока, причем скорость этой волны с большой точностью равна скорости света в вакууме c . Поскольку путь тока вдоль провода значительно превышает проекцию этого пути на ось волновода, фактическая скорость распространения колеба-

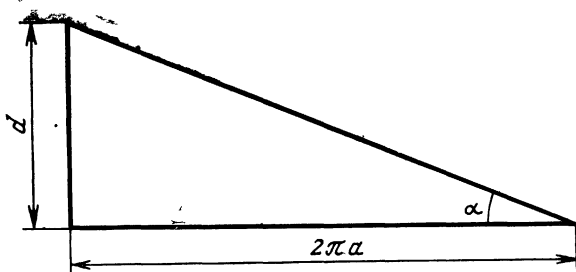


Рис. 11.2. Развертка витка спирали.

ний вдоль волновода уменьшается по сравнению со скоростью света. Степень замедления принято характеризовать коэффициентом замедления

$$K_{\text{зам}} = v_{\text{ф}}/c, \quad (11.1)$$

который всегда меньше единицы.

Для нахождения коэффициента замедления спирального волновода рассмотрим развертку одного витка спирали (рис. 11.2). Очевидно, что коэффициент замедления равен отношению путей волны вдоль оси волновода и вдоль проводника, т. е.

$$K_{\text{зам}} = \sin \alpha, \quad (11.2)$$

где α — угол намотки спирали.

Таким образом, в первом приближении фазовая скорость замедленной электромагнитной волны в спиральном волноводе определяется лишь геометрией спирали и не зависит от частоты. Это простое, на первый взгляд, свойство объясняет чрезвычайно высокую широкополосность лампы бегущей волны (ЛБВ), используемой в качестве усилителя СВЧ колебаний. Работа ЛБВ (рис. 11.3) основана на том, что часть кинетической энергии пучка электронов может быть передана элек-

тромагнитной волне, распространяющейся вдоль спирального волновода при условии синхронизма между электронным потоком и распространяющейся волной. Очевидно, что отсутствие зависимости фазовой скорости от частоты благоприятствует работе ЛБВ в широкой полосе частот.

Рассмотренное свойство спирального волновода находит также применение при создании так называемых

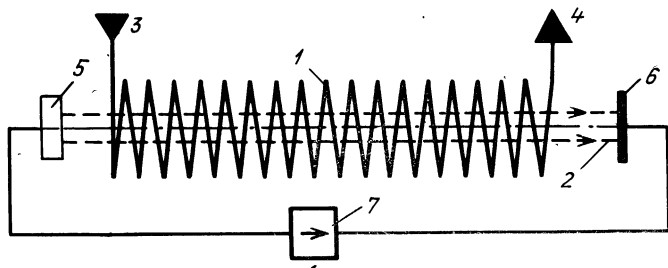


Рис. 11.3. Конструкция лампы бегущей волны:

1 — спираль; 2 — электронный пучок; 3 — вход энергии СВЧ; 4 — выход усиленного сигнала; 5 — катод; 6 — коллектор электронов; 7 — источник питания.

спиральных антенн, способных работать в широкой полосе частот.

Строгая теория электромагнитных волн в спиральном волноводе весьма сложна с математической точки зрения и не входит в рассматриваемый курс. Отметим лишь, что равенство (11.2) справедливо только при условии $\lambda_0 < d$. В противном случае волны «перескакивают» с витка на виток, в результате чего коэффициент замедления становится функцией рабочей частоты.

11.2. Замедление электромагнитных волн диэлектрической пластиной. Поверхностные волны

В настоящем параграфе рассматриваются электромагнитные процессы в системе, состоящей из диэлектрической пластины толщиной a , обладающей относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , которая расположена на подложке из идеального проводника (рис. 11.4). Для простоты будем полагать, что диэлектрик немагнитный ($\mu_a = \mu_0$) и без потерь ($\sigma = 0$).

Будет показано, что подобная пластина может играть роль волновода замедленных волн.

Цель дальнейшего математического рассмотрения состоит в нахождении структуры электромагнитного поля замедленной волны, а также в определении коэффициента замедления системы. Будем решать задачу, рассматривая отдельно пространство, представляющее вакуум (область 1) и пространство внутри пластины (область 2); соответствующие индексы будут поставлены при составляющих электромагнитного поля.

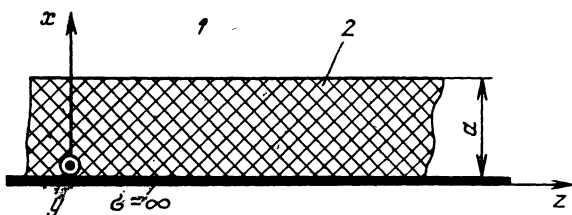


Рис. 11.4. Диэлектрическая пластина над идеально проводящей плоскостью:

1 — вакуум; 2 — диэлектрик.

Сделаем три существенных предположения:

1) рассматриваемая волна является замедленной, поэтому длина волны в волноводе удовлетворяет неравенству $\lambda_{\text{в}} < \lambda_0$, которое, будучи записанным относительно продольного волнового числа h , приобретает вид: $h > \gamma_0$;

2) система неограниченно протяженна вдоль координат z и y , указанных на рис. 11.4;

3) изучаемое поле представляет собой волну, распространяющуюся вдоль координаты z , причем магнитный вектор имеет единственную составляющую, направленную по координате y . С учетом предыдущего условия это означает, что силовые линии магнитного поля имеют вид бесконечных нитей, вытянутых над пластиной.

Обратимся к рассмотрению первой области. Для составляющей \dot{H}_{y1} имеем здесь уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{H}_{y1} + \gamma_0^2 \dot{H}_{y1} = 0. \quad (11.3)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде бегущей волны с неизвестными пока амплитудой и фазовой постоянной:

$$\dot{H}_{y1} = H_{y1}(x) e^{-jhz}. \quad (11.4)$$

Подставляя (11.4) в (11.3) и учитывая, что по условию $\partial/\partial y=0$, а также сокращая полученное выражение на общий экспоненциальный множитель, запишем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d^2 H_{y_1}/dx^2 - \rho^2 H_{y_1} = 0, \quad (11.5)$$

где $\rho = \sqrt{h^2 - \gamma_0^2}$, являющееся аналогом поперечного волнового числа в теории полых металлических волноводов (см. § 6.2), служит весьма важной характеристикой рассматриваемой системы. Отметим, что для замедленных волн число ρ всегда вещественно, поскольку $h > \gamma_0$.

Общее решение уравнения (11.5) имеет вид

$$H_{y_1}(x) = Ae^{-\rho x} + Be^{\rho x}, \quad (11.6)$$

где A, B — произвольные постоянные. Из физических соображений ясно, что $B=0$, так как поле не может неограниченно возрастать при удалении от направляющей системы.

Итак,

$$H_{y_1} = Ae^{-\rho x} \cdot e^{-jhz}. \quad (11.7)$$

Формула (11.7) позволяет сделать важнейший вывод о том, что замедленная волна является одновременно волной поверхностной в том смысле, что при более интенсивном замедлении ($K_{\text{зам}}$ падает) величина ρ возрастает и поле становится более прижатым к направляющей поверхности диэлектрика. Данный вывод обладает большой общностью и справедлив для замедляющих структур любой физической природы.

Составляющие электрического вектора в воздушной области легко находятся путем подстановки (11.7) в первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \dot{H}_1 = j\omega \epsilon_0 \dot{E}_1, \quad (11.8)$$

откуда

$$\dot{E}_{x_1} = -\frac{1}{j\omega \epsilon_0} \frac{\partial \dot{H}_{y_1}}{\partial z} = \frac{h}{\omega \epsilon_0} Ae^{-\rho x} \cdot e^{-jhz}, \quad (11.9)$$

$$\dot{E}_{y_1} = 0, \quad (11.10)$$

$$\dot{E}_{z_1} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \frac{\partial \dot{H}_{y_1}}{\partial x} = \frac{j\rho}{\omega \epsilon_0} Ae^{-\rho x} \cdot e^{-jhz}. \quad (11.11)$$

Поскольку $\dot{E}_{z_1} \neq 0$, в то время как магнитное поле поперечно, рассматриваемая волна должна быть причислена к волнам типа Е.

Обратимся к исследованию второй среды, заполненной диэлектриком. Здесь для составляющей \dot{H}_{y_2} имеем уравнение

$$\nabla^2 \dot{H}_{y_2} + \varepsilon \gamma_0^2 \dot{H}_{y_2} = 0, \quad (11.12)$$

решение которого следует искать в виде

$$\dot{H}_{y_2} = H_{y_2}(x) e^{-jhz}. \quad (11.13)$$

Отметим, что продольное волновое число h одинаково в обеих средах, поскольку рассматриваемое поле представляет единый волновой процесс.

Способом, аналогичным предыдущему, находим дифференциальное уравнение для амплитуды $H_{y_2}(x)$:

$$d^2 H_{y_2} / dx^2 + q^2 H_{y_2} = 0, \quad (11.14)$$

где

$$q = \sqrt{\varepsilon \gamma_0^2 - h^2}.$$

Ранее указывалось, что фазовая скорость волн в рассматриваемой системе ограничена снизу величиной фазовой скорости в неограниченном однородном диэлектрике (§ 4.6). Отсюда непосредственно следует, что $\sqrt{\varepsilon \gamma_0} > h$, так что величина q^2 всегда положительна.

В силу сказанного общее решение уравнения (11.14) принимает вид

$$H_{y_2}(x) = C \cos qx + D \sin qx. \quad (11.15)$$

Вопрос о выборе произвольных постоянных C и D должен быть решен исходя из граничных условий, которые выполняются на поверхности проводника при $x=0$. Здесь касательной к границе раздела оказывается продольная составляющая электрического вектора \dot{E}

$$\dot{E}_{z_2} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \frac{\partial \dot{H}_{y_2}}{\partial x}. \quad (11.16)$$

Вторая из возможных касательных составляющих \dot{E}_{y_2} обращается в нуль тождественно в силу выбранного направления поляризации магнитного поля.

Подстановка (11.13) в формулу (11.16) убеждает в том, что синусоидальное слагаемое не обеспечивает обращения в нуль составляющей \dot{E}_{z2} при $x=0$, так что

$$\dot{H}_{y2} = C \cos qx \cdot e^{-jhz},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{x2} &= \frac{h}{\omega \epsilon \epsilon_0} C \cos qx \cdot e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{y2} &= 0, \\ \dot{E}_{z2} &= \frac{jq}{\omega \epsilon \epsilon_0} C \sin qx \cdot e^{-jhz}. \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

Подытожим проведенное исследование. На основе общих соображений найден вид функциональных зависимостей составляющих электромагнитного поля в обеих средах. Тем не менее, вопрос о связи постоянных распространения γ_0 и h , определяющих коэффициент замедления системы, остался открытым. Для решения данной задачи воспользуемся условиями непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля на границе раздела при $x=a$. Эти условия имеют вид:

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}, \quad \dot{H}_{y1} = \dot{H}_{y2} \text{ при } x=a.$$

Подставив конкретные выражения составляющих полей из (11.7), (11.11), (11.16) и (11.17) в последнее условие, а также сократив полученный результат на общие множители, можно записать

$$\left. \begin{aligned} -pAe^{-pa} + \frac{q}{\epsilon} C \sin qa &= 0, \\ Ae^{-pa} - C \cos qa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Равенства (11.18) образуют систему однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и C . Данная система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда ее определитель обращается в нуль. Вычисляя определитель и приравнявая его нулю, получаем соотношение, характеризующее связь между числами p и q :

$$p \cos qa - \frac{q}{\epsilon} \sin qa = 0, \quad (11.19)$$

или в безразмерной форме

$$pa = \frac{1}{\epsilon} qa \operatorname{tg} qa. \quad (11.20)$$

Формула (11.20) носит название дисперсионного уравнения рассматриваемой системы, поскольку она позволяет определять дисперсионные характеристики — зависимости длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве. Для решения этой задачи уравнение (11.20) должно быть дополнено еще одним соотношением, автоматически вытекающим из определения величин p и q :

$$(pa)^2 + (qa)^2 = (\epsilon - 1)(\gamma_0 a)^2. \quad (11.21)$$

Равенства (11.20) и (11.21) следует рассматривать как систему двух уравнений относительно безразмерных неизвестных pa и qa . Поскольку первое из этих уравнений трансцендентное, а второе — алгебраическое второй степени, решение целесообразнее всего проводить графическим методом. Реализуемая при этом точность вполне достаточна для инженерных расчетов.

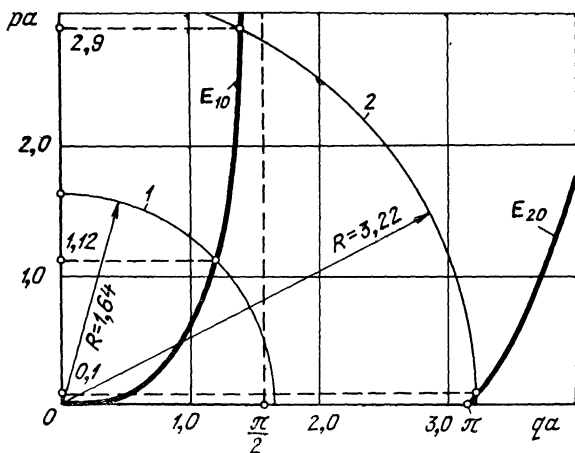


Рис. 11.5. Графический способ решения дисперсионного уравнения.

Проиллюстрируем метод решения на конкретном примере. Предположим, что исходные данные таковы: $\epsilon = 2,56$ (диэлектрик — полистирол), $a = 10$ мм, $\lambda_0 = 4,8$ см ($f_0 = 6,25$ ГГц). Требуется определить длину волны над замедляющей структурой.

На рис. 11.5 две из бесконечного множества кривых, отображающих уравнение (11.20), построены с учетом выбранного значения диэлектрической проницаемости.

Заметим, что для поставленной цели следует строить кривые только при $pa > 0$, поскольку для замедленных волн всегда $p > 0$.

Искомые корни уравнений определяются точкой пересечения построенных кривых с геометрическим местом точек, соответствующих уравнению (11.21). Нетрудно видеть, что указанная формула описывает семейство концентрических окружностей, радиусы которых в выбранной системе координат даются выражением

$$R = \sqrt{\varepsilon - 1} \gamma_0 a.$$

Вычисляя величину γ_0 , находим, что для рассматриваемого случая $R = 1,64$. Данная окружность построена на рисунке. Снося точку пересечения кривой с окружностью на ось ординат, получаем $pa = 1,12$, откуда

$$K_{\text{зам}} = \gamma_0 / \sqrt{\gamma_0^2 + p^2} = 0,757,$$

$$\lambda_{\text{в}} = K_{\text{зам}} \lambda_0 = 0,757 \cdot 4,8 \text{ см} = 3,65 \text{ см}.$$

Важно отметить, что в данном случае точка пересечения оказалась единственной. Это говорит о том, что в системе может распространяться поверхностная волна лишь одного типа, которую целесообразно обозначить как E_{10} (первый индекс указывает номер корня, второй говорит о том, что поле однородно по координате y). Указанный тип волны является низшим типом колебаний данной замедляющей структуры и существует при как угодно низких частотах. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точка пересечения будет существовать при как угодно малом радиусе окружности. Одноволновый режим работы данной линии передачи будет сохраняться вплоть до значений $R = \pi$, т. е. при $\lambda_0 \geq 2a\sqrt{\varepsilon - 1}$. На более высоких частотах в системе потенциально могут существовать поверхностные волны высших типов, такие, как E_{20} , E_{30} и т. д.

На рис. 11.6 изображена окружность с радиусом $R = 3,22$, которая соответствует длине волны $\lambda_0 = 2,44$ см ($f_0 = 12,3$ ГГц). В этом случае распространяются поверхностные волны двух типов: сильно замедленная основная волна E_{10} ($pa = 2,9$, $K_{\text{зам}} = 0,665$) и волна высшего типа E_{20} , замедление которой весьма невелико ($pa = 0,1$, $K_{\text{зам}} = 0,9992$). По причинам, изложенным ранее, следует

стремиться обеспечивать работу в том диапазоне частот, в котором выполняется условие одноволновости.

Эскизы распределения силовых линий электромагнитного поля для волн типов E_{10} и E_{20} приведены на

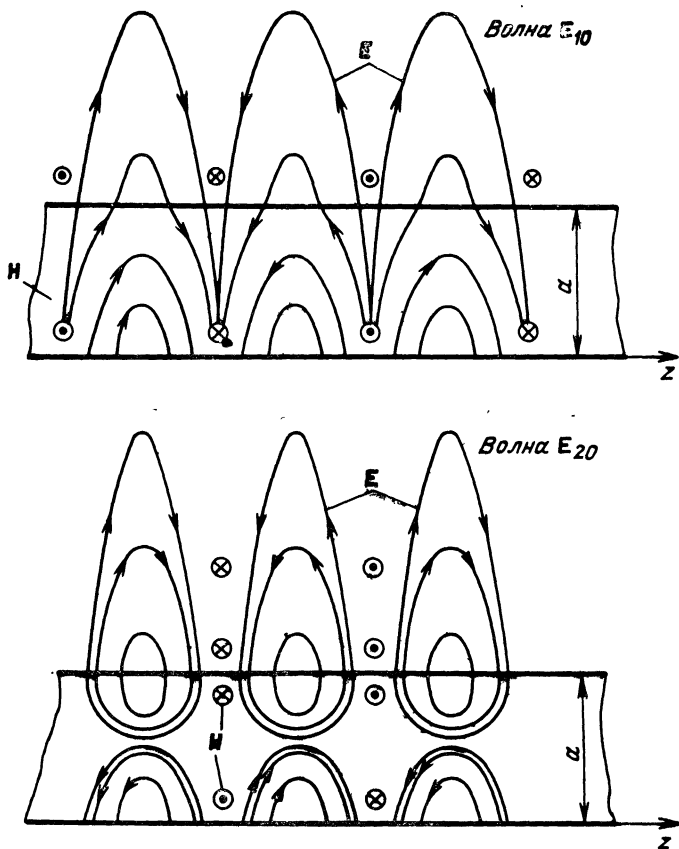


Рис. 11.6. Структура электромагнитного поля волн типов E_{10} и E_{20} в диэлектрической пластине над идеально проводящей плоскостью.

рис. 11.6; структура полей для волн более высоких индексов может быть построена по аналогии. Данные рисунки наглядно показывают факт экспоненциального уменьшения амплитуды полей при удалении от замедляющей структуры вдоль координаты x .

Волнами типа E не исчерпывается все многообразие типов поверхностных электромагнитных волн, существ-

вующих над диэлектрической пластиной. Рассматривая электромагнитные процессы, в которых электрический вектор имеет единственную составляющую вдоль координаты y , приходим к совокупности волн магнитного типа. Можно показать, что низшая волна магнитного типа имеет критическую частоту и поэтому существует только при условии $\lambda_0 < \lambda_{кр}$.

11.3. Некоторые другие типы замедляющих структур и их применение

Помимо уже рассмотренных простейших устройств для замедления фазовой скорости электромагнитных волн, в современной технике СВЧ находит применение ряд других замедляющих систем, весьма отличающихся друг от друга конструктивными принципами и особенностями применения. Детальное рассмотрение их выходит далеко за рамки настоящего учебного пособия. Тем не менее, можно

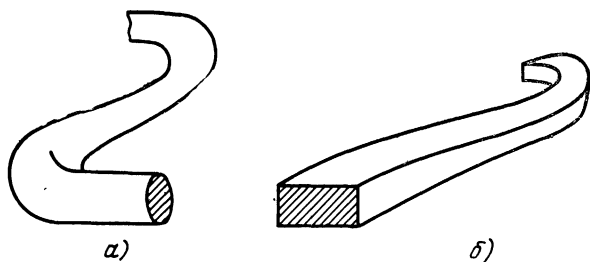


Рис. 11.7. Диэлектрический волновод круглого (а) и прямоугольного (б) сечений.

выделить два класса систем, наиболее часто применяемые на практике.

К первому классу относятся волноводы замедляющих волн, в которых эффект замедления достигается за счет применения диэлектрика с $\epsilon > 1$. Помимо рассмотренной уже плоской структуры с диэлектрической пластиной сюда относится диэлектрический волновод (рис. 11.7), представляющий собой стержень, обычно круглого или прямоугольного сечения, изготовленный из диэлектрика с малыми потерями. Подобная линия передачи может с успехом применяться на волнах миллиметрового диапазона. Ценным свойством диэлектрического волновода является его механическая гибкость. Хотя при изгибах подобного волновода часть энергии неизбежно излучается в пространство (свойство, присущее всем открытым линиям передачи), разумный выбор параметров системы позволяет снизить излучение до весьма малой величины.

Принцип работы второго класса замедляющих структур основан на использовании пространственно-периодических свойств. Рассмотренный ранее спиральный волновод служит типичным примером периодических систем. В антенной технике находит применение гребен-

чатая замедляющая структура, представляющая собой металлическую поверхность с прямоугольными канавками, глубина которых l не превосходит $\lambda_0/4$ (рис. 11.8).

Фазовая скорость замедляется тогда, когда электромагнитные волны распространяются в направлении, перпендикулярном канавкам.

Физическая природа замедления, осуществляемого периодически структурами, заключается в следующем. Каждый отдельный пе-

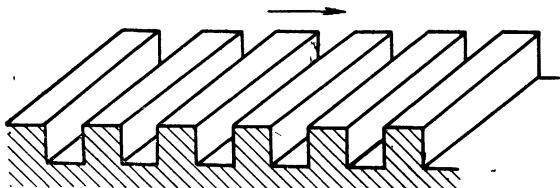


Рис. 11.8. Гребенчатая замедляющая структура.

риод структуры может рассматриваться как некоторая колебательная система, обладающая конечным временем установления колебаний. В случае гребенчатого волновода такой колебательной системой является отдельная канавка, которая может рассматриваться как закороченный на конце отрезок длинной линии с волной типа ТЕМ. Несомненно, что для достижения установившейся амплитуды колебаний требуется конечный отрезок времени, тем больший, чем бли-

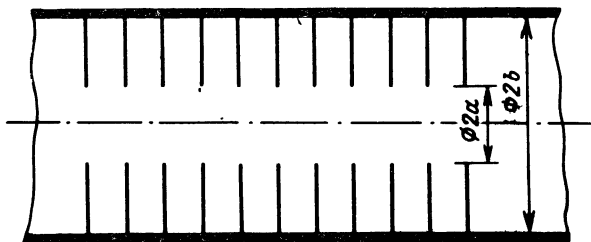


Рис. 11.9. Диафрагмированный волновод.

же размеры системы к резонансным, т. е. с приближением глубины канавки к значению $\lambda_0/4$. Упрощенный теоретический анализ гребенчатой замедляющей системы показывает, что справедлива следующая простая формула для коэффициента замедления:

$$K_{\text{зам}} = \cos \gamma_0 l. \quad (11.22)$$

Однако при более строгом рассмотрении получается, что в реальных замедляющих структурах с конечной величиной шага как угодно малое значение фазовой скорости не может быть реализовано ввиду того, что при $\gamma_0 l \rightarrow \pi/2$ поверхностные волны перестают существовать.

Интересной модификацией гребенчатой структуры, имеющей практическое применение, является диафрагмированный волновод (рис. 11.9), представляющий собой круглую металлическую трубу, внутри которой с одинаковым шагом размещены металлические диафрагмы. Подобную систему можно рассматривать как гребенчатую структуру, свернутую в кольцо по направлению канавок. Диафраг-

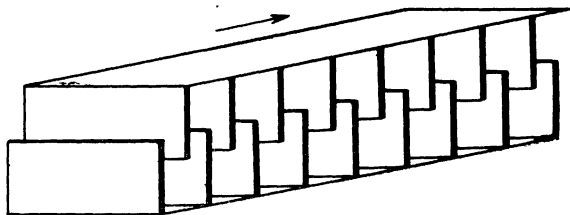


Рис. 11.10. Замедляющая система типа «встречные штыри».

мированный волновод особенно удобен для применения в мощных электронных устройствах СВЧ, таких, как линейные ускорители заряженных частиц. Причиной этому служит конструктивная особенность данного волновода, позволяющая пропускать через отверстия в диафрагмах сфокусированный и сгруппированный поток заряженных частиц, например электронов.

Перечисленными устройствами далеко не исчерпывается все многообразие периодических замедляющих систем. Так, современная техника генерирующих электронных приборов СВЧ широко использует замедляющую систему типа «встречные штыри», устройство которой видно из рис. 11.10. Данная система по принципу своего действия приближается к спиральному волноводу, выгодно отличаясь от него рядом конструктивных особенностей.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СВЧ.
ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

12.1. Эволюция электромагнитных колебательных систем при повышении рабочей частоты

В радиотехнике самое широкое применение нашел колебательный контур, состоящий из сосредоточенных индуктивности и емкости. Общей чертой всех подобных систем является то, что их геометрические размеры значительно меньше резонансной длины волны.

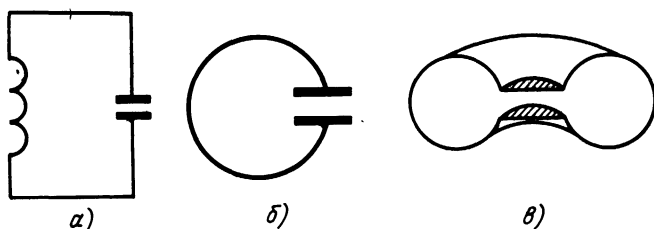


Рис. 12.1. Переход от колебательного контура с сосредоточенными элементами к тороидальному резонатору.

Уже при переходе к волнам дециметрового диапазона было отмечено резкое падение колебательных свойств, в частности, добротности у колебательных контуров, построенных на сосредоточенных элементах. Причина этого заключается в следующем. Как известно, для повышения резонансной частоты приходится уменьшать величины индуктивности и емкости контура. Поэтому в пределе от обычного контура переходят к системе, в которой конденсатор представляет собой две пластины, а роль индуктивности играет одиночный виток, соединяющий последние (рис. 12.1, а, б). Однако при таком переходе существенно уменьшается величина энергии электромагнитного поля, запасаемой в системе. Наряду с этим относительная доля активных потерь в контуре возрастает, что связано, например, с ростом омического сопротивления проводников на высоких частотах из-за поверхностного эффекта. Если к суммар-

ным потерям контура добавить еще те, которые неизбежно возникают ввиду излучения электромагнитной энергии, становится ясным, что добротность колебательной системы падает.

Мера, позволяющая отчасти избежать падения добротности, состоит в том, что индуктивный виток заменяется сплошной металлической поверхностью (рис. 12.1, в), которую можно рассматривать как предельный случай параллельного включения большого числа отдельных витков. При этом, с одной стороны, уменьшается индуктивность системы, что благоприятно сказывается при продвижении в более высокочастотные области спектра. С другой стороны, величина электромагнитной энергии, запасенной внутри тороидальной полости, значительно больше, чем энергия в одиночном витке. По этой причине возрастает добротность.

Электромагнитные колебательные системы, представляющие собой замкнутые объемы с проводящими стенками, носят название объемных резонаторов. Сюда относится, в частности, рассмотренный тороидальный объемный резонатор, нашедший по ряду причин широкое применение в технике СВЧ.

Однако даже переход к замкнутым конструкциям типа тороидального объемного резонатора не позволяет успешно разрешить всех трудностей, связанных с построением высокочастотных колебательных систем СВЧ. Дело заключается в том, что подобные системы являются прямыми аналогами обычного колебательного контура и поэтому объем их неизбежно сокращается с повышением резонансной частоты. Как следствие, при этом уменьшается запасенная энергия и падает добротность.

Принципиально другой, более прогрессивный путь создания колебательных систем СВЧ состоит в использовании резонансных свойств отрезков линии передачи с малыми потерями.

Рассмотрим полубесконечную двухпроводную линию, короткозамкнутую на конце, вдоль которой могут распространяться волны типа ТЕМ (рис. 12.2). Как известно, в такой системе установится стоячая волна, причем амплитуда суммарного напряжения U_{Σ} будет определяться граничным условием в точке короткого замыкания:

$$U_{\Sigma} = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} = 0 \text{ при } z = 0. \quad (12.1)$$

Нетрудно видеть, что подобные условия будут выполняться также и во всех точках оси z , удовлетворяющих соотношению

$$z = p\lambda_0/2, \quad (12.2)$$

где $p=1, 2, 3, \dots$ — целое положительное число.

Отсюда следует, что если взять замкнутый с обоих концов отрезок линии длиной $l = p\lambda_0/2$, то получим колебательную систему, причем можно показать, что ее частотная характеристика вблизи резонансной частоты будет в точности соответствовать частотной характеристике обычного колебательного контура. Эскиз подобной системы и ее эквивалентная схема представлены на рис. 12.3.

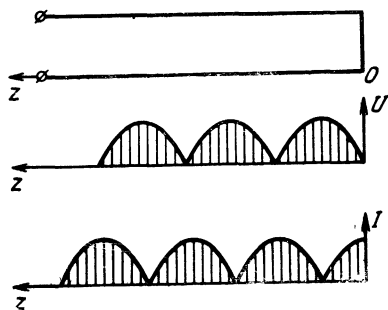


Рис. 12.2. Распределение тока и напряжения в короткозамкнутой линии.

Принципиально важно отметить, что рассматриваемая здесь система обладает не сосредоточенными, а распределенными

постоянными. Ввиду этого эквивалентную схему следует понимать как условную.

Из (12.2) следует, что короткозамкнутый отрезок линии передачи, в отличие от простого колебательного

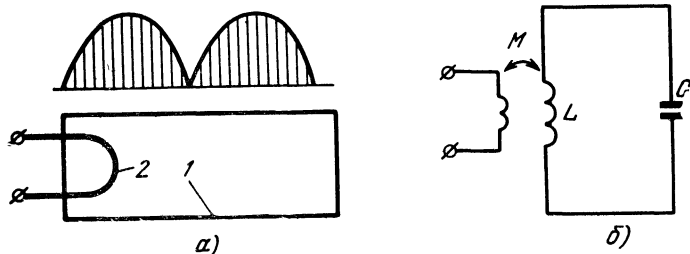


Рис. 12.3. Колебательная система, образованная отрезком длиной линии (а), и ее эквивалентная схема (б):

1 — колебательная система; 2 — элемент связи.

контура, обладает бесконечным множеством резонансных длин волн, определяемых формулой

$$\lambda_{\text{рез}} = 2l/p. \quad (12.3)$$

Физически это соответствует тому, что вдоль линии могут укладываться одна, две, три и т. д. стоячие полу-волны. Подобное свойство характерно для любых колебательных систем с распределенными постоянными.

На описанном принципе могут быть созданы объемные резонаторы, представляющие собой короткозамкнутые отрезки прямоугольных или круглых металлических волноводов. Отличие таких систем от рассмотренного отрезка двухпроводной линии состоит в следующем:

- 1) вследствие частотной дисперсии система резонирует не на кратных частотах;
- 2) возможно установление стоячих волн по всем трем координатным осям.

12.2. Объемный резонатор, образованный отрезком прямоугольного волновода

Здесь на простейшем примере будет рассмотрен метод, позволяющий определять резонансную длину волны и структуру электромагнитного поля в объемных резонаторах, представляющих собой отрезки регулярных металлических волноводов. Исходными данными при этом служат характеристики волноводных типов колебаний, распространяющихся в бесконечном волноводе.

Рассмотрим отрезок прямоугольного волновода сечением $a \times b$, ограниченный двумя металлическими торцевыми поверхностями, расположенными в сечениях $z=0$ и $z=l$ (рис. 12.4).

Подобная замкнутая металлическая полость представляет собой объемный резонатор. Найдем один из частных видов собственных колебаний данного резонатора, руководствуясь следующими соображениями. Пусть по волноводу без торцевых поверхностей распространяется волна основного типа H_{10} , которую условно будем называть падающей волной. Очевидно, что

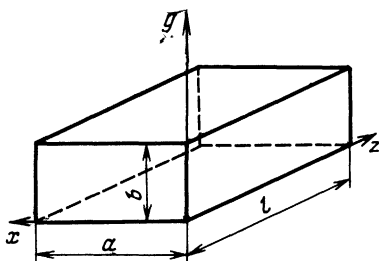


Рис. 12.4. Прямоугольный объемный резонатор.

$$\dot{E}_{y\text{пад}} = E_0 \sin(\pi x/a) e^{-jhz}. \quad (12.4)$$

Ввиду наличия торцевых поверхностей в системе должна существовать также и отраженная волна, для которой

$$\dot{E}_{y \text{ отр}} = AE_0 \sin(\pi x/a) e^{jhz}. \quad (12.5)$$

Если учесть, что при $z=0$ суммарное поле $\dot{E}_{y\Sigma} = \dot{E}_{y\text{пад}} + \dot{E}_{y \text{ отр}}$ должно обратиться в нуль в силу граничных условий на идеальном проводнике, то, как нетрудно видеть, $A = -1$. Таким образом,

$$\dot{E}_{y\Sigma} = -j2E_0 \sin(\pi x/a) \sin hz. \quad (12.6)$$

Согласно формуле (12.6) рассматриваемый электромагнитный процесс представляет собой двумерную стоячую волну, существующую как по оси x , так и по оси z . Однако длина стоячей волны по оси z пока не определена, поскольку не наложено никаких условий на продольное волновое число h . Данные условия естественно вытекают из того, что должно выполняться тождество

$$\dot{E}_{y\Sigma} = 0 \text{ при } z=l, \quad (12.7)$$

откуда

$$hl = p\pi. \quad (12.8)$$

Значение продольного волнового числа, удовлетворяющее равенству (12.8), будем называть резонансным значением

$$h_{\text{рез}} = p\pi/l. \quad (12.9)$$

Отсюда нетрудно перейти к резонансному значению длины волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в рез}} = 2\pi/h_{\text{рез}} = 2l/p \quad (12.10)$$

и в свободном пространстве

$$\lambda_{0\text{рез}} = 2\sqrt{(1/a)^2 + (p/l)^2}. \quad (12.11)$$

Подведем некоторый итог. Итак, удалось показать, что для прямоугольной металлической полости решения вида (12.6) могут существовать не при любой длине волны возбуждающего источника, а лишь в бесконечной последовательности отдельных точек, удовлетворяющих резонансному условию (12.11). Каждому отдельному значению целочисленного индекса p соответствует своя

величина резонансной длины волны и своя характерная структура электромагнитного поля, представляющая собой тип колебаний в прямоугольном объемном резонаторе.

Так же, как и в случае регулярных волноводов, для объемных резонаторов возможно классифицировать типы колебаний. Более подробно этот вопрос будет изучен в § 12.3. Здесь укажем лишь, что исследуемая совокупность типов колебаний может быть обозначена как H_{10p} . Такая символика показывает, что поле объемного резонатора порождается волноводным типом колебаний H_{10} , причем вдоль продольной оси z укладывается p стоячих полуволн.

Структуру электромагнитного поля удобно проследить на примере простейшего типа колебаний H_{101} . Здесь, очевидно,

$$\dot{E}_y = \sin(\pi x/a) \cdot \sin(\pi z/l) \quad (12.12)$$

(амплитудный множитель для удобства принят равным единице).

Магнитное поле в резонаторе без труда находится на основании второго уравнения Максвелла

$$\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_0 \dot{H}, \quad (12.13)$$

откуда

$$\dot{H}_x = -\frac{j\pi}{\omega\mu_0 l} \sin(\pi x/a) \cos(\pi z/l). \quad (12.14)$$

Следует обратить внимание на очень важный факт наличия мнимых единиц в амплитудных множителях при составляющих магнитного вектора. Их присутствие говорит о том, что между мгновенными значениями электрического и магнитного полей в резонаторе постоянно существует сдвиг фаз по времени на величину $\pi/2$. Это является следствием того, что в объемном резонаторе, как и в любой электромагнитной колебательной системе, происходит непрерывный процесс обмена энергией между электрическим и магнитным полями. Так же, как и в обычном колебательном контуре, дважды за период энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и наоборот. Сказанное иллюстрируется мгновенными картинками распределения электромагнитного поля в объемном резонаторе с коле-

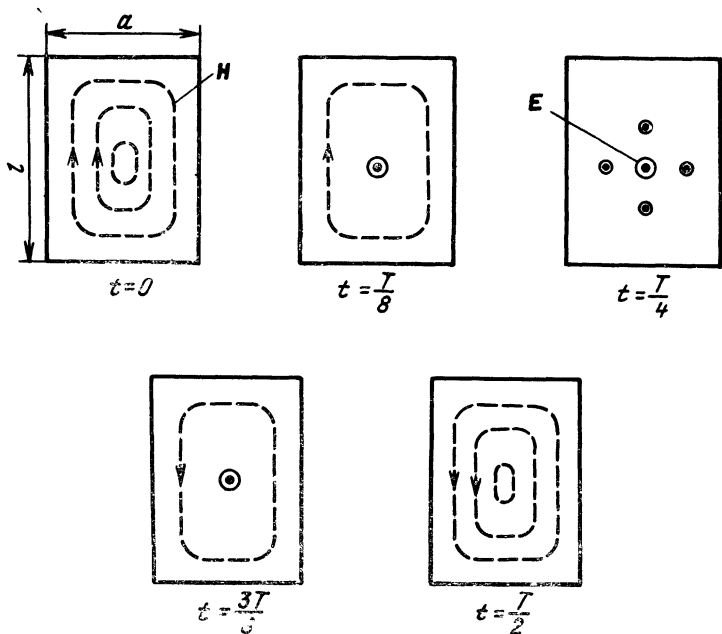


Рис. 12.5. Структура электромагнитного поля резонатора в последовательные моменты времени для колебаний типа H_{101} .

баниями типа H_{101} , построенными для различных моментов времени и представленными на рис. 12.5.

Отметим также, что вектор Пойнтинга, образованный полями вида (12.12) и (12.14), имеет тождественно равное нулю среднее значение. Это значит, что объемный резонатор, с энергетической точки зрения, подобен колебательному контуру:

Остановимся, наконец, на важном для практики вопросе о поверхностных токах, протекающих по стенкам резонатора. Так как вектор плотности поверхностного тока на идеальном проводнике перпендикулярен тангенциальной составляющей магнитного поля, легко приходим к картине, изображенной на рис. 12.6 для неко-

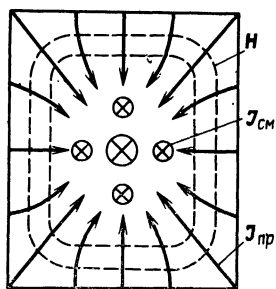


Рис. 12.6. Картина поверхностных токов на стенках резонатора.

того фиксированного момента времени. Здесь токи проводимости, стекающие к центру верхней крышки резонатора, замыкаются внутри него посредством токов смещения. Последние, в свою очередь, охватываются кольцевыми линиями магнитного поля в соответствии с законом полного тока.

12.3. Общая задача о колебаниях в прямоугольном резонаторе. Классификация типов колебаний

Поставим задачу определить всю совокупность резонансных частот, которые соответствуют колебаниям различных типов в замкнутой металлической полости прямоугольной формы. Для этого обратимся вновь к рис. 12.4 и положим, что ось z является осью стоячей волны, а в поперечной плоскости XOY устанавливается распределение поля, отвечающее колебаниям типа E_{mn} прямоугольного волновода. Как уже было показано, условие резонанса приобретает вид

$$\lambda_{в рез} = 2l/p. \quad (12.15)$$

Величина $\lambda_{в рез}$ связана с $\lambda_{0 рез}$ дисперсионным соотношением

$$1/\lambda_{0 рез}^2 = 1/\lambda_{в рез}^2 + 1/\lambda_{кр}^2. \quad (12.16)$$

Поскольку

$$\lambda_{кр E_{mn}} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}, \quad (12.17)$$

из (12.16) получим

$$\lambda_{0 рез} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}. \quad (12.18)$$

Если полагать, что по волноводу распространяется волна типа H_{mn} , то формула для резонансных длин волн будет полностью аналогична (12.18).

Интересно отметить, что в формулу (12.18) размеры a , b и l , относящиеся к осям x , y и z соответственно, входят совершенно равноправно. Поскольку известно, что некоторые из индексов типа колебаний могут равняться нулю, по крайней мере для волн H_{mn} , естественен вопрос о том, возможны ли резонаторные типы колебаний с индексом $p=0$. Согласно условию $p=0$ поле не меняется на всем протяжении оси z , вдоль которой расположены стенки длиной l .

Если рассмотреть волноводную волну типа E_{mn} , то здесь силовые линии электрического вектора располагаются так, как это показано на рис. 12.7,а (при $m=1$, $n=1$). Данный рисунок соответствует тому случаю, при котором тип колебаний является распространяющимся, т. е. при $\lambda_0 < \lambda_{кр}$. Если же величина λ_0 стремится к $\lambda_{кр}$, то длина волны в волноводе устремляется к бесконечности и силовые линии электрического поля приобретают вид «нитей», параллельных оси z (рис. 12.7,б).

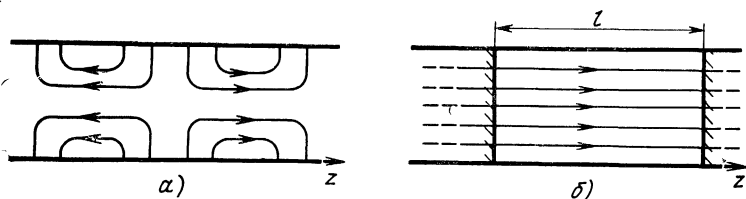


Рис. 12.7. К вопросу о существовании колебаний типов E_{mn0} .

В пределе, при $\lambda_0 = \lambda_{кр}$, электрическое поле обладает единственной z -й составляющей, в силу чего граничные условия на двух идеально проводящих торцевых стенках будут выполняться автоматически независимо от расстояния l между ними.

Таким образом, колебания типа E_{mn0} в прямоугольном объемном резонаторе существуют. Если в (12.18) подставить значение $p=0$, то будем иметь

$$(\lambda_{0 \text{ рез}})_{E_{mn0}} = 2\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (12.19)$$

Формула (12.19) в точности совпадает с выражением для критической длины волны колебания типа E_{mn} в прямоугольном волноводе с размерами сечения $a \times b$. Это значит, что в объемном резонаторе с колебаниями типа E_{mn0} существует резонанс в поперечном сечении XOY .

Рассмотрим теперь колебания типа H в прямоугольном объемном резонаторе. Здесь исходное волноводное колебание типа H_{mn} , по определению, обладает только поперечным распределением электрического поля. Если составляющие поля не будут меняться вдоль оси z , как это должно быть в случае колебания H_{mn0} , то поле в любой точке резонатора должно быть тождественно равно нулю, поскольку граничные условия на торцевых

стенках выполнены быть не могут. Таким образом, колебания типа H_{mno} физически не существуют.

Подытожим вопрос о классификации типов колебаний в прямоугольном объемном резонаторе. Уже известно, что данная классификация проводится следующим образом:

1) одна из осей резонатора принимается за ось стоячей волны;

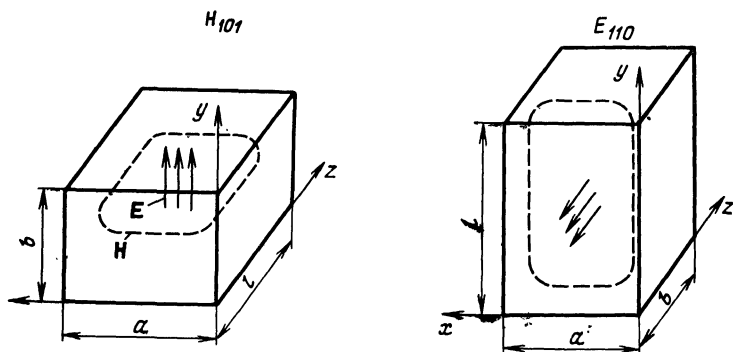


Рис. 12.8. К вопросу об условном характере классификации типов колебаний в объемном резонаторе.

2) определяется, какой волноводный тип колебаний, E_{mn} или H_{mn} , распространяется в регулярном волноводе, из которого образован объемный резонатор;

3) определяется величина p — число стоячих полуволн, укладываемых между торцевыми стенками.

В результате приходим к колебаниям типа E_{mnp} или H_{mnp} . Следует отметить, что данная классификация в значительной мере условна, поскольку она полностью определяется начальным выбором оси стоячей волны. Для иллюстрации этого положения на рис. 12.8,а изображена уже знакомая картина поля для колебания типа H_{101} .

Если теперь осуществить поворот резонатора в пространстве таким образом, чтобы грань с размером l была ориентирована вдоль оси y (рис. 12.8,б), то этот же самый электромагнитный процесс должен быть обозначен как колебание типа E_{110} . Легко проверить, что резонансные длины волн для названных типов колебаний тождественно равны.

12.4. Круглые объемные резонаторы

Рассмотрим цилиндрический объем, изображенный на рис. 12.9, представляющий собой отрезок круглой металлической трубы радиуса a , ограниченный с двух сторон проводящими торцевыми поверхностями. Данная система носит название круглого объемного резонатора. Поставим задачу нахождения всей совокупности резонансных частот данного резонатора.

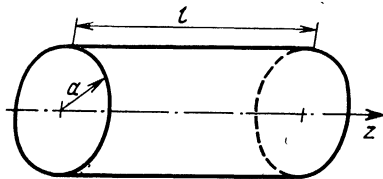


Рис. 12.9. Круглый объемный резонатор.

Внутри бесконечного круглого волновода могут распространяться волны типа E_{mn} и H_{mn} . Длина волны в волноводе $\lambda_{\text{в}}$ связана с длиной волны в свободном пространстве λ_0 при помощи дисперсионного уравнения

$$1/\lambda_0^2 = 1/\lambda_{\text{в}}^2 + 1/\lambda_{\text{кр}}^2 \quad (12.20)$$

независимо от типа волны. Критические длины волн вычисляются следующим образом (см. §§ 7.2, 7.3):

$$(\lambda_{\text{кр}})_{E_{mn}} = 2\pi a / \nu_{mn}, \quad (\lambda_{\text{кр}})_{H_{mn}} = 2\pi a / \mu_{mn}.$$

Если теперь воспользоваться известным условием резонанса

$$\lambda_{\text{в рез}} = 2l/p,$$

то из дисперсионного уравнения вытекают формулы, определяющие резонансные длины волн для любого типа колебаний в круглом резонаторе:

$$(\lambda_0 \text{ рез})_{E_{mnp}} = 1/\sqrt{(\nu_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2l)^2}, \quad (12.21)$$

$$(\lambda_0 \text{ рез})_{H_{mnp}} = 1/\sqrt{(\mu_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2l)^2}. \quad (12.22)$$

Вопрос о том, имеет ли физический смысл значение $p=0$, решается таким же образом, как и в случае прямоугольного объемного резонатора. В частности, коле-

бания E-типа с индексом $p=0$ возможны. Примером здесь может служить часто используемое на практике колебание типа E_{010} , структура поля которого изобра-

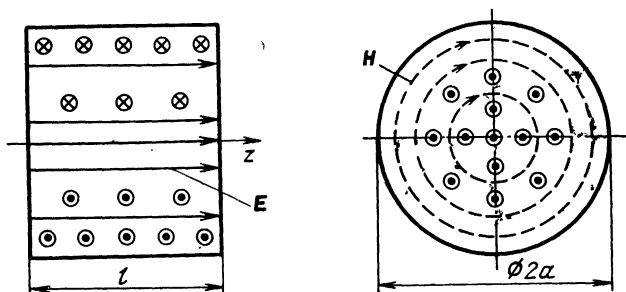


Рис. 12.10. Структура электромагнитного поля колебания типа E_{010} .

жена на рис. 12.10. Важным свойством его служит независимость резонансной длины волны от осевого размера l , что непосредственно вытекает из структуры по-

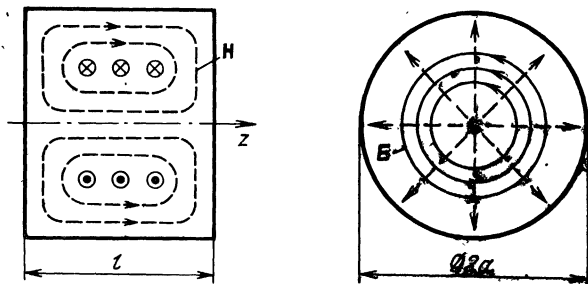


Рис. 12.11. Колебание типа H_{011} в круглом объемном резонаторе.

ля. Это же подтверждается расчетом по формуле (12.21):

$$(\lambda_{\text{рез}})_{E_{010}} = 2\pi a / \nu_{01} = (\lambda_{\text{кр}})_{E_{01}}.$$

Итак, данная система резонирует на длине волны, которая является критической для порождающего волноводного типа колебаний E_{01} . Физически это означает, что стоячие волны в рассматриваемом резонаторе устанавливаются не по оси z , а по радиальной координате r .

Так же, как и в прямоугольном резонаторе, колебания типа H_{mno} в круглом резонаторе существовать не могут.

На рис. 12.11, 12.12 в качестве примеров приведены картины электромагнитного поля в круглом объемном

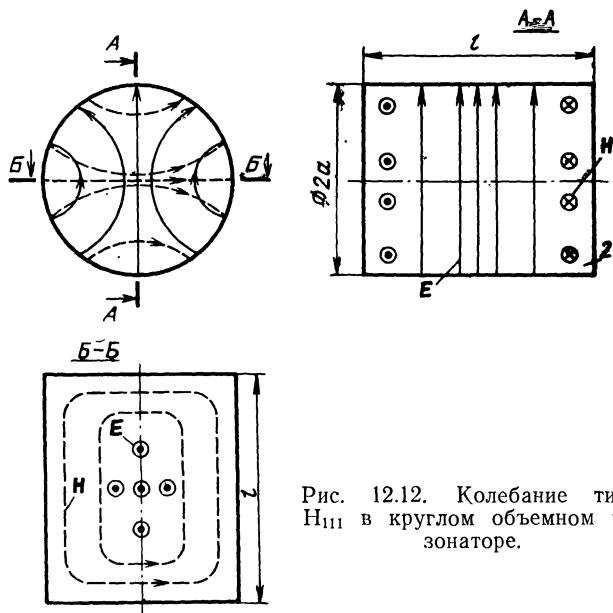


Рис. 12.12. Колебание типа H_{111} в круглом объемном резонаторе.

резонаторе, работающем на типах колебаний H_{011} и H_{111} соответственно. Данные поля построены на основании сведений о структурах поля в волноводе и относятся к какому-либо фиксированному моменту времени.

12.5. Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

На практике объемный резонатор всегда должен быть тем или иным образом связан с внешними устройствами. Принято говорить, что при этом осуществляется процесс возбуждения объемного резонатора. Среди большого числа различных способов возбуждения выделим два, чаще всего применяемых в технике СВЧ.

Возбуждение при помощи штыря. При данном способе возбуждения небольшая штыревая антенна вводится внутрь объемного резонатора (рис. 12.13). Такой

антенной может служить, например, отрезок внутреннего проводника коаксиального кабеля. Для эффективного возбуждения резонатора необходимо, зная структуру поля возбуждаемого типа колебаний, расположить штырь параллельно силовым линиям электрического вектора. Подобное расположение позволяет максимизировать скалярное произведение $\mathbf{J}_{ст} \mathbf{E}$. В соответствии

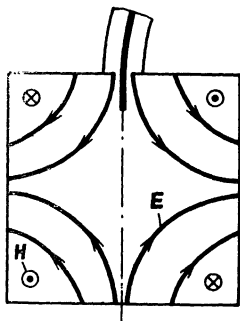


Рис. 12.13. Возбуждение колебания типа E_{011} в круглом резонаторе при помощи штыря.

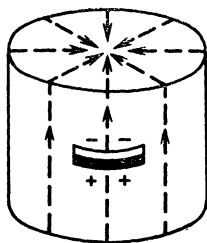


Рис. 12.14. Возбуждение колебания типа E_{010} в круглом резонаторе при помощи щели.

с теоремой Пойнтинга поток мощности от источника внутрь резонатора будет наибольшим.

Возбуждение при помощи щели. Так же, как и в волноводе, узкая щель, прорезанная в стенке резонатора, является излучающей, если она перерезает линии поверхностного тока. Этот принцип позволяет возбуждать резонатор при помощи щели, как показано на рис. 12.14, применительно к колебанию типа E_{010} в круглом резонаторе.

Следует сказать, что такие вопросы теории возбуждения, как нахождение элементов эквивалентной схемы или учет влияния возбуждающих устройств на значение резонансной частоты, математически весьма сложны и здесь не рассматриваются.

Выделим два характерных способа включения объемных резонаторов. При первом так называемом адсорбционном способе (рис. 12.15,а), на резонансной частоте происходит интенсивный отбор мощности из основной линии передачи. Как следствие, в частотной характеристике коэффициента передачи между плечами 1 и 2 наблюдается более или менее выраженный провал.

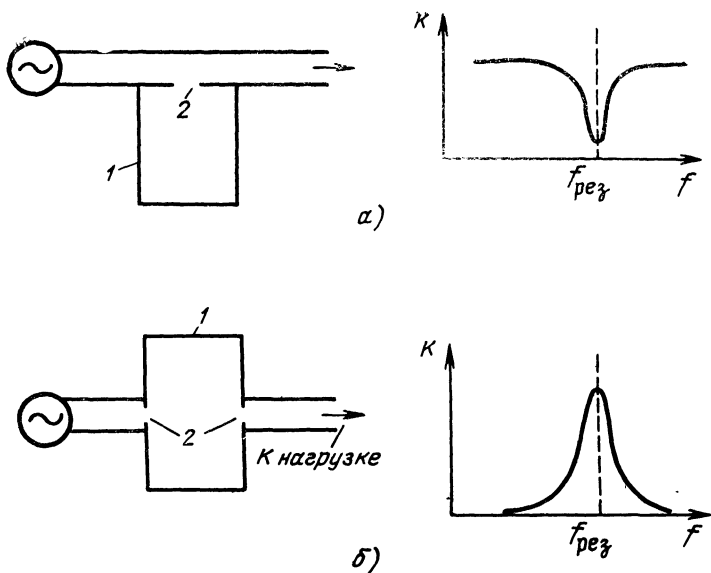


Рис. 12.15. Два способа включения объемного резонатора:
1 — резонатор; 2 — отверстие связи.

При втором так называемом проходном способе включения резонатор имеет два возбуждающих устройства и используется как четырехполюсник (рис. 12.15,б). Частотная характеристика системы имеет максимум на резонансной частоте используемого типа колебаний.

12.6. Добротность объемных резонаторов

Добротность — одна из общих характеристик, присущих любым колебательным системам независимо от их физической природы. Ее можно определить как величину, пропорциональную числу свободных колебаний, которые успевает совершить система за время переходного процесса вплоть до момента затухания, определяемого любым известным способом, например, по уровню 10% от начальной амплитуды. Конкретно принято определять добротность Q следующим образом:

$$Q = 2\pi W_{\text{зап}} / W_{\text{пот за пер}} \quad (12.23)$$

Здесь $W_{\text{зап}}$ — энергия, запасенная в системе, которая вычисляется в какой-либо определенный момент времени; $W_{\text{пот за пер}}$ — средняя величина энергии потерь, вы-

численная за тот период колебаний, в который была найдена $W_{\text{зап}}$. Последнюю из дачных характеристик можно выразить через мощность потерь:

$$W_{\text{пот за пер}} = TP_{\text{пот}}, \quad (12.24)$$

откуда

$$Q = \omega W_{\text{зап}} / P_{\text{пот}}. \quad (12.25)$$

Перейдем к конкретному рассмотрению добротности электромагнитных объемных резонаторов. В целях большей общности будем полагать, что резонатор представляет собой замкнутый объем V , ограниченный поверхностью S . Будем полагать также, что потери энергии в резонаторе связаны лишь с конечной проводимостью материала стенок, что представляет наибольший практический интерес. Проводимость материала стенок будем считать достаточно высокой для того, чтобы можно было применить приближенные граничные условия Леонтовича.

Как показал Максвелл, энергию электромагнитного поля в объеме можно найти, интегрируя по объему квадрат электрического или магнитного векторов:

$$W_{\text{зап}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV. \quad (12.26)$$

Заметим, что в формулу (12.26) надо подставлять величины \mathbf{E} или \mathbf{H} , которые относятся к идеальному резонатору без потерь.

Мощность потерь, приходящаяся на 1 м^2 поверхности металлических стенок, была определена ранее при расчете затухания в волноводе. Соответствующая формула имеет вид

$$P_{\text{пот уд}} = \sqrt{\omega \mu_0 / 8\sigma} |H_{\text{тм}}|^2. \quad (12.27)$$

Здесь полагаем, что металл не обладает собственными магнитными свойствами, так что $\mu_{\text{ам}} = \mu_0$.

Подставляя (12.26) и (12.27) в формулу (12.25), получаем окончательно

$$Q = \sqrt{2\omega \mu_0 \sigma} \int_V H^2 dV \left/ \int_S |H_{\text{тм}}|^2 dS \right. \quad (12.28)$$

При расчете по формуле (12.28) значение частоты необходимо полагать равным $\omega_{\text{рез}}$.

Для большинства объемных резонаторов, используемых на практике, в справочной литературе приводятся формулы для расчета добротности. Например, прямоугольный резонатор с типом колебаний H_{101} или, что то же самое, E_{110} , обладает добротностью, вычисляемой по формуле

$$Q = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) + \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{l}\right)}. \quad (12.29)$$

Расчет добротности круглого цилиндрического резонатора, работающего на колебании типа E_{010} , приводит к следующему результату:

$$Q_2 = \sqrt{2\omega\mu_0\sigma} \, al/2(a+l). \quad (12.30)$$

График зависимости добротности от осевого размера l , рассчитанный по (12.30), приведен на рис. 12.16. Из графика следует, что в объемных резонаторах без

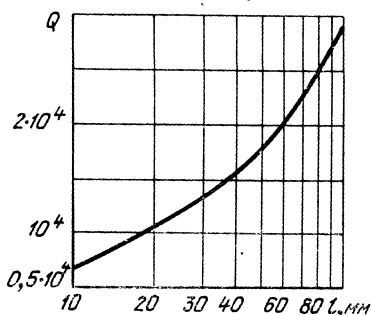


Рис. 12.16. Зависимость добротности объемного резонатора, работающего на колебании типа E_{010} , от осевого размера ($a=38,4$ мм, $\lambda_{\text{орез}}=10$ см, проводимость медных стенок $\sigma=5,7 \cdot 10^7$ 1/Ом · м).

труда может быть достигнута добротность порядка нескольких десятков тысяч, что значительно превышает величины добротностей обычных колебательных контуров, образованных сосредоточенными элементами. Причина этого заключается в том, что объемный резонатор способен накапливать значительное количество электромагнитной энергии при относительно небольших омических потерях. Нарастающий характер кривой на графике объясняется как раз тем, что с ростом l объем резонатора, а следовательно, и

величина накапливаемой энергии возрастают быстрее, чем мощность потерь, пропорциональная его поверхности.

В заключение необходимо сделать два существенных замечания. Во-первых, реально достижимые цифры добротностей, как правило, несколько ниже теоретиче-

ских, предсказываемых формулой (12.28), поскольку здесь не учитываются потери в трущихся контактах между боковой поверхностью резонатора и одной из торцевых поверхностей, которую приходится перемещать вдоль оси в целях перестройки резонатора по частоте.

Во-вторых, в приведенных расчетах не учитывается шунтирующее действие внешних цепей, проявляющееся через элементы связи. Поэтому добротность резонатора, найденную описанным способом, принято называть ненагруженной или собственной добротностью в отличие от нагруженной добротности, которая оказывается тем ниже, чем выше коэффициент связи резонатора с внешними цепями.

12.7. Некоторые другие типы объемных резонаторов

Помимо уже рассмотренных прямоугольных и круглых объемных резонаторов в технике СВЧ находит применение ряд резонаторов других конструкций. В первую очередь сюда следует отнести коаксиальный объемный резонатор, получаемый путем закорачивания отрезка коаксиальной линии передачи с обоих концов (рис. 12.17). Резонатор данной конструкции, как правило, работает на волнах типа ТЕМ, и поэтому его поперечные размеры не имеют ограничения

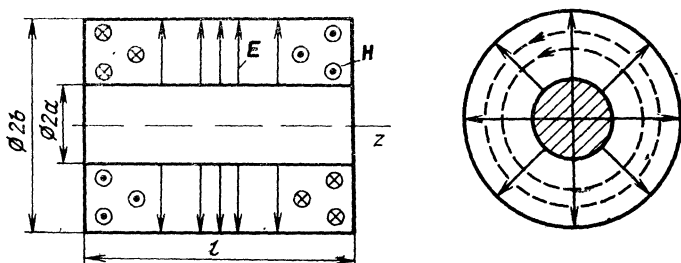


Рис. 12.17. Коаксиальный объемный резонатор.

снизу. Данное свойство благоприятствует использованию коаксиального объемного резонатора на волнах дециметрового диапазона. Типы колебаний в коаксиальном резонаторе можно обозначать как $ТЕМ_{00p}$ (первые два индекса характеризуют отсутствие стоячих волн по цилиндрическим координатам r и ϕ , последний индекс указывает на число стоячих полуволн вдоль координаты z). Так, на рис. 12.17 изображена структура поля, относящаяся к колебанию типа $ТЕМ_{001}$.

Наличие внутреннего проводника увеличивает поверхность стенок резонатора. По этой причине добротность коаксиального резо-

натора несколько ниже, чем добротность резонаторов, рассмотренных в § 12.6.

Наилучшее соотношение между объемом и поверхностью можно получить в сферическом объемном резонаторе, представляющем полую сферу с металлическими стенками, радиус которой порядка резонансной длины волны. Однако ввиду трудностей перестройки сферические объемные резонаторы находят на практике лишь ограниченное применение.

Интересным типом резонатора, сравнительно недавно используемым в технике СВЧ, является так называемый диэлектрический резонатор, схематически изображенный на рис. 12.18. Он представляет собой некоторое тело, обычно цилиндрической формы, изготовленное из вещества с высокой диэлектрической проницаемостью (специальная керамика), которое помещается внутри прямоугольного волновода. При этом отпадает необходимость в каких-либо устройствах возбуждения. Подобный резонатор работает за счет использования полного внутреннего отражения и может с успехом применяться для создания различных волноводных фильтров.

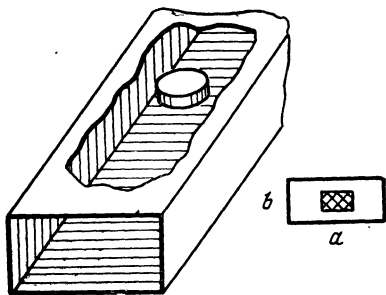


Рис. 12.18. Диэлектрический объемный резонатор.

Остановимся, наконец, на одном весьма важном классе колебательных систем, интенсивно разрабатываемом в последние годы и носящем название открытых резонаторов. Появление открытых резонаторов было продиктовано необходимостью создания высокодобротных колебательных систем для лазеров светового и инфракрасного диапазонов. При этом рабочие частоты оказываются на много порядков выше, чем частоты диапазона СВЧ. Использование обычных принципов создания объемных резонаторов, подобных описанным, наталкивается на непреодолимые трудности.

Например, прямоугольный объемный резонатор для волн светового диапазона, работающий на типе колебаний с индексами порядка нескольких единиц, должен обладать размерами граней в несколько световых длин волн, что составляет всего лишь несколько тысячных долей миллиметра. Очевидно, что практическое выполнение такой конструкции не представляется возможным.

На первый взгляд может показаться, что разумно использовать объемные резонаторы с очень высокими, порядка тысячи и более, значениями индексов m , n и p . Эта мера должна позволить значительно увеличить габариты конструкции и сделать их приемлемыми для изготовления. Однако нетрудно убедиться в том, что работа такого резонатора не может быть удовлетворительной по следующей причине. Согласно (12.18) при больших величинах индексов абсолютная величина разности резонансных длин волн между соседними типами колебаний (например, H_{mnp} и H_{mnp+1}) непрерывно уменьшается с ростом индексов. Как следствие, рано или поздно частотный интервал между соседними типами колебаний становится мень-

ше, чем ширина резонансной кривой. При этом резонатор перестаёт выполнять роль фильтрующей системы.

От указанного недостатка полностью свободна система, изображенная на рис. 12.19 и носящая название открытого объемного резонатора конфокального типа. Данный резонатор представляет собой систему из двух металлических зеркал сферического профиля; фокусные расстояния зеркал равны половине длины системы. Принципиально важно, что все геометрические размеры системы (диаметр зеркал, фокусное расстояние) значительно превышают рабочую длину волны. Теоретически и экспериментально было показано, что

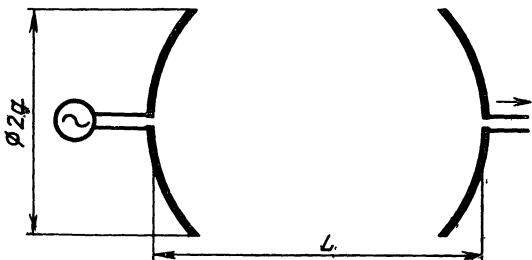


Рис. 12.19. Открытый объемный резонатор.

в конфокальном резонаторе существует, вообще говоря, бесконечная последовательность отдельных типов колебаний, различающихся между собой как структурой электромагнитного поля, так и резонансными частотами. Общим для всех типов колебаний в конфокальном резонаторе является то, что поля этих типов колебаний локализованы в относительно узкой околоосевой области.

Открытым колебательным системам присущ специфический механизм потерь, заключающийся в утечке части мощности за края зеркал. Данные потери носят название дифракционных потерь и связаны с конечностью поперечника зеркал. Для оценки величины дифракционных потерь принято вводить так называемый дифракционный параметр

$$c = \gamma a^2 / L, \quad (12.31)$$

где a — радиус зеркала; L — расстояние между зеркалами.

Было показано, что дифракционные потери чрезвычайно быстро падают с ростом параметра c . На практике принято выбирать $c \geq 2\pi$.

12.8. Общая постановка задачи о колебаниях в объемном резонаторе

Подробно рассмотренные прямоугольные и круглые объемные резонаторы обладают весьма простой геометрией и по этой причине могут быть изучены как закороченные отрезки соответствующих волноводов. Однако может быть поставлена теоретическая задача о свободных колебаниях электромагнитного поля в замкнутом объеме V произвольной формы, ограниченном идеально проводя-

щей поверхностью S . Подобная задача описывается однородным уравнением Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E} + \gamma^2 \dot{E} = 0, \quad (12.32)$$

или

$$\nabla^2 \dot{H} + \gamma^2 \dot{H} = 0 \quad (12.33)$$

при очевидном граничном условии

$$\dot{E}_\tau = 0|_S. \quad (12.34)$$

В математической физике показано, что данная краевая задача имеет бесчисленное множество нетривиальных решений (собственных функций), каждому из которых отвечает вполне определенное значение волнового числа γ . Эти волновые числа образуют совокупность собственных значений краевой задачи и определяют собой множество резонансных длин волн в рассматриваемой системе.

С физической точки зрения процесс в резонаторе произвольной формы также может быть рассмотрен как интерференция всевозможных бегущих волн, однако здесь форма волновых фронтов отвечает конкретной геометрии стенок и не может быть приведена к плоским, цилиндрическим или сферическим волнам. Совершенно очевидно, что классификация типов колебаний в произвольном резонаторе, основанная на выделении волн типа E или H , также теряет всякий смысл. Здесь естественно располагать отдельные типы колебаний в порядке укорочения резонансных длин волн.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

13.1. Постановка задачи

Во всех случаях, рассмотренных ранее, изучались так называемые однородные задачи электродинамики. При этом источники электромагнитного поля предполагались достаточно удаленными от области, в которой находилось электромагнитное поле. Во многих практических задачах часто требуется непосредственно связать величину сторонних электрических токов, являющихся источниками электромагнитного поля, с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} в любых точках пространства. Сюда относятся, прежде всего, большинство задач из теории излучающих антенн. Другим примером может служить задача о возбуждении объемного резонатора с помощью штыря, щели, электронного пучка и т. д.

С математической точки зрения решение всех указанных задач сводится к решению неоднородной системы уравнений Максвелла, которая может быть записана следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{J}_{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Здесь для простоты предполагается, что плотность объемного заряда $\rho = 0$.

Подчеркнем, что в правой части системы (13.1) записана плотность стороннего электрического тока, являющаяся известной векторной функцией пространственных координат. В этом смысле имеется прямая аналогия между неоднородной задачей электродинамики и задачей о нахождении токов и напряжений в электрической цепи, на которую воздействуют заданные сторонние э. д. с.

13.2. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

Непосредственное решение системы (13.1), как правило, весьма сложно, поскольку здесь определению подлежат шесть неизвестных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Поэтому бывает целесообразным найти некоторую вспомогательную функцию, знание которой позволило бы одновременно найти векторы напряженности электрического и магнитного полей. Подобные вспомогательные функции в электродинамике носят название потенциалов электромагнитного поля.

Отметим, прежде всего, что третьему уравнению системы (13.1) удовлетворяет векторное поле $\dot{\mathbf{B}}$, определяемое по формуле

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{A}^a. \quad (13.2)$$

Здесь \dot{A}^a — некоторая векторная функция, носящая название электрического векторного потенциала. Подобное название обусловлено тем, что эта величина естественно используется в тех задачах, которые связаны с возбуждением электромагнитного поля электрическими сторонними токами. Аналогично

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{A}^a. \quad (13.3)$$

Соотношения (13.2) и (13.3) весьма неопределенны, поскольку единственное условие, налагаемое на \dot{A}^a , — это дифференцируемость, обеспечивающая существование ротора данного векторного поля.

Попытаемся при помощи электрического векторного потенциала определить вектор напряженности электрического поля. Для этого подставим (13.3) во второе уравнение системы (13.1):

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} + j\omega \text{rot } \dot{A}^a = 0, \quad (13.4)$$

т. е.

$$\text{rot} (\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{A}^a) = 0. \quad (13.5)$$

В силу известного тождества векторного анализа

$$\text{rot grad } \varphi = 0$$

соотношение (13.5) будет выполняться автоматически, если

$$\dot{E} + j\omega\dot{A}^{\vartheta} = -\text{grad } \dot{\varphi}^{\vartheta}. \quad (13.6)$$

Здесь $\dot{\varphi}^{\vartheta}$ — некоторая скалярная функция, называемая скалярным электрическим потенциалом. Выбор знака в правой части последней формулы обусловлен тем, что в соответствии с известным соотношением электростатики для полей, не зависящих от времени, справедливо равенство

$$E = -\text{grad } \varphi^{\vartheta}.$$

При этом сохраняется традиционное направление стрелок на силовых линиях электрического поля, при котором истоком поля считается положительный заряд.

Итак, в данном параграфе найден способ выражения векторов электромагнитного поля через векторный и скалярный электрические потенциалы:

$$\dot{E} = -\text{grad } \dot{\varphi}^{\vartheta} - j\omega\dot{A}^{\vartheta}, \quad \dot{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{A}^{\vartheta}. \quad (13.7)$$

13.3. Калибровка потенциалов. Неоднородное уравнение Гельмгольца

Подставим соотношения (13.7) в первое уравнение Максвелла (13.1):

$$\frac{1}{\mu_a} \text{rot rot } \dot{A}^{\vartheta} + j\omega\varepsilon_a \text{grad } \dot{\varphi}^{\vartheta} + j\omega\varepsilon_a j\omega\dot{A}^{\vartheta} = \dot{J}_{\text{ст}}. \quad (13.8)$$

Раскрывая операцию rot rot , получаем

$$\text{grad}(\text{div } \dot{A}^{\vartheta} + j\omega\varepsilon_a \mu_a \dot{\varphi}^{\vartheta}) - \nabla^2 \dot{A}^{\vartheta} - \gamma^2 \dot{A}^{\vartheta} = \mu_a \dot{J}_{\text{ст}}. \quad (13.9)$$

До сих пор не накладывалось никаких ограничивающих условий на вид функций \dot{A}^{ϑ} и $\dot{\varphi}^{\vartheta}$. Потребуем теперь, чтобы оба потенциала удовлетворяли следующему соотношению:

$$\text{div } \dot{A}^{\vartheta} + j\omega\varepsilon_a \mu_a \dot{\varphi}^{\vartheta} = 0. \quad (13.10)$$

Формула (13.10) носит название соотношения калибровки потенциалов. Из-за произвольного выбора функций \dot{A}^{ϑ} и $\dot{\varphi}^{\vartheta}$ калибровочное соотношение может быть удовлетворено в любом случае.

Заметим, что наложение условий (13.10) значительно упрощает уравнение (13.9), которое принимает вид

$$\nabla^2 \dot{A}^{\circ} + \gamma^2 \dot{A}^{\circ} = -\mu_a \dot{J}_{\text{ст}}, \quad (13.11)$$

т. е. получается неоднородное уравнение Гельмгольца относительно векторного электрического потенциала; в правой части его стоит известная функция распределения плотности стороннего электрического тока.

Отметим, что операция калибровки потенциалов позволяет выразить оба вектора электромагнитного поля через единственную функцию — электрический векторный потенциал. Действительно, воспользовавшись (13.10), можно представить формулы перехода (13.7) следующим образом:

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_a \mu_a} (\text{grad div } \dot{A}^{\circ} + \gamma^2 \dot{A}^{\circ}), \quad \dot{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{A}^{\circ}. \quad (13.12)$$

13.4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца

В данном параграфе на основе простых физических соображений будет показан способ нахождения решения неоднородного уравнения Гельмгольца.

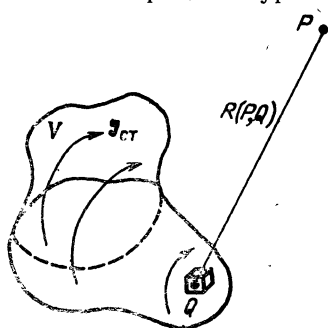


Рис. 13.1. К решению неоднородного уравнения Гельмгольца.

Предположим, что сторонние электрические токи локализованы в некотором объеме V (рис. 13.1); интенсивность возбуждаемого поля должна быть определена в точке P , не принадлежащей V .

Рассмотрим элементарный объем ΔV , окружающий точку Q , лежащую внутри V . Очевидно, что интенсивность поля в точке наблюдения P , возникающего под действием токов, протекающих внутри ΔV , пропорциональна произведе-

нию $\dot{J}_{\text{ст}}(Q) \cdot \Delta V$. Здесь $\dot{J}_{\text{ст}}(Q)$ — некоторое среднее значение плотности стороннего тока, которое можно считать постоянным внутри ΔV из-за малости последнего.

Дальнейший путь решения уравнения (13.11) заключается в следующем. Ввиду линейности уравнений Максвелла рассматриваемая система удовлетворяет

принципу суперпозиции. В соответствии с этим принципом полное решение неоднородного уравнения Гельмгольца может быть получено как сумма всех воздействий, вызываемых в точке P отдельными элементарными объемами. С физической точки зрения ясно, что по своей природе данные воздействия представляют собой сферические волны, распространяющиеся из отдельных точек объема V и уносящие электромагнитную энергию на бесконечность. Ранее, в гл. 2, было указано, что комплексная амплитуда сферической волны записывается в виде

$$e^{-j\gamma R}/R.$$

Здесь, в соответствии с обозначениями, принятыми на рис. 13.1, R — текущее значение модуля радиус-вектора, соединяющего точки P и Q .

Таким образом, с точностью до множителя пропорциональности величина элементарного воздействия

$$\Delta \dot{A}^a(P) \sim \mathbf{J}_{\text{ст}}(Q) \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \Delta V, \quad (13.13)$$

откуда полная величина электрического векторного потенциала в точке наблюдения может быть найдена при помощи суммирования:

$$\dot{A}^a(P) \sim \sum_i \mathbf{J}_{\text{ст}}(Q_i) \frac{e^{-j\gamma R_i}}{R_i} \Delta V_i. \quad (13.14)$$

Для того чтобы определить неизвестный коэффициент пропорциональности, необходимо совершить операцию предельного перехода, устремив к бесконечности число отдельных элементарных объемов. Как показано в курсе математической физики, строгий предельный переход дает

$$\dot{A}^a(P) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_{\text{ст}} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} dV. \quad (13.15)$$

Таким образом, получено интегральное представление общего решения неоднородного уравнения Гельмгольца.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

14.1. Элементарный электрический излучатель

Элементарным электрическим излучателем (вибратором) называется отрезок проводника, по которому протекает переменный электрический ток, причем длина проводника l значительно меньше длины волны в вакууме λ .

С физической точки зрения по элементарному электрическому излучателю ток протекает следующим обра-

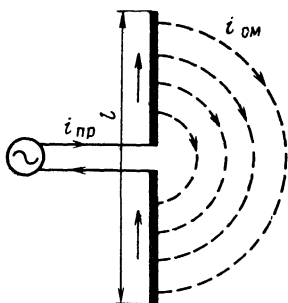


Рис. 14.1. Элементарный электрический излучатель.

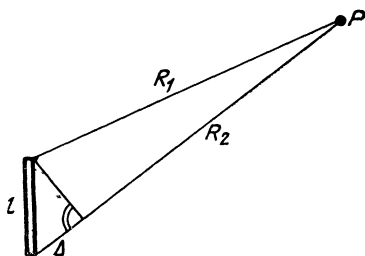


Рис. 14.2. К нахождению разности хода лучей от двух крайних точек излучателя.

зом. В разрыв излучающего проводника включается генератор (рис. 14.1); ток проводимости от генератора проходит по одному из плеч излучателя, замыкается в виде токов смещения и через другое плечо возвращается в генератор.

Малость длины излучателя по сравнению с длиной волны позволяет рассматривать его как точечный источник электромагнитных волн. Действительно, в произвольно расположенную точку наблюдения P приходят сферические волны, возбуждаемые всеми элементарными участками излучающего проводника. Наибольшая геометрическая разность хода для двух волн с радиусами-векторами R_1 и R_2 составит (рис. 14.2):

$$\Delta = l \sin \alpha, \tag{14.1}$$

откуда разность фаз, выраженная в радианах, будет равна

$$\delta\varphi = \gamma\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \alpha \ll 1. \quad (14.2)$$

Согласно (14.2) при $l/\lambda \ll 1$ система излучает как бы единую сферическую волну и в этом смысле может считаться точечным источником.

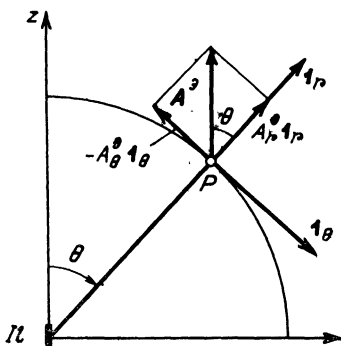
14.2 Векторный электрический потенциал для элементарного электрического излучателя

Пользуясь результатами гл. 13, вычислим поле векторного электрического потенциала, возбуждаемого элементарным электрическим излучателем в неограниченном свободном пространстве ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$).

В соответствии с физической постановкой данной задачи воспользуемся сферической постановкой данной задачи воспользуемся сферической системой координат (r, θ, φ) , в начальной точке которой расположим излучатель. Ввиду малости геометрических размеров излучателя радиус-вектор R , входящий в формулу (13.15), может считаться постоянным и равным сферической координате r . Отсюда будем иметь

$$\dot{A}^e(P) = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \int_V \mathbf{j}_{\text{ст}} dV.$$

(14.3) Рис. 14.3. Определение сферических проекций векторного потенциала.



Интегрирование вектора плотности стороннего тока по объему, занятому излучателем, представляет, на первый взгляд, логические трудности, поскольку, по определению, объем излучателя должен быть устремлен к нулю. Наиболее простой путь состоит в анализе физической размерности интеграла, входящего в (14.3). Нетрудно проверить, что данный интеграл имеет размерность $A \cdot m$. Здесь известны амплитуда стороннего электрического тока в излучателе I и его длина l .

Требуемая размерность будет получена, если положить

$$\int_V \mathbf{j}_{\text{ст}} dV = il \cdot \mathbf{1}_z, \quad (14.4)$$

откуда

$$\dot{\mathbf{A}}^{\text{в}}(P) = \frac{\mu_a}{4\pi} il \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \cdot \mathbf{1}_z. \quad (14.5)$$

Единичный вектор $\mathbf{1}_z$ в двух последних формулах указывает на то, что ось элементарного излучателя направлена параллельно оси z .

Для дальнейшего анализа необходимо знать разложение вектора $\dot{\mathbf{A}}^{\text{в}}$ в каждой точке пространства по ортам сферической системы координат. Способ подобного разложения показан на рис. 14.3, из которого следует, что

$$\begin{aligned} A_r^{\text{в}} &= |\dot{\mathbf{A}}^{\text{в}}| \cos \theta = \frac{\mu_a}{4\pi} il \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \cos \theta, \\ \dot{A}_{\theta}^{\text{в}} &= -|\dot{\mathbf{A}}^{\text{в}}| \sin \theta = -\frac{\mu_a}{4\pi} il \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \sin \theta. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Поскольку вектор электрического потенциала всюду направлен параллельно оси z , его проекция на направление азимутального угла φ тождественно равна нулю, т.е. $\dot{A}_{\varphi}^{\text{в}} = 0$.

14.3 Составляющие электромагнитного поля

Элементарный электрический излучатель представляет собой простейшую антенну, предназначенную для передачи электромагнитных колебаний в пространство. Поэтому большой интерес представляет нахождение структуры электромагнитного поля, возбуждаемого излучателем. Поскольку в предыдущем параграфе был найден электрический векторный потенциал, напряженности электрического и магнитного полей могут быть непосредственно выражены через формулы перехода (13.12). Например,

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}^{\text{в}}.$$

Вычисление операции rot должно быть проведено в сферической системе координат (см. приложение). При этом

вычисление значительно упрощается, поскольку, с одной стороны, $\dot{A}_\varphi^z = 0$, а с другой, — отличные от нуля составляющие \dot{A}_r^z и \dot{A}_θ^z не зависят от угла φ , так что $\partial/\partial\varphi = 0$ (см. 14.6). Проводя конкретные вычисления, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_r &= 0, \\ \dot{H}_\theta &= 0, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{Il}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r) \sin\theta e^{-j\gamma r}. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Итак, в электромагнитном поле, возбуждаемом элементарным электрическим излучателем, присутствует вектор $\dot{\mathbf{H}}$, обладающий единственной азимутальной составляющей. В этом смысле можно усмотреть некоторое сходство с магнитным полем постоянного электрического тока, протекающего по бесконечному линейному проводнику. Как известно, силовые линии магнитного поля при этом также имеют вид концентрических окружностей, охватывающих проводник.

Составляющие вектора $\dot{\mathbf{E}}$ могут быть определены из формул перехода (13.12) или, что более просто, из первого уравнения Максвелла

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}.$$

Проведя соответствующие вычисления, будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \frac{Il}{j2\pi\omega\epsilon_0 r^2} (1 + j\gamma r) \cos\theta e^{-j\gamma r}, \\ \dot{E}_\theta &= \frac{Il}{j4\pi\omega\epsilon_0 r^2} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2) \sin\theta e^{-j\gamma r}, \\ \dot{E}_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

14.4. Ближняя и дальняя зоны элементарного электрического излучателя

Найденные в § 14.3 составляющие электромагнитного поля позволяют построить картину силовых линий во всем пространстве. Соответствующий эскиз, отображающий распределение силовых линий в плоскости боль-

шого круга, представлен на рис. 14.4. Заметим, что в силу независимости составляющих поля от угла φ данная картина останется неизменной в любой плоскости, проходящей через ось излучателя.

Крайне важно отметить, что при удалении точки наблюдения от начала координат, т. е. при $\gamma r \rightarrow \infty$, в выражениях для составляющих как поля \vec{E} , так и поля \vec{H}

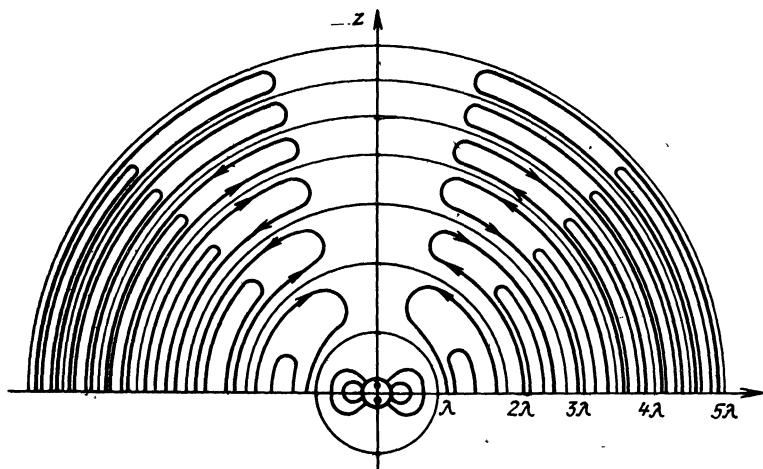


Рис. 14.4. Структура силовых линий электрического поля вблизи элементарного излучателя.

существенный вклад дают лишь члены, пропорциональные $1/r$, в то время как другие слагаемые, пропорциональные $1/r^2$ и $1/r^3$, могут считаться исчезающе малыми. Однако эти же самые слагаемые целиком определяют структуру электромагнитного поля в непосредственной близости от излучателя при $\gamma r \rightarrow 0$.

В соответствии со сказанным, область пространства, характеризующаяся неравенством $\gamma r \ll 1$, называется ближней зоной, а область, в которой $\gamma r \gg 1$ — дальней зоной элементарного излучателя. Точной границы между двумя указанными зонами не существует.

С физической точки зрения ближняя зона представляет собой область пространства, в которой преимущественное значение имеют так называемые квазистатические поля. Эти поля, резко убывающие при удалении от источника, продолжают существовать при стремле-

нии к нулю частоты возбуждающего тока. В ближней зоне все три возможные составляющие \dot{E}_r , \dot{E}_θ , и \dot{H}_φ отличны от нуля.

Дальняя зона иначе называется зоной излучения. Здесь присутствуют лишь поля в виде бегущих электромагнитных волн, уносящих энергию на бесконечность. Легко непосредственно проверить, что в дальней зоне составляющей \dot{E}_r электрического вектора можно пренебречь по сравнению с \dot{E}_θ .

Ввиду особой важности выпишем окончательные предельные выражения для составляющих электромагнитного поля в дальней зоне:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{jI\gamma^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r}, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{jI\gamma}{4\pi} \sin\theta \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Из соотношений (14.9) могут быть сделаны следующие выводы:

1) электрический и магнитный векторы в дальней зоне колеблются в фазе, что свидетельствует о переносе только активной мощности;

2) вектор Пойнтинга в дальней зоне направлен параллельно единичному вектору $\mathbf{1}_r$, т. е. мощность переносится в радиальном направлении;

3) электромагнитное поле имеет характер сферической волны. В каждой точке пространства выполняется соотношение

$$\dot{E}_\theta/\dot{H}_\varphi = \gamma/\omega\epsilon_a = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = Z_c. \quad (14.10)$$

Иными словами, на достаточном удалении от начала координат сферическая волна, возбуждаемая излучателем, может рассматриваться как локально плоская, что в ряде случаев значительно упрощает теоретический анализ.

14.5. Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя

Согласно формулам (14.10) в дальней зоне как \dot{E}_θ , так и \dot{H}_φ изменяются пропорционально $\sin\theta$. Данный множитель характеризует направленные свойства элементарного излучателя.

Диаграммой направленности произвольной антенны называется зависимость амплитуд векторов поля в дальней зоне от угла наблюдения.

Таким образом, в случае элементарного электрического излучателя диаграмма направленности описывается функцией $\sin \theta$. В частности, это значит, что излу-

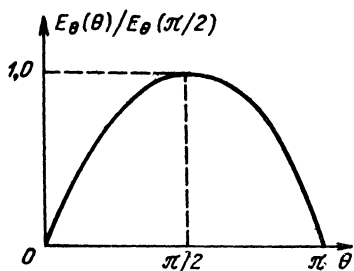


Рис. 14.5. Нормированная диаграмма направленности элементарного излучателя.

чение энергии в направлении оси излучателя отсутствует; максимальное излучение происходит при $\theta = \pi/2$, т. е. в экваториальной плоскости излучателя.

Как правило, на практике пользуются нормированными диаграммами направленности, при этом по оси ординат откладывается величина напряженности поля при данном угле наблюдения, отнесенная к максимальному значению напряженности. Нормированная диаграмма направленности элементарного излучателя (рис. 14.5) представляет собой отрезок синусоиды на интервале от 0 до $\pi/2$.

Весьма наглядным является представление нормированной диаграммы направленности в полярной системе координат. Принцип полярной диаграммы заключается в том, что здесь на каждом луче, проведенном из начала координат под заданным углом θ , откладывается нормированная величина напряженности поля. Нетрудно убедиться, что в случае элементарного электрического излучателя геометрическим местом точек диаграммы направленности будет окружность (рис. 14.6), поскольку

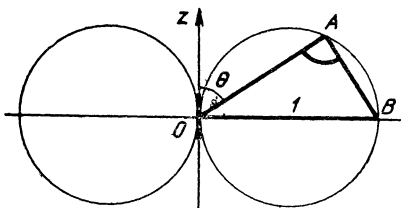


Рис. 14.6 Построение диаграммы направленности в полярной системе координат.

геометрическим местом точек диаграммы направленности будет окружность (рис. 14.6), поскольку

$$OA = OB \sin \theta. \quad (14.11)$$

Несмотря на то, что физически областью изменения углов θ является интервал $(0, \pi)$, часто диаграмму на-

правленности изображают в обеих полуплоскостях, подчеркивая этим, что излучение вибратора равномерно (изотропно) по всем углам φ . Именно таким образом построена диаграмма направленности на рис. 14.6.

14.6. Вычисление излученной мощности. Сопrotивление излучения

Задача, решаемая в настоящем параграфе, состоит в следующем. Предположим, что по элементарному излучателю длиной l протекает переменный ток I , обладающий заданной частотой ω . Требуется определить мощность электромагнитного поля, излучаемого данной системой в неограниченное свободное пространство.

Для решения этой задачи мысленно окружим излучатель замкнутой поверхностью S . Поскольку излучатель является единственным источником электромагнитной энергии, поток мощности непрерывен и величина излученной мощности P_{Σ} найдется интегрированием активной части (среднего значения) вектора Пойнтинга Π_{cp} по поверхности S :

$$P_{\Sigma} = \int_S \Pi_{cp} dS. \quad (14.12)$$

Поскольку данный результат не зависит от конкретного выбора поверхности интегрирования, проще всего взять S в виде сферы некоторого радиуса r , причем так, чтобы $\gamma r \gg 1$, т. е. чтобы сфера располагалась в дальней зоне излучателя.

Используя составляющие поля вибратора в дальней зоне, из (14.10) находим радиальную составляющую вектора Пойнтинга:

$$\Pi_{cp r} = \frac{I^2 l^2 \gamma^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a r^2} \sin^2 \theta. \quad (14.13)$$

При интегрировании по поверхности сферы учтем, что

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Отсюда будем иметь

$$P_{\Sigma} = \frac{I^2 l^2 \gamma^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta. \quad (14.14)$$

Так как

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}, \quad (14.15)$$

(14.4) можно переписать в виде

$$P_{\Sigma} = I^2 l^2 \gamma^3 / 12 \pi \omega \epsilon_a. \quad (14.16)$$

Согласно выражению (14.16) мощность излучения пропорциональна квадрату амплитуды тока, протекающего по излучателю. В этом смысле имеется прямая аналогия между (14.16) и обычным электротехническим выражением для мощности переменного тока, выделяемой на некотором активном сопротивлении. Другими словами, возможно представление

$$P_{\Sigma} = I^2 R_{\Sigma} / 2, \quad (14.17)$$

где

$$R_{\Sigma} = \frac{l^2 \gamma^3}{6 \pi \omega \epsilon_a}, \text{ Ом.} \quad (14.18)$$

Данная величина, носящая название сопротивления излучения, имеет важное значение в теории элементарных излучателей. Она характеризует эффективность излучательной способности системы, поскольку величина излученной мощности тем больше, чем выше сопротивление излучения при постоянной амплитуде тока в излучателе.

Выразив постоянную распространения γ через частоту ω и электродинамические постоянные среды ϵ_a , μ_a , можно получить более наглядное представление для сопротивления излучения:

$$R_{\Sigma} = 2\pi Z_c (l/\lambda)^2 / 3, \text{ Ом.} \quad (14.19)$$

Вывод формулы (14.19) предоставляется читателю в качестве упражнения. Для вакуума или воздуха, где $Z_c = 120 \pi$, получаем

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2, \text{ Ом.} \quad (14.20)$$

Поскольку в рассматриваемом случае отношение l/λ очень мало, скажем, 0,01 или менее, сопротивление излучения элементарного электрического излучателя оказывается порядка долей ома. Это говорит о том, что при

необходимости излучить большую мощность в подобной антенне должны протекать весьма значительные токи. С подобной трудностью приходится сталкиваться при создании малогабаритных штыревых антенн для диапазонов километровых, гектометровых и декаметровых волн.

14.7. Понятие о магнитном токе

Рассмотрим картину распределения магнитных силовых линий, получающуюся при протекании постоянного электрического тока I^z по проводящей бесконечной полоске нулевой толщины и ширины Δ в направлении, указанном стрелкой (рис. 14.7). Нетрудно понять, что

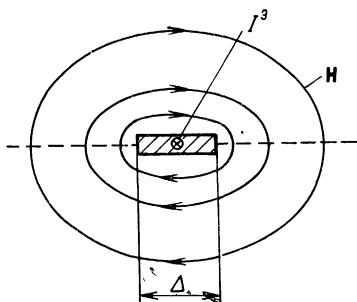


Рис. 14.7. Магнитные силовые линии вблизи проводящей полоски с током.

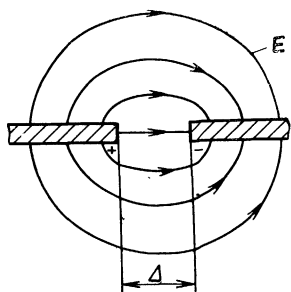


Рис. 14.8. Электрические силовые линии вблизи двух заряженных полуплоскостей.

в непосредственной близости от проводника магнитные силовые линии будут в значительной степени повторять его контур, а на самой поверхности проводника магнитный вектор будет тангенциален к плоскости полоски, отмеченной пунктиром. При удалении от проводника силовые линии, постепенно деформируясь, переходят в окружности.

Отметим следующий важный факт. В силу симметрии задачи силовые линии магнитного поля подходят к плоскости, в которой лежит проводник, по направлению нормали всюду, за исключением полоски шириной Δ , занятой проводником. Другими словами, в пределах выделенной плоскости

$$H_z = 0 \text{ вне проводника, } H_z \neq 0 \text{ на проводнике.}$$

Изучим теперь картину электрических силовых линий в системе из двух заряженных металлических полу-

плоскостей, разделенных зазором шириной Δ (рис. 14.8). С точностью до направления стрелок в верхнем и нижнем полупространствах она оказывается тождественной той, которая рассматривалась ранее, причем

$$E_{\tau} = 0 \text{ вне зазора, } E_{\tau} \neq 0 \text{ в зазоре.}$$

Указанное сходство в картинах распределения полей позволяет чисто формально предполагать, что в щели по направлению, параллельному ее краям, протекает некоторый гипотетический ток I^M , называемый магнитным током. Подчеркнем, что в соответствии со сказанным в гл. 1, физических носителей магнитного поля не существует, так что данная величина играет вспомогательный характер, в ряде случаев значительно упрощая расчеты.

Остается выяснить вопрос о выборе одного из двух возможных направлений протекания магнитного тока в щели. По причинам, которые станут ясными из последующего параграфа, принято определять направление магнитного тока противоположным тому, которое взято для электрического тока.

14.8. Принцип перестановочной двойственности

Предположим, что известен электромагнитный процесс, описываемый следующими уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}, \\ \operatorname{rot} \dot{E} &= -j\omega \mu_a \dot{H}. \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

Обращает на себя внимание симметрия этих двух уравнений. Действительно, уравнения (14.21) переходят одно в другое при замене вида

$$\dot{E} \longleftrightarrow \dot{H}, \quad \epsilon_a \longleftrightarrow -\mu_a. \quad (14.22)$$

Соотношения (14.22) являются математическим выражением принципа перестановочной двойственности для электромагнитного поля, обоснованного впервые А. А. Пистолькорсом в 1944 г.

Физическое содержание этого принципа заключается в следующем. Если известно полное решение какой-либо электромагнитной задачи, то простая перестановка по-

звоняет автоматически получить решение двойственной (дуальной) задачи, в которой конфигурация силовых линий электрического поля повторяет аналогичную конфигурацию силовых линий магнитного поля в исходном электромагнитном процессе и наоборот. При этом, поскольку в результате перестановки уравнения Максвелла не меняют своего вида, двойственный электромагнитный процесс действительно существует.

Естественно считать, что исходное электромагнитное поле возбуждается сторонними электрическими токами. В этом случае можно полагать, что двойственный процесс возбуждается сторонними магнитными токами, как это было показано в § 14.7. Однако для сохранения симметрии уравнений Максвелла плотность стороннего магнитного тока должна быть введена во второе уравнение с обратным знаком. Таким образом, получаем систему уравнений Максвелла с учетом сторонних магнитных токов:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j}_{\text{cr}}^{\text{э}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{j}_{\text{cr}}^{\text{м}}. \quad (14.23)$$

Дополнительное перестановочное соотношение для плотностей сторонних токов приобретает вид

$$\mathbf{j}_{\text{cr}}^{\text{э}} = -\mathbf{j}_{\text{cr}}^{\text{м}}. \quad (14.24)$$

14.9. Элементарный щелевой излучатель

Данная излучающая система представляет собой бесконечную металлическую плоскость, в которой прорезана щель длиной l и шириной Δ (рис. 14.9). Для возбуждения в щели переменного магнитного тока могут быть использованы различные способы. Так, источник высокочастотного напряжения может быть подключен к обеим кромкам щели, как это показано на рис. 14.9, а. При этом получается двустороннее возбуждение щели, поскольку электромагнитная энергия излучается в оба полупространства. На практике часто применяется одностороннее возбуждение щелевого излучателя, например, с помощью прямоугольного волновода с волной H_{10} (рис. 14.9, б). Здесь переменные электрические заряды на кромках щели наводятся за счет протекания поверхностных электрических токов по участку плоскости, закорачивающей волновод.

Для того чтобы рассматриваемая щель могла считаться элементарным излучателем, необходимо выполнение очевидного условия $l \ll \lambda$, при этом обычно $\Delta \ll l$.

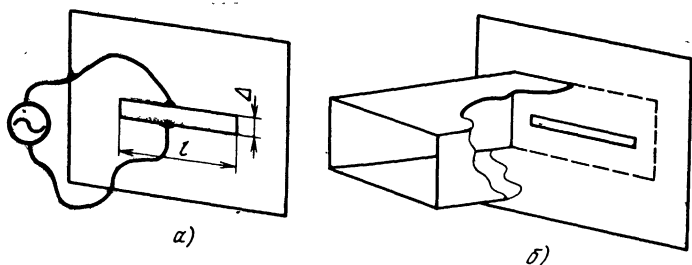


Рис. 14.9. Элементарный щелевой излучатель и способы его возбуждения.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай двустороннего возбуждения щелевого излучателя. При этом отпадает надобность в решении новой электродинамической задачи, поскольку достаточно применить принцип перестановочной двойственности к известным составляющим поля элементарного электрического излучателя. Выпишем последовательно составляющие поля обеих излучающих систем, справедливые в дальней зоне.

Для электрического излучателя

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{jI^0 l \gamma^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{jI^0 l \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}, \end{aligned} \quad (14.25)$$

для щелевого излучателя

$$\begin{aligned} \dot{H}_\theta &= \frac{jI^M l \gamma^2}{4\pi\omega\mu_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}, \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{jI^M l \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}. \end{aligned} \quad (14.26)$$

То что элементарный щелевой излучатель в дальней зоне имеет единственную составляющую электрического вектора, направленную по сферической координате θ , говорит о том, что силовые линии электрического поля, выходя из щели, приобретают на некотором удалении форму окружностей (см. рис. 14.8).

На практике в качестве величины, характеризующей интенсивность возбуждающего источника, гораздо удоб-

Нéе использовать не амплитуду стороннего магнитного тока \dot{I}^M , а напряжение в щели $\dot{U}_{щ}$, измеряемое в вольтах. Свяжем между собой эти две величины.

Обратимся снова к рис. 14.7, 14.8. Тангенциальную составляющую магнитного поля на поверхности проводящей полоски можно найти, проведя контур интегрирования по поверхности проводника и затем воспользовавшись законом полного тока:

$$\dot{H}_\tau = \dot{I}^{\partial} / 2\Delta \quad (14.27)$$

(здесь предполагается, что полоска обладает нулевой толщиной).

Предполагая, что напряженность электрического поля в зазоре щели постоянна, будем иметь

$$\dot{E}_\tau = \dot{U}_{щ} / \Delta. \quad (14.28)$$

Поскольку в силу принципа перестановочной двойственности напряженности электрического и магнитного полей взаимно заменяемы, для сохранения соответствия с (14.27) последняя формула должна иметь вид

$$\dot{E}_\tau = \dot{I}^M / 2\Delta, \quad (14.29)$$

откуда

$$\dot{I}^M = 2\dot{U}_{щ}. \quad (14.30)$$

Этот важный результат позволяет записать окончательные выражения для составляющих электромагнитного поля щелевого излучателя в дальней зоне:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= -\frac{j\dot{U}_{щ}l\gamma}{2\pi} \sin\theta \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r}, \\ \dot{H}_\theta &= \dot{E}_\varphi / Z_c. \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

Среднее значение вектора Пойнтинга имеет единственную составляющую, направленную по координате r :

$$\Pi_{cpr} = \frac{U_{щ}^2 l^2 \gamma^3}{8\pi\omega\mu_a r^2} \sin^2\theta, \quad (14.32)$$

откуда непосредственно может быть вычислена излучаемая мощность

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{cpr} dS = U_{щ}^2 / 2R_{\Sigma щ}. \quad (14.33)$$

Не останавливаясь на подробностях выкладок, укажем, что сопротивление излучения щелевого излучателя характеризуется формулой

$$R_{\Sigma_{\text{щ}}} = 45 (\lambda/l)^2, \text{ Ом.} \quad (14.34)$$

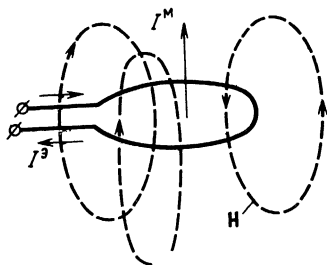


Рис. 14.10. Элементарный магнитный излучатель в виде проволочной петли.

В заключение сравним эффективности двух рассмотренных видов элементарных излучателей. Предположим, что имеются два совершенно одинаковых по конфигурации излучателя, один из которых является электрическим, а другой щелевым. Пусть по электрическому излучателю протекает ток I .

Спрашивается, каково должно быть напряжение \dot{U}_{Σ} для того, чтобы излучаемые мощности совпадали. Другими словами, должно выполняться равенство

$$I^2 R_{\Sigma_{\text{э}}} / 2 = U_{\Sigma}^2 / 2 R_{\Sigma_{\text{щ}}}.$$

Положим для определенности, что ток $I = 1$ А. Тогда в соответствии с формулами (14.20) и (14.34) получаем $U_{\Sigma} = 188$ В.

Данный результат в известном смысле говорит о недостатке щелевого излучателя, поскольку напряжение в щели существенно образом ограничено возможностью электрического пробоя.

Заканчивая данный раздел, необходимо отметить, что существуют и другие излучающие системы, поле которых имеет конфигурацию, сходную с конфигурацией поля элементарного щелевого излучателя. Примером может служить излучатель в виде достаточно малой проволочной петли, по которой протекает переменный электрический ток с амплитудой $I^{\text{э}}$ (рис. 14.10). Здесь можно предположить, что в направлении, перпендикулярном плоскости петли, протекает сторонний магнитный ток $I^{\text{м}}$. По этой причине достаточно малые щелевой и рамочный излучатели могут быть отнесены к классу элементарных магнитных излучателей.

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН

**15.1. Условия излучения. Принцип предельного
поглощения**

Рассмотренные в предыдущих главах задачи о нахождении электромагнитного поля в замкнутых системах, таких, как волноводы или объемные резонаторы, характерны тем, что при их постановке задаются граничные условия для векторов поля на металлических стенках устройств, располагающихся на конечных расстояниях. Если же ставится задача о нахождении поля излучения системы сторонних токов, помещенных в свободное пространство, то вопрос о поведении поля в бесконечно удаленных точках не может быть разрешен очевидным образом и требует дополнительного обсуждения.

Предположим, что точечный монохроматический источник электромагнитных волн, подобный элементарному излучателю, помещен в начале сферической системы координат. Среда, в которой распространяются волны, считается однородной и обладающей следующими параметрами: $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Если через ψ обозначить комплексную скалярную функцию, равную любой произвольно взятой составляющей поля электромагнитной волны, то всюду, за исключением точки $r=0$, функция ψ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \psi + \gamma^2 \psi = 0, \quad (15.1)$$

где

$$\gamma = 2\pi/\lambda = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}.$$

Для простоты будем полагать, что рассматриваемая функция ψ обладает сферической симметрией, т. е. не зависит от сферических координат φ и θ . Тогда, используя явное выражение оператора Лапласа в сферической

системе координат, вместо (15.1) будем иметь уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \gamma^2\psi = 0, \quad (15.2)$$

которое, как нетрудно проверить, эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) + \gamma^2(r\psi) = 0.$$

Полученное уравнение хорошо известно в физике как уравнение колебаний: система его фундаментальных решений состоит из двух функций вида $\exp(\mp j\gamma r)$. Отсюда, считая амплитудные коэффициенты равными единице, получаем два фундаментальных решения уравнения (15.2):

$$\psi_1 = e^{-j\gamma r}/r, \quad (15.3)$$

$$\psi_2 = e^{j\gamma r}/r. \quad (15.4)$$

Различие знаков экспоненциальных множителей, входящих в (15.3) и (15.4), означает, что первому из этих решений соответствует сферическая волна, уходящая от источника на бесконечность, в то время как второе решение описывает аналогичную сферическую волну, но с противоположным направлением фазовой скорости, т. е. волну, приходящую из бесконечно удаленных областей пространства к началу координат.

Повседневный опыт убедительно свидетельствует о том, что волны, возбужденные источником и ушедшие в свободное пространство, никогда не возвращаются назад. Поэтому решения вида (15.4) не соответствуют физически осуществимому волновому процессу и, следовательно, должны быть исключены из рассмотрения.

Если говорить об изученных простейших сферических волнах, то здесь принцип отбора решения, удовлетворяющего физическим условиям постановки задачи, весьма прост и сводится лишь к правильному выбору знака в фазовом экспоненциальном множителе. Однако, как правило, результаты решения задач о поле, возбуждаемом сложной системой излучателей, выражаются функциями всех трех сферических координат (r, θ, φ) , причем в формах, внешне не напоминающих простейших решений (15.3), (15.4). Требуется формулировка аналитичес-

кого принципа, который позволил бы по свойствам функций отличить волны, уходящие на бесконечность, от физически нереализуемых волновых процессов, приходящих из бесконечности к источнику. Эта задача была решена в начале нашего века известным физиком А. Зоммерфельдом, который показал, что всякое решение уравнения Гельмгольца, обладающее свойством волны, уходящей на бесконечность, должно при $r \rightarrow \infty$ удовлетворять предельному условию вида

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + j\gamma \psi \right) = 0. \quad (15.5)$$

Формула (15.5) в электродинамике носит название условия излучения или условия Зоммерфельда. В качестве упражнения читателю предлагается показать, что уходящая сферическая волна (15.3) удовлетворяет, а приходящая волна вида (15.4) не удовлетворяет условию излучения.

Изложенные положения позволяют сделать важный вывод относительно той роли, которую играют комплексные решения уравнения Гельмгольца при рассмотрении электромагнитных волн в свободном пространстве. Действительно, наряду с комплексными можно образовать и вещественные решения уравнения (15.2) путем суперпозиции функций (15.3) и (15.4). Форма их записи такова

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\cos \gamma r}{r}, \quad \tilde{\psi}_2 = \frac{\sin \gamma r}{r}. \quad (15.6)$$

Несмотря на то, что как $\tilde{\psi}_1$, так и $\tilde{\psi}_2$ тождественно удовлетворяют уравнению Гельмгольца, ни одна из этих функций не удовлетворяет условию излучения на бесконечности. По физическому смыслу решения (15.6) отображают стоячие сферические волны, получающиеся при наложении двух бегущих волн с противоположными направлениями распространения, как в уже рассмотренных замкнутых объемных резонаторах. Понятно, что для возникновения таких стоячих волн обязательно существование на бесконечности некоторого подобия идеально проводящей сферической оболочки, что физически, безусловно, нереально.

Следует заметить, что даже предположение о наличии бесконечно удаленного сферического отражателя не может обеспечить во всем пространстве стоячих волн,

возбужденных конечной системой излучателей. Дело в том, что любая физическая среда, начиная от твердых тел и кончая космическим пространством, принципиально отличается от идеального вакуума наличием хоть очень малого, но все же конечного затухания для распространяющихся электромагнитных волн, обусловленного взаимодействием поля с веществом. Поэтому вся энергия, излученная источником, будет рассеяна в пространстве. Изложенные качественные соображения лежат в основе важной физической концепции электродинамики, называемой принципом предельного поглощения.

15.2. Принцип Гюйгенса — Френеля

В практической электродинамике, в частности, при анализе и проектировании антенн СВЧ часто встает задача определения электромагнитного поля, возбуждаемого в свободном пространстве не элементарными излучателями, а специально созданной антенной системой,

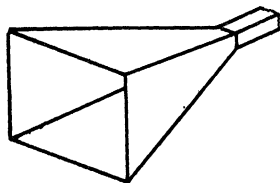


Рис. 15.1. Рупорная антенна.

обладающей конечной площадью излучающей поверхности. В качестве примера на рис. 15.1 изображен эскиз часто

используемой в технике СВЧ рупорной антенны. Эта антенна представляет собой прямоугольный волновод, сечение которого плавно увеличивается вдоль оси распространения волны. Электромагнитная энергия излучается из широкого отверстия рупора, называемого апертурой, или раскрывом антенны. Расчет подобных систем сводится к нахождению характеристик поля во всем пространстве при условии, что поле в раскрыве тем или иным образом задано. Как будет видно из дальнейшего, такая постановка задачи в большинстве случаев приводит лишь к приближенному решению, ко-

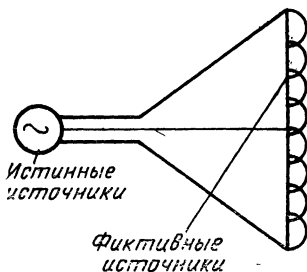


Рис. 15.2. Фиктивные и истинные источники электромагнитных волн.

торое, однако, оказывается весьма полезным в инженерных приложениях.

Основой для решения задач о поле, возбуждаемом апертурной антенной, служит хорошо известный в физике принцип Гюйгенса. В соответствии с этим принципом каждая точка поверхности волнового фронта — это фиктивный источник сферической волны. В области, лежащей впереди волнового фронта по направлению распространения волны, полное поле есть результат интерференции полей сферических волн, излученных фиктивными источниками, обычно называемыми вторичными в отличие от первичных, или истинных источников, которыми являются токи в проводниках или движущиеся заряды (рис. 15.2).

Принцип Гюйгенса в XIX веке получил количественную формулировку в работах Френеля и Кирхгофа. Упомянутые авторы проводили свой анализ применительно к скалярным волновым полям, описываемым единственной функцией ψ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца вида (15.1). Известно, что электромагнитное волновое поле подчиняется векторным уравнениям Гельмгольца

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Поэтому приводимые далее выводы, строго говоря, относятся не ко всему векторному полю \mathbf{E} или \mathbf{H} , а лишь к одной из декартовых составляющих этих полей. Тем не менее, во многих интересных для практики случаях уже из геометрической постановки задачи становится очевидной возможность пренебрежения рядом составляющих полей из-за их малости. При этом векторная задача может трактоваться как скалярная, что значительно уменьшает вычислительные трудности.

Принцип Гюйгенса находит математическое выражение в формуле, известной под названием формулы Кирхгофа. Рассмотрим произвольный конечный или бесконечный объем, ограниченный поверхностью S . В каждой точке поверхности будем считать известным единичный вектор нормали $\mathbf{1}_n$, направленный внутрь объема (рис. 15.3). Предположим, что искомая скалярная функция ψ удовлетворяет всюду внутри объема однородному уравнению Гельмгольца (15.1), причем на поверхности S известны-

ми являются как значения функции ψ , так и ее нормальной производной $\partial\psi/\partial n$. Результат, полученный Кирхгофом, показывает, что в произвольной точке P внутри объема значение поля ψ равно следующей величине:

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right] dS, \quad (15.8)$$

где r — расстояния между текущими точками на поверхности S и выбранной точкой P .

Доказательство формулы Кирхгофа основывается на известной из курса математики теореме Грина, которая утверждает, что для двух функций ψ и φ пространственных координат, достаточно гладких в обычном смысле, справедливо следующее тождество:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (15.9)$$

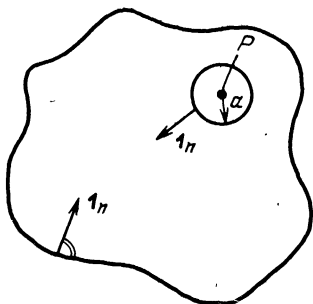
Предположим, что как искомая функция ψ , так и вспомогательная функция φ в области V удовлетворяют одному и тому же однородному уравнению Гельмгольца:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi + \gamma^2 \psi &= 0, \\ \nabla^2 \varphi + \gamma^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Входящая в (15.10) постоянная распространения γ однозначно определяется частотой возбуждающего поля. При таком выборе функций ψ и φ левая часть в формуле (15.9), очевидно, обратится в нуль, т. е.

$$\oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (15.11)$$

Рис. 15.3. К выводу формулы Кирхгофа.



В дальнейшем будем полагать, что в качестве вспомогательной функции φ выбрано уже известное решение уравнения Гельмгольца, описывающее расходящуюся сферическую волну:

$$\varphi = e^{-j\gamma r}/r. \quad (15.12)$$

Здесь под r подразумевается длина отрезка, соединяющего выбранную точку наблюдения P с произвольной точкой внутри объема V .

Поскольку функция φ имеет особенность в точке P , исключим из области V объем шара с малым радиусом a и центром в точке P . Если через S' обозначить поверхность данной сферы, то на основании (15.11) можно записать

$$\oint_{S'} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS = - \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (15.13)$$

Следующим этапом явится вычисление в явном виде подынтегрального выражения в левой части формулы (15.13). Поскольку перемещение по направлению нормали к поверхности S' означает увеличение координаты r , будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\varphi}{dr} = - \left(\frac{j\gamma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\gamma r}, \quad (15.14)$$

откуда левая часть (15.13) представится в виде

$$\oint_{S'} \left[\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \left(\frac{j\gamma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\gamma r} \psi \right] dS. \quad (15.15)$$

Теперь устремим к нулю радиус вспомогательной сферы a ; при этом учтем, что искомая функция ψ , по предположению, не имеет источников внутри V и поэтому всюду ограничена и непрерывна.

В подынтегральное выражение (15.15) входят слагаемые, обратно пропорциональные как первой степени, так и квадрату текущего радиуса. Легко видеть, что вклад от слагаемых первого рода будет равен нулю, поскольку

$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{S'} \frac{dS}{a} = 0. \quad (15.16)$$

В то же время

$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{S'} \frac{dS}{a^2} = 4\pi, \quad (15.17)$$

что вытекает из формулы для площади сферы.

На основании изложенного из формулы (15.13) получаем выражение для искомого поля в точке P :

$$\psi(P) = - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right] dS,$$

что совпадает с формулой Кирхгофа (15.8).

15.3. Применение формулы Кирхгофа к расчету излучения из отверстия

Простейшей моделью апертурной антенны является бесконечная идеально проводящая плоскость, в которой имеется отверстие, через которое осуществляется электромагнитная связь между двумя полупространствами. Для конкретности будем предполагать, что отверстие имеет вид прямоугольника со сторонами a и b (рис. 15.4). Предположим, что данное отверстие возбуждается одно-

родной плоской волной, движущейся в левом полупространстве по направлению к плоскости. Считая, что выполнены условия

$$a \gg \lambda, \quad b \gg \lambda,$$

будем приближенно полагать поле в отверстии таким же, каким было бы поле возбужденной плоской волны в плоскости $z=0$ при отсутствии препятствия. Иными словами:

$$\dot{E}_y = E_0 e^{-j\pi z}, \quad (15.18)$$

что выполняется при

$$-a/2 \leq x \leq a/2; \quad -b/2 \leq y \leq b/2.$$

Данный подход характерен для метода Кирхгофа, при котором приходится задаваться возбуждающим полем из тех или иных интуитивных соображений. Предположение о том, что в качестве возбуждающего поля можно рассматривать невозмущенное поле плоской волны, оправдывается на практике с достаточной точностью тогда, когда размеры излучающего раскрыва существенно превосходят длину волны. Если же это условие не выполняется, как, например, в случае малых щелей, то приходится прибегать к гораздо более сложным методам определения истинного распределения возбуждающего поля в плоскости излучателя.

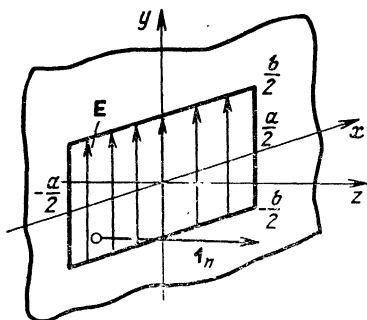


Рис. 15.4. Излучение электромагнитных волн из прямоугольного отверстия.

Обращаясь к рис. 15.4, видим, что здесь $\partial/\partial n = \partial/\partial z$,

откуда на основании формулы Кирхгофа величина y -составляющей напряженности электрического поля в произвольной точке наблюдения P будет равна

$$\dot{E}_y(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-j\pi r}}{r} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} - \dot{E}_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-j\pi r}}{r} \right) \right] dS. \quad (15.19)$$

Интегрирование в формуле (15.19) производится по площади раскрыва; все производные вычисляются в плоско-

сти отверстия т. е. при $z=0$. Длина радиус-вектора r , соединяющего точку Q в раскрыве с координатами $x, y, z=0$ и точку наблюдения P с координатами ξ, η, ζ , равна

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2}. \quad (15.20)$$

Вычислим обе производные, входящие в подынтегральное выражение формулы Кирхгофа (15.19):

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = -j\gamma E_0, \quad (15.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \zeta}. \quad (15.22)$$

Принимая во внимание, что

$$\partial r / \partial \zeta = \zeta / r = \cos \theta,$$

где θ — угол между нормалью к раскрыву и радиус-вектором, соединяющим точки P и Q , а также используя формулу (15.14), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) = \left(\frac{j\gamma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \cdot e^{-j\gamma r}. \quad (15.23)$$

С учетом (15.21) и (15.23) получим

$$\dot{E}_y(P) = \frac{E_0}{4\pi} \int_S \left[j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} (1 + \cos \theta) + \frac{\cos \theta}{r^2} e^{-j\gamma r} \right] dS. \quad (15.24)$$

Если точка наблюдения P отстоит от излучающего раскрыва на расстояние многих длин волн (случай, наиболее характерный для радиотехнических задач), то

$$\gamma/r = 2\pi/\lambda r \ll 1/r^2,$$

и, как следствие, формула (15.24) упрощается за счет пренебрежения слагаемым вида $(1/r^2)$:

$$\dot{E}_y(P) = \frac{jE_0\gamma}{4\pi} \int_S (1 + \cos \theta) \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \quad (15.25)$$

В большинстве случаев приходится находить поля на расстоянии r , значительно превышающем размеры раскрыва a и b . При этом условии угол θ можно считать

одинаковым для всех точек раскрыва, а расстояние r в знаменателе подынтегрального выражения формулы (15.25) — равным некоторой величине r_0 , которая соответствует расстоянию от точки наблюдения до центра раскрыва. Величина r , входящая в показатель экспоненциального выражения, с учетом сделанного предположения может быть приближенно представлена следующим образом:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2} \approx \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta} \approx \sqrt{r_0^2 - 2x\xi - 2y\eta} \approx r_0 - x\xi/r_0 - y\eta/r_0. \quad (15.26)$$

Таким образом, выражение (15.25) на больших расстояниях от излучающей апертуры принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{E}_y(P) &= \frac{jE_0\gamma}{4\pi r_0} e^{-j\gamma r_0} (1 + \cos\theta) \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{j\gamma x\xi}{r_0}} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-\frac{j\gamma y\eta}{r_0}} dy = \\ &= \frac{jE_0\gamma}{4\pi r_0} e^{-j\gamma r_0} (1 + \cos\theta) ab \frac{\sin\left(\frac{\gamma a\xi}{2r_0}\right)}{\frac{\gamma a\xi}{2r_0}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma b\eta}{2r_0}\right)}{\frac{\gamma b\eta}{2r_0}} \end{aligned} \quad (15.27)$$

Подробное обсуждение полученного выражения не входит в круг задач настоящей книги и относится к курсу антенных устройств. Здесь важно лишь отметить, что формула (15.27) позволяет построить диаграммы направленности апертурной антенны. Если через θ_1 обозначить угол между вектором r_0 и осью x , а через θ_2 — угол между r_0 и осью y , то угловые зависимости поля будут определяться множителем вида

$$\frac{\sin\left(\frac{\gamma a}{2} \cos\theta_1\right)}{\frac{\gamma a}{2} \cos\theta_1} \frac{\sin\left(\frac{\gamma b}{2} \cos\theta_2\right)}{\frac{\gamma b}{2} \cos\theta_2}. \quad (15.28)$$

(при больших величинах γa и γb множитель (15.28) оказывается более быстрой функцией угловых координат, чем сомножитель $(1 + \cos\theta)$, входящий в (15.27)].

Например, если $\theta_2 = \pi/2$, т. е. точка наблюдения перемещается в плоскости XOZ , то нормированная диаграмма направленности согласно (15.28) запишется в виде

$$\frac{E_y(P)}{E_{y\max}} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma a}{2} \cos\theta_1\right)}{\frac{\gamma a}{2} \cos\theta_1}. \quad (15.29)$$

Характерный вид диаграммы направленности, построенной по данной формуле, изображен на рис. 15.5.

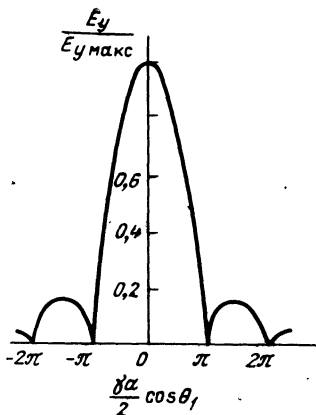


Рис. 15.5. Нормированная диаграмма направленности апертурной антенны в плоскости XOZ.

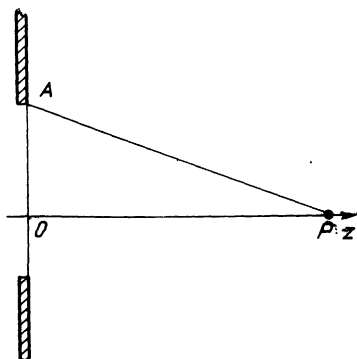


Рис. 15.6. К определению фазового сдвига колебаний, приходящих в точку наблюдения из различных точек апертуры.

Может быть сделан следующий важный вывод. Ширина диаграммы направленности в данной конкретной задаче полностью определяется отношением размера апертуры к длине волны и может быть сделана весьма малой при росте этого отношения. Например, если отношение $a/\lambda=100$, то первый нуль диаграммы направленности будет получаться при выполнении равенства

$$100\pi \cos \theta_1 = \pi,$$

откуда полная ширина главного лепестка диаграммы направленности (по нулям) составит

$$2\Delta\theta = 0,02 \text{ рад.}$$

В заключение поясним физический смысл ограничения, согласно которому диаграмма направленности должна вычисляться в точках, достаточно удаленных от излучающего отверстия по сравнению с его размерами. Пусть требуется вычислить поле в точке P, находящейся на оси z (рис. 15.6). В соответствии с принципом Гюйгенса в точку P поступают элементарные волны от всех точек апертуры с геометрической протяженностью a. Естественно, что эти колебания не будут синфазными между собой. Оценим предельную величину фазового сдвига между ними. Для этого найдем максимальную геометрическую разность путей

$$\Delta_{\text{геом}} = AP - OP = z \sqrt{1 + (a/2z)^2} - z \approx a^2/8z,$$

Волновые фронты

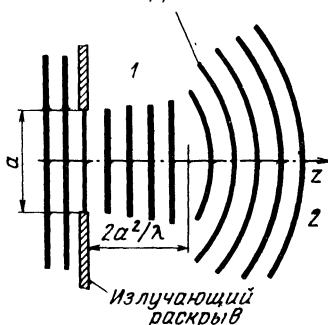


Рис. 15.7. Ближняя и дальняя зоны апертурной антенны.

соответствующую фазовому сдвигу

$$\Delta\varphi = \Delta_{\text{геом}} 2\pi/\lambda = \pi a^2/4\lambda z. \quad (15.30)$$

Если точка P столь удалена от излучающей системы, что

$$\Delta\varphi \leq \pi/8, \quad (15.31)$$

то принято говорить, что точка наблюдения находится в дальней зоне апертурной антенны, или в зоне Фраунгофера. На основании (15.30) и (15.31) условие дальней зоны выразится следующим образом:

$$z \geq 2a^2/\lambda. \quad (15.32)$$

При меньших расстояниях точка P находится в ближней зоне антенны, или в зоне Френеля. Более подробный анализ показывает, что ближняя зона характеризуется локализацией электромагнитной энергии в пределах «лучевой трубки» (рис. 15.7), поперечник которой сравним с размерами апертуры. Волновые фронты в пределах ближней зоны приближенно можно считать плоскими. Однако эта плоская волна является неоднородной; вблизи края антенны можно проследить ясно выраженную границу «свет — тень». В отличие от этого поле антенны в дальней зоне носит характер неоднородной сферической волны, о чем свидетельствует вид формулы (15.27).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

16.1. Постановка задачи

Ранее, в гл. 1, указывалось, что ряд материальных сред обладает анизотропией электромагнитных свойств. Это находит отражение в том, что материальные уравнения таких сред в самом общем виде представляются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{D}} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \overset{\leftrightarrow}{\mu}_a \dot{\mathbf{H}},$$

где $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_a$, $\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a$ — тензоры абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостей соответственно. Данные тензоры позволяют определить составляющие вектора комплексной амплитуды одного из полей (например, $\dot{\mathbf{D}}$) по известному исходному полю (например, $\dot{\mathbf{E}}$), выраженному через проекции на оси какой-либо системы координат. Так, если в качестве подобной системы выбрана декартова прямоугольная система координат (x, y, z) , то тензоры $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_a$ и $\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a$ представимы их матрицами:

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_a = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Девять составляющих каждой матрицы в общем случае являются комплексными числами, поскольку векторы $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ могут изменяться во времени несинфазно.

Для современной радиотехники большое значение имеет некоторый частный класс анизотропных сред, носящих название ферритов. Ферриты представляют собой твердые вещества, подобные керамике, получае-

мые искусственным путём при высокотемпературном спекании порошка окиси железа и соединений какого-либо двухвалентного металла (марганца, цинка, бария и т. д.). Условная химическая формула феррита часто имеет вид $M_m(Fe_2O_3)_n$, где символом M обозначен ион соответствующего двухвалентного металла. Анизотропия электродинамических свойств феррита проявляется при воздействии на него постоянного магнитного поля. Подобные вещества носят название гирромагнитных сред. Вообще говоря, физические процессы, обуславливающие гирромагнитные свойства, могут проявляться не только в ферритах, но и в ферромагнитных металлах. Однако здесь эффект анизотропии, как правило, не удается наблюдать из-за протекания значительных токов проводимости. В отличие от металлов ферриты обладают ясно выраженными диэлектрическими свойствами. На частотах сантиметрового диапазона длин волн относительная диэлектрическая проницаемость ферритов в среднем составляет 10—20; тепловые потери соответствуют значению $\text{tg } \delta \approx 10^{-3}$. В данной главе будут приведены физические соображения, позволяющие определить вид тензора магнитной проницаемости феррита, а также изучен эффект Фарадея — одно из наиболее примечательных явлений, происходящих в анизотропных средах.

16.2. Физический механизм анизотропии феррита. Уравнение Ландау — Лифшица

Оказывается, что для объяснения электродинамических свойств феррита классический механизм, основанный на понятии молекулярных токов (гл. 1), недостаточен и поэтому неизбежно использование некоторых квантовомеханических представлений. Квантовая теория ферромагнетизма основана на том факте, что последний электрон в оболочке того иона, наличие которого определяет ферромагнитный эффект (в случае феррита — это ион двухвалентного металла M), обладает собственными магнитным и механическим моментами. Совокупность этих двух свойств находит выражение в квантовомеханическом понятии спина электрона. В принципе как магнитные, так и механические свойства электрона можно сопоставить с некоторыми аналогичными классическими представлениями, которые, если и не могут описать явление ферромагнетизма во всей полноте, но

все же приводят к картине, в основных чертах достаточно близко совпадающей с экспериментальной.

С классических позиций элементарным носителем магнитного момента служит малый замкнутый виток с током I (рис. 1.12), причем модуль его магнитного момента равен

$$|\mathbf{m}| = I\Delta S, \quad (16.1)$$

где ΔS — площадь витка.

Из теоретической механики известно, что механическим моментом обладает тело, находящееся во вращательном движении относительно какой-либо оси. Рассмотрим материальную точку с массой m , находящуюся во вращательном движении и имеющую касательную скорость \mathbf{v} (рис. 16.1). Если через \mathbf{r} обозначить радиус-вектор точки относительно центра вращения, лежащий в плоскости орбиты, то, по определению, момент количества движения точки составляет

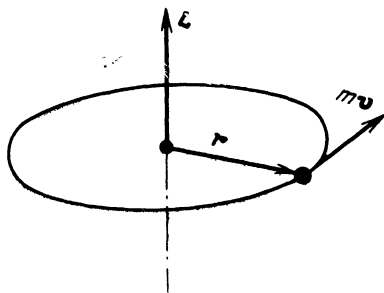


Рис. 16.1. Вектор момента количества движения материальной точки.

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}(m\mathbf{v})]. \quad (16.2)$$

Ясно, что величина \mathbf{L} является вектором, перпендикулярным плоскости орбиты.

Если обозначить через \mathbf{F} силу, действующую на материальную точку, то справедлив закон Ньютона

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (16.3)$$

Векторно умножим левую и правую части (16.3) на радиус-вектор \mathbf{r} :

$$[\mathbf{r}\mathbf{F}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(m\mathbf{v})]. \quad (16.4)$$

В механике стоящее в левой части формулы (16.4) векторное произведение носит название момента силы \mathbf{F} относительно выбранной оси:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (16.5)$$

Отсюда с учетом (16.2) получается основное уравнение динамики материальной точки, находящейся во враща-

тельном движении:

$$\mathbf{K} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}. \quad (16.6)$$

Квантовая механика устанавливает числовую связь между магнитным моментом электрона \mathbf{m} и его моментом количества движения \mathbf{L} . Теоретически и экспериментально было показано, что

$$\mathbf{m} = -\gamma \mathbf{L}. \quad (16.7)$$

Здесь $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг — весьма часто используемая величина, равная отношению заряда электрона к его массе и называемая гиромангнитным отношением электрона. Отрицательный знак в формуле (16.7) указывает на то, что в пространстве векторы \mathbf{m} и \mathbf{L} антипараллельны.

Предположим теперь, что рассматриваемое ферромагнитное вещество находится во внешнем постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 , ориентированном произвольным образом. В курсе физики показывается, что виток тока в магнитном поле стремится повернуться таким образом, чтобы векторы \mathbf{m} и \mathbf{H} стали параллельными друг другу. При этом потенциальная энергия витка оказывается минимальной. Пользуясь известным из физики законом Био—Савара, можно показать, что момент силы, действующей на систему с магнитным моментом \mathbf{m} , равен

$$\mathbf{K} = \mu_0 [\mathbf{m} \mathbf{H}_0]. \quad (16.8)$$

Подставляя это значение в (16.6) и учитывая (16.7), будем иметь

$$d\mathbf{m}/dt = -\mu_0 \gamma [\mathbf{m} \mathbf{H}_0]. \quad (16.9)$$

Если в единице объема вещества содержится N элементарных магнитных систем (т. е. ионов), то, вводя вектор намагниченности $\mathbf{M} = \mathbf{m}N$, из (16.9) получим окончательное уравнение, описывающее изменение во времени вектора намагниченности в неограниченной однородной среде:

$$d\mathbf{M}/dt = -\mu_0 \gamma [\mathbf{M} \mathbf{H}_0]. \quad (16.10)$$

Уравнение (16.10) носит название уравнения Ландау—Лифшица и весьма широко используется в теории ферромагнитных явлений.

Покажем, что в соответствии с уравнением Ландау—Лифшица система электронов, обуславливающих фер-

ромагнитный эффект, обладает колебательными свойствами. Для определенности будем полагать, что постоянное подмагничивающее поле ориентировано вдоль оси z , так что

$$\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{1}_z.$$

Координатная форма записи уравнения (16.10) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= -\mu_0 \gamma H_0 M_y, \\ \frac{dM_y}{dt} &= \mu_0 \gamma H_0 M_x, \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Исключая неизвестную составляющую M_y из первых двух уравнений системы (16.11), получаем уравнение, определяющее составляющую M_x :

$$d^2 M_x / dt^2 + \omega_p^2 M_x = 0, \quad (16.12)$$

где $\omega_p = \mu_0 \gamma H_0$ — зависящая от подмагничивающего поля величина, носящая название частоты ферромагнитного резонанса.

Уравнение (16.12) является уравнением колебаний материальной точки под действием упругой восстанавливающей силы; его решение имеет вид

$$M_x = A \sin(\omega_p t + \varphi), \quad (16.13)$$

где A , φ — произвольные постоянные.

Подставив (16.13) во второе уравнение системы (16.11), будем иметь соответствующее решение для составляющей M_y :

$$M_y = A \cos(\omega_p t + \varphi). \quad (16.14)$$

Наконец, последнее уравнение из системы (16.11) означает, что

$$M_z = \text{const.} \quad (16.15)$$

В теории ферритов, как правило, рассматривается случай, при котором продольная (вдоль поля \mathbf{H}_0) составляющая вектора намагниченности M_z равна так называемой намагниченности насыщения M_s , возникающей тогда, когда все элементарные магнитные моменты полностью ориентированы в направлении внешне-

го поля. Заметим, что величина M_s является измеримой константой, характеризующей ферромагнитный материал в целом.

На основании (16.13)—(16.15) можно изобразить характер движения вектора намагниченности \mathbf{M} (рис. 16.2).

Из рисунка видно, что вектор \mathbf{M} перемещается в пространстве, оставаясь параллельным образующей конуса

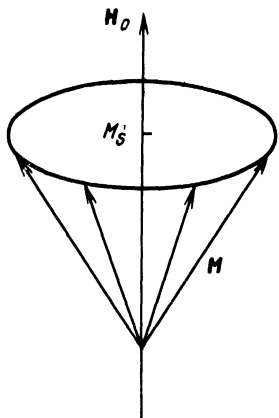


Рис. 16.2. Свободное движение вектора намагниченности в феррите.

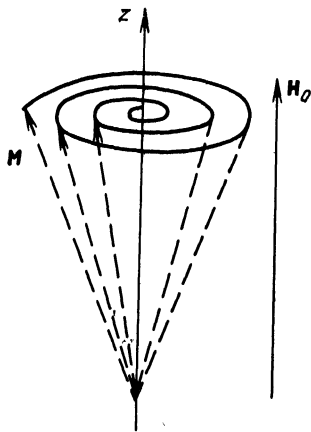


Рис. 16.3. Влияние потерь на характер движения вектора намагниченности.

с высотой M_s : вращение происходит с резонансной частотой ω_p , направление вращения и амплитуда колебаний определяются произвольными начальными условиями.

В механике известен аналогичный вид движения, называемый прецессией, возникающий в случае, когда вращающееся тело с одной неподвижной точкой (например, волчок) выводится внешней силой из состояния равновесия. Поэтому говорят, что уравнения Ландау — Лифшица описывают резонансную прецессию вектора намагниченности в однородной неограниченной ферромагнитной среде.

Фактически явления в феррите будут неизбежно сопровождаться процессом рассеивания (диссипации) энергии и превращения ее в тепло. Поэтому более подробная форма записи уравнения Ландау — Лифшица имеет вид

$$d\mathbf{M}/dt = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_0] + \quad (16.16)$$

+ диссипативный член.

По аналогии с колебательным контуром, обладающим потерями, можно утверждать, что при этом движение вектора намагниченности будет носить затухающий характер; будучи выведенной из положения устойчивого равновесия система через некоторое время, называемое временем релаксации, вновь возвращается к равновесию, причем конец вектора \mathbf{M} в плоскости XOY описывает спиральную кривую (рис. 16.3).

16.3. Тензор магнитной проницаемости феррита

Рассмотрим случай, при котором в бесконечной однородной ферромагнитной среде помимо постоянного поля \mathbf{H}_0 существует высокочастотное поле \mathbf{H}_1 , гармонически изменяющееся во времени с частотой ω . Полагая, что поле \mathbf{H}_0 ориентировано вдоль оси z , будем иметь для суммарного поля

$$\dot{\mathbf{H}} = H_0 \mathbf{1}_z + \dot{\mathbf{H}}_1. \quad (16.17)$$

Если рассматриваемый феррит находится в режиме насыщения, то соответствующий вектор намагниченности имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = M_s \mathbf{1}_z + \dot{\mathbf{M}}_1, \quad (16.18)$$

где $\dot{\mathbf{M}}_1$ — составляющая намагниченности, вызванная наличием высокочастотного поля.

Будем в дальнейшем рассматривать часто встречающийся на практике случай малого сигнала, когда выполняются следующие неравенства:

$$|\dot{\mathbf{H}}_1|/H_0 \ll 1; \quad |\dot{\mathbf{M}}_1|/M_s \ll 1. \quad (16.19)$$

Ставится задача на основании уравнения Ландау—Лифшица найти связь между векторами $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{M}}_1$. Приближение малого сигнала позволяет упростить задачу, пренебрегая в правой части уравнения Ландау—Лифшица произведением малых величин вида $M_1 H_1$, имеющих второй порядок малости.

Подставляя соотношения (16.17) и (16.18) в уравнение (16.10) и используя комплексную форму представления полей, будем иметь

$$j\omega \dot{\mathbf{M}}_1 = -\mu_0 \gamma [\dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{H}}_0] - \mu_0 \gamma [\dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{H}}_1]. \quad (16.20)$$

Если записать векторные произведения в координатном представлении и произвести упомянутое упрощение, то

уравнение (16.20) окажется эквивалентным системе двух уравнений вида

$$\begin{aligned} j\omega \dot{M}_{1x} &= -\omega_p \dot{M}_{1y} + \omega_s \dot{H}_{1y}, \\ j\omega \dot{M}_{1y} &= \omega_p \dot{M}_{1x} - \omega_s \dot{H}_{1x}. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_p = \mu_0 \gamma H_0$$

— уже известная частота ферромагнитного резонанса;

$$\omega_s = \mu_0 \gamma M_s$$

— вспомогательный параметр, имеющий размерность частоты.

Отметим, что в систему (16.21) входят только два уравнения, поскольку из (16.20) следует, что в первом приближении $\dot{M}_{1z} = 0$.

Будем полагать, что составляющие \dot{H}_{1x} и \dot{H}_{1y} тем или иным образом заданы, тогда (16.21) можно рассматривать как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных \dot{M}_{1x} и \dot{M}_{1y} . Решение системы будет иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{1x} &= -\frac{\omega_p \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{H}_{1x} - j \frac{\omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{H}_{1y}, \\ \dot{M}_{1y} &= \frac{j \omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{H}_{1x} - \frac{\omega_p \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{H}_{1y}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

По своему физическому смыслу зависящие от частоты безразмерные коэффициенты в правых частях равенств (16.22) соответствуют уже известной магнитной восприимчивости. Введем обозначения:

$$k_m = \frac{\omega_p \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad k'_m = \frac{\omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (16.23)$$

При этом полная система уравнений, связывающих между собой составляющие высокочастотного магнитного поля \dot{H}_1 и составляющие высокочастотной намагниченности \dot{M}_1 , возбужденной этим полем, примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{1x} &= -k_m \dot{H}_{1x} - j k'_m \dot{H}_{1y} + 0 \cdot \dot{H}_{1z}, \\ \dot{M}_{1y} &= j k'_m \dot{H}_{1x} - k_m \dot{H}_{1y} + 0 \cdot \dot{H}_{1z}, \\ \dot{M}_{1z} &= 0 \cdot \dot{H}_{1x} + 0 \cdot \dot{H}_{1y} + 0 \cdot \dot{H}_{1z}. \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

Система уравнений (16.24) позволяет образовать таблицу из девяти чисел:

$$\overleftrightarrow{k}_M = \begin{pmatrix} -k_M & -jk'_M & 0 \\ jk'_M & -k_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.25)$$

носящую название тензора магнитной восприимчивости ферромагнитной среды. С математической точки зрения важно, что таблица (16.25) представляет собой матрицу: закон образования составляющих вектора \dot{M}_1 заключается в обычных правилах матричного умножения матрицы \overleftrightarrow{k}_M на вектор-столбец \dot{H}_1 .

Воспользовавшись известным определением, можно выразить вектор высокочастотной магнитной индукции \dot{B}_1 через поля \dot{H}_1 и \dot{M}_1 :

$$\dot{B}_1 = \mu_0 (\dot{H}_1 + \dot{M}_1). \quad (16.26)$$

Учитывая, что \dot{M}_1 и \dot{H}_1 связаны между собой тензором магнитной восприимчивости \overleftrightarrow{k}_M , соотношение (16.26) можно также записать в тензорном виде:

$$\dot{B}_1 = \mu_0 \overleftrightarrow{\mu} \dot{H}_1, \quad (16.27)$$

где $\overleftrightarrow{\mu}$ — тензор относительной магнитной проницаемости вещества, представляемый следующей матрицей:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu - j\mu' & 0 \\ j\mu' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.28)$$

Здесь

$$\mu = 1 - k_M; \quad \mu' = k'_M.$$

Тензор магнитной проницаемости $\overleftrightarrow{\mu}$ в литературе иногда называется тензором Полдера. Интересно отметить, что в соответствии с формулами (16.22) составляющие этого тензора как функции частоты претерпевают разрыв на частоте ферромагнитного резонанса ω_p .

Эта ситуация аналогична той, которая получается в колебательном контуре без затухания, когда сопротивление (проводимость)

обращается в бесконечность на резонансной частоте. Фактически всегда неизбежны тепловые потери, наличие которых обуславливает появление в правой части уравнения Ландау — Лифшица диссипативных членов. Учет затухания приводит к тому, что частотные зависимости составляющих тензора относительной магнитной проницаемости будут иметь вид гладких кривых без разрывов; экстремальные точки кривых будут лежать в окрестности частоты ферромагнитного резонанса.

16.4. Уравнения Максвелла в анизотропной среде

Проследим, каким образом изменяется форма записи уравнений Максвелла при рассмотрении среды с анизотропными свойствами. Для определенности будем полагать, что диэлектрическая проницаемость вещества ϵ — обычная скалярная величина, в то время как магнитная проницаемость — тензор, определяемый формулой (16.28).

Формально система первых двух уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд полей \dot{E} и \dot{H} имеет вид

$$\operatorname{rot} \dot{H} = j\omega \epsilon_a \dot{E}, \quad \operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \dot{H}. \quad (16.29)$$

Для простоты сторонние токи предполагаются отсутствующими. При записи координатного представления второго уравнения из системы (16.29) следует воспользоваться выражением для тензора относительной магнитной проницаемости феррита (16.28). В результате получим следующие системы уравнений, эквивалентные (16.29):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= -j\omega \epsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega \mu_0 \mu \dot{H}_x - \omega \mu_0 \mu' \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -\omega \mu_0 \mu' \dot{H}_x + j\omega \mu_0 \mu \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega \mu_0 \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} (16.30)$$

16.5. Распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите. Эффект Фарадея

Электромагнитный волновой процесс в такой анизотропной среде, которой является феррит, намагниченный за счет приложения внешнего постоянного магнитного поля, обладает многими интересными особенностями, отличающими его от волновых процессов в обычных изотропных средах. Ряд таких эффектов нашел важные технические приложения в волноводных устройствах СВЧ.

В качестве примера рассмотрим идеализированную задачу о распространении плоской электромагнитной волны в неограниченной ферритовой среде при условии, что распространение происходит в направлении вектора подмагничивающего поля \mathbf{H}_0 , который, в свою очередь, ориентирован вдоль оси z . Будем считать, что в любой плоскости, параллельной плоскости XOY , электромагнитное поле однородно, т. е.

$$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0.$$

Положим также, что магнитный вектор распространяющейся волны характеризуется отсутствием составляющей, продольной по отношению к направлению распространения:

$$\dot{H}_x \neq 0, \quad \dot{H}_y \neq 0, \quad \dot{H}_z = 0.$$

Наконец предположим, что рассматриваемая электромагнитная волна в любой поперечной плоскости является линейно поляризованной. Последнее условие означает, что если

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_x \mathbf{1}_x + \dot{H}_y \mathbf{1}_y,$$

то комплексные амплитуды \dot{H}_x и \dot{H}_y обладают одинаковыми фазами.

Любое линейно поляризованное векторное колебание может быть представлено в виде геометрической суммы двух векторов с одинаковыми длинами, вращающихся в противоположных направлениях. Соответствующий чертеж, поясняющий подобное разложение, приведен на рис. 16.4. Отсюда непосредственно следует, что произвольная плоская электромагнитная волна с линейной

поляризацией может быть разложена на сумму двух волн с вращающейся круговой поляризацией, причем направления вращения у них должны быть противоположными. Условимся, как это принято, называть волной с правым направлением вращения такой волновой процесс, для которого вращение вектора \mathbf{H} , наблюдаемое со стороны положительных значений координат z , происходит против направления часовой стрелки. Право-поляризованную волну будем обозначать индексом (+). При этом, как легко проверить,

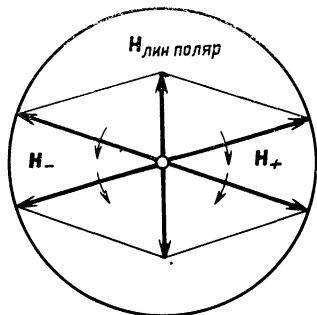


Рис. 16.4. Представление колебания с линейной поляризацией в виде суммы двух колебаний с круговой поляризацией (изображены мгновенные положения векторов в два последовательные момента времени).

Условимся, как это принято, называть волной с правым направлением вращения такой волновой процесс, для которого вращение вектора \mathbf{H} , наблюдаемое со стороны положительных значений координат z , происходит против направления часовой стрелки. Право-поляризованную волну будем обозначать индексом (+). При этом, как легко проверить,

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y+} &= -jH_{\max}, \\ \dot{H}_{x+} &= H_{\max}. \end{aligned} \quad (16.31)$$

Аналогичные выражения для комплексных амплитуд декартовых составляющих магнитного вектора лево-поляризованной волны примут вид

$$\dot{H}_{y-} = jH_{\max}, \quad \dot{H}_{x-} = H_{\max}. \quad (16.32)$$

В формулах (16.31), (16.32) H_{\max} — постоянное число.

Поставим задачу определить составляющие вектора магнитной индукции \mathbf{B} , возникающие в рассматриваемой среде под действием магнитного вектора \mathbf{H} волн с левым и правым направлением вращения. Учтя тензорный характер материальных уравнений для полей в феррите, на основании (16.27) и (16.28) для волны с правым направлением вращения будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{x+} &= \mu_0 \mu \dot{H}_{x+} - j\mu_0 \mu' \dot{H}_{y+} = \mu_0 (\mu - \mu') H_{\max}, \\ \dot{B}_{y+} &= j\mu_0 \mu' \dot{H}_{x+} + \mu_0 \mu \dot{H}_{y+} = -j\mu_0 (\mu - \mu') H_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Анализ выражений (16.33) позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, вектор \mathbf{B}_+ так же, как и

Вектор \dot{H}_+ , поляризован по кругу с тем же правым направлением вращения. Во-вторых, между \dot{B}_+ и \dot{H}_+ существует прямо пропорциональная зависимость. Другими словами, по отношению к право-поляризованному магнитному вектору намагниченный феррит ведет себя подобно обычной изотропной среде, причем его относи-

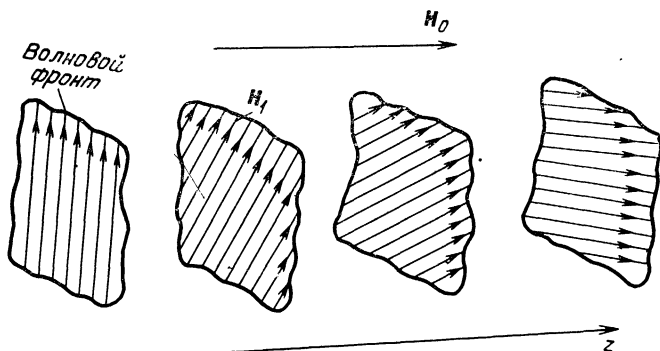


Рис. 16.5. Эффект Фарадея в намагниченном феррите.

тельная магнитная проницаемость выражается следующим образом:

$$\mu_+ = \mu - \mu'. \quad (16.34)$$

Если теперь рассмотреть лево-поляризованное колебание, то на основании (16.32) получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{x-} &= \mu_0 \mu \dot{H}_{x-} - j\mu_0 \mu' \dot{H}_{y-} = \mu_0 (\mu + \mu') H_{\text{макс}}, \\ \dot{B}_{y-} &= j\mu_0 \mu' \dot{H}_{x-} + \mu_0 \mu \dot{H}_{y-} = j\mu_0 (\mu + \mu') H_{\text{макс}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.35)$$

Повторив предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что для лево-поляризованного колебания относительная магнитная проницаемость феррита — также скалярная величина, равная

$$\mu_- = \mu + \mu'. \quad (16.36)$$

Поскольку рассматриваемый процесс является бегущей волной, целесообразно ввести постоянные распро-

странения для каждой составляющей с левым и правым направлением вращения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_+ &= \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0} \sqrt{\mu - \mu'}, \\ \gamma_- &= \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0} \sqrt{\mu + \mu'}. \end{aligned} \right\} \quad (16.37)$$

Связь между напряженностями электрического и магнитного полей в каждой из рассматриваемых волн определяется характеристическими сопротивлениями для колебаний с правым и левым направлениями вращения соответственно:

$$\begin{aligned} Z_{c+} &= 120\pi \sqrt{\mu_+/\varepsilon}, \\ Z_{c-} &= 120\pi \sqrt{\mu_-/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Прямым следствием различий постоянных распространения волн с правым и левым направлениями вращения оказывается поворот плоскости поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся в феррите вдоль направления подмагничивающего поля (рис. 16.5). Данное явление в физике носит название эффекта Фарадея и имеет важные применения в волноводной технике СВЧ.

ВЫРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ
ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В РАЗЛИЧНЫХ
СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

1. Декартовы координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{1}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z,$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

2. Цилиндрические координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{1}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{1}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{1}_\varphi + \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

3. Сферические координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{1}_\theta,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{A}_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) \right],$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{1}_r +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{1}_\varphi + \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r A_\varphi) \right) \right] \mathbf{1}_\theta,$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Список литературы

1. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. Связьиздат, 1957.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженера. Изд-во «Наука», 1965.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд-во «Советское радио», 1957.
4. Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика. Изд-во «Связь», 1971.
5. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. Изд-во «Советское радио», 1971.
6. Гуревич А. Г. Полые резонаторы и волноводы. Изд-во «Советское радио», 1952.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. Пер. с нем., под ред. С. А. Элькинда. Изд-во иностранной литературы, 1958.
8. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. Изд-во «Наука», 1966.
9. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн, Изд-во «Энергия», 1967.
10. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Изд-во «Энергия», 1967.
11. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. Изд-во «Высшая школа», 1964.
12. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. Пер. с англ., под ред. С. П. Капицы. Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.
13. Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. Гостехиздат, 1948.
14. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
15. Федоров Н. Н. Основы электродинамики. Изд-во «Высшая школа», 1965.
16. Шимони К. Теоретическая электротехника. Изд-во «Мир», 1964.