

Ф. Г. БАСС, И. М. ФУКС

# РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1972

**Рассеяние волн на статистически неровной поверхности**, Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972 г.

В книге излагаются методы решения задач дифракции электромагнитных и звуковых волн на статистически неровной или неоднородной поверхности. Формулируются основные уравнения, описывающие волновые поля, и граничные условия к ним, а также статистическая постановка задачи. Исследуется рассеяние волн на малых пологих неровностях в приближении модифицированной теории возмущений, и на крупных неровностях — в приближении физической оптики с учетом затенений. Приведены расчеты средних и флуктуационных характеристик рассеянного поля: коэффициентов отражения, индикатрис рассеяния, флуктуаций амплитуды и фазы, корреляционных функций поля и т. д. Анализируются частотные спектры электромагнитных и звуковых волн, дифрагированных на случайной движущейся поверхности. Определяются эффективные сечения и флуктуационные характеристики поля, отраженного от ограниченных шероховатых тел.

С помощью комбинации методов возмущений и физической оптики исследуется рассеяние волн на поверхностях с широким спектром масштабов случайных неровностей. Эта модель наиболее близка к поверхностям, встречающимся в реальных задачах (рассеяние радиоволн, света и звука на поверхности моря, суши, планет; рассеяние электронов и фононов на границах твердого тела и т. д.). В заключение описан метод фейнмановских диаграмм, позволяющий в рамках теории возмущений учесть многократное рассеяние волн. Выводятся уравнения для среднего поля типа уравнений Дайсона и уравнения переноса интенсивности. В качестве иллюстрации рассчитаны статистические характеристики поля в волноводе с границами случайной формы.

Рис. 87, библи. назв. 428.

*Фридрих Гершенович Басс, Иосиф Моисеевич Фукс*

Рассеяние волн на статистически неровной поверхности

М., 1972 г., 424 стр. с илл.

Редактор *Г. Я. Пирогова*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Е. А. Белицкая, И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 3/IV 1972 г. Подписано к печати 22/IX 1972 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>, тип. № 1. Физ. печ. л. 26,5. Условн. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 24,9. Тираж 4000 экз. Т-03398. Цена книги 2 р. 36 к. Заказ № 1485.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в 1-й тип. издат. «Наука» г. Ленинград, 9 линия, дом. 12, с матриц

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-3-2

107-72

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Введение . . . . .	7
<b>Глава I. Основные уравнения распространения волн . . . . .</b>	<b>12</b>
§ 1. Распространение звука в жидкостях и газах . . . . .	12
§ 2. Распространение электромагнитных волн . . . . .	24
<b>Глава II. Статистическая формулировка задачи дифракции . . . . .</b>	<b>33</b>
§ 3. Статистически неровные поверхности . . . . .	34
§ 4. Случайные волновые поля . . . . .	53
<b>Глава III. Распространение волн над поверхностью с малыми пологими неровностями . . . . .</b>	<b>66</b>
§ 5. Распространение звука над абсолютно мягкой статистически неровной поверхностью . . . . .	66
§ 6. Распространение звука над импедансной статистически неровной поверхностью . . . . .	76
§ 7. Граничные условия для среднего и флуктуационного электромагнитного полей . . . . .	80
<b>Глава IV. Флуктуации волнового поля над статистически неровной поверхностью . . . . .</b>	<b>91</b>
§ 8. Интенсивность флуктуаций звука в зоне Фраунгофера . . . . .	91
§ 9. Флуктуации электромагнитного поля в зоне Фраунгофера . . . . .	97
§ 10. Интенсивность флуктуаций в ближней зоне . . . . .	102
§ 11. Флуктуации амплитуды и фазы . . . . .	114
<b>Глава V. Рассеяние на движущейся поверхности . . . . .</b>	<b>128</b>
§ 12. Случайные колебания границы раздела . . . . .	128
§ 13. Энергетический спектр отраженного поля . . . . .	138
§ 14. Спектр флуктуаций амплитуды и фазы . . . . .	147
<b>Глава VI. Корреляционные функции поля, рассеянного на шероховатой поверхности . . . . .</b>	<b>156</b>
§ 15. Функции корреляции в дальней зоне . . . . .	156
§ 16. Корреляция флуктуаций поля при скользющем распространении . . . . .	163
§ 17. Флуктуации скалярного поля при скользющем распространении . . . . .	172
§ 18. Флуктуации поля вертикального диполя над колеблющейся поверхностью . . . . .	180
<b>Глава VII. Рассеяние на крупномасштабных неровностях . . . . .</b>	<b>183</b>
§ 19. Метод касательной плоскости . . . . .	183
§ 20. Индикатриса рассеяния скалярного поля . . . . .	190
§ 21. Рассеяние электромагнитных волн . . . . .	215

§ 22. Учет затенений при отражении от статистически неровной поверхности . . . . .	226
§ 23. Эффективные функции распределения высот и наклонов при наличии затенений . . . . .	245
<b>Глава VIII. Флуктуации поля, рассеянного на крупномасштабных неровностях . . . . .</b>	<b>260</b>
§ 24. Среднее поле и интенсивность флуктуаций над неограниченной поверхностью . . . . .	260
§ 25. Флуктуации интенсивности над поверхностью с пологими неровностями . . . . .	275
§ 26. Пространственные корреляционные функции . . . . .	284
§ 27. Частотный спектр рассеянного поля . . . . .	293
<b>Глава IX. Рассеяние на телах конечных размеров . . . . .</b>	<b>313</b>
§ 28. Отражение и преломление на криволинейной поверхности . . . . .	313
§ 29. Сечение рассеяния на гладком теле . . . . .	320
§ 30. Отражение от шероховатого тела . . . . .	324
§ 31. Флуктуации сечения рассеяния, амплитуды и фазы . . . . .	337
<b>Глава X. Двухмасштабная модель . . . . .</b>	<b>343</b>
§ 32. Некоторые экспериментальные результаты по рассеянию на статистически неровной поверхности . . . . .	343
§ 33. Метод возмущений для криволинейной поверхности . . . . .	351
<b>Глава XI. Метод функций Грина в теории многократного рассеяния . . . . .</b>	<b>362</b>
§ 34. Диаграммы Фейнмана . . . . .	362
§ 35. Среднее поле в слоистом волноводе с шероховатой границей . . . . .	369
§ 36. Затухание нормальных волн в закрытых полых волноводах . . . . .	380
§ 37. Уравнения переноса излучения . . . . .	395
<b>Литература . . . . .</b>	<b>406</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

С явлением рассеяния волн на статистически неровной поверхности приходится сталкиваться при решении целого ряда физических задач. Сюда относятся в первую очередь вопросы радиопизики и гидроакустики, связанные с распространением волн в природных условиях: радио- и гидролокация, влияние неровностей рельефа местности или морского волнения на распространение радиоволн и звука, отражение радиоволн от нижних слоев ионосферы, флуктуации СДВ сигналов в волноводе Земля — ионосфера и т. д. Кроме этих задач, являющихся традиционными объектами исследования статистической теории распространения волн, в последнее время методы статистической теории дифракции с успехом применяются при решении совершенно различных, на первый взгляд, проблем — радиоастрономии (отражение радиоволн от Солнца и планет) и физики твердого тела (рассеяние различных типов волн и частиц на границах раздела), сейсмологии (распространение упругих волн в земной коре) и радиотехники (исследование статистически нерегулярных волноводов и квазиоптических линий связи) и т. д.

Несмотря на наличие широкого круга физических явлений, связанных с рассеянием волн на статистически неровной поверхности, и обилия журнальных статей на эту тему, в литературе отсутствуют монографии, посвященные данному вопросу.

В теоретической части книги Бекмана и Спичичино (P. Beckmann, A. Spizzichino. *The Scattering of Electromagnetic waves from rough Surfaces*, Pergamon Press, Oxford, L., N. — Y., Paris, 1963.) излагаются в основном выводы законов распределения случайных волновых полей, а соответствующие главы (гл. VII, VIII) книги Фейнберга (Е. Л. Фейнберг, *Распространение радиоволн вдоль земной поверхности*, Изд-во АН СССР, М., 1961) далеко не исчерпывают содержания вопроса. Обе монографии вышли достаточно давно и не отражают современного состояния этой области науки. Таким образом, в литературе по статистической теории дифракции имеется существенный пробел, который призвана заполнить настоящая книга.

Монография является коллективным трудом. Все материалы, вошедшие в книгу, авторами обсуждались совместно. Введение, главы I и III написаны Ф. Г. Бассом, главы IV и V — совместно

обоими авторами, глава XI—Ф. Г. Бассом, И. М. Фуксом и В. Д. Фрейлихером. Остальные главы написаны И. М. Фуксом.

Авторы благодарят С. Я. Брауде и Е. Л. Фейнберга, в результате общения с которыми на протяжении последних 15 лет сформировалась большая часть идей, положенных в основу настоящей монографии. Мы также весьма признательны И. Е. Островскому, А. Д. Розенбергу и А. И. Калмыкову за многочисленные стимулирующие дискуссии, способствовавшие более глубокому пониманию физической сути рассмотренных в книге вопросов и их наглядной интерпретации. Л. М. Бреховских ознакомился с окончательным вариантом рукописи и сделал ряд полезных замечаний, за что авторы ему искренне благодарны. Считаем своим приятным долгом поблагодарить И. А. Урусовского, взявшего на себя тяжелый труд по предварительному редактированию рукописи, за целый ряд существенных замечаний и ценных советов. Мы благодарны В. Д. Фрейлихеру за участие в написании последней главы и помощь при оформлении рукописи.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние волн на реальной поверхности представляет интерес для различных областей современной физики. В радиофизике и акустике—это рассеяние радиоволн и звука на неровностях рельефа [1], на взволнованной поверхности моря [2] и на других объектах. В физике твердого тела—взаимодействие квазичастиц (электронов, фононов и т. д., трактуемых как волны), со стенками (см. [3], [4]). В оптике—дифракция света на флуктуациях поверхности раздела двух сред (см. [4]—[8]) и на различных матовых поверхностях (см. [9]—[12]). В радиоастрономии—отражение радиоволн от поверхности Солнца, Луны и планет [13]—[18]. Количество такого рода примеров можно существенно умножить.

Реальная поверхность обязательно шероховатая. Причины возникновения шероховатостей могут иметь самый разнообразный характер: от неровностей поверхности твердого тела, связанных с корпускулярным строением материи и дефектами обработки, до взволнованной поверхности моря, форма которой обусловлена турбулентностью ветра. В большей части практически интересных задач форма неровной поверхности описывается случайной функцией координат, а иногда и времени. Поэтому дифракцию волн на реальных поверхностях также следует рассматривать как статистическую задачу, заключающуюся в отыскании вероятностных характеристик рассеянного поля (функций распределения, моментов, корреляционных функций и т. д.) по известным статистическим характеристикам поверхности. Таким образом, теория рассеяния волн статистически неровной поверхностью является синтезом теории дифракции волн на поверхности произвольной формы и теории вероятностей. Методика решения такого рода задач одинакова вне зависимости от физической природы неровностей.

Первое математическое исследование рассеяния звуковых волн на неровной поверхности было проведено Рэлеем [19], который рассмотрел дифракцию плоской волны на синусоиде. Рассеяние электромагнитных волн статистически неровной поверхностью исследовалось Мандельштамом в связи с молекулярным рассеянием света поверхностью жидкости [5]. Исчерпывающая теория этого эффекта была дана в почти одновременно появившихся работах Андронова и Леонтовича [6] и Ганса [7]—[8]. В пере-

численных работах рассчитывалось распределение по направлениям интенсивности рассеянного поля в приближении теории возмущений. Первая работа, в которой изучалась когерентная составляющая поля, была опубликована Фейнбергом [20]. В ней показано, что распространение электромагнитных волн над статистически неровной идеально проводящей поверхностью эквивалентно распространению волн над плоскостью с эффективным импедансом, определяемым статистическими параметрами неровностей. Фейнбергом был отмечен эффект накопления, играющий фундаментальную роль в физике распространения волн над статистически неровной поверхностью. Этот эффект заключается в том, что влияния малых неровностей на процесс распространения волн может накапливаться и при достаточно длинных трассах существенно влиять на характер поля.

В перечисленных работах применялся метод возмущений в той или иной форме, т. е. высота неровностей предполагалась в каком-то смысле малой. В начале пятидесятых годов Антокольский [44], Бреховских [45]—[47] и Исакович [48] рассмотрели другой предельный случай дифракции на сколь угодно высоких, но достаточно плавных неровностях с помощью метода касательной плоскости \*).

Аналогичное рассмотрение в области физики твердого тела и гидродинамики разреженного газа было проведено в работах [3], [49]—[51], [81], [345].

Дальнейшая разработка теории шла по линии развития приближения малых возмущений и приближения Кирхгофа. Здесь следует отметить введение нелокальных граничных условий (Басс [52]), учет затенений в методе Кирхгофа (Басс и Фукс [53], Смит [54]), концепцию резонансного рассеяния (Кромби [55], Брауде с сотрудниками [2], Басс [56]), рассеяние на поверхности с двумя типами неровностей (Курьянов [57], Фукс [58]). Метод возмущений и метод Кирхгофа сейчас являются наиболее распространенными в теории рассеяния волн статистически неровными поверхностями. Их разработку в основном можно считать законченной. По этой причине изложение базируется на этих двух методах и их комбинации.

Первые две главы носят вводный характер. В них сформулированы основные представления теории распространения волн и теории случайных процессов применительно к неровным поверх-

---

\*) В литературе метод касательной плоскости часто называют «методом Кирхгофа». Связано это с тем, что поле на рассеивающей поверхности задается по локальному закону, аналогично тому, как это было сделано Кирхгофом в задаче о дифракции света на щели (см., например, [158]). Ввиду общепринятости этого названия, оно используется нами, хотя это название нельзя считать удачным, ибо впервые этот метод в применении к задаче дифракции на периодической поверхности был разработан в цитированных работах [44]—[47].



ностям и волновым полям. В третьей главе рассматривается среднее поле звуковых и электромагнитных волн над поверхностью со случайными неровностями. Показано, что математическое описание среднего поля над статистически неровной поверхностью эквивалентно описанию поля над детерминированной поверхностью с эффективными граничными условиями, определяемыми статистическими характеристиками случайных неровностей. С помощью эффективных условий решается граничная задача для точечного источника и плоской волны.

Четвертая глава посвящена расчету характеристик флуктуационного поля: вторых моментов и флуктуаций фазы. Исследование проводится как для зоны Фраунгофера, так и для ближней зоны. В этой главе сформулирован принцип избирательного рассеяния, который заключается в том, что в рассеянии волн принимает участие лишь одна гармоника из всего энергетического спектра неровной поверхности, определяемая волновыми векторами падающего и рассеянного поля. Этот принцип верен в приближении теории возмущений, если источник и точка наблюдения находятся в зоне разделения спектров. Однако с его помощью можно анализировать и более сложные случаи.

В пятой главе исследуется рассеяние волн на случайных движущихся поверхностях. Частотный спектр рассеянного поля в этом случае обогащается за счет модуляции движением поверхности. В дальней зоне он состоит из двух монохроматических линий, соответствующих комбинационному рассеянию волн на случайной поверхности. В ближней зоне спектр рассеянного поля имеет существенно более сложный вид и иногда совпадает с частотным спектром рассеивающей поверхности, что существенно при решении обратной задачи.

Пространственные корреляционные характеристики в приближении малых возмущений изучены в шестой главе. Корреляционные функции представляют основной интерес как источник информации о движущейся поверхности, в связи с чем в этой главе уделено большое внимание обратной задаче. В заключение главы указывается связь между временными и пространственными корреляционными функциями случайной поверхности, которая представляется в виде линейной суперпозиции поверхностных волн. Эта связь переносится на волновое поле и также используется для решения обратной задачи.

Седьмая глава посвящена рассеянию на крупномасштабных неровностях (методу Кирхгофа). В этом приближении отражение электромагнитной волны от неровной поверхности рассматривается в каждой точке как отражение от касательной плоскости, проведенной в этой точке, а затем производится усреднение по направлениям нормалей к касательной плоскости. В этой главе рассчитаны индикатрисы рассеяния акустических и электромагнитных

волн, проведен учет затенений, а также рассмотрены эффективные функции распределения высот и наклонов. Результаты получены для зоны Фраунгофера и ограниченной площадки.

В восьмой главе с помощью метода касательной плоскости изучается среднее поле и интенсивность рассеяния над неограниченной неровной поверхностью, корреляционные функции и другие статистические характеристики. В заключение главы рассмотрен частотный спектр волн, рассеянных движущейся крупномасштабной поверхностью. Следует отметить, что в этом случае принцип избирательного рассеяния, вообще говоря, не имеет места и в процессе рассеяния принимает участие весь спектр неровностей поверхности. Это приводит к расширению спектральной плотности рассеянного поля, хотя ее максимумы в ряде предельных случаев приходятся на частоты, определяемые принципом избирательного рассеяния.

Для практики представляет интерес рассеяние волн на телах, ограниченных случайной поверхностью. Такого рода рассеяние характеризуется обычно так называемым эффективным сечением, исследованию статистических свойств которого и посвящена девятая глава.

Анализ экспериментальных данных, проведенный в десятой главе, показывает, что ни теория возмущений, ни метод Кирхгофа не отражают полностью особенностей рассеяния волн на реальных объектах (поверхности Луны, морском волнении и т. д.). Для их объяснения приходится прибегать к так называемой двухмасштабной модели. Статистически неровная поверхность предполагается состоящей из крупномасштабных неровностей (отражение от которых можно рассчитывать с помощью метода касательной плоскости), покрытых мелкой рябью (рассеяние на которой рассматривается методами теории возмущений). Такого рода комбинированная модель хорошо описывает свойства сигнала, рассеянного реальными объектами, например, морской поверхностью.

В последнее время возник ряд задач, которые решаются принципиально новыми методами. В первую очередь это те случаи, когда существенно многократное рассеяние. Это относится, например, к распространению волн в волноводах и резонаторах со статистически шероховатыми стенками. Как обычно, основной интерес представляют первые два статистических момента. С помощью графической техники, аналогичной применяемой в квантовой электродинамике, можно получить уравнения для среднего поля и средней интенсивности поля, исследовать влияние шероховатостей на спектр и затухание волн в волноводе, исследовать перераспределение энергии между различными модами за счет рассеяния на неровностях [35] — [40]. Изложению этих принципиально новых методов теории рассеяния на статистически неровных поверхностях посвящена последняя, одиннадцатая глава.

Из краткого обзора содержания книги видно, что мы избегали описания большого количества возможных приложений (рассеяние морем, рассмотренное в главе десятой, имеет чисто иллюстративный характер). Это связано как с большим разнообразием этих приложений, так и с тем, что обычно применение общей теории к конкретным задачам, как правило, не вызывает затруднений. Например, тепловое излучение статистически неровной поверхности после решения задачи о рассеянии волн на такой поверхности рассчитывается с помощью квадратур (см., например, [23] — [28]). Из рассмотрения выпали также неровные поверхности, состоящие из хаотически разбросанных по плоскости полуцилиндров, полусфер и т. д. (см., например, [29] — [34]), так как рассеяние на таких поверхностях не описывается общими методами, а область применимости полученных с помощью таких моделей результатов крайне ограничена. По этой же причине мы не излагали применения к задаче рассеяния интегральных уравнений (см. [41] — [43]).

В книге принята сплошная нумерация параграфов. При ссылке в каком-либо из параграфов на формулу другого параграфа перед номером формулы пишется номер параграфа. При ссылках на формулу того же параграфа указывается только номер формулы.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

§ 1. Распространение звука в жидкостях и газах

Звуковое поле в жидкости и газе описывается потенциалом  $U$ , который определяется волновым уравнением

$$\Delta U - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi Q(\mathbf{R}, t). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор с компонентами  $\{x, y, z\}$ ,  $t$  — время,  $s$  — скорость звука,  $4\pi Q$  — плотность объемной скорости. Скорость среды  $\mathbf{v}$  и давление  $p$  связаны с потенциалом  $U$  и плотностью среды  $\rho$  такими соотношениями (см., например, [62], [63]):

$$\mathbf{v} = -\nabla U, \quad p = \rho \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2)$$

Ниже мы будем предполагать, что зависимость потенциала и плотности объемной скорости от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  — частота):

$$Q(\mathbf{R}, t) = Q(\mathbf{R}) e^{-i\omega t}, \quad U(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{R}) e^{-i\omega t} \text{ и т. д.}$$

(как всегда, имеет физический смысл вещественная часть). Более сложная зависимость полей от времени получается с помощью принципа суперпозиции. С учетом этого обстоятельства уравнение (1) переписывается так:

$$(\Delta + k^2) U = -4\pi Q(\mathbf{R}), \quad (3)$$

где  $k = \omega/s = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  называется длиной волны. В дальнейшем всюду, за исключением специальных случаев, временной множитель будет опускаться. Уравнение (3) носит название уравнения Гельмгольца. Если часть пространства, в которой рассматривается распространение звука, окружена поверхностью  $\Sigma$  (эта поверхность может быть, вообще говоря, неодносвязной), то дифференциальному уравнению (3) эквивалентно следующее интегральное соотношение (формула Грина) (см., например, [1]):

$$U(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{V}} Q(\mathbf{R}') \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') d\mathbf{R}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial N} - U(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial N} \right\} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \Sigma, \quad \mathbf{R}' \in \mathcal{V}. \quad (4)$$

В первом интеграле областью интегрирования является объем  $\mathcal{V}$ , заполненный источниками звука, во втором интеграле — поверхность  $\Sigma$ ;  $\frac{\partial}{\partial N}$  означает дифференцирование по внешней нормали к поверхности  $\Sigma$  (рис. 1). Через  $\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  обозначена функция Грина. Для волнового уравнения функция Грина может быть записана в виде

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} + \mathcal{G}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (5)$$

Первое слагаемое должно удовлетворять уравнению (3) с правой частью  $Q = \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$ , а  $\mathcal{G}_0$  — тому же уравнению, но с  $Q = 0$ , причем ни  $g$ , ни  $\mathcal{G}_0$  не должны иметь особенности в точке  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ .

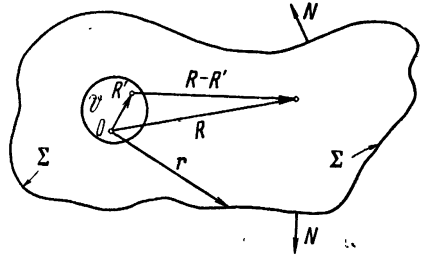


Рис. 1.

Из формулы (4) следует, что поле в любой точке пространства определяется объемными источниками  $Q$  и значениями потенциала и его нормальной производной на поверхности  $\Sigma$ . Если эти величины считать заданными, то формула (4) полностью описывает поле. В противоположном случае из нее можно получить интегральное уравнение относительно  $U$ , выбрав точку  $\mathbf{R}$  на поверхности  $\Sigma$ .

Как видно из (5), функция Грина определена неоднозначно, ибо требования, накладываемые на  $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  и  $\mathcal{G}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ , допускают некоторый произвол. Удачный подбор этих функций позволяет существенно упростить выражение (4).

Продемонстрируем это обстоятельство на двух важных примерах. Пусть поверхность  $\Sigma$  является плоскостью  $z = 0$ . В качестве функций Грина выберем функции

$$\mathcal{G}_{\pm}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} \pm \frac{e^{ik|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}'|}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{R}_1$  — вектор с компонентами  $\{x, y, -z\}$ . Очевидно, что функции Грина  $\mathcal{G}_+$  и  $\mathcal{G}_-$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}_+}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \mathcal{G}_- \Big|_{z=0} = 0 \quad (7)$$

(на плоскости  $\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial z}$ ).

Подставляя  $\mathcal{G}_+$  в (4), получим

$$U(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{G}_+(\mathbf{R}, \mathbf{R}') Q(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Если же в (4) подставить  $\mathcal{G}_-$ , то для  $U(\mathbf{R})$  имеет место такое соотношение:

$$U(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{G}_-(\mathbf{R}, \mathbf{R}') Q(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (9)$$

Таким образом, формула (8) выражает поле в пространстве через плотность объемных источников и нормальную производную поля на поверхности, а (9) позволяет выразить поле в пространстве через поле объемных источников и поле на поверхности.

Рассмотрим теперь излучение звуковых волн объемным источником. Излученное поле описывается первым членом в уравнении (4). Будем рассматривать неограниченное пространство. В этом случае следует в (5) положить  $g = 1$ ,  $\mathcal{G}_0 = 0$ . После этого формула (4) примет следующий вид:

$$U(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{V}} Q(\mathbf{R}') \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} d\mathbf{R}'. \quad (10)$$

Если источник точечный и находится в точке  $\mathbf{R}'$ , т. е.  $Q = d\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$ , то, согласно определению функции Грина, поле этого источника запишется так:

$$U(\mathbf{R}) = d\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (11)$$

Величина  $d/4\pi$  называется амплитудой объемной скорости. Пусть источник имеет конечный объем. Обычно нас интересует поле вдали от этого объема. В этом случае выражение (10) можно существенно упростить. С этой целью разложим  $|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|$  в ряд по степеням  $\mathbf{R}'$  (см. рис. 1)

$$|\mathbf{R}-\mathbf{R}'| \simeq R \left[ 1 - \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}'}{R^2} + \frac{R'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{R}')^2}{2R^2} + o\left(\frac{R'^2}{R^2}\right) \right]$$

(здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{R}/R$ ). С учетом этого соотношения (10) примет вид

$$U(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{R} \int_{\mathcal{V}} Q(\mathbf{R}') \frac{\exp\left\{-ik\left[\mathbf{v}\mathbf{R}' - \frac{R'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{R}')^2}{2R}\right]\right\}}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}'}{R}} d\mathbf{R}'. \quad (12)$$

Выясним условия, при которых можно пренебречь  $\mathbf{v}\mathbf{R}'/R$  в знаменателе и  $i \frac{k}{2R} [R'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{R}')^2]$  в показателе экспоненты в формуле (12). Пусть максимальный размер объема  $\mathcal{V}$  равен  $L$ . Тогда по порядку величины  $\frac{k[R'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{R}')^2]}{2R} \lesssim \frac{kL^2}{R}$ ,  $\frac{\mathbf{v}\mathbf{R}'}{R} \lesssim \frac{L}{R}$ . Чтобы этими величинами можно было пренебречь, необходимо выполнение следующих неравенств

$$\frac{L}{R} \ll 1; \quad \frac{kL^2}{R} \ll 1. \quad (13)$$

На расстояниях, удовлетворяющих этим неравенствам, поле излучения имеет вид

$$U(\mathbf{R}) = d(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{R}, \quad (14)$$

где

$$d(\mathbf{k}) = \int_{\Sigma} Q(\mathbf{R}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}'} d\mathbf{R}', \quad \mathbf{k} = v\mathbf{k}. \quad (15)$$

Такое излучение называется монопольным. Отметим, что в случае неточечного источника величина  $d$  пропорциональна преобразованию Фурье от функции  $Q$  с волновым вектором  $\mathbf{k} = v\mathbf{k}$ . Область пространства, для которой выполнены неравенства (13), называется зоной Фраунгофера.

Поле в пространстве возбуждается не только объемными, но и поверхностными источниками. Допустим, что на ограниченном участке  $\Sigma$  плоскости  $z=0$  задано давление или нормальная составляющая скорости, что эквивалентно в силу (2) заданию потенциала или его нормальной производной. Для простоты положим  $Q=0$ ; тогда поле в пространстве описывается первым либо вторым слагаемым в поверхностном интеграле формулы (4), в зависимости от того, какая величина задается на поверхности. Аналогично тому, как это было сделано для объемных сил, формулы (8) и (9) для поля в зоне Фраунгофера можно записать так:

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{R} \int_{\Sigma} \frac{\partial U(r)}{\partial z} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr; \quad (16)$$

$$U(\mathbf{R}) = -\frac{ik_z}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{R} \int_{\Sigma} U(r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr. \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — вектор с компонентами  $k(x/R)$ ,  $k(y/R)$  и  $k(z/R)$ . Формулы (16) и (17) можно преобразовать таким образом:

$$U(\mathbf{R}) = d(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{R}, \quad (18)$$

где

$$d(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial U(r)}{\partial z} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr, \quad (19)$$

если задана нормальная производная потенциала на поверхности, и

$$d(\mathbf{k}) = -\frac{ik_z}{2\pi} \int_{\Sigma} U(r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr, \quad (20)$$

если задано значение потенциала на поверхности. Заметим, что и в этом случае амплитуда объемной скорости пропорциональна двумерному преобразованию Фурье от интенсивности источника

с волновым вектором  $k$ . Оценка расстояний, на которых применима формула (18), дается соотношениями (13), где под  $L$  понимается максимальный размер  $\Sigma$ .

Физический смысл формул (14), (18) заключается в том, что на достаточно больших расстояниях любой протяженный источник излучает как точечный с амплитудой объемной скорости, определяемой направлением на точку наблюдения и характеристиками излучателя.

В теории распространения волн существенную роль играют решения однородного уравнения, соответствующего (3),

$$\Delta U + k^2 U = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что таким решением является любая собственная функция оператора Лапласа с собственным числом  $-k^2$ . Мы рассмотрим здесь только так называемые плоские волны

$$U(\mathbf{R}) = Ae^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}. \quad (22)$$

Подстановкой (22) в (21) легко показать, что плоская волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца, если выполняется равенство

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = k^2. \quad (23)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{q}$ , вообще говоря, комплексные числа. Не будем останавливаться на свойствах плоских волн, покажем только, что любое решение уравнения Гельмгольца с внешними источниками можно представить в виде суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн.

Непосредственно можно убедиться в том, что сферическая волна может быть представлена в виде следующего разложения по плоским волнам [1], [63]:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(q_x x + q_y y + q_z |z|)] \frac{dq_x dq_y}{q_z}, \quad (24)$$

где  $q_z = \sqrt{k^2 - q_x^2 - q_y^2}$ . Подставим (24) в (8), для простоты положив  $Q = 0$ , и, меняя порядок интегрирования в этой формуле, получим

$$U(\mathbf{R}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{U}(\mathbf{q}_{\perp})}{\partial z} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \frac{d\mathbf{q}_{\perp}}{q_z}, \quad (25)$$

где  $\frac{\partial \tilde{U}(\mathbf{q}_{\perp})}{\partial z}$  — двумерное преобразование Фурье нормальной производной потенциала, а  $\mathbf{q}_{\perp}$  — вектор с компонентами  $q_x$  и  $q_y$ . Аналогичным образом (9) можно переписать в виде

$$U(\mathbf{R}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mathbf{q}_{\perp}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} d\mathbf{q}_{\perp}. \quad (26)$$



Интегралы в формулах (25), (26) можно вычислить при больших значениях  $R$  с помощью метода перевала. Этот метод описан в ряде монографий и учебников [63]—[66], поэтому приведем сразу ответ. Интеграл  $\mathcal{F}$ , определяемый выражением

$$\mathcal{F} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(q_{\perp}) e^{iqR} dq_{\perp}, \quad (27)$$

при больших  $R$  имеет такую асимптотику:

$$\mathcal{F} \approx \frac{ikz}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} f(\mathbf{k}_{\perp}) + o\left(\frac{1}{kR}\right), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k} \frac{R}{R}. \quad (28)$$

При выводе (28) предполагалось, что  $f(q_{\perp})$  не имеет полюсов, точек ветвления и т. д. Применяя эту формулу для вычисления интегралов в выражениях для полей (25), (26), снова придем к соотношениям (19), (20). Формулу, аналогичную (26), можно было бы получить и для поля, возбужденного объемным источником.

Рассмотрим теперь распространение звуковых волн в среде, состоящей из двух полупространств с разными плотностями и скоростями звука. В качестве границы раздела выберем плоскость  $z=0$ . На границе раздела произвольной формы должны быть непрерывными нормальная составляющая скорости звука и давление (см., например, [62], [63]). Выражая эти величины через потенциал  $U$ , получим на плоскости  $z=0$  такие граничные условия:

$$\frac{\partial U_1}{\partial N} = \frac{\partial U_2}{\partial N}, \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2. \quad (29)$$

Индексом 1 обозначены величины, относящиеся к верхнему полупространству, а индексом 2 — к нижнему. Для плоской поверхности раздела  $\partial/\partial N = -\partial/\partial z$ .

С помощью граничных условий (29) рассмотрим отражение и преломление плоской волны на границе двух полупространств. Пусть на границу падает плоская волна

$$U_0 = A \exp [i(q_{1x}x + q_{1y}y + q_{1z}z)]. \quad (30)$$

Отраженную  $U_r$  и преломленную  $U_2$  волны будем искать в виде

$$\begin{aligned} U_r &= V A \exp [i(q_{1x}x + q_{1y}y + q_{1z}z)], \\ U_2 &= W A \exp [i(q_{2x}x + q_{2y}y + q_{2z}z)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Поле в верхнем полупространстве  $U_1$  является суммой падающего и отраженного полей:

$$U_1 = A \{ \exp [i(q_{1z}z + q_{1x}x + q_{1y}y)] + V \exp [i(q_{1z}z + q_{1x}x + q_{1y}y)] \}. \quad (32)$$

Так как  $U_1$  и  $U_2$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, то для  $q_1$  и  $q_2$  должно выполняться соотношение (23) с заменой правой части на  $k_1^2$  и  $k_2^2$  соответственно, где  $k_{1,2} = \frac{\omega}{s_{1,2}}$ .

Для дальнейшего удобно перейти к сферической системе координат, положив (рис. 2)

$$\begin{aligned} q_{1x} &= k_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & q_{1y} &= k_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, & q_{1z} &= -k_1 \cos \vartheta_1, \\ q'_{1x} &= k_1 \sin \vartheta'_1 \cos \varphi'_1, & q'_{1y} &= k_1 \sin \vartheta'_1 \sin \varphi'_1, & q'_{1z} &= k_1 \cos \vartheta'_1; \\ q_{2x} &= k_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, & q_{2y} &= k_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, & q_{2z} &= -k_2 \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta'_1$  и  $\vartheta_2$  — углы между нормалью к поверхности и векторами  $q_1$ ,  $q'_1$  и  $q_2$ ;  $\varphi_1$ ,  $\varphi'_1$  и  $\varphi_2$  — азимутальные углы. Подставив  $U_1$  и  $U_2$  в граничные условия (29), получим

$$\left. \begin{aligned} q_{1z} e^{iq_1 \perp r} + q_{1z} V e^{iq'_1 \perp r} &= q_{2z} W e^{iq_2 \perp r}; \\ \rho_1 (e^{iq_1 \perp r} + V e^{iq'_1 \perp r}) &= \rho_2 W e^{iq_2 \perp r}, \\ r &= \{x, y\}, \quad q_{\perp} = \{q_x, q_y\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Равенства (34) должны выполняться при всех  $r$ . Это возможно, если  $q_{1\perp} = q'_{1\perp} = q_{2\perp}$ , или, что одно и то же,

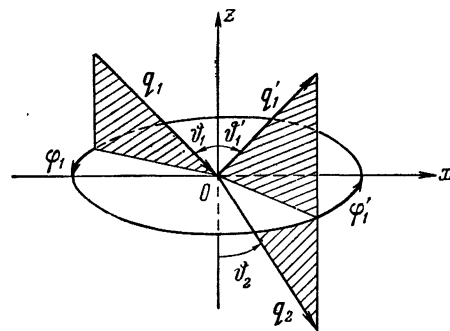


Рис. 2.

$$\vartheta_1 = \vartheta'_1, \quad \varphi_1 = \varphi'_1,$$

$$k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2 \quad \text{или}$$

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{s_1}{s_2}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что угол падения равен углу отражения и волновые векторы волн падающей, преломленной, отраженной и нормаль к поверхности лежат в одной плоскости. Синус угла падения относится к синусу угла преломления как фазовые скорости волн в верхнем и нижнем полупространствах. Эти положения называются законами Снеллиуса. Решая систему (34), можно также определить коэффициент отражения  $V$  и коэффициент прохождения  $W$ :

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{(\rho_2/\rho_1) \cos \vartheta - \sqrt{(s_1/s_2)^2 - \sin^2 \vartheta}}{(\rho_2/\rho_1) \cos \vartheta + \sqrt{(s_1/s_2)^2 - \sin^2 \vartheta}}, \\ W &= \frac{2 \cos \vartheta}{(\rho_2/\rho_1) \cos \vartheta + \sqrt{(s_1/s_2)^2 - \sin^2 \vartheta}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Ввиду того, что поле любого источника можно представить в виде суперпозиции плоских волн, формулы (35) и (36) решают задачу о распространении звука в рассматриваемой среде в общем случае.

Мы ограничимся исследованием поля точечного источника, находящегося в верхнем полупространстве. Пусть единичный точечный источник находится в точке  $\{0, 0, z_0\}$  (рис. 3). Как было

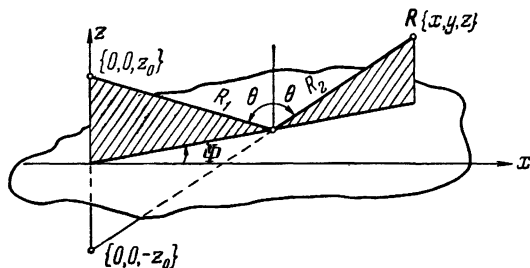


Рис. 3.

показано выше, поле такого источника может быть записано в виде суперпозиции плоских волн [см. (24)] с амплитудой

$$A = -\frac{i}{2\pi q_z} e^{iq_z z_0}$$

(мы рассматриваем лишь волны, идущие от источника к поверхности раздела). Поле отраженной плоской волны определяется формулой (31). Интегрируя по всем плоским волнам и переходя от переменных  $q_x, q_y$  к переменным  $\vartheta, \varphi$ , найдем отраженное поле точечного источника

$$U_r = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \{ ik_1 [x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + (z + z_0) \cos \vartheta] \}. \quad (37)$$

Формула (37) справедлива и в том случае, когда  $V$  зависит не только от  $\vartheta$ , но и от  $\varphi$ , как это имеет место для плоскости с анизотропными акустическими свойствами. В формуле (37) можно произвести интегрирование по  $\varphi$ . После интегрирования по  $\varphi$  и преобразования контура интегрирования по  $\vartheta$  (подробнее см. [63]) выражение для отраженного поля примет вид

$$U_r = \frac{ik}{2} \int_{-\pi/2 + i\infty}^{\pi/2 - i\infty} H_0^{(1)}(k_1 r \sin \vartheta) e^{ik(z + z_0) \cos \vartheta} V(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (38)$$

Здесь  $H_0^{(1)}$  — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Если особенности  $V(\theta)$  несущественны, то вычисление  $U_r$  для больших  $R$  с помощью метода перевала приводит к такому выражению:

$$U_r = V(\theta) \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} + o\left(\frac{1}{k_1 R_1}\right), \quad (39)$$

где  $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{z + z_0}{R_1}$ . Если  $V$  зависит также от  $\varphi$ , то в (39)  $V(\theta)$  заменяется на  $V(\theta, \Phi)$ , где  $\operatorname{tg} \Phi = y/x$ . Угол  $\theta$  является углом зеркального отражения. Формула (39) обычно называется «отражательной». Заметим, что при расчете мы не детализировали явный вид  $V(\theta, \varphi)$ . Членами порядка  $(k_1 R_1)^{-2}$  можно пренебречь, если полное поле  $U_1$  их существенно превышает. В монографии [63] была проведена соответствующая оценка:

$$k(z + z_0) \gg \left| \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 - 1}}{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 - 1}\right]^2} \right|. \quad (40)$$

При выводе формулы (39) предполагалось, что коэффициент отражения не имеет особенностей вблизи углов зеркального отражения. Если такие особенности есть, то метод перевала надо несколько видоизменить (см., например, [63]).

В качестве примера рассмотрим отражение звука от плоской поверхности раздела двух полупространств. Из формулы (36) следует, что коэффициент отражения имеет полюс при угле  $\theta = \theta_p$ :

$$\cos \theta_p = - \sqrt{\frac{(s_1/s_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}. \quad (41)$$

Угол зеркального отражения может оказаться близким к полюсу, если распространение является скольльзящим ( $\theta \simeq \pi/2$ ) и выполнены следующие условия: плотность в среде 2 много больше плотности в среде 1 ( $\rho_2 \gg \rho_1$ ), скорость звука в среде 2 много меньше скорости звука в среде 1 ( $s_1 \gg s_2$ ) и  $\rho_2 s_2 \gg \rho_1 s_1$ . При этих допущениях

$$\cos \theta_p = -\eta \ll 1. \quad (42)$$

Здесь через  $\eta$  обозначен поверхностный импеданс  $*$ ), определяемый равенством

$$\eta = \frac{\rho_1 s_1}{\rho_2 s_2}. \quad (43)$$

\*) Здесь и в дальнейшем под поверхностным импедансом подразумевается отношение акустического импеданса второй среды к импедансу первой, так что поверхностный импеданс абсолютно жесткой поверхности ( $\rho_2 s_2 \rightarrow \infty$ ) равен нулю, а абсолютно мягкой ( $\rho_2 s_2 \rightarrow 0$ ) — бесконечности.

Вычисление интеграла в формуле (38) с помощью модифицированного метода перевала (см., например, [63]) приводит к следующему выражению для отраженного поля:

$$U_r = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} (1 + \eta \sqrt{8k_1 R_1}) e^{i\frac{\pi}{4} - s^2} \int_s^{i\infty} e^{t^2} dt. \quad (44)$$

Через  $s^2$  обозначено так называемое численное расстояние

$$s^2 = \frac{ik_1 R_1}{2} \eta^2 [1 + (\pi/2 - \theta) \eta^{-1}]^2. \quad (45)$$

Если источник находится на границе, то полное поле в верхнем полупространстве можно записать так:

$$U_1 = 2 \frac{e^{ikR}}{R} (1 + \eta \sqrt{2k_1 R}) e^{i\pi/4 - s^2} \int_s^{i\infty} e^{t^2} dt. \quad (46)$$

Выражение в круглых скобках в формуле (46) называется функцией ослабления и обозначается  $\mathcal{Y}(s)$ . Свойства формул (44) и (46) подробно исследованы в монографии [1]. Рассмотрим некоторые из них.

При больших численных расстояниях ( $|s| \gg 1$ )

$$U_r = \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\psi - \eta}{\psi + \eta}. \quad (47)$$

Здесь введен угол скольжения  $\psi = \pi/2 - \theta$ . Отметим, что формула (47) совпадает в сделанных предположениях с формулой (39). Действительно, как видно из (36), при  $s_1 \gg s_2$  коэффициент отражения имеет следующий вид:

$$V(\theta) = \frac{\cos \theta - \eta}{\cos \theta + \eta} = \frac{\sin \psi - \eta}{\sin \psi + \eta}. \quad (48)$$

При  $\psi \rightarrow 0$  ( $\sin \psi \approx \psi$ ) формулы (39) и (47) совпадают. Это значит, что хотя они выведены при разных предположениях, есть такая область углов, где эти формулы переходят одна в другую. Таким образом, формула (38) с коэффициентом отражения (48) и вытекающие из нее формулы (39), (43), (46) описывают звуковое поле во всем верхнем полупространстве, если импеданс мал.

Приведем асимптотику  $\mathcal{Y}(s)$  при  $\psi = 0$ :

$$\mathcal{Y}(s) = \begin{cases} 1 + i\sqrt{\pi} s & \text{при } |s| \ll 1, \\ -\frac{1}{2s^2} & \text{при } |s| \gg 1. \end{cases} \quad (49)$$

Заметим, что критерий (40) при  $|\eta| \ll 1$  можно записать так:

$$k_1(z + z_0) \gg \left| \frac{\eta}{(\cos \theta + \eta)^2} \right|. \quad (50)$$

Ограничимся отраженной волной. Преломленная волна может быть исследована аналогично.

В ряде случаев представляет интерес поле только в верхнем полупространстве. В связи с этим желательно рассмотреть возможность исследования распространения звука в сплошной среде, состоящей из двух или нескольких областей с различными акустическими свойствами, путем сведения к внешней задаче для той области, в которой ищется поле.

Одна такая возможность очевидна. Если задача решается для верхнего полупространства, а плотность нижнего полупространства равна нулю, то второе из граничных условий (29) примет вид

$$U_1 = 0. \quad (51)$$

Поверхность, на которой выполняется это граничное условие, называется абсолютно мягкой. Из (36) следует, что коэффициент отражения от абсолютно мягкой плоской поверхности равен  $-1$ . Из (2) следует, что  $\mathcal{G}_-$  является функцией Грина полупространства, ограниченного абсолютно податливой плоскостью.

Задача сводится к внешней также при выполнении неравенства  $s_2 \ll s_1$ . Покажем это. Рассмотрим сначала плоскую волну. Пользуясь последним из равенств (35), угол преломления можно выразить через угол падения и скорости  $s_1$  и  $s_2$ :

$$\sin \vartheta_2 = \frac{s_2}{s_1} \sin \vartheta_1. \quad (52)$$

При  $s_2 \ll s_1$  угол  $\vartheta_2$  будет близок к нулю, каким бы ни был угол падения  $\vartheta_1$ . Этим обстоятельством мы воспользуемся для вывода граничного условия для  $U_1$ . Поделив первое равенство на второе в формуле (29), получим

$$\frac{1}{\rho_1 U_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2 U_2} \frac{\partial U_2}{\partial z}. \quad (53)$$

Подставив в (53)  $U_2$  из (31) и учитывая, что в силу малости угла  $\vartheta_2$ ,  $q_{2z} \approx k_2$ , преобразуем равенство (53)

$$\frac{1}{\rho_1 U_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{ik_2}{\rho_2}. \quad (54)$$

Разделим и умножим (54) на  $k_1$ , а также воспользуемся определением импеданса. После несложных преобразований граничное

условие примет следующий вид:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = -ik_1 \eta U_1. \quad (55)$$

Соотношение (55) впервые было получено Леонтовичем [67]. Граничное условие (55) остается в силе и для криволинейной поверхности, если выполнено неравенство  $k_2 \mathcal{R} \gg 1$  ( $\mathcal{R}$  — радиус кривизны поверхности раздела). При этом под  $\partial/\partial z$  нужно понимать дифференцирование по нормали к поверхности раздела. С помощью (55) можно решить задачу об отражении плоских волн от плоскости  $z=0$ . Коэффициент отражения, найденный таким способом, определяется формулой (48) и был получен выше другим путем. Очевидно,  $e^{ikR}/R + U_r$  [ $U_r$  определяется формулой (38) с  $V(\Phi)$  из (48)] есть функция Грина для полупространства с граничным условием Леонтовича на плоскости  $z=0$ .

В связи с граничным условием Леонтовича необходимо оговорить следующее. Мы выводили (55), предполагая, что падающая волна плоская. Однако это условие верно при произвольной форме падающей волны. Это вытекает из следующего рассуждения. Как было показано выше, падающее поле может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн. Каждая из этих волн, преломляясь, в силу (52) и неравенства  $s_2 \ll s_1$  распространяется нормально к поверхности раздела. Очевидно, что суперпозиция плоских волн, нормальных к поверхности раздела, есть плоская волна, нормальная к поверхности раздела, т. е., вне зависимости от характера падающей волны, преломленная волна является плоской и распространяется нормально к поверхности раздела. При выводе (55) также предполагалось отсутствие в спектре падающей волны на поверхности раздела сильно неоднородных плоских волн, для которых  $\sin \Phi_1$  может быть и не мал.

Предельным случаем поверхности, на которой выполняется граничное условие Леонтовича, является абсолютно жесткая поверхность с импедансом, равным нулю. Коэффициент отражения от абсолютно жесткой поверхности равен 1. Из (7) вытекает, что  $\mathcal{G}_+$  есть функция Грина волнового уравнения для полупространства, ограниченного абсолютно жесткой плоскостью.

В заключение параграфа приведем выражение для потока звуковой энергии, усредненное за период колебаний:

$$I = -\frac{i\omega\rho}{4} (U \nabla U^* - U^* \nabla U). \quad (56)$$

(Звездочка означает комплексное сопряжение.) Интенсивность излучения звука  $J$  в направлении орта  $\mathbf{v}$  равна

$$J(\mathbf{v}) = -\frac{i\omega\rho}{4} \{U(\mathbf{v}\nabla)U^* - U^*(\mathbf{v}\nabla)U\}. \quad (57)$$

## § 2. Распространение электромагнитных волн

Электромагнитное поле в среде характеризуется совокупностью четырех векторов:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , зависящих от координат и времени. Вектор  $\mathbf{E}$  называется вектором напряженности электрического поля,  $\mathbf{H}$ —вектором напряженности магнитного поля,  $\mathbf{D}$ —вектором электрической индукции, и  $\mathbf{B}$ —вектором магнитной индукции. Векторы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi (\rho + \rho_{\text{ст}}), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $c$ —скорость света в вакууме,  $\mathbf{j}$ —плотность электрического тока в среде,  $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ —плотность электрического тока сторонних источников,  $\rho$ —плотность электрических зарядов в среде,  $\rho_{\text{ст}}$ —плотность электрических зарядов сторонних источников. Из уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

Аналогичное уравнение может быть написано для стороннего тока и сторонней плотности заряда. Система уравнений (1) является неопределенной, так как содержит больше неизвестных, чем уравнений. В связи с этим ее нужно дополнить так называемыми материальными уравнениями, связывающими векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  с  $\mathbf{H}$ . В теории рассеяния волн на неровной поверхности будем считать поверхность не ферромагнитной и полагать  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Связь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$  удобнее записать не для самих векторов, а для их компонент Фурье по времени. В дальнейшем мы будем считать, как и в предыдущем параграфе, что зависимость от времени всех величин, входящих в уравнения Максвелла, определяется множителем  $e^{-i\omega t}$  ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$  и т. д.). Предположим, что между  $\mathbf{D}_\omega$ ,  $\mathbf{j}_\omega$  и  $\mathbf{E}_\omega$  имеет место локальная линейная связь

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega; \quad \mathbf{j}_\omega = \sigma(\omega) \mathbf{E}_\omega. \quad (3)$$

Величина  $\varepsilon(\omega)$  называется диэлектрической проницаемостью, а  $\sigma(\omega)$ —проводимостью.  $\varepsilon(\omega)$  и  $\sigma(\omega)$  являются электродинамическими характеристиками среды. Вообще говоря,  $\varepsilon(\omega)$  и  $\sigma(\omega)$  могут зависеть не только от частоты, но и от координат, однако здесь такой случай рассматриваться не будет. Необходимо отметить, что если уравнения Максвелла (1) являются универсаль-



ными, то материальные уравнения определяются свойствами среды. Электродинамические свойства сред, рассматриваемых в теории распространения электромагнитных волн, хорошо описываются материальными уравнениями (3).

С учетом гармонической зависимости векторов поля от времени и материальных уравнений (3) уравнения Максвелла можно переписать, опуская для краткости индекс  $\omega$  у всех величин:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) &= 4\pi \rho_{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где через  $\varepsilon$  обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon(\omega) + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma(\omega)$ . Для вывода третьего уравнения системы (4) было использовано уравнение непрерывности.

Из уравнений Максвелла можно получить уравнения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  порознь. Так, подставляя  $\mathbf{H}$  из второго уравнения в первое и используя уравнение непрерывности для сторонних токов и зарядов, приходим к такому уравнению для  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -4\pi \frac{i\omega}{c^2} \left( \mathbf{j}_{\text{ст}} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ст}} \right), \quad (5)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$ . Исключив  $\mathbf{E}$  из системы (4), получим уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_{\text{ст}}. \quad (6)$$

В теории распространения электромагнитных волн зачастую удобно использовать вспомогательную величину — вектор Герца  $\mathbf{\Pi}$ . Электрическое и магнитное поля определяются через вектор Герца следующим образом:

$$\mathbf{H} = -ik \sqrt{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}. \quad (7)$$

Подставляя  $\mathbf{H}$  в (6), найдем уравнение, которому удовлетворяет вектор Герца:

$$\Delta \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = -\frac{4\pi i}{\varepsilon \omega} \mathbf{j}_{\text{ст}}. \quad (8)$$

Уравнение для вектора Герца является более удобным, чем уравнения полей, так как его правая часть содержит непосредственно ток, а не его производные. Векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  удовлетворяют

уравнениям, идентичным уравнению (1.3). Следовательно, формулы (1.4) — (1.28), выведенные в § 1 для звука, непосредственно переходят в формулы для электрического, магнитного полей или вектора Герца путем замены  $U \rightarrow E$ ,  $H$ ,  $\Pi$  и соответственно

$$Q \rightarrow \frac{i\omega}{c^2} \left( \mathbf{j}_{\text{ст}} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \mathbf{j}_{\text{ст}} \right), \quad \frac{1}{c} \text{rot } \mathbf{j}_{\text{ст}}, \quad \frac{i}{\varepsilon\omega} \mathbf{j}_{\text{ст}}.$$

Наряду с формулой (1.4) в теории электромагнитного поля применяются следующие эквивалентные ей соотношения (см. [68], [69]):

$$E(\mathbf{R}) = -ik \int_{\mathcal{V}'} \left\{ \mathbf{j}_{\text{ст}}(\mathbf{R}') + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \mathbf{j}_{\text{ст}}(\mathbf{R}') \right\} \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') d\mathbf{R}' - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ ik [\mathbf{N}H] \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) + [[\mathbf{N}E] \nabla] \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) + (\mathbf{N}E) \nabla \mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right\} dr, \quad (9)$$

$$E_i(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{N}] \mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) dr. \quad (10)$$

Здесь  $\mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  — векторная функция Грина, имеющая смысл напряженности магнитного поля, создаваемого диполем с единичным моментом, направленным вдоль  $i$ -й координатной оси, при условии, что поверхность  $\Sigma$  является идеально проводящей. Формулы (9) и (10) удобны тем, что в них не входят нормальные производные от поля.

Вычислим вектор Герца для точечного источника тока, являющегося предельным случаем тока, занимающего малый объем,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \delta(\mathbf{R})$ . Используя формулы (8) и (1.10), получим

$$\Pi = \frac{i \mathbf{j}_0 e^{ikR}}{\varepsilon\omega R}. \quad (11)$$

Величина

$$\mathbf{p} = i \frac{\mathbf{j}_0}{\varepsilon\omega} \quad (12)$$

называется дипольным моментом и аналогична  $\mathbf{d}$  из формулы (1.11).

Перейдем к решению граничных задач. Из уравнений Максвелла на поверхности раздела двух сред 1, 2 с диэлектрическими проницаемостями 1 и  $\varepsilon$  следуют граничные условия (см., например, [70])

$$[\mathbf{N}, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0, \quad (\mathbf{N}, \mathbf{E}_1 - \varepsilon \mathbf{E}_2) = 0, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \quad (13)$$

На границе непрерывны тангенциальные компоненты электрического поля, нормальные компоненты вектора индукции и магнитное поле. Если поверхность раздела плоская, то из граничных условий (13) можно получить некоторые другие эквивалентные

им соотношения. Так, из непрерывности тангенциальных компонент электрического поля и третьего уравнения системы (4) (при  $\rho_{ct} = 0$ ) следует, что при  $z = 0$

$$\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial E_{2z}}{\partial z}. \quad (14)$$

Граничное условие для  $E_z$  на плоской поверхности раздела сразу же следует из второго соотношения (13) и имеет вид

$$E_{1z} = \varepsilon E_{2z}. \quad (15)$$

Для горизонтальной компоненты электрического поля можно таким же образом получить граничные условия

$$E_{1\perp} = E_{2\perp}, \quad E_{\perp} = \{E_x, E_y\}. \quad (16)$$

Используя связь между полями и вектором Герца, можно получить граничные условия для вектора Герца из граничных условий для полей. Пусть, например, вектор Герца имеет одну лишь, отличную от нуля, компоненту  $\Pi_z$ . Тогда из (13) и (7) вытекает, что граничные условия для  $\Pi_z$  имеют такой же вид, как и граничные условия для  $E_z$ . Если же у вектора Герца есть только горизонтальные компоненты, то для них имеют место граничные условия (16).

С помощью граничных условий (13) — (16) решается задача об отражении и преломлении плоской волны. Аналогично тому, как это делалось для звука, показывается, что и для электромагнитных волн волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости. В качестве этой плоскости выберем плоскость  $\{x, z\}$ . Очевидно, что при этом можно считать поля зависящими только от  $x$  и  $z$ . Из граничных условий (13) тем же способом, что и в § 1, получаются три соотношения, соответствующие законам Снеллиуса (1.35), имеющие такой же вид в электродинамике, как и в акустике. При этом надо помнить, что в электродинамике  $k_1 = \frac{\omega}{c}$ ,  $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$ , следовательно,

$$\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_2 = \sqrt{\varepsilon}, \quad (17)$$

где  $\vartheta_1$  — угол падения,  $\vartheta_2$  — угол преломления. Рассмотрим два случая. Будем считать сначала, что электрическое поле имеет только компоненты, лежащие в плоскости падения,  $E_x$  и  $E_z$ . Такое поле будем называть вертикально поляризованным. Будем искать  $E_{1z}$  и  $E_{2z}$  в виде

$$E_{1z} = A e^{iq_1 x} (e^{iq_1 z^2} + V_B e^{-iq_1 z^2}), \quad E_{2z} = A W_B e^{i(q_1 x + q_2 z^2)}. \quad (18)$$

Сравнивая граничные условия (1.29) с (15) и (16), видим, что граничные условия для  $U$  переходят в граничные условия для  $E_z$ ,

если  $\rho_1/\rho_2$  заменить на  $\varepsilon$ . Коэффициенты отражения и прохождения для вертикально поляризованной волны можно получить непосредственно из (1.36), заменив  $\rho_2/\rho_1$  на  $\varepsilon$  и отношение скоростей звука  $s_1/s_2$  на  $\sqrt{\varepsilon}$ . Правомерность этой замены следует из того, что для акустики  $k_2/k_1 = s_1/s_2$ , а для электродинамики  $k_2/k_1 = \sqrt{\varepsilon}$ . Окончательно имеем

$$V_B = \frac{\varepsilon \cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}, \quad W_B = \frac{2 \cos \vartheta}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}. \quad (19)$$

Совершенно таким же образом можно получить коэффициенты  $V_\Gamma$  и  $W_\Gamma$  для волны с вектором  $E$ , перпендикулярным к плоскости падения. Такая плоская волна называется горизонтально поляризованной. Будем искать компоненту  $E_y$  в виде (18) с заменой  $V_B \rightarrow V_\Gamma$ ,  $W_B \rightarrow W_\Gamma$ . Сравнивая (16) с (1.29), видим, что  $V_\Gamma$  и  $W_\Gamma$  получаются из (1.36), если в (1.36) положить  $\rho_2 = \rho_1$ ,  $s_1 = s_2 \sqrt{\varepsilon}$ . Коэффициенты отражения и прохождения для горизонтально поляризованной волны имеют следующий вид:

$$V_\Gamma = \frac{\cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}};$$

$$W_\Gamma = \frac{2 \cos \vartheta}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}. \quad (20)$$

Заметим, что если рассматривать в качестве верхнего полупространства (где находится источник падающего поля  $E^0$ ) не вакуум, а среду с диэлектрической постоянной  $\varepsilon_1$ , то коэффициенты отражения и прохождения будут иметь тот же вид (19), (20), только вместо  $\varepsilon$  в эти формулы следует подставить  $n^2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_2$  — диэлектрическая проницаемость нижнего полупространства).

С помощью формул (19) и (20) может быть решена задача и об отражении произвольно поляризованной волны  $E^0$ , если последнюю представить в виде суммы полей с вертикальной и горизонтальной поляризацией — из-за поперечности электромагнитных волн такое представление, как нетрудно убедиться, единственно. Используя затем для горизонтальной поляризации коэффициент  $V_\Gamma$ , а для вертикальной  $V_B$ , получаем после несложных векторных преобразований амплитуды отраженных полей  $E^r$  и  $H^r$  в виде

$$E^r = V_\Gamma E^0 - \frac{(E^0 N)}{\sin^2 \vartheta} \{ (V_B \cos 2\vartheta + V_\Gamma) N + \cos \vartheta (V_B + V_\Gamma) \alpha \}; \quad (21)$$

$$H^r = V_B H^0 - \frac{(H^0 N)}{\sin^2 \vartheta} \{ (V_\Gamma \cos 2\vartheta + V_B) N + \cos \vartheta (V_B + V_\Gamma) \alpha \}. \quad (22)$$

Здесь через  $\alpha$  обозначен единичный вектор в направлении распространения падающей волны  $E^0$ ,  $N$  — нормаль к отражающей

поверхности,  $\vartheta$  — угол падения ( $\cos \vartheta = -N\alpha$ ). Для преломленных плоских волн  $E^{(2)}$  и  $H^{(2)}$  имеем аналогичные соотношения:

$$E^{(2)} = W_r E^0 - \frac{(NE_0)}{n \sin^2 \vartheta} \{ [nW_r - (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta) W_B] N + \\ + (W_r n \cos \vartheta - W_B \cos \vartheta_2) \alpha \}; \quad (23)$$

$$H^{(2)} = W_B H^0 - \frac{(NH_0)}{\sin^2 \vartheta} \{ [W_B - nW_r (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta)] N + \\ + (W_B \cos \vartheta - nW_r \cos \vartheta_2) \alpha \}; \quad (24)$$

здесь  $n = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ , а  $\vartheta_2$  — угол преломления, связанный с углом падения соотношением (17)  $\sin \vartheta = n \sin \vartheta_2$ . Формулы (21) — (24) удобны с той точки зрения, что входящие в них величины не зависят от выбранной системы координат. Эта инвариантность позволяет выразить векторные амплитуды отраженных и преломленных волн через амплитуду падающего поля  $E^0$  в тензорной форме:

$$E_i^{(r)} = T_{ik}^{(e)} E_k^0, \quad E_i^{(2)} = \tilde{T}_{ik}^{(e)} E_k^0, \quad (25)$$

где

$$T_{ik}^{(e)} = V_r \delta_{ik} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \{ (V_B \cos 2\vartheta + V_r) N_i N_k + \cos \vartheta (V_B + V_r) \alpha_i N_k \}, \quad (26)$$

$$\tilde{T}_{ik}^{(e)} = W_r \delta_{ik} - \\ - \frac{1}{n \sin^2 \vartheta} \{ [nW_r - (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta) W_B] N_i N_k + \\ + (W_r n \cos \vartheta - W_B \cos \vartheta_2) \alpha_i N_k \}, \quad (27)$$

$\alpha_i$  и  $N_k$  — компоненты векторов  $\alpha$  и  $N$  в произвольной системе декартовых координат,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Аналогично, для магнитного поля

$$H_i^{(r)} = T_{ik}^{(h)} H_k^0, \quad H_i^{(2)} = \tilde{T}_{ik}^{(h)} H_k^0, \quad (28)$$

где

$$T_{ik}^{(h)} = V_B \delta_{ik} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \{ (V_r \cos 2\vartheta + V_B) N_i N_k + \\ + \cos \vartheta (V_B + V_r) \alpha_i N_k \}; \quad (29)$$

$$\tilde{T}_{ik}^{(h)} = W_B \delta_{ik} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \{ [W_B - (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_2 \cos \vartheta) W_r] N_i N_k + \\ + (W_B \cos \vartheta - nW_r \cos \vartheta_2) \alpha_i N_k \}. \quad (30)$$

В частности, для идеально проводящей поверхности ( $|n| \rightarrow \infty$ )  $V_r = -1$ ,  $V_B = 1$ , а  $W_r = W_B = 0$ , так что из (26) — (30) получаются простые и удобные, в силу своей инвариантности, формулы

$$E^{(r)} = -E^0 + 2N(E^0 N), \quad H^{(r)} = H^0 - 2N(H^0 N) \quad (31)$$

и

$$T_{ik}^{(h)} = -T_{ik}^{(e)} = \delta_{ik} - 2N_i N_k. \quad (32)$$

В нижнее полупространство поле при этом, естественно, не проникает:  $H^{(2)} = E^{(2)} = 0$ . Из этих соотношений следует, что на идеально проводящей поверхности удваивается нормальная компонента электрического поля,

$$E^{(1)} = E^{(r)} + E^{(0)} = 2N(NE^{(0)}), \quad [NE^{(1)}] = 0, \quad (33)$$

и тангенциальная компонента магнитного поля  $H^{(1)} = H^{(r)} + H^{(0)}$ ,

$$[NH^{(1)}] = 2[NH^{(0)}], \quad (NH^{(1)}) = 0. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь вектор Герца для поля, излучаемого вертикальным точечным током, находящемся в полупространстве 1. В этом случае вектор Герца будет иметь единственную компоненту  $\Pi_z$ . Эта задача полностью аналогична задаче об излучении звука точечным излучателем. Решение этой задачи дается формулой (1.38), в которую вместо  $V(\theta)$  нужно подставить  $V_z$  из (19). (Так как граничные условия для  $E_z$  и  $\Pi_z$  совпадают, то совпадают и коэффициенты отражения и прохождения.)

Очевидно, что для  $\Pi_z$  справедлива и формула (1.39), причем критерий ее применимости запишется так:

$$k(z+z_0) \gg \left| \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon-1}}{(\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon-1})^2} \right|. \quad (35)$$

Коэффициент отражения  $V_z$  имеет полюс в точке  $\theta_p$ :

$$\cos \theta_p = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon+1}}. \quad (36)$$

При  $\theta \simeq \pi/2$  и  $|\varepsilon| \gg 1$  полюс близок к углу зеркального отражения. Введя импеданс  $\eta$  по формуле

$$\eta = 1/\sqrt{\varepsilon}, \quad (37)$$

мы снова приходим к (1.42). Очевидно, что  $\Pi_z$  описывается формулами (1.44), (1.46), (1.47).  $V_z$  может быть приведен к виду (1.48) и т. д.

В электродинамике также в определенных случаях граничная задача сводится к внешней. Как уже было показано, для идеально проводящей поверхности имеет место соотношение (33), которое можно рассматривать как граничное условие.

Из (33) и уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \varepsilon E = 0$  следует, что на плоской поверхности раздела

$$\partial E_{1z}/\partial z = 0. \quad (38)$$

Из (7) также вытекает, что условие (33) имеет место также для  $\Pi$ , а условие (38) — для  $\Pi_z$ . Если излучатель является точечным

источником, находящимся в точке  $R'$  с дипольным моментом  $p$ , то, по аналогии со звуком, можно написать для  $\Pi$

$$\Pi_{x, y}(R) = p_{x, y} \mathcal{G}_-(R, R'); \quad \Pi_z(R) = p_z \mathcal{G}_+(R, R'). \quad (39)$$

Задача о распространении электромагнитных волн может быть приближенно сведена к внешней при  $|\varepsilon| \gg 1$ .

Из (17) видно, что, вне зависимости от величины  $\vartheta_1$ , при  $|\varepsilon| \gg 1$   $\vartheta_2 \simeq \pi/2$ , т. е. при любом угле падения преломленная плоская волна распространяется нормально к поверхности. Отсюда, как было показано в предыдущем параграфе, следует, что сделанное утверждение имеет место при любой форме падающей волны. В силу сказанного преломленная волна имеет вид

$$E_2 = E_2(0) e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} z}, \quad H_2 = H_2(0) e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} z}, \quad (40)$$

где через  $E_2(0)$  и  $H_2(0)$  обозначены значения поля при  $z=0$ . Подставив  $E_2$  и  $H_2$  из (40) и  $j_{ct}=0$  в первое из уравнений (4), получим

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [NH_2]; \quad (41)$$

умножив это уравнение векторно на  $N$ , будем иметь равенство

$$[NE_2] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [N[NH_2]]. \quad (42)$$

Это соотношение имеет место во всем нижнем полупространстве, в том числе и на поверхности  $z=0$ . В силу точных граничных условий (13) тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей непрерывны на границе, вследствие чего в (42) можно заменить  $[NE_2]$  и  $[NH_2]$  на  $[NE_1]$  и  $[NH_1]$ . Окончательно на плоскости раздела получим (граничное условие Леонтовича)

$$[NE_1] = \eta [N[NH_1]]. \quad (43)$$

Отсюда можно вывести граничное условие для  $E_{1z}$ . Для этого нужно переписать (43) в компонентах и с помощью уравнений Максвелла исключить  $H_1$ ,  $E_{1x}$  и  $E_{1y}$  (подробнее см. [1]). Граничное условие для  $E_{1z}$  имеет вид

$$\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = -ik\eta E_{1z}. \quad (44)$$

Аналогичное соотношение должно выполняться и для  $\Pi_{1z}$ .

При выполнении граничного условия Леонтовича (43) на плоскости  $z=0$ , вектор Герца для вертикального единичного точечного тока (слагаемое, соответствующее отраженному полю) определяется формулой (1.38) с  $V(\theta)$  из (1.48).

В заключение приведем без вывода некоторые формулы, необходимые для дальнейшего. Нам понадобится выражение для вектора Герца единичного точечного тока, расположенного над сферой (см., например, [1]), на которой выполняются граничные условия Леонтовича. Будем считать, что ток направлен по радиусу сферы. Точка наблюдения и точка приема находятся невысоко над сферой. В этом случае вектор Герца имеет единственную компоненту, направленную вдоль радиуса сферы,

$$\Pi_{\rho} = Y(x) \frac{e^{ik\mathcal{D}}}{\mathcal{D}}, \quad (45)$$

$$Y(x) = 2\sqrt{i\pi x} \sum_n \frac{e^{ikxt_n}}{t_n - q^2} \cdot \frac{\mathfrak{w}(t_n - h_1) \mathfrak{w}(t_n - h_2)}{\mathfrak{w}(t_n)}. \quad (46)$$

Здесь  $\mathcal{D}$  — расстояние по дуге большого круга между проекциями на сферу источника и точки наблюдения,  $x = \left(\frac{k}{2\mathcal{R}^2}\right)^{1/3} \mathcal{D}$ ,  $h_{1,2} = = kz_{1,2} \sqrt{\frac{2}{k\mathcal{R}}}$ ,  $q = i\eta \sqrt[3]{\frac{k\mathcal{R}}{2}}$ ,  $\mathcal{R}$  — радиус сферы,  $z_{1,2}$  — высота источника и точки наблюдения соответственно,  $\mathfrak{w}$  — функции Эйри,  $t_n$  — корни уравнения  $\frac{d^2\mathfrak{w}(t)}{dt^2} - q^2\mathfrak{w}(t) = 0$ ;  $Y(x)$  обычно называют функцией ослабления для сферы (см. [73], [1]).

Средний по периоду поток электромагнитной энергии  $I$  определяется вектором Пойнтинга

$$I = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [E, H^*] \quad (47)$$

(\* обозначает комплексное сопряжение).

Интенсивность электромагнитного поля  $J(\mathbf{v})$ , рассеянного в направлении орта  $\mathbf{v}$ , можно записать так:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{v} [EH^*]). \quad (48)$$



СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА  
ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Решение волнового уравнения при наличии криволинейных границ или поверхностей раздела сред с различными акустическими ( $\rho$  и  $s$ ) или электродинамическими ( $\epsilon$ ) параметрами является, как правило, очень сложной задачей. Даже в простейших случаях дифракции на клине, цилиндре или шаре (см. [71] — [73]) получение точного решения связано с довольно тонкими математическими вопросами. Точные же решения, полученные для более сложных, но периодических поверхностей, имеют вид отношения двух детерминантов бесконечного порядка (см. [74] — [76]). Только в некоторых предельных случаях из них получаются обозримые результаты, обычно совпадающие с результатами приближенных вычислений и позволяющие установить границы применимости последних. В связи с этим роль приближенных методов в теории рассеяния на поверхности со сложным профилем чрезвычайно велика. Если же не рассматривать периодических поверхностей (подробный обзор литературы и основные результаты можно найти в работах [77] — [79]), то приближенные методы являются единственными способами решения широкого круга задач о распространении волн.

Дело в том, что в природных условиях фактически никогда не приходится иметь дела с периодическими поверхностями, а даже небольшие нарушения периодичности приводят к качественно новым явлениям: смазыванию дифракционных максимумов, исчезновению скользких спектров и т. д. Кроме того, в большинстве встречающихся на практике случаев нет необходимости в выяснении тонкой структуры рассеянного поля, а оказывается достаточным знание некоторых параметров отраженного сигнала, усредненных по целому классу поверхностей и отражающих объектов. Поэтому в последнее время широкое распространение получил статистический подход к решению задач дифракции волн на неровной поверхности [1], [80] — [82].

Прежде чем переходить к решению собственно задач рассеяния, дадим краткое описание свойств статистически неровных поверхностей и случайных волновых полей.

### § 3. Статистически неровные поверхности

1. Рассмотрим поверхность, уравнение которой можно записать в виде функции  $z = \zeta(x, y, t)$  трех переменных — двух пространственных координат  $x, y$  и времени  $t$ . Для простоты будем в дальнейшем предполагать, что функция  $\zeta(x, y, t)$  — однозначная и достаточно гладкая, т. е. нужное число раз дифференцируемая по всем аргументам. Волновое поле, рассеянное на такой поверхности, будет, конечно, функционалом от  $\zeta$ , но отыскание этой функциональной связи (т. е. решение задачи дифракции) является в общем случае еще не решенной и вряд ли разрешимой в будущем проблемой.

К счастью, во многих практически важных случаях интерес представляют не сами решения, а средние характеристики рассеянного поля для некоторого ансамбля отражающих поверхностей. Под ансамблем здесь понимается совокупность поверхностей с более или менее широким набором общих свойств. Например, форма какого-нибудь ограниченного участка поверхности моря в течение конечного промежутка времени может быть, в принципе, описана довольно сложной функцией координат и времени. Но решение задачи о рассеянии волн (акустических или электромагнитных) только на этом участке моря не имеет никакой практической ценности, даже если бы это решение можно было бы построить. Интерес представляют специфические характеристики (свойства) этого решения, относящиеся к определенному состоянию моря вообще, независимо от конкретного вида поверхности в данном месте и в данное время. Иначе говоря, ансамбль поверхностей в этом случае удобно представить в виде совокупности всех форм морской поверхности, возможных при заданных внешних «макроскопических» условиях: глубина моря, направление, сила и продолжительность действия ветра и т. д.

То же самое можно сказать и о поверхности, имеющей искусственное происхождение. Поверхность металлической детали, например, даже после сколь угодно тщательной обработки остается неровной. После одинаковой технологической обработки (одни и те же инструменты, условия резания и шлифовки) получаются похожие поверхности, имеющие одинаковые статистические свойства, но описываемые совершенно разными уравнениями. В этом нет ничего удивительного, ибо, так же как и в первом примере с морем, невозможно учесть (и воспроизвести) абсолютно все факторы, влияющие на форму поверхности.

Из сказанного становится ясно, что степень различия между поверхностями, входящими в один и тот же ансамбль, может изменяться в широких пределах, в зависимости от того, насколько точно фиксируются внешние факторы и каково их количество. Если бы точно зафиксировать абсолютно все факторы, влияющие на форму поверхности, то элемент случайности был бы полностью

исключен, и все поверхности в ансамбле оказались бы тождественными. Однако совершенно невозможно поставить реальный опыт, в котором полностью контролируются (и воспроизводятся!) все «микроскопические» параметры: структура турбулентного поля скоростей ветра над морем — в первом примере, или количество и форма всех крупинок шлифовального абразива — во втором. Изменение этих неконтролируемых «микроскопических» условий от опыта к опыту и обуславливает различие между отдельными экземплярами поверхности из ансамбля — статистические флуктуации формы поверхности.

Каждую поверхность из ансамбля удобно рассматривать как одну из реализаций некоторой случайной функции или случайной (статистической) поверхности. С точки зрения теории вероятностей случайная поверхность \*)  $\zeta(x, y, t)$  представляет собой трехмерный континуум случайных величин — высот точек поверхности  $\zeta$  с координатами  $x, y$  в момент времени  $t$ . Каждая такая случайная величина статистически полно описывается своим распределением вероятности

$$F_1(z; x, y, t) = \mathbf{M} \{ \Theta [z - \zeta(x, y, t)] \}, \quad (1)$$

где  $\Theta(\alpha > 0) = 1$ ,  $\Theta(\alpha < 0) = 0$ , а  $\mathbf{M}$  означает математическое ожидание. Следовательно,  $F_1(z; x, y, t)$  есть вероятность того, что величина  $\zeta$  в точке  $x, y$  в момент времени  $t$  не превосходит  $z$ . Нетрудно убедиться в том, что  $F_1(z)$  — монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям на бесконечности

$$F_1(-\infty) = 0, \quad F_1(+\infty) = 1$$

при всех значениях остальных аргументов  $x, y, t$ . Наряду с распределением вероятности  $F_1(z)$ , которое называется интегральным, часто бывает удобно пользоваться плотностью вероятности

$$w_1(z, x, y, t) = \frac{\partial}{\partial z} F_1(z; x, y, t). \quad (2)$$

Из определения (2) видно, что  $w_1(z, x, y, t) dz$  имеет смысл вероятности того, что в точке  $x, y$  в момент времени  $t$  высота поверхности будет находиться в интервале  $z < \zeta(x, y, t) \leq z + dz$ . Одномерные функции  $F_1$  или  $w_1$  дают распределение вероятностей высоты в каждой точке  $(x, y, t)$  (эти функции называют иногда одноточечными), но не содержат никакой информации о том, какие значения принимает при этом  $\zeta(x, y, t)$  в соседних точках. Более

\*) Мы используем одно и то же обозначение для случайной функции и ее реализации, так как это нигде в дальнейшем не вызывает недоразумений.

подробное описание случайной поверхности содержится в двумерной интегральной функции распределения

$$F_2(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2) = \mathbf{M} \{ \Theta [z_1 - \zeta(x_1, y_1, t)] \Theta [z_2 - \zeta(x_2, y_2, t)] \}, \quad (3)$$

или в соответствующей плотности вероятности

$$w_2(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F_2(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2). \quad (4)$$

Вообще говоря, статистически полно случайная поверхность описывается заданием  $n$ -мерной ( $n \rightarrow \infty$ ) функции распределения  $F_n(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2; \dots; z_n, x_n, y_n, t_n)$ , имеющей смысл вероятности того, что значения высоты  $\zeta$  в точках  $(x_i, y_i, t_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не превышают величин  $z_i$ . Аналогично определяется  $n$ -мерная плотность вероятности

$$w_n(z_1, x_1, y_1, t_1; \dots; z_n, x_n, y_n, t_n) = \frac{\partial^{(n)}}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_n} F_n(z_1, x_1, y_1, t_1; \dots; z_n, x_n, y_n, t_n). \quad (5)$$

Если задана  $n$ -мерная плотность вероятности, то плотности распределения меньшего порядка определяются из очевидного соотношения (условие согласованности)

$$w_{n-1}(z_1, x_1, y_1, t_1; \dots; z_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(z_1, x_1, y_1, t_1; \dots; z_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}, t_{n-1}; z_n, x_n, y_n, t_n) dz_n \quad (6)$$

и для всех плотностей распределения выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_n w_n(z_1, x_1, y_1, t_1; \dots; z_n, x_n, y_n, t_n) = 1. \quad (7)$$

Знание плотности распределения  $w_n$  позволяет вычислить средние значения любой функции  $f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ , зависящей от высоты поверхности в точках  $x_1, y_1, t_1; \dots; x_n, y_n, t_n$ , по формуле

$$\bar{f}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_n f(z_1, z_2, \dots, z_n) \times w_n(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2; \dots; z_n, x_n, y_n, t_n). \quad (8)$$

Если  $n$ -мерная плотность вероятности  $w_n$  для всех  $n$  не изменяется при любом сдвиге всей совокупности точек  $t_i$ , т. е. при преобразовании  $t_i \rightarrow t_i + \tau$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то случайная функция называется стационарной. Если, кроме того, имеется трансляцион-

ная инвариантность по пространственным переменным, т. е. относительно замены  $x_i - x_i + \xi$  и  $y_i - y_i + \eta$ , то такую случайную функцию (или соответствующую случайную поверхность) называют пространственно однородной. Одномерная функция распределения стационарной и однородной поверхности одинакова для всех точек поверхности и не меняется со временем.

$$w_1(z_1, x_1, y_1, t_1) = w_1(z_1).$$

Двумерная функция распределения при этом зависит только от разностей координат и времени,

$$w_2(z_1, x_1, y_1, t_1; z_2, x_2, y_2, t_2) = w_2(z_1, z_2; x_2 - x_1, y_2 - y_1, t_2 - t_1),$$

а  $w_n$  есть функция от  $x_{i+1} - x_i$ ,  $y_{i+1} - y_i$  и  $t_{i+1} - t_i$ : Если плотности распределения  $w_n$  зависят не только от указанных разностей координат  $x_{i+1} - x_i$ ,  $y_{i+1} - y_i$  и моментов времени  $t_{i+1} - t_i$ , а еще и от аргументов  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $t_i$ , но эта зависимость является намного более медленной, чем от разностных аргументов, то говорят о локальной однородности (или о мгновенной стационарности). В дальнейшем при решении задач рассеяния на статистически неровных поверхностях мы всегда будем предполагать их стационарность и однородность, или, по крайней мере, — локальную стационарность и однородность. Однородная поверхность называется изотропной, если функция распределения зависит только от расстояния между точками  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , т. е. если зависимость от координат входит в  $w_n$  только через параметры  $r_{i+1, i}^2 = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2$ . В противном случае поверхность анизотропная. Простейшим примером анизотропной поверхности является двумерная поверхность  $z = \zeta(x, t)$ . Образующие такой поверхности параллельны оси  $y$  и функции распределения не зависят от  $y$ .

Существует широкий класс случайных функций  $\zeta(x, y, t)$ , называемых эргодическими, для которых среднее по ансамблю всех реализаций может быть заменено усреднением по времени  $t$  (или по пространственным координатам  $x, y$ ) для одной реализации. Нетрудно видеть, что стационарность (однородность) является необходимым свойством эргодических функций времени (координат). Если имеется всего одна реализация случайной поверхности, но заранее известно, что соответствующая случайная функция эргодична, то можно построить весь ансамбль реализаций, рассматривая поведение этой одной реализации в течение достаточно больших интервалов  $T$  времени  $NT < t \leq (N+1)T$  или на достаточно больших площадях:  $nD < x \leq (n+1)D$ ,  $mB < y \leq (m+1)B$  ( $N, n, m$  — целые числа). То обстоятельство, что полученные таким образом реализации определены в конечных интервалах времени и пространства, на самом деле несущественно, так как в силу стационарности и однородности эти интервалы могут быть сделаны

сколь угодно большими, причем статистические свойства заданных на них функций асимптотически не зависят от длины интервала.

Например, для получения статистических характеристик волнового поля, отраженного от взволнованной поверхности моря, нет необходимости в многократном повторении опыта на разных акваториях с одинаковыми внешними (в данном случае метеорологическими) условиями. Предполагая эргодичность морского волнения, можно использовать результаты, полученные на данном участке поверхности, но в разные моменты времени. Совокупность значений измеряемого физического параметра в последовательные моменты времени будет эквивалентна ансамблю реализации соответствующей случайной величины. Точно так же при исследовании отражения волн от шероховатой поверхности искусственного происхождения для получения ансамбля нет необходимости в изготовлении большого количества рассеивающих объектов, а достаточно рассмотреть отражение от различных участков одной и той же реализации. Если соответствующая случайная функция пространственно однородна и эргодична, то результаты, полученные при усреднении по ансамблю поверхностей и по координатам одной реализации, должны совпадать.

2. Для того, чтобы приводимые ниже формулы выглядели несколько проще, рассмотрим статистические свойства цилиндрической (двумерной) не изменяющейся во времени поверхности  $z = \zeta(x)$  с образующими, параллельными оси  $y$ . В тех случаях, когда трехмерность поверхности и зависимость ее формы от времени существенна, будем приводить соответствующие формулы и для стохастической функции трех переменных.

Статистически полно случайная поверхность описывается плотностью распределения  $w_n(z_1, x_1; z_2, x_2; \dots; z_n, x_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Наряду с функциями  $w_n$  можно ввести так называемые условные плотности вероятности. Обозначим через

$$w_n(z_1, x_1; z_2, x_2; \dots; z_{n-1}, x_{n-1} | z_n, x_n)$$

плотность вероятности того, что  $\zeta(x_n) = z_n$ , если  $\zeta(x_1) = z_1$ ,  $\zeta(x_2) = z_2, \dots$ ,  $\zeta(x_{n-1}) = z_{n-1}$ . Тогда плотность вероятности  $w_n(z_1, x_1; z_2, x_2; \dots; z_n, x_n)$  (называемая также безусловной) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} w_n(z_1, x_1; \dots; z_n, x_n) &= \\ &= w_1(z_1, x_1) w_2(z_1, x_1 | z_2, x_2) w_3(z_1, x_1; z_2, x_2 | z_3, x_3) \dots \\ &\dots w_n(z_1, x_1; \dots; z_{n-1}, x_{n-1} | z_n, x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Лишь в некоторых частных случаях можно указать вид  $w_n$  при любом сколь угодно большом  $n$  и тем самым статистически полно описать поверхность. Простейшей моделью такой поверхности может

служить профиль «белого шума» — совершенно случайного процесса, для которого значение  $\zeta$  в каждой точке не зависит от высот в соседних точках, т. е.

$$w_n(z_1, x_1; \dots; z_{n-1}, x_{n-1} | z_n, x_n) = w_1(z_n, x_n),$$

и, в силу (9), многомерная безусловная плотность распределения  $w_n$  представляется в виде произведения одномерных:

$$w_n(z_1, x_1; z_2, x_2; \dots; z_n, x_n) = \prod_{i=1}^n w_1(z_i, x_i). \quad (10)$$

В этом случае величины  $z_i$  называют независимыми, и вся информация о поверхности содержится в одномерной функции  $w_1(z, x)$ . Можно показать, что для такой поверхности нельзя ввести понятия производной или наклона, и применимость этой модели совершенно случайной поверхности к реальным поверхностям весьма ограничена, так как профиль каждой реализации описывается функцией, разрывной в каждой точке.

Если условную плотность распределения можно представить в виде

$$w_n(z_1, x_1; \dots; z_{n-1}, x_{n-1} | z_n, x_n) = w_2(z_{n-1}, x_{n-1} | z_n, x_n), \quad (11)$$

то

$$w_n(z_1, x_1; \dots; z_n, x_n) = w_1(z_1, x_1) \prod_{k=2}^n w_2(z_{k-1}, x_{k-1} | z_k, x_k).$$

В этом случае вся информация о поверхности содержится в двухточечной функции распределения  $w_2$ . Соответствующую случайную функцию называют процессом Маркова первого порядка, или простым марковским процессом. Процесс Маркова  $n$ -го порядка полностью описывается  $n$ -мерной функцией распределения. Рассмотренный выше пример совершенно случайного процесса («белого шума») можно назвать марковским процессом нулевого порядка.

В общем же случае, как правило, мы не имеем полного статистического описания поверхности и вынуждены ограничиваться более грубым ее описанием с помощью набора некоторых величин, усредненных по ансамблю реализаций случайной функции. Рассмотрим некоторые из них.

а. Среднее значение. Простейшей характеристикой случайной поверхности является ее средняя высота над плоскостью  $z=0$ . Обозначая усреднение чертой, получаем

$$\bar{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta w_1(\zeta, x) d\zeta. \quad (12)$$

Для статистически однородной поверхности это среднее не зависит от  $x$ , т. е. в среднем такая поверхность — плоская. Переносом начала координат  $z \rightarrow z - \bar{\zeta}$  всегда можно добиться обращения в нуль среднего значения, что мы в дальнейшем и будем подразумевать, если противное не оговорено особо.

б. Среднеквадратичное отклонение (дисперсия) поверхности относительно среднего уровня:

$$\overline{\zeta^2(x)} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 w_1(\zeta, x) d\zeta. \quad (13)$$

Величина  $\sigma$  характеризует разброс высот поверхности относительно плоскости  $z=0$ . Аналогичным образом определяются и другие одноточечные моменты:

$$\overline{\zeta^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^n w_1(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

в. Корреляционная функция  $W(x_1, x_2)$  определяется как среднее от произведения ординат в двух различных пространственно разнесенных точках поверхности\*):

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \sigma^{-2} \overline{\zeta(x_1) \zeta(x_2)} = \\ &= \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1 \zeta_2 w_2(\zeta_1, x_1; \zeta_2, x_2) d\zeta_1, d\zeta_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Если поверхность чисто случайная, т. е. не содержит регулярной (детерминированной) составляющей, то следует ожидать, что при большом разнесении точек  $x_1$  и  $x_2$  величины  $\zeta(x_1)$  и  $\zeta(x_2)$  станут независимыми, и корреляция между ними исчезнет, — так называемое условие «сильного перемешивания». Таким образом, корреляционная функция должна удовлетворять условию

$$\lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} W(x_1, x_2) = 0.$$

Обратное, вообще говоря, неверно — некоррелированные случайные величины не обязательно независимы.

\*) Иногда вместо  $W(x_1, x_2)$  удобно иметь дело с функцией  $\mathcal{U}(x_1, x_2) = \overline{\zeta(x_1) \zeta(x_2)}$ , которую обычно и называют функцией корреляции; нормированную же функцию  $W = \sigma^{-2} \mathcal{U}$  при этом называют коэффициентом корреляции. Так как, однако, функция  $\mathcal{U}$  нами почти нигде не используется, мы сохраним термин «функция корреляции» за  $W(x_1, x_2)$ .



Для статистически однородных поверхностей \*)

$$W(x_1, x_2) = W(x_1 - x_2).$$

Из (15) следует, что  $W(0) = 1$ , причем легко показать [83], что  $W(0) \geq W(\xi)$ .

г. Корреляцию точек поверхности можно качественно описывать с помощью радиуса (или интервала) корреляции  $l$  — характерного расстояния, на котором корреляционная функция поверхности  $W$  существенно изменяется. Точно так же можно ввести и время корреляции  $\tau_0$ . Конечно, эти величины не являются однозначно определенными — одной и той же корреляционной функции можно сопоставить несколько радиусов (времен) корреляции. Так, например, одно из возможных определений пространственного интервала корреляции  $l$  для двумерных (цилиндрических) неровностей имеет вид

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx. \quad (16a)$$

Для более общего случая трехмерной случайной поверхности  $z = \zeta(x, y)$  аналогично можно ввести радиус корреляции соотношением [84]

$$\pi l^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dx dy. \quad (16b)$$

Если поверхность статистически изотропна, то величина  $l$ , определяемая по этой формуле, является радиусом круга, внутри которого отклонения поверхности от средней плоскости  $z = 0$  коррелируют. Для анизотропных шероховатостей, по аналогии с двумерным случаем, можно ввести радиусы (интервалы) корреляции в каждом направлении, например, вдоль координатных осей:

$$l_x(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dx, \quad l_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dy,$$

причем  $l_x(0)$  и  $l_y(0)$  имеют смысл интервалов корреляции в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно. Усредненный же по всем направлениям радиус корреляции  $l$  равен

$$\pi l^2 = \int_{-\infty}^{\infty} l_x(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} l_y(x) dx. \quad (16b)$$

Легко видеть, что введенные формулами (16a, б, в) радиусы

\*) Если корреляционная функция зависит от разности аргументов, то говорят, что поверхность пространственно однородна (или стационарная — для функций времени) в широком смысле, в отличие от точной однородности и стационарности, определенной выше.

корреляции определяются в основном поведением функции корреляции  $W$  при больших аргументах и, следовательно, совпадают по порядку величины с линейными размерами крупномасштабных, т. е. «самых длинных» неровностей поверхности.

С другой стороны, можно определить радиус корреляции соотношением

$$\left. \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{l^2} \quad (17a)$$

в двумерном случае, или

$$\Delta_0 W(\rho) |_{\rho=0} = \frac{1}{l^2} \quad (17b)$$

в трехмерном. При таком определении  $l$  оказывается связанным с линейными размерами мелкомасштабных шероховатостей поверхности, которые и определяют остроту корреляционной функции при малых аргументах.

Радиусы корреляции, вычисленные по формулам (16) или (17), при одной и той же корреляционной функции могут различаться, вообще говоря, сколько угодно сильно, если поверхность имеет широкий спектр размеров шероховатостей — от очень мелких до очень крупных. В простейших случаях, однако, когда функция корреляции однопараметрическая, при определении радиусов (или времен) корреляции недоразумений не возникает. Например, для гауссовой корреляции поверхности

$$W(\xi, \tau) = \exp[-\xi^2/l^2 - \tau^2/\tau_0^2] \quad (18)$$

величины  $l$  и  $\tau_0$  являются расстоянием и промежутком времени, на котором корреляция убывает в  $e$  раз. В более сложных случаях (трехмерные поверхности, немонотонные функции корреляции и т. д.) мы будем особо оговаривать, что подразумевается под радиусом или временем корреляции.

3. В приложениях весьма важную роль играет преобразование Фурье корреляционной функции  $\widetilde{W}(k)$ , называемое энергетическим спектром (в данном случае пространственным) случайной функции:

$$\widetilde{W}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} W(x) dx, \quad (19a)$$

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}(k) e^{ikx} dk. \quad (19b)$$

Из очевидного свойства четности  $W(-x) = W(x)$  корреляционной функции [см. определение (15)], следует, что  $\widetilde{W}(k)$  — вещественная четная функция:

$$\widetilde{W}^*(k) = \widetilde{W}(-k) = \widetilde{W}(k). \quad (20)$$

Понятие корреляционной функции и спектра легко обобщается на трехмерную изменяющуюся во времени поверхность  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r} = \{x, y\}$ :

$$W(\rho, \tau) = \sigma^{-2} \overline{\zeta(\mathbf{r} + \rho, t + \tau) \zeta(\mathbf{r}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\rho - \omega\tau)}, \quad (21a)$$

$$\widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho \int_{-\infty}^{\infty} d\tau W(\rho, \tau) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\rho)}. \quad (21b)$$

К определению энергетического спектра можно прийти и другим, менее формальным путем. Каждую реализацию случайной поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$  представим в виде совокупности плоских волн с различными частотами  $\omega$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}$ :

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \zeta_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (22a)$$

где  $\zeta_{\mathbf{k}, \omega}$  — случайная комплексная амплитуда плоской волны ( $\zeta_{\mathbf{k}, \omega}^* = \zeta_{-\mathbf{k}, -\omega}$  \*). Корреляционная функция  $W(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$  в соответствии с определением (21a) может быть записана в таком виде:

$$W(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \sigma^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{k}_1 d^2 \mathbf{k}_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \exp \times \\ \times [i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)] \overline{\zeta_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \zeta_{\mathbf{k}_2, \omega_2}^*} \quad (22b)$$

Для того чтобы  $W$  была функцией разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $t_1 - t_2$ , достаточно потребовать  $\delta$ -корреляции случайных величин  $\zeta_{\mathbf{k}, \omega}$  (\*\*):

$$\overline{\zeta_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \zeta_{\mathbf{k}_2, \omega_2}^*} = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \overline{|\zeta_{\mathbf{k}, \omega}|^2}. \quad (22b)$$

\*) Такое разложение, т. е. преобразование Фурье от  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , может и не существовать, так как  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , вообще говоря, не убывает при  $\mathbf{r}, t \rightarrow \infty$ . Поэтому при более строгом подходе нужно вместо (22a) рассматривать ряд Фурье для «усеченной» функции при  $|t| < T$  и  $\mathbf{r} \in D$  и обращающейся в нуль вне этой области, а затем в окончательных формулах переходить к  $T, D \rightarrow \infty$ .

\*\*) Если сначала рассматривать усеченную функцию при  $|t| < T$  и  $\mathbf{r} \in D$ , то  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  принимают дискретные значения и условие (22b) записывается в виде

$$\overline{\zeta_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \zeta_{\mathbf{k}_2, \omega_2}^*} = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\omega_1, \omega_2} \overline{|\zeta_{\mathbf{k}, \omega}|^2}.$$

При непрерывных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  величина  $\overline{|\zeta_{\mathbf{k}, \omega}|^2}$  в формуле (22b) не есть среднее от квадрата модуля  $\zeta_{\mathbf{k}, \omega}$ , хотя бы из соображений размерности. Однако такое обозначение нам представляется удобным, так как переход к дискретным  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  осуществляется в приводимых ниже формулах заменой интегралов суммами,  $\delta$ -функции — символами Кронекера и  $\overline{|\zeta_{\mathbf{k}, \omega}|^2} \rightarrow \overline{|\zeta_{\mathbf{k}, \omega}|^2}$ .

Тогда (22б) примет вид

$$W(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \overline{|\xi_{\mathbf{k}, \omega}|^2} e^{i(\mathbf{k}\rho - \omega\tau)}. \quad (23)$$

Из сравнения (23) с (21а) видно, что  $\tilde{W}(\mathbf{k}, \omega) = \overline{|\xi_{\mathbf{k}, \omega}|^2}$ . Так как энергия каждой гармоники  $(\mathbf{k}, \omega)$  в разложении (22а) пропорциональна квадрату ее амплитуды  $\xi_{\mathbf{k}, \omega}$ , то  $\tilde{W}(\mathbf{k}, \omega)$ , с точностью до постоянного множителя, имеет смысл средней плотности энергии, приходящейся на единичный интервал частот и волновых чисел в разложении случайной поверхности по плоским волнам с частотами  $\omega$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}$ . Из (23) следует, что для стационарной и однородной случайной поверхности эти плоские волны являются независимыми — во всяком случае их амплитуды не коррелируют.

Иногда вместо  $\tilde{W}(\mathbf{k}, \omega)$  удобнее пользоваться энергетическим спектром, нормированным не на единицу, а на  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2(\mathbf{k}, \omega) &= \sigma^2 \tilde{W}(\mathbf{k}, \omega), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}^2(\mathbf{k}, \omega) d^2k d\omega &= \sigma^2, \end{aligned}$$

являющимся преобразованием Фурье от корреляционной функции

$$\mathcal{W}(\rho, \tau) = \overline{\xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r} + \rho, t + \tau)}.$$

Среднее значение  $\bar{\xi}$ , дисперсия  $\sigma$  и корреляционная функция  $\mathcal{W}$  дают лишь очень грубое и приблизительное описание случайной поверхности. Однако существует важный класс случайных функций (поверхностей), называемых нормальными, для полного описания которых достаточно знания лишь этих характеристик. Если образование неровностей поверхности является результатом совместного и аддитивного действия большого числа независимых факторов (а это как раз и имеет место во многих случаях), то отклонения поверхности  $z = \xi(x)$  от среднего уровня  $\bar{\xi} = 0$  распределены по нормальному закону (закону Гаусса) в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей [85]

$$w_1(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} w_2(\xi_1, x_1; \xi_2, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - W^2(x_1, x_2)}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\xi_1^2 - 2W(x_1, x_2)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma^2 [1 - W^2(x_1, x_2)]}\right], \quad (24b) \end{aligned}$$

где  $\zeta_1 \equiv \zeta(x_1)$ ,  $\zeta_2 \equiv \zeta(x_2)$ . Аналогичным образом записываются плотности вероятностей любого порядка [85]:

$$w_n(\zeta_1, x_1; \zeta_2, x_2; \dots; \zeta_n, x_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D\sigma^2} \sum_{i,k=1}^n D_{ik} \zeta_i \zeta_k \right\}, \quad (25)$$

где

$$D = \det \| W_{ik} \|, \quad W_{ik} = W(x_i, x_k) = \overline{\sigma^{-2} \zeta(x_i) \zeta(x_k)},$$

и  $D_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $W_{ik}$  в определителе  $D$ . Из формулы (25) следует, что:

а) линейная суперпозиция нормальных случайных функций также распределена нормально;

б) случайная функция  $\zeta'(x)$ , получающаяся из  $\zeta$  путем линейного (не обязательно алгебраического) преобразования, имеет нормальное распределение. Нормальные случайные поверхности являются эргодическими, если их энергетический пространственно-временной спектр непрерывен (см., например, [86] § 5.10).

Так же как вместо корреляционной функции часто пользуются энергетическим спектром, так и вместо плотностей распределения в некоторых случаях удобнее иметь дело с их преобразованиями Фурье, так называемыми характеристическими функциями:

$$\begin{aligned} f_n(v_1, x_1; v_2, x_2; \dots; v_n, x_n) &= \overline{\exp \left( i \sum_{k=1}^n v_k \zeta_k \right)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_n \exp \times \\ &\times [i(v_1 \zeta_1 + v_2 \zeta_2 + \dots + v_n \zeta_n)] w_n(\zeta_1, x_1; \dots; \zeta_n, x_n). \end{aligned} \quad (26)$$

Конечно, описание случайной поверхности с помощью характеристических функций  $f_n$  совершенно эквивалентно заданию плотностей распределения. Знание характеристической функции позволяет получать моменты любого порядка путем простого дифференцирования:

$$\begin{aligned} \overline{\zeta^k(x_1) \zeta^n(x_2) \dots \zeta^m(x_j)} &= \\ &= \frac{i^{-(k+n+\dots+m)} \partial^{(k+n+\dots+m)}}{\partial^k v_1 \partial^n v_2 \dots \partial^m v_j} \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_j=0} f(v_1, x_1; \dots; v_j, x_j). \end{aligned} \quad (27)$$

В частности, корреляционная функция определяется по двумерной характеристической функции:

$$\overline{\zeta(x_1) \zeta(x_2)} = \sigma^2 W(x_1, x_2) = -\frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} f(v_1, x_1; v_2, x_2) \Big|_{v_1=v_2=0}. \quad (28)$$

Подставляя (25) в (26) и выполняя несложное интегрирование, получаем для характеристической функции гауссовой однородной поверхности формулу:

$$f_n(v_1, x_1; \dots; v_n, x_n) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i, k=1}^n W(x_i, x_k) v_i v_k \right\}. \quad (29)$$

4. Рассмотрим теперь статистические характеристики производной  $d\zeta(x)/dx$ , т. е. тангенсов углов наклона поверхности  $z = \zeta$  относительно плоскости  $z = 0$ . Не вдаваясь в математические тонкости, можно считать операции дифференцирования и усреднения перестановочными. Это допущение позволяет установить следующие важные соотношения:

$$\overline{\frac{d\zeta(x)}{dx}} = \frac{d}{dx} \overline{\zeta(x)}, \quad (30a)$$

$$\overline{\frac{d\zeta(x_1)}{dx_1} \zeta(x_2)} \equiv \mathcal{W}_{\zeta', \zeta}^*(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{W}_{\zeta}^*(x_1, x_2), \quad (30б)$$

$$\overline{\frac{d\zeta(x_1)}{dx_1} \cdot \frac{d\zeta(x_2)}{dx_2}} \equiv \mathcal{W}_{\zeta', \zeta'}^*(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \mathcal{W}_{\zeta}^*(x_1, x_2), \quad (30в)$$

где  $\mathcal{W}_{\zeta}^*(x_1, x_2) = \overline{\zeta(x_1) \zeta(x_2)}$  и  $\zeta' \equiv d\zeta/dx$ .

Для статистически однородных (стационарных) поверхностей имеем:

$$\overline{d\zeta/dx} = 0, \quad (31a)$$

$$\overline{\frac{d\zeta(x)}{dx} \zeta(x + \xi)} = -\overline{\zeta(x) \frac{d\zeta(x + \xi)}{dx}} = -\frac{d}{d\xi} \mathcal{W}_{\zeta}^*(\xi) = -\sigma^2 \frac{dW(\xi)}{d\xi}, \quad (31б)$$

$$\overline{\frac{d\zeta(x)}{dx} \cdot \frac{d\zeta(x + \xi)}{dx}} = -\frac{d^2}{d\xi^2} \mathcal{W}_{\zeta}^*(\xi) = -\sigma^2 \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2}. \quad (31в)$$

В частности, дисперсия производной  $\zeta'$  определяется второй производной от корреляционной функции в нуле:  $\overline{(\zeta')^2} \equiv \gamma^2 = -\sigma^2 W''(0)$ . Из соотношения  $\mathcal{W}_{\zeta', \zeta}^*(0) = -\mathcal{W}_{\zeta}^*(0) = 0$  следует, что высота  $\zeta$  и наклон (производная)  $\zeta'$  в одной и той же точке являются некоррелированными величинами. Несложно провести обобщение приведенных выше простых формул на производные высших порядков. Так как дифференцирование является линейной операцией, то производные нормальной функции (тангенсы угла наклона гауссовой поверхности) распределены по нормальному закону с дисперсией и корреляционной функцией, определяемыми соотношением (31в).

Для трехмерной нормальной и однородной случайной поверхности  $z = \xi(x, y)$  производные  $\xi_x = \partial \xi / \partial x$  и  $\xi_y = \partial \xi / \partial y$  также распределены по нормальному закону:

$$w_2(\xi_x, \xi_y) = \frac{1}{2\pi\gamma_x\gamma_y\sqrt{1-W_{x,y}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-W_{x,y}^2)}\left[\frac{\xi_x^2}{\gamma_x^2} - 2W_{x,y}\frac{\xi_x\xi_y}{\gamma_x\gamma_y} + \frac{\xi_y^2}{\gamma_y^2}\right]\right\}, \quad (32)$$

где  $\gamma_x^2 \equiv \overline{\xi_x^2}$ ;  $\gamma_y^2 \equiv \overline{\xi_y^2}$  — дисперсии производных, а  $W_{x,y} \equiv (\gamma_x\gamma_y)^{-1}\overline{\xi_x\xi_y}$  — взаимный коэффициент корреляции углов наклона. Квадратичную форму в показателе экспоненты в (32) путем поворота системы координат  $(x, y, z)$  вокруг оси  $z$  можно привести к диагональному виду, так что второй член в скобке исчезнет. Поэтому, не ограничивая общности, можно сразу записать  $w_2(\xi_x, \xi_y)$  в главных осях, положив в (32)  $W_{x,y} = 0$  и считая, что  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  есть дисперсии производных по главным направлениям, которые могут быть выражены через дисперсию производных в старой системе координат по формулам:

$$\gamma_x^2 \rightarrow \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \sqrt{(\gamma_y^2 - \gamma_x^2)^2 + 4W_{x,y}\gamma_x^2\gamma_y^2}, \quad (33a)$$

$$\gamma_y^2 \rightarrow \gamma_y^2 + \gamma_x^2 - \sqrt{(\gamma_y^2 - \gamma_x^2)^2 + 4W_{x,y}\gamma_x^2\gamma_y^2}. \quad (33б)$$

Величины  $\xi_x$  и  $\xi_y$  являются компонентами двумерного вектора градиента  $\nabla \xi$ , где  $\nabla = e_x \partial / \partial x + e_y \partial / \partial y$ . Представляет интерес распределение модуля этого вектора  $n = |\nabla \xi|$ , т. е. максимального угла наклона в окрестности каждой точки, и его аргумента  $\varphi$  — направления наибольшего наклона, которые связаны с  $\xi_x$  и  $\xi_y$  очевидными соотношениями:

$$\xi_x = n \cos \varphi; \quad \xi_y = n \sin \varphi.$$

Переходя в (32) к новым переменным  $n, \varphi$  по формуле \*)

$$w_2(n, \varphi) = w_2(n \cos \varphi, n \sin \varphi) \frac{\partial(\xi_x, \xi_y)}{\partial(n, \varphi)}, \quad (34)$$

где через  $\frac{\partial(\xi_x, \xi_y)}{\partial(n, \varphi)}$  обозначен якобиан перехода от  $\xi_x, \xi_y$  к  $n, \varphi$ , получим совместную плотность распределения  $n$  и  $\varphi$ :

$$w_2(n, \varphi) = \frac{n}{2\pi\gamma_x\gamma_y} \exp\left[-\frac{n^2(\gamma_y^2 \cos^2 \varphi + \gamma_x^2 \sin^2 \varphi)}{2\gamma_x^2\gamma_y^2}\right]. \quad (35)$$

Отметим, кстати, что этой формулой определяется распределение амплитуды модуля  $n$  и фазы (аргумента)  $\varphi$  любого случайного

\*) Чтобы не вводить новых обозначений, функции распределения пар случайных величин  $\xi_x, \xi_y$  и  $n, \varphi$  обозначаются одной и той же буквой  $w_2$ . Например, справа в (34) стоит  $w_2$  — распределение  $\xi_x \xi_y$ , где аргументы выражены через  $n$  и  $\varphi$ , а слева  $w_2$  — функция распределения  $n$  и  $\varphi$ .

вектора с нормально распределенными проекциями  $\xi_x$  и  $\xi_y$ , которые в общем случае и не обязательно имеют смысл проекций градиента какого-то скалярного случайного поля.

Интегрируя (35) по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , получаем распределение углов наклона поверхности, независимо от направления:

$$w_1(n) = \int_0^{2\pi} w_2(n, \varphi) d\varphi = \frac{n}{\gamma_x \gamma_y} \exp\left[-\frac{n^2(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{4\gamma_x^2 \gamma_y^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{n^2(\gamma_x^2 - \gamma_y^2)}{4\gamma_x^2 \gamma_y^2}\right], \quad (36)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка с мнимым аргументом. Если поверхность изотропна, то дисперсии углов наклона во всех направлениях (в том числе и вдоль главных осей) одинаковы, т. е.  $\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma^2$ , и модуль  $n = |\nabla \zeta|$  распределен по закону Рэлея:

$$w_1(n) = \frac{n}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{n^2}{2\gamma^2}\right) \quad (0 \leq n < \infty). \quad (37)$$

В обратном предельном случае двумерной поверхности с образующими вдоль оси  $y$ , когда  $\gamma_y = 0$ , углы наклона, как и следовало ожидать из общих соображений о распределении производной нормальной случайной функции, распределены по закону Гаусса:

$$w_1(n) = \frac{1}{\gamma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\gamma_x^2}\right) \quad (0 \leq n < \infty). \quad (38)$$

Исследование функции (36) в промежуточных случаях анизотропной поверхности и соответствующие графики можно найти в работе Лонге-Хиггинса [87].

Интегрируя (35) по  $n$  от 0 до  $\infty$ , получаем распределение направлений (азимутов) наклонов:

$$w_1(\varphi) = \int_0^{\infty} w_2(n, \varphi) dn = \frac{\gamma_x \gamma_y}{2\pi(\gamma_y^2 \cos^2 \varphi + \gamma_x^2 \sin^2 \varphi)}. \quad (39)$$

Для изотропной поверхности ( $\gamma_x = \gamma_y$ ) распределения угла  $\varphi$  — равномерное:

$$w_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (40)$$

При резко выраженной анизотропии, когда  $\alpha \equiv \gamma_y/\gamma_x \ll 1$ , углы наклона ориентированы в узком секторе вблизи направлений  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ :

$$w_1(\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \underset{\alpha \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{2} [\delta(\varphi) + \delta(\varphi - \pi)]. \quad (41)$$



Подробный статистический анализ трехмерной движущейся нормальной случайной поверхности (распределение максимумов, плотность экстремумов и нулей, скорости движения точек с заданным наклоном и т. д.) можно найти в [88] и обзоре Лонге-Хиггинса [89].

5. В дальнейшем при решении задачи рассеяния нам придется столкнуться с необходимостью учета затенений поверхности относительно падающей и отраженной волн. В коротковолновом приближении ( $\lambda \rightarrow 0$ ) вопрос сводится к определению вероятности того, что поверхность не пересекается с лучом, выходящим из произвольной точки поверхности под произвольным углом (см. § 22). Этот вопрос является частным случаем задачи о распределении длительности выбросов случайной функции  $\zeta(x)$  через заданную детерминированную (не случайную) функцию  $\varphi(x)$ . В общем виде эта задача была решена в работе [90], следуя которой и не останавливаясь на строгих доказательствах, мы приведем основные результаты, которые будут использованы в главе VII.

Под выбросом случайной функции будем понимать пересечение реализацией  $\zeta(x)$  заданной кривой  $\varphi(x)$ . Если пересечение происходит снизу вверх ( $\varphi = \zeta$  при  $\dot{\zeta} > \dot{\varphi}$ , где  $\dot{\zeta} \equiv d\zeta/dx$ ,  $\dot{\varphi} \equiv d\varphi/dx$ ), то выброс называется положительным, а если сверху вниз ( $\varphi = \zeta$  при  $\dot{\zeta} < \dot{\varphi}$ ) — то отрицательным. Рассмотрим величину

$$\Delta p_1 = w_2(\zeta = \varphi, \dot{\zeta} = \gamma) \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} \quad (42)$$

— вероятность того, что функция  $z = \zeta(x)$  пересекает вертикальный отрезок  $\varphi \leq z \leq \varphi + \Delta \zeta$  под углом, котангенс которого заключен в пределах  $\gamma \leq \dot{\zeta} \leq \gamma + \Delta \dot{\zeta}$ .

Из рис. 4 легко видеть, что при достаточно малых  $\Delta \zeta$  пересечение функцией  $\zeta(x)$  указанного отрезка происходит одновременно с пересечением  $\zeta(x)$  и  $\varphi(x)$  на участке длиной

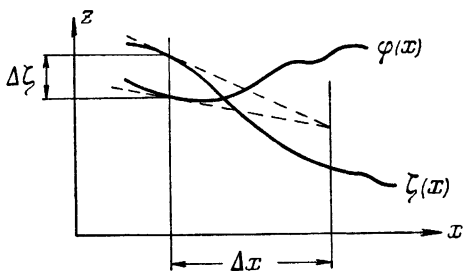


Рис. 4.

$$\Delta x = \frac{\Delta \zeta}{|\dot{\zeta} - \dot{\varphi}|}. \quad (43)$$

Поэтому величина

$$\Delta p_1 = w_2(\zeta = \varphi; \dot{\zeta} = \gamma) |\dot{\zeta} - \dot{\varphi}| \Delta \zeta \Delta x \quad (44)$$

является вероятностью того, что  $\zeta(x)$  пересекает  $\varphi(x)$  на интервале длиной  $\Delta x$ , причем производная  $\dot{\zeta}(x)$  при этом заключена

в интервале  $\gamma \leq \dot{\xi} \leq \gamma + \Delta \dot{\xi}$ . Следовательно, вероятность положительного выброса ( $\dot{\xi} > \varphi$ ) на отрезке  $\Delta x$

$$\Delta P_1 = \Delta x \int_{\dot{\varphi}}^{\infty} w_2(\varphi, \gamma) |\gamma - \dot{\varphi}| d\gamma \equiv d_{1,0} \Delta x \quad (45)$$

и, аналогично, вероятность отрицательного выброса

$$\Delta P_1 = \Delta x \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}} w_2(\varphi, \gamma) |\gamma - \dot{\varphi}| d\gamma \equiv d_{0,1} \Delta x. \quad (46)$$

Очевидно, что введенные в (45) и (46) функции  $d_{1,0}$  и  $d_{0,1}$  можно назвать плотностями вероятности положительных и отрицательных выбросов соответственно.

Совершенно таким же способом можно найти вероятность одновременного пересечения  $\zeta(x)$  и  $\varphi(x)$  в интервалах  $\Delta x_i$  около точек  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Так, вероятность положительного выброса в интервале  $\Delta x_0$  около точки  $x_0$  и отрицательного в остальных интервалах  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можно записать в виде

$$\Delta P_n = d_{1,n}(x_0, x_1, \dots, x_n) \Delta x_0 \Delta x_1 \dots \Delta x_n, \quad (47)$$

где плотность вероятности  $d_{1,n}$  имеет такой вид:

$$d_{1,n} = \int_{\dot{\varphi}_0}^{\infty} d\gamma_0 (\gamma_0 - \dot{\varphi}_0) \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_1} d\gamma_1 (\dot{\varphi}_1 - \gamma_1) \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_2} d\gamma_2 (\dot{\varphi}_2 - \gamma_2) \dots \\ \dots \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_n} d\gamma_n (\dot{\varphi}_n - \gamma_n) w_2(n+1)(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (48)$$

Условная плотность вероятности того, что в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будут отрицательные выбросы, если заведомо известно, что в точке  $x_0$  произошел положительный выброс, равна

$$\tilde{d}_n = \frac{d_{1,n}(x_0, x_1, \dots, x_n)}{d_{1,0}(x_0)} = \left[ \int_{\dot{\varphi}_0}^{\infty} (\gamma_0 - \dot{\varphi}_0) w_2(\varphi_0, \gamma_0) d\gamma_0 \right]^{-1} \times \\ \times \int_{\dot{\varphi}_0}^{\infty} (\gamma_0 - \dot{\varphi}_0) d\gamma_0 \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_1} (\dot{\varphi}_1 - \gamma_1) d\gamma_1 \dots \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_n} (\dot{\varphi}_n - \gamma_n) w_2(n+1)(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; \\ \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) d\gamma_n. \quad (49)$$

Наконец, если в точке  $x_0$  произошел положительный выброс, и случайная функция  $\zeta(x)$  имела при этом вполне определенную производную  $\dot{\zeta}(x_0) = \gamma_0$ , то условная плотность отрицательных

выбросов в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  определяется по формуле

$$\tilde{d}_n = [w_2(\varphi_0, \gamma_0)]^{-1} \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_1} (\dot{\varphi}_1 - \gamma_1) d\gamma_1 \dots \int_{-\infty}^{\dot{\varphi}_n} (\dot{\varphi}_n - \gamma_n) \times \\ \times w_{2(n+1)}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) d\gamma_n. \quad (50)$$

Полученные выше формулы дают принципиальную возможность определения вероятности пересечения функций  $\xi(x)$  и  $\varphi(x)$  в любой совокупности точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Приступим теперь к вычислению вероятности того, что на отрезке длиной  $\xi$  ( $x_0 < x < x_0 + \xi$ ) не выпадет ни одной такой точки, где  $\xi(x)$  и  $\varphi(x)$  пересекаются. Следуя работе [90], произведем разбиение отрезка ( $x_0, x_0 + \xi$ ) точками

$$x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = x_0 + \xi,$$

причем так, чтобы длина каждого интервала  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  стремилась к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$ . Пересечение  $\xi(x)$  и  $\varphi(x)$  хотя бы один раз в интервале  $\Delta x_i$  назовем событием  $\delta_i = 1$ , а отсутствие пересечения — событием  $\delta_i = 0$ . По определению функций плотностей (47) имеем \*)

$$P(\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \dots, \delta_n = 1) = d_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n, \quad (51)$$

где через  $d_n$  обозначена любая из плотностей (48) — (50). Нас же интересует вероятность  $P(\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \dots, \delta_n = 0)$  того, что все  $\delta_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Так как сумма событий  $\delta_i = 1$  и  $\delta_i = 0$  есть достоверное событие, то можно не указывать какое значение принимает  $\delta_i$  и

$$P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_{i-1} = 0, \delta_i = 1, \delta_{i+1} = 1, \dots, \delta_n = 1) + \\ + P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_{i-1} = 0, \delta_i = 0, \delta_{i+1} = 1, \dots, \delta_n = 1) = \\ = P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_{i-1} = 0, \delta_{i+1} = 1, \dots, \delta_n = 1); \quad (52)$$

$n$ -кратное применение этой формулы позволяет выразить искомую вероятность  $P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_n = 0)$  через вероятности положительных событий (51):

$$P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_n = 0) = \\ = 1 - \sum_{i=1}^n P(\delta_i = 1) + \sum_{i < k}^n P(\delta_i = 1, \delta_k = 1) - \dots = \\ = \sum_{s=0}^n (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} P(\delta_{i_1} = 1; \delta_{i_2} = 1; \dots; \delta_{i_s} = 1). \quad (53)$$

\*) Формула (51) относится, строго говоря, лишь к вероятности однократных пересечений в каждом из интервалов  $\Delta x_i$ . Но при малых  $\Delta x_i$  вероятность многократных пересечений есть величина малая более высокого порядка по  $\Delta x_i$ , так что при  $\Delta x_i \rightarrow 0$  достаточно учесть лишь вероятности однократных пересечений.

Подставляя теперь сюда функции плотности (51), имеем

$$P(\delta_1 = 0, \dots, \delta_n = 0) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} d_s(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}) \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \dots \Delta x_{i_s}. \quad (54)$$

Увеличивая число разбиений отрезка  $(x_0, x_0 + \xi)$  и переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ , вместо (54) получаем для вероятности отсутствия выбросов в указанном интервале формулу

$$P(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_{x_0}^{x_0 + \xi} \dots \int_{x_0}^{x_0 + \xi} d_s(x_1, x_2, \dots, x_s) dx_1, dx_2, \dots, dx_s. \quad (55)$$

При переходе от (54) к (55) мы воспользовались свойством симметрии функций плотности  $d_s$ , которое непосредственно вытекает из их определения (47) — (51). Для стационарных (однородных) случайных функций  $d_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$  не изменяется при сдвиге всей совокупности точек  $x_1, x_2, \dots, x_s$  на одинаковую для всех точек величину, например, на  $x_0$ , так что в (55) пределы интегрирования можно заменить на  $(0, \xi)$ . В частности, для вероятности того, что выброс имеет длительность не меньшую, чем  $\xi$ , при условии, что в начале выброса функция  $\zeta(x)$  принимала значение  $\varphi_0$  и имела производную  $\gamma_0$ , из (55) следует:

$$P(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_0^{\xi} \dots \int_0^{\xi} \widetilde{d}_s(x_1, x_2, \dots, x_s) dx_1 dx_2 \dots dx_s, \quad (56)$$

где  $\widetilde{d}_s$  определяется формулой (50).

Для эргодических случайных функций  $\zeta(x)$   $n$ -мерные плотности распределения  $w_{2n}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  распадаются на произведение плотностей вероятности более низкого порядка при увеличении расстояния между точками  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$w_{2(r+s)}(\zeta_1, \dots, \zeta_r, \zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{r+s}; \gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{r+s}) \approx \approx w_{2r}(\zeta_1, \dots, \zeta_r; \gamma_1, \dots, \gamma_r) w_{2s}(\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{r+s}; \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{r+s})$$

при  $|x_i - x_j| \rightarrow \infty$ , где  $i = 1, 2, \dots, r, j = r + 1, r + 2, \dots, r + s$ . Очевидно, что тем же свойством обладают и функции плотности (48) — (50). Поэтому в ряде случаев оказывается удобным вместо функций плотности  $d_s$  использовать корреляционные функции  $g_s$ , которые при увеличении расстояния между любой парой точек  $x_i$  и  $x_j$  обращаются в нуль:

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1) &= d_1(x_1); \\ g_2(x_1, x_2) &= d_2(x_1, x_2) - d_1(x_1) d_2(x_2); \\ g_3(x_1, x_2, x_3) &= d_3(x_1, x_2, x_3) - d_1(x_1) d_2(x_2, x_3) - \\ &\quad - d_1(x_2) d_2(x_1, x_3) - d_1(x_3) d_2(x_1, x_2) + 2d_1(x_1) d_2(x_2) d_3(x_3). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

и т. д.

Формула (55) для вероятности отсутствия выбросов принимает при этом вид

$$P(\xi) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_0^{\xi} \dots \int_0^{\xi} g_s(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s \right\}. \quad (58)$$

Формулы (55) и (58) решают поставленную задачу в самом общем виде. Отсюда, в частности, вытекают известные в радиотехнике (см. [91]—[97]) выражения для среднего числа пересечений случайной функции с заданным уровнем  $\varphi(x) = \text{const}$  и для распределения по длительности выбросов над постоянным уровнем ([98]—[103]).

#### § 4. Случайные волновые поля

При дифракции волн на неровной поверхности, которая описывается статистически, рассеянное поле также можно рассматривать как случайную функцию пространственных координат  $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$  и времени  $t$ . При рассеянии акустических колебаний (звука) мы имеем дело со скалярной случайной функцией  $U$  — потенциалом скоростей; в электромагнитном случае речь будет идти о векторной функции, например, о векторе напряженности  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$  электрического поля. Ансамбль реализаций этой случайной функции представляет собой совокупность волновых полей, возникающих при дифракции на каждой реализации случайной поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r} = \{x, y\}$ . В общем случае статистически полно случайное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$  описывается многомерной (при  $n \rightarrow \infty$ ) совместной плотностью распределения вероятностей  $w_n(\mathbf{E}_1, \mathbf{R}_1, t_1; \mathbf{E}_2, \mathbf{R}_2, t_2; \dots; \mathbf{E}_n, \mathbf{R}_n, t_n)$  значений поля  $\mathbf{E}$  в точках  $\mathbf{R}_i$  в моменты времени  $t_i$  ( $\mathbf{E}_{(i)} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{R}_i, t_i)$ ). Свойства функции  $w_n$  полностью аналогичны свойствам плотности распределения высот поверхности, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Задачей теории рассеяния на статистически неровной поверхности является установление связи между статистическими характеристиками случайной поверхности и рассеянного на ней волнового поля.

Точно так же как и при описании неровной поверхности, случайное поле называется однородным и стационарным, если функция  $w_n$  инвариантна относительно трансляции всей совокупности точек  $\mathbf{R}_1, t_1; \mathbf{R}_2, t_2; \dots; \mathbf{R}_n, t_n$  в пространстве и во времени. Эргодическими называются такие стационарные (или однородные) поля, для которых любые средние по ансамблю могут быть получены усреднением по времени (или по пространству) для одной реализации. Как и для неровной поверхности, мы, вообще говоря, не в состоянии указать вид функции распределения случайного поля. Но в большинстве случаев в этом нет необходимости, и достаточно ограничиться вычислением первых двух моментов

случайного поля — среднего значения  $\bar{E}(\mathbf{r}, t)$  и билинейных комбинаций  $\overline{E_i(\mathbf{R}_1 t_1) E_k(\mathbf{R}_2 t_2)}$ , где  $E_j$  — проекция вектора  $E$  на единичный вектор  $e_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Так как в рассматриваемых ниже задачах дифракции волн свое поле формируется, как правило, в результате интерференции большого числа независимых «парциальных» полей, то согласно центральной предельной теореме, распределение компонент поля  $E$  — нормальное, и описание его на уровне первых двух моментов является статистически полным.

1. Прежде чем перейти к описанию конкретных свойств волнового поля, полезно ввести комплексное представление случайного поля  $E(\mathbf{R}, t)$ , которое является обобщением общепринятого представления монохроматической волны в комплексной форме  $E(\mathbf{R}, t) = E(\mathbf{R}) e^{-i\omega t}$ .

Обозначим через  $E^{(r)}(\mathbf{R}, t)$  действительное волновое поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и являющееся наблюдаемой физической величиной — напряженностью электрического поля в точке  $\mathbf{R}$  в момент времени  $t$ . Как функцию времени,  $E^{(r)}$  можно представить \*) в виде интеграла Фурье:

$$E^{(r)}(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega}(\mathbf{R}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Так как комплексные амплитуды  $E_{\omega}(\mathbf{R})$  гармоник с положительной ( $\omega > 0$ ) и отрицательной ( $\omega < 0$ ) частотой связаны между собой соотношением  $E_{\omega} = E_{-\omega}^*$  (звездочка \* означает комплексное сопряжение), то отрицательные частоты в (1) не содержат, по сути, никакой информации о поле  $E^{(r)}$ , и вместо  $E^{(r)}$  можно рассматривать комплексную функцию

$$E(\mathbf{R}, t) = 2 \int_0^{\infty} E_{\omega}(\mathbf{R}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Поле  $E$  называется комплексным аналитическим сигналом, соответствующим действительному полю  $E^{(r)} = \text{Re } E$ . Из определения (2) видно, что  $E(\mathbf{R}, t)$  является аналитической и регулярной функцией в нижней полуплоскости комплексной переменной  $t$ . Отсюда следует, что действительная и мнимая части  $E$  связаны между собой преобразованием Гильберта (см., например, [104]):

$$E = E^{(r)} + iE^{(i)}, \quad (3a)$$

$$E^{(r)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^{(i)}(t')}{t' - t} dt', \quad (3б)$$

$$E^{(i)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^{(r)}(t')}{t' - t} dt'. \quad (3в)$$

\*) См. примечание на стр. 43.

Интегралы в формулах (3б, в) следует понимать в смысле главного значения. Нетрудно видеть, что для сходимости этих интегралов в  $E(\mathbf{R}, t)$  должна отсутствовать постоянная (не изменяющаяся во времени) составляющая, т. е.  $E_\omega$  должна быть регулярной функцией при  $\omega \rightarrow 0$ .

2. Остановимся несколько подробнее на свойствах средних от билинейных комбинаций поля. В простейшем случае линейной поляризации вектор  $E$  сводится к одной компоненте  $E(\mathbf{R}, t)$  — скалярной функции радиус-вектора  $\mathbf{R}$  и времени  $t$ . Среднее от произведения полей в одной точке  $\mathbf{R}$ , но в разные моменты времени

$$\mathcal{K}_R(t, t') = \overline{E(\mathbf{R}, t') E^*(\mathbf{R}, t)} \quad (4)$$

называется временной автокорреляционной функцией поля. Для стационарного поля результат усреднения зависит только от разности времен  $\tau = t' - t$  и корреляционная функция  $\mathcal{K}_R$  допускает спектральное представление:

$$\mathcal{K}_R(\tau) = \int_0^\infty \mathcal{S}_R(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (5a)$$

$$\mathcal{S}_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}_R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (5б)$$

Нетрудно показать (см., например, [105]), что для стационарного поля  $\mathcal{K}_R(\tau)$  представляет собой аналитический сигнал, поэтому в (5а) отсутствует интеграл по отрицательным частотам. Из теоремы Винера — Хинчина следует, что  $\mathcal{S}_R(\omega)$  представляет собой энергетический спектр мощности: величина  $|\mathcal{S}_R(\omega)| d\omega$  пропорциональна средней энергии поля в точке  $\mathbf{R}$ , которая приходится на колебания с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Полная интенсивность поля в точке  $\mathbf{R}$  (приходящаяся на все частоты) пропорциональна  $|E^{(r)}(\mathbf{R})|^2$ . Поэтому величину

$$I(\mathbf{R}, t) = \overline{E(\mathbf{R}, t) E^*(\mathbf{R}, t)} = 2 \overline{[E^{(r)}(\mathbf{R}, t)]^2} \quad (6)$$

можно рассматривать в качестве средней интенсивности поля. Последнее равенство в (6) вытекает из легко проверяемых соотношений:

$$\overline{[E^{(r)}]^2} = \overline{[E^{(i)}]^2} = \frac{1}{2} \overline{|E|^2}, \quad (7)$$

$$\overline{E^{(r)} E^{(i)}} = 0, \quad (8)$$

т. е. в совпадающие моменты времени  $E^{(r)}$  и  $E^{(i)}$  некоррелированы, и их дисперсии равны. Принимая во внимание (5а), среднюю

интенсивность  $I$  можно представить в виде интеграла от энергетического спектра

$$I(\mathbf{R}) = \mathcal{K}_R(0) = \int_0^{\infty} \mathcal{S}_R(\omega) d\omega. \quad (9)$$

В дальнейшем мы всегда будем иметь дело с квазимонохроматическими полями, энергетический спектр  $\mathcal{S}_R(\omega)$  которых имеет резкий максимум на несущей частоте  $\omega_0$  с шириной  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Случайные функции времени с узким спектром называются узкополосными процессами. Корреляционную функцию узкополосного процесса можно представить в виде

$$\mathcal{K}_R(\tau) = K_R(\tau) e^{-i\omega_0\tau}, \quad (10)$$

где  $K_R(\tau)$  — медленно меняющаяся функция времени, характерный масштаб изменения которой  $\tau_0 \sim (\Delta\omega)^{-1}$  можно, по аналогии с определениями § 1, назвать временем корреляции, или временем когерентности. Энергетический спектр  $S_R(\omega)$ , соответствующий «медленной» корреляционной функции  $K_R(\tau)$ , получается из  $\mathcal{S}_R(\omega)$  смещением начала отсчета частоты  $\omega$  на несущую частоту  $\omega_0$ :

$$S_R(\omega) = \mathcal{S}_R(\omega - \omega_0). \quad (11)$$

Заметим, что  $S_R(\omega)$  имеет смысл и при отрицательных частотах ( $-\omega_0 \leq \omega < \infty$ ), но обычно спектр  $\mathcal{S}_R(\omega)$  можно считать симметричным относительно  $\omega_0$ , т. е.  $S_R(\omega)$  — четная функция.

3. Так же как и в предыдущем параграфе для неровной поверхности, можно определить пространственно-временную корреляционную функцию случайного поля:

$$\mathcal{K}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; t_1, t_2) = \overline{E(\mathbf{R}_2, t_2) E^*(\mathbf{R}_1, t_1)}. \quad (12)$$

Если в разложении стационарного квазимонохроматического поля  $E$  по плоским волнам входят только компоненты с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  в узком конусе вблизи  $\mathbf{k}_0$ , то  $\mathcal{K}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; t_1, t_2)$  можно представить в виде

$$\mathcal{K}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \tau) = \mathcal{K}_R(\mathbf{r}, \tau) = K_R(\mathbf{r}, \tau) e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0\tau)}, \quad (13)$$

где  $K_R(\mathbf{r}, \tau)$  медленно изменяющаяся функция своих аргументов  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)/2$  и  $\tau$ . Расстояния  $\mathbf{r}_0$ , на которых  $K_R(\mathbf{r}, \tau)$  существенно убывает, определяют корреляционный объем, внутри которого поле пространственно когерентно. Характерные размеры этого объема можно назвать радиусами\*) корреляции

\*) Размеры корреляционного объема в разных направлениях могут отличаться на порядки, поэтому название «радиус корреляции» не совсем точно и следует говорить об интервалах корреляции (когерентности) по разным направлениям.



поля. Заметим, что случайные волновые поля, с которыми мы будем в дальнейшем встречаться, зачастую нельзя считать пространственно однородными (хотя бы из-за конечных размеров источников, находящихся на конечных расстояниях) и поэтому корреляционная функция  $K_R(r, t)$  зависит от  $R$  как от параметра.

Так как поле  $E(R, t)$  удовлетворяет волновому уравнению, то пространственно-временную корреляционную функцию  $\mathcal{K}(R_1, R_2; \tau)$  также можно рассматривать как решение системы уравнений

$$\Delta_{1,2} \mathcal{K}(R_1, R_2; \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{K}(R_1, R_2; \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (14)$$

где индексы 1 и 2 у оператора Лапласа соответствуют дифференцированию по переменным  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Решение системы (14) позволяет найти пространственно-временную функцию корреляции в любых точках пространства  $R_1$  и  $R_2$ , если нам известна функция корреляции поля на какой-либо произвольной поверхности  $\Sigma$  (см. [105]):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R_1, R_2; \tau) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{(N_1, \rho_1)(N_2, \rho_2)}{\rho_1^2 \rho_2^2} \mathcal{D} \mathcal{K}(r_1, r_2; \tau - \frac{\rho_1 - \rho_2}{c}) dr_1 dr_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — точки на поверхности  $\Sigma$ , по которой производится интегрирование;  $\rho_1 = R_1 - r_1$ ,  $\rho_2 = R_2 - r_2$ ;  $N_i$  — нормаль к поверхности  $\Sigma$  в точке  $r_i$ , образующая острые углы с векторами  $\rho_i$  ( $i=1, 2$ ), а  $\mathcal{D}$  является дифференциальным оператором:

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\rho_1 \rho_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

В общем случае произвольной (не линейной) и случайной поляризации вместо (12) следует рассматривать корреляционную матрицу

$$\mathcal{K}_{ik}(R_1, R_2; \tau) = \overline{E_i(R_2, t + \tau) E_k^*(R_1, t)}. \quad (16)$$

При этом все предыдущие определения и формулы становятся более громоздкими, но, по существу, не усложняются. Положив в (16)  $R_1 = R_2$  и  $\tau = 0$ , приходим к поляризационной матрице

$$J_{ik} = \overline{E_i E_k^*}, \quad (17)$$

которая позволяет достаточно полно описать все явления, связанные с поляризацией и энергетическими характеристиками поля.

4. Интенсивность  $J_i$  излучения с данной поляризацией  $E_i$  пропорциональна соответствующему матричному элементу  $\overline{E_i E_i^*}$ .

Полная интенсивность излучения \*) пропорциональна следу матрицы  $J_{ik}$ :

$$I = \text{Sp} J_{ik} = J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}. \quad (18)$$

Ограничимся в дальнейшем исследованием поляризации плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . Тогда в силу поперечности электромагнитных колебаний в матрице  $J_{ik}$  все элементы вида  $J_{iz}$  обратятся в нуль, и мы приходим к матрице  $J_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = x, y$ ), имеющей всего четыре элемента. Матрица  $J_{\alpha\beta}$ , являющаяся эрмитовым тензором, путем линейного унитарного преобразования  $E'_\alpha = a_{\alpha\beta} E_\beta$  может быть приведена к диагональному виду. Состояния поляризации  $E'_\alpha$ , в которых  $J_{\alpha\beta}$  диагональна, представляют собой в общем случае две некоррелированные эллиптически поляризованные волны с противоположными направлениями вращения вектора поляризации. Эллипсы поляризации этих двух волн подобны, а их главные оси взаимно ортогональны. Степень поляризации  $\mathcal{P}$  можно определить как отношение разности собственных значений  $J_{1,2}$  матрицы  $J_{\alpha\beta}$  к полной интенсивности излучения  $I = J_1 + J_2$

$$\mathcal{P} = \left| \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2} \right|. \quad (19)$$

Очевидно, что для совершенно неполяризованного излучения, когда все состояния поляризации вектора  $E$  равновероятны,  $J_1 = J_2$  и, следовательно,  $\mathcal{P} = 0$ . В случае полностью поляризованного поля вся интенсивность приходится только на одно состояние поляризации, т. е., например,  $J_2 = 0$ ,  $J_1 = I$  и степень поляризации принимает максимальное значение  $\mathcal{P} = 1$ . В общем же случае частично поляризованного излучения матрица  $J_{\alpha\beta}$  может быть единственным образом представлена в виде суммы матриц  $J_{\alpha\beta}^{(p)}$  и  $J_{\alpha\beta}^{(e)}$ , первая из которых соответствует полностью поляризованному полю, а вторая — полностью неполяризованному. Степень поляризации принимает промежуточные значения между 0 и 1 и выражается через инварианты этих матриц:

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Sp} J_{\alpha\beta}^{(p)}}{\text{Sp} [J_{\alpha\beta}^{(p)} + J_{\alpha\beta}^{(e)}]}, \quad (20)$$

т. е.  $\mathcal{P}$  имеет смысл отношения интенсивности поляризованной части излучения к полной интенсивности. Для нахождения  $\mathcal{P}$  не обязательно приводить матрицу  $J_{\alpha\beta}$  к главным осям, или пред-

\*) Плотность энергии электромагнитного поля в вакууме ( $\epsilon = \mu = 1$ ) при таком определении интенсивности равна  $I/4\pi$ .

ставлять ее в виде суммы  $J_{\alpha\beta}^{(p)} + J_{\alpha\beta}^{(e)}$ , а можно сразу воспользоваться удобной формулой

$$\mathcal{F} = \sqrt{1 - \frac{4 \det J_{\alpha\beta}}{(\text{Sp } J_{\alpha\beta})^2}}. \quad (21)$$

Если матрица  $J_{\alpha\beta}$  вещественная, то поляризация излучения описывается тремя независимыми вещественными параметрами, в качестве которых можно взять, например, два собственных значения  $J_1$  и  $J_2$  и угол  $\chi$ , образуемый одной из главных осей тензора  $J_{\alpha\beta}$  с фиксированным направлением. Но вещественными матрицами  $J_{\alpha\beta}$  описываются поля только с линейной поляризацией (хотя и случайной). В общем случае комплексных  $J_{\alpha\beta}$  состояние поляризации полностью характеризуется четырьмя вещественными параметрами, в качестве которых могут быть приняты любые четыре независимые комбинации из элементов  $\overline{E_\alpha E_\beta^*}$ . Общепринятым является описание произвольным образом поляризованного поля с помощью параметров Стокса  $\Omega$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $\mathfrak{R}$ , которые связаны с элементами матрицы  $J_{\alpha\beta}$  соотношениями [106]:

$$I = \overline{E_x E_x^*} + \overline{E_y E_y^*} = \text{Sp } J_{\alpha\beta} = J_x + J_y, \quad (22a)$$

$$\Omega = \overline{E_x E_x^*} - \overline{E_y E_y^*} = J_x - J_y, \quad (22b)$$

$$\mathfrak{I} = \overline{E_x E_y^*} + \overline{E_y E_x^*} = 2 \text{Re } J_{xy}, \quad (22v)$$

$$\mathfrak{R} = i [\overline{E_y E_x^*} - \overline{E_x E_y^*}] = 2 \text{Im } J_{xy}. \quad (22r)$$

В качестве простого примера рассмотрим сначала полностью поляризованное нефлуктуирующее излучение. При отсутствии флуктуаций  $\overline{E_\alpha E_\beta^*} = E_\alpha E_\beta^*$  и параметры Стокса являются просто билинейными комбинациями компонент комплексного вектора  $E$ . Ортогональные компоненты вещественной части этого вектора можно представить в виде

$$E_x^{(r)} = \text{Re } E_x = E_x^0 \cos(\omega t - \delta_x), \quad (23a)$$

$$E_y^{(r)} = \text{Re } E_y = E_y^0 \sin(\omega t - \delta_y), \quad (23b)$$

где  $E_x^0$ ,  $E_y^0$ ,  $\delta_x$  и  $\delta_y$  — вещественные постоянные. Легко проверить, исходя из (23а, б), что конец вектора  $E^{(r)}$  с течением времени описывает в плоскости  $\{x, y\}$  эллипс, уравнение которого имеет вид (в следующих ниже формулах вплоть до (36) опускаем  $y$  поля  $E^{(r)}$  индекс  $r$ , имея в виду всюду вещественную часть  $\text{Re } E$ ):

$$E_x^2 + 2E_x E_y \cos(\delta_x - \delta_y) + E_y^2 = (E_x^0 E_y^0)^2 \sin^2(\delta_x - \delta_y). \quad (24)$$

Перейдем от координатных осей  $x, y$  к новым осям  $\xi, \eta$ , повернутым относительно старой системы координат на угол  $\chi$ :

$$x = \xi \cos \chi - \eta \sin \chi,$$

$$y = \xi \sin \chi + \eta \cos \chi.$$

Выберем угол  $\chi$  таким, чтобы уравнение (24) в новых координатах  $\xi$  и  $\eta$  приняло каноническую форму

$$\frac{E_{\xi}^2}{a^2} + \frac{E_{\eta}^2}{b^2} = 1. \quad (25)$$

Зависимость компонент  $E_{\xi}$  и  $E_{\eta}$  от времени при этом будет иметь вид

$$E_{\xi} = E_0 \cos \beta \cos \omega t, \quad (26a)$$

$$E_{\eta} = E_0 \sin \beta \sin \omega t, \quad (26b)$$

где  $E_0^2 = a^2 + b^2$  и  $\operatorname{tg} \beta = b/a$ . Положительным значениям  $\beta$  соответствует вращение вектора  $E$  против часовой стрелки, а отрицательным — в противоположном направлении. Угол  $\chi$  между осью  $x$  и главной осью  $\xi$  этого эллипса определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2E_x^0 E_y^0 \cos \delta}{(E_x^0)^2 - (E_y^0)^2}, \quad \text{где } \delta = \delta_y - \delta_x. \quad (27)$$

Вспоминая определение параметров Стокса (226, в), формулу (27) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} 2\chi = \mathfrak{U}/\Omega. \quad (28)$$

Угол  $\beta$ , тангенс которого есть отношение полуосей эллипса, характеризует степень эллиптичности и может быть найден по аналогичной формуле

$$\sin 2\beta = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\Omega^2 + \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}}. \quad (29)$$

Нетрудно убедиться в том, что для эллиптически поляризованной волны параметры Стокса связаны соотношением

$$I^2 = \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2 + \Omega^2, \quad (30)$$

и, таким образом, в этом случае есть всего три независимых параметра из четырех.

В противоположном предельном случае совершенно неполяризованного излучения (в оптическом диапазоне это излучение называется естественным светом) ни одно из направлений вектора  $E$  в плоскости  $\{x, y\}$  не является выделенным и, следовательно, матрица  $J_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} I. \quad (31)$$

Таким образом, неполяризованное излучение описывается единственным параметром  $I$ , а остальные параметры Стокса обращаются в нуль:  $\Omega = \mathfrak{U} = \mathfrak{B} = 0$ .

В общем случае частично поляризованное излучение можно, как указывалось выше, представить в виде суперпозиции эллиптически поляризованной волны и «естественной» неполяризованной составляющей. Интенсивность неполяризованного излучения равна  $I - (\Omega^2 + \Pi^2 + \mathfrak{B}^2)^{1/2}$ , а параметры Стокса для эллиптически поляризованной волны имеют вид

$$\{(\Omega^2 + \Pi^2 + \mathfrak{B}^2)^{1/2}, \quad \Omega, \Pi, \mathfrak{B}\}.$$

По формулам (28) и (29) можно найти ориентацию главных осей и степень эллиптичности полностью поляризованной компоненты. Легко убедиться в том, что введенная в (19)–(21) степень поляризации  $\mathcal{P}$  связана с параметрами Стокса соотношением

$$\mathcal{P} = \frac{(\Omega^2 + \Pi^2 + \mathfrak{B}^2)^{1/2}}{I}. \quad (32)$$

Возможно и другое представление частично поляризованного излучения — в виде совокупности двух независимых (некогерентных) эллиптически поляризованных составляющих, эллипсы поляризации которых подобны, главные оси ортогональны, а направления вращения противоположны. Интенсивности  $J_{\pm}$  компонент излучения с противоположно вращающимися векторами поляризации равны соответственно

$$J_{+} = \frac{1}{2} [I + \sqrt{\Omega^2 + \Pi^2 + \mathfrak{B}^2}], \quad (33a)$$

$$J_{-} = \frac{1}{2} [I - \sqrt{\Omega^2 + \Pi^2 + \mathfrak{B}^2}], \quad (33b)$$

а ориентация главных осей  $\chi$  и степень эллиптичности  $\beta$  определяются формулами (28)–(29), причем  $\beta_{+} = \beta = -\beta_{-}$ ,  $\chi_{+} = \chi = -\chi_{-} - \pi/2$ . Заметим, кстати, что интенсивности противоположно вращающихся компонент совпадают только при  $\Omega = \Pi = \mathfrak{B}$ , т. е. для неполяризованного (естественного) излучения. При этом выбор направления  $\chi$  главных осей и степень эллиптичности  $\tan \beta$  становятся совершенно произвольными, но по-прежнему должны соблюдаться условия  $\beta_{+} = -\beta_{-}$  и  $\chi_{+} = \chi_{-} - \pi/2$ .

Знание параметров Стокса позволяет вычислить интенсивность, принимаемую на антенну с произвольной эллиптической поляризацией, если излучение, попадающее в раскрыв антенны, является частично поляризованным. Антенна эллиптической поляризации эквивалентна фазосдвигателю, создающему постоянную разность фаз  $\epsilon$  между  $x$  и  $y$  — составляющими поля, и последующему приемнику интенсивности колебаний, составляющих угол  $\psi$  с осью  $x$ -в. Заданием двух параметров  $\epsilon$  и  $\psi$  характеризуется степень эллиптичности и ориентация главных направлений поляризации

антенны. После фазосдвигателя компоненты поля  $E$  имеют вид (ср. с (23а, б))

$$E_x = E_x^0 \cos(\omega t - \delta_x), \quad (34a)$$

$$E_y = E_y^0 \cos(\omega t - \delta_y - \varepsilon). \quad (34б)$$

Составляющая колебаний в направлении  $\psi$  равна, очевидно, проекции  $E_x$  и  $E_y$  из (34а, б) на это направление:

$$E_\psi = [E_x^0 \cos \delta_x \cos \psi + E_y^0 \cos(\delta_y + \varepsilon) \sin \psi] \cos \omega t + \\ + [E_x^0 \sin \delta_x \cos \psi + E_y^0 \sin(\delta_y + \varepsilon) \sin \psi] \sin \omega t. \quad (35)$$

Интенсивность этих колебаний, получаемая путем возведения (35) в квадрат и усреднения, принимает вид

$$J_\psi = \overline{E_\psi^2} = \frac{1}{2} [I + \Omega \cos 2\psi + (\Pi \cos \varepsilon - \mathfrak{B} \sin \varepsilon) \sin 2\psi]. \quad (36)$$

Из этой формулы следует, что параметры Стокса могут быть определены из четырех независимых измерений интенсивности, проведенных на антеннах с различными поляризациями, причем одна из них должна быть обязательно эллиптической (или круговой).

Отметим, наконец, важное свойство параметров Стокса, вытекающее из их определения (22а—г): параметры  $I$ ,  $\Omega$ ,  $\Pi$  и  $\mathfrak{B}$  для суперпозиции некогерентных полей  $E = \sum_s E_s$  равны сумме соответствующих параметров, относящихся к каждому слагаемому в отдельности, т. е.

$$I = \sum_s I_s; \quad \Omega = \sum_s \Omega_s, \text{ и т. д.}$$

В дальнейшем мы не будем выписывать параметры Стокса для каждого конкретного случая рассеяния, а ограничимся вычислением элементов матрицы  $J_{ik}$ , имея в виду, что параметры Стокса и характеристики эллипсов поляризации могут быть получены из двумерной матрицы  $J_{\alpha\beta}$  по приведенным выше формулам путем простых алгебраических преобразований.

5. Если  $E(\mathbf{R}, t)$  является нормальной случайной функцией, то пространственно-временные корреляционные функции (16) (т. е. вторые моменты) дают полное статистическое описание волнового поля. Исходя из гауссовой плотности распределения компонент поля  $E_i(\mathbf{R}, t)$ , можно получить распределение любой функции  $f\{E(\mathbf{R}_1, t_1), \dots, E(\mathbf{R}_n, t_n)\}$ . Так, из плотности распределения комплексной амплитуды  $E_j$  поля с определенной поляризацией

$$w_2(E_j^{(r)}, E_j^{(i)}) = \frac{1}{\pi \bar{J}_j} \exp \left\{ -\frac{(E_j^{(r)})^2 + (E_j^{(i)})^2}{\bar{J}_j} \right\}, \quad (37)$$

где

$$E_j = E_j^{(r)} + iE_j^{(i)}, \quad \overline{E_j^{(r)} E_j^{(i)}} = 0, \quad \text{а } \bar{J}_j = \overline{(E_j^{(r)})^2},$$

следует, что мгновенная \*) интенсивность поля с данной поляризацией  $J_j = E_j E_j^* = (E_j^{(r)})^2 + (E_j^{(i)})^2$  распределена по экспоненциальному закону

$$w_1(J_j) = \frac{1}{\bar{J}_j} \exp\left(-\frac{J_j}{\bar{J}_j}\right). \quad (38)$$

Распределение же полной интенсивности  $I = \text{Sp} J_{ik}$  излучения с учетом вклада всех поляризаций зависит от степени поляризации  $\mathcal{P}$  и дается (см., например, [105]) формулой

$$w_1(I) = \frac{1}{\bar{\mathcal{P}}\bar{I}} \left\{ \exp\left[-\frac{2I}{\bar{I}(1+\mathcal{P})}\right] - \exp\left[-\frac{2I}{\bar{I}(1-\mathcal{P})}\right] \right\}. \quad (39)$$

При изучении узкополосных (квазимонохроматических) случайных полей удобно комплексную величину  $E(\mathbf{R}, t)$  (ограничиваясь в дальнейшем для простоты линейной поляризацией и опуская аргумент  $\mathbf{R}$ , играющий в данном случае роль параметра) представить в виде

$$E(t) = A(t) \exp\{-i[\omega_0 t + \varphi(t)]\}. \quad (40)$$

Функция  $A(t)$  называется огибающей (или амплитудой), а  $\varphi(t)$  фазой \*\*) случайного процесса  $E(t)$ . Для практических целей чрезвычайно важным вопросом является установление функций распределения амплитуды и фазы поля, рассматриваемых как случайные функции времени.

В простейшем случае нормально распределенного поля с нулевым средним, что соответствует чисто случайному процессу  $E(t)$  без регулярных (детерминированных) составляющих, из (37) путем преобразований, в точности аналогичных тем, которые были проведены при переходе от (3.32) к (3.37), приходим к выводу, что амплитуда  $A(t)$  распределена по закону Рэлея

$$w_1(A) = \frac{2A}{\bar{I}} e^{-A^2/\bar{I}}, \quad \text{где } \bar{I} = \bar{A}^2, \quad (41)$$

а фаза  $\varphi(t)$  распределена равномерно в интервале  $0 \div 2\pi$ .

Практически во всех задачах дифракции на статистически неровных поверхностях волновое поле можно представить в виде суперпозиции нерассеянного (зеркального) поля — регулярного

\*) Мы здесь вынуждены несколько изменить введенные раньше обозначения: через  $J_j$  мы обозначили раньше среднюю интенсивность — теперь это мгновенная интенсивность. Средняя же интенсивность, как обычно, обозначается чертой —  $\bar{J}_j$ .

\*\*) Иногда функцию  $\varphi(t)$  называют «медленной» фазой, а под фазой понимают весь показатель экспоненты:  $\omega_0(t) + \varphi(t)$ .

узкополосного сигнала  $E_s(t)$  частоты  $\omega_0$ , с медленно изменяющейся амплитудой  $A_s(t)$  и фазой  $\varphi_s(t)$  и рассеянного поля, представляющего собой нормальный узкополосный ( $\omega \simeq \omega_0$ ) процесс  $E_n(t)$ . Одномерная плотность вероятности полной напряженности поля  $E(t) = E_n(t) + E_s(t)$  имеет при этом такой вид:

$$w_2(E^{(r)}, E^{(i)}) = \frac{1}{2\pi\mathfrak{A}^2} \exp \left[ - \frac{(E^{(r)} - E_s^{(r)})^2 + (E^{(i)} - E_s^{(i)})^2}{2\mathfrak{A}^2} \right], \quad (42)$$

где

$$\mathfrak{A}^2 = \overline{(E^{(r)} - E_s^{(r)})^2} = \overline{(E^{(i)} - E_s^{(i)})^2}$$

— дисперсия напряженности полного поля около среднего значения  $E_s^{(r)}(t)$ . Заметим, кстати, что  $E(t)$  теперь не является стационарной функцией, так как  $E_s(t)$  меняется во времени по известному закону, и поэтому плотность вероятности (42) также параметрически зависит от времени. Переходя в формуле (42) от  $E^{(r)}(t)$  и  $E^{(i)}(t)$  к новым переменным  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  путем обычного преобразования [см., например, (3.34)], получаем совместную плотность распределения  $w_2(A, \varphi)$  амплитуды и фазы поля:

$$w_2(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\mathfrak{A}^2} \exp \left[ - \frac{(A \cos \varphi - E_s^{(r)})^2 + (A \sin \varphi - E_s^{(i)})^2}{2\mathfrak{A}^2} \right]. \quad (43)$$

Интегрирование функции  $w_2(A, \varphi)$  по  $d\varphi$  приводит к одномерной плотности распределения огибающей

$$w_1(A) = \frac{A}{\mathfrak{A}^2} \exp \left[ - \frac{A^2 + A_s^2(t)}{2\mathfrak{A}^2} \right] I_0 \left[ \frac{AA_s(t)}{\mathfrak{A}^2} \right], \quad (44)$$

где  $A_s(t)$  — медленно изменяющаяся (по сравнению с  $e^{-i\omega_0 t}$ ) амплитуда регулярной составляющей, а  $I_0$  — функция Бесселя от мнимого аргумента. Распределение (44) называется обобщенным распределением Рэлея и при  $A_s \rightarrow 0$  переходит в (41). Для фазы  $\varphi(t)$  также можно получить одномерную плотность распределения, интегрируя (43) по  $dA$  от 0 до  $\infty$ :

$$w_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{A_s^2}{2\mathfrak{A}^2} \right\} + \frac{A_s \cos(\varphi - \varphi_s)}{\mathfrak{A} \sqrt{2\pi}} F \left[ \frac{A_s}{\mathfrak{A}} \cos(\varphi - \varphi_s) \right] \exp \left\{ - \frac{A_s^2}{2\mathfrak{A}^2} \sin^2(\varphi - \varphi_s) \right\}, \quad (45)$$

где через  $F$  обозначена функция ошибок (интеграл вероятностей)

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi. \quad (46)$$



Корреляционные функции амплитуды и фазы узкополосного нормального процесса  $E(t)$  могут быть определены по известной функции корреляции  $K(\tau)$  полного поля [см. (10)]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_A(\tau) &= \overline{A(t) A(t+\tau)} = \\ &= \frac{\pi}{2} \mathfrak{H}^2 \left\{ 1 + \frac{K^2(\tau)}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n} (n!)^2} K^{2n}(\tau) \right\} = \\ &= \mathfrak{H}^2 \{ 2E[K(\tau)] - [1 - K^2(\tau)] \} \mathfrak{H}[K(\tau)], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\mathfrak{R}_\varphi(\tau) = \overline{\varphi(t) \varphi(t+\tau)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^2 (n+r/2)}{n! (n+r)!} K^{(r+2n)}(\tau), \quad (48)$$

где  $E$  и  $\mathfrak{H}$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Корреляционные функции интенсивности  $I = |A|^2$  и косинуса фазы имеют при этом вид

$$\mathfrak{R}_{A^2}(\tau) = \overline{I(t) I(t+\tau)} = 4\sigma^2 [1 + K^2(\tau)] \quad (49)$$

$$\mathfrak{R}_{\cos \varphi}(\tau) = \overline{\cos \varphi(t) \cos \varphi(t+\tau)} = \frac{E[K(\tau)] - [1 - K^2(\tau)] \mathfrak{H}[K(\tau)]}{2K(\tau)}. \quad (50)$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для более сложного поля, являющегося суперпозицией регулярного сигнала и узкополосного нормального или пуассоновского шума [107] — [112].

В следующих главах при решении различных задач рассеяния на статистически неровных поверхностях мы ограничимся вычислением только среднего поля  $\bar{E}$  (т. е. регулярной компоненты рассеянного поля) и вторых моментов  $\overline{E_i(\mathbf{R}, t) E_k^*(\mathbf{R}', t')}$ . Эти величины исчерпывающим образом описывают нормально распределенное случайное поле  $E(\mathbf{R}, t)$ , амплитудные и фазовые характеристики которого могут быть определены в каждом конкретном случае по формулам (41) — (50). Если поле распределено по закону Пуассона, то аналогичные формулы можно найти в работах [112] — [114]. Вопрос же о том, в каких именно случаях рассеянное поле имеет нормальное, пуассоновское или более сложное распределение, мы обсуждать, как правило, не будем.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ С МАЛЫМИ ПОЛОГИМИ НЕРОВНОСТЯМИ

### § 5. Распространение звука над абсолютно мягкой статистически неровной поверхностью

Реальные поверхности, над которыми распространяются волны, как правило, являются статистически неровными. Характер этих неровностей обычно настолько разнообразен, что, как уже указывалось выше, построение общей теории весьма затруднительно. Есть, однако, предельные случаи, когда такую теорию можно создать. Это, в частности, возможно, когда неровности являются малыми и пологими. Физически это означает, что каждая неровность слабо искажает падающее на нее поле. Суммарное же действие многих неровностей из-за многократного рассеяния может быть весьма велико.

Рассмотрим падение волны на какую-либо неровность высоты  $\zeta$ . Влияние отдельной неровности можно считать малым, если

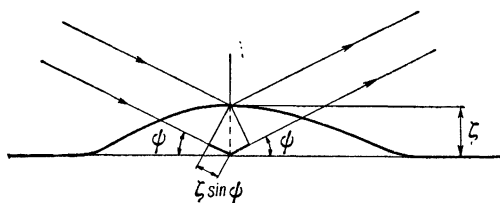


Рис. 5.

разность фаз между волнами, отразившимися от подножия и вершины неровности, будет мала. Из рисунка 5 видно, что эта разность фаз  $\delta\varphi$  определяется формулой

$$\delta\varphi = 2k\zeta \sin \psi, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad (1)$$

где  $\psi$  — угол скольжения. Условно считая сдвиг фаз между лучами, отразившимися от основания и вершины неровности, несущественным, если он меньше  $\pi/2$ , мы получим из (1) следующий критерий малости неровностей:

$$2k\zeta \sin \psi \ll \pi/2. \quad (2)$$

Этот критерий называется критерием Рэля. Заметим, что слабость влияния неровности на распространение волн определяется

двумя факторами: углом скольжения и соотношением между длиной волны и высотой неровности. Чем длиннее волна и меньше угол скольжения, тем слабее влияние неровностей.

На практике обычно приходится иметь дело с рассеянием волны не на одной изолированной неровности, а на статистически неровном участке. При этом суммарное влияние многих малых, в указанном выше смысле, неровностей на характер распространяющегося поля может быть не мало из-за многократного рассеяния, которое, очевидно, наиболее существенно при скользящем распространении. Рассмотрим это обстоятельство несколько подробнее. Влияние отдельной неровности сводится к тому, что часть энергии падающей на нее волны рассеивается во всех направлениях. Энергия рассеянной волны черпается из энергии среднего поля, вследствие чего среднее поле ослабляется. Если неровность мала, то это ослабление незначительно. Однако при скользящем распространении поле рассеивается на многих неровностях, так что при достаточной длине трассы ослабление среднего поля может быть значительным.

Итак, наличие большого количества неровностей приводит к появлению волн, рассеянных в незеркальном направлении, и к ослаблению среднего поля. Необходимо заметить, что второй эффект является существенным в том случае, если свойства поверхности, над которой распространяются волны, таковы; что поле слабо проникает в нижнее полупространство под эту поверхность. Это соответствует хорошо проводящей поверхности в электродинамике и достаточно жесткой поверхности в акустике. Это обстоятельство связано с тем, что если поле глубоко проникает в нижнее полупространство, то изменение падающего поля за счет «заваливания» его вниз будет сильнее, чем за счет рассеяния его вверх, т. е. последний эффект может оказаться пренебрежимо малым (напоминаем, что эффект ослабления среднего поля за счет его рассеяния на неровностях существен лишь при достаточно длинных трассах).

Распространение звуковых и электромагнитных волн над статистически неровной поверхностью имеет ряд общих черт. Однако на примере звуковых волн значительно проще установить ряд общих закономерностей, ибо здесь мы имеем дело со скалярной задачей \*).

Граничное условие для поля  $U$  в верхнем полупространстве на абсолютно мягкой поверхности согласно (1.51) имеет вид

$$U(\mathbf{r})|_{z=\zeta(\mathbf{r})} = 0, \text{ где } \mathbf{r} = \{x, y\}. \quad (3)$$

\*) Мы не рассматриваем рассеяния звуковых волн на шероховатой границе жидкости и твердого тела. Уравнения распространения волн являются в этом случае векторными и, хотя задача рассеяния в принципе аналогична скалярной, однако исследование здесь оказывается существенно более громоздким (см. [406]).

Здесь  $z = \zeta(\mathbf{r})$  — уравнение поверхности раздела. Разложим  $U$  в ряд по степеням  $\zeta(\mathbf{r})$ , тем самым перенеся граничное условие (3) с поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r})$  на плоскость  $z = 0$ . Удерживая первые два члена разложения, получим такие граничные условия на плоскости

$$U(\mathbf{r}) + \zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0. \quad (4)$$

Представим поле  $U$  в виде суммы среднего значения  $\bar{U}$  и флуктуационного поля  $u$ , а затем выведем граничные условия для  $\bar{U}$  и  $u$ . С этой целью усредним (4) и вычтем усредненные граничные условия из неусредненных. В результате имеем

$$\bar{U}(\mathbf{r}) + \overline{\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} \zeta(\mathbf{r})} = 0; \quad (5a)$$

$$u(\mathbf{r}) + \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r})}{\partial z} \zeta(\mathbf{r}) = 0. \quad (5b)$$

При выводе (5b) мы пренебрегли членами  $\frac{\partial u}{\partial z} \zeta - \overline{\frac{\partial u}{\partial z} \zeta}$ . Условия, при которых это закономерно, будут приведены в конце параграфа. Зная  $u$  на поверхности  $z = 0$  и используя формулу (1.9), можно найти  $u$  в полупространстве  $z > 0$

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z'=0} e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \zeta(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по  $z$ , подставляя  $\partial u/\partial z$  в уравнение (5a) и устремляя  $z$  к нулю, получим граничное условие для  $\bar{U}$  (см. [115]):

$$\bar{U}(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma^2}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{z'=0} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2+z^2})}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} W(\rho) d\mathbf{r}'. \quad (7)$$

Здесь по-прежнему введены такие обозначения:

$$\overline{\zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}')} = \sigma^2 W(\rho); \quad \rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}; \quad \sigma^2 = \overline{\zeta^2}. \quad (8)$$

Предполагая, что  $\sigma$  от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  не зависит, а  $W$  зависит только от  $\rho$ , мы тем самым считаем поверхность  $z = \zeta(\mathbf{r})$  статистически однородной.

Интересно отметить следующую особенность граничного условия (7). Это граничное условие является нелокальным. Значение функции на поверхности связано с ее нормальной производной интегральным соотношением. Как видно из (7), ядро интегрального оператора изменяется на расстояниях порядка  $\min(\lambda, l)$  ( $\lambda = k^{-1}$ ,  $l$  — характерный радиус корреляции неровной поверхности).

Физическая сущность нелокальности граничных условий заключается в том, что если  $l \lesssim \lambda$ , то статистическая связь неровностей поверхности на расстояниях  $l$  приводит к нелокальной связи между  $\bar{U}$  и  $\frac{\partial U}{\partial z}$ . Если же  $l \gtrsim \lambda$ , то связь между этими величинами в разных точках обуславливается конечностью длины звуковой волны. Пользуясь граничными условиями (7), рассмотрим задачу об отражении плоской волны  $A \exp \{i[\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} + k_z z]\}$  ( $k_z < 0$ ) от статистически неровной поверхности. Звуковое поле  $\bar{U}$  будем искать, как обычно, в виде суммы падающей и отраженной волн

$$\bar{U}(\mathbf{r}, z) = A \{e^{i[\mathbf{k}_\perp \mathbf{r} + k_z z]} + V e^{i[\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{r} + \kappa_z z]}\}. \quad (9)$$

Здесь  $A$  — амплитуда падающей волны, а  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$ , как всегда, удовлетворяют соотношениям (1.23). Подставим (9) в (7) и произведем замену переменных интегрирования, перейдя от интегрирования по  $\mathbf{r}'$  к интегрированию по  $\boldsymbol{\rho}$ . Полагая  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$ , получим

$$e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} + V e^{i\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{r}} + \frac{i\sigma^2}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{V\rho^2 + z^2} W(\boldsymbol{\rho}) \times \\ \times [k_z e^{i(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})} + V \kappa_z e^{i(\boldsymbol{\kappa}_\perp, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})}] d\boldsymbol{\rho} = 0. \quad (10)$$

Индекс  $\perp$  означает, что вектор имеет только компоненты  $x$  и  $y$ . Равенство (10) должно иметь место при всех значениях  $\mathbf{r}$ , что возможно только при  $\boldsymbol{\kappa}_\perp = \mathbf{k}_\perp$ . Это соотношение, как было показано в первой главе, является математической формулировкой закона Снеллиуса. Из вывода закона Снеллиуса вытекает, что его выполнение связано со статистической однородностью поверхности и не зависит от явного вида функции корреляции.

Найдем коэффициент отражения. Сокращая обе части (10) на  $e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}}$  и решая получившееся уравнение относительно  $V$ , получим

$$V = -1 + 2 \cos \vartheta \eta_\mu(\vartheta, \varphi), \quad (11)$$

где эффективный адмитанс (величина, обратная импедансу) статистически неровной поверхности определяется следующим равенством:

$$\eta_\mu(\vartheta, \varphi) = ik \frac{\sigma^2}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{V\rho^2 + z^2} W(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{e}} d\boldsymbol{\rho}, \quad (12)$$

$\vartheta$  — угол падения,  $\varphi$  — азимутальный угол. Вектор  $\mathbf{k}$  имеет компоненты  $k \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $k \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $-k \cos \vartheta$ . Нужно отметить, что эффективный адмитанс, описываемый формулой (12), по своему физическому смыслу существенно отличается от обычного адмитанса. В обычном случае адмитанс является характеристикой поверхности, над которой распространяются волны,

и описывает ее поглощающие свойства. Здесь адмитанс описывает рассеивающие свойства. Убыль среднего поля в нашем случае связана с перекачкой энергии из него в случайную составляющую. Характерным является зависимость адмитанса от угла падения и азимута  $\varphi$ . Это обстоятельство в нашем случае обусловлено нелокальностью граничного условия и, в конечном счете, анизотропией неровностей. Все сказанное в равной мере относится и к эффективному импедансу, который будет введен в следующие параграфы. При выводе (11) предполагалось, что в этой формуле интегральный член (12) много меньше единицы. Как будет показано ниже, это вытекает из условия применимости метода возмущений.

Ввиду того, что коэффициент отражения (11) не имеет никаких особенностей по  $\vartheta$  и  $\varphi$ , для поля точечного источника при любых углах можно пользоваться формулой (1.39).

Выражение (12) мы исследуем в двух предельных случаях: для изотропных неровностей, когда  $W$  зависит только от модуля вектора  $\rho$ , и для резко анизотропных неровностей, когда  $W$  является функцией  $\rho_x$ .

Если неровности изотропны, то в (12) удобно перейти к полярным координатам и проинтегрировать по углу, воспользовавшись формулой

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp} \sigma} d\varphi = 2\pi \mathcal{J}_0(k_{\perp} \rho) \quad (13)$$

( $\mathcal{J}_n$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $k_{\perp} = k \sin \vartheta$ ), а затем полученный интеграл преобразовать с помощью соотношения, найденного Фейнбергом ([20], стр. 97):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} \rho \mathcal{F}(\rho) \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2+z^2})}{\sqrt{\rho^2+z^2}} d\rho = -ik\mathcal{F}(0) - \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{F}}{d\rho} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\rho} d\rho. \quad (14)$$

Здесь  $\mathcal{F}(\rho)$  — произвольная дифференцируемая функция с обращаемой в нуль первой производной при  $\rho=0$ . Вывести эту формулу можно так. Непосредственно видно, что

$$\rho \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2+z^2})}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = -\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} \exp(ik\sqrt{\rho^2+z^2}).$$

Используя это соотношение и интегрируя по частям, получим (14). При выводе во внеинтегральном члене необходимо сначала подставить пределы интегрирования, а затем переходить к пределу  $z \rightarrow 0$ . Окончательная формула для эффективного адмитанса выглядит так:

$$\eta_{\mu}(\vartheta) = k\sigma^2 \left\{ k - i \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{d}{d\rho} [W(\rho) \mathcal{J}_0(k_{\perp} \rho)] d\rho \right\}. \quad (15)$$

Для исследования угловой и частотной зависимости коэффициента отражения необходимо знать явный вид функции корреляции. Однако в предельных случаях, к исследованию которых мы переходим, результаты получаются для произвольного вида этой функции. Будем предполагать, что функцию корреляции  $W(\rho)$  можно записать в виде

$$W(\rho) = w(\rho/l), \quad (16)$$

где функция  $w$  существенно убывает на расстояниях порядка единицы. Тем самым мы ограничиваемся одномасштабной функцией корреляции. Обобщение полученных ниже результатов на многомасштабную функцию корреляции не представляет труда. Предположим сначала, что  $kl \ll 1$ , т. е. приведенная длина волны много больше радиуса корреляции. Перейдя под интегралом в формуле (15) к новой переменной,  $x = \rho/l$ , и разложив подынтегральное выражение по степеням  $kl$ , получим

$$\eta_{\mu} \approx -i \frac{k\sigma^2}{l} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} dx. \quad (17)$$

Исследуем обратный предельный случай,  $kl \gg 1$ , т. е. когда приведенная длина волны много меньше радиуса корреляции. Асимптотика коэффициента отражения имеет разный вид при скользязщем и скользящем распространении. Рассмотрим сначала несколько иное распространение. Продифференцируем подынтегральное выражение в (15) и снова перейдем к переменной  $x$ :

$$\eta_{\mu} = k\sigma^2 \left\{ k - \frac{i}{l} \int_0^{\infty} \frac{e^{iklx}}{x} \left[ \frac{d\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx} w(x) + \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) \frac{dw(x)}{dx} \right] dx \right\}. \quad (18)$$

Очевидно, что  $w(x)$  — медленно меняющаяся функция по сравнению с  $e^{iklx}$  и  $\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)$ , в связи с чем ее можно разложить в ряд. Удерживая главные члены разложения и используя формулы (см. [116], стр. 757, 982)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}_0(z)}{dz} &= -\mathcal{J}_1(z), \\ \int_0^{\infty} \mathcal{J}_1(\gamma z) \frac{e^{iaz}}{z} dz &= \frac{i(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2})}{\gamma}, \\ \int_0^{\infty} z^n \mathcal{J}_1(\gamma z) e^{iaz} dz &= \frac{i}{\gamma} \frac{d^{n+1}}{d(i\alpha)^{n+1}} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}), \end{aligned}$$

придем к такому выражению для адмитанса:

$$\eta_{\mu} \approx k^2 \sigma^2 \cos \theta. \quad (19)$$

Оценивая отброшенные члены, найдем область углов, в которой применима формула (19). Эта область определяется неравенством

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta = \psi \gg \frac{1}{\sqrt{kl}}. \quad (20)$$

Перед вычислением асимптотики адмитанса для скользящего распространения преобразуем первое слагаемое в (18). Из уравнения для функции Бесселя следует, что

$$\frac{1}{x} \frac{d\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx} = -(k_{\perp}l)^2 \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) - \frac{d^2\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx^2}. \quad (21)$$

Подставив (21) в (18), преобразуем интеграл в (18) к такому виду:

$$\int_0^{\infty} e^{iklx} \left\{ \frac{\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{x} \frac{dw(x)}{dx} - \left[ \frac{d^2\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx^2} + (k_{\perp}l)^2 \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) \right] w(x) \right\} dx.$$

Это выражение можно существенно упростить, если воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{iklx} w(x) \frac{d^2\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx^2} dx &= \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx} \left[ iklw(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right] e^{iklx} dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{iklx} w(x) \frac{d\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx)}{dx} dx &= \\ &= -1 - \int_0^{\infty} \left[ iklw(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right] e^{iklx} \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) dx. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений адмитанс можно привести к виду

$$\begin{aligned} \eta_{\mu} = ik^2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{iklx} dx \left\{ [i\mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) + \mathcal{J}_1(k_{\perp}lx)] \frac{dw(x)}{dx} - \right. \\ \left. - kl \cos^2 \vartheta \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) w(x) - (klx)^{-1} \frac{dw(x)}{dx} \mathcal{J}_0(k_{\perp}lx) \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Последними двумя слагаемыми под интегралом в формуле (22) мы пренебрежем. Первое из них порядка  $\cos^2 \vartheta \simeq \psi^2$ . Эта величина



мала из-за малости  $\psi$  (распространение скользящее). Второе слагаемое мало из-за малости  $(kl)^{-1}$ . С этой же точностью можно в (22) положить  $k_{\perp} \simeq k$ .

Ввиду того, что в интеграле (22) основной вклад дает область  $k_{\perp} l x \gg 1$ , функции Бесселя в квадратной скобке в (22) можно заменить на их асимптотики:

$$i\mathcal{J}_0(z) + \mathcal{J}_1(z) \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(\pi/4 - z)} \quad \text{при } |z| \gg 1. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получим окончательно

$$\eta_{\mu} \approx \frac{2k^2\sigma^2}{\sqrt{2\pi kl}} e^{-3\pi i/4} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{dw}{dx}. \quad (24)$$

Безразмерные интегралы в формулах (17) и (24) являются величинами порядка единицы. Правомерность замены функций Бесселя на их асимптотику может быть доказана строго. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом доказательстве. Заметим только, что при этом не учитываются величины порядка  $(kl)^{-1}$ . Сравнивая удержанные слагаемые со слагаемыми отброшенными, мы получаем критерий применимости формулы (24):

$$\sqrt{kl} \gg 1; \quad kl\psi^2 \ll 1. \quad (25)$$

Аналогично можно рассмотреть и резкую анизотропию неровностей, когда поверхность задается уравнением  $z = \zeta(x)$ . Коэффициент отражения определяется и в этом случае формулой (11), а адмитанс  $\eta_{\mu}$  формулой (12). Для двумерных неровностей формула (12) может быть упрощена с помощью интегрирования, аналогичного тому, которое было проведено для трехмерных изотропных неровностей. После соответствующих вычислений получим

$$\eta_{\mu}(\vartheta, \varphi) = k\sigma^2 \left\{ \sqrt{k_x^2 + k_z^2} - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(x) \frac{d}{dx} [w(x) \cos k_x x] dx \right\}, \quad (26)$$

где

$$\mathcal{F}(x) \equiv x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i[(k_x^2 + k_z^2)(x^2 + y^2)]^{1/2}\}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy. \quad (27)$$

Из (26) следуют асимптотические формулы: при  $kl \ll 1$

$$\eta_{\mu} \approx -\frac{2i(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}\sigma^2}{\pi l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \cdot \frac{dw(x)}{dx}; \quad (28)$$

при  $kl \gg 1$ ,  $\psi \gg (kl)$

$$r_{\mu} \approx (k_x + k_z^2) \sigma^2 \cos \theta; \quad (29)$$

при  $\sqrt{kl} \gg 1$  и  $\psi \ll (kl)^{-1/2}$ , то

$$r_{\mu} \approx \frac{2\sigma^2 (k_x^2 + k_z^2)^{3/4} e^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi l}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{dw(x)}{dx}. \quad (30)$$

Как видно из формул (28) — (30), из-за анизотропии поверхности адмитанс зависит не только от угла падения  $\theta$ , но и от азимутального угла  $\varphi$ .

Определим теперь пределы применимости метода малых возмущений. Оценку мы сделаем для относительно простого случая абсолютно мягкой поверхности, однако результат не изменится, если рассмотреть абсолютно жесткую поверхность или электромагнитное поле.

При выводе формул (6), (7) мы отбросили слагаемое  $\frac{\partial u}{\partial z} \zeta - \frac{\partial u}{\partial z} \bar{\zeta}$ .

Оценим первый член этой суммы. Второй член оценивается аналогично и имеет тот же порядок величины. Представим  $u$  в виде разложения по неоднородным плоским волнам [см. формулу (1.26)]. Из формулы (1.26) следует при  $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \kappa_{\perp}^2} e^{i\kappa_{\perp} r} \tilde{u}(\kappa_{\perp}) d\kappa_{\perp}. \quad (31)$$

Из формулы (5б) вытекает

$$\tilde{u}(\kappa_{\perp}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial z} \zeta(r) e^{-i\kappa_{\perp} r} dr. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31) и используя формулу (9) для  $U$ , окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -Ak_z(1-V) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(\kappa_{\perp} - k_{\perp}) \sqrt{k^2 - \kappa_{\perp}^2} e^{i\kappa_{\perp} r} d\kappa_{\perp}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{\zeta}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(r) e^{-iqr} dr.$$

Для того чтобы членом  $\zeta \frac{\partial u}{\partial z}$  можно было бы пренебречь по сравнению с  $u$ , должно выполняться неравенство

$$|u| \gg \left| \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \right|, \quad (34)$$

или, учитывая формулы (56) и (33),

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \kappa_{\perp}^2} \tilde{\zeta}(\kappa_{\perp} - k_{\perp}) e^{i\kappa_{\perp} \cdot r} d\kappa \right| \ll 1. \quad (35)$$

Сделав замену переменных  $\kappa_{\perp} - k_{\perp} \rightarrow q$ , преобразуем (35) к виду

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - (k_{\perp} + q)^2} \zeta(q) e^{i(q + k_{\perp}) \cdot r} dq \right| \ll 1. \quad (36)$$

Левую часть этого неравенства можно записать так:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - (k_{\perp} + q)^2} \zeta(q) e^{i(k_{\perp} + q) \cdot r} dq \right| = \\ = \left| \sqrt{k^2 - (k_{\perp} - i\nabla_{\perp})^2} \zeta(r) \right|. \end{aligned} \quad (37)$$

Полагая для оценки  $\nabla \zeta \simeq \frac{2\pi}{l} \zeta$ , получим

$$\left| \zeta \sqrt{k^2 - \left(k_{\perp} + \frac{2\pi}{l}\right)^2} \right| \ll 1. \quad (38)$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

Если падение несскользящее и  $k_{\perp} \gg 2\pi/l$ , то (38) приобретает вид

$$k\zeta \sin \psi \ll 1. \quad (39)$$

При скользящем падении  $k_{\perp} \simeq k$  и из (38) получим (см. [20]):

$$\zeta \sqrt{\frac{2\pi k}{l}} \ll 1. \quad (40)$$

Наконец, если  $k \ll 2\pi/l$ , то при произвольных углах падения неравенство (38) запишется так:

$$2\pi\zeta/l \ll 1. \quad (41)$$

Так как неровности статистичны, то достаточно потребовать выполнения всех этих неравенств [начиная с (34)] для наиболее вероятной области значений  $\zeta$ , например, в интервале, равном дисперсии распределения. Это приводит к замене в неравенствах (38)–(41)  $\zeta$  на  $\sigma$ . Отметим также, что при написании (4) мы пренебрегли членами  $\zeta^2 \partial^2 U / \partial z^2$ . Эти члены по меньшей мере порядка  $\zeta^3$ , в то время как вся теория строится лишь с учетом величин порядка  $\zeta^2$ . Действительно, подставив в отброшенный член  $\zeta^2 \partial^2 U / \partial z^2$  величину  $U$  из формул (5), убедимся, что это действительно так.

### § 6. Распространение звука над импедансной статистически неровной поверхностью

Рассмотрим теперь поверхность с импедансным граничным условием, имеющим следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = -ik\eta U \quad \text{при } z = \xi(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Разлагая (1) по  $\xi$ , удерживая два первых члена разложения и производя усреднение, найдем в первом приближении теории возмущений для  $\bar{U}$  и  $u$  граничные условия на поверхности  $z=0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} &= \gamma \nabla_r u - \xi \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - ik\eta \bar{U}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \gamma \nabla_r \bar{U} - \xi \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2}; \quad \gamma \equiv \nabla_r \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $\nabla_r$  — вектор с компонентами  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ .

При выводе формулы мы учли, что

$$\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\frac{\partial}{\partial z} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y}}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}}, \quad \gamma_x, \gamma_y = \frac{\partial \xi}{\partial x, y}.$$

Во второй из формул (2) мы пренебрегли величиной второго порядка малости  $k\eta u$  и величинами более высокого порядка. С помощью формулы (1.25) и второго выражения в формуле (2) можно найти  $u$  в любой точке верхнего полупространства:

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_{z'=0} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \left\{ \xi(\mathbf{r}') \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z'^2} - \gamma \nabla_{r'} \bar{U} \right\} d\mathbf{r}', \quad (3)$$

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{r}, z\}, \quad \rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}.$$

Подставляя (3) в первую из формул (2), находим нелокальное граничное условие для среднего поля (см. [117])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r})}{\partial z} &= -\frac{\sigma^2}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{z'=0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'^2} W(\rho) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial r'_i} \cdot \frac{\partial W(\rho)}{\partial r'_i} \right] - \left( \frac{\partial}{\partial r'_i} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) \left[ \frac{\partial W(\rho)}{\partial r'_i} \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\rho)}{\partial r'_i \partial r'_j} \cdot \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial r'_i} \right] \right\} d\mathbf{r}' - ik\eta \bar{U}(\mathbf{r}). \quad (4) \end{aligned}$$

По повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  в (4) производится суммирование от 1 до 2. При выводе (4) мы предполагали поверхность

статистически однородной, откуда следует, что закон Снеллиуса выполняется и в этом случае. Будем искать  $U$  в виде (5.9). Если неровная поверхность является статистически изотропной, то из (4), аналогично тому, как это было сделано в § 5, можно получить формулу для коэффициента отражения

$$V(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta - \eta_g(\vartheta)}{\cos \vartheta + \eta_g(\vartheta)}, \quad (5)$$

где эффективный импеданс  $\eta_g(\vartheta)$  определяется так:

$$\eta_g(\vartheta) = \eta + k_z^2 \sigma^2 - i \frac{\sigma^2}{k} \int_0^\infty \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \left\{ \left[ (ik^3 \rho - k_\perp^2) \mathcal{Y}_0(k_\perp \rho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_\perp}{\rho} (1 - ik\rho - k^2 \rho^2) \mathcal{Y}_1(k_\perp \rho) \right] \frac{dW(\rho)}{d\rho} - k_\perp k_z^2 \mathcal{Y}_1(k_\perp \rho) W(\rho) \right\} d\rho. \quad (6)$$

Легко проверить непосредственно, что  $\bar{U}$  удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -ik \eta_g \bar{U} \quad \text{при } z=0. \quad (7)$$

Это граничное условие по внешнему виду совпадает с граничным условием Леонтовича, с той только разницей, что в формуле (7) импеданс  $\eta_g$  зависит не только от свойств рассеивающей поверхности, но и от углов падения.

Таким же точно образом, как и в предыдущем параграфе, найдем выражение для эффективного импеданса в предельных случаях:

$$\eta_g(\vartheta) \approx \eta + i \frac{k\sigma^2 \sin^2 \vartheta}{2l} \int_0^\infty \frac{dx \, dw}{x \, dx} \quad \text{при } kl \ll 1; \quad (8a)$$

$$\eta_g(\vartheta) \approx \eta + k^2 \sigma^2 \cos^3 \vartheta \quad \text{при } kl \gg 1; \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta = \psi \gg \frac{1}{\sqrt{kl}}; \quad (8b)$$

$$\eta_g(\vartheta) \approx \eta + \frac{\sigma^2 \sqrt{kl}}{2\sqrt{2\pi} l^2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \int_0^\infty \frac{dx \, dw(x)}{x^{3/2} dx},$$

$$\text{при } (kl)^{1/2} \gg 1, \quad \psi \ll \frac{1}{\sqrt{kl}}. \quad (8b)$$

Рассмотрим теперь поле точечного источника над статистически неровной импедансной поверхностью. Отраженное поле при произвольном коэффициенте отражения описывается формулой (1.38). Эта формула на больших расстояниях переходит в (1.39), если выполнен критерий (1.50), который для нашего случая

перепишется так:

$$k(z_0 + z) \gg \left| \frac{\eta_{\max}}{(\cos \theta + \eta_{\max})^2} \right|. \quad (9)$$

Через  $\eta|_{\max}$  в (9) обозначено максимальное значение  $|\eta_g|$ . При скользящем распространении волны от точечного источника нужно учесть полюс коэффициента отражения. Точка, в которой  $V(\theta)$  имеет полюс, определяется согласно (5) уравнением

$$\cos \theta = -\eta_g(\theta). \quad (10)$$

Так как  $|\eta_g(\theta)| \ll 1$ , то это уравнение можно решать методом последовательных приближений. Положив в первом приближении  $\eta_g = 0$ , найдем  $\theta = \pi/2$ . Следующее приближение получается подстановкой в правую часть (10)  $\theta = \pi/2$ . Окончательно для угла  $\theta_p$ , соответствующего полюсу, найдем такое выражение:

$$\cos \theta_p = -\eta_g(\pi/2). \quad (11)$$

Применяя к (1.38) с  $V(\theta)$  из (5) модифицированный метод перевала (модификация связана с близостью полюса к перевальной точке), мы снова получим для  $\bar{U}$  формулы (1.44)–(1.46), в которых  $\eta$  нужно заменить на  $\eta_g(\pi/2)$ . Этот фундаментальный результат был впервые получен Фейнбергом [20].

Над статистически неровной поверхностью при  $kl \ll 1$  могут распространяться так называемые поверхностные волны, амплитуда которых убывает по мере удаления от поверхности существенно быстрее, чем волна затухает вдоль поверхности. Будем искать  $\bar{U}$  в виде

$$\bar{U} = A \exp [i(k_z z + k_{\perp} r)]; \quad (12)$$

подставив (12) в (7) и произведя обычные преобразования, мы придем к уравнению для  $k_z$ :

$$k_z = -k\eta_g(k_z, k_{\perp}), \quad (13)$$

где  $\eta_g(k_z, k_{\perp})$  определяется формулой (6). Это уравнение ввиду малости  $|\eta|$  также можно решать методом последовательных приближений. Выбрав в качестве нулевого приближения  $k_z = 0$ ,  $k_{\perp} = k$ , окончательно получим

$$k_z = -k\eta_g(\pi/2). \quad (14)$$

Будем считать поверхность абсолютно жесткой и положим в (6)  $\eta = 0$ . (Над абсолютно мягкой поверхностью поверхностная волна не распространяется.) Для того чтобы волна была поверхностной, т. е. чтобы ее амплитуда убывала по мере удаления от поверхности, величина  $k_z$  в (12) должна быть мнимой с положительной мнимой частью. Из (14) видно, что это выполняется при  $\eta_g(\pi/2)$  с отрицательной мнимой частью, что имеет место, если  $kl \ll 1$  [см. 8а)].

Подставив (8а) в (14), окончательно имеем

$$k_z = -i \frac{k^2 \sigma^2}{2l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{dw(x)}{dx}. \quad (15)$$

Представляет интерес найти фазовую скорость поверхностной волны. Фазовая скорость  $v_\phi$  определяется соотношением

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_\perp}. \quad (16)$$

Из волнового уравнения следует, что  $k_\perp = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ . Так как в нашей задаче  $k_z \ll k$ , то  $k_\perp \approx k(1 - k_z^2/2k^2)$ . С учетом этого обстоятельства и (16), найдем для  $v_\phi$  такую формулу,

$$v_\phi = v_\phi^0 \left[ 1 - \frac{k^2 \sigma^4}{8l^2} \left( \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{dw}{dx} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где  $v_\phi^0 = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость волны в свободном пространстве.

Из (17) вытекает, что  $v_\phi < v_\phi^0$ , т. е. поверхностная волна является замедленной. На возможность распространения поверхностных волн над статистически неровной поверхностью впервые указал Райс [118]. Позднее этот вопрос также изучался в наших работах [115], [117].

Аналогично тому, как это делалось для абсолютно мягкой поверхности, из (4) можно получить эффективный импеданс для двумерной статистически неровной импедансной поверхности. Соответствующие формулы имеют вид

$$\eta_g = \eta + \frac{\sigma^2}{k'} \left\{ k' k_z^2 + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{dH_0^{(1)}(k'x)}{dx} \left[ k_z^2 \cos k_x x \frac{dW(x)}{dx} + ik_x \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \sin k_x x \right] - \frac{i}{\pi} \mathcal{F}(x) \frac{d}{dx} \left[ k_z^2 \cos k_x x W(x) + ik_x \sin k_x x \frac{dW(x)}{dx} \right] \right\} dx \right\}, \quad (18)$$

где  $k' = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$ ;  $H_0^{(1)}$  — функция Ганкеля первого рода, а  $\mathcal{F}(x)$  определяется формулой (5.27). В предельных случаях имеем:

$$\eta_g(\vartheta, \varphi) \approx \eta + i \frac{k' \sin^2 \vartheta \sigma^2}{2l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{dw(x)}{dx}, \quad \text{при } kl \ll 1, \quad (19a)$$

$$\eta_g(\vartheta, \varphi) \approx \eta + k'^2 \sigma^2 \cos^3 \vartheta, \quad \text{при } kl \gg 1, \quad \psi \gg (kl)^{-1/2}, \quad (19b)$$

$$\eta_g(\vartheta, \varphi) \approx \eta + \frac{\sigma^2 \sqrt{k'l}}{2\sqrt{2\pi} l^2} e^{\frac{3\pi}{4} i} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \frac{dw(x)}{dx}, \quad \text{при } \sqrt{kl} \gg 1,$$

$$\psi \ll (kl)^{-1/2}. \quad (19b)$$

Здесь также введена функция корреляции  $\omega$  безразмерного аргумента, определяемая соотношением (5.16). Отметим, что при скользящем распространении вдоль гребней неровностей ( $k' = 0$ ), они вклада в импеданс не дают. Таким же образом, как и для изотропных неровностей, можно рассмотреть поверхностные волны. При этом

$$k_z = -i \frac{k k_x \sigma^2}{2l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{d\omega(x)}{dx}, \quad (20)$$

$$v_{\Phi} = v_{\Phi}^0 \left[ 1 - \frac{k_x^2 \sigma^2}{8l^2} \left( \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{d\omega(x)}{dx} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

### § 7. Граничные условия для среднего и флуктуационного электромагнитного полей

Как указывалось в § 4, рассеяние волн на малых неровностях сказывается на среднем поле только в случае хорошей проводимости неровной поверхности. Поэтому мы будем исходить из граничных условий Леонтовича (2.43), которые на поверхности  $z = \zeta(x, y)$  можно записать так:

$$[N, E] = \eta [N, H], \quad (1)$$

где  $E$  и  $H$  полные электрические и магнитные поля, а нормаль  $N$  к поверхности  $z = \zeta(x, y)$  имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} N_{x,y} &= -\gamma_{x,y} (1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{-1/2}; \\ N_z &= (1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{-1/2}, \quad \gamma_{x,y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x, y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем от граничных условий на поверхности  $z = \zeta(x, y)$  к граничным условиям на поверхности  $z = 0$ . Для этого разложим  $E$  и  $H$  по степеням  $\zeta$ , ограничившись первыми двумя членами разложения и подставим их в (1). Граничные условия на поверхности  $z = 0$  в компонентах имеют вид

$$E_{x,y} = -\gamma_{x,y} E_z - \zeta \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \mp \eta H_{y,x}. \quad (3)$$

Представим случайные поля в виде суммы среднего значения и флуктуации:

$$E = \mathcal{E} + e, \quad H = \mathcal{H} + h. \quad (4)$$

Через  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  обозначены средние величины, а через  $e$ ,  $h$  — флуктуации. Усреднив соотношение (3), мы получим граничные



условия для средних полей (см. [52], [115], [119])

$$\mathcal{E}_{x,y} = -\overline{\gamma_{x,y} e_z} - \zeta \frac{\partial e_{x,y}}{\partial z} + \eta \mathcal{H}_{y,x}. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (3), найдем граничные условия для флуктуаций полей

$$e_{x,y} = -\gamma_{x,y} \mathcal{E}_z - \zeta \frac{\partial \mathcal{E}_{x,y}}{\partial z}. \quad (6)$$

При выводе (6) из (3) был сделан ряд пренебрежений, оценка правомерности которых проводится аналогично тому, как это было сделано в § 5. Критерии применимости граничных условий (5), (6) определяются формулами (5.38) — (5.41).

Для того чтобы получить граничные условия для среднего поля в замкнутой форме, необходимо исключить флуктуационные составляющие из (5). Это можно сделать с помощью (6). Действительно, согласно формуле (2.10)

$$e_i(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{z'=0} \left[ e(\mathbf{r}'), n(\mathbf{r}') \right] \mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', 0) d\mathbf{r}', \quad (7)$$

$n$  — нормаль к поверхности  $z=0$ , на которой заданы тангенциальные составляющие электрического поля  $e_{x,y}$ ;  $x, y$  и  $z$  составляют произвольную ортогональную систему координат;  $\mathcal{G}^{(i)}$  — введено в формуле (2.10).

Производные от  $e_i(\mathbf{r}, z)$  по  $z$  находятся дифференцированием формулы (7) по  $z$ , что сводится к замене в (7)  $\mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', 0)$  на  $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', 0)$ .

Тангенциальные составляющие флуктуационного поля определяются через средние поля формулами (6). Подставляя (6) в (7) и выбирая ось единичного диполя вдоль оси  $z$ , находим  $e_z$  на поверхности. Аналогично находятся величины  $\frac{\partial}{\partial z} e_x(\mathbf{r}, 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} e_y(\mathbf{r}, 0)$ . Таким образом, мы выражаем все величины, входящие в (5), через  $\mathcal{E}$ , и, производя усреднение, получаем граничные условия для среднего поля. Эти граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\mathbf{r}, 0) = & \frac{1}{4\pi} \int \left\{ A_k^{(z)}(\mathbf{r}, 0; \mathbf{r}', 0) \left[ \overline{\gamma_k(\mathbf{r}') \gamma_i(\mathbf{r})} \mathcal{E}_z(\mathbf{r}', 0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\zeta(\mathbf{r}') \gamma_i(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_k(\mathbf{r}', 0) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} A_k^{(i)}(\mathbf{r}, 0; \mathbf{r}', 0) \left[ \overline{\gamma_k(\mathbf{r}') \zeta(\mathbf{r})} \mathcal{E}_z(\mathbf{r}', 0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\zeta(\mathbf{r}') \zeta(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_k(\mathbf{r}', 0) \right] \right\} d\mathbf{r}' + \eta \sigma_i \mathcal{H}_j; \quad \sigma_i = \begin{cases} -1 & i=x, \\ 1 & i=y, \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

где вектор  $A^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', 0) = [n(\mathbf{r}'), \mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', 0)]$ ; индексы  $i, k$  и  $j$  принимают значения  $x$  и  $y$ , причем, когда  $i=x$ , то  $j=y$ , а когда  $i=y$ , то  $j=x$ .

В формуле (8) интегрирование производится по средней поверхности  $z = 0$ . Приведенный вывод остается в силе, если средняя поверхность не является плоской. Действительно, существенная область интегрирования в формуле (8) определяется произведениями типа  $A^{(z)}(\mathbf{r}, 0; \mathbf{r}', 0) \zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}')$ . Первый множитель в этом произведении  $A^{(z)}$  по мере роста расстояния между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  вдоль поверхности  $z = 0$  осциллирует, причем характерной длиной осцилляции является  $\lambda = k^{-1}$ . Второй множитель  $\zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}')$  с ростом этого расстояния убывает из-за уменьшения корреляции между случайными неровностями, причем для этого множителя характерным размером, на котором он убывает, является радиус корреляции  $l$ . Таким образом, существенная область интегрирования в (8) является окрестностью точки  $\mathbf{r}$  и имеет размеры порядка  $\min(\lambda, l)$ . Если радиус кривизны поверхности  $z = 0$  много больше  $\min(\lambda, l)$ , то существенную область интегрирования можно считать плоской с бесконечными размерами\*). В этой главе будет рассматриваться только такой случай.

Вспомогательные поля  $\mathcal{G}^{(i)}$  при плоской поверхности  $z = 0$  удобно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z') &= \text{rot } \Pi^{(i)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z'); \\ \Pi_x^{(x, y)}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z') &= \mathcal{G}_+(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z'); \quad \Pi_z^{(x, y)} = \Pi_y^{(x, y)} = 0; \\ \Pi_x^z &= \Pi_y^z = \mathcal{G}_-(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z'); \\ \mathcal{G}_\pm(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z') &= \frac{\exp(ik\sqrt{(r-r')^2 + (z-z')^2}) \pm}{\sqrt{(r-r')^2 + (z-z')^2}} + \\ &\quad + \frac{\exp(ik\sqrt{(r-r')^2 + (z+z')^2})}{\sqrt{(r-r')^2 + (z+z')^2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

После весьма громоздких, но несложных преобразований, с помощью (9) формулу (8) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x, y}(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \left[ \Delta\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x, y}} \mathcal{E}_z(\mathbf{r}') - \nabla\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x, y}} \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{E}_z(\mathbf{r}') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x, y}} \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_\perp(\mathbf{r}') - \nabla\rho \frac{W(\rho)}{\partial \rho_{x, y}} \frac{\partial \mathcal{E}_\perp(\mathbf{r}')}{\partial z} \right] d\mathbf{r}' + \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\partial z^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \left[ \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x, y}} \mathcal{E}_z(\mathbf{r}') - W(\rho) \frac{\partial \mathcal{E}_{x, y}(\mathbf{r}')}{\partial z} \right] d\mathbf{r}' \mp \\ &\quad \mp \eta \mathcal{H}_{y, x}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (10)$$

\*) При скользящем распространении может представиться случай, когда произведение  $\mathcal{E}_k$  является функцией, меняющейся на расстояниях много больших  $\lambda$ . При этом эффективная область интегрирования имеет размеры порядка  $\lambda$ .

Здесь  $\nabla_\rho$  — вектор с компонентами  $\{\partial/\partial\rho_x, \partial/\partial\rho_y\}$ ,  $\Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho_y^2}$ ,  $\rho = r - r'$ ,  $\mathcal{E}_\perp$  — вектор с компонентами  $\{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y\}$ . При выводе (10) поверхность  $z = \zeta(x, y)$  предполагалась статистически однородной.

Исследуем теперь отражение плоских электромагнитных волн статистически однородной поверхностью. Как и в § 4, из статистической однородности поверхности для электромагнитного поля вытекают законы Снеллиуса. Рассмотрим сначала статистически изотропную поверхность, т. е. будем предполагать, что функция корреляции зависит только от модуля  $\rho$ . В этом случае в силу изотропии поверхности результаты не изменятся, если в качестве плоскости падения выбрать плоскость  $\{x, z\}$ . Уравнения Максвелла при этом распадутся на две независимые системы, одна из которых описывает горизонтально поляризованную волну, а другая — вертикально поляризованную волну. Такое распадение характерно лишь для среднего поля и обусловлено исключительно изотропией неровностей.

Как указывалось в § 2 гл. I, горизонтально поляризованное поле имеет следующие компоненты, не равные нулю:  $\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{H}_x$  и  $\mathcal{H}_z$ . Из уравнений Максвелла получим

$$\mathcal{H}_x = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_y; \quad \mathcal{H}_z = -\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}_y. \quad (11)$$

Будем искать  $\mathcal{E}_y$  в виде

$$\mathcal{E}_y = [e^{ikz} + V_r(\theta) e^{-ikz}] e^{ikx}, \quad (12)$$

где  $V_r(\theta)$  — коэффициент отражения. Из (12) следуют выражения для  $\mathcal{H}_x$  и  $\mathcal{H}_z$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= -\frac{k_z}{k} [e^{ikz} - V_r(\theta) e^{-ikz}] e^{ikx}; \\ \mathcal{H}_z &= \frac{k_x}{k} e^{ikz} + V_r(\theta) e^{-ikz} e^{ikx}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (10) и производя выкладки, совершенно аналогичные тем, которые были проведены в § 5, для  $V_r(\theta)$  найдем

$$V_r(\theta) = -1 + 2\eta_r(\theta) \cos \theta, \quad (14)$$

где  $\eta_r$  для горизонтально поляризованной волны определяется формулой

$$\begin{aligned} \eta_r(\theta) &= \eta + k\sigma^2 \left\{ k + \frac{i}{2} \int_0^\infty e^{ik\rho} [\mathcal{S}_0(k_\perp \rho) \Delta_+ W(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S}_2(k_\perp \rho) \Delta_- W(\rho) - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\mathcal{S}_0(k_\perp \rho) W(\rho)]] d\rho \right\}; \\ \Delta_\pm &= \frac{d^2}{d\rho^2} \pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}. \end{aligned} \quad (15)$$

В предельных случаях  $\eta_r(\vartheta)$  можно записать так:

$$\eta_r(\vartheta) = \eta - i \frac{k\sigma^2}{2l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{dw(x)}{dx} \quad \text{при } kl \ll 1;$$

$$\eta_r(\vartheta) = \eta + k^2\sigma^2 \cos \vartheta \quad \text{при } kl \gg 1, \quad \psi \gg 1/\sqrt{kl}; \quad (16)$$

$$\eta_r(\vartheta) = \eta - k^2\sigma^2 e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi kl}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{dw(x)}{dx} \quad \text{при } \sqrt{kl} \gg 1, \quad \psi \ll 1/\sqrt{kl}.$$

Сравнивая (16) с (5.17), (5.19) и (5.24), мы видим, что при  $\eta = 0$  асимптотики импеданса для горизонтально поляризованного электромагнитного поля и акустического адмитанса для звукового поля над абсолютно мягкой поверхностью совпадают, в то время как общие формулы имеют различный вид и в неопределенных случаях могут привести к существенно разным значениям.

Перейдем к рассмотрению вертикально поляризованного электромагнитного поля. Такое поле также имеет три отличные от нуля компоненты  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_z$  и  $\mathcal{H}_y$ .  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_z$  выражаются через  $\mathcal{H}_y$  с помощью формул

$$\mathcal{E}_x = -\frac{i}{k} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}, \quad \mathcal{E}_z = \frac{i}{k} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x}, \quad (17)$$

а  $\mathcal{H}_y$  ищем в виде, аналогичном (12):

$$\mathcal{H}_y = [e^{ik_z z} + V_B(\vartheta) e^{-ik_z z}] e^{ik_x x}, \quad (18)$$

где  $V_B(\vartheta)$  — коэффициент отражения вертикально поляризованной волны. Пользуясь (17) и (18),  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_z$  можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{k_z}{k} [e^{ik_z z} - V_B(\vartheta) e^{-ik_z z}] e^{ik_x x}; \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{k_x}{k} [e^{ik_z z} + V_B(\vartheta) e^{-ik_z z}] e^{ik_x x}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Подставив (19) в (10) и произведя обычные вычисления, получим

$$V_B(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta - \eta_B(\vartheta)}{\cos \vartheta + \eta_B(\vartheta)}, \quad (20)$$

где эффективный импеданс для вертикально поляризованной волны  $\eta_B(\vartheta)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_B(\vartheta) &= \eta + k\sigma^2 \sin \vartheta \left\{ k^2 \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} + \right. \\ &+ i \int_0^{\infty} e^{ik\rho} \left[ \frac{k}{2} (\mathcal{S}_0(k_{\perp\rho}) \Delta_+ W(\rho) - \mathcal{S}_2(k_{\perp\rho}) \Delta_- W(\rho)) \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta} - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{S}_1(k_{\perp\rho}) \frac{d}{d\rho} \Delta_+ W(\rho) - k^2 \cos^2 \vartheta \mathcal{S}_1(k_{\perp\rho}) \frac{dW(\rho)}{d\rho} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \mathcal{S}_1(k_{\perp\rho}) \frac{dW(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{k \cos^2 \vartheta}{\rho \sin \vartheta} \frac{d}{d\rho} (\mathcal{S}_0(k_{\perp\rho}) W(\rho)) \right] d\rho \left. \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Асимптотические выражения для эффективного импеданса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\text{в}}(\vartheta) &\approx \eta - i \frac{k\sigma^2 \cos 2\vartheta}{2l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{dw(x)}{dx} && \text{при } kl \ll 1, \\ \eta_{\text{в}}(\vartheta) &\approx \eta + k^2 \sigma^2 \cos^3 \vartheta && \text{при } kl \gg 1, \psi \gg 1/\sqrt{kl}, \\ \eta_{\text{в}}(\vartheta) &\approx \eta + \frac{\sigma^2}{2l^2} \sqrt{\frac{kl}{2\pi}} e^{\frac{3\pi}{4}i} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \frac{dw(x)}{dx} && \text{при } \sqrt{kl} \gg 1; \psi \ll 1/\sqrt{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Из (22) следует, что асимптотические выражения для эффективного импеданса вертикально поляризованной волны совпадают с выражениями для эффективного акустического импеданса абсолютно жесткой статистически неровной поверхности. Отметим, что формулы (18), (20) — (22) остаются в силе и для вектора Герца, который в данном случае имеет только  $z$ -компоненту. Этот результат сразу следует из (2.7). В связи со сказанным очевидно, что для вектора Герца поля единичного вертикального диполя имеют место формулы (1.38), (1.39), в которых коэффициент отражения  $V(\vartheta)$  нужно заменить на величину  $V_{\text{в}}(\vartheta)$ , определяемую формулой (20). Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, доказываем, что при сколь угодно распространении  $\Pi_z$  описывается формулами (1.44) — (1.46), в которые вместо  $\eta$  нужно подставить  $\eta_{\text{в}}(\pi/2)$ .

С помощью нелокального граничного условия (10) тем же способом, что и в § 6, можно показать, что над статистически неровной поверхностью распространяется поверхностная волна с компонентами  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_z$  и  $\mathcal{H}_y$ , затухание и фазовая скорость которой определяются формулами (6.15) — (6.17).

Хорошо известно, что реальные антенны не могут возбудить такого типа волны над земной поверхностью. Однако поверхностные волны играют существенную роль в современной электронике, ибо хорошо взаимодействуют с электронными пучками. В электронике в качестве замедляющих структур широко применяются гребенки с периодически расположенными зубцами, расстояние между которыми много меньше длины замедленной волны. Здесь мы показали, что роль замедляющей структуры может играть поверхность со случайными неровностями с радиусом корреляции, много меньшим длины волны. Естественно, что в приближении малых возмущений затухание и замедление волны мало. Тем не менее исследование этого вопроса даже для таких поверхностей представляет известный интерес, ибо из него вытекает, что замедляющие свойства структуры не зависят от ее периодичности.

При распространении электромагнитных волн над землей представляет интерес учет влияния сферичности средней поверхности. Рассмотрим этот вопрос. Будем полагать, что радиус кривизны шара, вокруг которого распространяются волны, велик по сравнению с радиусом корреляции неровностей поверхности. В связи с этим при решении задачи можно по-прежнему использовать граничные условия (10). Однако метод разложения по плоским волнам здесь уже неприменим из-за сферичности средней поверхности, поэтому мы используем прием, указанный Фейнбергом [20].

Суть этого приема заключается в следующем. Как было показано выше, в граничных условиях (10) существенно область интегрирования с характерными размерами порядка  $\min\{\lambda, l\}$ . Так как и  $l$  и  $\lambda$  много меньше радиуса кривизны поверхности, то область, существенную для интегрирования, можно считать плоской и ввести в ней локальную систему координат  $x'O'y'$ .

Будем искать поля в виде квази-плоских волн, т. е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' e^{ikr'}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}' e^{ikr'}, \quad (23)$$

причем  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{H}'$  и  $k$  в пределах области, существенной для интегрирования, можно считать постоянными, хотя эти величины, вообще говоря, зависят от расположения самой этой области. Ниже эти допущения будут оправданы. Помимо локальной (рис. 6), введем следующую

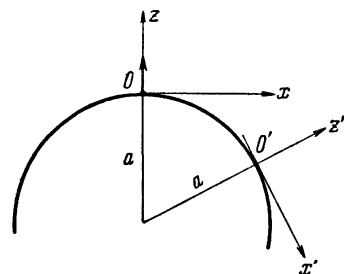


Рис. 6.

«абсолютную» систему координат. В качестве полюса выберем точку  $O$ , в которой расположен излучатель (вертикальный диполь), направление  $x$  соответствует направлению касательной к дуге большого круга, направление  $y$  перпендикулярно к нему, а ось  $z$  направлена по радиусу. Подставляя (23) в (10), получим

$$\mathcal{E}_x = [\eta_v(\pi/2) - \eta] \mathcal{E}_z - \eta \mathcal{H}_y, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{H}_x = 0,$$

или, выражая из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathcal{H} = -ik\mathcal{E}$$

$\mathcal{E}_z$  через  $\mathcal{H}_y$ , окончательно получим

$$\mathcal{E}_x = -\eta_v(\pi/2) \mathcal{H}_y.$$

При выводе (24) мы пользовались декартовой системой координат, что допустимо при малых геоцентрических углах. Кроме того, в уравнении Максвелла был отброшен член  $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_x$  по срав-

нению с  $k\mathcal{E}_z$ . Правомерность этого пренебрежения будет доказана далее. Граничное условие (24) совпадает по внешнему виду с граничным условием Леонтовича, в котором импеданс заменен некоторым эффективным значением  $\eta_v(\pi/2)$ .

Решение задачи о поле вертикального диполя над сферической землей с граничным условием (24) получено Фоком [73] и описывается вектором Герца с единственной вертикальной компонентой  $P_z$ . Величина  $P_z$  определяется формулами (2.45), (2.46). Из сказанного следует, что поле над сферической поверхностью со случайными изотропными и однородными неровностями описывается теми же функциями, что и поле над гладкой неидеально проводящей сферой с эффективным импедансом, определяемым формулой (21).

Заметим, что представление полей в виде (23) допустимо только за горизонтом или в области прямой видимости вблизи горизонта. Следовательно, формула (2.45) с эффективным импедансом применима только в этой области, ибо только тогда можно считать  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{H}'$  медленно меняющимися, по сравнению с  $e^{ikr'}$  (см. [1], [73]). В зоне прямой видимости при скользющем распространении формула (2.45) представляется в виде суммы падающего и отраженного полей, причем отраженное поле описывается выражением (1.44). При еще меньших углах падения, однако, близких к  $\pi/2$ , (1.44) переходит в отражательные формулы с коэффициентом отражения (20). Таким образом, формулы (1.44), (2.45) и отражательные формулы дают значение вектора Герца для вертикального диполя во всем пространстве.

Убедимся в том, что предположения, сделанные при выводе выражения (24), действительно выполняются. Докажем, что  $\left| \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_x \right| \ll k \left| \mathcal{E}_z \right|$  при  $z = 0$ . Выражая поля с помощью вектора Герца, видим, что написанное выше неравенство сводится к следующему:

$$\left| \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + k^2 Y \right| \gg \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right|,$$

где  $Y$  — функция ослабления сферы, введенная в главе I [формула (2.46)]. Это условие очевидно выполняется, если имеет место неравенство  $\left| \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right| \ll k^2 |Y|$  при  $z = 0$ . Дифференцируя выражение для  $Y$  дважды по  $z$ , полагая  $z = 0$  и используя дифференциальное уравнение для функции Эйри, имеем  $\left| \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right| \approx k^2 (2/k\mathcal{R})^{2/3} |Y|$ . Так как  $(k\mathcal{R})^{2/3} \gg 1$ , то искомое неравенство выполняется.

Второе предположение заключается в том, что в пределах существенной области интегрирования в граничных условиях (10) величины  $\mathcal{E}'(x', z, z_0)$  и  $\mathcal{H}'(x', z, z_0)$  мало меняются. Как видно из (2.7),  $\mathcal{E}'(x', z, z_0)$  и  $\mathcal{H}'(x', z, z_0)$  выражаются через функцию ослабления и ее производные. Характерный размер области

интегрирования в (8) порядка  $\min(\lambda, l)$ . Но расстояния, на которых существенно меняется функция ослабления  $Y$ , много больше длины волны, следовательно, это предположение тоже выполняется.

Выясним теперь, при каких допущениях поля в области, существенной для интегрирования, можно считать квазиплоскими. Условие квазиплоскости волны заключается в том, что характерная область интегрирования с размерами  $\min(\lambda, l)$  должна быть много меньше зоны Френеля  $\sim \sqrt{\lambda \mathcal{D}}$  ( $\mathcal{D}$  — длина трассы). Отсюда вытекают следующие неравенства:  $\lambda \ll \mathcal{D}$  при  $\lambda < l$  и  $l \ll \sqrt{\lambda \mathcal{D}}$  при  $\lambda > l$ . Следовательно, все сделанные допущения оправданы в волновой зоне при  $\lambda \ll \mathcal{D}$ . Таким образом, в области тени, полутени и в освещенной области при углах падения, близких к  $\pi/2$ , представление об эффективном импедансе, введенное Фейнбергом, применимо только для квазиплоских волн при скольжении распространении, причем этот импеданс зависит от поляризации. В общем случае для произвольных полей граничные условия (10) не сводятся к граничным условиям типа условий Леонтовича и эффективный импеданс ввести нельзя, ибо для этого требуется квазиплоскость распространяющихся волн, что выполняется далеко не всегда. С помощью граничных условий (10) можно решать и другие граничные задачи. Например, Сениор ([119], [120]) рассмотрел таким образом вопрос о дифракции плоской волны на шероховатом шаре.

Выше рассматривались неровности однородные и изотропные. Здесь мы исследуем неровности, обладающие сильной анизотропией, а именно, будем предполагать, что неровности зависят лишь от одной координаты, например,  $x$ .

Используя граничные условия (10), можно, так же как и для изотропного случая, найти коэффициенты отражения для плоских волн, которые однако, вследствие большой громоздкости приводить не будем. Отметим только, что при падении электромагнитной волны на поверхность со случайными анизотропными неоднородностями имеет место деполяризация среднего поля, и коэффициенты отражения зависят не только от угла падения, но и от угла  $\varphi$  между волновым вектором падающего поля и осью  $x$ .

Рассмотрим простой, но важный случай, когда волна является квазиплоской и распространение скольльзящее. Полагая электрическое поле и магнитное равными произведению медленно меняющихся функций координат на  $e^{ikr}$ , получим из (10) следующие граничные условия;

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -\eta_x \mathcal{H}_y; & \mathcal{E}_y &= \eta_y \mathcal{H}_x; \\ \eta_x &= \eta + \mathfrak{h} & \eta_y &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$



Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} = \frac{k\sigma^2}{k_x} \int_0^\infty \left[ \sin k_x \rho_x H_0^{(1)}(k_x \rho_x) \frac{d^3 W(\rho_x)}{d\rho_x^3} + k_x \cos k_x \rho_x H_0^{(1)}(k_x \rho_x) \frac{d^2 W(\rho_x)}{d\rho_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin k_x \rho_x}{\rho_x} \cdot \frac{dH_0^{(1)}(k_x \rho_x)}{d\rho_x} \frac{dW(\rho_x)}{d\rho_x} \right] d\rho_x. \quad (26) \end{aligned}$$

Таким образом, как видно из (25) и (26), эффективный импеданс в случае анизотропии неровностей является тензором и зависит от углов  $\vartheta$  и  $\varphi$ .

В предельных случаях для  $\mathfrak{h}$  имеет место следующие соотношения:

$$\mathfrak{h} \approx \frac{2ik\sigma^2}{\pi l} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{dw(x)}{dx} \quad \text{при } k_x l \ll 1, \quad (27)$$

$$\mathfrak{h} \approx \frac{k\sigma^2}{2l^2} \sqrt{\frac{l}{2\pi k_x}} e^{3\pi i/4} \int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} \frac{dw(x)}{dx} \quad \text{при } k_x l \gg 1. \quad (28)$$

Выражая  $\mathcal{H}_x$  и  $\mathcal{H}_y$  через  $\mathcal{E}_z$  из уравнений Максвелла и граничного условия (25), можно получить граничное условие для  $\mathcal{E}_z$ , которое запишется так:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = -ik(\eta_x \cos^2 \varphi + \eta_y \sin^2 \varphi) \mathcal{E}_z. \quad (29)$$

Это граничное условие совпадает с граничным условием Леонтовича с эффективным импедансом

$$\eta_\vartheta = \eta_x \cos^2 \varphi + \eta_y \sin^2 \varphi. \quad (30)$$

Из условия (29) получим выражение для коэффициента отражения

$$V(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta - \eta_\vartheta}{\cos \vartheta + \eta_\vartheta}. \quad (31)$$

Интересно отметить, что если поверхность является идеально проводящей, то волна, идущая вдоль оси  $y$ , распространяется как над идеально гладкой поверхностью. С уменьшением угла  $\varphi$  влияние шероховатостей возрастает, достигая максимума при  $\varphi = 0$ .

Рассмотрим поверхностные волны над двумерными неровностями. Используя граничные условия (29), получим, аналогично тому, как это делалось выше,

$$k_x = k \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_\vartheta^2 \right); \quad v_\varphi = c \left( 1 + \frac{1}{2} \eta_\vartheta^2 \right); \quad c = \omega/k. \quad (32)$$

Как и в трехмерном случае, поверхностные волны распространяются над двумерной статистически неровной поверхностью, если выполнено условие  $kl \ll 1$ . В этом допущении и предположении об идеальной проводимости поверхности ( $\eta = 0$ ), формулы (32) переписуются так:

$$\left. \begin{aligned} k_z &= -\frac{2ik^2\sigma^2}{l} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{dw(x)}{dx} \cos^2 \varphi, \\ v_\varphi &= c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2k\sigma^2}{l} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{dw}{dx} \right)^2 \cos^4 \varphi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

## ФЛУКТУАЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НАД СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Наряду со средним полем, рассмотренным в предыдущей главе, существенный интерес представляет рассеянное (флуктуационное) поле. По определению, среднее значение флуктуационного поля равно нулю, и оно характеризуется своими вторыми моментами — интенсивностью, средними квадратами амплитуды и фазы, корреляционными функциями и т. д. Изучению характеристик рассеянного поля и посвящена настоящая глава.

### § 8. Интенсивность флуктуаций звука в зоне Фраунгофера

В этом параграфе мы будем иметь дело только со звуковыми волнами. Пусть две среды, характеристики которых будем обозначать индексами 1 и 2 соответственно (см. § 1), разделены неровной поверхностью  $z = \zeta(x, y)$ . Звуковой потенциал в этих средах должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.3) с волновыми числами  $k_1$ ,  $k_2$  и граничным условиям на поверхности раздела между первой и второй средами (1.29), имеющим вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial N} = \frac{\partial U_2}{\partial N}, \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2. \quad (1)$$

Так же как и ранее, неровности предполагаются малыми и положительными, в связи с чем для решения задачи можно применить метод возмущений [56], [121]—[124].

Потенциалы  $U_{1,2}$  представим в виде \*)

$$U_{1,2} = U_{1,2}^0 + u_{1,2}, \quad (2)$$

где  $U_{1,2}^0$  — потенциал в первой и второй среде при плоской поверхности раздела, а  $u_{1,2}$  — добавка, связанная с наличием малых неровностей. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial N} = (1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{-1/2} \left( -\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \zeta,$$

\*) Этот подход нуждается в уточнении при  $\rho_1 \ll \rho_2$  либо при  $s_1 \approx s_2$  и скользких углах падения. Для правильного описания рассеяния в этих случаях вместо  $U_0$  нужно взять  $\bar{U}$ , т. е. учесть влияние флуктуаций на коэффициент отражения в формуле (7). Расчет такого рода указывает на существенное уменьшение рассеянного поля при больших численных расстояниях [405].

разложим граничное условие (1) в ряд по  $\zeta$  и  $\gamma$  и, удерживая члены нулевого и первого порядка по этим малым параметрам, найдем следующие граничные условия на поверхности  $z=0$ :

$$\frac{\partial U_1^0}{\partial z} - \frac{\partial U_2^0}{\partial z} = 0, \quad \rho_1 U_1^0 = \rho_2 U_2^0; \quad (3a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = v(\mathbf{r}), \quad \rho_1 u_1 - \rho_2 u_2 = p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \{x, y\}, \quad (3б)$$

$$v(\mathbf{r}) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \left\{ \nabla_{\perp} (\zeta \nabla_{\perp} U_1^0) + \frac{k_1^2 \rho_2 - k_2^2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} U_1^0 \zeta \right\}, \quad (4)$$

$$p(\mathbf{r}) = (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial U_1^0}{\partial z} \zeta.$$

При выводе граничных условий (3б) для флуктуационных составляющих потенциал во второй среде  $U_2^0$  и его нормальная производная  $\frac{\partial U_2^0}{\partial z}$  были выражены через  $U_1^0$  и  $\frac{\partial U_1^0}{\partial z}$  с помощью граничных условий (3a). Кроме того, использовалось волновое уравнение для  $U^0$  и  $u$ . Интересно отметить, что граничные условия для флуктуационной части потенциала (3б) имеют вид граничных условий для потенциала на плоской поверхности раздела с поверхностными источниками скорости  $v(\mathbf{r})$  и давления  $p(\mathbf{r})$ . Эти поверхностные источники определяются характером неровностей поверхности.

Перейдем к нахождению  $u(\mathbf{r})$ . Будем искать эту величину в виде разложения по плоским волнам (см. гл. I):

$$u_{1,2}(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{1,2}(\mathbf{x}) \exp \{i[\mathbf{x}\mathbf{r} \pm \sqrt{k_{1,2}^2 - \mathbf{x}^2} z]\} d^2\mathbf{x}. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем верхний знак (плюс) относится к первому полупространству, нижний — ко второму.

Как уже указывалось выше, определенный таким образом звуковой потенциал удовлетворяет волновому уравнению. Подставив (5) в (3б) и применив обратное преобразование Фурье, получим систему линейных уравнений для определения  $\tilde{u}_{1,2}(\mathbf{x})$ . Решение этой системы имеет вид

$$\tilde{u}_{1,2}(\mathbf{x}) = \pm \frac{\sqrt{k_{2,1}^2 - \mathbf{x}^2} \tilde{p}(\mathbf{x}) \mp i\rho_{2,1} \tilde{v}(\mathbf{x})}{\rho_1 \sqrt{k_2^2 - \mathbf{x}^2} + \rho_2 \sqrt{k_1^2 - \mathbf{x}^2}}; \quad (6)$$

здесь  $\tilde{v}(\mathbf{x})$  и  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  — преобразование Фурье от  $v$  и  $u$  соответственно.

Перейдем к вычислению этих величин. Для этой цели нужно задаться полем нулевого приближения. Как и выше, будем предполагать, что источник излучения точечный и находится настолько

далеко от рассеивающей поверхности, что его поле можно описывать отражательными формулами (1.39). Будем считать, что размеры рассеивающей площадки (за пределами которой неровности отсутствуют) много больше радиуса корреляции шероховатостей и вместе с тем настолько малы, что эта площадка находится в зоне Фраунгофера как относительно излучателя, так и точки наблюдения (рис. 7). В этих предположениях поле нулевого приближения вблизи рассеивающей площадки запишется в виде

$$U_1^0 = \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} \{ \exp [i (\mathbf{k}_{1\perp} \mathbf{r} - k_{1z} z)] + V(\vartheta) \exp [i (\mathbf{k}_{1\perp} \mathbf{r} + k_{1z} z)] \}. \quad (7)$$

Здесь  $V(\vartheta)$  — коэффициент отражения, а  $\mathbf{k}_{\perp}$  — вектор с компонентами  $\{k_x, k_y\}$ . Подставляя  $U_1^0$  из (7) в (3б), после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} [1 + V(\vartheta)] \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \left\{ -\mathbf{k}_{1\perp} \mathbf{x} + \frac{k_1^2 \rho_2 - k_2^2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right\} \tilde{\zeta}(\mathbf{x} - \mathbf{k}_{1\perp}), \\ \tilde{p}(\mathbf{x}) &= -i \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} k_{1z} [1 - V(\vartheta)] (\rho_2 - \rho_1) \tilde{\zeta}(\mathbf{x} - \mathbf{k}_{1\perp}). \end{aligned} \quad (8)$$

Величина  $\tilde{\zeta}(\mathbf{q}_{\perp})$  определяется формулой

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{q}_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{S}} \zeta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (9)$$

Интегрирование в (9) ведется по площади рассеивающего участка  $\mathcal{S}$ . С учетом (8) и (9) формулу (6) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1,2}(\mathbf{x}) &= \pm i \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \sqrt{k_2^2 - \mathbf{x}^2} + \rho_2 \sqrt{k_1^2 - \mathbf{x}^2}} \left\{ k_{1z} \sqrt{k_{2,1}^2 - \mathbf{x}^2} [V(\vartheta) - 1] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{x} - \frac{k_1^2 \rho_2 - k_2^2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right) \frac{\rho_{2,1}}{\rho_2} [V(\vartheta) + 1] \right\} \tilde{\zeta}(\mathbf{x} - \mathbf{k}_{1\perp}). \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (5) и (10) полностью определяют флуктуационное поле как в верхнем, так и в нижнем полупространствах.

Ввиду того, что точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера, поле в верхнем и нижнем полупространствах можно найти с помощью метода перевала [см. формулу (1.28)]. Результат имеет следующий вид:

$$u_{1,2}(\mathbf{R}_2) = 2\pi i \mathbf{x}'_z^{(1,2)} \frac{\exp(i k_{1,z} R_2)}{R_2} \tilde{u}_{1,2}(\mathbf{x}'_{\perp}^{(1,2)}), \quad (11)$$

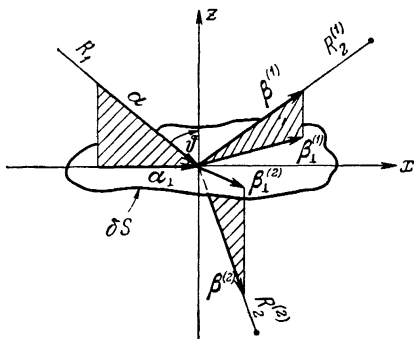


Рис. 7.

где  $\kappa^{(1, 2)}$  — вектор, направленный в точку наблюдения ( $|\kappa^{(1, 2)}| = k_{1, 2}$ ), а индексы (1, 2) в скобках указывают, в каком полупространстве находится точка наблюдения. Подставив в (11) значение  $\tilde{u}_{1, 2}$ , эту формулу можно записать так:

$$u_{1, 2}(R_2) = \frac{k^2}{\pi} \frac{\exp[i(k_1 R_1 + k_{1, 2} R_2)]}{R_1 R_2} \mathfrak{F}^{(1, 2)}(\alpha, \beta) \times \int_S \exp[i(k_1 - \kappa_{1, 2}, r)] \zeta(r) dr. \quad (12)$$

Функция  $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$  определяется следующим образом:

$$2k_1^2 \mathfrak{F}^{(1, 2)}(\alpha, \beta) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) \sqrt{k_{1, 2}^2 - \kappa_{1, 2}^2}}{\rho_1 \sqrt{k_2^2 - \kappa_{1, 2}^2} + \rho_2 \sqrt{k_1^2 - \kappa_{1, 2}^2}} \times \times \left\{ \frac{\rho_{2, 1}}{\rho_2} \left[ -k_1 \kappa_{1, 2} + \frac{k_1^2 \rho_2 - k_2^2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right] (1 + V) \mp \sqrt{k_{2, 1}^2 - \kappa_{1, 2}^2} k_{1z} (1 - V) \right\}. \quad (13)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к верхней и нижней среде соответственно (источник в верхней среде), а векторы  $\kappa_{1, 2}$  и  $k_1$  связаны с векторами  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рис. 7) соотношениями

$$k_1 = k_1 \alpha, \quad \kappa_{1, 2} = k_{1, 2} \beta^{(1, 2)}. \quad (14)$$

Формула (12) в совокупности с  $\mathfrak{F}$  из формулы (13) позволяет исследовать флуктуации поля, прошедшего во вторую среду. В дальнейшем мы ограничимся исследованием флуктуаций лишь в верхней среде, т. е. там, где находится источник. Однако, как видно из формул (11) и (13), тем же путем могут быть исследованы флуктуации в нижней среде. Дальше индексы 1 и 2 опускаются. Определяя интенсивность обычным способом, получим

$$\overline{uu^*} = J(k, \kappa) = \frac{k^4}{\pi^2 R_1^2 R_2^2} Q(\alpha, \beta) \int_S \int_S \overline{\zeta(r) \zeta(r')} e^{i(k - \kappa)(r - r')} dr dr', \quad (15)$$

$$Q(\alpha, \beta) = |\mathfrak{F}|^2.$$

Введем новые переменные интегрирования в формуле (15):  $\rho = r' - r$  и  $r$ . Так как размеры рассеивающей площадки существенно превышают радиус корреляции неровностей, то интегрирование по  $\rho$  можно ввести в бесконечных пределах. С учетом этого обстоятельства, а также того, что  $\overline{\zeta(r') \zeta(r)}$  зависит только от  $\rho$ , (15) преобразуется к такому виду:

$$J(k, \kappa) = 4 \frac{k^4 \sigma^2}{R_1^2 R_2^2} S Q(\alpha, \beta) \tilde{W}(q), \quad \text{где } q = k(\beta - \alpha). \quad (16)$$

Формула (16) описывает интенсивность звукового поля, рассеянного площадкой, находящейся в зоне Фраунгофера по отношению к излучателю и точке наблюдения, так называемую диаграмму

(или индикатрису) рассеяния \*). Через  $\tilde{W}(\mathbf{q})$  обозначено преобразование Фурье от корреляционной функции:

$$\tilde{W}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int W(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}. \quad (17)$$

Из формулы (16) вытекает важный физический результат: интенсивность рассеянного поля пропорциональна преобразованию Фурье от корреляционной функции с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Это значит, что в первом приближении теории возмущений из всего пространственного спектра неровной поверхности в рассеянии принимает участие лишь одна гармоника. Это явление можно назвать пространственным резонансом между плоской волной звукового поля и непрерывным спектром случайной поверхности. Как будет показано ниже, это обусловлено тем, что как точка наблюдения, так и источник излучения находятся во фраунгоферовой зоне по отношению к рассеивающей площадке. При такой геометрии в точку наблюдения доходит лишь узкий пучок плоских волн, соответствующих определенной гармонике в спектре поверхности. Рассеяние, описываемое формулой (16), называется резонансным или избирательным.  $Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ , вообще говоря, довольно сложная функция углов. Однако для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей вид  $Q$  существенно упрощается:

$$Q_{\mu}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2 \quad \text{и} \quad Q_g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (1 - \alpha_{\perp} \beta_{\perp})^2. \quad (18)$$

Индекс  $\mu$  относится к мягкой, а  $g$  — к жесткой поверхностям.

Преобразование Фурье  $\tilde{W}(\mathbf{q})$ , определяемое формулой (17), легко исследуется в двух предельных случаях, когда корреляционный радиус много больше или много меньше приведенной длины волны  $\lambda = 1/k$ .

При  $kl \gg 1$  в формуле (17)  $W(\boldsymbol{\rho})$ , как медленно меняющуюся функцию  $\boldsymbol{\rho}$ , можно вынести за знак интеграла в точке  $\boldsymbol{\rho} = 0$ . Тогда интеграл по  $\boldsymbol{\rho}$  примет вид

$$\tilde{W}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{k}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho})} d\boldsymbol{\rho} \approx k^{-2} \delta(\alpha_{\perp} - \beta_{\perp}). \quad (19)$$

Из формулы (19) вытекает, что длинные по сравнению с  $\lambda$  неровности рассеивают только в том направлении, в котором  $\alpha_{\perp} = \beta_{\perp}$ , т. е. в зеркальном направлении (см. рис. 7). Аналогичное исследование для рассеяния во втором полупространстве показывает, что рассеяние происходит в направлении, характеризуемом

\*) Как будет показано в § 10, формула (16) применима и на значительно более близких расстояниях, чем те, которые определяют зону Фраунгофера (в так называемой «зоне разделения спектров»).

соотношением  $k_1 \alpha_{\perp} = k_2 \beta_{\perp}$ , что соответствует направлению, определяемому законом Снеллиуса. В обратном предельном случае  $kl \ll 1$  экспоненту в подинтегральном выражении в определении  $\tilde{W}(q)$  можно заменить на единицу и получить для  $\tilde{W}(q)$  формулу

$$\tilde{W}(q) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) d\rho \sim l^2. \quad (20)$$

В этом случае интеграл от углов не зависит и является величиной порядка  $l^2$ . Рассеяние является диффузным, а его индикатриса определяется медленно меняющейся функцией  $Q(\alpha, \beta)$ . Если функция корреляции является многомасштабной (например, в случае мелкой ряби на крупных неровностях), то под  $l$  при выводе формулы (19) нужно понимать минимальный масштаб, при выводе (20) — максимальный. Заметим, что при сильно отличающихся скоростях звука в верхнем и нижнем полупространствах, предельное соотношение между  $l$  и  $k$ , имеющее место для верхнего полупространства, может не иметь места для нижнего.

Наряду со средней интенсивностью в теории рассеяния часто используется так называемое дифференциальное эффективное сечение  $\mathcal{E}$ , определяемое равенством

$$\mathcal{E} = \frac{J(k, \kappa) R_0^2}{J_0}. \quad (21)$$

Здесь  $J_0$  — интенсивность поля источника излучения вблизи рассеивающей площадки. Величина  $\mathcal{E}$  имеет смысл отношения потока энергии рассеянного поля в единицу телесного угла к плотности потока энергии падающего поля. Как видно из определения,  $\mathcal{E}$  имеет размерность площади, деленной на стерадиан \*). Если излучает точечный источник единичной интенсивности, то  $J_0 = 1/R_0^2$ . Подставляя в (21) выражение для  $J$  из (16), получим

$$\mathcal{E} = 4k^4 \sigma^2 S Q(\alpha, \beta) \tilde{W}(q). \quad (22)$$

Интересно отметить, что  $Q$  обращается в нуль, когда излучатель или точка наблюдения находится вблизи поверхности ( $Q \sim \alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2$ ) и если поверхность не является абсолютно жесткой. Последнее обстоятельство связано с приближенным характером расчета. Если учесть отличие среднего поля от поля над гладкой поверхностью, то  $Q(\alpha, \beta)$  обращается в нуль и для абсолютно жесткой поверхности, когда хотя бы одна из корреспондирующих

\*) Такое определение сечения рассеяния не является общепринятым. В большинстве экспериментальных работ, посвященных радиолокации и гидроакустике, пользуются дифференциальным сечением рассеяния, отнесенным не к единичному, а к полному телесному углу, и имеющему, следовательно, размерность площади. Для этого введенную по формуле (21) величину  $\mathcal{E}$  следует умножить на  $4\pi$  стерадиан.



точек находится на самой поверхности. Заметим, что если точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера, то эффективное сечение зависит только от направления на точку наблюдения, а не от ее координат. Определенный интерес представляет локационный случай, когда точка наблюдения совмещена с приемником ( $\alpha = -\beta$ ). Мы приведем результаты для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей. Введя угол падения  $\vartheta$  и проведя плоскость падения через линию  $\varphi = 0$ , получим

$$\mathcal{C}_{\mu, g} = 4k^4 \sigma^2 S \tilde{W} (2k \sin \vartheta) \begin{cases} \cos^4 \vartheta, \\ (1 + \sin^2 \vartheta)^2. \end{cases} \quad (23)$$

При выводе (23) учитывалось, что ( $\beta_z = -\alpha_z = \cos \vartheta$ ,  $\alpha_{\perp} = \beta_{\perp} = \sin \vartheta$ ).

## § 9. Флуктуации электромагнитного поля в зоне Фраунгофера

Поляризационная матрица для электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной поверхностью, может быть построена аналогично тому, как вычислялась интенсивность звука в предыдущем параграфе. Будем считать, что статистически неровная поверхность разделяет вакуум и среду с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .

Граничные условия на неровной поверхности  $z = \zeta(x, y)$  с произвольным значением диэлектрической проницаемости имеют вид [см. (2.13)]

$$[N, E_1 - E_2]_{\Sigma} = 0, \quad (N, E_1 - \varepsilon E_2)_{\Sigma} = 0, \quad (H_1 - H_2)_{\Sigma} = 0. \quad (1)$$

Индекс 1 относится к полям в первой среде, а индекс 2 к полям во второй среде,  $N$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma [z = \zeta(x, y)]$ . Как и выше, будем рассматривать неровности пологие и малые [56], [58], так что граничные условия (1) можно разложить в ряд по степеням  $\zeta(x, y)$  и  $\gamma(x, y) = \nabla \zeta$  вблизи поверхности  $z = 0$ , которую будем считать плоской. Аналогично тому, как это делалось для хорошо проводящей поверхности, представим поля в виде суммы среднего  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  и флуктуационного  $e$ ,  $h$ . Если распространение не скользящее, то в качестве нулевого приближения можно выбрать поле, соответствующее плоской поверхности раздела. При скользящем распространении такой выбор допустим лишь для хорошо проводящей поверхности, если численное расстояние, соответствующее максимальным размерам рассеивающего участка, мало по сравнению с единицей. В этом приближении среднее поле совпадает с полем, отраженным (или преломленным) от плоской поверхности, а флуктуационное поле мало по сравнению со средним. С учетом этих замечаний граничные условия для среднего и флуктуационного полей

в первом приближении теории возмущений на поверхности  $z=0$  запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} [n, \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2] &= 0, & (n, \mathcal{E}_1 - \varepsilon \mathcal{E}_2) &= 0, & \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_2; & (2) \\ [n, e_1 - e_2] &= [\gamma, \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2] - \left[ n, \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \right] \zeta; \\ (n, e_1 - \varepsilon e_2) &= (\gamma, \mathcal{E}_1 - \varepsilon \mathcal{E}_2) - \left( n, \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_1 - \varepsilon \mathcal{E}_2) \right) \zeta; \\ [n, h_1 - h_2] &= [\gamma, \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2] - \left[ n, \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) \right] \zeta; \\ (n, h_1 - h_2) &= (\gamma, \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) - \left( n, \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) \right) \zeta; \end{aligned} \right\} (3)$$

$n$  — единичный вектор нормали к плоскости  $z=0$ . Для дальнейшего будет достаточно первого и третьего граничных условий системы (3), так как, в силу теоремы единственности, поля в пространстве однозначно определяются их тангенциальными компонентами на поверхности. Эти граничные условия можно преобразовать к несколько более удобному виду, если выразить  $\mathcal{H}$  через  $\mathcal{E}$  с помощью уравнений Максвелла, а  $\mathcal{E}_2$  через  $\mathcal{E}_1$  с помощью граничных условий (2) нулевого приближения. Ответ (см. [58]) имеет следующий вид:

$$[n, e_1 - e_2] = -\frac{4\pi}{c} j_m, \quad [n, h_1 - h_2] = \frac{4\pi}{c} j_e; \quad (4)$$

$$j_e = ikc \frac{1-\varepsilon}{4\pi} [n, \mathcal{E}_1 n] \zeta, \quad j_m = c \frac{1-\varepsilon}{4\pi\varepsilon} [n \nabla] (n \mathcal{E}_1) \zeta. \quad (5)$$

Мы приходим к выводу, что однородные граничные условия на неровной поверхности эквивалентны неоднородным граничным условиям (наличие внешних поверхностных случайных токов) на плоскости. Поле внутри и вне диэлектрика, так же как и в акустическом случае, будем искать в виде разложения по плоским волнам:

$$e_{1,2}(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_{1,2}(\mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{x}\mathbf{r} \pm \sqrt{k_{1,2}^2 - \mathbf{x}^2}z)] d\mathbf{x}, \quad \mathbf{R} = \{\mathbf{r}, z\}. \quad (6)$$

Знаки  $\pm$  относятся к первому и второму полупространствам соответственно;  $k_1 = k$ ,  $k_2 = k\sqrt{\varepsilon}$ . Очевидно, что  $e_1(\mathbf{R})$  и  $e_2(\mathbf{R})$  удовлетворяют волновым уравнениям в верхнем и нижнем полупространствах. Из уравнений Максвелла и граничных условий (4) легко получить систему векторных уравнений для определения  $\tilde{e}(\mathbf{x})$  и  $\tilde{h}(\mathbf{x})$ :

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{h}_1, \beta] &= \tilde{e}_1, & [n, \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2] &= \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_e; \\ [\tilde{e}_1, \beta] &= -\tilde{h}_1, & [n, \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2] &= -\frac{4\pi}{c} \tilde{j}_m; \\ [\tilde{h}_2, \beta - (a+b)n] &= \varepsilon \tilde{e}_2, & [\tilde{e}_2, \beta - (a+b)n] &= -\tilde{h}_2. \end{aligned} \right\} (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = n\beta, \quad b = \sqrt{\varepsilon - 1 + a^2}, \quad \beta = \frac{\kappa}{k} + n\sqrt{1 - \kappa^2/k_1^2},$$

$$\tilde{j}_{e,m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_S \mathbf{j}_{e,m}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Отметим, что не все уравнения в (7) независимы, однако предпочтительнее пользоваться симметричной формой записи.

Решение уравнений (7) получается путем несложных, но громоздких преобразований, и может быть записано так:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_1(\mathbf{x}) &= \frac{4\pi}{c(b+a\varepsilon)} \left\{ \frac{\varepsilon-1}{a+b} \{ (\beta\tilde{j}_m) [n\beta] + [\beta [n\tilde{j}_e]] \} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon[\beta\tilde{j}_m] + [\beta [\beta\tilde{j}_e]] \right\}, \\ \tilde{e}_2 &= \tilde{e}_1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n(n\tilde{e}_1) + \frac{4\pi}{c} [\tilde{j}_m, n] + \frac{4\pi}{c\varepsilon} n(\beta\tilde{j}_e). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Дальнейшие выкладки полностью аналогичны приведенным в предыдущем параграфе. Пусть рассеивающий участок находится в зоне Фраунгофера по отношению к источнику излучения и точке наблюдения. В этом случае падающее поле вблизи поверхности имеет вид

$$E^0 = \mathbf{g} \frac{e^{ikR_1}}{R_1} e^{ik(\alpha_\perp r + \alpha_z z)}, \quad (\alpha_z = -\sin\psi, \quad \alpha_\perp = \cos\psi), \quad (10)$$

где  $\mathbf{g}$  — вектор поляризации, а  $R_1$  — расстояние от источника до центра рассеивающей площадки.

С помощью формул Френеля для поля  $\mathcal{E}_1$  на поверхности  $z=0$  можно получить выражение

$$\mathcal{E}_1 = \frac{2a_0}{a_0 + b_0} E^0 - \frac{2a_0(1-\varepsilon)}{b_0 + \varepsilon a_0} \left( n + \frac{\alpha}{a_0 + b_0} \right) (E^0 n), \quad (11)$$

где  $a_0 = -n\alpha = \sin\psi$ ,  $b_0 = \sqrt{\varepsilon - \cos^2\psi}$ . Подставляя (5) в (8), а (8) в (9), найдем поле в любой точке пространства. Ввиду того, что точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера, вычисление интеграла можно произвести методом перевала, после чего легко найти поляризационную матрицу для поля, рассеянного участком  $S$ . В результате для поляризационной матрицы имеем

$$J_{p_1 p_2}^{p_0} = \overline{e_{p_1} e_{p_2}^*} = \frac{4k^4 \sigma^2 S}{R_1^2 R_2^2} Q_{p_1 p_2}^{p_0}(\alpha, \beta) \tilde{W}(q). \quad (12)$$

Здесь через  $p_0$  обозначен дипольный момент передающей антенны,  $e_{p_1,2} = \mathbf{e}_{p_1,2}$  — проекция поля на направление  $p_{1,2}$ , принятая антеннами с дипольными моментами  $p_1$  и  $p_2$ .

Дипольный момент передающей антенны  $\mathbf{p}_0$  связан с вектором поляризации  $\mathbf{g}$  соотношением

$$\mathbf{g} = [\alpha [\mathbf{p}_0, \alpha]] \quad (\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_0^2 = 1); \quad (13)$$

$$Q_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_0} = \mathfrak{F}_{\rho_1}^{\rho_0} \mathfrak{F}_{\rho_2}^{\rho_0*}, \quad \mathfrak{F}_{\rho_{1,2}}^{\rho_0} = (\mathfrak{F}^{\rho_0}, \mathbf{p}_{1,2}); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{\rho_0} = & \frac{aa_0(1-\varepsilon)}{(b+a\varepsilon)(b_0+a_0\varepsilon)} \left\{ \frac{\varepsilon-1}{a+b} [\beta [\mathbf{n}, \mathbf{p}_0]] + \right. \\ & + \frac{(\varepsilon-1)^2}{(a+b)(a_0+b_0)} [\beta [\mathbf{n} [\mathbf{n} [\alpha, \mathbf{p}_0]]]] + \\ & \left. + (\varepsilon-1) (\mathbf{n} \mathbf{p}_0) [\beta [\beta, \mathbf{n}]] + [\beta [\beta, \mathbf{p}_0]] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Интенсивность флуктуаций  $J$  получается суммированием  $J_{\rho_1, \rho_2}^{\rho_0}$  по  $\rho_1$  и  $\rho_2$ :

$$J = \sum_i J_{\rho_i \rho_i}^{\rho_0}. \quad (16)$$

Следует отметить, что векторы  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}$  могут быть комплексными: вещественным  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}$  соответствует линейная поляризация, а комплексным — эллиптическая. Ниже мы будем выписывать формулы лишь для поля, рассеянного в полупространство 1. Для поля, рассеянного в полупространство 2, ответы получаются аналогично. Эффективное сечение рассеяния электромагнитного поля определяется формулой (8.21) и имеет вид

$$\mathfrak{S}_{\rho_1, \rho_2}^{\rho_0} = \frac{k^4 \sigma^2 S}{\pi^2} Q_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_0}(\alpha, \beta) \tilde{W}(q), \quad (17)$$

где  $q$  и  $\tilde{W}(q)$  определены в § 8. Из формулы (12) следует, что электромагнитное поле, так же как и звук, рассеивается избирательно (см. [125, 126]). Остается также в силе применительно к электромагнитному полю исследование рассеяния в предельных случаях  $kl \ll 1$  и  $kl \gg 1$ , проведенное в § 8.

Формулы для излучения, рассеянного идеально проводящей поверхностью, получаются при стремлении  $|\varepsilon|$  к  $\infty$  в выражении для  $\mathfrak{F}_{1p}^{\rho_0}$  и  $\mathfrak{F}_{2p}^{\rho_0}$ . При этом  $\mathfrak{F}_{2p}^{\rho_0}$  стремится к нулю, а  $\mathfrak{F}_{1p}^{\rho_0}$  приводится к виду (индекс 1 опускается)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_p^{\rho_0} = & \alpha_z \rho_z (\mathbf{p}_0, \beta - \alpha) + \beta_z \rho_{0z} (\mathbf{p}, \alpha - \beta) + \\ & + \rho_z \rho_{0z} (1 - \alpha\beta) + \alpha_z \beta_z \{ (\rho_0 \alpha) (\rho\beta) - (\rho\rho_0) \}. \quad (18) \end{aligned}$$

Случай, когда рассеивающая поверхность идеально проводящая, важен для практики распространения радиоволн, поэтому мы приведем выражения для величины  $Q_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_0}$  при различных ориентациях дипольных моментов  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ .

Пусть излучателем служит вертикальный диполь с дипольным моментом, направленным по оси  $z$ . Рассмотрим приемные антенны, у которых дипольные моменты направлены по одной из трех координатных осей. Для сокращения письма вместо  $Q_{p_1 p_2 k}^{p_0 z}$  будем писать  $Q_{ik}^z$  ( $i, k = x, y, z$ ) и т. д. Для компонент тензора  $Q_{ik}^z$  получаются следующие выражения (см. [127], [128]):

$$\begin{aligned} Q_{xx}^z &= \beta_z^2 \alpha_x^2 (1 - \alpha_x \beta_x)^2, & Q_{yy}^z &= \beta_z^2 \beta_y^2 \alpha_x^4, \\ Q_{zz}^z &= \alpha_x^2 [\beta_x - \alpha_x (\beta_x^2 + \beta_y^2)]^2, & Q_{xy}^z &= Q_{yx}^z = -\beta_z^2 \alpha_x^3 \beta_y (1 - \beta_x \alpha_x), \\ Q_{yz}^z &= Q_{zy}^z = \alpha_x^3 \beta_y \beta_z [\beta_x - \alpha_x (\beta_x^2 + \beta_y^2)], \\ Q_{zx}^z &= Q_{xz}^z = -\alpha_x^2 \beta_z (1 - \alpha_x \beta_x) [\beta_x - \alpha_x (\beta_x^2 + \beta_y^2)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Эффективное сечение рассеяния  $\mathcal{E}$  при рассеянии электромагнитных волн, излученных вертикальным диполем, запишется так:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^z &= \sum_i \mathcal{E}_{ii}^z = 4k^4 \sigma^2 S \{ (\beta_x^2 + \beta_z^2) (1 - \alpha_x \beta_x)^2 - \\ &\quad - 2\beta_x \beta_y^2 \alpha_x^3 (1 - \alpha_x \beta_x) + (\beta_y^2 + \beta_z^2) \beta_y^2 \alpha_x^4 \} \tilde{W}(q). \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть теперь источником излучения является горизонтальный диполь с дипольным моментом, направленным вдоль оси  $y$ . Формулы для тензора  $Q_{ik}^y$  и эффективного сечения принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx}^y &= Q_{xy}^y = Q_{yx}^y = Q_{xz}^y = Q_{zx}^y = 0, \\ Q_{yy}^y &= \beta_z^2 \alpha_z^2, & Q_{zz}^y &= \beta_z^2 \alpha_z^2, & Q_{yz}^y &= Q_{zy}^y = -\beta_y \beta_z \alpha_z^2, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\mathcal{E}^y = \sum_i \mathcal{E}_{ii}^y = 4k^2 \sigma^2 S \alpha_z^2 (\beta_y^2 + \beta_z^2) \tilde{W}(q). \quad (22)$$

При выводе формул (19)–(22) плоскость  $\{x, y\}$  мы проводили через рассеивающую площадь, а источник находился в точке  $(0, 0, z_0)$ . В этих допущениях  $\alpha_y \simeq L/R \ll \alpha_x, \alpha_z$ . В связи с этим  $y$ -й компонентой вектора  $\alpha$  всюду пренебрегались.

Представляет интерес так называемый радиолокационный случай, когда излучатель и точка наблюдения совмещены. При такой геометрии  $\alpha = -\beta$ . Компоненты вектора  $\alpha$  легко выразить через угол падения  $\vartheta$ :  $\alpha_x = \sin \vartheta$ ,  $\alpha_z = -\cos \vartheta$ .

Приведем выражения для тензоров  $Q_{p_1 p_2}^{p_0}$  для радиолокационного случая:

$$\begin{aligned} Q_{xx}^z &= \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta (1 + \sin^2 \vartheta)^2, & Q_{zz}^z &= \sin^4 \vartheta (1 + \sin^2 \vartheta)^2, \\ Q_{xz}^z &= Q_{zx}^z = \sin^3 \vartheta \cos \vartheta (1 + \sin^2 \vartheta)^2, & Q_{yy}^z &= \cos^4 \vartheta. \end{aligned} \quad (23)$$

Остальные компоненты тензоров  $Q_{ik}^y$  равны нулю. Для радиолокационного сечения рассеяния имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^x &= 4k^4\sigma^2 S \sin^2 \vartheta (1 + \sin^2 \vartheta)^2 \tilde{W} (2k \sin \vartheta), \\ \mathfrak{E}^y &= 4k^4\sigma^2 S \cos^4 \vartheta \tilde{W} (2k \sin \vartheta).\end{aligned}\quad (24)$$

Отметим, что при  $kl \gg 1$   $\tilde{W} \sim \delta(\vartheta)$  (см. § 8) и, следовательно, если  $\vartheta \neq 0$ , рассеяние в направлении источника от больших неровностей отсутствует. При  $kl \ll 1$  (малые неровности), как уже указывалось выше,  $\tilde{W} \sim l^2$  и от углов не зависит. Если источник и совмещенный с ним приемник находятся на поверхности, то рассеянное излучение от горизонтального диполя также отсутствует. Это обстоятельство учитывается при радиолокации на море, когда хотят избежать помех, создаваемых рассеянием радиоволн морским волнением.

### § 10. Интенсивность флуктуаций в ближней зоне

В двух предыдущих параграфах рассматривались флуктуации волнового поля, возникающие при отражении или преломлении волны на ограниченном участке плоскости, покрытой статистическими неровностями. Размеры рассеивающего участка предполагались настолько малыми, что поле источника вблизи рассеивающей поверхности и отраженное поле в точке наблюдения являлись плоскими волнами. Таким образом, мы считали, что источник и точка наблюдения находятся в зоне Фраунгофера относительно рассеивающей площадки  $S$ , т. е. предполагалось выполненным неравенство

$$k \frac{L^2}{R_{1,2}} \ll 1, \quad (1)$$

где  $L$  — максимальный линейный размер поверхности  $S$ ,  $R_1$  и  $R_2$  — расстояния от передатчика и приемника до любой точки  $r \in S$ . И, следовательно, полученные выше результаты относятся к распределению по направлениям интенсивности поля, рассеянного на неровной поверхности, которая освещается плоской волной. В этом параграфе мы рассмотрим флуктуации поля, возникающие при распространении волны точечного источника, находящегося на конечном расстоянии от статистически неровной поверхности, линейные размеры которой теперь не предполагаются малыми [в смысле (1)].

1. Исследование начнем с задачи о рассеянии скалярного поля. Для простоты расчетов поверхность  $z = \zeta(r)$  будем считать абсолютно мягкой или абсолютно жесткой. В большинстве случаев это не имеет принципиального значения и многие из полученных ниже результатов легко обобщаются на поверхность произвольной

«жесткости», являющуюся границей раздела двух сред с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и скоростями звука  $s_1$  и  $s_2$ . Соответствующие формулы мы будем приводить без выкладок, которые, как правило, довольно громоздки, но, в принципе, не отличаются от сравнительно простых расчетов в указанных предельных случаях.

Исходные формулы для флуктуационной составляющей скалярного потенциала  $u$  были получены еще в третьей главе (5.6), (6.3):

$$u_\mu(R) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \frac{e^{ik|R-r'|}}{|R-r'|} \frac{\partial \bar{U}(r')}{\partial z'} \zeta(r') dr', \quad (2)$$

$$u_g(R) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{e^{ik|R-r'|}}{|R-r'|} \left\{ \zeta(r') \frac{\partial^2 \bar{U}(r')}{\partial z'^2} - \gamma(r') \nabla_{r'} \cdot \bar{U}(r') \right\} dr'. \quad (3)$$

Здесь индексы  $\mu$  и  $g$  относятся к мягкой и жесткой поверхностям соответственно. Входящее в эти формулы среднее поле  $\bar{U}(r)$  на плоскости  $z=0$  может быть вычислено по отражательной формуле (1.39) с эффективными коэффициентами отражения для мягкой и жесткой поверхностей. Однако, принимая во внимание

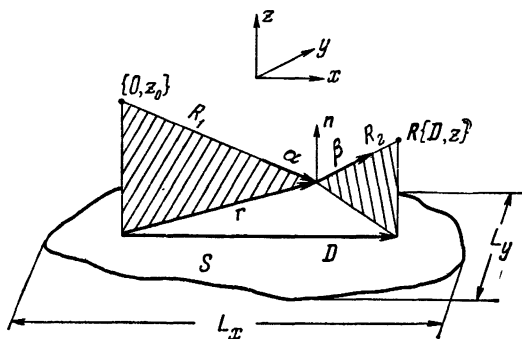


Рис. 8.

то обстоятельство, что в случае мягкой поверхности коэффициент отражения среднего поля (5.11) отличается от  $V = -1$  лишь на величину второго порядка малости по параметрам теории возмущений, в формуле (2)  $\partial \bar{U}(r)/\partial z$  можно заменить соответствующим выражением для поля нулевого приближения (плоская абсолютно мягкая граница):

$$\left. \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial z} \right|_{z=0} \simeq -2 \left. \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right|_{z=0}.$$

Здесь  $z_0$  — высота источника над средней плоскостью  $z=0$  (рис. 8); причем считается, что  $kz_0 \gg 1$ . Аналогичная замена среднего поля полем нулевого приближения для жесткой поверхности может

быть произведена и в формуле (3), если только характерные углы скольжения  $\psi$  не очень малы:  $\sin \psi \gg \eta_g$  ( $\eta_g$  — эффективный импеданс жесткой шероховатой поверхности [см. (6.6)]), так чтобы полюс в коэффициенте отражения (6.5) для жесткой поверхности не играл роли. Считая, что приемник и передатчик подняты над поверхностью достаточно высоко ( $kz_0, kz \gg 1$ ) и обозначив через  $R_1 = \sqrt{z_0^2 + r^2}$  и  $R_2 = \sqrt{z^2 + (D-r)^2}$  — расстояния от точки  $r$  на плоскости  $z=0$  до источника и точки наблюдения соответственно, получаем из (2) и (3) следующие формулы для флуктуаций поля над мягкой и жесткой поверхностями

$$u_\mu = \frac{k^2}{\pi} \int_S \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} \left( \frac{z_0 z}{R_1 R_2} \right) \zeta(r) dr; \quad (4)$$

$$u_g = -\frac{k^2}{\pi} \int_S \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} \left\{ \left( \frac{z_0}{R_1} \right)^2 + i \frac{(r \nabla r)}{k R_1} \right\} \zeta(r) dr. \quad (5)$$

Исходя из этих формул, для интенсивности флуктуаций поля в точке наблюдения (а не в данном направлении, как это, по сути, было в предыдущих параграфах этой главы) получаем в случае мягкой поверхности

$$J_\mu = |\overline{u_\mu}|^2 = \frac{k^2 z_0^2 z^2}{\pi^2} \int_S \int_S \frac{\exp [ik(R_1+R_2-R'_1-R'_2)]}{R_1^2 R_2^2 R_1'^2 R_2'^2} \overline{\zeta(r) \zeta(r')} dr dr'. \quad (6)$$

Здесь  $R'_1$  и  $R'_2$  определяются теми же соотношениями, что и  $R_1, R_2$ , но с заменой  $r \rightarrow r'$ . Аналогичную формулу можно выписать для интенсивности флуктуаций над жесткой поверхностью. Запишем среднее от произведения  $\overline{\zeta(r) \zeta(r')}$  через корреляционную функцию  $\overline{\zeta(r) \zeta(r')} = \sigma^2 W(r' - r)$  и введем в (6) вместо  $r'$  новую переменную интегрирования  $\rho = r' - r$ . Тогда, если размеры  $L$  рассеивающей площадки  $S$  значительно превышают радиус корреляции неровностей  $l$ , интегрирование по  $d\rho$  можно проводить в бесконечных пределах. Если, кроме того, выполняется неравенство:  $\min \{l, \sqrt{\lambda R}\} \ll R_{1,2}$ , то в предэкспоненциальных множителях в (6) можно положить  $\rho = 0$ . Наконец, разложим показатель экспоненты в ряд по степеням  $\rho$

$$R_1 + R_2 - R'_1 - R'_2 = \left( \frac{D-r}{R_2} - \frac{r}{R_1}, \rho \right) - \frac{\rho_x^2 \sin^2 \psi + \rho_y^2}{R} + \dots \quad (7)$$

где  $R = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ . Квадратичные по  $\rho$  члены в показателе экспоненты в формуле (6) можно отбросить, если выполнены неравенства

$$\frac{k l_x^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1, \quad \frac{k l_y^2}{R} \ll 1 \quad (8)$$



( $l_x, l_y$  — радиусы корреляции вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ ). Заметим, что  $\sqrt{R/(k \sin^2 \psi)}$  и  $\sqrt{R/k}$  — это продольный (вдоль  $x$ ) и поперечный (вдоль  $y$ ) размеры зоны Френеля относительно источника и точки наблюдения, т. е. неравенства (8) означают, что при отбрасывании квадратичных членов в показателе экспоненты мы ограничиваемся рассмотрением флуктуаций поля в зоне Фраунгофера (дальняя зона) относительно отдельных неровностей с линейными размерами  $l_x$  и  $l_y$  соответственно. Для поверхности со статистически изотропными неровностями вместо (8) получим ограничение  $kl^2/R \ll 1$ , которое будет использоваться для качественных оценок в дальнейшем. После выполнения указанных упрощений формула (6) принимает вид

$$J_\mu = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \left( \frac{z_0 z}{R_1 R_2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) \exp \left[ ik \left( \frac{D-r}{R_2} - \frac{r}{R_1}, \rho \right) \right] d\rho. \quad (9)$$

Для жесткой поверхности вычисление несколько усложняется из-за наличия члена с  $\nabla_r \zeta(\mathbf{r})$  в формуле (5). При усреднении соответствующего двойного интеграла [типа (6)] и замены переменных под интегралом появляются слагаемые  $\nabla_\rho W(\rho)$  и  $\nabla_\rho^2 W(\rho)$ . После разложения показателя экспоненты эти члены можно проинтегрировать по частям, что эквивалентно замене  $\nabla_\rho \rightarrow -ik[(D-r)/R_2 - r/R_1]$ , так как переменная  $\rho$  теперь входит в показатель экспоненты линейно. Для упрощения получаемых формул удобно ввести единичные векторы  $\alpha$  и  $\beta$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \{ \alpha_\perp, \alpha_z \} & \beta &= \{ \beta_\perp, \beta_z \}, \\ \alpha_z &= -\frac{z_0}{R_1}, \alpha_\perp = \frac{r}{R_1}, \beta_z = \frac{z}{R_2}, \beta_\perp = \frac{D-r}{R_2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\alpha$  — вектор, направленный от источника в точку  $r \in S$ ,  $\beta$  — из точки  $r \in S$  в точку наблюдения, а  $\alpha_\perp$  и  $\beta_\perp$  — их проекции на плоскость  $\{x, y\}$  (см. рис. 8). В этих обозначениях формулы для интенсивности флуктуаций над мягкой и жесткой поверхностями примут вид

$$J_{\mu, g} = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} Q_{\mu, g}(\alpha, \beta) \int e^{ik(\alpha - \beta, \rho)} W(\rho) d\rho, \quad (11)$$

где

$$Q_\mu(\alpha, \beta) = \alpha_z^2 \beta_z^2 \quad \text{и} \quad Q_g(\alpha, \beta) = (1 - \alpha_\perp \beta_\perp)^2. \quad (12)$$

В случае поверхности произвольной жесткости интенсивность флуктуаций имеет такой же вид (11), а функция  $Q(\alpha, \beta) = |\tilde{K}(\alpha, \beta)|^2$  определяется по формуле (8.13).

2. Исходя из формул (11) и (12), рассмотрим простейшие предельные случаи.

а. Пусть размеры площадки  $S$  настолько малы, что показатель экспоненты в (11) можно считать не зависящим от переменной  $r$ , а медленно изменяющиеся с  $r$  предэкспоненциальные множители вынести за знак интеграла по  $dr$ . Легко убедиться, что для этого необходимо выполнение неравенств

$$kl \frac{L}{R} \sin^2 \psi \ll 1; \quad \frac{L}{R} \ll 1. \quad (13)$$

Получающаяся при этом для интенсивности флуктуаций формула в точности совпадает с формулой (8.16) для интенсивности рассеянного поля в зоне Фраунгофера относительно площадки. Но так как  $L \gg l$ , неравенства (13) являются значительно более слабыми ограничениями на  $R$ , чем это предполагалось при выводе формул в § 8, 9 ( $kL^2/R \ll 1$ ). Поэтому полученные в § 8 и 9 результаты на самом деле справедливы не только в зоне Фраунгофера относительно всей площадки, а также и на значительно более близких расстояниях, ограниченных сравнительно слабым требованием (13).

Неравенство (13) определяет так называемую область разделения спектров. Смысл этого названия становится понятным при рассмотрении дифракции плоской волны, падающей под углом  $\psi$  на ограниченный участок периодической поверхности с периодом  $\Lambda$  (см., например, [129]—[131]). При этом, как известно, возникают пространственные дифракционные спектры — плоские волны, распространяющиеся под углами  $\psi_m$ , определяемыми из условия

$$\cos \psi_m - \cos \psi = m \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (14)$$

Угол между двумя соседними спектрами, следовательно, равен  $\Delta\psi_{m,m+1} \simeq \frac{\lambda}{\Lambda \sin \psi_m}$ . Поле в каждой точке пространства представляется в виде суммы этих плоских волн. Но из-за ограниченности площадки эти волны также ограничены по фронту и поэтому на достаточно большом расстоянии  $R$  в точку наблюдения приходит максимум одна волна (рис. 9). Расстояние  $R_0$ , на котором эти плоские волны (дифракционные спектры) пространственно разделяются, можно легко определить из рис. 9:

$$\frac{L \sin \psi_m}{R_0} \simeq \Delta\psi_{m,m+1} \simeq \frac{\lambda}{\Lambda \sin \psi_m}. \quad (15)$$

Таким образом, в области, определяемой неравенством

$$k\Lambda \frac{L}{R} \sin^2 \psi < 1, \quad (16)$$

мы уже имеем дело с плоскими волнами.

В нашем случае, когда поверхность является статистически неровной, дифракционные спектры размываются и вместо суммы конечного числа плоских волн мы имеем дело с интегральным разложением поля в каждой точке по плоским волнам. По мере

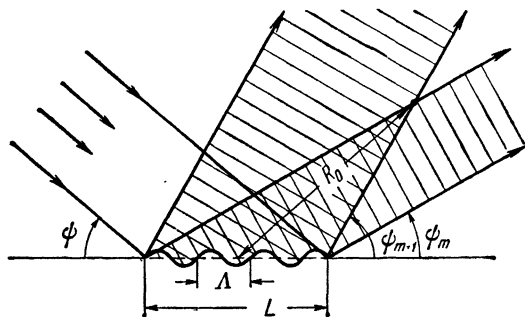


Рис. 9.

удаления точки наблюдения от поверхности, вклад в поле дают плоские волны со все более близкими направлениями распространения. Принимая, что роль пространственного периода  $\Delta$  играет в данном случае радиус корреляции  $l$ , мы переходим \*) от (16) к неравенству (13).

Таким образом, формулой (8.16) определяется интенсивность плоской волны (в зоне разделения спектров), распространяющейся в направлении  $\beta$  от площадки конечных размеров, которая освещается также плоской волной с волновым вектором  $k = k\alpha$ . Что касается различных предельных случаев ( $kl \ll 1$ ,  $kl \gg 1$ ), то они достаточно подробно были рассмотрены в предыдущем параграфе.

б. Из сравнения формулы (8.16) с исходным выражением (11) видно, что интенсивность поля в каждой точке равна сумме интенсивностей плоских волн, рассеянных на малых элементарных площадках  $dr$ . Причем направление векторов  $\alpha$  и  $\beta$  для падающей и рассеянной на участке  $dr$  плоской волны является функцией точки поверхности  $r \in S$  и определяется соотношениями (10). То обстоятельство, что рассеянное поле представлено в виде некогерентной суперпозиции плоских волн, можно легко понять, если вспомнить, что в теории возмущений рассеяние носит резонансный характер: из направления  $\alpha$  в направлении  $\beta$  рассеивают

\*) В связи с этим, во избежание недоразумений, следует подчеркнуть, что понятие «зона разделения спектров» для неперiodической поверхности, конечно же, является условным; так как угловой интервал между спектрами при этом равен нулю, то и пространственное разделение спектров происходит при  $R \rightarrow \infty$ .

только определенные пространственные компоненты Фурье поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r})$ :

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \quad \mathbf{q} \equiv k(\beta - \alpha). \quad (17)$$

А так как поверхность  $z = \zeta(\mathbf{r})$  предполагается статистически однородной («стационарной») по пространственным переменным  $\mathbf{r}$ , то амплитуды Фурье (17) статистически независимы:

$$\overline{\tilde{\zeta}(\mathbf{q}) \tilde{\zeta}^*(\mathbf{q}')} = \sigma^2 \tilde{W}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (18)$$

и, следовательно, соответствующие плоские волны будут некогерентными. В связи с такой интерпретацией формулы (11) ее удобно представить в другой форме, заменив интегрирование по  $d\mathbf{r}$  интегрированием по  $\Gamma$  — всем возможным направлениям  $\beta$ , проходящих в точку наблюдения плоских волн. Для этого сделаем замену переменных [см. (10)]  $\beta_{\perp} = (\mathbf{D} - \mathbf{r})/R_2$ . Соответствующий якобиан перехода легко вычисляется, так что

$$\frac{z^2 d\mathbf{r}}{R_2^4} = -d\beta_{\perp}, \quad (19)$$

и вместо (11) получаем

$$J = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{d\beta_{\perp}}{R_1^2 \beta_2^2} Q(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\alpha - \beta \cdot \rho)} W(\rho) d\rho \quad (20)$$

Следует заметить, что здесь  $\alpha$  является функцией  $\beta$ , параметрически зависящей от  $z_0$ ,  $z$  и  $\mathbf{D}$  (см. рис. 8).

в. Если площадка освещается плоской волной с волновым вектором  $\mathbf{k} = k\alpha_0$ , т. е. когда источник находится в зоне разделения спектров ( $kl \frac{L}{R} \ll 1$ ), в (20)  $\alpha_{\perp}$  можно заменить на

$$\alpha_{\perp}^0 = \lim_{D, z_0 \rightarrow \infty} \frac{D}{\sqrt{z_0^2 + D^2}}, \quad (21)$$

и формула (20) упрощается:

$$J = 4k^4 \frac{\sigma^2}{R_1^2} \int_{\Gamma} d\beta_{\perp} \frac{Q(\alpha_0, \beta)}{\beta_2^2} \tilde{W}(\mathbf{q}), \quad (22)$$

где  $\mathbf{q} \equiv k(\beta - \alpha_0)$ , а  $\tilde{W}(\mathbf{q})$  — пространственный спектр (8.17). Эту же формулу можно получить непосредственно из разложения поля по неоднородным плоским волнам [ср. (8.5) — (8.6)]:

$$u(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{x}\mathbf{r} + z\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2})] d^2\mathbf{x},$$

где  $\tilde{u}(\mathbf{x}) \sim f(\mathbf{x}) \tilde{\xi}(\mathbf{k} - \mathbf{x})$ , причем вид функции  $f(\mathbf{x})$  не связан со статистическими свойствами поверхности, а определяется лишь углом скольжения падающей волны и акустическими параметрами ( $\rho$  и  $s$ ) среды, от границы которой происходит отражение. Принимая во внимание некоррелированность амплитуд Фурье  $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$ , получаем для интенсивности:

$$J = |\overline{u}|^2 \sim \sigma^2 \left\{ \int_{\mathbf{x} < \mathbf{k}} |f(\mathbf{x})|^2 \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) d^2\mathbf{x} + \int_{\mathbf{x} > \mathbf{k}} |f(\mathbf{x})|^2 \exp(-2\sqrt{\mathbf{x}^2 - \mathbf{k}^2} z) \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) d^2\mathbf{x} \right\}. \quad (23)$$

Эта формула получена без каких-либо предположений о величине  $kz$ . Первое слагаемое в (23) представляет собой сумму интенсивностей однородных плоских волн, проекция волновых векторов которых на плоскость  $\{x, y\}$  равна  $\mathbf{x}$ , а второе слагаемое соответствует неоднородным плоским волнам, экспоненциально убывающим от поверхности. При  $kz \gg 1$  вторым слагаемым в (23) можно пренебречь, и мы приходим к (22).

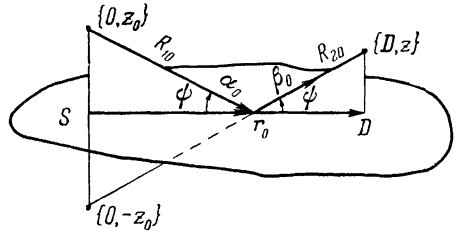


Рис. 10.

3. Считая по-прежнему площадку достаточно большой ( $L \gg \lambda, l$ ), рассмотрим случай крупномасштабных неровностей  $kl \gg 1$ . Тогда в (11) или в (20) можно выполнить интегрирование по  $d\mathbf{p}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p}) e^{ik(\mathbf{a} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e})} d\mathbf{p} = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \delta(\mathbf{\beta}_{\perp} - \mathbf{\alpha}_{\perp}) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \delta\left(\frac{D-r}{R_2} - \frac{r}{R_1}\right). \quad (24)$$

Интегрируя теперь по  $d\mathbf{r}$  в (11) [или по  $d\mathbf{\beta}_{\perp}$  в (20)], получаем

$$J = (2k\sigma)^2 Q(\mathbf{\alpha}_{0\perp} = \mathbf{\beta}_{0\perp}) \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \delta\left(\frac{D-r}{R} - \frac{r}{R_1}\right) = \frac{(2k\sigma)^2 Q(\mathbf{\alpha}_{0\perp} = \mathbf{\beta}_{0\perp})}{\beta_{0z}^2 (R_{10} + R_{20})^2}. \quad (25)$$

Здесь  $\mathbf{\beta}_0$  — корень уравнения  $\mathbf{\beta}_{\perp} - \mathbf{\alpha}_{\perp}(\mathbf{\beta}) = 0$  и  $\mathbf{\alpha}_0 = \mathbf{\alpha}(\mathbf{\beta}_0)$ . Из простых геометрических построений (рис. 10) видно, что корень уравнения  $\frac{D-r}{R_1} - \frac{r}{R_2} = 0$  является точкой зеркального отражения  $r_0$  от плоскости  $z=0$ , т. е.  $\mathbf{\alpha}_0$  и  $\mathbf{\beta}_0$  — единичные векторы, определяемые соотношениями (10) при  $r=r_0$ . Поэтому, если  $\psi$  — угол скольжения, определенный в точке зеркального отражения,

то  $\beta_{0z} = -\alpha_{0z} = \sin \psi$ . Из формул (12) можно получить соотношение между  $Q_g$  и  $Q_\mu$ ,

$$Q_g(\alpha, \beta) - Q_\mu(\alpha, \beta) = (\alpha_\perp - \beta_\perp)^2 + (\alpha_\perp \beta_\perp)^2 - \alpha_\perp^2 \beta_\perp^2, \quad (26)$$

откуда следует, что  $Q_g(\alpha_\perp = \beta_\perp) = Q_\mu(\alpha_\perp = \beta_\perp)$ . Таким образом, при  $kl \gg 1$  флуктуации поля над абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностями совпадают:

$$J_{\mu, g} = \frac{(2k\sigma \sin \psi)^2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (27)$$

Интенсивность флуктуаций определяется параметром Рэля  $2k\sigma \sin \psi$ , малость которого и является условием применимости метода возмущений в данном случае.

4. В обратном предельном случае мелких неровностей  $kl \ll 1$  показатель экспоненты в (24) при всех углах скольжения мал, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) e^{ik(\alpha - \beta, \rho)} d\rho \simeq \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) d\rho = l_x l_y \iint_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (28)$$

Здесь введена корреляционная функция от безразмерных переменных

$$w(\xi, \eta) = W\left(\frac{x}{l_x} \frac{y}{l_y}\right); \quad \xi = \frac{x}{l_x}; \quad \eta = \frac{y}{l_y}, \quad (29)$$

интеграл от которой есть постоянная, порядка единицы:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \eta) d\xi d\eta = C.$$

Формула (11) принимает в этом случае вид

$$J = C \frac{(kl_x)(kl_y)(k\sigma)^2}{\pi^2} \int_{\mathcal{S}} \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} Q(\alpha, \beta). \quad (30)$$

Для двумерных неровностей, у которых  $kl_x \ll 1$ , а  $kl_y \gg 1$ , с помощью тех же вычислений получаем

$$J = C' \frac{2(kl_x)(k\sigma)^2}{\pi} \int_L \frac{dx}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} Q(\alpha_x, \beta_x),$$

$$C' = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, 0) d\xi. \quad (31)$$

Из формул (30) и (31) видно, что при малых  $kl$ , когда рассеяние является диффузным, в формировании поля в точке наб-

людения ( $D, z$ ) участвует большая площадь поверхности  $S$ . Вклад от удаленных участков поверхности уменьшается очень медленно с увеличением расстояний  $R_1$  и  $R_2$  — как  $R_1^{-2}R_2^{-2} \left[ 1 - \left( \frac{zz_0}{R_1R_2} \right)^2 \right]$  для жесткой поверхности и как  $R_1^{-4}R_2^{-4}$  для мягкой поверхности. Это различие связано с тем обстоятельством, что, как уже отмечалось в § 8, при  $kl \ll 1$  индикатриса рассеяния от мягкой поверхности при уменьшении углов скольжения убывает как  $\sin^2 \psi \sin^2 \chi$  ( $\psi$  и  $\chi$  — углы скольжения падающей и отраженной волн соответственно), в то время как для жесткой поверхности она остается конечной величиной при сколь угодно малых углах. Следует, однако, помнить, что, во-первых, абсолютно жесткая поверхность является идеализацией реальных поверхностей, которые при достаточно малых углах ( $\sin \psi \ll 1/n_{2,1}$ ,  $n_{2,1}$  — показатель преломления второй среды относительно первой) всегда ведут себя как абсолютно мягкие, так как коэффициент отражения Френеля от любой среды  $V \approx -1$  при  $\psi \rightarrow 0$ . Во-вторых, при малых углах скольжения следует учитывать конечный эффективный импеданс  $\eta_g$ , возникающий за счет неровностей; при этом уже нельзя в исходной формуле (3) заменить  $\bar{U} \rightarrow U_0$ , так как даже для абсолютно жесткой, но шероховатой поверхности при малых углах скольжения  $V_s \rightarrow -1$  [см. (6.5)]. Заметим, что в то время как при  $kl \gg 1$  интенсивность флуктуаций поля пропорциональна  $\lambda^{-2}$ , для мелких неровностей  $J \sim \lambda^{-4}$  в изотропном случае (30) и  $J \sim \lambda^{-3}$  для сильно анизотропных неровностей (31).

5. Рассмотрим теперь флуктуации электромагнитного поля над статистически шероховатой поверхностью, которая облучается точечным источником, расположенным, так же как и точка наблюдения, на конечном расстоянии от поверхности. Для простоты мы будем считать, что поверхность идеально проводящая, но все результаты легко обобщаются на случай произвольных  $\epsilon$ , точно так же, как и в скалярном случае результаты, полученные для абсолютно мягкой и жесткой поверхностей, обобщались на поверхности с произвольной жесткостью.

Формулы для флуктуаций напряженности поля  $e$  можно получить, совершая в (9.6), (9.9) предельный переход к  $|\epsilon| \rightarrow \infty$ . Однако имеет смысл вывести их заново значительно более простым путем, чем метод разложения по плоским волнам. Для этого воспользуемся схемой расчета, уже применявшейся в § 7 при исследовании среднего поля. Граничное условие для поля  $E$  на идеально проводящей поверхности требует обращения в нуль касательных к поверхности составляющих и имеет, следовательно, вид

$$[N, E]_{z=\zeta(r)} = 0. \quad (32)$$

Здесь  $N$  — единичный вектор нормали к поверхности  $z = \zeta(r)$ , направленный в верхнее полупространство, т. е. туда, где

расположен источник. Используя пологость поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r})$ , т. е. считая  $(\nabla\zeta)^2 \ll 1$ , и малость отклонений ее от средней плоскости, граничное условие (32) можно перенести на плоскость  $z = 0$

$$[\mathbf{n} - \boldsymbol{\gamma}, E + \zeta(\mathbf{n}\nabla)E]_{z=0} = 0, \quad (33)$$

где  $\boldsymbol{\gamma} = \nabla_r \zeta$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Рассеянное поле будем искать в виде суммы поля нулевого приближения  $\mathcal{E}_0$  и поля  $e$  — первого порядка малости по параметрам теории возмущений —  $\gamma^2$  и  $(k\sigma^2)$ :

$$E = \mathcal{E}_0 + e.$$

Отделяя в (33) слагаемые разного порядка малости, приходим к системе граничных условий для зеркальной  $\mathcal{E}_0$  и рассеянной компоненты  $e$  на плоскости  $z = 0$ :

$$[\mathbf{n}\mathcal{E}_0] = 0, \quad (34a)$$

$$[\mathbf{n}e] = [\boldsymbol{\gamma}\mathcal{E}_0] - \zeta[\mathbf{n}, (\mathbf{n}\nabla)\mathcal{E}_0]. \quad (34b)$$

Если источник поля расположен в точке с координатами  $z_0$  и  $\mathbf{r} = 0$  (см. рис. 10), то для поля  $\mathcal{E}_0$  на плоскости  $z = 0$  из граничного условия (34a) следует при  $kz_0 \gg 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{g}) \frac{e^{ikR_1}}{R_1}; \\ \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{n}} &= 2ik(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n})[\mathbf{n}[\mathbf{g}, \mathbf{n}]] \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = \nabla R_1$  — единичный вектор, направленный из источника в точку  $\mathbf{r} \in S$ , а  $\mathbf{g}$  — вектор поляризации падающей волны (квазиплоской, так как рассматривается волновая зона  $kR_1 \gg 1$ ) в точке  $\mathbf{r} \in S$ .

Подставляя (35) в (34b), находим тангенциальные компоненты поля  $e$  на плоскости  $S$ :

$$[\mathbf{n}e] = 2\{(\mathbf{n}\mathbf{g})[\boldsymbol{\gamma}\mathbf{n}] - i\zeta(\mathbf{r})(\mathbf{k}\mathbf{n})[\mathbf{n}\mathbf{g}]\} \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \quad (36)$$

$$(\mathbf{k} = k\boldsymbol{\alpha})$$

Задание касательных компонент поля на произвольной поверхности (не обязательно плоской, как в нашем случае) полностью определяет поле во всем пространстве (см., например, [68]). Для нахождения рассеянного поля в точке наблюдения  $(\mathbf{D}, z)$  по известным тангенциальным составляющим (36) можно воспользоваться формулой (7.7), непосредственно вытекающей из теоремы взаимности [69]. В нашем случае, когда поверхность  $S$  является плоскостью, функцию Грина  $\mathcal{G}^{(\varphi)}$ , входящую в (7.7), можно



представить в виде суммы магнитного поля, создаваемого диполем и его зеркальным отражением в плоскости  $S$ :

$$\mathcal{F}(\rho) = 2i [n [n [\kappa \rho]]] \frac{e^{ikR_2}}{R_2},$$

$$\kappa = k\beta, \quad \beta = -\nabla_r R_2. \quad (37)$$

Здесь введен единичный вектор  $\beta$ , направленный в точку наблюдения (см. рис. 8). Подставляя теперь (36) в (37) и (7), получаем

$$e_p = (ep) = \frac{i}{\pi} \int_S \frac{\exp [ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} ([n [n [\kappa \rho]]],$$

$$(ng) [\gamma n] - i\zeta (kn) [ng]) dr. \quad (38)$$

В этом интеграле слагаемое, содержащее  $\gamma = \nabla \zeta$ , удобно проинтегрировать по частям, считая, по-прежнему, что рассеивающая поверхность находится в волновой зоне как источника ( $kz_0 \gg 1$ ), так и точки наблюдения ( $kz \gg 1$ ). Выполняя после этого несложные векторные преобразования, приходим к формуле

$$e_p = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\exp [ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} ([p\kappa], (kn) [ng] +$$

$$+ (ng) [n, \kappa - k]) \zeta(r) dr. \quad (39)$$

Вместо вектора поляризации падающей волны  $g$ , являющегося для точечного диполя функцией точки  $r \in S$ , можно перейти к дипольному моменту  $p_0$  источника по формуле (9.13), подставляя которую в (39), получаем окончательное выражение для рассеянного поля в точке наблюдения,

$$e_p = \frac{k^2}{\pi} \int_S \frac{\exp [ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} \mathfrak{F}_p^{p_0}(\alpha, \beta) \zeta(r) dr, \quad (40)$$

где обозначение  $\mathfrak{F}_p^{p_0}$  было введено формулой (9.18). В случае же  $\varepsilon \neq \infty$  можно получить формулу точно такого же вида, что и (40), но множитель  $\mathfrak{F}_p^{p_0}$  имеет при этом более сложный вид (9.15).

Формула (40) аналогична выражениям (4) и (5) для флуктуаций скалярного волнового поля. Если при вычислении поляризационной матрицы  $J_{p_1 p_2}^{p_0} = e_{p_1} e_{p_2}^*$  ограничиться теми же приближениями (8), что и при переходе от (4), (5) к (11), то из (40) получаем

$$J_{p_1 p_2}^{p_0} = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} Q_{p_1 p_2}^{p_0}(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\alpha - \beta, \varrho)} W(\rho) d\rho; \quad (41)$$

$$Q_{p_1 p_2}^{p_0} = \mathfrak{F}_{p_1}^{p_0} \mathfrak{F}_{p_2}^{p_0*}.$$

Еще раз напомним, что векторы поляризации  $p_0$  и  $p$  могут быть и комплексными: вещественным  $p_0$ ,  $p$  соответствует линейная поляризация источника и приемника, а комплексным — эллиптическая.

6. Формула (41) имеет ту же структуру, что и формула (11), и поэтому все результаты, полученные для скалярного волнового поля, с очевидными обобщениями переносятся и на флуктуации электромагнитного поля. В частности, в зоне разделения спектров ( $kl \cdot L/R \ll 1$ ) из (41) получаем формулу, совпадающую с формулой (9.12) для поляризационной матрицы в зоне Фраунгофера. То есть, результаты § 9 справедливы при значительно более слабом ограничении на малость рассеивающей площадки, чем это предполагалось ранее ( $k \cdot L^2/R \ll 1$ ).

При рассеянии на крупномасштабных неровностях ( $kl \gg 1$ ), когда отражение от шероховатой поверхности является почти зеркальным, формула (41) несколько упрощается [ср. с (25)]

$$J_{p_1 p_2}^{p_0} = \frac{(2k\sigma)^2}{\alpha_z^2 (R_1 + R_2)^2} Q_{p_1 p_2}^{p_0} (\alpha_{\perp} = \beta_{\perp}), \quad (42)$$

$$\mathcal{F}_p^{p_0} (\alpha_{\perp} = \beta_{\perp}) = -\alpha_z^2 [(p_0 \alpha)(p \beta) - (p_0 p) + 2p_z p_{0z}].$$

Отсюда для интенсивности флуктуаций поля с линейной поляризацией  $p$ , в частности, получаем

$$J_{pp}^{p_0} = \frac{(2k\sigma \sin \psi)^2}{(R_1 + R_2)^2} [(p_0 \alpha)(p \beta) - (p_0 p) + 2p_z p_{0z}]. \quad (43)$$

Полная интенсивность флуктуирующего поля, включающая все возможные поляризации, получается путем суммирования (43) по полной системе линейно независимых компонент  $P$ :

$$J^{p_0} = \text{Spur } J_{P_1 P_2}^{p_0} = \frac{(2k\sigma \sin \psi)^2}{(R_1 + R_2)^2} [1 - (\alpha p_0)^2]. \quad (44)$$

Наконец, если (44) разделить на интенсивность зеркально отраженного поля, то для величины относительных флуктуаций интенсивности получаем

$$\frac{J^{p_0}}{J_0^{p_0}} = (2k\sigma \sin \psi)^2. \quad (45)$$

Таким образом, при  $kl \gg 1$  интенсивность флуктуаций электромагнитного поля над идеально проводящей поверхностью совпадает с интенсивностью флуктуаций скалярного волнового поля над абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностями и определяется параметром Рэлея  $(2k\sigma \sin \psi)^2$ .

## § 11. Флуктуации амплитуды и фазы

До сих пор волновое поле над статистически неровной поверхностью мы представляли в виде суммы поля нулевого приближения  $U_0$  и малой флуктуирующей добавки  $u$  (или в электромагнитном случае  $\mathcal{E}_0$  и  $e$  соответственно). В предыдущих двух

параграфах исследовалась лишь средняя интенсивность флуктуаций  $J = \overline{|u|^2}$  и поляризационная матрица  $J_{p_1 p_2} = \overline{e_{p_1} e_{p_2}^*}$  в различных предельных случаях. Перейдем теперь к рассмотрению флуктуаций амплитуды и фазы полного поля  $U = U_0 + u$ . Для флуктуирующей компоненты мы имеем интегральное представление

$$u = \frac{k^2}{\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\exp [ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} \hat{\mathcal{G}}(\alpha, \beta) \zeta(r) dr, \quad (1)$$

в равной степени пригодное как для скалярного поля [см. (10.4) и (10.5)], так и для любой компоненты векторного поля [см. (10.40)], причем  $\hat{\mathcal{G}}(\alpha, \beta)$  — медленно изменяющаяся операторная функция углов скольжения и наблюдения:

$$\hat{\mathcal{G}}_u(\alpha, \beta) = \alpha_z \beta_z, \quad \hat{\mathcal{G}}_g(\alpha, \beta) = -\alpha_z^2 - \frac{i}{k} (\alpha_{\perp} \nabla_r)$$

— соответственно для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей, и операторная матрица (относительно векторов поляризации  $p$  и  $g$ ) — в электромагнитном случае:

$$\hat{\mathcal{G}}_e(\alpha, \beta) = ([n [n [\beta p]]]), \quad (\alpha n) [ng] + \frac{i}{k} (ng) [\nabla n].$$

Что же касается поля нулевого приближения, то оно определяется отражательной формулой (1.39) и может быть записано в виде суммы прямого сигнала из источника в точку наблюдения и зеркально отраженного от плоскости. При этом, как известно, поле имеет сложный лепестковый характер — чередующиеся в пространстве максимумы и минимумы — результат интерференции прямого и отраженного сигналов [132], [133]. Поэтому, хотя флуктуирующее поле  $u$  и мало (в силу требований теории возмущений), в минимумах лепестков оно является главным слагаемым в сумме  $U = U_0 + u$ . Таким образом, в минимуме интерференционных лепестков волновое поле  $U = u$  является чисто случайным — без регулярной (детерминированной) составляющей — и при решении вопроса о флуктуациях его амплитуды и фазы можно воспользоваться готовыми формулами гл. II. В этом параграфе рассматривается другой предельный случай, когда флуктуации малы по сравнению с регулярным полем. Такая ситуация имеет место или в максимуме интерференционных лепестков или же в том случае, когда отсутствует прямой сигнал из источника в точку наблюдения\*), так что интерференционная картина вообще

\*) Именно этот случай часто встречается при распространении радиоволн (и звука) в естественных условиях. Прямой сигнал при этом исключается либо за счет диаграмм направленности антенн либо за счет разделения во времени отраженного и прямого сигналов при импульсной работе источника.

не возникает, и поле нулевого приближения может быть записано в виде [см. (1.39)]

$$U_0 = \frac{V}{R_{10} + R_{20}} \exp [ik (R_{10} + R_{20})]. \quad (2)$$

Здесь  $V$  — коэффициент отражения, а  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — расстояния от источника и приемника до точки зеркального отражения  $r_0$ . Для определения флуктуаций амплитуды и фазы исходим из соотношения

$$U = U_0 + u = Ae^{i\Phi} = A_0 e^{i\Phi_0} + ae^{i\Phi}, \quad (3a)$$

логарифмируя которое получаем

$$\ln A + i\Phi = \ln [A_0 e^{i\Phi_0} (1 + u/U_0)]. \quad (3б)$$

Отделяя в (3б) действительную и мнимую части и считая, что  $|u| \ll |U_0|$ , приходим к следующим формулам для флуктуаций амплитуды и фазы [134], [135]:

$$\delta\varphi = \Phi - \Phi_0 = \text{Im} \frac{u}{U_0}, \quad (4a)$$

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{A - A_0}{A_0} = \text{Re} \frac{u}{U_0}. \quad (4б)$$

Среднеквадратичные флуктуации  $\overline{(\delta A/A)^2}$ ,  $\overline{(\delta\varphi)^2}$  этих величин и их коэффициент корреляции  $\frac{\delta A}{A} \delta\varphi$  связаны с флуктуирующим полем  $u$  и зеркально отраженным  $U_0$  соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{\left|\frac{u}{U_0}\right|^2} \pm \text{Re} \overline{\left(\frac{u}{U_0}\right)^2} \right\}; \quad (5a)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = \frac{1}{2} \text{Im} \overline{\left(\frac{u}{U_0}\right)^2}. \quad (5б)$$

Исходя из этих формул, рассмотрим различные предельные случаи, когда флуктуации указанных величин могут быть вычислены без детализации корреляционной функции неровностей  $W(\rho)$ .

1. Исследование начнем с рассмотренного в предыдущих параграфах случая, когда точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера (дальняя зона) относительно отдельных неровностей, т. е.  $kl^2/R \ll 1$ .

Первое слагаемое в (5a) нами было уже, в сущности, вычислено при рассмотрении интенсивности флуктуаций [см. (10.11) и (10.41)]

$$\overline{\left|\frac{u}{U_0}\right|^2} = \frac{k^4 \sigma^2 (R_{10} + R_{20})^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \hat{Q}(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\alpha - \beta \cdot \varphi)} W(\rho) d\rho. \quad (6)$$

Здесь, как и в предыдущих параграфах, введено обозначение  $\hat{Q}(\alpha, \beta) = |\hat{S}(\alpha, \beta)|^2$ . Тем же путем можно получить формулу и для  $\left(\frac{u}{U_0}\right)^2$ :

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)^2 = \frac{k^4 \sigma^2 (R_{10} + R_{20})^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \exp [2ik (R_1 + R_2 - R_{10} - R_{20})] \times \hat{Q}(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\alpha - \beta, \rho)} W(\rho) d\rho. \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) подынтегральная функция в интеграле по  $d\rho$  осциллирует при изменении переменной  $r$  на расстояниях  $\Delta r_1$ , определяемых из соотношения  $\frac{kl}{R} \Delta r_1 \simeq 1$ . Возникающий же в (7) дополнительный экспоненциальный множитель существенно изменяется на расстояниях порядка зоны Френеля  $\Delta r_2 \simeq \sqrt{R/k}$ . В силу неравенства

$$\left(\frac{\Delta r_2}{\Delta r_1}\right)^2 \simeq \frac{kl^2}{R} \ll 1, \quad (8)$$

именно эти осцилляции с периодом  $\Delta r_2$  и определяют величину интеграла (7), который, таким образом, оказывается в  $R/(kl^2)$  раз меньше, чем относительные флуктуации интенсивности (6):

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)^2 \ll \left|\frac{u}{U_0}\right|^2.$$

Следовательно, из (5а,б) получаем, что при  $kl^2/R \ll 1$  относительные флуктуации амплитуды и фазы некоррелированы, их дисперсии совпадают и равны половине относительных флуктуаций интенсивности

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} = \overline{(\delta\varphi)^2} = \frac{1}{2} \left|\frac{u}{U_0}\right|^2 = \frac{1}{2} \frac{J}{J_0},$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = 0. \quad (9)$$

Этот результат допускает простую геометрическую интерпретацию. Представим полное поле  $U$  в виде вектора, длина которого равна амплитуде поля  $A$ , а аргумент — фазе  $\Phi$  (рис. 11). Согласно (3а) этот вектор можно представить в виде суммы постоянного вектора  $U_0$  с амплитудой  $A_0$  и фазой  $\Phi_0$  и флуктуирующего вектора  $u$ . Но при  $\frac{kl^2}{R} \ll 1$  в зоне Френеля находится много неровностей,

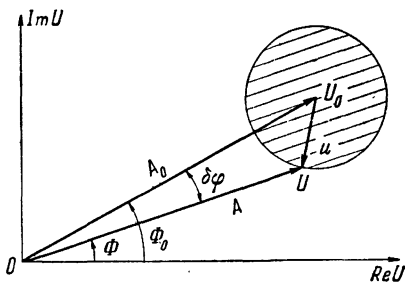


Рис. 11.

т. е. случайное поле  $u$  является суммой большого числа некоррелированных составляющих, и, следовательно, распределено по нормальному закону. Значит, аргумент вектора  $u$  распределен равномерно в интервале углов от 0 до  $2\pi$ , а его амплитуда  $a$  распределена по закону Рэлея, причем  $a^2 \ll A_0^2$ . Из рис. 11 при этом следует, что  $\delta A/A \sim \delta\varphi$  и  $\overline{\delta A/A \cdot \delta\varphi} = 0$ .

Так как всегда предполагается, что  $kR \gg 1$ , то неравенство (8) может нарушиться лишь при  $kl \gg 1$ , т. е. можно ожидать, что при  $kl \gg 1$  возможны случаи, когда для флуктуаций амплитуды и фазы из (5а, б) вытекают формулы, отличные от (9). К исследованию этого случая мы и перейдем.

2. Итак, пусть неровности поверхности имеют достаточно большие линейные размеры, так что в (1) существенна лишь небольшая область интегрирования около точки зеркального отражения

$$r_0 = \frac{z_0}{z + z_0} D. \quad (10)$$

Тогда показатель экспоненты можно разложить в ряд вблизи этой точки, а медленно изменяющуюся с  $r$  функцию  $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$  вынести за знак интеграла при  $\beta_{\perp} = \alpha_{\perp} = r_0/R_{10}$ . Но для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей  $\mathfrak{F}_{\mu}(\alpha_{\perp} = \beta_{\perp}) = -\mathfrak{F}_{\varepsilon}(\alpha_{\perp} = \beta_{\perp}) = \sin^2 \psi$ . С точностью до множителя, зависящего лишь от поляризации, это соотношение имеет место и для электромагнитного поля, так что из (1) получим

$$u = \pm \frac{k^2 \sin^2 \psi}{\pi R_{10} R_{20}} \exp[ik(R_{10} + R_{20})] \times \\ \times \int_S \exp\left[i \frac{k}{R} (x^2 \sin^2 \psi + y^2)\right] \zeta(r_0 + r) dr. \quad (11)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — составляющие вектора  $r$  вдоль и поперек  $D$  соответственно (см. рис. 8 и 10); верхний знак относится к абсолютно мягкой поверхности, а нижний — к абсолютно жесткой,  $R = \frac{2R_{10}R_{20}}{R_{10} + R_{20}}$ , а  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — расстояния от точки зеркального отражения  $r_0$  до источника и точки наблюдения. При вычислении квадратичных по полю величин  $|\bar{u}|^2$  и  $\bar{u}^2$  можно воспользоваться представлением поля в виде (11), выяснив предварительно границы применимости получаемых таким путем результатов.

Размеры области, существенной для интегрирования в формуле (11), определяются либо первыми зонами Френеля, если поверхность почти плоская, либо угловой шириной диаграммы рассеяния «в малом»  $J(k, \kappa)$ , которая дается формулой (8.16). Фактически рассеяние «в малом» есть рассеяние участком поверхности, находящимся в зоне Фраунгофера относительно источника и точки наблюдения и имеющего линейные размеры, значительно превы-

шающие радиус корреляции. Заметим, что для оценок достаточно рассмотреть лишь продольный размер  $\Delta x$  существенной для отражения области, так как поперечные размеры  $\Delta y$ , как правило, меньше. Исключением является случай двумерных неровностей с образующими, параллельными оси  $x$ . Однако при качественном исследовании (для оценок), как всегда, достаточно ограничиться изотропными неровностями с радиусом корреляции  $l$ . Итак,

$$\Delta x \simeq \max \{(\Delta x)_0; (\Delta x)_z\},$$

где  $(\Delta x)_0 \simeq \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}$  — продольный размер зоны Френеля, а  $(\Delta x)_z$  связана с угловой шириной  $\Delta \psi$  индикатрисы очевидным соотношением  $(\Delta x)_z \simeq \frac{R}{\sin \psi} \Delta \psi$  (при  $\Delta \psi \ll 1$ ). Так как индикатриса рассеяния выражается через преобразование Фурье от функции корреляции (8.16), то для определения  $\Delta \psi$  имеем  $kl(\alpha_x - \beta_x) \simeq 1$ , откуда следует

$$\Delta \psi \simeq \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{kl \cos \psi}}; \frac{1}{kl \sin \psi} \right\}, \quad (12)$$

так что

$$(\Delta x)_z \simeq \min \left\{ \frac{R}{\sin \psi \sqrt{kl \cos \psi}}; \frac{R}{kl \sin^2 \psi} \right\}, \quad (13a)$$

$$(\Delta x)_0 \simeq \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}. \quad (13b)$$

При выводе формулы (11) из (1) было сделано два допущения. Во-первых, размеры существенной для интегрирования области  $\Delta x$  считались достаточно малыми для того, чтобы предэкспоненциальный множитель  $\mathcal{F}(\alpha, \beta) (R_1 R_2)^{-1}$  можно было вынести в точке зеркального отражения. Во-вторых, мы ограничились лишь квадратичными членами при разложении показателя экспоненты в ряд около точки зеркального отражения, считая, что кубическими и более высокими степенями можно пренебречь.

Ввиду того, что  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$  существенным образом изменяется лишь на расстояниях  $r \sim R_{1,2}$ , первое ограничение можно записать в виде  $\Delta x \ll R_{1,2}$ , откуда, с учетом (13a), следуют неравенства:

$$kz_{\min} \sin \psi \gg 1, \quad z_{\min} = \min \{z_0, z\}; \quad (14a)$$

$$\max \{kl \sin^2 \psi, \sin \psi \sqrt{kl \cos \psi}\} \gg 1. \quad (14b)$$

Таким образом, из рассмотрения исключается скользящее пространство ( $\psi \neq 0$ ), и неровности поверхности должны быть достаточно крупномасштабными, что совершенно естественно, ибо, как мы видели в § 8, при  $kl \ll 1$  — отражение диффузное, и в формировании поля в каждой точке принимает участие вся

«светящаяся» плоскость. Отметим, что ограничение на  $kl$  при малых углах скольжения ( $\sqrt{kl} \psi \gg 1$ ) является более жестким, чем при крутом ( $\psi \rightarrow \pi/2$ ) облучении —  $kl \gg 1$ .

Оценим теперь возможность отбрасывания следующих членов разложения в показателе экспоненты. С точностью до членов четвертого порядка это разложение имеет вид

$$R_1 + R_2 \simeq R_{10} + R_{20} + \frac{x^2 \sin^2 \psi + y^2}{R} - \frac{x \cos \psi (x^2 \sin^2 \psi + y^2)}{R^2} - \frac{(x^2 + y^2 - 5x^2 \cos^2 \psi)(x^2 \sin^2 \psi + y^2)}{R^3} + \dots, \quad (15)$$

где

$$R = \frac{2R_{10}R_{20}}{R_{10} + R_{20}}, \quad R_-^2 = \frac{2R_{10}^2R_{20}^2}{R_{20}^3 - R_{10}^3}, \quad R_+^3 = \frac{8R_{10}^3R_{20}^3}{R_{10}^3 + R_{20}^3}.$$

При вычислении  $|\bar{u}|^2$  следует оценивать члены кубического и более высокого порядка в разности  $R_1 + R_2 - R'_1 - R'_2$  [см., например, (10.6)]. Учитывая, что переменная интегрирования  $x' - x = \xi$  ограничена радиусом корреляции  $l$ , и воспользовавшись для  $\Delta x$  формулой (13а), получаем, что кубическим членом можно пренебречь, если

$$\max \left\{ \frac{z_0^3 + z^2}{z_0^2 - z^2}; kl \sin \psi \operatorname{tg} \psi \right\} \gg 1. \quad (16a)$$

Аналогично, для члена четвертого порядка имеем

$$\max \left\{ (kl)^2 \sin^4 \psi; \sin^2 \psi \sqrt{kl \cos \psi} \right\} \gg 1. \quad (16b)$$

Заметим, что при  $z_0 = z$  или при  $\psi \rightarrow \pi/2$  кубический член точно обращается в нуль, что, как нетрудно видеть, является следствием симметрии существенной для отражения области в этом случае. Вообще же ограничения (16а, б) не сильнее, чем (14б).

Что касается среднего  $\bar{u}^2$ , то членами третьего и более высокого порядка в (15) можно пренебречь, если по-прежнему  $kz_{\min} \sin \psi \gg 1$  и, кроме того, выполнено неравенство

$$\frac{kl^2 \sin^2 \psi}{R} \gg \frac{1}{kl \sin^2 \psi}. \quad (17)$$

Ввиду того, что  $kl \sin^2 \psi \gg 1$  [см. (14б)], неравенство (17) может нарушаться лишь для  $\frac{kl^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1$ , но при этом  $\bar{u}^2 \ll |\bar{u}|^2$ , как было выяснено в п. 1 данного параграфа, так что ограничение (17) несущественно.

3. Перейдем теперь к вычислению флуктуаций амплитуды и фазы по формулам (5), исходя из представления поля в виде (11).



Для относительной интенсивности флуктуаций поля получаем уже знакомые формулы (10.27) или (10.45):

$$\left| \frac{u}{U_0} \right|^2 = (2k\sigma \sin \psi)^2. \quad (18)$$

Для второго слагаемого в (5а) имеем

$$\overline{\left( \frac{u}{U_0} \right)^2} = \left( \frac{2k^2\sigma \sin^2 \psi}{\pi R} \right)^2 \iint_S \exp \left\{ i \frac{k}{R} [(x^2 + x'^2) \sin^2 \psi + y^2 + y'^2] \right\} \times \\ \times W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (19)$$

Введем в (19) вместо  $\mathbf{r}'$  новую переменную  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и выполним интегрирование по  $d\mathbf{r}$ , считая, что линейный размер  $L$  площадки  $S$  во всяком случае больше, чем зона Френеля:  $L \gg \sqrt{R/k}$ . В дальнейшем мы, вообще, ограничимся рассмотрением флуктуаций над бесконечной шероховатой поверхностью, т. е. будем считать  $L \rightarrow \infty$ . После интегрирования формула (19) примет вид

$$\overline{\left( \frac{u}{U_0} \right)^2} = i (2k\sigma \sin \psi)^2 \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \times \\ \times \int W(\boldsymbol{\rho}) \exp \left[ i \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) \right] d\boldsymbol{\rho}, \quad (20)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — составляющие вектора  $\boldsymbol{\rho}$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Подставляя (18) и (20) в (5а, б), получим

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left( \frac{\delta A}{A} \right)^2} \\ \overline{(\delta \varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2 (k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \operatorname{Im} \int W(\boldsymbol{\rho}) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ i \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) \right] \right] d\boldsymbol{\rho}, \quad (21a)$$

$$\frac{\delta A}{A} \delta \varphi = 2 (k\sigma \sin \psi)^2 \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \operatorname{Re} \int W(\boldsymbol{\rho}) \exp \left[ i \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) \right] d\boldsymbol{\rho}. \quad (21б)$$

Для исследования этих формул удобно ввести безразмерные параметры  $d_\xi$  и  $d_\eta$ ,

$$d_\xi^2 = \frac{kl_x^2 \sin^2 \psi}{2R}, \quad d_\eta^2 = \frac{kl_y^2}{2R}, \quad (22)$$

имеющие смысл отношения радиусов корреляции  $l_x$  и  $l_y$  к размерам зон Френеля вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Вместо  $W(\xi, \eta)$  введем функцию  $w(x; y)$  безразмерных переменных

$x = \xi/l$ ,  $y = \eta/l$ , так что формулы (21а, б) в новых обозначениях примут вид

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{d_\xi d_\eta}{\pi} \operatorname{Im} \mathfrak{Y} \right], \quad (23a)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \frac{d_\xi d_\eta}{\pi} \operatorname{Re} \mathfrak{Y}, \quad (23б)$$

$$\mathfrak{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y) \exp [i(d_\xi^2 x^2 + d_\eta^2 y^2)] dx dy. \quad (23в)$$

Перейдем теперь к рассмотрению различных предельных случаев:

а.  $d_\xi, d_\eta \ll 1$ , т. е. в зоне Френеля помещается много неровностей — случай, исследованию которого был посвящен п. 1 этого параграфа.

Раскладывая полынтегральную функцию в (23в) в ряд по  $d_\xi, d_\eta$  и ограничиваясь членами второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y) \{1 + i(d_\xi^2 x^2 + d_\eta^2 y^2)\} dx dy = \\ &= m_{00} + i(d_\xi^2 m_{20} + d_\eta^2 m_{02}), \end{aligned} \quad (24)$$

где введены моменты  $m_{ik}$  функции  $\omega(x, y)$ :

$$m_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k \omega(x, y) dx dy, \quad (25)$$

являющиеся константами порядка единицы. Подставив в (23а, б) приближенное выражение для  $\mathfrak{Y}$  из (24), приходим, как и следовало ожидать, к формулам типа (9), но с учетом малых членов порядка  $d_\xi, d_\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{d_\xi d_\eta}{\pi} (d_\xi^2 m_{20} + d_\eta^2 m_{02}) \right]; \quad (26a)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \frac{d_\xi d_\eta}{\pi} m_{00}. \quad (26б)$$

Эти формулы при  $d_\xi, d_\eta \rightarrow 0$  переходят в (9), если там положить  $kl \gg 1$ . Из (26а, б) видно, что при увеличении параметров  $d_\xi$  и  $d_\eta$ , когда в зоне Френеля укладывается по-прежнему большое, но конечное число неровностей (радиусов корреляции), во-первых, появляется корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы

(26б), и во-вторых, дисперсия флуктуаций амплитуды уменьшается, а флуктуаций фазы увеличивается.

Корреляцию флуктуаций удобно характеризовать нормированным коэффициентом корреляции

$$R_{A\varphi} = \frac{\overline{\frac{\delta A}{A} \delta \varphi}}{\sqrt{\left(\overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \cdot \overline{(\delta \varphi)^2}\right)}} = \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{M}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{d_{\xi} d_{\eta}}\right)^2 - (\operatorname{Im} \mathfrak{M})^2}}. \quad (27)$$

Подставляя сюда (24), имеем

$$R_{A\varphi} = \frac{m_{00}}{\pi} d_{\xi} d_{\eta} \quad \text{при } d_{\xi}, d_{\eta} \ll 1. \quad (28)$$

Если зафиксировать  $d_{\eta} \ll 1$  и увеличивать  $d_{\xi}$ , то из сравнения (28) и (26а) следует, что коэффициент корреляции  $R_{A\varphi}$  будет расти линейно с ростом  $d_{\xi}$ , а отклонения среднеквадратичных флуктуаций амплитуды и фазы от значения  $2(k\sigma \sin \psi)^2$  будут увеличиваться значительно быстрее — как  $d_{\xi}^2$ .

б. Рассмотрим теперь противоположный предельный случай —  $d_{\xi}, d_{\eta} \gg 1$ , т. е. когда характерные линейные размеры неровностей  $l_{\xi}, l_{\eta}$  намного превышают размер зоны Френеля. В интеграле (23в) предэкспоненциальный множитель  $\omega(x, y)$  изменяется значительно медленнее, чем осциллирует экспонента, что позволяет написать следующее приближенное выражение для  $\mathfrak{M}$  при  $d_{\xi}, d_{\eta} \gg 1$ :

$$\mathfrak{M} \approx \frac{\pi i}{d_{\xi} d_{\eta}} \left\{ 1 + \frac{i}{4} \left( \frac{\mu_{20}}{d_{\xi}^2} + \frac{\mu_{02}}{d_{\eta}^2} \right) - \frac{1}{32} \left( \frac{\mu_{40}}{d_{\xi}^4} + 2 \frac{\mu_{22}}{d_{\xi}^2 d_{\eta}^2} + \frac{\mu_{04}}{d_{\eta}^4} \right) \right\}. \quad (29)$$

Здесь мы воспользовались четностью функции  $\omega(x, y)$  по обоим переменным и ввели обозначение

$$\mu_{ik} = \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} \omega(x, y) \Big|_{x=y=0} \quad (30)$$

(очевидно, что  $\mu_{ik}$ , так же как и моменты  $m_{ik}$ , — величины порядка единицы).

Подставляя (29) в (23), получаем для флуктуаций амплитуды и фазы в этом случае

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} = \frac{(k\sigma \sin \psi)^2}{16} \left( \frac{\mu_{40}}{d_{\xi}^4} + 2 \frac{\mu_{22}}{d_{\xi}^2 d_{\eta}^2} + \frac{\mu_{04}}{d_{\eta}^4} \right); \quad (31a)$$

$$\overline{(\delta \varphi)^2} = (2k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 - \frac{1}{64} \left( \frac{\mu_{40}}{d_{\xi}^4} + 2 \frac{\mu_{22}}{d_{\xi}^2 d_{\eta}^2} + \frac{\mu_{04}}{d_{\eta}^4} \right) \right]; \quad (31б)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta \varphi} = - \frac{(k\sigma \sin \psi)^2}{2} \left( \frac{\mu_{20}}{d_{\xi}^2} + \frac{\mu_{02}}{d_{\eta}^2} \right). \quad (31в)$$

Нормированный коэффициент корреляции  $R_{A\varphi}$  при этом равен \*)

$$R_{A\varphi} = - \frac{\mu_{20}d_{\eta}^2 + \mu_{02}d_{\xi}^2}{\sqrt{d_{\eta}^4\mu_{40} + 2d_{\eta}^2d_{\xi}^2\mu_{22} + d_{\xi}^4\mu_{04}}}. \quad (32)$$

Из этих формул следует, что в рассматриваемом предельном случае относительные флуктуации амплитуды значительно меньше флуктуаций фазы (приблизительно в  $\frac{d^4}{\mu_{40}} 10^2$  раз, где  $d \simeq d_{\xi}$ ,  $d_{\eta}$  — большая величина). Причину этого явления легко понять, если вспомнить, что в данном случае неровную поверхность в существенной для отражения области — в зоне Френеля, — можно заметить плоскостью, так как характерные линейные размеры неровностей  $l_x$  и  $l_y$  значительно больше, чем размеры зоны Френеля по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно. При усреднении по ансамблю поверхностей  $z = \zeta(r)$  (или по времени, что встречается значительно чаще) изменяется фактически только расстояние от точки зеркального отражения до источника и приемника. Отношение изменения этого расстояния, средний квадрат которого, как легко видеть, равен  $(2\sigma \sin \psi)^2$  к приведенной длине волны  $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = 1/k$  и есть флуктуации фазы, как это и следует из формулы (31б) с точностью до малых поправок порядка  $d^{-4}$ . Флуктуации же амплитуды при отражении от плоскости вообще не возникают, и лишь учет малого, но конечного искривления поверхности внутри зоны Френеля приводит к малым флуктуациям порядка  $d^{-4}(26a)$ . Заметим, что сумма двух величин,  $(\delta A/A)^2$  и  $(\delta\varphi)^2$  всегда равна относительной интенсивности флуктуаций

$$\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + (\delta\varphi)^2 = \frac{J}{J_0}, \quad (33)$$

как это следует из общей формулы (5а), причем в рассматриваемом случае ( $kl \gg 1$ ) эта величина равна  $(2k\sigma \sin \psi)^2$  [см. (18)]. Что же касается коэффициента корреляции флуктуаций амплитуды и фазы  $R_{A\varphi}$ , то, возрастая при малых  $d_{\xi}$ ,  $d_{\eta}$  [см. (28)], он стремится к постоянному пределу, когда  $d_{\xi}$ ,  $d_{\eta} \rightarrow \infty$ . Величина этого предела определяется лишь производными  $\mu_{ik}$  ( $i, k = 0, 2, 4$ ) от функции корреляции  $\omega(x, y)$  в нуле. (см. (30)).

в. Воспользовавшись результатами предыдущих двух пунктов, можно рассмотреть и весьма важный промежуточный случай, когда рассеяние происходит на сильно вытянутых вдоль оси  $y$

\*) Знак минус в формулах (31в) и (32) не должен вызывать недоразумений, так как  $\omega(x, y)$  имеет в точке  $x=y=0$  максимум и, следовательно,  $\mu_{02}$  и  $\mu_{20}$  всегда отрицательны.

неровностях, так что  $d_\xi \ll 1$ , а  $d_\eta \gg 1$ . Применяя те же, что и раньше, приемы для вычисления интеграла  $\mathcal{D}$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{d_\xi}{\sqrt{2\pi}} \left( m_{\xi 0} + m_{\xi 2} d_\xi^2 + m_{\xi 0} \frac{\mu_{\eta 2}}{4d_\eta^2} \right) \right], \quad (34a)$$

$$\frac{\delta A}{A} \delta\varphi = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \frac{d_\xi}{\sqrt{2\pi}} \left[ m_{\xi 0} - m_{\xi 2} d_\xi^2 - m_{\xi 0} \frac{\mu_{\eta 2}}{4d_\eta^2} \right], \quad (34b)$$

где мы для простоты предположили, что  $\omega(x, y) = \omega_\xi(x) \omega_\eta(y)$ , и ввели обозначения:

$$m_{\xi k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \omega_\xi(x) dx; \quad \mu_{\eta k} = \left. \frac{\partial^k}{\partial y^k} \omega_\eta(y) \right|_{y=0}. \quad (35)$$

Единственное качественное отличие этих результатов от формул (26а, б) состоит в том, что при увеличении параметра  $d_\xi$  отклонение среднеквадратичных флуктуаций  $\overline{(\delta A/A)^2}$  и  $\overline{(\delta\varphi)^2}$  от их значений  $2(k\sigma \sin \psi)^2$  при  $d_\xi = 0$  происходит линейно с  $d_\xi$  — так же, как и возрастание коэффициента корреляции, — а не по кубическому закону  $\sim d_\xi^3$ , как в формулах (26).

Наконец, когда неровности поверхности являются двумерными ( $l_y = \infty$ ), т. е. рассеяние происходит на цилиндрической поверхности с образующими вдоль оси  $y$ , формулы для флуктуаций амплитуды и фазы получаются из (31) и (34) при  $d_\eta = \infty$ . В частности, для коэффициента корреляции имеем

$$R_{A\varphi} = \begin{cases} \frac{m_{\xi 0}}{\sqrt{2\pi}} d_\xi & \text{при } d_\xi \ll 1, \\ -\frac{\mu_{20}}{\sqrt{\mu_{40}}} & \text{при } d_\xi \gg 1. \end{cases} \quad (36a)$$

$$(36b)$$

Для простейших функций корреляции  $\omega(x) = e^{-x^2}$  и  $\omega(x) = \cos x$  предельное значение  $R_{A\varphi}$  при  $d_\xi \gg 1$  равно  $1/\sqrt{3}$  в первом случае и 1 во втором.

4. В п. 2 этого параграфа мы, не конкретизируя вида корреляционной функции поверхности, исследовали различные предельные случаи формул (23). С другой стороны, можно принести в жертву общность получаемых результатов, рассмотрев флуктуации амплитуды и фазы для некоторой конкретной функции корреляции неровностей  $\omega(x, y)$ , но уже во всей области изменения параметров  $d_\xi$  и  $d_\eta$ . Такие расчеты были проведены в работах [135], [136] для двумерных неровностей ( $l_y = \infty$ ) с квазигармонической функцией корреляции

$$W(\xi) = e^{-\alpha^2 \xi^2} \cos q\xi \quad (37)$$

и с учетом конечных размеров рассеивающей площадки  $L$ . Однако полученные там формулы являются довольно громоздкими и, так или иначе, приходится обращаться к различным предельным случаям. Здесь мы рассмотрим более простой случай гауссовой функции корреляции, а размеры рассеивающего участка будем по-прежнему считать бесконечными.

При функции корреляции  $\omega(x) = e^{-x^2}$  интеграл (23в) является элементарным:

$$\mathfrak{D} = \frac{\pi}{d_{\xi}} \sqrt{1+d_{\xi}^2} \sqrt{i-d_{\xi}^2}, \quad (38)$$

так что для получения дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы остается вычислить его

действительную и мнимую части. Воспользовавшись легко получаемыми соотношениями

$$\operatorname{Im} \sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{|z-x|}{2}}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{|z+x|}{2}}, \quad (39)$$

$$(z = x + iy),$$

приходим к окончательным формулам:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2(k\sigma \sin\psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{d_{\xi}}{\sqrt{2(1+d_{\xi}^2)}} \sqrt{\sqrt{d_{\xi}^2+1} + d_{\xi}} \right], \quad (40a)$$

$$\frac{\delta A}{A} \delta\varphi = 2(k\sigma \sin\psi)^2 \frac{d_{\xi}}{\sqrt{2(1+d_{\xi}^2)}} \sqrt{\sqrt{d_{\xi}^2+1} - d_{\xi}}, \quad (40б)$$

$$R_{A\varphi} = \left[ \frac{\sqrt{1+d_{\xi}^2} - d_{\xi}}{2d_{\xi}^2 + d_{\xi}^2 - \sqrt{1+d_{\xi}^2}} \right]^{1/2}. \quad (40в)$$

Видно, что даже в этом простейшем случае зависимость флуктуаций от параметра  $d_{\xi}$  все-таки довольно сложна. На рис. 12 представлены графики, построенные по формулам (40). В предель-

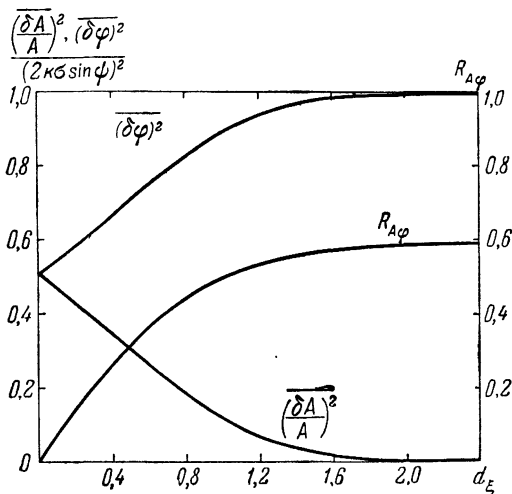


Рис. 12.

ных случаях получаем результаты предыдущего пункта, но уже с конкретными численными коэффициентами  $m_{ik}$  и  $\mu_{ik}$ :

а)  $d_{\xi} \ll 1$

$$\left. \frac{(\overline{\delta A/A})^2}{(\overline{\delta \varphi})^2} \right\} = 2 (k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \frac{d_{\xi}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{d_{\xi}^2}{2} \right) \right], \quad (41a)$$

$$\frac{\overline{\delta A}}{A} \delta \varphi = 2 (k\sigma \sin \psi)^2 \frac{d_{\xi}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{d_{\xi}^2}{2} \right), \quad (41б)$$

$$R_{A\varphi} = \frac{d_{\xi}}{\sqrt{2}}; \quad (41в)$$

б)  $d_{\xi} \gg 1$

$$\left. \frac{(\overline{\delta A/A})^2}{(\overline{\delta \varphi})^2} \right\} = 2 (k\sigma \sin \psi)^2 \left[ 1 \mp \left( 1 - \frac{3}{8d_{\xi}^4} \right) \right], \quad (42a)$$

$$\frac{\overline{\delta A}}{A} \delta \varphi = \left( \frac{k\sigma \sin \psi}{d_{\xi}} \right)^2, \quad (42б)$$

$$R_{A\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (42в)$$

Эти формулы были впервые получены Гулиным в работах [135]—[137] для квазигармонических неровностей с функцией корреляции (37). Там же можно найти некоторые результаты, относящиеся к рассеянию на ограниченной поверхности конечных размеров  $L$ .

## РАССЕЯНИЕ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

## § 12. Случайные колебания границы раздела

При рассеянии монохроматической волны  $U_0 \sim e^{-i\omega_0 t}$  на поверхности, форма которой зависит от времени, т. е. описывается уравнением  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ , следует ожидать изменения спектрального состава отраженного поля по сравнению с падающим. Если изменение формы поверхности является достаточно медленным, так что характерные скорости движения точек поверхности малы по сравнению со скоростью распространения волны, то для определения поля, рассеянного на такой поверхности, можно воспользоваться квазистатическим приближением [138]. Исходная формула для флуктуаций поля  $u(\mathbf{R}, t)$  точечного источника над такой поверхностью является в данном случае очевидным обобщением формулы (11.1):

$$u(\mathbf{R}, t) = \frac{k^2}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_S \frac{\exp[ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} \hat{\delta}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \zeta(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Флуктуации любой компоненты векторного поля, как следует из (10.40), также могут быть записаны в таком виде. Наша задача будет заключаться в исследовании энергетического спектра временных флуктуаций поля

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(\mathbf{R}, t + \tau) u^*(\mathbf{R}, t) e^{i(\omega + \omega_0)\tau}} d\tau. \quad (2)$$

Здесь частота  $\omega$  отсчитывается от несущей частоты  $\omega_0$ , так что спектру монохроматического поля соответствует не  $\delta(\omega - \omega_0)$ , а  $\delta(\omega)$ , т. е.  $S(\omega)$  — «медленный» энергетический спектр (4.11). В общем случае, как следует из определения (2), спектр флуктуаций зависит от пространственного радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  и изменяется со временем  $t$ .

При подстановке в (2) выражения для  $u(\mathbf{R}, t)$  из (1) возникают средние от произведения ординат поверхности  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  в разных точках  $\mathbf{r}$  и в разные моменты времени  $t$ . Как всегда, мы предполагаем пространственную однородность и стационарность



во времени случайной функции  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ , так что указанные средние могут быть представлены в виде

$$\overline{\zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau)} = \sigma^2 W(\boldsymbol{\rho}, \tau). \quad (3)$$

При этом флуктуации поля  $u(\mathbf{R}, t)$  также являются стационарными и их спектр  $S(\omega)$  не зависит от времени  $t$ .

1. Таким образом, спектр рассеянного поля оказывается связанным с пространственно-временной корреляционной функцией поверхности  $W(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ . При этом весьма существенным оказывается то обстоятельство, что зависимость  $W$  от пространственных переменных  $\rho_x, \rho_y$  и времени  $\tau$  не является произвольной. Действительно, так как рассматриваемая статистически шероховатая поверхность  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$  является границей раздела двух сред, то связь между пространственными и временными изменениями профиля поверхности определяется некоторым, в общем случае довольно сложным, интегро-дифференциальным уравнением в частных производных — уравнением движения. Если возмущения  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  этой границы раздела достаточно малы, то это уравнение — линейное.

В каждом конкретном случае, разумеется, возникают различные критерии малости  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ . Например, при колебаниях поверхности тяжелой несжимаемой жидкости — это малость не  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , а наклонов поверхности  $\gamma = \nabla_r \zeta(\mathbf{r}, t)$ .

Линейность уравнения движения возмущений поверхности в свою очередь приводит к тому, что выполняется принцип суперпозиции — каждое изменение формы поверхности  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  в пространстве и времени можно представить в виде линейной комбинации элементарных колебаний — монохроматических плоских волн, распространяющихся в разных направлениях с различными волновыми векторами  $\mathbf{x}$  и частотами  $\Omega$ :

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \tilde{\zeta}(\mathbf{x}) e^{i[\mathbf{x} \mathbf{r} - \Omega(\mathbf{x}) t]}. \quad (4)$$

Отсюда для пространственно-временной корреляционной функции получаем следующее представление:

$$W(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \tilde{W}(\mathbf{x}) e^{i[\mathbf{x} \boldsymbol{\rho} - \Omega(\mathbf{x}) \tau]}. \quad (5)$$

Заметим, что здесь  $\tilde{W}(\mathbf{x})$  — вещественная неотрицательная функция, которая, в отличие от введенного ранее пространственного спектра неподвижной поверхности (см. § 3 п. 3), не обязательно должна быть четной:  $\tilde{W}(\mathbf{x})$  и  $\tilde{W}(-\mathbf{x})$  определяют спектральные плотности энергий поверхностных волн, распространяющихся в противоположных направлениях ( $\mathbf{x}$  и  $-\mathbf{x}$  соответственно).

Для однородных и изотропных сред частота  $\Omega$  каждой элементарной гармоникой не зависит от направления ее распространения, а связана лишь с пространственным периодом  $\Lambda = 2\pi/|\kappa|$ , т. е.  $\Omega = \Omega(\kappa)$ . Явный вид этой зависимости (так называемый «закон дисперсии») определяется конкретным видом уравнения движения.

2. В качестве примера рассмотрим свободные колебания поверхности тяжелой несжимаемой жидкости в бассейне глубиной  $d$ . Затухание колебаний учитывать пока не будем.

Потенциал скоростей  $\Phi(r, z, t)$  в идеальной несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(r, z, t) = 0; \quad r = \{x, y\}; \quad -d < z < 0 \quad (6)$$

и граничным условиям (см., например, [62]) на плоскостях  $z = 0$  и  $z = -d$ :

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0, \quad (7b)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — капиллярная постоянная. Перейдем в этой системе уравнений к преобразованию Фурье  $\tilde{\Phi}$  и  $\tilde{\zeta}$  по координатам  $x, y$ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\kappa, z, t)}{\partial z^2} - \kappa^2 \tilde{\Phi}(\kappa, z, t) = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(\kappa, 0, t)}{\partial t} = - \left( g + \frac{\alpha}{\rho} \kappa^2 \right) \tilde{\zeta}(\kappa, t), \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(\kappa, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\zeta}(\kappa, t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}(\kappa, -d, t)}{\partial z} = 0. \quad (8b)$$

Исключив из (8a, б, в)  $\tilde{\Phi}(\kappa, z, t)$ , получим для  $\tilde{\zeta}(\kappa, t)$  уравнение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}(\kappa, t)}{\partial t^2} + \Omega^2(\kappa) \tilde{\zeta}(\kappa, t) = 0, \quad (9)$$

где  $\Omega(\kappa)$  — закон дисперсии поверхностных колебаний тяжелой несжимаемой жидкости — определяется из уравнения

$$\Omega^2(\kappa) = \left( g\kappa + \frac{\alpha}{\rho} \kappa^3 \right) \text{th} \kappa d. \quad (10)$$

Таким образом, зависимость  $\tilde{\zeta}(\kappa, t)$  от времени  $t$  имеет вид

$$\tilde{\zeta}(\kappa, t) = \tilde{\zeta}_+(\kappa) e^{-i\Omega(\kappa)t} + \tilde{\zeta}_-(\kappa) e^{i\Omega(\kappa)t}. \quad (11)$$

В общем случае форма колебаний поверхности  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\perp}\right)\zeta(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla_{\perp} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, \quad (12)$$

где  $\hat{\mathcal{L}}$  — произвольная функция своих аргументов, не зависящая от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . К виду (11) приводятся любые линейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами и разностными ядрами при бесконечных пределах интегрирования. Переходя в (12) к преобразованию Фурье, получаем для  $\tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t)$  представление, совершенно аналогичное формуле (11):

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \tilde{\zeta}_n(\mathbf{x}) e^{i\Omega_n(\mathbf{x})t}, \quad (13)$$

где частоты  $\Omega_n(\mathbf{x})$  являются корнями дисперсионного уравнения:

$$\hat{\mathcal{L}}\{-i\Omega, i\mathbf{x}\} = 0. \quad (14)$$

Приведем два примера:

а. Рассеяние на волнах изгиба тонкой пластины

$$\hat{\mathcal{L}} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{Ed^2}{12(1-\sigma_n)} \nabla_{\perp}^4, \quad \Omega^2 = \frac{d^2 E}{12\rho(1-\sigma_n)} \kappa^4, \quad (15)$$

$\rho$  — плотность пластины,  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma_n$  — коэффициент Пуассона,  $d$  — толщина.

б. Рассеяние на колебаниях мембраны

$$\hat{\mathcal{L}} = \nabla_{\perp}^2 - \frac{\rho d}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \Omega^2 = \left[\frac{\rho d}{\mathcal{F}}\right]^{-1} \kappa^2, \quad (16)$$

$\mathcal{F}$  — натяжение мембраны.

Представляет определенный интерес случай, когда наряду с колебаниями поверхности имеет место ее равномерное движение как целого. Например, при возбуждении морских волн ветром это соответствует наличию ветрового течения. Уравнение поверхности с учетом равномерного и прямолинейного переносного движения со скоростью  $\mathbf{v}$  запишется в виде

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \zeta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t). \quad (17)$$

Выкладки, аналогичные приведенным выше, снова приводят к формуле (13), в которой  $\Omega_n(\mathbf{x})$  следует заменить на  $\Omega'_n(\mathbf{x})$ :

$$\Omega'_n(\mathbf{x}) = \kappa\mathbf{v} + \Omega_n(\mathbf{x}). \quad (18)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть произвольное неравномерное движение поверхности, однако рассеянное излучение при этом уже не является стационарной случайной функцией; этот случай мы в дальнейшем рассматривать не будем,

3. Так как  $W(\rho, \tau)$  при  $\tau=0$  переходит в пространственную корреляционную функцию неподвижной поверхности, то должно выполняться условие четности:  $W(-\rho, 0) = W(\rho, 0)$ . Для этого в (5) достаточно потребовать вещественности  $\tilde{W}(\mathbf{x})$ . При этом, как нетрудно убедиться, выполняется и другое условие:  $W(0, -\tau) = W(0, \tau)$ , являющееся следствием стационарности случайной функции  $\zeta(r, t)$ . Таким образом, формула (5) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} W(\rho, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \tilde{W}(\mathbf{x}) \cos[\mathbf{x}\rho - \Omega(\mathbf{x})\tau] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \kappa \tilde{W}(\kappa, \theta) \cos[\kappa\rho \cos(\theta - \varphi) - \Omega(\kappa)\tau] d\kappa, \end{aligned} \quad (19)$$

где через  $\kappa$  и  $\rho$  обозначены модули векторов  $\mathbf{x}$  и  $\rho$ , а  $\theta$  и  $\varphi$  — углы, которые они образуют с произвольным фиксированным направлением  $Ox$  в плоскости  $z=0$  (рис. 13). Функция  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$

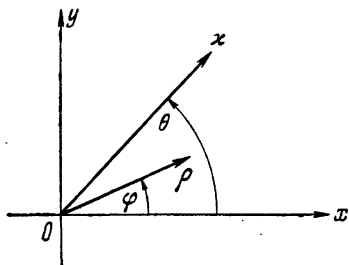


Рис. 13.

является пространственно-угловым спектром случайной поверхности. В дальнейшем для определенности будем считать  $\Omega(\kappa) > 0$  при  $\kappa > 0$  (всегда можно выбрать именно это решение дисперсионного уравнения). Тогда очевидно, что  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$  — относительная среднеквадратичная высота элементарных плоских волн, распространяющихся под углом  $\theta$  к оси  $x$  с волновым числом  $\kappa$ , приходящаяся на единичный интервал

азимутальных углов  $\theta$  и волновых чисел  $\kappa$ . Спектр  $\tilde{W}(\kappa)$  по-прежнему нормирован условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \tilde{W}(\mathbf{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \kappa \tilde{W}(\kappa, \theta) d\kappa = 1. \quad (20)$$

Иногда бывает удобным доопределить  $\Omega(\kappa)$  и  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$  и при  $\kappa < 0$  для того, чтобы интегрирование по  $d\mathbf{x}$  в (19) можно было проводить в бесконечных пределах; в ряде случаев это облегчает вычисление интегралов и сокращает запись формул. Так как физический смысл рассматриваемые функции  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$  и  $\Omega(\kappa)$  имеют лишь при  $\kappa > 0$ , то на полуось  $-\infty < \kappa \leq 0$  их можно продолжить произвольным образом. Мы выберем нечетное продолжение:

$$\tilde{W}(-\kappa, \theta) = -\tilde{W}(\kappa, \theta), \quad \Omega(-\kappa) = -\Omega(\kappa), \quad (21)$$

так что формула (19) приобретает вид

$$W(\rho, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \tilde{W}(\kappa, \theta) \cos[\kappa \rho \cos(\theta - \varphi) - \Omega(\kappa) \tau] d\kappa. \quad (22)$$

В дальнейшем при анализе спектра рассеянного поля мы будем часто обращаться к простейшему случаю двумерной (цилиндрической) поверхности  $z = \zeta(x, t)$ . При этом  $\tilde{W}(\kappa) = \delta(\kappa_y) \tilde{W}(\kappa_x)$ , и из (19) получаем

$$W(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_x \tilde{W}(\kappa_x) \cos[\kappa_x \xi - \Omega(|\kappa_x|) \tau]. \quad (23)$$

Обозначая спектральную плотность волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $x$ , через  $\tilde{W}_+(\kappa_x) = \tilde{W}(\kappa_x > 0)$ , а бегущих в обратном направлении — через  $\tilde{W}_-(\kappa_x) = \tilde{W}(-\kappa_x)$ , можно записать (23) в виде

$$W(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} d\kappa \tilde{W}_+(\kappa) \cos[\kappa \xi - \Omega(\kappa) \tau] + \int_0^{\infty} d\kappa \tilde{W}_-(\kappa) \cos[\kappa \xi + \Omega(\kappa) \tau]. \quad (24)$$

Из тех же соображений, что и в трехмерном случае, продолжим теперь  $\tilde{W}_+(\kappa)$  четным образом на  $\kappa < 0$ , а  $\Omega(\kappa)$ , как и раньше, — нечетным:

$$\tilde{W}_+(-\kappa) = \tilde{W}_+(\kappa), \quad \tilde{W}_-(-\kappa) = \tilde{W}_-(\kappa), \quad (25)$$

так что (24) примет вид

$$W(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{W}_{\pm}(\kappa) \exp\{i[\kappa \xi \mp \Omega(\kappa) \tau]\}. \quad (26)$$

Относительная высота волн, бегущих слева направо, равна

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{W}_+(\kappa), \quad (27a)$$

и аналогично, в обратном направлении,

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{W}_-(\kappa). \quad (27b)$$

В том случае, когда спектральный состав волн, бегущих в противоположных направлениях, одинаков, а могут отличаться только

амплитуды  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$ , удобно ввести единую спектральную функцию

$$\tilde{W}(x) = \tilde{W}_+(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_+(x) dx \right]^{-1} = \tilde{W}_-(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_-(x) dx \right]^{-1}, \quad (28)$$

которая нормирована обычным образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(x) dx = 1. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (24), получаем следующее представление для данного случая:

$$\begin{aligned} \sigma^2 W(\xi, \tau) = & \sigma_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{W}(x) \exp \{i [x\xi - \Omega(x)\tau]\} + \\ & + \sigma_-^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{W}(x) \exp \{i [x\xi + \Omega(x)\tau]\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Если все гармоники движутся только в одном направлении, например, по оси  $x$ , то  $\sigma_- = 0$  и из (30) следует спектральное разложение

$$W(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{W}(x) \exp \{i [x\xi - \Omega(x)\tau]\}, \quad (31)$$

где  $\tilde{W}(x)$  удовлетворяет условию нормировки и является четной вещественной функцией.

В общем случае трехмерных неровностей в спектральном разложении корреляционной функции (19) также можно выделить плоские волны, которые распространяются под острым или тупым углом к направлению  $\rho$ . Формула, обобщающая (26) на этот случай, имеет вид

$$\begin{aligned} W(\rho, \tau) = & \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_{\pm}(x) \exp \{i [x\rho \mp \Omega(x)\tau]\} dx, \quad (32) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{W}_+(x) + \tilde{W}_-(x)] dx = 1. \end{aligned}$$

Наконец, иногда вместо формул (22) или (32) удобнее пользоваться разложением  $W(\rho, \tau)$  не по волновым числам  $x$ , а по частотам  $\Omega$ :

$$W(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \tilde{W}(\Omega, \theta) \exp \{i [x(\Omega)\rho \cos(\theta - \varphi) - \Omega\tau]\}. \quad (33)$$

Здесь  $\kappa (\Omega > 0) > 0$  и  $\kappa (\Omega) = -\kappa (-\Omega)$  — решение дисперсионного уравнения  $\Omega^2 = \Omega^2(\kappa)$ , а вещественная положительная и четная (по  $\Omega$ ) функция  $\tilde{W}(\Omega, \theta)$ , нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \tilde{W}(\Omega, \theta) = 1, \quad (34)$$

является частотно-угловым энергетическим спектром возмущений поверхности.

4. Исследуем теперь влияние диссипации на вид функции  $\tilde{W}(\kappa, \tau)$ . При наличии диссипации свободные колебания поверхности затухают, так как их энергия переходит в теплоту. Вследствие этого  $\zeta(r, t)$  является нестационарной функцией времени.

Чтобы колебания поверхности не затухали, необходима внешняя сила, компенсирующая убыль энергии за счет диссипации. Происхождение этой силы может быть разным. Для морского волнения — это поверхностное давление ветра. Для системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, — это случайные силы, возникающие спонтанно и т. д.

Найдем связь между статистическими характеристиками колебаний поверхности и статистическими характеристиками внешней силы, считая колебания стационарным процессом. Здесь и ниже мы ограничимся поверхностными колебаниями тяжелой жидкости. Колебания поверхности другого типа могут быть рассмотрены аналогично. Учет затухание колебаний поверхности жидкости за счет вязкости и введем случайное давление, действующее на поверхность. Для этого необходимо в левую часть граничного условия (7а) добавить слагаемое —  $2\mu \Delta_{\perp} \Phi$ , а в правую — внешнее давление \*)  $p_0(r, t)$  ( $\mu$  — вязкость, которая считается достаточно малой). С учетом этих слагаемых из (7а, б), аналогично тому, как это было сделано выше, для  $\tilde{\zeta}(\kappa, t)$  получается уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}(\kappa, t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\tilde{\zeta}(\kappa, t)}{dt} + \Omega^2 \tilde{\zeta}(\kappa, t) = f(\kappa, t), \quad (35)$$

где

$$f(\kappa, t) = \frac{\kappa}{\rho} \text{th } \kappa d \int_{-\infty}^{\infty} p_0(r, t) e^{-i\kappa r} dr.$$

Декремент затухания  $\gamma$  связан с вязкостью  $\mu$  соотношением

$$\gamma = \frac{2\mu\kappa^2}{\rho}. \quad (36)$$

\*) Мы ограничиваемся простейшим случаем внешней силы, действующей нормально к невозмущенной поверхности. Учет касательных компонент внешней силы в принципе возможен в такой же схеме и приводит к качественно тем же результатам.

Уравнение (35) решается методом Фурье. Обозначая через  $\tilde{\xi}(\mathbf{x}, \omega)$  и  $f(\mathbf{x}, \omega)$  амплитуды Фурье по времени от  $\xi(\mathbf{x}, t)$  и  $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ , получим

$$\tilde{\xi}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{f(\mathbf{x}, \omega)}{\Omega^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} \xi(\mathbf{x}, t) dt; \\ f(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} \dot{f}(\mathbf{x}, t) dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Из стационарности процессов  $f(\mathbf{x}, t)$  и  $\xi(\mathbf{x}, t)$  вытекают равенства (см. гл. II)

$$\left. \begin{aligned} \overline{\tilde{\xi}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\xi}^*(\mathbf{x}, \omega')} &= \sigma^2 \tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) S\delta(\omega - \omega'), \\ \overline{f(\mathbf{x}, \omega) f^*(\mathbf{x}, \omega')} &= \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) S\delta(\omega - \omega'); \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

здесь  $\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega)$  и  $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$  — преобразования Фурье от соответствующих корреляционных функций

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\xi}(\mathbf{x}, t) \tilde{\xi}^*(\mathbf{x}, t + \tau)} e^{i\omega\tau} d\tau, \\ \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mathbf{x}, t) f^*(\mathbf{x}, t + \tau)} e^{i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Умножим равенство (37) на  $\tilde{\xi}^*(\mathbf{x}, \omega')$  и усредним. С учетом (39) найдем следующее соотношение между  $\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega)$  и  $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)}{[\omega^2 - \Omega^2(\mathbf{x})]^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (41)$$

Это и есть искомая связь. Формула (41) применима при любых  $\gamma$ . Используем малость диссипации ( $\gamma \ll \Omega$ ). Покажем, что для того, чтобы колебания оставались ограниченными при  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$  должно быть пропорционально  $\gamma$ . Проинтегрируем уравнение (41) по  $\omega$ :

$$\tilde{W}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) d\omega}{[\omega^2 - \Omega^2(\mathbf{x})]^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (42)$$

Слева стоит величина конечная и, вообще говоря, не равная нулю (исключением могут быть отдельные значения  $\mathbf{x}$ ). Интеграл справа расходится при  $\gamma \rightarrow 0$ , если  $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$  стремится к нулю медленнее,



чем  $\gamma$ , и стремится к нулю, если  $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$  стремится к нулю быстрее, чем  $\gamma$ . Это очевидно, если учесть равенство

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{\pi}{2\Omega} \delta(\omega^2 - \Omega^2) = \frac{\pi}{4\Omega^2} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]. \quad (43)$$

Таким образом, чтобы равенство (42) выполнялось,  $\tilde{V}$  должно быть пропорционально  $\gamma$ . Введя обозначение

$$\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma^2 \gamma \tilde{v}(\mathbf{x}, \omega), \quad (44)$$

формулу (41) можно переписать так:

$$\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{v}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\gamma}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (45)$$

Из (45) следует, что  $\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega)$  имеет два резких максимума с шириной  $\delta\omega \simeq \gamma$ . В пределе при  $\gamma \rightarrow 0$

$$\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\pi}{4\Omega^2} [\tilde{v}(\mathbf{x}, \Omega) \delta(\omega - \Omega) + \tilde{v}(\mathbf{x}, -\Omega) \delta(\omega + \Omega)]. \quad (46)$$

Интегрируя равенство (46), получим

$$\tilde{W}(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{4\Omega^2} [\tilde{v}(\mathbf{x}, \Omega) + \tilde{v}(\mathbf{x}, -\Omega)]. \quad (47)$$

Таким образом, мы приходим к формуле (32) для корреляционной функции  $W(\rho, \tau)$  свободных колебаний поверхности без диссипации, причем

$$\tilde{W}_{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{4\Omega^2} \tilde{v}(\mathbf{x}, \pm \Omega(\mathbf{x})). \quad (48)$$

Физически результат этот связан с тем, что для ограниченных колебаний при  $\gamma \rightarrow 0$  стремится к нулю и энергия, которую получает поверхность от внешней силы.

Равенство (47) имеет прозрачный физический смысл. Для того чтобы его разъяснить, получим (47) еще раз несколько иным способом. Умножим уравнение (35) на  $\partial \tilde{\zeta}^*(\mathbf{x}, t) / \partial t$  и усредним действительную часть полученного таким способом уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t)|^2 + \Omega^2 |\tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t)|^2 \right] + \gamma \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[ f^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнение (49) описывает баланс энергии. Слева стоит энергия, диссипируемая за счет вязкости, а справа — работа внешних

случайных сил. Выразим  $\partial \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t)/\partial t$  через  $f(\mathbf{x}, t)$  с помощью уравнения (35). При этом пренебрежем малым  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^t f(\mathbf{x}, t') \cos [\Omega(\mathbf{x})(t-t')] dt'. \quad (50)$$

Подставив (50) в правую часть (49), а также представив в левой части (50)  $\tilde{\xi}(\mathbf{x}, t)$  в виде интеграла Фурье по  $t$ , вновь придем к (47). Из очевидного равенства

$$\frac{1}{\sigma^2 S} \left| \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} \right|^2 = \Omega^2 \tilde{W}(\mathbf{x}) \quad (51)$$

следует, что преобразование Фурье по  $\tau$  от функции корреляции случайных сил пропорционально  $|\partial \tilde{\xi}/\partial t|^2$ . Эта величина в свою очередь равна половине средней энергии колебаний  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  в соответствующих единицах. Используя это обстоятельство, получим

$$\tilde{V}(\mathbf{x}, \Omega(\mathbf{x})) + \tilde{V}(\mathbf{x}, -\Omega(\mathbf{x})) = \frac{\gamma}{\pi} \mathcal{E}(\mathbf{x}). \quad (52)$$

Выражение (52) в случае теплового равновесия, когда  $\mathcal{E} \sim T$  ( $T$  — температура в тех же единицах, что и  $\mathcal{E}$ ), является одной из формулировок флуктуационно-диссипативной теоремы Каллена-Вельтона [70].

### § 13. Энергетический спектр отраженного поля

Перейдем теперь к исследованию энергетического спектра поля, рассеянного на колеблющейся случайным образом границе. Рассмотрим сначала тот случай, когда источник и точка наблюдения находятся в дальней зоне относительно отдельных неровностей поверхности, т. е. предположим, что выполнено неравенство  $k l^2 \ll R$ ; обратный предельный случай будет исследован в следующем параграфе. Путем несложных вычислений, полностью аналогичных тем, которые были проведены при получении формулы (10.11), получаем из (12.1) и (12.2)

$$S(\omega) = \frac{k^4 \sigma^2}{2\pi^3} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} Q(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ i [k(\beta - \alpha, \rho) - \omega \tau] \} \times \\ \times W(\rho, \tau) d\rho d\tau. \quad (1a)$$

Функция  $Q(\alpha, \beta)$  определяется формулами (10.12) для абсолютной мягкой или абсолютно жесткой поверхности, или формулой (8.13) в общем случае, а единичные векторы  $\alpha$  и  $\beta$  введены соотношениями (10.10). В дальнейшем будем предполагать, что рассеяние происходит на колебаниях поверхности в отсутствие дис-

сипации, причем дисперсионное уравнение (12.14) имеет только два решения. Тогда  $\tilde{W}(\rho, \tau)$  можно представить в виде разложения (12.32), подставляя которое в (1а), получаем для  $S(\omega)$  следующую формулу:

$$S(\omega) = 4k^4\sigma^2 \sum_{\pm} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} Q(\alpha, \beta) \tilde{W}_{\pm}(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{x}_{\perp}) \delta[\omega \pm \Omega(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{x}_{\perp})], \quad (16)$$

где  $\mathbf{k} = k\alpha$ ,  $\mathbf{x} = k\beta$ , а знак  $\perp$  означает проекцию вектора на плоскость  $z=0$ . Формула (16) допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассеянное поле в каждой точке представляет собой суперпозицию плоских волн с различными волновыми векторами  $\mathbf{x}$ . Интенсивность каждой плоской волны пропорциональна энергии  $\tilde{W}(\mathbf{q}_{\perp})$  резонансного пространственного спектра неровностей при  $\mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp}$  (см. § 8), а ее частота смещена относительно  $\omega_0$  на величину  $\Omega(\mathbf{q}_{\perp})$ , т. е. спектры парциальных плоских волн пропорциональны

$$\delta[\omega \pm \Omega(\mathbf{q}_{\perp})] \tilde{W}_{\pm}(\mathbf{q}_{\perp}).$$

Так как эти плоские волны некогерентны (см. § 10), то спектр их суперпозиции равен сумме спектров с соответствующими весами  $(R_1 R_2)^{-2} Q(\alpha, \beta)$ , которые учитывают разницу в интенсивности волн, приходящих с разных расстояний и, следовательно, под разными углами.

1. Если источник и точка наблюдения находятся в области разделения спектров, т. е.  $kl \cdot L/R_{1,2} \ll 1$ , то из (16) получаем формулу для спектральной плотности рассеянного излучения (см. [56])

$$S(\omega) = \frac{4k^4\sigma^2}{R_1^2 R_2^2} S \cdot Q(\alpha, \beta) \sum_{\pm} \tilde{W}_{\pm}(\mathbf{q}_{\perp}) \delta[\omega \pm \Omega(\mathbf{q}_{\perp})]. \quad (2)$$

Из этой формулы видно, что спектр рассеянного излучения состоит из двух спектральных линий с частотами  $\omega = \pm \Omega(\mathbf{q}_{\perp})$ . В данном случае малость размеров рассеивающей площадки (в смысле  $klL \ll \ll R_{1,2}$ ) играет роль частотного фильтра — в точку наблюдения приходит лишь одна плоская волна, которая имеет определенную (с точностью до знака) частоту. Два знака смещения частоты определяются двумя возможными направлениями движения «парциальных» волн на поверхности при заданном векторе  $\mathbf{q}$ . Если  $\Omega(\mathbf{q})$  определяется формулой (12.10), то для  $\mathbf{q}_{\perp} = 0$  следует  $\Omega = 0$  и частота рассеянного излучения совпадает с частотой падающего. Значению  $\mathbf{q}_{\perp} = 0$  соответствует направление зеркального отражения в полупространстве 1, и направление, определяемое законом Снеллиуса, в полупространстве 2.

Наличие конечного, даже сколь угодно малого, затухания приводит к тому, что максимумы в спектре рассеянного поля имеют

конечную ширину  $\Delta\omega/\omega \simeq \gamma$ . Действительно, в этом случае  $\tilde{W}(\mathbf{x}, \omega)$  имеет вид (12.45) и, следовательно, спектральная плотность  $S(\omega)$  вблизи резонансных частот  $\omega = \pm \Omega$  описывается лоренцевой кривой

$$S(\omega) = \frac{4k^4\sigma^2}{R_1^2 R_2^2} S Q(\alpha, \beta) \tilde{v}(\mathbf{q}, \omega) \frac{\gamma}{[\omega^2 - \Omega^2(\mathbf{q})]^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

2. В том случае, когда поверхность  $S$  освещается плоской волной с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , т. е. источник находится в зоне разделения спектров  $kl \cdot L/R_1 \ll 1$ , а для точки наблюдения выполнено обратное неравенство  $kl \cdot L/R_2 \gg 1$ , формула (16) также допускает достаточно полное исследование. Перепишем ее предварительно в несколько более удобном виде, используя для  $\tilde{W}(\rho, \tau)$  вместо (12.32) формулу (12.33) и заменяя переменную интегрирования в (16) по формуле (10.19):

$$S(\omega) = 4k^4\sigma^2 \int_{\Gamma} \frac{d\beta_{\perp}}{\beta_z^2 R_1^2} Q(\alpha, \beta) \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \tilde{W}(\omega, \vartheta) \delta[\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{q}(\omega)]. \quad (3)$$

Здесь мы ввели вектор  $\mathbf{q}$  с составляющими  $q_x = q \cos \vartheta$  и  $q_y = q \sin \vartheta$ . Если падающую волну считать плоской, то вектор  $\mathbf{k} = k\alpha$  в (3) не зависит от  $\beta_{\perp}$  — переменной интегрирования, которое при этом легко выполняется:

$$S(\omega) = \frac{(2k\sigma)^2}{R_1^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \tilde{W}(\omega, \vartheta) \frac{Q(\alpha, \beta)}{\beta_z^2} \Theta[k - |\mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{q}(\omega)|] \quad (4)$$

при

$$\beta_{\perp} = \alpha_{\perp} + \frac{\mathbf{q}(\omega)}{k}, \quad \beta_z^2 = 1 - \beta_{\perp}^2. \quad (5)$$

Здесь функция  $\Theta(x > 0) = 1$ ,  $\Theta(x < 0) = 0$  появилась из-за учета конечности области интегрирования ( $|\beta_{\perp}| < 1$ ). При заданном частотно-угловом спектре  $\tilde{W}(\omega, \vartheta)$  поверхности по формуле (4) можно определить спектр флуктуаций волнового поля  $S(\omega)$ . Проведем анализ спектра в некоторых простейших случаях.

а.  $\tilde{W}(\omega, \vartheta) = \tilde{W}(\omega) \delta(\vartheta)$  — рассеяние происходит на двумерных шероховатостях  $\zeta(x, t)$  (с образующими вдоль оси  $y$ ), движущихся в положительном направлении оси  $x$ , которую в данном случае удобно направить по вектору  $\alpha_{\perp}$ , так что  $\alpha_y = 0$ , а  $\alpha_x = \cos \psi$ , где  $\psi$  — угол скольжения падающей плоской волны. Ограничиваясь для простоты абсолютно мягкой ( $\mu$ ) и абсолютно жесткой ( $g$ ) поверхностями и используя (10.12), из (4) получаем

$$S_{\mu}(\omega) = \left(\frac{2k\sigma}{R_1}\right)^2 \tilde{W}(\omega) \alpha_z^2 \Theta\left[1 - \left|\alpha_x + \frac{q(\omega)}{k}\right|\right], \quad (6)$$

$$S_g(\omega) = \left(\frac{2k\sigma}{R_1}\right)^2 \tilde{W}(\omega) \left[\alpha_z^2 + \frac{q^2(\omega)}{k^2 - [k_x + q(\omega)]^2}\right] \Theta\left[1 - \left|\alpha_x + \frac{q(\omega)}{k}\right|\right]. \quad (7)$$

Следует обратить внимание на интересную особенность этих спектров—они отличны от нуля лишь в интервале частот, удовлетворяющих условию

$$-2 \cos^2 \frac{\psi}{2} < \frac{q(\omega)}{k} < 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (8)$$

Причина обрезания спектра на частотах, лежащих вне этого интервала, заключается в том, что граничным частотам в неравенствах (8) соответствуют скользящие вдоль поверхности ( $\beta_z \rightarrow 0$ ) пространственные спектры: частоте  $q(\omega) = 2k \sin^2 \frac{\psi}{2}$  соответствует

спектр, распространяющийся в положительном направлении оси  $x$ ,

а  $q(\omega) = -2k \cos^2 \frac{\psi}{2}$  —

в отрицательном. Более высоким и более низким частотам соответствуют уже неоднородные плоские волны, которые при  $kz \gg 1$  (а мы рассматриваем в этой главе только этот случай) не доходят до точки наблюдения, и по этой причине спектр флуктуаций поля оказывается, вообще говоря, беднее спектра флуктуаций поверхности  $\tilde{W}(\omega)$ . Для мягкой поверхности, как следует из (6),  $S_\mu(\omega)$  совпадает, с точностью до

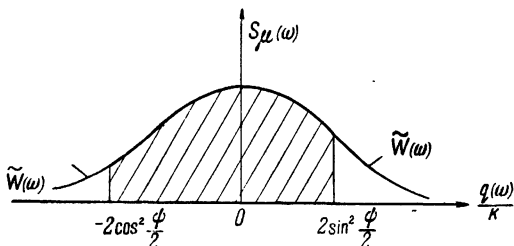


Рис. 14.

несущественного нормировочного множителя, с  $\tilde{W}(\omega)$  на частотном интервале (8), и обращается в нуль вне этого интервала (рис. 14). Для жесткой поверхности дело обстоит несколько сложнее: помимо обрезającego фактора в (7) входит множитель, растущий при приближении частоты  $\omega$  к границам области (8). Так что  $S_g(\omega)$  имеет вид, схематически изображенный на рис. 15.

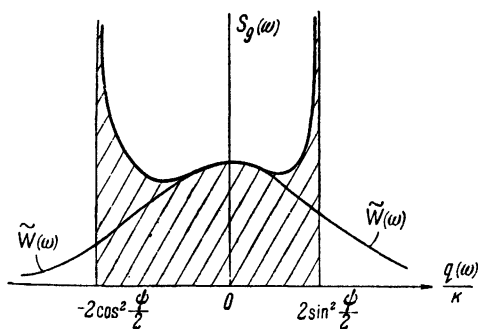


Рис. 15.

Возрастание спектра вблизи предельных частот связано с тем обстоятельством, что индикатриса рассеяния от жесткой поверхности  $Q(\alpha, \beta)$  при скользящих углах ( $\beta_z \rightarrow 0$ ) не обращается в нуль, а стремится к конечному пределу. Поэтому соответствующие

спектры при  $\beta_z \rightarrow 0$  оказываются значительно более интенсивными, чем в случае мягкой поверхности, что и приводит к увеличению флуктуаций на предельных частотах. На самом деле спектральная плотность  $S_g(\omega)$  вблизи граничных частот растет лишь до определенного предела, а не до бесконечности, как это следует из формулы (7), по следующим причинам. Во-первых, из-за конечных линейных размеров  $L$  рассеивающей поверхности скользкие спектры с  $\beta_z = 0$  отсутствуют, ибо всегда должно быть выполнено неравенство  $\beta_z > z/L$  (следует помнить, что  $L$  — ограничено сверху неравенством  $klL/R_1 \ll 1$ ). По этой причине спектр обрезается не на частотах (8), а в несколько более узкой области  $|\cos \psi + q(\omega)/k| < 1 - O(z/L)^2$ , так что растущий множитель в (7) остается конечным там, где  $\Theta$ -функция не обращается в нуль. Во-вторых, что более существенно, как мы уже отмечали в § 10, любая сколь угодно жесткая поверхность ведет себя как абсолютно мягкая при углах скольжения  $\beta_z \ll \max \{1/n_{21}, \eta_g\}$  ( $n_{21}$  — коэффициент преломления второй среды относительно первой,  $\eta_g$  — эффективный импеданс за счет неровностей). Поэтому рост  $S_g(\omega)$  будет происходить лишь до частот, определяемых из соотношения

$$\cos \psi + q(\omega)/k \simeq 1 - O(1/n_{21}^2 + \eta_g^2).$$

Из формул (7), (8) следует важный вывод о том, что при  $kl \sin^2 \frac{\psi}{2} \gg 1$  спектр  $S(\omega)$  флуктуаций поля совпадает с частотным спектром  $\tilde{W}(\omega)$  поверхности. Действительно, при выполнении этого неравенства  $\tilde{W}(\omega)$  убывает с увеличением  $|\omega|$  значительно быстрее, чем изменяются зависящие от частоты множители в (7), (8), которые, таким образом, не оказывают никакого влияния на спектр. С физической точки зрения условие

$$kl \sin^2 \frac{\psi}{2} \gg 1$$

означает, что неровности поверхности являются настолько крупномасштабными, что при рассеянии на них не возникают неоднородные волны.

б. При движении одномерных неровностей в отрицательном направлении оси  $x$ , т. е. для частотно-углового спектра вида  $\tilde{W}(\omega, \vartheta) = \tilde{W}(\omega) \delta(\vartheta - \pi)$  спектр флуктуаций поля  $S(\omega)$  описывается теми же формулами (7), (8), но с заменой  $q(\omega) \rightarrow -q(\omega)$ .

Это приводит, в частности, к тому, что обрезание спектра происходит на других частотах

$$-2 \sin^2 \frac{\psi}{2} < \frac{q(\omega)}{k} < 2 \cos^2 \frac{\psi}{2}. \quad (9)$$

При нормальном облучении поверхности ( $\psi = \pi/2$ ) границы спектра (8) и (9) совпадают:

$$-1 < \frac{q(\omega)}{k} < 1, \quad (10)$$

что совершенно естественно, ибо в этом случае нет выделенного направления оси  $x$ , и волны, движущиеся в противоположных направлениях, эквивалентны. При наклонном облучении ( $\psi \neq \pi/2$ ) в спектре поля, отраженного от движущейся в положительном направлении оси  $x$  поверхности  $\zeta(x, t)$ , присутствуют, в основном, отрицательные смещения частоты, а движение поверхности в противоположном направлении приводит к преобладанию положительных частот. Особенно ярко это различие проявляется при скользящем облучении поверхности ( $\psi \rightarrow 0$ ), когда для поверхностной волны, движущейся направо, спектр заключен в пределах  $-2 < q(\omega)/k < 0$ , а для волны, движущейся налево, в спектре присутствуют только положительные частоты:  $0 < q(\omega)/k < 2$ . В том случае, когда есть поверхностные волны, движущиеся в противоположных направлениях (заметим, что при равенстве их амплитуд возникает стоячая волна), спектр рассеянного поля равен сумме спектров, получающихся при рассеянии на каждой волне в отдельности. Это является следствием, во-первых, линейной связи между полем  $u$  и уравнением поверхности  $\zeta(r, t)$  и, во-вторых, статистической независимости парциальных поверхностных волн, и, следовательно, рассеянных на них полей. Отметим, кстати, что такой своеобразный принцип суперпозиции — поле, рассеянное на сложной поверхности  $z = \zeta_1(r, t) + \zeta_2(r, t)$ , равно сумме полей  $u_1$  и  $u_2$ , рассеянных на каждой поверхности  $\zeta_1(r, t)$  и  $\zeta_2(r, t)$  в отдельности — выполняется лишь в первом приближении теории возмущений.

в. Рассмотрим теперь спектр поля, рассеянного на плоской поверхностной волне  $z = \zeta(r, t)$ , распространяющейся под произвольным углом  $\vartheta_0$  к оси  $x$ , которую по-прежнему выберем вдоль вектора  $\alpha_{\perp}$ . Подставляя соответствующий этому случаю спектр  $\tilde{W}(\omega, \vartheta) = \tilde{W}(\omega) \delta(\vartheta - \vartheta_0)$  в (4), получаем формулу, очевидным образом обобщающую (6) и (7):

$$S(\omega) = \left(\frac{2k\sigma}{R_1}\right)^2 \tilde{W}(\omega) \frac{Q(\alpha, \beta)}{\beta_z^2} \Theta \left[ 1 - \left| \alpha_{\perp} + \frac{q_0(\omega)}{k} \right| \right], \quad (11)$$

где

$$\beta_{\perp} = \alpha_{\perp} + q_0(\omega)/k, \quad q_0(\omega) = \{q(\omega) \cos \vartheta_0; q(\omega) \sin \vartheta_0\}.$$

Границы спектра, где  $S(\omega)$  скачком обращается в нуль, определяются из формулы

$$q(\omega)/k = -\cos \psi \cos \vartheta_0 \pm \sqrt{\cos^2 \psi \cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \psi}. \quad (12)$$

При  $\vartheta_0 = 0$  и  $\vartheta_0 = \pi$  это выражение приводит к формулам (8) и (7). При  $\vartheta_0 = \pm \pi/2$ , что соответствует поверхностной волне, распространяющейся в направлении, перпендикулярном к плоскости падения первичной плоской волны, спектр оказывается обрезанным в симметричных пределах:

$$-\sin \psi < q(\omega)/k < \sin \psi. \quad (13)$$

Зависимость границ обрезания спектра от угла  $\psi$  приводит к тому, что в случае конечной угловой ширины  $\Delta\vartheta$  частотно-углового спектра  $\tilde{W}(\omega, \vartheta)$ ,  $S(\omega)$  обращается в нуль не скачком, а плавно в интервале частот  $\Delta q(\omega) = k \cos \psi (\Delta\vartheta)^2$  при  $\vartheta_0 = 0, \pi$ , и  $\Delta q(\omega) = = k \cos \psi \Delta\vartheta$  при  $\vartheta_0 = \pm \pi/2$ . Таким образом, если облучение поверхности не вертикальное ( $\psi \neq \pi/2$ ) и шероховатости поверхности не двумерные, а имеют угловой спектр конечной ширины, то вблизи граничных частот (12) спектр  $S(\omega)$  плавно обращается в нуль.

г. Случай нормального падения представляет особый интерес и поэтому рассмотрим его отдельно. При  $\alpha_{\perp} = 0$  из (4) получаем

$$S_{\mu, g}(\omega) = \left(\frac{2k\sigma}{R_1}\right)^2 \left(1 - \frac{q^2(\omega)}{k^2}\right)_g^{-1} \tilde{W}(\omega) \Theta[k - |q(\omega)|], \quad (14)$$

где

$$\tilde{W}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(\omega, \vartheta) d\vartheta, \quad (15)$$

а индекс  $g$  у скобки означает, что этот множитель относится только к жесткой поверхности. Спектр  $S(\omega)$  отличен от нуля в области, симметричной относительно  $\omega = 0$ , определяемой неравенством (10). Отметим, что при нормальном облучении спектр флуктуаций поля  $S(\omega)$  не зависит от углового спектра и определяется только распределением поверхностных волн по частотам  $\tilde{W}(\omega)$  (15). Это объясняется тем, что в данном случае все направления в плоскости  $z = 0$  эквивалентны. При наклонном же облучении появляется выделенное направление  $\alpha_{\perp}$ , и  $S(\omega)$  зависит от распределения волн по направлениям, т. е. от углового спектра. Частным случаем такой зависимости является формула (11).

3. В предыдущем пункте мы рассмотрели спектр флуктуаций поля при рассеянии плоской волны на флуктуирующей границе раздела. Перейдем к исследованию еще одного важного частного случая, когда источник находится в точке наблюдения \*) и флуктуации поля возникают из-за обратного рассеяния волн на поверхности  $z = \zeta(r, t)$ . Эти флуктуации называются радиолокационным

\*) Естественно, что непосредственное попадание поля из источника в приемник (прямой сигнал) должно при этом исключаться. Это может быть достигнуто, например, при импульсном режиме работы источника.



отражением от поверхности для электромагнитных волн, или реверберационными шумами — в акустике.

а. Как и раньше, ограничимся сначала для простоты случаем точечного ненаправленного источника и приемника. Учтем, что когда приемник и передатчик находятся в одной точке, имеют место простые соотношения:  $\alpha = -\beta$  и  $R_1 = R_2 = z/\beta_z$  ( $\beta_z > 0$ ), подставляя которые в (3), получаем

$$S(\omega) = \frac{k^4 \sigma^2}{z^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \tilde{W}(\omega, \vartheta) \int_{\Gamma} d\beta_{\perp} Q(\alpha = -\beta) \delta(2\alpha_{\perp} - q(\omega)). \quad (16)$$

Для абсолютно жесткой и мягкой поверхностей индикатрисные множители  $Q(\alpha, \beta)$  принимают вид

$$Q_{\mu}(\alpha, \beta) = \alpha_z^2 \beta_z^2 = \beta_z^4 = \left[1 - \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right]^2, \quad (17)$$

$$Q_g(\alpha, \beta) = (1 - \alpha_{\perp} \beta_{\perp})^2 = (1 + \beta_{\perp}^2)^2 = \left[1 + \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right]^2, \quad (18)$$

так что, учитывая (15), приходим к следующей формуле для спектра  $S(\omega)$  в этих двух случаях:

$$S_{\mu, g}(\omega) = \left(\frac{k\sigma}{z}\right)^2 \left[1 \mp \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right]^2 \Theta\left(1 - \left|\frac{q(\omega)}{2k}\right|\right) \tilde{W}(\omega). \quad (19)$$

Здесь верхний знак относится к мягкой поверхности, а нижний — к жесткой. Область частот  $\omega$ , где  $S(\omega)$  не обращается в нуль, оказывается симметричной

$$-2 < \frac{q(\omega)}{k} < 2, \quad (20)$$

и более широкой, чем в случае нормального облучения поверхности плоской волной (10).

Еще одно существенное отличие (19) от спектров предыдущего пункта заключается в том, что вблизи граничных частот  $q(\omega) = \pm 2k$  для мягкой поверхности  $S(\omega)$  обращается в нуль не скачком, а непрерывно за счет множителя  $\left(1 - \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right)^2$ , для жесткой же поверхности соответствующий множитель в предельных точках обращается в 2, а не растет до бесконечности, так что скачок спектра при  $q(\omega) = \pm 2k$  оказывается конечным. На рис. 16 схематически изображен спектр флуктуаций  $S(\omega)$  при обратном рассеянии: пунктир соответствует спектру поверхности  $\tilde{W}(\omega)$ , а тонкие сплошные линии — множителям  $\left(1 \pm \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right)^2$  для мягкой и жесткой поверхностей соответственно.

Из формулы (19) и приведенных графиков видно, что спектр флуктуаций поля  $S(\omega)$  совпадает с частотным спектром  $\tilde{W}(\omega)$

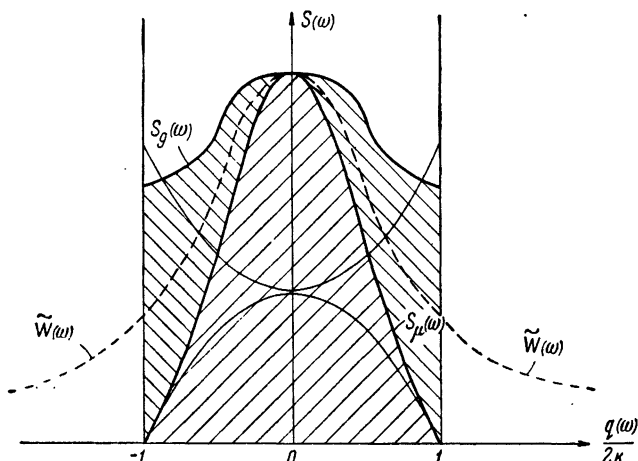


Рис. 16.

флуктуаций поверхности, если характерные частоты  $\omega_{\text{хар}}$  флуктуаций поверхности настолько малы, что  $q(\omega_{\text{хар}}) \ll 2k$ . Но  $q^{-1}(\omega_{\text{хар}})$  имеет порядок характерных линейных размеров шероховатостей  $l$ , так что условие совпадения  $S(\omega)$  с  $\tilde{W}(\omega)$  имеет вид

$$2kl \gg 1. \quad (21)$$

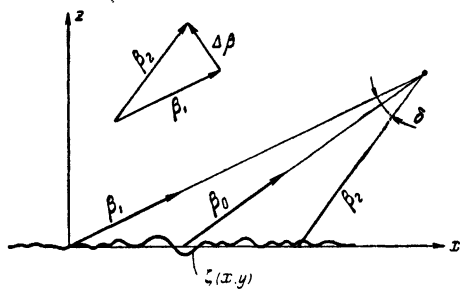


Рис. 17.

б. Рассмотрим теперь более интересный с практической точки зрения случай, когда приемно-передающая антенна имеет диаграмму направленности  $\mathcal{F}(\beta)$ , ось которой направлена вдоль единичного вектора  $\beta_0$  (рис. 17). Не ограничивая общности,

можно считать, что диаграмма симметрична относительно оси  $\beta_0$ , так что, естественным образом обобщая формулу (16), приходим к следующему выражению для спектра:

$$S(\omega) = \left(\frac{k^2 \sigma}{z}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \tilde{W}(\omega, \theta) \int_{\Gamma} d\beta_{\perp} \mathcal{F}^2(\beta - \beta_0) Q(\alpha = -\beta) \delta(2\kappa - q(\omega)). \quad (22)$$

В частном случае, когда диаграмма направлена вертикально вниз ( $\beta_{0\perp} = 0$ ) и отлична от нуля лишь в конечном интервале углов  $\delta$  так, что

$$\mathcal{F}(\beta - \beta_0) = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{при } \beta_{\perp} < \sin \delta, \\ 0 & \text{при } \beta_{\perp} > \sin \delta, \end{cases} \quad (23)$$

интегрирование в (22) легко выполняется:

$$S(\omega) = \left(\frac{k\sigma}{z}\right)^2 \left[1 + \frac{q^2(\omega)}{4k^2}\right] \Theta\left(\sin \delta - \left|\frac{q(\omega)}{2k}\right|\right) \mathcal{F}^2 \tilde{W}(\omega). \quad (24)$$

Таким образом, конечность ширины диаграммы приводит к сужению спектра:

$$-\sin \frac{\delta}{2} < \frac{q(\omega)}{2k} < \sin \frac{\delta}{2}. \quad (25)$$

При наклонном облучении поверхности ( $\beta_{0\perp} \neq 0$ ) спектр сужается около частоты  $q_0(\omega) = 2k\beta_{0\perp}$ , причем ширина его определяется из соотношения

$$\Delta q(\omega) \simeq k\Delta\beta_{\perp} \simeq 2k\beta_{0z} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (26)$$

При бесконечно узкой диаграмме спектр становится дельта-образным на частоте  $\omega = \Omega(q_0)$ . Это совершенно понятно, ибо бесконечно узкой диаграмме соответствует единственная плоская волна, и, следовательно, для этого случая можно сразу воспользоваться п. 1 настоящего параграфа.

В заключение отметим, что все полученные выше результаты без каких-либо существенных изменений могут быть перенесены и на тот случай, когда рассеивающая поверхность неподвижна, а источник и точка наблюдения перемещаются в пространстве. В частности, если это движение равномерное и прямолинейное, то «закон дисперсии» поверхностных возмущений имеет вид  $\Omega(q) = q\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — относительная скорость перемещения, и приведенные в этом параграфе формулы для спектра  $S(\omega)$  существенно упрощаются. Действительно, для решения задачи о спектре флуктуаций совершенно не важно, что движется — поверхность или точка наблюдения вместе с источником — в окончательные формулы входит только их относительная скорость.

#### § 14. Спектр флуктуаций амплитуды и фазы

В предыдущем параграфе была найдена связь спектра флуктуаций поля  $S(\omega)$ , определенного соотношением (13.1а), с пространственным  $\tilde{W}(q)$  или частотно-угловым  $\tilde{W}(\omega, \vartheta)$  спектром рассеивающей поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ . Наряду с таким подходом

известный интерес представляет вопрос о спектре временных флуктуаций амплитуды  $A(t)$  и фазы  $\varphi(t)$  поля в отдельности. В рассмотренном выше предельном случае  $kl^2/R \ll 1$  рассеянное поле  $u(R, t)$  распределено по нормальному закону (см. § 11), так что корреляционные функции амплитуды и фазы могут быть выражены через «медленную» корреляционную функцию поля  $K(\tau) = e^{i\omega_0\tau} u(t+\tau)u^*(t)$  с помощью известных формул из теории случайных функций [83]. Тем самым определяется связь между спектром  $S(\omega)$  и спектрами флуктуаций амплитуды и фазы — преобразованиями Фурье от соответствующих корреляционных функций. Следует, однако, иметь в виду, что, так как полное поле  $U(t)$  есть сумма регулярного монохроматического «сигнала»  $U_0(t)$  и нормального «шума»  $u(t)$ , в общем случае эта связь является довольно сложной. При произвольных значениях параметра  $kl^2/R$  поле  $u(R, t)$  уже нельзя считать нормальным (по причинам, изложенным в § 16), так что вопрос о связи спектров амплитуды и фазы с функцией  $S(\omega)$  или  $K(\tau)$  требует отдельного рассмотрения.

Решающим обстоятельством, которое позволяет получить простые результаты без ограничений на  $kl^2/R$ , является предполагаемая всегда малость  $|u|$  по сравнению с  $|U_0|$ . Относительные флуктуации амплитуды  $\delta A/A$  и флуктуации фазы  $\delta\varphi$  при этом оказываются малыми и выражаются непосредственно через  $u$  и  $U_0$  соотношениями (11.4а, б), которые приводят к следующим формулам для корреляционных функций амплитуды и фазы:

$$K_A(\tau) = \frac{\overline{\delta A(t) \delta A(t+\tau)}}{A(t) A(t+\tau)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{u^* u_\tau}{U_0^* U_{0\tau}} + \frac{u u_\tau}{U_0 U_{0\tau}} \right\}, \quad (1a)$$

$$K_\varphi(\tau) = \overline{\delta\varphi(t) \delta\varphi(t+\tau)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{u^* u_\tau}{U_0^* U_{0\tau}} - \frac{u u_\tau}{U_0 U_{0\tau}} \right\}, \quad (1б)$$

$$K_{A\varphi}(\tau) = \frac{\overline{\delta A(t) \delta\varphi(t+\tau)}}{A(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{u^* u_\tau}{U_0^* U_{0\tau}} - \frac{u^* u_\tau^*}{U_0^* U_{0\tau}^*} \right\}. \quad (1в)$$

Здесь для краткости введены обозначения  $u_\tau = u(t+\tau)$  и  $U_{0\tau} \equiv U_0(t+\tau)$ . Поле нулевого приближения имеет вид [см. (11.2)]

$$U_0(t) = V \frac{\exp \{i [k(R_{10} + R_{20}) - \omega_0 t]\}}{R_{10} + R_{20}}, \quad (2)$$

причем коэффициент отражения  $V$  в дальнейшем будем опускать, а расстояния  $R_{10}$  и  $R_{20}$  имеют тот же смысл, что и в § 11 (см. рис. 10). Флуктуирующая составляющая  $u(t)$  в общем случае определяется формулой (11.1), так что выражения (1а, б, в) позволяют получить решение поставленной задачи, не прибегая к громоздким результатам теории случайных функций, относящихся, кстати, только к одному предельному случаю  $kl^2/R \ll 1$  (нормально распределенное поле) и очень сложных из-за своей общности.

При подстановке выражения (11.1) и (2) в формулы (1) получаем представление корреляционных функций амплитуды и фазы в виде довольно сложных интегралов, к исследованию которых в различных предельных случаях мы и перейдем.

1. Прежде всего выпишем формулы для  $K_A(\tau)$  и  $K_\Phi(\tau)$  в простейшем предельном случае  $kl^2/R \ll 1$ . Средние  $u^*(t)u(t+\tau)$  в этом предельном случае уже были вычислены в предыдущем параграфе [см. (13.1a)], а для выражения  $u(t)u(t+\tau)$  полностью переносятся оценки, сделанные в § 11 относительно формулы (11.7), которые показывают, что  $|\overline{uu_\tau}| \ll |\overline{u^*u_\tau}|$  в меру малости  $\frac{kl^2}{R}$ . Таким образом, получаем

$$K_A(\tau) = K_\Phi(\tau) = \frac{K(\tau)}{2J_0}; \quad K_{A\Phi} = 0, \quad (3)$$

где  $J_0 = (R_{10} + R_{20})^{-2}$  — интенсивность поля нулевого приближения. Спектры флукутаций амплитуды и фазы

$$S_{A,\Phi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{A,\Phi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (4a)$$

при этом связаны со спектром  $S(\omega)$ , определяемым по формуле (12.2), соотношением:

$$S_A(\omega) = S_\Phi(\omega) = \frac{1}{2} \frac{S(\omega)}{J_0}, \quad S_{A\Phi}(\omega) = 0, \quad (4b)$$

т. е. спектры флукутаций амплитуды и фазы в данном случае (сумма сильного монохроматического сигнала  $U_0$  и нормального «шума»  $u$ ) совпадают со спектром  $S(\omega)$  — преобразованием Фурье от «медленной» корреляционной функции поля  $K(\tau)$ .

2. Неравенство  $kl^2/R \ll 1$  может нарушаться лишь при  $kl \gg 1$ , так как в этой главе мы всюду предполагаем, что источник и точка наблюдения достаточно высоко подняты:  $kr_{1,2} \gg 1$ . Поэтому, так же как и в § 11, рассмотрим отдельно рассеяние на крупномасштабных неровностях  $kl \gg 1$ , но уже при произвольном параметре  $kl^2/R$ . Согласно (11.11) флукутации скалярного поля и любой компоненты векторного, с точностью до постоянного множителя, можно представить в виде

$$u(R, t) = \frac{k^2 \sin^2 \psi}{\pi R_{10} R_{20}} \exp \{i [k(R_{10} + R_{20}) - \omega_0 t]\} \times \\ \times \int_S \exp \left[ i \frac{k}{R} (x^2 \sin^2 \psi + y^2) \right] \zeta(r_0 + r, t) dr, \quad (5)$$

где сохранены все обозначения из § 11:  $R = \frac{2R_{10}R_{20}}{R_{10} + R_{20}}$  — приведенное расстояние,  $\psi$  — угол скольжения в точке зеркального

отражения,  $x$  и  $y$  — составляющие радиус-вектора  $r$  вдоль и поперек  $D$  соответственно (см. рис. 8 и 10). Подставляя (5) в (1) и проделывая те же вычисления, что и при выводе (11.21а, б) из (11.11), получаем следующие формулы для корреляционных функций:

$$\left. \begin{aligned} K_A(\tau) \\ K_\varphi(\tau) \end{aligned} \right\} = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \left[ W(0, \tau) \mp \mp \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho, \tau) \exp \left[ i \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) \right] d\xi d\eta \right], \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} K_{A\varphi}(\tau) = K_{\varphi A}(\tau) = \\ = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho, \tau) \exp \left[ i \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6b)$$

( $\xi$  и  $\eta$  — декартовы составляющие вектора  $\rho$ ). Если воспользоваться четностью по  $\xi$  и  $\eta$  показателя экспоненты в формулах (6а, б) и свойством симметрии функции корреляции  $W(\rho, \tau) = W(-\rho, -\tau)$ , то при нахождении спектра флуктуаций по формуле (4а) множитель  $e^{i\omega\tau}$  можно внести под интеграл и лишь потом вычислить вещественную и мнимую части

$$\left. \begin{aligned} S_A(\omega) \\ S_\varphi(\omega) \end{aligned} \right\} = \frac{(k\sigma \sin \psi)^2}{\pi} \left[ 2\pi \tilde{W}(\omega) \mp \mp \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) + \omega\tau \right] \right\} W(\rho, \tau) d\xi d\eta d\tau. \right] \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} S_{A\varphi}(\omega) = S_{\varphi A}(\omega) = \frac{(k\sigma \sin \psi)^2}{\pi} \cdot \frac{k \sin \psi}{2\pi R} \times \\ \times \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{2R} (\xi^2 \sin^2 \psi + \eta^2) + \omega\tau \right] \right\} W(\rho, \tau) d\xi d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (7b)$$

Заметим, что при произвольной функции корреляции  $W(\rho, \tau)$  всегда выполняется соотношение

$$S_A(\omega) + S_\varphi(\omega) = \frac{S(\omega)}{J_0} = (2k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega). \quad (8a)$$

Здесь  $\tilde{W}(\omega)$  следует понимать в смысле (13.15). Эта формула аналогична формуле (11.33) для дисперсии флуктуаций, которая получается из (8а) интегрированием по частотам. Тот факт, что

при  $kl \gg 1$  спектр поля  $S(\omega)$  совпадает со спектром поверхности  $\tilde{W}(\omega)$ , отмечался еще в предыдущем параграфе для  $kl^2/R \ll 1$ . Из формулы (7а) следует, что это имеет место при произвольных значениях  $kl^2/R$ , если только  $kl \gg 1$ .

3. В простейшем случае плоской поверхностной волны, движущейся в положительном направлении оси  $x$  (напомним, что как и в § 11, ось  $x$  лежит в плоскости падения и направлена вдоль  $D$  (см. рис. 8)), для  $W(\rho, \tau)$  имеем представление

$$W(\rho, \tau) = W(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\omega) e^{i[q(\omega)\xi - \omega\tau]} d\omega, \quad (86)$$

подставляя которое в (7) и выполняя несложное интегрирование, получаем

$$\left. \begin{aligned} S_A(\omega) \\ S_\varphi(\omega) \end{aligned} \right\} = (2k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega) \frac{\sin^2 \left[ \frac{q^2(\omega) R}{4k \sin^2 \psi} \right]}{\cos^2 \left[ \frac{q^2(\omega) R}{4k \sin^2 \psi} \right]}; \quad (9a)$$

$$S_{A\varphi}(\omega) = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega) \sin \left[ \frac{q^2(\omega) R}{2k \sin^2 \psi} \right]. \quad (96)$$

Эти формулы являются обобщением результатов работы [139], где были рассмотрены флуктуации амплитуды и фазы волны, отраженной от движущейся синусоиды. При  $\tilde{W}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$  из (9) получаются формулы работы [139]. В общем же случае двумерной движущейся поверхности спектры флуктуаций  $S_A(\omega)$

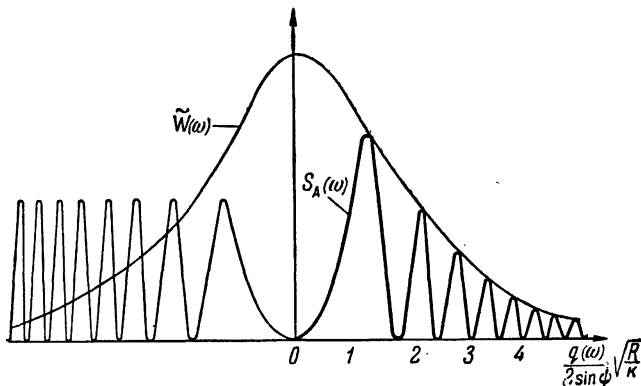


Рис. 18.

и  $S_\varphi(\omega)$  представляют собой произведение частотного спектра поверхности  $\tilde{W}(\omega)$  на осциллирующие множители, аргументы которых сдвинуты на  $\pi/2$ . На рис. 18 и 19 схематически представлены спектры флуктуаций амплитуды и фазы: при положительных частотах изображены  $S_A(\omega)$  (рис. 18) и  $S_\varphi(\omega)$  (рис. 19)

[этого достаточно, так как  $S_{A,\varphi}(\omega)$  — четные функции], а при отрицательных частотах — осциллирующие множители  $\frac{\sin^2 \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k \sin^2 \psi} \right]}{\cos^2 \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k \sin^2 \psi} \right]}$  из формулы (9а).

а. В области низких частот, там где

$$\frac{q^2(\omega)R}{4k \sin^2 \psi} \ll 1, \quad (10)$$

спектры флуктуаций амплитуды и корреляции амплитуды и фазы

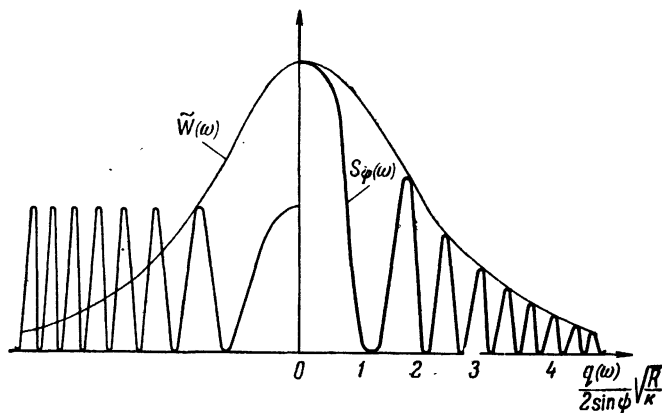


Рис. 19.

малы в меру малости этого параметра, а спектр фазы имеет максимальное значение

$$S_A(\omega) \approx (2k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega) \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k \sin^2 \psi} \right]^2, \quad (11a)$$

$$S_\varphi(\omega) \approx (2k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega) \left[ 1 - \frac{q^2(\omega)R}{2k \sin^2 \psi} \right], \quad (11б)$$

$$S_{A\varphi}(\omega) \approx 2(k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega) \cdot \frac{q^2(\omega)R}{2k \cdot \sin^2 \psi}. \quad (11в)$$

Введем вместо волнового числа  $q(\omega)$  длину волны  $\Lambda(\omega) = \frac{2\pi}{q(\omega)}$  на этой частоте. Тогда условие (10) принимает вид

$$\frac{k\Lambda^2(\omega) \sin^2 \psi}{\pi^2 R} > 1. \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае длина поверхностной волны  $\Lambda(\omega)$  значительно превышает размер зоны Френеля, так что в существенной для отражения области пространственная гармоника поверхности, отвечающая за флуктуации поля на частоте  $\omega$ , может быть заменена касательной плоскостью.



Это и приводит к тому, что флуктуации амплитуды при низких частотах [в смысле (10)] обращаются в нуль, а флуктуации фазы в точности повторяют низкочастотные колебания поверхности. С подобной ситуацией мы уже встречались при изучении дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы в § 11. Единственное различие состоит в том, что роль характерного линейного размера  $l_x$  в данном случае играет длина волны  $\Lambda$ .

б. При увеличении частоты  $\omega$  спектры флуктуаций  $S_A(\omega)$  и  $S_\varphi(\omega)$  приобретают осциллирующий характер. В частности, есть дискретный набор частот, где спектральные плотности обращаются в нуль. Эти частоты определяются уравнением

$$\frac{q^2(\omega)R}{2k \sin^2 \psi} = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

с четными  $n$  для флуктуаций амплитуды и нечетными — для фазы. Если ввести продольный размер  $n$ -й зоны Френеля  $a_n$  соотношением

$$a_n^2 = n \frac{2\pi R}{k \sin^2 \psi} = n\Lambda^2, \quad (14)$$

то уравнение (13) запишется в виде  $a_n = n\Lambda(\omega)$ , т. е. спектр флуктуаций фазы или амплитуды обращается в нуль, если в  $n$ -й зоне Френеля укладывается точно  $n$  длин волн  $\Lambda(\omega)$ . Из того, что  $a_n \sim \sqrt{n}$ , а  $\Lambda(\omega)$  — однозначная невозрастающая функция, следует, что для каждого  $n$  есть лишь одно решение уравнения (13).

в. В области высоких частот, когда

$$\frac{q^2(\omega)R}{4k \sin^2 \psi} \gg 1, \quad (15)$$

малым вариациям параметров  $\omega$ ,  $R$ ,  $k$  или  $\psi$  соответствуют быстрые осцилляции тригонометрических множителей в формулах (9). Но любая из этих величин всегда определена с конечной точностью. Например, точность задания частоты  $\omega$  определяется шириной полосы  $\Delta\omega$  анализатора спектра (или добротностью соответствующих резонансных устройств); неопределенность положения в пространстве источника и приемника, связанная с их конечными размерами, приводит к неточности  $\Delta R$  в определении приведенного расстояния  $R$  и т. д. Поэтому физический смысл имеют не точные спектральные плотности  $S(\omega)$ , а функции, получающиеся из них в результате усреднения по малым вариациям указанных параметров. Таким образом, в области, определяемой неравенством (15), спектральные плотности флуктуаций амплитуды и фазы имеют вид

$$S_A(\omega) = S_\varphi(\omega) \approx 2(k\sigma \sin \psi)^2 \tilde{W}(\omega); \quad S_{A\varphi} = 0. \quad (16)$$

Если неравенство (15) выполняется уже при частотах, порядка характерных частот  $\omega_{хар}$  в спектре  $\tilde{W}(\omega)$ , то осцилляции

тригонометрических множителей в (9) происходят значительно быстрее, чем изменение спектра поверхности  $\tilde{W}(\omega)$  и формулами (16) можно пользоваться во всей области частот. Но при  $kl \gg 1$  спектр поля  $S(\omega)$  пропорционален  $\tilde{W}(\omega)$  (см. § 12), так что формула (16) является частным случаем ( $kl \gg 1$ ) соотношений (4). Это естественно, так как, подставляя в (15)

$$q(\omega_{\text{хар}}) = 2\pi\Lambda^{-1}(\omega_{\text{хар}}) \sim l^{-1},$$

получаем неравенство  $kl^2/R \ll 1$ , при котором и была получена формула (4).

4. Обобщение результатов предыдущего пункта для произвольных (не плоских) поверхностных волн  $z = \xi(r, t)$  легко получить, подставляя в (7) разложение  $W(\rho, \tau)$  по плоским волнам в виде (12.33). Несложное интегрирование приводит к общим соотношениям между спектром флуктуаций амплитуды и фазы и частотно-угловым спектром поверхности:

$$\left. \begin{aligned} S_A(\omega) \\ S_\varphi(\omega) \end{aligned} \right\} = (2k\sigma \sin \psi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \tilde{W}(\omega, \vartheta) \frac{\sin^2 \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k} \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} + \sin^2 \vartheta \right) \right]}{\cos^2 \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k} \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} + \sin^2 \vartheta \right) \right]}; \quad (17a)$$

$$S_{A\varphi}(\omega) = 2(k\sigma \sin \psi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \tilde{W}(\omega, \vartheta) \sin \left[ \frac{q^2(\omega)R}{4k} \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} + \sin^2 \vartheta \right) \right]. \quad (17b)$$

Для плоской волны, распространяющейся под произвольным углом  $\vartheta_0$  к плоскости падения, т. е.  $\tilde{W}(\omega, \vartheta) = \tilde{W}(\omega) \delta(\vartheta - \vartheta_0)$ , приходим к формулам, получающимся из (9а, б) путем замены

$$\frac{1}{\sin^2 \psi} \rightarrow \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\sin^2 \psi} + \sin^2 \vartheta_0. \quad (18)$$

Поэтому, если в формулах (9)–(16) сделать подстановку (18), все предыдущие результаты непосредственно переносятся на случай произвольного угла  $\vartheta_0$  между направлением распространения волны и плоскостью падения. В частности, корни уравнения (13), т. е. те частоты, где спектральные плотности  $S_A(\omega)$  и  $S_\varphi(\omega)$  обращаются в нуль, становятся функциями угла  $\vartheta_0$ . Это приводит к тому, что в случае углового спектра конечной ширины  $\Delta\vartheta$ , осцилляции спектральных плотностей  $S_A(\omega)$  и  $S_\varphi(\omega)$  становятся менее выраженными — заплывают минимумы и уменьшаются максимумы. Полное сглаживание этих осцилляций происходит при ширине углового спектра  $\Delta\vartheta$ , определяемой из условия

$$\Delta\vartheta \sin 2\vartheta_0 + (\Delta\vartheta)^2 \cos 2\vartheta_0 \simeq 2\pi \frac{k \operatorname{tg}^2 \psi}{q^2(\omega)R}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{q^2(\omega)R}{2\pi k \operatorname{tg}^2 \psi} \gg 1 \quad (20)$$

даже малая ширина спектра  $\Delta\vartheta$ , наряду с вариациями других параметров  $\omega$ ,  $R$ ,  $\psi$  и  $k$  (см. п. 3), приводит к полному сглаживанию осциллирующих тригонометрических множителей в (17а), так что окончательные формулы для спектров принимают вид (16).

Особым является случай нормального облучения ( $\psi = \pi/2$ ), когда источник и точка наблюдения совмещены. Аргументы синуса и косинуса под интегралом в (17а, б) при этом не зависят от угла  $\vartheta$ , так что мы снова приходим к формулам (9а, б), где следует положить  $\sin^2 \psi = 1$ . Отметим, что при нормальном падении, так же как и в п. 3 § 13, спектр флуктуаций поля не зависит от углового распределения поверхностных волн, а связан только с частотным спектром колебаний поверхности (13.15).

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО НА ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Интенсивность и спектр флуктуаций волнового поля, отраженного от статистически неровной поверхности, являются локальными характеристиками случайного поля. Наряду с этим представляет интерес вопрос о корреляции флуктуаций поля в пространственно разнесенных точках  $R$  и  $R^*$ ). Так как флуктуации поля вызваны флуктуациями поверхности, то задача заключается в отыскании связи между корреляционной функцией неровностей поверхности  $W(\rho)$  и пространственной корреляционной функцией поля  $u^*(R)u(R)$ . При этом в ряде случаев возникает возможность решения и обратной задачи — восстановления корреляционных свойств неровной поверхности по известным корреляционным функциям рассеянного на ней волнового поля. В этой главе методом возмущений будут получены корреляционные функции поля в различных предельных случаях — скользящего и нескользящего распространения, мелких и крупных неровностей, бесконечной и ограниченной рассеивающей поверхности и т. д.

### § 15. Функции корреляции в дальней зоне

Если источник и точка наблюдения достаточно высоко подняты ( $kz \gg 1$ ,  $kz_0 \gg 1$ ) и характерные углы скольжения не очень малы ( $\sin \psi \gg \eta$ ,  $\eta$  — эффективный импеданс поверхности), то рассеянное на поверхности  $z = \zeta(r)$  поле можно представить в виде

$$u(R) = \frac{k^2}{\pi} \int_S \frac{\exp[ik(R_1 + R_2)]}{R_1 R_2} \hat{\mathcal{F}}(\alpha, \beta) \zeta(r) dr \quad (1)$$

[см. формулу (11.1)]. Здесь  $u(R)$  — по-прежнему потенциал скалярного поля или любая компонента векторного поля. Единственное различие между скалярным и векторным полем заключается в виде медленно изменяющейся операторной функции локальных углов скольжения и наблюдения  $\hat{\mathcal{F}}(\alpha, \beta)$ . Корреляционная функция поля в пространственно разнесенных точках связана с функцией

\*) Напомним, что в общем случае эти флуктуации возникают при переходе от одной реализации поверхности к другой из соответствующего ансамбля реализаций. Если же поверхность изменяется со временем, и этот процесс можно считать эргодичным, то рассматриваемые флуктуации происходят во времени.

корреляции ординат поверхности соотношением, очевидным образом вытекающим из (1):

$$\overline{u(R) u^*(R')} = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \iint_S \frac{\exp [ik (R_1 + R_2 - R'_1 - R'_2)]}{R_1 R'_1 R_2 R'_2} \hat{\mathcal{F}}(\alpha, \beta) \hat{\mathcal{F}}^*(\alpha', \beta') W(r, r') dr dr'. \quad (2)$$

Здесь величины со штрихом относятся к точке  $R'$  и имеют несколько не тот смысл, чем в аналогичных формулах для интенсивности (10.6); все обозначения в формуле (2) ясны из рис. 20. В этом параграфе мы рассмотрим только тот случай, когда источник  $(0, z_0)$  и обе точки наблюдения,  $R'$  и  $R$ , находятся в дальней зоне относительно отдельных неровностей, которые, как всегда, имеют размеры  $l_x$  и  $l_y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Для определенности ось  $x$  в дальнейшем выбрана по вектору  $D$ . Таким образом, предполагая выполненными неравенства [см. (10.8) и введенные в § 10 обозначения]

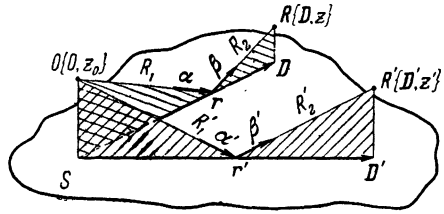


Рис. 20.

$$R \gg \min \left\{ l; \sqrt{\frac{R}{k}} \right\}, \quad \frac{kl_x^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1, \quad \frac{kl_y^2}{R} \ll 1, \quad (3)$$

от (2) переходим к формуле

$$\overline{u(R) u^*(R')} = \frac{k^4 \sigma^2}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2 R'_2} \exp [ik (R_2 - R'_2)] \times \times \mathcal{F}(\alpha, \beta) \mathcal{F}^*(\alpha', \beta') \int \exp \left[ ik \left( \frac{D' - r}{R'_2} - \frac{r}{R_1}, \rho \right) \right] W(\rho) d\rho, \quad (4)$$

которая является обобщением выражения (10.11) [или (10.41) для электромагнитных волн] на случай разнесенных точек наблюдения.

Здесь уже  $R_2$  и  $R'_2$  — это расстояния от переменной точки интегрирования  $r$  до точек наблюдения  $R$  и  $R'$  соответственно (рис. 21). Медленно изменяющаяся функция  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ , в которую переходит оператор  $\hat{\mathcal{F}}(\alpha, \beta)$  после интегрирования по частям слагаемых с  $\nabla_r$  (см. § 10, п. 1), при этом описывается формулами

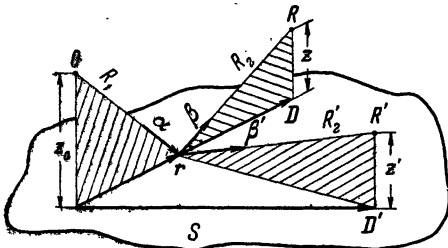


Рис. 21.

(8.13) для звука и формулой (9.18) в электромагнитном случае. Как и при исследовании интенсивности флуктуаций в гл. IV,

рассмотрим различные предельные случаи, когда можно установить простую связь между корреляционной функцией поля и корреляционной функцией поверхности  $W(\rho)$  без конкретизации последней.

1. Пусть источник и обе точки наблюдения находятся в зоне разделения спектров [см. (10.13)]:

$$kl \frac{L}{R} \sin^2 \psi \ll 1; \quad \frac{L}{R} \ll 1; \quad (5)$$

здесь под  $R$  по-прежнему подразумевается приведенное расстояние  $R = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ;  $R_1'$  считается при оценках того же порядка, что и  $R_2$ , а остальные обозначения такие же, как и в § 10. При выполнении указанных неравенств из (4) вытекает формула

$$\overline{u(R) u^*(R')} = (2k^2 \sigma^2) \frac{\mathfrak{F}(\alpha, \beta) \mathfrak{F}^*(\alpha, \beta')}{R_1^2 R_2 R_2'} \tilde{W}(k - \kappa') \times \\ \times \int_S \exp[ik(R_2 - R_2')] dr, \quad (6)$$

где  $k = k\alpha$ ,  $\kappa = k\beta$ ,  $\kappa' = k\beta'$ .

Нормируя этот коррелятор на интенсивность флуктуаций в точках наблюдения

$$J(R) = \frac{2k^2 \sigma^2}{R_1^2 R_2^2} S \tilde{W}(k - \kappa) |\mathfrak{F}(\alpha, \beta)|^2, \quad (7)$$

получаем для корреляционной функции флуктуаций простое выражение

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{\overline{u(R) u^*(R')}}{\sqrt{J(R) J(R')}} = \sqrt{\frac{\tilde{W}(k - \kappa')}{\tilde{W}(k - \kappa)}} \cdot \frac{1}{S} \int_S e^{ik(R_2 - R_2')} dr. \quad (8)$$

Ввиду малости  $L/R$  показатель экспоненты можно разложить в ряд по степеням  $r$ :

$$R_2 - R_2' \approx R_0 - R_0' - (\beta - \beta', r) + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{R_0 - R_0'}{R_0 R_0'} - \\ - \frac{(\beta r)^2}{2R_0} + \frac{(\beta' r)^2}{2R_0'} + \dots, \quad (9)$$

где  $\beta$  и  $\beta'$  — единичные орты векторов  $R_0$  и  $R_0'$ , направленные из начала координат  $O$ , находящегося в любой точке  $S$ , в точки наблюдения  $R$  и  $R'$  (рис. 22).

2. В зоне Фраунгофера относительно площадки  $S$ , т. е. при  $k \cdot (L^2/R) \ll 1$ , мы ограничимся лишь линейными членами по  $r$  в разложении (9), так что функция корреляции принимает вид

$$\mathcal{K}(R, R') = \sqrt{\frac{\tilde{W}(k - \kappa')}{\tilde{W}(k - \kappa)}} \frac{\exp[ik(R_0 - R_0')]}{S} \int_S \exp[ik(\beta' - \beta, r)] dr. \quad (10)$$

Так как линейные размеры поверхности  $S$  вдоль осей  $x$  и  $y$  ( $L_x$  и  $L_y$ ) всегда значительно больше, чем длина волны ( $kL_{x,y} \gg 1$ ), то интеграл в (10) является острой функцией разности  $\beta' - \beta$ . При  $kL_{x,y} \rightarrow \infty$  из (10) следует

$$\mathcal{K}(R, R') = \begin{cases} \exp [ik(R_0 - R'_0)] & \text{при } \beta' = \beta, \\ 0 & \text{при } \beta' \neq \beta, \end{cases} \quad (11)$$

т. е. отсутствует корреляция между волнами, рассеянными в разных направлениях ( $\beta' \neq \beta$ ), а при продольном разнесении ( $\beta = \beta'$ ) корреляция такая же, как и в плоской волне, распространяющейся вдоль вектора  $\beta$ . Отсутствие корреляции при  $\beta' \neq \beta$  можно связать с резонансным механизмом рассеяния — в каждом направлении рассеивает только определенная фурье-компонента поверхности с волновым вектором  $q_{\perp} = k(\beta_{\perp} - \alpha_{\perp})$ . В силу предполагаемой статистической однородности поверхности амплитуды различных фурье-компонент независимы, что и является причиной отсутствия корреляции между соответствующими пространственными спектрами. Учет того обстоятельства, что  $kL$  — большая, но конечная величина, приводит к появлению корреляции в пределах одного лепестка, т. е. при  $|\beta' - \beta| \approx 1/(kL)$ . Легко видеть, что корреляционные свойства поверхности при этом по-прежнему не играют роли, так как предэкспоненциальный множитель в (10) изменяется при гораздо больших угловых разнесениях  $|\beta' - \beta| \sim 1/(kl) \gg 1/(kL)$ . В качестве примера рассмотрим простейший случай прямоугольной рассеивающей площадки, покрытой двумерными шероховатостями с корреляционной функцией  $W(x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Пусть точки наблюдения находятся в плоскости падения  $y = 0$  (рис. 23), так что  $\alpha_x = \cos \psi$ ,  $\beta_x = \cos \chi$ ,  $\beta'_x = \cos \chi'$ ,  $\alpha_y = \beta_y = \beta'_y = 0$  и  $R_0 = R'_0$  (поперечный разнос). Преобразование Фурье  $\tilde{W}(k - \kappa)$  имеет при этом вид

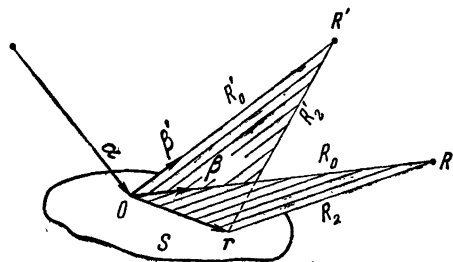


Рис. 22.

$\tilde{W}(k - \kappa) = \frac{l}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(kl)^2 (\alpha_x - \beta_x)^2}{2} \right], \quad (12)$

и из (10) получаем

$$\mathcal{K}(R', R) = \frac{\sin(kL \sin \chi_0 \sin \gamma)}{kL \sin \chi_0 \sin \gamma} \times \exp \{ - (kl)^2 \sin \chi_0 \sin \gamma [\cos \psi - \cos \chi_0 \cos \gamma] \}, \quad (13)$$

где  $2\chi_0 = \chi + \chi'$ ,  $2\gamma = \chi' - \chi$ ,  $L$  — размер площадки вдоль оси  $x$ . Таким образом, декорреляция происходит при малых углах рассеяния  $\sin \gamma \approx \frac{1}{kL \sin \chi_0} \ll 1$ , в то время как экспоненциальный множитель, происходящий от функций корреляции (12), при этом практически не отличается от единицы (в меру малости  $l/L$ ). Интересно отметить, что формулы типа (8), (10) возникают и при

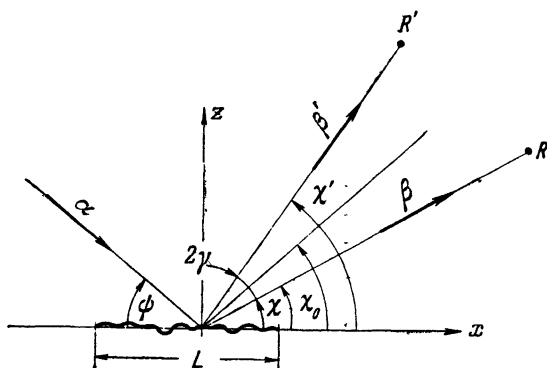


Рис. 23.

решении задачи о корреляционных соотношениях для волнового поля после прохождения через хаотически неоднородный экран (см., например, [140], § 52), причем падающая волна предполагается плоской и монохроматической, а поле при  $z=0$  — непосредственно за экраном — статистически однородным. Здесь роль такого экрана (правда, отражающего, — но это не существенно) играет неровная поверхность  $z = \zeta(\mathbf{r})$ , а статистическая однородность поля при  $z=0$  связана с тем, что источник находится достаточно далеко от ограниченной поверхности — в зоне разделения спектров, так что падающая волна может считаться плоской.

3. Посмотрим теперь, в какой степени результаты предыдущего пункта справедливы в зоне Френеля относительно поверхности  $S$ . Неравенства (5) по-прежнему предполагаем выполненными, так что формула (8), справедливая во всей области разделения спектров, с учетом разложения (9) может быть представлена в виде

$$\mathcal{K}(R, R') = \sqrt{\frac{\tilde{W}(k - k') \exp[ik(R_0 - R'_0)]}{\tilde{W}(k - k)}} \times \int_S \exp\left\{ik\left[(\beta' - \beta, \mathbf{r}) + \frac{r^2}{2} \frac{R'_0 - R_0}{R_0 R'_0} - \frac{(\beta r)^2}{2R_0} + \frac{(\beta' r)^2}{2R'_0}\right]\right\} d\mathbf{r}. \quad (14)$$



При продольном разнесении точек наблюдения ( $\beta = \beta'$ ) корреляция флуктуаций определяется значением интеграла

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik\Delta}}{S} \int_S \exp \left\{ ik \frac{\Delta}{2R_0 R_0'} [r^2 - (\beta r)^2] \right\} dr = \\ = \frac{e^{ik\Delta}}{S} \int_S \int_S \exp \left[ i \frac{k\Delta}{2R_0 R_0'} (x^2 \sin^2 \chi + y^2) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Delta = R_0 - R_0'$ ,  $\chi$  — угол места точек наблюдения ( $\beta_z = \sin \chi$ ). При  $k\Delta L^2/R_0^2 \ll 1$  ( $R_0 \simeq R_0'$ ) — показатель экспоненты мал, и мы приходим к прежнему результату — корреляция в продольном разнесенных точках такая же, как в плоской волне, и определяется множителем  $e^{ik\Delta}$ . В обратном предельном случае, когда  $k\Delta L^2/R_0^2 \gg 1$ , область интегрирования в (15) можно считать бесконечной, так что

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{e^{ik\Delta}}{S} \cdot \frac{2\pi i R_0^2}{k\Delta \sin \chi} \quad (16)$$

и, следовательно, в этом случае  $|\mathcal{K}(R, R')| \ll 1$ . Таким образом, в зоне Френеля продольная функция корреляции флуктуаций поля, осциллируя с периодом  $\lambda = 2\pi/k$ , убывает на расстояниях  $\Delta_0 \simeq \frac{2\pi R_0^2}{kS \sin \chi}$ . Число осцилляций, укладывающихся на этом интервале, равно  $R_0^2/S \cdot \sin \chi$  и значительно больше единицы, так как считается, что  $L/R \ll 1$ . Поведение функции  $\mathcal{K}(R, R')$  в промежуточной области  $\Delta \simeq R_0^2/(kL^2)$  определяется формой контура поверхности  $S$ . В простейшем случае квадратной площадки со стороной  $L$  интеграл (15) выражается через функцию ошибок  $F(z)$  комплексного аргумента

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{e^{ik\Delta}}{S} \frac{2\pi i R_0^2}{k\Delta \sin \chi} F \left( \frac{L}{2R_0} \sqrt{\frac{k\Delta}{2i}} \right) F \left( \frac{L \sin \psi}{2R_0} \sqrt{\frac{k\Delta}{2i}} \right). \quad (17)$$

При малых продольных разнесениях, когда  $k\Delta L^2/R_0^2 \ll 1$ , из (17) получаем формулу

$$\mathcal{K}(R, R') \approx e^{ik\Delta} \left\{ 1 - \frac{k\Delta L^2 (1 + \sin^2 \chi)}{24i R_0^2} \right\}. \quad (18)$$

В обратном предельном случае из (17) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R') \approx \frac{2\pi i}{k\Delta \sin \chi} \cdot \frac{R_0^2}{L^2} e^{ik\Delta} \left\{ 1 - \frac{2R_0}{L} \sqrt{\frac{2i}{\pi k\Delta}} \left[ \exp \left( i \frac{k\Delta L^2}{8R_0^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sin \chi} \exp \left( i \frac{k\Delta L^2 \sin^2 \chi}{8R_0^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для поперечной ( $R_0 = R'_0$ ,  $\beta \neq \beta'$ ) корреляции рассеянного поля (прямоугольная площадка, точки наблюдения в плоскости падения) из (14) получаем формулу:

$$\mathcal{K}(R, R') = \sqrt{\frac{\tilde{W}(k-x')}{\tilde{W}(k-x)}} \cdot \frac{1}{L} \times \\ \times \int_L \exp \left\{ -ik \left[ 2x \sin \chi_0 \sin \gamma + \frac{\sin 2\chi_0 \sin 2\gamma}{2R_0} x^2 \right] \right\} dx, \quad (20)$$

где углы  $\chi_0$  и  $\gamma$  имеют тот же смысл, что и в (13) (см. рис. 23). Из (20) даже без дальнейших вычислений видно, что, как и в зоне Фраунгофера, декорреляция флуктуаций определяется угловой шириной лепестка диаграммы площадки  $\sin \gamma \simeq \frac{1}{kL \sin \chi_0}$ . Наличие в показателе экспоненты дополнительного слагаемого при этом совершенно не существенно, так как соответствующий угол разнесения  $\sin 2\gamma \simeq \frac{R_0}{kL^2 \sin 2\chi_0}$  значительно больше ширины лепестка в меру  $R_0 \gg L$ .

4. Результаты предыдущих трех пунктов относились к корреляции флуктуаций в зоне разделения спектров, т. е. рассеивающая поверхность предполагалась ограниченной —  $klL/R \ll 1$ . Прежде чем перейти к исследованию пространственной корреляции поля, рассеянного на бесконечной шероховатой поверхности (или, во всяком случае, достаточно большой, чтобы включать в себя всю существенную для отражения область), чему будут посвящены следующие два параграфа этой главы, рассмотрим предельный случай мелко-масштабных неровностей ( $kl \ll 1$ ). Неравенства (3) при этом заведомо выполняются, ибо всегда  $l/R \ll 1$ , и мы можем при произвольном размере рассеивающей поверхности (но  $L \gg l$ ,  $\lambda$ ) исходить из формулы (4) для пространственной корреляции поля. В рассматриваемом предельном случае диффузного рассеяния ( $kl \ll 1$ ) формула (4), так же, как и соответствующее ей выражение для интенсивности (10.11), может быть записана в виде

$$\overline{u(R) u^*(R')} = \\ = C \frac{(k\sigma)^2 (kl_x) (kl_y)}{\pi^2} \int_S \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \exp [ik(R_2 - R_1)] \mathcal{F}(\alpha, \beta) \mathcal{F}^*(\alpha, \beta'), \quad (21)$$

где, как и в п. 4 § 10, введено обозначение:

$$\int W(\rho) d\rho = Cl_x l_y.$$

В интеграл (21) уже не входят статистические характеристики рассеивающей поверхности и корреляция флуктуаций определяется только длиной волны  $\lambda$  и геометрическим положением

источника и точек наблюдения — высотами  $z_0$ ,  $z$ ,  $z'$  и расстояниями  $D$  и  $D'$ .

Таким образом, в зоне разделения спектров — при ограниченной поверхности и произвольных  $kl$ , — или в случае диффузного рассеяния ( $kl \ll 1$ ) и при произвольных размерах  $L$  поверхности, корреляция флуктуаций поля не связана с корреляционными характеристиками поверхностных неровностей, а полностью определяется длиной волны излучения и взаимным расположением источников и приемников относительно поверхности.

### § 16. Корреляция флуктуаций поля при скользющем распространении

Перейдем к изучению корреляционных функций волнового поля точечного источника над бесконечной шероховатой поверхностью с неровностями, длина которых значительно превышает длину волны излучения  $kl \gg 1$ . В этом параграфе мы рассмотрим случай скользющего распространения, когда  $kz_{\min} \sin \psi \gg 1$  ( $z_{\min} = \min \{z, z_0\}$ ) и исходное выражение (14.1) для флуктуаций поля можно записать в виде (11.11)

$$u(\mathbf{R}) = \frac{k^2 \sin^2 \psi}{\pi R_{10} R_{20}} \exp [ik(R_{10} + R_{20})] \times \\ \times \int_S \exp \left[ i \frac{k}{R} (x^2 \sin^2 \psi + y^2) \right] \zeta(r_0 + r) dr. \quad (1)$$

Здесь сохранены все обозначения § 11 (см. рис. 8 и 10). Строго говоря, формула (1) относится только к флуктуациям поля над абсолютно мягкой поверхностью. Соответствующее выражение для поля над абсолютно жесткой поверхностью отличается лишь знаком от (1), а для флуктуаций любой компоненты электромагнитного поля — постоянным множителем, зависящим лишь от поляризации антенны источника и приемного устройства. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать корреляционные свойства поля над абсолютно мягкой поверхностью, т. е. исходить из формулы (1).

Если точка наблюдения  $\mathbf{R}$  находится вблизи поверхности ( $z \rightarrow 0$ ), то из общей формулы (10.2) с помощью соотношения

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi\delta(r) \quad (2)$$

приходим к локальной связи между флуктуациями поля и формой неровной поверхности

$$u(r) = 2ik \sin \psi \zeta(r) \frac{e^{ikR_1}}{R_1}. \quad (3)$$

Тот же результат, естественно, следует непосредственно из граничного условия (5.5а) при замене среднего поля  $\bar{U}$  полем нулевого приближения  $U_0$ .

Несмотря на то, что формула (1) была получена лишь при  $kz_{\min} \sin \psi \gg 1$ , в предельном случае  $z \rightarrow 0$  она переходит в формулу (3), если воспользоваться одним из определений  $\delta$ -функции:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right) = \delta(x). \quad (4)$$

Поэтому получаемые ниже формулы для корреляционных функций, справедливые, вообще говоря, лишь при  $kz_{\min} \sin \psi \gg 1$ , допускают предельный переход к  $z=0$ .

Нормируя коррелятор  $\overline{u(R)u^*(R')}$  на интенсивность флуктуаций в точках  $R$  и  $R'$  [см. (10.27)], получаем из (1) для пространственной корреляционной функции такую формулу:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R') &= \frac{\overline{u(R)u^*(R')}}{\sqrt{J(R)J(R')}} = \\ &= \frac{k^2 \sin \psi \sin \psi'}{\pi^2 R R'} e^{-ik\Delta R_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho W(\Delta r_0 + \rho) \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \times \\ &\times \exp\left\{ik\left[\frac{x^2 + y^2 - \cos^2 \psi (x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2}{R} - \frac{\sin^2 \psi' (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2}{R'}\right]\right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь все величины со штрихом относятся к точке наблюдения  $R'$  (рис. 24),  $\varphi$  — угол между векторами  $r_0$  и  $r'_0$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — параллельная и перпендикулярная к  $r'_0$  составляющая вектора  $\rho = r' - r$  и, кроме того, введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta r_0 &= r'_0 - r_0, \quad \Delta R_0 = R_0 - R'_0, \\ R_0 &= R_{10} + R_{20}. \quad (6) \end{aligned}$$

Формула (5) является достаточно сложной для того, чтобы исследовать корреляцию поля при произвольном разнесении точек  $R$  и  $R'$ . Рассмотрим наиболее важные частные случаи.

1. При азимутальном разнесении точек наблюдения, когда  $R = R'$ ,  $\psi = \psi'$ ,  $\varphi \neq 0$ , формула (5) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R') &= \frac{k \operatorname{tg}^2 \psi}{\pi R \sin \varphi} \int d\rho W(\Delta r_0 + \rho) \times \\ &\times \exp\left\{ik \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{R} [\xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta \operatorname{ctg} \psi]\right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

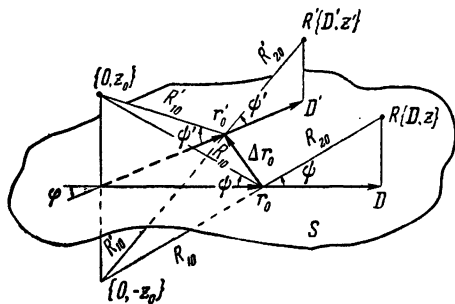


Рис. 24.

Без конкретизации вида корреляционной функции поверхности  $W$  интеграл в (7) можно вычислить в двух предельных случаях.

а. Пусть азимутальный угол  $\varphi$  разнесения точек  $R$  и  $R'$  настолько мал, что выполняются неравенства \*):

$$\left(\frac{R}{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi}\right)^2 \sin^2 \varphi \ll 1; \quad \frac{R \sin^2 \varphi}{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \ll \left(\frac{l}{\Delta r_0}\right)^2. \quad (8)$$

Тогда определяющую роль в интеграле (7) играет быстро осциллирующий экспоненциальный множитель и функцию  $W(\Delta r_0 + \rho)$  можно вынести за знак интеграла в точке стационарной фазы  $\rho = 0$  (точка стационарной фазы гиперболического типа, см., например, [141]). Элементарное интегрирование оставшейся экспоненты приводит к простой формуле

$$\mathcal{K}(R, R') = W(\Delta r_0). \quad (9)$$

Таким образом, в данном случае корреляция поля в разнесенных точках  $R$  и  $R'$  определяется степенью корреляции между соответствующими точками зеркального отражения  $r_0$  и  $r'_0$ , и корреляционная функция поля совпадает с корреляционной функцией поверхности, аргумент у которой — расстояние между точками зеркального отражения.

б. В обратном предельном случае больших разнесений, когда

$$\left(\frac{R}{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi}\right)^2 \sin^2 \varphi \gg 1, \quad \frac{R \sin^2 \varphi}{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi} \gg \left(\frac{\Delta r_0}{l}\right)^2, \quad (10)$$

роль быстро изменяющейся функции (с максимумом в  $\rho = -\Delta r_0$ ) под интегралом в формуле (7) играет  $W$ , так что для корреляции поля имеем

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{k \operatorname{tg}^2 \psi}{\pi R \sin \varphi} \exp \left[ i \frac{k \operatorname{tg}^2 \psi}{R} (\Delta r_0)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) d\rho. \quad (11)$$

Отсюда видно, что корреляция поля при больших разнесениях точек наблюдения оказывается мало чувствительной к функциональному виду  $W$  и определяется лишь интегралом от нее, который имеет порядок  $l^2$ . Из (10) следует, что в данном случае  $|\mathcal{K}(R, R')| \ll 1$ .

\*) В этих неравенствах  $l$  — радиус корреляции поверхности, который, как всегда при оценках, считается одного порядка во всех направлениях. Если поверхность сильно анизотропна или корреляционная функция  $W$  не является однопараметрической (например, квазигармоническая), то под  $l$  в (8) следует понимать минимальный радиус корреляции (в частности, период осцилляции при квазигармонической функции корреляции). В дальнейшем при получении качественных результатов и оценок мы будем считать  $W(\rho)$  однопараметрической функцией.

Формулы (9), (11) в сочетании с неравенствами (8) и (10) позволяют, при достаточно общих предположениях относительно поведения функции  $W(\rho)$ , оценить величину того расстояния  $\Delta y$  (в случае азимутального разнесения), на котором корреляция флуктуаций поля существенно убывает. При этом удобно степень разнесения точек наблюдения характеризовать расстоянием  $\Delta r_0 = \Delta y r_0 / D$  между соответствующими точками зеркального отражения. Из (9) следует, что во всяком случае

$$(\Delta r_0)_{R_0, \psi} \lesssim l, \text{ т. е. } (\Delta y)_{R_0, \psi} \lesssim \frac{D}{r_0} l; \quad (12)$$

индексы внизу  $R_0$  и  $\psi$  означают, что рассматривается корреляция при фиксированных значениях этих параметров. При больших азимутальных разнесениях, когда формула (9) неприменима, функция корреляции, как следует из (11), существенно убывает. Поэтому неравенства (8) и (10) также ограничивают поперечный радиус корреляции

$$(\Delta r_0)_{R_0, \psi} \lesssim r_0 \frac{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{R}. \quad (13)$$

Объединяя две последние формулы, получаем искомую оценку:

$$(\Delta r_0)_{R_0, \psi} \simeq \min \left\{ l; r_0 \frac{kl^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{R} \right\}. \quad (14)$$

Итак, флуктуации поля можно считать некоррелированными, если точки наблюдения  $R$  и  $R'$  разнесены по азимуту так, что расстояние  $\Delta r_0$  между соответствующими им точками зеркального отражения больше, чем  $(\Delta r_0)_{R, \psi}$  из (14).

В ряде случаев особый интерес представляет обратная задача теории рассеяния — восстановление статистических характеристик поверхности по статистическим характеристикам рассеянного на ней излучения. Например, для рассматриваемого круга вопросов — точечный источник над поверхностью с низкими (теория возмущений) неровностями — обратная задача заключается в определении корреляционной функции неровностей  $W(\rho)$  по корреляционной функции  $\mathcal{H}(R, R')$  флуктуаций поля, которая предполагается известной. Решение этого вопроса при азимутальном разнесении точек  $R$  и  $R'$  очевидно, если область применимости формулы (9) достаточно велика (хотя бы  $\Delta r_0 \gtrsim l$ ), т. е. когда ограничение (13) несущественно. Это имеет место при

$$kl \operatorname{tg} \psi \sin \psi \frac{z_0 + z}{z} \gg 1. \quad (15)$$

Отметим, что при  $z \rightarrow 0$  это неравенство выполняется при любых углах скольжения и параметрах  $kl$ , и формула (9) оказывается

справедливой при любом разнесении точек наблюдения. Легко видеть, что в этом случае она непосредственно вытекает из (3).

При произвольных углах разнесения  $\varphi$ , т. е. без ограничений (8) или (10), интеграл в формуле (7) можно вычислить лишь для простейших функций корреляций. Например, при гауссовой корреляции

$$W(\rho) = \exp\left[-\frac{\xi^2}{l_{\parallel}^2} - \frac{\eta^2}{l_{\perp}^2}\right], \quad (16)$$

где  $l_{\parallel}$  и  $l_{\perp}$  — радиусы корреляции поверхности в направлении  $r_0$  и в перпендикулярном к нему, интегрирование в (7) приводит к формуле \*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R') = & \frac{\operatorname{tg}^2 \psi l_{\parallel} l_{\perp}}{\sqrt{\frac{R}{k} \sin^2 \varphi \left[ \frac{R}{k} + i \operatorname{tg}^2 \psi (l_{\parallel}^2 - l_{\perp}^2) \right] + l_{\parallel}^2 l_{\perp}^2 \operatorname{tg}^4 \psi}} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\left( i \frac{R}{k} \sin^2 \varphi - l_{\parallel}^2 \operatorname{tg}^2 \psi \right) l_{\perp}^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{\frac{R}{k} \sin^2 \varphi \left[ \frac{R}{k} + i \operatorname{tg}^2 \psi (l_{\parallel}^2 - l_{\perp}^2) \right] + l_{\parallel}^2 l_{\perp}^2 \operatorname{tg}^4 \psi} \left( \frac{\Delta r_0}{l_{\perp}} \right)^2} \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Если неровности поверхности изотропные, то  $l_{\parallel} = l_{\perp} = l$  и это выражение значительно упрощается:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R') = & \left( \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{k^2 l^4 \operatorname{tg}^4 \psi} + 1 \right)^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ \left( \frac{iR \sin^2 \varphi}{k l^2 \operatorname{tg}^2 \psi} - 1 \right) \left( \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{k^2 l^4 \operatorname{tg}^4 \psi} + 1 \right)^{-1} \left( \frac{\Delta r_0}{l} \right)^2 \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

В предельных случаях (8) и (10) эта формула переходит в (9) и (11) соответственно.

2. Перейдем к исследованию корреляционной функции поля для точек наблюдения, лежащих в одной азимутальной плоскости — в плоскости падения ( $R \neq R'$ ,  $\psi \neq \psi'$  и  $\varphi = 0$ ). Полагая в (5)  $\varphi = 0$  и выполняя несложное интегрирование по  $dx dy$ , получаем формулу

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{ie^{-ik\Delta R_0}}{\pi \sqrt{\Delta a^2 \Delta b^2}} \int W(\Delta r_0 + \rho) \exp \left[ -i \left( \frac{\xi^2}{\Delta a^2} + \frac{\eta^2}{\Delta b^2} \right) \right] d\rho. \quad (19)$$

Здесь введены обозначения:  $a = \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{R}{k}}$  — продольный (вдоль  $r_0$ ) и поперечный размеры зоны Френеля,

\*) Главные оси квадратичной формы в (16), вообще говоря, не совпадают с координатными осями  $\xi$  и  $\eta$ . При этом вместо (17) получается еще более громоздкая формула, которую мы не приводим.

$\Delta a^2 = a'^2 - a^2$ ,  $\Delta b^2 = b'^2 - b^2$  — приращения величин  $a^2$  и  $b^2$  при переходе от точки  $R$  к  $R'$ . Заметим, что положение точки наблюдения в данном случае полностью определяется двумя параметрами  $R$  и  $\psi$  или размерами  $a$  и  $b$  зоны Френеля. Как и в предыдущем пункте, рассмотрим два предельных случая — малых и больших разнесений.

а. Если точки наблюдения  $R$  и  $R'$  не очень удалены одна от другой, так что приращения квадратов линейных размеров зоны Френеля удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\Delta a^2}{4W(\Delta r_0)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} W(\rho) \Big|_{\rho=\Delta r_0} \ll 1, \quad \frac{\Delta b^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} W(\rho) \Big|_{\rho=0} \ll 1, \quad (20)$$

то, вынося  $W$  из-под интеграла (19) в точке стационарной фазы  $\rho=0$ , получаем

$$\mathcal{K}(R, R') = e^{-ik\Delta R_0} W(\Delta r_0). \quad (21)$$

Таким образом, если размеры зон Френеля изменяются на величину, значительно меньшую, чем радиус корреляции поверхности [неравенства (20) качественно имеют именно такой смысл], то корреляция флуктуаций поля определяется лишь корреляцией между соответствующими точками зеркального отражения. Единственное различие между (21) и формулой (9) заключается в наличии осциллирующего на длине волны  $\lambda$  множителя  $e^{-ik\Delta R_0}$ , так что (21) можно рассматривать как общее соотношение, связывающее корреляцию флуктуаций поля с корреляцией поверхности при достаточно малых разнесениях точек наблюдения.

б. В обратном предельном случае больших разнесений, когда

$$\left. \begin{aligned} \Delta a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{W(\rho)} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\rho) \right]_{\rho=\Delta r_0} > 1, & \quad \frac{(\Delta r_0)^2}{\Delta a^2}, \\ \Delta b^2 \frac{\partial^2 W(\rho)}{\partial \eta^2} \Big|_{\rho=0} > 1, & \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

формула (19) принимает вид

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{ie^{-ik\Delta R_0}}{\pi \sqrt{\Delta a^2 \Delta b^2}} \exp \left[ -i \frac{(\Delta r_0)^2}{\Delta a^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) d\rho. \quad (23)$$

Так же как и в предыдущем пункте, при больших расстояниях между  $R$  и  $R'$  корреляция флуктуаций поля оказывается нечувствительной к виду  $W(\rho)$  и в силу неравенств (22)  $|\mathcal{K}(R, R')| \ll 1$ .

При гауссовой корреляции (16) поверхности из (19) получаем формулу для корреляции флуктуаций при произвольной величине разнесения:

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{i l_{\parallel} l_{\perp}}{\sqrt{(\Delta a^2 + i l_{\parallel}^2)(\Delta b^2 + i l_{\perp}^2)}} \exp \left\{ -i \left[ k \Delta R_0 + \frac{(\Delta r_0)^2}{\Delta a^2 + i l_{\parallel}^2} \right] \right\}. \quad (24)$$



В предельных случаях (20) и (22), которые для  $W$  в форме (16) принимают вид

$$\frac{\Delta a^2}{l_{\parallel}^2} \ll 1, \quad \left(\frac{l_{\parallel}}{\Delta r_0}\right)^2; \quad \frac{\Delta b^2}{l_{\perp}^2} \ll 1, \quad (20a)$$

$$\frac{\Delta a^2}{l_{\parallel}^2} \gg 1, \quad \frac{(\Delta r_0)^2}{\Delta a^2}; \quad \frac{\Delta b^2}{l_{\perp}^2} \gg 1, \quad (22a)$$

формула (24) переходит в (21) и (23) соответственно.

Как и для азимутального разнесения, оценим те расстояния, на которых флуктуации поля становятся некоррелированными. Для простоты будем пользоваться не формулами (20) и (22), а соответствующими им менее громоздкими неравенствами (20a) и (22a). Тогда границы области корреляции можно оценить, исходя из неравенств  $\Delta r_0 \lesssim l$  и  $\Delta a^2, \Delta b^2 \lesssim l^2$ .

Рассмотрим сначала смещения при постоянной высоте  $z$ , так что изменяется только угол  $\psi$ . Граница области корреляции по углу  $\psi$  определяется при этом соотношением

$$(\Delta\psi)_{z, \psi} \simeq \min \left\{ \frac{l}{z_0} \sin^2 \psi, \frac{kl^2(z_0+z)}{z_0 z} \operatorname{tg} \psi \sin^3 \psi \right\}, \quad (25)$$

из которого получаем оценку для радиуса корреляции  $(\Delta x)_{z, y}$  флуктуаций поля в направлении оси  $x$  на фиксированной высоте  $z$  при переходе из точки  $R$  в  $R'$  (рис. 25):

$$(\Delta x)_{z, y} \simeq \frac{R_0 (\Delta\psi)_{z, \psi}}{\sin \psi} \simeq \min \left\{ \frac{z_0+z}{z_0} l, \frac{kl^2(z_0+z)^2}{z_0 z} \operatorname{tg} \psi \sin \psi \right\}. \quad (26)$$

Радиус корреляции по оси  $z$  при фиксированном угле скольжения  $\psi$  оказывается при этом равным

$$(\Delta z)_{\psi, \psi} \simeq \frac{kl^2(z_0+z)^2}{z_0^2} \sin^3 \psi = kl^2 \sin^5 \psi \frac{R_0^2}{z_0^2}. \quad (27)$$

Отсюда для продольного радиуса корреляции  $(\Delta R_0)_{\psi, \psi}$  вдоль луча  $O'R$  при фиксированном угле скольжения (точки  $R$  и  $R'$  находятся на одном и том же луче, проведенном через мнимый источник), получаем оценку

$$(\Delta R_0)_{\psi, \psi} \simeq \frac{(\Delta z)_{\psi, \psi}}{\sin \psi} \simeq \frac{kl^2 R_0^2 \sin^4 \psi}{z_0^2}. \quad (28)$$

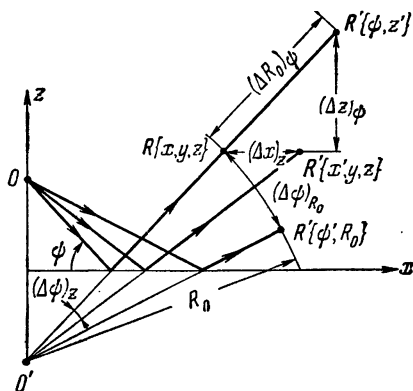


Рис. 25.

Заметим, что если бы формула (21) была справедлива при любой величине разнесения, то во всех точках, лежащих на одном луче ( $\varphi, \psi = \text{const}$ ), корреляция флуктуаций поля не уменьшалась бы с расстоянием (отвлекаясь для простоты от осцилляций за счет множителя  $e^{-ik\Delta R_0}$ ). Формула (28) ограничивает радиус корреляции при продольном разнесении точек наблюдения. В данном случае декорреляция происходит не за счет разнесения точек зеркального отражения (ибо всем точкам на луче  $O'R$  соответствует одна и та же точка зеркального отражения), а за счет изменений размеров зоны Френеля, сравнимых с радиусом корреляции неровностей.

Поперечный к лучу  $O'R$  радиус корреляции  $(\Delta R)_{R_0, \varphi}$  (расстояние  $R_0$  от мнимого источника постоянно, а изменяется лишь угол  $\psi$ ) связан с угловым размером  $(\Delta\psi)_{R_0, \varphi}$  области корреляции (см. рис. 25) очевидным образом:  $(\Delta R)_{R_0, \varphi} \simeq R_0 (\Delta\psi)_{R_0, \varphi}$ , причем  $(\Delta\psi)_{R_0, \varphi}$  определяется соотношением

$$(\Delta\psi)_{R_0, \varphi} \simeq \min \left\{ \frac{l \sin^2 \psi}{z_0}; \frac{k l^2 \rho_0 \sin^3 \psi}{z_0 \cos \psi (3z_0 - 2\rho_0 \sin \psi)} \right\}. \quad (29)$$

При  $z_0 = z$  или при  $\psi \rightarrow \pi/2$  второй член в правой части этого соотношения обращается в бесконечность, так что  $(\Delta\psi)_{R_0, \varphi}$  определяется только корреляцией между точками зеркального отражения. На самом деле это является следствием обращения в нуль первого члена разложения по величине  $(\Delta\psi)_{R_0, \varphi} \ll 1$  приращений  $\Delta a^2$  и  $\Delta b^2$  при  $z_0 \simeq z$  или  $\psi \simeq \pi/2$ , так как в этих случаях зоны Френеля симметричны. Учет следующих членов разложения по  $(\Delta\psi)_{R_0, \varphi}$  приводит к тому, что в правой части (29) при  $\psi \rightarrow \pi/2$  или при  $z = z_0$  вместо второго члена стоит величина порядка

$$(\Delta\psi)_{R_0, \varphi} \simeq \sqrt{\frac{k l^2 R_0}{z_0 |z_0 - z|}} \quad (\psi = \pi/2), \quad (30a)$$

$$(\Delta\psi)_{R_0, \varphi} \simeq \sqrt{\frac{k l^2 \sin^3 \psi}{z_0 \cos^2 \psi}} \quad (z_0 = z). \quad (30b)$$

Эти оценки получены из соотношения  $\Delta b^2 \simeq l^2$ ; аналогичные соотношения [с точностью до степеней тригонометрических функций, входящих в (30b)] получаются и из  $\Delta a^2 \simeq l^2$ .

Совокупность полученных выше соотношений (14) и (25) — (30) определяет некий «корреляционный объем», позволяя оценить радиусы корреляции поля при произвольном направлении разнесения точек наблюдения. Приведенные оценки радиусов корреляции качественно совпадают с вычисленными Гулиным [137] для двумерных неровностей с квазигармонической функцией корреляции. При этом интеграл типа (5) может быть вычислен точно при произвольной величине разнесения, определяя, таким образом, корреляционную функцию поля  $\mathcal{K}(R, R')$  при любых значениях

$R - R'$ . Там же учтено влияние конечных размеров рассеивающей поверхности и приведены неравенства, при выполнении которых поверхность можно считать неограниченной шероховатой плоскостью.

Корреляционная функция поверхности  $W(\rho)$  может быть восстановлена по  $\mathcal{K}(R, R')$  по формуле (21), если только неравенства (20) не нарушаются при  $\Delta r_0 \gtrsim l$ . При этом вторые члены в правых частях формул (25), (26) или (29) должны быть значительно больше, чем первые, так, чтобы корреляция флуктуаций поля определялась лишь корреляцией между соответствующими точками зеркального отражения. Легко видеть, что это имеет место при выполнении того же неравенства (15)

$$kl \operatorname{tg} \psi \sin \psi \frac{z_0 + z}{z} \gg 1,$$

что и при азимутальном разнесении. Таким образом, во всех случаях обратная задача решается тем успешнее, чем больше параметр  $kl$  и характерные углы скольжения  $\psi$  и чем ниже находятся точки наблюдения. При этом радиусы корреляции поля при поперечном разнесении (в плоскости  $xy$  или в направлении, перпендикулярном к лучу) оказываются одного порядка:

$$\frac{(\Delta y)_{z, R_0}}{(\Delta x)_{z, y}} \simeq 1, \quad \frac{(\Delta R)_{R_0, y}}{(\Delta x)_{z, y}} \simeq \sin \psi, \quad (\Delta x)_{z, y} \simeq \frac{z_0 + z}{z_0} l. \quad (31)$$

Если  $z_0 + z \simeq z_0$  и  $\psi \simeq 1$ , декорреляция поля в поперечных направлениях происходит на расстояниях порядка радиуса корреляции поверхности, т. е. флуктуации поля как бы следуют за флуктуациями поверхности. Радиусы корреляции при продольном разнесении точек наблюдения — вдоль луча или вдоль оси  $z$  — приблизительно в  $kl$  раз больше, чем в поперечных направлениях:

$$\frac{(\Delta z)_{\psi, y}}{(\Delta x)_{z, y}} \simeq \frac{kl(z_0 + z)}{z_0} \sin^3 \psi; \quad \frac{(\Delta R_0)_{\psi, y}}{(\Delta R)_{R_0, y}} \simeq \frac{kl(z_0 + z)}{z_0} \sin \psi. \quad (32)$$

По-видимому, впервые такого сорта результаты были получены в работе [142] при изучении вопроса об определении функций корреляции поля в пространстве по известной корреляционной функции на плоскости. В дальнейшем к аналогичным результатам приходили многие авторы при решении задачи о корреляционных соотношениях в волновом поле после прохождения через хаотически неоднородный экран (см., например, [142] — [148]).

Все эти результаты качественно совпадают с общими формулами, полученными Курьяновым в работе [149], где был рассмотрен вопрос о корреляции поля, создаваемого случайными источниками, статистически однородно расположенными в плоскости  $z = 0$ . Здесь в такой роли выступают виртуальные источники, наведенные первичным полем и имеющие случайную амплитуду за

счет неровностей поверхности [см. формулы (11.1), (16.1)]. Однако в данном случае распределение источников неоднородно и фаза их не является случайной. Последнее обстоятельство специфично для теории возмущений и отсутствует, вообще говоря, в других методах.

### § 17. Флуктуации скалярного поля при скользящем распространении

В предыдущем параграфе исследовались корреляционные функции волнового поля над пологой статистически неровной поверхностью, когда источник и точка наблюдения достаточно высоко подняты ( $kz_0, kz \gg 1$ ), а характерные углы скольжения не очень малы ( $kz_{\min} \sin \psi \gg 1$ ). В случае крупномасштабных ( $kl \gg 1$ ), по сравнению с длиной волны, неровностей в полученных формулах возможен предельный переход к низко расположенным точкам наблюдения ( $z \rightarrow 0$ ); однако при этом источник по-прежнему должен находиться в волновой зоне относительно поверхности и неравенство  $kz_0 \sin \psi \gg 1$  предполагается выполненным.

Перейдем к изучению флуктуаций поля при скользящем распространении ( $\psi \rightarrow 0$ ) для тех случаев, когда источник и точка наблюдения находятся непосредственно вблизи поверхности ( $z, z_0 \rightarrow 0$ ). В этом параграфе мы ограничимся вычислением интенсивности и корреляционных функций флуктуаций скалярного волнового поля над неровной поверхностью двух типов — абсолютно мягкой и абсолютно жесткой.

**Мягкая поверхность.** Если подстилающая поверхность является абсолютно мягкой, то для флуктуирующей части поля  $u$  при  $z \rightarrow 0$  вместо формулы (15.1) можно сразу пользоваться граничным условием (5.5б):

$$u(r) = -\zeta(r) \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial z} \quad \text{при } z = 0. \quad (1)$$

Однако замена среднего поля  $\bar{U}$  в этой формуле полем над абсолютно мягкой плоскостью приводит к тому, что  $u \rightarrow 0$  при  $z_0 \rightarrow 0$ . Это означает лишь, что обращается в нуль первое приближение обычной теории возмущений, где в качестве нулевого приближения берется то поле, которое было бы при отсутствии неровностей. Поэтому, вообще говоря, необходимо учитывать члены более высокого порядка в разложении исходного граничного условия  $U|_{z=\zeta(r)} = 0$  по степеням  $\zeta(r)$  вблизи плоскости  $z = 0$  либо сразу пользоваться модифицированной теорией возмущений [1], [52], где в качестве нулевого приближения используется не  $U_0$ , а среднее (нефлуктуирующее) поле  $\bar{U}$  над неровной поверхностью. Перенормировка нулевого приближения может быть получена (см. гл. XI) и путем суммирования некоторой бесконечной последо-

вательности членов в ряде обычной теории возмущений, как это имеет место, например, при распространении волн в среде с флуктуирующим показателем преломления ([150] — [154], см. также [155], гл. V).

Представляя поле точечного источника в виде суперпозиции плоских волн и пользуясь для каждой плоской волны найденным раньше коэффициентом отражения  $V(\vartheta)$ , получаем в волновой зоне, с точностью до членов  $(kR)^{-1}$ , следующее выражение для среднего поля [ср. (1.39)]:

$$U(R) = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[ V(\vartheta) - \frac{iN(\vartheta)}{kR_1} \right], \quad (2)$$

где  $R, R_1$  — расстояния от точки наблюдения  $(r, z)$  до источника  $(0, z_0)$  и его зеркального отражения  $(0, -z_0)$  в плоскости  $z=0$ , а  $N(\vartheta)$  связано с коэффициентом отражения  $V(\vartheta)$  и его производным соотношением (см. [63])

$$N(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 V(\vartheta)}{\partial (\cos \vartheta)^2} - \cos \vartheta \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial (\cos \vartheta)} \quad (3)$$

( $\vartheta$  — угол зеркального отражения). Отсюда уже несложно получить и входящую в (1) производную от среднего поля при  $z=0$ :

$$\left. \frac{\partial \bar{U}(R)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{e^{ikR}}{R^2} \left\{ z_0 \left( ik - \frac{1}{R} \right) \left[ V(\vartheta) - 1 - \frac{iN(\vartheta)}{kR} \right] + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial (\cos \vartheta)} + \frac{iz_0}{kR^2} N(\vartheta) - \frac{ir^2}{kR^3} \frac{\partial N(\vartheta)}{\partial (\cos \vartheta)} \right\}. \quad (4)$$

В волновой зоне можно пренебречь слагаемыми порядка  $(kR)^{-1}$ , так что

$$\left. \frac{\partial \bar{U}(R)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{e^{ikR}}{R^2} \left\{ ikz_0 [V(\vartheta) - 1] + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial (\cos \vartheta)} \right\}. \quad (5)$$

Коэффициент отражения среднего поля при отражении от абсолютно мягкой поверхности имеет вид (5.11))

$$V(\vartheta) = -1 + 2\eta_\mu(\vartheta) \cos \vartheta, \quad (6)$$

где  $\eta_\mu(\vartheta)$  — эффективный поверхностный адмитанс, определяемый формулами (5.15), (5.17) — (5.19) и (5.24) гл. III. Переходя в (5) к пределу  $z_0 \rightarrow 0$  (точнее,  $kz_0 \ll \eta_\mu$ ,  $\eta_\mu$  — адмитанс для мягкой поверхности при  $\vartheta = \pi/2$ ) и подставляя в (1), получим для флуктуаций поля выражение

$$u(r) = -2\zeta(r)\eta_\mu \frac{e^{ikr}}{r^2}. \quad (7)$$

Таким образом, флуктуации поля над мягкой поверхностью при скользющем распространении и  $z_0 \rightarrow 0$ , во-первых, быстро убывают с расстоянием (по интенсивности как  $r^{-4}$ ) и, во-вторых,

оказываются величинами третьего порядка малости по параметрам теории возмущений, ибо  $\eta_\mu \approx k\sigma^2/l$  при  $kl \ll 1$  и  $\eta_\mu \approx (k\sigma)^2/\sqrt{kl}$  при  $kl \gg 1$  (см. гл. III). Среднее поле при этом точно обращается в нуль. Так как производные  $\partial^{(n)}U_0/\partial z^{(n)}$  вплоть до  $n=3$  равны нулю, то легко убедиться в том, что полученное выражение (7) является единственным членом третьего порядка, отличным от нуля.

Из (7) видно, что существует локальная связь между флуктуациями поля  $u(r)$  и флуктуациями поверхности  $\zeta(r)$ , так что решение обратной задачи в данном случае очевидно.

**Жесткая поверхность.** При распространении волны вдоль статистически неровной абсолютно жесткой поверхности связь между флуктуациями поверхности и волнового поля является нелокальной [см. (6.3)]:

$$u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{z=0} \frac{e^{ik|r-\rho|}}{|r-\rho|} \left\{ \zeta(\rho) \frac{\partial^2 \bar{U}(\rho)}{\partial z^2} - \gamma(\rho) \nabla_\rho \bar{U}(\rho) \right\} d\rho. \quad (8)$$

В случае скользящего распространения и при малой высоте коррелирующих точек ( $z_0, z \rightarrow 0$ ) первым слагаемым в подынтегральном выражении (8) можно пренебречь в меру предполагаемой малости радиуса корреляции поверхности, по сравнению с продольным размером (вдоль  $r$ ) существенной для интегрирования области \*), так что формула (8) принимает вид

$$u(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{z=0} \frac{e^{ik|r-\rho|}}{|r-\rho|} \gamma(\rho) \nabla_\rho \bar{U}(\rho) d\rho. \quad (9)$$

Так как в коэффициенте отражения  $V(\vartheta)$  имеется полюс, существенный при малых углах скольжения [см. (6.5)], в точке  $\vartheta_p$ , определяемой из уравнения

$$\cos \vartheta_p = -\eta_g(\vartheta_p),$$

то и в этом случае замена среднего поля  $\bar{U}$  полем  $U_0$  над абсолютно жесткой плоскостью, вообще говоря, недопустима. Как было показано в гл. I, наличие полюса в коэффициенте отражения при  $\vartheta \simeq \pi/2$  приводит к тому, что среднее поле имеет вид [ср. (1.46)]

$$\bar{U}(r) = \mathcal{Y}(s) U_0(r); \quad U_0(r) = 2 \frac{e^{ikr}}{r},$$

\*) Это требование непосредственно следует из соотношения

$$\frac{d^2 \bar{U}(\rho)}{dz^2} \approx \frac{ik}{\rho} \bar{U}(\rho) \quad (k\rho \gg 1).$$

где  $\mathcal{Y}$  — нормальная функция ослабления, безразмерный аргумент  $s$  которой (численное расстояние) в рассматриваемом здесь случае скользящего распространения равен

$$s = -\eta_g \sqrt{\frac{ikr}{2}}.$$

Среднее поле  $\bar{U}$  в (9) можно заменить на  $U_0$  (поле над абсолютно жесткой плоскостью) только для малых численных расстояний  $|s| \ll 1$ , когда  $\mathcal{Y}(s) \approx 1$  [см. (1.49)]. Ввиду малости эффективного импеданса  $\eta_g$  (условия малости  $\eta_g$  совпадают с условиями применимости теории возмущений) расстояние  $r$  между источником и точкой наблюдения при этом может быть довольно большим.

Относительно формулы (9) следует сделать одно существенное замечание. Заменяя  $\bar{U}$  на  $U_0$  и выполняя дифференцирование, легко видеть, что интеграл в правой части (9) логарифмически расходится при малых  $kr$ . Это связано с тем, что ряд теории возмущений расходится при малых  $kr$ , так как при каждом дифференцировании по  $z$  появляется множитель  $(kr)^{-1}$ . Поэтому допустим, что либо вблизи источника отсутствуют неровности либо поверхность при малых  $kr \lesssim 1$  вообще не освещается. При этом интеграл (9) очень слабо (логарифмически) зависит от размеров исключаемой из рассмотрения области. Ограничиваясь поэтому в подынтегральном выражении членами с  $kr \gg 1$  и распространяя интегрирование по-прежнему на всю плоскость  $z=0$  (так как  $kr \gg 1$ , то добавление уже сходящегося интеграла по неволновой зоне не влияет на окончательный результат), запишем (9) в виде

$$u(r) = -\frac{ik}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik[|r-\rho|+\rho]}}{\rho^2|r-\rho|} \rho \gamma(\rho) d\rho. \quad (10)$$

Считая неровности поверхности достаточно крупномасштабными ( $kl \gg 1$ ), оценим размеры области, существенной для интегрирования в формуле (10). В плоскости  $z=0$  введем прямоугольную систему координат с осью  $x$  вдоль вектора  $r$  и обозначим через  $l_x$  и  $l_y$  характерные линейные размеры неровностей вдоль оси  $x$  и  $y$  соответственно. При  $kl_x \gg 1$  обратным рассеянием волн можно пренебречь и считать, что в рассеянии принимает участие только область между источником и точкой наблюдения ( $0 < x < r$ ). Учитывая, что угловая ширина индикатрисы рассеяния по азимуту достаточно мала ( $\delta\varphi \simeq (kl_y)^{-1} \ll 1$ ), можно оценить поперечный размер существенной для интегрирования области  $\delta y \simeq \max \left[ \frac{r}{kl_y}; \sqrt{\frac{r}{k}} \right]$ . При выполнении неравенства  $kl_y^2 \gg kr \gg 1$  показатель экспоненты в (10) можно разложить по координате  $y$  и ограничиться квадратичными членами разложения, а в медленно изменяющихся предэкспоненциальных множителях положить  $y=0$ ,

В результате для флуктуаций волнового поля над абсолютно жесткой поверхностью при скользящем распространении получаем

$$u(r) = -\frac{ik}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^r dx \frac{\exp\left\{ikr\left[1 + \frac{y^2}{2x(r-x)}\right]\right\}}{x(r-x)} \cdot \frac{\partial_x^2(x, y)}{\partial x} \quad (11)$$

при несущественном ограничении на отношение поперечного и продольного масштабов корреляции  $kl_y^2 \gg l_x$ .

Как и в § 16, корреляционные функции при продольном (вдоль  $r$ ) и поперечном (перпендикулярно к  $r$ ) разнесении точек наблюдения удобно рассматривать отдельно.

1. Корреляционная функция при продольном разнесении ( $r_1 \parallel r_2$ ) имеет вид \*)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r_1, r_2) &= \overline{u(r_1)u^*(r_2)} = \left(\frac{k\sigma}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{r_1} dx \int_0^{r_2} dx' \times \\ &\times \frac{\exp\left\{ik\left[r_1 - r_2 + \frac{y^2 r_1}{2x(r_1-x)} - \frac{y'^2 r_2}{2x'(r_2-x')}\right]\right\}}{xx'(r_1-x)(r_2-x')} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \mathcal{W}(x-x', y-y'). \end{aligned} \quad (12)$$

При не слишком больших расстояниях между точками наблюдения  $2\Delta = r_2 - r_1$ , когда выполняются неравенства  $kl_y^2 \gg \Delta$  и  $2r = r_2 + r_1 \gg \Delta$ , определяющую роль в интеграле по  $y$  и  $y'$  в формуле (12) играет быстро осциллирующая экспонента, что позволяет от (12) перейти к формуле:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\Delta, r) &= \frac{2k\sigma^2}{\pi r} \exp[-2ik\Delta] \times \\ &\times \int_0^{r-\Delta} dx \int_0^{r+\Delta} dx' \left[xx'(r-\Delta-x)(r+\Delta+x')\right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \mathcal{W}(x-x', 0). \end{aligned} \quad (13)$$

Введем вместо  $x$  и  $x'$  новые переменные  $\xi = x' - x - \Delta$ ,  $\eta = x' + x - r$ . При учете неравенств  $r \gg l_x$ ,  $\Delta$  интегрирование по переменной  $\eta$  легко выполняется:

$$\mathcal{K}(\Delta, r) = \frac{2k\sigma^2}{\pi r^2} e^{-2ik\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ln \frac{|\Delta^2 + \xi^2|}{4r^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \mathcal{W}(\xi + \Delta, 0). \quad (14)$$

Наконец, с помощью интегрирования по частям формулу (14) можно преобразовать к следующему виду:

$$\mathcal{K}(\Delta, r) = e^{-2ik\Delta} \left[ \frac{1}{2} J(r) - \frac{2k\sigma^2}{\pi r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{W}(x, y=0)}{\partial x} \frac{dx}{x-2\Delta} \right]. \quad (15)$$

\*) В отличие от предыдущего параграфа, здесь мы рассматриваем ненормированную функцию корреляции.



Здесь  $J(r)$  — интенсивность флуктуаций:

$$J(r) = \mathcal{K}(\Delta = 0, r) = -\frac{8k\sigma^2}{\pi r^2} \int_0^\infty \frac{\partial W(x, 0)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{x}. \quad (16)$$

Из последней формулы видно, что интенсивность рассеянного поля имеет порядок  $k\sigma^2 l_x^{-1}$  и убывает с расстоянием как  $r^{-2}$ , т. е. амплитуда относительных флуктуаций в этом случае не зависит от расстояния. Корреляционная функция, как следует из (15), убывает в два раза уже при небольших разнесениях  $2\Delta \simeq l_x$ , а затем остается постоянной (однако, неравенства  $r \gg \Delta$  и  $kl_x^2 \gg \Delta$  предполагаются выполненными). При этом на интервале  $0 < 2\Delta \lesssim l_x$  поведение корреляционной функции поля существенно зависит от функционального вида  $W(x, 0)$ , в то время как при больших разнесениях  $2\mathcal{K}(\Delta, r) \simeq J(r) e^{-2ik\Delta}$  и в силу (16) остается зависимость только от радиуса корреляции  $l_x$ . Например, если

$$W(x, 0) = \frac{l}{x} \sin \frac{x}{l}, \quad (17)$$

то

$$\mathcal{K}\left(\Delta = \frac{\rho l}{2}, r\right) = \frac{1}{2} J(r) \left\{ 1 + \frac{\sin \rho}{\rho} \left( 1 - \frac{2}{\rho} \sin^2 \frac{\rho}{2} \right) \right\} e^{-ik\rho l}, \quad (18)$$

$$J(r) = 4 \frac{k\sigma^2}{r^2 l}.$$

Формула (13) позволяет решить и обратную задачу в данном случае. Действительно, пользуясь обратным преобразованием Гильберта (см., например, [156]), получаем

$$\frac{\partial W(x, 0)}{\partial x} = \frac{r^2}{2k\sigma^2 \pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta}{x-2\Delta} K(\Delta, r);$$

$$K(\Delta, r) \equiv 2\mathcal{K}(\Delta, r) e^{2ik\Delta} - J(r). \quad (19)$$

2. Для корреляции флуктуаций при азимутальном разнесении точек наблюдения на угол  $\varphi = \Delta/r$  с помощью аналогичных вычислений получаем

$$\mathcal{K}(\varphi, r) = -2 \left( \frac{k\sigma}{\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{2\pi i}{kr}} \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^r \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \times$$

$$\times \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{r-x} \frac{d\xi}{r^2 - \xi^2} [\mathfrak{F}(\xi, x) - i\mathfrak{F}(\xi, -x)]; \quad (20)$$

$$\mathfrak{F}(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left[ \exp \left\{ -\frac{ikr}{8\xi x} [2y - \varphi(r - \xi + x)]^2 \right\} + \right.$$

$$\left. + \exp \left\{ -\frac{ikr}{8\xi x} [2y - \varphi(r + \xi - x)]^2 \right\} \right]. \quad (21)$$

При этом были сделаны несущественные допущения

$$\sqrt{kr} \gg 1, \quad \frac{\Delta}{l}, \frac{l_x}{l_y}; \quad \varphi \ll 1, \quad \frac{l_y}{l_x}. \quad (22)$$

В предельном случае, когда

$$\frac{l_x}{kW(y)} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=\Delta} \ll 1, \quad \text{т. е.} \quad kl_y \frac{l_y}{l_x} \gg 1, \quad \left(\frac{\Delta}{l_y}\right)^2, \quad (23)$$

формула (20) упрощается и принимает вид

$$\mathcal{K}(\varphi, r) = \frac{1}{2} J(r) [1 + W(y = \Delta)], \quad (24)$$

где  $J(r)$  определяется по формуле (16). Как и в предыдущих случаях, корреляция флуктуаций уменьшается в два раза на расстояниях порядка радиуса корреляции неровностей. Дальнейшая декорреляция происходит по мере нарушения неравенства (23), т. е. при  $\Delta \gtrsim kl_y^2 (kl_x)^{-1/2}$ . Формула (24) одновременно дает и решение обратной задачи.

3. Рассмотрим теперь вопрос о флуктуациях поля при обратном рассеянии, когда источник и точка наблюдения совмещены в начале координат ( $r=0$ ). При этом мы будем считать, что освещается не вся поверхность, а только некая область  $S$ , конечная или бесконечная, но не прилегающая к источнику:  $R \gg l$ ,  $\lambda$  ( $R \in S$ ). Тогда для флуктуаций поля получаем из (10), полагая  $r=0$ ,

$$u(0) = -\frac{ik}{\pi} \int_S \frac{e^{2ik\rho}}{\rho^3} \rho \gamma(\rho) d\rho. \quad (25)$$

Если статистические свойства поверхности изотропны [т. е.  $W(\rho) = W(\rho)]$  и, кроме того,  $kl^2 \ll R$  ( $R \in S$ ), то для интенсивности рассеянного поля имеем:

$$\begin{aligned} J(0) &= |\overline{u(0)}|^2 = -\frac{k^2 \sigma^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S d\rho \int_S \frac{dR}{R^6} \exp\left\{2ik \frac{R\rho}{R}\right\} \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{R\rho}{R}\right)^2 \left[ \frac{d^2 W(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dW(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{R^2}{\rho} \frac{dW(\rho)}{d\rho} \right\} = \\ &= 8\mathfrak{A} \frac{k^4 \sigma^2}{\pi} \int_0^{\infty} W(\rho) \mathcal{J}_0(2k\rho) \rho d\rho; \quad \mathfrak{A} \equiv \int_S \frac{ds}{R^4}. \end{aligned} \quad (26)$$

В том случае, когда освещенная область имеет вид сектора с углом раствора  $2\alpha$ , ограниченного окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 26), то

$$\mathfrak{A} = \frac{S}{(R_1 R_2)^2} = \frac{4R_0 \alpha d}{(R_0^2 - d^2)^2}, \quad (27)$$

где  $S$  — площадь освещенного участка поверхности  $2d = R_2 - R_1$ ,  $R_0 = (R_2 + R_1)/2$ . Из формулы (26) следует, что при  $kl \ll 1$  интенсивность рассеянного назад поля пропорциональна  $(kl)^2$  и достигает максимума при  $kl \simeq 1$ . Например, в случае гауссовой корреляции  $W(\rho) = \exp(-\rho^2/l^2)$ , из (26) получаем

$$J(0) = \frac{4\mathfrak{A}(k\sigma)^2(kl)^2}{\pi} e^{-(kl)^2}. \quad (28)$$

В другом предельном случае двумерных неровностей и узких диаграмм направленности излучателя ( $\alpha \ll 1$ ), считая для простоты, что образующие поверхности перпендикулярны к оси диаграммы, получаем

$$\begin{aligned} J(0) &= \frac{k\sigma^2}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx dx'}{(xx')^{3/2}} e^{2ik(x-x')} \frac{d^2}{dx dx'} W(x' - x) = \\ &= 4k^3\sigma^2 \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \tilde{W}(2k); \quad ((kR)^{-1/2} \ll \alpha \ll 1). \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что в этом случае интенсивность рассеянного назад поля не зависит от угла раствора  $\alpha$  освещенного сектора. Связано это с тем, что угловая ширина области, существенной для отражения назад (от двумерных неровностей с образующими, перпендикулярными к направлению облучения!), имеет порядок  $(kR)^{-1/2}$ , и значительно меньше, чем угловая ширина освещенной области. Поэтому при изменении угла  $\alpha$  в указанных выше пределах ( $(kR)^{-1/2} \ll \alpha \ll 1$ ) изменяется лишь интенсивность поля, рассеянного в стороны, интенсивность же обратно отраженного сигнала остается постоянной. При  $kl \ll 1$  интенсивность  $\sim kl$  и по-прежнему максимальна при  $kl \simeq 1$ . Для гауссовой корреляции, в частности, получаем

$$J(0) = \frac{2(k\sigma)^2 kl}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) e^{-(kl)^2}. \quad (30)$$

Исходя из (9) легко получить корреляционные функции рассеянного назад поля. Так, в случае изотропных шероховатостей при  $kl^2 \ll R$  и  $k\Delta^3 \ll R^2$  ( $R \equiv S$ ) получаем для поперечной корреляции (см. рис. 26)

$$\mathcal{K}(\Delta) = \frac{J(0)}{\mathfrak{A}} \int_S \frac{ds}{r^4} \exp ik \left\{ \frac{r\Delta}{r} - \frac{1}{2r} \left[ \Delta^2 - \left( \frac{r\Delta}{r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (31)$$

Таким образом, корреляция флуктуаций поля в случае обратного рассеяния не зависит от корреляционных свойств поверхности и определяется только параметром  $k\Delta$ . В частности, если  $\alpha = \pi/2$ ,  $R_2 = \infty$  и  $k\Delta^2 \ll R$ , то  $\mathcal{K}(\Delta) \sim \mathcal{S}_0(k\Delta)$ .

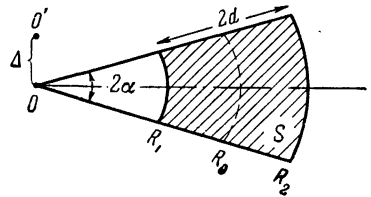


Рис. 26.

### § 18. Флуктуации поля вертикального диполя над колеблющейся поверхностью

В заключение этой главы покажем, в каком смысле полученные в предыдущем параграфе результаты для флуктуаций скалярного поля при скользящем распространении применимы к рассеянию электромагнитных волн на идеально проводящей статистически неровной колеблющейся поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ . Как и раньше, будем предполагать, что изменение формы поверхности со временем происходит достаточно медленно, так что при расчете рассеянного на такой поверхности поля можно пользоваться квазистатическим приближением. Если источником является вертикальный диполь с моментом  $p_0$ , то при скользящем распространении и малых численных расстояниях, когда среднее поле можно заменить на поле над идеально проводящей плоскостью, из (7.6) и (7.7) получаем

$$e_z(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2 p_0}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(\rho + |r-\mathbf{e}|)}}{\rho^2 |r-\rho|} \rho \gamma(\rho, t) d\rho; \quad (1a)$$

$$e_{\perp}(\mathbf{r}, t) = -2k^2 p_0 \gamma(\mathbf{r}, t) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1б)$$

Заметим, что (1a) с точностью до множителя  $k^2 p_0$  совпадает с формулой (17.10) для флуктуаций скалярного поля над абсолютно жесткой поверхностью. Поэтому для корреляционных функций и интенсивности флуктуации вертикальной составляющей поля справедливы полученные выше формулы с заменой  $u$  на  $e_z$ . Формула (1б) не имеет аналога в теории рассеяния скалярных волн и описывает деполяризацию первичного поля вертикального диполя при рассеянии на неровной поверхности. В силу локальной связи (1б) между флуктуациями горизонтальной компоненты поля и наклонами поверхности, корреляция флуктуаций горизонтальных компонент поля пропорциональна корреляции углов наклона поверхности.

Пространственно-временную корреляцию флуктуаций вертикальной составляющей поля  $e_z(\mathbf{r}, t)$  будем описывать с помощью следующей функции:

$$K(\rho, \tau) = \overline{2e_z^*(\mathbf{r} - \frac{\rho}{2}, t) e_z(\mathbf{r} + \frac{\rho}{2}, t + \tau) \exp\left[i(\omega_0 \tau - k \frac{\rho r}{r})\right]} - \overline{e_z^*(\mathbf{r}, t) e_z(\mathbf{r}, t + \tau)} e^{i\omega_0 \tau} \quad (2)$$

[ср. с определением (4.13) медленной корреляционной функции]. Ограничиваясь для простоты двумерными (цилиндрическими) шероховатостями с образующими, параллельными оси  $y$ , получаем для продольной корреляционной функции поля  $K(x, \tau)$  — вдоль

вектора  $r$ , который считается направленным по оси  $x$ , — выражение, аналогичное формуле (17.15) для скалярных волн

$$K(x, \tau) = -\frac{4k^5 \sigma^2}{\pi r^2} \rho_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - x} \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Пространственно-временная корреляционная функция  $W(\xi, \tau)$  свободных колебаний поверхности может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  (12.31)

$$W(\xi, \tau) = \frac{\xi(x, t) \xi(x + \xi, t + \tau)}{\sigma^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(q) e^{i[q\xi - \Omega(q)\tau]} dq, \quad (4)$$

где  $\tilde{W}(q)$  — пространственный энергетический спектр колебаний, а  $\Omega(q)$  — закон дисперсии поверхностных волн. Подставляя (4) в (3), получаем связь корреляционной функции флуктуаций поля  $K(x, \tau)$  со спектром колебаний поверхности

$$K(x, \tau) = \frac{4k^5 \sigma^2 \rho_0^2}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(q) e^{i[qx - \Omega(q)\tau]} |q| dq. \quad (5)$$

Таким образом, пространственная  $K(x, 0)$  и временная  $K(0, \tau)$  корреляционные функции флуктуаций вертикальной составляющей поля не являются независимыми, ибо из (5) вытекают соотношения их связывающие:

$$\begin{aligned} K(0, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}_1(x, \tau) K(x, 0) dx; \\ K(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}_2(x, \tau) K(0, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i[qx + \Omega(q)\tau]} dq; \\ \mathfrak{D}_2(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i[q(\Omega)x + \Omega\tau]} d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $q(\Omega)$  является решением уравнения  $\Omega = \Omega(q)$ .

В качестве примера приведенных выше общих соотношений рассмотрим рассеяние на свободных колебаниях поверхности жидкости. Закон дисперсии для гравитационных волн малой амплитуды имеет вид [см. (12.10)]:

$$\Omega^2 = gq \operatorname{th} qd, \quad (8)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $d$  — глубина бассейна. Ядра  $\mathfrak{D}_1$  и  $\mathfrak{D}_2$  интегральных преобразований (6) выражаются через

элементарные функции в двух предельных случаях — мелкого ( $qd \ll 1$ ) и глубокого бассейна ( $qd \gg 1$ ):

$$\mathfrak{D}_1(x, \tau) = \begin{cases} \delta(x + \tau \sqrt{gd}) & \text{при } qd \ll 1, \\ \frac{\tau}{x} \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \left\{ \left[ C\left(\frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{g}{x}}\right) - \frac{1}{2} \right] \cos \frac{g\tau^2}{4x} + \right. & (9a) \\ \left. + \left[ S\left(\frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{g}{x}}\right) - \frac{1}{2} \right] \sin \frac{g\tau^2}{4x} \right\} & \text{при } qd \gg 1; \end{cases} \quad (9b)$$

$$\mathfrak{D}_2(x, \tau) = \begin{cases} \delta\left(\frac{x}{\sqrt{gd}} + \tau\right) & \text{при } qd \ll 1, \\ -\frac{x}{\tau} \mathfrak{D}_1(x, \tau) & \text{при } qd \gg 1, \end{cases} \quad (10a)$$

$$(10b)$$

где  $C(x)$  и  $S(x)$  — интегралы Френеля:

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt; \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt.$$

Отметим, что корреляционные функции поля  $K(0, \tau)$  и  $K(x, 0)$  над мелким бассейном получаются, в силу (9a) и (10a), одна из другой путем изменения масштаба аргумента

$$K(0, \tau) = K(x, 0) \Big|_{x=-\tau\sqrt{gd}}; \quad K(x, 0) = K(0, \tau) \Big|_{\tau=-\frac{x}{\sqrt{gd}}}. \quad (11)$$

Легко видеть, что это является следствием линейности закона дисперсии  $\Omega = q\sqrt{gd}$  при  $qd \ll 1$ , что в свою очередь приводит к движению поверхности как целого со скоростью  $v = \sqrt{gd}$ , и, следовательно, к переносу флуктуаций поля. Соотношения (11) и являются выражением этого факта — временные флуктуации поля связаны с движением как целого (со скоростью  $v = \sqrt{gd}$ ) пространственных неоднородностей поля.

Формулы (4), (5) позволяют решить и обратную задачу — восстановить пространственно-временную корреляционную функцию поверхности  $W(x, \tau)$ :

$$W(x, \tau) = \frac{r^2}{8\pi k^5 \sigma^2 \rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[q(\Omega)x - \Omega\tau]} \frac{d\Omega}{|q(\Omega)|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\tau'} K(0, \tau') d\tau'. \quad (12)$$

Таким образом, имеется принципиальная возможность определения пространственно-временных параметров случайных колебаний свободной поверхности по корреляционной функции только временных флуктуаций поля  $K(0, \tau)$  в одной и той же точке пространства.

РАССЕЯНИЕ НА КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕРОВНОСТЯХ

§ 19. Метод касательной плоскости

До сих пор при исследовании поля, рассеянного на статистически неровной поверхности, мы в той или иной форме предполагали, что среднеквадратичная высота неровностей мала ( $k\sigma \sin \psi \ll 1$ , а при скользящем распространении  $\sigma \ll \sqrt{\lambda l}$ ) и поверхность достаточно пологая ( $\gamma^2 = (\nabla \zeta)^2 \ll 1$ ). Выполнение этих требований позволяет применить метод возмущений при решении рассматриваемой задачи.

В этой главе мы рассмотрим в каком-то смысле другой предельный случай, когда характерные размеры неровностей на поверхности значительно превышают длину волны дифрагирующего поля.

1. Следуя работам [44] – [48] (см. также [157]), предположим, что рассеивающая поверхность  $S$  настолько гладкая, что в каждой ее точке волновое поле

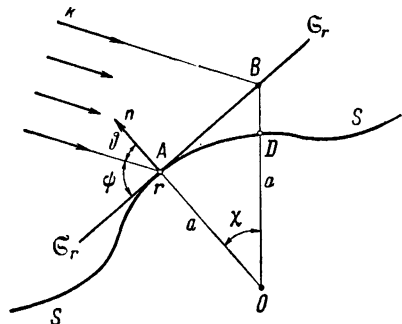


Рис. 27.

(для простоты—скалярное) можно представить в виде суммы падающего поля  $U_0(r)$  ( $r \in S$ ) — поле заданных источников в неограниченном пространстве — и отраженного по законам геометрической оптики от плоскости  $E_r$ , касательной к поверхности  $S$  в точке  $r$  (рис. 27):

$$U(r) = (1 + V) U_0(r), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial U(r)}{\partial n} = (1 - V) \frac{\partial U_0(r)}{\partial n}. \tag{1б}$$

Здесь  $n$  — нормаль к поверхности  $S$  в точке  $r$ ,  $V$  — коэффициент отражения, зависящий от физических параметров сред, разделяемых поверхностью  $S$ . Для акустических волн такими параметрами являются плотность среды и фазовая скорость звука в ней. Введение в формулы (1) коэффициента отражения возможно, если поверхность  $S$  находится в волновой зоне относительно источника

и если можно считать, что поле  $U_0(\mathbf{r})$  в каждой точке  $\mathbf{r} \in S$  является плоской волной с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направление которого, вообще говоря, различно в разных точках  $\mathbf{r}$  поверхности  $S$ . Поэтому формулы (1а, б) могут быть записаны в виде \*)

$$U(\mathbf{r}) = [1 + V(\vartheta)] U_0(\mathbf{r}), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} = i(\mathbf{k}\mathbf{n}) [1 - V(\vartheta)] U_0(\mathbf{r}), \quad (2б)$$

где  $\vartheta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  (см. рис. 27) к поверхности в точке  $\mathbf{r} \in S$  (локальный угол падения).

Заметим, что такой способ задания поля на поверхности во многом аналогичен известному методу Кирхгофа [158], который широко используется для решения задачи дифракции на плоских экранах (см., например, [138], [159]). Действительно, в последнем случае поле в области, дополняющей экран до полной плоскости, считается таким же, как и в отсутствие экрана, а поле на самом экране принимается таким же, как и на бесконечной плоскости, т. е. не учитываются дифракционные эффекты, искажающие поле вблизи края экрана.

Определив по формулам (2) на всей поверхности  $S$  поле и его производную, мы с помощью формулы Грина (1.4) можем найти поле в любой точке пространства. Тем самым решение задачи о дифракции на гладкой крупномасштабной поверхности сводится к вычислению соответствующих поверхностных интегралов типа (1.8) или (1.9) с  $U(\mathbf{r})$  и  $\partial U(\mathbf{r})/\partial n$  из (1) или (2), и нам остается только выяснить ограничения, при которых полученные таким путем результаты оказываются справедливыми.

2. Прежде всего заметим, следуя работе [47], что отражение волны в каждой точке поверхности происходит так же, как и от бесконечной касательной плоскости, если на касательной плоскости  $\mathcal{S}_r$  можно выделить площадку с линейными размерами, большими по сравнению с длиной волны, но не отступающую заметно на краях от неровной поверхности  $S$ . Пусть точка  $O$  является центром кривизны поверхности  $S$  в точке  $\mathbf{r}$  (см. рис. 27). Тогда, с одной стороны, мы требуем, чтобы  $AB \gg \frac{\lambda}{2\pi \sin \psi}$ , а с другой,  $BD \ll \frac{\lambda}{2\pi} \sin \psi$ . Здесь мы учли зависящий от локального угла скольжения множитель  $\sin \psi$ , ибо на самом деле длину волны

---

\*) Действительно, поле  $U$  и его нормальную производную  $\frac{\partial U}{\partial n}$  при отражении от касательной плоскости можно выразить через  $V(\vartheta)$ ,  $U_0$  и  $\frac{\partial U_0}{\partial n}$  в виде интегралов по  $d\vartheta$  типа (1.38), которые при сделанных выше предположениях упрощаются и сводятся к (2а) и (2б) соответственно.



следует сравнивать с проекцией  $AB$  на плоскость, нормальную к вектору  $k$ , а отрезок  $BD$  должен быть мал по сравнению с проекцией длины волны на направление нормали  $n$  к поверхности. В меру малости угла  $\chi$  имеем  $BD \approx AB \chi \approx (AB)^2/a$ , где  $a$  — радиус кривизны поверхности в точке  $r$ , так что второе из приведенных неравенств эквивалентно требованию  $(AB)^2/a \ll \frac{\lambda}{2\pi} \sin \psi$ . Подставляя теперь  $AB$  из первого неравенства, имеем окончательно

$$\sin \psi \gg \frac{1}{\sqrt{ka}} \quad \left( k = \frac{2\pi}{\lambda} \right). \quad (3)$$

Таким образом, для того чтобы отражение от неровной поверхности можно было рассматривать в приближении касательной плоскости, необходимо, чтобы во всяком случае локальные радиусы кривизны поверхности превышали длину волны. Полученное нами оценочным путем неравенство (3) возникает при строгом решении задачи дифракции на шаре с радиусом  $a$  (см. [73], [160] — [161]), как условие применимости приближения физической оптики в нетеневой области (см. также [1], § 34).

Следующее существенное ограничение используемого метода связано с тем, что в формулах (2) не учтены возможные затенения поверхности и многократные отражения. В последнем случае поле в данной точке поверхности нельзя представить в виде суперпозиции прямой и отраженной волн в этой же точке, а следует учитывать волны, пришедшие в эту точку после отражения от других участков поверхности. Если для регулярных (детерминированных) поверхностей это обстоятельство может быть учтено с помощью довольно элементарных геометрических построений (особенно просто это сделать для простейших периодических поверхностей — синусоида, пила и т. д. [162] — [163]), то при статистическом подходе к данной задаче возникают довольно серьезные математические трудности. Что же касается учета возможных затенений поверхности, то в некоторых предельных случаях этот вопрос допускает достаточно полное исследование с помощью методов теории случайных функций (см. §§ 22 и 23 этой главы). Следует также отметить, что если при использовании метода возмущений мы в состоянии достаточно строго указать границы применимости полученных результатов для широкого класса частных случаев (скользящее и крутое распространение, ближняя и дальняя зона и т. д.) и даже более того — можем вычислить следующие члены разложения по известным малым параметрам, то для метода касательной плоскости мы в принципе лишены такой возможности. Дело заключается в том, что методом касательной плоскости, так же как и обычным методом Кирхгофа, решается не краевая задача, каковой является задача дифракции, а более простая и принципиально

отличная от нее — задача с заданным [как бы заранее известным из формул (2)] разрывом поля и его нормальной производной на поверхности. По этой причине полученные таким путем результаты нельзя рассматривать как разложение точного решения в ряд по какому-либо малому параметру, например, по отношению длины волны  $\lambda$  к характерным линейным размерам тела, на котором происходит дифракция [в нашем случае таким малым параметром является  $(ka)^{-1/2}$ ].

Действительно, сравнение решения, полученное методом Кирхгофа, с точным решением задачи дифракции на простейших телах — плоском экране, цилиндре, шаре и т. д. (см., например, [71], [164]) — показывает, что хотя метод Кирхгофа при малых  $\lambda$  и дает значение поля, весьма близкое к точному решению почти всюду в волновой зоне, за исключением области глубокой тени, однако, это совпадение только численное (см., например, [165]). Функциональные же зависимости точного и приближенного решения от длины волны или, например, от координаты точки наблюдения не имеют ничего общего. Поэтому, собственно, и невозможно в общем случае достаточно строго указать границы применимости полученных методом Кирхгофа формул. Более подробное и последовательное обсуждение этого вопроса можно найти в фундаментальной монографии [166].

С формальной точки зрения к методу Кирхгофа (так в дальнейшем для краткости мы будем называть метод касательной плоскости) можно прийти, исходя из точного интегрального уравнения (22.2) для поля на поверхности (см. [167], [168]), если пренебречь вкладом интегрального члена в значение поля в каждой точке поверхности. Тем самым при определении поля на поверхности мы пренебрегаем переизлучением и дифракционными поправками, малыми в меру малости  $(ak)^{-1/2} \ll 1$ .

3. Пусть, как и раньше, рассеивающая поверхность  $S$  является в среднем плоской, и отклонения ее от этой плоскости  $S_0$ , задающейся уравнением  $z=0$ , описываются случайной функцией  $z = \zeta(r)$ . Предположим, что все источники поля находятся на конечном расстоянии от поверхности  $S$ .

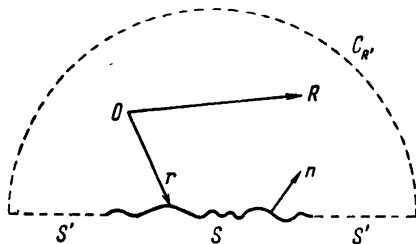


Рис. 28.

Тогда, следуя работе [169], поверхность  $S$  можно дополнить частью плоскости  $S'$  и полусферой  $C_{R'}$  до замкнутой поверхности, вне которой источников поля нет (рис. 28). Поле в произвольной точке наблюдения  $R$ , находящейся внутри построенной нами замкнутой поверхности, связано со значением поля и его

нормальной производной на поверхности формулой Грина (1.4):

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{4\pi} \int_{S+S'+C_{R'}} \left\{ U(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r}. \quad (4)$$

С другой стороны, так как все источники поля находятся внутри поверхности  $S + S' + C_{R'}$ , то

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S+S'+C_{R'}} \left\{ U_0(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial n} U_0(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} = 0. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4), приходим к формуле

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (U - U_0) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial n} (U - U_0) \right\} d\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'+C_{R'}} \left\{ (U - U_0) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial n} (U - U_0) \right\} d\mathbf{r}. \quad (6)$$

В приближении Кирхгофа поле  $U(\mathbf{r})$  на поверхности  $S'$ , дополняющей рассеивающую поверхность  $S$  до полной плоскости, можно считать совпадающим с невозмущенным полем  $U_0(\mathbf{r})$ . Это, как указывалось выше, является основным допущением при использовании метода Кирхгофа в задаче дифракции на плоских экранах. В нашем случае роль такого экрана играет хотя и не плоская, но достаточно гладкая (здесь имеется в виду неравенство  $(ka)^{-1/2} \ll 1$ ) поверхность  $S$ . Если принять это допущение, то в формуле (6) интеграл по поверхности  $S'$  равен нулю, так как  $U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r})$  и  $\frac{\partial}{\partial n} [U(\mathbf{r}) - U_0(\mathbf{r})] = 0$  при  $\mathbf{r} \in S'$ . Что же касается интеграла по полусфере  $C_{R'}$ , то при достаточно больших радиусах полусферы этим интегралом можно пренебречь, если принять во внимание условие излучения. Последнее заключается в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности — на бесконечности поле должно иметь вид расходящейся сферической волны:

$$U(\mathbf{r}) \approx U_0(\mathbf{r}) \approx \frac{e^{ikR'}}{R'} \text{ при } \mathbf{R}' \in C_{R'}$$

Поэтому даже при сколь угодно малом поглощении в среде, которое приводит к появлению у волнового числа положительной мнимой части ( $k = k' + ik''$ ,  $k'' > 0$ ), подынтегральная функция в (6) при  $R' \rightarrow \infty$  ведет себя как  $(R')^{-2} e^{ik'R' - k''R'}$  и интеграл по

бесконечно удаленной полусфере обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$U(R) = U_0(R) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (U - U_0) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|R-r|}}{|R-r|} - \frac{e^{ik|R-r|}}{|R-r|} \frac{\partial}{\partial n} (U - U_0) \right\} dr, \quad (7)$$

подставляя в которую значение поля и его производной на поверхности из (1), получаем окончательно

$$U(R) = U_0(R) + \frac{1}{4\pi} \int_S V(r) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{ik|R-r|}}{|R-r|} U_0(r) \right\} dr. \quad (8)$$

Если источник является точечным, то эту формулу можно записать в виде

$$U(R) = U_0(R) + \frac{1}{4\pi} \int_S V(r) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{e^{ik(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)}}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \right] dr, \quad (9)$$

где  $\tilde{R}_1$  и  $\tilde{R}_2$  — расстояния от текущей точки поверхности  $S$ , по которой производится интегрирование, до источника и точки наблюдения соответственно (рис. 29).

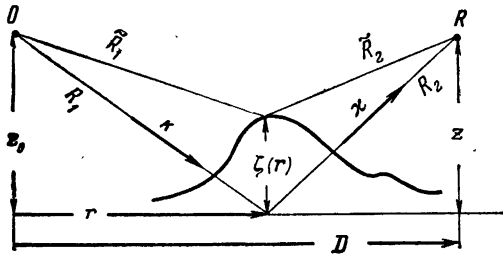


Рис. 29.

4. В дальнейшем мы всегда будем считать, что источник  $O$  и точка наблюдения  $R$  (рис. 29) находятся в волновой зоне относительно поверхности  $S$ , т. е.  $k\tilde{R}_1, k\tilde{R}_2 \gg 1$ . При выполнении этих неравенств подынтегральное выражение в (9) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp [ik(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)]}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \approx -i(n\tilde{q}) \frac{\exp [ik(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)]}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2}, \quad (10)$$

где  $\tilde{q} = -k\nabla_s \cdot (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)$ .

Расстояния  $\tilde{R}_1$  и  $\tilde{R}_2$  от текущей точки на поверхности  $S$  до источника и точки наблюдения удобно выразить через вектор  $r$ , лежащий в плоскости  $z=0$ , и значение высоты поверхности в этой точке  $\zeta(r)$  (см. рис. 29):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \sqrt{r^2 + (z_0 - \zeta)^2} \approx (R_1 + \alpha_z \zeta) \left[ 1 + O\left(\frac{\zeta^2}{R_1^2}\right) \right], \\ \tilde{R}_2 &= \sqrt{(D-r)^2 + (z - \zeta)^2} \approx (R_2 - \beta_z \zeta) \left[ 1 + O\left(\frac{\zeta^2}{R_2^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $R_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$  и  $R_2 = \sqrt{(D-r)^2 + z^2}$  — расстояния от источника и точки наблюдения до текущей точки  $r$  на плоскости  $z=0$ , а  $\alpha_z = -\frac{z_0}{R_1}$ ,  $\beta_z = \frac{z}{R_2}$  являются  $z$ -компонентами векторов

$$\alpha = \nabla_r R_1, \quad \beta = -\nabla_r R_2.$$

Если среднеквадратичная высота неровностей значительно меньше, чем продольный размер зоны Френеля на расстояниях  $R_1$  и  $R_2$  от источника и приемника соответственно, т. е.

$$\sin^2 \psi \frac{k\sigma^2}{R_1} \ll 1, \quad \sin^2 \chi \frac{k\sigma^2}{R_2} \ll 1$$

( $\psi$  и  $\chi$  — характерные углы скольжения падающей и отраженной волн соответственно:  $\cos \psi = \alpha_{\perp}$ ,  $\cos \chi = \beta_{\perp}$ ), то квадратичные по  $\zeta$  члены в показателе экспоненты в (10) могут быть отброшены. В дальнейшем при оценках для краткости мы будем полагать  $R_1 \simeq R_2 \simeq R$ ,  $\psi \simeq \chi$ , так что предыдущие неравенства можно объединить в одно:

$$\frac{k\sigma^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1. \quad (12)$$

В предэкспоненциальных членах в меру малости  $\sin \psi \frac{\sigma}{R} \ll 1$  можно пренебречь и линейными по  $\zeta$  слагаемыми, так что вместо (9) имеем

$$U(R) = \frac{1}{4\pi i} \int_{S_0} \frac{V(r)}{R_1 R_2} \exp \{i[k(R_1 + R_2) - q_z \zeta(r)]\} (nq) \frac{dr}{n_z}. \quad (13)$$

Здесь и в дальнейшем под  $U$  подразумевается только рассеянное поле. В формуле (13) мы перешли от интегрирования по поверхности  $S$  к интегрированию по ее проекции  $S_0$  на плоскость  $z=0$ , воспользовавшись соотношением

$$dS = \frac{dx dy}{n_z} \quad (14)$$

и вектор  $\tilde{q}$  заменили его приближенным значением

$$\tilde{q} \simeq q = -k\nabla(R_1 + R_2) = k(\beta - \alpha) = \kappa - k,$$

где  $k$  и  $\kappa$  — волновые векторы, направленные по нормали к фазовому фронту падающей и отраженной волн соответственно (см. рис. 29). Если линейные размеры  $L$  поверхности  $S$  значительно меньше соответствующих размеров зоны Френеля, т. е. для того случая, когда источник и приемник находятся в зоне Фраунгофера относительно поверхности,

$$\frac{kL^2}{R} \sin^2 \psi \ll 1, \quad (15)$$

показатель экспоненты в (13) можно разложить по степеням  $r$ , ограничившись линейными членами

$$U(\mathbf{R}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{S_0} V(\mathbf{r}) \exp\{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]\} (n\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{r}}{n_z}, \quad (16)$$

где  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — расстояния от произвольной точки плоскости  $\mathbf{r} \in S_0$  до источника и точки наблюдения соответственно, а вектор  $\mathbf{q}$  считается постоянным и не зависит от переменной интегрирования.

Единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  связан с производными от функции  $\zeta(\mathbf{r})$  соотношением

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_z - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})}{\sqrt{1 + \gamma^2(\mathbf{r})}}, \quad (17)$$

где  $\boldsymbol{\gamma} = \nabla_{\mathbf{r}} \zeta(\mathbf{r})$ , а  $\mathbf{e}_z$  — орт вдоль оси  $z$ . Так что для поля, рассеянного в направлении  $\boldsymbol{\kappa}$ , в зоне Фраунгофера (при облучении поверхности плоской волной  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ ) имеем окончательно

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{S_0} \exp\{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]\} V(\boldsymbol{\gamma}) (q_z - q\boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{r}. \quad (18)$$

## § 20. Индикатриса рассеяния скалярного поля

Приступим теперь к изучению статистических характеристик поля, рассеянного на ограниченном участке статистически неровной поверхности. Исследование начнем с простейшего случая Фраунгоферовой дифракции скалярного поля на поверхности с коэффициентом отражения  $V = \pm 1$  (абсолютно жесткая или абсолютно мягкая поверхность). Задача сводится к исследованию статистических характеристик интеграла (19.18):

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim \int_{S_0} \exp\{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]\} (q_z - q\boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем, где это не вызывает недоразумений, мы в промежуточных формулах опускаем постоянный множитель

$$\frac{V e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}}.$$

Среднее поле. Прежде всего вычислим когерентную составляющую рассеянного поля. Заметим, что подынтегральное выражение в (1) зависит от значения случайной функции  $\zeta(\mathbf{r})$  и ее производной  $\boldsymbol{\gamma} = \nabla \zeta$ , взятых в одной и той же точке  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  — переменная интегрирования). При усреднении интеграла (1) следует учесть, что для стационарной (в нашем случае — для пространственно однородной) случайной функции  $\zeta(\mathbf{r})$  и  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}')$  при

$r = r'$  являются независимыми случайными величинами. Обозначая статистическое усреднение, как и раньше, чертой и принимая во внимание, что  $\bar{\mathbf{y}} = 0$ , имеем

$$\bar{U}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim q_z \int_{S_0} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}_z \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{r})} d\mathbf{r}. \quad (2)$$

Среднее значение экспоненты в (2) является одномерной характеристической функцией  $f_1(q_z)$ , которая для статистически однородной поверхности не зависит от координаты  $\mathbf{r}$ . Поэтому

$$\bar{U}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = U_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) f_1(q_z), \quad (3)$$

где через  $U_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})$  обозначено поле, отраженное от участка  $S_0$  плоскости  $z = 0$ :

$$U_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{V e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} q_z \int_{S_0} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Легко видеть, что, пренебрегая краевым эффектом (дифракция на краях  $S_0$ ), получаем

$$U_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{V e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{i R_{10} R_{20}} q_z \pi \delta(\mathbf{k}_\perp - \boldsymbol{\kappa}_\perp), \quad (5)$$

где  $\mathbf{k}_\perp$  и  $\boldsymbol{\kappa}_\perp$  — проекции векторов  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$  на плоскость  $z = 0$ . Так что среднее поле (3) отлично от нуля лишь в направлении зеркального отражения от плоскости  $z = 0$ , а эффективный коэффициент отражения  $V_s(\psi)$  равен характеристической функции поверхности  $f_1(2k \cos \psi)$ , где  $\psi$  — угол скольжения ( $k_z = -k \sin \psi$ ,  $k_x = k \cos \psi$ ,  $k_y = 0$ ). Впервые этот интересный результат был получен Исаковичем [48], [170], а затем в той или иной форме приводился в целом ряде теоретических и экспериментальных работ [171] — [176]. Для поверхности с нормальным распределением ординат имеем, следовательно,

$$V_s(\psi) = \exp(-2k^2 \sigma^2 \sin^2 \psi). \quad (6)$$

Таким образом, коэффициент отражения когерентной составляющей поля экспоненциально убывает при увеличении характерной высоты неровностей.

Этому результату можно дать простое геометрическое истолкование. Действительно, разность фаз  $\delta\varphi$  между волнами I и II, приходящими от двух участков поверхности (рис. 30), связана с разностью их высот  $\Delta$  и углом скольжения  $\psi$  соотношением  $\delta\varphi \simeq 2k\Delta \sin \psi$ . При увеличении дисперсии высот  $\sigma$  возрастают, вообще говоря, и характерные значения разности высот  $\Delta$  между точками I и 2, что приводит к увеличению разности фаз между отраженными волнами. С другой стороны, положение точек I и 2 является

случайным и, следовательно,  $\delta\varphi$  — также случайная величина. Поэтому при больших  $\delta\varphi$  волны, приходящие с разных участков поверхности, являются некогерентными, что и приводит к резкому уменьшению когерентной составляющей в отраженном поле.

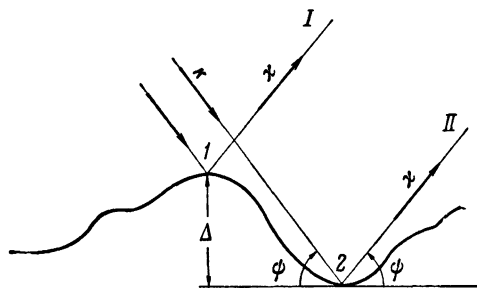


Рис. 30.

Однако, если в силу каких-либо причин положение участков поверхности, наиболее сильно отражающих в зеркальном направлении, не является независимым и разность их высот  $\Delta$  слабо флуктуирует, то лучи  $I$  и  $II$  могут оставаться когерентными даже

при большой дисперсии высот  $\sigma$ . Примером может служить поверхность с синусоидальным профилем, но со случайной фазой (подробнее см. [1], § 52). Распределение высот в этом случае дается формулой

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{\xi_m^2 - \xi^2}} & \text{при } |\xi| < \xi_m, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \xi_m, \end{cases} \quad (7)$$

и коэффициент отражения оказывается равным:

$$V_0(\psi) = f_1(2k \sin \psi) = \int_{-\xi_m}^{\xi_m} e^{2ik\xi \sin \psi} w(\xi) d\xi = \mathcal{J}_0(2k\xi_m \sin \psi). \quad (8)$$

Осциллирующая зависимость коэффициента отражения  $V_0$  от дисперсии высоты  $\sigma^2 = \xi_m^2/2$  связана с тем, что согласно (7) вероятность нахождения рассеивающего участка поверхности вблизи вершины ( $\xi \simeq \xi_m$ ) или подошвы ( $\xi \simeq -\xi_m$ ) (рис. 31) значительно выше, чем в промежуточной области (плотность распределения  $w(\xi)$  имеет корневую особенность вблизи этих точек). Поэтому для каждой реализации такой синусоиды (одна реализация от другой отличается только начальной фазой), лучи, отраженные в точках 1 и 2, остаются почти когерентными, так что в результате их интерференции возникает осциллирующая зависимость (8). Это явление, по существу, очень близко к осцилляциям

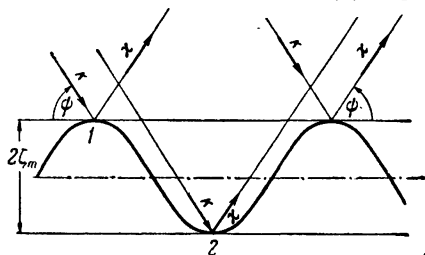


Рис. 31.



коэффициента отражения от прозрачной пластинки толщиной  $2\xi_m$  (см. рис. 31).

Действительно, разность фаз между волной, отраженной от верхней и от нижней поверхностей такой пластинки, равна  $4k\xi_m \sin \psi$ , так что амплитуда суммарного отраженного поля, являющегося результатом интерференции этих волн, осциллирует при изменении толщины пластинки на величину  $\Delta\xi_m = \frac{\pi}{2k \sin \psi}$ .

Отметим, наконец, что в случае низких неровностей, когда  $e^{-iq_z \xi}$  можно разложить в ряд по степеням параметра  $q_z \xi$ , мы приходим к следующему выражению для коэффициента отражения:

$$V_o(\psi) = e^{-iq_z \xi(r)} \approx 1 - \frac{1}{2} q_z^2 \overline{\xi^2(r)} + \dots = 1 - 2(k\sigma \sin \psi)^2 + \dots \quad (9)$$

Как и следовало ожидать, эта формула совпадает с результатом теории возмущения при  $kl \gg 1$  и  $\psi \gg 1/\sqrt{kl}$  [см. формулы (5.19) и (6.86)], т. е. для достаточно гладких неровностей.

Средняя интенсивность. Значительно больший интерес представляет распределение интенсивности рассеянного поля по направлениям. Так как интенсивность пропорциональна квадрату поля, необходимо исследовать следующий интеграл:

$$|U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 \sim \iint_{S_o} \iint_{S_o} e^{i(q_z r - r') + q_z [\xi(r) - \xi(r')]} [q_z - q\gamma(r)] [q_z - q\gamma(r')] dr dr'. \quad (10)$$

Ввиду того, что мы пока не учитываем затенений, следует считать углы скольжения падающей и отраженной волн значительно большими, чем характерные углы наклона поверхности. При обратном рассеянии это условие имеет вид  $\gamma_x \ll \text{tg } \psi$ , а в общем случае  $|q\gamma/q_z| \ll 1$ . Поэтому в предэкспоненциальных множителях формулы (10) мы можем пренебречь членами \*), зависящими от  $\gamma$ , так что

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \overline{|U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2} \sim q_z^2 \iint_{S_o} \iint_{S_o} e^{i(q_z r - r')} e^{iq_z [\xi(r) - \xi(r')]} dr dr'. \quad (11)$$

1. Следуя работе [48], рассмотрим сначала простейший случай рассеяния на поверхности с двумерными (цилиндрическими) неровностями, образующие которых перпендикулярны к плоскости

\*) В работе [48] эти члены были опущены при интегрировании по частям в исходной формуле (19.18). При этом пренебрежение внеинтегральным членом соответствовало не краевому эффекту (пренебрежение членами порядка  $\lambda^2/S$ ), а малости параметра  $q\gamma/q_z$ . Это обстоятельство было отмечено в работах [177]—[179], но учет этих членов в отсутствие затенений является, как указано выше, превышением точности.

падения ( $xz$ ), а высоты  $\xi(x)$  распределены по нормальному закону.

Подставляя в (11) формулу (3.29) для двумерной характеристической функции нормального процесса

$$f_2(q_z, -q_z; |r - r'|) = e^{iq_z[\xi(r) - \xi(r')]} = e^{-q_z^2 \sigma^2 [1 - W(r - r')]}$$

и считая размер  $L_y$  поверхности  $S$  в направлении оси  $y$  значительно бóльшим, чем длина волны, приходим к интегралу

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \sim 2\pi \delta_{L_y}(q_y) q_z^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_x \xi - q_z^2 \sigma^2 [1 - W(\xi)]} d\xi. \quad (12)$$

Бесконечные пределы интегрирования в этой формуле соответствуют предположению о малости характерного линейного размера неровностей  $l$  по сравнению с размером  $L_x$  рассеивающей площадки вдоль оси  $x$ , а функция  $\delta_L(q_y)$  введена соотношением

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{iq_y y} dy = 2\pi \delta_L(q_y)$$

так, что  $\delta_L(q_y = 0) = L/2\pi$ . При рассеянии на шероховатой полосе, бесконечной в направлении оси  $y$ ,  $\delta_{L_y}(q_y) \rightarrow \delta(q_y)$ , где  $\delta(q_y)$  —  $\delta$ -функция Дирака. В дальнейшем мы для краткости опускаем индекс  $L$  всюду, где это не приводит к бесконечностям.

Исследуем асимптотику интеграла (12) при  $q_z \sigma \gg 1$ . В противоположном предельном случае, как будет показано ниже, мы приходим к формулам теории возмущений. Введем вместо  $\xi$  новую переменную интегрирования  $\tau$ :

$$\xi = \frac{iq_x}{q_z^2 \sigma^2 W''(0)} + \tau. \quad (13)$$

Тогда (12) можно записать в таком виде:

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \sim 2\pi \delta(q_y) q_z^2 S_0 \exp\left[\frac{q_x^2}{2q_z^2 \sigma^2 W''(0)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{q_z^2 \sigma^2 W''(0)}{2} \tau^2\right] \times \\ \times \mathcal{F}(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Здесь  $\mathcal{F}(\tau) = \exp\left\{q_z^2 \sigma^2 \left[W(\xi) - 1 - \frac{1}{2} W''(0) \xi^2\right]\right\}$ , причем  $\xi$  следует выразить через  $\tau$  по формуле (13). Так как при  $q_z^2 \sigma^2 \gg 1$  существенную роль в интеграле по  $d\tau$  играют только  $\tau$  вблизи нуля [напомним, что  $W''(0) < 0$ , ибо  $W(\tau)$  имеет максимум при  $\tau = 0$ ], то предэкспоненциальная функция может быть разложена

в ряд по  $\tau$ , следуя стандартному методу вычисления такого рода интегралов методом Лапласа (см., например, [180]):

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) &\sim 2\pi\delta(q_y) q_z^2 S_0 \exp\left[\frac{q_x^2}{2q_z^2\sigma^2 W''(0)}\right] \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{F}(0) + \frac{\mathcal{F}''(0)}{2} \tau^2 \right] \exp\left[\frac{q_z^2\sigma^2 W''(0)\tau^2}{2}\right] d\tau = \\
 &= 2\pi\delta(q_y) q_z^2 S_0 \exp\left[\frac{q_x^2}{2q_z^2\sigma^2 W''(0)}\right] \sqrt{\frac{2\pi}{q_z^2\sigma^2 |W''(0)|}} \times \\
 &\times \left\{ \mathcal{F}(0) + \frac{\mathcal{F}''(0)}{2q_z^2\sigma^2 |W''(0)|} \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

В свою очередь легко получить следующие выражения для  $\mathcal{F}(0)$  и  $\mathcal{F}''(0)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(0) &\approx \exp\left\{ \frac{W_{(0)}^{(IV)}(0) q_x^4}{24[W''(0)]^4 (q_z\sigma)^6} \right\}, \quad (16) \\
 \mathcal{F}''(0) &\approx - \left\{ \frac{W^{(IV)}(0) q_x^4}{18[W''(0)]^4 (q_z\sigma)^6} + 1 \right\} \frac{W^{(IV)}(0) q_x^2}{2[W''(0)]^2 (q_z\sigma)^2} \mathcal{F}(0).
 \end{aligned}$$

Удерживая в (15) только главный член по малому параметру  $(q_z\sigma)^{-2} \ll 1$ , получаем формулу

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim 2\pi\delta(q_y) \sqrt{\frac{2\pi}{|W''(0)|} \frac{q_z S_0}{\sigma}} \exp\left(-\frac{q_x^2}{2q_z^2\sigma^2 |W''(0)|}\right). \quad (17)$$

Заметим, что наклоны  $\gamma_x = d\zeta/dx$  случайной нормальной поверхности также распределены нормально — по теореме о том, что линейные функционалы нормальных процессов также являются нормальными (см., например, [85]). Дисперсия производной связана с дисперсией высот и корреляционной функцией соотношением [83]  $\overline{\gamma_x^2} = \sigma^2 |W''(0)|$ , так что формула (17) может быть записана в виде \*)

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) &\sim \frac{(2\pi)^2 \delta(q_y) q_z S_0}{\sqrt{2\pi \overline{\gamma_x^2}}} \exp\left(-\frac{q_x^2}{2q_z^2 \overline{\gamma_x^2}}\right) = \\
 &= (2\pi)^2 \delta(q_y) q_z S_0 w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right), \quad (18)
 \end{aligned}$$

\*) Функция  $w(\gamma_x)$  в данном случае является четной, поэтому все равно как писать ее аргумент — в виде  $\gamma_x = -q_x/q_z$  или  $\gamma_x = q_x/q_z$ . Однако при дальнейших обобщениях, когда четность  $w(\gamma_x)$  не предполагается, возникает именно знак минус.

где  $w(\gamma_x)$  — плотность распределения производных случайной функции  $\zeta(x)$ :

$$w(\gamma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_x^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\gamma_x^2}\right). \quad (19)$$

Оценка отброшенных членов при переходе от (15) к (17) приводит к следующим неравенствам:

$$(q_z\sigma)^2 \gg 1, \quad \text{если } \frac{q_x l}{q_z\sigma} \lesssim 1, \quad (20a)$$

$$(q_z\sigma)^2 \gg \left(\frac{q_x l}{q_z\sigma}\right)^4, \quad \text{если } \frac{q_x l}{q_z\sigma} \gtrsim 1, \quad (20б)$$

где по-прежнему  $l$  — радиус корреляции. При гауссовой функции корреляции  $W(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)$  эти поправочные члены можно легко получить (см. работу [181]), исходя из общих формул (15), (16):

$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \approx$

$$\approx J^{(0)}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \left\{ 1 + \frac{1}{2(q_z\sigma)^2} \left[ \left(\frac{q_x l}{q_z\sigma}\right)^4 - 4\left(\frac{q_x l}{q_z\sigma}\right)^2 + 2 \right] + O\left[\frac{1}{(q_z\sigma)^4}\right] \right\}, \quad (21)$$

где через  $J^{(0)}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})$  обозначена функция (18) при  $\bar{\gamma}^2 = (\sigma/l)^2$ .

Анализируя формулу (18), замечаем, во-первых, что распределение интенсивности по направлениям не зависит от длины волны, и, во-вторых, что излучение рассеивается только в плоскости падения. Последнее обстоятельство связано с предпологавшейся при выводе двумерностью неровностей и не является принципиальным (см. ниже обобщение на трехмерный случай). Отсутствие же зависимости индикатрисы (18) от длины волны

является следствием того, что при асимптотическом вычислении интеграла (12), мы, по сути дела, ограничились лишь приближением геометрической оптики. Действительно, интенсивность рассеяния в каком-либо направлении  $\boldsymbol{\kappa}$  оказывается пропорциональной, согласно (18), вероятности наклонов поверхности

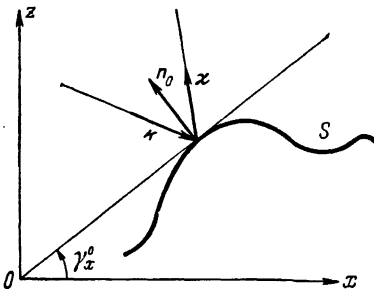


Рис. 32.

$$\gamma_x^0 = -\frac{q_x}{q_z} = \frac{k_x - \kappa_x}{k_z - \kappa_z}.$$

Из элементарных геометрических построений (рис. 32) видно, что при этом векторы  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$  образуют равные углы с нормалью  $\mathbf{n}_0$ , т. е. соответствующая касательная плоскость оказывается зеркально отражающей. Из формулы (18) следует, в частности, что

при малых углах наклона, когда  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$ , излучение рассеивается в основном в направлениях, близких к направлению зеркального отражения от плоскости  $z=0$  ( $q_x=0$ ), причем характерный разброс углов  $\chi$  (относительно этого направления (рис. 33) определяется из условия

$$\left| \frac{\cos \chi - \cos \psi}{\sin \chi + \sin \psi} \right|^2 \approx 2\bar{\gamma}^2. \quad (22)$$

Представляя  $\chi$  в виде  $\chi = \psi + \Delta\chi$  и считая, что  $\Delta\chi \ll \psi$  (при  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  это эквивалентно требованию отсутствия затенений  $\psi \gg \gamma$ ), получаем \*) из (22)

$$(\Delta\chi)^2 \approx 8\bar{\gamma}^2. \quad (23)$$

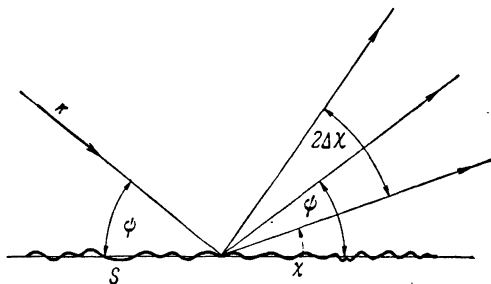


Рис. 33.

Из неравенств (20а, б) следует, что для того, чтобы приближение геометрической оптики было справедливо в этой области углов, т. е. там, где  $q_x l / q_z \sigma \approx q_x / q_z \gamma \leq 1$ , достаточно выполнения условия  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$ . Для направлений, далеких от направлений зеркального отражения ( $q_x / q_z \gamma \gg 1$ ), необходимо выполнение значительно более жесткого условия  $(q_z \sigma)^2 \gg (q_x / q_z \gamma)^4$ . Это и понятно, так как для области углов наблюдения, где  $q_x / q_z \gg \gamma$ , вероятность зеркальных отражений от поверхности мала и поэтому все большую роль начинают играть дифракционные поправки к формуле (18), требование малости которых и приводит к неравенству (20б).

Прежде чем переходить к изучению отражения от трехмерных неровностей, сделаем еще одно замечание относительно распределения по направлениям интенсивности отраженного поля при дифракции на двумерных (цилиндрических) неровностях. Как видно из формулы (11), отражение от поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r})$  эквивалентно пространственной фазовой модуляции плоской волны  $e^{iqz}$  случайной функцией  $q_z \zeta(\mathbf{r})$ , и при вычислении индикатрисы рассеяния  $J(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  мы определяем интенсивность пространственных спектров этого промодулированного поля. Если поверхность двумерная, то, как видно из (12), задача заключается в определении энергетического спектра случайной функции  $e^{iq_z \zeta(\mathbf{x})}$ . Эти соображения были положены в основу модельных расчетов индикатрисы рассеяния на случайной поверхности в работах [182], [183]. Модулированный по фазе сигнал  $e^{iq_z \zeta(t)}$  [ $\zeta(t)$  — случайная функция времени, которая и описывает пространственную структуру

\*) Определенная таким образом ширина индикатрисы  $\Delta\chi$  соответствует убыванию интенсивности в  $e$  раз по сравнению с направлением зеркального отражения.

неровной поверхности] подвергался спектральному анализу и интенсивность каждой монохроматической гармоники  $e^{iq_x t}$  отождествлялась с интенсивностью рассеяния из направления  $\mathbf{k}$  в  $\mathbf{x}$ , т. е. с помощью анализатора спектра сигнала по сути вычислялся интеграл (12).

2. Проведенный выше анализ формулы (18) показывает, что при применении метода Лапласа к интегралу (12) мы фактически выделяем из всей поверхности только те участки, углы наклона которых соответствуют зеркальному отражению из направления  $\mathbf{k}$  в направление  $\mathbf{x}$ . Так как, кроме того, главный член получающегося таким путем асимптотического ряда не зависит от длины волны, то имеет смысл попытаться с самого начала оценить исходный интеграл (11) при  $k \rightarrow \infty$ , не конкретизируя вид функции распределения и без ограничений на степень анизотропии неровностей.

Для этого разложим разность  $\zeta(\mathbf{r}') - \zeta(\mathbf{r})$  в показателе экспоненты подынтегрального выражения (11) в ряд по степеням  $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ :

$$\zeta(\mathbf{r}') - \zeta(\mathbf{r}) \approx \rho \gamma(\mathbf{r}) + \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{2} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \zeta(\mathbf{r}) + \dots \quad (24)$$

Подставив (24) в (11) и выполняя сначала интегрирование по переменной  $\rho$ , а затем усреднение, получаем

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) &= \overline{|U(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2} \sim q_z^2 S_0 \int w(\gamma) d\gamma \int e^{i(q + q_z \gamma \cdot \rho)} d\rho = \\ &= (2\pi)^2 q_z^2 S_0 \int w(\gamma) \delta(q_\perp + q_z \gamma) d\gamma = (2\pi)^2 S_0 w\left(\gamma = -\frac{q_\perp}{q_z}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $w(\gamma)$  — двумерная плотность распределения наклонов поверхности  $\gamma = \nabla \zeta(\mathbf{r})$ . При этом мы пренебрегли в показателе экспоненты членами, квадратичными по  $\rho$  и более высокого порядка. Легко проверить, что это возможно, если выполнены неравенства, аналогичные (20а, б):

$$(q_z \sigma)^2 \gg 1, \quad \text{если} \quad \frac{q\gamma}{q_z} \lesssim 1, \quad (26a)$$

$$(q_z \sigma)^2 \gg \left(\frac{q\gamma}{q_z}\right)^4, \quad \text{если} \quad \frac{q\gamma}{q_z} \gtrsim 1. \quad (26b)$$

Цилиндрическим (двумерным) шероховатостям соответствует плотность распределения углов

$$w(\gamma) = \delta(\gamma_y) w(\gamma_x),$$

поэтому из (25) получаем в этом предельном случае формулу (18):

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) &\sim (2\pi)^2 S_0 \delta\left(\frac{q_y}{q_z}\right) w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right) = \\ &= (2\pi)^2 q_z S_0 \delta(q_y) w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (25) обобщает полученный ранее в частном случае результат (18) на поверхности с произвольным распределением углов наклона и без ограничений на степень анизотропии неровностей.

В частности, для нормальной случайной поверхности с гауссовой корреляционной функцией возвышений

$$\overline{\zeta(X+x, Y+y)\zeta(X, Y)} = \sigma^2 W(x, y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l_x^2} - \frac{y^2}{2l_y^2}\right) \quad (27)$$

распределение углов наклона  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно имеет вид

$$w(\gamma_x, \gamma_y) \equiv w(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2\pi(\overline{\gamma_x^2}\overline{\gamma_y^2})^{1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\overline{\gamma_x^2}} - \frac{\gamma_y^2}{2\overline{\gamma_y^2}}\right),$$

где  $\overline{\gamma_x^2} = \frac{\sigma^2}{l_x^2}$ ;  $\overline{\gamma_y^2} = \frac{\sigma^2}{l_y^2}$ . Т. е. угловое распределение интенсивности рассеянного поля дается формулой

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{2\pi S_0}{(\overline{\gamma_x^2}\overline{\gamma_y^2})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2q_z^2}\left[\frac{q_x^2}{\overline{\gamma_x^2}} + \frac{q_y^2}{\overline{\gamma_y^2}}\right]\right\}. \quad (28)$$

Из этой формулы видно, что при малых углах наклона ( $\overline{\gamma_x^2}, \overline{\gamma_y^2} \ll 1$ ) излучение рассеивается в узком конусе углов около направления зеркального отражения ( $\chi = \psi, \varphi = 0$ ) (рис. 34). Ширина этого конуса по углу места определяется тем же соотношением (23), что и в двумерном случае  $(\Delta\chi)^2 \simeq 8\overline{\gamma_x^2}$ , а разброс углов по азимуту определяется из соотношения, аналогичного формуле (22):

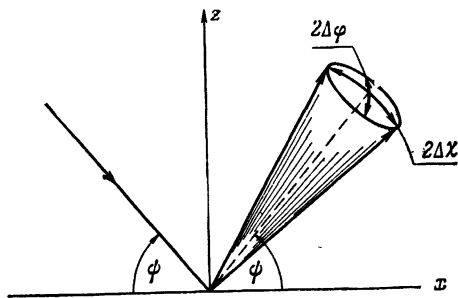


Рис. 34.

$$\frac{q_y^2}{2\overline{\gamma_y^2} q_z^2} = \frac{\cos^2 \chi \sin^2 \varphi}{2\overline{\gamma_y^2} (\sin \psi + \sin \chi)^2} \simeq 1.$$

Поэтому для азимутальной ширины  $\Delta\varphi$  (см. рис. 34) индикатрисы рассеяния получаем следующую оценку:

$$(\Delta\varphi)^2 \simeq 8 \text{tg}^2 \psi \overline{\gamma_y^2}. \quad (29)$$

Если же главные оси квадратичной формы, стоящей в показателе экспоненты (27), не совпадают с осями  $x$  и  $y$  соответственно (напомним, что плоскость  $\{xz\}$  выбрана нами в качестве

плоскости падения), то формула (28) несколько усложняется [ср. с (3.32)]:

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{2\pi S_0}{\sqrt{\overline{\gamma_x^2 \gamma_y^2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2q_z^2} \left[ \frac{q_x^2}{\overline{\gamma_x^2}} - 2W_{xy} \frac{q_x q_y}{\sqrt{\overline{\gamma_x^2 \gamma_y^2}}} + \frac{q_y^2}{\overline{\gamma_y^2}} \right] \right\}. \quad (30)$$

Здесь дисперсии производных по осям  $x$  и  $y$ :  $\overline{\gamma_x^2}$ ,  $\overline{\gamma_y^2}$  и их взаимный коэффициент корреляции  $W_{xy}$  связаны со среднеквадратичными углами наклона  $\overline{\gamma_\xi^2}$  и  $\overline{\gamma_\eta^2}$  вдоль главных осей  $\xi$  и  $\eta$  (рис. 35) соотношениями [ср. с (3.33)]

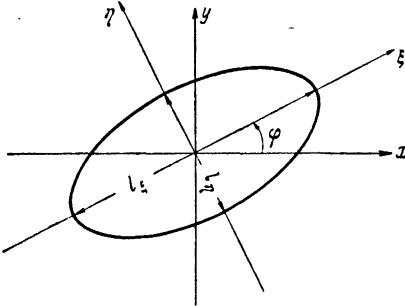


Рис. 35. Характерные линейные размеры неровностей  $l_\xi$  и  $l_\eta$  связаны с дисперсией углов наклона  $\overline{\gamma_\xi^2}$  и  $\overline{\gamma_\eta^2}$  по главным направлениям  $\xi$  и  $\eta$  соотношениями  $\overline{\gamma_\xi^2} = \sigma^2/l_\xi^2$ ;  $\overline{\gamma_\eta^2} = \sigma^2/l_\eta^2$ .

$$\frac{1}{\overline{\gamma_x^2}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\overline{\gamma_\xi^2}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\overline{\gamma_\eta^2}}; \quad (31a)$$

$$\frac{1}{\overline{\gamma_y^2}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\overline{\gamma_\eta^2}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\overline{\gamma_\xi^2}}; \quad (31б)$$

$$W_{xy} = \sqrt{\overline{\gamma_x^2 \gamma_y^2}} \left[ \frac{1}{\overline{\gamma_\eta^2}} - \frac{1}{\overline{\gamma_\xi^2}} \right] \sin \varphi \cos \varphi. \quad (31в)$$

Для изотропных неровностей, имеющих характерные линейные размеры, одинаковые по всем направлениям в плоскости  $\{x, y\}$  ( $\overline{\gamma_x^2} = \overline{\gamma_y^2} = \overline{\gamma^2}$ ), из (30) получаем

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{2\pi S_0}{\overline{\gamma^2}} \exp \left( -\frac{q_\perp^2}{2q_z^2 \overline{\gamma^2}} \right); \quad q_\perp^2 = q_x^2 + q_y^2. \quad (32)$$

Использованный в этом пункте способ оценки интеграла (11) можно применить и к исходному выражению (10), не отбрасывая слагаемые вида  $(q\gamma/q_z)^{1,2}$ . Хотя, как указывалось выше, в отсутствие затенений эти поправки следует считать малыми, мы сейчас получим формулу, которая в § 22 будет обобщена на тот случай, когда затенения существенны. Действуя так же, как и при выводе (25), мы легко получаем

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) &\sim \int_{S_0} \int_{S_0} \exp \left\{ i \left[ (q + q_z \gamma, \rho) + q_z \rho_i \rho_k \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_k} \zeta(r) + \dots \right] \right\} \times \\ &\quad \times [q_z - q\gamma(r)] [q_z - q\gamma(r + \rho)] dr d\rho \approx \\ &\approx (2\pi)^2 S_0 \int w(\gamma) [q_z - q\gamma]^2 \delta(q_\perp + q_z \gamma) d\gamma = \\ &= (2\pi)^2 \frac{q_\perp^4}{q_z^4} S_0 w \left( \gamma = -\frac{q_\perp}{q_z} \right), \end{aligned} \quad (33)$$



где  $q^2 = q_z^2 + q_{\perp}^2$ . В направлениях, близких к направлениям зеркального отражения,  $q^4 \simeq q_z^4$ , так что формула (33) по сути совпадает с (25) в той области углов, где этими формулами можно пользоваться.

Приведенная схема вычислений позволяет легко обобщить полученные выше результаты на тот случай, когда коэффициент отражения  $V$  является функцией локального угла падения, т. е.  $V = V(\vartheta)$ , где  $\cos \vartheta \equiv kn/k$ . Действительно, направление нормали  $\mathbf{n}$  в каждой точке поверхности связано с углами наклона  $\gamma$  соотношением (19.17), а так как усреднение по  $\gamma$  легко проводится из-за наличия в (33)  $\delta(q_{\perp} + q_z \gamma)$ , то коэффициент отражения выносится за знак интеграла при  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ , где  $\mathbf{n}_0$  — нормаль к зеркально отражающим участкам («бликам») на поверхности:

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{e}_z - \gamma_0}{\sqrt{1 + \gamma_0^2}} \quad \text{при} \quad \gamma_0 = -q_{\perp}/q_z, \quad (34a)$$

т. е.

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{q}}{q}. \quad (34b)$$

Таким образом, учет неидеальности поверхности (в том смысле, что  $V \neq \pm 1$ ) приводит к появлению в полученных выше выражениях множителя  $V(\vartheta_0)$ , где  $\cos \vartheta_0 = kq/kq$ . Следует помнить, однако, что этот вывод относится, строго говоря, лишь к предельному случаю  $\lambda \rightarrow 0$ , когда в разложении (24) можно ограничиться линейными по  $\rho$  слагаемыми, что и приводит к появлению в подынтегральном выражении (33) дельта-функции  $\delta(q_{\perp} + q_z \gamma)$ . При сколь угодно малой, но конечной, длине волны  $\lambda$  интегрирование по  $d\gamma$  в (33) проводится по малой окрестности углов вблизи  $\gamma_0 = -q_{\perp}/q_z$ . Поэтому коэффициент отражения  $V(\vartheta)$  должен быть достаточно плавной функцией локального угла скольжения для того, чтобы его можно было вынести за знак интеграла в зеркальной точке  $\vartheta = \vartheta_0$ .

Нетрудно получить условия, при которых изменением  $V(\vartheta)$  в пределах указанной области углов можно пренебречь (см. [170]). Действительно, тот факт, что  $V(\vartheta)$  выносится из-под интеграла при  $\vartheta = \vartheta_0$ , означает, что в исходных формулах (19.9) или (19.18) коэффициент отражения, рассматриваемый как функция точки поверхности  $S$ , может быть разложен около точки стационарной фазы в ряд

$$V(l) = V(l_0) + \frac{dV}{dl}(l - l_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dl^2}(l - l_0)^2 + \dots$$

и вкладом в интеграл всех членов, кроме первого, можно пренебречь. Здесь через  $d/dl$  мы обозначили производную по дуге  $l$  (рис. 36), причем  $l = l_0$  соответствует точке зеркального

отражения — блику на поверхности  $S$ . Если учесть, что интеграл от линейного по  $l - l_0$  слагаемого точно обращается в нуль, то мы приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2V(l_0)} \frac{d^2V(l_0)}{dl^2} (\Delta l)^2 \ll 1, \quad (35)$$

где через  $\Delta l$  обозначена область, существенная для интегрирования. Так как  $V$  обычно задается в виде функции от угла падения  $\vartheta$ , то в этом неравенстве удобно перейти от производных по дуге  $l$  к производным по углу  $\vartheta$  (см. рис. 36). Замечая, что приращение дуги  $\delta l$  связано с изменением угла  $\vartheta$  соотношением

$$\delta l = a(l) \delta \vartheta,$$

где  $a(l)$  — переменный радиус кривизны поверхности, получаем

$$\frac{d^2V}{dl^2} = \frac{1}{a^2(l)} \left[ \frac{d^2V(\vartheta)}{d\vartheta^2} - \frac{dV(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{da(l)}{dl} \right].$$

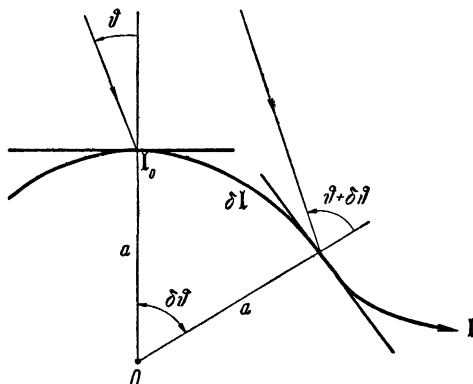


Рис. 36.

Если в качестве существенной для отражения области взять первую зону Френеля  $\Delta l \simeq \sqrt{\lambda a}$  (это и есть характерный линейный размер бликов на поверхности), то неравенство (35) принимает окончательно следующий вид:

$$\frac{1}{2V(\vartheta_0)} \left[ \frac{d^2V}{d\vartheta^2} - \frac{dV}{d\vartheta} \frac{da}{dl} \right]_{\vartheta=\vartheta_0} \ll \frac{a(l_0)}{\lambda}. \quad (36)$$

Эти результаты впервые были получены Исаковичем [170], а затем в работах [184] — [188] были обобщены на случай рассеяния электромагнитных волн.

Впишем окончательное выражение для индикатрисы с учетом отброшенного в начале параграфа множителя:

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = |U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 = \frac{|V(\vartheta_0)|^2}{4(R_{10}R_{20})^2} \frac{q^4}{q_z^2} S_0 w \left( \boldsymbol{\gamma} = -\frac{q_{\perp}}{q_z} \right). \quad (37)$$

В дальнейшем во всех случаях, когда рассматривается асимптотика  $k \rightarrow \infty$ , удобно использовать именно это выражение, так как, с одной стороны, при отсутствии затенений оно совпадает с полученными ранее формулами (18), (25), а с другой, как будет показано ниже, учет затенений сводится к умножению (37) на некоторую функцию угла скольжения  $\psi$  и угла места  $\chi$ , которая

будет вычислена в § 22, 23. Наконец, для дифференциального сечения рассеяния шероховатой площадки из (37) следует

$$\mathfrak{E} = \frac{|V(\theta_0)|^2 q^4}{4q_z^2} S_0 w\left(\gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z}\right). \quad (38a)$$

В частности, сечение обратного рассеяния (радиолокационный случай) от площадки, расположенной перпендикулярно к направлению облучения, равно

$$\mathfrak{E}_{\text{рл}} = \frac{1}{4} |V(0)|^2 S_0 w(\gamma = 0). \quad (38б)$$

Сравнивая эту формулу с сечением рассеяния на плоской поверхности \*) (той же площади  $S_0$ )

$$\mathfrak{E}_{\text{пл}} = \frac{k^2}{(2\pi)^2} |V(0)|^2 S_0^2, \quad (39)$$

и учитывая при этом, что  $w(\gamma = 0) \simeq \frac{1}{2\pi\gamma^2}$ , приходим к выводу, что наличие шероховатостей приводит к уменьшению сечения обратного рассеяния в  $\frac{2}{\pi} k^2 S_0 \bar{\gamma}^2$  раз. Это связано с перераспределением рассеянной энергии по направлениям: при отражении от плоскости энергия рассеивается в основном только в пределах первого лепестка, т. е. в конусе с углом раствора  $\Delta\theta \simeq \sqrt{\lambda/L}$ , при рассеянии же на шероховатой площадке этот угол значительно больше:  $\Delta\theta \simeq \gamma$ .

Довольно полный набор графиков для индикатрисы  $J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})$ , как функции угла скольжения  $\psi$ , угла места  $\chi$  и азимута  $\varphi$  (рис. 37), для ряда частных случаев можно найти в работах [48], [170], [189]. В случае двумерной идеально отражающей ( $|V|=1$ ) шероховатой поверхности с нормальным распределением наклонов (19) и гауссовой функцией корреляции  $W(x) = e^{-x^2/l^2}$  формула (37) принимает вид

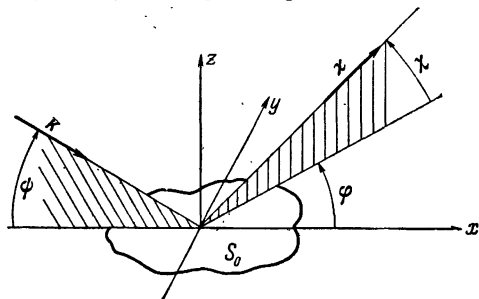


Рис. 37.

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{k S_0 L_y [1 - \cos(\psi + \chi)]^2}{R_{10}^2 R_{20}^2 \sqrt{(2\pi)^3 \gamma^2} (\sin \psi + \sin \chi)^3} \exp \left\{ -\frac{(\cos \psi - \cos \chi)^2}{2(\sin \psi + \sin \chi)^2 \gamma^2} \right\}, \quad (40)$$

\*) Формула (38б), как уже указывалось, применима при  $q_z \sigma \gg 1$ . Поэтому сравнение  $\mathfrak{E}_{\text{рл}}$  и  $\mathfrak{E}_{\text{пл}}$  относится только к случаю больших параметров Рэлея.

где  $\bar{\gamma}^2 = 2\sigma^2/l^2$ ,  $L_y$  — размер рассеивающей площадки вдоль оси  $y$ . На рис. 38, а) — б) приведены построенные в [170] по этой формуле графики при различных значениях параметра  $l/\sigma$  для разных

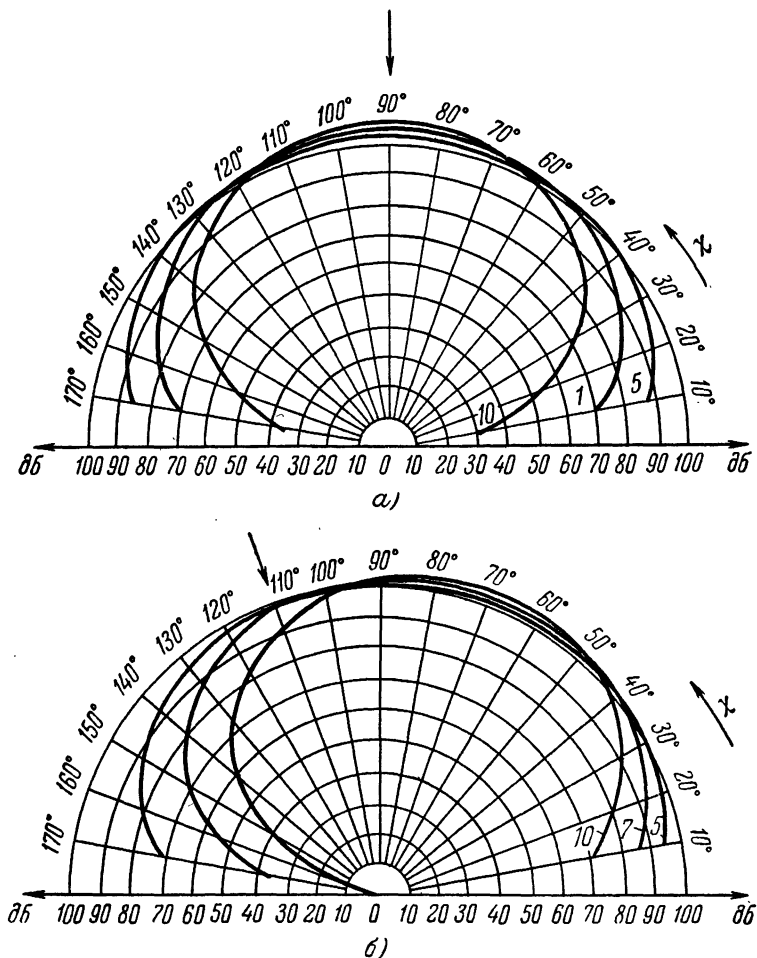


Рис. 38. Индикатрисы рассеяния на двумерной нормальной случайной поверхности с гауссовой функцией корреляции при  $l/\sigma = 5, 7, 10$  и угле скольжения а)  $\psi = 90^\circ$ , б)  $\psi = 70^\circ$ .

углов скольжения  $\psi$ . Графики даны в логарифмическом масштабе: по радиусу отложена интенсивность поля в децибелах над некоторым произвольным начальным уровнем. На рис. 39 представлена зависимость интенсивности обратно рассеянного поля ( $\chi = \pi - \psi$ ) от угла скольжения, представляющая для приложений особый

интерес. Для поверхности с квазигармонической функцией корреляции

$$W(x) = \cos px e^{-x^2/l^2} \quad (41)$$

при достаточно малых  $pl$  (быстро затухающие осцилляции), когда  $(pl)^2 \ll (2\pi q_z \sigma)^2$  для индикатрисы рассеяния в работе [170] получена формула, отличающаяся от (40) лишь заменой параметра

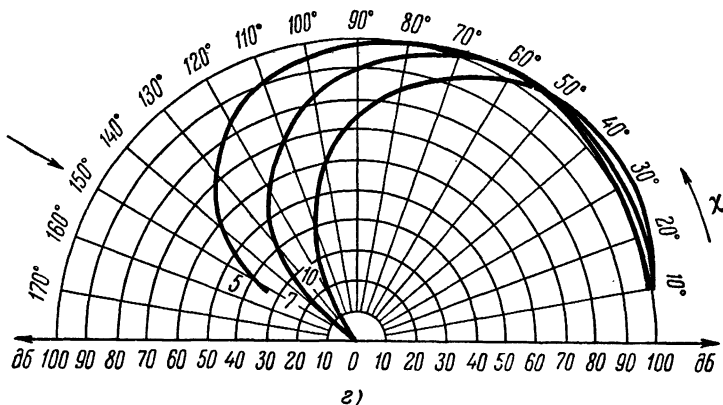
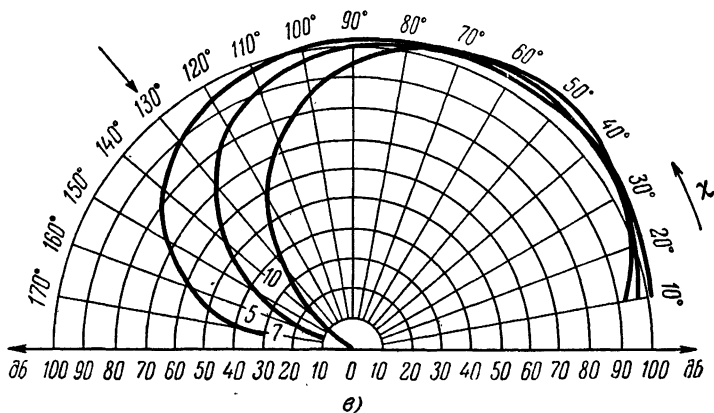


Рис. 38. Индикатрисы рассеяния на двумерной нормальной случайной поверхности с гауссовой функцией корреляции при  $l/\sigma = 5, 7, 10$  и угле скольжения в)  $\psi = 50^\circ$ , г)  $\psi = 30^\circ$ .

$l/\sigma$  на  $\left(1 + \frac{\rho^2 l^2}{2}\right)^{1/2} \frac{l}{\sigma}$ . Таким образом, графики 38, а) — г) представляют индикатрису рассеяния и для поверхности с квазигармоническими шероховатостями, но с другими «эффективными параметрами». Так, например, при  $pl = 0,5$  приведенные на рис. 38, а) — г)

графики соответствуют рассеянию на поверхности с функцией корреляции (41) для значений  $l/\sigma$ , равных соответственно 5,31; 7,43 и 10,61. В обратном предельном случае  $(pl)^2 \gg (2\pi q_z \sigma)^2$  на расстояниях порядка радиуса корреляции  $l$  укладывается много осцилляций функции корреляции, так что о такой поверхности можно условно говорить как о «статистической дифракционной решетке».

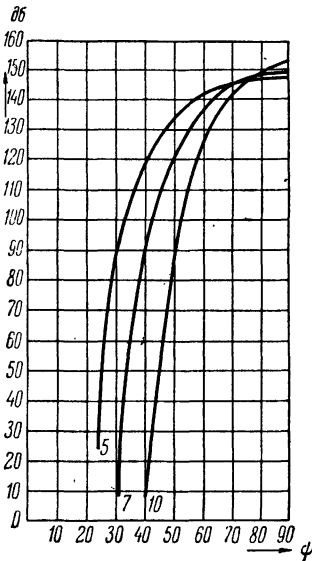


Рис. 39. Сечение обратного рассеяния ( $\chi = \pi - \psi$ ) при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ .

Каждому «штриху» такой решетки при вычислении интеграла (12) методом стационарной фазы будет соответствовать своя стационарная точка, причем придется учитывать уже целый ряд их — а именно столько, сколько осцилляций успевает совершить функция корреляции (41), прежде чем ее затухание существенно уменьшит подынтегральную функцию в (12). Легко видеть, что число  $n$  перевальных точек, дающих существенный вклад в интенсивность рассеянного поля, равно, по порядку величины,

$$n \simeq \frac{pl}{2\pi q_z \sigma}.$$

Не проделывая дальнейших достаточно очевидных вычислений, мы приведем полученный в работе [170] ответ для данного случая

$$J(\mathbf{k}, \chi) = \frac{S_0 L y}{8 \sqrt{2} \pi^{3/2} R_{10}^2 R_{20}^2} \frac{1}{\rho \sigma} \frac{q_x^4}{q_z^3} \exp \left[ -\frac{q_x^2}{2\rho^2 q_z^2 \sigma^2} \right] \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ 2\pi i n \frac{q_x}{\rho} - (2\pi n)^2 \left( \frac{q_z \sigma}{pl} \right)^2 \right]. \quad (42)$$

Из этой формулы видно, что распределение интенсивности рассеянного поля по направлениям в данном случае имеет совсем другой характер, чем в случае монотонно спадающей или быстро затухающей функции корреляции. Действительно, при целых значениях  $q_x/\rho$  все члены суммы (42) имеют одинаковую фазу, что приводит к появлению максимумов в индикатрисе рассеяния при углах, удовлетворяющих обычному условию Вульфа — Брега  $k|\cos \chi - \cos \psi| = N\rho$  для дифракции на периодических структурах. В качестве иллюстрации на рис. 40, а), б) приведены графики

индикатрисы рассеяния нормально падающего излучения ( $\psi = \pi/2$ ), рассчитанные в работе [170] по формуле (42).

Наконец, для трехмерных изотропных и, по-прежнему, нормально распределенных шероховатостей с гауссовой функцией корреляции из (37) имеем

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{S_0}{4\pi R_{10}^2 R_{30}^2} \left(\frac{l}{\sigma}\right)^2 \left[ \frac{1 - \cos \psi \cos \chi \cos \varphi + \sin \psi \sin \chi}{\sin \psi + \sin \chi} \right]^2 \times \\ \times \exp \left\{ - \left(\frac{l}{2\sigma}\right)^2 \frac{\cos^2 \psi + \cos^2 \chi - 2 \cos \psi \cos \chi \cos \varphi}{(\sin \psi + \sin \varphi)^2} \right\}. \quad (43)$$

Рассчитанные в работе [170] по этой формуле графики при различных значениях параметра  $l/\sigma$  для ряда углов скольжения  $\psi$  и азимутальных углов  $\varphi$  (см. рис. 37) приведены на рис. 41—42.

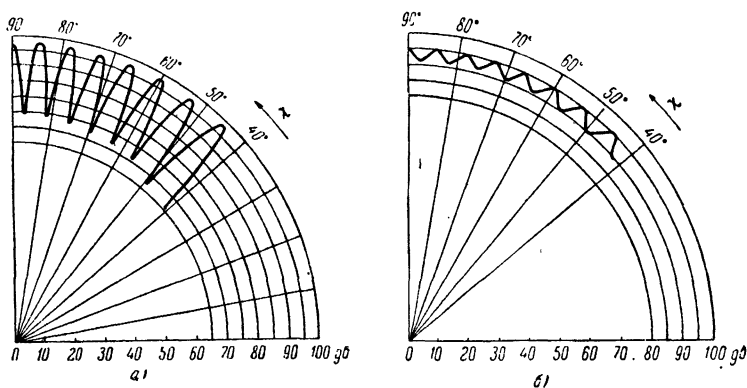


Рис. 40. Индикатрисы рассеяния на поверхности с функцией корреляции (20.41) при  $\psi = 90^\circ$ ,  $k\sigma = 10$ ,  $\rho\sigma = 1$ ; а)  $\rho l = 20\pi\sqrt{10}$ , б)  $\rho l = 10\pi\sqrt{10}$ .

3. Остановимся вкратце еще на одном способе вычисления рассеянного поля (см. [190]) при  $k \rightarrow \infty$ , который позволяет свести задачу дифракции к геометрической задаче о статистике точек зеркального отражения на случайной поверхности. Обратимся опять к простейшему случаю рассеяния на цилиндрической поверхности  $z = \zeta(x)$ , образующие которой параллельны оси  $y$ . Вычислим коротковолновую асимптотику исходного интеграла (1)

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim \int_{S_0} \exp \{-i [q_x x + q_y y + q_z \zeta(x)]\} [q_z - q_x \gamma_x(x)] dx dy. \quad (44)$$

При  $k \rightarrow \infty$  показатель экспоненты является быстро осциллирующей функцией, и точки стационарной фазы интеграла определяются из условия

$$\frac{d}{dx} [q_x x + q_z \zeta(x)] = q_x + q_z \gamma_x(x) = 0.$$

Обозначим совокупность решений  $x$  этого уравнения через  $x_j$  ( $j = 1, 2 \dots N$ ). Тогда в каждой точке стационарной фазы углы

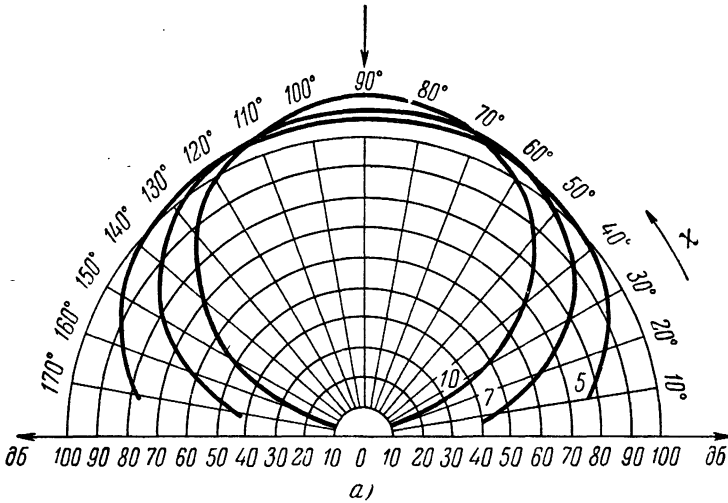


Рис. 41а). Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной случайной поверхности с функцией корреляции  $W(\rho) = \exp\{-\rho^2/l^2\}$  при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 90^\circ$ ;  $\varphi = 0^\circ$ .

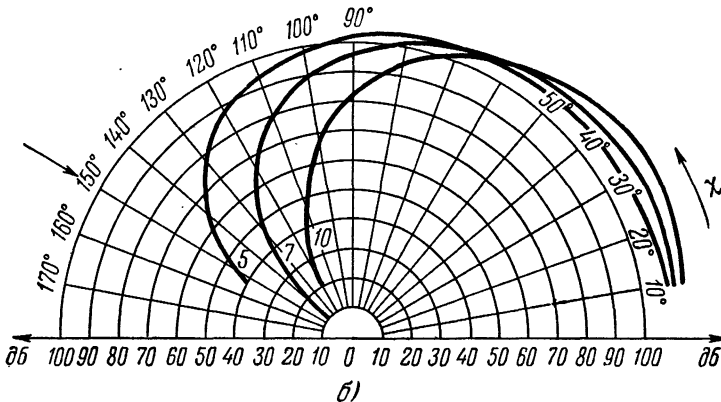


Рис. 41б) Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной случайной поверхности с функцией корреляции  $W(\rho) = \exp\{-\rho^2/l^2\}$  при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 30^\circ$ ;  $\varphi = 0^\circ$ .

наклона поверхности определяются из условия зеркального отражения [ср. (34а)]

$$\gamma_x(x_j) = -\frac{q_x}{q_z}, \quad (45)$$



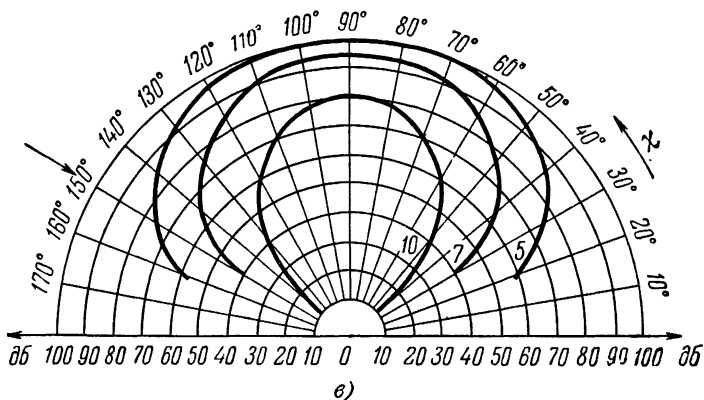


Рис. 41в) Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной случайной поверхности с функцией корреляции  $W(\rho) = \exp\{-\rho^2/l^2\}$  при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 30^\circ$ ;  $\varphi = 90^\circ$ .

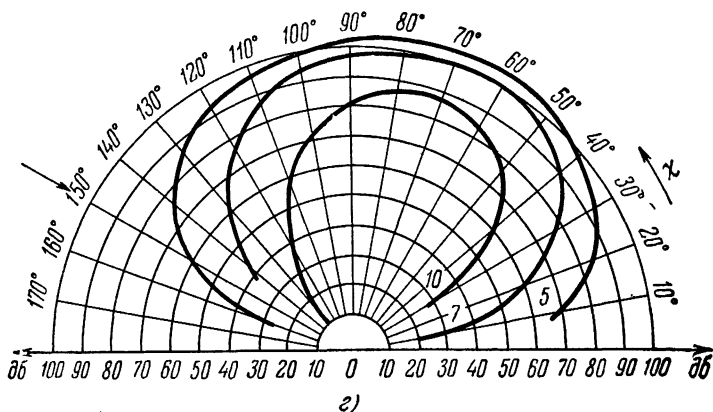


Рис. 41г) Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной случайной поверхности с функцией корреляции  $W(\rho) = \exp\{-\rho^2/l^2\}$  при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 30^\circ$ ;  $\varphi = 60^\circ$ .

а показатель экспоненты можно разложить в ряд по разности  $(x - x_j)$  и ограничиться квадратичным членом

$$q_x x + q_z \zeta(x) \approx q_x x_j + q_z \zeta(x_j) + \frac{1}{2} q_z \zeta_j'' (x - x_j)^2, \quad (46)$$

где

$$\zeta_j'' \equiv \left. \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right|_{x=x_j}.$$

Подставляя (45) и (46) в (44), получаем

$$\begin{aligned} U(k, \kappa) &\sim 2\pi\delta(q_y) \left(q_z + \frac{q_x^2}{q_z}\right) \sum_{j=1}^N \exp\{i[q_x x_j + q_z \zeta(x_j)]\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2} q_z \zeta_j'' (x - x_j)^2\right] dx = \\ &= 2\pi\delta(q_y) \frac{q^2}{q_z} \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2\pi i}{q_z \zeta_j''}} \exp\{i[q_x x_j + q_z \zeta(x_j)]\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Входящие в эту формулу вторые производные  $d^2 \zeta/dx^2$  связаны

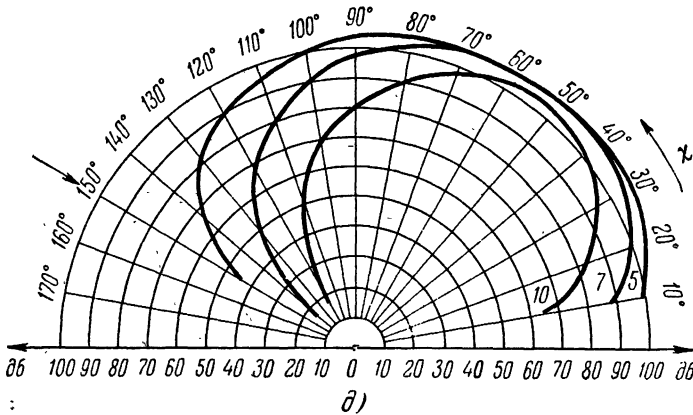


Рис. 41д) Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной случайной поверхности с функцией корреляции  $W(\rho) = \exp\{-\rho^2/l^2\}$  при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 30^\circ$ ;  $\varphi = 30^\circ$ .

с радиусом кривизны поверхности  $a$  соотношением

$$a = \frac{(1 + \gamma_x^2)^{3/2}}{\zeta_j''}, \quad (48)$$

поэтому, учитывая (45), имеем  $\zeta_j'' = \frac{1}{a} \left[1 + \left(\frac{q_x}{q_z}\right)^2\right]^{3/2} = \frac{q^3}{a q_z^3}$ , и фор-

мула (47) приобретает вид

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim (2\pi)^{3/2} \delta(q_y) \sqrt{iq} \sum_{j=1}^N \sqrt{a_j} \exp\{i[q_x x_j + q_z \zeta(x_j)]\}. \quad (49)$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для индикатрисы \*):

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim (2\pi)^2 L \delta(q_y) q \times \left\{ \sum_{j=1}^N |a_j| + \sum_{i \neq k} |a_j a_k|^{1/2} \exp i[q_x(x_j - x_k) + q_z(\zeta_j - \zeta_k)] \right\}. \quad (50)$$

В этой формуле случайными величинами являются не только радиусы кривизны  $a_j$  в каждой точке зеркального отражения  $x_j$ ,

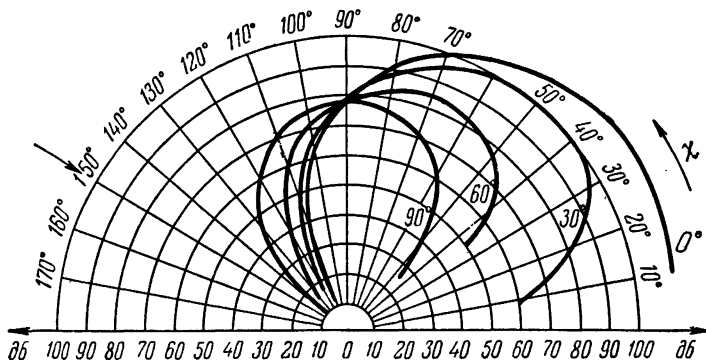


Рис. 42. Индикатрисы рассеяния на трехмерной статистически изотропной нормальной поверхности с гауссовой функцией корреляции при  $\psi = 30^\circ$ ,  $l/\sigma = 10$ ;  $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

но и полное число  $N$  этих точек, которое изменяется от реализации к реализации. Обозначая усреднение по всем реализациям по-прежнему чертой, а усреднение по точкам  $x_j$  — косыми скобками  $\langle \dots \rangle$ , и предполагая для простоты расчета случайные величины  $N$ ,  $a_j$  и  $\zeta_j$  ( $j = 1 \div N$ ) независимыми, получаем из (50):

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \sim (2\pi)^2 L \delta(q_y) q \times \left\{ \overline{N} \langle |a| \rangle + \sum_{i \neq k} \langle |a_j a_k|^{1/2} \rangle \langle \exp [i(\varphi_j - \varphi_k)] \rangle \right\}, \quad (51)$$

\*) Возникающее при возведении в квадрат формулы (49) произведение  $\delta(q_y) \delta(q_y)$  следует на самом деле понимать в смысле

$$\delta_L(q_y) \delta_L(q_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-L/2}^{L/2} dy_1 \int_{-L/2}^{L/2} dy_2 e^{iq_y(y_1 - y_2)} = \frac{L}{2\pi} \delta_L(q_y),$$

где  $L$  — линейный размер поверхности  $S$  в направлении оси  $y$ .

где через  $\varphi_j - \varphi_k$  обозначена разность фаз между лучами, проходящими из зеркальных точек с номерами  $j$  и  $k$  соответственно. Второй член в (51) учитывает возможность когерентности волн, отраженных в разных точках  $x_j$  и  $x_k$  ( $j \neq k$ ). Однако, при высоких неровностях и достаточно коротких волнах, когда  $2k\sigma \sin \psi \gg 1$ , мы вправе ожидать отсутствие когерентности между лучами, проходящими из разных точек, так что этим интерференционным членом можно пренебречь. Действительно, например, для равномерного распределения фазы (см. [191]) в интервале  $-\varphi_m < \varphi_j < \varphi_m$

$$\langle e^{i(\varphi_j - \varphi_k)} \rangle = \frac{\sin^2 \varphi_m}{\varphi_m^2},$$

так что при  $\varphi_m \gg 1$  (что, как нетрудно убедиться, означает  $2k\sigma \sin \psi \gg 1$ ) интерференционный член в (51) исчезает\*), и мы окончательно получаем для индикатрисы (с учетом опущенных ранее множителей):

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{|V|^2 L \delta(q_y)}{4(R_{10} R_{20})^2} q \bar{N} \langle |a| \rangle. \quad (52)$$

Если коэффициент отражения зависит от локального угла падения, то очевидное обобщение этой формулы заключается в том, что вместо  $|V|^2$  следует писать  $|V(\vartheta_0)|^2$ , где  $\cos \vartheta_0 = \mathbf{kq}/(kq)$ . В частности, при  $\mathbf{q} = -2\mathbf{k}$  и  $q_y = 0$  значение  $\delta$ -функции в нуле следует принять равным  $L/2\pi$ , так что для сечения обратного рассеяния из (52) получаем

$$\mathcal{C} = \frac{J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) R_{20}^2}{|U_0|^2} = \frac{|V(\vartheta_0)|^2}{\lambda} \bar{N} L^2 \langle |a| \rangle. \quad (53)$$

Здесь через  $|U_0|^2$  обозначена плотность потока энергии падающего поля и учтено, что  $U_0 \sim 1/R_{10}$ . Формула (53) по виду совпадает с сечением обратного рассеяния от  $\bar{N}$  цилиндров (см., например, [192], [193]), каждый из которых имеет радиус  $\langle a \rangle$  и длину  $L$ , в пренебрежении переизлучением и интерференцией.

В случае трехмерных неровностей  $z = \xi(\mathbf{r})$  асимптотическая оценка интеграла (44) при  $k \rightarrow \infty$  производится аналогично, с тем лишь отличием, что вместо однократного интеграла следует вычислить методом стационарной фазы двойной интеграл. При этом в формуле типа (47) знаменатель подкоренного выражения несколько усложняется — вместо  $\xi_j''$  появляется квадратичная форма от вторых производных  $\xi_x'', \xi_{xy}'', \xi_y''$ , которая в свою очередь может быть выражена через полную гауссову кривизну поверхности в точке

\*) В случае нормального распределения фаз  $\varphi_j$  интерференционный член в (51) экспоненциально мал, если фазы волн, проходящих от различных зеркальных точек, считать независимыми:

$$\langle \exp [i(\varphi_j - \varphi_k)] \rangle = e^{-\varphi^2}.$$

зеркального отражения. Не проводя этих довольно громоздких вычислений\*), мы приведем лишь результат [190] для сечения обратного рассеяния:

$$\sigma = \frac{|V(\vartheta_0)|^2}{2} \bar{N} \langle |\mathcal{K}^{-1}| \rangle. \quad (54)$$

Здесь через  $\langle |\mathcal{K}| \rangle$  обозначена средняя гауссова кривизна поверхности в зеркальных точках, связанная с главными радиусами кривизны  $a_1$  и  $a_2$  соотношением (см., например, [194])  $\mathcal{K} = (a_1 a_2)^{-1}$ . Формуле (54), обобщающей (53) на случай трехмерных неровностей, также можно придать простой геометрический смысл: сечение рассеяния от неровной поверхности в приближении геометрической оптики ( $k \rightarrow \infty$ ) в среднем совпадает с сечением рассеяния на  $\bar{N}$  шарах, радиус  $a$  каждого из которых равен среднему геометрическому от главных радиусов кривизны  $a^2 = \langle |\mathcal{K}^{-1}| \rangle = \langle |a_1 a_2| \rangle$  поверхности в точках зеркального отражения. Что же касается зависимости сечений (53), (54) или индикатрисы (52) от угла скольжения и наблюдения, то для ее определения следует решить геометрическую задачу о среднем числе точек с заданным наклоном  $\gamma_0 = -q_{\perp}/q_z$  (которые к тому же не затенены) и определить среднюю кривизну поверхности в этих зеркально отражающих точках. Задача такого сорта для определенного класса статистически однородных неровных поверхностей с привлечением теории случайных функций исследовалась в работе [200]. Мы же в качестве иллюстрации рассмотрим довольно простую задачу о рассеянии на синусоиде со случайной фазой.

4. Итак, пусть уравнение поверхности задано в виде

$$z = \zeta(x) = \zeta_0 \sin(x/l + \varphi). \quad (55)$$

Здесь  $\varphi$  — случайная фаза, равномерно распределенная в интервале  $(0 \div 2\pi)$ . Точки зеркального отражения определяются из уравнения вида (45):

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\zeta_0}{l} \cos\left(\frac{x}{l} + \varphi\right) = -\frac{q_x}{q_z}, \quad (56)$$

решения которого можно представить в следующей форме (при  $\left| \frac{q_x l}{q_z \zeta_0} \right| < 1$ ):

$$\left(\frac{x}{l} + \varphi\right)_n = 2n\pi \pm \arccos\left(-\frac{q_x l}{q_z \zeta_0}\right). \quad (57)$$

\*) В общем случае такие интегралы были вычислены в работах [195], [196], где исследовался вопрос об однократном отражении волны произвольной формы (с переменной, вообще говоря, кривизной волнового фронта) от произвольной, но достаточно гладкой поверхности в приближении геометрической оптики. Некоторые частные случаи исследовались ранее в работах [197]—[199].

Таким образом, на каждом периоде синусоиды имеются две стационарные точки, что, конечно, и следовало ожидать из элементарных геометрических соображений (рис. 43). Радиус кривизны в каждой из зеркальных точек (57) можно найти по формуле (48), предварительно вычислив вторую производную:

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} \Big|_{x_n} = -\frac{\zeta_0}{l^2} \sin\left(\frac{x}{l} + \varphi\right)_n = \pm \frac{\zeta_0}{l^2} \sqrt{1 - \left(\frac{q_x l}{q_z \zeta_0}\right)^2}, \quad (58)$$

так что модуль радиуса кривизны оказывается одинаковым для всех зеркальных точек и

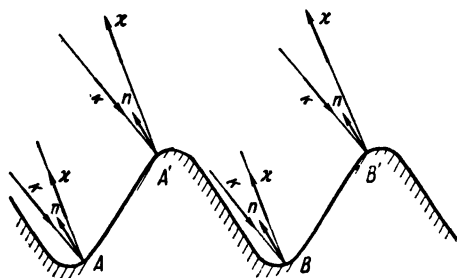


Рис. 43. Зеркальные точки при отражении от поверхности синусоидального профиля.

ного отражения равно удвоенному числу периодов синусоиды, которые укладываются на отрезке  $L_x$ :

$$N = \frac{L_x}{\pi l}. \quad (60)$$

Подставляя (59) и (60) в (52) и вводя площадь рассеивающей поверхности  $S_0 = L_x L_y$ , получаем для индикатрисы

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{|V(\vartheta_0)|^2}{4\pi (R_{10} R_{20})^2} S_0 \delta(q_y) \frac{q^4 l}{q_z^2 \zeta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{q_x l}{q_z \zeta_0}\right)^2}}. \quad (61)$$

Формула (61) справедлива только для тех углов, где решения уравнения (56) существуют, т. е. при  $\left|\frac{q_x}{q_z}\right| \leq \frac{\zeta_0}{l}$ . Для остальных направлений рассеяния ( $\left|\frac{q_x}{q_z}\right| > \frac{\zeta_0}{l}$ ) на синусоиде с высотой  $\zeta_0$  и периодом  $2\pi l$  нет зеркально отражающих точек, и поле, рассчитываемое в данном приближении ( $k \rightarrow \infty$ ), оказывается равным нулю. Направление рассеяния, для которого  $|q_x l / q_z| = \zeta_0 / l$ , является границей между областями «света» и «тени», т. е. соответствует каустике в отраженной волне.  $J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})$  при этом обращается в бесконечность (как и должно быть в приближении геометрической оптики) из-за того, что соответствующие этому направлению

зеркальные точки на поверхности являются точками перегиба, в которых, как видно из (59),  $|a| = \infty$ .

Запишем формулу (61) в более компактной форме, введя распределение углов наклона в синусоиде (55). Так как  $\gamma(x) = \frac{d\zeta}{dx}$  также является синусоидой (сдвинутой лишь на фазу  $\pi/2$  относительно  $\zeta(x)$ ), то распределение  $\gamma(x)$  имеет вид (7):

$$w(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_m^2 - \gamma^2}} & \text{при } |\gamma| < \gamma_m, \\ 0 & \text{при } |\gamma| > \gamma_m, \end{cases} \quad (62)$$

где  $\gamma_m = \zeta_0/l$  — максимальный тангенс наклона в синусоиде  $\zeta = \zeta_0 \sin(x/l + \varphi)$ , и вместо (61) получаем

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{|V(\theta_0)|^2}{4(R_{10}R_{20})^2} S_0 \delta(q_y) \frac{q^4}{q_z^3} w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right). \quad (63)$$

Эта формула совпадает с полученным ранее общим соотношением (37), если в последнем учесть двумерный характер неровностей —

$$w\left(\gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z}\right) = \delta\left(\frac{q_y}{q_z}\right) w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right) = q_z \delta(q_y) w\left(\gamma_x = -\frac{q_x}{q_z}\right).$$

Следует отметить, что при достаточно малых углах скольжения  $\psi$  или наблюдениях  $\chi$ , когда  $\min\{\operatorname{tg} \psi, \operatorname{tg} \chi\} < \gamma_m$ , половина зеркально отражающих точек (нижние точки  $A, B$  и т. д. на рис. 43) может оказаться в тени, так что интенсивность рассеяния в соответствующем направлении будет в два раза меньше, чем определенная по формуле (61).

## § 21. Рассеяние электромагнитных волн

При рассеянии электромагнитных волн на поверхности с достаточно крупномасштабными и гладкими неровностями метод касательной плоскости может быть применен при тех же ограничениях, что и в задаче о рассеянии скалярных волн (см. [48], [201] — [203]). Действительно, при получении неравенства (19. 3), выполнение которого обеспечивает локальность отражения «в малом», мы использовали лишь волновой характер поля, — пространственную периодичность с длиной волны  $\lambda$ . То обстоятельство, является поле скалярным или векторным, при этом не играло никакой роли. Что же касается требования отсутствия затенений или многократных отражений (переизлучений), то оно имеет только геометрический смысл и, естественно, также не зависит от характера (скалярного или векторного) волнового поля. Ниже мы покажем, как результаты предыдущих двух параграфов могут быть обобщены на случай рассеяния электромагнитных волн.

1. Рассеянное электромагнитное поле  $E$  в точке наблюдения  $R$  связано со значениями полей  $E$  и  $H$  на произвольной замкнутой поверхности  $S$  векторной формулой Грина (2.9), которая при  $\mathcal{G} = \exp[ikR]/R$  переходит в

$$E = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ ik [nH] \frac{e^{ikR}}{R} + (nE) \nabla \frac{e^{ikR}}{R} + [[nE] \nabla] \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS, \quad (1)$$

— формулу Стреттона-Чу. Если поверхность  $S$  не является замкнутой, то путем несложных преобразований, в точности аналогичных тем, которые были проведены в § 19 для скалярного поля, получаем формулу, обобщающую (19.7) на электромагнитный случай:

$$E(R) = \frac{ik}{4\pi} \int_S \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} \left\{ [n, H - H^0] - (n, E - E^0) \beta + \right. \\ \left. + [\beta [n, E - E^0]] \right\} dS. \quad (2)$$

При этом падающее на поверхность, поле (поле источников) мы записали в виде

$$E^{(i)}(r \in S) = E^0 \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \quad H^{(i)}(r \in S) = H^0 \frac{e^{ikR_1}}{R_1},$$

и предположили, что источник  $O$  и точка наблюдения находятся в волновой зоне относительно поверхности. Все остальные обозначения такие же, как и в § 19 (см. рис. 29). Для зоны Фраунгофера, в частности, получаем

$$E(k, \kappa) = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10} R_{20}} \int_{S_0} \left\{ [n, H - H^0] - (n, E - E^0) \beta + \right. \\ \left. + [\beta [n, E - E^0]] \right\} e^{i[(k-\kappa, r)+(k_2-\kappa_2)z]} \frac{dr}{n_z}. \quad (3)$$

2. В простейшем случае идеально проводящей поверхности, когда [см. (2. 33), (2. 34)]

$$(nE) = 2(nE^0), \quad [nH] = 2[nH^0], \quad (4)$$

для поля, рассеянного в направлении  $\kappa$ , имеем, следовательно,

$$E(k, \kappa) = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10} R_{20}} \int_{S_0} \left\{ [n[\alpha E^0]] - (nE^0) \beta + \right. \\ \left. + [\beta [nE^0]] \right\} e^{-i\{qr+q_2z(r)\}} \frac{dr}{n_z}. \quad (5)$$

При этом мы воспользовались условием поперечности электромагнитных волн  $H^0 = [kE^0]/k$  и обозначениями из § 19:  $q = \kappa - k$ ,



$\mathbf{k} = k\boldsymbol{\alpha} = k \nabla R_1$ ,  $\boldsymbol{\kappa} = k\boldsymbol{\beta} = -k \nabla R_2$ . Легко видеть, что формула (5) полностью аналогична формуле (19.16) при  $V = 1$  (идеально отражающая поверхность), отличаясь от нее лишь видом предэкспоненциального множителя, зависящего только от направления нормали  $\mathbf{n}$  в каждой точке  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  области интегрирования  $S_0$  ( $S_0$  — проекция поверхности  $S$  на плоскость  $z = 0$ ).

В дальнейшем нас будет интересовать лишь коротковолновая асимптотика ( $q_z \sigma \gg 1$ ) интеграла (5), ибо, как отмечалось в предыдущем параграфе, в обратном предельном случае ( $q_z \sigma \ll 1$ ) мы приходим к формулам теории возмущений. При асимптотической оценке интеграла (5) медленно изменяющиеся (зависящие только от  $\mathbf{n}$ ) предэкспоненциальные множители могут быть вынесены за знак интеграла в точках стационарной фазы (20.34б)  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{q}/q$ . После несложных векторных преобразований из (5) получаем

$$E(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \approx \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{R_{10} R_{20}} \frac{|\beta[E^0 \mathbf{q}]|}{q_z} \int_{S_0} e^{-i|\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})|} d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Таким образом, векторный множитель, определяющий поляризацию рассеянного поля, оказывается вынесенным за знак интеграла в зеркально отражающих точках, а все статистические характеристики поля определяются интегралом

$$\int_{S_0} e^{-i|\mathbf{q}\mathbf{r} - q_z \zeta(\mathbf{r})|} d\mathbf{r}, \quad (7)$$

подробное исследование которого мы провели в предыдущем параграфе. Поэтому для электромагнитного поля остаются в силе почти все результаты, полученные для рассеяния скалярных волн. В частности, коэффициент отражения среднего (когерентного) поля совпадает с одномерной характеристической функцией [ср. (20.3)], а распределение интенсивности по направлениям (индикатриса рассеяния), определяемое средним значением билинейных комбинаций  $E_i E_k^*$ , связано с плотностью вероятности углов наклона  $w(\gamma)$  соотношением типа (20.37).

Единственное качественное различие между рассеянием скалярных и электромагнитных волн заключается в изменении поляризации последних при отражении от неровной поверхности. Действительно, из (6) видно, что поляризация отраженного поля  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, не совпадает с поляризацией падающего поля  $\mathbf{E}^0$ . Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Учтем, что единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности в точке стационарной фазы связан с векторами  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\mathbf{q}$  простыми соотношениями, вытекающими из (20.34б),

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - 2\mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{q} = k(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) = 2k\mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\beta}), \quad (8)$$

подставляя которые в векторный множитель в формуле (6), получаем

$$[\beta [E^0 q]] = 2k (n_0 \alpha)^2 \{E^0 - 2n_0 (n_0 E^0)\}, \quad n_0 = q/q. \quad (9)$$

Таким образом, деполяризация рассеянного поля оказывается в точности такой же, как и при отражении от идеально проводящей плоскости с единичным вектором нормали равным  $n_0$ . Этот результат можно было предвидеть заранее, если учесть, что при  $k \rightarrow \infty$  вклад в рассеянное поле дают только зеркально отражающие точки с  $n = n_0 = q/q$ , причем отражение в каждой из них происходит так же, как и от касательной плоскости. Подставляя (9) в (6), имеем окончательно:

$$E_i(k, \mathbf{x}) \approx \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \frac{q^2}{q_z} T_{ij}^{(e)}(n_0) E_j^{(0)} \int_{S_0} e^{-i\{qr + q_z \zeta(r)\}} dr. \quad (10)$$

Здесь по дважды повторяющемуся индексу, как всегда, подразумевается суммирование от 1 до 3 и введен тензорный коэффициент отражения  $T_{ik}^{(e)} = -\delta_{ik} + 2n_i n_k$  [см. (2.32)]. Аналогичные вычисления для магнитного поля приводят к такой же формуле с заменой  $E_i$ ,  $E_j$  и  $T_{ij}^{(e)}$  на  $H_i$ ,  $H_j$  и  $T_{ij}^{(h)}$  соответственно.

Воспользовавшись асимптотической оценкой среднего от квадрата модуля интеграла (7), которая была проведена в предыдущем параграфе, приходим к следующему выражению для поляризационной матрицы:

$$J_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \frac{T_{in}^{(e)} T_{km}^{(e)*} E_n^0 E_m^{*0}}{4 (R_{10} R_{20})^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} S_0 w \left( \gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z} \right). \quad (11)$$

Единственное отличие формулы (11) от соответствующего ей в скалярном случае выражения (20.37) заключается в замене скалярного коэффициента отражения  $V(\Phi_0)$  на тензорный  $T_{ik}^{(e)}(n_0)$ .

В радиолокационном случае, когда  $\beta = -\alpha$ ,  $q = 2k\beta$  и  $n_0 = \beta$ , из (10) получаем

$$E(k, -k) \sim -2\beta (\beta E^0) + E^0 = E^0. \quad (12)$$

Таким образом, мы приходим к весьма важному выводу: в приближении Кирхгофа при  $(2k\sigma \sin \psi)^2 \gg 1$  [именно в этом предельном случае мы вычисляли интегралы типа (7)] отсутствует деполяризация радиолокационного сигнала, отраженного от идеально проводящей шероховатой поверхности. В общем же случае не совмещенных источника и приемника для анализа рассеянного поля вектор поляризации падающей волны удобно задавать в базисе, связанном с плоскостью падения (рис. 44): вертикальной поляризации соответствует тот случай, когда вектор  $E^0$  лежит в плоскости падения ( $E_y^0 = 0$ ), а горизонтальной — когда он пер-

пендикулярен к ней ( $E_x^0, E_z^0 = 0$ ), так что векторы  $i_r, i_v$  и  $k$  образуют правую тройку векторов. Аналогичный базис введем и в точке наблюдения (см. рис. 44): орт  $i_x$  направим по меридиану, а орт  $i_\varphi$  — по азимуту так, чтобы  $i_\varphi, i_x$  и  $k$  также образовали правую тройку ортогональных векторов. Ограничимся для простоты исследованием лишь диагональных элементов матрицы  $J_{ik}$  в базисе  $i_\varphi, i_x$  при двух поляризациях падающей волны — вертикальной и горизонтальной. Интенсивность флуктуаций азимутальной компоненты вектора электрического поля  $E_\varphi$  (т. е. интенсивность «горизонтальной» поляризации в точке наблюдения), возникающую при облучении поверхности полем вертикальной поляризации, обозначим через  $J_{\varphi\varphi}^{(v)}$ . Аналогичные обозначения введем и для других диагональных элементов матрицы (11) при вертикальной (v) и горизонтальной (r) поляризации падающего поля. Из (11) следует, как нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$J_{\varphi\varphi}^{(v)} = J_{\chi\chi}^{(r)} \quad \text{и} \quad J_{\varphi\varphi}^{(r)} = J_{\chi\chi}^{(v)}.$$

Для статистически изотропной поверхности с нормальным законом распределения и гауссовой функцией корреляции  $W(\rho) = e^{-\rho^2/l^2}$  из (11) получаем следующие формулы для интенсивности флуктуаций при линейной поляризации (v или r) падающего поля и приемной антенны ( $\chi$  или  $\varphi$ ):

$$J_{\varphi\varphi}^{(v)} = J_{\chi\chi}^{(r)} = \frac{S_0 |E^0|^2 l^2}{4\pi R_{10}^2 R_{30}^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma^2 (\sin \psi + \sin \chi)^2} \times \\ \times \exp \left\{ - \left( \frac{l}{2\sigma} \right)^2 \frac{\cos^2 \psi + \cos^2 \chi - 2 \cos \psi \cos \chi \cos \varphi}{(\sin \psi + \sin \chi)^2} \right\},$$

$$J_{\varphi\varphi}^{(r)} = J_{\chi\chi}^{(v)} = \frac{S_0 |E^0|^2 l^2}{4\pi R_{10}^2 R_{30}^2} \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{\cos \psi \cos \chi - \cos \varphi (1 + \sin \psi \sin \chi)}{(\sin \psi + \sin \chi)^2} \right]^2 \times \\ \times \exp \left\{ - \left( \frac{l}{2\sigma} \right)^2 \frac{\cos^2 \psi + \cos^2 \chi - 2 \cos \psi \cos \chi \cos \varphi}{(\sin \psi + \sin \chi)^2} \right\}.$$

Типичные индикатрисы рассеяния, построенные в [170] по этим формулам, приведены на рис. 45—48: по радиусам в логарифмическом масштабе отложено сечение рассеяния различных поляризаций — в децибелах под произвольным уровнем.

3. Не сложно обобщить полученные выше результаты для случая рассеяния на поверхности с произвольной диэлектрической

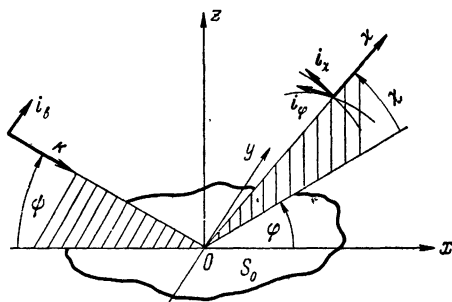


Рис. 44.

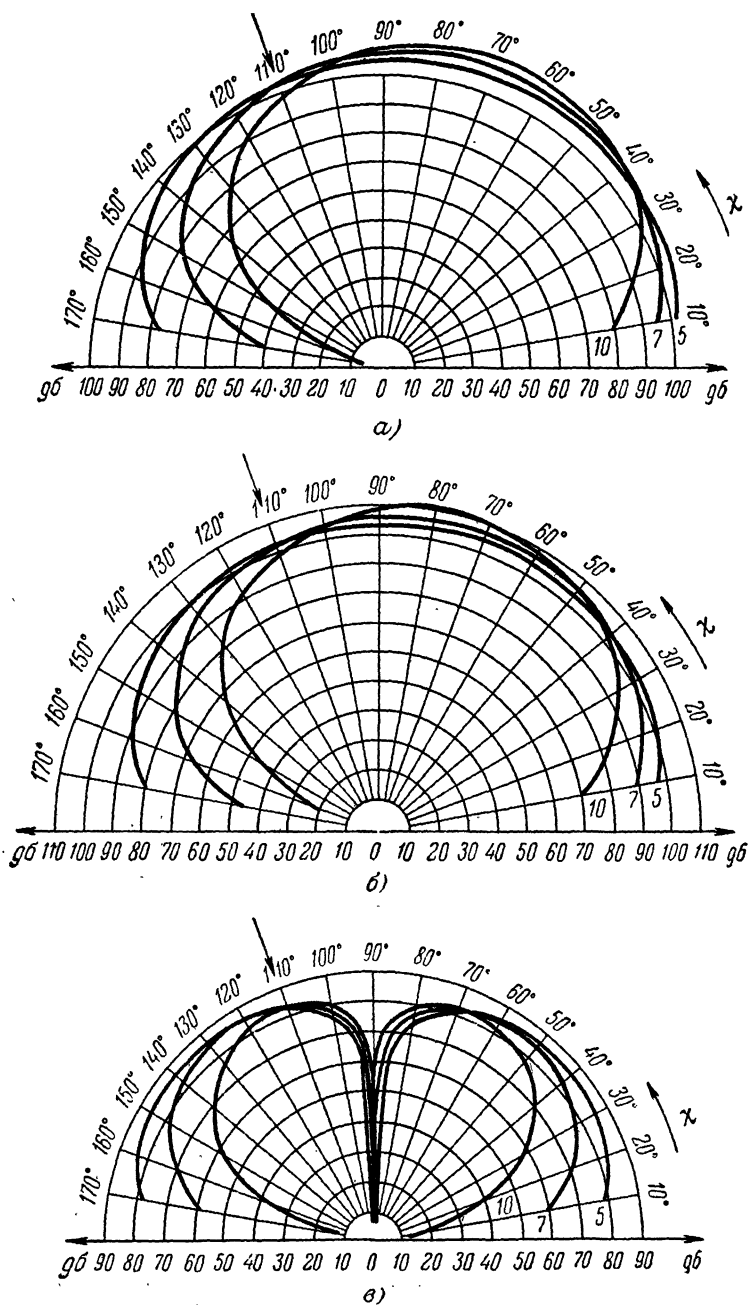


Рис. 45. Индикатрисы рассеяния на идеально проводящей поверхности поля вертикальной и горизонтальной поляризации  $J_{\Phi\Phi}^{(B)} = J_{\chi\chi}^{(r)}$  как функции угла места  $\chi$  при  $\psi = 70^\circ$ ,  $l/\sigma = 5, 7, 10$  и различных азимутах: а)  $\psi = 0^\circ$ ; б)  $\psi = 30^\circ$ ; в)  $\psi = 90^\circ$ .

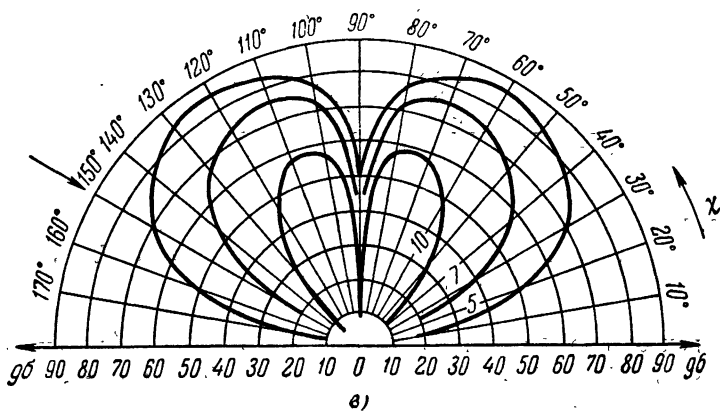
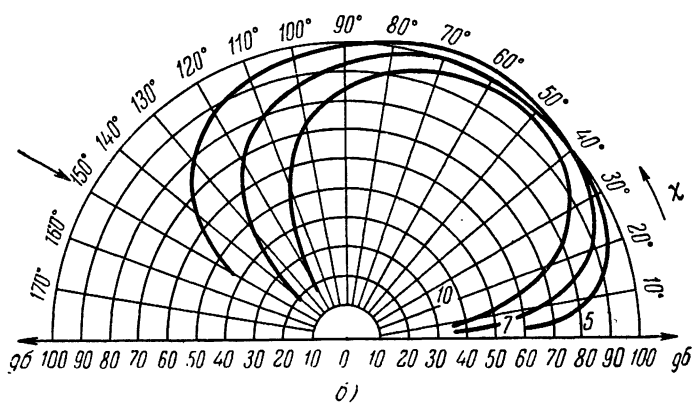
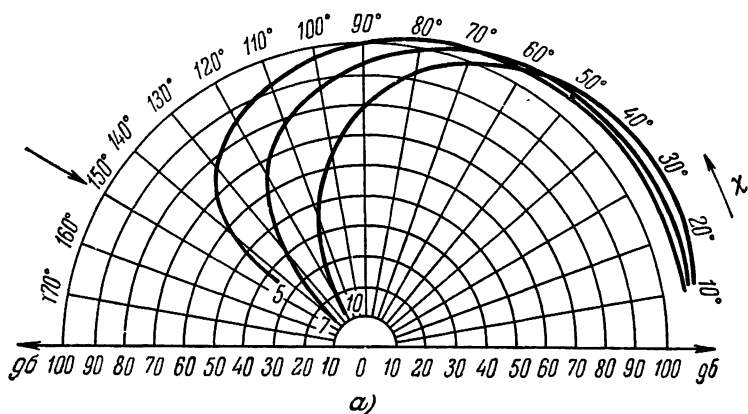


Рис. 46. То же, что и на рис. 45 при  $\psi = 30^\circ$  и а)  $\varphi = 0^\circ$ ; б)  $\varphi = 30^\circ$ ; в)  $\varphi = 90^\circ$ .

проницаемостью и проводимостью, когда  $\varepsilon \neq \infty$  (см. по этому поводу работы [170], [184]—[188]). Действительно, при  $k \rightarrow \infty$  мы уже в исходной формуле (3) можем вынести за знак интеграла преэкспоненциальные множители при  $n = n_0 = q/q$ . Вводя

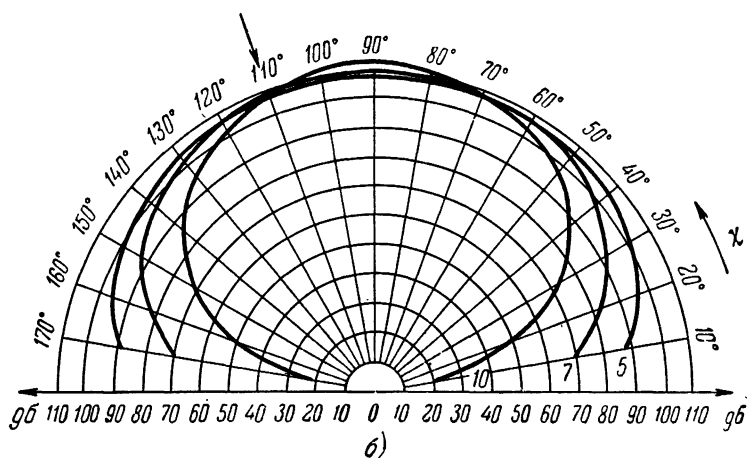
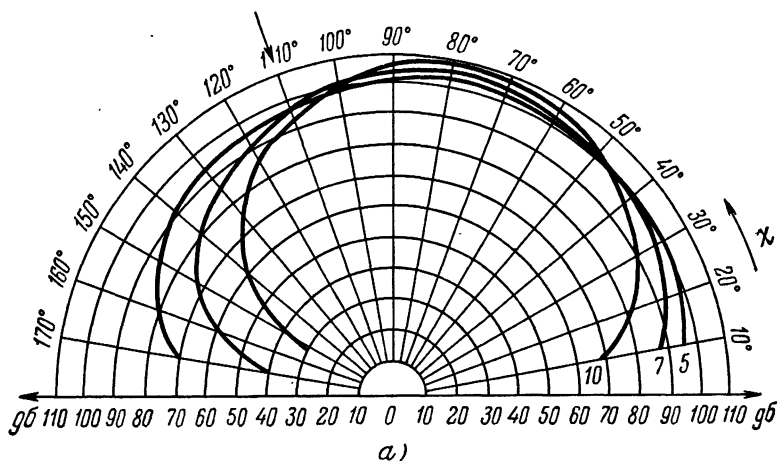


Рис. 47. Индикатрисы рассеяния в ортогональную поляризацию  $J_{\varphi\varphi}^{(b)} = J_{\chi\chi}^{(r)}$  при отражении от идеально проводящей поверхности при  $l/\sigma = 5, 7, 10$ ;  $\psi = 70^\circ$  и а)  $\varphi = 30^\circ$ ; б)  $\varphi = 90^\circ$ .

далее векторную амплитуду отраженного поля  $E^r = E - E^0$  на плоскости, касательной к поверхности  $S$  в точке зеркального отражения, имеем

$$H^r = H - H^0 = [\beta E^r], \quad (13)$$

так что векторный множитель в (3) (но уже вынесенный за знак интеграла) принимает вид

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{H} - \mathbf{H}^0] - (\mathbf{n}_0, \mathbf{E} - \mathbf{E}^0) \boldsymbol{\beta} + [\boldsymbol{\beta} [\mathbf{n}_0, \mathbf{E} - \mathbf{E}^0]] = \\ = [\mathbf{n}_0 [\boldsymbol{\beta} \mathbf{E}^r]] - (\mathbf{n}_0, \mathbf{E}^r) \boldsymbol{\beta} + [\boldsymbol{\beta} [\mathbf{n}_0 \mathbf{E}^r]] = -2(\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\beta}) \mathbf{E}^r. \quad (14)$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$2 \frac{(\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\beta})}{n_z} = \frac{q^2}{k q_z}. \quad (15)$$

Подставляя эти соотношения в (3), имеем при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \approx \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \frac{q^2}{q_z} \mathbf{E}^r \int_{S_0} e^{-i[\mathbf{q}r + q_z \zeta(r)]} d\mathbf{r}. \quad (16)$$

В свою очередь  $\mathbf{E}^r$  можно выразить через падающее поле  $\mathbf{E}^0$  с помощью тензорных коэффициентов отражения от плоскости с  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ :

$$\mathbf{E}_i^r = T_{ij}^{(e)}(\mathbf{n}_0) E_j^0$$

— формула (2.25) из гл. I.

Таким образом, мы приходим к тем же формулам (10) и (11), что и для идеально проводящей поверхности, в которых, однако, тензор  $T_{ij}^{(e)}$  имеет более сложный вид (2.26). Заметим, что инвариантная форма записи в (10) и (11) позволяет применять указанные формулы к рассеянию на поверхности с произвольным  $\varepsilon$  не только линейной поляризованной, но и эллиптически поляризованной волны. Более того, так как  $\varepsilon$ , как правило, имеет не равную нулю мнимую часть, то компоненты тензоров  $T_{ik}^{(e)}$ ,  $T_{ik}^{(h)}$  являются комплексными и это может привести, например, к тому, что линейно поляризованная волна после отражения от поверхности станет эллиптически поляризованной.

Следует еще раз подчеркнуть то обстоятельство, что деполяризация рассеянных электромагнитных волн, возникающая при расчете по методу Кирхгофа при  $q_z \sigma \gg 1$ , никак не связана со статистическими свойствами поверхности, а определяется лишь наклоном касательной плоскости в точках зеркального отражения. Направление вектора нормали  $\mathbf{n}_0$  к этой плоскости (и, следовательно, поляризация отраженного сигнала) связано с направлением волнового вектора падающей волны  $\mathbf{k}$  и направлением в точке наблюдения  $\boldsymbol{\kappa}$  соотношением (20.34б)  $\mathbf{n}_0 = \frac{\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}}{|\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}|}$ . Поэтому для определения поляризации поля, рассеянного в данном направлении, можно сразу воспользоваться векторной (20.21) или тензорной (2.26) формой коэффициентов Френеля (см., например, [204]) с  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$  и  $\vartheta = \vartheta_0 = \arccos(\mathbf{n} \boldsymbol{\beta})$ .

В частности, в радиолокационном случае деполяризация всегда отсутствует \*), так как при  $n_0 = \beta = -\alpha$  имеем:

$$\begin{aligned} T_{ik}^{(e)} &= V_r \delta_{ik}, & \text{т. е. } E(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) &\sim V_r E^0; & (17) \\ T_{ik}^{(h)} &= -V_B \delta_{ik}, & \text{т. е. } H(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) &\sim V_B H^0. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации результатов этого пункта на рис. 49 приведены графики из работы [170] для индикатрисы рассеяния

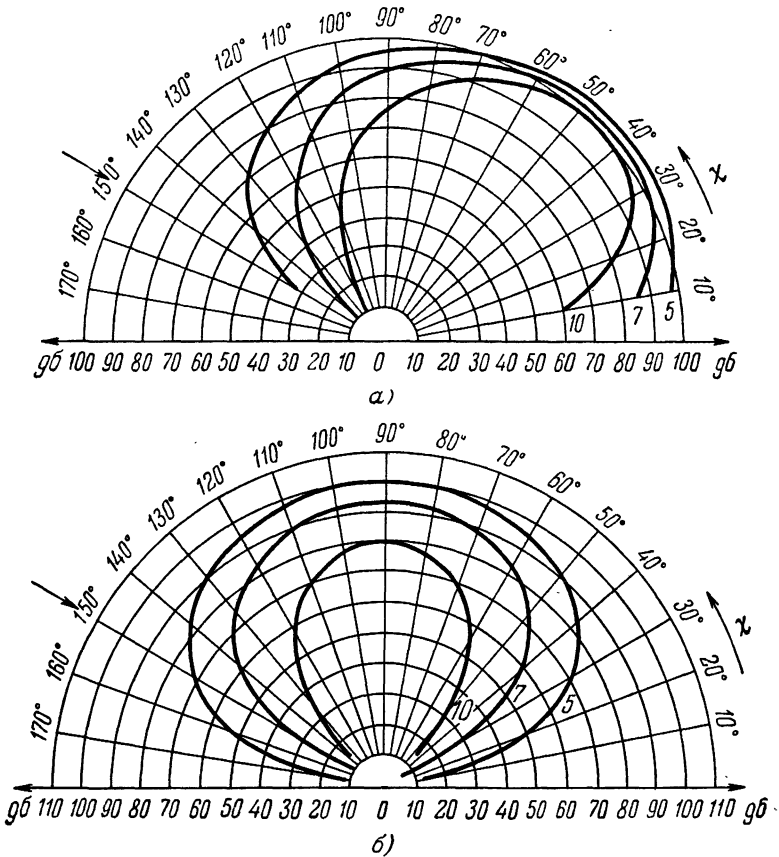


Рис. 48. То же, что и на рис. 47 при  $\psi = 30^\circ$  и а)  $\varphi = 30^\circ$ , б)  $\varphi = 90^\circ$ .

вертикально и горизонтально поляризованного излучения на статистически изотропной гауссовой поверхности с функцией

\*) В работе [205] в приближении Кирхгофа была получена деполяризация радиолокационного сигнала при  $\epsilon \neq \infty$ . Однако этот результат был следствием ошибки, которая была обнаружена самим автором в работе [206].



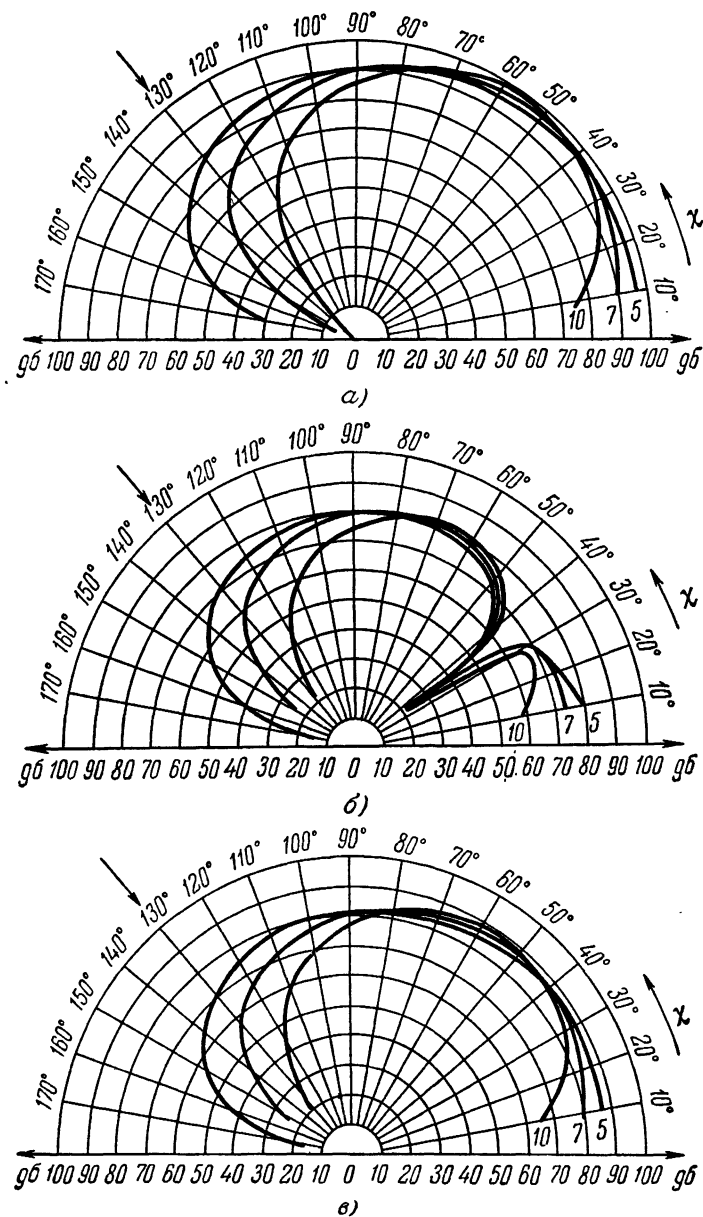


Рис. 49. Индикатрисы рассеяния электромагнитного поля на статистически изотропной нормальной поверхности, являющейся границей раздела двух сред с относительным показателем преломления  $n=1,33$  при  $l/\sigma=5, 7, 10$ ,  $\psi=50^\circ$ ,  $\varphi=30^\circ$ : а)  $J_{\varphi\varphi}^{(B)}=J_{\chi\chi}^{(r)}$ ; б)  $J_{\chi\chi}^{(B)}$ ; в)  $J_{\varphi\varphi}^{(r)}$ .

корреляции  $W(\rho) = e^{-\rho^2/l^2}$ , которая является границей раздела сред с относительным показателем преломления  $n_{2,1} = 1,33$  (граница воздух — вода в диапазоне видимого света).

## § 22. Учет затенений при отражении от статистически неровной поверхности

На принципиальную возможность учета затенений рассеивающей поверхности при решении задачи дифракции методом Кирхгофа указывалось еще в работах [44], [47]. В частности, в работе [47] было предложено при наличии затенений поверхности модифицировать исходную формулу (19.18) таким образом, чтобы интегрирование производилось не по всей поверхности  $S$ , а только по освещенной ее части. Для детерминированных (не случайных) поверхностей произвести такое обобщение метода достаточно просто: например, можно не учитывать зеркальных точек, находящихся в тени, — в точности так же, как мы поступили в последнем пункте § 20 при расчете поля, отраженного от синусоидальной поверхности. Однако для статистически неровных поверхностей задача об усреднении по реализациям при наличии затенений далеко не тривиальна.

1. Обратимся сначала к исследованию простейшего случая рассеяния скалярного поля  $U$  на абсолютно жесткой поверхности  $S$ . Полученные при этом результаты без особых затруднений обобщаются на поверхность с произвольной жесткостью (в том числе на абсолютно мягкую), а также на случай рассеяния электромагнитных волн.

Формула Грина (1.4) принимает в нашем случае вид

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \int_S G_0(\mathbf{R} - \mathbf{r}) U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где

$$G_0(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n(r)} \frac{e^{ik(R-r)}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

и  $U_0(\mathbf{R})$  — поле заданных источников в безграничной среде. Для определения поля  $U$  на поверхности  $S$  имеем интегральное уравнение, являющееся следствием формулы Грина (1):

$$U(\mathbf{r}) = 2U_0(\mathbf{r}) + \int_S G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (2) соответствует приближению касательной плоскости без учета затенений и переизлучений. Действительно, коэффициент отражения от абсолютно жесткой границы равен  $V = 1$  и соотношение  $U(\mathbf{r}) = 2U_0(\mathbf{r})$  является частным случаем формулы (19.1а). С другой стороны, легко видеть,

что если поверхность  $S$  является плоскостью, то интегральный член в (2) исчезает за счет обращения в нуль  $\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}_1)} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$  при  $z = z_1 = 0$ . При неплоской поверхности  $S$  наличие в (2) интегрального члена приводит к нелокальной связи между падающим и отраженным полями в каждой точке поверхности. Тем самым неявно учитываются как затенения поверхности, так и переизлучение рассеянного поля — многократные отражения.

Представим решение уравнения (2) формально в виде бесконечного ряда итераций (см. [207]):

$$U(\mathbf{r}) = 2 \sum_{q=0}^{\infty} U^{(q)}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$U^{(0)}(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \int_S \dots \int_S^q G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q) G_0(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{q-1}) \dots \dots G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) U_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_q. \quad (5)$$

Этот бесконечный ряд в случае достаточно длинных волн и полых неровностей (точнее, при  $k\sigma^2/l \ll 1$ ,  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$ ) является рядом теории возмущений, суммирование которого для статистически неровных поверхностей приводит к нормальной функции ослабления Зоммерфельда для среднего поля. Именно таким путем функция ослабления среднего поля над неровной поверхностью была получена впервые Фейнбергом [20]. Заметим, что при  $k\sigma^2/l \ll 1$  и  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  ядро интегрального уравнения (2) оказывается разностным и поэтому его решение не вызывает затруднений, так что суммирование ряда (3) в данном случае является не самым удобным приемом решения уравнения (2).

Здесь же мы будем рассматривать в некотором смысле другой предельный случай — короткие волны и крупные крутые неровности. Покажем прежде всего, что при вычислении коротковолновой асимптотики ( $k \rightarrow \infty$ ) в интеграл по  $d\mathbf{r}_{i-1}$  в формуле (5) существенно входят только те участки поверхности  $S$ , которые «видны» (взаимно не затенены) из точек  $\mathbf{r}_i \in S$ ; при вычислении интеграла по  $d\mathbf{r}_i$  существенно только та часть поверхности, которая «видна» из точек  $\mathbf{r}_{i+1}$  и т. д. Предположим, например, что точка  $\mathbf{r}_i$  находится в тени по отношению к точке  $\mathbf{r}_{i+1}$  (рис. 50)

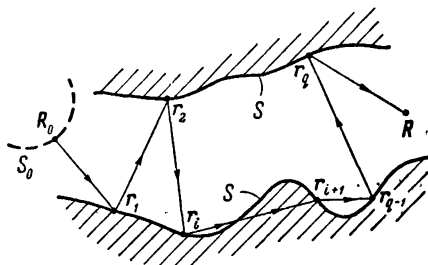


Рис. 50.

в том смысле, что отрезок прямой, которая их соединяет, пересекается с поверхностью (не обязательно, кстати, односвязной) в произвольной точке или во множестве точек, лежащих между  $r_i$  и  $r_{i+1}$ . Перегруппируем члены ряда (3) следующим образом:

$$U(r) = 2 \sum_{q=0}^{\infty} U_{(i)}^{(q)}(r), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_{(i)}^{(q)}(r) &= \int_S \dots \int_S G_0(r-r_q) G_0(r_q-r_{q-1}) \dots G_0(r_{i+1}-r_i) \dots \\ &\dots G_0(r_2-r_1) U_0(r_1) dr_1 \dots dr_q + \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \dots \int_S G_0(r-r_q) \dots \\ &\dots G_0(r_{i+1}-r^{(n)}) G_0(r^{(n)}-r^{(n-1)}) \dots G_0(r^{(1)}-r_i) G_0(r_i-r_{i-1}) \dots \\ &\dots G_0(r_2-r_1) U_0(r_1) dr^{(1)} \dots dr^{(n)} dr_1 \dots dr_q = \\ &= \int_S \dots \int_S G_0(r-r_q) G_0(r_q-r_{q-1}) \dots G_0(r_{i+2}-r_{i+1}) \mathcal{G}(r_{i+1}, r_i) \times \\ &\times G_0(r_i-r_{i-1}) G_0(r_2-r_1) U_0(r_1) dr_1 \dots dr_q, \quad (7) \end{aligned}$$

где через  $\mathcal{G}(r_{i+1}, r_i)$  обозначена сумма

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r_{i+1}, r_i) &= G_0(r_{i+1}-r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \dots \int_S G_0(r_{i+1}-r^{(n)}) \times \\ &\times G_0(r^{(n)}-r^{(n-1)}) \dots G_0(r^{(1)}-r_i) dr^{(1)} \dots dr^{(n)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Очевидно, что определенная таким образом функция  $\mathcal{G}(r, r')$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathcal{G}(r, r') = G_0(r-r') + \int_S G_0(r-r_1) \mathcal{G}(r_1, r') dr_1. \quad (9)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2) для поля на поверхности, мы видим, что  $\mathcal{G}(r, r')$  — поле в точке  $r$ , создаваемое единичным источником, расположенным в точке  $r'(r, r' \in S)$ . Таким образом,  $\mathcal{G}(r, r')$  может быть представлена в виде

$$\mathcal{G}(r, r') = Y(r, r') G_0(r-r'), \quad (10)$$

где  $Y(r, r')$  — функция ослабления при распространении поля из точки  $r$  в точку  $r'$ . Конечно, вычисление явного вида этой функции при произвольной форме поверхности между точками  $r$  и  $r'$  — совершенно безнадежная задача (собственно, это и есть основная проблема теории дифракции). Однако из решения задачи дифракции на простейших телах — круговой цилиндр, шар, параболический цилиндр и т. д. (см. по этому поводу работы Фока

[73], [160], [161], Фока и Вайнштейна [208]), — можно сделать важный вывод о том, что  $Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  экспоненциально убывает в области тени при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Повторяя проведенное выше частичное суммирование ряда (3) для всех пар взаимно затененных точек  $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{s+1}$  в интеграле (5) и подставляя затем полученное значение поля  $U(\mathbf{r})$  на поверхности  $S$  в формулу (1), получим для отраженного поля в точке наблюдения  $\mathbf{R}$ , лежащей вне поверхности, следующее выражение:

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \sum_{q=1}^{\infty} \overbrace{\int_S \dots \int_S}^q G_0(\mathbf{R} - \mathbf{r}_q) G_0(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{q-1}) \dots \\ \dots G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) Y(\mathbf{R}, \mathbf{r}_q) Y(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_{q-1}) \dots \\ \dots Y(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_0) U_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_q, \quad (11)$$

$$U_q(\mathbf{r} \in S) = \overbrace{\int_S \dots \int_S}^q \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q) \mathcal{G}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{q-1}) \dots \mathcal{G}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \dots \\ \dots \mathcal{G}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) U_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_q, \quad (12)$$

где  $\mathbf{R}_0$  — та точка на достаточно удаленном от рассеивающей поверхности  $S$  фронте падающей волны  $S_0$  (см. рис. 50), из окрестности которой поле переносится в точку  $\mathbf{r}_1 \in S$  (если источник точечный, то под  $\mathbf{R}_0$  можно понимать его радиус-вектор). Кроме того, стремясь к симметричной форме записи формулы (11), мы доопределили функцию  $Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  таким образом, что  $Y = 1$ , если  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  не затенены. Это не противоречит формулам (9), (10), ибо там мы рассматривали только взаимно затененные точки.

Формулы (11), (12) в довольно общем виде учитывают как многократные отражения от поверхности, так и возможные затенения. Действительно,  $q$ -й член суммы (11) соответствует  $q$ -кратно рассеянному на поверхности полю, а стоящие под интегралом функции ослабления  $Y(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i-1})$  исключают из области интегрирования затененные участки поверхности. Для детерминированных (не случайных) поверхностей вычисление рассеянного поля  $U(\mathbf{R})$  при  $k \rightarrow \infty$  сводится к асимптотической оценке многократных интегралов (12).

В работе [209] при достаточно общих предположениях о гладкости поверхности  $S$  был вычислен первый член асимптотического разложения  $q$ -кратного интеграла (12) по обратным степеням  $k$ , что, как легко видеть, соответствует приближению геометрической оптики. Каустические точки, где асимптотическое разложение начинается с членов порядка  $k^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) (см. например, [207]), и точки в областях геометрической тени, где поле экспоненциально малó, при этом из рассмотрения исключались.

Если же поверхность задана статистическим образом, то усреднение результатов, полученных для неслучайной поверхности,

или усреднение исходных интегралов (12), представляет собой достаточно сложную проблему. Ниже мы рассмотрим отражение от статистически неровной поверхности в приближении однократного рассеяния, но с учетом затенений поверхности.

2. Для однократно рассеянного поля из (11) имеем следующее выражение:

$$U(\mathbf{R}) = \int_S G_0(\mathbf{R} - \mathbf{r}) Y(\mathbf{R}, \mathbf{r}) Y(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) U_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (13)$$

Ограничиваясь, как и в предыдущих двух параграфах этой главы, зоной Фраунгофера, имеем из (13) [ср. переход от (19.9) к (19.16)]:

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}_{20}}}{R_{10} R_{20}} \int_{S_0} e^{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]} Y(\mathbf{R}, \mathbf{r}) Y(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{n\boldsymbol{\kappa}}{n_z} d\mathbf{r}. \quad (14)$$

Здесь, как и в (19.16), мы перешли от интегрирования по поверхности  $S$  к интегрированию по ее проекции  $S_0$  на плоскость  $z=0$ ; остальные обозначения такие же, как в § 19 (см. рис. 29). Кроме наличия множителей  $Y(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ ,  $Y(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)$ , учитывающих затенения, формула (14) отличается от (19.16) предэкспоненциальным множителем под интегралом — вместо  $(n\mathbf{q})$  в (14) стоит  $2(n\boldsymbol{\kappa})$ . Это связано с тем, что формула Грина (1) имеет место только для замкнутых поверхностей. Поэтому, переходя от (13) к (14), мы обязаны были дополнить рассеивающую поверхность  $S$  до замкнутой, как это было сделано в § 19, что привело бы к замене  $2(n\boldsymbol{\kappa})$  на  $n\mathbf{q}$ . Однако мы увидим в дальнейшем, что при вычислении средних  $\bar{U}$  и  $|\bar{U}|^2$  при  $k \rightarrow \infty$  совершенно не существенно, какой из этих двух множителей стоит под интегралом в (14): при этом основной вклад в интеграл дают зеркальные точки, где  $n\mathbf{q} = 2n\boldsymbol{\kappa}$ .

Прежде чем переходить к вычислению среднего поля  $\bar{U}$  и интенсивности  $|\bar{U}|^2$ , выясним возможность замены под интегралом в (14) функции ослабления  $Y(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)$  на ступенчатую функцию  $\psi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$ , определяемую следующим образом:  $\psi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = 1$ , если точка поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r})$  освещена падающим полем (в зоне Фраунгофера падающее поле является плоской волной  $e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}$ ), и  $\psi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = 0$  — в противном случае. Неточность, которую мы при этом допускаем, заключается в замене областей полутени  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (рис. 51) на резкую границу свет — тень. Размеры областей полутени вблизи точек  $C$  и  $Q$  (см. рис. 51) легко оценить (см. [47], [210]) из следующих простых соображений. Заменяем поверхность вблизи точки касания луча с поверхностью (точка  $C$  на рис. 51) сферой, радиус которой равен радиусу кривизны  $a$  нормального сечения поверхности  $S$  в точке  $C$  плоскостью падения. Из точного решения задачи дифракции плоской волны на шаре следует,

что ширина области полутени при этом по порядку величины равна

$$\Delta_1 \approx (\lambda a^2)^{1/3}. \quad (15)$$

Для оценки ширины полутени вблизи точки  $Q$  будем считать, что в точке  $C$  происходит дифракция не на гладкой поверхности, а на краю полуплоскости, так что размер области перехода между светом и тенью вблизи  $Q$  совпадает по порядку величины с размерами зоны Френеля

$$\Delta_2 \approx (\lambda \cdot QC)^{1/2}. \quad (16)$$

Можно ожидать, что замена полутеней резкими границами не существенно

влияет на результаты расчета, если размеры областей полутени малы по сравнению с размерами освещенной части поверхности (в случае сильных затенений) и с размерами области тени (в случае слабых затенений). Рассмотрим для определенности сильные затенения, когда  $\operatorname{tg} \psi \lesssim \gamma$  ( $\psi$  — угол скольжения,  $\gamma$  — характерный тангенс углов наклона поверхности). Размер освещенной области  $QB$  на рис. 51, как следует из элементарных геометрических соображений, равен по порядку величины:

$$QB \approx l [\operatorname{tg} \psi / (\gamma + \operatorname{tg} \psi)] \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad (17)$$

где  $l$  — характерный линейный размер (радиус корреляции). Мы требуем выполнения неравенств:

$$QB \gg \Delta_1, \Delta_2. \quad (18)$$

Подставляя сюда (15) и (16) и учитывая, что (опять-таки по порядку величины)  $a \approx \frac{l}{\gamma} (1 + \gamma^2)^{3/2}$  и  $CQ \approx l$ , приходим к следующим неравенствам:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \gamma} \gg \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3} (1 + \gamma^2)^{1/2} \gamma^{-2/3}; \quad \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/2} (1 + \gamma^2)^{-1/2}. \quad (19)$$

Кроме того, как всегда в методе Кирхгофа, следует считать (см. § 19), что  $(ka)^{1/3} \gg 1$ , т. е.

$$(\lambda \gamma / l)^{1/3} \ll \sqrt{1 + \gamma^2}. \quad (20)$$

Из неравенств (19), (20) следует, что при достаточно коротких волнах ( $\lambda \rightarrow 0$ ) полутенями всегда можно пренебречь.

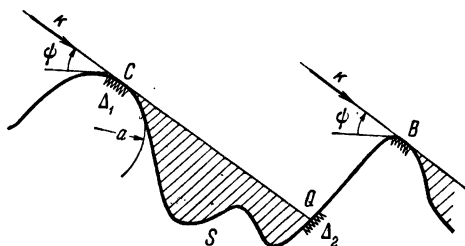


Рис. 51.

В частности, для крутых неровностей, когда  $\gamma \simeq 1$  и затенения существенно влияют на рассеяние в широком диапазоне углов скольжения и наблюдения, эти условия имеют вид

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \gamma} \gg (kl)^{-1/2} \text{ и } (kl)^{1/2} \gg 1. \quad (21)$$

Точно такие же оценки позволяют заменить вторую функцию ослабления  $Y(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  в (14) на ступенчатую функцию  $\eta(\beta, \mathbf{r})$ , которая учитывает затенения поверхности относительно точки наблюдения (так как точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера, то рассеянное поле в ней имеет вид плоской волны  $e^{ik\beta r}$ ). Таким образом, учитывая сделанные выше замечания и считая неравенства (19), (20) выполненными, получаем вместо (14) следующую формулу для рассеянного поля:

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{S_0} e^{-i|qr + qz\xi(\mathbf{r})|} \eta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) \eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}) \frac{nq}{n_z} d\mathbf{r}. \quad (22)$$

3. Среднее поле. При усреднении формулы (22) по всем реализациям случайной функции  $\xi(\mathbf{r})$  мы будем следовать в основном методике, предложенной в работе [53]. Предположим для простоты, что рассеяние происходит на цилиндрической поверхности  $z = \xi(x)$ , образующие которой перпендикулярны к плоскости падения ( $xz$ ). Окончательные формулы, полученные в этом пункте, справедливы, однако, и для трехмерных неровностей, если под  $\xi(x)$  понимать сечение поверхности  $z = \xi(\mathbf{r})$  плоскостью падения  $y = 0$ . Заметим, что операции усреднения и интегрирования перестановочны (среднее от суммы равно сумме средних), так что нам следует усреднить подинтегральное выражение в (22). Это усреднение проведем в два этапа. Усредним сначала (22) по всем тем реализациям  $\xi(x)$ , которые в точке  $\mathbf{r}$  имеют заданную высоту  $\zeta$  и производную  $\gamma = d\xi/dx$ . Нетрудно видеть, что это усреднение затрагивает только множитель  $\eta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) \eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r})$ , значение которого зависит не только от высоты и угла наклона поверхности в точке  $\mathbf{r}$ , но и от их значений в соседних точках области интегрирования. Результат этого усреднения запишем в виде

$$\overline{\eta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) \eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r})} \Big|_{\substack{\xi(\mathbf{r}) = \zeta \\ d\xi/dx = \gamma}} = P_2(\zeta, \gamma | \psi, \chi). \quad (23)$$

Так как усредняемая функция  $\eta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) \eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r})$  принимает только два значения — 1 или 0, в зависимости от того, видна точка поверхности  $\{\mathbf{r}, \xi(\mathbf{r})\}$  из источника и точки наблюдения или нет, то величина  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \chi)$  имеет следующий смысл: это есть условная вероятность того, что точка поверхности, имеющая высоту  $\zeta$  и тангенс угла наклона  $\gamma$ , не затенится другими точками этой поверхности как по отношению к падающей плоской волне



$e^{ikr}$  ( $\alpha_x = \cos \psi$ ,  $\alpha_z = -\sin \psi$ ), так и по отношению к рассеянной в направлении  $\beta$  ( $\beta_x = \cos \chi$ ,  $\beta_z = \sin \chi$ ). Усредняя теперь (22) по всем возможным значениям высоты  $\zeta$  и наклона  $\gamma$  в точке  $r$ , получаем для среднего поля

$$\bar{U}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{S_0} e^{-i(qr)} dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \zeta} w(\zeta) d\zeta \times \\ \times \int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\operatorname{tg} \chi} (q_z - \gamma q_x) w(\gamma) P_2(\zeta, \gamma | \psi, \chi) d\gamma. \quad (24)$$

Здесь  $w(\zeta)$  и  $w(\gamma)$  — плотность распределения\*) вероятностей высоты и наклона, а интегрирование по  $d\gamma$  в конечных пределах  $-\operatorname{tg} \psi \leq \gamma \leq \operatorname{tg} \chi$  обеспечивает учет только тех участков поверхности, которые сами себя не затевают. Обозначим, как и в § 20, через  $U_0(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  потенциал поля, отраженного от участка  $S_0$  плоскости  $z=0$ :

$$U_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} q_z \int_{S_0} e^{-iqr} dr.$$

Пренебрегая краевым эффектом, отсюда получаем, что  $U_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \sim \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{x}_\perp)$ , так что (24) можно записать в виде

$$\bar{U}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) V_s(\psi), \quad (25)$$

где введен коэффициент отражения среднего поля

$$V_s(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \zeta} w(\zeta) d\zeta \int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\operatorname{tg} \psi} P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi) w(\gamma) d\gamma. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь величину  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$  — вероятность того, что луч, выходящий под углом  $\psi$  к оси  $Ox$  из точки поверхности с высотой  $\zeta$  и производной  $\gamma$  нигде, кроме этой точки, не пересекается с поверхностью, уравнение которой  $z = \zeta(x)$ . Входящую в (26) вероятность  $P_2 = P_1(\zeta, \gamma | \psi, \psi)$  отсутствия пересечений с поверхностью как этого луча, так и ему симметричного (выходящего из той же точки, но с углом наклона  $\psi$  относительно

\*) Использование одного и того же обозначения  $w$  для плотности распределения высот  $\zeta$  и наклонов  $\gamma$  нигде не приводит к недоразумениям, так как аргументы этих функций всегда указывают, к какой величине ( $\zeta$  или  $\gamma$ ) это распределение относится.

отрицательного направления оси  $Ox$ ), в предельных случаях (см. ниже) можно представить в виде произведения

$$P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi) = P_1^2(\zeta, \gamma | \psi). \quad (27)$$

Что же касается  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$ , то, пользуясь терминологией теории случайных функций, ее можно рассматривать как вероятность отрицательного выброса бесконечной длительности случайной функции  $z = \zeta(x)$  через прямую  $z(x) = \zeta(x_0) + (x - x_0) \operatorname{tg} \psi$  при условии, что выброс начался в точке  $x_0$ , где  $z = \zeta(x_0)$  и  $dz/dx = \gamma(x_0)$ . Воспользовавшись общей формулой (3.56) для условной вероятности выброса случайной функции, получаем в данном случае:

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \underbrace{\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty}}_s d_s(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s, \quad (28)$$

где

$$d_s(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{w(\zeta, \gamma)} \underbrace{\int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} \dots \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty}}_s (\gamma_1 - \operatorname{tg} \psi) \dots (\gamma_s - \operatorname{tg} \psi) \times \\ \times w_{2(s+1)}(\zeta, \zeta + x_1 \operatorname{tg} \psi, \dots, \zeta + x_s \operatorname{tg} \psi; \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_s) d\gamma_1 \dots d\gamma_s. \quad (29)$$

Ввиду чрезвычайной сложности этих формул, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь двух предельных случаев, когда для  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$  справедливы приближенные компактные выражения.

а. Слабые затенения. В случае слабых затенений поверхности, когда  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$  близка к единице, в бесконечной сумме (28) можно ограничиться лишь первыми двумя слагаемыми

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) \approx 1 - \frac{1}{w(\zeta, \gamma)} \int_0^{\infty} dx_1 \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} (\gamma_1 - \operatorname{tg} \psi) \times \\ \times w_4(\zeta, \zeta + x_1 \operatorname{tg} \psi; \gamma, \gamma_1) d\gamma_1. \quad (30)$$

С помощью метода, изложенного в п. 5 § 3, можно убедиться в том, что вероятность  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi)$  в этом приближении [когда в (28) или аналогичной ей формуле для  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi)$  интегрирование проводится лишь по одной переменной  $x_1$ ] представляется в виде (27). Мы не будем приводить здесь доказательство этого утверждения ввиду его чрезвычайной громоздкости. Укажем только, что этот результат является следствием предполагаемой слабости затенений:  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi)$ , так же как и  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$ , в этом случае мало отличается от единицы, а учет возможной корреляции между вероятностями пересечения левого и правого лучей проявляется лишь в членах следующего порядка по этой

малой величине. Подставляя (30) в (27), а затем в (26), получаем для коэффициента отражения в случае слабых затенений:

$$V_s(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) e^{-iq_z \xi} d\xi \int_{-tg\psi}^{tg\psi} w(\gamma) d\gamma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \xi} d\xi \int_{-tg\psi}^{tg\psi} d\gamma \times \\ \times \int_0^{\infty} dx_1 \int_{tg\psi}^{\infty} d\gamma_1 (\gamma_1 - tg\psi) w_4(\xi, \xi + x_1 tg\psi; \gamma, \gamma_1). \quad (31)$$

Количественным критерием роли затенений поверхности при отражении является отношение  $a = tg\psi/\gamma_0$ , где под характерными тангенсами  $\gamma_0$  угла наклона поверхности можно подразумевать дисперсию производной  $\gamma_0^2 \equiv \overline{\gamma^2} = (\overline{d\xi/dx})^2$ . Из простых геометрических соображений очевидно, что  $\xi = \sigma/tg\psi$  — расстояние, на котором в основном и происходят затенения луча, если они происходят вообще. В случае слабых затенений, когда  $a \gg 1$ , из неравенства  $tg\psi \gg \gamma_0 \approx \sigma/l$  следует, что  $\xi \ll l$ . Иными словами, область, существенная при интегрировании по  $dx_1$  в формуле (31), значительно меньше радиуса корреляции неровностей. Поэтому в подынтегральном выражении (31) можно заменить  $w_4(\xi, \xi + x_1 tg\psi; \gamma, \gamma_1)$  ее приближенным значением при  $x_1 \ll l$

$$w_4(\xi, \xi_1; \gamma, \gamma_1)_{x_1 \ll l} \approx \Delta_{x_1}(\xi - \xi_1) w(\xi) w_2(\gamma, \gamma_1; x_1), \quad (32)$$

где функция  $\Delta_{x_1}(\xi - \xi_1)$  имеет острый максимум в нуле аргумента. Конкретный вид этой острой функции, которая в пределе  $x_1 \rightarrow 0$  переходит в  $\delta$ -функцию, различен для различных распределений и функций корреляции. Так, например, для нормального двумерного распределения

$$\Delta_{x_1}(\xi - \xi_1) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} [1 - W^2(x_1)]} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi_1)^2}{2\sigma^2 [1 - W^2(x_1)]}\right]. \quad (33)$$

В рассматриваемом предельном случае слабых затенений, когда  $tg\psi \gg \gamma_0$ , можно считать, что

$$\int_{-tg\psi}^{tg\psi} d\gamma w_2(\gamma, \gamma_1; x_1) \approx w(\gamma_1) \int_{-tg\psi}^{tg\psi} w(\gamma) d\gamma, \quad (34)$$

и

$$\int_0^{\infty} \Delta_{x_1}(x_1 tg\psi) dx_1 \approx 1/tg\psi. \quad (35)$$

Подставив эти приближенные формулы в (31), получаем следующее выражение для коэффициента отражения:

$$V_s(\psi) = \left[1 - 2\Lambda\left(\frac{tg\psi}{\gamma_0}\right)\right] \int_{-tg\psi}^{tg\psi} w(\gamma) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \xi} w(\xi) d\xi, \quad (36)$$

где функция  $\Lambda\left(\frac{\operatorname{tg} \psi}{\gamma_0}\right)$  введена следующим образом:

$$\Lambda\left(\frac{\operatorname{tg} \psi}{\gamma_0}\right) = \operatorname{ctg} \psi \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} (\gamma - \operatorname{tg} \psi) w(\gamma) d\gamma. \quad (37)$$

Легко видеть, что  $\Lambda$  в действительности является функцией \*) параметра  $a = \operatorname{tg} \psi / \gamma_0$ , так как  $\gamma_0$  — единственный характерный масштаб изменения функции  $w(\gamma)$ , которая удовлетворяет очевидному условию нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} w(\gamma) d\gamma = 1$ .

Для нормальной случайной поверхности, когда

$$w(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}, \quad w(\gamma) = \frac{1}{\gamma_0\sqrt{2\pi}} \exp(-\gamma^2/2\gamma_0^2),$$

функция  $\Lambda(a)$  имеет такой вид:

$$\Lambda(a) \rightarrow \Lambda_N(a) = \frac{1}{2a} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a^2/2} - a \operatorname{Erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (38)$$

и

$$\int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) d\gamma = 1 - \operatorname{Erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

где функция ошибок  $\operatorname{Erfc}(x)$  определяется формулой

$$\operatorname{Erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

так что для коэффициента отражения от гауссовой случайной поверхности имеем

$$V_s(\psi) = \left[ 1 - \operatorname{Erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right] [1 - 2\Lambda_N(a)] e^{-2(k\sigma \sin \psi)^2}. \quad (39)$$

При слабых затенениях  $a \gg 1$  и в (39) следует использовать асимптотические разложения

$$\operatorname{Erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a^2/2}, \quad (40a)$$

$$\Lambda_N(a) \approx \frac{1}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}. \quad (40b)$$

\*) В работе [53] эта функция была обозначена через  $\varphi(a)/a$ , здесь же мы используем обозначения Смита [54], [211].

Для случая, когда высоты и углы наклона поверхности распределены так же, как и в синусоидальной волне, т. е.

$$w(\zeta) = \frac{1}{\pi \sqrt{\zeta_m^2 - \zeta^2}}, \quad w(\gamma) = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma_m^2 - \gamma^2}}, \quad (|\zeta| < \zeta_m; |\gamma| < \gamma_m), \quad (41)$$

формула (36) принимает вид

$$V_s(\psi) = \frac{2}{\pi} \arcsin a_m [1 - 2\Lambda_s(a)] \mathcal{S}_0(2k\zeta_m \sin \psi), \quad (42)$$

где

$$\Lambda_s(a) = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{a_m^2} - 1} - \arccos a_m \right],$$

$$a_m = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\gamma_m} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\gamma_0 \sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad (43)$$

Легко видеть, что формулы (39) и (42) при больших углах скольжения ( $\operatorname{tg} \psi \gg \gamma_0$  в случае нормального распределения и при  $\operatorname{tg} \psi > \gamma_m$  для поверхности с синусоидальным профилем) переходят в полученные ранее формулы (20.6) и (20.8), при выводе которых затенения не учитывались. В той же степени это относится и к коэффициенту отражения в общем виде (36), который при  $a \rightarrow \infty$  переходит в одномерную характеристическую функцию

$$V_s(\psi) \approx e^{-iq_z \zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \zeta} w(\zeta) d\zeta. \quad (44)$$

6. В случае сильных затенений, когда характерные углы наклона поверхности значительно превышают угол скольжения, в формуле (28) уже нельзя ограничиться первыми членами ряда, хотя бы потому, что, как показывают несложные оценки, отношение  $n$ -го члена ряда к  $n-1$ -му имеет в этом случае порядок  $(na)^{-1}$ , т. е. отнюдь не малое, поскольку  $a \ll 1$ . Для данного случая удобно воспользоваться представлением (3.58) для величины

$P_1(\zeta, \gamma | \psi)$ :

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{s!} \right)^s \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g_s(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s \right\}, \quad (45)$$

где корреляционные функции  $g_s$  связаны с функциями плотности  $d_s$  соотношениями (3.57), которые обеспечивают обращение  $g_s$  в нуль при достаточно большом расстоянии между любой парой аргументов  $x_1, \dots, x_s$ :

$$g_s(x_1, \dots, x_s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |x_i - x_j| \gg l, \\ 1 \leq i < j \leq s. \end{cases} \quad (46)$$

Область, существенная при интегрировании по любой переменной  $dx_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) в (45) (т. е. область, где в основном и происходит пересечение поверхности с лучом), по-прежнему равна по порядку величины  $\xi \simeq \sigma/\operatorname{tg} \psi$ , а так как в данном случае  $a \ll 1$ , то  $\xi \gg l$ . Поэтому  $s$ -й член в показателе экспоненты (45) имеет порядок  $(l/\xi)^{s-1} \simeq a^{s-1}$  и, следовательно, из всей бесконечной суммы в показателе экспоненты (45) можно ограничиться лишь первым слагаемым:

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) \approx \exp \left\{ - \int_0^{\infty} d_1(x_1) dx_1 \right\}. \quad (47)$$

Эту приближенную формулу можно получить и из первоначального представления (28), если учесть, что существенная для интегрирования по каждой переменной  $x_i$  область значительно превышает радиус корреляции поверхности  $l$ , так что корреляцию плотности выбросов можно не учитывать и выбросы считать независимыми:

$$d_s(x_1, \dots, x_s) = \prod_{i=1}^s d_1(x_i). \quad (48)$$

При этом бесконечный ряд (28) суммируется, и мы приходим к формуле (47). Как и при слабых затенениях поверхности, вероятность  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \psi)$  распадается на произведение (27). Это является следствием того обстоятельства, что интегрирование плотности выбросов в (47) проводится лишь по координатам одной точки  $x_1$ , так что вероятности затенений левого и правого лучей оказываются независимыми. Поэтому для коэффициента отражения (26) получаем

$$V_s(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_z \zeta} w(\zeta) d\zeta \int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\operatorname{tg} \psi} d\gamma w(\gamma) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{2}{w(\zeta, \gamma)} \int_0^{\infty} dx_1 \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} d\gamma_1 (\gamma_1 - \operatorname{tg} \psi) w_4(\zeta, \zeta + x_1 \operatorname{tg} \psi; \gamma, \gamma_1) \right\}. \quad (49)$$

Так как при сильных затенениях характерное расстояние (на протяжении которого луч, вышедший под углом  $\psi$  из точки поверхности с высотой  $\zeta$  и производной  $\gamma$ , пересекает многократно поверхность) значительно больше (в меру  $a^{-1} \gg 1$ ) радиуса корреляции поверхности, то эти пересечения также можно считать независимыми и пренебречь корреляцией наклонов и высот в точках пересечения луча с поверхностью, т. е. представить  $w_4(\zeta, \gamma; \zeta_1, \gamma_1)$  в виде произведения одномерных плотностей вероятности

$w(\xi) w(\gamma) w(\xi_1) w(\gamma_1)$ . Таким образом, из (49) получаем

$$V_s(\psi) = \int_{-i\gamma\psi}^{i\gamma\psi} w(\gamma) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \exp \left\{ iq_z \xi - 2\Lambda(a) \int_{\xi}^{\infty} w(\xi_1) d\xi_1 \right\} d\xi. \quad (50)$$

Сравнивая эту формулу с выражением (44) для коэффициента отражения в отсутствие затенений, мы увидим, что учет затенений приводит к появлению «эффективной» функции распределения высот освещенной (по отношению к падающему и отраженному лучам) части поверхности:

$$w_s(\xi; \psi, \psi) = w(\xi) \int_{-i\gamma\psi}^{i\gamma\psi} w(\gamma) d\gamma e^{-2\Lambda(a) \int_{\xi}^{\infty} w(\xi_1) d\xi_1}. \quad (51)$$

Распределение  $w_s(\xi; \psi, \psi)$  несимметрично относительно среднего уровня  $\xi = 0$ : плотность вероятности положительных  $\xi$  больше, чем отрицательных. Это и понятно, так как участки поверхности с  $\xi < 0$  имеют меньшую вероятность быть освещенными, чем более высокие ( $\xi > 0$ ) части поверхности. При больших положительных значениях  $\xi$  показатель экспоненты в (51) стремится к нулю и исходное распределение высот  $w(\xi)$  почти не деформируется

(если не принимать во внимание общий множитель  $\int_{-i\gamma\psi}^{i\gamma\psi} w(\gamma) d\gamma$ , учитывающий «самозатенения» поверхности). Воспользовавшись формулой (38), получаем из (50) следующее выражение для коэффициента отражения от нормальной случайной поверхности:

$$V_s(\psi) = \left[ 1 - \operatorname{Erfc} \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-x^2/2 + iq_z \sigma x - \Lambda(a) \operatorname{Erfc}(x)]. \quad (52)$$

Для поверхности с синусоидальным распределением (41) имеем

$$V_s(\psi) = \frac{2}{\pi^2} \arcsin a_m e^{-\Lambda_s(a)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(iq_z \zeta_m \sin \vartheta + 2\Lambda_s(a) \vartheta) d\vartheta = \\ = \frac{4}{\pi} \arcsin a_m e^{-\Lambda_s(a)} j_{2i\Lambda_s} \left( i \frac{\pi}{2}, 2k\zeta_m \sin \psi \right), \quad (53)$$

где  $j_\nu(w, z)$  — неполная функция Бесселя индекса  $\nu$  от аргумента  $z$ , определяемая следующим образом (см. [212]):

$$j_\nu(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w^*}^w e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt$$

( $w^*$  — означает комплексно сопряженную величину  $w$ ).

Интересно отметить, что формулы (52) и (53), полученные для случая сильных затенений ( $a \ll 1$ ), в обратном предельном случае [ $a \gg 1$  в (52) и  $a_m > 1$  в (53)] переходят в соответствующие формулы (20.6) и (20.8), которые были получены в § 20 без учета затенений. Поэтому общую формулу (50) для коэффициента отражения когерентной составляющей (среднее поле) можно рассматривать как интерполяционную и в промежуточной области углов  $a \simeq 1$ . Конечно, при этом следует иметь в виду, что, строго говоря, она справедлива лишь в предельных случаях сильных ( $a \ll 1$ ) и слабых ( $a \gg 1$ ) затенений.

4. Средняя интенсивности рассеянного поля. Обратимся теперь к вычислению интенсивности рассеянного поля. Неровности поверхности по-прежнему считаем одномерными, так что нам следует усреднить выражение, вытекающее из (22):

$$|U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 = \frac{L_y \delta(q_y)}{8\pi R_{10}^2 R_{20}^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_x} \exp\{i[q_x(x-x') + q_z(\zeta - \zeta')]\} \times \\ \times (q_z - \gamma q_x)(q_z - \gamma' q_x) \eta(\boldsymbol{\alpha}, x) \eta(\boldsymbol{\alpha}, x') \eta(\boldsymbol{\beta}, x) \eta(\boldsymbol{\beta}, x') dx dx'. \quad (54)$$

Здесь  $L_x$  и  $L_y$  — размеры рассеивающей площадки  $S_0$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно, а все величины со штрихом относятся к точке интегрирования  $x'$ :

$$\zeta' = \zeta(x'), \quad \gamma' = \gamma(x') = d\zeta(x')/dx'.$$

Так как исходное выражение (22) справедливо лишь для достаточно коротких волн [см. неравенства (19), (20)], то имеет смысл рассмотреть асимптотическое поведение (54) при  $k \rightarrow \infty$ . При этом, как показано в § 20, на поверхности появляются локализованные зеркально отражающие участки, размеры которых значительно меньше, чем радиус корреляции неровностей  $l$ . Поэтому в пределах одного такого блика высота поверхности и угол наклона не изменяются существенно, что позволяет заменить в показателе экспоненты разность  $\zeta' - \zeta$  на  $\gamma(x' - x)$  [ср. (20.24)], а в предэкспоненциальных множителях положить  $\zeta' = \zeta$  и  $\gamma' = \gamma$ , так что (54) принимает вид

$$|U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 = \frac{\delta(q_y) L_y}{8\pi R_{10}^2 R_{20}^2} \int_0^{L_x} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i[q_x - \gamma(x)q_z]\zeta} \times \\ \times (q_z - \gamma(x)q_x)^2 \eta(\boldsymbol{\alpha}, x) \eta(\boldsymbol{\beta}, x). \quad (55)$$

При этом мы воспользовались очевидным соотношением  $\eta^2(\boldsymbol{\alpha}, x) = \eta(\boldsymbol{\alpha}, x)$ , так как функция  $\eta$  принимает всего лишь два зна-



чения — нуль или единица. Кроме того, пределы интегрирования по переменной  $\xi = x' - x$  мы заменили на бесконечные, имея в виду, что  $L_x \gg \lambda$ . Усредняя (55), как и в предыдущем пункте для среднего поля, в два этапа, получаем

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) &= \overline{|U(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2} = \frac{\delta(q_y) S_0}{8\pi R_{10}^2 R_{20}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma d\xi w(\gamma, \xi) \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i(q_x + \gamma q_z)\xi} (q_z - \gamma q_x)^2 P_2(\xi, \gamma | \psi, \chi) = \\
 &= \frac{\delta(q_y) S_0}{4R_{10}^2 R_{20}^2} \frac{q^4}{q_z^2} w\left(\gamma = -\frac{q_x}{q_z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi w(\xi) P_2\left(\xi, \gamma = -\frac{q_x}{q_z} | \psi, \chi\right). \quad (56)
 \end{aligned}$$

Множитель перед интегралом в этой формуле в точности совпадает с интенсивностью поля, рассчитанной без учета затенений (20. 37):

$$J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{S_0}{4R_{10}^2 R_{20}^2} \frac{q^4}{q_z^2} w\left(\gamma = -\frac{q_x}{q_z}\right). \quad (57)$$

Таким образом, учет затенений в приближении геометрической оптики приводит к умножению полученной ранее формулы (20. 37) на некоторую функцию  $Q$  угла скольжения  $\psi$  и угла места  $\chi$ :

$$Q(\psi, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) P_2\left(\xi, \gamma = -\frac{q_x}{q_z} | \psi, \chi\right) d\xi, \quad (58)$$

которая имеет простой геометрический смысл: это отношение числа незатененных точек зеркального отражения (т. е. тех, в которых касательная плоскость имеет наклон  $\gamma = -q_x/q_z$ ) к их полному числу, усредненное по всем реализациям  $z = \xi(x)$ . Так как множитель  $Q(\psi, \chi)$  зависит только от геометрии поверхности, то этот результат относится и к рассеянию на поверхности с произвольным коэффициентом отражения и в равной мере к рассеянию электромагнитных волн. В явном виде функцию  $Q(\psi, \chi)$  удастся вычислить лишь в предельных случаях слабых и сильных затенений. Ограничимся пока исследованием  $Q(\psi, \chi)$  во втором из указанных предельных случаев.

В случае сильных затенений, если векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$  находятся по разные стороны от оси  $z$  (напомним, что неровности двумерные и поэтому  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$  лежат в плоскости падения  $\{x, z\}$ ), точки пересечения луча с поверхностью являются независимыми и  $P_2(\xi, \gamma | \psi, \chi)$  распадается на произведение вероятностей  $P_1(\xi, \gamma | \psi)$   $P_1(\xi, \gamma | \chi)$ . Если же  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$  расположены по одну сторону от оси  $z$ , как это имеет место, например, в случае обратного рассеяния, то  $P_2(\xi, \gamma | \psi, \chi)$

совпадает с вероятностью отсутствия затенений того луча, у которого угол скольжения меньше:  $P_2(\zeta, \gamma | \psi, \chi) = P_1(\zeta, \gamma | \min\{\psi, \chi\})$ . Действительно, совершенно очевидно, что если нижний луч не затенен, то верхний луч и подавно не пересекается с поверхностью.

Для  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$  имеем приближенную формулу (47), в которой одномерная плотность точек пересечений луча с поверхностью согласно (29) равна

$$d_1(x_1) = \frac{1}{w(\zeta, \gamma)} \int_{\text{tg}\psi}^{\infty} (\gamma_1 - \text{tg}\psi) w_4(\zeta, \zeta + x_1 \text{tg}\psi; \gamma, \gamma_1) d\gamma_1.$$

Здесь, как и при получении формулы (50),  $w_4$  можно представить в виде произведения одномерных плотностей вероятности, так что

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) \approx \exp\left\{-\int_0^{\infty} w(\zeta + x_1 \text{tg}\psi) dx_1 \int_{\text{tg}\psi}^{\infty} (\gamma_1 - \text{tg}\psi) w(\gamma_1) d\gamma_1\right\}. \quad (59)$$

Заметим, что в этом приближении (сильные затенения, точки пересечения луча с поверхностью независимы) вероятность затенения участка поверхности с высотой  $\zeta$  и углом наклона  $\gamma$  другими участками этой же поверхности не зависит от  $\gamma$ . Подставляя (59) в (58), получаем

$$Q(\psi, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta) \exp\left\{-[\Lambda(a) + \Lambda(b)] \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta') d\zeta'\right\} d\zeta, \quad (60)$$

где  $b = \text{tg}\chi/\gamma_0$ . Интегрирование по  $d\zeta$  в этой формуле можно выполнить, сделав замену переменных

$$y = y(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta') d\zeta'.$$

Учитывая, что  $y(\zeta)$  — монотонная функция (так как  $w(\zeta) \geq 0$  — по определению плотности вероятности) и принимая во внимание очевидные соотношения  $y(-\infty) = 1$  и  $y(\infty) = 0$ , вытекающие из условия нормировки  $w(\zeta)$ , получаем окончательно

$$Q(\psi, \chi) = \frac{1 - \exp\{-[\Lambda(a) + \Lambda(b)]\}}{\Lambda(a) + \Lambda(b)}. \quad (61)$$

Эта формула относится только к тому случаю, когда  $k$  и  $\chi$  находятся по разные стороны от оси  $z$ . В противном случае имеет место формула

$$Q(\psi, \chi) = \frac{1 - e^{-\Lambda(c)}}{\Lambda(c)}, \quad c = \min\{a, b\}. \quad (62)$$

В частности, для обратного рассеяния (радиолокационный случай)

$$Q(\psi) = \frac{1 - e^{-\Lambda(a)}}{\Lambda(a)}. \quad (63)$$

Графики  $Q(\psi)$  для двух законов распределения углов наклона приведены на рис. 52. Кривая 1 относится к нормальному распределению, а кривая 2 — к распределению производных в синусоидальной волне.

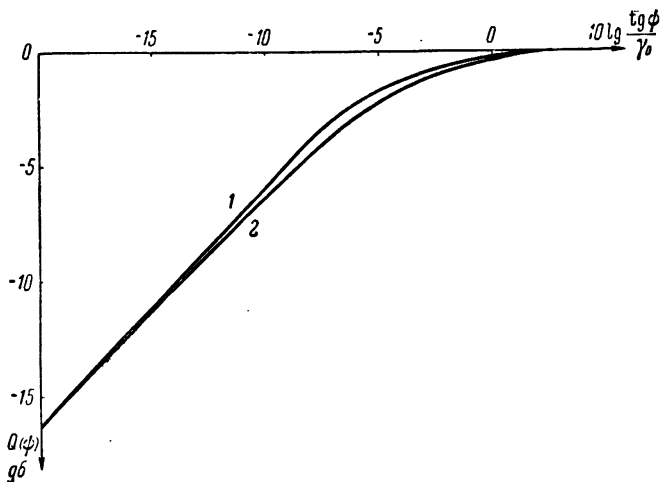


Рис. 52.

В обратном предельном случае слабых затенений из (63) получаем

$$Q(\psi) \approx 1 - \frac{1}{2} \Lambda(a). \quad (64a)$$

Для скользящего облучения ( $a \ll 1$ ), когда затенения существенны,

$$Q(\psi) \approx \frac{1}{\Lambda(a)} \approx \left[ \operatorname{ctg} \psi \int_0^{\infty} \gamma w(\gamma) d\gamma \right]^{-1} = \operatorname{const} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\gamma_0}. \quad (64b)$$

Из (64b) следует, что при достаточно малых углах скольжения функция затенений  $Q(\psi)$  убывает линейно при уменьшении  $\psi$ , а не экспоненциально, как вытекает из формул Бекмана [213] — [215]. Полученная в [213] плотность распределения высот освещенной части поверхности

$$w_{\text{ил}}(\zeta) = \operatorname{const} w(\zeta) \exp \left\{ -\operatorname{ctg} \psi \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} w(\gamma) d\gamma \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta') d\zeta' \right\} \quad (65)$$

отличается \*) от  $w_0(\xi)$ , определяемой по формулам (51), тем, что вместо функции

$$\Lambda(a) = \text{ctg } \psi \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} (\gamma - \text{tg } \psi) w(\gamma) d\gamma$$

в показателе экспоненты в (65) стоит  $\text{ctg } \psi \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} w(\gamma) d\gamma$ . Это расхождение связано, вероятно, с тем, что условные вероятности пересечения луча с поверхностью (которые в [213] обозначены через  $g(\tau + d\tau/\tau)$ ) вычислялись как априорные (см. по этому поводу [216]). В результате при малых углах скольжения, когда многократные пересечения луча с поверхностью имеют большую вероятность, учитывались затенения уже затененного луча, что и приводит к экспоненциальной зависимости. Между тем очевидно, что достаточно только одного пересечения поверхности с лучом, чтобы соответствующая точка поверхности находилась в тени.

5. В заключение отметим, что явный вид функции затенений  $Q(\psi, \chi)$  (61) связан только с плотностью распределения  $w(\gamma)$  углов наклона поверхности соотношением (37) и не зависит от плотности распределения высот  $w(\xi)$ . Так как в формулу (57) также входит только  $w(\gamma)$ , то в приближении геометрической оптики ( $k \rightarrow \infty$ ), даже при наличии затенений, индикатриса рассеяния (распределение интенсивности рассеянного поля по направлениям) определяется лишь распределением углов наклона поверхности. Что же касается коэффициента отражения когерентной составляющей (среднего поля), то для его определения при наличии затенений необходимо знать функции распределения как углов наклона, так и высот поверхности [см., например, формулу (50)].

Использованный в этом параграфе аппарат теории выбросов случайных функций (см. [90]) с успехом был применен в работах 49) — [51] при исследовании ряда вопросов, связанных с отражением молекулы газа от шероховатых поверхностей. Эта задача достаточно близка к рассмотренной нами задаче о рассеянии волн в коротковолновом приближении. Наконец, отметим работу [217], где рассматривался вопрос об учете затенений при отражении света от поверхности скола монокристалла. Профиль ступенчатой поверхности кристалла при некоторых предположениях можно рассматривать как реализацию марковского процесса, что позволяет получить сравнительно простое интегро-дифференциальное уравнение для функции затенений (см. [218]). Решение этого

\*) Дополнительное отличие показателя экспоненты в (51) от (65) на множитель 2 связано с тем, что (51) относится к тем участкам поверхности, которые видны из источника и точки наблюдения одновременно, в то время как (65) относится только к освещенным участкам.

уравнения, в отличие от рассмотренной выше общей постановки задачи, позволяет получить в явном виде коэффициент отражения при произвольных углах скольжения, а не только в предельных случаях больших и малых углов.

### § 23. Эффективные функции распределения высот и наклонов при наличии затенений

В предыдущем параграфе, исходя из точной формулы для распределения выбросов по длительности [в виде бесконечного произведения (3.58) или бесконечного ряда (3.55) по возрастающим порядкам плотностей распределения], были получены асимптотики коэффициента отражения среднего поля и интенсивности флуктуаций в двух предельных случаях — слабых и сильных затенений. В промежуточной области углов облучения полученные формулы можно было рассматривать в лучшем случае как интерполяционные, ибо приближения, благодаря которым из бесконечных рядов и произведений получены были компактные формулы, в этой области углов являются очень грубыми и допускаемую при этом погрешность оценить практически невозможно.

В цитированных выше работах Бекмана [213] — [215] была предпринята попытка обойти эти трудности и исследовать роль затенений при рассеянии, исходя с самого начала из простых геометрических соображений о вероятности пересечения луча со случайной поверхностью\*). Однако полученные им результаты оказались ошибочными, на что и было указано в работах [216], [219]. Очень убедительно это обстоятельство было продемонстрировано в работе [219] путем сравнения формул Бекмана с результатами модельного «эксперимента» на ЭВМ. Случайная поверхность при этом моделировалась гауссовым шумом, а затенения точно имитировались с помощью довольно простой электрической схемы, так что результаты такого «эксперимента» можно рассматривать как точное решение задачи.

В этом параграфе, основываясь на работах [54], [211], [220], мы получим эффективные функции распределения высот и углов наклона освещенной части поверхности и, используя результаты модельного эксперимента [219], построим интерполяционную формулу для функции затенений в промежуточной области углов скольжения  $\text{tg } \psi \simeq \gamma_0$ .

1. Рассмотрим сначала цилиндрическую случайную поверхность  $S$ , уравнение которой имеет вид  $z = \zeta(x)$  и которая

---

\*) Такого рода наглядные геометрические соображения были положены и в основу работы [221]. Полученные там результаты справедливы, вероятно, только в случае очень слабых затенений, когда основную роль играют «самозатенения» поверхности.

освещается пучком параллельных лучей, падающих под углом  $\psi$  к средней плоскости  $z=0$  (рис. 53). Плотность распределения высот и тангенсов угла наклона освещенной части поверхности

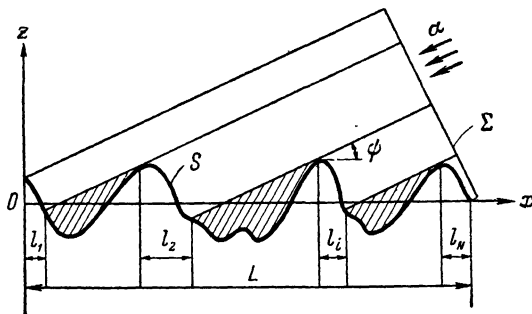


Рис. 53.

$w_0(\zeta, \gamma; \psi)$ , зависящую от  $\psi$  как от параметра, можно представить в виде

$$w_0(\zeta, \gamma; \psi) = w(\zeta, \gamma) P_1(\zeta, \gamma | \psi), \quad (1)$$

где  $P_1(\zeta, \gamma | \psi)$  — вероятность того, что луч, проведенный под углом  $\psi$  из точки поверхности с высотой  $\zeta$  и углом наклона  $\gamma$ , нигде не пересекается с поверхностью.

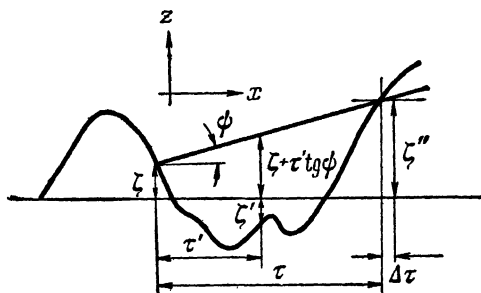


Рис. 54.

Следуя Смиуту [54], [211], введем вероятность  $P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau)$  того, что этот луч не пересекается с поверхностью в конечном интервале вплоть до расстояния  $\tau$  от выбранной точки (рис. 54). Тогда очевидно, что

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau). \quad (2)$$

С другой стороны,  $P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau + \Delta\tau) = P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau) \mathfrak{B}(\Delta\tau | \zeta, \gamma; \psi; \tau), \quad (3)$$

где  $\mathfrak{B}(\Delta\tau | \zeta, \gamma; \psi; \tau)$  — вероятность того, что в интервале от  $\tau$  до  $\tau + \Delta\tau$  луч не пересекается с поверхностью, при условии, что пересечения поверхности отсутствуют также в интервале от нуля

до  $\tau$ . Условную вероятность  $\mathfrak{P}$  можно выразить через вероятность дополнительного события:

$$\mathfrak{P}(\Delta\tau | \zeta, \gamma; \psi; \tau) \approx 1 - p(\zeta, \gamma; \psi; \tau) \Delta\tau, \quad (4)$$

где  $p(\zeta, \gamma; \psi; \tau)$  — плотность вероятности того, что на расстоянии  $\tau$  луч пересечет поверхность (событие  $A$ ), при условии, что в интервале  $(0 \div \tau)$  пересечений нет (событие  $B$ ), т. е. символически можно записать  $p(\zeta, \gamma; \psi; \tau) \equiv p_\tau(A|B)$ . Подставляя (4) в (3) и переходя от  $\Delta\tau$  к бесконечно малым интервалам  $d\tau$ , получаем из (3) дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau)}{d\tau} = -p(\zeta, \gamma; \psi; \tau) P_1(\zeta, \gamma; \psi; \tau),$$

интегрирование которого приводит к следующему результату:

$$P_1(\zeta, \gamma | \psi) = \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) \exp \left\{ - \int_0^\infty p_\tau(A|B) d\tau \right\}. \quad (5)$$

$\Theta(x)$  — ступенчатая функция, определяемая следующим образом:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Предэкспоненциальный множитель в (5) учитывает возможные «самозатенения» поверхности, возникающие в том случае, когда наклон  $\gamma$  больше, чем  $\operatorname{tg} \psi$ . Экспоненциальный множитель в (5) учитывает вероятность затенения выбранной точки поверхности (с высотой  $\zeta$  и производной  $\gamma$ ) другими участками поверхности.

Представим условную вероятность  $p_\tau(A|B)$  в виде

$$p_\tau(A|B) = \frac{P_\tau(A, B)}{P_\tau(B)}, \quad (7)$$

где  $P_\tau(B)$  — априорная вероятность события  $B$ , а  $P_\tau(A, B)$  — априорная вероятность произведения событий  $A$  и  $B$ . В свою очередь вероятность события  $B$  можно рассматривать как вероятность того, что в каждой точке  $\tau'$  интервала  $(0 \div \tau)$  поверхность находится под лучом  $z(\tau') = \zeta + \tau' \operatorname{tg} \psi$ , выходящим под углом  $\psi$  из точки поверхности с высотой  $\zeta$  и наклоном  $\gamma$  (см. рис. 54). Следовательно,  $P_\tau(B)$  можно записать в виде континуального интеграла:

$$P_\tau(B) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \prod_{n=1}^{N = \lceil \tau/\Delta\tau \rceil} \left( \int_{-\infty}^{\zeta + n\Delta\tau \operatorname{tg} \psi} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_n \right) \times \\ \times w_{2N+2}(\zeta, \gamma; \zeta_1, \gamma_1; \dots; \zeta_N, \gamma_N), \quad (8)$$

где  $w_{2N+2}(\zeta, \gamma; \zeta_1, \gamma_1; \dots; \zeta_N, \gamma_N)$  — совместная плотность распределения высот и наклонов поверхности в точках  $\tau = 0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, N\Delta\tau$ , а  $N$  — целая часть отношения  $\tau/\Delta\tau$ . Для априорной

вероятности события  $A$  имеем простую формулу [ср. с (3.45)]:

$$P_{\tau}(A) = \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} d\gamma'' (\gamma'' - \text{tg } \psi) w(\zeta'' = \zeta + \tau \text{tg } \psi, \gamma''), \quad (9)$$

откуда для  $P_{\tau}(A, B)$  получаем

$$P_{\tau}(A, B) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \prod_{n=1}^N \left( \int_{-\infty}^{\zeta + n\Delta\tau \text{tg } \psi} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_n \right) \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} d\gamma'' (\gamma'' - \text{tg } \psi) \times \\ \times w_{2N+4}(\zeta, \gamma; \zeta_1, \gamma_1; \dots; \zeta_N, \gamma_N; \zeta'' = \zeta + \tau \text{tg } \psi, \gamma''). \quad (10)$$

Здесь через  $\zeta''$  и  $\gamma''$  обозначены высота и наклон поверхности на расстоянии  $\tau$  от точки выхода луча (см. рис. 54). Подставляя формулы (8), (10) в (5), получаем окончательную формулу для эффективного распределения высот и наклонов освещенных участков поверхности:

$$w_0(\zeta, \gamma; \psi) = \Theta(\text{tg } \psi - \gamma) w(\zeta, \gamma) \exp \left\{ - \int_0^{\infty} d\tau \times \right. \\ \times \left[ \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \prod_{n=1}^N \left( \int_{-\infty}^{\zeta + n\Delta\tau \text{tg } \psi} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_n \right) \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} d\gamma'' (\gamma'' - \text{tg } \psi) \times \right. \\ \times w_{2N+4}(\zeta; \gamma; \zeta_1, \gamma_1; \dots; \zeta_N, \gamma_N; \zeta'' = \zeta + \tau \text{tg } \psi, \gamma'') \left. \right] \times \\ \left. \times \left[ \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \prod_{n=1}^N \left( \int_{-\infty}^{\zeta + n\Delta\tau \text{tg } \psi} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_n \right) w_{2N+2}(\zeta, \gamma; \zeta_1, \gamma_1; \dots; \zeta_N, \gamma_N) \right]^{-1} \right\} \quad (11)$$

Эта формула полностью аналогична выражениям (22.28) и (22.45) для вероятности бесконечно длинного выброса, отличаясь от них лишь формой записи — вместо бесконечного ряда (22.28), или эквивалентного ему бесконечного произведения (22.45), в (11) входят континуальные интегралы.

2. В случае сильных затенений поверхности, когда  $\text{tg } \psi \ll \gamma_0$  [ $\gamma_0^2 \equiv \bar{\gamma}^2$  — по-прежнему дисперсия производных функции  $\zeta(x)$ ], в (11) можно не учитывать корреляции высот и наклонов в точках  $\tau'$  и  $\tau$ , на основании тех же оценок, которые были проведены в § 22 (см. также [222]). Таким образом, при

$$w(\zeta, \gamma; \zeta', \gamma'; \zeta'', \gamma'') \approx w(\zeta, \gamma; \zeta', \gamma') w(\zeta'', \gamma''), \quad (0 < \tau' < \tau), \quad (12)$$

формула (11) принимает вид

$$w_0(\zeta, \gamma; \psi) = \Theta(\text{tg } \psi - \gamma) w(\zeta, \gamma) \exp \left\{ - \int_0^{\infty} d\tau \int_{\text{tg } \psi}^{\infty} (\gamma'' - \text{tg } \psi) w(\zeta'' = \zeta + \tau \text{tg } \psi, \gamma'') d\gamma'' \right\}. \quad (13)$$



Из стационарности  $\zeta(x)$  следует, что  $w(\zeta, \gamma)$  можно представить в виде произведения  $w(\zeta)w(\gamma)$ , так что после очевидной замены переменной интегрирования из (13) получаем

$$w_s(\zeta, \gamma; \psi) = \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\zeta, \gamma) \exp \left\{ -\Lambda(a) \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta'') d\zeta'' \right\}, \quad (14)$$

где  $\Lambda(a)$  введено соотношением (22.37).

Интегрируя (14) по  $d\gamma$ , получаем распределение высот освещенной части поверхности [ср. с (22.51)]:

$$w_s(\zeta; \psi) = w(\zeta) \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma'') d\gamma'' \exp \left[ -\Lambda(a) \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta'') d\zeta'' \right]. \quad (15)$$

Распределение наклонов освещенных участков получается из (14) интегрированием по  $d\zeta$ :

$$\begin{aligned} w_s(\gamma; \psi) &= \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta w(\zeta) \exp \left[ -\Lambda(a) \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta'') d\zeta'' \right] = \\ &= \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\gamma) \frac{1 - e^{-\Lambda(a)}}{\Lambda(a)}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом мы воспользовались положительностью функции  $w(\zeta)$  и условием нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta) d\zeta = 1$ . Из формулы (16) видно, что введенная нами в § 22 функция затенений [см. (22.64)]

$$Q(\psi) = \frac{1 - e^{-\Lambda(a)}}{\Lambda(a)}$$

имеет смысл вероятности того, что точка поверхности с наклоном  $\gamma$  и произвольной высотой  $\zeta$  не затеняется другими участками этой же поверхности.

Наконец, вероятность того, что произвольная точка освещена безотносительно к высоте и наклону поверхности в данной точке, выражается формулой

$$P(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma w_s(\zeta, \gamma; \psi) = Q(\psi) \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) d\gamma. \quad (17)$$

Вероятность  $P(\psi)$  имеет простой геометрический смысл — это отношение суммарной площади проекций на плоскость  $z=0$  освещенных участков поверхности к площади проекции всей поверхности на эту же плоскость. В рассматриваемом случае цилиндрической поверхности  $P(\psi)$  — отношение суммы длин  $l_1 + l_2 + \dots + l_N$  (см. рис. 53) к полной длине  $L$  рассеивающего участка.

То обстоятельство, что мы до сих пор рассматривали лишь цилиндрическую поверхность  $z = \zeta(x)$ , на самом деле не является принципиальным, и обобщение на случай трехмерной поверхности не представляет труда. Для этого достаточно рассматривать функцию  $\zeta(x)$  как сечение случайной поверхности  $z = \zeta(x, y)$  плоскостью падения  $y = 0$ , а под случайной величиной  $\gamma$  подразумевать  $x$ -компоненту случайного двумерного вектора  $\gamma = \nabla \zeta(x, y)$ . Например, эффективная совместная плотность распределения высоты  $\zeta$  и наклонов  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  (в плоскости падения и в перпендикулярном направлении) имеет вид [ср. с (14)]

$$w_s(\zeta, \gamma; \psi) = \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma_x) w(\zeta, \gamma) \times \\ \times \exp \left[ -\operatorname{ctg} \psi \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} d\gamma_x^* (\gamma_x^* - \operatorname{tg} \psi) w(\gamma_x^*) \int_{\zeta}^{\infty} w(\zeta'') d\zeta'' \right]. \quad (18)$$

Аналогично обобщаются и все остальные функции распределения.

Заметим также, что хотя распределение (14) и вытекающие из него формулы (15)–(17) относятся лишь к сильным затенениям ( $a \ll 1$ ), в обратном предельном случае ( $a \gg 1$ ), когда затенения не играют существенной роли, они также приводят к правильным результатам:

$$w_s(\zeta, \gamma; \psi) \underset{a \gg 1}{\approx} w(\zeta, \gamma), \quad Q(\psi) \underset{a \gg 1}{\approx} 1, \quad P(\psi) \underset{a \gg 1}{\approx} 1.$$

Поэтому в промежуточной области углов скольжения  $\operatorname{tg} \psi \simeq \gamma_0$  ( $a \simeq 1$ ) формулы (14)–(17) можно рассматривать как интерполяционные, однако, как будет показано ниже, такая интерполяция является довольно грубой и далеко не оптимальной.

3. Из рис. 53 следует, что сумма длин проекций освещенных участков поверхности на плоскость  $\Sigma$ , нормальную к пучку падающих лучей, в точности совпадает с проекцией длины участка  $L$  на эту же плоскость. В общем случае трехмерной поверхности, когда  $z = \zeta(x, y)$ , этому утверждению можно придать следующую форму:

$$- \int_{S_{\text{осв}}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) dS = S_0 \sin \psi, \quad (19)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  — единичный вектор в направлении падения лучей,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ ,  $S_0$  — площадь проекции  $S$  на плоскость  $z = 0$ , а интегрирование происходит только по освещенной части  $S_{\text{осв}}$  поверхности  $S$ . Перейдем от интегрирования по поверхности  $S_{\text{осв}}$  к интегрированию по плоскости  $\{x, y\}$  с помощью соотношения  $dS = n_z^{-1} dx dy$  и введем множитель  $\eta(x, y; \psi)$ , принимающий значения 1 и 0, в зависимости от того, освещена точка поверхности с координатами  $\{x, y, \zeta(x, y)\}$  или находится в тени.

Интеграл (19) (назовем его  $\bar{Z}$ ) теперь можно представить в следующем виде:

$$\bar{Z} = - \int_{S_0} \frac{dx dy}{n_z} \psi(x, y; \psi)(n\alpha). \quad (20)$$

Так как соотношение (19) выполняется для каждой реализации случайной поверхности, то оно должно выполняться и для средних по всем реализациям. Усреднение интеграла (20), так же как и в § 22, произведем в два этапа. Сначала усредним подинтегральное выражение  $\psi$  (20) по всем тем реализациям поверхности, которые имеют в точке  $\{x, y\}$  определенную высоту  $\zeta$  и наклон  $\gamma$ . Нетрудно видеть, что это усреднение [которое мы обозначим угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$ ] затрагивает лишь множитель  $\psi(x, y; \psi)$ , так что

$$\langle \psi(x, y; \psi) \rangle = P_1(\zeta, \gamma | \psi). \quad (21)$$

Зависимость остальной части подинтегрального выражения в (20) от случайного наклона поверхности в каждой точке интегрирования  $\{x, y\}$  определяется множителем

$$\frac{n\alpha}{n_z} = (\alpha_x \gamma_x - \alpha_z) = \cos \psi (\gamma_x - \operatorname{tg} \psi). \quad (22)$$

Усредняя теперь (20) по всем реализациям поверхности, получаем из (19) своеобразное «условие нормировки» на эффективную плотность

$$w_3(\gamma_x; \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma w(\zeta, \gamma) P_1(\zeta, \gamma | \psi) \quad (23)$$

распределения углов наклона освещенной части поверхности:

$$\bar{Z} = S_0 \cos \psi \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_x (\operatorname{tg} \psi - \gamma_x) w_3(\gamma_x; \psi) = S_0 \sin \psi. \quad (24)$$

Последнее равенство в этой формуле должно выполняться тождественно для правильной функции  $w_3(\gamma_x; \psi)$ . Покажем, что найденная в предыдущем пункте функция (16) удовлетворяет этому условию лишь в предельных случаях сильных и слабых затенений, т. е. там, где она является асимптотически верной. Действительно, подставляя (16) в (24), имеем

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= S_0 \cos \psi \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) (\operatorname{tg} \psi - \gamma) d\gamma = \\ &= S_0 \sin \psi \frac{1 + \Lambda}{\Lambda} (1 - e^{-\Lambda}). \end{aligned} \quad (25)$$

При  $\Lambda \gg 1$  или  $\Lambda \ll 1$  (что соответствует сильным и слабым затенениям) множитель в (25) при  $S_0 \sin \psi$  обращается в единицу, так что условие (22) оказывается выполненным. В промежуточной же области углов отличие этого множителя от единицы

$$k(\Lambda) = \frac{1 - (\Lambda + 1)e^{-\Lambda}}{\Lambda}$$

указывает на «дефект площади» освещенной части поверхности — вычисленная с  $w_0(\gamma; \psi)$  из (16) площадь проекции  $S_{\text{осв}}$  на плоскость  $\Sigma$  оказывается больше, чем  $S_0 \sin \psi$ . Коэффициент  $k(\Lambda)$  является отношением этой разности к площади истинной проекции  $S_0 \sin \psi$ .

Из графика, приведенного на рис. 55, видно, что при  $\Lambda \simeq 1$  (это соответствует промежуточной области углов скольжения

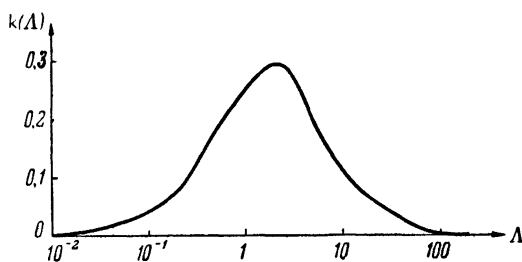


Рис. 55.

$\text{tg } \psi \simeq \gamma_0$ ) дефект площади достигает значительной величины  $k \simeq 0,3$ . Следовательно, асимптотически правильную формулу (16) можно рассматривать лишь как очень грубую интерполяцию для промежуточной области углов: приблизительно 30% поверхности, которая по

формуле (16) считается освещенной, на самом деле находится в тени. Это является следствием того обстоятельства, что при полном разрыве корреляционных связей (12) мы вообще не учитываем в  $p_{\tau}(A|B)$  вероятности пересечения луча с поверхностью в интервале  $(0 \div \tau)$ , так как, в сущности, пользуемся вместо (7) приближенной формулой

$$p_{\tau}(A|B) = \frac{P_{\tau}(A, B)}{P_{\tau}(B)} \approx P_{\tau}(A). \quad (26)$$

Такая аппроксимация оправдывает себя в указанных выше предельных случаях, но оказывается несостоятельной в переходной области. В промежуточной области углов скольжения для  $p_{\tau}(A|B)$  можно воспользоваться другой аппроксимацией [54], [220], основанной на следующих соображениях. Если вероятность многократных пересечений луча с поверхностью мала (что как раз соответствует промежуточным углам скольжения  $\text{tg } \psi \simeq \gamma_0$ ), то при осуществлении события  $A$ , событие  $B$  может считаться достоверным [т. е. если луч пересекает поверхность в точке  $\tau$ , то очень

мала вероятность того, что в интервале  $(0 \div \tau)$  были еще пересечения]:

$$P_{\tau}(A, B) \sim P_{\tau}(A).$$

Вероятность же события  $B$ , входящую в знаменатель (7), можно приближенно заменить на вероятность того, что в интервале  $(0 \div \tau)$  поверхность нигде не превышает уровня  $\xi'' = \xi + \tau \operatorname{tg} \psi$  [вместо точного условия  $\xi(\tau') < \xi + \tau' \operatorname{tg} \psi$  для  $0 < \tau' < \tau$ ]. При этих допущениях формула (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_s(\xi, \gamma; \psi) &= \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\xi, \gamma) \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^{\infty} d\tau w(\xi'' = \xi + \tau \operatorname{tg} \psi) \int_{\operatorname{tg} \psi}^{\infty} w(\gamma'') (\gamma'' - \operatorname{tg} \psi) \times \right. \\ &\quad \left. \times d\gamma'' \left[ \int_{-\infty}^{\xi + \tau \operatorname{tg} \psi} w(\xi') d\xi' \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

В показателе экспоненты интегрирование по  $d\tau$  легко провести тем же способом, что и при выводе (16) из (14), так что из (27) получаем

$$\tilde{w}_s(\xi, \gamma; \psi) = \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\xi, \gamma) \left[ \int_{-\infty}^{\xi} w(\xi') d\xi' \right]^{\Lambda(a)}. \quad (28a)$$

Интегрируя эту формулу по  $d\xi$  (или по  $d\gamma$ ), получаем распределение наклонов (или высот) освещенных участков поверхности:

$$\tilde{w}_s(\xi; \psi) = w(\xi) \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) d\gamma \left[ \int_{-\infty}^{\xi} w(\xi') d\xi' \right]^{\Lambda(a)}, \quad (28б)$$

$$\tilde{w}_s(\gamma; \psi) = \Theta(\operatorname{tg} \psi - \gamma) w(\gamma) [1 + \Lambda(a)]^{-1}. \quad (28в)$$

Соответственно, для вероятностей  $Q(\psi)$  и  $P(\psi)$  получаем вместо (22.63) и (17) новые формулы:

$$\tilde{Q}(\psi) = [1 + \Lambda(a)]^{-1}, \quad (29a)$$

$$\tilde{P}(\psi) = [1 + \Lambda(a)]^{-1} \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) d\gamma. \quad (29б)$$

Для частного случая нормальной случайной поверхности, когда  $\Lambda(a)$  и интегральное распределение наклонов  $\int_{-\infty}^{\operatorname{tg} \psi} w(\gamma) d\gamma$  определяются соотношениями (22.38), эти формулы были получены Смитом [54].

Сравнивая новые функции распределения (28) и вероятности (29) с соответствующими асимптотическими формулами из п. 2

этого параграфа, обратим прежде всего внимание на то, что при малых углах скольжения  $\operatorname{tg} \psi \ll \gamma_0$ , когда  $\Lambda \gg 1$  (сильные затенения), все полученные ранее результаты остаются в силе. В частности [ср. (22.646)],

$$\tilde{Q}(\psi) \underset{a \ll 1}{\approx} Q(\psi) \approx \frac{1}{\Lambda(a)}. \quad (30a)$$

В области же слабых затенений новые функции распределения имеют другую асимптотику. Например,

$$\tilde{Q}(\psi) \underset{a \gg 1}{\approx} 1 - \Lambda(a) \quad (30б)$$

вместо формулы (22.64а). Но зато легко проверить, что  $\tilde{w}_s$  при любых углах скольжения точно удовлетворяют условию «нормировки» (24), так что «дефект площади» при этом не возникает\*)

( $k(\Lambda) = 0$ ).

Несмотря на различный функциональный вид распределений  $w_s$  и  $\tilde{w}_s$ , качественно они довольно близки (кроме малоинтересной области слабых затенений). Количественное же расхождение между  $Q(\psi)$  и  $\tilde{Q}(\psi)$ , как следует из рис. 56, совершенно незначительно

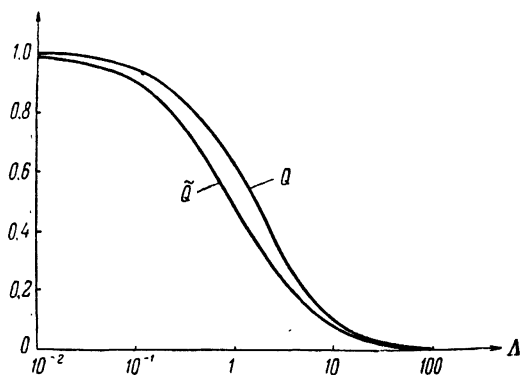


Рис. 56.

но и даже в промежуточной области углов скольжения, где  $\Lambda \simeq 1$ , не превышает 0,13. В качестве примера на рис. 57 приведены графики  $Q(\psi)$  и  $\tilde{Q}(\psi)$  для гауссовой поверхности со среднеквадратичным наклоном  $\gamma_0 = 1,41$ .

Вопрос же о том, каким функциям распределения —  $w_s$  или  $\tilde{w}_s$  — следует отдать предпочтение как интерполяционным в промежуточной области углов скольжения, не может быть решен в рамках данной приближенной теории. Действительно,  $w_s$  асимптотически верны при  $a \ll 1$ , но приводят к дефекту площади

\*) В работе Павельева [223] вероятности (29а, б) были получены как прямое следствие условия нормировки (19) (которое рассматривалось как некое геометрическое тождество) и предположения о том, что вероятность затенения какой-либо точки другими участками поверхности не зависит от наклонов в рассматриваемой точке. Видно, что в принятых нами приближениях это предположение оправдывается [см. замечание, следующее за формулой (22.59)].

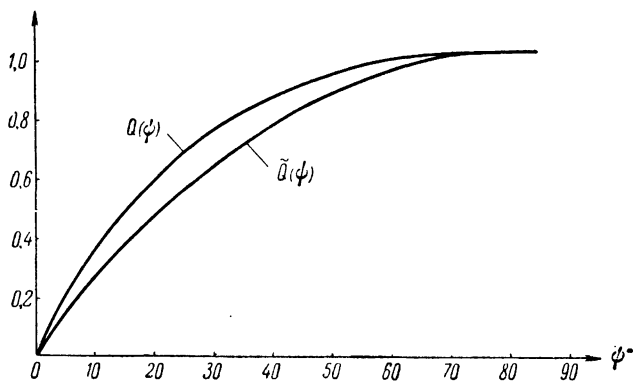


Рис. 57.

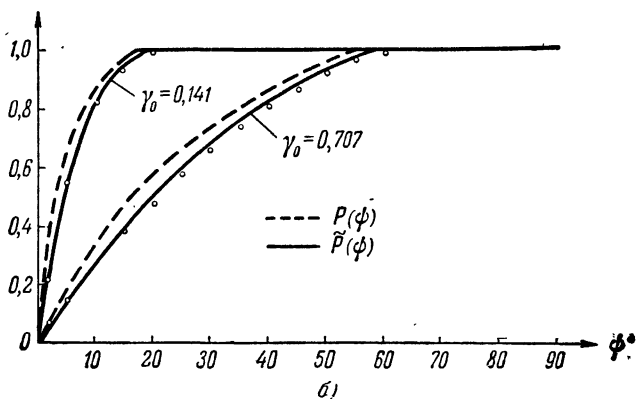
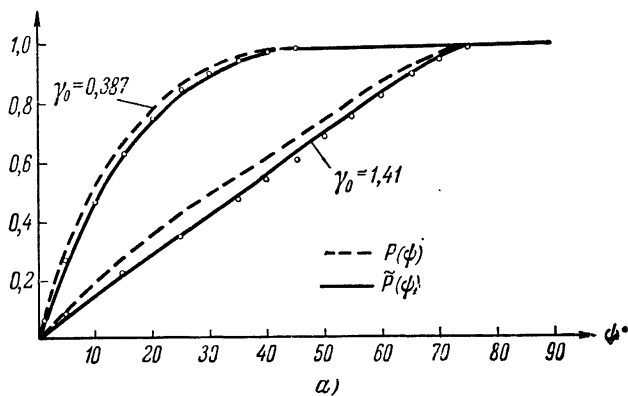


Рис. 58.

$k \approx 0,3$  при  $a \approx 1$  (т. е. неправильно нормированы); новые же функции  $\tilde{w}_s$ , хотя также асимптотически верны при  $a \ll 1$  и всюду правильно нормированы, но их асимптотика отличается от асимптотики  $w_s$  при  $a \gg 1$ . По-видимому, единственным критерием для

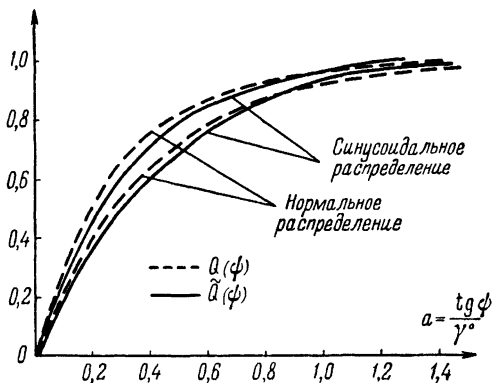


Рис. 59.

такого выбора может служить лишь сравнение этих двух интерполяционных формул с результатами точной теории либо эксперимента. На рис. 58, а), б) приведено сравнение вероятностей  $P(\psi)$  и  $\tilde{P}(\psi)$ , вычисленных по формулам (17) и (29б) для случая нормального распределения и различных наклонов  $\gamma_0$  с результатами численного «эксперимента» Брокельмана и Хафорса [219] (точки на рис. 58, а), б)). Видно, что, несмотря на

малое численное различие между  $P(\psi)$  и  $\tilde{P}(\psi)$ , последней следует отдать явное предпочтение.

Так как функции затенения  $Q$  и  $\tilde{Q}$  связаны с плотностью  $w(\gamma)$  лишь интегральным образом, то они оказываются мало чувствительными к конкретной форме распределения углов наклона поверхности и являются, в каком-то смысле, универсальными. На рис. 59 приведены графики  $Q(\psi)$  и  $\tilde{Q}(\psi)$  для двух типов поверхности — гауссовой и синусоиды со случайной фазой (22.41), когда зависимость  $\Lambda(a)$  дается формулами (22.38) и (22.43)

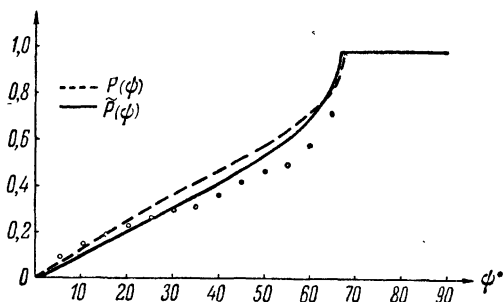


Рис. 60.

соответственно. На рис. 60 вероятности  $P(\psi)$  и  $\tilde{P}(\psi)$  сравниваются с точным решением (точки — результат модельного эксперимента [219] для синусоидальной поверхности, который легко может быть получен и аналитически). Видно, что в данном случае совпадение приближенной теории и «эксперимента» значительно хуже, чем для гауссовой поверхности. Это может быть объяснено, по-видимому,



тем, что у такой поверхности высота  $\zeta$  и угол наклона  $\gamma$  коррелируют, а это явно не соответствует исходным требованиям, предъявляемым к поверхности.

4. Обратимся теперь к приложению полученных выше результатов к задаче о рассеянии волн на статистически неровной поверхности при наличии затенений.

При выполнении условий (22.19) и (22.20) (крутые неровности, короткие волны) рассеянное поле представляется интегралом (22.22), несложное обобщение которого на случай поверхности с произвольным коэффициентом отражения  $V(\vartheta)$  приводит к формуле

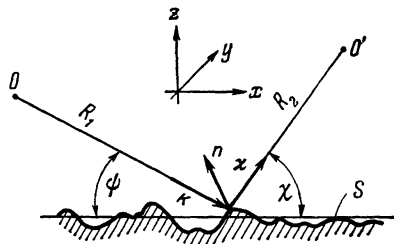


Рис. 61.

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{e^{ik(R_1 + R_2)}}{4\pi i R_1 R_2} \int_{S_{\text{осв}}} e^{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]} V(\mathbf{r}) (n\mathbf{q}) d\mathbf{r}, \quad (31)$$

где, в соответствии с (22.22), интегрирование происходит лишь по тем участкам поверхности, которые освещены падающей волной и видны из точки наблюдения (рис. 61). Усреднение формулы (31) по всем реализациям  $\zeta(\mathbf{r})$  производится непосредственно:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) &= \frac{e^{ik(R_1 + R_2)}}{4\pi i R_1 R_2} \iint_{S_0} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \iint_{-\infty}^{\infty} d\gamma \exp\{-i[\mathbf{q}\mathbf{r} + q_z \zeta(\mathbf{r})]\} \times \\ &\quad \times V w_3(\zeta, \gamma; \psi, \chi) \frac{(n\mathbf{q})}{n_z} = \\ &= S_0 \frac{e^{-ik(R_1 + R_2)}}{4\pi i R_1 R_2} \pi q_z V(\psi) \delta(\mathbf{q}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \iint_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{-iq_z \zeta} w_3(\zeta, \gamma; \psi, \chi). \quad (32) \end{aligned}$$

Здесь  $w_3(\zeta, \gamma; \psi, \chi)$  — одноточечная плотность распределения высот и углов наклона освещенных участков поверхности (как по отношению к источнику, так и к точке наблюдения),  $S_0$  — площадь проекции  $S$  на плоскость  $z=0$ ,  $\mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{q} - \mathbf{e}_z(qe_z)$ . Из (32) для коэффициента отражения когерентной составляющей имеем [ср. (22.50), (22.51)]

$$V_3(\psi) = V(\psi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z \zeta} w_3(\zeta; \psi, \psi) d\zeta. \quad (33)$$

Распределение по направлениям интенсивности рассеянного поля дается интегралом типа (22.54), который в данном случае имеет вид

$$|U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 = \frac{1}{(4\pi R_1 R_2)^2} \int_{S_{\text{осв}}} dS_1 \int_{S_{\text{осв}}} dS_2 (\mathbf{n}_1 \mathbf{q})(\mathbf{n}_2 \mathbf{q}) \times \\ \times V(\boldsymbol{\gamma}_1) V^*(\boldsymbol{\gamma}_2) \exp \{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + iq_z [\zeta(\mathbf{r}_2) - \zeta(\mathbf{r}_1)]\}. \quad (34)$$

Рассматривая коротковолновую асимптотику ( $\lambda \rightarrow 0$ ) этого интеграла, мы ограничимся лишь главным членом асимптотического разложения. Это позволяет вынести предэкспоненциальные множители в (34) за знак интеграла в точках стационарной фазы (точки зеркального отражения), которые определяются из условия

$$\nabla \zeta(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{q}_{\perp}}{q_z},$$

и воспользоваться разложением  $\zeta(\mathbf{r}_2) - \zeta(\mathbf{r}_1) \approx (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}_1)$  в пределах каждого зеркально отражающего участка. После этого усреднение формулы (34) производится элементарно:

$$J(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = |U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})|^2 = \frac{|V(\vartheta_0)|^2 S_0 q^4}{(4\pi R_1 R_2)^2 q_z^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\gamma} \times \\ \times \int_{S_0} d\rho e^{i(\mathbf{q}_{\perp} \boldsymbol{\rho} + q_z \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\rho})} w_0(\zeta, \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}) = \\ = \frac{|V(\vartheta_0)|^2 S_0 q^4}{4R_1^2 R_2^2 q_z^4} w_0\left(\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\mathbf{q}_{\perp}}{q_z}; \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}\right); \quad \left(\cos \vartheta_0 = \frac{kq}{kq}\right). \quad (35)$$

Таким образом, коэффициент отражения (33) и индикатриса рассеяния (35) оказываются непосредственно связанными с эффективными функциями распределения высот и наклонов освещенных (в указанном выше смысле) участков поверхности. Рассматривая простейший случай цилиндрической поверхности, по аналогии с формулой (1), можно записать  $w_0$  в виде

$$w_0(\zeta, \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}) = w(\zeta, \boldsymbol{\gamma}) P_2(\zeta, \boldsymbol{\gamma} | \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}), \quad (36)$$

где  $P_2(\zeta, \boldsymbol{\gamma} | \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi})$  — вероятность того, что ни один из двух лучей, выходящих из точки поверхности с высотой  $\zeta$  и наклоном  $\boldsymbol{\gamma}$  под углами  $\boldsymbol{\psi}$  и  $\boldsymbol{\chi}$  соответственно, нигде не пересекается с поверхностью. Обобщение проведенных в п. 1 выкладок на случай двух лучей не вызывает затруднений, так что ниже мы приведем лишь окончательные результаты.

Во-первых, очевидно, что если оба луча находятся по одну сторону от нормали к средней плоскости  $z = 0$  (напоминаем, что

поверхность цилиндрическая и все возможные направления рассеяния лежат в плоскости падения), то

$$P_2(\zeta, \gamma | \psi, \chi) = P_1(\zeta, \gamma | \min\{\psi, \chi\}), \quad (37)$$

где  $\chi$  — угол между вектором  $\mathbf{x}$  и плоскостью  $z=0$ , определяемый так, что  $\chi \leq \pi/2$ . Такая ситуация имеет место, в частности, в радиолокационном случае или при обратном рассеянии в акустике. Из (37) следует, что искомая плотность распределения (36) совпадает с ранее найденными функциями  $w_s(\zeta, \gamma; \alpha)$  или  $\tilde{w}_s(\zeta, \gamma; \alpha)$ , зависящими лишь от одного параметра  $\alpha = \min\{\psi, \chi\}$ .

Если же лучи, идущие в источник и точку наблюдения, находятся по разные стороны от нормали к средней плоскости  $z=0$ , то формулы, обобщающие распределения (27) — (28), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{w}_s(\zeta, \gamma; \psi, \chi) &= \\ &= \Theta(\operatorname{tg} \chi - \gamma) \Theta(\gamma - \operatorname{tg} \psi) w(\zeta, \gamma) \left[ \int_{-\infty}^{\zeta} w(\zeta') d\zeta' \right]^{\Lambda(a) + \Lambda(b)}; \quad (38a) \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_s(\zeta; \psi, \chi) = w(\zeta) \int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\operatorname{tg} \chi} w(\gamma) d\gamma \left[ \int_{-\infty}^{\zeta} w(\zeta') d\zeta' \right]^{\Lambda(a) + \Lambda(b)}; \quad (38б)$$

$$\tilde{w}_s(\gamma; \psi, \chi) = \frac{\Theta(\operatorname{tg} \chi - \gamma) \Theta(\gamma - \operatorname{tg} \psi) w(\gamma)}{1 + \Lambda(a) + \Lambda(b)}, \quad b \equiv \frac{\operatorname{tg} \chi}{\gamma_0}. \quad (38в)$$

Формулы (33), (35) в сочетании с (38а, б, в) решают поставленную задачу о рассеянии при наличии затенений. Подставляя, например, в (35) распределение наклонов в виде (38в) и учитывая, что всегда  $\operatorname{tg} \chi \geq q_{\perp}/q_z \geq \operatorname{tg} \psi$  либо  $\operatorname{tg} \chi \leq q_{\perp}/q_z \leq \operatorname{tg} \psi$ , получаем для индикатрисы рассеяния

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \tilde{Q}(\psi, \chi), \quad (39)$$

где  $J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  — индикатриса рассеяния (20.37), при вычислении которой затенения не учитываются:

$$J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{|V(\theta_0)|^2 S_0 q^4}{4R_1^2 R_2^2} \frac{q^4}{q_z^2} w\left(\gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z}\right),$$

а множитель  $\tilde{Q}(\psi, \chi)$  имеет вид

$$\tilde{Q}(\psi, \chi) = \frac{1}{1 + \Lambda(a) + \Lambda(b)}. \quad (40)$$

Формула (40) обобщает выражение (29а) на тот случай, когда необходимо учитывать двусторонние затенения поверхности, как по отношению к источнику, так и по отношению к точке наблюдения.

## ГЛАВА VIII

### ФЛУКТУАЦИЯ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО НА КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕРОВНОСТЯХ

В предыдущей главе было рассмотрено рассеяние на ограниченном участке статистически шероховатой поверхности, неровности которой предполагались достаточно гладкими для того, чтобы при решении задачи дифракции можно было использовать приближение касательной плоскости (метод Кирхгофа). Размеры такой шероховатой площадки считались настолько малыми, что искривлением фазового фронта падающей волны в пределах шероховатого участка можно было пренебречь и поле в точке наблюдения также считать плоской волной. Неравенство (19.15), обеспечивающее выполнение этих условий, ограничивает область применимости полученных в предыдущей главе формул лишь теми случаями, когда источник поля и точка наблюдения находятся в зоне Фраунгофера относительно рассеивающей поверхности.

В этой главе в рамках метода Кирхгофа мы рассмотрим в каком-то смысле обратный предельный случай, когда размеры шероховатого участка достаточно велики или даже бесконечны в одном или двух направлениях, т. е. задачу о дифракции во френелевской области.

Последние два параграфа этой главы посвящены изучению пространственной корреляционной функции и спектра рассеянного поля.

#### § 24. Среднее поле и интенсивность флуктуаций над неограниченной поверхностью

1. Вычисление среднего поля точечного источника над неограниченной поверхностью с гладкими неровностями ( $(ak)^{1/3} \gg 1$ ,  $a$  — характерный радиус кривизны поверхности) сводится к статистическому усреднению по реализациям интегрального представления (19.9) для рассеянного поля:

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{4\pi} \int_S V(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{e^{ik(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)}}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \right] dS, \quad (1)$$

где

$$\tilde{R}_1 = \sqrt{(z_0 - \zeta)^2 + r^2}, \quad \tilde{R}_2 = \sqrt{(z - \zeta)^2 + (\mathbf{D} - \mathbf{r})^2},$$

а все остальные обозначения такие же, как и в § 19 (рис. 29).

Если предположить, что для подавляющего большинства реализаций случайной функции  $\zeta(\mathbf{r})$  как источник, так и точка наблюдения находятся над неровностями \*) ( $z_0, z > \zeta$ ), то сферические волны в (1) можно представить в виде разложения по плоским волнам в следующем виде:

$$\frac{e^{ik\tilde{R}_1}}{\tilde{R}_1} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{x}}{\kappa_z} e^{i\{\mathbf{x}\mathbf{r} + [z_0 - \zeta(\mathbf{r})]\kappa_z\}}; \quad (2a)$$

$$\frac{e^{ik\tilde{R}_2}}{\tilde{R}_2} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{x}}{\kappa_z} e^{i\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{r}\} + [z - \zeta(\mathbf{r})]\kappa_z}. \quad (26)$$

Здесь интегрирование происходит по двумерному вектору  $\mathbf{x} = \{x_x, x_y\}$  и введено обозначение  $\kappa_z \equiv \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$ . Производную по нормали в (1) запишем в проекциях

$$\frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n}\nabla) = n_z \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_\perp \nabla_{\mathbf{r}}, \quad (3)$$

где компоненты единичного вектора нормали  $\mathbf{n}$  определяются по формулам (19.17):

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad \mathbf{n}_\perp = -\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} = -\boldsymbol{\gamma} n_z, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla_{\mathbf{r}} \zeta(\mathbf{r}).$$

Подставляя (3) и (2) в (1) и переходя от интегрирования по поверхности  $S$  к интегрированию по плоскости  $z=0$ , с помощью соотношения  $d\mathbf{r} = n_z dS$  получаем для простейшего случая  $V=1$ :

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{z=0} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{x}'}{\kappa_z \kappa'_z} [\kappa_z + \kappa'_z - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')] \times \\ \times \exp\{i[(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{r}) + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{D} + z_0 \kappa_z + z \kappa'_z - \zeta(\mathbf{r})(\kappa_z + \kappa'_z)]\}. \quad (4)$$

При усреднении этой формулы учтем, что  $\zeta(\mathbf{r}_1)$  и  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}_2)$  независимы при  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  и, кроме того, что из условия  $\zeta=0$  следует  $\boldsymbol{\gamma}=0$ , так что мы приходим к следующей формуле для среднего поля:

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{i}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{x}}{\kappa_z} e^{-2i\kappa_z \zeta} e^{i[\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} + (z_0 + z)\kappa_z]}. \quad (5)$$

Но среднее от  $\exp\{-2i\kappa_z \zeta\}$  есть не что иное, как эффективный коэффициент отражения по среднему полю плоской волны,

\*) Иначе говоря, тем реализациям, для которых это условие не выполняется, мы приписываем меру нуль во всем ансамбле реализаций.

падающей на поверхность под углом скольжения  $\psi = \arcsin \frac{xz}{k}$  [см. (20.3) и (20.6)]:

$$V_s(\psi) = e^{-2i\kappa z_0} = e^{-2ik \sin \psi z_0}.$$

Таким образом, формуле (5) можно дать простую физическую интерпретацию: среднее поле точечного источника над неограниченной статистически неровной поверхностью представляется в виде суммы прямой волны  $U_0(\mathbf{R})$  и суперпозиции плоских волн, отраженных от поверхности под разными углами, причем каждая из них входит со своим коэффициентом отражения  $V_s(\psi)$ .

Введем вектор  $\mathbf{R}' = (D, z_0 + z)$ , который, как видно из рис. 62, соединяет зеркальный источник  $\{0, -z_0\}$  с точкой наблюдения

и с помощью метода стационарной фазы представим интеграл (5) в виде разложения по обратным степеням  $kR'$  (см. [63] § 19):

$$\bar{U}(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + \frac{e^{ikR'}}{R'} \left[ V_s(\vartheta_0) - \frac{iN(\vartheta_0)}{kR'} + o\left\{\frac{1}{kR'}\right\}\right], \quad (6a)$$

где

$$N(\vartheta_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 V_s(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \frac{dV_s(\vartheta)}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right]_{\vartheta=\vartheta_0}, \quad (6b)$$

и введен угол падения  $\vartheta = \pi/2 - \psi$ , значение которого в точке стационарной фазы обозначено через

$$\vartheta_0 = \arctg \frac{z+z_0}{D}. \quad (7)$$

Для того чтобы когерентную составляющую отраженного поля можно было представить как поле зеркального источника  $\{0, -z_0\}$ , умноженное на эффективный коэффициент отражения  $V_s(\vartheta)$  в точке зеркального отражения (см. рис. 62)

$$r_0 = \frac{z_0}{z+z_0} D(\vartheta = \vartheta_0),$$

должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{N(\vartheta_0)}{kR'V_s(\vartheta_0)} \right| \ll 1. \quad (8)$$

Для нормальной случайной поверхности, когда [ср. (20.6)]

$$V_0(\vartheta) = e^{-2(k\sigma \cos \vartheta)^2},$$

неравенство (8) принимает вид

$$2|(k\sigma)^4 \sin^2 2\vartheta_0 + (k\sigma)^2 (3 \cos \vartheta_0 - 1)| \ll kR'. \quad (9)$$

При малых значениях  $(k\sigma)^2$  первым слагаемым в левой части этого неравенства можно пренебречь и, опуская несущественный множитель  $(3 \cos^2 \vartheta - 1)$ , получаем условие применимости «отражательной формулы»

$$\bar{U}(R) = U_0(R) + \frac{e^{ikR'}}{R'} V_0(\vartheta_0) \quad (10)$$

в виде

$$\frac{k\sigma^2}{R'} \ll 1. \quad (11)$$

Таким образом, для низких неровностей формула (10) оказывается справедливой при очень слабом ограничении на дисперсию высот: достаточно, чтобы характерный вертикальный размер шероховатостей  $\sigma$  был значительно меньше, чем зона Френеля  $\approx \sqrt{\lambda R}$ .

В обратном предельном случае высоких шероховатостей  $(k\sigma)^2 \gg 1$ , и почти для всех углов падения  $\vartheta$ , за исключением узких секторов вблизи  $\vartheta_0 \approx 0, \pi/2$ , когда

$$\vartheta_0 \gg \frac{1}{k\sigma\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \ll \frac{1}{2(k\sigma)}, \quad (12)$$

неравенство (9) эквивалентно следующему:

$$\frac{2}{kR'} (k\sigma)^4 \sin^2 2\vartheta_0 \ll 1. \quad (13)$$

Таким образом, при  $(k\sigma)^2 \gg 1$  даже в волновой зоне ( $kR' \gg 1$ ) формула (10) имеет место только для достаточно удаленных друг от друга источника и приемника ( $R' \gg \sigma(k\sigma)^3$ ). Это обстоятельство связано с тем, что при больших значениях параметра Рэлея коэффициент отражения [например, в формуле (20.6)] становится очень быстро изменяющейся функцией угла скольжения за счет большого множителя  $(k\sigma)^2$  в показателе экспоненты. Формула же (10) получается из (5) лишь при условии достаточно медленного изменения  $V_0(\psi)$  в области углов, существенной для отражения, когда в интеграле (5)  $V_0(\psi)$  можно представить в виде

$$V(\psi) \approx V_0(\psi_0) + \frac{dV}{d\psi} \Delta\psi + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\psi^2} (\Delta\psi)^2 + \dots, (\Delta\psi = \psi - \psi_0).$$

и ограничиться первым членом. Так как линейное по  $\Delta\psi$  слагаемое исчезает при интегрировании, то сформулированное выше условие имеет вид

$$\frac{1}{2V} \frac{d^2V}{d\psi^2} (\Delta\psi)^2 \ll 1. \quad (14)$$

Если в качестве  $\Delta\psi$  выбрать угловой размер зоны Френеля  $\Delta\psi = (kR')^{-1/2}$ , то неравенство (14) как раз и приводит к условию (13). При почти скользящем или почти вертикальном облучении, когда неравенства (12) заменяются на обратные, применимость «отражательной» формулы (10) по-прежнему ограничена лишь слабым неравенством (11).

2. Перейдем теперь к исследованию интенсивности флуктуаций поля, рассеянного на неограниченной шероховатой плоскости. По-видимому, впервые в теоретическом плане такая задача рассматривалась Исаковичем [170]. Впоследствии при проведении экспериментальных и теоретических исследований по рассеянию на гладких поверхностях (см., например, [224] — [228]) оказалось, что размеры рассеивающей площадки существенным образом влияют на характеристики отраженного поля — интенсивность флуктуаций, распределение амплитуд, корреляционные функции и т. д.

Будем исходить из представления потенциала  $U(\mathbf{R})$  отраженного поля в виде (19.13)

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi i} \int_{S_0} \frac{\exp\{i[k(R_1 + R_2) - q_z \zeta(r)]\}}{R_1 R_2} V(r) \frac{(nq)}{n_z} dr. \quad (15)$$

Здесь все обозначения такие же, как и в § 19 (см. рис. 29). Считая, как и раньше, для оценок  $R_1 \simeq R_2 \simeq R$ ,  $\chi \simeq \psi$ , выпишем ограничения, при которых эта формула была получена:

$$\sin \psi \frac{\sigma}{R} \ll 1, \quad \frac{k\sigma^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1, \quad kR \gg 1.$$

При больших значениях параметра Рэлея  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  (в обратном предельном случае мы, как будет показано ниже, приходим к результатам теории возмущений) существенный вклад в интеграл (15) вносят лишь точки стационарной фазы, радиус-векторы  $\mathbf{R}$  которых являются решениями уравнения

$$\mathbf{q}_\perp + q_z \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \text{где } \mathbf{q}_\perp = k \boldsymbol{\nu}_\perp (R_1 + R_2).$$

Поэтому в предэкспоненциальных функциях в (15) наклоны  $\boldsymbol{\nu} = \nabla_r \zeta(r)$  можно заменить их значениями  $\boldsymbol{\nu}_0 = -\mathbf{q}_\perp / q_z$  в точках зеркального отражения. Заметим, что, в отличие от формул предыдущей главы, компоненты вектора  $\mathbf{q} = k \boldsymbol{\nu} (R_1 + R_2)$  являются функциями точек плоскости  $\mathbf{r} = \{x, y\}$ , по которой происходит интегрирование в (15). Поэтому, например, при замене  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \boldsymbol{\nu}_0$



в локальном коэффициенте отражения  $V$  мы все равно приходим к функции от переменного радиус-вектора  $r$ , которую в дальнейшем для краткости будем обозначать той же буквой  $V(r)$ .

После указанных упрощений формула (15) принимает такой вид:

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi i} \int \frac{V(r) q^2(r)}{R_1 R_2 q_z} \exp [ik(R_1 + R_2) - iq_z \zeta(r)] dr. \quad (16)$$

Для интенсивности флуктуирующей составляющей  $u = U - \bar{U}$  отсюда, опуская, как всегда, поле прямой волны  $U_0(\mathbf{R})$ , получаем

$$\begin{aligned} \overline{|u(\mathbf{R})|^2} &= \overline{|U(\mathbf{R})|^2} - |\bar{U}(\mathbf{R})|^2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{VV^* q^2 q'^2}{R_1 R_1' R_2 R_2' q_z q_z'} e^{ik(R_1 + R_2 - R_1' - R_2')} \times \\ &\times \left\{ \exp[-iq_z \zeta] + \exp[iq_z \zeta'] - \exp[-iq_z \zeta] \exp[iq_z \zeta'] \right\} dr dr', \quad (17) \end{aligned}$$

где все величины со штрихом относятся к точке  $r'$ . Введем вместо  $r'$  новую переменную интегрирования  $\rho = r' - r$ . Расстояния от источника и точки наблюдения до точек на средней плоскости запишутся в виде

$$R_1^2 = z_0^2 + r^2, \quad R_1'^2 = z_0^2 + (r + \rho)^2, \quad (18a)$$

$$R_2^2 = z^2 + (D - r)^2, \quad R_2'^2 = z^2 + (D - r - \rho)^2. \quad (18б)$$

Обозначим через  $\rho_x$  и  $\rho_y$  размеры области, существенной для интегрирования по переменной  $\rho$  в интеграле (17). Тогда при выполнении неравенств

$$\frac{k\rho_x^2 \sin^2 \psi}{R} \ll 1; \quad \frac{k\rho_y^2}{R} \ll 1 \quad (19a, б)$$

можно ограничиться линейными по  $\rho$  членами в разложении

$$R_1 + R_2 - R_1' - R_2' \approx \left( \frac{D-r}{R_2} - \frac{r}{R_1}, \rho \right) + O\left(\frac{\rho^2}{R}\right).$$

В предэкспоненциальных же множителях в (17) можно положить  $\rho = 0$ , если

$$\frac{\rho_x \cos \psi}{R} \ll 1, \quad \frac{\rho_x^2 \sin^2 \psi}{R^2} \ll 1, \quad \frac{\rho_y^2}{R^2} \ll 1. \quad (20a, б, в)$$

Наконец, в аргументах характеристических функций, входящих в (17),  $q_z'$  можно заменить на  $q_z$ , если предположить, что

$$k\sigma \frac{\rho_x}{R} \sin 2\psi \ll 1, \quad k\sigma \frac{\rho_x^2}{R^2} \sin^3 \psi \ll 1, \quad k\sigma \frac{\rho_y^2}{R^2} \sin \psi \ll 1. \quad (21a, б, в)$$

При выполнении приведенных выше неравенств формула (17) принимает следующий вид:

$$|\overline{u}|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_0} \frac{dr |V|^2 q^4}{R_1^2 R_2^2 q_z^2} \int_{z=0} d\rho e^{-iq \perp \rho} \{f_2(q_z, -q_z; \rho) - f_1^2(q_z)\}. \quad (22)$$

Нетрудно получить приближенные формулы для размеров  $\rho_x, \rho_y$  области, существенной для интегрирования по  $d\rho$ , оценив те расстояния, на которых выражение в фигурных скобках  $\{\dots\}$  в (22) существенно убывает. Если для конкретности считать случайную поверхность гауссовой, то для характеристических функций  $f_1$  и  $f_2$  имеем

$$f_1(q_z) = \exp\left(-\frac{q_z^2 \sigma^2}{2}\right), \quad f_2(q_z, -q_z; \rho) = \exp\{-q_z^2 \sigma^2 [1 - W(\rho)]\}. \quad (23)$$

При  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  функция  $f_2$  имеет острый максимум при  $\rho = 0$ . Поэтому для оценки расстояний, на которых разность  $f_2(q_z, -q_z; \rho) - f_1^2(q_z)$  существенно убывает, достаточно разложить  $W(\rho)$  около точки  $\rho = 0$  в ряд Тейлора

$$W(\rho) \approx 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_x^2}{l_x^2} + \frac{\rho_y^2}{l_y^2} \right\} + o\left\{ \frac{\rho^2}{l^2} \right\},$$

подставляя который в (23), получаем по порядку величины

$$\rho_{x,y} \approx \frac{l_{x,y}}{q_z \sigma}. \quad (24)$$

Если теперь в неравенствах (19) – (21) использовать эту оценку для  $\rho_{x,y}$ , то все они оказываются выполненными, если \*)

$$kR\gamma_x^2 \gg 1, \quad kR \sin^2 \psi \gamma_y^2 \gg 1. \quad (25a, б)$$

Неравенствам (25) можно придать простой физический смысл, если учесть, что размеры области  $(\Delta x)_\zeta, (\Delta y)_\zeta$ , существенной для отражения от шероховатой поверхности, связаны с угловой шириной  $\Delta\chi$  и  $\Delta\psi$  индикатрисы рассеяния следующими очевидными соотношениями:

$$(\Delta x)_\zeta \approx \frac{R\Delta\chi}{\sin \psi} \approx \frac{R\gamma_x}{\sin \psi}, \quad (\Delta y)_\zeta \approx R \cos \psi \Delta\psi \approx R \sin \psi \gamma_y. \quad (26)$$

\*) В работе [428] показано, что если в интеграле (17) сделать симметричную замену переменных  $\rho = r' - r$  и  $\xi = r' + r$ , то квадратичные по  $\rho$  члены в показателе экспоненты обращаются в нуль и, следовательно, вместо неравенств (19a, б) достаточно потребовать выполнения условий:  $k\rho_x^2 \sin^2 \psi \ll R$ ,  $k\rho_y^2 \ll R$ . Отсюда, используя для  $\rho_{x,y}$  оценку (24), приходим к неравенствам  $(kR)^2 \gamma_x^2 \gg 1$  и  $(kR)^2 \gamma_y^2 \sin^2 \psi \gg 1$ , которые слабее условий (25a, б).

При этом мы воспользовались оценками (20.23), (20.29), определяющими ширину индикатрисы через характерные наклоны поверхности  $\gamma_x, \gamma_y$ . Сравнивая (26) с размерами первой зоны Френеля  $(\Delta x)_0 \simeq \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}, (\Delta y)_0 \simeq \sqrt{\frac{R}{k}}$ , приходим к выводу, что неравенства (25а, б) выполняются, если размеры существенной для отражения области значительно превосходят размеры зоны Френеля. Этим простым физическим требованием ограничивается применимость формулы (22) в случае больших значений параметра Рэлея  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$ .

В обратном предельном случае  $(q_z \sigma)^2 \ll 1$  формула (22) переходит в полученное в гл. IV методом возмущений выражение (10.11) для интенсивности флуктуаций во френелевской области. Для  $\rho_{x,y}$  в этом случае легко получаем из (23) оценки  $\rho_{x,y} \simeq l_{x,y}$ , так что неравенства (19) — (21) переходят в (10.8), ограничивающие область применимости формулы (10.11): радиусы корреляции  $l_{x,y}$  должны быть значительно меньше размеров зоны Френеля.

Перейдем теперь к исследованию формулы (22) в различных предельных случаях.

3. Пусть  $L_x$  и  $L_y$  размеры рассеивающей шероховатой площадки  $S_0$  в плоскости  $z=0$ . Если

$$\frac{kL_x}{R} \rho_x \sin^2 \psi \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kL_y}{R} \rho_y \ll 1, \quad (27)$$

то функцию, стоящую под интегралом по  $d\rho$  в формуле (22), можно считать не зависящей от переменной интегрирования  $r$ , так как неравенства (27) означают, что при изменении  $r$  в пределах  $r \in S_0$  показатель экспоненты  $iq_{\perp} \rho$  остается постоянным. Если, кроме того, предположить, что  $L_{x,y} \ll R$ , то  $R_1, R_2$  и другие медленно изменяющиеся функции переменной  $r$  можно вынести за знак интеграла в произвольной точке  $r \in S_0$  (например, в центре площадки), так что формула (22) принимает вид

$$|\bar{u}|^2 = \frac{|V|^2 S_0 q^4}{(4\pi R_1 R_2 q_z)^2} \int_{z=0} d\rho e^{-iq_0} \{f_2(q_z, -q_z; \rho) - f_1^2(q_z)\}. \quad (28)$$

Эта формула совпадает с выражением (20.11) для флуктуаций поля в зоне Фраунгофера. Однако получена она при значительно более слабых предположениях (27) относительно малости размеров площадки  $L_{x,y}$ . Действительно, при  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$ , например,  $\rho_{x,y} \simeq l_{x,y}/(q_z \sigma)$ , так что неравенства (27) принимают вид

$$\frac{L_x}{R} \sin \psi \ll \gamma_x, \quad \frac{L_y}{R} \ll \gamma_y \sin \psi. \quad (29)$$

Принимая во внимание определения (26), эти неравенства можно понимать как требование малости линейных размеров  $L_{x,y}$

рассеивающей площадки по сравнению с размерами  $(\Delta x)_z$ ,  $(\Delta y)_z$  области, существенной для отражения. Таким образом, формула (28) (и аналогичные ей формулы из гл. VII) справедлива не только в зоне Фраунгофера, но и на гораздо меньших расстояниях — достаточно, чтобы угловой размер площадки  $S_0$  был меньше, чем ширина индикатрисы рассеяния. При этом точка наблюдения может находиться и во френелевской области, так что поле в ней представляется суперпозицией плоских волн с угловым разбросом направлений прихода  $\delta\chi \simeq \frac{L_x}{R} \sin\psi$  в вертикальной плоскости и  $\delta\varphi \simeq \frac{L_y}{R \cos\psi}$  — в азимутальной. Но если индикатриса рассеяния в этом интервале углов остается почти постоянной, то интенсивность флуктуаций оказывается такой же, как и в зоне Фраунгофера.

В предельном случае низких неровностей  $((q_z\sigma)^2 \ll 1)$   $\rho_{x,y} \simeq \simeq l_{x,y}$ , и неравенства (27) означают, что точка наблюдения должна находиться в зоне разделения спектров:

$$\frac{kL_x}{R} l_x \sin^2\psi \ll 1, \quad \frac{kL_y}{R} l_y \ll 1 \quad (30)$$

— результат, полученный в гл. IV методом возмущений. И в этом случае границы применимости формулы (28) оказываются шире, чем в случае фраунгоферовой дифракции.

4. В общем случае, когда размеры площадки  $S_0$  настолько велики, что неравенства (27) не выполняются, формулу (22) можно записать в следующем виде:

$$\overline{|u|^2} = \int_{S_0} \frac{dr}{S_0} \overline{|u(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2}, \quad (31)$$

где  $\overline{|u(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2}$  определяется формулой (28) [или аналогичными выражениями типа (20.11), (20.12) из гл. VII].

Таким образом, полное поле в точке наблюдения в случае дифракции Френеля представляется в виде некогерентной суперпозиции полей, рассеянных с маленьких ограниченных участков  $dr$ ; так что полная интенсивность флуктуаций равна сумме интенсивностей полей, рассеянных от малых ограниченных участков. Зависимость интенсивности рассеяния «в малом»  $\overline{|u(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2}$  от локального угла скольжения  $\psi$ , азимута  $\varphi$  и угла места  $\chi$  была достаточно подробно изучена в предыдущей главе, и в дальнейшем мы ее будем считать известной:

$$\overline{|u(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2}_{S_0} = \frac{F(\psi; \chi, \varphi)}{R^2 R_z^2}. \quad (32)$$

Например, при  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$  и с учетом затенений для  $F(\psi; \chi, \varphi)$  имеем из (23.35):

$$F(\psi; \chi, \varphi) = \frac{|V(\theta_0)|^2 q^4}{4q_z^4} w_0 \left( \gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z}; \psi, \chi \right); \quad \cos \theta_0 = \frac{kq}{kq}. \quad (33)$$

В обратном предельном случае  $(q_z\sigma)^2 \ll 1$  функция  $F(\psi; \chi, \varphi)$  определяется фурье-преобразованием корреляционной функции поверхности (см. гл. IV):

$$F(\psi; \chi, \varphi) = \frac{|V|^2 q^4 \sigma^2}{(4\pi)^2} \int d\rho e^{i\rho \mathbf{e}} W(\rho) = \frac{1}{4} |V|^2 q^4 \sigma^2 \check{W}(q_{\perp}). \quad (34)$$

Таким образом, нахождение интенсивности флуктуаций поля единичного точечного источника над шероховатой поверхностью сводится к вычислению интеграла

$$|u|^2 = \int_{S_0} \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} F(\psi; \chi, \varphi), \quad (35)$$

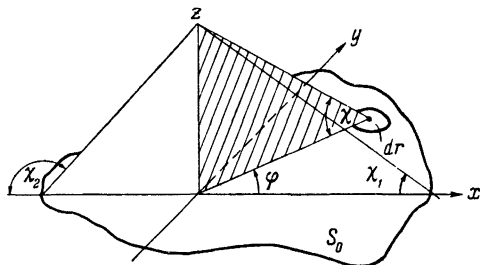


Рис. 63.

где зависимость углов  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\varphi$  от переменной интегрирования  $r$  определяется из довольно элементарных геометрических построений. В качестве простейшего примера рассмотрим рассеяние плоской волны единичной амплитуды, падающей под углом скольжения  $\psi$  на шероховатую площадку  $\{x, y\} = r \in S_0$ :

$$|u|^2 = \int_{S_0} \frac{dx dy}{R_2^2} F(\psi; \chi, \varphi). \quad (36)$$

Локальный угол места  $\chi$  и азимут  $\varphi$  связан с переменными интегрирования  $x, y$  очевидными соотношениями (рис. 63).

$$y = z \operatorname{ctg} \chi \cos \varphi, \quad y = z \operatorname{ctg} \chi \sin \varphi; \quad (37)$$

при этом

$$\frac{dx dy}{R_2^2} = \operatorname{ctg} \chi \cdot d\chi d\varphi, \quad (37a)$$

так что интеграл (36) принимает вид

$$|u|^2 = \int_{\Omega(S_0)} d\varphi d\chi \operatorname{ctg} \chi F(\psi; \chi, \varphi). \quad (38)$$

В этой формуле интегрирование производится по телесному углу  $\Omega(S_0)$ , под которым видна площадка  $S_0$  из точки наблюдения

(см. рис. 63). В частности, при рассеянии на поверхности с  $|V|=1$  и двумерными ( $l_y = \infty$ ) шероховатостями (ср. § 20)

$$F(\psi; \chi, \varphi) = \frac{q^4}{4q_z^2} \delta(q_y) w(\gamma_x = -q_x/q_z), \quad (39)$$

и (38) можно записать в форме

$$|\overline{u}|^2 = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{\sin \chi} \frac{(1 - \cos \psi \cos \chi)^2}{(\sin \chi + \sin \psi)^2} w(\gamma_x = -q_x/q_z). \quad (40)$$

Наконец, если распределение наклонов поверхности нормальное, интенсивность флуктуаций определяется интегралом

$$|\overline{u}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_x^2}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{\sin \chi} \frac{(1 - \cos \psi \cos \chi)^2}{(\sin \chi + \sin \psi)^2} \exp\left[-\frac{(\cos \psi - \cos \chi)^2}{2\gamma_x^2 (\sin \chi + \sin \psi)^2}\right]. \quad (41)$$

В общем случае, когда источник поля находится на конечном расстоянии от рассеивающей поверхности и падающую волну нельзя считать плоской, в интеграле (35) следует учитывать, что углы  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $\chi$  не являются независимыми (рис. 64). В частности, из  $\triangle ABC$  угол  $\psi$  может быть выражен через  $\chi$ ,  $\varphi$  и три свободных параметра  $z$ ,  $z_0$ ,  $D$ , определяющих взаимное расположение источника и точки наблюдения:

$$z_0 \operatorname{ctg} \psi = \sqrt{D^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 \chi \sin^2 \varphi} - z \operatorname{ctg} \chi \cos \varphi. \quad (42)$$

Пользуясь соотношением (37а) и выразив  $R_1 = z_0/\sin \psi$  через новые переменные интегрирования  $\chi$  и  $\varphi$ , получаем из (35) следующую общую формулу (см. [170]):

$$|\overline{u}|^2 = \int_{\Omega(S_0)} d\chi d\varphi \frac{\operatorname{ctg} \chi^F [\psi(\chi, \varphi); \chi, \varphi]}{b}, \quad (43)$$

где

$$b = z_0^2 + D^2 + z^2 \operatorname{ctg}^2 \chi \cos 2\varphi - 2z \operatorname{ctg} \chi \cos \varphi \sqrt{D^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 \chi \sin^2 \varphi}.$$

5. Имеется два интересных предельных случая — пологих и крутых неровностей, когда интенсивность флуктуаций в форме (35) можно оценить, не выполняя громоздких и довольно сложных вычислений интегралов типа (43).

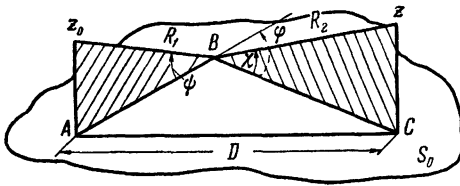


Рис. 64.

а. При крутых наклонах поверхности индикатриса является медленно изменяющейся функцией углов скольжения — рассеяние «в малом» является диффузным и вклад каждого рассеивающего участка  $dr$  в полную интенсивность флуктуаций в точке наблюдения определяется в основном расстояниями  $R_1, R_2$  от этого участка до источника и приемника, а не углами рассеяния. Поэтому интенсивность флуктуаций в этом случае не зависит от статистических характеристик поверхности, а определяется лишь взаимным расположением источника и точки наблюдения, т. е. параметрами  $z_0, z$  и  $D$  (см. рис. 64).

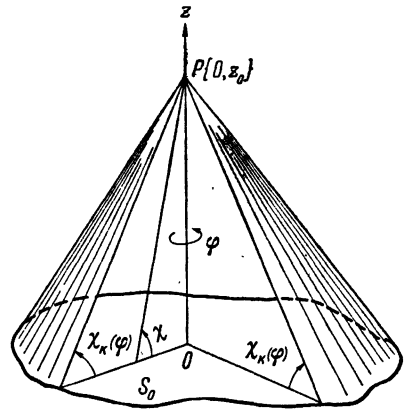


Рис. 65.

Рассмотрим в качестве примера обратное рассеяние (реверберация в акустике, радиолокационный случай для электромагнитных волн) от изотропно шероховатой ( $l_x = l_y = l$ ) идеально отражающей ( $|V| = 1$ ) поверхности. Источник и приемник находятся в точке  $P$  (рис. 65), расположенной на высоте  $z_0$  над средней плоскостью  $z = 0$ . Используя для конкретности индикатрису рассеяния  $F(\psi; \chi, \varphi)$  в виде (33), из формулы (43) получаем

$$\overline{|u|^2} = \frac{1}{4z_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\chi_k(\varphi)}^{\pi/2} d\chi \frac{\text{ctg } \chi}{\sin^2 \chi} w_\varphi(\gamma = \text{ctg } \chi). \quad (44)$$

Здесь  $\chi_k(\varphi)$  — предельные углы скольжения, которые образуют с плоскостью  $z = 0$  лучи, соединяющие точку  $P$  с контуром поверхности  $S_0$  (см. рис. 65), а  $w_\varphi(\gamma)$  — эффективное распределение модулей наклонов, нормированное следующим образом:

$$\int_0^\infty w_\varphi(\gamma) \gamma d\gamma = \frac{1}{2\pi}. \quad (45)$$

Перейдем к (44) в новой переменной интегрирования  $\gamma = \text{ctg } \chi$ . Тогда

$$\overline{|u|^2} = \frac{1}{4z_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\gamma_k(\varphi)} \gamma w_\varphi(\gamma) d\gamma, \quad (46)$$

где  $\gamma_k(\varphi) = \text{ctg } \chi_k(\varphi)$ . Если поверхность достаточно велика, так

что предельные углы скольжения  $\chi_k$  захватывают всю существенную для отражения область ( $\chi_k > \gamma_m$ , где  $\gamma_m$  — максимальные наклоны поверхности), то из (46), с учетом условия нормировки (45), получаем

$$|\overline{u}|^2 = \frac{1}{(2z_0)^2}. \quad (47)$$

Таким образом, в этом случае интенсивность флуктуаций определяется только высотой точки наблюдения над средней плоскостью и не зависит от размера рассеивающей поверхности и ее статистических характеристик.

Следует отметить, однако, что этот результат не является универсальным, так как получен при индикатрисе рассеяния в виде (33) (метод касательной плоскости, однократное отражение). Для сильно шероховатых поверхностей, когда существенную роль начинает играть многократное рассеяние, можно ожидать, что рассеяние в малом приобретает диффузный характер, так что индикатриса рассеяния принимает вид

$$F(\psi; \chi, \varphi) = \sin \psi B(\chi). \quad (48)$$

При этом распределение интенсивности рассеянного поля по направлениям не зависит от угла скольжения  $\psi$ , под которым поверхность освещается. Так как интенсивность, рассеянная по всем направлениям, равна полной интенсивности поля, освещающего единичную площадку

$$\int F(\psi; \chi, \varphi) d\Omega = \sin \psi, \quad (49)$$

то функция  $B(\chi)$  нормирована условием

$$2\pi \int_0^{\pi/2} B(\chi) \cos \chi d\chi = 1. \quad (50)$$

Для полной интенсивности флуктуаций над неограниченной поверхностью получаем

$$|\overline{u}|^2 = \frac{2\pi}{z_0^2} \int_0^{\pi/2} d\chi \cos \chi \sin^2 \chi B(\chi). \quad (51)$$

Если задать  $B(\chi)$  в виде

$$B(\chi) = \frac{n+1}{2\pi} \sin^n \chi, \quad (52)$$

то из (51) приходим к следующей формуле для интенсивности рассеянного назад поля:

$$|\overline{u}|^2 = \frac{n+1}{n+3} \frac{1}{z_0^2}. \quad (53)$$



Отсюда видно, что, например, при рассеянии по закону Ламберта ( $n=1$ ) интенсивность флуктуаций в два раза превышает (47), полученную методом Кирхгофа.

В противоположном случае, когда  $\gamma_k < \gamma_m$ , особенно простая формула получается, если задать  $w_s(\gamma)$  в виде

$$w_s(\gamma) = \begin{cases} 1/\pi\gamma_m^2 & \text{при } \gamma < \gamma_m, \\ 0 & \text{при } \gamma > \gamma_m. \end{cases} \quad (54)$$

Интегрирование в (46) приводит в этом случае к следующему результату:

$$|\overline{u}|^2 = \frac{1}{(2z_0)^2} \left( \frac{S_0}{\pi\gamma^2 z_0^2} \right). \quad (55)$$

Заметим, что величина  $\gamma_m z_0 \equiv r_m$  является тем предельным расстоянием, с которого поле рассеивается в обратном направлении: при  $r > r_m$  предельные углы наклона  $\gamma_m$  оказываются недостаточно большими для рассеяния назад. Поэтому естественно ввести максимальную площадь  $S_m = \pi\gamma_m^2 z_0^2$ , с которой происходит рассеяние назад при отражении от шероховатой бесконечной плоскости. Из (55) следует, что при  $\gamma_k > \gamma_m$  (когда  $S_0 < S_m$ ) интенсивность обратно рассеянного поля определяется отношением площади рассеивающей поверхности  $S_0$  к максимальной рассеивающей площади  $S_m$ .

б. Если поверхность достаточно пологая [ $\overline{\gamma^2} \rightarrow 0$ , но  $kR \rightarrow \infty$ , так что неравенства (25а, б) не нарушаются], то индикатриса рассеяния сужается около направления зеркального отражения и в интеграле (43) существенной оказывается лишь небольшая область углов вблизи  $\chi \simeq \psi$  и  $\varphi \simeq 0$ . Проще, однако, получить результаты при  $\overline{\gamma^2} \rightarrow 0$  из формулы (22), если учесть, что  $f_2(q_z, -q_z; \rho)$  в этом случае является медленно изменяющейся функцией координаты  $\rho$ , так что внутренний интеграл в (22) по  $d\rho$  легко вычисляется:

$$\int_{z=0} d\rho e^{-iq_0 \rho} \{f_2(q_z, -q_z; \rho) - f_1^2(q_z)\} \approx (2\pi)^2 \delta(q_\perp) [1 - f_1^2(q_z)]. \quad (56)$$

Интеграл по  $dr$  теперь принимает вид

$$|\overline{u}|^2 = \frac{1}{4} |V(\vartheta_0)|^2 q_z^2 [1 - f_1^2(q_z)] \int_{S_0} \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} \delta(q_\perp). \quad (57)$$

Здесь коэффициент отражения  $V$  относится к точке  $r_0$  зеркального отражения ( $\vartheta_0 = \arctg \frac{z+z_0}{D}$ ), причем предполагается, что  $r_0 \in S$ . Учитывая явный вид зависимости  $q_\perp$  от переменной

интегрирования  $q_{\perp} = k[(D-r)/R_2 - r/R_1]$ , приходим к следующей формуле для интенсивности флуктуаций рассеянного поля:

$$|u|^2 = \frac{|V(\theta_0)|^2}{(R_1 + R_2)^2} [1 - f_1^2(q_z)]. \quad (58)$$

При  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$  величиной  $f_1^2(q_z)$  можно пренебречь, и мы получаем

$$|u|^2 = \frac{|V(\theta_0)|^2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (59)$$

Этот результат можно было получить и из грубых оценок формулы (35), учитывая, что вклад в интеграл в данном случае дает лишь малая окрестность  $\Delta x \Delta y$  около точки зеркального отражения, так что

$$\int_{S_0} \frac{dr}{R_1^2 R_2^2} F(\psi, \chi, \varphi) \approx \frac{\Delta x \Delta y}{R_1^2 R_2^2} \bar{F}, \quad (60)$$

где  $\bar{F}$  — усредненная по направлениям, близким к зеркальным, индикатриса рассеяния:  $\bar{F} = \text{const}/\gamma^2$ . Площадь  $\Delta x \Delta y$ , существенной для интегрирования области при  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$ , находим из (26):

$$\Delta x \Delta y \simeq R^2 \bar{\gamma}^2 \simeq \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \bar{\gamma}^2. \quad (61)$$

При подстановке (61) в (60) получаем, с точностью до несущественного множителя, формулу (59).

При  $(q_z\sigma)^2 \ll 1$  имеем  $f_1^2(q_z) \approx 1 - (q_z\sigma)^2 + o\{(q_z\sigma)^2\}$ , и (58) переходит в полученную в гл. IV методом возмущений формулу:

$$|u|^2 = \frac{|V|^2}{(R_1 + R_2)^2} (2k\sigma \sin \psi)^2. \quad (62)$$

Рассмотренному здесь случаю ( $\gamma \rightarrow 0$ ) соответствует отражение от плоской (в пределах существенной для отражения области) поверхности, которая колеблется как целое: каждой реализации соответствует поле, отраженное от плоскости. Флуктуации же поля связаны с тем, что от реализации к реализации изменяется лишь расстояние до точки зеркального отражения.

Число  $N$  зеркально отражающих точек в пределах существенной для отражения области легко оценить. При  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$ , например,

$$N \simeq \frac{(\Delta x \Delta y)^{1/2}}{l} \simeq \frac{R\gamma}{l} \simeq \frac{R\gamma^2}{\sigma}, \quad (63)$$

так что при не слишком пологих неровностях, когда  $\gamma^2 \gg \frac{\sigma}{R}$ , рассеянное поле является суммой большого числа независимых отражений от каждой зеркальной точки. Поэтому, согласно центральной предельной теореме, распределение поля — нормальное.

Исключением является случай очень пологих неровностей, когда  $N \simeq 1$  (при  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow 1$ ). Поэтому флуктуации поля над поверхностью с малыми углами наклона представляют особый интерес, и к их рассмотрению мы сейчас перейдем.

**§ 25. Флуктуации интенсивности над поверхностью с пологими неровностями**

При рассеянии на поверхности с пологими неровностями в подынтегральном выражении (24.15) можно положить  $V(\mathbf{r}) = V(\psi)$ ,  $(n\mathbf{q}) = q_z$ , и разложить показатель экспоненты  $R_1 + R_2$  вблизи точки зеркального отражения, ограничившись квадратичными членами:

$$R_1 + R_2 \approx \left( R_{10} + R_{20} + \frac{x^2 \sin^2 \psi + y^2}{R} \right) \left[ 1 + o \left\{ \frac{x^2}{R^2}, \frac{y^2}{R^2} \right\} \right],$$

где  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — расстояния от точки зеркального отражения до источника и приемника соответственно, и  $R = (2R_{10} R_{20}) / (R_{10} + R_{20})$ . Таким образом, мы приходим к следующему выражению для флуктуаций поля над поверхностью с пологими неровностями (см. [229]):

$$u(\mathbf{R}) = \frac{V(\psi) q_z e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \frac{k}{R} (x^2 \sin^2 \psi + y^2) \right] dx dy \times \\ \times [e^{-iq_z \zeta(x,y)} - e^{-iq_z \bar{\zeta}}]. \quad (1)$$

Отсюда для средней интенсивности флуктуаций отраженного от поверхности поля получаем

$$|\overline{u(\mathbf{R})}|^2 = \frac{|V(\psi)|^2 k^2 \sin^2 \psi}{4\pi^2 R_{10}^2 R_{20}^2} \int \exp \left\{ i \frac{k}{R} [\sin^2 \psi (x^2 - x'^2) + y^2 - y'^2] \right\} \times \\ \times \{ f_2(q_z, -q_z; x - y', y - x') - \bar{f}_1(q_z) \} dx dx' dy dy'. \quad (1a)$$

Интегрирование здесь легко выполняется после замены переменных

$$x' - x = 2\xi, \quad x' + x = 2X; \quad y' - y = 2\eta, \quad y' + y = 2Y, \quad (16)$$

и мы приходим к уже известному результату (24. 58)

$$\bar{J} = |\overline{u(\mathbf{R})}|^2 = \frac{|V(\psi)|^2}{(R_{10} + R_{20})^2} [1 - \bar{f}_1(q_z)].$$

Таким образом; при  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  средняя интенсивность флуктуаций рассеянного поля практически не отличается от интенсивности поля, отраженного от гладкой поверхности, так как  $\bar{f}_1(q_z) \simeq \exp(-q_z^2 \sigma^2) \ll 1$ . Поэтому особый интерес в данном случае представляют флуктуации интенсивности рассеянного поля [т. е. следующий четный момент случайной функции  $u(\mathbf{R})$ ].

1. При исследовании флуктуаций интенсивности мы рассмотрим лишь предельный случай больших параметров Рэлея  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$ , когда когерентной составляющей в рассеянном поле можно пренебречь. В обратном предельном случае флуктуации амплитуды и фазы над пологой поверхностью были достаточно подробно рассмотрены в § 11 гл. IV. В дальнейшем, во избежание громоздких выкладок, мы ограничимся рассмотрением двумерных (цилиндрических) неровностей, когда  $z = \zeta(x)$ . Обобщение полученных ниже результатов на случай трехмерных шероховатостей совершенно очевидно.

После указанных упрощений для квадрата интенсивности рассеянного поля получаем из (1):

$$J^2 = |(uR)|^4 = |C|^4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{k \sin^2 \psi}{R} (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2) - i q_z [\zeta(x_1) - \zeta(x_2) + \zeta(x_3) - \zeta(x_4)] \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (2)$$

где введено обозначение:

$$C = \frac{V(\psi) q_z}{4\pi R_{10} R_{20}} \sqrt{\frac{\pi R}{ik}} e^{ik(R_{10} + R_{20})}.$$

Прежде чем приступить к усреднению формулы (2), выясним, насколько пологая должна быть поверхность для того, чтобы можно было вместо формулы (24.15) пользоваться приближенным выражением (1).

Во-первых, предэкспоненциальные множители в (24.15), являющиеся функцией от  $r$ , можно вынести за знак интеграла в зеркальной точке, если выполняется довольно очевидное неравенство (все приведенные ниже неравенства мы выписываем для случая двумерных неровностей, что, однако, совершенно несущественно)

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \ll \frac{1}{(\Delta x)_0}, \frac{1}{(\Delta x)_\zeta}, \quad (3a)$$

где  $(\Delta x)_0 \simeq \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}$  — продольный размер зоны Френеля, а  $(\Delta x)_\zeta \simeq R \gamma / \sin \psi$  — линейный размер существенной для отражения области при  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  [см. формулу (24.26)]. Одно из неравенств, содержащихся в (3a), эквивалентно требованию, чтобы рассеивающая поверхность находилась в волновой зоне относительно источника и точки наблюдения, которое предполагается всегда выполненным; другое же имеет вид  $\gamma \ll \sin \psi$ .

Во-вторых, мы ограничились лишь квадратичными членами в разложении показателя экспоненты около зеркальной точки. Точно так же, как и в § 11 при оценке подобного рода приближений в теории возмущений, можно показать, что при вычислении

средней интенсивности рассеянного поля, или при усреднении формулы (2), членами более высокого порядка можно пренебречь, если выполняются неравенства типа (11.16 а, б), где под  $l$  следует теперь понимать, однако, не радиус корреляции неровностей, а то характерное расстояние  $x$ , на котором существенно изменяется разность характеристических функций  $f_2(q_z, -q_z; x) - f_1^2(q_z)$ . Как было выяснено в § 24, при  $q_z \sigma \gg 1$  роль радиуса корреляции (в указанном выше смысле) играет величина  $l/(q_z \sigma) \simeq (q_z \gamma)^{-1}$ . Таким образом, мы приходим к неравенствам  $\gamma \ll \operatorname{tg} \psi$  и  $\gamma^2 \ll \sin^2 \psi$ , которые, однако, не сильнее, чем ранее полученное условие  $\gamma \ll \sin \psi$ .

И, наконец, в-третьих, для того, чтобы в формулах (1) и (2) можно было считать  $q_z$  не зависящим от переменных интегрирования, т. е. положить  $q_z = 2k \sin \psi$ , необходимо, чтобы

$$k\sigma (\gamma \cos \psi + \gamma^2 \sin \psi) \ll 1.$$

В области не слишком крутых углов падения  $\pi/2 - \psi \gtrsim 1/k\sigma$  это приводит к неравенству

$$\gamma \ll \frac{1}{k\sigma \cos \psi}. \quad (36)$$

При почти нормальном падении, когда  $\pi/2 - \psi \lesssim 1/(k\sigma)$ , ограничение на  $\gamma$  менее жесткое:

$$\gamma^2 \ll \frac{1}{k\sigma}. \quad (3в)$$

Эти ограничения на пологость поверхности являются самыми сильными из всех, которые получались выше, и именно ими определяются границы применимости приведенных ниже результатов. Заметим, однако, что хотя условия (36, в) являются довольно жесткими, существует область значений параметра  $\gamma$ :

$$\frac{1}{(kR)^{1/2}} \ll \gamma \ll \frac{1}{k\sigma \cos \psi},$$

где результаты этого и предыдущего параграфа перекрываются. Именно этим и объясняется тот факт, что формула (24.59) для средней интенсивности флуктуаций над полой поверхностью может быть получена, исходя из двух различных представлений рассеянного поля — в форме (1) и (24.16) — (24.22).

Усреднение формулы (2) проведем для весьма общего случая нормального распределения отклонений поверхности от средней плоскости, когда вся информация о статистических свойствах поверхности определяется дисперсией отклонений  $\bar{\zeta}^2 = \sigma^2$  и корреляционной функцией  $W(x_i - x_k) = \sigma^2 \bar{\zeta}(x_i) \bar{\zeta}(x_k)$ :

$$\begin{aligned} \bar{J}^2 = & |C|^4 \int \exp \left\{ i \frac{k \sin^2 \psi}{R} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) - \right. \\ & \left. - q_z^2 \sigma^2 [2 - W(x_1 - x_2) + W(x_1 - x_3) - W(x_1 - x_4) - W(x_2 - x_3) + \right. \\ & \left. + W(x_2 - x_4) - W(x_3 - x_4)] \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (4) \end{aligned}$$

С помощью замены переменных

$$x_4 + x_3 - x_1 - x_2 = 2\eta,$$

$$x_4 - x_3 - x_1 + x_2 = 2\rho,$$

$$x_4 + x_3 + x_1 + x_2 = 2y,$$

$$x_4 - x_3 + x_1 - x_2 = 2r,$$

которая, как нетрудно убедиться, означает поворот осей координат в четырехмерном пространстве  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , в (4) легко выполнить интегрирование по  $dy$ , а затем по  $d\rho$ , так что

$$\begin{aligned} \bar{J}^2 = |C|^4 \frac{\pi R}{k \sin^2 \psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr d\eta \exp \left\{ -2i \frac{k \sin^2 \psi}{R} \eta r - \right. \\ \left. - q_2^2 \sigma^2 [2 - 2W(r) - 2W(\eta) + W(r + \eta) + W(r - \eta)] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование полученного выражения проведем в двух предельных случаях — когда в существенной для отражения области среднее число зеркальных точек мало отличается от единицы, или, наоборот, очень велико.

2. В первом случае основной вклад в интеграл (5) должна давать малая окрестность точки зеркального отражения (от средней плоскости), т. е. окрестность вблизи  $\eta = r = 0$ . Для этого необходимо, чтобы осцилляции экспоненты с показателем  $2i \frac{k \sin^2 \psi}{R} \eta r$  были значительно более быстрыми, чем изменение остальной части подынтегральной функции. Это условие, как нетрудно убедиться, эквивалентно неравенству

$$\frac{R^2 \sigma^2 W^{(4)}(0)}{\sin^2 \psi} \ll 1; \quad W^{(n)}(0) \equiv \left. \frac{d^n}{d\xi^n} W(\xi) \right|_{\xi=0}. \quad (6)$$

Учитывая, что по порядку величины  $W^{(4)} \sim l^{-4}$ , мы приходим к неравенству  $R^2 \gamma^2 \ll l^2 \sin^2 \psi$ , которое означает, что в рассматриваемом случае существенная для отражения область  $(\Delta x)_\xi \simeq \simeq R\gamma/\sin \psi$  значительно меньше, чем радиус корреляции  $l$ . Это позволяет разложить входящую в (5) характеристическую функцию в ряд по  $\eta$  и  $r$  вблизи точки зеркального отражения:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -q_2^2 \sigma^2 [2 - 2W(r) - 2W(\eta) + W(r + \eta) + W(r - \eta)] \right\} \approx \\ \approx 1 - \frac{q_2^2 \sigma^2}{2} W^{(4)}(0) r^2 \eta^2, \quad (7) \end{aligned}$$

и выполнить интегрирование с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i a \eta r} \eta^2 r^2 d\eta dr = - \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i a \eta r} dr d\eta = -4 \frac{\pi}{a^3}. \quad (8)$$

Таким образом, для среднего квадрата интенсивности получаем в этом случае формулу

$$\bar{J}^2 = \frac{|V(\psi)|^4}{(R_{10} + R_{20})^4} \left\{ 1 + \frac{R^2 \sigma^2 W^{(4)}(0)}{\sin^2 \psi} \right\}. \quad (9)$$

Учитывая, что средняя интенсивность определяется при этом формулой (24.58), из (9) находим относительные флуктуации интенсивности:

$$\frac{\bar{J}^2 - J^2}{J^2} = \frac{(\delta J)^2}{J^2} = \frac{R^2 \sigma^2 W^{(4)}(0)}{\sin^2 \psi}. \quad (10)$$

Для неровностей с гауссовой корреляционной функцией

$$W(\xi) = e^{-\xi^2/l^2}$$

формула (10) принимает вид

$$\frac{(\delta J)^2}{J^2} = \frac{(\delta A^2)^2}{(A^2)^2} = 12 \frac{R^2 \sigma^2}{l^4 \sin^2 \psi} = 6 \frac{R^2 \bar{\gamma}^2}{l^2 \sin^2 \psi}, \quad (11)$$

где дисперсия наклонов определяется соотношением  $\bar{\gamma}^2 = 2\sigma^2/l^2$ . Таким образом, относительные флуктуации амплитуды оказываются в рассматриваемом случае малыми в меру малости параметра  $R^2 \bar{\gamma}^2 / (l^2 \sin^2 \psi)$ , величина которого, как было выяснено выше, указывает, сколько радиусов корреляции укладывается в существенной для отражения области. Малым значениям этого параметра соответствует отражение от почти плоской (в пределах существенной для отражения области) поверхности, когда среднее число зеркальных точек в этой области с большой вероятностью равно единице, и кривизна поверхности в зеркальных точках мала.

3. Формулу (11) можно получить и несколько более простым путем, если вспомнить, что в рассматриваемом здесь случае больших параметров Рэлея поверхность вблизи зеркальных точек можно заменить касательной плоскостью, т. е. в формуле (2), например, можно положить:

$$\zeta(x_2) - \zeta(x_1) \simeq (x_2 - x_1) \gamma \left( \frac{x_2 + x_1}{2} \right),$$

$$\zeta(x_4) - \zeta(x_3) \simeq (x_4 - x_3) \gamma \left( \frac{x_4 + x_3}{2} \right).$$

После очевидной замены переменных

$$x_2 - x_1 = 2\xi, \quad x_3 - x_4 = 2\eta,$$

$$x_2 + x_1 = 2X, \quad x_3 + x_4 = 2Y,$$

формула (2) для нормального распределения наклонов принимает такой вид:

$$\bar{J}^2 = 4 |C|^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta dX dY \exp \left\{ -4i \frac{k \sin^2 \psi}{R} (X\xi - Y\eta) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -2q_z^2 \bar{\gamma}^2 [\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta W_\nu(X - Y)] \right\}. \quad (12)$$

Здесь два интегрирования легко выполняются, и вместо (5) мы получаем более простую формулу:

$$\bar{J}^2 = |C|^4 \frac{4\pi R}{k \sin^2 \psi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi dr \times \\ \times \exp \left\{ -8i \frac{k \sin^2 \psi}{R} \xi r - 4q_z^2 \bar{\gamma}^2 \xi^2 [1 - W_\nu(2r)] \right\}, \quad (13)$$

где новая переменная интегрирования  $r$  введена соотношением  $X - Y = 2r$ . При выполнении неравенства (6) интегрирование в (13) можно привести так же, как и при переходе от (5) к (9):

$$\frac{(\delta J)^2}{\bar{J}^2} = \frac{R^2 \bar{\gamma}^2 W_\nu^{(2)}(0)}{\sin^2 \psi}, \quad \bar{\gamma}^2 W_\nu(\xi) = \overline{\gamma(x + \xi) \gamma(x)}. \quad (14)$$

Эта формула в точности совпадает с (10), так как между корреляционной функцией возвышений поверхности  $W(\xi)$  и корреляционной функцией наклонов  $W_\nu(\xi)$  существует простое соотношение

$$\bar{\gamma}^2 W_\nu^{(2)}(0) = -\sigma^2 W^{(4)}(0). \quad (15)$$

4. В противоположном предельном случае, когда в существенной для отражения области укладывается много неровностей, основной вклад в интеграл (5) дают окрестности экстремума действительной части показателя экспоненты:

$$\Re(r, \eta) = 2 - 2W(r) - 2W(\eta) + W(r + \eta) + W(r - \eta). \quad (16)$$

Легко видеть, что это выражение принимает экстремальные значения на двух прямых  $-\eta = 0$  и  $r = 0$ . Пользуясь хорошо известной процедурой оценки такого рода интегралов методом Лапласа (см. [141]), разложим (16) в ряд по степеням  $\eta$  при фиксированном  $r$ ,

$$\Re(r, \eta) \approx [W^{(2)}(r) - W^{(2)}(0)] \eta^2,$$

и, вычисляя затем интеграл (5) в бесконечных пределах, мы учтем тем самым вклад одной экстремальной прямой  $\eta = 0$ . При аналогичном вычислении интеграла в окрестности линии  $r = 0$  мы



должны исключить окрестность точки  $r, \eta = 0$ , вклад от которой был уже учтен при интегрировании по  $d\eta$ :

$$\bar{J}^2 \approx |C|^4 \frac{\pi R}{k \sin^2 \psi} \left\{ 2 \iint_{-\infty}^{\infty} dr d\eta \exp \left[ -2i \frac{k \sin^2 \psi}{R} \eta r + q_z^2 \sigma^2 W^{(2)}(0) \eta^2 \right] - \int \int_{\substack{|r| < r_0 \\ |\eta| < \eta_0}} dr d\eta \exp \left[ -2i \frac{k \sin^2 \psi}{R} \eta r \right] \right\}. \quad (17)$$

Характерные расстояния  $r_0, \eta_0$ , при которых вклад от экстремальных линий  $r = 0$  и  $\eta = 0$  нельзя считать порознь, определяются из соотношения

$$q_z^2 \sigma^2 W^{(4)}(0) \eta_0^2 r_0^2 \approx 1.$$

При

$$\frac{k \sin^2 \psi}{R} \eta_0 r_0 \ll 1 \quad (18)$$

интеграл в конечных пределах в (17) легко оценивается, и мы получаем окончательно

$$\bar{J}^2 \approx \bar{J}^2 \left\{ 2 - \frac{k \sin^2 \psi}{\pi R} \eta_0 r_0 \right\}. \quad (19)$$

Второе слагаемое в этом выражении по порядку величины имеет следующий вид [см. (24.63)]:

$$\frac{k \sin^2 \psi}{\pi R} \eta_0 r_0 \simeq \frac{l \sin \psi}{R \gamma} \simeq \frac{1}{N-1}, \quad (20)$$

т. е. является отношением радиуса корреляции к размерам существенной для отражения области — величина обратно пропорциональная числу  $N$  точек зеркального отражения. Поэтому при  $N \rightarrow \infty$  флуктуации интенсивности рассеянного сигнала связаны со средней интенсивностью соотношением

$$\overline{(\delta J)^2} = (\bar{J})^2,$$

которое является следствием нормального распределения поля и рэлеевского распределения амплитуды (напомним, что когерентной составляющей в рассеянном поле мы пренебрегли в начале параграфа). Дополнительное слагаемое в (19) связано с отклонением распределения поля от нормального закона за счет того, что в существенной для отражения области находится конечное число зеркальных точек; это отклонение мало в меру неравенства (18).

Б. В общем случае трехмерной случайной поверхности  $z = \zeta(x, y)$  можно оценить флуктуации интенсивности рассеянного поля, не прибегая к довольно громоздким и достаточно сложным вычислениям интегралов типа (3) (но теперь уже восьмикратных), если

сразу в интегральном представлении (24.15) выделить зеркально отражающие точки методом стационарной фазы [большим параметром является по-прежнему параметр Рэлея  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$ ]. Вычисления, совершенно аналогичные тем, которые были приведены в п. 3 § 20 для дальней зоны, приводят к представлению рассеянного поля в виде суперпозиции полей от зеркальных точек:

$$U \sim \sum_{j=1}^N |a_j|^{1/2} e^{i\varphi_j}. \quad (21)$$

Здесь  $a_j$  — радиус кривизны поверхности в  $j$ -й точке зеркального отражения (в трехмерном случае  $a_j \rightarrow \mathcal{K}_j^{-1}$ , где  $\mathcal{K}_j$  — гауссова кривизна поверхности);  $N$  — число зеркально отражающих точек, а  $\varphi_j$  — фаза волны, приходящей из  $j$ -й зеркальной точки. Случайные величины  $a_j$ ,  $\varphi_j$  и  $N$  можно для простоты считать независимыми\*) и при вычислении средних по ансамблю реализаций  $z = \zeta(x, y)$  проводить последовательное усреднение по каждой из этих величин. Нас в данном случае интересуют первые два момента случайной интенсивности

$$J \sim \sum_{i, j=1}^N |a_i a_j|^{1/2} e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} \quad (22)$$

(общий множитель в амплитуде, одинаковый для всех зеркальных точек, мы положили для простоты равным единице). При  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$  случайные фазы  $\varphi_j$  испытывают большие флуктуации и, как было показано в п. 3 § 20, с экспоненциальной точностью можно положить, что

$$\langle e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} \rangle_{\varphi} = \delta_{ij}. \quad (23)$$

Усредняя  $J$  и  $J^2$  по случайным фазам, получаем из (22)

$$\langle J \rangle_{\varphi} \sim \sum_{i=1}^N |a_i|, \quad (24a)$$

$$\langle J^2 \rangle_{\varphi} \sim 2 \sum_{i, j=1}^N |a_i a_j| - \sum_{i=1}^N |a_i|^2. \quad (24б)$$

Усредним теперь выражения (24a, б) по возможным радиусам кривизны  $a_j$  поверхности в точках зеркального отражения при

\*) Строго говоря, это не так. Число зеркально отражающих точек может зависеть в некоторых случаях от характерных радиусов кривизны поверхности. Например, при фиксированной длине  $L$  рассеивающего участка число точек зеркального отражения тем больше, чем меньше абсолютная величина радиусов кривизны поверхности. Однако при  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$  и  $L^2 \gg |a_j|^2$  число зеркальных точек велико ( $N \gg 1$ ) и корреляцией между  $a_j$  и  $N$  можно пренебречь.

фиксированном общем числе  $N$  этих точек. Результаты этого усреднения обозначим угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$  без индексов. Введем средний радиус кривизны  $\langle |a| \rangle$  и случайные отклонения  $\delta |a|$  от этого среднего:

$$|a_j| = \langle |a| \rangle + \delta |a_j|. \quad (25)$$

При этом мы, предполагая статистическую однородность поверхности, считаем среднее значение радиуса кривизны в  $j$ -й точке не зависящим от номера  $j$  точки зеркального отражения. Так как радиусы кривизны в различных точках зеркального отражения независимы (или, во всяком случае, некоррелированы), то можно положить

$$\langle \delta |a_j| \cdot \delta |a_i| \rangle = \langle \delta a |^2 \rangle \delta_{ij}. \quad (26)$$

С помощью (25) и (26) получаем из (24а, б) для средних  $\langle J \rangle$  и  $\langle J^2 \rangle$  следующие выражения:

$$\langle J \rangle \sim N \langle |a| \rangle, \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \langle J^2 \rangle &\sim 2 \sum_{i,j=1}^N \langle |a_i a_j| \rangle - \sum_{i=1}^N \langle |a_i|^2 \rangle = \\ &= 2N^2 \langle |a| \rangle^2 - N \{ \langle |a| \rangle^2 - \langle \delta a |^2 \rangle \}, \end{aligned} \quad (27b)$$

откуда для относительных флуктуаций квадрата амплитуды находим

$$\frac{\langle (\delta A^2)^2 \rangle}{\langle A^2 \rangle^2} = \frac{\langle J^2 \rangle - \langle J \rangle^2}{\langle J \rangle^2} \approx 1 - \frac{1}{N} + \frac{\langle \delta a |^2 \rangle}{N \langle |a| \rangle^2}. \quad (28)$$

Таким образом, при большом числе зеркально отражающих точек, когда  $N \gg 1$ , дисперсия флуктуаций интенсивности отраженного поля  $\langle (\delta J)^2 \rangle = \langle J^2 \rangle - \langle J \rangle^2$  отличается от квадрата средней интенсивности  $\langle J \rangle^2$  лишь членами порядка  $1/N$ . Легко убедиться, что это является следствием нормального распределения поля (при  $N \gg 1$ ) и, следовательно, рэлеевского распределения амплитуды. В этом случае флуктуации амплитуды происходят за счет некогерентного сложения большого числа волн, приходящих к наблюдателю из каждой зеркальной точки.

В противоположном предельном случае, когда поверхность настолько пологая, что возникает только одна зеркальная точка ( $N = 1$ ), из (28) следует

$$\frac{\langle (\delta J)^2 \rangle}{\langle J \rangle^2} \approx \frac{\langle \delta a |^2 \rangle}{\langle |a| \rangle^2}. \quad (29)$$

Поверхность при этом является почти плоской и флуктуации уровня отраженного сигнала связаны лишь с изменениями радиуса кривизны в зеркальной точке. Природа этих флуктуаций совсем иная, чем в первом случае: если при  $N \gg 1$  причиной флуктуаций

была интерференция большого числа независимых волн, то при  $N = 1$  флуктуации амплитуды связаны с изменением от реализации к реализации расходимости отраженной волны, обусловленной искривлением поверхности в единственной зеркальной точке.

Наконец, произведем окончательное усреднение формул (27а, б) по всем реализациям поверхности с различным числом зеркальных точек  $N$ . Используя для этого наше обычное обозначение средних — черту над буквой, — введем среднее число зеркальных точек  $\bar{N}$

$$N = \bar{N} + n \quad (\bar{n}^2 \ll \bar{N}^2).$$

Тогда вместо формулы (28) получим

$$\frac{\overline{(\delta A^2)^2}}{(\bar{\delta A^2})^2} \approx 1 + 2 \frac{\bar{n}^2}{\bar{N}^2} - \frac{1}{\bar{N}} \left( 1 - \frac{\langle |\delta a|^2 \rangle}{\langle |a|^2 \rangle} \right). \quad (30)$$

Видно, что теперь флуктуации амплитуды определяются не только параметрами  $\bar{N}$  и  $\langle |\delta a|^2 \rangle / \langle |a|^2 \rangle$ , но и величиной относительных флуктуаций числа зеркальных точек около среднего значения.

## § 26. Пространственные корреляционные функции

При исследовании корреляционных функций флуктуаций рассеянного поля (см., например [230] — [232]) будем исходить сначала из представления потенциала  $U$  в виде (24.15). Для флуктуационной составляющей получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{R}) &= U(\mathbf{R}) - \bar{U}(\mathbf{R}) = \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{S_0} \frac{V(q_{\perp})}{R_1 R_2} \frac{(nq)}{n_z} e^{ik(R_1 + R_2)} \{ e^{-iq_z \zeta(r)} - \overline{e^{-iq_z \zeta}} \} dr, \end{aligned} \quad (1)$$

откуда для второго момента флуктуаций в пространственно разнесенных точках имеем:

$$\begin{aligned} \overline{u(\mathbf{R}) u^*(\mathbf{R}')} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{V(q_{\perp}) V^*(q'_{\perp}) (n, q) (n', q')}{R_1 R'_1 R_2 R'_2 n_z n'_z} e^{ik(R_1 + R_2 - R'_1 - R'_2)} \times \\ &\times \{ f_2(q_z, -q_z; \mathbf{r}' - \mathbf{r}) - f_1(q_z) f_1(-q_z) \} dr dr' \end{aligned} \quad (2)$$

1. Заметим, что эти две формулы полностью аналогичны формулам (15.1) и (15.2)\*. Действительно, роль случайной функции  $\zeta(\mathbf{r})$  в формуле (1) теперь играет функционал от нее

$$Z(q_z, \mathbf{r}) = e^{-iq_z \zeta(\mathbf{r})} - \overline{e^{-iq_z \zeta}}, \quad (3)$$

\*) Мы по возможности сохранили также обозначения, приведенные на рис. 20 к § 15.

причем корреляционная функция этой случайной величины при малых параметрах Рэля переходит в корреляционную функцию возвышений поверхности

$$W_Z(q_z, -q'_z; r' - r) = f_2(q_z, -q'_z; r' - r) - f_1(q_z) f_1(-q'_z) \approx \underset{q_z \sigma \ll 1}{\approx} q_z q'_z \sigma^2 W(r' - r). \quad (4)$$

Медленно же изменяющийся предэкспоненциальный множитель  $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$  в формуле (15.1) теперь принимает вид

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta) = - \frac{V(q_{\perp})(nq)q_z}{4k^2 n_z}. \quad (5)$$

Для того чтобы получить из (1) и (2) формулы теории возмущений, необходимо, кроме условия  $(q_z \sigma) \ll 1$ , потребовать дополнительно, чтобы поверхность была достаточно пологой ( $\gamma^2 \ll 1$ ) и крупномасштабной ( $kl \gg 1$ ).

При  $\gamma^2 \ll 1$  функция (5) переходит в

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta) \underset{\gamma^2 \ll 1}{\approx} - V(q_{\perp}) \frac{q_z^2}{4k^2}, \quad (6)$$

условие же  $kl \gg 1$ , как мы неоднократно убедились в теории возмущений ( $q_z \sigma \ll 1$ ,  $\gamma^2 \ll 1$ ), приводит к тому, что индикатриса рассеяния становится очень острой функцией углов около направления зеркального отражения. Это позволяет в подынтегральных выражениях (1) — (2) и аналогичных им (15.1-2) множитель  $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$  вынести за знак интеграла в точке зеркального отражения, т. е. положить:

$$V(q_{\perp}) \frac{q_z^2}{4k^2} \approx V(\psi) \sin^2 \psi, \quad (7)$$

где  $\psi$  — угол скольжения в точке зеркального отражения, а  $V(\psi)$  — коэффициент отражения как функция этого угла.

Такая тесная аналогия между выражениями (2) и соответствующей ей в теории возмущений формулой (15.2) позволяет при вычислении вторых моментов флуктуаций поля использовать те же методы оценки интегралов, которые применялись в § 15. В дальнейшем мы ограничимся изучением корреляций поля в случае больших значений параметра Рэля, так как в противоположном предельном случае при  $q_z \sigma \ll 1$  можно использовать готовые результаты § 15, полученные методом возмущений.

Введем в (2) новую переменную интегрирования  $\rho = r' - r$  и разложим показатель экспоненты в ряд по степени  $\rho$ . Для того

чтобы в этом разложении можно было ограничиться только линейными по  $\rho$  членами, необходимо потребовать чтобы \*)

$$\frac{k\rho_x^2}{R} \sin^2 \psi \ll 1, \quad \frac{k\rho_y^2}{R} \ll 1, \quad (8)$$

где  $R = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , а  $\rho_x, \rho_y$  — размеры области, существенной для интегрирования по  $d\rho$ , определяющиеся теми расстояниями, на которых существенно убывает функция  $W_Z(q_z, -q'_z; \rho)$ . При  $q_z \sigma, q'_z \sigma \gg 1$ , как легко следует из результатов § 24 [формула (24.24)],  $\rho_{x, y} \simeq l_{x, y} / \sigma (q_z q'_z)^{1/2}$ . Так как мы считаем  $q'_z \simeq q_z$ , то неравенства (8) совпадают, по сути, с условиями (24.25а, б). В предэкспоненциальных множителях можно положить  $\rho = 0$  в меру выполнения тех же неравенств.

Таким образом, при рассеянии на высоких ( $q_z \sigma \gg 1$ ) и не слишком пологих неровностях ( $\gamma_x^2 \gg (kR)^{-1}$ ;  $\gamma_y^2 \gg (kR \sin^2 \psi)^{-1}$ ) для корреляционной функции получаем формулу

$$\begin{aligned} \overline{u(R) u^*(R')} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S_0} \frac{V(q_{\perp}) V^*(q'_{\perp}) q^2 q'^2}{R_1^2 R_2^2 R'_2 q_z q'_z} e^{ik(R_2 - R'_2)} dr \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp\left[-ik\left(\frac{D' - r}{R'_2} - \frac{r}{R_1}, \rho\right)\right] W_Z(q_z, -q'_z; \rho). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначения здесь такие же, как и на рис. 21 к § 15, причем  $q' = k(\beta' - \alpha)$ , а нормали  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  берутся в зеркальных точках, где

$$\frac{nq}{n_z} = \frac{q^2}{q_z}, \quad \frac{n'q'}{n'_z} = \frac{q'^2}{q'_z}. \quad (10)$$

2. Формула (9) имеет тот же самый вид, что и (15.4) в теории возмущений. Пользуясь этой аналогией, рассмотрим корреляцию поля, отраженного от ограниченной шероховатой поверхности, линейные размеры которой вдоль координатных осей обозначим, как и раньше, через  $L_x$  и  $L_y$  соответственно.

Неравенства (15.5) (которые в теории возмущений определяют область разделения спектров) с учетом того, что роль радиуса корреляции  $l$  при  $q_z \sigma \gg 1$  играет параметр  $l / (q_z \sigma)$ , переходят в (24.29). Таким образом, на достаточно больших расстояниях от поверхности, таких, что угловой размер рассеивающей площадки значительно меньше, чем ширина индикатрисы рассея-

\*) При оценках мы считаем для простоты, что  $\psi' \simeq \psi$  и  $R_1, R_2 \simeq R'_1, R'_2$ . Если это не так, то приведенные неравенства (8) должны быть дополнены аналогичными с заменой  $\psi \rightarrow \psi'$  и  $R \rightarrow R'$ .

ния, — в формуле (9), так же как и в (15.4), можно вынести за знак интеграла по  $dr$  предэкспоненциальные множители [ср. (15.6)]:

$$\overline{u(R) u^*(R')} = \frac{|V(q_{\perp})|^2 q^4}{4R_1^2 R_2^2 q_z^2} \tilde{W}_Z(q, q') \int_{S_0} e^{ik(R_2 - R'_2)} dr. \quad (11)$$

Здесь введено преобразование Фурье от  $W_Z$ :

$$\tilde{W}_Z(q, q') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(\beta' - \alpha, \rho)} W_Z(q_z, -q'_z; \rho) d\rho, \quad (12)$$

которое при  $q_z \sigma \gg 1$  имеет вид

$$\tilde{W}_Z(q, q') = f_1(q'_z - q_z) w\left(\gamma' = -\frac{q'_{\perp}}{q'_z}\right). \quad (13)$$

где  $w(\gamma)$  — плотность распределения углов наклона поверхности, а значениям  $\gamma' = -q'_{\perp}/q'_z$  соответствуют наклоны тех зеркальных участков, при отражении от которых излучение попадает в точку  $R'$ . Нормируя (11) на интенсивность флуктуаций

$$J(R) = \frac{|V(q_{\perp})|^2 q^4}{(2R_1 R_2 q_z)^2} S_0 w\left(\gamma = -\frac{q_{\perp}}{q_z}\right), \quad (14)$$

получаем для корреляционной функции в этом случае

$$\mathcal{K}(R, R') = \frac{\overline{u(R) u^*(R')}}{\sqrt{J(R) J(R')}} = \sqrt{\frac{w(\gamma')}{w(\gamma)}} \frac{f_1(q'_z - q_z)}{S_0} \int_{S_0} e^{ik(R_2 - R'_2)} dr. \quad (15)$$

Так же как и в § 15 при анализе формулы (15.10), легко убедиться в том, что корреляция поля в рассматриваемой области сравнительно больших расстояний от рассеивающей площадки [неравенства (24.29) и  $L_{x,y} \ll R$ ] определяется размерами  $L_x, L_y$  и геометрической формой площадки  $S_0$ , а не статистическими характеристиками покрывающих ее неровностей. Это обстоятельство выражается в том, что в формуле (15) интеграл

$$\frac{1}{S_0} \int_{S_0} e^{ik(R_2 - R'_2)} dr \quad (16)$$

изменяется на значительно меньших расстояниях при удалении точек наблюдения  $R$  и  $R'$  друг от друга, чем множитель

$$\sqrt{\frac{w(\gamma')}{w(\gamma)}} f_1(q'_z - q_z). \quad (17)$$

Действительно, декорреляция поля за счет осцилляций (16) происходит при разнесении точек наблюдения на угол  $\Delta\chi$ , равный по порядку величины ширине лепестка диаграммы площадки,

т. е.  $(\Delta\chi)_0 \approx 1/(kl)$ , в то время как изменение первого множителя в (17) происходит при  $(\Delta\chi)_1 \approx \gamma$ , а характеристическая функция  $f_1(q'_z - q_z)$  изменяется существенно лишь при  $(\Delta\chi)_2 \approx 1/(k\sigma)$  (мы здесь всюду при качественных оценках опускаем несущественные тригонометрические множители, зависящие от угла скольжения  $\psi$  и углов наблюдения  $\chi$  и  $\chi'$ ). Но  $(\Delta\chi)_1 \gg (\Delta\chi)_0$ , так как при выводе (9) предполагалось выполненным более сильное неравенство  $\gamma \gg (kR)^{-1}$ , а  $(\Delta\chi)_2 \gg (\Delta\chi)_0$  из-за всегда подразумеваемого условия  $\sigma \ll L$ . Вычисление интеграла (16) для простейших случаев было приведено в § 15.

3. При отражении от шероховатостей с крутыми углами наклона  $\gamma \approx 1$  индикатриса рассеяния слабо зависит от углов  $\psi$  и  $\chi$  — рассеяние является диффузным. По этой причине интеграл по  $d\rho$  в (9) является медленно изменяющейся функцией переменной  $r$ , и корреляция волнового поля определяется интегралом

$$\int_{S_0} \frac{V(q_{\perp}) V^*(q'_{\perp}) q^2 q'^2}{R_1^2 R_2 R'_1 R'_2 q_z q'_z} e^{ik(R_2 - R'_2)} dr, \quad (18)$$

который не зависит от статистических параметров рассеивающей поверхности, а определяется лишь длиной волны излучения  $\lambda$  и геометрическим расположением источника и точек наблюдения относительно поверхности  $S_0$ . В теории возмущений этому случаю соответствует рассеяние на мелкомасштабных неровностях ( $kl \ll 1$ ), так как при малых параметрах Рэлея ширина индикатрисы определяется не дисперсией углов наклона поверхности, а фурье-преобразованием корреляционной функции высот, т. е. шириной пространственного энергетического спектра.

4. Перейдем теперь к установлению связи между корреляционными функциями волнового поля и параметрами статистически неровной поверхности в обратном предельном случае, когда характерные наклоны шероховатостей малы. Предполагая выполненными неравенства (25.36, в), мы можем исходить из представления флуктуаций потенциала рассеянного поля в форме (25.1). Нормируя коррелятор  $\overline{u(\mathbf{R}) u^*(\mathbf{R}')}$  на интенсивность флуктуаций (24.58), получаем для корреляционной функции  $\mathcal{K}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \frac{k^2 \sin \psi \sin \psi'}{\pi^2 R R'} e^{-ik\Delta R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr dr' \times \\ &\times \frac{W_z(q_z, -q'_z; \Delta r_0 + r' - r)}{\sqrt{[1 - f_1^2(q_z)][1 - f_1^2(q'_z)]}} \exp\left\{ik\left(\frac{x^2 \sin^2 \psi + y^2}{R} - \frac{x'^2 \sin^2 \psi' + y'^2}{R'}\right)\right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $\Delta r_0 = r'_0 - r_0$  — радиус-вектор (в плоскости  $z = 0$ ) между точками зеркального отражения  $r'_0$  и  $r_0$ , соответствующих точкам



наблюдения  $R'$  и  $R$ . При  $q_z \sigma \ll 1$ , учитывая, что  $1 - f_1^2(q_z) \approx q_z^2 \sigma^2$ , и воспользовавшись предельным переходом (4), получаем

$$\frac{W_Z(q_z, -q'_z; \Delta r_0 + r' - r)}{\sqrt{[1 - f_1^2(q_z)][1 - f_1^2(q'_z)]}} \approx W(\Delta r_0 + r' - r). \quad (20)$$

В этом случае, как и должно быть, формула (19) (обозначения здесь такие же, как и на рис. 24) переходит в (16. 5) — корреляционную функцию поля над пологой поверхностью ( $kl \gg 1$ ) с малыми шероховатостями ( $q_z \sigma \ll 1$ ). В § 16 мы не конкретизировали вида корреляционной функции  $W$ , а только, считая ее однопараметрической, предполагали известным радиус корреляции  $l$ . Поэтому результатами § 16 можно воспользоваться для вычисления интеграла (19) и в обратном предельном случае  $q_z \sigma \gg 1$ , заменив  $l \rightarrow \frac{l}{q_z \sigma}$ , как мы уже неоднократно делали в этом параграфе. Так, например, при азимутальном разнесении точек наблюдения (в том смысле, в котором использовался этот термин в § 16) радиус корреляции поля  $(\Delta y)_{R_0, \psi}$  связан с характерным расстоянием  $(\Delta r_0)_{R_0, \psi}$  между точками зеркального отражения соотношением:

$$(\Delta y)_{R_0, \psi} \simeq \frac{D}{r_0} (\Delta r_0)_{R_0, \psi}, \quad (21)$$

где  $(\Delta r_0)_{R_0, \psi}$  определяется формулой (16. 14) с  $l \rightarrow \frac{l}{q_z \sigma}$ . Следует заметить, однако, что второй член в правой части формулы (16. 14) при  $l \rightarrow l/q_z \sigma$  всегда превышает первый в меру выполнения неравенства  $\gamma \ll \text{tg } \psi$ , которое всегда предполагается выполненным, так как затенения мы здесь не учитываем. (Напомним, что, как показано в § 25, формула (25. 1) имеет место лишь при  $\gamma \ll \sin \psi$ ). Поэтому для  $(\Delta r_0)_{R_0, \psi}$  получаем следующую оценку:

$$(\Delta r_0)_{R_0, \psi} \simeq \frac{l}{q_z \sigma} \simeq \frac{1}{k\gamma \sin \psi}, \quad (22)$$

и для пространственного интервала корреляции поля при азимутальном разнесении имеем, следовательно,

$$(\Delta y)_{R_0, \psi} \simeq \frac{R_0}{kz_0} \frac{1}{\gamma}. \quad (23)$$

Здесь  $R_0 = R_{10} + R_{20}$  — расстояние от зеркального источника до каждой точки наблюдения, а дисперсия наклонов  $\gamma$  введена соотношением \*)  $\gamma \simeq \sigma/l$ .

\*) Так как выражение (23) и следующие ниже формулы для интервалов корреляции поля носят лишь оценочный характер, то не имеет смысла уточнять коэффициент пропорциональности между  $\gamma$  и  $\sigma/l$ , который, вообще говоря, порядка единицы [см., например, (25. 15)].

Угловая ширина корреляционного объема в перпендикулярной плоскости (при  $R_0 = \text{const}$  и  $\varphi = 0$ ) равна согласно (16. 25)

$$(\Delta\psi)_{R_0, \varphi} \simeq \frac{\sin \psi}{kz_0} \frac{1}{\gamma}, \quad (24)$$

откуда для поперечного радиуса корреляции  $(\Delta R)_{R_0, \varphi}$  получаем

$$(\Delta R)_{R_0, \varphi} \simeq \frac{R_0 \sin \psi}{kz_0} \frac{1}{\gamma}. \quad (25)$$

Размер корреляционного объема вдоль оси  $x$  (при  $z = z'$  и  $\varphi = 0$ ) равен [ср. с (16. 26)]

$$(\Delta x)_{z, \varphi} \simeq \frac{R_0}{kz_0} \frac{1}{\gamma}, \quad (26)$$

а в вертикальном направлении (при  $\psi = \psi'$  и  $\varphi = 0$ )

$$(\Delta z)_{\psi, \varphi} \simeq \frac{R_0^2 \sin^2 \psi}{kz_0^2} \frac{1}{\gamma^2}. \quad (27)$$

Наконец, для продольного радиуса корреляции (при разнесении точек вдоль луча, идущего от зеркального источника, когда  $\psi = \text{const}$  и  $\varphi = 0$ ) имеем

$$(\Delta R_0)_{\psi, \varphi} \simeq \frac{R_0^2 \sin^2 \psi}{kz_0^2} \frac{1}{\gamma^2}. \quad (28)$$

Таким образом, поперечные радиусы корреляции поля, как и в теории возмущений, оказываются одного порядка,

$$\frac{(\Delta y)_{z, R_0}}{(\Delta x)_{z, \varphi}} \simeq 1, \quad \frac{(\Delta R)_{R_0, \varphi}}{(\Delta x)_{z, \varphi}} \simeq \sin \psi, \quad (29)$$

а продольный  $(\Delta R_0)_{\psi, \varphi}$  (вдоль отраженного луча) — значительно больше, чем поперечный:

$$\frac{(\Delta R_0)_{\psi, \varphi}}{(\Delta R)_{R_0, \varphi}} \simeq \frac{R_0 \sin \psi}{z_0} \frac{1}{\gamma}, \quad (30)$$

т. е. при  $z_0 \simeq z$  интервал корреляции поля в поперечном направлении в  $\gamma$  раз меньше, чем в продольном — корреляционный объем сильно вытянут вдоль луча.

5. Заметим, что размеры корреляционного объема поля не зависят от радиусов корреляции шероховатостей, а определяются лишь крутизной наклонов поверхности, причем, чем более пологой является поверхность и чем меньше характерные углы наклона  $\gamma$ , тем на больших расстояниях сохраняется корреляция поля.

Эти результаты были получены как следствия формул § 16, которые в свою очередь выводились путем достаточно громоздких вычислений, связанных с оценкой интегралов типа (16. 5). Интересно, однако, привести очень простые физические соображения,

из которых также могут быть получены оценки (22) — (30) для радиусов корреляции волнового поля.

Начнем со случая поперечного разнесения точек наблюдения. Когда точка  $R'$  удаляется от  $R$ , увеличивается и расстояние  $\Delta r$  (в плоскости  $z=0$ ) между соответствующими зеркальными точками  $O$  и  $O'$  (рис. 66). Оценим те расстояния  $\Delta r_0$ , при которых

исчезает корреляция между волнами, отраженными в точках  $O$  и  $O'$ . Совершенно очевидно, что амплитуды этих волн на поверхности не могут сильно отличаться: декорреляция амплитуд может возникнуть только за счет различных факторов расходимости, которые в свою очередь определяются радиусами кривизны в зеркальных

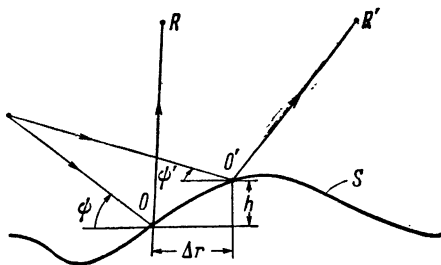


Рис. 66.

точках. Но так как поверхность в рассматриваемом случае достаточно пологая, то различие радиусов кривизны можно пренебречь, и, следовательно, корреляция поля на поверхности (а значит, и в пространстве) определяется лишь фазовыми соотношениями между волнами в зеркальных точках  $O$  и  $O'$ . Эта ситуация полностью противоположна той, с которой мы имели дело в теории возмущений — там эквивалентные виртуальные источники на плоскости  $z=0$  имели случайную амплитуду и детерминированную фазу, которая определялась только расстоянием от источника до соответствующей точки на плоскости. Здесь же мы видим, что поле, отраженное от шероховатой поверхности с пологими, но высокими неровностями, создается системой эквивалентных виртуальных источников на плоскости  $z=0$  со случайными фазами  $e^{-iq_z \xi(r)}$ . Или, иначе говоря, такая поверхность эквивалентна фазовому экрану со случайным набегом фаз по апертуре. Задача о дифракции на таком экране рассматривалась в работах [142]—[148], [233]—[235], к которым мы и отсылаем читателя.

Флуктуационная составляющая разности фаз  $\delta\phi$  между волнами, приходящими в точки  $R$  и  $R'$ , как видно из рис. 66, равна

$$\delta\phi \simeq kh \sin \psi, \quad (31)$$

где  $h$  — разность высот зеркальных точек над плоскостью  $z=0$ . С другой стороны,  $h$  связана с  $\Delta r_0$  очевидным соотношением (при  $\gamma \ll 1$ ):

$$h \simeq \gamma \Delta r_0.$$

Корреляция между полями нарушается, если  $\delta\phi \simeq 1$ , так что, подставляя последнее соотношение в (31), получаем для

характерного расстояния  $\Delta r_0$ , начиная с которого исчезает корреляция поля в точках  $R$  и  $R'$ , оценку, в точности совпадающую с (22). После этого поперечные размеры корреляционного объема получаются с помощью простых тригонометрических операций — достаточно найти расстояние между  $R$  и  $R'$  при заданном расстоянии между зеркальными точками  $\Delta r_0$ .

При оценке интервала продольной корреляции поля точки наблюдения  $R$  и  $R'$  находятся на одном и том же луче и им соответствует одна и та же зеркальная точка  $r_0$ , так что использованный выше прием для данного случая неприменим. Причина декорреляции поля при продольном разнесении заключается не в том, что смещаются зеркальные точки (как это имеет место при поперечном разнесении), а в том, что с увеличением расстояния между  $R$  и  $R'$  изменяются размеры области, существенной для отражения; роль такой области в данном случае очень пологих неровностей ( $\gamma \ll 1/(k\sigma)$ ) играет зона Френеля. Ясно, что если, например, точка  $R'$  удаляется вдоль луча  $\{r, R\}$ , то размер зоны Френеля увеличивается, и в нее попадают новые участки поверхности. Декорреляция наступает тогда, когда приращение линейных размеров зоны Френеля становится таким, что характерная разность фаз между волнами, приходящими из этой новой области, оказывается порядка единицы. Таким образом, приращение  $(\Delta x)_0$  зоны Френеля следует сравнивать с ранее найденной величиной  $\Delta r_0$ :

$$(\Delta x)_0^2 \simeq \frac{\Delta R}{k \sin^2 \psi} \simeq (\Delta r_0)^2 \simeq \frac{1}{(k \gamma \sin \psi)^2}. \quad (32)$$

Выразим  $\Delta R$  через расстояние  $\Delta R_2$  между точками наблюдения:

$$\Delta R = \Delta \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2.$$

Обозначим, как и раньше, через  $R_0 = R_1 + R_2$  расстояние от зеркального источника до точки наблюдения. Тогда, учитывая, что при продольном разнесении  $\Delta R_2 = \Delta R_0$  и  $R_1 = z_0/\sin \psi$ , получаем из (32)

$$\frac{z_0^2}{k R_0^2 \sin^4 \psi} (\Delta R_0)_{\psi, \varphi} \simeq \frac{1}{(k \gamma \sin \psi)^2}, \quad (33)$$

откуда и следует формула (28).

В заключение заметим, что все результаты этого и предыдущего пунктов легко переносятся и на тот случай, когда функция корреляции поверхности не является однопараметрической, т. е. когда нельзя ввести только один масштаб шероховатостей  $l$ . Пусть поверхность представляет собой суперпозицию независимых случайных отклонений от плоскости, т. е. описывается уравнением

$z = \sum_i \zeta_i(\mathbf{r})$ , причем дисперсии  $\sigma_i$  всех случайных функций  $\zeta_i(\mathbf{r})$  достаточно велики, чтобы выполнялись неравенства  $q_z \sigma_i \gg 1$ . Тогда, если считать, что результирующие наклоны поверхности  $\gamma^2 \simeq \simeq \sum_i \gamma_i^2$  ( $\gamma_i^2 = \overline{(\nabla \zeta_i)^2}$ ) по-прежнему достаточно малы, т. е. выполняются неравенства  $\gamma \ll \sin \psi$ ;  $1/(k\sigma)$ , то для размеров корреляционного объема поля можно получить те же оценки (22) — (30), где только  $\gamma^2$  следует заменить суммой  $\sum_i \gamma_i^2$ .

## § 27. Частотный спектр рассеянного поля

При отражении от изменяющейся во времени случайной поверхности частотный спектр рассеянного поля оказывается, вообще говоря, отличным от спектра, падающего на поверхность излучения. Это явление уже было рассмотрено нами в гл. V в том случае, когда шероховатости поверхности можно было считать малыми,  $(k\sigma \sin \psi)^2 \ll 1$ .

В этом параграфе мы исследуем изменение спектрального состава поля, отраженного от поверхности с большими радиусами кривизны (по сравнению с длиной волны излучения), что позволяет использовать для расчета метод касательной плоскости без ограничений на высоту поверхности, по сути, при произвольных значениях параметра Рэлея. Задача такого исследования по-прежнему заключается в установлении связи между пространственно-временными статистическими характеристиками случайной поверхности и частотным спектром рассеянного на ней поля. При этом, как и при решении аналогичной задачи в § 13 методом возмущений, достаточно ограничиться изучением спектра рассеянного поля при облучении поверхности монохроматической волной  $U_0 \sim e^{-i\omega_0 t}$ .

Очевидно, что с помощью принципа суперпозиции эти результаты легко переносятся и на случай дифракции волны с произвольным спектром.

1. Исследование начнем со случая фраунгоферовой дифракции на поверхности  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ , когда для потенциала  $U$  отраженного поля можно воспользоваться очевидной модификацией формулы (19.18):

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20}) - i\omega_0 t}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \int_{S_0} e^{-i[qr + q_z \zeta(\mathbf{r}, t)]} [q_z - q\gamma(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Здесь и далее мы рассматриваем рассеяние на идеально отражающей поверхности, но, так же как и в теории возмущений, при  $kl \gg 1$  спектр рассеянного поля оказывается не зависящим от

локального коэффициента отражения. Такое простое обобщение (1) формулы (19.18) на случай изменяющейся во времени поверхности возможно только тогда, когда изменения  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  и  $\gamma(\mathbf{r}, t)$  происходят достаточно медленно, так что характерные частоты колебаний и скорости перемещения поверхности малы по сравнению с частотой  $\omega_0$  и скоростью распространения волн  $c = \omega_0/k$  соответственно. В противном случае вместо функции Грина  $e^{ikR}/R$ , которая использовалась при выводе (19.18), необходимо обращаться к запаздывающим потенциалам, что значительно усложняет исследование. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь достаточно медленно изменяющихся поверхностей, когда расширение (или смещение) спектра остается все еще значительно меньше, чем несущая частота  $\omega_0$ , так что рассеянный сигнал можно считать квазимонохроматическим (или узкополосным), пользуясь терминологией теории случайных функций).

Имея в виду основное внимание в дальнейшем уделять случаю больших параметров Рэлея  $q_z\sigma \gg 1$ , замечаем, что в формуле (1) осциллирующие экспоненты  $\exp[-iq_z\zeta(\mathbf{r}, t)]$  происходят значительно быстрее, чем изменения  $\gamma(\mathbf{r}, t)$  в предэкспоненциальном множителе. Поэтому при вычислении временной автокорреляционной функции поля (фурье-преобразование от которой и есть искомый спектр) можно считать наклоны  $\gamma(\mathbf{r}, t)$  не зависящими от времени. Тем самым мы допускаем ошибку в определении корреляционной функции при временах  $\tau \geq \tau_0$  и, соответственно, в спектре — на частотах  $\omega - \omega_0 \lesssim 1/\tau_0$  (где  $\tau_0$  — временной интервал корреляции, и, следовательно,  $1/\tau_0$  — характерная частота колебаний поверхности). Но, как показывают дальнейшие расчеты, изменение спектра (смещение центральной частоты и расширение полосы) происходит на значительно больших частотных интервалах  $\omega - \omega_0 \simeq \simeq q_z\sigma/\tau_0$ , так что небольшой погрешностью в спектре при  $\omega \simeq \omega_0$  можно пренебречь в меру выполнения неравенства  $q_z\sigma \gg 1$ . Считая в (1)  $\gamma = \gamma(\mathbf{r})$ , мы можем теперь вынести наклоны за знак интеграла в точках зеркального отражения  $\gamma \rightarrow \gamma_0 = -q_{\perp}/q_z$ , как это мы делали при вычислении интенсивности. Таким образом, приходим к следующей формуле:

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{n}; t) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20}) - i\omega_0 t} q^2}{4\pi i R_{10} R_{20} q_z} \int_{S_0} e^{-i[q\mathbf{r} + q_z\zeta(\mathbf{r}, t)]} d\mathbf{r}. \quad (2)$$

Заметим, что этой же формулой можно пользоваться и в обратном предельном случае  $q_z\sigma \ll 1$ . Действительно, так как при малых параметрах Рэлея метод Кирхгофа совпадает с теорией возмущений лишь при  $kl \gg 1$ , то поверхность в этом случае должна быть чрезвычайно пологой:  $\gamma \ll 1$ , причем это неравенство выполняется с большим запасом, так как  $\gamma \simeq \sigma/l$ , а при  $k\sigma \ll 1$  необходимо  $kl \gg 1$ . Но при  $\gamma \ll 1$  излучение рассеивается в узком

конусе около направления зеркального отражения  $q_{\perp}/q_z \approx \gamma \ll 1$ , так что в (2) отношение  $q^2/q_z$  следует заменить, с той же степенью точности, на  $q_z$ . В результате, как нетрудно убедиться, мы приходим к формуле (14.5) для теории возмущений при  $kl \gg 1$ .

Таким образом, формула (2) может служить отправным пунктом при исследовании спектра рассеянного поля в предельных случаях  $q_z \sigma \gg 1$  и  $q_z \sigma \ll 1$ . Можно, однако, надеяться, что и в промежуточной области значений параметра Рэля ( $q_z \sigma \approx 1$ ) полученные ниже результаты являются достаточно хорошей интерполяцией.

2. Энергетический спектр волнового поля связан с временной автокорреляционной функцией соотношением

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(\mathbf{k}, \mathbf{x}; t + \tau) U^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}; t) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

которое отличается от определения (4.5б) лишь тем, что в § 4 рассматривался спектр флуктуаций поля в данной точке пространства, а здесь речь идет о спектральном составе поля, рассеянного из направления  $\mathbf{k}$  в направление  $\mathbf{x}$  (в зоне Фраунгофера, как уже неоднократно подчеркивалось, мы имеем дело с плоскими волнами).

Угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  в (3) означают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$  и введены вместо использовавшейся ранее для этой цели черты из соображения удобства написания следующих ниже довольно громоздких формул; черта нами будет использована в этом же параграфе для обозначения средних по пространственному спектру поверхности.

Подставляя (2) в (3), имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}(\omega) &= \frac{q^4 S_0}{32\pi^3 (R_{10} R_{20})^2 q_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\rho} \times \\ &\times \exp[-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} + i(\omega - \omega_0)\tau] \langle \exp\{iq_z [\zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) - \zeta(\mathbf{r}, t)]\} \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как характерные скорости движения поверхности предполагаются достаточно малыми, то можно ожидать, как отмечалось выше, что случайное поле окажется квазимонохроматическим, так что, отсчитывая частоту  $\omega$  от  $\omega_0$ , можно ввести «медленный спектр»  $S(\omega) = \mathfrak{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}(\omega - \omega_0)$ . Кроме того, спектр  $\mathfrak{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}(\omega)$ , определенный формулой (3), как легко убедиться, нормирован на интенсивность поля, рассеянного из  $\mathbf{k}$  в  $\mathbf{x}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{x}}(\omega) d\omega = \langle |U(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 \rangle = J(\mathbf{k}, \mathbf{x}). \quad (5)$$

Распределение же интенсивности отраженного поля по направлениям было довольно подробно изучено в § 20 гл. VII, так что при исследовании «медленного» спектра  $S(\omega)$  мы будем опускать (не оговаривая этого каждый раз) общие множители, которые зависят от  $k$  и  $\kappa$ , но не зависят от  $\omega$ ; они всегда могут быть восстановлены с помощью условия нормировки (5). Итак, для  $S(\omega)$  имеем (см. [236])

$$S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-i q \rho + i \omega \tau} f_2(q_z, -q_z; W(\rho, \tau)), \quad (6)$$

где двумерная характеристическая функция введена соотношением

$$f_2(q_z, -q_z; W(\rho, \tau)) \equiv \langle \exp \{ i q_z [\zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) - \zeta(\mathbf{r}, t)] \} \rangle. \quad (7)$$

В частном случае нормального распределения высот имеем

$$f_2(q_z, -q_z; W(\rho, \tau)) = \exp \{ -q_z^2 \sigma^2 [1 - W(\rho, \tau)] \}. \quad (8)$$

3. Исследование формулы (6) начнем с простейшего случая двумерной поверхности с линейным и однородным законом дисперсии  $\Omega(\kappa) = v\kappa$ . Если все парциальные волны движутся в одну сторону, например, в положительном направлении оси  $x$ , то разложение  $\zeta(x, t)$  по плоским волнам (12.4) имеет вид

$$\zeta(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(\kappa) e^{i\kappa(x-vt)} d\kappa = \zeta(x - vt). \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $W(\xi, \tau)$  также является функцией только одного аргумента  $\xi - v\tau$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 W(\xi, \tau) &= \langle \zeta(x + \xi, t + \tau) \zeta(x, t) \rangle = \\ &= \langle \zeta(x - vt + \xi - v\tau) \zeta(x - vt) \rangle = \sigma^2 W(\xi - v\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя теперь этот вид  $W(\xi, \tau)$  в (6) и переходя к новой переменной интегрирования  $\xi - v\tau$ , получаем для спектра отраженного поля:

$$\begin{aligned} S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - q_x v)\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i q_x \xi} f_2(q_z, -q_z; W(\xi)) \sim \\ \sim \delta(\omega - q_x v). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в данном случае отраженная волна остается монохроматической, но частота ее отличается от частоты падающей волны на величину  $\omega = q_x v$ . Физический смысл этого простого результата совершенно очевиден: при линейном законе дисперсии  $\Omega = \kappa v$  все гармоники движутся с одной скоростью (отсутствует пространственная дисперсия волн на поверхности), следовательно, и вся поверхность перемещается как целое с этой же скоростью.



Эффект Доплера, связанный с этим движением, и приводит к смещению частоты в отраженной волне, причем это смещение зависит от направления рассеяния: в зеркальном направлении ( $q_x = 0$ ) указанное смещение отсутствует; скользящим же направлениям рассеяния, образующим малые углы с осью  $x$ , соответствуют максимальные частоты смещений  $\omega_+ = 2kv \cos^2 \frac{\psi}{2}$  и  $\omega_- = -2kv \sin^2 \frac{\psi}{2}$  ( $\psi$  — угол скольжения падающей волны,  $k = \omega_0/c$ ).

Очевидно, что этот эффект совершенно не зависит от статистических свойств рассеивающей поверхности. В частности, если поверхность периодична с периодом  $\Lambda$ , а в остальном произвольна, то поле рассеивается только в дискретных направлениях  $\chi_n$ , которые удовлетворяют условию Брегга

$$q_x^{(n)} = k(\cos \chi_n - \cos \psi) = n \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (12)$$

и смещение частоты в  $n$ -м дифракционном спектре определяется по формуле

$$\omega_n = q_x^{(n)}v = nv \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (13)$$

Этот результат был получен в работе [183] для квазигармонической функции корреляции и, как видно, ничего, кроме эффекта Доплера, в себе не содержит.

4. Если поверхность  $\zeta(x, t)$  образована двумя системами плоских волн, бегущими во взаимно противоположных направлениях со скоростями  $\pm v$  (закон дисперсии, по-прежнему, линейный:  $\Omega = kv$ ), то спектральный состав отраженного поля существенно отличается от (11). Подставляя корреляционную функцию в виде разложения (12.30) в формулу (6), получим в случае нормального распределения высот  $\zeta$  следующую формулу для спектра:

$$S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \{ -iq_x \xi + i\omega\tau + q_z^2 \sigma^2 W(\xi - v\tau) + q_z^2 \sigma^2 W(\xi + v\tau) \}, \quad (14)$$

где введено обозначение:

$$W(\xi \pm v\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(k) e^{ik(\xi \pm v\tau)} dk. \quad (15)$$

Напомним еще раз, что  $S(\omega)$  — ненормированный спектр, поэтому мы вправе были опустить в (14) общий множитель  $e^{-(q_z \sigma)^2}$ .

Перейдем в (14) к новым переменным интегрирования  $\xi - v\tau$  и  $\xi + v\tau$ . Тогда для  $S(\omega)$  получаем представление в виде произведения

$$S(\omega) \sim S_+(\omega) S_-(\omega), \quad (16)$$

где

$$S_{\pm}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left[ -\frac{l}{2} \left( q_x \pm \frac{\omega}{v} \right) \xi + q_z^2 \sigma_{\pm}^2 W(\xi) \right]. \quad (17)$$

Анализ  $S(\omega)$  проведем в двух предельных случаях: малых и больших значений параметра Рэлея.

а) При  $q_z^2 \sigma_{\pm}^2 \ll 1$  в формуле (17) подынтегральную функцию можно разложить в ряд по степеням  $(q_z \sigma)^2$  (далее в этом разделе мы считаем для простоты, что  $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = \sigma^2/2$ ). Выполняя затем несложные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} S(\omega) \sim & (2\pi)^2 v \delta(\omega) \delta(q_x) + \\ & + 4\pi v [\delta(\omega - q_x v) + \delta(\omega + q_x v)] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-iq_x \xi} \left\{ \exp \left[ \frac{q_z^2 \sigma^2}{2} W(\xi) \right] - 1 \right\} + \\ & + \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{(q_z \sigma)^{2(n+m)}}{n! m! 2^{n+m}} y_n \left( q_x + \frac{\omega}{v} \right) y_m \left( q_x - \frac{\omega}{v} \right), \quad (18) \end{aligned}$$

где

$$y_n \left( q_x \pm \frac{\omega}{v} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{l}{2} \left( q_x \pm \frac{\omega}{v} \right) \xi \right] W^n(\xi) d\xi. \quad (19)$$

При гауссовой корреляции  $W(\xi) = e^{-\xi^2/l^2}$  этот интеграл легко вычисляется:

$$y_n \left( q_x \pm \frac{\omega}{v} \right) = l \sqrt{\frac{\pi}{n}} \exp \left[ -\frac{\tau_0^2 (\omega \pm q_x v)^2}{16n} \right]; \quad \tau_0 = \frac{l}{v}. \quad (20)$$

Здесь введено характерное время  $\tau_0$  корреляции поверхности: за это время каждая из систем, бегущих в противоположных направлениях волн, смещается по оси  $x$  на расстояние, равное радиусу корреляции  $l$ . Очевидно, что  $l/\tau_0$  можно рассматривать как характерную частоту колебаний случайной поверхности. Подставим (20) в (18) и в сумме по  $n$  и  $m$  перейдем к новым индексам суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{n, m} \dots \rightarrow & l^2 \pi \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(q_z \sigma)^{2p}}{2^p} \exp \left[ -\frac{(q_x l)^2}{4p} \right] \times \\ & \times \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n! (p-n)! \sqrt{n(p-n)}} \exp \left[ -\frac{p\tau_0^2}{16n(p-n)} \left( \omega + q_x v \frac{p-2n}{p} \right)^2 \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле (18) является спектром поля, отраженного от плоской неподвижной поверхности ( $q_z \sigma \rightarrow 0$ ). Оче-

видно, что это монохроматическая волна с частотой  $\omega_0$  ( $\omega = 0$ ), распространяющаяся в направлении зеркального отражения ( $q_x = 0$ ). В первом порядке по малому параметру  $(q_z\sigma)^2$  в спектре появляются дискретные максимумы на доплеровских частотах  $\omega = \pm q_x v$  — бегущие в противоположных направлениях системы волн приводят к эффекту Доплера на скоростях  $\pm v$ . Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с формулами теории возмущений, которые были получены в гл. V. В следующих, более высоких порядках по  $(q_z\sigma)^2$  в рассеянном поле, кроме этих дискретных частот, возникает непрерывный спектр, который описывается суммой (21). При  $p = 2$  [т. е. во втором порядке теории возмущений по параметру Рэлея  $(q_z\sigma)^2$ ] непрерывный спектр имеет максимум на центральной частоте  $\omega = 0$ ; полуширина этого максимума по уровню  $e^{-1}$  равна  $\Delta\omega \simeq 2\sqrt{2}/\tau_0$ . В следующем, третьем порядке, появляются два дополнительных максимума на частотах  $\omega = \pm \frac{1}{3} q_x v$  с полушириной  $\Delta\omega \simeq 4\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\tau_0}$ .

Вообще, в  $p$ -м порядке по  $(q_z\sigma)^2$  непрерывный спектр имеет  $p - 1$  максимум на частотах

$$\omega = \left(1 - 2 \frac{n}{p}\right) q_x v; \quad n = 1, 2, \dots, p - 1, \quad (22a)$$

причем полуширина  $n$ -го максимума равна

$$\Delta\omega \simeq \frac{4}{\tau_0} \sqrt{\frac{n(p-n)}{p}}. \quad (22b)$$

Из формулы (21) видно также, что относительная интенсивность непрерывных спектров разных порядков определяется не только параметром Рэлея, но и направлением рассеяния — за счет множителей  $\exp\left\{-\frac{q_x^2 l^2}{4p}\right\}$ , причем, чем больше  $p$ , тем в более широком секторе углов  $\chi$  рассеивается излучение. Поэтому даже при  $q_x\sigma \ll 1$  для направлений рассеяния, далеких от зеркальных ( $q_x l \gg 1$ ), вид спектра определяется теми слагаемыми в сумме (21), для которых  $p^2 \simeq -(q_x l)^2 \ln^{-1}(q_z\sigma)$ . Таким образом, спектры высоких порядков могут давать основной вклад в полный спектр рассеянного поля в незеркальных направлениях, если  $-(q_x l)^2 \ln^{-1}(q_z\sigma) \gg 1$ .

б) В обратном предельном случае больших параметров Рэлея интегралы (17) оцениваются по методу Лапласа:

$$S_{\pm}(\omega) = \frac{1}{q_z\sigma_{\pm}} \sqrt{\frac{2\pi}{|W_{\xi}^{(2)}(0)|}} \exp\left\{-\frac{\left(q_x \pm \frac{\omega}{v}\right)^2}{8q_z^2\sigma_{\pm}^2 |W_{\xi}^{(2)}(0)|}\right\}, \quad (23)$$

так что для спектра (16) получаем

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\Delta\omega \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_m)^2}{(\Delta\omega)^2} \right],$$

где

$$\omega_m = q_x v \frac{\sigma_+^2 - \sigma_-^2}{\sigma^2}; \quad (\Delta\omega)^2 = 2\kappa^2 \left[ 2q_z v \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{\sigma} \right]^2. \quad (24)$$

Здесь  $\sigma^2 = \sigma_+^2 + \sigma_-^2$ , а чертой обозначено среднее значение со спектральным весом:

$$\overline{f(\kappa)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) \tilde{W}(\kappa) d\kappa, \quad (25)$$

так что

$$W_{\xi}^{(2)}(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 \tilde{W}(\kappa) d\kappa = -\overline{\kappa^2}.$$

Если  $\sigma_+$  или  $\sigma_-$  обращаются в нуль (это соответствует возмущениям, бегущим только в одну сторону), то ширина спектра также стремится к нулю, а  $\omega_m = \pm q_x v$  и мы получаем формулу (11). При  $\sigma_+ = \sigma_-$  спектр является симметричным, с максимумом на  $\omega = 0$ , полуширина которого равна  $(\Delta\omega)^2 = 2(q_z \sigma)^2 v^2 \kappa^2$ . Так как  $\overline{\kappa^2} \simeq 1/l^2$ , то, введя характерную частоту колебаний поверхности  $l/v \simeq 1/\tau_0$ , мы приходим к выводу, что ширина спектра отраженного сигнала в  $q_z \sigma$  раз больше, чем характерные частоты колебаний поверхности:

$$\Delta\omega \simeq \frac{q_z \sigma}{\tau_0}. \quad (26)$$

Таким образом, если в спектре возмущений поверхности присутствуют волны, движущиеся в противоположных направлениях, то спектр рассеянного сигнала обладает конечной шириной. Это имеет место даже при отсутствии пространственной дисперсии колебаний границы раздела, когда все гармоники распространяются с одинаковой скоростью  $v = \Omega/\kappa$ . Физическая причина этого совершенно прозрачна: наличие гармоник, бегущих в разные стороны, приводит к появлению на поверхности стоячих волн. Поэтому, кроме равномерного движения участков поверхности «вперед» или «назад» со скоростью  $\pm v$  (за счет чего и возникает обычный эффект Доплера на частотах  $\omega = \pm q_x v$ ), отражающие участки поверхности движутся случайным образом «вверх» и «вниз» со стоячей волной. Характерная скорость этих колебаний  $v_0 \sim \sigma/\tau_0$ , и, как видно из (26), расширение спектра  $\Delta\omega \sim kv_0 \sin \psi$  связано с эффектом Доплера на этой скорости.

5. Рассмотрим рассеяние на возмущениях границы раздела, которые содержат гармоники, бегущие только в одном направле-

нии с нелинейным законом дисперсии  $\Omega(\kappa)$ . Вместо формулы (14) теперь получаем из (6) и (8):

$$S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \{ -i(q_x \xi - \omega\tau) - q_z^2 \sigma^2 [1 - W(\xi, \tau)] \} \sim (27a)$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q_z \sigma)^{2n}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i(q_x \xi - \omega\tau)} W^n(\xi, \tau). \quad (27b)$$

В данном случае (бегущие в одном направлении гармоники)  $W(\xi, \tau)$  имеет спектральное разложение (12.31), пользуясь которым, из (27) получаем следующую формулу для спектров  $n$ -го порядка по параметру  $(q_z \sigma)^2$ :

$$S^{(n)}(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_1 \tilde{W}(\kappa_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_2 \tilde{W}(\kappa_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_n \tilde{W}(\kappa_n) \times \\ \times \delta(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n - q_x) \delta[\Omega(\kappa_1) + \Omega(\kappa_2) + \dots + \Omega(\kappa_n) - \omega]. \quad (28)$$

При  $n=0$ , как обычно, получаем спектр волны, отраженной от плоскости  $S^{(0)} \sim \delta(q_x) \delta(\omega)$ ; при  $n=1$  приходим к результату теории возмущений (комбинационное рассеяние):

$$S^{(1)}(\omega) \sim \tilde{W}(q_x) \delta[\omega - \Omega(q_x)].$$

В более высоких порядках по  $(q_z \sigma)^2$  появляется, вообще говоря, непрерывный спектр.

Исследуем спектр второго порядка

$$S^{(2)}(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\kappa) \tilde{W}(q_x - \kappa) \delta[\Omega(\kappa) + \Omega(q_x - \kappa) - \omega] d\kappa. \quad (29)$$

Вычисление этого интеграла сводится к отысканию корней уравнения

$$\Omega(\kappa) + \Omega(q_x - \kappa) = \omega. \quad (30)$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера часто встречающийся случай квадратичного закона дисперсии:

$$\Omega(\kappa) = v\kappa + \frac{1}{2} a\kappa^2. \quad (31)$$

Тогда уравнение (30) имеет четыре корня — по паре в каждой из двух областей частот:

$$\kappa_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2} q_x \pm \frac{\omega - vq_x}{aq_x} \quad \text{при} \quad a \frac{q_x^2}{2} < \omega - vq_x, \quad (32a)$$

$$\kappa_{\pm}(\omega) = \frac{1}{2} q_x \pm \sqrt{\frac{\omega - vq_x}{a} - \frac{q_x^2}{4}} \quad \text{при} \quad a \frac{q_x^2}{4} < \omega - vq_x < a \frac{q_x^2}{2}. \quad (32b)$$

Из четности  $\widetilde{W}(\kappa)$ , как легко проверить, следуют соотношения:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(\kappa_1)\widetilde{W}(q_x - \kappa_1) &= \widetilde{W}(\kappa_2)\widetilde{W}(q_x - \kappa_2) = \widetilde{W}(\kappa_1)\widetilde{W}(\kappa_2); \\ \widetilde{W}(\kappa_+)\widetilde{W}(q_x - \kappa_+) &= \widetilde{W}(\kappa_-)\widetilde{W}(q_x - \kappa_-) = \widetilde{W}(\kappa_+)\widetilde{W}(\kappa_-),\end{aligned}$$

так что для  $S^{(2)}(\omega)$  получаем

$$S^{(2)}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{1}{a|q_x|} \widetilde{W}[\kappa_1(\omega)] \widetilde{W}[\kappa_2(\omega)], & a \frac{q_x^2}{2} < \omega - vq_x; \\ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{\omega - vq_x - a \frac{q_x^2}{4}}} \widetilde{W}[\kappa_+(\omega)] \widetilde{W}[\kappa_-(\omega)], & \\ & a \frac{q_x^2}{4} < \omega - vq_x < a \frac{q_x^2}{2}. \end{cases} \quad (33)$$

В частности, для гауссовой функции корреляции со спектром

$$\widetilde{W}(\kappa) = \frac{l}{\sqrt{\pi}} \exp\{-\kappa^2 l^2\},$$

отсюда следует формула:

$$S^{(2)}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{1}{a|q_x|} \exp\left[-\frac{q_x^2 l^2}{2} - 2 \frac{l^2}{a^2 q_x^2} (\omega - vq_x)^2\right] & \\ \text{при } a \frac{q_x^2}{2} < \omega - vq_x, & \\ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{\omega - vq_x - a \frac{q_x^2}{4}}} \exp\left[-\frac{2l^2}{a} (\omega - vq_x)\right] & \\ \text{при } a \frac{q_x^2}{4} < \omega - vq_x < a \frac{q_x^2}{2}. & \end{cases} \quad (34)$$

Видно, что при  $a \neq 0$ , спектр является непрерывным (схематически он изображен на рис. 67) и имеет интегрируемую (корневую) особенность на частоте  $\omega^{(2)} = vq_x + aq_x^2/4 = \Omega(q_x) - aq_x^2/4$ . Эта особенность соответствует пространственному резонансу второго порядка, когда выполняются условия  $q_x = 2\kappa$  и  $\omega = 2\Omega\left(\frac{q_x}{2}\right)$ . При  $a \rightarrow 0$ , как и должно быть, все  $S^{(2)} \rightarrow \delta[\omega - \Omega(q_x)]$ , так как закон дисперсии при этом становится линейным, и поверхность поступательно и равномерно перемещается в пространстве как целое.

При увеличении параметра Рэля спектры высокочастотных порядков по  $(q_z \sigma)^2$  начинают давать существенный вклад в полную спек-

ральную плотность  $S(\omega)$ . Вычислим спектр рассеянного поля в предельном случае  $(q_x \sigma)^2 \gg 1$ . Следуя стандартному приему

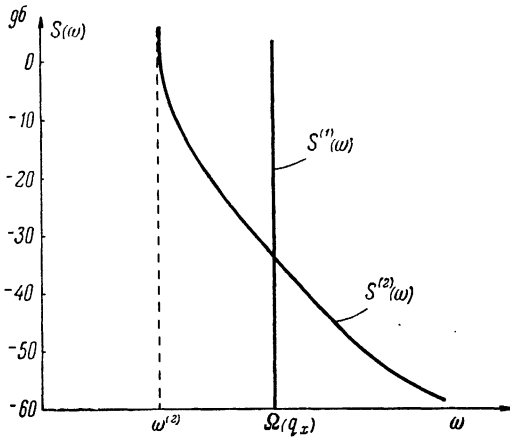


Рис. 67.

вычисления такого рода интегралов, разложим  $W(\xi, \tau)$  в показателе (27а) около  $\xi = \tau = 0$ :

$$W(\xi, \tau) \approx 1 + \frac{1}{2} W_{\xi\xi}^{(2)}(0) \xi^2 + W_{\xi\tau}^{(2)}(0) \xi\tau + \frac{1}{2} W_{\tau\tau}^{(2)}(0) \tau^2 + \dots \quad (35)$$

После этого интеграл (27а) легко вычисляется:

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\Delta\omega\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_m)^2}{(\Delta\omega)^2}\right], \quad (36)$$

где

$$\omega_m = q_x \frac{\overline{\kappa\Omega(\kappa)}}{\overline{\kappa^2}}, \quad (37a)$$

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{2(q_x\sigma)^2}{\overline{\kappa^2}} [\overline{\kappa^2 \cdot \Omega^2(\kappa)} - (\overline{\kappa\Omega(\kappa)})^2]. \quad (37b)$$

При этом мы воспользовались связью вторых производных от  $W(\xi, \tau)$  со средними по спектру (25), которая вытекает из разложения (12.31):

$$\begin{aligned} W_{\xi\xi}^{(2)}(0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 \widehat{W}(\kappa) d\kappa = -\overline{\kappa^2}; \\ W_{\xi\tau}^{(2)}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa\Omega(\kappa) \widetilde{W}(\kappa) d\kappa = \overline{\kappa\Omega(\kappa)}; \\ W_{\tau\tau}^{(2)}(0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(\kappa) \widetilde{W}(\kappa) d\kappa = -\overline{\Omega^2(\kappa)}. \end{aligned}$$

Для квадратичного закона дисперсии (31) формулы (37) приводят к следующим значениям смещения частоты  $\omega_m$  и ширины спектра  $\Delta\omega$ :

$$\omega_m = q_x \left[ v + \frac{1}{2} a \frac{\bar{\kappa}^3}{\kappa^2} \right], \quad (38a)$$

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{2} (q_z \sigma)^2 a^2 \left[ \bar{\kappa}^4 - \frac{(\bar{\kappa}^3)^2}{\kappa^2} \right]. \quad (38б)$$

Эти же формулы остаются справедливыми и при произвольном законе дисперсии, если только пространственный спектр  $\bar{W}(\kappa)$  имеет максимум при  $\kappa=0$  и ширина  $\Delta\kappa$  его достаточно мала:  $\Delta\kappa \ll v/a$ , причем под  $v$  и  $a$  следует понимать производные от  $\Omega$ :

$$v = \left. \frac{d\Omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=+0}, \quad a = \left. \frac{d^2\Omega}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=+0}. \quad (39)$$

В этом случае (31) можно рассматривать как разложение произвольного закона дисперсии в ряд при малых  $\kappa$ .

Если же  $\bar{W}(\kappa)$  имеет максимум при  $\kappa=\kappa_0$  и  $\Delta\kappa \ll \kappa_0$ , то при вычислении среднего по формуле (25)  $\Omega(\kappa)$  можно разложить в ряд по  $\Delta\kappa$  около  $\kappa_0$  и ограничиться, например, первыми не исчезающими членами

$$\Omega(\kappa) = \Omega_0 + v_{\text{гр}}(\kappa - \kappa_0), \quad (40)$$

где

$$\Omega_0 = \Omega(\kappa_0), \quad v_{\text{гр}} = v_{\text{гр}}(\kappa_0) = \left. \frac{d\Omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0}.$$

Формулы (37а, б) принимают в данном случае такой вид:

$$\omega_m = q_x \left[ v_{\text{ф}} + (v_{\text{гр}} - v_{\text{ф}}) \frac{(\overline{\Delta\kappa})^2}{\kappa_0^2} \right], \quad (41a)$$

$$(\Delta\omega)^2 = 2 (q_z \sigma)^2 (v_{\text{гр}} - v_{\text{ф}})^2 \overline{(\Delta\kappa)^2}, \quad (41б)$$

где  $\overline{(\Delta\kappa)^2} = \overline{(\kappa - \kappa_0)^2}$ , а фазовая скорость  $v_{\text{ф}}$  поверхностных волн введена обычным соотношением  $v_{\text{ф}} = \Omega_0/\kappa_0$ . Видно, что при  $(\Delta\kappa)^2 \ll \kappa_0^2$  смещение центральной частоты спектра происходит на величину  $\omega_m \simeq q_x v_{\text{ф}}$ , соответствующую эффекту Доплера на фазовой скорости основной гармоники ( $\kappa=\kappa_0$ ) в пространственном спектре поверхности. Ширина же спектра по-прежнему определяется дисперсией поверхностных волн, проявляющейся в том, что  $v_{\text{ф}} \neq v_{\text{гр}}$ .

Таким образом, кроме стоячих поверхностных волн, рассмотренных в предыдущем пункте, существует еще одна причина уширения спектра рассеянного сигнала — пространственная дисперсия. При этом скорости движения гармоник с разными волновыми числами различны, и в результате движение поверхности не сво-



дится к простому перемещению застывшего профиля  $z = \zeta(x, 0)$ , а с течением времени изменяется форма поверхности, т. е. появляется целый спектр относительных скоростей перемещения отдельных участков поверхности. Это, собственно, и является причиной расширения спектра.

Следует отметить также, что рассматриваемое нами расширение спектра связано не с диссипативными процессами — вязкостью, внутренним трением и т. д., а происходит при дифракции на свободных и незатухающих колебаниях границы раздела.

При наличии же вязкости такие колебания будут затухать и для обеспечения стационарности случайной функции  $z = \zeta(x, y, t)$  (эта стационарность нами всегда подразумевается) необходимо вводить сторонние силы, которые поддерживают энергию этих колебаний постоянной (см. п. 4 § 12). Разумеется, что в общем случае учет диссипации приведет к дополнительному расширению спектра по сравнению с тем, которые мы здесь рассматриваем (во втором порядке теории возмущений влияние диссипации на форму спектра отраженного поля было исследовано в работе [237]).

6. При  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  легко получить формулу для спектра  $S(\omega)$  и в общем случае трехмерных неровностей с произвольным законом дисперсии, если распределение случайной функции  $z = \zeta(r, t)$  нормальное. Для этого в формуле (6)

$$S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp \{ -i[q\rho - \omega\tau] - q_z^2 \sigma^2 [1 - W(\rho, \tau)] \}$$

следует разложить  $W(\rho, \tau)$  при малых  $\rho$  и  $\tau$  и вычислить получающийся таким образом тройной интеграл с квадратичной формой от переменных  $\rho_x, \rho_y$  и  $\tau$  в показателе экспоненты. После элементарных, но громоздких вычислений получаем

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\Delta\omega\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_m)^2}{(\Delta\omega)^2} \right], \quad (42a)$$

где

$$\omega_m = \frac{D_1}{d}, \quad (\Delta\omega)^2 = -2q_z^2 \sigma^2 \frac{D}{d} \quad (42b)$$

и через  $D, D_1$  и  $d$  обозначены определители:

$$D = \begin{vmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{x\tau} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{y\tau} \\ W_{\tau x} & W_{\tau y} & W_{\tau\tau} \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} q_x & q_y & 0 \\ W_{xx} & W_{xy} & W_{x\tau} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{y\tau} \end{vmatrix}; \quad d = \begin{vmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{yx} & W_{yy} \end{vmatrix}; \quad (42b)$$

Здесь индексы у  $W$  означают соответствующую вторую производную от  $W(\rho_x, \rho_y; \tau)$  при  $\rho_x = \rho_y = \tau = 0$ . Так же как и в

предыдущем пункте, эти производные могут быть выражены через средние по трехмерному спектру  $\overline{\tilde{W}(\kappa_x, \kappa_y)}$  [или в полярных координатах — через пространственно-угловой спектр  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$ , который определяется формулой (12.19)]:

$$\begin{aligned} W_{xx} &= -\overline{\kappa_x^2} = \overline{(\kappa \cos \theta)^2}, \\ W_{xy} = W_{yx} &= -\overline{\kappa_x \kappa_y} = -\overline{\kappa^2 \sin \theta \cos \theta}, \\ W_{x\tau} = W_{\tau x} &= \overline{\kappa_x \Omega(|\kappa|)} = \overline{\kappa \Omega(\kappa) \cos \theta}, \\ W_{y\tau} = W_{\tau y} &= \overline{\kappa_y \Omega(|\kappa|)} = \overline{\kappa \Omega(\kappa) \sin \theta}, \\ W_{\tau\tau} &= -\overline{\Omega^2(|\kappa|)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Черта здесь, в отличие от случая двумерных шероховатостей, означает усреднение по трехмерному спектру

$$\overline{f(\kappa_x, \kappa_y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\kappa_x, \kappa_y) \tilde{W}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (44a)$$

или по пространственно-угловому:

$$\overline{f(\kappa, \theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(\kappa, \theta) \tilde{W}(\kappa, \theta) \kappa d\kappa, \quad (44b)$$

Таким образом, положение максимума  $\omega_m$  в спектре отраженного поля и его ширина  $\Delta\omega$  оказываются связанными с распределением энергии поверхностных колебаний по длинам волн ( $\Lambda = 2\pi/\kappa$ ) и направлениям распространения  $\theta$ .

Если считать для простоты, что угловой спектр  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$  симметричен относительно оси  $x$ , которая лежит в плоскости падения [т. е.  $q_y = 0$  и  $\tilde{W}(\kappa, -\theta) = \tilde{W}(\kappa, \theta)$ ], то из (43) следует, что  $W_{xy} = W_{\tau y} = 0$  и формулы (42) значительно упрощаются:

$$\omega_m = q_x \frac{\overline{\kappa \Omega(\kappa) \cos \theta}}{\overline{\kappa^2 \cos^2 \theta}}, \quad (45a)$$

$$(\Delta\omega)^2 = 2 \frac{q_x^2 \sigma^2}{\overline{\kappa^2 \cos^2 \theta}} \left[ \overline{\kappa^2 \cos^2 \theta \cdot \Omega^2(\kappa)} - (\overline{\kappa \Omega(\kappa) \cos \theta})^2 \right]. \quad (45b)$$

При бесконечно узком угловом спектре, когда  $\kappa \tilde{W}(\kappa, \theta) \rightarrow \delta(\theta) \tilde{W}(\kappa)$ , т. е. когда все волны на поверхности движутся в одном направлении, мы приходим к формулам (37а, б), соответствующим двумерному случаю. Но если раньше расширение спектра было связано только с пространственной дисперсией [т. е.  $\Omega(\kappa) \neq \kappa v$ ], то в общем случае трехмерных шероховатостей  $z = \zeta(x, y, t)$  существенную роль начинает играть угловая ширина  $\Delta\theta$  пространственно-углового энергетического спектра  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$

возмущений поверхности. Даже в отсутствие пространственной дисперсии появляется отличная от нуля ширина в спектре  $S(\omega)$ :

$$(\Delta\omega)^2 = 2(q_z\sigma)^2 v^2 \kappa^2 \frac{\overline{\cos^2 \theta} - (\overline{\cos \theta})^2}{\overline{\cos^2 \theta}} \approx \frac{1}{2} (q_z\sigma)^2 v^2 \kappa^2 [\overline{\theta^4} - (\overline{\theta^2})^2]; \quad (46a)$$

положение максимума при этом дается формулой

$$\omega_m = q_x v \frac{\overline{\cos \theta}}{\overline{\cos^2 \theta}} \approx q_x v \left(1 + \frac{\overline{\theta^2}}{2}\right). \quad (46b)$$

Физически очевидно, что наличие конечной ширины в спектре рассеянного поля даже при линейном законе дисперсии  $\Omega = \kappa v$  объясняется двумя причинами. Во-первых, теперь каждому  $\kappa$  соответствует уже не одна гармоника, а множество волн, бегущих в разных направлениях в секторе с углом  $\Delta\theta$  и с одинаковой скоростью  $v = \Omega/\kappa$ . Так как для эффекта Доплера существенна лишь проекция скорости  $v$  на ось  $x$ , то появляется в некотором смысле «эффективный» закон дисперсии — каждому  $\kappa$  соответствует теперь не одна скорость  $v_x$  (приводящая к доплеровскому сдвигу), а спектр скоростей, распределенных по закону  $v_x = (\Omega/\kappa) \cos \theta$ . Из (46a) видно, что ширина  $\Delta\omega$  связана со среднеквадратичными флуктуациями именно этой скорости:  $(\Delta\omega)^2 \sim \overline{(\delta v_x)^2} = \overline{v_x^2} - \overline{v_x}^2$ . Во-вторых, наличие у волновых векторов  $\kappa$  составляющих  $\kappa_y$ , которые для разных  $\kappa$  в секторе  $\Delta\theta$  имеют разные знаки, приводит к появлению в плоскости  $zy$  стоячих волн, при отражении от которых даже в двумерном случае (п. 4 этого параграфа) спектр поля расширяется.

Если направления распространения волн на поверхности находятся в узком секторе  $\Delta\theta \ll 1$  и, кроме того, спектр  $\tilde{W}(\kappa, \theta)$  отличен от нуля лишь в малой области волновых чисел  $\Delta\kappa$  около  $\kappa_0$ , причем  $\Delta\kappa \ll \kappa_0$  то из (45a, б) получаем

$$\omega_m = q_x v_\phi \left(1 + \frac{v_{гр} - v_\phi}{v_\phi} \frac{(\Delta\kappa)^2}{\kappa_0^2} + \frac{(\Delta\theta)^2}{2}\right) \approx q_x v_\phi, \quad (47a)$$

$$(\Delta\omega)^2 \approx \frac{1}{2} (q_z\sigma)^2 v_\phi^2 \kappa_0^2 [\overline{\theta^4} - (\overline{\theta^2})^2] + 2 (q_z\sigma)^2 (v_{гр} - v_\phi)^2 \overline{(\Delta\kappa)^2}. \quad (47b)$$

Таким образом, расширения спектра  $S(\omega)$ , связанные с пространственной дисперсией  $(\Delta\omega)_v^2$  и с конечностью ширины  $\Delta\theta$  углового спектра поверхностных волн  $(\Delta\omega)_\theta^2$ , дают аддитивный вклад в полную ширину  $(\Delta\omega)^2$ :  $(\Delta\omega)^2 = (\Delta\omega)_v^2 + (\Delta\omega)_\theta^2$ , в чем легко убедиться, сравнивая (47) с (46) и (41). То же самое, очевидно, относится и к смещению центральной частоты относительно доплеровской линии  $\omega = q_x v_\phi$ .

7. До сих пор в этом параграфе мы изучали спектр волнового поля в зоне Фраунгофера, когда в точку наблюдения приходит плоская волна с волновым вектором  $\kappa$ .

Рассмотрим теперь более общий случай, когда рассеяние происходит на шероховатой площадке  $S_0$ , размеры которой могут быть сравнимыми с расстояниями  $R_1$  и  $R_2$  от источника и точки наблюдения до поверхности. При не слишком малых углах наклона, когда выполняются неравенства (24.25а, б)

$$kR\gamma_x^2 \gg 1; \quad kR \sin^2 \psi \gamma_y^2 \gg 1,$$

для временной корреляционной функции поля, рассеянного на такой поверхности, можно воспользоваться очевидным обобщением формулы (24.22):

$$\begin{aligned} \langle U^*(\mathbf{R}, t) U(\mathbf{R}, t + \tau) \rangle &= \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{(4\pi)^2} \int_{S_0} \frac{dr q^4}{R_1^2 R_2^2 q_z^2} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-iq\rho} f_2[q_z, -q_z; W(\rho, \tau)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Поэтому для энергетического (частотного) спектра поля в точке наблюдения  $\mathbf{R}$  получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_R(\omega) &= \\ &= \frac{1}{32\pi^3} \int_{S_0} \frac{dr q^4}{R_1^2 R_2^2 q_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{i[(\omega - \omega_0)\tau - q\rho]} f_2[q_z, -q_z; W(\rho, \tau)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Если теперь в (49) выделить спектр поля, которое приходит в точку наблюдения  $\mathbf{R}$  от ограниченного и достаточно малого участка рассеивающей поверхности  $dr$ , и ввести обозначение (4), то полный спектр  $\mathfrak{S}_R(\omega)$  можно записать в виде

$$\mathfrak{S}_R(\omega) = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} dr \mathfrak{S}_{k, \kappa}(\omega). \quad (50)$$

Таким образом,  $\mathfrak{S}_R(\omega)$  представляется в виде суммы спектров  $\mathfrak{S}_{k, \kappa}(\omega)$  плоских волн, приходящих в точку наблюдения от каждого элемента  $dr$  рассеивающей поверхности, который, с одной стороны, содержит много масштабов шероховатостей, а с другой, — достаточно мал для того, чтобы для спектра рассеянного на нем поля можно было пользоваться формулой (4). Так же как и в § 24 (при исследовании интенсивности флуктуаций поля), можно легко убедиться в том, что формула (4) и все результаты предыдущих пунктов относятся не только к зоне Фраунгофера, но и к более близким расстояниям  $R_{1,2}$  от источника и приемника до поверхности: достаточно, чтобы выполнялись неравенства [ср. (24.27)]

$$\frac{kL_x}{R} \rho_x \sin^2 \psi \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kL_y}{R} \rho_y \ll 1, \quad (51)$$

где  $L_{x,y}$  — характерные линейные размеры площадки, а  $\rho_{x,y} \simeq l_{x,y}$  при  $(q_z \sigma)^2 \ll 1$  и  $\rho_{x,y} \simeq l_{x,y}/q_z \sigma$  при  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$ .

Заметим, что (50) является обобщением формулы (24.31) для полной интенсивности флуктуаций в ближней зоне. Действительно, интегрируя (50) по  $d\omega$  и используя нормировку энергетического спектра на интенсивность (5), мы получаем (24.31). Физическая причина, по которой спектр полного поля в точке  $R$  представляется в виде суммы спектров парциальных плоских волн, та же, что и в § 24 (п. 4): поля, рассеянные на площадках  $dr$  — некогерентны.

Формула (50) имеет тот же вид, что и соответствующее ей в теории возмущений выражение (13.16). Единственное отличие состоит в том, что в теории возмущений парциальные плоские волны (из  $k$  в  $\kappa$ ) были монохроматическими [правда, каждая на своей частоте  $\mathcal{E}_{k,\kappa}(\omega) \sim \delta\{\omega - \omega_0 - \Omega|k - \kappa|\}$ ], здесь же они уже сами обладают широким спектром. Исключением являются двумерные волны, бегущие в одном направлении без пространственной дисперсии, когда  $\Omega = \kappa v$  и  $\mathcal{E}_{k,\kappa}(\omega) \sim \delta[\omega - \omega_0 - q_{\perp} v]$ . В этом частном случае результаты, полученные в § 13 методом возмущений, легко переносятся на поверхность с произвольными значениями параметра Рэлея. Действительно, так как при этом волны, приходящие в точку наблюдения  $R$ , монохроматичны, то величина интеграла (50) при каждом  $\omega$  определяется лишь относительной интенсивностью этих волн, т. е., в сущности, индикатрисой рассеяния. При рассеянии на неограниченной поверхности  $S_0$  с  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  вклад в рассеянное поле дают только те участки поверхности, для которых  $q_{\perp}^2 \lesssim q_z^2 \bar{\gamma}^2$ . Поэтому при  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  ширина спектра  $\mathcal{E}_R(\omega)$  равна по порядку величины

$$(\Delta\omega)^2 \simeq (\Delta q_{\perp} v)^2 \simeq (2k v_x \sin \psi)^2 \bar{\gamma}^2, \quad (52)$$

где  $\psi$  — характерные углы скольжения (например, угол скольжения в зеркальной точке, соответствующей отражению от плоскости).

Если же характерные угловые размеры рассеивающей площадки меньше, чем углы рассеяния, т. е.

$$\frac{L_x}{R} \gamma_x \sin \psi \lesssim 1 \quad \text{и} \quad \frac{L_y}{R \sin \psi} \gamma_y \lesssim 1,$$

то ширина спектра  $\mathcal{E}_R(\omega)$  вообще не зависит от статистических параметров поверхности, а определяется лишь величиной угла, под которым видна площадка. В частности, при рассеянии на двумерных неровностях ( $\gamma_y = 0$ ) для ширины спектра легко получить следующую оценку:

$$\Delta\omega \simeq |v_x \Delta q_x| \simeq k v_x (\Delta\psi \sin \psi + \Delta\chi \sin \chi).$$

Из рисунка 68 видно, что

$$\Delta\psi \simeq \frac{L}{R_1} \sin \psi, \quad \Delta\chi \simeq \frac{L}{R_2} \sin \chi,$$

так что

$$\Delta\omega \simeq kv_x \left( \frac{L}{R_1} \sin^2 \psi + \frac{L}{R_2} \sin^2 \chi \right).$$

В случае обратного рассеяния ( $R_1 = R_2 = R$  и  $\chi = \pi - \psi$ ) отсюда имеем

$$\Delta\omega \simeq 2 \frac{L}{R} kv_x \sin^2 \psi. \quad (53)$$

Из (52) и (53) видно, что чем меньше характерные углы скольжения, тем уже спектр рассеянного поля. Смещение же центральной частоты в спектре, наоборот, тем больше, чем меньше углы скольжения. Так, например, случаю (53) соответствует сдвиг центральной частоты на величину

$$\omega_m \simeq q_x v_x \simeq 2kv_x \cos \psi. \quad (54)$$

Совершенно очевидно, что хотя поверхность и движется в рассматриваемом случае ( $\Omega = \kappa v$ ) как целое со скоростью  $v$ , расширение спектра связано с тем, что доплеровский сдвиг от каждого малого участка определяется

проекцией  $v$  на  $q_{\perp}$ , т. е. углами рассеяния, а эти углы различны для различных точек  $r \in S_0$ .

В общем случае для вычисления интеграла (50) можно воспользоваться теми же преобразованиями, что и при оценках интенсивности флуктуаций поля в ближней зоне, которые были использованы в п. 4 § 24.

8. Рассмотрим, наконец, рассеяние на неограниченной поверхности с пологими неровностями ( $\gamma \rightarrow 0$ ), которые, однако, могут быть сколь угодно высокими. Зависимость потенциала рассеянного поля от времени в этом случае определяется формулой [ср. (25.1)]:

$$U(R, t) = \frac{q_2 e^{ik(R_{10} + R_{20}) - i\omega_0 t}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \frac{k}{R} (x^2 \sin^2 \psi + y^2) - iq_z \zeta(x, y, t) \right] dx dy. \quad (55)$$

Все обозначения здесь такие же, как и в § 25, а требования на пологость поверхности заключены в неравенствах (25.36, в). Вычисление временной корреляционной функции поля проводится совершенно так же, как и средней интенсивности в § 25, так что для медленного спектра  $S(\omega)$  получаем

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} f_2[q_z, -q_z; W(\tau)]. \quad (56)$$

При  $(q_z\sigma)^2 \ll 1$  отсюда следует

$$S(\omega) \approx (1 - q_z^2\sigma^2) \delta(\omega) + q_z^2\sigma^2 \tilde{W}(\omega) + o\{(q_z\sigma)^2\}. \quad (57a)$$

Таким образом, при малых значениях параметра Релея в отраженном поле, кроме монохроматического сигнала с частотой  $\omega_0$  ( $\omega = 0$ ), появляется непрерывный спектр, совпадающий со спектром колебаний поверхности, т. е. в этом случае изменения поверхности во времени без искажений повторяются в отраженном сигнале.

Для нормального распределения в обратном предельном случае  $(q_z\sigma)^2 \gg 1$  имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\{i\omega\tau - q_z^2\sigma^2 [1 - W(\tau)]\} \approx \\ &\approx \frac{\tau_0}{q_z\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2\tau_0^2}{2q_z^2\sigma^2}\right] + o\left\{\frac{1}{q_z\sigma}\right\}, \end{aligned} \quad (57b)$$

где введено характерное время колебаний поверхности  $\tau_0^{-2} \simeq W_{\tau}^{(2)}(0)$ . Отсюда видно, что ширина спектра отраженного поля в  $q_z\sigma$  раз больше, чем характерные частоты колебаний поверхности  $\tau_0^{-1}$ . Этого следует ожидать и из простых физических соображений. Действительно, при рассеянии на пологой поверхности флуктуации рассеянного поля связаны с движением в вертикальном направлении единственной точки зеркального отражения. Скорость  $v$  перемещения этой точки равна по порядку величины  $\sigma/\tau_0$ , так что характерный разброс доплеровских частот  $\Delta\omega \simeq q_z v \sim \frac{q_z\sigma}{\tau_0}$ , что согласуется с (57б). Можно сказать, что в рассматриваемом случае статистически неровная поверхность отражает падающее на нее поле как плоское зеркало, колеблющееся в направлении, перпендикулярном к своей плоскости, случайным образом с корреляционной функцией  $W(\tau)$  (см., например, [238]). В результате возникает фазовая модуляция поля по закону  $\varphi(t) \sim \zeta(t)$ , и при увеличении глубины модуляции (параметра Рэлея) энергетический спектр поля расширяется. Приведенные в этом пункте результаты были впервые получены в работе [229]. В более общей постановке (пространственно-временные корреляционные функции и спектры)

эти вопросы рассматривались в работах [137], [139], [231], [346], к которым мы и отсылаем читателя.

9. В заключение отметим, что если поверхность облучается не монохроматической волной, а случайным волновым полем с широким спектром  $S_0(\omega)$ , то спектр рассеянного поля  $S(\omega)$  может отличаться от  $S_0(\omega)$ , даже если поверхность неподвижна. Причина этого, на первый взгляд неожиданного, обстоятельства заключается в том, что отражение каждой монохроматической гармоники [из тех, которые образуют спектр  $S_0(\omega)$ ] зависит от ее длины волны  $\lambda$  и, следовательно, от частоты  $\omega$ . Из-за того, что распределение интенсивности рассеянного поля по направлениям (индикатриса рассеяния) зависит от длины волны, в отраженном поле происходит перераспределение энергии между волнами с различными  $\omega$ , т. е. изменяется спектральный состав поля. Изменение спектра за счет различия индикатрис рассеяния на разных частотах изучалось в работах [239], [240].



## РАССЕЯНИЕ НА ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В предыдущих главах исследовалось волновое поле, рассеянное на крупномасштабной (радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны) статистически неровной, но в среднем плоской поверхности  $z = \zeta(x, y)$  такой, что  $\bar{\zeta}(x, y) = 0$ . Перейдем теперь к изучению более общего случая, когда средняя поверхность не является плоскостью, а представляет собой криволинейную поверхность, ограничивающую тело конечных размеров.

**§ 28. Отражение и преломление на криволинейной поверхности**

В этом параграфе мы получим в приближении лучевой оптики формулы для амплитуды и параметров кривизны фазовой поверхности волны, отраженной (или преломленной) на криволинейной достаточно гладкой поверхности раздела двух сред.

При нахождении коротковолновых асимптотик задач дифракции с помощью метода, предложенного Келлером с сотрудниками [241], первым этапом является решение уравнения эйконала и определение кривизны фронтов отраженных (и преломленных) волн, т. е. решение задачи в приближении лучевой оптики. Если фронт первичной волны и отражающее тело имеют простую форму (плоскость, цилиндр, шар и т. д.), то решение этой задачи не представляет особой трудности. После этого нахождение следующих членов асимптотического разложения (поправок к полю лучевого приближения за счет поперечной, по отношению к лучам, диффузии) сводится к вычислению некоторых интегралов вдоль лучей от кривизны волновой поверхности (см. [241]). Для более сложных объектов решение даже лучевой задачи становится нетривиальным. Общие результаты, полученные в этом направлении Фоком [198], для отражения волны произвольной формы от поверхности выпуклого тела тоже произвольной формы (частные случаи изучались ранее Фоком [197] и Келлером [242]) в каждом конкретном случае приводят к громоздким и довольно сложным вычислениям детерминантов, элементами которых являются вторые ковариантные производные фазы падающей волны по криволинейным координатам на отражающей поверхности. Поэтому мы будем придерживаться инвариантной формы записи (см. работы [195], [196]), что позволяет

применить полученные в этом параграфе результаты для отражения от случайной поверхности.

1. Если характерные радиусы кривизны поверхности  $S$  достаточно велики по сравнению с длиной волны излучения, то для решения задачи дифракции можно использовать приближение касательной плоскости (метод Кирхгофа). Как и в § 19 гл. VII, допол-

ним освещенную часть поверхности  $S$  до замкнутой поверхности  $(S + S' + C_{R'})$ , внутри которой находятся все источники поля  $O$  и точка наблюдения  $R$  (рис. 69). Тогда для отраженного поля можно сразу воспользоваться формулой (19.8):

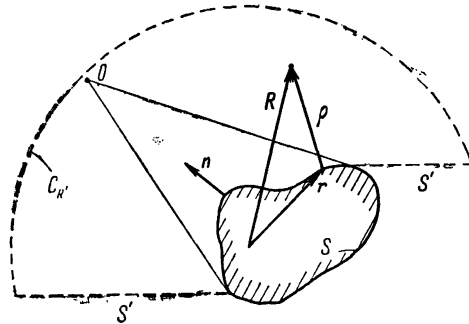


Рис. 69.

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_S V(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \times \left\{ \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} U_0(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Поле источников в свободном пространстве запишем в форме

$$U_0(\mathbf{R}) = A_0(\mathbf{R}) e^{ik\Psi_0(\mathbf{R})}.$$

Если характерные радиусы кривизны эквифазной поверхности  $\Psi_0(\mathbf{R}) = \text{const}$  вблизи поверхности  $S$  также велики по сравнению с длиной волны, и точка наблюдения  $\mathbf{R}$  находится в волновой зоне по отношению к поверхности  $S$  ( $k|\mathbf{R}-\mathbf{r}| \gg 1$ ), то (1) принимает вид

$$U(\mathbf{R}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \frac{e^{ik\rho}}{\rho} V(\mathbf{r}) \times (\mathbf{n}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0) U_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где  $\rho = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ , а  $\mathbf{v}_0 = \nabla\Psi(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{v} = \rho/\rho$  — единичные векторы нормалей к фазовым фронтам падающей  $S_0$  и отраженной  $S_1$  волны (рис. 70).

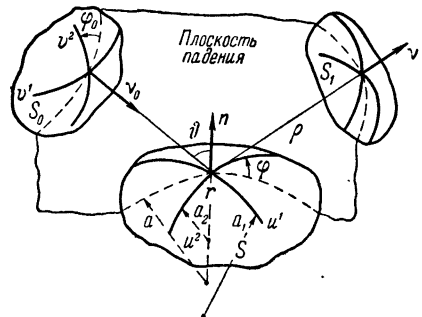


Рис. 70.

Введем на поверхности  $S$  криволинейные координаты  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) с началом в точке стационарной фазы интеграла (2), которая находится из условий:

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} [\rho + \Psi_0(\mathbf{r})] = 0. \quad (3)$$

Тем самым мы предполагаем, что решение уравнения (3) существует и единственно. Это соответствует наличию только одной точки зеркального отражения. Имея в виду получение результатов в инвариантной форме, не зависящей от свойств координатной сетки  $u^{\alpha}$ , будем считать  $u^{\alpha}$  геодезическими в начале координат, что значительно упростит выкладки. Вынося медленно меняющиеся предэкспоненциальные множители за знак интеграла и и раскладывая показатель экспоненты в ряд с точностью до квадратичных членов, получим

$$U(R) = -\frac{ik}{2\pi} V(\vartheta) \cos \vartheta \frac{e^{ik\rho}}{\rho} U_0(r) \times \\ \times \int_S \exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{\partial^2 (\rho + \Psi_0)}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} u^{\alpha} u^{\beta} \right\} \sqrt{g} du^{\alpha} du^{\beta}. \quad (4)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол падения в точке зеркального отражения  $r$  ( $\cos \vartheta = -\mathbf{nv} = -\mathbf{nv}_0$ ), а элемент площади криволинейной поверхности  $dS = \sqrt{g} du^{\alpha} du^{\beta}$ , где  $g = \det g_{\alpha\beta}$  ( $g_{\alpha\beta}$  — метрический тензор, или первая квадратичная форма поверхности). После этого интегрирование в (4) легко выполняется:

$$U(R) = V(\vartheta) \cos \vartheta \sqrt{\frac{g}{C}} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} U_0(r), \quad (5) \\ C = \det C_{\alpha\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} (\rho + \Psi_0),$$

где все величины относятся к точке зеркального отражения. Вычисление определителя  $C$  (см. [195]) приводит к следующему результату:

$$U(R) = \frac{V(\vartheta) e^{ik\rho}}{\sqrt{\mathcal{K}_1 \rho^2 - 2\mathcal{K}_1 \rho + 1}} U_0(r); \quad (6)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0 + 4\mathcal{K} + 2 \cos \vartheta \kappa_0 (2\mathcal{K} - \kappa) + \frac{2}{\cos \vartheta} \kappa (2\mathcal{K}_0 - \kappa_0) + \\ + 2 \operatorname{sgn} \varphi \operatorname{sgn} \varphi_0 \sqrt{(2\mathcal{K} \kappa - \kappa^2 - \mathcal{K})(2\mathcal{K}_0 \kappa_0 - \kappa_0^2 - \mathcal{K}_0)}; \quad (7a)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0 + 2\mathcal{K} \cos \vartheta + \kappa \sin \vartheta \operatorname{tg} \vartheta. \quad (7b)$$

Здесь введены следующие обозначения (см. рис. 70):  $\mathcal{K} = \frac{1}{a_1 a_2}$  — гауссова (полная) кривизна отражающей поверхности,  $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$  — средняя кривизна,  $\kappa = 1/a$  кривизна нормального сечения поверхности плоскостью падения,  $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$  — угол между плоскостью падения и направлением на поверхности с наибольшей кривизной, знак определяется по правилу винта относительно нормали  $\mathbf{n}$ ;  $\mathcal{K}_0$ ,  $\mathcal{K}_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $\varphi_0$  и  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_1$ ,  $\kappa_1$ ,  $\varphi_1$  — то же для поверхности волнового фронта падающей ( $S_0$ ) и отраженной ( $S_1$ )

волн соответственно, причем  $\operatorname{sgn} \varphi_0$  и  $\operatorname{sgn} \varphi$  определяются по тому же правилу относительно нормалей к волновым поверхностям  $\mathbf{v}_0 = \nabla \Psi_0$  и  $\mathbf{v}$ .

2. С другой стороны, пользуясь законами лучевой оптики (см. [241], [242]), поле в точке  $R$  можно выразить через значение поля и главные радиусы кривизны  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  волнового фронта отраженной волны в соответствующей точке зеркального отражения  $r$ :

$$U(R) = U(r) e^{ik\rho} \left[ \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{(\rho - \mathcal{R}_1)(\rho - \mathcal{R}_2)} \right]^{1/2} = \\ = U(r) e^{ik\rho} \left[ \frac{\rho^2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} - \left( \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right) \rho + 1 \right]^{-1/2}. \quad (8)$$

Радиусы кривизны  $\mathcal{R}_{1,2}$  положительны, если центр кривизны находится в том полупространстве, куда направлена нормаль  $\mathbf{v}$  к волновой поверхности отраженной волны, и отрицательны в противном случае. Сравнивая (6) и (8), приходим к выводу, что  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  — полная и средняя кривизна поверхности фронта отраженной волны в точке  $r$ . Это подтверждается и непосредственным вычислением дифференциальных характеристик волновой поверхности отраженной волны в точке зеркального отражения (см. [195]).

Если хотя бы один из главных радиусов кривизны (например,  $\mathcal{R}_1$ ) положителен, то подкоренное выражение в (8) меняет знак при переходе через каустическую точку  $\rho = \mathcal{R}_1$  и, следовательно, в фазе волны при  $\rho > \mathcal{R}_1$  появляется дополнительное слагаемое  $-i\pi/2$ . Это согласуется со строгим рассмотрением поведения фазы вблизи каустики (см., например, Ландау и Лифшиц [138], § 59).

Выделяя в формуле (6) амплитуду и фазу отраженной волны, запишем ее в виде

$$U(R) = \frac{A_0(r) V(\vartheta)}{|\mathcal{K}_{1\rho} \rho^2 - 2\mathcal{K}_{1\rho} \rho + 1|^{1/2}} \exp \left\{ i \left[ k(\rho + \Psi_0) - \frac{\pi}{2} \sigma \right] \right\}; \quad (9)$$

$\sigma$  — сигнатура квадратичной формы под корнем — равна числу положительных корней  $\rho_{1,2}$  уравнения

$$\mathcal{K}_{1\rho} \rho^2 - 2\mathcal{K}_{1\rho} \rho + 1 = 0, \quad (10)$$

лежащих в интервале от 0 до  $\rho$ . Совокупность решений этого уравнения определяет в параметрической форме

$$\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(r) = \frac{\mathcal{K}_1(r) \pm \sqrt{\mathcal{K}_1^2(r) - \mathcal{K}_1(r)}}{\mathcal{K}_1(r)} \quad (11)$$

две каустические поверхности отраженной волны: положительным корням соответствуют реальные каустики, отрицательным — мнимые.

При отражении электромагнитного поля от гладкой поверхности раздела двух сред легко получить тем же путем формулы, аналогичные (6):

$$E_i(\mathbf{R}) = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\mathcal{K}_1\rho^2 - 2\mathcal{K}_1\rho + 1}} T_{ik}^{(e)}(\vartheta) E_k^{\downarrow}(r), \quad (12a)$$

$$H_i(\mathbf{R}) = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\mathcal{K}_1\rho^2 - 2\mathcal{K}_1\rho + 1}} T_{ik}^{(h)}(\vartheta) H_k^{\downarrow}(r), \quad (12б)$$

где  $E_k^{\downarrow}$ ,  $H_k^{\downarrow}$  — компоненты падающего поля,  $E_i$  и  $H_i$  — отраженного, а тензорные коэффициенты отражения  $T_{ik}^{(e, h)}$  определяются по формулам (2.26) и (2.29), или (2.32) — при отражении от идеально проводящей поверхности.

3. Рассмотрим теперь преломление волны  $U_0(\mathbf{R}) = A_0(\mathbf{R}) e^{ik\Psi_0(\mathbf{R})}$  на границе раздела  $S$  двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  соответственно. Значение поля в точке  $\mathbf{R}$ , находящейся во второй среде, можно определить по формуле, полностью аналогичной выражению (2):

$$\tilde{U}(\mathbf{R}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \frac{(n, n\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})}{\rho} W(r) e^{ikn\rho} U_0(r) dr. \quad (13)$$

Здесь  $n = n_2/n_1$  — относительный показатель преломления,  $W(r)$  — коэффициент прохождения во вторую среду (1.36). Раскладывая показатель экспоненты в ряд вблизи точки стационарной фазы, которая определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\Psi_0 + n\rho) = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (14)$$

получим

$$\tilde{U}(\mathbf{R}) = \frac{n \cos \beta}{\rho} \sqrt{\frac{g}{\tilde{c}}} W(\beta) e^{ikn\rho} U_0(r), \quad (15)$$

где

$$\tilde{c} = \det \tilde{c}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{c}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} (n\rho + \Psi_0),$$

и через  $\beta$  обозначен угол преломления:  $\cos \beta = -n\nu$ .

Используя обозначения, введенные в работе [195] при вычислении  $\tilde{c}_{\alpha\beta}$ , выразим  $\tilde{c}_{\alpha\beta}$  через дифференциальные формы поверхности и волнового фронта падающей волны:

$$\tilde{c}_{\alpha\beta} = (n \cos \beta - \cos \vartheta) b_{\alpha\beta} + \frac{n}{\rho} (g_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \lambda_\beta \sin^2 \beta) - g_0^{\nu\sigma} b_{\sigma\epsilon}^0 \frac{\partial x^k}{\partial v^\nu} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}. \quad (16)$$

При этом мы воспользовались соотношением, вытекающим из (12):

$$n\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{n} (\cos \vartheta - n \cos \beta).$$

Вычисление определителя  $\tilde{C}_{\alpha\beta}$  по формуле

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} g e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} \tilde{C}_{\alpha\beta} \tilde{C}_{\gamma\delta}$$

приводит к сверткам, которые были вычислены в [195]. Используя формулы (П.6а) — (П.6з) из работы [195], получаем

$$\tilde{U}(\mathbf{R}) = \frac{W(\beta) e^{ikn\rho}}{\sqrt{\tilde{\mathcal{K}}_1 \rho^2 - 2\tilde{\mathcal{K}}_1 \rho + 1}} U_0(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  — гауссова и  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  — средняя кривизна волнового фронта преломленной волны на поверхности  $S$  в точке преломления  $\mathbf{r}$  ( $\rho = 0$ ), которые связаны с соответствующими параметрами кривизны поверхности  $S$  и фронта падающей волны  $S_0$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_1 = & \frac{1}{n^2 \cos^2 \beta} \{ (n \cos \beta - \cos \vartheta)^2 \mathcal{K} + \cos^2 \vartheta \mathcal{K}_0 + \\ & + (\cos \vartheta - n \cos \beta) [\cos^2 \vartheta \kappa_0 (2\mathcal{K} - \kappa) + \kappa (2\mathcal{K}_0 - \kappa_0) + \\ & + 2 \cos \vartheta \operatorname{sgn} \varphi \operatorname{sgn} \varphi_0 \sqrt{(2\mathcal{K} \kappa - \kappa^2 - \mathcal{K}) (2\mathcal{K}_0 \kappa_0 - \kappa_0^2 - \mathcal{K}_0)}] \} \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_1 = & - \frac{1}{2n \cos^2 \beta} \{ (n \cos \beta - \cos \vartheta) [2\mathcal{K} \cos^2 \beta + \kappa \sin^2 \beta] - \\ & - 2\mathcal{K}_0 \cos^2 \beta + \kappa_0 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \beta) \}. \end{aligned} \quad (18б)$$

Остальные дифференциальные характеристики поверхности фронта преломленной волны ( $\tilde{\kappa}_1$  и  $\operatorname{sgn} \tilde{\varphi}_1$ ) могут быть найдены тем же путем, что и для отраженной волны, если исходить из параметрического представления волновой поверхности во второй среде:

$$X^i = x^i + \frac{1}{n} (X - \Psi_0) \tilde{v}^i, \quad X^i \in \tilde{S}_1, \quad x^i \in S,$$

$X = \text{const}$  — эквифазная поверхность.

Вычисления, в принципе не отличающиеся от приведенных в [195], дают (при  $\rho = 0$ )

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{\cos^2 \vartheta}{n \cos^2 \beta} \kappa_0 + \frac{\cos \vartheta - n \cos \beta}{n \cos^2 \beta} \kappa, \quad (18в)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \tilde{\varphi}_1 \sqrt{2\tilde{\mathcal{K}}_1 \kappa_1 - \tilde{\kappa}_1^2 - \tilde{\mathcal{K}}_1^2} = \\ = \frac{\cos \vartheta - n \cos \beta}{n \cos \beta} \operatorname{sgn} \varphi \sqrt{2\mathcal{K} \kappa - \kappa^2 - \mathcal{K}} - \\ - \frac{\cos \vartheta}{n \cos \beta} \operatorname{sgn} \varphi_0 \sqrt{2\mathcal{K}_0 \kappa_0 - \kappa_0^2 - \mathcal{K}_0}. \end{aligned} \quad (18г)$$

Значение параметров  $\tilde{\mathcal{K}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}'_1$  и  $\tilde{\kappa}_1$  в точке  $R$ , находящейся на произвольном расстоянии  $\rho$  от соответствующей ей точки преломления  $r$ , связаны с их значением при  $\rho=0$  [(формулы (18а)—(18г)] теми же соотношениями, что и в отраженной волне (см. (П.19) в [195]).

Таким образом, мы имеем полное описание дифференциальных свойств поверхности фронта преломленной волны.

Заметим, что формулы (13)—(18) при  $p \rightarrow 1$  и  $\cos \beta \rightarrow -\cos \vartheta$  переходят \*) в соответствующие формулы предыдущего пункта. Остаются в силе (при соответствующих переобозначениях) и все приведенные там замечания, относящиеся к каустикам.

В случае преломления электромагнитных волн векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  преломленного поля связаны с напряженностью  $E_0$ ,  $H_0$  падающего поля на поверхности  $S$  соотношениями типа (12а, б) (при очевидных переобозначениях  $\tilde{\mathcal{K}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}'_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}'_1$ ), причем тензоры  $\tilde{T}_{ik}$  имеют вид (2.27), (2.29).

4. Таким образом, решение задачи об отражении (преломлении) волны произвольной формы на криволинейной границе сводится, во-первых, к отысканию точки отражения (преломления) путем решения уравнений (3) или (14), и, во-вторых, к вычислению параметров кривизны фронта падающей волны ( $\tilde{\mathcal{K}}_0$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}'_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $\text{sgn } \varphi_0$ ) и отражающей (преломляющей) поверхности ( $\tilde{\mathcal{K}}$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}'$ ,  $\kappa$ ,  $\text{sgn } \varphi$ ) в найденной точке отражения (преломления).

После этого значение отраженного (преломленного) поля в любой точке  $R$ , отстоящей на расстоянии  $\rho$  от соответствующей ей экстремальной точки, определяется выражением (6) или (17) в акустическом случае и формулами типа (12а, б)—в электромагнитном.

В тех случаях, когда существует несколько точек отражения (преломления), т. е. уравнения (3) и (14) имеют счетное множество решений, полное поле представляется в виде суммы вкладов от каждой точки отражения (преломления).

Полученные результаты перестают быть справедливыми при приближении к границе геометрической тени, когда невозможно представление поля в виде суммы падающей и отраженной волны, и внутри нее, где уравнения (3) и (14) не имеют решений. Кроме того, мы предполагали, что уравнения (3) и (14) не имеют бесконечного континуального множества решений, а определители  $C$  и  $\tilde{C}$  не обращаются в нуль. В противном случае, как следует из работы Повзнера и Сухаревского [207], точка наблюдения  $R$  находится на каустике отраженной (преломленной) волны, и приближение геометрической оптики заведомо неприменимо.

\*) Формула (18г) не составляет исключения, если предварительно заменить в знаменателях  $\cos \beta \rightarrow |\cos \beta|$ .

### § 29. Сечение рассеяния на гладком теле

1. Если источники волнового поля расположены достаточно далеко от рассеивающей поверхности, то поле, облучающее поверхность, является плоской волной  $U_0(\mathbf{r}) = A_0 e^{ik\nu_0 \mathbf{r}}$ , так что  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}'_0 = \kappa_0 = 0$  и из общей формулы (28.6) получаем для отраженного поля (см. [197]):

$$U(\mathbf{R}) = \{4\mathcal{K}\rho^2 - 2\rho \cos \vartheta [2\mathcal{K}' + \kappa \operatorname{tg}^2 \vartheta] + 1\}^{-1/2} e^{ik\rho} U_0(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Точечный источник, находящийся на конечном расстоянии, создает сферическую волну  $U_0(\mathbf{r}) = e^{ik\rho_0}/\rho_0$ , для которой  $\mathcal{K}'_0 = \rho_0^{-2}$ ,  $\mathcal{K}_0 = \kappa_0 = -\rho_0^{-1}$  ( $\rho_0$  — расстояние от источника до зеркальной точки на поверхности отражающего тела), и вместо (1) получаем из (28.6) в этом случае (см. [199])

$$U(\mathbf{R}) = \{\mathcal{K}R^2 - R \cos \vartheta (2\mathcal{K}' + \kappa \operatorname{tg}^2 \vartheta) + 1\}^{-1/2} \frac{e^{ik(\rho + \rho_0)}}{\rho + \rho_0}, \quad (2)$$

где приведенное расстояние  $R$  определяется по формуле  $R = 2\rho\rho_0/(\rho_0 + \rho)$ . При  $\mathcal{K} = a^{-2}$ ,  $\mathcal{K}' = \kappa = -1/a$  последнее выражение переходит в формулу Фока для отражения сферической волны от поверхности шара радиуса  $a$  (см. [198])

$$U(\mathbf{R}) = \left[ \frac{R^2}{a^2} + \frac{R}{a} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\cos \vartheta} + 1 \right]^{-1/2} \frac{e^{ik(\rho + \rho_0)}}{\rho + \rho_0}. \quad (3)$$

При отражении от кругового цилиндра радиуса  $a$  ( $\mathcal{K} = 0$ ;  $\mathcal{K}' = -1/a$ ) из (2) получаем

$$U(\mathbf{R}) = \left[ \frac{R}{a} \cos \vartheta (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin^2 \varphi) + 1 \right]^{-1/2} \frac{e^{ik(\rho + \rho_0)}}{\rho + \rho_0}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  — угол, который образует плоскость падения с осью цилиндра (мы воспользовались формулой  $\kappa = -\frac{\sin^2 \varphi}{a}$  для кривизны нормального сечения поверхности цилиндра плоскостью падения).

2. Перечисленные примеры (1) — (4), в сущности, исчерпывают все те частные случаи, когда общая формула (28.6) принимает сравнительно простой вид. Однако при определении эффективного сечения рассеяния как источник, так и точка, где исследуется волновое поле, находятся, как правило, на значительных расстояниях от рассеивающего объекта. Если эти расстояния настолько велики, что кривизны волновых фронтов  $S_0$  и  $S_1$  можно считать пренебрежимо малыми по сравнению с кривизной отражающей поверхности  $S$ , то из (28.6) следует важная формула:

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{K}}} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\rho} U_0(\mathbf{r}). \quad (5)$$



Здесь по-прежнему все величины относятся к точке зеркального отражения. Для дифференциального эффективного сечения рассеяния \*) отсюда следует:

$$\mathfrak{S} \equiv \frac{|U(R)|^2 \rho^2}{|U_0(r)|^2} = \frac{1}{4\mathcal{K}^2} = \frac{a_1 a_2}{4}, \quad (6)$$

где  $a_1, a_2$  — главные радиусы кривизны поверхности в точке зеркального отражения. Таким образом, сечение рассеяния от гладкого тела полностью определяется гауссовой кривизной отражающей поверхности в зеркальной точке. В частности, сечение рассеяния на шаре радиуса  $a$  равно:

$$\mathfrak{S} = \frac{a^2}{4}$$

и, следовательно, полное сечение рассеяния равно площади диаметрального сечения:

$$\mathfrak{S}_{\text{полн}} = \oint \mathfrak{S} d\Omega = \pi a^2.$$

Если один из главных радиусов кривизны ( $a_1$  или  $a_2$ ) обращается в бесконечность в зеркальной точке, то вместо формулы (6) получаем [ср. с (4)]:

$$\mathfrak{S} = \frac{aR}{4 \cos \vartheta (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin^2 \varphi)}, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью падения и тем направлением на поверхности, кривизна которого равна нулю. Сечение обратного рассеяния ( $\rho_0 = \rho$ ,  $\vartheta = 0$ ) при этом равно

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{a\rho_0}{4}. \quad (8)$$

Таким образом, при увеличении расстояния до рассеивающего тела увеличивается и его поперечник рассеяния. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае мы имеем дело, по сути, с рассеянием на цилиндрической поверхности и, следовательно, вместо зеркальной точки на поверхности возникает зеркальная линия вдоль образующей цилиндра, эффективная длина которой растет по мере увеличения приведенного расстояния.

Разумеется, что формулы (7), (8) относятся только к тому случаю, когда длина цилиндрической поверхности (вдоль образующей) значительно больше, чем размер зоны Френеля ( $\approx \sqrt{\lambda R}$ ) в том же направлении. Заметим, кстати, что размер зоны Френеля в поперечном направлении при  $R \gg a$  определяется не расстоянием до источника и точки наблюдения (как это имеет место при отражении от плоскости), а кривизной поверхности в зеркальной точке, и равен по порядку величины  $\sqrt{\lambda a}$ . В обратном

\*) См. подстрочное примечание на стр. 96.

предельном случае фраунгоферовой дифракции, когда длина цилиндра  $L$  достаточно мала ( $kL^2/R \ll 1$ ), для сечения рассеяния из (28.4) легко получить вместо (8) следующую формулу:

$$\mathcal{C}_0 = \frac{L^2 ka}{4\pi}, \quad (9)$$

которая отличается от (8) лишь тем, что вместо размера зоны Френеля  $\sqrt{\frac{\lambda R}{2}}$  входит длина цилиндра  $L$ .

3. Перейдем теперь к исследованию флуктуаций сечения рассеяния в том случае, когда поверхность  $\Sigma$ , ограничивающая тело,

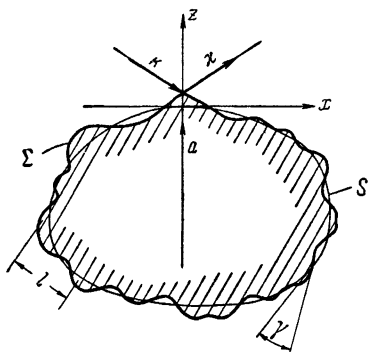


Рис. 71.

является стохастической. Рассмотрим сначала рассеяние на случайной цилиндрической поверхности. Обозначим через  $S$  поверхность невозмущенного цилиндра (не обязательно кругового) и введем декартову систему координат в точке зеркального отражения от поверхности  $S$  (рис. 71): ось  $z$  направим по нормали к невозмущенной поверхности, а ось  $y$  — вдоль образующей цилиндра. Если при отражении от невозмущенной поверхности  $S$  возникает только одна точка (линия) зеркального отражения, то при не очень сильных

деформациях этой поверхности дополнительные зеркальные точки не появляются. Несложно получить условие, при котором это требование удовлетворится:

$$a\gamma \ll l. \quad (10)$$

Здесь  $\gamma$  — характерные тангенсы углов наклона поверхности  $\Sigma$  относительно  $S$ , а  $l$  — радиус корреляции — характерная длина одной неровности. При выполнении этого неравенства изменяется только положение зеркальной точки и кривизна отражающей поверхности в ней, а новые зеркальные точки не возникают. В этом легко убедиться с помощью простых геометрических построений. Запишем уравнение поверхности  $\Sigma$  в указанной системе координат:

$$z(x) = Z(x) + \zeta(x),$$

где  $z = Z(x)$  является уравнением невозмущенной поверхности  $S$  и  $\bar{\zeta} = 0$ , так что  $\bar{\Sigma} = S$ . Для определения сечения рассеяния от каждой реализации случайной поверхности  $\Sigma$  по формулам (7), (8) необходимо вычислить радиус кривизны в точке зеркального

отражения. Радиус кривизны связан с производными от  $z(x)$  соотношением

$$a_{\Sigma} = \frac{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}{d^2z/dx^2}. \quad (11)$$

Учитывая, что в точке зеркального отражения поверхность имеет наклон

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{k_x - \kappa_x}{k_z - \kappa_z}, \quad (12)$$

из (11) получаем

$$a_{\Sigma} \simeq a [1 - a\zeta''(x)], \quad \zeta''(x) = \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \quad (13)$$

где через  $a = [Z''(x)]^{-1}$  обозначен радиус кривизны средней поверхности  $S$ .

Таким образом, дисперсия относительных флуктуаций сечения рассеяния оказывается связанной с флуктуациями кривизны поверхности в зеркальной точке соотношением

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = \frac{\overline{\mathcal{C}^2} - (\overline{\mathcal{C}})^2}{(\overline{\mathcal{C}})^2} = \frac{(\overline{a_{\Sigma} - a})^2}{a^2} = a^2 (\overline{\zeta''})^2. \quad (14)$$

С другой стороны, дисперсия вторых производных случайной функции  $z = \zeta(x)$  может быть определена через производную четвертого порядка от функции корреляции:  $(\overline{\zeta''})^2 = \sigma^2 W^{(4)}(0)$ . Для гауссовой корреляционной функции  $W(x) = \exp \{ -x^2/l^2 \}$  из (14) получаем

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = \frac{12a^2\sigma^2}{l^4} = 6 \frac{a^2 \overline{\gamma}^2}{l^2}, \quad (15)$$

где  $\overline{\gamma}^2 = 2 \frac{\sigma^2}{l^2}$  — среднеквадратичный наклон шероховатостей относительно невозмущенной поверхности. Заметим, что  $l/\gamma \simeq l^2/\sigma$  является характерным радиусом кривизны случайной поверхности  $z = \zeta(x)$ , т. е. флуктуации сечения рассеяния определяются малостью кривизны возмущений по сравнению с кривизной средней поверхности — именно этот смысл имеет неравенство (10), при котором можно пренебречь вероятностью появления дополнительных зеркальных точек.

4. В общем случае трехмерной рассеивающей поверхности, когда полная кривизна в зеркальной точке не обращается в нуль, для дисперсии относительных флуктуаций сечения рассеяния из (6) получаем

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = \frac{(\overline{\delta \mathcal{K}})^2}{(\overline{\mathcal{K}})^2} = \frac{(a_1 \delta a_2 + a_2 \delta a_1)^2}{a_1^2 a_2^2}. \quad (16)$$

Если оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат направить по экстремальным сечениям поверхности в зеркальной точке, и записать уравнение поверхности  $\Sigma$  в этой системе координат в виде

$$z(x, y) = Z(x, y) + \zeta(x, y),$$

то, по аналогии с (14), будем иметь

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = a_1^2 \overline{(\zeta'_x)^2} + 2a_1 a_2 \overline{\zeta'_x \zeta'_y} + a_2^2 \overline{(\zeta'_y)^2}. \quad (17)$$

Когда форма неровностей зависит лишь от одной координаты, флуктуации сечения рассеяния имеют в точности тот же вид (14), что и при отражении от цилиндрической поверхности. В другом предельном случае изотропных шероховатостей, когда

$$\overline{(\zeta'_x)^2} = \overline{(\zeta'_y)^2} = \overline{(\zeta'')^2},$$

из (17) получаем следующую формулу:

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = 4 \frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}^2} \overline{(\zeta'')^2} - \frac{2}{\mathcal{K}} \left\{ \overline{(\zeta'')^2} - \overline{\zeta'_x \zeta'_y} \right\}, \quad (18)$$

где  $\mathcal{K} = \frac{1}{2} (1/a_1 + 1/a_2)$  — средняя кривизна невозмущенной поверхности  $S$  в зеркальной точке. Для гауссовой корреляционной функции

$$\overline{\zeta(x + \xi, y + \eta) \zeta(x, y)} = \sigma^2 e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}}$$

дисперсии вторых производных связаны со среднеквадратичной высотой  $\sigma$  и радиусом корреляции  $l$  соотношениями

$$\overline{(\zeta'_x)^2} = \overline{(\zeta'_y)^2} = 12 \frac{\sigma^2}{l^4}, \quad \overline{\zeta'_x \zeta'_y} = 4 \frac{\sigma^2}{l^4}, \quad (19)$$

так что формула (18) принимает вид

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = 16 \frac{3\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}}{\mathcal{K}^2} \frac{\sigma^2}{l^4}. \quad (20)$$

В частности, дисперсия сечения обратного рассеяния от шара радиуса  $a$ , покрытого изотропными шероховатостями, равна

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = 32 \frac{a^2 \sigma^2}{l^4} = 16 \frac{a^2 \bar{\gamma}^2}{l^2}, \quad (21)$$

где  $\bar{\gamma}^2 = \frac{2\sigma^2}{l^2}$  — среднеквадратичный наклон неровностей относительно поверхности гладкой сферы.

### § 30. Отражение от шероховатого тела

Рассмотрим теперь рассеяние на статистически шероховатой и в среднем не плоской поверхности  $\Sigma$ , при отражении от которой появляется, вообще говоря, много зеркальных точек. Нормальные отклонения случайной поверхности от невозмущенной

(гладкой) поверхности  $S$  будем описывать случайной функцией  $\zeta(\mathbf{r}_s)$  (рис. 72):

$$\mathbf{r}_\Sigma = \mathbf{r}_s + N \zeta(\mathbf{r}_s), \quad \mathbf{r}_\Sigma \in \Sigma, \quad \mathbf{r}_s \in S,$$

$N$  — внешняя нормаль к средней поверхности  $S$  (нормаль к случайной поверхности  $\Sigma$  в дальнейшем обозначается через  $\mathbf{n}$ ). Если

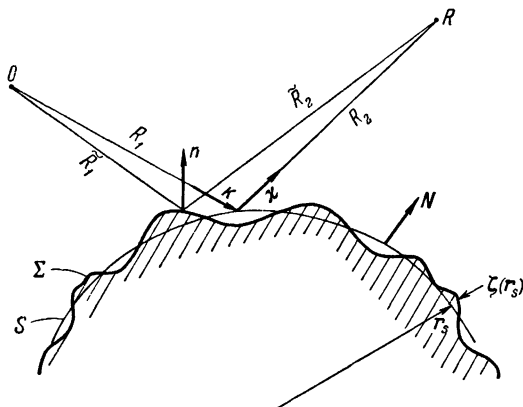


Рис. 72.

характерные радиусы кривизны  $\Sigma$  велики по сравнению с длиной волны, то приближение касательной плоскости приводит к следующему представлению потенциала рассеянного поля в случае точечного источника [ср. (19. 9)]:

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} V(\mathbf{r}_{\Sigma}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{ik(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)}}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \right\} d\Sigma. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$  — расстояния от точки  $\mathbf{r}_{\Sigma}$  поверхности  $\Sigma$  до источника и точки наблюдения соответственно (рис. 72).

При выполнении неравенств

$$k\tilde{R}_{1,2} \gg 1, \quad \frac{k\tilde{z}^2}{\tilde{R}_{1,2}} \ll 1 \quad (2)$$

эта формула может быть преобразована к виду (ср. (19. 13))

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi i} \int_S \frac{(nq)}{(nN)R_1 R_2} e^{i[k(R_1 + R_2) - (Nq)\zeta(\mathbf{r}_s)]} dS, \quad (3)$$

где  $R_1, R_2$  — расстояния до средней поверхности  $S$ , ограничивающей «гладкое тело», вектор  $\mathbf{q}$ , как обычно, введен соотношением  $\mathbf{q} = -k\nabla_s(R_1 + R_2) = \mathbf{x} - \mathbf{k}$  и от интегрирования по

поверхности  $\Sigma$  мы перешли к интегрированию по гладкой поверхности  $S$  с помощью очевидного соотношения:

$$dS = (nN) d\Sigma. \quad (4)$$

Кроме того, мы здесь и в дальнейшем опускаем «локальный» коэффициент отражения  $V$ , что совершенно не существенно, так как в окончательные формулы он входит только в виде общего множителя.

Если источник и точка наблюдения находятся в зоне Фраунгофера относительно поверхности  $S$ , т. е. при выполнении неравенства более сильного, чем (2),

$$\frac{ka^2}{R_{1,2}} \ll 1 \quad (5)$$

(для того чтобы не вводить новых обозначений, мы пока считаем, что линейные размеры рассеивающего тела того же порядка, что и характерные радиусы кривизны  $a$ ), из (3) получаем

$$U(R) = \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10}R_{20}} \int_S e^{-i[qr+q_N\zeta(r)]} (q_N - q_{\perp}\gamma) dr. \quad (6)$$

Здесь  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  — расстояния от начала координат (выбранного в произвольной точке внутри поверхности  $S$ ) до источника и приемника;  $r$  — радиус-вектор точки на поверхности  $S$ ;  $q_N = Nq$  и  $q_{\perp} = q - Nq_N$  — нормальная и касательная к поверхности составляющие вектора  $q$ ;  $\gamma = \nabla_s \zeta(r_s)$  — векторное поле наклонов поверхности  $\Sigma$  относительно поверхности  $S$ . Формула (6) полностью аналогична выражению (19.18): единственное отличие состоит в том, что интегрирование в (6) производится не по плоскости ( $z=0$ ), а по искривленной поверхности  $S$ .

1. Исследование статистических характеристик рассеянного поля (6) начнем с определения его первого момента, т. е. среднего поля. Предполагая статистическую однородность случайной функции и, в частности, полагая  $\bar{\gamma} = 0$ , из (6) получаем

$$U(R) = \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10}R_{20}} \int_S q_N e^{-iq_N \zeta} \cdot e^{-iqr} dr. \quad (7)$$

Очевидно, что стационарная точка  $r_0$  этого интеграла определяется из условия  $q_{\perp} = 0$ . Введем в этой точке декартову систему координат, как показано на рис. 73 (ось  $z$  — по нормали  $N$  к поверхности в зеркальной точке, а оси  $x$  и  $y$  — по касательным к главным направлениям с радиусами кривизны  $a_1$  и  $a_2$  соответ-

ственно). Уравнение поверхности вблизи зеркальной точки в этой системе координат имеет такой вид \*):

$$z = Z(x, y) \simeq -\frac{x^2}{2a_1} - \frac{y^2}{2a_2}. \quad (8)$$

Следующие члены  $\sim x^4, y^4$  в разложении показателя экспоненты по малой окрестности зеркальной точки можно отбросить, если выполняется неравенство

$$qa_{1,2} = 2 \cos \theta_0 k a_{1,2} \gg 1, \quad (9)$$

где  $\theta_0$  — угол падения в зеркальной точке. Размеры зоны Френеля в данном случае равны:

$$\begin{aligned} (\Delta x)_0^2 &\simeq \frac{2a_1}{q} = \frac{a_1}{k \cos \theta_0}, \\ (\Delta y)_0^2 &\simeq \frac{2a_2}{q} = \frac{a_2}{k \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

так что условие (9) означает малость угловых размеров  $\Delta \vartheta_x = \frac{(\Delta x)_0}{a_1}$  и  $\Delta \vartheta_y = \frac{(\Delta y)_0}{a_2}$  зоны Френеля по отношению к центрам кривизны поверхности  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 73). При выполнении неравенства (9) множитель  $q_N = q_N(x, y)$  в формуле (7) можно вынести за знак интеграла в точке  $x=y=0$ ; условие же медленности изменения  $\overline{\exp\{-iq(x, y)\zeta\}}$  по сравнению с  $\exp\left\{\frac{iq}{2}\left(\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2}\right)\right\}$

имеет вид

$$\frac{qa^2}{a} \ll 1, \quad (11)$$

т. е. высота неровностей должна быть мала по сравнению с размерами зоны Френеля [ср. (24. 11)]. С учетом приведенных неравенств формула (7) преобразуется к такому виду:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10}R_{20}} 2k \cos \theta_0 e^{-2ik\zeta \cos \theta_0} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ ik \cos \theta_0 \left( \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} \right) \right] dx dy = \frac{V_{\theta}(\theta_0)}{2\sqrt{\zeta}} \cdot \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10}R_{20}}, \end{aligned} \quad (12)$$

\*) Положительным радиусам кривизны  $a_1, a_2 > 0$  соответствует двояковыпуклая поверхность в зеркальной точке. Однако при получении формулы (12) это условие совсем не обязательно: достаточно в формулах (9)–(11) под  $a_1$  и  $a_2$  понимать модули радиусов кривизны.

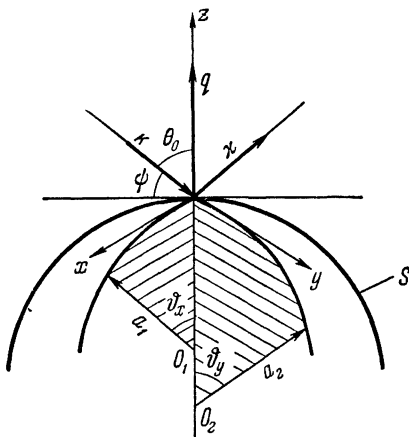


Рис. 73.

где  $\mathcal{K} = 1/(a_1 a_2)$  — гауссова кривизна поверхности в зеркальной точке, а через  $V_s(\theta_0)$  обозначен эффективный коэффициент отражения среднего поля от шероховатой плоскости, введенный в § 20,

$$V_s(\theta_0) = e^{2ik \cos \theta_0 \xi}. \quad (13)$$

Сравнивая (12) с (29.5), видим, что отражение среднего (когерентного с падающим) поля от шероховатого тела  $\Sigma$  описывается той же формулой, что и от гладкой поверхности  $S$ , но с эффективным коэффициентом отражения (13).

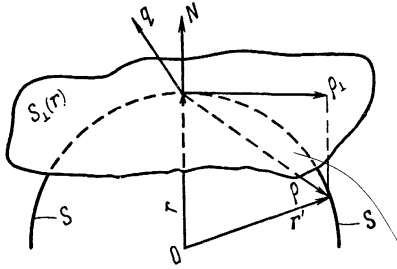


Рис. 74.

2. При вычислении средней интенсивности флуктуаций отраженного поля при  $q_N \sigma \gg 1$  в формуле (6) можно заменить в предэкспоненциальном множителе  $\gamma \rightarrow \gamma_0 =$

$= -q_{\perp}/q_N$  и тогда для  $|\overline{u}|^2 = |\overline{U}|^2 - |\overline{U}|^2$  получаем

$$|\overline{u}|^2 = \frac{q^4}{(4\pi R_{10} R_{20})^2} \iint_S \iint_S \frac{dr dr'}{(qN)(qN')} e^{-i(q \cdot r - r')} \times \\ \times \{ e^{-i(qN)\xi(r) + i(qN')\xi(r')} - e^{-i(qN)\xi(r)} \cdot e^{i(qN')\xi(r')} \}. \quad (14)$$

Введем новую переменную интегрирования  $\rho = r' - r$  и выясним условия, при которых интегрирование по  $d\rho$  можно заменить интегрированием по плоскости  $S_{\perp}(\mathbf{r})$ , касательной к поверхности  $S$  в точке  $\mathbf{r}$  (рис. 74), а направление нормали  $N' = N(\mathbf{r} + \rho)$  считать отнесенным к точке касания  $\mathbf{r}(N' \rightarrow N)$ :

$$|\overline{u}|^2 = \frac{q^4}{(4\pi R_{10} R_{20})^2} \int_S \frac{dS}{q_N^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho_{\perp} e^{-iq_{\perp} \rho_{\perp}} \{ f_2(q_N, -q_N; \rho_{\perp}) - f_1^2(q_N) \}. \quad (15)$$

Этой формуле в случае отражения от плоскости соответствует выражение (24.22) и тем же путем, что и в § 24, можно получить условия, при которых (15) имеет место.

Во-первых, показатель экспоненты в (14)  $(q, r' - r) = q\rho$  мы заменили на  $q\rho_{\perp}$  т. е. считали, что  $(q, \rho - \rho_{\perp}) \simeq q_N |\rho - \rho_{\perp}| \ll 1$ . Если выражение в фигурных скобках существенно убывает на расстояниях  $\Delta\rho_{\perp}$  [при  $q_N \sigma \ll 1$  имеем  $\Delta\rho_{\perp} \simeq l$ , а при  $q_N \sigma \gg 1$ ,  $\Delta\rho_{\perp} \simeq (q_N \gamma)^{-1}$ ], то это неравенство принимает вид

$$\cos \theta \frac{q(\Delta\rho_{\perp})^2}{2a} \ll 1 \quad (16a)$$

[при этом мы учли, что  $|\rho - \rho_{\perp}| \simeq (\Delta\rho_{\perp})^2/(2a)$ , где через  $a$  обозначен характерный радиус кривизны поверхности].



Во-вторых, в предэкспоненциальных множителях можно положить  $qN' \approx qN$ , если

$$\max \left\{ \operatorname{tg} \theta \frac{\Delta \rho_{\perp}}{a}; \quad \left( \frac{\Delta \rho_{\perp}}{a} \right)^2 \right\} \ll 1. \quad (16б)$$

Это довольно слабые неравенства мы уже подразумевали выполненными при получении (16а). Наконец, в показателе экспонент в (14) можно заменить  $qN'$  на  $qN$ , если

$$\max \left\{ q\sigma \sin \theta \frac{\Delta \rho_{\perp}}{a}; \quad q\sigma \cos \theta \left( \frac{\Delta \rho_{\perp}}{a} \right)^2 \right\} \ll 1. \quad (16в)$$

При  $qN\sigma \gg 1$  из (24.24) имеем  $\Delta \rho_{\perp} \approx l/(qN\sigma)$ , так что условия (16а, б, в) применимости формулы (15) сводятся к следующему неравенству:

$$\cos \theta a q \gamma^2 \gg 1. \quad (17а)$$

Легко показать, что физический смысл этих неравенств [точно так же как и неравенств (24.25) в случае френелевской дифракции на плоскости] соответствует требованию малости, существенной для отражения от шероховатой поверхности области  $(\Delta x)_{\xi} \approx a\gamma$  по сравнению с линейными размерами зоны Френеля  $(\Delta x)_0 \approx \sqrt{a/q}$  (10).

В обратном предельном случае  $qN\sigma \ll 1$  (но  $kl \gg 1$ ) вместо (17а) получаем

$$\cos \theta \frac{q l^2}{a} \ll 1, \quad (17б)$$

т. е. радиусы корреляции должны быть значительно меньше зоны Френеля.

Внутренний интеграл по  $d\rho_{\perp}$  в формуле (15), как следует из результатов § 20, является индикатрисой рассеяния от плоской шероховатой единичной площадки. Поэтому интенсивность поля, рассеянного на шероховатой криволинейной поверхности, при выполнении приведенных выше неравенств представляется в виде некогерентной суперпозиции полей, отраженных от малых шероховатых плоских площадок  $dS$ , касательных к средней поверхности  $S$ .

При  $q_z \sigma \gg 1$  интеграл по  $d\rho_{\perp}$  в (15) вычисляется методом перевала (см. § 20) и для дифференциального сечения рассеяния  $\mathcal{C}$  (в единицу телесного угла) из (15) получаем

$$\mathcal{C} = \frac{q^4}{4} \int_S \frac{dS}{q_N^4} w \left( \gamma = - \frac{q_{\perp}}{q_N} \right). \quad (18)$$

Перейдем теперь к исследованию наиболее интересных частных случаев.

3. Пусть шероховатости занимают ограниченный участок (с линейными размерами  $L$ ) поверхности  $S$  или освещается только часть этой поверхности. Тогда, если выполняется неравенство

$$\gamma \gg \left[ \frac{L}{a} + \operatorname{tg} \theta \frac{L^2}{2a^2} \right], \quad (19)$$

сечение рассеяния на изогнутой шероховатой поверхности совпадает с сечением рассеяния на шероховатой и в среднем плоской площадке той же площади. Отношение  $L/a$  есть угол, под которым площадка видна из центра кривизны поверхности и, следовательно, условие (19) означает, что угловая ширина индикатрисы рассеяния, по порядку величины равная  $\gamma$ , должна быть значительно больше, чем угловой размер площадки.

В качестве примера, играющего большую роль при интерпретации экспериментов по радиолокации планет (см. [13] — [18], [243] — [246]), рассмотрим отражение импульса от шероховатой сферы (рис. 75). Если через  $\Delta t$  обозначить временную длительность импульса, то «глубина» области  $\Delta z$ , с которой происходит рассеяние назад,

равна  $\frac{1}{2} c \Delta t$ . Ширина кольца  $L$ , которое освещается на сфере таким импульсом, связана с  $\Delta z$  очевидным соотношением:

$$\Delta z \simeq a \left\{ \frac{L}{a} \sin \theta + \frac{L^2}{2a^2} \cos \theta \right\}. \quad (20)$$

Вблизи полюса сферы, где  $\frac{a}{L} \operatorname{tg} \theta \ll 1$ , из (20) следует  $L \simeq \sqrt{2a\Delta z}$ ; в обратном предельном случае  $\frac{a}{L} \operatorname{tg} \theta \gg 1$  имеем  $L \simeq \Delta z / \sin \theta$ . Подставляя эти соотношения в (19), получаем ограничения на длительность импульса

$$\gamma \gg \frac{\Delta z}{a \sin \theta} + \frac{(\Delta z)^2}{a^2 \sin^2 \theta}, \quad (21)$$

при выполнении которых в формуле (18) вероятность зеркальных наклонов  $w$  ( $\gamma = -q_{\perp}/q_N$ ) можно считать постоянной в пределах

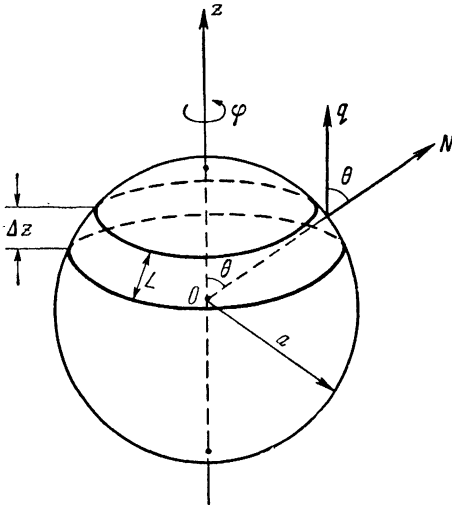


Рис. 75.

освещенного кольца. Предполагая, что неровности изотропны, т. е.  $w(\gamma) = w(\gamma)$  и записывая элемент площади  $dS$  в виде

$$dS = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (22)$$

из (18) получаем зависимость сечения обратного рассеяния от угла  $\theta$ :

$$\mathfrak{S} = \frac{S(\theta)}{4 \cos^4 \theta} w(\gamma = \operatorname{tg} \theta) \underset{\theta \gg L/a}{\approx} \frac{\pi a L(\theta) \sin \theta}{2 \cos^4 \theta} w(\gamma = \operatorname{tg} \theta), \quad (23)$$

где  $L(\theta)$  — решение уравнения (20). Угол падения  $\theta$  изменяется со временем, по мере продвижения импульса в отрицательном направлении оси  $z$ , по закону

$$\theta = \arccos \frac{ct}{a}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (24)$$

(время  $t$  отсчитывается от момента касания фронта импульса и сферы). Таким образом, измеряя интенсивность отраженного сигнала как функцию времени  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(t)$ , по формуле (23) можно определить распределение углов наклона случайных неровностей на поверхность сферы, т. е. крутизну рельефа.

Если характерная высота неровностей мала по сравнению с длиной волны излучения, так что для параметра Рэлея выполняется неравенство  $q_z \sigma \ll 1$ , то из (15) получаем вместо (18) следующую формулу:

$$\mathfrak{S} = 4k^4 \sigma^2 \int_S dS \tilde{W}(\mathbf{q}_\perp), \quad (25)$$

где  $\tilde{W}(\mathbf{q}_\perp)$  — пространственный спектр неровностей поверхности (преобразование Фурье от корреляционной функции). В том случае, когда угловая ширина индикатрисы рассеяния  $(\approx \frac{1}{kl})$  значительно превосходит угловые размеры освещенной части поверхности  $(\approx \frac{L}{a})$ , т. е. выполняется неравенство

$$kl \left[ \frac{L}{a} \sin \theta + \frac{L^2}{2a^2} \cos \theta \right] \ll 1, \quad (26)$$

обобщающее на случай искривленной поверхности понятие области разделения спектров, в (25)  $\tilde{W}(\mathbf{q}_\perp)$  можно вынести за знак интеграла:

$$\mathfrak{S} = 4k^4 \sigma^2 S(\theta) \tilde{W}(2k \sin \theta) \underset{\theta \gg L/a}{\approx} 8\pi a k^4 \sigma^2 L(\theta) \sin \theta \tilde{W}(2k \sin \theta). \quad (27)$$

Заметим, что формула (27) была получена как предельный случай из приближения касательной плоскости. Поэтому следует считать  $kl \gg 1$ , а это приводит к тому, что  $\mathfrak{S}(\theta)$  отлично от нуля

лишь при  $\theta \simeq \frac{1}{kl} \ll 1$ , т. е. в узком конусе углов около направления зеркального отражения. С другой стороны, случай малых параметров Рэлея допускает полное исследование и при произвольных  $kl$  методом теории возмущений. В результате формула (27) приобретает вид

$$\mathfrak{E} = 4k^4 \sigma^2 S(\theta) Q(\alpha, -\alpha) \tilde{W}(2k \sin \theta), \quad (27a)$$

где зависимость индикатрисного множителя  $Q$  от угла облучения определяется по формулам §§ 8, 9. В частности, для абсолютно мягкой ( $V = -1$ ) и абсолютно жесткой поверхности ( $V = 1$ ) вместо (27) имеем [ср. (8.23)]

$$\mathfrak{E}(\theta) = 4k^4 \sigma^2 S(\theta) \tilde{W}(2k \sin \theta) \begin{cases} \cos^4 \theta & (V = -1), \\ (1 + \sin^2 \theta)^2 & (V = 1). \end{cases} \quad (27b)$$

Таким образом, в случае малых шероховатостей по интенсивности флуктуаций радиолокационного сигнала при достаточно коротком импульсе можно определить корреляционную функцию неровностей. Заметим, что, в отличие от случая  $q_{NS} \sigma \gg 1$ , формулой (27) определяется не полная интенсивность рассеянного назад сигнала, а только ее некогерентная часть. Когерентная составляющая может быть найдена независимо по формуле (12) с  $V_s(\theta) = 1 - 2(k\sigma \cos \theta)^2$ .

4. При облучении шероховатой сферы достаточно длинным импульсом, когда неравенства (21) не выполняются, распределение зеркальных точек в освещенной области уже нельзя считать однородным \*) — плотность зеркальных точек у полюса сферы ( $\text{tg } \theta \lesssim \gamma$ ) может значительно превышать плотность в области, которая освещается под скользящими углами ( $\text{tg } \theta \gtrsim \gamma$ ). Вычислим сечение рассеяния при непрерывном режиме облучения, когда одновременно освещается вся полусфера ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) — случай, противоположный рассмотренному в предыдущем пункте. Считая для простоты шероховатости изотропными, из (18) с учетом (22) получаем для сечения обратного рассеяния

$$\mathfrak{E} = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\cos^4 \theta} w(\text{tg } \theta). \quad (28)$$

С помощью замены переменных  $\gamma = \text{tg } \theta$  этот интеграл преобразуется к виду

$$\mathfrak{E} = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^{\infty} (1 + \gamma^2)^{1/2} w(\gamma) \gamma \, d\gamma. \quad (29)$$

\*) Распределение зеркальных точек на статистически шероховатой и в среднем сферической поверхности изучалось в работах [88], [257].

Принимая во внимание условие нормировки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w(\gamma) d\gamma = 2\pi \int_0^{\infty} w(\gamma) \gamma d\gamma = 1, \quad (30)$$

приходим к выводу, что наличие шероховатостей приводит, вообще говоря, к увеличению сечения обратного рассеяния по сравнению с гладкой сферой ( $\mathcal{E} = \frac{1}{4} a^2$ ). Однако при малых углах наклона, когда

$$\bar{\gamma}^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \gamma^3 w(\gamma) d\gamma \ll 1,$$

сечения рассеяния от гладкой и шероховатой сфер практически совпадают:

$$\mathcal{E} \approx \frac{a^2}{4} \left[ 1 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \right]. \quad (31)$$

Заметим, что даже при выполнении условия  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  число зеркальных точек  $N \simeq a^2 \bar{\gamma}^2 / l^2$  может быть сколь угодно большим, если линейные размеры шероховатостей значительно меньше радиусов кривизны средней поверхности. Кроме того, в рассматриваемом предельном случае (17а) размеры области, существенно рассеивающей в обратном направлении  $\{(\Delta\theta)_z \simeq \arctg \gamma\}$ , значительно превосходят размеры зоны Френеля  $\{(\Delta\theta)_0 \simeq \sqrt{aq \cos \theta}\}$ , так что результат (31) заранее не очевиден. Вместе с тем полученная формула (31) допускает наглядное геометрическое истолкование. Действительно, с увеличением числа зеркальных точек и расширением существенной для отражения области уменьшаются радиусы кривизны поверхности в точках зеркального отражения:  $\bar{\mathcal{R}}^2 \simeq l^2 / \bar{\gamma}^2$ . Рассматривая полное сечение рассеяния от шероховатой сферы как сумму сечений рассеяния от зеркальных точек, каждое из которых определяется по формуле (29.6), получаем

$$\mathcal{E} \simeq \overline{\sum_{n=1}^N \frac{\mathcal{R}_n^2}{4}} \simeq \frac{1}{4} N \bar{\mathcal{R}}^2 \simeq \frac{1}{4} a^2. \quad (32)$$

Таким образом, уменьшение радиусов кривизны полностью компенсирует увеличение числа зеркальных точек, так что сечение рассеяния при этом не изменяется и совпадает с сечением рассеяния от гладкой сферы. Отметим, кстати, что этот результат остается справедливым не только для шероховатой сферы, но и для произвольного шероховатого тела (см. [258]): при  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  сечение рассеяния совпадает с формулой (6), где  $a_1$  и  $a_2$  — главные радиусы кривизны средней поверхности в зеркальной точке.

При  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$  индикатриса рассеяния в малом является очень острой функцией направлений рассеяния, отличной от нуля лишь вблизи направлений зеркального отражения. Поэтому, хотя существенная для отражения область в силу неравенства (17а) значительно больше, чем зона Френеля, ее угловой размер все же достаточно мал:  $(\Delta\theta)_{\frac{1}{2}} \simeq \bar{\gamma}^2 \ll 1$ . В рассмотренном выше примере отражения от сферы это означает, что в рассеянии назад принимает участие лишь малая окрестность зеркальной точки — полюса сферы. В обратном предельном случае диффузного отражения «в малом» площадь рассеивающей области может оказаться сравнимой с площадью всей освещенной области, но при этом уже нельзя воспользоваться формулой (18), так как она получена в приближении касательной плоскости (§ 19) без учета затенений и многократного рассеяния, которые при  $\bar{\gamma}^2 \simeq 1$  и скользящих углах (вблизи границы свет — тень) начинают играть существенную роль \*). Если задать индикатрису рассеяния в виде (24.48), то для сечения обратного рассеяния вместо (28) будем иметь

$$\mathcal{C} = \pi a^2 \int_0^{\pi/2} B(\theta) \sin 2\theta \, d\theta, \quad (33)$$

где  $B(\theta)$  нормирована условием (24.50). В частности, если распределение по направлениям интенсивности рассеяния «в малом» описывается законом Ламберта  $B(\theta) = \frac{1}{\pi} \cos \theta$ , то из (33) следует

$$\mathcal{C} = \frac{2}{3} a^2. \quad (34)$$

Таким образом, сечение рассеяния диффузно отражающей сферы в  $2 \frac{2}{3}$  раза превышает сечение рассеяния гладкой сферы (или покрытой пологими шероховатостями с  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$ ). Напомним, что аналогичное увеличение интенсивности в радиолокационном случае мы уже получали при исследовании рассеяния на диффузно отражающей плоскости [ср. (24.53)].

5. В заключение параграфа рассмотрим рассеяние на шероховатом ограниченном цилиндре (см. [259]) с радиусом  $a$  и длиной  $L$ . Результаты предыдущих пунктов к этой задаче неприменимы, так как полная кривизна  $\mathcal{K}$  в данном случае обращается в нуль и сечение рассеяния от невозмущенной поверхности зависит от длины волны [см. (29.9)]. Условие дальней зоны при этом, кроме неравенства (5), приводит к требованию  $kL^2 \ll R_{1,2}$ .

\*) Учет затенений в области, близкой к «экватору», где углы скольжения малы, был проведен в работе Павельева и Стрелкова [407] при исследовании теплового излучения шероховатой сферы.

Пусть для простоты шероховатости поверхности зависят лишь от координаты  $x$ , направленной по образующей цилиндра (рис. 76), т. е. рассмотрим рассеяние на цилиндре, гофрированном случайным образом, а плоскость падения  $\{z x\}$  (в которой

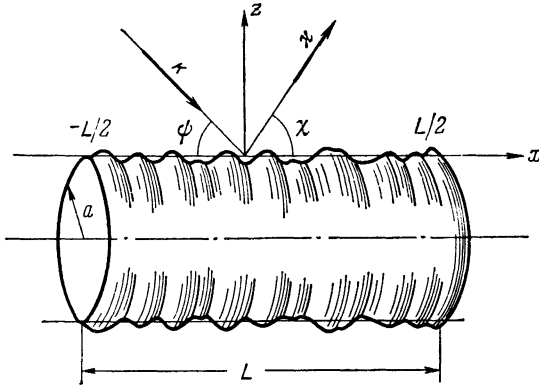


Рис. 76.

лежат волновые векторы  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$ ) будем считать параллельной оси цилиндра. Тогда из формулы (6) имеем

$$U(\mathbf{R}) = U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{4\pi i R_{10} R_{20}} \times \int_S \exp\{-i[q_x x + q_z z(x, y) + q_N \zeta(x)]\} (q_N - q_x \gamma_x) dS, \quad (35)$$

где  $z = z(x, y)$  — уравнение поверхности гладкого цилиндра в выбранной, как показано на рис. 76, системе координат:

$$z(x, y) = a - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (-L/2 < x < L/2). \quad (36)$$

При  $q_z a \gg 1$  интегрирование по  $dy$  в (35) выполняется методом стационарной фазы:

$$U(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{2R_{10}R_{20}} \left(\frac{a}{2\pi i q_z}\right)^{1/2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\{-i[q_x x + q_z \zeta(x)]\} (q_z - q_x \gamma_x) dx. \quad (37)$$

С такого типа интегралами мы уже имели дело в § 20 при изучении рассеяния на ограниченной и в среднем плоской случайной поверхности. При  $q_z \sigma \gg 1$  и  $q_z \gamma L \gg 1$  из (37) тем же путем, что и при вычислении интеграла (20.33), получаем для сечения рассеяния

$$\mathcal{C} = \frac{aL}{4} \frac{q^4}{q_z^4} w\left(\gamma = -\frac{q_x}{q_z}\right). \quad (38a)$$

Если распределение производных  $w(\gamma)$  случайной функции  $\zeta(x)$  нормальное,

$$w(\gamma) = \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right),$$

то (38а) имеет следующий вид:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\psi, \chi) = \frac{aL}{\gamma_0 \sqrt{2\pi}} \frac{[1 - \cos(\psi + \chi)]^2}{(\sin \psi + \sin \chi)^4} \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_0^2} \left(\frac{\cos \chi - \cos \psi}{\sin \chi + \sin \psi}\right)^2\right\}. \quad (38б)$$

Сравним этот результат с формулой для сечения рассеяния от гладкого цилиндра, которая получается из (37) при  $\gamma = \zeta = 0$ :

$$\mathfrak{E}_0(\gamma, \chi) = \frac{aq^4}{2\pi q_x^2 q_z^2} \sin^2 \frac{q_x L}{2}. \quad (39)$$

Видно, что  $\mathfrak{E}_0(\psi, \chi)$  отлично от нуля лишь в малой окрестности  $\Delta\chi$  углов, близких к зеркальным, — в пределах первого дифракционного лепестка

$$(\Delta\chi)_0^2 \simeq \frac{4}{(kL \sin \psi)^2}, \quad (40)$$

в то время как для  $\mathfrak{E}(\psi, \chi)$  из (38а, б) имеем [ср. (20.23)]

$$\overline{(\Delta\chi)^2} \simeq 8\gamma_0^2. \quad (41)$$

Так как мы считали при получении (38а), что  $q_z \gamma L \gg 1$ , то  $(\Delta\chi)_0^2 \ll \overline{(\Delta\chi)^2}$ , т. е. при дифракции на шероховатом цилиндре излучение рассеивается в значительно более широком интервале углов. В зеркальном же направлении ( $q_x = 0$ ) сечение рассеяния существенно уменьшается. Действительно, из (38) имеем

$$\mathfrak{E}(\psi, \psi) = \frac{aL}{4} w(\gamma = 0) \simeq \frac{aL}{4\gamma_0 \sqrt{2\pi}}, \quad (42)$$

в то время как для гладкого цилиндра из (39) следует

$$\mathfrak{E}_0(\psi, \psi) = \frac{akL^2 \sin \psi}{4\pi}. \quad (43)$$

Таким образом, сечение рассеяния на шероховатом цилиндре в зеркальном направлении (и, в частности, сечение обратного рассеяния) оказывается в  $q_z \gamma L$  раз меньше, чем для гладкого цилиндра. Это уменьшение связано с перераспределением интенсивности рассеянного поля по направлениям — (41) вместо (40).

Заметим, наконец, что формулы (38) и (42) оказываются справедливыми не только для гофрированного цилиндра, но и в общем случае трехмерных шероховатостей, если характерные углы на-



лона в направлении, перпендикулярном к образующей, достаточно малы:  $\overline{\gamma}_y^2 \ll 1$ . В этом можно легко убедиться, проведя вычисления тем же путем, с помощью которого в предыдущем пункте была получена формула (31).

### § 31. Флуктуации сечения рассеяния, амплитуды и фазы

Среднее сечение рассеяния представляет собой важную, но далеко не полную характеристику влияния статистических неровностей на характер рассеяния поля телом заданной формы. В ряде случаев возникает вопрос о функции распределения сечений, определенных на ансамбле таких поверхностей, покрытых статистическими шероховатостями. Например, при калибровке приемников излучения по известному сечению рассеяния на гладком теле (как правило, в качестве такого эталона используют шар) возникает необходимость определения допусков на предельные деформации поверхности и чистоту обработки для обеспечения нужной точности градуировки измерительного устройства (см. [260], [261]). В простейшем случае достаточно ограничиться расчетом первых двух моментов упомянутой плотности распределения сечений рассеяния — среднего сечения рассеяния и дисперсии флуктуаций около этого среднего. Определением последней мы и займемся в этом параграфе.

1. Если в существенной для отражения области укладывается достаточно много радиусов корреляции неровностей, то заранее очевидно, что флуктуации поля будут распределены по нормальному закону. При  $(q_z \sigma)^2 \gg 1$  площадь существенной для отражения области по порядку величины равна  $a^2 \overline{\gamma}^2$ , так что предельной теоремой можно воспользоваться, если выполнено неравенство

$$N \simeq \frac{a^2 \overline{\gamma}^2}{l^2} \gg 1. \quad (1a)$$

Величина  $N$ , как мы видели, равна количеству зеркальных точек в существенной для отражения области. В обратном предельном случае  $(q_z \sigma)^2 \ll 1$ , когда ширина индикатрисы рассеяния определяется не углами наклона поверхности, а параметром  $1/(kl)$ , площадь существенной для отражения области равна  $\left(\frac{a}{kl}\right)^2$ , и соответствующий критерий имеет вид

$$\left(\frac{a}{kl}\right)^2 \gg 1. \quad (16)$$

Таким образом, при малых параметрах Рэлея для того, чтобы флуктуации поля имели нормальное распределение, достаточно, чтобы площадь зоны Френеля на криволинейной поверхности

( $\simeq \lambda a$ ) намного превосходит площадь, приходящуюся на «одну шероховатость» ( $\simeq l^2$ ).

Так как мы всегда предполагаем, что  $a \gg \lambda$ ,  $l$ , то неравенства (1а, б) могут не выполняться лишь для очень пологих поверхностей с большими радиусами корреляции. При этом можно ожидать, что флуктуации рассеянного поля не будут иметь нормального характера, и именно эти случаи представляют особый интерес.

Ограничиваясь, как и раньше, изучением флуктуаций в дальней зоне (30. 5), будем исходить из формулы (30. 6). Имея в виду, что при  $\gamma^2 \ll 1$  (при  $q_z \sigma \gg 1$ ) или  $kl \gg 1$  (при  $q_z \sigma \ll 1$ ) рассеяние «в малом» имеет почти зеркальный характер (индикатрисы рассеяния — очень острые функции) и, следовательно, для отражения существенную роль играет малая окрестность точки зеркального отражения, можно показатель экспоненты в (30. 6) разложить в ряд около этой стационарной точки. В системе координат, введенной на рис. 73, уравнение средней поверхности имеет вид (30. 8), и из (30. 6) получаем для флуктуирующей (некогерентной) компоненты рассеянного поля

$$u = U - \bar{U} = \frac{q_z}{4\pi i} \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{R_{10} R_{20}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i \frac{q_z}{2} \left( \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} \right) \right] \left[ e^{-iq_z \zeta(x, y)} - e^{-iq_z \zeta} \right] dx dy. \quad (2)$$

Эта формула имеет в точности ту же структуру, что и выражение (25. 1) для флуктуаций поля точечного источника над шероховатой плоскостью, когда источник и приемник находятся на конечном расстоянии (в зоне Френеля) от рассеивающей поверхности. Единственное отличие (2) от (25. 1) состоит в том, что если раньше размеры зоны Френеля определялись приведенным расстоянием  $R = \frac{2R_{10}R_{20}}{R_{10} + R_{20}}$  между точкой наблюдения и зеркальным источником:

$$(\Delta x)_0 \simeq \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{R}{k}}, \quad (\Delta y)_0 \simeq \sqrt{\frac{R}{k}}, \quad (3a)$$

то теперь, когда источник и приемник находятся в дальней зоне, размеры зоны Френеля определяются кривизной средней поверхности в точке зеркального отражения

$$(\Delta x)_0 \simeq \sqrt{\frac{2a_1}{q_z}} = \sqrt{\frac{a_1}{k \sin \psi}}, \quad (\Delta y)_0 \simeq \sqrt{\frac{a_2}{k \sin \psi}} \quad (3б)$$

Это позволяет при исследовании флуктуаций рассеянного поля воспользоваться результатами § 25, заменяя в окончательных

формулах  $R \rightarrow \sqrt{a_1 a_2}$ . В частности, для средней интенсивности флуктуаций из (25. 1а) следует

$$|\bar{u}|^2 = \bar{J} = \frac{a_1 a_2}{4R_{10} R_{20}} \left[ 1 - f_i^2(q_z) \right]. \quad (4)$$

Среднее сечение рассеяния [с учетом интенсивности, рассеянной в когерентную составляющую (30. 12)] при этом совпадает с сечением рассеяния  $\mathcal{C}_0$  на гладкой поверхности \*)

$$\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_0 = \frac{1}{4\mathcal{K}},$$

как и должно быть для пологих неровностей с большими радиусами корреляции (см. [258]).

2. При  $q_z \sigma \gg 1$  условия на пологость поверхности, при которых можно пользоваться приближенной формулой (2), имеют тот же вид, что и в § 25 [см. (25. 3б, в)]. В радиолокационном случае ( $q_z = q = 2k$ ,  $\theta_0 = 0$ ) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$k\sigma\gamma^2 \ll 1. \quad (5)$$

Как и в § 25, рассмотрим сначала рассеяние на двумерных неровностях, форма которых зависит лишь от одной координаты  $\zeta = \zeta(x)$ . При выполнении неравенства

$$a^2 \sigma^2 W^{(4)}(0) \ll 1, \quad (6)$$

аналогичного (25. 6), для дисперсии флуктуаций сечения рассеяния из (25. 9) получаем

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} = a^2 \sigma^2 W^{(4)}(0) = \text{const} \frac{a^2 \gamma^2}{l^2} \ll 1 \quad (7)$$

при гауссовой функции корреляции  $\text{const} = 6$  [ср. (25. 11)]. Неравенство (6) означает, что с большой вероятностью [отличающейся от единицы на малую величину (6)] в существенной для отражения области есть только одна точка зеркального отражения, и флуктуации сечения рассеяния связаны с изменением кривизны в этой точке. Действительно, формула (7) в точности совпадает с выражением (29. 15), полученным путем непосредственного вычисления флуктуаций кривизны в зеркальной точке. Совершенно

\*) Раньше через  $\mathcal{C}$  обозначалось среднее сечение рассеяния. В этом параграфе при исследовании дисперсии сечения рассеяния под  $\mathcal{C}$  мы будем понимать случайную (неусредненную) величину, обозначая, как всегда, усреднение чертой.

очевидно, что для трехмерных шероховатостей из (4) вместо (7) получается формула (29.18).

В обратном предельном случае, когда выполняется (1а), из (25.19) следует

$$\mathcal{D} \{ \mathcal{C} \} \approx 1 - O \left\{ \frac{1}{N} \right\}. \quad (8)$$

Видно, что при  $N \gg 1$  мы действительно приходим к нормальному распределению сечения рассеяния, когда  $\mathcal{C}^2 = (\bar{\mathcal{C}})^2$ .

3. При  $q_z \sigma \ll 1$  из (2) имеем

$$u = -\frac{q_z^2}{4\pi} \frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{R_{10}R_{20}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i \frac{q_z}{2} \left( \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} \right) \right] \zeta(x, y) dx dy. \quad (9)$$

С представлением поля в таком виде мы уже имели дело в § 11, исследуя флуктуации амплитуды и фазы при отражении от слабо шероховатой и в среднем плоской поверхности. Действительно, при замене (3б) на (3а) формула (9) совпадает с (11.11), а условия ее применимости определяются неравенствами (11.14) и (11.16), которые при обратном рассеянии ( $\psi = \pi/2$ ) эквивалентны требованию  $kl \gg 1$ . Среднее поле  $\bar{U}$  (30.12) отличается от поля  $U_0$  нулевого приближения (29.5) членами второго порядка малости  $\sim (k\sigma)^2$ , так что полное рассеянное поле может быть представлено в виде (11.3а, б), откуда для дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы вытекают формулы (11.21а, б). Как и в § 11, введем параметры [ср. (11.22)]

$$d_{\xi}^2 = \frac{kl_x^2}{2a_1} \sin \psi, \quad d_{\eta}^2 = \frac{kl_y^2}{2a_2} \sin \psi, \quad (10)$$

определяющие отношение радиусов корреляции  $l_x$  и  $l_y$  к линейным размерам зоны Френеля (3б) вдоль координатных осей, направленных по касательным к главным сечениям криволинейной поверхности в зеркальной точке (см. рис. 73). Тогда для  $\left( \frac{\delta A}{A} \right)^2$ ,  $(\delta\varphi)^2$  и  $\frac{\delta A}{A} \delta\varphi$  получаем в точности те же формулы (11.23), что и при отражении от шероховатой плоскости в зоне Френеля. Поэтому полученные в § 11 окончательные формулы для флуктуаций амплитуды и фазы без всяких изменений переносятся и на случай отражения от криволинейной шероховатой поверхности.

В качестве иллюстрации приведем формулы для обратного рассеяния ( $\psi = \pi/2$ ) от шероховатой сферы ( $a_1 = a_2 = a$ ), покрытой ста-

стистически изотропными неровностями ( $l_x = l_y = l$ ). Из (11.23а, б, в) получаем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2k^2\sigma^2 \{1 \mp 2d_0^2 \operatorname{Im} \eta\}, \quad (11a)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = 4k^2\sigma^2 d_0^2 \operatorname{Re} \eta, \quad d_0^2 \equiv \frac{kl^2}{2a}, \quad (11б)$$

$$\eta \equiv \int_0^\infty \omega(\rho) e^{id_0^2 \rho^2} \rho \, d\rho, \quad (11в)$$

где  $\omega(\rho)$  — функция корреляции от безразмерного аргумента (расстояние  $\rho$  измеряется в долях радиуса корреляции  $l$ ). Для гауссовой функции корреляции  $\omega = e^{-\rho^2}$  отсюда, в частности, следует:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \\ \overline{(\delta\varphi)^2} \end{aligned} \right\} = 2k^2\sigma^2 \left\{1 \mp \frac{d_0^2}{1+d_0^2}\right\}, \quad (12a)$$

$$\overline{\frac{\delta A}{A} \delta\varphi} = 2k^2\sigma^2 \frac{d_0^2}{1+d_0^2}, \quad R_{A\varphi} = \frac{d_0^2}{\sqrt{1+2d_0^2}}, \quad (12б)$$

где коэффициент корреляции флуктуаций амплитуды и фазы  $R_{A\varphi}$  определен по формуле (11.27). Из (12а, б) видно, что когда в зоне Френеля помещается много шероховатостей ( $d_0 \ll 1$ ), дисперсии относительных флуктуаций амплитуды и фазы совпадают, а коэффициент корреляции между ними обращается в нуль. Как и в § 11 [ср. (11.9)], это является следствием нормального распределения флуктуаций  $u$  рассеянного поля при условии  $|\overline{u}|^2 \ll |U_0|^2$ . В обратном предельном случае  $d_0 \gg 1$  из (12а, б) имеем

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2} \approx O\left\{\frac{1}{d_0^2}\right\}, \quad \overline{(\delta\varphi)^2} \approx (2k\sigma)^2, \quad R_{A\varphi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Флуктуации сечения рассеяния в рассматриваемом случае связаны с флуктуациями амплитуды соотношением  $\mathfrak{S} \sim |A|^2 \approx A_0^2 + 2A_0\delta A$ , откуда для дисперсии сечения рассеяния имеем

$$\mathscr{D} \{\mathfrak{S}\} = \frac{\overline{\mathfrak{S}^2} - (\overline{\mathfrak{S}})^2}{(\overline{\mathfrak{S}})^2} = 4 \overline{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2}. \quad (13)$$

Подставляя сюда (12а), получаем окончательно

$$\mathscr{D} \{\mathfrak{S}\} = \frac{8k^2\sigma^2}{1 + \left(\frac{kl^2}{2a}\right)^2}. \quad (14)$$

Таким образом, если шероховатости достаточно мелкие ( $kl^2/2a \ll 1$ ), то дисперсия сечения рассеяния определяется параметром Рэлея  $\mathcal{D}\{\mathcal{E}\} \approx 8(k\sigma)^2$ . В обратном предельном случае, когда радиус корреляции шероховатостей намного превосходит размер зоны Френеля,  $\mathcal{D}\{\mathcal{E}\}$  не зависит от длины волны

$$\mathcal{D}\{\mathcal{E}\} = 32 \frac{a^2 \sigma^2}{l^4} \quad \left( \text{при} \left( \frac{kl^2}{2a} \right)^2 \gg 1 \right). \quad (15)$$

На рисунке 77 приведена зависимость дисперсии сечения обратного рассеяния от частоты излучения, полученная в работе [262].

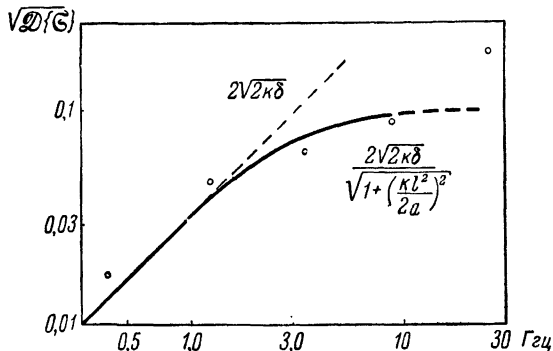


Рис. 77.

Видно, что при увеличении частоты, в согласии с теоретическими расчетами,  $\mathcal{D}\{\mathcal{E}\}$  стремится к постоянной (15). Заметим, что справедливость формулы (15) не связана с предположением о малости параметра Рэлея — достаточно, чтобы характерные радиусы кривизны шероховатостей были значительно больше, чем радиус сферы [ср. (29.21)].

## ДВУХМАСШТАБНАЯ МОДЕЛЬ

**§ 32. Некоторые экспериментальные результаты  
по рассеянию на статистически неровной поверхности**

В предыдущих главах были рассмотрены два основных подхода к теоретическому решению задачи о рассеянии волны на статистически неровной поверхности — метод возмущений и метод Кирхгофа. Эти методы относятся к двум предельным случаям очень мелких и пологих неровностей (метод возмущений) или гладких и крупномасштабных (метод Кирхгофа) и, естественно, не могут охватить всего многообразия поверхностей, с которыми приходится иметь дело при рассеянии волн. В задачах радиофизики [404] это — неровная поверхность суши [347]—[350] или моря [2], [317]—[318], [351], [352], границы тропосферных неоднородностей или ионосферы, природные волноводы [353]—[355] (тропосферные или Земля—ионосфера) или искусственные волноводные линии с искаженными границами [356]—[360]; в радиоастрономии — поверхность планет, Луны и Солнца [13]—[18], [361]—[363]; в гидро- и сейсмоакустике — взволнованная поверхность моря [364]—[373], дно океана [374]—[381], границы подводных звуковых каналов [35]—[38], [282]—[286] или геологических слоев с различными акустическими параметрами; в оптике — шероховатые поверхности кристаллов [217], всевозможные матовые поверхности [9]—[12], [387]—[392], искривления линз и зеркал [393]—[395], неизбежно возникающие при их изготовлении; в физике твердого тела — статистически неровные поверхности массивных образцов [3], [4], [22], [396] или тонких пленок [21], [39], [40], [397]—[399] и т. д.

1. Из всех перечисленных объектов, пожалуй, наиболее исследованным является взволнованная поверхность моря. Статистические характеристики морского волнения изучались в ряде работ (см., например, [263]—[266]). Как показали многолетние экспериментальные наблюдения, форму морской поверхности с большой степенью точности можно рассматривать как случайную функцию координат и времени, параметры которой распределены по нормальному закону, а корреляционная функция имеет квазигармонический характер. Достаточно полная информация о статистических свойствах морской поверхности делает ее чрезвычайно удобным объектом как теоретических, так и экспериментальных исследований по рассеянию звука и радиоволн.

Экспериментальные данные по рассеянию средних и коротких радиоволн на взволнованной поверхности моря удается интерпретировать сравнительно полно, используя результаты, полученные методом теории возмущений. Так, например, в согласии с теорией наблюдается увеличение рассеянного назад сигнала с ростом степени волнения (см. [267]). Так как радиоволны в этих диапазонах могут распространяться на большие расстояния вдоль поверхности, это позволяет получать данные о степени волнения моря сразу на больших акваториях — десятки и сотни километров.

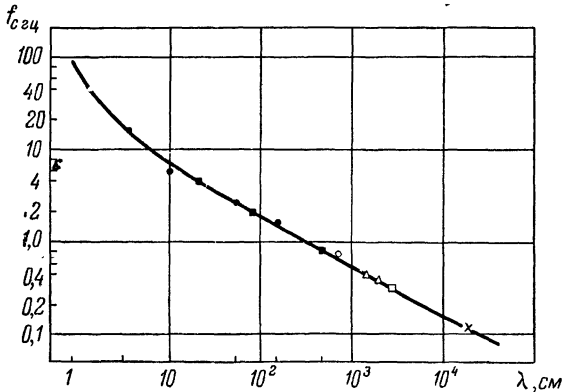


Рис. 78. Зависимость смещения частоты (в герцах) радиосигнала, рассеянного на поверхности моря, от длины волны  $\lambda$  [277]. Кривая построена по формуле (32.1), а точки — экспериментальные данные, полученные разными авторами:  $\times$  — Брауде и др. [272],  $\square$  — Crombie [55],  $\triangle$  — Ingalls and Stone [270],  $\circ$  — Sofaer [271],  $\bullet$  — Розенберг и др. [277],  $\blacksquare$  — Curry [276].

Наблюдавшаяся во время опытов (см. [268]) существенная зависимость интенсивности рассеянного сигнала от угла между направлением облучения и фронтом волны указывает на принципиальную возможность определения направления движения волн (пеленг волны) и тем самым позволяет косвенно судить о направлении ветра на больших расстояниях от точки наблюдения. Эта угловая зависимость также может быть объяснена теоретически [52] на основании метода возмущений для двумерных (цилиндрических) волн на море.

Очень интересные результаты, полностью совпадающие с выводами теории возмущений, были получены для фазы рассеянного сигнала. Экспериментально наблюдаемое смещение частоты ([55], [269] — [272]) радиолокационного сигнала от моря первоначально феноменологически объяснялось эффектом Доплера на движущейся резонансной решетке (см. [55]). Впоследствии более стро-



гий теоретический анализ (см. [56]), основанный на теории возмущений, показал, что это явление по своей физической природе значительно ближе к комбинационному рассеянию волн ([273] — [275]) на системах с колебательными степенями свободы, чем к эффекту Доплера (см. гл. V). Как следует из формулы (13. 2), спектр рассеянного сигнала при этом оказывается смещенным относительно спектра падающего поля на величину  $\omega = \Omega(\mathbf{q}_\perp)$ , где  $\Omega(\mathbf{q}_\perp)$  — закон дисперсии резонансных гармоник в спектре морского волнения, который имеет вид (12. 10). В радиолокационном случае и при малых углах скольжения  $|\mathbf{q}_\perp| = 2k = 4\pi/\lambda$  ( $\lambda$  — длина радиоволны), так что для смещения  $f_c$  частоты в герцах ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) при достаточно большой глубине  $d$  моря ( $4\pi d \gg \lambda$ ) из (12. 10) получаем формулу

$$f_c = \sqrt{\frac{g}{\pi\lambda} + \frac{16\pi\alpha}{\rho\lambda^3}}, \quad (1)$$

которая полностью подтверждается экспериментами многих авторов (см., например, [55], [270] — [272], [276] — [277]) в широком диапазоне длин волн (рис. 78). Таким образом, теория возмущений оказывается вполне применимой к анализу рассеяния на поверхности моря радиоволн в диапазоне десятков метров и более.

При переходе к более коротким волнам — в область дециметров и сантиметров — условия применимости метода возмущений, естественно, нарушаются даже для практически спокойного состояния морской поверхности. Казалось бы, есть все основания предполагать, что в этом диапазоне можно пользоваться методом Кирхгофа. Действительно, характерные размеры неровностей на море имеют порядок нескольких метров (или десятков метров), т. е. значительно больше  $\lambda$ , и углы наклона поверхности незначительны. Однако экспериментальные результаты наблюдений рассеяния звука и радиоволн в указанном диапазоне (дециметры, сантиметры) не подтверждают этого предположения. Многочисленные измерения [278] — [285] зависимости удельного эффективного сечения рассеяния поверхности моря  $\mathcal{E}$  от угла скольжения  $\psi$  согласуются с теоретическими результатами метода Кирхгофа (см. [48], [171] — [175]) только вблизи углов, близких к направлениям зеркального отражения. На рис. 79 приведена

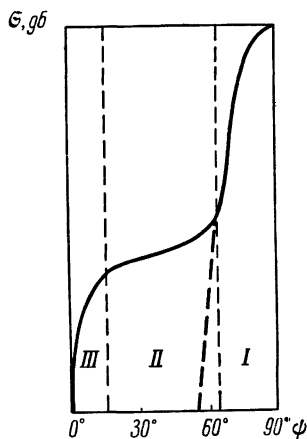


Рис. 79. Типичная зависимость сечения обратного рассеяния  $\mathcal{E}$  от угла скольжения  $\psi$  для широкого класса отражающих поверхностей (рисунок из работы [301]). Пунктирная линия соответствует результатам расчета по методу Кирхгофа (см. рис. 39).

типичная зависимость  $\mathcal{E}(\psi)$  в радиолокационном случае (обратное рассеяние). Качественно такие же кривые получаются при

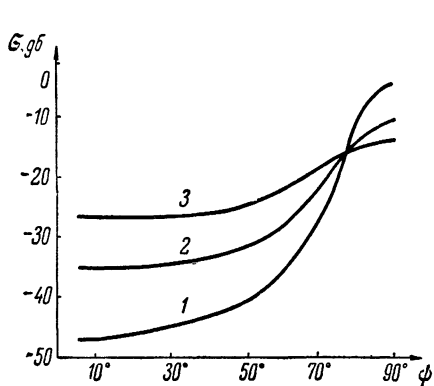


Рис. 80. Сечение обратного рассеяния  $\mathcal{E}$  звука на поверхности моря в зависимости от угла скольжения  $\psi$  при различных скоростях ветра [283]: 1) 7,5 узлов, 2) 12,5 узлов, 3) 17,5 узлов.

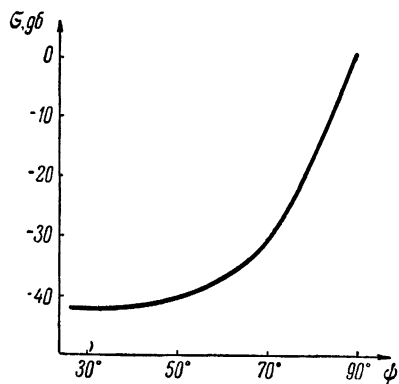


Рис. 81. Сечение обратного рассеяния звука от дна океана при различных углах скольжения [286].

наблюдении обратного рассеяния звука от поверхности моря [283] (рис. 80), морского дна [286] — [288] (рис. 81) и при радиолокации

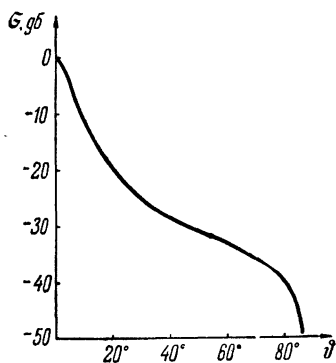


Рис. 82. Радиолокационное сечение рассеяния [289] от поверхности Луны в зависимости от угла падения  $\vartheta = \pi/2 - \psi$ .

Луны [289], [341] — [342] (рис. 82). Характерной особенностью кривой  $\mathcal{E}(\psi)$  во всех этих случаях является довольно четкое разделение на три области (см. рис. 79).

*I* — область углов, близких к направлению зеркального отражения. В радиолокационном случае это соответствует почти вертикальному облучению. Экспериментальные кривые в этой области довольно хорошо совпадают с результатами метода Кирхгофа — пунктирная линия на рис. 79 (ср. с рис. 39). Сравнительно небольшому изменению угла  $\psi$  вблизи нормали к средней поверхности соответствует изменение  $\mathcal{E}$  не несколько десятков децибел.

*II* — широкий интервал углов от почти скользких до почти нормальных. Эта область диффузного рассеяния —  $\mathcal{E}$  здесь меняется всего на несколько децибел при изменении  $\psi$  на десятки градусов дуги.

III — область малых углов  $\psi$  — скользящее облучение поверхности. Изменение  $\psi$  на несколько градусов приводит к существенному уменьшению сечения  $\mathcal{E}$ . При рассеянии звука на поверхности моря из-под воды (рис. 80) поведение  $\mathcal{E}(\psi)$  в этой области не отличается от области диффузного рассеяния II, вероятно, из-за наличия объемных рассеивателей — пузырьков воздуха вблизи поверхности, биологических объектов и т. д.

С помощью метода Кирхгофа не удается объяснить и существенную разницу в сечениях радиолокационного отражения при вертикальной и горизонтальной поляризации излучения. Для не слишком больших углов скольжения, исключающих зеркально отраженный сигнал, различие между сечениями рассеяния вертикальной и горизонтальной поляризации достигает 20—30 дБ (см. [281], [285], [290]—[291]). Кроме того, часто наблюдается деполаризация рассеянного излучения [282] — факт, также трудно объяснимый при расчете рассеяния методом Кирхгофа. Действительно, в этом методе основной вклад в рассеянное поле дают зеркально отражающие участки поверхности, т. е. в радиолокационном случае — участки, нормальные к направлению облучения. Поэтому отражение вертикально и горизонтально поляризованного излучения должно быть одинаковым и деполаризация не должна возникать (см. § 21).

Характер изменения фазы рассеянного на море сигнала в УКВ диапазоне также качественно отличается от результатов измерений на коротких и средних волнах. Помимо смещения частоты на величину  $f_c$  по формуле (1), появляется довольно широкий спектр частот (см. [276], [292]—[294])  $S(f)$  (рис. 83). Форма и ширина спектра частот флуктуаций фазы оказывается зависящей от длины волны  $\lambda$ , направления и силы ветра и от состояния моря.

2. По мере получения приведенных выше экспериментальных фактов о рассеянии акустических и радиоволн сантиметрового и дециметрового диапазонов от поверхности моря (а также отражения звука от дна океана, радиоволн от Луны и т. д.), различными авторами предпринимались попытки теоретического объяснения получаемых на опыте закономерностей. В феноменологических

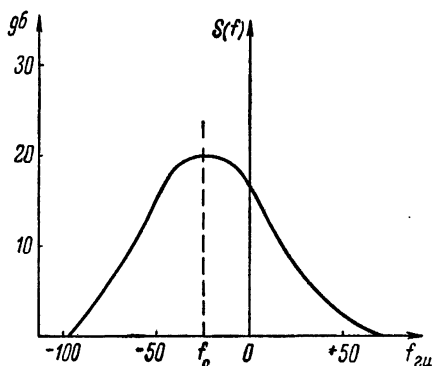


Рис. 83. Частотный спектр звукового сигнала ( $f=85$  кГц), отраженного от поверхности моря [294]. Смещение центральной частоты  $f_c$  совпадает с результатами теории возмущений — формула (32.1).

работах [295] — [302], [401] — [403] отражающая поверхность представлялась в виде совокупности рассеивателей различных размеров. Наличие крупномасштабных ( $\delta \gg \lambda$ ) и гладких рассеивателей с узкими диаграммами направленности приводило к появлению зеркально отраженного сигнала (область I на рис. 79), а мелкие рассеиватели ( $\delta \approx \lambda$ ) с широкой диаграммой направленности обуславливали появление диффузно рассеянного сигнала в области II. Однако вопрос о природе этих рассеивателей, что они представляют собой в действительности и каков истинный механизм рассеяния волн на конкретных поверхностях, при таком подходе остается открытым. Подбором же соответствующей функции распределения рассеивателей по размерам  $\delta$  (или по ширине диаграммы, что одно и то же, ибо угловая ширина диаграммы  $\simeq \lambda/\delta$ ) всегда можно удовлетворительно объяснить любую закономерность  $\mathcal{E}(\psi)$  типа представленных на рис. 79 — 82.

Уплощение кривой  $\mathcal{E}(\psi)$  по мере уменьшения угла скольжения (область II на рис. 79) некоторые авторы объясняют наличием объемных рассеивателей вблизи неровной поверхности: пузырьки воздуха и биологические объекты — для звука [280], [283], [303], капли и брызги — при отражении радиоволн [290]. Если в первом случае для такого предположения есть некоторые основания\*), то существование объемных рассеивателей в виде брызг и капель с размерами порядка  $\lambda$  для сантиметровых и дециметровых радиоволн кажется весьма сомнительным (см., например, [285]).

В работах [304] — [307] для объяснения зависимости  $\mathcal{E}(\psi)$ , типа представленной на рис. 79 — 82, проводится теоретический анализ, в основе которого лежит метод Кирхгофа.

В первых основополагающих работах [48], [171] — [172] по этому методу использовалась плавная функция корреляции неровностей типа  $\exp(-x^2/l^2)$  и, как было отмечено, результаты расчетов совпадали с экспериментальными данными только вблизи зеркальных углов. В упомянутых же работах [304] — [306] функция корреляции задается в виде

$$W(\xi) = e^{-|\xi|/l} \quad (2)$$

или (см. [307])

$$W(\xi) = \begin{cases} e^{-|\xi|/l} & \text{при } |\xi| < \delta, \\ e^{-\xi^2/l^2} & \text{при } |\xi| > \delta. \end{cases} \quad (3)$$

Зависимость  $\mathcal{E}(\psi)$  при этом получается не такой острой, как в работах [48], [170] — [175], и путем подбора параметров  $l$ ,  $\gamma \simeq \sigma/l$

\*) Исследования, проведенные Андреевой с сотрудниками [308], указывают на то, что и при рассеянии звука на поверхности моря роль объемных рассеивателей очень незначительна.

и  $\delta \simeq \lambda$  удается удовлетворительно аппроксимировать экспериментальные кривые (рис. 79—82). Однако использование корреляционных функций (2), (3) при расчете в рамках метода Кирхгофа является совершенно недопустимым. Дело в том, что для применимости метода поверхность должна быть достаточно гладкой и, во всяком случае, иметь всюду вторую производную и непрерывную первую.

Случайные же поверхности с такими корреляционными функциями этому условию не удовлетворяют: в случае (2) в каждой точке поверхности терпит разрыв первая производная, а вторая вообще не существует; в случае (3) первая производная существует в каждой точке, но квазиплоские участки на поверхности имеют размеры порядка  $\delta$  и нужно требовать выполнения неравенства  $\delta \gg \lambda$ . Но последнее требование несовместимо с условием  $\delta \simeq \lambda$ , которое обеспечивает совпадение расчетной кривой  $\mathcal{E}(\psi)$  с экспериментом. Поэтому теоретические расчеты, использующие корреляционные функции вида (2), (3) или им подобные, с разрывом первой производной, нельзя считать корректными (см. по этому поводу [309]), несмотря на хорошее совпадение экспериментальных и теоретических кривых в некоторых случаях [289].

Представление рассеивающей поверхности (моря, Луны и т. д.) в виде совокупности разномасштабных неровностей [214], [310]  $\zeta(\mathbf{r}) = \zeta_1(\mathbf{r}) + \zeta_2(\mathbf{r}) + \dots$ , достаточно крупных, однако, чтобы рассеяние от всех них можно было считать методом Кирхгофа, также не позволяет объяснить указанный характер  $\mathcal{E}(\psi)$ , если, конечно, пользоваться «хорошей» функцией корреляции (в отличие от работы [214]) для каждого слагаемого  $\zeta_i(\mathbf{r})$ . Наличие нескольких типов неровностей приводит к увеличению эффективного угла наклона поверхности, и, как показано в [1], окончательные результаты для этого случая получаются из формул работы [48] заменой \*)

$$\bar{\gamma}^2 \rightarrow \bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2 + \dots \text{ где } \bar{\gamma}_i^2 = \overline{(\nabla \zeta_i)^2}.$$

Таким образом, хотя и происходит расширение теоретической кривой  $\mathcal{E}(\psi)$ , но ввиду предполагаемой всегда малости углов наклона  $\bar{\gamma}_i^2 \ll 1$  оно недостаточно для объяснения экспериментальных результатов.

Теоретических исследований, посвященных изучению частотного спектра радиолокационного сигнала от моря в УКВ диапазоне, сравнительно немного. В работе [277] уширение спектра частично (приблизительно на 40%) объясняется пульсациями

\*) При этом слагаемые  $\zeta_i(\mathbf{r})$  считаются независимыми, хотя учет возможной корреляции и не вносит ничего принципиально нового [311], [343].

ветрового сноса поверхности воды. В сообщении [312] конечная ширина спектра фазовых флуктуаций при измерениях обратного рассеяния звука в бассейне [293] объясняется только шириной диаграммы облучателя и приемника. Исходным пунктом при выборе модели поверхности моря, используемой для расчетов сечения рассеяния, поляризации и спектра отраженного поля в работе [58], послужил следующий экспериментальный факт. Данные измерений смещения частоты рассеянного на море сигнала согласуются с формулой (1) в широком диапазоне длин волн — от сотен метров до миллиметров (см. рис. 78). Для очень коротких волн (дециметры, миллиметры) спектр частот расширяется по мере уменьшения  $\lambda$ , но максимум спектра всегда сдвинут относительно несущей частоты на величину, совпадающую с рассчитанной по формуле (1). Между тем эта формула была получена в § 13 на основании теории возмущений, которая заведомо неприменима к случаю рассеяния радиоволн УКВ диапазона на поверхности моря — неровности на море, как правило, велики по сравнению с длинами волн этого диапазона. Поэтому естественно предположить, что рассеяние от моря обусловлено в основном мелкой рябью с линейными размерами  $l \simeq \lambda$ , отражение от которой можно считать методом возмущений — углы наклона ряби малы, так что ее характерная высота  $\sigma \ll \lambda$ .

Впервые такая модель поверхности — совокупность мелкой ряби, к которой применима теория возмущений, и крупных неровностей, рассеяние от которых можно считать методом Кирхгофа, — была предложена Курьяновым в работе [57] для анализа отражения звука от абсолютно мягкой и абсолютно жесткой границы. В работе Семенова [313] этот метод был распространен на электродинамический случай в применении к рассеянию радиоволн на поверхности суши. Затем в работе [314] была рассмотрена задача о рассеянии электромагнитных волн на шероховатых объектах правильной формы — типа шара, цилиндра и т. д. — для которых известна функция Грина невозмущенной задачи. Основные результаты были получены для идеально проводящего цилиндра, покрытого мелкими неровностями. Наконец, следует упомянуть работу [291], где деполяризация радиолокационного сигнала от моря объяснялась рассеянием от диполей, хаотически расположенных на крупных неровностях морской поверхности — видимых волнах. Несмотря на некоторую искусственность, такая модель идейно близка к модели Курьянова [57] и Мицнера [314].

Решению задачи дифракции на шероховатой, но в среднем не плоской поверхности методом возмущений посвящен следующий параграф. Если средняя поверхность также случайная, то мы естественным образом переходим к упомянутой выше двухмасштабной модели,

### § 33. Метод возмущений для криволинейной поверхности

В настоящем параграфе мы покажем, каким образом метод возмущений, развитый в §§ 5—18 для статистически неровной, но в среднем плоской поверхности, может быть обобщен на тот случай, когда невозмущенная (средняя) поверхность не является плоскостью.

1. Рассмотрение начнем с наиболее простого случая дифракции скалярного волнового поля  $U$  на абсолютно мягкой поверхности  $\Sigma$ , которая получается в результате случайных (однако достаточно малых) искажений некоторой, в значительной степени произвольной, поверхности  $S$ . Решение задачи дифракции на этой невозмущенной поверхности предполагается известным, т. е. в конечном счете мы знаем функцию Грина  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ , которая удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2) G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$$

и граничному условию

$$G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_S) = 0, \text{ где } \mathbf{r}_S \in S. \quad (1)$$

Нормальные отклонения поверхности  $\Sigma$  от поверхности  $S$ , как и в § 30, мы будем описывать с помощью случайной функции  $\zeta(\mathbf{r}_S)$ , так что уравнение поверхности  $\Sigma$  может быть записано в виде

$$\mathbf{r}_\Sigma = \mathbf{r}_S + N(\mathbf{r}_S) \zeta(\mathbf{r}_S); \quad \mathbf{r}_\Sigma \in \Sigma. \quad (2)$$

Здесь через  $N(\mathbf{r}_S)$  обозначен единичный вектор нормали к поверхности  $S$  в точке  $\mathbf{r}_S$  (см. рис. 72). Граничное условие для поля  $U$  на поверхности  $\Sigma$  имеет вид

$$U(\mathbf{r}_\Sigma) = 0. \quad (3)$$

Предполагая нормальные отклонения  $\Sigma$  от  $S$  достаточно малыми (критерии малости здесь такие же, как и в § 5 для случая плоской поверхности), поле  $U(\mathbf{r}_\Sigma)$  можно разложить в ряд по степеням  $\zeta$  около средней поверхности

$$U(\mathbf{r}_\Sigma) \approx U(\mathbf{r}_S) + \zeta(\mathbf{r}_S) \frac{\partial U(\mathbf{r}_S)}{\partial N(\mathbf{r}_S)} = 0. \quad (4)$$

Усредним теперь это выражение по всем реализациям случайной функции  $\zeta(\mathbf{r}_S)$ , предполагая, что  $\bar{\zeta} = 0$ , и затем вычтем из неусредненного. Как и в § 5, такая процедура приводит к системе связанных

граничных условий для среднего поля  $\bar{U}$  и флуктуирующей добавки  $u$  (уже на средней поверхности  $S$ ):

$$\bar{U}(r) + \overline{\zeta(r) \frac{\partial u(r)}{\partial N}} = 0, \quad r \in S, \quad (5a)$$

$$u(r) + \zeta(r) \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial N} + \left\{ \zeta(r) \frac{\partial u(r)}{\partial N} - \overline{\zeta(r) \frac{\partial u(r)}{\partial N}} \right\} = 0. \quad (5b)$$

Здесь и в дальнейшем уже можно опустить индекс  $s$  у радиус-вектора  $r \in S$ , так как векторы  $r_s$  ниже не встретятся. При выполнении неравенств (5.38) – (5.41) выражением, стоящим в фигурной скобке (5б), можно пренебречь, и граничные условия (5а, б) по внешнему виду совпадают с формулами (5.5а, б), отличаясь от них лишь тем, что вместо производных по  $z$  в них входят нормальные производные к поверхности  $S$ , а сами они относятся не к плоскости  $z=0$ , а к произвольной криволинейной поверхности (достаточно гладкой, однако, чтобы в каждой ее точке можно было определить однозначно вектор нормали).

Из граничного условия (5б) с помощью формулы Грина (1.4) находим поле  $u(\mathbf{R})$  в любой пространственной точке  $\mathbf{R}$ :

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial N} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial N} \zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r})}{\partial N} d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Различие в знаках по сравнению с (1.4) связано с переопределением направления нормали  $\mathbf{N}$ : в этом параграфе всюду считается, что вектор  $\mathbf{N}$  направлен в то же полупространство, где расположены источник и точка наблюдения. Подставляя теперь (6) в (5а), мы приходим к нелокальному граничному условию для среднего поля  $\bar{U}$  на поверхности  $S$ :

$$\bar{U}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \lim_{\mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{r}' \in S} \frac{\partial}{\partial N} \int_S \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}')}{\partial N'} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r}')}{\partial N'} d\mathbf{r}' \quad (7)$$

( $\frac{\partial}{\partial N}$  и  $\frac{\partial}{\partial N'}$  обозначают нормальные производные к  $S$  в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  соответственно). Заметим, что с помощью проделанной выше процедуры (усреднение и вычитание) флуктуационное поле удалось исключить вообще из рассмотрения при решении задачи об отыскании среднего поля. Действительно, граничное условие (7) в совокупности с уравнением Гельмгольца достаточно для нахождения когерентной составляющей  $\bar{U}$ . Легко видеть, что формула (7) является обобщением граничного условия (5.7) на случай криволинейной поверхности  $S$  и переходит в него, если  $S$  – плоскость.



В работах [125], [315] было получено аналогичное граничное условие для когерентной составляющей электромагнитного поля, распространяющегося над слабо возмущенной сферической поверхностью, и вычислена интенсивность флуктуаций рассеянного поля. Функция Грина  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$  в этом случае хорошо известна — см. формулу (2.46). Формулы (6), (7) могут служить отправным пунктом при решении задачи рассеяния на простейших шероховатых поверхностях — сфере, цилиндре, эллипсоиде, для которых функции Грина  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$  хорошо изучены в классических работах по дифракции.

2. В общем случае произвольной поверхности  $S$  трудность состоит не только в решении интегрального уравнения (7), но и в определении явного вида ядра этого уравнения — функции Грина «нулевого приближения»  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ . Однако, если характерные радиусы кривизны поверхности  $S$  достаточно велики по сравнению с длиной волны излучения, для определения  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$  можно воспользоваться методом касательной плоскости (методом Кирхгофа). Так как основная идея этого метода состоит в том, что при достаточной гладкости поверхности поле вблизи нее имеет ту же структуру, что и при отражении от плоскости, то в качестве функции Грина  $G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$  мы можем взять функцию Грина  $G_-(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$  касательной плоскости [ср. с (1.6)]:

$$G_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \rightarrow G_-(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{R}'_0 - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}'_0 - \mathbf{r}|}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{R}'_0$  — радиус-вектор зеркального отражения источника  $\mathbf{R}_0$  в плоскости, касательной к поверхности. Тогда задача об определении среднего поля, рассеянного на такой поверхности, сводится к нахождению поля, отраженного от гладкой поверхности  $S$ , но уже не абсолютно мягкой, а с эффективным адмитансом  $\eta_\mu$ , который определяется по той же формуле (5.12), что и при отражении от плоскости. Легко показать с помощью операции усреднения и вычитания (но примененной к более сложным граничным условиям на  $\Sigma$ ), что аналогичная ситуация имеет место и в общем случае, когда поверхность  $\Sigma$  разделяет две среды с разными  $\rho$  и  $\nu$  — в акустике и  $\epsilon, \mu$  — для электромагнитных волн. Например, при распространении радиоволн вдоль сферической поверхности Земли неровности ее поверхности приводят к тому, что среднее поле описывается той же функцией ослабления  $Y$  [см. (2.45), (2.46)], что и в случае гладкой сферы, но с другим эффективным импедансом  $\eta_\nu = \eta + \eta_\nu$ , где  $\eta$  — импеданс гладкой поверхности, а  $\eta_\nu$  — добавка к нему за счет шероховатостей [см. (7.22)]. Таким образом, вычисление среднего поля, рассеянного на крупномасштабной поверхности (для которой применим метод Кирхгофа), покрытой малыми шероховатостями (настолько малыми, что можно

пользоваться методом возмущений), сводится к определению коэффициента отражения от статистически неровной, но в среднем плоской поверхности — задаче, решению которой была посвящена гл. III.

3. Для определения флуктуаций рассеянного поля воспользуемся формулой (6), в которой  $G_0$  заменяется на  $G_-$  по формуле (8). Что же касается нормальной производной среднего поля  $\bar{U}$ , то в (6) ее можно заменить на  $\frac{\partial}{\partial N} U_0$  ( $U_0$  — поле, рассеянное на невозмущенной поверхности  $S$ ), так как отличие  $\bar{U}$  от  $U_0$  мало — в меру малости эффективного адмитанса  $\eta_\mu$  (5.12). Обозначая, как и раньше (см. рис. 72), через  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$  волновые векторы падающей и отраженной волны, имеем

$$\frac{\partial G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial N} \rightarrow \frac{\partial G_-(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial N} = -2i(\mathbf{x}N) \frac{e^{i\mathbf{k}R_2}}{R_2}, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \bar{U}(\mathbf{r})}{\partial N} \rightarrow \frac{\partial U_0(\mathbf{r})}{\partial N} = 2i(\mathbf{k}, N) \frac{e^{i\mathbf{k}R_1}}{R_1}, \quad (9b)$$

где  $R_1, R_2$  — расстояния от источника и точки наблюдения до точки  $\mathbf{r} \in S$ , а направление векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$ , так же как и нормали  $N$ , вообще говоря, зависит от  $\mathbf{r}$ . Если, однако, источник и точка наблюдения находятся в зоне Фраунгофера, то  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{x}$  постоянны в пределах рассеивающей области, так что из (6) следует:

$$u(\mathbf{R}) = -\frac{e^{i\mathbf{k}(R_{10} + R_{20})}}{\pi R_{10} R_{20}} \int_S e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} (\mathbf{x}N) (\mathbf{k}N) \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{k}$ , а  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — расстояния от источника и точки наблюдения до начала координат, выбранного в произвольной точке рассеивающей поверхности. Такое представление для поля  $u(\mathbf{R})$  было впервые получено Курьяновым в работе [57]. Для сечения рассеяния  $\mathfrak{S}(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  из (10) получаем\*)

$$\mathfrak{S}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int_S \int_S (\mathbf{x}N) (\mathbf{x}N') (\mathbf{k}N) (\mathbf{k}N') e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (11)$$

Если радиусы кривизны поверхности  $S$  достаточно велики по сравнению с радиусами корреляции случайной функции  $\zeta(\mathbf{r})$ , то на расстояниях порядка нескольких радиусов корреляции направление нормали к средней поверхности остается постоянным. Тогда

\*) В дальнейшем мы рассматриваем только поле первого приближения по параметрам теории возмущений  $u(\mathbf{R})$ . Полное сечение рассеяния является суммой сечения рассеяния, вычисленного в приближении Кирхгофа для средней поверхности  $S$  (с эффективным коэффициентом отражения), и сечения рассеяния (11) во флуктуирующую компоненту  $u(\mathbf{R})$ .

в формуле (11) можно перейти к новой переменной  $\rho = r' - r$  и интегрирование по ней проводить уже не по поверхности  $S$ , а по плоскости, касательной к ней в точке  $r$ :

$$\mathfrak{E}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int_S (\boldsymbol{\kappa}N)^2 (\mathbf{k}N)^2 dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_{\perp}l} W(\rho) d\rho, \quad (12)$$

где  $q_{\perp} = \mathbf{q} - N(N\mathbf{q})$  — проекция вектора  $\mathbf{q}$  на касательную плоскость — также является функцией точки  $r \in S$ . Эта формула является обобщением выражения (8.22) на случай не плоской средней поверхности. В частности, для сечения обратного рассеяния ( $\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{k}$ ) из (12) следует

$$\mathfrak{E} = 4\sigma^2 \int_S (\mathbf{k}N)^4 \tilde{W}(2\mathbf{k}_{\perp}) dr \quad (13)$$

[ср. с (8.23)]. Следуя Курьянову [57], зададим корреляционную функцию в виде

$$W(\rho) = 2 \frac{\mathcal{J}_1(\rho/l)}{\rho/l}. \quad (14)$$

Выбор такого вида функции корреляции не имеет принципиального значения, но значительно облегчает последующие расчеты, так как пространственный спектр  $\tilde{W}(\mathbf{q}_{\perp})$ , определяемый формулой (8.17), в этом случае имеет очень простую форму:

$$\tilde{W}(\mathbf{q}_{\perp}) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{\mathcal{J}_1(\rho/l)}{\rho/l} e^{-iq_{\perp}l} = \begin{cases} l^2/\pi & \text{при } q_{\perp}l < 1, \\ 0 & \text{при } q_{\perp}l > 1. \end{cases} \quad (15)$$

Считая для простоты, что при всех наклонах поверхности  $S$  выполняется соотношение  $q_{\perp}l < 1$  (в противном случае из интеграла по  $d\mathbf{r}$  в (12) и (13) следует исключить те участки поверхности, где это неравенство не выполняется), получаем формулу для сечения обратного рассеяния:

$$\mathfrak{E} = \frac{4\sigma^2 l^2}{\pi} \int_S (\mathbf{k}N)^4 dr. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим обратное рассеяние на двумерной цилиндрической поверхности  $S$  синусоидального профиля

$$Z(x, y) = a \cos px, \quad (17)$$

покрытой малыми статистическими шероховатостями с корреляционной функцией (14). Выберем координатную плоскость  $\{zx\}$  в качестве плоскости падения и обозначим через  $\psi$  угол между

направлением оси  $x$  и вектором  $\mathbf{k}$  ( $\psi$  — угол скольжения). Размер освещенной площадки вдоль осей  $x$  и  $y$  обозначим через  $L_x$  и  $L_y$  соответственно, причем предположим, что на  $L_x$  укладывается целое число  $\nu_x$  периодов синусоиды  $\Lambda = 2\pi/\rho$ . Последнее ограничение не играет существенной роли и его можно не накладывать, если  $\nu_x \gg 1$ . Интеграл (16) по поверхности (17) легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\psi) &= \frac{4}{\pi} \sigma^2 l^2 L_y \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \frac{(k_z - k_x z_x)^4}{(1 + z_x^2)^{3/2}} dx = \\ &= \frac{4}{\pi} (k\sigma)^2 (kl)^2 L_y \nu_x \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{(\sin \psi + ap \cos \psi \sin px)^4 dx}{(1 + a^2 \rho^2 \sin^2 px)^{3/2}} = \\ &= \frac{4}{\pi} (k\sigma)^2 (kl)^2 S_0 \sin^4 \psi \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 + ap \operatorname{ctg} \psi \sin \varphi)^4}{(1 + a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $S_0 = L_x L_y$  — площадь освещенной поверхности, а  $z_x = dz/dx$ . Из сравнения (18) с формулой (8.23), в которую следует подставить явный вид пространственного спектра (15), видно, что сечение рассеяния на статистически шероховатой синусоидальной поверхности отличается от сечения рассеяния на плоскости, покрытой теми же шероховатостями, множителем

$$C(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 + ap \operatorname{ctg} \psi \sin \varphi)^4}{(1 + a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \quad (19)$$

Путем несложных преобразований этот интеграл сводится к полным эллиптическим интегралам  $\mathbf{K}(\alpha)$  и  $\mathbf{E}(\alpha)$  (см. [316], стр. 177),

$$\begin{aligned} C(\psi) = C\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{2}{\pi \sqrt{1 + a^2 \rho^2}} \left\{ 6 \operatorname{tg}^2 \theta [\mathbf{K}(\alpha) - \mathbf{E}(\alpha)] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{tg}^4 \theta \left[ \left(1 + \frac{a^2 \rho^2}{2}\right) \mathbf{E}(\alpha) - \mathbf{K}(\alpha) \right] + \mathbf{E}(\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\alpha = \arcsin \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} \right\}, \quad \text{а } \alpha_0 = \operatorname{arctg} ap$$

— максимальная крутизна синусоидальной поверхности. На рис. 84 в логарифмическом масштабе приведена зависимость множителя  $C$  от угла падения  $\theta = \pi/2 - \psi$ , взятая из работы [57].

Из графиков видно, что при скользющем облучении поверхности (большие углы падения  $\theta \approx \pi/2$ ) сечение рассеяния на синусоиде, покрытой шероховатостями, может намного превышать сечение рассеяния от шероховатой плоскости. В последнем случае

сечение рассеяния довольно быстро убывает с уменьшением угла скольжения:  $\mathfrak{S} \sim \sin^4 \psi$ . Наличие же крупномасштабных синусоидальных неровностей приводит к тому, что даже при малых углах скольжения (относительно средней плоскости  $z=0$ ) некоторые участки шероховатой поверхности облучаются под большими углами  $\simeq \psi + \alpha$ , а так как сечение рассеяния очень быстро возрастает с увеличением локального угла скольжения, то это и приводит к росту полного сечения рассеяния (18).

Если поверхность  $S$  также является случайной, то для нахождения среднего сечения рассеяния необходимо усреднить интеграл (16) по всем реализациям случайной функции  $Z(x, y)$ . Предполагая, что наклонны  $\Gamma_x = dz/dx$ ,  $\Gamma_y = dz/dy$  этих крупномасштабных неровностей распределены по нормальному закону

$$w(\Gamma_x, \Gamma_y) = \frac{1}{2\pi\Gamma_0^2} \exp\left[-\frac{\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2}{2\Gamma_0^2}\right], \quad (21)$$

из (16) получаем следующее выражение для сечения обратного рассеяния:

$$\mathfrak{S}(\psi) = \frac{4\sigma^2 l^2}{\pi} \left\langle \int_S (kN)^4 dr \right\rangle = \frac{4}{\pi} (k\sigma)^2 (kl)^2 S \sin^4 \psi C(\psi). \quad (22)$$

Здесь угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по ансамблю реализаций случайной поверхности  $S$ , а множитель  $C(\psi)$ , возникающий из-за того, что поверхность  $S$  — не плоская, имеет вид

$$C(\psi) = \frac{1}{2\pi\Gamma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \Gamma_x \operatorname{ctg} \psi)^4}{(1 + \Gamma_x^2 + \Gamma_y^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2}{2\Gamma_0^2}\right) d\Gamma_x d\Gamma_y. \quad (23)$$

Путем несложных, но довольно громоздких преобразований, этот интеграл так же как и в случае поверхности с синусоидальным профилем, может быть сведен к табулированным функциям (в данном случае — это интегралы ошибок). На рис. 85 приведены результаты такого расчета, выполненного в работе [57], для различных дисперсий углов наклона средней поверхности

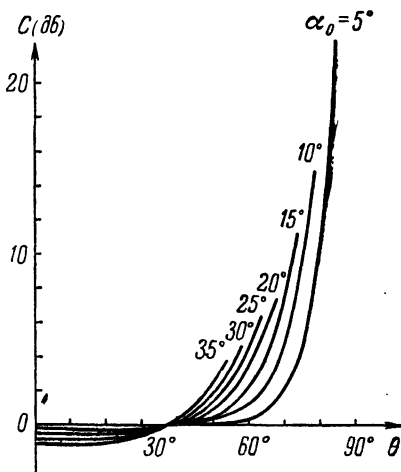


Рис. 84.

$\alpha_0 = \text{arctg } \Gamma_0$ . Видно, что наличие крупномасштабных шероховатостей приводит к резкому увеличению интенсивности рассеянного назад сигнала при малых углах скольжения. Физическая причина этого явления та же, что и в случае синусоидальной поверхности: из-за крупномасштабных неровностей мелкая рябь, которая играет основную роль при рассеянии назад под малыми углами, облучается под углом, не совпадающим с углом скольжения  $\psi$  относительно плоскости  $\{xy\}$ .

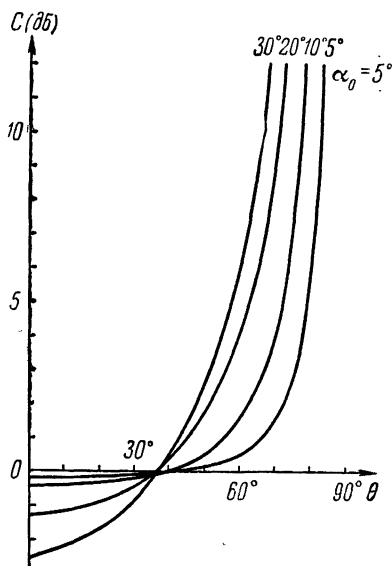


Рис. 85.

4. При исследовании рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящей случайной поверхности с неровностями двух типов — «мелкой ряби» (при расчете рассеяния на которой можно применять теорию возмущений) и «крупных волн» (характерные радиусы кривизны которых настолько велики, что отражение от них можно рассчитывать по методу касательной плоскости) — используем тот же прием, что и для скалярных волн, рассеивающихся на абсолютно мягкой поверхности.

Граничное условие для электрического поля  $E$  имеет вид

$$[nE]_{\Sigma} = 0, \quad (24)$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к случайной поверхности  $\Sigma$ , уравнение которой по-прежнему запишем в форме (2). Предполагая нормальные отклонения  $\zeta(r_s)$  и наклоны  $\gamma = \nabla_s \zeta(r_s)$  поверхности  $\Sigma$  относительно средней поверхности  $S$  достаточно малыми,

$$(k\zeta)^2 \ll 1, \quad \gamma^2 \ll 1, \quad (25)$$

граничное условие (24) можно перенести на среднюю поверхность  $S$ , если воспользоваться разложениями

$$E(r_{\Sigma}) \approx E(r_s) + \zeta(r_s) (N \nabla) E(r_s), \quad n \approx N - \gamma \quad (26)$$

( $N$  — нормаль к поверхности  $S$ ). Рассеянное поле будем искать в виде суммы поля нулевого приближения  $E_0$  (отраженного от гладкой поверхности  $S$ ) и поля  $e$  первого порядка по малым параметрам теории возмущений  $k\zeta$  и  $\gamma$ . Подставив (26) в (24) и отделяя затем слагаемые разных порядков, получаем следующую

систему граничных условий для  $\mathcal{E}_0$  и  $e$  на средней поверхности  $S$ :

$$[N, \mathcal{E}_0] = 0, \quad (27a)$$

$$[N, e] = [\gamma, \mathcal{E}_0] - \zeta [N, (N\nabla) \mathcal{E}_0]. \quad (27b)$$

Если поверхность  $S$  достаточно гладкая, так что для нее применим метод Кирхгофа, то из граничного условия (27a) для поля нулевого приближения  $\mathcal{E}_0$  на поверхности  $S$  следуют формулы

$$\mathcal{E}_0 = 2N (NE_0), \quad \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial N} = 2i (kN) [N [E_0, N]], \quad (28)$$

где  $k_0$  — волновой вектор падающей волны  $E_0$ , которую зададим в виде

$$E_0 = p_0 E_0 \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \quad (29)$$

( $p_0$  — единичный вектор поляризации,  $E_0$  — амплитуда,  $R_1$  — расстояние от источника до точки  $r \in S$ ). Подставляя (28) в (27b), находим тангенциальные компоненты поля  $e$  на поверхности  $S$ :

$$[Ne] = 2 (NE_0) [\gamma N] - 2i\zeta (kN) [NE_0]. \quad (30)$$

Зная тангенциальные компоненты поля  $e$  на поверхности  $S$ , можно найти рассеянное поле в любой пространственной точке  $R$  по формуле Грина (2.10):

$$(ep) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathcal{G}^{(p)} [Ne]) dr. \quad (31)$$

Здесь единичный вектор  $p$  определяет поляризацию принимаемого излучения, а векторная функция Грина  $\mathcal{G}^{(p)}$  имеет смысл напряженности магнитного поля, создаваемого на поверхности  $S$  единичным диполем  $p$  (который находится в точке наблюдения), при условии, что поверхность  $S$  — идеально проводящая. Если по-прежнему считать поверхность  $S$  достаточно гладкой, так что в каждой точке она может быть заменена касательной плоскостью, то  $\mathcal{G}^{(p)}$  представляется в виде суммы магнитного поля, создаваемого диполем  $p$  и его зеркальным отражением в этой плоскости:

$$\mathcal{G}^{(p)} = 2i [N [N [\kappa p]]] \frac{e^{ikR_2}}{R_2}, \quad \kappa = -k\nabla_S R_2, \quad (32)$$

( $R_2$  — расстояние между точкой наблюдения и переменной точкой  $r$  на поверхности  $S$ , по которой происходит интегрирование в (31)). Подставляя (30) и (32) в формулу (31) и считая, что источник и

точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера относительно поверхности  $S$ , получим \*)

$$(ep) = \frac{ie^{ik(R_{10} + R_{20})}}{\pi R_{10} R_{20}} E_0 \times \int_S ([N[N[\chi P]]], (Np_0)[\gamma N] - i\zeta(kN)[Np_0]) e^{-iqr} dr. \quad (33)$$

Учитывая, что расстояния  $l$ , на которых существенно изменяются  $\zeta(r)$  и  $\gamma(r)$ , значительно меньше характерных линейных размеров  $\Lambda$  крупномасштабных неровностей ( $\Lambda \gg l, \lambda$ ), в (33) можно заменить  $\gamma \rightarrow -iq\zeta$ . В этом легко убедиться, интегрируя в (33) по частям член, содержащий  $\gamma$ , и пренебрегая краевым эффектом ( $S \gg \lambda^2$ ). Выполняя затем в (33) несложные векторные преобразования, получаем окончательную формулу для напряженности рассеянного поля  $e$  с поляризацией  $p$

$$(ep) = \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{\pi R_{10} R_{20}} E_0 \times \int_S ([p\chi], (kN)[Np_0] - (Np_0)[Nq]) \zeta(r) e^{-iqr} dr. \quad (34)$$

В частном случае двумерных цилиндрических неровностей с образующими, перпендикулярными к волновому вектору  $k$ , при горизонтальной поляризации падающего и принимаемого излучения и для точки наблюдения, лежащей в плоскости падения, из (34) вытекает формула, полностью аналогичная той, которая была получена в предыдущем пункте для рассеяния звука на абсолютно мягкой поверхности [ср. с (10)]:

$$(ep) = (ep_0) = - \frac{e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{\pi R_{10} R_{20}} E_0 \int_S (kN)(\chi N) \zeta(r) e^{-iqr} dr. \quad (35)$$

Это, по-видимому, единственный случай, когда выражения для электромагнитного поля, рассеянного на идеально проводящей поверхности, и звука, отраженного от абсолютно мягкой поверхности, в точности совпадают по форме. Связано это с тем, что в приведенном выше примере деполяризация электромагнитного поля не возникает — в плоскости падения рассеянное излучение остается горизонтально поляризованным, а граничное условие для горизонтальной компоненты поля имеет тот же вид, что и для скалярного потенциала  $u$  на абсолютно мягкой поверхности.

В тех случаях, когда нельзя поверхность считать идеально проводящей, формулы для рассеянного поля значительно усложняются по сравнению с (34). Не прodelывая довольно громозд-

\*) Так же как и в § 10, можно показать, что при вычислении вторых моментов представлением рассеянного поля в форме (33) можно пользоваться не только в зоне Фраунгофера, но и в зоне разделения спектров (10.13).



ких вычислений, мы приведем здесь без вывода результаты расчета, проведенного по той же схеме, что и в § 9: сначала граничные условия переносятся на среднюю поверхность  $S$  (в § 9 это была плоскость), а затем рассеянное поле ищем в виде разложения по плоским волнам. Если ввести, как и в § 9, единичные векторы направлений для падающей и отраженной волн  $\alpha = k/k$  и  $\beta = \kappa/k$ , то рассеянное поле  $e$  (в первом порядке по теории возмущений) представляется в виде поверхностного интеграла

$$e(\alpha, \beta) = \frac{k^2 e^{ik(R_{10} + R_{20})}}{\pi R_{10} R_{20}} E_0 \int_S \mathfrak{F}(p_0, p, \alpha, \beta, N) \zeta(r) e^{-iqr} dr, \quad (36)$$

где векторная функция  $\mathfrak{F}(p_0, p, \alpha, \beta, N)$  определяется по формуле (9.15), и следует также учитывать, что направление нормали  $N$ , в отличие от случая шероховатой плоскости, теперь является функцией точки  $r \in S$ , т. е. зависит от переменной интегрирования в (36).

В радиолокационном случае  $\alpha = -\beta$  из формулы (36) получаем

$$ep = \frac{k^2 (\varepsilon - 1) e^{2ikR_0}}{\pi R_0^2} E_0 \int_S \left\{ \left( \frac{a}{a+b} \right)^2 (pp_0) + \right. \\ \left. + 2(\varepsilon - 1) \frac{a^2 b}{(b+ae)^2 (a+b)} (np)(np_0) \right\} e^{2ik\beta r} \zeta(r) dr, \quad (37)$$

где  $a = N\beta$  и  $b = \sqrt{\varepsilon - 1 + a^2}$  — функции наклонов поверхности  $S$  в каждой точке  $r \in S$ . Эта формула существенно упрощается, если поверхность можно считать идеально проводящей. Совершим в (37) предельный переход к  $|\varepsilon| \rightarrow \infty$  и учтем в явном виде возможные затенения поверхности, введя под интеграл ступенчатую функцию  $\eta(r)$ , которая равна единице на освещенных участках поверхности  $S$  и обращается в нуль в тени. Таким образом, мы получаем окончательно

$$ep = \frac{e^{2ikR_0}}{\pi R_0^2} k^2 E_0 \int_S \left\{ (p_0 p) (N\beta)^2 + 2(Np)(Np_0) \right\} e^{2ik\beta r} \zeta(r) \eta(r) dr. \quad (38)$$

Полученные выше результаты могут служить основой для решения задачи дифракции на широком классе случайных поверхностей с двумя масштабами шероховатостей, если считать среднюю поверхность  $S$  также случайной. В работах [58], [318] такая модель была использована для интерпретации экспериментальных данных по рассеянию радиоволн УКВ диапазона взволнованной поверхностью моря. Использование реальных пространственно-временных спектров колебаний морской поверхности позволяет при этом объяснить как общий ход зависимости сечений рассеяния от угла скольжения, так и более тонкие характеристики отраженного сигнала, связанные с поляризацией, спектром флуктуаций амплитуды и фазы и т. д.

## МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

## § 34. Диаграммы Фейнмана

Рассмотренные в предыдущих главах задачи дифракции на статистически нерегулярной поверхности относятся в основном к тем случаям, когда можно не учитывать явления многократного рассеяния волн (исключение в этом отношении составляет, пожалуй, содержание третьей главы). Как при рассеянии на неограниченной шероховатой поверхности (когда источник и точка наблюдения расположены достаточно высоко), так и в случае фраунгоферовой дифракции на шероховатом теле (плоская площадка, шар, цилиндр и т.д.), волновое поле взаимодействует с неровностями лишь на ограниченном участке поверхности, после чего отраженная волна распространяется в свободном пространстве, уже «не чувствуя» шероховатостей границы.

Именно в этом смысле можно говорить об «однократном» рассеянии падающей волны; хотя сам акт рассеяния может состоять из ряда последовательных отражений, однако, все они локализованы на ограниченном участке поверхности. При достаточно малой, по сравнению с длиной волны, высоте неровностей эти задачи можно решать по теории возмущений и, как правило, достаточно ограничиться первым (борновским) приближением. Важно отметить, что при подобном характере рассеяния малые возмущения границы приводят лишь к малым искажениям рассеянного поля.

Вместе с тем несомненный практический и теоретический интерес представляют явления дифракции, происходящие в областях, ограниченных двумя или более рассеивающими поверхностями — в волноводах, резонаторах, в тонких пленках твердого тела и т. д., а также в полубесконечных областях, когда роль второй границы играет какой-либо «возвращающий» фактор (например, в открытых волноводах — соответствующий профиль зависимости диэлектрической проницаемости от координаты, в твердом теле — магнитное поле, возвращающее электроны к границе и т. д.). В этих случаях волна (частица), однократно рассеянная на неровностях одной из стенок, снова, после отражения от второй границы, рассеивается на той же стенке и т. д. Поэтому поле в точке наблюдения формируется в результате сложения

полей, многократно рассеянных на неровностях, расположенных вдоль всей трассы распространения, так что даже сколь угодно малые возмущения границ на достаточно больших расстояниях могут за счет эффектов накопления привести к существенному искажению картины поля. С этим приходится сталкиваться, например, при создании волноводных линий дальней связи, где, несмотря на специальную обработку внутренней поверхности труб, все же имеются случайные отклонения от идеальной (цилиндрической) формы (см., например, [408]). Их наличие приводит к потере когерентности принимаемого сигнала по отношению к излучаемому, к возникновению паразитных мод и, за счет этого, к затуханию энергии основной волны. Аналогичные процессы имеют место также при распространении волн в природных волноводах — волновод Земля — ионосфера [409], подводный звуковой канал [410], тропосферные волноводы [411], где влияние нерегулярностей особенно существенно, так как флуктуации формы и диэлектрических (акустических) свойств поверхности таких волноводов могут быть весьма большими.

Расчет подобного рода эффектов, проведенный в рамках обычной теории возмущений, учитывающей, как указывалось, лишь однократное рассеяние, является малоэффективным. Результаты, полученные таким образом, например, для случая распространения нормальной волны в волноводе с шероховатыми стенками [382], имеют ограниченную область применимости — они пригодны только тогда, когда размеры неровного участка малы настолько, что амплитуды рассеянных полей невелики по сравнению с амплитудой основной волны.

Поэтому при изучении указанной группы явлений возникает необходимость в теории, которая позволяла бы суммировать поля, многократно перерассеянные на малых нерегулярностях поверхности. В работе [59] была предложена методика, в известной мере удовлетворяющая этим требованиям и заключающаяся в обобщении созданного в свое время для нужд квантовой теории поля метода функций Грина (методика суммирования фейнмановских диаграмм) на случай, когда возмущение содержится не в самом уравнении, как это имеет место в квантовой электродинамике или теории распространения в случайно неоднородных средах [412], а в граничном условии. В работах [39], [60], [61], [413] — [415] этот метод был применен для анализа процессов многократного рассеяния при распространении волн в волноводах со статистически нерегулярными стенками, в работах [4], [416] — для исследования влияния шероховатостей поверхности металла на спектр и затухание электронных магнитных поверхностных уровней. Аналогичная методика использовалась в работах [40], [417] при вычислении плотности состояний и кинетических коэффициентов в тонкой пленке твердого тела с шероховатыми границами.

Ниже приведена формулировка метода функций Грина для довольно общего вида уравнения второго порядка со случайными возмущениями в граничных условиях. В следующих параграфах эти результаты применяются к простейшим волноводным системам с неровными (или неоднородными) границами.

1. Пусть  $\hat{\mathcal{L}}$  — линейный эрмитов дифференциальный оператор второго порядка, а  $G_0$  — решение уравнения

$$\hat{\mathcal{L}}G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (1)$$

существующее в некоторой области  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_0 \in \mathcal{F}$  трехмерного пространства, ограниченного поверхностью  $S$ , на которой имеет место граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial n} G_0 + \hat{\eta}_0 G_0 = 0, \quad (2)$$

$\partial/\partial n$  означает дифференцирование по нормали к поверхности  $S$ ,  $\hat{\eta}_0$  — линейный интегро-дифференциальный оператор, зависящий от касательных к поверхности  $S$  координат. Такая форма записи граничных условий является наиболее общей. К форме (2), например, приводится граничное условие для нормальной компоненты электрического поля на криволинейной границе раздела двух сред с произвольными диэлектрическими проницаемостями (см. [418]) (оператор  $\hat{\eta}_0$  играет при этом роль нелокального импеданса поверхности); в случае уравнения Шрёдингера граничное условие (2) описывает взаимодействие частиц (или квазичастиц) с короткодействующими поверхностными потенциалами и т. д.

Нас будет интересовать решение уравнения (1) при наличии в граничном условии (2) случайных возмущений, вызванных, например, малыми неровностями поверхности  $S$  либо флуктуациями ее электродинамических или упругих свойств и описываемых добавлением к  $\hat{\eta}_0$  оператора возмущений  $\hat{V}$ , который является, вообще говоря, случайной функцией координат:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} + \hat{\eta}_0 + \hat{V} \right\}_S G = 0. \quad (3)$$

Если, например, имеет место граничное условие типа Леонтовича со случайным импедансом, то (3) запишется в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} + \eta + \delta\eta(S) \right\}_S G = 0.$$

Здесь  $\eta$  — среднее значение импеданса,  $\delta\eta(S)$  — случайная функция, описывающая его флуктуации.

В случае, когда поверхность, ограничивающая область  $\mathcal{F}$ , испытывает случайные отклонения  $\zeta(\mathbf{r})$  от  $S$ , т. е. описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + n(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{r} \in S$ , граничные условия можно перенести на невозмущенную поверхность  $S$  путем разложения (2) по параметру возмущений  $\xi$  и удержания первых неисчезающих членов этого разложения. В результате эффективное граничное условие на поверхности  $S$  примет вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} + \hat{\eta}_0 - \boldsymbol{\gamma} \nabla_{\perp} + \xi \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \hat{\eta}_0 \xi \frac{\partial}{\partial n} + \delta \hat{\eta} \right\}_S G = 0; \quad (5)$$

здесь  $\delta \hat{\eta}$  — оператор, описывающий флуктуации диэлектрических или акустических свойств границы,  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \nabla_{\perp} \xi(\mathbf{r})$  — случайный наклон поверхности,  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla)$  — проекция градиента на касательную к  $S$  плоскость.

2. Будем считать, что нам известно решение «невозмущенной» задачи, т. е. что для области  $\mathcal{D}$  известна функция Грина  $G_0$  уравнения (1) с граничными условиями (2). Нашей целью является выяснение влияния возмущения в граничном условии на решение (1), т. е. отыскание функции Грина  $G$ , удовлетворяющей на границе  $S$  соотношению (3).

Для дальнейшего удобно от дифференциального уравнения (1) с граничным условием (3) перейти, воспользовавшись теоремой Грина, к интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) &= G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ G(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) - G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \right\} d\mathbf{r} = \\ &= G_0 + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ [G \hat{\eta}_0 G_0 - G_0 \hat{\eta}_0 G] + G_0 \hat{V} G \right\} dS = G_0 + \frac{1}{4\pi} \int_S G_0 \hat{V} G dS. \quad (6) \end{aligned}$$

Последнее равенство в (6) является следствием самосопряженности оператора  $\hat{\eta}_0$  (во всех физически интересных случаях  $\hat{\eta}_0$  этим свойством обладает).

Так как в правую часть (6) входит случайный оператор возмущения  $\hat{V}$ , ясно, что искомая величина  $G$ , функционально зависящая от  $\hat{V}$ , также является случайной функцией координат и описывать ее наиболее удобно в рамках статистической теории. Придерживаясь принятой в предыдущих главах последовательности изложения, мы займемся исследованием первых статистических моментов функции Грина.

Получим прежде всего уравнение для функции Грина  $\langle G \rangle \equiv \mathcal{G}$ , усредненной по ансамблю реализаций случайных функций, входящих в оператор возмущения  $\hat{V}$ . Так как прямое усреднение (6) не приводит к цели из-за возникновения коррелятора  $\langle \hat{V} G \rangle$ ,

представим сначала решение уравнения (6) в виде бесконечного ряда итераций:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \hat{V}(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r} + \\ + \frac{1}{(4\pi)^2} \int_S d\mathbf{r}_1 \int_S d\mathbf{r}_2 G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \hat{V}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) + \dots \quad (7)$$

Каждый член этого ряда имеет простой физический смысл. Действительно,  $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  есть, очевидно, невозмущенное поле, пришедшее в точку наблюдения без рассеяния; второй член можно трактовать как поле, создаваемое вторичными источниками, возбуждаемыми на поверхности, т. е. как однократно рассеянную волну, и т. д. Таким образом, (7) есть представление функции Грина в виде бесконечного ряда полей, многократно перерассеянных на возмущениях границы, описываемых оператором  $\hat{V}$  (например, на случайных неровностях поверхности или на флуктуациях импеданса).

Будем считать теперь, что все случайные функции, входящие в  $\hat{V}$  [например,  $\xi(\mathbf{r})$  для статистически неровной поверхности,  $\delta\eta(\mathbf{r})$  — в граничном условии Леонтовича], являются гауссовыми\*). Так как  $\hat{V}$  зависит от величин  $\xi$ ,  $\delta\eta$  и т. д. линейно, то  $\langle \hat{V} \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{V}_1 \hat{V}_2 \hat{V}_3 \rangle = 0$ , и вообще,  $\langle \hat{V}_1 \hat{V}_2 \dots \hat{V}_{2n+1} \rangle = 0$ , а моменты четного порядка выражаются через вторые: момент порядка  $2n$  содержит сумму  $(2n-1)!!$  слагаемых, каждое из которых является произведением  $n$  корреляционных функций  $\langle \hat{V}(\mathbf{r}_i) \hat{V}(\mathbf{r}_k) \rangle$ . Пользуясь этим, произведем усреднение ряда (7):

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \\ + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iint_S G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \langle \hat{V}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}(\mathbf{r}_2) \rangle G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\ + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^4 \iiint_S \int_S G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \langle \hat{V}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}(\mathbf{r}_2) \rangle G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ \times \langle \hat{V}(\mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \hat{V}(\mathbf{r}_4) \rangle G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots \quad (8)$$

Аналитический вид членов ряда (8) весьма громоздок и неудобен для физического анализа. Сопоставим для наглядности выражения,

\*) Основные результаты, которые получены ниже в §§ 35, 36 в приближении Бурре [421] и в «лестничном» приближении (§ 37), оказываются справедливыми и для более широкого класса случайных функций. Кроме того, выводы, сделанные в работе [427], позволяют надеяться, что изложенная ниже методика полностью может быть обобщена и на негауссовы случайные функции.

входящие в (8), с графиками (диаграммами Фейнмана), которые будем строить следующим образом:

искомая усредненная функция Грина  $\mathcal{G}(R, R_0)$  изображается жирной прямой линией:

$$R \text{ ————— } R_0 = \mathcal{G}(R, R_0);$$

функции  $G_0(R, R_0)$  соответствует тонкая сплошная линия

$$R \text{ ————— } R_0 = G_0(R, R_0);$$

пунктирной чертой соединяются те точки, для которых  $\hat{V}(r_1)$  и  $\hat{V}(r_2)$  входят под общий знак усреднения

$$r_1 \text{ --- } r_2 = \langle \hat{V}(r_1) \hat{V}(r_2) \rangle;$$

каждой точке в месте пересечения пунктирной и сплошной линий (вершина графика) соответствует множитель  $1/4\pi$ ; наконец, по координатам всех внутренних вершин графика  $r_i$  производится интегрирование по невозмущенной поверхности  $S$ .


Перечисленные правила устанавливают взаимно однозначное соответствие между членами ряда (8) и их графическим изображением, что позволяет записывать формулы графически:

$$\begin{aligned} R \text{ ————— } R_0 &= R \text{ ————— } R_0 + R \text{ --- } \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{r_1 \text{ } r_2}} \text{ --- } R_0 + \\ &+ R \text{ --- } \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{r_1 \text{ } r_2 \text{ } r_3 \text{ } r_4}} \text{ --- } R_0 + R \text{ --- } \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{r_1 \text{ } r_2 \text{ } r_3 \text{ } r_4}} \text{ --- } R_0 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$


3. Из формул (8), (9) видно, что среднее поле точечного источника (так называемая одночастичная функция Грина) представляется в виде ряда по кратности рассеяния на возмущении  $\hat{V}$ , причем член, описывающий  $2n$ -кратное рассеяние, состоит из  $(2n - 1)!!$  слагаемых.

Нетрудно видеть, что графический ряд, изображающий  $\mathcal{G}$ , формально может быть получен как ряд итераций следующего уравнения:

$$\text{—————} = \text{—————} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (10)$$

где  — так называемый массовый оператор  $\hat{M}$ , представляющийся в виде бесконечной суммы всех сильно связанных диаграмм, т. е. таких, которые нельзя разбить на несвязанные части разрывом только одной линии  $G_0$ , — в отличие от слабо связанных, которые распадаются при разрыве одной тонкой линии на две несвязанные диаграммы:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \\ &+ \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Действительно, заменяя в (10) элемент  его графическим изображением согласно (11), и производя итерации, т. е.

многократно подставляя в правую часть вместо  $\mathcal{G}$  выражение, даваемое рисунком (10), мы получим весь ряд (9).

В соответствии с перечисленными правилами формула (10) аналитически записывается так:

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \frac{1}{(4\pi)^2} \int_S \int G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \hat{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (12)$$

Это и есть уравнение Дайсона в рассматриваемом случае.

Приведенный выше вывод уравнения Дайсона является наиболее простым и наглядным, однако, не совсем строгим, так как связан с использованием на промежуточном этапе итерационных рядов. Строгий и последовательный вывод (12) может быть проведен с помощью вариационных производных, однако мы здесь не будем останавливаться на этом.

Если подействовать на (12) оператором  $\partial/\partial n + \hat{\eta}_0$  и положить  $\mathbf{R} = \mathbf{r} \in S$ , то, учитывая свойства функций Грина, получим следующее нелокальное граничное условие для среднего поля на невозмущенной поверхности  $S$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} + \hat{\eta}_0 \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_1. \quad (13)$$

Таким образом, задача о нахождении средней функции Грина уравнения (1) с граничным условием (3) сведена к решению интегрального уравнения Дайсона, либо, что то же самое, к решению уравнения (1) с граничным условием (13).

Несмотря на то, что в ядро уравнения Дайсона входит бесконечный ряд (11), который не суммируется в общем случае



[так же как и исходный ряд (9)], уравнение (12) позволяет, как будет видно из дальнейшего, получать приближенные решения для  $\mathcal{G}$ , соответствующие суммированию в (8) некоторых бесконечных подпоследовательностей и учитывающие благодаря этому многократные рассеяния на возмущениях границы.

### § 35. Среднее поле в слоистом волноводе с шероховатой границей

1. Применим развитый в предыдущем параграфе метод для построения средней функции Грина уравнения

$$[\Delta_R + k_0^2 \epsilon(z)] G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \quad (1)$$

$[\Delta_R$  — оператор Лапласа по пространственным координатам  $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$  с граничными условиями, заданными на двух плоскостях,  $z=0$  и  $z=a$ ,

$$G + \zeta \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0, \quad (2a)$$

$$G = 0 \text{ при } z=a, \quad (2b)$$

где  $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$  — случайная статистически однородная функция двумерного радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \{x, y\}$

$$\langle \zeta^2(\mathbf{r}) \rangle = \sigma^2; \quad \langle \zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}') \rangle = \sigma^2 W(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Граничное условие (2a) является частным случаем формулы (34.5) при  $\hat{\eta}_0^{-1} \rightarrow 0$  и  $\delta\eta \rightarrow 0$ , что соответствует в акустике, например, абсолютно мягкой неровной поверхности.

Рассматриваемая задача, несмотря на простоту математической формулировки, является достаточно хорошей моделью широкого класса плоскостойких волноводных систем со статистически неоднородной границей. Предельному случаю  $a \rightarrow \infty$  соответствует так называемая «открытая» система, которая при подходящем выборе функции  $\epsilon(z)$  описывает как тропосферный волновод или волновод Земля — ионосфера для радиоволн ( $\epsilon$  в этом случае является диэлектрической проницаемостью), так и подводный звуковой канал в гидроакустике [функция  $\epsilon(z)$  при этом задает изменение квадрата скорости звука с глубиной]. При конечных  $a$  мы имеем дело с «закрытыми» волноводными системами, к которым можно отнести как радиотехнические длинные волноводные линии, так и, в некоторых приближениях, природные волноводы [например, часто волновод Земля — ионосфера рассматривают как закрытый волновод, эффективная ширина которого определяется профилем  $\epsilon(z)$ ]. Для простоты мы ограничиваемся пока случаем, когда вторая стенка волновода невозмущена [граничное условие (2b) для  $z=a$ ]. При этом полученные в данном параграфе общие соотношения имеют довольно компактный вид. В дальнейшем мы без

выводов (которые, как правило, в методическом отношении не сложнее приведенных ниже, но значительно более громоздкие) приведем результаты для волновода с двумя шероховатыми границами и обобщим их на случай электромагнитного поля в таком волноводе.

2. Функция Грина  $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  невозмущенного волновода удовлетворяет граничному условию

$$G_0|_{z=0} = G|_{z=a} = 0$$

и в силу трансляционной инвариантности в плоскости  $z = \text{const}$ , может быть записана в виде

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) &\equiv G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; z, z_0) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \tilde{G}_0(\mathbf{x}; z, z_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), приходим к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению по  $z$  для фурье-преобразования  $\tilde{G}_0(\mathbf{x}; z, z_0)$  функции Грина, решение которого можно записать в виде

$$\tilde{G}_0(\mathbf{x}; z, z_0) = \frac{4\pi}{\psi_1'(\mathbf{x}, 0)\psi_2(\mathbf{x}, 0)} \begin{cases} \psi_1(\mathbf{x}, z)\psi_2(\mathbf{x}, z_0) & (z \leq z_0), \\ \psi_1(\mathbf{x}, z_0)\psi_2(\mathbf{x}, z) & (z \geq z_0), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\psi_1(\mathbf{x}, z)$  и  $\psi_2(\mathbf{x}, z)$  — линейно независимые решения однородного уравнения:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) - \mathbf{x}^2 \right] \psi(\mathbf{x}, z) = 0, \quad (5)$$

причем  $\psi_1(\mathbf{x}, 0) = 0$  и  $\psi_2(\mathbf{x}, a) = 0$ . Штрих означает производную по  $z$ :  $\psi'(\mathbf{x}, z) = d\psi(\mathbf{x}, z)/dz$ . В дальнейшем мы будем считать известным общее решение уравнения (5); для ряда функций  $\varepsilon(z)$  явный вид решений можно найти в работе [419].

3. Нелокальное граничное условие для средней функции Грина (34.13) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = \int_{z_1=0} \mathcal{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_1. \quad (6)$$

Массовый оператор  $\mathcal{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  задан рядом (34.11), в котором удобно несколько переобозначить элементы диаграмм: пунктирной линией обозначить корреляционную функцию

$$\overset{\curvearrowright}{\text{---}}_{r_1 \quad r_2} = \sigma^2 W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \text{ а входящий в } \hat{V} \text{ оператор дифферен-}$$

цирования по нормали отнести к точкам пересечения сплошных и пунктирных линий, так что

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \leftarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow,$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \leftarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow$$

(оператор  $\leftarrow \partial/\partial z$  действует на функции, стоящие слева от него, а  $\partial/\partial z \rightarrow$  на функции, стоящие справа). В результате ряд (34.11) принимает вид

$$\begin{aligned} M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\sigma^2}{4\pi} G_0''(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \\ &+ \frac{\sigma^4}{(4\pi)^3} \int_{z_1=0} d\mathbf{r}_1 \int_{z_2=0} d\mathbf{r}_2 G_0''(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_0''(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G_0''(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \times \\ &\times [W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$G_0''(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \left. \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} G_0(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k) \right|_{z_i = z_k = 0}.$$

Таким образом, функция  $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  оказывается зависящей лишь от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и, следовательно,  $\mathcal{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; z, z_0)$ .

Для преобразования Фурье средней функции Грина

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; z, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; z, z_0)$$

из (6) следует граничное условие

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; 0, z_0) = \tilde{M}(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{G}}'(\mathbf{x}; 0, z_0). \quad (8a)$$

Замечая, что операции дифференцирования и усреднения перестановочны, легко убедиться в том, что  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; z, z_0)$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению по  $z$ , что и  $\tilde{G}_0(\mathbf{x}; z, z_0)$  [уравнение (5) с правой частью  $-4\pi\delta(z - z_0)$ ] и, кроме того, граничному условию

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; a, z_0) = 0. \quad (8б)$$

Поэтому  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; z, z_0)$  можно искать в виде

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; z, z_0) = \tilde{G}_0(\mathbf{x}; z, z_0) + C_1(\mathbf{x}) \psi_1(\mathbf{x}, z) + C_2(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}, z). \quad (9)$$

Коэффициенты  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  легко определяются из граничных условий (8а, б)

$$C_1(x) = 0; C_2(x) = \frac{4\pi\tilde{M}(x)\psi_2(x, z_0)}{\psi_2(x, 0)[\psi_2(x, 0) - \tilde{M}(x)\psi_2'(x, 0)]}. \quad (10)$$

Подставляя (10) и (4) в (9) и введя определение

$$\Psi_1(x, z) = [\psi_2(x, 0) - \tilde{M}(x)\psi_2'(x, 0)]\psi_1(x, z) + \tilde{M}(x)\psi_1'(x, 0)\psi_2(x, z), \quad (11)$$

получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x; z, z_0) = \\ = \frac{4\pi}{\Psi_1'(x, 0)[\psi_2(x, 0) - \tilde{M}(x)\psi_2'(x, 0)]} \begin{cases} \Psi_1(x, z)\psi_2(x, z_0) & (z \leq z_0), \\ \Psi_1(x, z_0)\psi_2(x, z) & (z \geq z_0). \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

Это выражение по форме совпадает с представлением (4) функции  $\tilde{G}_0(x; z, z_0)$ . Единственное, но существенное отличие (12) от (4) заключается в том, что вместо функции  $\psi_1(x, z)$ , которая при  $z=0$  обращается в нуль, в (12) входит новая функция,  $\Psi_1(x, z)$ , удовлетворяющая при  $z=0$  «импедансному» условию (8а):

$$\Psi_1(x, 0) = \tilde{M}(x)\Psi_1'(x, 0).$$

В знаменателях же стоят определители Вронского двух линейно независимых решений —  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в формуле (4), и  $\Psi_1$  и  $\psi_2$  — в формуле (12).

Таким образом, с точки зрения влияния на среднее поле, статистически неоднородная поверхность оказывается эквивалентной плоскости с эффективным адмитансом  $\tilde{M}(x)$ , который, правда, различен для различных компонент Фурье волнового поля, т. е. имеет место своеобразная «пространственная дисперсия».

4. Переходя к анализу формулы (12), обратимся прежде всего к простейшему случаю открытой системы — свободного полупространства, ограниченного шероховатой плоскостью. Кроме того, что эта задача сама по себе представляет немалый интерес, на этом примере можно выяснить связь рассматриваемого метода с результатами гл. III, полученными несколько другим способом.

В формулах предыдущего пункта положим  $a = \infty$ ,  $\varepsilon(z) = \varepsilon = \text{const}$ ,  $k_0^2 \varepsilon = k^2$ . В качестве линейно независимых решений уравнения (5) выберем \*)

$$\psi_1(x, z) = \sin qz \text{ и } \psi_2(x, z) = e^{iqz},$$

\*) Следует отметить, что в переходе из общих формул для закрытых систем к открытым системам есть некоторые тонкости, связанные в основном с тем, что роль граничного условия при  $z=a$  в последнем случае играет условие излучения (подробнее см., например, [420]).

где

$$q = \sqrt{k^2 - \kappa^2} \quad (\text{Im } q \geq 0).$$

Формула (4) при этом выглядит так:

$$\tilde{G}_0(\kappa; z, z_0) = \frac{4\pi}{q} \begin{cases} \sin qze^{iqz_0} & (z \leq z_0), \\ \sin qz_0e^{iqz} & (z \geq z_0), \end{cases}$$

или, в более привычном виде [ср. (1.6)],

$$\tilde{G}_0(\kappa; z, z_0) = \frac{2\pi i}{q} [e^{iq|z-z_0|} - e^{iq(z+z_0)}]. \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы относится к полю единичного точечного источника в безграничном пространстве, а второе соответствует полю зеркального источника. Знак минус перед вторым слагаемым показывает, что плоские волны, падающие на поверхность, отражаются от нее с коэффициентом отражения  $V = -1$ . Выражение (12) для  $\mathcal{G}(\kappa; z, z_0)$  можно записать в аналогичной форме:

$$\tilde{\mathcal{G}}(\kappa; z, z_0) = \frac{2\pi i}{q} [e^{iq|z-z_0|} + V_s(\kappa)e^{iq(z+z_0)}], \quad (14)$$

где

$$V_s(\kappa) = -\frac{1+iq\tilde{M}(\kappa)}{1-iq\tilde{M}(\kappa)} \quad (15)$$

— коэффициент отражения когерентной составляющей при облучении шероховатой поверхности плоской волной  $U(\mathbf{R}) = \exp\{i\kappa r - i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z\}$ . Указанная выше пространственная дисперсия проявляется в том, что эффективный адмитанс поверхности  $\tilde{M}(\kappa)$  зависит как от угла скольжения плоской волны, так и от ориентации плоскости падения. Учитывая, что в данном случае  $\tilde{G}_0''(\kappa; 0, 0) = 4\pi iq$ , из (7) получаем первый член разложения  $\tilde{M}(\kappa)$  по степеням  $\sigma^2$ ,

$$\tilde{M}(\kappa) = i \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_1 \sqrt{k^2 - \kappa_1^2} \tilde{W}(\kappa - \kappa_1). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и считая неровности достаточно малыми, так что  $|q\tilde{M}(\kappa)| \ll 1$ , приходим к уже известному нам результату (5.11) для коэффициента отражения среднего поля от абсолютно мягкой неровной поверхности. Оценки следующих членов в ряде (7) (выполненные в предположении, что неровности статистически изотропные) показывают, что выражением (16), которому

соответствует простейшая диаграмма в ряде (34.11), можно ограничиться, если выполнены неравенства [ср. с (5.38) — (5.41)]:

$$\left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 \ll 1 \text{ при } kl \ll 1, \quad (17a)$$

$$(k\sigma \cos \theta)^2 \ll 1 \text{ при } kl \gg 1, \quad \frac{\pi}{2} - \theta \gg 1/\sqrt{kl}, \quad (17б)$$

$$\frac{k\sigma^2}{l} \ll 1 \text{ при } kl \gg 1, \quad \frac{\pi}{2} - \theta \ll \frac{1}{\sqrt{kl}}. \quad (17в)$$

(здесь  $l$  — радиус корреляции шероховатостей, а  $\theta$  — угол падения).

В более общем случае неоднородной среды, когда  $\varepsilon = \varepsilon(z)$ , двумерное преобразование Фурье уже не является разложением поля по плоским волнам. Тем не менее и в этом случае можно ввести коэффициент отражения типа (15) для фурье-компоненты разложения. Действительно, если  $\psi_2$  является решением уравнения (5), удовлетворяющим условию  $\psi_2(x, a) = 0$ , то  $\psi_2(x, -z)$  также будет решением, если  $\varepsilon(z)$  продолжить на область  $z < 0$  четным образом:  $\varepsilon(-z) = \varepsilon(z)$ . Функция  $\psi_1(x, z) = \psi_2(x, -z) - \psi_2(x, z)$  обращается в нуль при  $z = 0$  и является линейно независимым с  $\psi_2(x, z)$  решением, если соответствующий определитель Вронского не обращается в нуль:

$$\psi_1(x, z) \psi_2'(x, z) - \psi_1'(x, z) \psi_2(x, z) = 2\psi_2'(x, 0) \psi_2(x, 0) \neq 0.$$

Таким образом, для  $\hat{G}_0(x; z, z_0)$  вместо (4) получаем выражение

$$\hat{G}_0(x; z, z_0) = -\frac{2\pi}{\psi_2(x, 0) \psi_2'(x, 0)} \times \\ \times \left[ -\psi_2(x, z) \psi_2(x, z_0) + \frac{\psi_2(x, -z) \psi_2(x, z_0)}{\psi_2(x, z) \psi_2(x, -z_0)} \right] \begin{cases} (z \leq z_0), \\ (z \geq z_0). \end{cases} \quad (18)$$

Второй член в этой формуле является функцией Грина для области  $-a < z < a$  с симметричной функцией  $\varepsilon(z) = \varepsilon(-z)$ , а первый соответствует полю зеркальных источников, отраженных в плоскости  $z = 0$ . Видно, что при  $z < z_0$  функция Грина  $\hat{G}_0(x; z, z_0)$  представляется в виде суперпозиции падающей на плоскость  $z = 0$  волны  $\psi_2(x, -z)$  и отраженной (уходящей) волны  $\psi_2(x, z)$  с коэффициентом отражения  $V = -1$ . Возмущение в граничном условии приводит к формуле (12), которая, так же как и (4), может быть представлена в форме (18) с тем лишь отличием, что коэффициент отражения  $(-1)$  перед первым слагаемым заменяется на

$$V_s(x) = -\frac{\psi_2(x, 0) + \tilde{M}(x) \psi_2'(x, 0)}{\psi_2(x, 0) - \tilde{M}(x) \psi_2'(x, 0)}. \quad (19)$$

Эта формула является обобщением выражения (15) для коэффициента отражения плоских волн. Видно, что эффективный коэф-

коэффициент отражения от шероховатой поверхности зависит не только от состояния поверхности, но и от профиля «объемной» неоднородности  $\varepsilon(z)$ . Причина этого — в нелокальном характере граничного условия (6) для среднего поля.

5. С помощью обратного преобразования Фурье из (12) получаем следующее выражение для средней функции Грина:

$$\mathcal{G}(r; z, z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}r}}{\Psi_1(\mathbf{x}, 0) [\psi_2(\mathbf{x}, 0) - \tilde{M}(\mathbf{x}) \psi_2'(\mathbf{x}, 0)]} \times \\ \times \begin{cases} \Psi_1(\mathbf{x}, z) \psi_2(\mathbf{x}, z_0) & (z \leq z_0), \\ \Psi_1(\mathbf{x}, z_0) \psi_2(\mathbf{x}, z) & (z \geq z_0). \end{cases} \quad (20)$$

Если предположить, что шероховатости поверхности статистически изотропны, т. е.  $W(r) = W(r)$ , и учесть, что невозмущенная функция Грина  $G_0(r; z, z_0)$  также зависит лишь от расстояния  $r = |r|$ , из (7) получаем

$$M(r) = M(r) \quad \text{и} \quad \tilde{M}(\mathbf{x}) = \tilde{M}(x). \quad (21)$$

Это позволяет в формуле (20) выполнить интегрирование по углу между векторами  $\mathbf{x}$  и  $r$ , что приводит к функции Ганкеля первого рода  $H_0^{(1)}(\mathbf{x}r)$ . Последующее интегрирование по  $d\mathbf{x}$  с помощью вычетов дает:

$$\mathcal{G}(r; z, z_0) = 2\pi i \sum_n \frac{H_0^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}_n r) \tilde{\mathbf{x}}_n}{\Psi_1(\tilde{\mathbf{x}}_n, 0) \frac{d}{d\mathbf{x}} [\psi_2(\mathbf{x}, 0) - \tilde{M}(\mathbf{x}) \psi_2'(\mathbf{x}, 0)] \tilde{\mathbf{x}}_n} \times \\ \times \begin{cases} \Psi_1(\tilde{\mathbf{x}}_n, z) \psi_2(\tilde{\mathbf{x}}_n, z_0) & (z \leq z_0) \\ \Psi_1(\tilde{\mathbf{x}}_n, z_0) \psi_2(\tilde{\mathbf{x}}_n, z) & (z \geq z_0), \end{cases} \quad (22)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  — решения дисперсионного уравнения

$$\psi_2(\tilde{\mathbf{x}}_n, 0) - \tilde{M}(\tilde{\mathbf{x}}_n) \psi_2'(\tilde{\mathbf{x}}_n, 0) = 0, \quad (23)$$

причем выбирается та ветвь, для которой  $\text{Im} \tilde{\mathbf{x}}_n \geq 0$ .

Дисперсионное уравнение (23) можно получить также, решая задачу о спектре собственных волн плоскостойкого волновода с граничными условиями (8а, б) методом разделения переменных. Поэтому каждый член в (22) естественно, по аналогии с гладким волноводом, называть нормальной (собственной) волной для среднего поля, а получающиеся из решения уравнения (23) величины  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  — продольными волновыми числами данной нормальной волны. В отличие от регулярного волновода, в данном случае, как будет видно, все они являются комплексными. Полный набор собственных чисел образует спектр среднего поля в статистически неоднородном волноводе. Он определяет те дискретные направления,

в которых при данной частоте возможно распространение, а также в силу комплексности  $\tilde{\kappa}_n$  — затухание нормальных волн, обусловленное неоднородностями стенок.

Формулы (22) и (23) являются, в принципе, решением задачи о среднем поле точечного источника, однако  $\mathcal{G}(R, R_0)$  выражено в них в виде функционала от «массового оператора»  $M$ , являющегося суммой бесконечного ряда. Существует ряд приближенных способов, позволяющих избавиться от бесконечной суммы, входящей в выражение для  $M$ .

Простейшей процедурой такого рода (мы к ней уже прибегали в предыдущем пункте) является замена «массового оператора» первым его членом, — так называемое приближение Бурре [421]. В этом приближении уравнение Дайсона (34.10) существенно упрощается:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \text{---} \quad (24)$$

а его решение имеет вид

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \overset{\text{---}}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \overset{\text{---}}{\text{---}} \overset{\text{---}}{\text{---}} \text{---} \dots \quad (25)$$

Сравнивая (25) с (34.9), можно убедиться, что учет даже одного члена в массовом операторе позволяет, в отличие от обычной теории возмущений, просуммировать бесконечную подпоследовательность в полном ряде для  $\mathcal{G}$ , учитывающую все многократные перерассеяния. Приближение при этом, как будет видно из полученных в следующем параграфе оценок, остается лишь в способе учета однократного рассеяния.

В этом случае второе слагаемое в (23) можно рассматривать как малое возмущение в дисперсионном уравнении для гладкого волновода:

$$\psi_2(\kappa_n, 0) = 0. \quad (26)$$

Это позволяет для добавок  $\delta\kappa_n = \tilde{\kappa}_n - \kappa_n$  к собственным волновым числам невозмущенного волновода получить следующую формулу:

$$\delta\kappa_n = \tilde{M}(\kappa_n) \frac{\psi_2'(\kappa_n, 0)}{\frac{\partial}{\partial \kappa} \psi_2(\kappa, 0)|_{\kappa=\kappa_n}}, \quad (27)$$

считая, что  $|\delta\kappa_n| \ll |\kappa_n - \kappa_{n+1}|$  [см. также неравенства (36.13), (36.14)]. При этом не составляет особого труда показать, что если и вторая стенка волновода является шероховатой [т. е. задается урав-



нением  $z = a + \xi(r)$ , причем случайные функции  $\zeta(r)$  и  $\xi(r)$  статистически независимы], то вклад шероховатостей нижней и верхней границы в  $\delta\kappa_n$  является аддитивным. Отметим, что такая ситуация имеет место только в приближении Бурре.

Переходя в (7) к преобразованию Фурье, для  $\tilde{M}(\kappa)$  в приближении Бурре получаем

$$\tilde{M}(\kappa) = \frac{\sigma^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \tilde{G}'_0(\kappa', 0, 0) \bar{W}(\kappa, \kappa') \kappa' d\kappa', \quad (28)$$

где

$$\bar{W}(\kappa, \kappa') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \tilde{W}(\sqrt{\kappa^2 - 2\kappa\kappa' \cos \alpha + (\kappa')^2}).$$

В формуле (28) для функции Грина  $\tilde{G}_0(\kappa; z, z_0)$  удобно воспользоваться не представлением (4), а ее разложением в ряд Гильберта — Шмидта:

$$\tilde{G}_0(\kappa; z, z_0) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^*(z) \varphi_n(z_0)}{\kappa^2 - \kappa_n^2}, \quad (29)$$

где  $\varphi_n(z)$  — нормированные собственные функции уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) - \kappa_n^2 \right) \varphi_n(z) = 0, \quad (30)$$

удовлетворяющие невозмущенным граничным условиям  $\varphi_n(0) = \varphi_n(a) = 0$ . Из сравнения (4) и (29) видно, кстати, что собственные функции  $\varphi_n(z)$ , с точностью до нормировки, совпадают с  $\psi_1(\kappa, z)$  или  $\psi_2(\kappa, z)$  при  $\kappa = \kappa_n$ . При подстановке (29) в формулу (28) в интеграле по  $d\kappa'$  возникают особенности в точках  $\kappa' = \pm \kappa_n$ . Заметим, однако, что число вещественных особенностей, лежащих на положительной полуоси, по которой происходит интегрирование в плоскости комплексной переменной  $\kappa'$ , — конечно. Действительно, вещественные числа  $\kappa_n^2$ , являясь спектром оператора Штурма — Лиувилля, при  $n \rightarrow \infty$  монотонно убывают ( $\kappa_n^2 \rightarrow -\infty$ ) и лишь конечное число  $N$  собственных значений положительно:

$$0 < \kappa_n^2 < k_0^2 \varepsilon_{\max}; \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

Выписав для поля точечного источника  $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  в гладком волноводе формулу, аналогичную (22), легко показать, что именно эти  $N$  собственных чисел соответствуют распространяющимся (незатухающим) волнам в волноводе и именно они уносят энергию от источника. Собственные функции с большими номерами экспоненциально затухают — это так называемые неоднородные волны.

Для выяснения направления обхода простых полюсов в точках  $\kappa' = \kappa_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ), лежащих на пути интегрирования в (28), следует воспользоваться принципом излучения, потребовав, чтобы поле на больших расстояниях от источника затухало. Для этого достаточно предположить, что у  $k_0$  есть бесконечно малая положительная мнимая часть, которую в окончательных результатах можно устремить к нулю. В результате для  $\tilde{M}(\kappa)$  получаем

$$\tilde{M}(\kappa) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty G_0'(\kappa'; 0, 0) \tilde{W}(\kappa, \kappa') \kappa' d\kappa' + \right. \\ \left. + i \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^N |\varphi_m^+(0)|^2 \tilde{W}(\kappa, \kappa_m) \right]. \quad (32)$$

Полагая в этой формуле  $\kappa = \kappa_n$  и подставляя ее в (27), мы получаем явные выражения для поправок  $\delta\kappa_n$  к собственным волновым числам гладкого волновода. Откладывая более подробный анализ этих формул до § 36, отметим только основные характерные особенности нового спектра, которые следуют из структуры формулы (32).

Во-первых, видно, что все  $\tilde{\kappa}_n$  имеют положительную мнимую часть. Это означает, что даже однородные волны, которые являются распространяющимися в гладком волноводе (для них  $\kappa_n^2 > 0$ ) приобретают при  $\sigma \neq 0$  конечное затухание, т. е. становятся квазиоднородными. Действительно, заменяя в (22) функцию  $H_0^{(1)}(\kappa_n r)$  ее асимптотическим представлением, видим, что на достаточно больших расстояниях от источника амплитуда  $n$ -й нормальной волны убывает по закону  $r^{-1/2} \exp[-\text{Im} \tilde{\kappa}_n \cdot r]$ , где фактор  $r^{-1/2}$  обусловлен цилиндрическим расхождением волны, а множитель  $\exp[-\text{Im} \tilde{\kappa}_n \cdot r]$  описывает затухание среднего поля за счет возмущения границ. Это затухание не связано с поглощением энергии, а обусловлено некогерентным рассеянием каждой собственной волны в другие нормальные волны — именно такой смысл имеет сумма в формуле (32):  $m$ -й ее член описывает затухание  $n$ -й нормальной волны за счет преобразований в волну с номером  $m$ .

Во-вторых, наличие шероховатостей границы приводит к изменению фазовой скорости нормальных волн по сравнению с гладким волноводом, за счет появления добавок  $\text{Re} \delta\kappa_n$  к волновым числам  $\kappa_n$ . Из (32) видно, что это смещение собственных значений связано с первым слагаемым — интегралом в смысле главного значения, — вклад в который дают как распространяющиеся, так и неоднородные волны, у которых  $\kappa_n^2 < 0$ .

В заключение параграфа приведем формулы для сдвига собственных чисел  $\text{Re} \delta\kappa_n$  и затухания  $\gamma_n = \text{Im} \delta\kappa_n$  нормальных волн

в простейшем случае двумерных (цилиндрических) шероховатостей  $z = \zeta(x)$ , образующие которых параллельны оси  $y$ . При этом

$$\tilde{W}(x) = 2\pi\delta(x_y) \tilde{W}(x_x)$$

и фурье-преобразование массового оператора оказывается зависящим только от  $x_x$ :  $\tilde{M}(x) = \tilde{M}(x_x)$ . Интеграл в формуле (20) по переменной  $dx_x$ , так же как и при получении (22), можно преобразовать в сумму вычетов в полюсах  $\tilde{x}_n$ , которые являются корнями дисперсионного уравнения

$$\psi_2(\tilde{x}_n^2 + x_y^2, 0) = \tilde{M}(\tilde{x}_n) \psi_2'(\tilde{x}_n^2 + x_y^2, 0) \quad (33)$$

и зависят от  $x_y$  как от параметра. В результате вместо (22) получаем разложение функции Грина по плоским волнам вида

$$\exp[ik_x y + i\tilde{x}_n(x_y) |x|],$$

амплитуды которых зависят как от номера  $n$ , так и от составляющей волнового вектора  $x_y$ . Фазовая скорость этих волн и затухание зависят от угла между осью  $x$  и направлением их распространения. В частности, для волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  ( $x_y = 0$ ), сдвиг и затухание в приближении Бурре равны соответственно

$$\operatorname{Re} \delta x_n = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\psi_2'(\tilde{x}_n, 0)}{\left[\frac{\partial \psi_2(\tilde{x}, 0)}{\partial \tilde{x}}\right]_{\tilde{x}_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_2'(\tilde{x}', 0)}{\psi_2(\tilde{x}', 0)} \tilde{W}(\tilde{x}_n - \tilde{x}') d\tilde{x}', \quad (34a)$$

$$\gamma_n = \operatorname{Im} \delta x_n =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4} \frac{\psi_2'(\tilde{x}_n, 0)}{\left[\frac{\partial \psi_2(\tilde{x}, 0)}{\partial \tilde{x}}\right]_{\tilde{x}_n}} \sum_{m=1}^N \frac{|\Phi_m'(0)|^2}{x_m} [\tilde{W}(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m) + \tilde{W}(\tilde{x}_n + \tilde{x}_m)]. \quad (34b)$$

В рассматриваемом случае каждому собственному значению  $\tilde{x}_n^2$  уравнения (30) соответствуют две волны, отличающиеся знаком продольного волнового числа  $x = \pm \sqrt{\tilde{x}_n^2}$  и распространяющиеся поэтому в противоположных направлениях оси  $x$ . Из (34b) видно, что преобразование  $n$ -й волны в  $m$ -ю, приводящее к затуханию среднего поля, происходит как за счет рассеяния «вперед» [вероятность этого преобразования пропорциональна  $\tilde{W}(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m)$ ] так и за счет рассеяния «назад» [второе слагаемое под знаком суммы в (34b)] (ср. с [38]). Следует также заметить, что аналогичным образом можно получить формулы для затухания и изменения фазовой скорости нормальных волн за счет неровностей границы в волноводе произвольной формы поперечного сечения и с произвольным неоднородным заполнением, если известно решение невозмущенной задачи.

### § 36. Затухание нормальных волн в закрытых полых волноводах

Как видно из полученных в предыдущем параграфе формул, для вычисления затухания среднего поля за счет рассеяния на случайных неоднородностях границ — даже в простейшем случае плоско-слоистого волновода с двумерными шероховатостями [формула (35.34б)] необходимо иметь явные выражения как для спектра  $\kappa_n^2$ , так и для собственных функций  $\varphi_n(z)$  задачи Штурма — Лиувилля (35.30). Но даже для элементарных функций  $\varepsilon(z)$  собственные функции  $\varphi_n(z)$  имеют достаточно сложный вид. Например, если  $\varepsilon(z)$  — линейная функция  $z$ , решением уравнения (35.30) являются функции Эйри; при квадратичной зависимости  $\varepsilon$  от  $z$  — это функции параболического цилиндра и т. д. Что же касается собственных значений  $\kappa_n^2$ , то они определяются как нули этих специальных функций, и аналитическая зависимость вида  $\kappa_n^2$  от номера  $n$  может быть получена, как правило, лишь для достаточно больших номеров  $n$ .

Правда, для решения некоторых задач этого оказывается достаточно. Например, в работе [416] с помощью приведенных в предыдущем параграфе формул были рассчитаны возмущение спектра и затухание поверхностных электронных состояний в слабом магнитном поле, параллельном поверхности металла, за счет рассеяния электронов на шероховатостях границы. «Потенциальная энергия»  $\varepsilon(z)$ , возникающая в уравнении Шрёдингера, имеющего после преобразования Фурье вид (35.30), при наличии внешнего магнитного поля оказывается квадратичной функцией от  $z$ . При этом сколько-нибудь подробное аналитическое исследование общих формул (35.27) и (35.32) можно провести лишь в предельном квазиклассическом случае — для больших номеров  $n$  \*).

Вместе с тем, хотя зависимость  $\varepsilon(z)$  и является определяющей для нахождения  $\varphi_n$  и  $\kappa_n^2$ , явный вид этих функций не играет все-таки основной роли во взаимодействии волн с неровностями границы. Поэтому для физического анализа этих процессов, во всяком случае на первом этапе, целесообразно ограничиться элементарным примером, когда  $\varphi_n(z)$  и  $\kappa_n^2$  являются предельно простыми функциями  $z$  и  $n$ .

1. Итак, рассмотрим простейшую волноводную систему с  $\varepsilon(z) = \varepsilon = \text{const}$ , состоящую из двух в среднем параллельных поверхностей  $z = \zeta_1(x)$  и  $z = \zeta_2(x) + a$ , причем случайные функции  $\zeta_1(x)$

\*) Заметим, кстати, что результаты цитированной работы, хотя и относятся к физике твердого тела, одновременно являются и решением задачи о распространении волн в волноводе с квадратичной зависимостью  $\varepsilon(z)$ , например, в подводном звуковом канале, скорость звука в котором зависит от глубины по закону  $c(z) \sim |z - z_0|$ , а роль шероховатой поверхности играет взволнованная поверхность моря.

и  $\zeta_2(x)$  будем считать некоррелированными и имеющими одинаковые статистические характеристики:

$$\begin{aligned} \langle \zeta_1^2 \rangle &= \langle \zeta_2^2 \rangle = \sigma^2; & \langle \zeta_1(x) \zeta_2(x') \rangle &= 0; \\ \langle \zeta_1(x) \zeta_1(x') \rangle &= \langle \zeta_2(x) \zeta_2(x') \rangle = \sigma^2 W(|x - x'|). \end{aligned} \quad (1)$$

Собственные функции  $\varphi_n(z)$  и собственные значения  $\kappa_n^2$  уравнения (35.30) имеют при этом такой вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} z, & \kappa_n^2 &= k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \\ n &= 1, 2, \dots, & k^2 &\equiv k_0^2 \epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что число  $N$  распространяющихся волн (модов) в таком волноводе (с  $\kappa_n^2 > 0$ ) равно

$$N = \left[ \frac{ak}{\pi} \right], \quad (3)$$

где квадратные скобки означают целую часть от числа, в них заключенного. В качестве функции  $\psi_2(\kappa, z)$  [см. уравнение (35.5)] выберем

$$\begin{aligned} \psi_2(\kappa, z) &= \sin q(z - a), \\ q &\equiv \sqrt{k^2 - \kappa^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Наряду с продольным волновым числом  $\kappa_n$  удобно ввести для сокращения записи следующие ниже формулы поперечное волновое число  $q_n = n\pi/a$  и угол  $\theta_n$ :  $q_n = k \cos \theta_n$ ,  $\kappa_n = k \sin \theta_n$  (рис. 86).

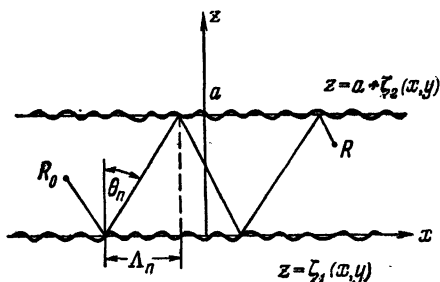


Рис. 86.

Подставляя формулы (2) — (4) в выражение (35.34) и воспользовавшись тем, что в приближении Бурре шероховатости верхней и нижней границ дают аддитивный вклад в добавки к спектру [см. замечание после (35.27)], для волны с номером  $n$ , распространяющейся вдоль оси  $x$ , получим

$$\text{Re } \delta\kappa_n = -\frac{q_n^2 \sigma^2}{\pi a \kappa_n} \int_{-\infty}^{\infty} q \text{ctg } qa \widetilde{W}(\kappa_n - \kappa) d\kappa, \quad (5a)$$

$$\text{Im } \delta\kappa_n = \frac{\sigma^2}{a^2} \sum_{m=1}^N \frac{q_n^2 q_m^2}{\kappa_n \kappa_m} [\widetilde{W}(\kappa_n - \kappa_m) + \widetilde{W}(\kappa_n + \kappa_m)], \quad (5b)$$

причем здесь и в дальнейшем под  $\kappa_n$  подразумевается арифметическое значение корня  $\sqrt{k^2 - q_n^2}$ .

2. Исследование формул (5а, б) начнем со случая, когда ширина волновода велика по сравнению с длиной волны, т. е.  $ak/\pi \gg 1$ . Если при этом неровности стенок являются мелкомасштабными ( $kl \ll 1$ ,  $l$  — характерный размер неровностей), сумму в (5б) можно, с точностью до членов порядка  $(l/a)^2$ , заменить следующим интегралом:

$$\sum_{m=1}^N \frac{q_m^2}{\kappa_m} [\tilde{W}(\kappa_n - \kappa_m) + \tilde{W}(\kappa_n + \kappa_m)] \approx \frac{a}{\pi} \int_{-k}^k \sqrt{k^2 - \kappa^2} \tilde{W}(\kappa_n - \kappa) d\kappa. \quad (6)$$

При  $kl \gg 1$  условия  $ak \gg \pi$  оказывается недостаточно для перехода от суммирования к интегрированию. Необходимо еще потребовать, чтобы  $l \ll \Lambda_n$ , где  $\Lambda_n = a \operatorname{tg} \theta_n$  — так называемая «длина цикла», т. е. расстояние, проходимое волной между двумя последовательными отражениями (см. рис. 86). При выполнении этих неравенств, последовательные отражения являются, очевидно, независимыми\*). Подставляя (6) в (5б) и вычисляя в соответствующем приближении интеграл в смысле главного значения в (5а), получаем

$$\delta \kappa_n = i \frac{1 + V(\kappa_n)}{\Lambda_n}. \quad (7)$$

Здесь

$$V(\kappa_n) = -1 + \frac{q_n \sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \kappa^2} \tilde{W}(\kappa_n - \kappa) d\kappa$$

— коэффициент отражения плоской волны от полупространства, ограниченного шероховатой плоскостью [ср. с формулами (35.15), (35.16)]. Используя выражения для  $V(\kappa_n)$ , вычисленные в § 5 для различных предельных случаев [ср. с формулами (5.28) — (5.30)], получаем

$$\delta \kappa_n \approx \frac{2n\pi\sigma^2}{a\Lambda_n l} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \frac{dw}{d\xi} + i \frac{(kl)^2}{2} \int_0^{\infty} w(\xi) d\xi \right] (kl \ll 1), \quad (8a)$$

$$\delta \kappa_n \approx \frac{4n\pi k \sigma^2}{a\Lambda_n \sqrt{2\pi kl}} e^{\frac{3\pi i}{4}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{dw}{d\xi} \left( kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \ll \sqrt{\frac{2}{kl}} \right), \quad (8б)$$

$$\delta \kappa_n \approx i \frac{2n^2 \pi^2 \sigma^2}{a^2 \Lambda_n} \left( kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \gg \sqrt{\frac{2}{kl}} \right), \quad (8в)$$

\*) Так как шероховатости верхней и нижней стенок волновода мы предполагаем некоррелированными с самого начала, то последовательные отражения могут коррелировать только через одно. Поэтому условия корреляции или декорреляции последующих отражений следует, строго говоря, писать в виде:  $2\Lambda_n \ll l$  и  $2\Lambda_n \gg l$  соответственно.

где, как и в § 5, вместо  $W(x)$  введена функция  $\omega$  безразмерной переменной  $\xi$ :  $\omega(\xi) \equiv W(l\xi)$ ; поэтому интегралы в приведенных выше формулах являются константами порядка единицы.

Из приведенных формул видно, что мелкомасштабные шероховатости ( $kl \ll 1$ ) приводят только к изменению фазовой скорости нормальных волн: затухание  $\text{Im} \delta \kappa_n$  при этом в  $(kl)^{-2} \gg 1$  раз меньше, чем сдвиг собственных значений  $\text{Re} \delta \kappa_n$  [см. (8a)]. В случае длинных шероховатостей ( $kl \gg 1$ ) затухание и изменение фазовой скорости основных волн (соответствующих малым номерам  $n$ ) оказываются одинаковыми ( $-\text{Im} \delta \kappa_n = \text{Re} \delta \kappa_n$ ), как видно из (8b). Для более «крутых» модов с  $q_n \gg (2k/l)^{1/2}$ , сдвиг оказывается значительно меньше, чем затухание (8в); при гауссовой функции корреляции эта малость экспоненциальная  $\sim e^{-(kl)^2}$ . Здесь уместно заметить, что хотя формула (7) была получена в предположении, что шероховатости двумерные, точно такое же выражение нетрудно получить и для анизотропных трехмерных шероховатостей. При этом коэффициент отражения равен

$$V(\kappa_n) = -1 + \frac{q_n \sigma^2}{2\pi^2} \int d\mathbf{x} \sqrt{k^2 - \kappa^2} \tilde{W}(\kappa_n - \kappa) \quad (9)$$

и зависит, вообще говоря, от направления распространения волны с номером  $n$  (поэтому продольное волновое число следует рассматривать как вектор  $-\kappa_n$ ). Более того, асимптотические формулы (8б, в) имеют тот же вид и в обратном предельном случае изотропных шероховатостей, когда  $W(\rho) = W(\rho)$  [функция  $\omega(\xi)$  при этом вводится так же, как и раньше], а в формуле (8a) изменяются лишь мало существенные коэффициенты, так что в предельном случае  $kl \ll 1$  для изотропных шероховатостей имеем

$$\delta \kappa_n = \frac{2\pi l \sigma^2}{a \Lambda_n l} \left[ \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} + i \frac{(kl)^3}{3} \int_0^\infty \omega(\xi) \xi d\xi \right].$$

К формуле (7) можно прийти, если рассчитывать собственные функции для среднего поля как результат последовательных отражений плоской волны от стенок волновода, причем считать, что каждое отражение происходит так же, как от плоскости с эффективным коэффициентом отражения  $V(\kappa_n)$ . Из сказанного ясно, что такой метод (примененный в работах [35, 36]) пригоден лишь для достаточно широких волноводов, причем необходимо, чтобы радиус корреляции  $l$  был мал по сравнению с длиной цикла  $\Lambda_n$ . Эти требования имеют простой физический смысл. Действительно, при отражении от полупространства ослабление среднего поля происходит за счет некогерентного рассеяния во все направления внутри телесного угла, ограниченного диаграммой рассеяния данной поверхности (ее угловая ширина  $\delta\theta$  пропорциональна  $(kl)^{-1}$ ). При наличии второй стенки волновода появляется дискретный спектр на-

правлений отражения. При каждом отражении поле ослабляется в меньшей степени, так как теперь некогерентное рассеяние может происходить лишь в избранных направлениях внутри диаграммы направленности — в тех, для которых  $\theta = \theta_n$ . Очевидно, что влиянием второй поверхности на однократное отражение можно пренебречь, т. е. пользоваться коэффициентом отражения  $V(\kappa_n)$ , если внутри диаграммы рассеяния имеется достаточно много «разрешенных» волноводных направлений, т. е. ее угловая ширина  $\delta\theta$  велика по сравнению с угловым расстоянием между этими направлениями  $\simeq (k\Lambda_n)^{-1}$ .

3. Противоположными рассмотренному выше являются случаи одномодового волновода  $N=1$  и случай крупномасштабных неоднородностей  $l \gg \Lambda_n$ .

В первом случае декремент затухания  $\gamma_1$  имеет простой вид, так как в сумме (5б) остается одно слагаемое. При гауссовой функции корреляции  $W(x) = \exp\{-x^2/l^2\}$  для  $\gamma_1$  получаем

$$\gamma_1 = \left(\frac{q_1^2 \sigma^2}{\kappa_1 a}\right)^2 [\tilde{W}(0) + \tilde{W}(2\kappa_1)] = \frac{(k\sigma)^2 k^2 l (1 - \Delta^2)^3}{\Delta^2 \pi^{3/2}} [e^{-(k l)^2 \Delta^2} + 1]. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta \equiv \sqrt{1 - (\pi/ak)^2}$ , причем в рассматриваемом случае  $0 < \Delta < \sqrt{3}/2$ .

Если радиус корреляции велик по сравнению с длиной волны и  $l \gg \Lambda_n$ , в сумме (5б) существенным оказывается лишь член с  $n=m$ , так как  $\tilde{W}(x)$  — «острая» функция. Учет этого обстоятельства дает

$$\gamma_n = \left(\frac{q_n \sigma}{\Lambda_n}\right)^2 \tilde{W}(0) = \frac{(k\sigma \cos^2 \theta_n)^2}{a^2 \sin^2 \theta_n} l \sqrt{\pi}. \quad (11)$$

При этом интеграл в смысле главного значения (5а) оказывается экспоненциально малым по параметру  $(\Lambda/l)^2$ , т. е. достаточно плавные неровности не изменяют фазовой скорости волн в волноводе, а приводят только к затуханию когерентной составляющей [ср. с (8в)]. Из формул (5б) и (11) видно, что ослабление среднего поля при этом вызвано не рассеянием в другие моды, а связано лишь с потерей когерентности при отражении в «зеркальном направлении». Обобщение формулы (11) на случай произвольно анизотропной поверхности не представляет особого труда и сводится к следующей довольно очевидной замене:

$$\tilde{W}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x; y=0) dx$$

(ось  $x$  выбрана вдоль направления распространения волны).

Выражения (10) и (11), очевидно, имеют физический смысл только при не очень больших радиусах корреляции, так как при  $l \rightarrow \infty$  получаем, что и  $\gamma_n \rightarrow \infty$ . Это противоречит первоначальному предположению о малости  $\delta k$  по сравнению с расстоянием



между собственными числами невозмущенного волновода. Поэтому формулы (10) и (11) необходимо дополнить соответствующими неравенствами, ограничивающими величину  $l$  сверху.

Напомним, что при решении дисперсионного уравнения (35.23) массовый оператор  $\tilde{M}(\kappa_n)$  мы рассматривали как возмущение и предположили, что в правой части формулы (35.27) все аргументы  $\kappa_n = \kappa_n + \delta\kappa_n$  можно заменить на  $\kappa_n$ . В аргументах функций  $\psi_2$  и  $\psi_3$  такое приближение справедливо, если выполнено приведенное после формулы (35.27) неравенство  $|\delta\kappa_n| \ll |\kappa_n - \kappa_{n+1}|$ , которое эквивалентно требованию

$$|\delta\kappa_n| \Lambda_n \ll 1. \quad (12)$$

Что же касается такой замены в  $\tilde{M}(\kappa)$ , то соответствующее условие можно записать в виде

$$|\tilde{M}(\kappa_n)| \gg |\delta\kappa_n| \left| \frac{d\tilde{M}(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_n}. \quad (13)$$

Даже не вдаваясь в подробный анализ общих формул для массового оператора, довольно очевидно, что так как переменная  $\kappa$  входит только в аргумент корреляционной функции  $\tilde{W}$  [см. например, (35.28)], то  $d\tilde{M}/d\kappa \approx l\tilde{M}$ , и из неравенства (13) следует

$$|\delta\kappa_n| l \ll 1. \quad (14)$$

Таким образом, все полученные выше результаты справедливы только до тех пор, пока на расстояниях порядка радиуса корреляции (и длины цикла  $\Lambda_n$ ) можно пренебречь как затуханием ( $\gamma_n \ll 1/l$ ,  $1/\Lambda_n$ ), так и изменением фазы собственной волны ( $\text{Re } \delta\kappa_n \ll 1/l$ ,  $1/\Lambda_n$ ). В частности, неравенства, ограничивающие область применимости формулы (11), имеют вид

$$(k\sigma \cos \theta_n)^2 \ll \left(\frac{\Lambda_n}{l}\right)^2 \ll 1. \quad (15)$$

Тот факт, что при больших радиусах корреляции затухание среднего поля линейно растет с  $l$  [ср. с (10), (11)], на первый взгляд кажется довольно неожиданным. Действительно, при увеличении  $l$  шероховатости поверхности волновода становятся более пологими и отражение должно приближаться к зеркальному. Это кажущееся противоречие легко устраняется на основе следующего геометрического рассмотрения.

При  $kl \gg 1$  и  $\pi/2 - \theta_n \gg (kl)^{-1/2}$  изменением угла  $\theta$  при отражении волны от стенки волновода можно пренебречь, так как отражение происходит от локально плоской поверхности. Другими словами, преобразования волны с данным номером в другие моды не происходит, а роль шероховатостей сводится лишь к изменению фазы поля на величину  $2q_n \zeta(r_s)$  при каждом отражении.

После  $P$  отражений от поверхности волновода поле  $n$ -го мода приобретает вид

$$\Psi_n = \Psi_n^0 \exp \left\{ i \sum_{s=1}^P 2q_n \zeta(r_s) \right\}, \quad (16)$$

где  $\Psi_n^0$  — собственная волновая функция невозмущенной задачи ( $\zeta = 0$ ).

Если последовательные отражения волны от стенок волновода некоррелированы, т. е.  $|r_s - r_{s+1}| = \Lambda_n \gg l$ , то случайные величины  $\zeta(r_s)$  являются независимыми, что позволяет для случая нормального распределения высот шероховатостей написать

$$\left\langle \exp \left[ 2iq_n \sum_{s=1}^P \zeta(r_s) \right] \right\rangle = \langle \exp(2iq_n \zeta) \rangle^P = e^{-2(q_n \sigma)^2 P}. \quad (17)$$

При  $(q_n \sigma)^2 \ll 1$  среднее поле существенно убывает лишь после большого числа отражений ( $P \gg 1$ ). В этом случае число отражений волны от стенок волновода на расстоянии  $x$  равно

$$P \approx x/\Lambda_n, \quad (18)$$

и для среднего поля имеем из (16) и (18)

$$\langle \Psi_n \rangle = \Psi_n^0 \exp \left\{ -2 \frac{(q_n \sigma)^2}{\Lambda_n} x \right\}. \quad (19)$$

Таким образом, декремент затухания среднего поля  $n$ -го мода за счет рассеяния на шероховатостях стенок оказывается равным

$$\gamma_n = 2 \frac{(q_n \sigma)^2}{\Lambda_n}. \quad (20)$$

Этот результат в точности совпадает с формулой (8в), полученной на основе строгого рассмотрения.

В обратном предельном случае  $\Lambda_n \ll l$  последовательные отражения нельзя рассматривать как независимые. Случайные величины  $\zeta(r_s)$  и  $\zeta(r_{s+v})$  (высоты шероховатостей в  $s$ -й и  $s+v$ -й точках отражения) при этом коррелируют\*), если  $|v| \leq v_0 = l/2\Lambda_n$ . Считая для оценок функцию корреляции ступенькой, т. е.

$$W(r) = 1 \text{ при } r < l, \text{ и } W(r) = 0 \text{ при } r \geq l, \quad (21)$$

фазу поля  $\Psi_n$  в (16) можно преобразовать к виду

$$\sum_{s=1}^P \zeta(r_s) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=j-v_0}^{j+v_0} \zeta(r_s) \simeq 2v_0 \sum_{j=1}^N \zeta(r_j). \quad (22)$$

\*) См. подстрочное примечание к стр. 382,

Здесь  $N = P / (2v_0)$  — число независимых групп скоррелированных между собой точек отражения, а величины  $\zeta(r_j)$  при этом являются независимыми. Дальнейшее усреднение можно проводить так же, как и в формуле (17), в результате чего получаем

$$\langle \Psi_n \rangle = \Psi_n^0 \exp[-4(q_n \sigma)^2 v_0 P]. \quad (23)$$

При  $v_0^2 (q_n \sigma)^2 \ll 1$  [ср. неравенства (14), (15)] для  $P$  можно воспользоваться формулой (18). Отсюда для декремента затухания получаем

$$\gamma_n = 2 \left( \frac{q_n \sigma}{\Lambda_n} \right)^2 l. \quad (24)$$

Эта формула находится в полном соответствии с полученным ранее результатом (11), если учесть, что в принятой модели

$$\tilde{W}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x; y=0) dx = 2l.$$

4. Все приведенные выше расчеты (кроме заключительных полукачественных оценок последнего пункта) были основаны на приближенном решении (35.27) дисперсионного уравнения (35.23), причем в разложении (35.7) массового оператора по степеням  $\sigma^2$  мы ограничивались лишь первым членом. В результате для декремента затухания среднего поля в случае двумерных неровностей была получена формула (56), которую можно записать в виде

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \bar{w}_{nm}, \quad \bar{w}_{nm} = w_{n,m} + w_{n,-m}, \quad (25)$$

где симметричные по индексам  $n$  и  $m$  коэффициенты

$$w_{n, \pm m} = 2 \left( \frac{q_n q_m \sigma}{\kappa_n \kappa_m a} \right)^2 \tilde{W}(\kappa_n \mp \kappa_m) \quad (26)$$

имеют, как уже указывалось ранее, смысл вероятности некогерентного рассеяния из мода  $m$  в мод  $n$ , отнесенной к единице длины волновода, причем  $w_{n,m}$  соответствует преобразованию в волны, распространяющиеся в том же направлении, что и исследуемая волна, а  $w_{n,-m}$  — соответствует рассеянию в обратном направлении. Аналогичная ситуация имеет место и для волновода со сложным заполнением  $\varepsilon(z)$  [формула (35.6)]. Более того, если под  $\bar{w}_{n,m}$  подразумевать вероятность преобразования из  $n$ -волны в  $m$ -волну, проинтегрированную по всем возможным направлениям рассеяния [в формуле (25) их только два], то формула (25) оказывается справедливой и в самом общем случае анизотропных

шероховатостей и произвольных  $\varepsilon(z)$ . По аналогии с (35.27) и (35.32), для  $\bar{w}_{nm}$  нетрудно получить формулу

$$\bar{w}_{nm} = \frac{\sigma^2}{4\pi} \frac{\psi'_2(\kappa_n, 0) |\varphi'_m(0)|^2}{(d\psi_2(\kappa, 0)/d\kappa)_{\kappa=\kappa_n}} \int_0^{2\pi} W(\kappa_n - \kappa_m) d\alpha, \quad (27)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\kappa_n$  и  $\kappa_m$ , направление которых указывает направление распространения волн ( $\kappa_n$  — для исследуемой волны, а  $\kappa_m$  — для рассеянных), а их длины имеют прежний смысл — это продольные волновые числа нормальных волн в гладком волноводе. Остальные обозначения в (27) такие же, как и в § 35. Учет следующих членов разложения в массовом операторе не изменяет структуры формулы (25), а приводит лишь к усложнению явного вида удельных вероятностей преобразования (27). В частности, учет членов порядка  $\sigma^4$  в массовом операторе [им соответствуют вторая и третья диаграммы в (34.11)] приводит к добавлению к затуханию  $\gamma_n \sim \sigma^2$  (полученному в приближении Бурре) слагаемого  $\gamma'_n \sim \sigma^4$ . Ясно, что на больших расстояниях это дополнительное затухание может существенно уменьшить амплитуду среднего поля по сравнению с тем, что дает приближение Бурре, так как  $\gamma'_n$  стоит в показателе экспоненты  $\sim \exp\{-\gamma'_n x\}$ . Однако, если выполняются использованные выше неравенства (12) и (14), отношение  $\gamma'_n/\gamma_n$  окажется малым в меру выполнения условий (35.17а, б, в) (при  $ak \gg 1$  и  $l \ll \Lambda_n$ ). Поэтому затухание, связанное с  $\gamma'_n$ , начинает сказываться на столь больших расстояниях, где среднее поле уже практически полностью исчезает за счет главного множителя  $\exp\{-\gamma_n x\}$ . То же самое относится и к поправкам к фазовой скорости за счет учета следующих членов в массовом операторе: хотя на больших расстояниях  $x$  дополнительный набег фазы  $\sim x \operatorname{Re} \delta\kappa'_n$  может быть сколь угодно большим, отношение  $\operatorname{Re} \delta\kappa'_n / \operatorname{Re} \delta\kappa_n$  при наложенных выше ограничениях всегда мало.

Наконец, заметим, что приведенные соображения о пределах применимости приближения Бурре, полученные путем удержания следующих (пропорциональных  $\sigma^4$ ) членов в массовом операторе, справедливы лишь в том случае, когда граничные условия (35.2а) являются точными. Если исходные граничные условия (35.2а) в свою очередь являются приближенными (в частности, получены путем разложения точного граничного условия  $G[z = \zeta(r)] = 0$  по степеням  $\zeta$ ), то учет следующих членов разложения также приводит к появлению в  $\delta\kappa_n$  слагаемых  $\sim \sigma^4$ . Оценки, аналогичные приведенным выше, показывают, что при выполнении неравенств (12) и (14) соответствующими добавками к затуханию и фазовой скорости также можно пренебречь.

5. Изложенная в § 34 методика дает возможность учитывать возмущения в граничном условии весьма общего вида (34.2). Ее

применение проиллюстрировано в §§ 35, 36 на примере простейшего граничного условия  $G|_S = 0$ . Не представляет труда, исходя из уравнения (34.12) для средней функции Грина, учесть влияние возмущений на спектр в целом ряде других физически интересных задач.

В частности, учет неровностей границы в плоском волноводе с идеально жесткими стенками ( $\partial G/\partial n|_S = 0$ ) приводит к граничному условию (34.5) с  $\hat{\eta}_0 = \delta\hat{\eta} = 0$ , а выражение для затухания собственных волн имеет вид (25), где

$$\bar{w}_{nm} = \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi a^2 \kappa_n} \int_0^{2\pi} d\alpha (k^2 - \kappa_n \kappa_m)^2 \tilde{W}(\kappa_n - \kappa_m), \quad \varepsilon_n \neq 0 = 1, \quad \varepsilon_0 = 1/2 \quad (28a)$$

[ср. с (27)]. В частном случае двумерных шероховатостей с образующими, перпендикулярными к направлению распространения  $n$ -й собственной волны, из (28a) следует  $\bar{w}_{nm} = w_{n,+m} + w_{n,-m}$ , где

$$w_{n,\pm m} = \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_n \varepsilon_m}{a^2 \kappa_n \kappa_m} (k^2 \mp \kappa_n \kappa_m)^2 \tilde{W}(\kappa_n \mp \kappa_m). \quad (28b)$$

Развитый в § 34 метод функций Грина для учета влияния возмущений в граничном условии оказывается эффективным и при решении уравнений Максвелла. С помощью этого метода может быть изучено распространение электромагнитных волн в плоском волноводе с идеально проводящими статистически неровными стенками. Как известно (см., например, [72]), невозмущенные собственные колебания в таком волноводе можно разделить на две группы:

а) магнитные волны («горизонтальная» поляризация), в которых составляющие электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей имеют вид

$$E_x = 0, \quad E_y = \varphi_n(z) e^{i\kappa_n x}, \quad E_z = 0, \quad (29a)$$

$$H_x = i \frac{q_n}{k} \psi_n(z) e^{i\kappa_n x}, \quad H_y = 0, \quad H_z = \frac{\kappa_n}{k} \varphi_n(z) e^{i\kappa_n x}, \quad (29b)$$

б) электрические волны («вертикальная» поляризация)

$$E_x = i \frac{q_n}{k} \varphi_n(z) e^{i\kappa_n x}, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\kappa_n}{k} \psi_n(z) e^{i\kappa_n x}; \quad (30a)$$

$$H_x = 0, \quad H_y = \psi_n(z) e^{i\kappa_n x}, \quad H_z = 0, \quad (30b)$$

где  $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin q_n z$ ,  $\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{a}} \cos q_n z$ , ( $\varepsilon_n \neq 0 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 1/2$ ) — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (35.30) с  $k^2 \varepsilon = k^2$  и нулевыми граничными условиями первого [ $\varphi_n(0) = \varphi_n(a) = 0$ ] и второго [ $\psi'_n(0) = \psi'_n(a) = 0$ ] рода соответственно.

Ось  $x$ , как и раньше, выбрана в направлении распространения нормальных волн. Расчеты, аналогичные проведенным в § 35, показывают, что при наличии нерегулярностей волна, которая в гладком волноводе была чисто магнитной ( $E_x = 0$ ), приобретает за счет рассеяния на шероховатостях стенок продольную составляющую электрического поля, пропорциональную параметру возмущения:

$$E_x^{(n)} = i \frac{q_n \sigma^2}{4\pi} [\varphi_n(z) + i\psi_n(z)] e^{i\kappa_n x} \times \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\rho, 0, 0) \frac{\partial^2 W(\rho)}{\partial \rho_x \partial \rho_y} e^{i\kappa_n \rho_x} d\rho, \quad (31)$$

где  $G_2(\rho; z, z_0)$  — функция Грина плоского волновода с абсолютно жесткими стенками

$$G_2(\rho; z, z_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{i\kappa x} \frac{\Psi_n^*(z) \Psi_n(z_0)}{\kappa^2 - \kappa_n^2}. \quad (32)$$

Аналогично, электрическая волна становится «квазиэлектрической» — у нее появляется отличная от нуля продольная компонента магнитного поля. Заметим, что в обычной теории возмущений деполяризации за счет рассеяния на нерегулярностях границ волновода в линейном приближении не возникает [411].

Декременты затухания электрической  $\gamma_n^{(e)}$  и магнитной  $\gamma_n^{(h)}$  нормальных волн за счет некогерентного рассеяния на неровностях границ при этом определяются по формулам

$$\gamma_n^{(h)} = \frac{\sigma^2}{2\pi\kappa_n a^2} \sum_m \int_0^{2\pi} d\alpha q_m^3 (q_m^3 + \kappa_m^3 \sin^2 \alpha) \tilde{W}(\kappa_n - \kappa_m), \quad (33a)$$

$$\gamma_n^{(e)} = \frac{\sigma^2}{2\pi\kappa_n a^2} \sum_m \int_0^{2\pi} d\alpha [(k^2 - \kappa_n \kappa_m)^2 - q_m^3 \kappa_m^3 \sin^2 \alpha] \tilde{W}(\kappa_n - \kappa_m), \quad (33b)$$

где  $q_n = n\pi/a$ ,  $\kappa_n = \sqrt{k^2 - q_n^2}$ ,  $\alpha$  — угол между векторами  $\kappa_n$  и  $\kappa_m$ . Легко видеть, что эти выражения имеют точно такую же структуру, что и формула (25). Различие в затухании скалярных и электромагнитных волн проявляется лишь в явном виде удельных вероятностей перехода  $w_{nm}$ . Связано это в основном с тем, что в последнем случае при рассеянии изменяется, вообще говоря, поляризация электромагнитной волны: например, нормальная волна электрического типа с номером  $n$ , дифрагируя на неровностях границы волновода, преобразуется не только в электрические волны с другими номерами, но и в магнитные волны. В связи с этим интересно отметить, что в случае двумерных (цилиндри-

ческих) шероховатостей, когда уравнения поверхностей стенок волновода имеют вид  $z = \xi_1(x)$  и  $z = a + \xi_2(x)$  [см. (1)], нормальные магнитные волны в волноводе с идеально проводящими стенками затухают так же, как скалярные собственные волны в волноводе с абсолютно мягкими стенками ( $G|_S = 0$ ), а электрические — как в жестком волноводе ( $\partial G/\partial n|_S = 0$ ). Действительно, при этом  $\tilde{W}(x) = 2\pi d(x_y) \tilde{W}(x_x)$  и формулы (33а) и (33б) переходят в (25) с удельными вероятностями перехода (26) и (28б) соответственно. Такая близкая аналогия между затуханием электромагнитных и скалярных волн в данном случае обусловлена тем, что при рассеянии на двумерных шероховатостях не возникает деполяризации собственных волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ , т. е. перпендикулярно к образующим неровностей.

Не вызывает принципиальных затруднений обобщение приведенных в последних двух параграфах результатов, относящихся к простейшему случаю плоского волновода, и на случай волноводов с более сложной геометрией. Задача при этом, по-прежнему, сводится к решению интегрального уравнения Дайсона (34.12), ядро которого является функционалом от невозмущенной функции Грина  $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  и корреляционной функции шероховатостей  $\tilde{W}(r, r')$ .

В качестве примера рассмотрим сначала абсолютно мягкий волновод с прямоугольным сечением ( $0 \leq z \leq b$ ,  $0 \leq y \leq a$ ), невозмущенные собственные функции которого имеют вид

$$U_{nm}(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{n\pi}{b} z \sin \frac{m\pi}{a} y e^{i\kappa_{nm}x}, \quad (34)$$

( $\kappa_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$ ,  $n$  и  $m$  — целые числа). Шероховатости для простоты будем считать двумерными (зависящими только от  $x$ ) и некоррелированными на разных стенках. С помощью вычислений, полностью аналогичным приведенным выше для плоских волноводов, можно получить следующую формулу для затухания собственной волны (34) за счет преобразования в другие волны:

$$\begin{aligned} \text{Im } \kappa_{nm} = & \frac{8\sigma^2\pi^2}{\kappa_{nm}} \left\{ \frac{m^2}{a^6} \sum_{s=1}^{N_n} \frac{s^2}{\kappa_{ns}} [\tilde{W}(\kappa_{ns} + \kappa_{nm}) + \tilde{W}(\kappa_{ns} - \kappa_{nm})] + \right. \\ & \left. + \frac{n^2}{b^6} \sum_{s=1}^{N_m} \frac{s^2}{\kappa_{sm}} [\tilde{W}(\kappa_{sm} + \kappa_{nm}) + \tilde{W}(\kappa_{sm} - \kappa_{nm})] \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

где пределы суммирования  $N_n$  и  $N_m$  определяются из условий:

$$\frac{N_n^2}{a^2} < \frac{k^2}{\pi^2} - \frac{n^2}{b^2} < \frac{(N_n + 1)^2}{a^2}; \quad \frac{N_m^2}{b^2} < \frac{k^2}{\pi^2} - \frac{m^2}{a^2} < \frac{(N_m + 1)^2}{b^2}.$$

Наконец, для цилиндрического волновода радиуса  $a$ , собственные функции которого имеют вид

$$U_n^m(r, \varphi, x) = \frac{\mathcal{J}_n\left(\frac{r}{a} \mu_n^m\right)}{\sqrt{2} \pi a \mathcal{J}'_n(\mu_n^m)} e^{im\varphi + i\kappa_n^m x} \quad (36)$$

(здесь  $r, \varphi$  — полярные координаты в плоскости  $\{y, z\}$ ,  $\mathcal{J}_n$  — функция Бесселя с номером  $n$ ,  $\mu_n^m$  —  $m$ -й корень функции  $\mathcal{J}_n$ ,  $\kappa_n^m = \sqrt{k^2 - (\mu_n^m/a)^2}$ ), затухание вдоль оси  $x$  определяется формулой

$$\text{Im } \kappa_n^m = \frac{\sigma^2}{4\pi a^6} \sum_{p=-N}^N \sum_{s=1}^{M(p)} \frac{(\mu_s^p \mu_n^m)^2}{\kappa_n^m \kappa_s^p} \times \\ \times [\tilde{W}(\kappa_n^m - \kappa_s^p; m-p) + \tilde{W}(\kappa_n^m + \kappa_s^p; m-p)]. \quad (37)$$

Здесь пределы суммирования  $N$  и  $M$  определяются из неравенств:

$$\mu_1^N < ak < \mu_1^{N+1}; \quad \mu_M^p < ak < \mu_{M+1}^p, \quad (38)$$

а через  $\tilde{W}$  обозначено преобразование Фурье

$$\tilde{W}(\kappa, m) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi W(x, \varphi) e^{-i\kappa x + im\varphi}$$

от корреляционной функции шероховатостей, которые заданы уравнением  $r = a + \zeta(x, \varphi)$  и, как всегда, считаются статистически однородными:

$$\langle \zeta(x, \varphi) \zeta(x + \xi, \varphi + \theta) \rangle = \sigma^2 W(\xi, \theta).$$

6. Все проведенные выше расчеты, строго говоря, относились только к тому случаю, когда частота нормальных волн далека от собственных критических частот волновода, т. е. когда рассматриваемая система действительно является волноводом, а не резонатором. В частности, для плоского волновода это означает, что величина  $ak/\pi$  не есть целое число и, более того, она не слишком близка к целому числу. Это ограничение вызвано тем, что при решении уравнения Дайсона в приближении простейшего массового оператора и при дальнейшем усложнении  $\hat{M}$  путем учета следующих членов, существенно использовалась величина  $G_0$  — функция Грина невозмущенного (гладкого) волновода. Между тем известно, что при  $ak/\pi = N$   $N$ -й мод не имеет продольной составляющей волнового вектора и, следовательно, не уносит вдоль волновода поступающую в него от точечного источника мощность. Это приводит к невозможности установления стационарного состояния — поле точечного источника  $G_0$  обращается в бесконечность. Для установления стационарного состояния необходим отток энер-



гии из  $N$ -го мода, вызванный, например, диссипативным затуханием этой волны.

Наличие нерегулярностей в волноводе также, очевидно, должно вызывать устранение расходимости, так как в этом случае возникает связь между собственными волнами, и откачка энергии из  $N$ -го мода во все остальные происходит в результате рассеяния на неоднородностях. Действительно, из формул (35.22), (35.32), например, видно, что для трехмерных шероховатостей (и, в частности, изотропных) средняя функция Грина  $\mathcal{G}(\mathbf{r}; z, z_0)$  и массовый оператор  $\hat{M}$  остаются конечными и на критических частотах. Исключением является случай двумерных шероховатостей: в формуле (56) последний член суммы обращается в бесконечность при  $ak/\pi = N$  для любого номера  $n$ . Таким образом, приближение простейшего массового оператора в виде первого члена в формуле (35.7) для двумерных шероховатостей на критических частотах оказывается очень грубым.

Простейшей процедурой устранения возникающих при этом расходимостей является замена в ряде (35.7) для  $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  невозмущенных функций Грина  $G_0$  на усредненные  $\mathcal{G}$ . Ограничиваясь, по-прежнему, только первым членом получающегося таким путем ряда

$$M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \frac{\sigma^2}{4\pi} \mathcal{G}''(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; 0, 0) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (39)$$

мы приходим к нелинейному уравнению для функции  $\mathcal{G}$  — так называемому уравнению Дайсона с «простой вершиной» (подробнее см., например, [412]):

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \text{---} \quad (40)$$

В случае точного резонанса, когда  $ak/\pi = N$ , из (40) следуют формулы для поправок  $\delta\kappa_n$  к невозмущенным продольным волновым числам  $\kappa_n$ :

$$\delta\kappa_N = \left(\frac{k^2\sigma}{a}\right)^{2/3} [2\tilde{W}(0)]^{1/3} e^{i\pi/6}, \quad (41a)$$

$$\delta\kappa_{n < N} = \left(2\frac{k\sigma^2}{a^2}\right)^{2/3} \frac{q_n^2}{\kappa_n} \frac{\tilde{W}(\kappa_n)}{[\tilde{W}(0)]^{1/3}} e^{i\frac{\pi}{3}}. \quad (41b)$$

Таким образом, при наличии неровностей стенок резонансный мод  $n = N$  имеет комплексное продольное волновое число, т. е. распространяется вдоль волновода с декрементом затухания  $\gamma_N = \text{Im } \kappa_N \sim (k\sigma)^{2/3}$ . Остальные собственные волны ( $n < N$ ) также приобретают конечное затухание, обусловленное в основном некогерентным рассеянием в резонансный мод, однако они ослабля-

ются в меньшей степени, чем резонансный:  $\gamma_n \sim (k\sigma)^{4/3}$ . Напомним, что на некритических частотах затухание нормальных волн пропорционально более высокой степени малого параметра  $\gamma_n \sim (k\sigma)^2$ .

Сравнение уравнений (40) и (35.24) позволяет также выяснить критерии применимости формул, полученных в пунктах 1—3 настоящего параграфа, по параметру некритичности  $\epsilon = \frac{ak}{\pi} - \left[ \frac{ak}{\pi} \right]$

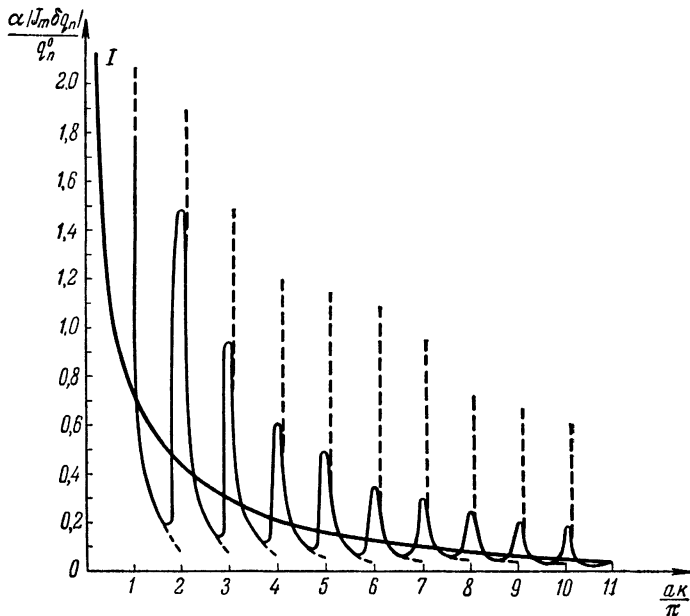


Рис. 87.

(квадратные скобки означают целую часть числа, в них заключенного). Оказывается, что приближением Бурре при этом можно пользоваться, если

$$\delta\kappa_N \ll \sqrt{\frac{2\pi}{a} k\epsilon} \quad \left( N = \left[ \frac{ak}{\pi} \right] \right). \quad (42)$$

На рисунке 87 изображена зависимость относительного затухания  $\alpha \operatorname{Im} \delta q_n / q_n$  от параметра  $ak/\pi$

$$\left( \alpha \equiv \pi^2 / 2kl (k\sigma)^2, \quad q_n = \sqrt{k^2 - \kappa_n^2}, \quad \delta q_n = -\frac{\kappa_n}{q_n} \delta \kappa_n \right)$$

при  $kl=1$ ;  $(k\sigma)^2=0,1$ ;  $n=1$ , и гауссовой функции корреляции. Видно, что при целых значениях  $ak/\pi$  приближение Бурре (пунктирная линия) приводит к бесконечным значениям для затухания, как это следует из формулы (56). Решение (41б) нелинейного

уравнения (40) приводит к замыванию резонанса на интервале  $ak/\pi - [ak/\pi] \simeq abq_N$  (сплошная линия). Для сравнения на том же рисунке приведен график для относительного затухания, построенный по формуле (7), когда последовательные отражения считаются независимыми и шероховатости стенок волновода учитываются с помощью эффективного коэффициента отражения среднего поля (жирная линия I).

Интересно отметить, что если неровности стенок волновода — трехмерные (и, в частности, изотропные), преимущественного рассеяния в резонансный мод не происходит. Действительно, затухание нормальных волн в этом случае можно получить из (5б), если каждый член суммы по  $m$ , описывающий рассеяние в направлении  $\theta_m$  ( $\sin \theta_m = \kappa_m/k = \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{ak}\right)^2}$ ), умножить на элемент телесного угла  $d\Omega_m = \sin \theta_m d\theta_m d\alpha$  и проинтегрировать по азимуту  $\alpha$  [ср. с формулами (35.32) либо с (25), (27)]. При этом множитель  $\kappa_m = k \sin \theta_m$  в знаменателе формулы (5б), дающий особенности при  $\kappa_m = 0$ , сокращается и конечный результат для  $\delta\kappa_m$  получается уже в приближении Бурре. Учет более высоких приближений в массовом операторе приводит лишь к замыванию ступенчатой зависимости затухания от частоты (или от параметра  $ak/\pi$ ).

### § 37. Уравнение переноса излучения

В предыдущих параграфах этой главы исследовалась средняя функция Грина для волноводов со статистически неровными или неоднородными стенками. Перейдем теперь к исследованию вторых статистических моментов поля в неоднородных волноводах указанного типа.

1. Если, следуя методике, развитой в § 34, продолжить аналогию с квантовой электродинамикой, то, перемножая ряды (34.7) для  $G$  и  $G^*$  и производя затем усреднение, подобно тому как это делалось при выводе уравнения (34.12), можно показать, что корреляционная функция поля  $\mathcal{K}(R, R_0; R', R'_0) = \langle G(R, R_0) G^*(R', R'_0) \rangle$  удовлетворяет уравнению типа Бете — Солпитера (см., например, [412]):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R, R_0; R', R'_0) = & \mathcal{G}(R, R_0) \mathcal{G}^*(R', R'_0) + \\ & + \frac{1}{(4\pi)^4} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{G}(R, r_1) \mathcal{G}^*(R', r'_1) \mathcal{S}(r_1, r'_1; r_2, r'_2) \mathcal{K}(r_2, R_0; r'_2, R'_0) \times \\ & \times dr_1 dr_2 dr'_1 dr'_2. \quad (1) \end{aligned}$$

Ядро этого интегрального уравнения  $\mathcal{S}(r_1, r'_1; r_2, r'_2)$  является аналогом оператора интенсивности в теории объемного рассеяния [422] и играет при изучении корреляционных функций поля ту же роль, что и массовый оператор  $\hat{M}(r, r')$  для средней

функции Грина  $\mathcal{G}(r, r') = \langle G(r, r') \rangle$ . Графически оператор  $\hat{\mathcal{G}}(r_1, r'_1; r_2, r'_2)$  можно изобразить в виде четырехполюсника



представляющего собой (так же, как и массовый оператор) символическое изображение суммы бесконечного ряда компактных диаграмм, которые нельзя разбить на две несвязанные части разрывом только двух горизонтальных линий [ср. с (34.11)]:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} r_1 \\ \square \\ r'_1 \end{array} \begin{array}{c} r_2 \\ \\ r'_2 \end{array} &= \begin{array}{c} r_1=r_2 \\ | \\ r'_1=r'_2 \end{array} + \begin{array}{c} r_1 \\ \text{---} \\ r'_1=r'_2 \end{array} \begin{array}{c} r_2 \\ \text{---} \\ r'_2 \end{array} + \begin{array}{c} r_1=r_2 \\ \text{---} \\ r'_1 \end{array} \begin{array}{c} r_2 \\ \text{---} \\ r'_2 \end{array} + \dots \\
 + \begin{array}{c} r_1 \text{---} r_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ r'_1 \text{---} r'_2 \end{array} + \begin{array}{c} r_1 \text{---} r_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ r'_1 \text{---} r'_2 \end{array} + \dots
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь все обозначения такие же, как и в § 34; единственное различие заключается в том, что нижним концам штриховых линий соответствуют сопряженные операторы возмущений  $\hat{V}^*(r)$ , а нижним горизонтальным линиям — сопряженные средние функции Грина  $\mathcal{G}^*(r'_1, r'_2)$ . Внутренним точкам графиков по-прежнему соответствует множитель  $1/4\pi$  и интегрирование по невозмущенной поверхности. Если корреляционную функцию  $\mathcal{K}(R, R_0; R', R'_0)$

изобразить элементом  $\begin{array}{c} R \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \times \\ | \quad | \\ R' \text{---} R'_0 \end{array}$ , то уравнение (1) запишется так:

$$\begin{array}{c} R \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \times \\ | \quad | \\ R' \text{---} R'_0 \end{array} = \begin{array}{c} R \text{---} R_0 \\ \text{---} \\ R' \text{---} R'_0 \end{array} + \begin{array}{c} r_1 \quad r_2 \\ | \quad | \\ \square \\ | \quad | \\ r'_1 \quad r'_2 \end{array} \begin{array}{c} R_0 \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \times \\ | \quad | \\ R'_0 \text{---} R'_0 \end{array} \tag{3}$$

Учет даже одного члена в операторе интенсивности приводит, как и в случае уравнения Дайсона, к суммированию бесконечной подпоследовательности в итерационном ряду для  $\mathcal{K}$ , т. е. к учету бесконечного ряда многократных рассеяний. Если, например, заменить оператор интенсивности первым его членом («лестничное» приближение), то уравнение Бете — Солпитера примет вид

$$\begin{array}{c} R \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \times \\ | \quad | \\ R' \text{---} R'_0 \end{array} = \begin{array}{c} R \text{---} R_0 \\ \text{---} \\ R' \text{---} R'_0 \end{array} + \begin{array}{c} r_1 \\ | \\ R_0 \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \square \\ | \quad | \\ R'_0 \text{---} R'_0 \\ r'_1 \end{array} \begin{array}{c} R_0 \text{---} R_0 \\ | \quad | \\ \times \\ | \quad | \\ R'_0 \text{---} R'_0 \end{array} \tag{4a}$$

или, в аналитической форме,

$$\mathcal{K}(R, R_0; R', R'_0) = \mathcal{G}(R, R_0) \mathcal{G}^*(R', R'_0) + \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dr_1 dr'_1 \times \\ \times \mathcal{G}(R, r_1) \mathcal{G}^*(R', r'_1) \langle \hat{V}(r_1) \hat{V}^*(r'_1) \rangle \mathcal{K}(r_1, R_0; r'_1, R'_0). \quad (4б)$$

Легко убедиться, что решение этого приближенного уравнения есть сумма следующей бесконечной последовательности:

$$\boxed{\times} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (5)$$

Так же как и уравнение для средней функции Грина, уравнение (1) для коррелятора  $\mathcal{K}$  не является замкнутым, так как содержит функцию  $\hat{\mathcal{V}}$ , определенную лишь в виде суммы бесконечного ряда. В отличие от (34.12), решение уравнения Бете — Солпитера нельзя записать в общем виде даже для статистически однородных возмущений  $V(r)$ , если формально считать вид  $\hat{\mathcal{V}}$  известным. Более того, при простейшем операторе интенсивности, т. е. в лестничном приближении, уравнение (4а) удается решить лишь в некоторых предельных случаях для специального вида корреляционной функции возмущения.

2. Указанные математические трудности сделали бы уравнение Бете — Солпитера мало пригодным инструментом для решения задач дифракции на статистически нерегулярных поверхностях, если бы не то обстоятельство, что в этих задачах нас зачастую интересует не сама величина  $\mathcal{K}$ , а некоторая другая функция, описывающая собственно влияние неоднородностей на свойства вторых статистических моментов поля. Действительно, например, в волноводе, как видно из результатов §§ 35, 36, наличие неровностей стенок приводит к тому, что, во-первых, появляются чисто количественные изменения основных параметров сигнала по сравнению с гладким волноводом — длины волны, фазовой скорости, поперечной структуры поля и т. д. Во-вторых, возникают качественно новые явления, в принципе отсутствующие в регулярном волноводе, — такие, как появление недиссипативного затухания у распространяющихся модов (превращение их в квазиоднородные), возникновение связи между собственными волнами, появление паразитных волн и т. д. Ясно, что наиболее существенным в большинстве случаев является изучение именно этих принципиально новых, привнесенных неровностями эффектов. Оказывается, что при вычислении вторых моментов (в частности, интенсивности) можно перейти от  $\mathcal{K}$  к величине, описывающей процессы, связанные собственно с нерегулярностями границ и отсутствующие в идеальном волноводе.

Эта величина, как будет видно, не содержит информации о «тонкой» интерференционной структуре, присущей полю и в гладком волноводе, и вследствие этого описывается более простыми уравнениями, чем  $\mathcal{H}$ . Такое раздельное математическое описание происходящих в нерегулярном волноводе явлений оказывается возможным благодаря тому, что процессы, связанные с некогерентным рассеянием на случайных неровностях, и «регулярные» интерференционные процессы имеют существенно разные пространственные и временные характерные масштабы.

Как видно из предыдущих параграфов, при наличии шероховатостей стенок в волноводе появляется новый параметр размерности длины  $\gamma_n^{-1}$  — расстояние, на котором существенно изменяется среднее (когерентное) поле  $n$ -й волны за счет преобразования в другие моды. Физически очевидно, что это и есть тот характерный масштаб, на котором заметно проявляются все процессы, связанные с неоднородностями. В то же время регулярная интерференционная структура поля изменяется на расстояниях порядка длины волны, гораздо меньших, чем  $\gamma_n^{-1}$ . Для того чтобы исключить из рассмотрения эти «быстрые» осцилляционные зависимости, необходимо проинтегрировать  $\mathcal{H}$  по некоторому «физическому интервалу»  $\mathcal{L}$ , большому по сравнению с их характерным размером и малому по отношению к масштабу «медленных», связанных с неровностями, процессов, т. е. от интенсивности в точке перейти к интенсивности, заключенной в объеме размером  $\mathcal{L}$  в окрестности данной точки. Поскольку влияние неоднородностей формируется на расстояниях, содержащих по крайней мере несколько радиусов корреляции  $l$ , необходимо также, чтобы  $l \ll \mathcal{L}$ . Это означает, что мы исключаем из рассмотрения изменения поля на расстояниях порядка среднего размера неоднородностей  $l$ .

Ясно, что интервал  $\mathcal{L}$  должен удовлетворять следующим неравенствам:

$$l, \frac{1}{(x_m - x_n)_{\min}} \ll \mathcal{L} \ll \frac{1}{(\gamma_n)_{\max}}. \quad (6)$$

Таким образом, если наличие возмущения границ не приводит к существенной перестройке спектра шероховатого волновода по сравнению с гладким, т. е. сдвиг уровней и затухание малы по сравнению с расстоянием между уровнями, интервал  $\mathcal{L}$ , определяющийся неравенством (6), всегда существует, и требуемое усреднение может быть проведено. То обстоятельство, что (6) оставляет определенный произвол в выборе  $\mathcal{L}$ , не является существенным, так как результат усреднения не зависит от  $\mathcal{L}$ .

Если размеры принимающего устройства удовлетворяют неравенству (6), то необходимое усреднение производится автоматически самим приемником. При этом, конечно, теряется информация о процессах, имеющих масштаб изменения меньший, чем  $\mathcal{L}$ , од-

нако благодаря этому искомые величины удовлетворяют существенно более простым соотношениям, чем точные уравнения (3) для корреляционной функции поля.

В плоском акустическом волноводе, например, с абсолютно мягкими стенками и двумерными неровностями  $z = \xi_1(x)$ ,  $z = a + \xi_2(x)$  (см. пп. 1—3 § 36), интенсивность поля  $J(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \mathcal{E}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0; \mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  после указанного выше усреднения по интервалу  $\mathcal{L}$  (вдоль оси  $x$ ) представляется в виде

$$J(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = (4\pi)^2 \sum_{n, m = -N}^N \frac{\sin^2 q_n z \sin^2 q_m z}{a^2 \kappa_n \kappa_m} F_{nm}(x, x_0) \quad (7)$$

(здесь отрицательным индексам  $n, m$  соответствуют волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси  $x$ ). Величины  $F_{nm}$  удовлетворяют системе уравнений, которая получается после интегрирования уравнения (4б) по переменной  $x$  (или  $x_0$ ) в интервале  $\mathcal{L}$ :

$$F_{nm}(x, x_0) = F_{nm}^0(x - x_0) + \sum_{p, q = -N}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 F_{np}^0(x - x_1) \widetilde{W}(x_p - x_q) F_{qm}(x_1, x_0), \quad (8)$$

где  $F_{nm}^0$  — относятся к волноводу с невозмущенными границами. Дифференцируя это уравнение по  $x$ , можно получить дифференциальное уравнение для  $F_{nm}$ :

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{dF_{nm}}{dx} = -2\gamma_n F_{nm} + \sum_{p = -N}^N w_{np} F_{pm} + \delta_{nm} \delta(x - x_0). \quad (9)$$

Входящие сюда величины имеют простой физический смысл.  $F_{nm}(x, x_0)$ , очевидно, пропорциональна интенсивности  $n$ -й нормальной волны в точке  $x$  при условии, что в точке  $x_0$  была возбуждена волна с номером  $m$ ;  $w_{np}$  — отнесенная к единице длины вероятность перехода энергии из  $n$ -го мода в  $p$ -й при однократном рассеянии, определенная в данном случае формулой (36.26). Из этой формулы видно, что выполняется так называемая «оптическая теорема», суть которой заключается в том что в системе отсутствует диссипация. Математически это выражается в том, что между коэффициентами уравнения (9) имеет место следующее соотношение [ср. (36.25)]:

$$\sum_{m = -N}^N w_{nm} = 2\gamma_n. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9) аналогичны хорошо известным в теории рассеяния в неоднородных средах уравнениям переноса излучения [423]. То обстоятельство, что в (9) фигурируют величины  $w_{nm}$ ,

делает физически понятной необходимость перехода от интенсивности в точке к интенсивности в объеме размером  $\mathcal{L} \gg l$  для получения уравнений переноса. Как показано, например, в [424], погонный коэффициент потерь  $n$ -й волны на преобразование в  $m$ -ю ( $w_{nm}$ ) формируется, т.е. перестает зависеть от  $x$ , только на расстояниях, много больших радиуса корреляции  $l$ .

В случае, когда в волноводе, кроме недиссипативного затухания, связанного с рассеянием на неоднородностях, существует малая «утечка» энергии, связанная с поглощением в стенках, в заполняющей волновод среде, либо с «высвечиванием» поля через ограничивающие волновод поверхности, уравнения (8) и (9) также имеют место. Можно легко показать, что при этом  $\gamma_n$  заменяется на  $\gamma_n + \gamma_n^0$ , где  $\gamma_n^0$  — затухание, вызванное перечисленными выше причинами.

Наличие в правой части (9) члена  $\delta_{nm} \delta(x - x_0)$  обусловлено спецификой возбуждения волновода — при выводе (9) фактически предполагалось, что в точке  $(x_0, z_0)$  находится точечный источник. Интерес представляет также отыскание собственных функций  $J_n(x)$  системы уравнений (9), описывающих, очевидно, интенсивность  $n$ -го мода.  $J_n$  удовлетворяют системе уравнений

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{dJ_n}{dx} = -2\gamma_n^0 J_n + \sum_{m=-N}^N w_{nm} (J_m - J_n), \quad (11)$$

которую теперь необходимо дополнить граничными условиями, связанными с характером возбуждения.

Если  $\gamma_n^0 = 0$ , решение (11) можно искать в виде полиномов  $(2N - 1)$ -й степени

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} A_{nk} x^k. \quad (12)$$

Для определения  $4N^2$  констант  $A_{nk}$  нужно записать  $4N^2$  соотношений, получающихся путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  после подстановки (12) в (11):

$$\sum_{k=-N}^N w_{nk} (A_{jk} - A_{jn}) = (2N - j - 1) A_{j+1, n} \operatorname{sgn}(n). \quad (13)$$

В силу оптической теоремы имеют место еще  $2N$  соотношений:

$$\sum_{k=-N}^N \operatorname{sgn}(k) \frac{dJ_k}{dx} = \sum_{k, n=-N}^N (A_{in} - A_{ik}) w_{kn}, \quad (14)$$

где  $i = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , так что линейно независимыми в (13) являются только  $2N(2N - 1)$  уравнений. Однако еще  $2N$  уравнений дают граничные условия, которые нужно задавать для каж-



дой из  $2N$  квазиоднородных волн (напомним, что  $(-k)$ -я волна отличается от  $k$ -й только направлением распространения). Таким образом, для определения  $4N^2$  величин  $A_{nk}$  имеем  $4N^2$  линейно независимых уравнений, так что решение (11) при  $\gamma_n^0 = 0$  действительно имеет вид (12) и при конкретных граничных условиях может быть легко найдено. Если  $\gamma_n^0 \neq 0$ , оптическая теорема не выполняется, соотношение (14) уже не имеет места, и решение уравнений (11) необходимо искать в виде суммы экспонент.

Важно отметить, что приведенный выше способ получения уравнений (9) является достаточно общим. Единственное требование заключается в том, что должен существовать интервал  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющий неравенству (6). Поэтому предложенный подход к изучению влияния возмущений границ на вторые статистические моменты поля путем перехода от уравнения Бете — Солпитера к уравнениям (9), описывающим интенсивность в «объеме» размером порядка  $\mathcal{L}$ , и вывод этих уравнений пригодны для любых систем с дискретным спектром. Необходимо только, чтобы поправки к невозмущенным собственным числам за счет неоднородностей границ были малыми (по модулю) по сравнению с расстояниями между уровнями [см. неравенства (36.12) и (36.14)].

Для жесткого плоского волновода, например,  $w_{nm}$  определяется по формуле (36.286). В цилиндрическом волноводе с двумерными, не зависящими от азимута  $\varphi$  шероховатостями (гофрированная трубка) уравнение для интенсивности  $J_n^{(m)}(x)$  в каждом моде

$$U_n^m \sim \mathcal{J}_n \left( \frac{r}{a} \mu_n^m \right) \exp [im\varphi + ix_n^m x]$$

[см. (36.36)] также имеет вид (11)

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{dJ_n^{(m)}}{dx} = -2\gamma_n^{(m)0} J_n^{(m)} + \sum_{s=-M}^{M} w_{ns}^{(m)} [J_s^{(m)} - J_n^{(m)}],$$

где

$$w_{ns}^{(m)} = \frac{\sigma^2}{2a^6} \frac{(\mu_s^m \mu_n^m)^2}{\mu_n^m \mu_s^m} \tilde{W}(\mu_n^m - \mu_s^m),$$

а пределы  $M(m)$  суммирования по  $s$  определяются из условий

$$\mu_M^m < ak < \mu_{M+1}^m,$$

где  $\mu_n^m$  —  $m$ -й корень функции Бесселя  $\mathcal{J}_n(\mu)$  [см. обозначения, введенные в § 36 после формулы (36.36)]. Тот факт, что уравнения для  $\mathcal{J}_n^{(m)}$  с разными индексами  $m$  оказываются независимыми, связан с тем, что при рассеянии на неровностях указанного типа не происходит преобразования в волны с другими номерами  $m$ , т. е. азимутальная структура колебаний при таких переходах не изменяется. Вид уравнения (11) не изменяется и в общем случае анизотропных шероховатостей в волноводах с произвольным

поперечным сечением, если под индексами  $m$  и  $n$  подразумевать полный набор индексов, по которым происходит классификация поперечных волновых функций — собственных решений двумерного уравнения Гельмгольца в области, получающейся в сечении волновода плоскостью  $\{y, z\}$ , перпендикулярной к оси волновода [см., например, формулы (36.34) — для прямоугольного волновода, (36.36) — для цилиндрического]. Для плоского волновода, в частности, роль второго «индекса» (принимającego не дискретные, а непрерывные значения) играет азимутальный угол, указывающий направление распространения  $n$ -й собственной волны. Вводя для данного случая «плоский» волновой вектор  $\kappa_n$  (см. п. 4 § 36), уравнение переноса (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \kappa_n \nabla_r J(\kappa_n, r) = & -2\gamma^0(\kappa_n) J(\kappa_n, r) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \sum_{m=1}^N w(\kappa_n, \kappa_m) [J(\kappa_m, r) - J(\kappa_n, r)], \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\kappa_n$  и  $\kappa_m$ . Явный вид вероятностей перехода  $w(\kappa_n, \kappa_m)$  для ряда частных случаев был приведен раньше: формулы (36.27), (36.28а) — для скалярных волн и (36.33а, б) — для электромагнитных.

3. В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о преобразовании волн в одномодовом волноводе ( $N = \left[ \frac{ak}{\pi} \right] = 1$ ). Будем считать, что шероховатости занимают участок длиной  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) и волновод возбуждается модом  $J_+$ , распространяющимся в области  $x < 0$  в положительном направлении оси  $x$ -в. Система уравнений (11) имеет при этом вид

$$\frac{dJ_+}{dx} = -(2\gamma^0 + w) J_+ + w J_-, \quad -\frac{dJ_-}{dx} = -(2\gamma^0 + w) J_- + w J_+, \quad (15)$$

с граничными условиями  $J_+(0) = J_0$  и  $J_-(L) = 0$ , ( $w$  — вероятность перехода из волны  $+$  в волну  $-$ , отнесенная к единице длины волновода). Решая (15), получаем следующие выражения для интенсивности волн  $J_+$  и  $J_-$  в интервале  $0 \leq x \leq L$ :

$$\begin{aligned} J_+(x) &= J_0 \frac{e^{\Gamma(L-x)} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma(L-x)}}{e^{\Gamma L} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma L}}, \\ J_-(x) &= J_0 r_{\infty} \frac{e^{\Gamma(L-x)} - e^{-\Gamma(L-x)}}{e^{\Gamma L} - r_{\infty}^2 e^{-\Gamma L}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где введены обозначения

$$\Gamma = 2\sqrt{\gamma^0(\gamma^0 + w)}, \quad r_{\infty} = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}, \quad \rho = \sqrt{1 + \frac{w}{\gamma^0}}. \quad (17)$$

Из (16) находим коэффициент отражения  $r_L$  от шероховатого участка в волноводе, имеющего длину  $L$ :

$$r_L = \frac{J_-(0)}{J_+(0)} = r_\infty \frac{e^{\Gamma L} - e^{-\Gamma L}}{e^{\Gamma L} - r_\infty^2 e^{-\Gamma L}} \quad (18)$$

и коэффициент прохождения:

$$t_L = \frac{J_+(L)}{J_+(0)} = \frac{1 - r_\infty^2}{e^{\Gamma L} - r_\infty^2 e^{-\Gamma L}}. \quad (19)$$

Отсюда ясен физический смысл величины  $r_\infty$  — это коэффициент отражения от бесконечного шероховатого волновода ( $L \rightarrow \infty$ ), а  $\rho$  — коэффициент стоячей волны напряжения. Затухание интенсивностей волн  $J_+(x)$  и  $J_-(x)$  при этом оказывается экспоненциальным:

$$J_+(x) = J_0 e^{-\Gamma x}, \quad J_-(x) = J_0 r_\infty e^{-\Gamma x}, \quad (20)$$

а декремент затухания  $\Gamma = 2\sqrt{\gamma^0(\gamma^0 + w)}$  определяется не только диссипативными потерями  $\gamma^0$ , но и вероятностью  $w$  рассеяния из одной волны в другую.

В обратном предельном случае ( $\Gamma L \ll 1$ ) изменение интенсивностей волн вдоль оси волновода — линейное:

$$J_+(x) = J_0 \frac{1 - r_\infty^2 + (1 + r_\infty^2)\Gamma(L-x)}{1 - r_\infty^2 + (1 + r_\infty^2)\Gamma L}, \quad J_-(x) = J_0 r_\infty \frac{2\Gamma(L-x)}{1 - r_\infty^2 + (1 + r_\infty^2)\Gamma L}. \quad (21)$$

Если  $\gamma^0 \ll w$  (т. е. диссипативными потерями можно пренебречь по сравнению с потерями на преобразование из волны в волну), то из (21) следует

$$J_+(x) = J_0 \frac{1 + w(L-x)}{1 + wL}, \quad J_-(x) = J_0 \frac{w(L-x)}{1 + wL},$$

что, естественно, является частным случаем формулы (12). Заметим, что коэффициент отражения  $r_L$  при этом оказывается равным

$$r_L = \frac{wL}{1 + wL}, \quad (22)$$

и в предельно случае длинного волновода  $wL \gg 1$  (но  $\Gamma L \approx \approx 2\sqrt{w\gamma^0}L \ll 1$ ) вся посланная в волновод энергия отражается назад. Если же потери на преобразование малы по сравнению с диссипативными, т. е.  $w \ll \gamma^0$ , то коэффициент отражения оказывается малым в меру малости этого параметра  $r_\infty \approx w/4\gamma^0$ .

4. Рассмотрим теперь задачу о преобразовании волн в многомодовом волноводе, когда  $N \gg 1$ . Если на заданной частоте  $\omega_0$  волновод не является критическим и длина цикла  $\Lambda_n$  (см. рис. 86) значительно превышает радиус корреляции шероховатостей  $l$ , то

в формуле (11) можно суммирование заменить интегрированием:

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{\partial}{\partial x} J_n(x) = \int_{-N}^N w_{nm} [J_m(x) - J_n(x)] dm. \quad (23)$$

Теперь мы рассматриваем  $J_n(x)$  как функцию двух непрерывных переменных  $(x, n)$  и  $J_m dm$  имеет смысл интенсивности, приходящейся на моды с номерами от  $m$  до  $m + dm$ . В случае крупномасштабных шероховатостей ( $kl \gg 1$ ) вероятности перехода  $w_{nm}$  являются «острыми» функциями разности  $n - m$ , что позволяет от интегрального уравнения (23) перейти к дифференциальному:

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n} \left[ D_n \frac{\partial}{\partial n} J_n(x) \right], \quad (24)$$

где

$$D_n = \frac{1}{2} \int_{-N}^N (n - m)^2 w_{nm} dm. \quad (25)$$

Уравнение (24) имеет вид уравнения диффузии для интенсивности  $J_n(x)$  в пространстве номеров модов  $n$ , причем роль времени играет расстояние  $x$  вдоль оси волновода.

Пусть волновод возбуждается модом  $J_{n_0}$ , так что граничное условие для (24) записывается так:  $J_n(0) = J_0 \delta(n - n_0)$ , причем для простоты будем считать  $n_0 \simeq N/2$  и ограничимся исследованием достаточно малого расплывания энергии по модам, когда  $(n - n_0)^2 \ll \ll N^2$ . Решение уравнения (24) приводит к следующей зависимости интенсивности от номера  $n$ :

$$J_n(x) = \frac{J_0}{2\sqrt{\pi D_{n_0} x}} e^{-\frac{(n - n_0)^2}{4D_{n_0} x}}. \quad (26)$$

Отсюда видно, что на расстоянии  $x$  от границы шероховатого участка существенно отличной от нуля оказывается интенсивность лишь в тех модах, номера которых лежат в интервале  $(n - n_0)^2 = = \langle (\Delta n)^2 \rangle = 4D_{n_0} x$ . Величина  $D_{n_0}$  имеет смысл коэффициента диффузии и с помощью (25) может быть выражена через статистические характеристики шероховатостей и параметры волновода.

При  $kl \gg 1$  из (25) для  $\langle (\Delta n)^2 \rangle$  в случае волновода с абсолютно мягкими стенками получаем следующую формулу:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \frac{4}{\pi} \langle \left( \frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \rangle n x = 4 \langle \left( \frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \rangle \frac{x n}{ak} N x, \quad (27)$$

где  $\langle (d\zeta/dx)^2 \rangle$  — дисперсия тангенсов углов наклона шероховатостей, которая связана со среднеквадратичной высотой  $\sigma$  и радиусом корреляции  $l$  соотношением  $\langle (d\zeta/dx)^2 \rangle \simeq 2\sigma^2/l^2$ .

Формула (27) допускает простую физическую интерпретацию. Действительно, если через  $\langle(\delta n)^2\rangle$  обозначить разброс номеров модов при однократном рассеянии на одной из стенок волновода, то в силу независимости последовательных отражений  $\langle(\Delta n)^2\rangle$  можно представить в виде

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle(\delta n)^2\rangle \frac{x}{\Lambda_n}, \quad (28)$$

где  $\Lambda_n = a \operatorname{tg} \theta_n$  — длина цикла данного мода, а  $x/\Lambda_n$ , — очевидно, есть число «столкновений» со стенками волновода на пути длиной  $x$ . Угловая ширина индикатрисы рассеяния при однократном отражении связана с дисперсией наклонов соотношением  $\langle(\delta\theta)^2\rangle \simeq \simeq 4\langle(d\zeta/dx)^2\rangle$ . С другой стороны, по определению,  $\cos \theta_n = n/N$ , откуда  $\delta n = \delta\theta \sqrt{N^2 - n^2}$ . Легко убедиться, что, подставляя эти соотношения в (28), мы приходим к результату (27), который был получен путем решения уравнения переноса.

5. Все проведенное выше рассмотрение относилось лишь к распространению монохроматических волн. Если же с самого начала исходить не из уравнений Гельмгольца, а из волновых уравнений, то тем же путем можно получить уравнения Бете—Солпитера и со временем. Усреднение этих уравнений по просторственному интервалу  $\mathcal{L}$  [см. (6)] в предположении, что сигнал, распространяющийся в волноводе, является достаточно узкополосным, приводит к уравнению переноса, отличающемуся от (11) лишь дополнительным слагаемым  $v_n^{-1} \frac{\partial}{\partial t} J_n(x, t)$ , где  $v_n = c^2 \kappa_n / \omega_0$  — групповая скорость волны с номером  $n$  на частоте  $\omega_0$  ( $c$  — фазовая скорость в среде, заполняющей волновод). На основании решения уравнений переноса со временем в работе [425] приведен анализ влияния шероховатостей границ волновода на распространение импульсных сигналов в волноводе.

В заключение заметим, что учет в операторе интенсивности  $\hat{\mathcal{I}}$  членов следующего порядка малости по параметрам теории возмущений [см. диаграммы в формуле (2)] не изменяет вида уравнения переноса (11), приводя лишь к более точным выражениям для вероятностей перехода при «однократном» рассеянии. Однако, интервал усреднения  $\mathcal{L}$  при этом оказывается ограниченным снизу не радиусом корреляции  $l$ , как в формуле (6), а линейным размером  $2l$ . Так как указанные выше приближения делаются в ядре интегрального уравнения, нужно, вообще говоря, иметь более строгие доказательства возможности ограничиваться в операторе интенсивности  $\hat{\mathcal{I}}$  конечным числом членов ряда по малому параметру. Это тем более необходимо также и потому, что в настоящее время известны такие модели случайного расположения рассеивателей (см. [426]), для которых уравнения переноса оказываются неприменимыми.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, под ред. С. Я. Брауде. Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
3. Дж. Займан, Электроны и фононы. Пер. с англ. под ред. В. Л. Бонч-Бруевича. ИЛ, 1962.
4. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. М. Фукс, Спектр и затухание поверхностных электронных состояний в магнитном поле. ЖЭТФ 55, № 3 (9), 931—941 (1968).
5. Л. И. Мандельштам, О шероховатости свободной поверхности жидкости. Полн. собр. трудов, т. 1, Изд-во АН СССР, 1948, стр. 246—260. Вперв. опубл. Ann d. Phys. 41, № 8, 609—624 (1913).
6. А. А. Андронов, М. А. Леонтович, К теории молекулярного рассеивания света на поверхности жидкостей. Собр. трудов А. А. Андропова, стр. 5—18. Изд-во АН СССР, 1956. Впервые опубл. Z. Phys 38, 485 (1926).
7. R. Gans, Die moleculare Rauhgkett einen ebenen Quecksilberfläche. Ann. Physik 74, № 11, 231—251 (1924).
8. R. Gans, Lichtzerstreuung infolge der molecularen Rauhgkeit de Trennungfläche zweier durchsichtiger Medien. Ann. Physik 79, № 3, 204—226 (1926).
9. Г. М. Городинский, В. Н. Галкина, К вопросу о нарушении когерентности света матовыми стеклянными поверхностями. Ж. прикл. спектроскопии 5, № 4, 451—455 (1966).
10. S. Carr, R. B. Hankin, S. Spinak, E. J. Pisa, P. P. Barron, Measurements of optical surface roughness using coherent radiation. Proc. IEEE 54, № 10, 1484—1485 (1966).
11. W. M. Brandenburg, J. T. Neu, Unidirectional Reflectance of imperfectly diffuse surfaces. J. Opt. Soc. Amer. 56, № 1, 97—103 (1966).
12. K. E. Torrance, E. M. Sparrow, R. C. Birklbak, Polarization, directional distribution and off-specular peak phenomena in light reflected from roughened surfaces. J. Opt. Soc. Amer. 56, № 7, 916—952 (1966).
13. Radar Studies of the Sun, Moon and Planets. (URSI Nat. Comm. Rep.). J. Res. Nat. Bur. Stand. D68, № 5, 565—567 (1964).
14. R. M. Goldstein, Radar studies of the Planets. Rev's Geophys. 2, № 4, 579—592 (1964).
15. R. M. Goldstein, Radar Investigations of the Planets. IEEE Trans. Millt. Electronics 8, № 3—4, 199—206 (1964).
16. J. C. James, Radar Echoes from the Sun. IEEE Trans. AP—12, № 7, 876—891 (1964).
17. J. V. Evans, Radar Studies of the Moon. J. Res. Nat. Bur. Stand. D69, № 12, 1637—1659 (1965).
18. J. V. Evans, T. Hagfors, Study of Radio Echoes from the Moon at 23 Centimeters Wavelength. J. Geophys. Res. 71, № 2, 4871—4889 (1966).
19. Рэлей, Теория звука, Гостехиздат, 1955.
20. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль реальной поверхности. Сб. Исследования по распространению радиоволн, вып. 2, под ред. Б. А. Введенского, Изд-во АН СССР, 1948. Впервые опубл. J. of Phys. 8, 317—330 (1944); 9, 1—6 (1945); 10, 410—418 (1946).

21. P. Beckmann, A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Oxford, Pergamon Press, 1963.
22. С. С. Недорезов, О влиянии границы на термодинамические свойства ферми-газа. *Изв. вузов, Физика*, № 3, 11—18 (1965).
23. С. М. Рытов, *Теория электрических флуктуаций и теплового излучения*. Изд-во АН СССР, 1953.
24. М. Л. Левин, К электродинамической теории теплового излучения. *ДАН СССР* 102, 53 (1955).
25. М. Л. Левин, Тепловое излучение хорошо проводящих тел. *ЖЭТФ* 31, № 2 (8), 302 (1956).
26. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Дифракция и тепловое излучение, Тезисы III симпозиума по дифракции, стр. 23, Тбилиси, (1964).
27. А. Г. Павельев, О тепловом радиоизлучении тел, ограниченных статистически неровными поверхностями, *Радиотехн. и электроника* 12, № 7, 1178 (1967).
28. М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике*. «Наука», 1967.
29. V. Twersky, On the Nonspecular Reflection of Electromagnetic Waves, *J. Appl. Phys.* 22, № 6, 825—835 (1951).
30. V. Twersky, Certain Transmission and Reflection Theorems. *J. Appl. Phys.* 25, № 7, 859—862 (1954).
31. M. A. Biot, Some New Aspects of the Reflection of Electromagnetic Waves on a Rough Surface. *J. Appl. Phys.* 28, № 12, 1455—1463 (1957); 29, № 6, 998 (1958).
32. K. Furutsu, *Diffraction of Radio Waves by Several Smooth Surfaces. Electromagnetic Theory and Antennas*, pt. I. Pergamon Press, Oxford, L., N. — Y., pp. 45—65 (1963).
33. J. E. Burke, V. Twersky, On Scattering of Waves by Many Bodies, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* D68, № 4, 500—510 (1964).
34. J. E. Burke, V. Twersky, Scattering and Reflection by Elliptically Striated Surfaces, *J. Acoust. Soc. Amer.* 40, № 4, 883—895 (1966).
35. Ю. П. Лысанов, Об усредненном законе спадания в приповерхностном звуковом канале с неровной границей. *Акуст. ж.* 12, № 4, 489 (1966).
36. S. S. Clay, Effect of Slightly Irregular Boundary on the Coherence of Waveguide Propagation, *J. Acoust. Soc. Amer.* 36, № 5, 833—838 (1964).
37. В. М. Кудряшов, О звуковом поле в канале со статистически неровной поверхностью, *Труды Акуст. ин-та*, № 1, 161—167 (1966).
38. А. Д. Лапин, Расчет среднего поля в волноводе с шероховатыми стенками. *Труды VI Всесоюзной акуст. конференции*, А1—4 М., 1968.
39. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Затухание собственных волн в пластине с шероховатыми стенками, *Письма ЖЭТФ* 7, 12, 485—488 (1968).
40. А. В. Чаплик, М. В. Энтин, Энергетический спектр и подвижность электронов в тонкой пленке с неидеальной границей, *ЖЭТФ* 55, № 3 (9), 990—999 (1968).
41. Ю. П. Лысанов, Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности. *Акуст. ж.* 2, № 2, 182—187 (1956).
42. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, О рассеянии звуковых волн статистически неровной поверхностью. *Труды VI Всесоюзной Акуст. конференции*, А'V—1 М., 1968.
43. Э. П. Гулин, Применение метода интегрального уравнения для приближенного расчета волнового поля, рассеянного статистически неровной поверхностью. *Труды VI Всесоюзной акуст. конференции*, М., 1968.
44. М. Л. Антокольский, Отражение волн от шероховатой абсолютно отражающей поверхности, *ДАН СССР* 62, № 2, 203—206 (1948).
45. Л. М. Бреховских, Дифракция звуковых волн на неровной поверхности, *ДАН СССР* 79, № 4, 585—588 (1951).

46. Л. М. Бреховских, Дифракция электромагнитных волн на неровной поверхности, ДАН СССР 81, № 6, 1023—1026 (1951).
47. Л. М. Бреховских, Дифракция волн на неровной поверхности, ЖЭТФ 23, № 3 (9), 275—288; 289—304 (1952).
48. М. А. Исакович, Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности. ЖЭТФ 23, № 3 (9), 305—314 (1952).
49. Р. Г. Баранцев, Отражение молекул газа от шероховатых поверхностей. Сб. Аэродинамика разреженных газов, № 1, 107—151, Изд-во ЛГУ, 1963.
50. Р. Г. Баранцев, Е. В. Алексеева, Обтекание тел сильно разреженным одноатомным газом. Сб. Аэродинамика разреженных газов, № 1, 183—194, Изд-во ЛГУ, 1963.
51. Р. Г. Баранцев, Р. Н. Ми ро ш и н, О приближенных представлениях оператора шероховатости. Сб. Аэродинамика разреженных газов, № 1, 152—162, Изд-во ЛГУ, 1963.
52. Ф. Г. Б а с с, Граничные условия для среднего электромагнитного поля на поверхности со случайными неровностями и с флуктуациями импеданса. Изв. вузов, Радиофизика 3, № 1, 72—78 (1960).
53. Ф. Г. Б а с с, И. М. Ф у к с, Об учете затенений при рассеянии волн на статистически неровной поверхности. Изв. вузов, Радиофизика 7, № 1, 101—112 (1964).
54. V. G. Smith, Geometrical Shadowing of Random Rough Surface. IEEE Trans. AP—15, № 5, 668—671 (1967).
55. D. D. Crombie, Doppler Spectrum of Sea Echo at 13,56 Mc/s, Nature 175, № 4459, 681—682 (1955).
56. Ф. Г. Б а с с, К теории комбинационного рассеяния волн на неровной поверхности, Изв. вузов, Радиофизика 4, № 1, 58—66 (1961).
57. Б. Ф. Курьянов, Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя типами неровностей, Акуст. ж. 8, № 3, 325—333 (1962).
58. И. М. Ф у к с, К теории рассеяния радиоволн на взволнованной поверхности моря, Изв. вузов, Радиофизика, 9, № 5, 876—887 (1966).
59. В. Д. Фрейлихер, И. М. Ф у к с, Метод функций Грина для уравнений Гельмгольца с возмущенными граничными условиями. Изв. вузов, Радиофизика, 13, № 1, 98—105 (1970).
60. Ф. Г. Б а с с, В. Д. Фрейлихер, И. М. Ф у к с, Среднее поле точечного источника в волноводе с шероховатыми стенками. Изв. вузов, Радиофизика, 12, № 10, 1521—1531 (1969).
61. В. Д. Фрейлихер, И. М. Ф у к с, Затухание среднего поля в волноводе на критической частоте, Изв. вузов, Радиофизика, 13, № 1, 128—132 (1970).
62. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
63. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
64. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, М., 1956.
65. Д. Е. Вакман, Асимптотические методы в линейной радиотехнике, «Сов. радио», М., 1962.
66. М. А. Лаврентьев, Б. В. Ш а б а т, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
67. М. А. Леонтович, О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. Сб. Исследования по распространению радиоволн, вып. 2, 5—12, под ред. Б. А. Введенского, Изд-во АН СССР, 1948.
68. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, ОГИЗ ГТТИ, 1948.
69. М. П. Свешникова, Теорема взаимности в электродинамике и радиотелеграфии. ЖРФХО, часть физическая 59, 453—464 (1927).
70. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат М., 1957.



71. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М., 1937.
72. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, «Сов. радио», М., 1957.
73. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1946.
74. И. А. Урусовский, Дифракция волн на периодической поверхности, Акуст. ж. 10, № 3, 338—346 (1964).
75. И. А. Урусовский, Дифракция на синусоидальной поверхности, Акуст. ж. 11, № 1, 93—101 (1965).
76. Л. Н. Дерюгин, Уравнения для коэффициентов отражения волн от периодически неровной поверхности, ДАН СССР 87, 913—916 (1952).
77. Л. Н. Дерюгин, Исследование электродинамических свойств ребристых поверхностей. Диссертация, МАИ, М., 1959.
78. Ю. П. Лысанов, Теория рассеяния волн на периодически неровных поверхностях. Акуст. ж. 4, № 1, 3—12 (1958).
79. И. А. Урусовский, Дифракция синусоидальных волн на неровной и неоднородной периодической поверхности. Диссертация, Акуст. Ин-т АН СССР, М., 1963.
80. Ф. Г. Басс, К статистической теории распространения волн. Диссертация, Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, Харьков, 1963.
81. Р. Н. Гуржи, С. М. Шевченко, К теории теплопроводности тонких диэлектрических образцов, ЖЭТФ 52, № 3, 814—819 (1967).
82. И. М. Фукс, К теории рассеяния волн на статистически неровных поверхностях, Диссертация, Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, Харьков, 1966.
83. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, «Сов. радио», М., 1966.
84. Б. Ф. Курьянов, Пространственная корреляция поверхностной реверберации, Труды Акуст. Ин-та АН СССР, вып. 2, 191—205, 1967.
85. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.
86. У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы. Пер. с английского под ред. А. М. Яглома, ИЛ, 1961.
87. M. S. Longuet-Higgins, The statistical analysis of a random, moving surface. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 249, № 966, 321—387 (1957).
88. I. Kay, P. Swerling, Statistics of Random Surfaces. J. Res. Nat. Bur. Stand. 68D, N 9, 1035—1047 (1964).
89. M. S. Longuet-Higgins, The statistical geometry of Random Surfaces (Providence) R.I. Amer. Math. Soc. 105—143, 1962.
90. П. И. Кузнецов, В. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, О длительности выбросов случайной функции, ЖТФ 24, № 1, 103 (1954).
91. S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise. Bell system techn. J. 23, № 3, 282—332 (1944); 24, № 1, 46—156 (1945).
92. В. Г. Иванов, О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными функциями вероятностного процесса, Теория вероятностей и ее применения 5, № 3, 352—357 (1960).
93. В. И. Бунимович, Выбросы напряжения флуктуационных шумов, ЖТФ, 21, № 6, 625—636 (1951).
94. А. П. Хусу, О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах, Вестник ЛГУ, № 1, 89—100 (1956).
95. А. П. Хусу, О некоторых функционалах на случайных полях, Вестник ЛГУ, № 1, 37—45 (1957).
96. C. W. Helstrom, The distribution of the number of crossing of a gaussian stochastic process. IRE Trans. IT-3, № 4, 232—237 (1957).
97. Ю. Е. Дьяков, В. Я. Селин, Среднее значение и дисперсия числа переходов случайного процесса через заданный уровень, Радиотехника и электроника 9, № 9, 1687—1691 (1964).

98. В. И. Тихонов, Распределение выбросов нормальных флуктуаций по длительности, Радиотехника и электроника 1, № 1, 23—33 (1956).
99. J. A. Mc Fadden, The axis-crossing intervals of random functions, IRE Trans. 2, № 4, 146—150 (1956); 4, № 1, 14—24 (1958).
100. S. O. Rice, Distribution of the duration of fades in radio transmission. Bell system techn. J. 37, № 3, 581—635 (1958).
101. M. S. Longuet-Higgins, On the intervals between successive zeros of a random function. Proc. Roy. Soc. A 246, № 1244, 99—118 (1958).
102. В. А. Волконский, Эргодическая теорема для распределения длины выброса. Теория вероятностей и ее применения 5, № 3, 357—360 (1960).
103. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, УФН 77, № 3, 449—480 (1962).
104. Е. Титчмарш, Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
105. Э. Вольф, Л. Мандель, Когерентные свойства оптических полей. УФН 87, № 3, 491—520 (1965); УФН 88, № 2, 347—366 (1966); УФН 88, № 4, 619—673 (1966).
106. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953.
107. K. Norton, L. E. Vogler, W. V. Mansfield, P. I. Short, The Probability Distribution of the Amplitude of a Constant Vector Plus a Rayleigh Distributed Vector. Proc. IRE 43, 1354—1361 (1955).
108. P. Beckmann, The Probability Distribution of the Vector Sum of,  $n$ —Unit Vectors with Arbitrary Phase Distributions. Acta Technica (Praga) 4, 323—335 (1959).
109. M. M. Siddiqui, Statistical Inference for Rayleigh Distributions. J. Res. Nat. Bur. Stand. 68D, № 9, 1005—1010 (1964).
110. M. Nakagami, On the Intensity Distributions

$$\frac{2R}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp \left\{ -\frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \right\} I_0 \left\{ \frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \right\}$$

and its application to signal statistics. J. Nat. Bur. Stand. 68D, № 9, 995—1003 (1964).

111. P. Beckmann, Rayleigh Distribution and Its Generalizations. J. Res. Nat. Bur. Stand. 68D, № 9, 927—932 (1964).
112. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, «Сов. радио», М., 1961.
113. K. Furutsu, T. Ishida, On the Theory of Amplitude Distribution of Impulsive Random Noise and Its Application to the Atmospheric Noise, Jap. Rad. Res. Lab's 7, № 32, 279—318 (1960).
114. И. С. Всехсвятская, О статистических свойствах огибающей сигнала и пуассоновского шума. Геомагнетизм и аэрномия 2, № 4, 712—719 (1962).
115. Ф. Г. Басс, Распространение радиоволн над статистически неровной поверхностью, Изв. вузов, Радиофизика 4, № 3, 476—483 (1961).
116. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, «Наука», 1971.
117. И. М. Фукс, Корреляционные функции волнового поля над статистически неровной поверхностью, Изв. вузов, Радиофизика, 8, № 1, 104—115 (1965).
118. S. O. Rice, Reflection of Electromagnetic Waves from Slightly Rough Surfaces. Comm. Pure Appl. Math. 4, № 2/3, 351—378 (1951).
119. T. B. A. Senior, Impedance Boundary Conditions for Statistically Rough Surfaces. Appl. Sci. Res. Hague, B8, № 5—6, 437—462 (1960).
120. R. E. Hiatt, T. B. A. Senior, V. H. Weston, A Study of Surface Roughness and Its Effect on the Backscattering Cross Section of Sheres, Proc. IRE 48, № 12, 2008—2016 (1960).

121. I. W. Miles, On Nonspecular Reflection at a Rough Surface. *J. Acoust. Soc. Amer.* **26**; 191—199 (1954).
122. E. V. T. Kuo, Wave Scattering and Transmission at Irregular Surfaces. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 11, 2135—2142 (1964).
123. А. Д. Лапин, Рассеяние звука на шероховатой поверхности твердого тела. *Акуст. ж.* **10**, № 1, 71—80 (1964).
124. А. Д. Лапин, Рассеяние звука на твердом слое с шероховатыми границами. *Акуст. ж.* **12**, № 1, 59—67 (1966).
125. Ф. Г. Басс, К теории рассеяния коротких и средних радиоволн на морском волнении. Сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, под ред. С. Я. Брауде, стр. 79—90, Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
126. J. R. Wait, Theory of HF ground wave backscatter from sea waves, *J. Geophys. Res.* **71**, 20, 4839—4842 (1966).
127. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, К теории рассеяния электромагнитных волн на статистически неровной поверхности. *Радиотехника и Электроника* **3**, № 2, 180 (1958).
128. I. P. Schouten, A. T. de Hoop. Sur la réflexion d'une onde électromagnétique plane par une surface rugueuse parfaitement conductrice *Ann. Telecomm.* **12**, № 5, 211—214 (1957).
129. А. Н. Лепорский, Экспериментальное исследование дифракции акустических волн на периодических структурах. *Акуст. ж.* **1**, № 1 48—57 (1955).
130. А. Н. Лепорский, Отражение звуковых волн от синусоидальной и пилообразной поверхностей. *Акуст. ж.* **2**, № 2, 177—181 (1956).
131. Ю. П. Лысанов, К теории рассеяния волн на неровных и неоднородных поверхностях (диссертация), *Акуст. ин-т АН СССР, М., 1955.*
132. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Распространение ультракоротких волн, *Связьрадиоиздат, М., 1938.*
133. А. Г. Аренберг, Распространение дециметровых и сантиметровых волн. «Сов. радио», М., 1957.
134. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд-во АН СССР, 1958.
135. Э. П. Гулин, О флуктуациях амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от статистически неровной поверхности, *Акуст. ж.* **8**, № 2, 175—182 (1962).
136. Э. П. Гулин, О корреляции флуктуаций амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от статистически шероховатой поверхности, *Акуст. ж.* **8**, № 4, 426—432 (1962).
137. Э. П. Гулин, О некоторых корреляционных соотношениях при отражении звуковой волны от статистически шероховатой поверхности. *Изв. вузов, Радиотехника* **6**, № 6, 1144—1154 (1963).
138. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967.
139. Э. П. Гулин, О флуктуациях амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от синусоидальной поверхности. *Акуст. ж.* **8**, № 3, 285—291 (1962).
140. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», М., 1966.
141. Д. Е. Вакман, Асимптотические методы в линейной радиотехнике. «Сов. радио», М., 1962.
142. H. G. Booker, J. A. Ratcliffe, D. H. Schinn, Diffraction from an Irregular Screen with Application to Ionospheric Problems. *Phil. Trans. Roy. Soc. A242*, № 856, 579 (1950).
143. В. Н. Briggs, G. J. Phillips, A Study of the Horizontal Irregularities of the Ionosphere, *Proc. Roy. Soc.* **63B**, № 11, 907 (1950).
144. A. Hewish, The Diffraction of Radio Waves in Passing a Phase-Changing Ionosphere, *Proc. Roy. Soc. A209*, № 1096, 81 (1951).
145. J. A. Fejer, The Diffraction of Waves Passing Through an Irregular Refracting Medium. *Proc. Roy. Soc. A220*, № 1143, 455 (1953).

146. E. N. Bramley, The Diffraction of Waves by an Irregular Refracting Medium, Proc. Roy. Soc. A225, № 1163, 515 (1954).
147. Н. Г. Денисов, О дифракции волн на хаотическом экране, Изв. вузов, Радиофизика 4, № 4, 630—638 (1961).
148. Г. А. Гайлит, В. Д. Гусев, Спектральные характеристики поля при дифракции на нерегулярном экране, Геомагнетизм и аэронавигация 4, № 5, 832—841 (1964).
149. Б. Ф. Курьянов, Пространственная корреляция полей, излученных случайными источниками на плоскости, Акуст. ж. 9, № 4, 441—449 (1963).
150. R. C. Bourret, Propagation of Randomly Perturbed Fields, Canad. J. Phys. 40, № 6, 782—790 (1962).
151. R. C. Bourret, Stochastically Perturbed Fields with Application to Wave Propagation in Random Media, Nuovo Cimento 26, № 1, 1—31 (1962).
152. K. Furutsu, On the Statistical Theory of Electromagnetic Waves in a Fluctuating Medium, J. Res. Nat. Bur. Stand. 67D, № 3, 303—323 (1963).
153. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, Распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления, ЖЭТФ 44, № 2, 676—685 (1963).
154. В. И. Татарский, Распространение электромагнитных волн в среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, ЖЭТФ 46, № 4, 1399—1411 (1964).
155. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, «Наука», 1967.
156. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, М., 1961.
157. T. B. A. Senior, The Scattering of Electromagnetic Waves by a Corrugated Sheet, Canad. J. Phys. 37, № 7, 787—797 (1959).
158. G. Kirchhoff, Vorlesung über mathematische Physik, Bd. 2, Leipzig, 1891.
159. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, пер. с англ., «Наука», 1970.
160. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, ЖЭТФ 15, № 9, 479—496 (1945).
161. В. А. Фок, Поле вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли, ЖЭТФ 19, № 10, 916—929 (1949).
162. D. T. Gjessing, F. Irgens, On the Scattering of Electromagnetic Waves by a Moving Tropospheric Layer having sinusoidal Boundaries, IEEE Trans. AP—12, № 1, 51—64 (1964).
163. D. T. Gjessing, F. Irgens, Scattering of Radio Waves by a Moving Atmospheric Rippled Layer (A Simple Model-Experiment), IEEE Trans. AP—12, № 6, 703—709 (1964).
164. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1958.
165. А. И. Потехин, Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, «Сов. радио», М., 1948.
166. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, «Мир», 1964.
167. М. Д. Хаскинд, О коротковолновом приближении в теории дифракции и излучения, Труды учебн. ин-тов связи, вып. 22, 13—23 (1964).
168. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, О сведениях задачи дифракции на незамкнутых поверхностях к интегральным уравнениям второго рода, Радиотехника и электроника 11, № 7, 1159—1168 (1966).
169. G. F. Koch, The Various Statements of Kirchhoff's Principle and Their Application to the Diffracting Diagrams of Electromagnetic Waves, AEÜ 14, № 2, 77—98 (1960); AEÜ 14, № 3, 132—153 (1960).
170. М. А. Исакович, Рассеяние волн статистически шероховатой поверхности, Отчет ФИАН СССР, Акустич. лаб. 1953; Труды Акуст. ин-та АН СССР, вып. V, 152—251, 1969.

171. C. Eckart, The Scattering of Sound from the Sea Surface. *J. Acoust. Soc. Amer.* 25, 566—570 (1953).
172. H. Davies, The Reflection of Electromagnetic Waves from a Rough Surface. *Proc. IEEE*, pt. 4, 101, № 7, 209—214 (1954).
173. K. Bullington, Reflection Coefficient of Irregular Terrain. *Proc. IRE*, 42, № 8, 1258—1262 (1954).
174. W. S. Ament, Toward a Theory of Reflection by a Rough Surface. *Proc. IRE* 41, № 1, 142—146 (1953).
175. R. Ruffine, Note on the Scattering of Waves by Rough Surface. *IEEE Trans. AP-12*, № 6, 802—803 (1964).
176. C. S. Clay, Coherent Reflection of Sound from the Ocean Bottom. *J. Geophys. Res.* 71, № 8, 2037—2046 (1966).
177. В. И. Михайлов, До розсіяння електромагнітних хвиль на нерівних поверхнях. *Укр. фіз. ж.* 7, № 12, 1274—1279 (1962).
178. A. K. Fung, Theory of Radar Scatter from Rough Surfaces Bistatic and Monostatic with Application to Lunar Radar Return. *J. Geophys. Res.* 69, № 6, 1063—1073 (1964).
179. В. А. Кашин, В. В. Меркулов, К вопросу о рассеянии электромагнитных волн шероховатой поверхностью. *Радиотехн. и электроника* 9, № 9, 1578—1580 (1964).
180. М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, *Физматгиз*, М., 1962.
181. Е. В. Чаевский, Энергетические характеристики поля, рассеянного шероховатой площадкой, *Изв. вузов, Радиофизика* 8, № 6, 1128—1134 (1965).
182. B. Walker, An analogue method of studying the angular spectrum of radiation, reflected from rough surfaces, *Radio and Electronic Engr.*, London, 32, № 6, 363—370 (1966).
183. J. D. Delorenzo, E. S. Cassedy, A Study of the Mechanism of Sea Surface Scattering, *IEEE Trans. AP-14*, № 5, 611—620 (1960).
184. T. Hagfors, Backscattering from an Undulating Surface with Applications to Returns from the Moon. *J. Geophys. Res.* 69, № 18, 3779—3784 (1964).
185. А. А. Ковалев, С. И. Поздняк, Рассеяние электромагнитных волн на статистически шероховатой поверхности с конечной проводимостью. *Радиотехника* 16, № 12, 31—36, 1961.
186. И. Д. Демин, Интенсивность сигналов, принимаемых радиолокационной станцией от неровной поверхности. *Труды Центр. НИИ Морского флота*. Вып. 55, 74—83 (1964).
187. Б. И. Семенов, Рассеяние электромагнитных волн ограниченными участками неровных поверхностей с конечной проводимостью. *Радиотехника и электротехника* 10, № 11, 1952—1960 (1965).
188. A. K. Fung, Vector Scatter Theory Applied to Moon and Venus Radar Return, *Proc. IEEE* 54, № 7, 996—998 (1966).
189. Е. В. Чаевский, Рассеяние волн площадкой с нормальным распределением случайных отклонений, *Изв. вузов, Радиофизика* 9, № 2, 400—403 (1966).
190. R. D. Kodis, A Note on the Theory of Scattering from an Irregular Surface, *IEEE Trans. AP-14*, № 1, 77—82 (1966).
191. P. Beckman, New Approach to the Problem of Reflection from a Rough Surface. *Acta Tech. (CSSR)* 2, № 4, 311—355 (1957).
192. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, «Сов. радио», М., 1962.
193. Р. Кинг, У. Тай-Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн, *ИЛ*, 1962.
194. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, *Гостехиздат*, М., 1956.

195. И. М. Фукс, Отражение и преломление волны произвольной формы на криволинейной границе раздела, Изв. вузов, Радиопизика 8, № 6, 1078—1086 (1965).
196. Б. Я. Гельчинский, Отражение и преломление упругой волны произвольной формы в случае криволинейной границы раздела, ДАН СССР 118, № 3, 458—460 (1958).
197. В. А. Фок, Законы отражения Френеля и законы дифракции, УФН 36, № 3, 308—327 (1948).
198. В. А. Фок, Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы, ЖЭТФ 20, № 11, 961—978 (1950).
199. М. И. Конторович, Ю. К. Муравьев, Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задач дифракции, ЖТФ 22, № 3, 394—407 (1952).
200. M. S. Longuet-Higgins, Reflection and Refraction at a Random Moving Surface (pt. 1—3), J Opt. Soc. Amer. 50, № 9, 838—855 (1960).
201. W. C. Hoffmann, Scattering of Electromagnetic Waves from a Random Surface, Quart. Appl. Math. 13, № 3, 291—304 (1955).
202. P. Beckmann, The Depolarization of Electromagnetic Waves Scattered from Rough Surfaces, Acta Technica (ČSSR) 6, № 6, 511—523 (1961).
203. Е. В. Чаевский, Отражение плоской электромагнитной волны от шероховатой плоскости, Сб. Пробл. дифр. распрост. волн, Л., вып. 6, 105—114 (1966).
204. K. M. Mitzner, Change in Polarization on Reflection from a Tilted Plane, Radio Science, 1, № 1, 27—29 (1966).
205. A. K. Fung, Scattering and Depolarization of EM Waves from Rough Surface. Proc. IEEE 54, № 3, 395—396 (1966).
206. A. K. Fung, On Depolarization of Electromagnetic Waves Backscattered from a Rough Surface. Planet and Space Sci. 14, № 7, 563—566 (1966).
207. А. Я. Повзнер, И. В. Сухаревский, О нахождении асимптотики решений задач дифракции коротких волн, Ж. вычислительн. матем. и матем. физики 1, № 2, 224—245 (1961).
208. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Поперечная диффузия при дифракции коротких волн на выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной, Радиотехника и электроника 8, № 3, 363—376, 377—388 (1963).
209. И. М. Фукс, Многократное рассеяние волн на криволинейной границе раздела. Сб. Радиотехника, вып. 4, стр. 115—124. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
210. В. А. Фок, Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника, ЖЭТФ 15, № 12, 693—702 (1945).
211. J. G. Smith, Lunar Surface Roughness: Shadowing and Thermal Emission, J. Geophys. Res., 72, № 16, 4059—4067 (1967).
212. М. М. Агрест, М. З. Максимов, Теория неполных цилиндрических функций и их приложения, Атомиздат, М., 1965.
213. P. Beckmann, Shadowing of Random Rough Surfaces, IEEE Trans. AP-13, № 3, 384—388 (1965).
214. P. Beckmann, Radar Backscatter from the Surface of the Moon, J. Geophys. Res. 70, № 10, 2345—2350 (1965).
215. P. Beckmann, W. K. Klemperer, Interpretation of the Angular Dependence of Backscattering from the Moon and Venus, Radio Science 69D, № 12, 1669—1677 (1965).
216. L. Shaw, Comments on „Shadowing of Random Surfaces,“ IEEE Trans. AP-14, № 2, 253 (1966).
217. И. С. Житомирский, Т. С. Чебанова, М. И. Шахнович, Влияние самозатенений на коэффициент отражения от поверхности скола монокристалла, Оптика и спектроскопия 19, № 3, 409—416 (1965).

218. И. С. Житомирский, О функции распределения момента первого выхода, Теория вероятн. и ее применения 8, № 2, 156—166 (1963).
219. R. A. Brockelman, T. Hagfors, Note on the Effect of Shadowing on the Backscattering of Waves from a Random Rough Surface. IEEE Trans. AP-14, № 5, 621—629 (1966).
220. И. М. Фукс, О затенениях статистически неровной поверхности, Изв. вузов, Радиофизика 12, № 4, 552—561 (1969).
221. Э. Л. Кузьмин, О затенении статистически неровной поверхности, Труды учебн. ин-тов связи вып. 34, 208—210, Л., 1967.
222. R. J. Wagner, Shadowing of Randomly Rough Surfaces, J. Acoust. Soc. Amer. 41, № 1, 138—147 (1967).
223. А. Г. Павельев, О функции освещенности статистически неровной поверхности, Радиотехника и Электроника 13, № 5, 811—817 (1968).
224. J. M. Proud, R. T. Beuger, P. Tamarkin, Reflection of Sound from Randomly Rough Surfaces. J. Appl. Phys. 31, № 3, 543—552 (1960).
225. R. H. Clarke, Theoretical Characteristics of Radiation Reflected Obliquely from a Rough Conducting Surface. Proc. IEEE 110, № 1, 91—100 (1963).
226. R. H. Clarke, Some Measurements on Radiation Reflecting Obliquely from a Rough Surface. Proc. IEEE 110, № 11, 1921—1927 (1963).
227. R. H. Clarke, G. O. Hendry, Prediction and Measurement of the Coherent and Incoherent Power Reflected from a Rough Surface. IEEE Trans. AP-12, № 3, 353—363 (1964).
228. J. K. Parks, Toward a Simple Mathematical Model for Microwave Backscatter from the Sea Surface at Near-Vertical Incidence. IEEE Trans. AP-12, № 5, 590—605 (1964).
229. J. Feinstein, Some Stochastic Problems in Wave Propagation (pt. 1), IRE Trans. AP-2; № 1, 23—30 (1964).
230. Г. А. Алексеев, О частотной и пространственной корреляции волн, рассеянных шероховатой поверхностью, Изв. вузов, Радиотехника 9, № 1, 137—140 (1966).
231. Э. П. Гулин, Частотно-пространственно-временная корреляция волнового поля, рассеянного неровной поверхностью, Труды Акуст. ин-та АН СССР, вып. 2, 49—69 (1967).
232. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, О статистических свойствах поля, рассеянного шероховатой поверхностью. Изв. вузов, Радиофизика 11, № 1, 56—65 (1968).
233. S. A. Bowhill, J. Atm. Terr. Physics. 11, 91 (1957).
234. R. P. Mercier, The Propagation of Fading Waves. Phil. Mag. 4, № 42, 763—776 (1959).
235. Н. Г. Денисов, О дифракции волн на неоднородном ограниченном экране. Геомagnetизм и астрономия 4, № 4, 675—680 (1964).
236. В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Спектр сигнала, рассеянного колеблющейся поверхностью раздела. Изв. вузов, Радиофизика 12, № 1, 114—121 (1969).
237. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербницкий, О частотном спектре электромагнитных волн, рассеянных статистически неровной поверхностью, Изв. вузов, Радиофизика 6, № 2, 290—296 (1963).
238. J. Roig, Modification Spectrale d'une Vibration Lumineuse Monochromatique par Reflexion sur un Mirror Oscillant. J. Phys. 27, № 5—6, Suppl. 65—71 (1966).
239. Г. А. Алексеев, Рассеяние регулярных и шумовых сигналов неровной поверхностью, Радиотехника и Электроника 13, № 9, 1683—1685 (1968).
240. В. В. Овчинников, Об энергетическом спектре сигнала, рассеянного на статистически неровной поверхности, Радиотехника и электроника 13, № 8, 1497—1499 (1968).

241. I. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler. Asymptotic Solution of Some Diffraction Problems, *Comm. Pure Appl. Mathem.* 9, № 2, 207—265 (1956).
242. I. B. Keller, H. B. Keller, Determination of Reflected and Transmitted Fields by Geometrical Optics. *J. Optical Soc. Amer.* 40, № 1, 48—52 (1950).
243. T. Hagfors, Radio Waves and the Lunar Surface, *J. Geophys. Res.* 66, № 3, 777—785 (1961).
244. F. B. Daniels, A Theory of Radar Reflection from the Moon and Planets. *J. Geophys. Res.* 66, № 6, 1781—1788 (1961); русск. перевод в сб. «Радиолокация Венеры», стр. 80—96, ИЛ, 1963.
245. F. B. Daniels, Radar Determination of the Root Mean Square Slope of the Lunar Surface. *J. Geophys. Res.* 68, № 2, 449—453 (1963).
246. F. B. Daniels, Radar Determination of Lunar Slopes: Correction for Diffuse Component. *J. Geophys. Res.* 68, № 9, 2864—2865 (1963).
247. H. S. Hayre, Statistical Methods in Radar Astronomy. Determination of Surface Roughness, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 67D, № 6, 763—764 (1963).
248. D. G. Rea, W. J. Welch, The Reflection and Emission of Electromagnetic Radiation by Planetary Surfaces and Clouds, *Space Sci. Revs* 2, № 4, 558—617 (1963).
249. Л. М. Пономаренко, А. А. Каплянский, Рассеяние электромагнитных волн статистически шероховатой поверхностью Луны, Труды Научно-техн. конф. Электротехн. ин-та связи, вып. 1, 3—13, Л., 1964.
250. D. O. Muhleman, Radar Scattering from Venus and the Moon, *Astron. J.* 69, № 1, 34—41 (1964).
251. D. O. Muhleman, Radar Scattering from Venus and the Mercury at 12.5 cm, *J. Res. NBS*, D69, № 12, 1630—1631 (1965).
252. T. Hagfors, Backscattering from an Undulating Surface with Applications to Radar Returns from the Moon. *J. Geophys. Res.* 69, № 18, 3779—3784 (1964).
253. J. W. Meyer, Radar Astronomy at Millimeter and Submillimeter Wavelengths. *Proc. IEEE* 54, № 4, 484—492 (1966).
254. D. G. Rea, N. Hetherington, R. A. Mifflin, The Analysis of Radar Echoes from the Moon. *J. Geophys. Res.* 69, № 24, 5217—5223 (1964).
255. D. G. Rea, N. Hetherington, R. A. Mifflin, A Note "On the Analysis of the Radar Echoes from the Moon", *J. Geophys. Res.* 70, № 6, 1565 (1965).
256. A. Girand, A Note of the Radio Reflectivity of the Lunar Surface. *J. Res. NBS*, D69, № 12, 1677—1681 (1965).
257. P. Swerling, Statistical Properties of the Countours of Random Surfaces. *IRE Trans. IT*—8, 315—321 (1962).
258. Е. В. Чаевский, Энергетические характеристики поля, рассеянного выпуклой шероховатой поверхностью, Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 5, 121—134, изд. ЛГУ, Л., 1966.
259. В. В. Тамойкин, О влиянии некоторых статистических факторов на характеристики рассеяния ограниченного цилиндра, Изв. вузов, Радиофизика 9, № 6, 1124—1133 (1966).
260. T. B. A. Senior, Scattering by a Sphere. *Proc. IEE (London)* 111, № 5, 907—916 (1964).
261. T. B. A. Senior, Surface Roughness and Tolerances in Model Scattering Experiments. *IEEE Trans.* AP—13, № 4, 629—636 (1965).
262. M. L. Burrows, Radar Echo Variations of a Large Rough Sphere, *IEEE Trans.* AP—14, № 4, 455—460 (1960).
263. А. А. Свешников, Определение вероятностных характеристик трехмерного волнения моря, Изв. АН СССР, сер. Мех. и машиностр. № 3, 32—41 (1959).
264. Ветровые волны, сб. под ред. Ю. М. Крылова, ИЛ, 1962.



265. Ю. М. Крылов, Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн, Гидрометеоздат, Л., 1966.
266. Б. Х. Глуховский, Исследование морского ветрового волнения, Гидрометеоздат, Л., 1966.
267. С. Я. Брауде, И. Е. Островский, Я. Л. Шамфаров, И. С. Тургенев, А. В. Мень, А. И. Игравков, Рассеяние радиоволн коротковолнового диапазона взволнованной поверхностью моря. Сб. радиоокеанографические исследования морского волнения, под ред. С. Я. Брауде, стр. 12—25, Изд. АН УССР, Киев, 1962.
268. С. Я. Брауде, А. В. Мень, Ю. В. Поплавко, И. С. Тургенев, В. Ф. Шульга, О. М. Лебедева, Исследование амплитудных, фазовых и частотных характеристик сигналов коротких и средних радиоволн, рассеянных морской поверхностью. Там же, стр. 49—78.
269. C. J. Beard, I. Katz, The Dependence of Microwave Radio Signal Spectra on Ocean Roughness and Wave Spectra. IRE Trans. AP-5, 183 (1957).
270. R. P. Ingalls, M. T. Stone, Characteristics of Sea Clutter at HF. IRE Trans. AP—5, 164 (1957).
271. E. Sofaer, Phase-Coherent Back-Scatter of Radio Waves at the Surface of the Sea. Proc. IEEE 105, № 22, Pt. B, 383—394 (1958).
272. С. Я. Брауде, А. В. Мень, В. Ф. Шульга, Использование узкополосных анализаторов спектра для исследования рассеяния радиоволн коротковолнового и средневолнового диапазонов взволнованной поверхностью моря. Сб. Радиоокеаногр. исслед. морского волнения под ред. С. Я. Брауде, стр. 26—48. Изд. АН УССР, Киев, 1962.
273. Л. И. Мандельштам, Г. С. Ландсберг, Новое явление при рассеянии света. Полное собрание трудов Л. И. Мандельштама, т. 1, стр. 293—296, Изд-во АН СССР, М., 1948. Впервые опубликовано ЖРФХО 60, 335—338 (1928).
274. Л. И. Мандельштам, Г. С. Ландсберг, О рассеянии света в кристаллах. Там же, стр. 305—317. Впервые опубликован Z. Phys 50, 769—780 (1928).
275. C. V. Raman, K. S. Krishnan, Nature, 121, 501 (1928).
276. G. R. Curry, Measurements of UHF and L-Band Radar Clutter in the Central Pacific Ocean. IEEE Trans. Milit. Electron 9, № 1, 39—44 (1965).
277. А. Д. Розенберг, И. Е. Островский, А. И. Калмыков, Сдвиг частоты при рассеянии радиоизлучения взволнованной поверхностью моря, Изв. вузов, Радиофизика 9, № 2, 234—240 (1966).
278. Распространение ультракоротких радиоволн, Пер. с англ. под ред. В. А. Шиллерова, «Сов. радио», М., 1954.
279. G. R. Grant, B. S. Yapple, Backscattering from Water and Land at Centimeter and Millimeter Wavelengths. Proc. IRE 45, № 7, 976—982 (1957).
280. R. P. Chapman, H. D. Scott, Surface Backscattering Strengths Measured over an Extended Range of Frequencies and Grazing Angles. J. Acoust. Soc. of Amer. 36, № 9, 1735—1737 (1964).
281. F. C. Macdonald, The Correlation of Radar Sea Clutter on Horizontal and Vertical Polarization with Wave Height and Slope. IRE Nat. Conv. Record, pt. 1, № 3, 29—32 (1956).
282. I. C. Wiltse, S. P. Schlesinger, C. M. Johnson, Backscattering Characteristics of the Sea in the Region from 10 to 50 kmcs. Proc. IRE 45, № 2, 220—228 (1957).
283. R. M. Hoover, R. I. Urlick, Sea Clutter in Radar and Sonar. IRE Nat. Conv. Record 5, 9, 17—22 (1957).
284. W. S. Ament, Airborne Radiometeorological Research. Proc. IRE 47, № 5, 756—761 (1959).
285. I. Katz, L. M. Spetner, Polarization and Depression-Angle Dependence of Radar Terrian Return. J. Res. Nat. Bur. Stand. 64Dd, № 5, 483—486 (1960).

286. A. W. Burstein, I. I. Keane, Backscattering of Explosive Sound from Ocean Bottoms. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 8, 1596—1597 (1964).
287. C. M. McKinney, C. D. Anderson, Measurements of Backscattering of Sound from the Ocean Bottom, *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 1, 158—163 (1964).
288. C. C. Eaglesfield, Backscatter of Sound from the Sea Bottom. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 6, 1217 (1964).
289. W. K. Klemperer, Angular Scattering Law from the Moon at 6-meter Wavelength. *J. Geophys. Res.* **70**, № 15, 3798—3800 (1965).
290. H. Goldstein, Frequency Dependence of the Properties of Sea Echo. *Phys. Rev.* **70**, № 11—12, 938—946 (1946).
291. M. W. Long, On the Polarization and the Wavelength Dependence of Sea Echo, *IEEE Trans.* **AP-13**, № 5, 749—754 (1965).
292. B. L. Hicks, N. Knable, J. J. Kovaly, G. S. Newell, Y. P. Ruina, C. W. Sherwin, The Spectrum of X-Band Radiation Backscattered from the Sea Surface. *J. Geophys. Res.* **65**, № 3, 825—837 (1960).
293. L. N. Lieberman, Analysis of Rough Surfaces by Scattering. *J. Acoust. Soc. Amer.* **35**, № 6, 932 (1963).
294. R. H. Mellen, Doppler Shift of Sonar Backscatter from the Sea Surface. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 7, 1395—1396 (1964).
295. С. Я. Брауде, Ф. Г. Басс, О возможности определения распределения рассеивателей на взволнованной поверхности моря радиолокационными методами, *Изв. вузов, Радиофизика* **1**, № 3, 161—162 (1958).
296. L. M. Spetner, A Statistical Model for Forward Scattering of Waves of a Rough Surface. *IRE Trans.* **AP-6**, № 1, 88—94 (1958).
297. M. Katzin, On the Mechanism of Radar Sea Clutter. *Proc. IRE* **45**, № 1, 44—54 (1957).
298. L. M. Spetner, I. Katz, Two Statistical Models for Radar Terrain Return. *IRE Trans.* **AP-8**, № 3, 242—246 (1960).
299. A. H. Schooly, Upwind-Downwind Ratio of Radar Return calculated from Facet Size Statistics of a Wind Disturbed Water Surface. *Proc. IRE* **50**, № 4, 456—461 (1962).
300. R. B. Patterson, Backscatter of Sound from a Rough Boundary. *J. Acoust. Soc. Amer.* **35**, № 12, 2010—2013 (1963).
301. R. B. Patterson, Model of a Rough Boundary as a Backscatterer of Wave Radiation. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 6, 1150—1153 (1964).
302. В. Н. Антонов, В. В. Ольшевский, Пространственно-временная корреляция морской реверберации. *Акуст. ж.* **11**, № 3, 294—299 (1965).
303. C. S. Clay, H. Medwin, High Frequency Acoustical Reverberation from a Rough Sea Surface. *J. Acoust. Soc. Amer.* **36**, № 11, 2131—2134 (1964).
304. R. L. Fante, Discussion of a Model for Forward Scattering of Waves off a Rough Surface, *IRE Trans.* **AP-6**, № 1, 88—94 (1958).
305. C. C. Eaglesfield, The angular Dependence of Scattering by Nearly Polished Surfaces. *Proc. Phys. Soc. (London)* **80**, № 4, 947—951 (1962); **82**, № 3, 406—411 (1963.)
306. H. S. Hayre, Roughness and Radar Return. *Proc. IRE* **50**, № 2, 223—224 (1964).
307. A. K. Fung, R. K. Moore, B. E. Parkins, Notes on Backscattering and Depolarization by gently undulating Surfaces. *J. Geophys. Res.* **70**, № 6, 1559—1562 (1965).
308. И. Б. Андреева, Е. Г. Харатьян, Рассеяние звука поверхностью океана и приповерхностными звукорассеивающими слоями, *Акуст. ж.* **12**, № 4, 399—404 (1966).
309. T. Hagfors, Comments on letter «Notes on backscattering and depolarization by gently undulating surfaces» A. K. Fung etc., *J. Geophys. Res.* **70**, № 6, 1563—1564 (1965).

310. P. Beckmann, Scattering by composite rough surfaces. Proc. IEEE 53, № 8, 1012—1015 (1965).
311. H. S. Nayfeh, D. E. Kaufman, Plane-Wave Scattering from a Rough Surface with Correlated Large—and Small-Scale Orders of Roughness, J. Acoust. Soc. Amer. 38, № 4, 599—603 (1965).
312. H. W. Marsh, Doppler of Boundary Reverberation, J. Acoust. Soc. Amer. 35, № 11, 1836 (1963).
313. Б. И. Семенов, Приближенный расчет рассеяния электромагнитных волн поверхностью типа шероховатого рельефа, Радиотехника и электроника 11, № 8, 1351—1361 (1966).
314. K. M. Mitzner, Effects of Small Irregularities on Electromagnetic Scattering from an Interface of Arbitrary Shape. J. Math. Phys. 5, № 12, 1776—1786 (1964).
315. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Ю. В. Поплавко, Определение статистических параметров морского волнения по радиоизмерениям на коротких и средних волнах, Сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, под ред. С. Я. Брауде, стр. 96—114, Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
316. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.
317. F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky, A. D. Rozenberg, Very High Frequency Radio wave Scattering by a Disturbed Sea Surface (pt. 1. Scattering from a Slightly Disturbed Boundary). Trans. IEEE AP-16, № 5, 554—559 (1968).
318. F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky, A. D. Rozenberg, Very High Frequency Radio wave Scattering by a Disturbed Sea Surface (pt. 11, Scattering from an Actual Sea), Trans. IEEE AP-16, № 5, 560—568 (1968).
319. Ю. М. Крылов, Вводная статья к сб. «Ветровые волны», ИЛ, 1962.
320. В. Дж. Пирсон, Ветровые волны, стр. 42—124, сб. «Ветровые волны», под ред. Ю. М. Крылова, ИЛ, 1962.
321. О. М. Филлипс, Участок равновесия в спектре ветровых волн, сб. «Ветровые волны», под ред. Ю. М. Крылова, стр. 219—229, ИЛ, 1962.
322. В. И. Михайлов, К теории рассеяния электромагнитных волн на поверхности моря, Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 8, 1229—1233 (1960).
323. R. M. Richter, Measurements of Backscattering from a Sea Surface. J. Acoust. Soc. Amer. 36, № 5, 864—869 (1964).
324. M. Shulkin, R. Shaffer, Backscattering of Sound from the Sea Surface. J. Acoust. Soc. Amer. 36, № 9, 1699—1703 (1964).
325. A. H. Schooly, Relationship between Surface Slope, Average Facet Size and Facet Flatness Tolerance of Wind—Disturbed Water Surface. J. Geophys. Res. 66, № 1, 157—162 (1961).
326. A. H. Schooly, Mean Roughness Factor as Function of Wind Velocity. J. Geophys. Res. 66, № 9, 2863—2866 (1961).
327. W. S. Ament and authors. Studies Indicate Scatter in the Result of Sea Structure, Milit. Electronics 39, March (1959).
328. K. A. McMurtrie, D. Harris, Analysis of the Sea Clutter Effect at Medium Wavelengths (abstract), presented at the Winter Nat'l Conv. Military Electronics, February 7—9, 1962.
329. A. K. Fung, Scattering and Depolarization of E. M. Waves from a Rough Surface, Proc. IEEE 54, № 3, 395—396 (1966).
330. C. I. Beard, Coherent and Incoherent Scattering of Microwaves from the Ocean, IRE Trans. AP-9, № 5, 470—483 (1961).
331. А. Д. Розенберг, А. И. Калмыков, В. И. Зельдис, Обратное рассеяние звуковых волн на правильной ряби, Изв. вузов, Радиофизика 10, № 6, 789—796 (1967).

332. А. И. Калмыков, А. Д. Розенберг, В. И. Зельдис, Обратное рассеяние звуковых и радиоволн нерегулярной рябью, Изв. вузов, Радиофизика 10, № 6, 797—802 (1967).
333. А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, О влиянии структуры морской поверхности на пространственные характеристики рассеянного ею радиоизлучения. Изв. вузов, Радиофизика 8, № 6, 1117—1127 (1965).
334. Б. Д. Замаараев, А. И. Калмыков, О возможности определения пространственной структуры взволнованной поверхности моря радиолокационным методом, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана 5, № 1, 724—727 (1969).
335. А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Обратное рассеяние сантиметровых радиоволн взволнованной поверхностью моря при малых углах скольжения, Изв. вузов, Радиофизика 9, № 6, 1095—1099 (1966).
336. А. Дж. Мак-Коннел, Введение в тензорный анализ, Физматгиз, М., 1963.
337. Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
338. J. W. Crispin, R. G. DeLosh, F. T. Jonson, D. E. Lamphiear, O. L. Tiffany, B. W. Wentworth, Sea Clutter Investigations using Oil Slicks. 5—th Nat'l Conv. Military Electronics, v. 6, p. 437 (1961).
339. I. Katz, Wavelength Dependence of the Radar Reflectivity of the Earth and the Moon. J. Geophys. Res., 71, № 2, 361—366 (1966).
340. Ю. М. Крылов, Об энергетическом спектре ветрового волнения на глубоком море, Труды ГОИН 67, 15—32 (1962).
341. D. E. Winter, A Theory of Radar Reflections from a Rough Moon. J. Res. NBS 66D, № 3, 215—226 (1962).
342. C. C. Eaglesfield, Scattering by Nearly Polished Surfaces. Brit. Comm. and Electronics 11, № 7, 480—483 (1964).
343. U. Frisch, Propagation d'ondes dans un milieu aleatoire unidimensionnel, C. r. Acad. Sci. 261, № 1, 55—57 (1965).
344. J. A. Ratcliffe, Some Aspects of Diffraction Theory and Their Application to the Ionosphere. Rep. Progr. Phys. 19, 188—267 (1956); русск. пер. в сб. «Проблемы современной физики» 10, 3 (1957).
345. Р. Н. Гуржи, С. М. Шевченко, К теории теплопроводности тонких диэлектрических образцов ограниченного размера, ЖЭТФ 54, № 5, 1613—1616 (1968).
346. С. Д. Чупров, О корреляции узкополосного звукового сигнала, рассеянного статистически шероховатой поверхностью, Акуст. ж. 13, № 1, 112—118 (1967).
347. W. H. Peake, Theory of Radar Return from Terrain. IRE Nat. Conv. Rec., 7, pt. 1, 27—41 (1959). русск. пер. в Зарубежная радиоэлектроника № 3, 3—15, 1960.
348. В. Е. Кашпровский, Ф. А. Кузубов, Неоднородность рельефа почв и их влияние на распространение поверхностных волн, Геомагнетизм и аэрономия 3, № 3, 525—536 (1963).
349. Ф. А. Кузубов, О некоторых особенностях распространения средних радиоволн над землей с неровным рельефом, Геомагнетизм и аэрономия 6 № 6, 1071—1075 (1966).
350. Ф. Г. Басс, П. В. Блюх, И. М. Фукс, Статистические характеристики сигнала, рассеянного от случайно движущихся переизлучателей на плоской поверхности раздела, Радиотехника и электроника 10, № 5, 859—867 (1965).
351. V. W. Pidgeon, Bistatic Cross Section of the Sea. IEEE Trans. AP-14, № 3, 405—406 (1966).
352. I. M. Hunter, T. B. A. Senior, Experimental Studies of Sea—Surface Effects on Low—Angle Radars. Proc. of IEEE, Electronics Record. 113, № 11, 1731—1740 (1966).

353. М. Б. Каневский, О распространении миллиметровых и сантиметровых радиоволн в приводных тропосферных волноводах, Изв. вузов, Радиодиффузия 9, № 5, 867—875 (1966).
354. V. R. Kumar, W. W. Koepsel, S. Durrani, Backscatter of Electromagnetic Waves from a Rough Layer. Proc. IEE, 54, № 9, 1191—1193 (1966).
355. Б. З. Каценеленбаум, К вопросу о распространении волн между Землей и ионосферой, Радиотехника и электроника 9, № 10, 1875—1877 (1964).
356. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, Изд-во АН СССР, 1961.
357. В. А. Зятыцкий, Б. З. Каценеленбаум, Статистический анализ процесса распространения луча в слабдеформированной круглой металлической трубе, Рефераты докладов III Всесоюзного симп. по дифракции, стр. 241—242, «Наука», 1964.
358. В. А. Кашин, В. В. Меркулов, К задаче определения собственных чисел для волноводов сложных сечений, Акуст. ж. 11, № 3, 337—340 (1965).
359. Н. К. Горшкова, А. А. Дяченко, В. А. Зятыцкий, Б. З. Каценеленбаум, Н. А. Колесникова, Основы статистического анализа распространения луча света в слабдеформированной зеркальной трубе круглого сечения, Радиотехника и электроника 11, № 1, 42—50 (1966).
360. А. А. Дяченко, В. А. Зятыцкий, Экспериментальное определение индикатрисы отражения от слабдеформированной поверхности, Радиотехника и электроника 11, № 1, 141—144 (1966).
361. W. E. Brown, A Lunar and Planetary Echo Theory, J. Geophys. Res. 65, 3087—3095 (1960).
362. D. O. Muhleman, R. Goldstein, R. Carpenter, A Review of Radar Astronomy, IEEE Spectrum 2, № 11, 83—89 (1965).
363. URSI Nat'l Comm. Report, XIV General Assembly, Tokyo, Sept. 1963 (Commission 5 «Radio and Radar Astronomy») J. Res. Nat. Bur. Stand. D64, № 5, 651—653 (1964).
364. R. I. Urick, The Process of Sound Scattering at the Ocean Surface and Bottom. J. Mar. Res. 15, 134—148 (1957)
365. E. O. La Casce, Note on the Backscattering of Sound from the Sea Surface. J. Acoust. Soc. Amer. 30, № 6, 578—580 (1958).
366. J. J. Martin, Sea Surface Roughness and Acoustic Reverberation—An Operational Model. J. Acoust. Soc. Amer. 40, № 3, 697—710 (1966).
367. R. H. Mellen, Underwater Acoustic Scattering from Arctic Ice. J. Acoust. Soc. Amer. 40, № 5, 1200—1202 (1966).
368. J. R. Brown, D. W. Brown, Reverberation under Arctic Sea—Ice. J. Acoust. Soc. Amer. 40, № 2, 399—404 (1966).
369. R. L. Shaffer, Masking of Surface Reverberation. by Volume Reverberation J. Acoust. Soc. Amer. 39, № 2, 408—411 (1966).
370. H. W. Marsh, R. H. Mellen, Boundary Scattering Effects in Underwater Sound Propagation. J. Res. Nat. Bur. Stand., Radio Science 1, № 3, 339—346 (1966).
371. В. П. Глотов, Ю. П. Лысанов, Когерентное отражение звука от приповерхностного слоя океана, содержащего резонансные рассеиватели, Акуст. ж. 10, № 4, 419—424 (1964).
372. В. П. Глотов, Ю. П. Лысанов, Об относительной роли воздушных пузырьков и взволнованной морской поверхности в формировании реверберации, Акуст. ж. 14, № 3, 371—374 (1968).
373. Э. П. Гулин, К. И. Малышев, О статистических свойствах звуковых сигналов, отраженных от волнующейся поверхности моря, Акуст. ж. 8, № 3, 292—300 (1962).
374. R. I. Urick, The Backscattering of Sound from Harbor Bottom. J. Acoust. Soc. Amer. 26, № 2, 231—235 (1954).

375. B. G. Hardle, Fine Structure of Acoustic Fields Scattered from the Ocean Bottom. *J. Acoust. Soc. Amer.* **40**, № 1, 255—257 (1966).
376. R. K. Moore, B. E. Parkins, Ommidirectional Scattering of Acoustic Waves from Rough Surfaces of Known Statistics. *J. Acoust. Soc. Amer.* **40**, № 1, 170—175 (1966).
377. C. S. Clay, Coherent Reflection of Sound from the Ocean Bottom, *J. Geophys. Res.* **71**, № 8, 2037—2046 (1966).
378. Ю. Ю. Житковский, Измерение коэффициента рассеяния звука морским дном при помощи короткого импульса, *Акуст. ж.* **12**, № 3, 381—382 (1966).
379. Ю. Ю. Житковский, Определение некоторых параметров неровностей дна океана акустическими методами, *Океанология* **6**, № 6, 1080—1085 (1966).
380. В. И. Воловов, Ю. Ю. Житковский, Об измерениях коэффициента отражения звука от дна океана, *Океанология* **6**, № 6, 1086—1088 (1966).
381. Ю. Ю. Житковский, Ю. П. Лысанов, Отражение и рассеяние звука дном океана (обзор), *Акуст. ж.* **13**, № 1, 1—17 (1967).
382. М. А. Исакович, Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе, *Акуст. ж.* **3**, № 1, 37—45 (1957).
383. Л. М. Бреховских, Об одном предельном законе распространения волн в природных волноводах, *Акуст. ж.* **10**, № 1, 114—116 (1964).
384. Л. М. Бреховских, Усредненное поле в подводном звуковом канале, *Акуст. ж.* **11**, № 2, 148—159 (1965).
385. B. F. Cole, E. M. Padeszwa, Shallow—Water Propagation under downward-refraction conditions. *J. Acoust. Soc. Amer.* **41**, № 6, 1479—1485 (1967).
386. E. Cassedy, Waves guided by a boundary with time-space periodic modulation, *Proc. IEE, Electronics Record.* **112**, 269—279 (1965).
387. Л. Э. Паргаманик, А. Р. Дайч, Ю. А. Цирлин, Прохождение света через диффузные световоды, *Оптика и спектроскопия* **17**, № 5, 776—783 (1964).
388. Г. М. Городинский, Поляризующие свойства матовых стеклянных поверхностей при отражении, *Оптика и спектроскопия* **16**, № 1, 112—116 (1964).
389. P. E. Walton, Criterion of Surface Roughness Applied to Reflection Fluoride Interface Films on Uranium Dioxide. *Refractive Index of Uranium Dioxide. J. Opt. Soc. Amer.* **54**, № 2, 265—266 (1964).
390. J. Renau, J. A. Collinson, Measurements of electromagnetic backscatter from known, rough surfaces. *Bell. Syst. Techn. J.* **44**, № 10, 2203—2226 (1965).
391. P. S. Considine, D. J. Cronin, G. O. Reynolds, Angular dependence of radiance of rough surfaces in imaging systems. *J. Opt. Soc. Amer.* **56**, № 7, 877—883 (1966).
392. В. А. Кизель, Современное состояние теории отражения света (обзор), *УФН* **92**, № 3, 479—516 (1967).
393. G. Goubau, J. R. Christian, Some aspects of beam waveguides for long distance transmission at optical frequencies, *IEEE Trans. Microwave theory and techn.* **12**, № 2, 212—220 (1964).
394. H. F. A. Tschenko, Imaging performance and surface deviations. *J. Opt. Soc. Amer.* **56**, № 8, 1041—1045 (1966).
395. Э. О'Нейл, Введение в статистическую оптику, «Мир», 1966.
396. М. Я. Азбель, Статический скин-эффект для токов в сильном магнитном поле и сопротивление металлов, *ЖЭТФ* **44**, № 3, 983—998 (1963).
397. М. Я. Азбель, Сопротивление тонких пластин и проволок в магнитном поле, *ЖЭТФ* **44**, № 4, 1262—1270 (1963).
398. А. Я. Вятский, В. В. Трунев, Прохождение, отражение и поглощение электронов в тонких пленках твердого тела, *Радиотехника и электроника*, **12**, № 9, 1636—1641 (1967).

399. Б. А. Тавгер, В. Я. Демиховский, Взаимодействие электронов с фононами в тонких полупроводниковых пленках, Радиотехника и электроника 12, № 9, 1624—1635 (1967).
400. J. W. Wright, Backscattering from Capillary Waves with Application to Sea Clutter. IEEE Trans, AP-14, № 6, 749—754 (1966).
401. J. P. J. W. Swennen, Time-Average Power-Density Probability Distribution Below the Ocean Surface of a Beam of Collimated Optical Radiation Incident on the Surface, J. Opt. Soc. Amer. 56, № 2, 224—229 (1966).
402. В. К. Полянский, В. П. Рвачев, Рассеяние света при отражении от статистически распределенных микроплощадок, Дифракционное рассмотрение, Оптика и спектроскопия 22, № 2, 279—287 (1967).
403. T. Hagfors, Relationship of Geometric Optics and Autocorrelation Approaches to the Analysis of Lunar and Planetary Radar. J. Geophys. Res. 71, № 2, 379—383 (1966)
404. W. S. Ament, Statistical Problems in Electromagnetism (Rough Surface). The U. S. Nat'l Comm. Rep. for Comm. 6 of URSI, J. Res. Nat. Bur. Stand. 68D, № 4, 451—454 (1964).
405. Ю. К. Алехин, Н. А. Урусовский, Прохождение звука через неровную границу раздела воздух — вода, Труды Акустического ин-та АН СССР, вып. 5, 252—271, 1969.
406. А. Д. Лапин, Рассеяние звуковых волн на шероховатой границе между жидкостью и твердым телом, Труды Акустического ин-та АН СССР, вып. 5, 5—151, 1969.
407. А. Г. Павельев, Г. М. Стрелков, О распределении радиояростной температуры по диску Венеры, Космические исследования 5, № 2, 265—275, 1967.
408. С. Морган, Потери на преобразование симметричных магнитных волн при передаче по волноводам, близким к цилиндрическим, сб. «Волноводные линии передачи с малыми потерями», под ред. В. Б. Штейншлейгера, стр. 228—250, ИЛ, 1960.
409. Я. А. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля—ионосфера, «Наука», 1967.
410. И. Толстой, К. Клей, Акустика океана, «Мир», 1969.
411. K. D. Becker, Das electromagnetische Feld eines vertikalen Fitzgeraldschen Dipols in oder uber einem einfachen tropospharischen Dact mit ortlich gestorter Untergrenze. A. E. U., 23, N 8, 421—427 (1969).
412. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, «Наука», 1967.
413. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Распространение волн в волноводе со статистически неровными стенками, Труды IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Харьков, 1969 (часть I, стр. 198—215).
414. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Кинетическое уравнение для фононов в тонкой пленке со статистически неровными стенками. Труды II Всесоюзной конференции по теории твердого тела. «Наука», (стр. 114) 1969.
415. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Уравнение переноса излучения в волноводе со статистически неровными стенками, УФЖ 14, № 9, 1548—1551 (1969).
416. Н. М. Макаров, И. М. Фукс, Влияние шероховатостей границы на магнитные поверхностные уровни, ЖЭТФ 60, № 2, 806—820 (1971).
417. И. В. Чаплик, М. В. Энтин, Поглощение света свободными носителями в тонкой пленке с неидеальной поверхностью, ЖЭТФ 59, № 3 (9), 857—864 (1970).

418. Ф. Г. Басс, Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности с произвольным значением диэлектрической проницаемости, Радиотехника и электроника 5, № 3, 389—392, (1960).
419. В. S. Westcott, Exact solution for vertically polarized electromagnetic waves in horizontally stratified isotropic media, Proc. Camb. Phil. Soc. 66, № 3, 675—684 (1969).
420. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, «Наука» 1969.
421. R. C. Bourret, Stochastically Perturbed Fields with Application to Wave Propagation in random Media, Nuovo Cimento 26, № 1, 1—31 (1962).
422. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Уравнение переноса излучения для коррелированных рассеивателей, ЖЭТФ 53, № 3 (9), 978—986 (1967).
423. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
424. Р. Ф. Матвеев, О погонном коэффициенте потерь волны  $H_{01}$  в длинной волноводной линии, Радиотехника и электроника 8, № 8, 1477—1480 (1963).
425. В. Д. Фрейлихер, Нестационарный сигнал в волноводе со статистически неровными стенками, Известия Вузов, Радиофизика 14, № 6, 892—899 (1971).
426. Ю. Л. Газарян, Об одномерной задаче распространения волн в среде со случайными неоднородностями, ЖЭТФ 56, № 6, 1856—1871 (1969).
427. В. М. Финкельберг, Распространение волн в случайной среде. Метод корреляционных групп, ЖЭТФ 53, № 1 (7), 401—416 (1967).
428. Ю. А. Кравцов, И. М. Фукс, А. Б. Шмелев, Последовательное применение метода Кирхгофа к задаче о рассеянии звуковой волны на поверхности со случайными неровностями, Изв. Вузов «Радиофизика», 14, № 6, 854—864, 1971.