

И. П. Базаров

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ
СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ
И ТЕРМОДИНАМИКИ



И. П. БАЗАРОВ

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
И ТЕРМОДИНАМИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1979

УДК 530.16

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Р е ц е н з е н т ы:
проф. Ф. А. Королев, проф. Н. А. Черников

Базаров И. П.

Методологические проблемы статистической физики и термодинамики. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. 87 с., 3 ил. Библиогр. 62 назв.

В книге по-новому решается проблема соотношения динамических и статистических закономерностей, раскрывается природа вероятности, обосновывается однозначность причинности и доказывается отличие дополнительности в квантовой механике от дополнительности в статистической физике. Рассмотрены качественно различные виды смещения газов и предложено единообразное решение возникающих при этом парадоксов, приводится построение релятивистской термодинамики на основе методологического принципа простоты и в методологическом аспекте излагается общерелятивистская термодинамика. Предназначена для студентов и аспирантов университетов.

Б 20402—070
077(02)—79 84—79 1704020000

© Издательство Московского университета, 1979 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
Глава I ДИНАМИКА И СТАТИСТИКА	
§ 1. Однозначная детерминированность и статистика	5
§ 2. Необходимость, случайность и причинность	10
§ 3. О дополнительности в квантовой механике и в статистической физике	14
Глава II ПАРАДОКСЫ ГИББСА, ЭЙНШТЕЙНА И НОВЫЙ ПАРАДОКС	
§ 4. Существует ли парадокс Гиббса?	22
§ 5. С скачок изменения плотности газа	25
§ 6. Конфигурационная энтропия идеального газа	26
§ 7. Теорема Гиббса об энтропии смеси идеальных газов. Парадокс Гиббса	27
§ 8. Различные понимания содержания парадокса Гиббса	31
§ 9. Качественно разные виды смешения газов и экспериментальное обнаружение парадокса Гиббса	34
§ 10. Квантовый парадокс Гиббса	41
§ 11. Парадокс Эйнштейна и его решение	43
§ 12. Новый парадокс смешения квантовых идеальных газов	46
§ 13. Второй вид смешения квантовых газов	48
Глава III РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА	
§ 14. Релятивистская температура	51
§ 15. Инвариантная энталпия	55
§ 16. Основное уравнение релятивистской термодинамики	58
§ 17. Релятивистские выражения для работы и количества теплоты	59
§ 18. Релятивистские преобразования температуры и количества теплоты по Планку и по Отту и их обсуждение	63
§ 19. Идеальный газ. Равновесное излучение	66
§ 20. Общерелятивистская термодинамика	68
ПРИЛОЖЕНИЯ	78
I. Роль стенок, ограничивающих систему	78
II. Пример с фотонным газом	79
III. Временная компонента метрического тензора в слабом поле	79
IV. Закон эволюции и критическая плотность однородного и изотропного мира	81
V. Попытка опровержения соотношения неопределенностей Гейзенберга	83
ЛИТЕРАТУРА	85

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методология физики включает в себя наряду с теорией физических методов исследования также и исследование самой физической теории, ее исходных положений, места в системе научных знаний, отношения к практике и т. д.

Из большого числа методологических проблем физики в настоящей книге рассматриваются некоторые методологические вопросы статистической физики и термодинамики.

В первой главе по-новому решается вопрос о соотношении динамики и статистики. Формулируется и обосновывается положение, что поведение системы, состояние которой характеризуется адекватными параметрами, определяется динамическими законами. Статистическая закономерность обнаруживается всякий раз, когда поведение системы характеризуется неадекватными параметрами. На этой основе решается вопрос о причине статистического характера квантовой механики и рассматриваются категории необходимости, случайности и причинности. Показывается отличие дополнительности в квантовой механике от дополнительности в статистической физике.

Во второй главе анализируются качественно различные виды смешения классических и квантовых идеальных газов и дается единое решение парадоксов Гиббса, Эйнштейна и нового парадокса о скачке изменения температуры при переходе от адиабатического смешения сколь угодно близких квантовых идеальных газов к смешению тождественных газов.

В третьей главе приводится построение релятивистской термодинамики на основе методологического принципа простоты и излагаются основы общерелятивистской термодинамики. Подчеркивается необходимость применения общерелятивистской термодинамики при изучении мира как целого (Метагалактики).

Автор глубоко признателен академику Н. Н. Боголюбову и сотрудникам руководимой им кафедры квантовой статистики физического факультета МГУ за плодотворное обсуждение многих вопросов настоящей книги.

И. П. Базаров

Глава I

ДИНАМИКА И СТАТИСТИКА

§ 1. Однозначная детерминированность и статистика

Развитие современной физики и других наук характеризуется все большим применением вероятностных, статистических методов. Известно большое число статистических закономерностей. Ведущий раздел теоретической физики — квантовая механика — является статистической теорией.

Все это привело некоторых исследователей к выводу о «первичности» статистических законов, их основополагающей роли, как наиболее полно отражающих взаимосвязи в природе.

Среди большого числа работ, посвященных соотношению динамических и статистических закономерностей, ближе к истине, по мнению автора [3], те, в которых критикуется вывод, будто статистическая закономерность представляет собой высший тип закономерности, поскольку динамические законы якобы «метафизически» исключают случайность.

Здесь будет показано, что основной («верховой») закономерностью в науке, ее идеалом, к которому она стремится в процессе своего развития, является динамическая закономерность при все возрастающем числе статистических законов. Этим утверждается универсальность «жесткого» детерминизма (однозначной причинности) и, выявляется природа вероятности и статистических закономерностей.

1. При изучении движения того или иного материального объекта основным является установление величин, адекватно характеризующих его состояние. В классической области механическое состояние частицы (тела) адекватно, тождественно ее природе, определяется совокупностью ее координат и проекций импульса. Механическое состояние системы из большого числа частиц также может быть задано совокупностью координат и импульсов частиц (микросостояние системы), однако микросостояние не характеризует качественно новые свойства макросистемы — релаксацию, температуру, энтропию и др., — т. е. адекватно не определяет ее состояние в целом. Свойства макроскопической системы определяются тем, насколько часто она пребывает в том или ином микросостоянии, т. е. его вероятностью или многочастичной функцией распределения [4, с. 99]. Аналогично, хотя каждая молекула газа движется по законам механики, ее поведение благодаря очень большому количеству взаимодействий с другими молекулами характеризуется качественно новой величиной — частотой того или иного ее механического состояния, т. е. одиночной функцией распределения *). Так на основе механического движения большого числа частиц (или одной частицы в большом коллективе) возникают статистические законы, выражающие связь между комплексом условий и существованием устойчивой частоты данного микросостояния.

Состояние электромагнитного поля характеризуется векторами электрической и магнитной напряженности; в квантовой области состояние одной частицы и большого числа частиц определяется соответствующей волновой функцией или матрицей плотности и т. д. И все эти величины, адекватно характеризующие состояние различных материальных объектов, являющихся носителями соответствующих им форм движения, изменяются по динамическому закону. Таким образом, в любой области знания идеалом науки (ее высшим дости-

*) Таким образом, состояние большого числа частиц в целом (как и отдельной броуновской частицы) адекватно определяется функцией распределения.

жением) является установление адекватных изучаемому объекту параметров (характеристик), определяющих его состояние, и открытие динамических законов изменения этих величин (функций состояния). Характерным в этом отношении является установление динамического закона (уравнения Шредингера) для адекватно характеризующей квантовую частицу ψ -функции — величины, о которой вначале даже не было ясно, что она означает.

Отсюда видно, что основными законами науки являются динамические законы и их открытие составляет ее высшую цель (законы Ньютона в классической механике, динамическое уравнение Гиббса — Лиувилля в статистической физике, уравнение Шредингера и уравнение Дирака в квантовой механике и т. д.).

Функция распределения для коллектива частиц, волновая функция, матрица плотности, являясь величинами, адекватно отображающими состояние соответствующих систем, вводятся в физике не как самостоятельно определенные характеристики этих систем, а представляются через классические механические параметры (координаты, импульсы), которые, будучи параметрами состояния в механике, неадекватно характеризуют немеханические объекты. Вследствие этого состояние немеханических систем через механические параметры выражается вероятностно и обнаруживаются статистические закономерности. По мере изучения все новых и новых немеханических объектов в механических понятиях физика все больше и больше будет устанавливать статистические закономерности. Такая тенденция развития науки ни в коей мере не означает, что статистическая закономерность является более глубокой и наиболее общей формой закономерности, совершеннее отображающей объективные связи в природе, выражая высший этап ее познания. Подобные утверждения неверны: состояние любой системы изменяется по динамическому закону.

Статистические закономерности обнаруживаются всякий раз для параметров системы, которые не адекватно характеризуют ее состояние. Параметры же, полно отображающие в данной теории состоя-

ние какого-либо объекта, определяются динамическими законами. Поэтому одна и та же форма движения (например, тепловое движение) может характеризоваться как динамическими законами (динамическое уравнение Гиббса — Лиувилля, уравнения термодинамики), так и статистическими законами (например, закон распределения молекул по скоростям Максвелла).

Теория только с адекватными изучаемому объекту параметрами называется динамической, та же теория, которая использует и неадекватные исследуемой системе параметры и по этой причине определяет ее состояние с помощью динамически изменяющейся вероятности, называется статистической теорией.

Таково, по нашему мнению, соотношение между динамическими и статистическими закономерностями. Оно приводит к заключению о всеобщности однозначной детерминированности состояний всякой системы при одновременном существовании вероятностно-статистических связей. Теряет смысл сама постановка вопроса о границах применимости динамических законов; речь может идти только с границах применимости той или иной теории.

Квантовое движение частиц, так же как и тепловое движение, нельзя выразить параметрами классической механики. В этом и только в этом смысле квантовомеханическое описание движения микрочастиц не является полным. Эта «неполнота» не недостаток квантовой механики, как думал Эйнштейн, а выражение объективной недостаточности характеристики квантового движения в классических понятиях. Такая неполнота никогда не будет устранена и отображается в принципе дополнительности Бора и соотношениях неопределенностей Гейзенберга. Состояние квантовой системы в классических понятиях определяется, по В. А. Фоку, как потенциально возможное.

В свете изложенного по-новому решается вопрос о природе статистического характера квантовой механики. Квантовая механика устанавливает зависимость различных свойств атомных объектов в адекватно характеризующих их параметрах и,

подобно классической механике, является динамической теорией, однако поскольку при изучении атомных объектов она пользуется понятиями классической механики, адекватно не характеризующими эти объекты, она в этих понятиях — статистическая теория. Такова «причина» статистичности квантовой механики. Причина нетраекторного движения микрообъекта лежит в природе самого материального движения и обнаруживается при классическом его рассмотрении.

Ошибочны утверждения, будто в «квантовой области динамические уравнения движения уже не могут существовать». Выше было показано, что временная эволюция состояния системы во всех физических теориях определяется динамическими уравнениями движения.

Рассуждения о становлении и развитии вероятностной точки зрения на устройство мира, т. е. представления о так называемом вероятностном мире, не означают ничего другого, как описание природы реальных вещей с помощью величин, адекватно их не характеризующих.

2. Микросостояние классической системы из большого числа частиц задается совокупностью их координат и импульсов. Решив уравнения механики для такой системы, мы можем, меняя начальные условия, определить, в какие состояния переходит система и как часто повторяется то или иное микросостояние. Таким образом, статистические закономерности заложены, содержатся в законах механики большого числа частиц. Однако это не означает сведение статистических законов к законам механики, поскольку статистические законы за счет большого количества частиц качественно отличаются от законов механики *).

Появление мощных электронно-вычислительных машин привело к качественно новому методу исследования систем из большого числа частиц — методу молекулярной динамики. Сущность этого метода состоит в интегрировании уравнений движе-

*) О выводе законов одной науки (химии) из законов другой науки (физики) см. в статье [5].

ния Ньютона для числа частиц порядка 100 или 1000, помещенных в куб, объем которого соответствует заданной плотности [6]. Расчет ведется для части макроскопической системы, состоящей из периодически повторяющихся больших ячеек, содержащих необходимое число частиц. Решение системы уравнений Ньютона для совокупности частиц дает траекторию точки в фазовом пространстве и усреднение различных функций от динамических переменных вдоль траектории.

Начальное положение частиц произвольное. Спустя время порядка 10^{-11} с, точка в фазовом пространстве, изображающая состояние жидкого аргона, попадает в равновесную область фазового пространства (область, где малы флуктуации функций динамических переменных), в которой и вычисляются средние по времени, соответствующие термодинамическим величинам.

Методом молекулярной динамики удается рассчитать радиальную функцию распределения жидкости и, следовательно, ее термодинамику — уравнение состояния и т. д. Интересные результаты по термодинамике различных систем методом молекулярной динамики получены в работах А. М. Евсеева и др. [7]. В работе [8] рассчитано в равновесной области распределение молекул по скоростям и показано, что оно совпадает с максвелловским распределением.

§ 2. Необходимость, случайность и причинность

Развиваемые здесь представления о соотношении динамических и статистических закономерностей позволяют по-новому рассмотреть категории необходимости, случайности и причинности. Как известно, эти категории выражают различные типы связей, существующих в природе [1].

В нашей философской литературе необходимость определяется как внутренняя объективная закономерность возникновения, существования и развития предметов и явлений, которая непременно должна проявиться в определенных условиях, хотя бы и как тенденция; случайность же обуслов-

лена стечением внешних обстоятельств и при заданных условиях может быть, а может и не быть.

С нашей точки зрения, однако, случайность связана не только с внешними обстоятельствами, но отражает и внутреннюю сущность явления, когда это явление характеризуется в неадекватных ему понятиях и описывается статистическим законом. Если же то или иное явление материального мира отображается адекватными его природе величинами и описывается динамическим законом, то в определенных условиях оно обязательно произойдет и, следовательно, выступает как необходимость.

Поясним сказанное следующим конкретным примером. Как известно, электромагнитное поле адекватно определяется векторами электрического и магнитного полей **E** и **H**. Явление дифракции света описывается динамическими уравнениями Максвелла для векторов **E** и **H** и при определенных условиях происходит обязательно, т. е. в этих условиях является необходимым. Но свет представляет собой совокупность фотонов; движение каждого фотона не характеризуется координатой и импульсом в каждый момент времени и его попадание в то или иное место на экране после прохождения дифракционной решетки является случайным. Эта случайность обусловлена, однако, не внешними обстоятельствами, а природой света. На этом примере мы особенно наглядно видим справедливость известного высказывания Ф. Энгельса, что необходимость пробивает себе дорогу сквозь толпу случайностей [2, с. 175].

Перейдем теперь к вопросу о причинности. Положение о том, что все события в природе (необходимые и случайные) причинно обусловлены, подтверждено всей человеческой практикой и лежит в основе диалектического материализма. Из этого положения (принципа причинности) непосредственно следует однозначность причинности: одинаковые причины при одинаковых обстоятельствах вызывают одинаковые следствия. Действительно, противоположное представление приводит к существованию абсолютной случайности, т. е. беспричинных явлений и, следовательно, противоречит

принципу причинности. В любой физической теории одинаковые начальные состояния ведут к столь же одинаковым последующим. Это имеет место и в классической механике, и в электродинамике, и в квантовой механике.

Критика однозначности причинности представляет собой не развитие диалектического материализма, а критику его основ. Хотя, как указывал Ф. Энгельс, с каждым составляющим эпоху открытием материализм неизбежно должен изменять свою форму, это не означает, что с каждым таким открытием надо настолько отклоняться в сторону, чтобы отказываться от основ материализма. Мы надеемся, что рассмотренное в § 1 решение вопроса о природе статистичности квантовой механики поможет уяснить однозначность причинности и в квантовой механике.

Критики однозначной причинности утверждают, что современная физика будто бы воочию показывает ее отсутствие. Они иллюстрируют это на примере с дифракцией электронов. Приведем относящиеся к этому их рассуждения и выводы. Рассмотрим прохождение электрона через малое отверстие. Пусть каждый электрон описывается плоской волной и все они обладают одним и тем же импульсом. Проходя через диафрагму с малым отверстием, электрон попадает на сцинтилирующий экран, на котором в месте попадания электрона возникает вспышка. Хотя каждый электрон будет описываться одной и той же волновой функцией, т. е. иметь одно и то же начальное состояние и затем подвергаться одному и тому же воздействию со стороны диафрагмы с отверстием, тем не менее разные электроны будут попадать в разные точки экрана. Таким образом, в данном случае при одинаковых начальных условиях и одинаковых причинах получаются различные следствия и, следовательно, однозначная причинность не имеет места.

Ошибочность этого вывода следует из того, что одинаковое начальное состояние электронов задается квантовомеханически (каждый электрон описывается одной и той же волновой функцией), а конечное состояние определяется классически

(после прохождения диафрагмы с отверстием разные электроны попадают в разные точки экрана). На основе этого смешения квантового с классическим и делается заключение об отсутствии однозначной причинности в квантовой механике. В действительности же одинаковое начальное квантовое состояние электронов приводит к столь же однозначному их конечному квантовому состоянию после прохождения диафрагмы с отверстием, что указывает на однозначность причинности и в квантовой механике.

Если, однако, характеризовать состояние электрона (квантовой частицы) классическими величинами (координаты, импульс), то, поскольку эти величины определяют состояние электрона приближенно (неадекватно), начальное и конечное состояния в рассматриваемом эксперименте по необходимости даются лишь приближенно, с некоторой «неточностью» или «неопределенностью». Эту неточность нельзя устранить, так как электрон по своей природе в отличие от макроскопического тела не имеет одновременно определенное значение координаты и импульса. Проявлением этого и является вероятностное распределение электронов на экране после прохождения отверстия.

Определить (вычислить) точное положение электрона на экране после прохождения отверстия нельзя не из-за неполноты квантовой механики, а потому, что квантовый объект (движущийся электрон) в этом состоянии не имеет определенного значения такой классической величины, как координата: в классических понятиях состояние электрона характеризуется как потенциально возможное. О попытках последнего времени «доказательства» движения электрона по траектории см. в § 3.

Квантовая механика указала величины (волновую функцию), которая адекватно характеризует состояние электрона и может быть вычислена во всех (чистых) случаях с любой точностью. Волновая функция определяется динамическим уравнением и это приводит к однозначной причинности: одинаковые причины при одинаковых обстоятельствах вызывают одинаковые следствия. Состояние си-

стемы, не обладающей волновой функцией, описывается матрицей плотности, которая подобно волновой функции также удовлетворяет динамическому уравнению.

§ 3. О дополнительности в квантовой механике и в статистической физике

Как известно, при классическом описании квантовых объектов, сопряженные величины находятся во взаимно-дополнительных отношениях: при точном значении одной величины дополнительная к ней другая величина не имеет определенного значения. Для координаты и импульса дополнительность выражается соотношением неопределенностей Гейзенberга

$$\Delta(q)\Delta(p) \geq \hbar/2, \quad (1.1)$$

где $\Delta(q) = \sqrt{\langle \overline{(q)}^2 \rangle} - \sqrt{\langle \overline{(q-q)}^2 \rangle}$, $\Delta(p) = \sqrt{\langle \overline{(p)}^2 \rangle}$ — квантовомеханические средние квадратичные отклонения (флуктуации) координаты и импульса.

Известно также, что в макроскопической системе с фиксированным объемом V имеют место флуктуации давления P , а в системе с фиксированным давлением — флуктуации объема. Дисперсии этих величин в статистической физике могут быть вычислены методом Гиббса [9]. Такие вычисления для дисперсий объема, давления, а также для дисперсии энергии H системы в термостате и дисперсии температуры T изолированной системы проведены в работах [10, 11] и получены соотношения

$$\Delta(V)\Delta(P) \gg \Theta, \quad (1.2)$$

$$\Delta(H)\Delta(\Theta) = \Theta^2, \quad (1.3)$$

где $\Theta = kT$, k — постоянная Больцмана.

Учитывая ошибки при измерениях, в равенстве (1.3) добавляется еще знак неравенства, что делает выражения (1.2) и (1.3) подобными соотношениям Гейзенберга (1.1).

На основании полученных соотношений в работах [10, 11] делается вывод, что в классической статистической механике сопряженные термодинамические параметры находятся в дополнительных соотношениях, аналогичных соотношениям неопре-

деленности в квантовой механике. Таким образом, согласно [10, 11] казавшаяся специфической лишь для квантовой механики дополнительность имеет место и в классической статистической механике и, следовательно, квантовомеханическую дополнительность можно рассматривать не как отсутствие у частицы одновременно точных значений координаты и импульса (или других сопряженных величин), а как статистическое правило, устанавливающее определенную взаимосвязь между дисперсиями сопряженных величин при их измерении в соответственно различных условиях: при точно заданном импульсе частицы ее координата имеет определенное значение, которое нам известно лишь с определенной точностью, выражаемой статистически величиной флуктуации.

Покажем, что этот далеко идущий вывод не является правильным *) и что в действительности в статистической физике нет дополнительности, аналогичной квантовомеханической.

Флуктуация объема системы в термостате при фиксированном давлении определяется известной формулой

$$\Delta(V) = \sqrt{-\Theta \frac{\partial V}{\partial P}}, \quad (1.4)$$

а ее равновесное давление при фиксированном объеме по Гиббсу равно

$$\bar{P} = \int Pe^{\frac{\Psi-H}{\Theta}} d\tau, \quad (1.5)$$

где Ψ и H — свободная энергия и гамильтониан системы, $P = -\frac{\partial H}{\partial V}$, $\bar{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial V} = -\frac{\partial \Psi}{\partial V}$ и $d\tau$ — элемент фазового объема. Дифференцируя (1.5) по объему V , получим

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial V} = \int \frac{\partial P}{\partial V} \cdot e^{\frac{\Psi-H}{\Theta}} d\tau + \frac{1}{\Theta} \int Pe^{\frac{\Psi-H}{\Theta}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial V} - \frac{\partial H}{\partial V} \right) d\tau =$$

*) Заметим, что в связи с работой [11] этот вывод критически обсуждался в работе [12].

$$= \frac{\partial \bar{P}}{\partial V} + \frac{1}{\Theta} \overline{P(P - \bar{P})}$$

и

$$\Delta(P) = \sqrt{\Theta \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial V} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial V} \right)}. \quad (1.6)$$

Используя (1.4) и (1.6) находим, что произведение флуктуаций давления и объема равно

$$\Delta(V) \Delta(P) = \Theta \sqrt{\frac{\partial \bar{V}}{\partial P} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial V} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial V} \right)} \quad (1.7)$$

и в отличие от произведения $\Delta(q)\Delta(p)$, определяемого формулой (1.1), может иметь произвольное значение, зависящее от градиента потенциала у стенки сосуда [13].

Кроме того, так как согласно условию устойчивости [14]

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial V} < 0,$$

то в формуле (1.6) первый член отрицателен, а второй — положителен и больше модуля первого. Поэтому, пренебрегая в (1.6) первым членом, получим

$$\Delta(P) < \sqrt{-\Theta \frac{\partial \bar{P}}{\partial V}} \quad (1.8)$$

и для произведения флуктуаций давления и объема из формул (1.4) и (1.8) находим:

$$\Delta(V) \Delta(P) < \sqrt{\Theta \frac{\partial \bar{V}}{\partial P} \frac{\partial \bar{P}}{\partial V}}. \quad (1.9)$$

Если считать, как принимается в [10], что для макроскопических систем

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial P} \frac{\partial \bar{P}}{\partial V} = 1, \quad (1.10)$$

то неравенство (1.9) принимает более простой вид

$$\Delta(V) \Delta(P) < \Theta. \quad (1.11)$$

Это соотношение совершенно не похоже на соотношение Гейзенberга (1.1). Заметим, что и при осуществлении неравенства (1.2) (вследствие невыполнения условия (1.10)) в отличие от квантовомеханической дополнительности, когда при $\Delta(p)=0$ величина $\Delta(q)=\infty$, в статистической физике при $\Delta(P)=0$ флуктуация объема $\Delta(V)$ согласно формуле (1.4) имеет вполне определенное конечное значение. О дополнительном описании ансамблями с постоянным давлением и обычными ансамблями при постоянном объеме (и, следовательно, в соответствии с замечанием Бора о дополнительности соответствующих пар термодинамических величин) можно говорить лишь в том смысле, что при точно заданном давлении объем системы определяется с точностью до тепловых флуктуаций (1.4) и, наоборот, если точно задан объем, то давление определяется с точностью до флуктуаций (1.6). Что касается внутренней энергии \bar{H} и температуры T , то эти величины вообще не могут находиться в дополнительном отношении, поскольку в отличие от флуктуации энергии системы в термостате флуктуация температуры изолированной системы не определена в статистической физике (температура определяется только при наличии равновесного контакта системы с другой системой [13]). Кроме того, как и в случае термодинамических параметров V и P , у системы в термостате $\Delta(T)=0$, а флуктуация ее энергии $\Delta(H)$ имеет в зависимости от температуры конечное значение.

Таким образом, в статистической физике отсутствует дополнительность, аналогичная квантовомеханической. Отличие дополнительности в квантовой механике от дополнительности в статистической физике указывает на качественно различную природу квантовой статистичности и статистичности по ансамблю, лежащей в основе статистической физики. Это согласуется с известным высказыванием Бора: «Здесь мы имеем дело с ситуацией существенно иного характера, чем при использовании статистических методов в применении к сложным системам, которые считаются подчиняющимися законам классической механики» [15, с. 392].

В своей книге «Физические принципы квантовой теории» Гейзенберг, иллюстрируя соотношения неопределенностей на различных приборах, замечает, что «соотношения неопределенности очевидно не относятся к прошлому, так как если сначала известна скорость электрона, а затем будет точно измерено положение, то возможно и для времени *перед* измерением положения точно вычислить положения электрона. Для этого прошедшего времени произведение $\Delta q \Delta p$ меньше, чем обычная граница. Однако это знание прошлого имеет чисто умозрительный характер, так как оно (вследствие изменения импульса при измерении положения) никаким образом не входит как начальное условие в какое-либо вычисление будущей судьбы электрона и вообще не играет роли ни в каком физическом эксперименте. Стоит ли названному вычислению прошлого электрона приписывать какую-либо физическую реальность, является поэтому только делом вкуса» [53, с. 21].

В работе [54] из этого замечания Гейзенберга делается вывод, что в прошлом у движущейся частицы имеются определенные значения координаты q и импульса p , т. е. существует траектория частицы, отрицаемая принципом дополнительности. Ошибочность такого вывода показана в работе М. Маркова «Знание «прошлого» и «будущего» в квантовой механике» [55], которая обсуждалась автором с Н. Бором. Однако для того чтобы рассеять сомнения в своем выводе о возможности сколь угодно точных измерений q и p частицы для прошлых моментов времени, автор работы [54] рассматривает предложенный им совместно с Луи де Бройлем эксперимент с лазерным усилителем, который, по их мнению, позволяет определить координату и импульс частицы-фотона. Этот эксперимент аналогичен известным мысленным экспериментам Эйнштейна [15, с. 399] и столь же несостоятелен, как и эти эксперименты (см. Приложение V).

Глава II

ПАРАДОКСЫ ГИББСА, ЭЙНШТЕЙНА И НОВЫЙ ПАРАДОКС

В работе «О равновесии гетерогенных веществ» Гиббс [16] установил «замечательный факт, что возрастание энтропии, вызванное смешением разного рода газов при постоянных температуре и давлении не зависит от природы этих газов», в то время как смешение двух масс одного и того же идеального газа «не вызывает возрастание энтропии». Таким образом, при переходе от смеси сколь угодно близких по своим свойствам и разделимых из этой смеси классических идеальных газов к смеси одинаковых газов изменение энтропии испытывает скачок

$$\Delta S = 2kN \ln 2, \quad (2.1)$$

где k — постоянная Больцмана, N — число атомов каждого из смешируемых газов.

Такое скачкообразное (разрывное) поведение энтропии смешения ΔS называется парадоксом Гиббса. Парадоксальным является здесь то, что при энтропийном рассмотрении смешения газов смешение двух одинаковых газов нельзя рассматривать как предельный случай смешения двух разных газов, в то время как при других рассмотрениях (например, при энергетическом рассмотрении) смешение тождественных газов является предельным случаем смешения разных газов. Этот отличный от ранее известных результат смешения газов вызвал большой интерес к парадоксу Гиббса.

Несколько позже в своей первой работе по квантовой теории идеального газа Эйнштейн [17, с. 488] обратил внимание на парадокс, к которому приводит эта теория и который состоит в том, что смесь вырожденных газов из N_1 атомов с массой m_1 и N_2 атомов с массой m_2 (как угодно мало отличающейся от m_1) при данной температуре имеет иное давление, чем простой газ с числом атомов N_1+N_2 , обладающий практически той же массой атомов и находящийся в том же объеме. В этой работе Эйнштейн писал также, что ему не удалось разъяснить этот парадокс. Однако во втором своем сообщении по квантовой теории идеального газа он отметил, что упомянутый парадокс обусловлен волновыми свойствами микрочастиц [17, с. 497]. Известно, что интерференция волн имеет место только при условии полной тождественности этих волн и скорости их распространения. Волны де Броиля удовлетворяют этому условию только в том случае, если они принадлежат атомам тождественной массы и одинаковой скорости. Таким образом, интерференционное взаимодействие имеет место только между тождественными атомами и исчезает даже при очень малом отличии природы смешиваемых газов. В этом факте коренится, по Эйнштейну, физическая причина обнаруженного им парадокса.

И. Е. Тамм [18] использовал ту же идею интерференции волн де Броиля для разъяснения парадокса Гиббса. Э. Шредингер [19] также считал, что парадокс Гиббса представляет собой макроскопическое проявление квантовых свойств частиц.

Парадоксом, как известно, называется верное утверждение, которое необычно, противоречит ранее известному и про которое хочется сказать, что этого не может быть. Поэтому его нельзя «снять» или устраниТЬ, но можно объяснить или решить. Таким решением парадокса Гиббса с полным сознанием его существования занимались кроме Гиббса также Лоренц, Ван-дер-Ваальс и многие другие физики. Многие авторы [20—22] связывают парадокс Гиббса с дискретностью различия смешиваемых газов. В книге [23] парадокс Гиббса объясняется скачком в действии закона Дальтона при переходе

от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов, однако чрезмерная философская нагрузка, которую несет эта книга, сделала ее незамеченной при анализе парадокса Гиббса различными авторами.

Но вот в 1975 г. из печати вышла книга Я. М. Гельфера, В. Л. Любощица, М. И. Подгорецкого [24] о парадоксе Гиббса, в которой авторы совершают переворот в решении этого парадокса и других «парадоксов разрывности», заявляя, что они просто не существуют! В своей книге авторы пишут, что им «также приходится во многих случаях делать вид, будто та или иная величина разрывна, и обсуждать парадоксальность этого разрыва, хотя мы хорошо знаем, что на самом деле она ведет себя непрерывно». Читателю предлагается всегда «иметь в виду, что все скачки, обсуждаемые в различного рода «парадоксах разрывности» фактически отсутствуют» [24].

Из этих высказываний видно, что авторы книги [24] совершают переворот не только в решении парадокса Гиббса, но и в логике. В самом деле, зачем нужно делать вид, будто парадокс Гиббса существует, когда авторам известно, что он отсутствует? Если подобно изменению внутренней энергии ΔU изменение энтропии смешения ΔS согласно [24] отсутствует при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов, то какую же парадоксальность разрыва ΔS приходится обсуждать? Ведь не обсуждается же «парадокс разрывности» смешения внутренней энергии ΔU , который, как все хорошо знают (не делая вида, будто он существует), действительно отсутствует! И вообще, можно ли обсуждать какое-то явление и его парадоксальность, когда хорошо известно, что его нет?

Без переворота в логике ответить на эти вопросы нельзя; формальной и диалектической логики для этого явно недостаточно. Мы покажем вначале несостоятельность всех рассуждений авторов [24] об отсутствии парадокса Гиббса и подтвердим вывод Гиббса, Лоренца, Шредингера, Тамма, Леоновича и многих других физиков о его существова-

нии. Мы увидим, что непосредственной физической причиной парадокса Гиббса и парадокса Эйнштейна является не волновая природа микрочастиц и не дискретность различия смешиваемых газов, а скачок изменения плотности газа при переходе от его смешения со сколь угодно близким газом к смешению с тождественным газом, и учет этого скачка позволяет объяснить, как оба названных парадокса, так и обусловленный той же причиной новый парадокс смешения квантовых идеальных газов.

§ 4. Существует ли парадокс Гиббса?

В книге [24, с. 52] авторы пишут: «Парадокс Гиббса заключается в том, что утверждается существование скачка в поведении величины ΔS при непрерывном сближении некоторых параметров, характеризующих смешиваемые газы. Возникает, однако, существенный вопрос: возможно ли фактически такое сближение, не противоречит ли оно законам физики? Если такое сближение возможно, а скачок величины ΔS остается, ситуацию следует считать действительно парадоксальной. Если же различия между газами могут меняться только дискретно, парадокс исчезает, поскольку нет ничего удивительного в том, что при дискретном изменении свойств газов свойства смеси также меняются дискретно». В соответствии с этим доказательство отсутствия парадокса Гиббса проводится в [24] в два этапа.

Первый этап относится к тем случаям, когда параметры, определяющие различие смешиваемых газов, изменяются дискретно. Это имеет место в обычных условиях смешения различных газов, когда их атомы отличаются друг от друга каким-либо дискретным квантовым числом (зарядом, числом нуклонов и т. д.). По мнению авторов [24], поскольку в этом случае параметры различия газов не могут изменяться непрерывно, то нет никакого парадокса в том, что величина энтропии смешения меняется дискретно (парадокс Гиббса исчезает).

Пороком этого вывода об отсутствии парадокса Гиббса в рассматриваемом случае является то, что

бы не учитывает независимости энтропии смешения ΔS от величины различия смешируемых газов и характера изменения этого различия — дискретного или непрерывного. Хотя в реальном физическом мире различие между газами определяется отличием друг от друга их атомов каким-либо дискретным квантовым числом, это не играет роли для парадокса Гиббса — он будет как при дискретном, так и при непрерывном изменении параметров различия смешируемых газов. Такой вывод следует из формулы (2.1) для изменения энтропии при смешении двух разных газов, в которую параметр их различия не входит! Поэтому при анализе парадокса Гиббса можно исходить из модели газа с непрерывно меняющимися параметрами различия между газами. Учет дискретности различия газов, как мы увидим в § 6, приводит к тому же скачку (2.1) для энтропии смешения, что было получено Гиббсом. Тот же результат получается и в классическом пределе, если исходить при вычислении из выражения энтропии вырожденного газа, которое учитывает дискретность различия газов [25]. Сказанное исчерпывается установление несостоятельности первого этапа доказательства отсутствия парадокса Гиббса, предпринятого авторами [24].

Второй этап этого доказательства «заключается, во-первых, в утверждении, что существуют ситуации, когда параметры близости могут изменяться непрерывно, и, во-вторых, в доказательстве того, что в этом случае величина ΔS также меняется непрерывно и не испытывает никакого скачка при переходе от близких газов к одинаковым» [24, с. 53]. Этот вывод об отсутствии в рассматриваемом случае скачка ΔS при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов приводит, по мнению авторов [24], к окончательному «закрытию» парадокса Гиббса.

Утверждение авторов [24] о существовании ситуаций, когда параметры близости смешируемых газов и величина ΔS изменяются непрерывно верно и было известно как смешение Гей-Люссака задолго до установления парадокса Гиббса. Однако эти ситуации представляют собой совсем другой

вид смешения и, как мы увидим в § 9, никакого отношения к парадоксу Гиббса не имеют [26, 27]. Поэтому рассмотрение таких ситуаций ни в коей мере не доказывает отсутствие парадокса Гиббса. Совпадение предельного значения эффекта Гей-Люссака со скачком величины ΔS в парадоксе Гиббса имеет место только при смешении классических идеальных газов, и поэтому смешение, приводящее к этому парадоксу, не является предельным случаем смешения Гей-Люссака. Изложенным исчерпывается полное установление несостоятельности предпринятых авторами [24] попыток «закрытия» парадокса Гиббса, а также подтверждение вывода Гиббса о существовании этого парадокса при переходе от смешения разных и разделимых из смеси газов (независимо от прерывного или непрерывного изменения параметров их различия) к смешению одинаковых газов.

Чем обусловлена возможность рассмотрения смешения одинаковых классических идеальных газов как предельного случая смешения разных газов по изменению энергии смешения ΔU , и почему нельзя рассматривать смешение одинаковых газов как предельный случай смешения разных газов по изменению энтропии смешения ΔS , т. е. каково правильное решение парадокса Гиббса и других парадоксов смешения газов, подробно изложено в работах [25—29] и в последующих параграфах этой главы.

Коротко, дело состоит в том, что внутренняя энергия классического идеального газа не зависит от плотности числа частиц $n = N/V$, в то время как его энтропия зависит от n . При переходе от смешения разных газов к смешению одинаковых газов изменение плотности смешиаемого газа испытывает понятный и очевидный скачок, который и приводит к неочевидному (парадоксальному) скачку изменения энтропии (парадокс Гиббса) и другим парадоксам разрывности [29].

Возражение авторов [24], что такой подход к парадоксу Гиббса не решает его, а лишь переносит «парадокс разрывности» в другое место (т. е. сводит к разрывности другой величины), лишено

всяких оснований, поскольку объяснить (или решить) какой-либо парадокс означает не устраниить или «закрыть» его, а свести к понятному и очевидному.

Перейдем теперь к последовательному рассмотрению парадоксов смешения газов.

§ 5. Скачок изменения плотности газа

Пусть в двух одинаковых объемах V , разделенных перегородкой, содержится по N частиц газов A и B соответственно. Плотность числа частиц газа A до смешения равна $n_1=N/V$, а после изотермического смешения его плотность будет $n_2=N/2V$. В результате смешения плотность газа A уменьшится на величину

$$\Delta n = n_1 - n_2 = n_1/2, \quad (2.2)$$

причем это уменьшение не зависит от природы другого газа B и его сколь угодно малого отличия от газа A , в то время как смешение двух масс одного и того же газа A не вызывает изменения его плотности: $n_2^0 = n_1 = 2n_2$.

Таким образом, смешение двух масс одинаковых газов нельзя рассматривать по (2.2) как предельный случай смешения двух разных газов, и при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов изменение плотности газа A испытывает скачок (2.2). Этот результат по своей формулировке полностью совпадает с формулировкой парадокса Гиббса и мог бы быть назван парадоксом плотности, однако он настолько очевиден, что не представляется необычным. Но он приводит к следствиям, которые кажутся невозможными, парадоксальными.

Подчеркнем, что скачок изменения плотности газа при переходе от смешения двух разных газов к смешению одинаковых газов не зависит от того, как меняется различие между газами — дискретно или непрерывно: в обоих случаях скачок изменения плотности (2.2) будет одним и тем же. Поэтому вряд ли кто-нибудь будет утверждать, что этот скачок обусловлен невозможностью в реальной природе сколь угодно малого различия между

газами, поскольку атомы газов отличаются друг от друга по какому-либо дискретному квантовому числу.

§ 6. Конфигурационная энтропия идеального газа

Энтропия S системы, состояние которой определяется объемом V и температурой T , вычисляется из основного уравнения термодинамики

$$TdS = C_V dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV, \quad (2.3)$$

где C_V — теплоемкость системы при постоянном объеме, $P=P(V, T)$ — термическое уравнение состояния.

Интегрируя уравнение (2.3), найдем изменение энтропии системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{C_V dT}{T} + \int_1^2 \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV. \quad (2.4)$$

При изотермических процессах ($dT=0$) изменение энтропии, очевидно, равно

$$S(T, V) - S(T, V_0) = \int_{V_0}^V \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV. \quad (2.5)$$

Состояние идеального газа (классического) определяется уравнением Клапейрона—Менделеева

$$PV = vRT, \quad (2.6)$$

где $v=N/N_A$ — число молей газа (N — число атомов в объеме V , N_A — число Авогадро), $R=kN_A$ (k — постоянная Больцмана). Поэтому для изменения энтропии при изотермическом расширении идеального газа находим:

$$S(N, V) - S(N, V_0) = kN \ln \frac{V}{V_0},$$

откуда конфигурационная (зависящая от объема) часть энтропии идеального газа равна

$$S(N, V) = kN \ln \frac{V}{V_0} + S(N, V_0) = kN \left(\ln \frac{v}{v_0} + \frac{s_0}{k} \right), \quad (2.7)$$

где $v = V/N$ — объем на одну частицу газа в состоянии T , V и s_0 — энтропия на одну частицу в начальном состоянии. Опуская в формуле (2.7) член $-kN(\ln v_0 - s_0/k)$, не имеющий значения при последующем рассмотрении, получим для конфигурационной энтропии идеального газа выражение

$$S(N, V) = kN \ln \frac{V}{N}. \quad (2.8)$$

Это выражение не зависит от природы идеального газа и обладает свойством аддитивности: энтропия газа в объеме V (из N частиц) равна сумме энтропий частей этого объема V_1 (из N_1 частиц) и V_2 (из N_2 частиц).

§ 7. Теорема Гиббса об энтропии смеси идеальных газов. Парадокс Гиббса

Пусть в объеме V содержится смесь газов A и B . Гиббс предложил мысленный эксперимент, в котором с помощью полупроницаемых перегородок (пропускающих один газ и не пропускающих другой газ) смесь можно разделить на составляющие компоненты без сообщения теплоты и работы и, следовательно, без изменения ее энтропии. Лоренц [30] показал, что такое разделение газовой смеси можно осуществить также с помощью внешнего поля, без использования полупроницаемых перегородок. Эти мысленные эксперименты приводят к выводу, что энтропия S смеси идеальных газов в объеме V равна сумме энтропий S_i этих газов, когда каждый из них в отдельности при тем-

пературе смеси занимает тот же объем, что и вся смесь (теорема Гиббса):

$$S = \sum_i S_i = k \sum_i N_i \ln \frac{V}{N_i}. \quad (2.9)$$

Теорему Гиббса можно также доказать, используя закон Дальтона: давление идеальной газовой смеси равно сумме парциальных давлений отдельных газов

$$P = \sum_i P_i. \quad (2.10)$$

Действительно, используя (2.10) для энтропии смеси идеальных газов получим:

$$S = \int \frac{dU + PdV}{T} = \sum_i \int \frac{dU_i + P_i dV}{T} = \sum_i S_i.$$

Это доказательство указывает на то, что выполнение закона Дальтона предполагает возможность обратимого разделения смеси идеальных газов. В статистической физике теорема Гиббса автоматически следует из выражения для статистического интеграла смеси идеальных газов [31].

Важно подчеркнуть, что теорема Гиббса справедлива только для смеси сколь угодно мало различающихся газов и ею нельзя пользоваться в случае смеси одинаковых газов, когда принципиально невозможно провести разделение смеси.

Применяя теорему Гиббса, найдем изменение энтропии при смешении газов. Представим себе два одинаковых объема V , разделенных непроницаемой перегородкой и заполненных газами A и B по N частиц каждый при одинаковых температуре и давлении. Согласно (2.8) энтропия системы равна

$$S_I = 2kN \ln \frac{V}{N},$$

а после удаления перегородки и смешения энтропия смеси по теореме Гиббса (2.9) станет

$$S_{II} = 2kN \ln \frac{2V}{N}. \quad (2.11)$$

Изменение энтропии в результате смешения газов (энтропия смешения) не зависит от их природы и равно

$$\Delta S = S_{\text{II}} - S_{\text{I}} = 2kN \ln 2. \quad (2.12)$$

Энтропию смеси в предельном случае смешения двух одинаковых газов по формуле (2.11) получить нельзя, поскольку теорема Гиббса к этому случаю неприменима, так как формула (2.11) не учитывает происходящего при таком предельном переходе скачка плотности газов. Для того чтобы с помощью формулы (2.11) найти энтропию системы S^0_{II} в предельном случае смешения одинаковых газов, надо в этой формуле заменить плотность N/V на величину $2N/V$. Мы получим тогда в соответствии с термодинамикой

$$S^0_{\text{II}} = 2kN \ln \frac{V}{N} = S_{\text{I}},$$

откуда автоматически следует, что изменение энтропии при смешении одинаковых газов равно нулю:

$$\Delta S^0 = S^0_{\text{II}} - S_{\text{I}} = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, получаем установленный впервые Гиббсом и приведенный в начале главы вывод, что смешение двух одинаковых газов нельзя рассматривать как предельный случай смешения двух разных газов и при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению одинаковых газов энтропия смешения испытывает скачок

$$\Delta S = \Delta S - \Delta S^0 = 2kN \ln 2. \quad (2.14)$$

Решить или разъяснить (т. е. свести к ясному и понятному) парадокс Гиббса означает установить причину и физическое основание скачка энтропии смешения ΔS при переходе от смешения сколь угодно близких (и разделимых из смеси) газов к смешению одинаковых газов. Из приведенного рассмотрения видно, что наличие разрыва энтропии смешения при сближении до совпадения параметров смешиваемых газов обусловлено происходящим при этом скачком изменения плотности газа, происхождение которого понятно и ясно. Физическим основанием парадокса Гиббса является выделен-

ность смеси порций одинакового газа по сравнению со смесью сколь угодно близких газов — невозможность ее разделения на смешиаемые порции, в то время как смесь сколь угодно близких газов можно разделить.

Из выражения (2.12) замечаем, что энтропия смешения не зависит от величины различия смешиаемых газов и характера изменения этого различия — дискретного или непрерывного. Хотя в действительности различие между газами определяется отличием друг от друга их атомов каким-либо дискретным квантовым числом (зарядом, числом нуклонов и т. д.), которое по самому смыслу понятия дискретности не может изменяться непрерывно, это не играет роли для парадокса Гиббса. Поэтому можно пользоваться моделью газа с непрерывно меняющимся параметром различия газов. Покажем, что учет дискретности различия между газами не меняет результата Гиббса. Для этого будем исходить из выражения для энтропии классического идеального газа, даваемого статистической физикой [31]

$$S = kN \left[\frac{3}{2} \ln T + \ln \frac{(2\pi mk)^{3/2} V}{Nh^3} + \frac{5}{2} \right], \quad (2.15)$$

где m — масса атомов, дискретно меняющаяся при переходе от одного газа к другому, h — постоянная Планка.

Нетрудно убедиться, что величина скачка изменения энтропии ΔS , получаемая при использовании выражения (2.15) для энтропии, учитывающего дискретность различия газов, не зависит от различия между газами и равна (2.14). Тот же результат получается в классическом пределе, если исходить при вычислении из выражения энтропии вырожденного газа, которое учитывает дискретность различия газов (см. § 10).

В литературе, однако, распространена точка зрения на парадокс Гиббса, согласно которой возникновение этого парадокса обусловлено дискретным различием смешиаемых газов [20, 21]. Недопустимость предельного перехода к смешению тождественных газов в формуле (2.11) авторы

работ [20, 21] обосновывают не тем, что формула (2.11) не учитывает происходящего при таком переходе скачка плотности газов, а тем, что этот переход «противоречит атомизму вещества и тому факту, что между различными видами атомов (например, атомами Н и Не) нет никакого непрерывного перехода» [20, с. 108].

Выше на основе количественного анализа была указана истинная физическая причина возникновения скачка энтропии смешения и отмечена независимость этого скачка от характера изменения параметра различия смешиваемых классических идеальных газов. Этой причиной является скачок изменения плотности при переходе от смешения разных газов к смешению тождественных газов. По той же причине все термодинамические величины, не зависящие от плотности идеального газа (например, его внутренняя энергия и энталпия), не испытывают скачка при указанном переходе, те же величины, которые зависят от плотности газа (энтропия классического и квантового газа, внутренняя энергия вырожденного газа и др.), испытывают соответствующий скачок, хотя дискретность различия смешиваемых газов имеет место в обоих случаях.

Из изложенного также видно, что парадокс Гиббса полностью решается в рамках термодинамики.

§ 8. Различные понимания содержания парадокса Гиббса

Как видно из приведенной в начале этой главы цитаты из работы Гиббса «О равновесии гетерогенных веществ», парадоксальным, по Гиббсу, является тот факт, что возрастание энтропии при смешении газов не зависит от их природы, но смешение тождественных газов не вызывает возрастания энтропии, так что при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов изменение энтропии испытывает скачок (2.1)

$$\Delta S = 2kN \ln 2.$$

Однако многие авторы [32—34], вопреки Гиббсу парадоксом Гиббса называют не этот скачок изменения энтропии, а не существующее в действительности возрастание энтропии при смешении одинаковых газов, которое возникает при вычислениях, если использовать противоречащее свойству аддитивности выражение энтропии газа из N частиц в объеме V в виде

$$S = kN \ln V. \quad (2.16)$$

Действительно, используя (2.16), энтропия до смешения двух порций одного и того же газа по N частиц в объемах V равна

$$S_I = 2kN \ln V,$$

а после смешения, когда весь газ из $2N$ частиц занимает объем $2V$, энтропия смеси будет

$$S_{II} = 2kN \ln 2V,$$

и, следовательно, возрастание энтропии при смешении одинаковых газов при постоянных температуре и давлении равно

$$\Delta S = S_{II} - S_I = 2kN \ln 2. \quad (2.17)$$

Это выражение для ΔS совпадает со скачком энтропии смешения (2.12), выражающим парадокс Гиббса, и, по-видимому, на этом основании результат (2.17) также называют парадоксом Гиббса. Но такой «парадокс Гиббса» в действительности является недоразумением, которое устраняется, если для энтропии идеального газа использовать правильное выражение (2.8). Парадокс же Гиббса, по Гиббсу, (2.1) остается при использовании правильного выражения (2.8) для энтропии идеального газа.

Термодинамика приводит к правильному выражению (2.8) для энтропии идеального газа, поэтому обсуждение и решение парадокса Гиббса может быть дано, как мы видели, в рамках термодинамики без дополнительного привлечения статистической физики. Для того чтобы выражение (2.8) получить статистическим методом, необходимо при вычислении статистического интеграла газа из N одинаковых (тождественных) частиц учесть, что при перестановке таких частиц получаются физически тождественные микросостояния (в отличие от

перестановки разных частиц, в результате которых возникают разные микросостояния). Так что, если для системы из N различных частиц статистический интеграл равен

$$Z = \int e^{-\frac{H}{\Theta}} d\tau, \quad (2.18)$$

то статистический интеграл системы из N тождественных частиц будет

$$Z^0 = \frac{1}{N!} \int e^{-\frac{H}{\Theta}} d\tau, \quad (2.19)$$

где H — функция Гамильтона системы, $\Theta=kT$, $d\tau$ — элемент фазового пространства.

В квантовой статистике множитель $1/N!$ перед статистической суммой возникает вследствие квантовой неразличимости тождественных (одинаковых) частиц. При предельном переходе от квантовой статистической суммы к классическому статистическому интегралу этот множитель остается *), однако на этом основании нельзя утверждать, что множитель $1/N!$ в классической формуле (2.19) учитывает квантовую неразличимость частиц, поскольку этим свойством классические частицы не обладают. В действительности этот множитель в классической статистике обусловлен не квантовой неразличимостью частиц, а их тождественностью и вытекающей отсюда одинаковостью микросостояний, отличающихся друг от друга перестановками частиц **).

*) По этой причине Э. Шредингер считал, что парадокс Гиббса связан с волновыми свойствами (квантовой неразличимостью) тождественных частиц и является макроскопическим проявлением этих их квантовых свойств: «Всегда считалось, что парадокс Гиббса таит в себе глубокий смысл, однако то, что он оказывается тесно связанным с чем-то чрезвычайно важным и совершенно новым, едва ли можно было предвидеть» [19, с. 63].

**) Подчеркнем, что тождественность и неразличимость частиц — разные понятия. Классические частицы могут быть тождественны по своим свойствам, но их всегда можно различить друг от друга по описываемым ими траекториям. В отличие от неразличимости понятие тождественности частиц можно строго определить в классической статистике.

Если не учитывать тождественность классических частиц и для газа из одинаковых частиц вычислять энтропию исходя из статистического интеграла (2.18), то получится выражение для энтропии идеального газа (2.16), противоречащее термодинамике и приводящее к недоразумению (2.17), которые авторы [32—34] ошибочно называют парадоксом Гиббса. При учете тождественности частиц и вычислении энтропии газа исходя из статистического интеграла (2.19) получается правильное выражение для энтропии идеального газа (2.8), которое устраняет недоразумение (2.17), в чем авторы [32—34] видят решение парадокса Гиббса.

Некоторые авторы при обсуждении парадокса Гиббса допускают и другое недоразумение. Используя правильное выражение для энтропии газа (2.8), они считают, что поскольку согласно (2.12) энтропия смешения не зависит от различия между газами, то возрастание энтропии должно иметь место и при смешении одинаковых газов и «это обстоятельство называют парадоксом Гиббса» [35]. Такое понимание содержания парадокса Гиббса также неверно. Действительно, как показано выше, формулу (2.12) нельзя применять к смешению одинаковых газов, поэтому неправильно утверждать, что согласно (2.12) должно иметь место возрастание энтропии в этом случае, и называть «это обстоятельство» парадоксом Гиббса.

§ 9. Качественно разные виды смешения газов и экспериментальное обнаружение парадокса Гиббса

Анализ изотермического смешения идеальных газов показывает, что существуют два совершенно разных вида такого смешения. Отличие одного из них от другого определяется тем, можно или нельзя в принципе получаемую смесь разделить на первоначальные газы [26].

К первому виду изотермического смешения порций идеальных газов относится такое смешение, при котором получаемую смесь можно разделить (с помощью полупроницаемых перегородок или внешних полей) на порции смешируемых газов без

совершения работы и сообщений теплоты смеси, следовательно, без изменения энтропии системы. Энтропия смеси в этом случае равна по теореме Гиббса (2.9) сумме энтропий смешиваемых газов, когда каждый из них в отдельности занимает при температуре смеси тот же объем, что и вся смесь.

При втором виде изотермического смешения порций идеальных газов получаемую смесь газов принципиально нельзя разделить на смешиваемые порции. В отличие от первого вида смешения во втором виде изменение энтропии ΔS при смешении (энтропия смешения) зависит от степени различия свойств смешиваемых газов и, как мы покажем, изменяется в определенном интервале при непрерывном изменении параметра различия газа.

Исторически второй вид смешения идеальных газов был известен значительно раньше, чем первый. Он имеет место при процессе Гей-Люссака — процессе адиабатического расширения газа (смесей газов) в область с тем же газом (смесью тех же газов) меньшего давления (разных соответствующих парциальных давлений), но одинаковой с ним температурой, т. е. при смешении двух порций одного и того же газа (разных смесей одних и тех же газов), занимающих до смешения одинаковый объем V и имеющих одинаковые температуры, но разные давления P_1 и P_2 . Действительно, получающуюся при этом процессе смесь порций газов нельзя разделить на первоначальные порции при любых P_1 и P_2 , а энтропия смешения ΔS , как нетрудно убедиться, непрерывно изменяется в определенном интервале с изменением этого различия свойств порций газов. Пусть в первом объеме V содержится N_1 частиц газа, а во втором объеме той же величины — $2N - N_1$ частиц того же газа. Тогда до смешения энтропия системы равна

$$S_I = kN_1 \ln \frac{V}{N_1} + k(2N - N_1) \ln \frac{V}{2N - N_1},$$

а после смешения, когда газ из $2N$ частиц занимает объем $2V$, энтропия будет

$$S_{II} = 2kN \ln \frac{2V}{2N} = 2kN \ln \frac{V}{N}.$$

Изменение энтропии в результате смешения (эффект Гей-Люссака) равно

$$\Delta S = S_{II} - S_I = 2kN \left[\ln \left(2 - \frac{N_1}{N} \right) - \right. \\ \left. - \frac{N_1}{2N} \ln \left(\frac{2N}{N_1} - 1 \right) \right].$$

Вводя в качестве непрерывного параметра различия смешиваемых порций газа изменяющуюся от 0 до 1 величину

$$\eta = \frac{|P_2 - P_1|}{P_1 + P_2},$$

получим

$$\Delta S = 2kN \left[\ln(1 + \eta) - \frac{1 - \eta}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right]. \quad (2.20)$$

Это выражение для эффекта Гей-Люссака имеет минимум, равный нулю при $\eta=0$, и максимальное значение, равное $\Delta S=2kN \ln 2$ при $\eta=1$. Таким образом, при непрерывном изменении параметра различия порций газа эффект Гей-Люссака газа с общим числом $2N$ частиц изменяется в интервале

$$0 \leq \Delta S \leq 2kN \ln 2. \quad (2.21)$$

Тот же результат для эффекта Гей-Люссака имеет место и в процессе смешения газов A и B , представляющих собой однородные смеси из частиц различных газов C и D : газ A содержит $N_1=Nx_1$ частиц C и $N'_1=Nx_2$ частиц D , а газ B — $N_2=Ny_1$ частиц C и $N'_2=Ny_2$ частиц D ($x_1+x_2=y_1+y_2=1$). В качестве непрерывного параметра, характеризующего степень близости таких смесей, возьмем величину $\eta=|x_1-y_1|=|x_2-y_2|$. При $\eta=0$ ($x_1=y_1$, $x_2=y_2$) обе смеси A и B абсолютно одинаковы, а при $\eta=1$ ($x_1y_1=x_2y_2=0$) мы имеем дело с двумя различными газами C и D . До удаления перегородки между газами A и B энтропия системы по теореме Гиббса равна сумме энтропий, отдельно занимающих объем V четырех порций чистых газов из N_1 , N'_1 , N_2 , N'_2 частиц соответственно, а после

удаления перегородки энтропия системы будет равна сумме энтропии всего газа C из N_1+N_2 частиц и энтропии всего газа D из $N'_1+N'_2$ частиц, содержащихся в смесях A и B и занимающих объем $2V$.

Изменения энтропии газов C и D при изотермической диффузии их частей в смесях A и B после удаления перегородки соответственно равны:

$$\Delta S_C = k(N_1 + N_2) \ln \frac{2V}{N_1 + N_2} - k \sum_{i=1}^2 N_i \ln \frac{V}{N_i} =$$

$$= k \sum_{i=1}^2 N_i \ln \frac{N_i}{N_1 + N_2} + k(N_1 + N_2) \ln 2,$$

$$\Delta S_D = k \prod_{i=1}^2 N'_i \ln \frac{N'_i}{N'_1 + N'_2} + k(N'_1 + N'_2) \ln 2.$$

Согласно формуле (2.21) ΔS_C и ΔS_D изменяются в интервалах

$$0 \leq \Delta S_C \leq k(N_1 + N_2) \ln 2,$$

$$0 \leq \Delta S_D \leq k(N'_1 + N'_2) \ln 2,$$

поэтому изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_C + \Delta S_D$ всей системы, образовавшейся после диффузии смесей A и B изменяется с изменением η (или числа частиц каждого сорта) в интервале

$$0 \leq \Delta S \leq 2kN \ln 2, \quad (2.22)$$

поскольку

$$N_1 + N'_1 = N_2 + N'_2 = N.$$

Выражение (2.22) в точности совпадает с формулой (2.21).

Как показано в работе [36], ко второму виду смешения идеальных газов относится и рассмотренный в [22] пример смешения двух сортов газа с различной спиновой поляризацией одних и тех же атомов, поскольку получаемая при этом смесь в силу своей квантовой природы в принципе полностью не разделяется: при выделении одного из сортов

смеси «задерживаются» и атомы другого сорта [37]. Как и следовало ожидать, при непрерывном изменении параметра различия газов энтропия изменяется в интервале (2.21).

Непрерывное изменение энтропии смешения (2.21) при изменении степени различия смешиваемых газов в процессе Гей-Люссака (т. е. при смешении второго вида) не противоречит неизменности этой величины (2.12) при изменении степени различия газов в процессе изотермического смешивания первого вида. Результат (2.21) не имеет отношения к выводу (2.12), так как они относятся к разным видам смешения. Поэтому анализ примеров смешения второго вида не есть какой-то новый подход к парадоксу Гиббса.

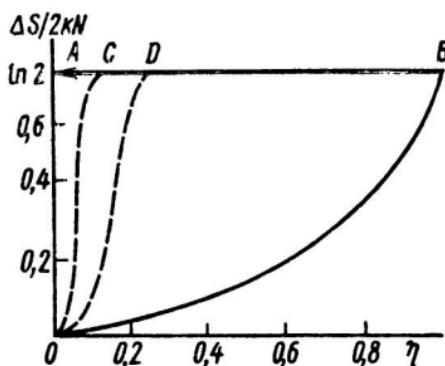


Рис. 1. Зависимость энтропии смешения идеальных газов от степени различия между ними

Таким образом, в общем случае изотермического смешения идеальных газов кривая зависимости энтропии смешения ΔS от величины параметра различия смешиваемых газов состоит из двух ветвей. Одна из них, определяемая уравнением (2.12), соответствует смешению первого вида, а вторая ветвь, определяемая уравнением (2.20), — смешению второго вида. Первая ветвь изображена на рис. 1 отрезком BA , а вторая ветвь — кривой OB .

Изотермическое смешение порций одного и того же газа не принадлежит к множеству смешений первого вида (смешение Гиббса), а принадлежит к множеству смешений второго вида (смешение Гей-Люссака). Поэтому смешение тождественных газов нельзя рассматривать как предельный случай смешения двух различных (разделимых из смеси

си) газов (парадокс Гиббса). Математическим и физическим основанием парадокса Гиббса является то, что при полной возможности отличить атомы смешиваемых газов как различные, смешение тождественных газов не принадлежит к множеству смешений сколь угодно близких и разделимых газов, а принадлежит к множеству смешений неразделимых газов, вследствие чего оно физически выделено, обладает своеобразной особенностью по сравнению со смешением сколь угодно близких разделимых газов.

В § 13 будет показано, что совпадение изменения энтропии в предельном случае ($\eta=1$) смешения второго вида (2.20) с изменением энтропии (2.12) при смешении первого вида (при любом значении параметра различия газов) имеет место не всегда и поэтому, вообще говоря, смешение первого вида не является предельным частным случаем смешения второго вида.

Обсудим теперь, насколько легко экспериментально обнаружить теоретически установленный Гиббсом парадокс.

Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим аналогичный пример из механики. Как известно, неограниченно долгое прямолинейное и равномерное движение тела возможно только в идеализированных условиях полного отсутствия какого-либо действия других тел на движущееся тело. Тот факт, что практически влияние других тел (трение, сопротивление и т. д.) устраняется лишь с какой-то степенью точности, не означает ограниченности традиционного подхода к закону инерции и тем более его отсутствие. Учет этого внешнего влияния приводит только к изменению движения тела, но не к изменению закона инерции.

Аналогично вывод о скачке ΔS при переходе от смешения газов из одинаковых атомов к смешению газов отличающимися по какому-то признаку атомами (парадокс Гиббса) имеет место в идеализированных условиях разделения смеси при сколь угодно малой разнице параметра различия атомов. И тот факт, что практически «опознавшее устройство» будет делать ошибки при разделении смеси

из близких по своим свойствам атомов и не полностью отделять их друг от друга, ни в коей мере не означает недостаточности традиционного подхода к парадоксу Гиббса и тем более его отсутствия. При учете ошибок опознающего устройства при разделении трудно различимых компонент особенность смешения тождественных газов исчезает (устройство полностью не разделяет и близкие по свойствам атомы!). Это приводит к непрерывному изменению ΔS в зависимости от степени различия атомов, но не к отсутствию парадокса Гиббса, имеющему место (как и закон инерции) в предельном случае отсутствия ошибок опознающего устройства (отсутствия влияния внешних тел на движущееся тело).

Величина ΔS , определяемая при учете ошибок опознающего устройства, зависит не только от степени различия атомов, но и от природы самого устройства *). Таким образом, экспериментальное обнаружение парадокса Гиббса связано с некоторой трудностью, так как он проявляется при работе с предельно точным определяющим устройством (подобно тому, как экспериментальное обнаружение неограниченно долгого прямолинейного и равномерного движения тела связано с затруднением полного устранения влияния на это движение других тел **).

Непрерывное поведение ΔS с учетом ошибок опознающего устройства определено в работе [38] на основе информационной интерпретации энтропии и представлено на рис. 1 пунктирными кривыми: более точному устройству (с меньшей дисперсией σ) соответствует левая пунктирная кривая OC (отсюда видно, что парадокс Гиббса обнаруживается при работе с предельно точным прибором). Эти кривые не имеют ничего общего с кривой OB , соответствующей смешению Гей-Люссака, при котором невозможно разделение смеси даже в идеаль-

*) Отсюда видно, что информационная энтропия не совпадает с термодинамической энтропией системы [14].

**) Согласно термодинамике невозможность практически провести тот или иной мысленный эксперимент не уменьшает его доказательной силы, если только он не противоречит началам термодинамики.

ном случае опознающего устройства. Выражение для ΔS , полученное в [38], представляется через интервал ошибок, существенно отличается от (2.20) и совершенно ему не эквивалентно.

§ 10. Квантовый парадокс Гиббса

Изложенный в § 7 парадокс Гиббса относится к классическому идеальному газу. Рассмотрим квантовый аналог этого парадокса [25].

Конфигурационная часть энтропии слабо вырожденного идеального газа из N частиц в объеме V при температуре T равна [39]

$$S = kN \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right], \quad (2.23)$$

где $\delta = -1$ для Бозе-газа и $\delta = 1$ для Ферми-газа.

Представим себе два равных объема V , разделенных непроницаемой перегородкой и заполненных газами A и B по N частиц кажды с массами соответственно m_1 и m_2 ; температура газов одна и та же T . Энтропия всей системы равна

$$S_I = 2kN \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{\delta}{64} \frac{Nh^3}{V(\pi kT)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right]. \quad (2.24)$$

После удаления перегородки и изотермического смешения каждый газ занимает объем $2V$ и энтропия смеси будет

$$S_{II} = 2kN \left[\ln \frac{2V}{N} + \frac{\delta}{128} \frac{Nh^3}{V(\pi kT)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right]. \quad (2.25)$$

Изменение энтропии системы при смешении (энтропия смешения) равно

$$\Delta S = S_{II} - S_I = 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{128} \frac{Nh^3}{V(\pi kT)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right] \quad (2.26)$$

Из этого выражения видно, что энтропия смешения квантовых газов зависит от их природы и, следовательно, «замечательный факт» Гиббса о независимости ΔS от природы смешиваемых классических идеальных газов в квантовом случае не имеет места. Но парадокс Гиббса остается! В самом деле, при смешении сколь угодно близких газов, когда $m_2 \approx m_1 = m$ по формулам (2.25) и (2.26) находим:

$$S'_{II} = 2kN \left[\ln \frac{2V}{N} + \frac{\delta}{64} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right],$$

и энтропия смешения

$$\Delta S' = 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{64} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right].$$

Получить по формуле (2.25) выражение для энтропии системы в предельном случае смешения тождественных газов ($m_1 = m_2 = m$) нельзя, так как она не учитывает происходящего при этом смешении скачка плотности газов. Для того чтобы с помощью формулы (2.25) найти энтропию S^0_{II} в предельном случае смешения одинаковых газов надо в этой формуле заменить плотность N/V на величину в 2 раза большую $2N/V$. Мы получим тогда

$$S^0_{II} = 2kN \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right] = S^0_I, \quad (2.27)$$

и энтропия смешения

$$\Delta S^0 = S^0_{II} - S^0_I = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, при переходе от смешения сколь угодно близких слабо вырожденных газов к смешению тождественных газов энтропия смешения испытывает скачок

$$\Delta S = \Delta S' - \Delta S^0 = 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{64} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right], \quad (2.29)$$

что составляет квантовый парадокс Гиббса. Непосредственно видно, что, как и в классическом случае, источником квантового парадокса Гиббса является скачок изменения плотности газа при пере-

ходе от его смешения со сколь угодно близким газом к смешению с тождественным газом и учет этого скачка делает понятным происхождение скачка ΔS при указанном переходе.

Поскольку энтропия смешения квантовых газов (2.26) зависит от природы смешиаемых газов, то при дискретном изменении параметра, характеризующего смешиаемые газы, скачком изменяется энтропия смешения и имеет место скачок ΔS_d при переходе от смешения предельно близких различных газов к смешению тождественных газов. Однако учет дискретности различия смешиаемых квантовых газов, во-первых, не позволяет получить из выражения (2.25) для энтропии S_{II} после смешения разных газов величину (2.27) энтропии S^0_{II} в предельном случае тождественных газов и, во-вторых, скачок энтропии ΔS_d — это не тот скачок, который выражает парадокс Гиббса. В самом деле, определяя по формуле (2.26) энтропию смешения ΔS_d предельно близких газов ($m_1=m$, $m_2=2m$) и используя выражение (2.28) для энтропии смешения тождественных газов ΔS^0 , найдем, что скачок энтропии смешения равен:

$$\Delta S_d = 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{128} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} (1 + 2^{-3/2}) \right]. \quad (2.30)$$

Отсюда видно, что скачок энтропии смешения ΔS_d , обусловленный дискретностью различия смешиаемых газов, не совпадает со скачком энтропии смешения (2.26), возникающим при непрерывном сближении параметров различия газов и выражающим квантовый парадокс Гиббса.

Это дополнительно показывает, что парадокс Гиббса не связан с дискретностью различия смешиаемых газов.

§ 11. Парадокс Эйнштейна и его решение

Как уже упоминалось в начале главы, Эйнштейн обнаружил, что смесь вырожденных газов из N атомов с массой m_1 и N атомов с массой m_2 (как угодно мало отличающейся от m_1) при данной температуре имеет иное давление, чем простой газ из

$2N$ атомов, имеющих практически ту же массу и занимающих тот же объем. Используя известное для идеального газа соотношение

$$PV = \frac{2}{3}U \quad (2.31)$$

между давлением P газа в объеме V и его внутренней энергией U , сформулируем парадокс Эйнштейна в виде: изменение внутренней энергии ΔU при изотермическом смешении вырожденных газов хотя и зависит от природы смешиваемых газов, но при переходе от смеси сколь угодно близких газов к смеси тождественных газов ΔU испытывает скачок [28, 29]. Действительно, внутренняя энергия слабовырожденного идеального газа из N частиц в объеме V при температуре T равна [29]

$$U = \frac{3}{2} N k T \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{N h^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right]. \quad (2.32)$$

Пусть массы атомов газов A и B соответственно равны m_1 и m_2 . Тогда до их смешения внутренняя энергия системы равна

$$U_I = 3N k T \left[1 + \frac{\delta}{32} \frac{N h^3}{V (\pi k T)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right], \quad (2.33)$$

а после смешения, когда каждый газ занимает объем $2V$, внутренняя энергия смеси будет

$$U_{II} = 3N k T \left[1 + \frac{\delta}{64} \frac{N h^3}{V (\pi k T)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right]. \quad (2.34)$$

Изменение внутренней энергии системы при изотермическом смешении, следовательно, равно

$$\Delta U = U_{II} - U_I = -\frac{3\delta}{64} \frac{N^2 h^3}{V \pi^{3/2} (k T)^{1/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}). \quad (2.35)$$

Отсюда видно, что ΔU при смешении вырожденных газов зависит от их природы.

При смешении сколь угодно близких газов, когда $m_2 \approx m_1 = m$ из формулы (2.34) для внутренней энергии смеси находим

$$U'_{II} = 3NkT \left[1 + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right], \quad (2.36)$$

и по формуле (2.35) изменение внутренней энергии при смешении этих газов будет

$$\Delta U' = U'_{II} - U'_I = -\frac{3\delta}{32} \frac{N^2 h^3}{V(\pi m)^{3/2} (kT)^{1/2}}. \quad (2.37)$$

Получить по формуле (2.34) выражение для внутренней энергии в предельном случае смешения тождественных газов ($m_1 = m_2 = m$) нельзя, так как она не учитывает происходящего при этом смешении скачка плотности квантовых газов. Для того чтобы с помощью формулы (2.34) найти внутреннюю энергию системы U^0_{II} в предельном случае смешения тождественных газов, надо в этой формуле заменить плотность N/V на величину $2N/V$, и мы получим

$$U^0_{II} = 3NkT \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right]. \quad (2.38)$$

Поэтому изменение внутренней энергии при изотермическом смешении тождественных газов равно нулю:

$$\Delta U^0 = U^0_{II} - U^0_I = 0, \quad (2.39)$$

и при переходе от смеси сколь угодно близких газов к смеси тождественных газов изменение внутренней энергии вырожденных идеальных газов испытывает скачок

$$\Delta U = \Delta U' - \Delta U^0 = -\frac{3\delta}{32} \frac{N^2 h^3}{V(\pi m)^{3/2} (kT)^{1/2}}, \quad (2.40)$$

что и составляет парадокс Эйнштейна. Для Бозегаза этот скачок ΔU равен

$$\Delta U = \frac{3}{32} \frac{N^2 h^3}{V(\pi m)^{3/2} (kT)^{1/2}}, \quad (2.41)$$

а скачок давления соответственно будет

$$\Delta P = \frac{3}{2} \frac{\Delta U}{V} = \frac{9}{64} \frac{N^2 h^3}{V^2 (\pi m)^{3/2} (kT)^{1/2}}. \quad (2.42)$$

Из изложенного видно, что, как и в случае парадокса Гиббса, источником парадокса Эйнштейна является скачок изменения плотности газа при переходе от его смешения со сколь угодно близким газом к смешению с тождественным газом и учет этого скачка автоматически разъясняет (делает понятным и естественным) парадоксы Гиббса и Эйнштейна.

В классическом пределе ($h \rightarrow 0$) скачок ΔU равен нулю, т. е. парадокс Эйнштейна не имеет классического аналога. Это обусловлено тем, что внутренняя энергия классического идеального газа из N частиц не зависит от его плотности.

§ 12. Новый парадокс смешения квантовых идеальных газов

Парадокс Эйнштейна имеет место при изотермическом смешении квантовых идеальных газов. При адиабатическом смешении таких газов он отсутствует. Однако в этом случае обнаруживается новый парадокс — скачок изменения температуры при переходе от адиабатического смешения сколь угодно близких квантовых идеальных газов к смешению тождественных газов *).

В самом деле, рассмотрим адиабатическое смешение слабо вырожденных газов A и B по N частиц с массами соответственно m_1 и m_2 в одинаковых объемах V , разделенных теплопроницаемой

*). В статье [22] утверждается, что за счет обменного взаимодействия между атомами реального газа при адиабатическом смешении сколь угодно близких газов имеет место скачок температуры, отсутствующий при смешении идентичных газов. Поскольку в идеальном квантовом газе нет обменного взаимодействия, то согласно [22] не должно быть и скачка температуры при переходе от адиабатического смешения сколь угодно близких квантовых идеальных газов к смешению тождественных газов. Однако это неверно.

перегородкой и имеющих температуру T_0 . До смешения внутренняя энергия газов согласно (2.33) равна

$$U_I = 3NkT_0 \left[1 + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi kT_0)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right].$$

После удаления перегородки и адиабатического смешения газов, когда каждый газ занимает объем $2V$ при неизменной внутренней энергии системы, температура газов будет другой — T и выражение для внутренней энергии смеси согласно (2.34) будет

$$U_{II} = 3NkT \left[1 + \frac{\delta}{64} \frac{Nh^3}{V(\pi kT)^{3/2}} (m_1^{-3/2} + m_2^{-3/2}) \right].$$

При адиабатическом смешении сколь угодно близких газов ($m_2 \approx m_1 = m$) имеем:

$$U'_I = 3NkT_0 \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT_0)^{3/2}} \right],$$

$$U'_{II} = 2NkT \left[1 + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right]$$

и происходящее при этом изменение температуры $T - T_0$ найдем из условия $U'_I = U'_{II}$, т. е. из уравнения

$$T - T_0 = \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V(\pi mk)^{3/2}} \left(\frac{2}{V T_0} - \frac{1}{V T} \right). \quad (2.43)$$

В предельном случае адиабатического смешения двух порций тождественного газа ($m_2 = m_1 = m$) выражение для внутренней энергии системы найдем из (2.34) при учете происходящего при этом скачка плотности:

$$U'_{II} = 3NkT \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{Nh^3}{V(\pi mkT)^{3/2}} \right] = U'_I,$$

откуда $T - T_0 = 0$.

Таким образом, при переходе от адиабатического смешения сколь угодно близких квантовых идеальных газов к смешению тождественных газов изменение температуры смешения испытывает скачок, определяемый уравнением (2.43). Это новый парадокс для температуры при адиабатическом смеше-

ния квантовых идеальных газов, обусловленный скачком плотности газа при переходе от смешения сколь угодно близких газов к смешению тождественных газов.

§ 13. Второй вид смешения квантовых газов

Подобно смешению классических идеальных газов в квантовом случае также возможны два вида смешения.

При первом виде изотермического смешения различных газов получающуюся смесь (в отличие от смеси идентичных газов) можно разделить на первоначальные порции и, как показано в § 10, при переходе от смешения различных газов к смешению идентичных газов энтропия смешения испытывает скачок, определяемый формулой (2.29) при непрерывном изменении различия между газами (квантовый парадокс Гиббса) и формулой (2.30) при учете дискретности параметра различия газов.

При втором виде изотермического смешения различных газов получающуюся смесь (как и смесь идентичных газов) принципиально невозможно разделить на смениваемые порции, так что смешение идентичных газов физически не выделено по сравнению со смешением различных газов и поэтому при переходе от смешения различных квантовых газов к смешению идентичных газов изменение энтропии ΔS и изменение внутренней энергии ΔU изменяются непрерывно (эффект Гей-Люссака).

Найдем изменение этих величин при изотермическом смешении второго вида слабо вырожденных газов *A* и *B*. Энтропия и внутренняя энергия слабо вырожденного газа из *N* частиц в объеме *V* при температуре *T* определяются соответственно формулами (2.23) и (2.32). В простейшем случае смешения второго вида газы *A* и *B* термодинамически отличаются друг от друга плотностью. Пусть плотность газа *A* равна N_1/V , плотность газа *B* — N_2/V , общее число атомов $N_1+N_2=2N$ и параметр различия (близости) газов

$$\eta = \frac{|N_1 - N_2|}{N_1 + N_2}.$$

До смешения энтропия и внутренняя энергия этих газов соответственно равны

$$S_I = k \sum_{i=1}^2 N_i \left[\ln \frac{V}{N_i} + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right],$$

$$U_I = \frac{3}{2} k T \sum_{i=1}^2 N_i \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right].$$

После смешения, когда газ из $2N$ атомов занимает объем $2V$, энтропия и внутренняя энергия системы будут

$$S_{II} = 2kN \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right],$$

$$U_{II} = 3NkT \left[1 + \frac{\delta}{16} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right].$$

Изменения энтропии и внутренней энергии системы при смешении равны

$$\Delta S = S_{II} - S_I = 2kN \left[\ln(1 + \eta) - \frac{1 - \eta}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} - \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \eta^2 \right], \quad (2.44)$$

$$\Delta U = U_{II} - U_I = -\frac{3\delta}{16} \frac{N^2 h^3}{V (\pi m)^{3/2} (k T)^{1/2}} \eta^2. \quad (2.45)$$

Непрерывное изменение в рассматриваемом смешении плотностей газов A и B , т. е. параметра их близости η , приводит к непрерывному изменению величин ΔS и ΔU квантовых газов в интервалах

$$0 \leq \Delta S \leq 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{32} \frac{Nh^3}{V (\pi m k T)^{3/2}} \right],$$

$$0 \leq \Delta U \leq -\frac{3\delta}{16} \frac{N^2 h^3}{V (\pi m)^{3/2} (k T)^{1/2}}. \quad (2.46)$$

Отсюда видно, что изменения ΔS и ΔU в предельном случае ($\eta=1$) смешения второго вида не сов-

подают с изменениями этих величин в предельном случае ($m_2 \gg m_1 = m$) смешения первого вида (см. формулы (2.26) и (2.35)):

$$\Delta S = 2kN \left[\ln 2 - \frac{\delta}{128} \frac{Nh^3}{V (\pi m k \tau)^{3/2}} \right], \quad (2.47)$$

$$\Delta U = - \frac{3\delta}{64} \frac{N^2 h^3}{V (\pi m)^{3/2} (kT)^{1/2}}. \quad (2.48)$$

Таким образом, нельзя утверждать, что смешение первого вида является предельным частным случаем второго вида. Это дополнительно подтверждает вывод, что анализ примеров смешения второго вида не представляет какой-то новый подход к парадоксу Гиббса: все эти примеры принадлежат к множеству смесей физически совершенно другого вида и к парадоксу Гиббса не имеют отношения.

Глава III

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

Термодинамические величины и уравнения классической термодинамики установлены для тел в собственной системе отсчета, в которой тела покоятся. Найдем релятивистские преобразования этих величин при переходе к движущейся системе отсчета и получим уравнения релятивистской термодинамики.

§ 14. Релятивистская температура

Впервые релятивистское обобщение термодинамики было проведено в 1907 г. Планком [40]. Он исходил из допущения, что уравнения первого и второго начал сохраняют свой вид во всех инерциальных системах отсчета и, установив инвариантность энтропии, нашел один и тот же релятивистский закон преобразования температуры T и количества теплоты Q при движении тела со скоростью v (см. § 18):

$$T = T^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad Q = Q^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (3.1)$$

где $T^{(0)}$ — собственная температура, т. е. температура в системе $K^{(0)}$, в которой тело покоится; $\beta = v/c$, c — скорость света. Таким образом, по Планку, тело будет *холоднее* в движущейся системе отсчета K и количество теплоты Q будет соответственно *меньше* количества теплоты $Q^{(0)}$ в собственной системе $K^{(0)}$.

В том же году Эйнштейн [41] в обзорной статье воспроизвел результаты Планка.

Более полувека эти преобразования не вызывали возражений ни у кого из физиков и повторялись во всех монографиях и учебниках. И лишь 60 лет спустя развернулась оживленная дискуссия вокруг вывода Планка. Начало дискуссии положила опубликованная в 1963 г. статья Отта [42]. В ней Отт исходя, как и Планк, из инвариантности уравнений первого и второго начал термодинамики получил преобразования для T и Q , обратные тем, которые нашел Планк. Согласно Отту, в движущейся системе отсчета тело *горячее*, а количество теплоты *больше* (см. § 18):

$$T = \frac{T^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad Q = \frac{Q^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.2)$$

Отличие преобразований Отта (3.2) от преобразований Планка (3.1) обусловлено тем, что в движущейся системе отсчета разделение переданной энергии телу на работу и теплоту оказывается неоднозначным. Отт принял в своей статье другое выражение для работы, чем Планк.

Благодаря массе, связанной с передачей тепла, у тела в движущейся системе изменяется импульс. Определяя силу как производную по времени от импульса, получим, что в движущейся системе над телом совершается работа, которую и принял во внимание Планк. Отт же рассматривает эту работу просто как часть переданного тепла.

Поскольку и в том и в другом случаях планковская работа так или иначе учитывается, то никакого физического различия между обоими формализмами в применении к происходящим процессам нет и поэтому не существует эксперимента, который мог бы указать, какая из термодинамик — Планка или Отта — является «правильной».

Однако после статьи Отта появилось множество работ, в которых обосновывались или преобразования Планка (3.1) или, наоборот, преобразования Отта (3.2) и утверждалась ошибочность результатов Планка [43]. Так что в настоящее время нет

общепринятого построения релятивистской термодинамики.

Одной из причин этого является то, что теория относительности сама по себе не приводит к однозначному понятию температуры, отнесенной к движущейся системе отсчета. Сейчас это представляется очевидным. В самом деле, температура, как известно, определяется по значению какого-либо экстенсивного параметра того или иного термометрического вещества (по длине столбика жидкости в термометре, по величине намагничивания магнетика и т. д.). В теории относительности длина преобразуется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой по закону:

$$l = l^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2} \text{ при } l \parallel v$$

и

$$l = l^{(0)} \text{ при } l \perp v.$$

Поэтому если определять температуру T движущегося тела по находящемуся в тепловом контакте с ним, например, ртутному термометру $T^{(0)}$, то при расположении такого термометра в направлении движения ($l \parallel v$) температура тела относительно системы K будет равна

$$T = T^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (3.3)$$

а при расположении термометра перпендикулярно движению ($l \perp v$):

$$T = T^{(0)}. \quad (3.4)$$

Если же определять температуру тела по значению магнитного момента термометрического вещества M , который релятивистски преобразуется по закону:

$$M = M^{(0)} \quad \text{при} \quad M \parallel v$$

и $M = \frac{M^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ при $M \perp v$,

то или $T = T^{(0)}$, (3.5)

или $T = \frac{T^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. (3.6)

Отсюда видно, что понятие релятивистской температуры нуждается в дополнительном определении [44]. Естественно, что такое дополнительное определение должно быть в соответствии с методологическим принципом простоты наиболее общим, простым и практически удобным.

Как видно из выражений (3.3) — (3.6), величина релятивистской температуры, вообще говоря, зависит от выбора экстенсивного параметра термометрического вещества *), но существуют преобразования (3.4) и (3.5), которые дают одно и то же значение температуры движущегося тела. Примем это одинаковое при всех экстенсивных параметрах определение релятивистской температуры:

$$T = T^{(0)}. \quad (3.7)$$

Иначе говоря, определим релятивистскую температуру, как лоренцев инвариант [45]. Такое определение не связано с предположением инвариантности уравнений первого и второго начал термодинамики. Оно привлекательно еще тем, что температуры фазовых переходов остаются внутренними свойствами веществ, как в обычной термодинамике. Поэтому температурная шкала может быть определена через зависимость, например, температуры кипения бинарных систем (при заданном давлении) от концентрации. Поскольку давление и концентрация лоренц-инвариантны, это соглашение определяет лоренц-инвариантную температуру.

Будем называть такое построение термодинамики для движущихся систем *релятивистской термодинамикой с инвариантной температурой*.

Термодинамика релятивистского газа развита в работах Н. А. Черникова [56—59] на основе кинетического уравнения Больцмана — Черникова.

*) Подобно зависимости эмпирической температуры от выбора термометрического вещества в классической термодинамике [14].

§ 15. Инвариантная энталпия

Определение релятивистской температуры является первым шагом на пути релятивистского обобщения термодинамики. Второй более важный шаг такого обобщения состоит в выборе наиболее естественного термодинамического потенциала для релятивистской системы.

Как известно из классической термодинамики, знание какого-либо одного термодинамического потенциала системы позволяет получить все ее термодинамические свойства [14]. Если в качестве независимых переменных выбрать только экстенсивные параметры (энтропия, объем и так далее), то соответствующим потенциалом будет внутренняя энергия

$$U^{(0)} = U^{(0)}(S^{(0)}, V^{(0)}, N),$$

где буквой N обозначается число частиц и другие экстенсивные параметры.

Если вместо объема $V^{(0)}$ независимой переменной является сопряженная ему интенсивная величина — давление P , то термодинамическим потенциалом будет энталпия $H^{(0)} = U^{(0)} + P^{(0)}V^{(0)}$:

$$H^{(0)} = H^{(0)}(S^{(0)}, P^{(0)}, N). \quad (3.8)$$

Аналогично этому $S^{(0)}$ можно заменить на $T^{(0)}$ и соответствующим термодинамическим потенциалом будет свободная энергия $F^{(0)} = U^{(0)} - T^{(0)}S^{(0)}$:

$$F^{(0)} = F^{(0)}(T^{(0)}, V^{(0)}, N).$$

При релятивистском обобщении термодинамики, как показали Каллен и Горвиц [46], естественнее исходить из выражения для энталпии. Действительно, в этом случае, как следует из теории относительности, все входящие в выражение (3.8) независимые переменные являются лоренцевыми инвариантами, тогда как независимые переменные других термодинамических потенциалов имеют либо разные, либо неизвестные законы преобразования. Кроме того, давление в качестве независимой переменной более подходящая величина, чем объем. В классической термодинамике систему можно бы-

ло заключить в жесткие стенки, но само представление о твердом теле или абсолютно жестких стенках неприемлемо в рамках теории относительности — абсолютно твердое тело будет передавать сигналы с бесконечной скоростью, так как движение, сообщенное одной точке тела, немедленно вызовет движение всех остальных точек тела.

В отличие от классической термодинамики в релятивистской термодинамике, как мы увидим, стени влияют на систему. Таким образом, выбор давления в качестве предпочтительного независимого переменного и соответственно энталпии в качестве естественного термодинамического потенциала связан физически с природой теории относительности.

Обобщим выражение (3.8) для движущихся систем. Согласно теории относительности при действительных координатах $x_0=ct$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ преобразования компонент 4-вектора \mathbf{A} (A_0, A_1, A_2, A_3) имеют вид:

$$A_0 = \frac{A_0^{(0)} + \beta A_1^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_1 = \frac{A_1^{(0)} + \beta A_0^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_2 = A_2^{(0)}, \\ A_3 = A_3^{(0)}, \quad (3.9)$$

а объем V , давление P , импульс p и внутренняя энергия U ограниченной в некотором сосуде системы преобразуются по формулам [47]:

$$V = V^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad P = P^{(0)}, \\ p = \frac{v}{c^2} \frac{U^{(0)} + P^{(0)}V^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ U = \frac{U^{(0)} + \beta^2 P^{(0)}V^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.10)$$

Переход тела из системы $K^{(0)}$ в систему K можно осуществить без сообщения теплоты (адиабатически) и, следовательно, без изменения энтропии. Таким образом, энтропия является инвариантом преобразований Лоренца:

$$S = S^{(0)}. \quad (3.11)$$

Этот результат непосредственно следует также из статистического выражения для энтропии

$$S = k \ln W,$$

согласно которому энтропия макросостояния системы определяется числом реализующих его микросостояний, а число состояний, как и число частиц N , не зависит от скорости тела и, следовательно, не меняется при преобразованиях Лоренца.

Если лоренц-инвариантные величины S , P и N взяты в качестве независимых переменных, то и термодинамический потенциал при этих независимых переменных — энталпия (3.8) также лоренц-инвариантна.

В собственной системе отсчета энталпия равна $H^{(0)} = U^{(0)} + P^{(0)}V^{(0)}$. Чтобы обобщить это выражение для движущегося тела, воспользуемся следующим. Из теории относительности известно, что энергия и импульс изолированной системы образуют 4-вектор $(U/c, p_x, p_y, p_z)$. Энергия же и импульс системы в сосуде, как видно из формул (3.10), не образуют 4-вектора. Это связано с тем, что система в сосуде сама по себе не является изолированной, поскольку на нее действуют силы давления со стороны стенок сосуда. Согласно формулам (3.10) для такой системы 4-вектор образуют энталпия и импульс

$$\mathcal{H} = \left\{ \frac{U + PV}{c}, p_x, p_y, p_z \right\}. \quad (3.12)$$

В собственной системе энталпия представляет собой (умноженную на c) нулевую компоненту 4-вектора энталпии-импульса

$$\mathcal{H}^{(0)} = \left\{ \frac{U^{(0)} + P^{(0)}V^{(0)}}{c}, 0, 0, 0 \right\}.$$

Поэтому энталпию H движущегося тела можно отождествить с инвариантной функцией 4-вектора \mathcal{H} :

$$H = c |\mathcal{H}| = \sqrt{(U + PV)^2 - c^2 p^2}. \quad (3.13)$$

Это выражение для энталпии в соответствии с (3.8) будет иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета.

Поскольку знание термодинамического потенциала системы позволяет определить все ее термодинамические свойства, то нахождением выражения для инвариантной энталпии (3.13) в принципе завершается построение релятивистской термодинамики. Теперь остается получить основное уравнение релятивистской термодинамики и определить все термодинамические следствия соотношений (3.8) и (3.13).

§ 16. Основное уравнение релятивистской термодинамики

Интенсивные параметры T , P и другие, будучи лоренц-инвариантами, определяются точно такими же соотношениями, как и в нерелятивистской термодинамике:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P, N}, \quad (3.14)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S, P}, \quad (3.15)$$

так как

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P, N} = \left(\frac{\partial H^{(0)}}{\partial S^{(0)}} \right)_{P^{(0)}, N} = T^{(0)} = T$$

и

$$\left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S, P} = \left(\frac{\partial H^{(0)}}{\partial N^{(0)}} \right)_{P^{(0)}, S^{(0)}} = \mu^{(0)} = \mu.$$

В противоположность этому экстенсивные параметры в релятивистской термодинамике нельзя определять такими же соотношениями, как в классической термодинамике. Действительно, поскольку

$$V^{(0)} = \frac{V}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ то}$$

$$V^{(0)} = \left(\frac{\partial H^{(0)}}{\partial P^{(0)}} \right)_{S^{(0)}, N} = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S, N} = \frac{V}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, дифференциал энталпии движущегося тела имеет вид

$$dH = TdS + \frac{V}{V_1 - \beta^2} dP + \mu dN. \quad (3.17)$$

Это дифференциальное уравнение для инвариантной энталпии является основным уравнением релятивистской термодинамики.

С помощью преобразования Лежандра уравнение (3.17) можно привести к другим независимым переменным. Если независимыми переменными являются S, V, N , то, вычитая из обеих частей уравнения (3.17) дифференциал $d\left(\frac{PV}{V_1 - \beta^2}\right)$, получим

$$d\left(H - \frac{PV}{V_1 - \beta^2}\right) = TdS - Pd\left(\frac{V}{V_1 - \beta^2}\right) + \mu dN. \quad (3.18)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой дифференциал лоренцева инварианта, который в собственной системе отсчета равен внутренней энергии $U^{(0)}$:

$$H - \frac{PV}{V_1 - \beta^2} = H^{(0)} - P^{(0)}V^{(0)} = U^{(0)}.$$

Таким образом, при независимых переменных S, V, N основное уравнение релятивистской термодинамики определяет не $U(S, V, N)$, а $U^{(0)}$. Аналогично при независимых переменных T, V, N основное уравнение определяет не $F(S, V, N)$, а $F^{(0)}$. Это указывает на то, что для релятивистской системы энталпия, а не внутренняя энергия является естественным термодинамическим потенциалом.

Пользуясь основным уравнением релятивистской термодинамики (3.17), можно решить любой вопрос термодинамики движущихся систем.

§ 17. Релятивистские выражения для работы и количества теплоты

В собственной системе отсчета элементарная работа равна $P^{(0)}dV^{(0)}$. Чтобы подсчитать работу в движущейся системе, исходим из формулы (3.10) для внутренней энергии в движущейся системе

$$U = \frac{U^{(0)} + \beta^2 P^{(0)} V^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

предполагая, что система совершаает только работу, так что $\delta W = -dU$ и $dU^{(0)} = -P^{(0)} dV^{(0)}$. Тогда

$$\begin{aligned}\delta W &= -dU = -\frac{dU^{(0)} + d(\beta^2 P^{(0)} V^{(0)})}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{P^{(0)} dV^{(0)} - d(\beta^2 P^{(0)} V^{(0)})}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

и работа в движущейся системе равна

$$\delta W = P dV - \frac{\beta^2 V dP}{1 - \beta^2}. \quad (3.19)$$

Если энергия системы меняется не только при совершении работы, но и за счет сообщения теплоты, то $dU = \delta Q - \delta W$, $dU^{(0)} = \delta Q^{(0)} - P^{(0)} dV^{(0)}$ и с помощью (3.10) и (3.19) находим

$$\begin{aligned}\delta Q &= dU + \delta W = \frac{dU^{(0)} + d(\beta^2 P^{(0)} V^{(0)})}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \delta W = \\ &= \frac{\delta Q^{(0)} - P^{(0)} dV^{(0)} + d(\beta^2 P^{(0)} V^{(0)})}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \delta W = \frac{\delta Q^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.\end{aligned}$$

Таким образом, для количества теплоты получаем релятивистское выражение

$$\delta Q = \frac{\delta Q^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.20)$$

совпадающее с результатом Отта (3.2).

Из формулы (3.19) видно, что выражение для работы в движущейся системе содержит не только привычный член PdV , но и член с dP . Такой дополнительный вклад в релятивистскую работу обусловлен относительностью одновременности. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим систему в закрытом цилиндре (длиною l и сечением s), коаксиальном с направлением движения. Пусть в системе происходит процесс, при котором давление возрастает от P_0 до P_1 . В собственной системе отсчета этот процесс описывается графиком, приведенным на

Рис. 2. В движущейся системе давление на передней и задней стенках начинает возрастать не одновременно и конечное давление также достигается в различные моменты времени (см. рис. 3). Отсюда следует, что работа, совершаемая над системой на задней стенке, не равна работе, совершаемой

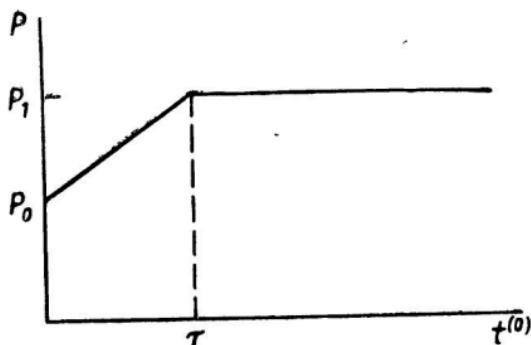


Рис. 2. Давление на задней и передней стенах цилиндра в зависимости от времени в собственной системе отсчета

системой на передней стенке. Обусловленная относительностью одновременности передача энергии системе равна заштрихованной площади на рис. 3, умноженной на sv . Легко видеть, что эта дополнительная

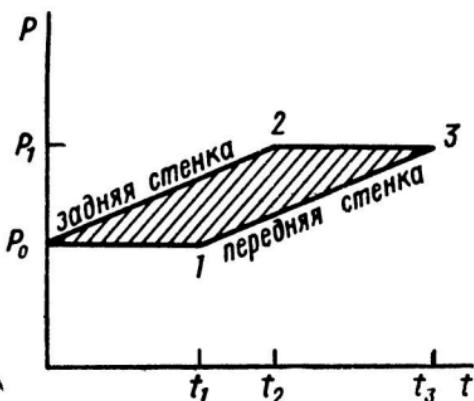


Рис. 3. Давление на стенах цилиндра в зависимости от времени в движущейся системе отсчета;

$$t_1 = \frac{vl(0)}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \tau + \frac{v}{l^2} l(0)$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_3 = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

тальная работа приводит к увеличению внутренней энергии системы, в частности равном второму члену в выражении (3.19):

$$(P_1 - P_0) \cdot sv \frac{vl(0)}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta^2 V(0) dP}{V \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta^2 v dP}{1 - \beta^2} \quad (3.21)$$

$(P_1 s = F_1$ — сила давления; $P_1 sv \frac{vl(0)}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$ — работа

этой силы при перемещении $v \cdot \frac{v l^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$ тела за время $\frac{v l^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$ релятивистского запаздывания изменения давления на передней стенке по сравнению с ее изменением на задней стенке).

Заметим, что вследствие относительности одновременности ограничивающие систему стенки оказывают на нее нетривиальное влияние. Действительно, при движении системы в цилиндре задняя его стенка совершает в единицу времени работу над системой Psv , такую же работу совершает система на передней стенке. Таким образом через систему вперед протекает энергия, которая возвращается обратно через боковые стенки. В результате импульс системы увеличивается, а импульс стенок уменьшается. Величину импульса, переносимого этим потоком энергии, нетрудно вычислить (см. Приложение I). Она равна

$$\Delta p = \frac{PV^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.22)$$

Поэтому для движущегося наблюдателя импульс системы равен

$$p = mv + \Delta p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \Delta p = \\ = \frac{U^{(0)} v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{PV^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v (U^{(0)} + PV^{(0)})}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.23)$$

Нетрудно видеть, что он в точности совпадает с импульсом (3.10), который следует из преобразования 4-вектора энталпии-импульса (3.12). Поэтому приведенное рассмотрение обосновывает введение 4-вектора (3.12). Из этого рассмотрения также видно, что появление в (3.12) члена $PV^{(0)}$ обусловлено потоком энергии, возникающим в результате действия стенок, и связано с относительностью одновременности. Особенно наглядно в этом можно убедиться на примере фотонного газа (см. Приложение II).

§ 18. Релятивистские преобразования температуры и количества теплоты по Планку и по Отту и их обсуждение

Получим релятивистские преобразования Планка и Отта для температуры и количества теплоты и обсудим природу их различия.

Прежде всего заметим, что из принимаемой Планком и Оттом неизменности вида уравнения второго начала во всех инерциальных системах отсчета ($\delta Q^{(0)}=T^{(0)}dS^{(0)}$, $\delta Q=TdS$) и инвариантности энтропии

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q^{(0)}}{T^{(0)}}$$

следует, что δQ и T должны изменяться по одному и тому же закону.

Рассмотрим расширение газа (жидкости) в сосуде, покоящемся в системе $K^{(0)}$. Уравнение первого начала для этого процесса в системе K будет

$$\delta Q=dU+\delta W,$$

причем

$$\delta W=PdV-(v, dp), \quad (3.24)$$

где первый член соответствует работе расширения газа при изменении его объема, а второй член — механической работе внешних сил над системой в термодинамическом процессе. Действительно, исходя из уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}_d, \quad (3.25)$$

где \mathbf{F}_d — суммарная сила, действующая на газ; для элементарной механической работы этой силы над термодинамической системой находим

$$(\mathbf{F}_d, vdt)=(v, dp).$$

Таким образом,

$$\delta Q=dU+PdV-(v, dp).$$

Подставляя в правую часть этого уравнения значения U , P , v из уравнений (3.10), получаем

$$\delta Q=\frac{dU^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{v^2}{c^2}\frac{d(PV^{(0)})}{\sqrt{1-\beta^2}}+PdV^{(0)}\sqrt{1-\beta^2}-$$

$$-\frac{v^2}{c^2} \frac{dU^{(0)} + d(FV^{(0)})}{\sqrt{1-\beta^2}} = [dU^{(0)} + PdV^{(0)}] \sqrt{1-\beta^2} = \\ = \delta Q^{(0)} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Следовательно, по Планку,

$$Q = Q^{(0)} \sqrt{1-\beta^2}, \quad T = T^{(0)} \sqrt{1-\beta^2}. \quad (3.26)$$

В отличие от Планка Отт исходил из уравнения движения

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}, \quad (3.27)$$

называя (в соответствии с физикой Галилея) силой то, что вызывает ускорение, и принимая (в противоположность взглядам Аристотеля), что для поддержания постоянной скорости движения никакой силы не требуется.

Поэтому, по Отту, механическая работа в термодинамическом процессе равна работе движущей силы (3.27) и, следовательно, должна определяться изменением не полного импульса \mathbf{p} , а только его части $\mathbf{p} - Q/c^2\mathbf{v}$, не содержащей импульса $Q/c^2\mathbf{v}$ массы Q/c^2 , переданного телу при теплообмене.

Действительно, уравнение движения (3.25) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \\ + \frac{\dot{m}_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}_d + \Pi, \quad (3.28)$$

где Π — немеханическая потеря импульса в единицу времени, обусловленная потерей массы покоя с определенной скоростью (как у ракеты или при сообщении телу теплоты, или при излучении). Если в единицу времени телу сообщается количество теплоты Q , то оно получает при этом массу Q/c^2 и импульс $Q/c^2\mathbf{v}$, поэтому

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c^2} \mathbf{v} \right),$$

и элементарная механическая работа равна

$$(\mathbf{F}, \mathbf{v} dt) = \left(\mathbf{v}, d\mathbf{p} - \frac{\delta Q}{c^2} \mathbf{v} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta W &= PdV - \left(\mathbf{v}, d\mathbf{p} - \frac{\delta Q}{c^2} \mathbf{v} \right) = \\ &= PdV - (\mathbf{v}, d\mathbf{p}) + \frac{v^2}{c^2} \delta Q \end{aligned} \quad (3.29)$$

и уравнение первого начала в системе K имеет вид

$$\delta Q = dU + PdV - (\mathbf{v}, d\mathbf{p}) + \beta^2 \delta Q,$$

откуда с помощью уравнений (3.9) получаем преобразования Отта:

$$Q = \frac{Q^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T = \frac{T^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.30)$$

Как видно из уравнения (3.28), сила \mathbf{F}_d , определяемая как временная производная импульса, равна сумме истинной механической силы \mathbf{F} , определяемой по величине ускорения, и импульса Π , немеханически теряемого телом в единицу времени. Отсюда следует, что механическую работу в термодинамическом процессе определяет сила \mathbf{F} , а не \mathbf{F}_d , т. е. в уравнении первого начала надо учитывать работу только силы \mathbf{F} . Это подтверждается также тем, что работа (3.29) именно этой силы совпадает с работой (3.19), полученной в релятивистской термодинамике с инвариантной температурой.

Действительно, с помощью (3.10) и (3.30) выражение (3.29) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta W &= PdV - \frac{v^2}{c^2} \frac{dU^{(0)} + d(PV^{(0)})}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\delta Q^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\ &= PdV - \beta^2 \frac{\delta Q^{(0)} + V^{(0)}dP}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta^2 \frac{\delta Q^{(0)}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\ &= PdV - \frac{\beta^2 V dP}{1-\beta^2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

что в точности совпадает с (3.19).

Из (3.31) замечаем, что механическая работа давления в термодинамическом процессе (F , vdt) равна $-\frac{\beta^2 V dP}{1 - \beta^2}$ и, следовательно, обусловлена относительностью одновременности (см. § 17).

Таким образом, с точки зрения релятивистской термодинамики с инвариантной температурой только релятивистские выражения Отта для работы (3.29) и (3.30) являются правильными.

Тем не менее, как уже отмечалось в § 14, никакого физического различия между формализмами Планка и Отта в применении к различным процессам нет. Однако все же наиболее естественным релятивистским обобщением термодинамики является, как мы видели, релятивистская термодинамика с инвариантной температурой и инвариантной энталпией.

§ 19. Идеальный газ. Равновесное излучение

В качестве примера применения релятивистской термодинамики рассмотрим одноатомный идеальный газ и равновесное излучение.

В собственной системе отсчета термическое и калорическое уравнения состояния, выражения для энтропии и термодинамических потенциалов моля идеального газа имеют вид*) [14]

$$PV^{(0)} = RT, \quad U^{(0)} = \frac{3}{2}RT,$$

$$S = R \ln(T^{3/2}V^{(0)}) + C = R \ln \frac{T^{5/2}}{P} + C_1,$$

$$U^{(0)}(S, V^{(0)}) = \frac{3R}{2(V^{(0)})^{2/3}} e^{\frac{2(S-C)}{3R}},$$

*) Для получения соответствующих выражений для v молей идеального газа надо в формулах для моля газа заменить R на vR .

$$F^{(0)}(T, V^{(0)}) = U^{(0)} - TS = \frac{3}{2} RT \ln(1 - \ln T) - RT \ln V^{(0)} - TC,$$

$$Z^{(0)}(T, P) = \frac{5}{2} RT(1 - \ln T) + RT \ln P - TC,$$

$$H^{(0)}(S, P) = \frac{5}{2} RP^{2/5} e^{\frac{2(S-C)}{5R}}.$$

В движущейся системе отсчета соответственно получаем

$$PV = RT \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$U = \frac{U^{(0)} + \beta^2 PV^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{3}{2} RT + \beta^2 RT}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{3 + 2\beta^2}{3\sqrt{1 - \beta^2}} U^{(0)},$$

$$S = R \ln \frac{T^{3/2} V}{\sqrt{1 - \beta^2}} + C = R \ln \frac{T^{5/2}}{P} + C_1,$$

$$U(S, V) = \frac{3 + 2\beta^2}{2(1 - \beta^2)^{1/6}} \frac{R}{V^{2/3}} e^{\frac{2(S-C)}{3R}},$$

$$F(T, V) = U - TS = \frac{3 + 2\beta^2}{2\sqrt{1 - \beta^2}} RT - RT \ln \times$$

$$\times \left(\frac{T^{3/2} V}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) - TC,$$

$$Z(T, P) = Z^{(0)}(T, P), \quad H(S, P) = H^{(0)}(S, P).$$

Для равновесного излучения в собственной системе отсчета имеем [12]

$$P = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad U^{(0)} = \sigma T^4 V^{(0)},$$

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V^{(0)}, \quad U^{(0)}(S, V^{(0)}) = \sigma V^{(0)} \left(\frac{3S}{4\sigma V^{(0)}} \right)^{4/3},$$

$$F^{(0)}(T, V^{(0)}) = -\frac{1}{3} T^4 V^{(0)},$$

$$Z^{(0)}(T, P) = 0, \quad H^{(0)}(P, S) = S \left(\frac{3P}{\sigma}\right)^{1/4}.$$

В движущейся системе соответствующие выражения имеют вид

$$P = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad U = \frac{3 + \beta^2}{3} \sigma T^4 V,$$

$$S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3 V}{V \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad U(S, V) =$$

$$= \frac{3 + \beta^2}{3} \sigma V \left(\frac{3S \sqrt{1 - \beta^2}}{4\sigma V} \right)^{4/3},$$

$$F(T, V) = U - TS = \frac{(3 + \beta^2) \sqrt{1 - \beta^2} - 4}{3 \sqrt{1 - \beta^2}} \sigma T^4 V,$$

$$Z(T, P) = 0, \quad H(S, P) = S \left(\frac{3P}{\sigma}\right)^{1/4}.$$

§ 20. Общерелятивистская термодинамика

До сих пор термодинамические свойства тел рассматривались на основе теории относительности без учета гравитационного поля. Установим теперь релятивистские законы термодинамики при наличии гравитации (общерелятивистская термодинамика), основываясь на теории тяготения Эйнштейна, названной им общей теорией относительности *). Содержание теории тяготения Эйнштейна составляет не «общая относительность» (т. е. возможность

*). Как показал В. А. Фок, «общего принципа относительности», являющегося обобщением принципа относительности на произвольно движущиеся системы, в природе не существует, поэтому название Эйнштейном своей теории тяготения общей теорией относительности «отражает неправильное понимание им самой теории» [48, с. 17]. Несколько укоренилось представление об «общем принципе относительности», показывает опыт, проведенный акад. Б. П. Константиновым. Он задавал такой вопрос: «Известно, что вокруг вращающегося заряженного шара возникает магнитное поле; обнаружит ли это поле наблюдатель, находящийся на шаре и вращающийся вместе с ним? Почти все (96%) отвечали: «нет, не обнаружит, поскольку наблюдатель покоятся относительно шара». Ответ неправилен, так как приведенное соображение верно только в случае равномерного и прямолинейного движения шара.

выразить законы физики в общем виде, пригодном для любой системы координат, поскольку такая «относительность» существует в любой теории), а новые представления о пространстве и времени и объяснение на их основе всемирного тяготения. Обобщение принципа относительности, которое действительно сыграло большую роль при построении Эйнштейном теории тяготения, состоит в принципе эквивалентности, согласно которому влияние ускоренного движения системы на протекающие в ней явления равносильно влиянию тяготения, так что ускоренная система эквивалентна неподвижной, в которой действуют соответствующие силы тяготения. Но эта эквивалентность приближена и ограничена: она имеет место только в случае слабых и однородных полей и носит локальный характер. Как теперь известно, истинной основой теории тяготения Эйнштейна является не «общий принцип относительности» и принцип эквивалентности, а другие идеи.

Теория относительности («частная», по терминологии Эйнштейна) установила существование единой абсолютной формы бытия материи — «пространство-время», пространство же само по себе и время само по себе не имеют абсолютного характера. Принцип относительности выражает однородность пространства-времени. Теория же тяготения Эйнштейна исходит из того, что это свойство пространства-времени приближенно и имеет место только на малых участках, вообще же пространство-время неоднородно (риманово). Такая структура (метрика) пространства-времени определяется распределением и движением масс материи и, в свою очередь, определяет взаимодействие и движение самих этих масс, т. е. явление всемирного тяготения. Зависимость метрики пространства-времени от материи выражается данными Эйнштейном уравнениями. Таким образом, в основе теории тяготения Эйнштейна лежат две идеи: идея неоднородности структуры пространства-времени (риманов характер метрики) и идея зависимости метрики от расположения и движения материи, т. е. идея единства метрики и тяготения (которая формально выражает-

ся в том, что компоненты метрического тензора являются в то же время потенциалами тяготения).

При построении термодинамики достаточно больших физических систем необходимо учитывать неоднородность (кривизну) пространства-времени. Вследствие большого различия классических и релятивистских представлений о природе пространства и времени при построении релятивистской термодинамики в гравитационном поле могут возникнуть выводы качественно нового вида для достаточно протяженных систем, когда гравитационная кривизна становится важной. Поэтому отличие выводов классической термодинамики от выводов общерелятивистской термодинамики может проявиться лишь при рассмотрении больших частей Вселенной — Метагалактики («нашей Вселенной», по выражению Энгельса).

Приведем основные результаты и выводы теории тяготения Эйнштейна и построенной на ее основе общерелятивистской термодинамики.

1. Исходными при построении релятивистской теории тяготения являлись два, установленные еще Галилеем, хорошо известных факта. Первый из них состоит в том, что все тела независимо от их массы падают при отсутствии сопротивления с одинаковой скоростью. Это приводит к закону о равенстве инертной и тяжелой массы. Действительно, в уравнении движения тела в поле тяжести с гравитационным потенциалом ϕ :

$$m_i \ddot{r} = -m_r \operatorname{grad} \phi$$

слева стоит инертная масса, а справа — гравитационная (тяжелая), поэтому

$$\ddot{r} = -\frac{m_r}{m_i} \operatorname{grad} \phi,$$

и поскольку \ddot{r} одно и тоже для разных тел в данном ϕ , то $\frac{m_r}{m_i} = \text{const} = 1^*$. Этот закон приближенно выражается принципом эквивалентности.

* Этвеш в 1890 г. экспериментально установил равенство $\text{const}=1$ с точностью до 10^{-8} , а в настоящее время оно установлено до 10^{-12} .

Другой факт одинакового движения тел независимо от их массы выражается законом инерции и состоит в том, что все тела в отсутствие внешних сил движутся равномерно и по прямой линии, являющейся кратчайшей в евклидовом (плоском) пространстве или в галилеевом четырехмерном мире.

В этих двух различных явлениях природы Эйнштейн увидел выражение единого. Главная мысль,ложенная им в основу теории тяготения, заключается в том, что подобно тому как в отсутствие поля тяготения все тела движутся в плоском мире по прямой, в поле тяготения все тела движутся также по наикратчайшим или геодезическим линиям, но уже не в плоском, а в искривленном мире, и это искривление (т. е. отклонение свойств реального пространства-времени от свойств плоского многообразия) вызывается самими телами, создающими поле тяжести. В результате был обобщен закон тяготения Ньютона и построена теория, в которой тензор кривизны R_{ik} , определяющий геометрические свойства пространства-времени, связывается с тензором энергии-импульса T_{ik} вещества и электромагнитного поля системой десяти уравнений:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}, \quad (3.32)$$

где $\gamma=6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/г·с²—ニュтоновская гравитационная постоянная; R —скалярная кривизна; $g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ —фундаментальный метрический тензор: его компоненты являются гравитационными потенциалами, он определяет метрику (соотношение между единицами) пространства-времени, квадрат элементарного интервала которого равен

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (3.33)$$

(по дважды повторяющимся индексам i и k производится суммирование от 0 до 3).

В отсутствие поля тяготения в пространстве можно ввести декартову систему координат, и мы имеем галилеево (плоское) пространство с $g_{00}=-1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, а остальные компоненты метрического тензора g_{ik} равны нулю, так что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

Поскольку R_{ik} и R выражаются через g_{ik} и его производные, то (3.32) представляют собой систему дифференциальных уравнений для g_{ik} . Эйнштейн показал, что в случае слабых полей, когда g_{ik} лишь немного отличаются от галилеевых значений, уравнения (3.32) в первом приближении приводят к теории тяготения Ньютона. Во втором приближении возникают отступления от закона Ньютона, которые, например, проявляются вблизи гравитирующих масс и вызывают «аномалии» в движении ближайшей к Солнцу планеты Меркурий, отклонение световых лучей, проходящих у края Солнца, и красное смещение спектральных линий белых карликов.

В достаточно слабом гравитационном поле, когда справедлива ньютона теория тяготения, компоненты метрического тензора мало отличаются от своих галилеевых значений

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1+q, \quad g_{00}=-\left(1+p\right), \quad g_{\alpha\beta}=r_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

где $q, p, r_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей.

Из уравнений Эйнштейна (3.32) в этом случае получаем, что $p=2\varphi/c^2$ и, следовательно, временная компонента метрического тензора равна

$$g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2} \quad (3.34)$$

(см. Приложение III).

Таким образом, в слабом гравитационном поле

$$ds^2=(1+q)(dx^2+dy^2+dz^2)-(c^2+2\varphi)dt^2.$$

Если события, разделенные интервалом ds , происходят в одной точке пространства ($dx=dy=dz=0$), то

$$ds^2=-(c^2+2\varphi)dt^2.$$

С другой стороны, интервал связан с собственным временем соотношением $ds^2=-c^2d\tau^2$, поэтому

$$d\tau=dt\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}}=dt\sqrt{-g_{00}},$$

откуда видно, что время $d\tau$ в гравитационном поле течет медленнее ($\varphi < 0$), чем время dt вне поля.

Аналогично энергия U какой-либо части макроскопического тела, создающего гравитационное поле, будет тем больше, чем больше в данном месте гравитационное поле

$$UV - \overline{g_{\alpha\beta}} = U_0, \quad (3.35)$$

где U_0 — энергия части тела в отсутствие поля.

2. При получении из теории тяготения Эйнштейна ньютоновского приближения предполагается такое распределение масс, при котором полная масса во всем бесконечном объеме конечна. Это имеет место, например, при островном распределении масс, когда массы рассматриваемой системы сосредоточены внутри конечного объема, отделенного большими расстояниями от остальных масс, и поэтому ее можно рассматривать как изолированную. Мыслимы и другие распределения, например равномерное распределение масс во всем пространстве. При таком предположении, очевидно, рассматриваются расстояния, значительно превышающие расстояния между галактиками. О распределении масс в столь больших пространствах нам мало что известно, поэтому теория таких пространств менее достоверна и менее доступна опытной проверке, чем теория астрономических явлений меньшего масштаба.

Впервые такие космологические решения уравнений тяготения Эйнштейна были получены в 1922 г. советским ученым А. А. Фридманом [49]. Еще Эйнштейном было показано, что его уравнения тяготения не имеют стационарных решений. Но, исходя из представления о стационарности нашей Вселенной, он ввел в уравнения тяготения дополнительный, так называемый космологический член, и получил стационарное, решение, которое, как оказалось, неустойчиво относительно малых возмущений.

В работах Фридмана были получены нестационарные решения уравнений Эйнштейна с меняющейся со временем пространственно-временной метрикой. При этом свойства кривизны изотропного пространства определяются значением средней

плотности: при плотности ρ , меньшей некоторой критической плотности ρ_c , однородный мир бесконечен и неограниченно расширяется, имея отрицательную кривизну (открытая космологическая модель); при плотности, большей критической, мир замкнут, имеет положительную кривизну, его объем конечен и тяготение тормозит расширение столь сильно, что в конце концов расширение сменяется сжатием (закрытая модель); при плотности, равной критической, трехмерное пространство плоское, евклидово, но плотность меняется со временем (как и ρ_c) и кривизна четырехмерного пространства-времени отлична от нуля (см. Приложение IV).

Нестационарность пространственно-временной метрики Фридмановских решений приводит к изменению со временем расстояний r между телами в пространстве, и, как на растягивающейся пленке, относительная скорость dr/dt удаления двух тел тем больше, чем эти тела дальше друг от друга:

$$\frac{dr}{dt} = Hr, \quad (3.36)$$

где H — постоянная Хаббла (названная по имени астронома, открывшего в 1929 г. явление «разбегания» галактик и, таким образом, экспериментально подтвердившего нестационарность нашей Вселенной). По современным данным постоянная Хаббла равна $H=3 \cdot 10^{-18}$ 1/с. Критическое значение плотности ρ_c зависит от H и равно

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 2 \cdot 10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

По оценке Оорта фактическая средняя плотность Метагалактики $\rho \approx 5 \cdot 10^{-31}$ г/см³, что в 40 раз меньше ρ_c . Следовательно, согласно этим данным, наша Вселенная будет неограниченно расширяться.

Начало наблюдаемого в настоящее время расширения Метагалактики, как начало определенной стадии ее эволюции, принимается за «нулевой мо-

мент» в космологической шкале времени *). Поскольку в настоящее время происходит расширение, то, следовательно, раньше галактики были ближе одна к другой, плотность была больше. Экстраполируя решение уравнений тяготения Эйнштейна вплоть до «нулевого момента», приходим к бесконечной плотности в тот момент. Такой результат является следствием незаконной экстраполяции теории тяготения Эйнштейна до сколь угодно большой плотности без учета квантовых эффектов.

Если какая-то часть Метагалактики расширилась за время t от некоторого очень малого разме-ра до радиуса r , то средняя скорость ее расширения dr/dt за это время была приблизительно равна r/t :

$$\frac{dr}{dt} \approx \frac{r}{t},$$

откуда, учитывая уравнение (3.36), получаем

$$t \approx \frac{r}{\frac{dr}{dt}} = \frac{1}{H},$$

т. е. время существования Метагалактики равно обратной величине постоянной Хаббла $H^{-1} = 10^{10}$ лет.

Подчеркнем, что когда говорят о расширении Метагалактики, то имеют в виду удаление скоплений галактик друг от друга, а не расширение, подобное удалению любых точек на растягивающейся пленке. Отдельные небесные тела — звезды, планеты, а также связанные силами тяготения, системы тел (как Солнечная система или звезды в галакти-

* В противоположность приведенному пониманию «нулевого момента» многие ученые, особенно А. Эддингтон, Дж. Джинс, Э. Милн, находясь на позициях объективного идеализма, истолковывали его как начало «творения» Вселенной. На этом основании некоторые советские ученые считали неприемлемой теорию расширяющейся Вселенной для физика-материалиста. С таким мнением, однако, нельзя согласиться, поскольку диалектико-материалистическое истолкование теории расширяющейся Вселенной лишает всякого основания креационистские спекуляции вокруг современной космологии [50].

ке) — не расширяются, поскольку плотность вещества в них значительно больше средней плотности в Метагалактике.

3. Общерелятивистская термодинамика развита в основном Р. Толменом [51]. Он показал, что теория тяготения Эйнштейна приводит к изменению трех основных положений классической термодинамики:

а) при наличии гравитационного поля равновесная система не имеет во всех точках одну и ту же температуру.

Действительно, согласно выражению (3.35), энергия U какой-либо части гравитирующего макроскопического тела тем больше, чем больше в данном месте гравитационное поле

$$U\sqrt{-g_{00}}=U_0.$$

Энтропия же тела, согласно ее определению, при равновесном адиабатическом включении поля не меняется. Поэтому, дифференцируя выражение (3.35) по энтропии, получаем, что при тепловом равновесии вдоль тела сохраняется величина

$$T\sqrt{-g_{00}}=T_0. \quad (3.37)$$

Согласно формуле (3.34) в слабом (ньютоновском) гравитационном поле $g_{00}=-1-2\varphi/c^2$, и из формулы (3.37) в этом приближении находим

$$T=T_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right), \quad (3.38)$$

т. е. при равновесии температуры выше в глубине тела, где $|\varphi|$ больше ($\varphi < 0$). В предельном случае нерелятивистской (классической) термодинамики ($c \rightarrow \infty$) равенство (3.38) переходит в известное условие $T=T_0$;

б) второе отличие общерелятивистской термодинамики от классической состоит в том, что в ней возможны обратимые процессы, происходящие с конечной скоростью. К таким процессам относится гравитационное релятивистское расширение, обусловленное изменением кривизны пространства и экспериментально открытое Хабблом. С точки зре-

ния классической термодинамики этот процесс «разбегания звезд» представляется необратимым, подобно неравновесному расширению газа в цилиндре с подвижным поршнем. Таким образом, при попытке понять поведение Метагалактики в целом надо применять не классическую, а общерелятивистскую термодинамику: *наблюдатель в обратимо расширяющейся Вселенной пришел бы к совершенно ошибочным выводам, если бы он пытался объяснить поведение его окружения при помощи классической, а не общерелятивистской термодинамики;*

в) в отличие от классической термодинамики, согласно которой окончательным результатом необратимых процессов является состояние с максимальной энтропией, после чего дальнейшие термодинамические процессы невозможны, общерелятивистская термодинамика приводит к возможности необратимых процессов во Вселенной без достижения когда-либо непреодолимого максимального значения энтропии. Этот результат обусловлен тем, что, хотя полная энергия замкнутой системы согласно общерелятивистской термодинамике сохраняется, собственная энергия вещества и излучения не имеет предела, поскольку она может пополняться за счет гравитационной энергии, которая, будучи отрицательной, может уменьшаться до сколь угодно малой величины ($-\infty$). Не имеет предела поэтому и энтропия нашей Вселенной. Отсюда следует возможность необратимых процессов, протекающих без конца.

Главное значение новых результатов состоит в показе необходимости применения общерелятивистской термодинамики при попытке понимания поведения Вселенной. Как подчеркивается Р. Толменом, на основе этих результатов мы должны перестать «догматически утверждать, что принципы термодинамики с необходимостью приводят к выводу о том, что Вселенная была создана в конечный момент в прошлом и будет деградировать к смерти в будущем» ([51, с. 458]). К сожалению, в нашей печати теория Толмена иногда неверно излагалась и поэтому делался ошибочный вывод о ее неприемлемости «для любого физика-материалиста» [52].

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Роль стенок, ограничивающих систему

В релятивистской термодинамике стенки, ограничивающие систему, играют существенную роль.

Рассмотрим систему в цилиндре с площадью s торцевой стенки, коаксиальном с направлением движения. Пусть система движется со скоростью v относительно наблюдателя. Если давление внутри системы равно P , то задняя стенка цилиндра совершает в единицу времени работу над системой $Ps v$, а система — такую же работу на передней стенке. Следовательно, энергия протекает через систему вперед, возвращаясь обратно через боковые стенки. Этот поток энергии вперед через систему и обратный поток через стенки увеличивает импульс системы и уменьшает импульс стенок.

Величина импульса, переносимого этим потоком энергии, может быть подсчитана на основе простого мысленного эксперимента, который обнаруживает реальность такого потока. Допустим, что обе торцевые стенки одновременно в собственной системе цилиндра быстро убираются и мы приходим к «освобожденной» системе. В собственной системе отсчета рассматриваемая термодинамическая система будет бурно расширяться, симметрично вперед и назад относительно направления движения. Однако центр масс системы не изменит своего положения относительно центра масс стенок. Но наблюдателю весь этот процесс представляется совсем иначе. Он обнаружит, что задняя стенка удаляется раньше, а передняя стенка позже, причем время запаздывания равно

$$\Delta t = \frac{\Delta t^{(0)} + \frac{v}{c^2} l^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v l^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}},$$

где через $l^{(0)}$ обозначена длина цилиндра в собственной системе отсчета. Этот наблюдатель поэтому установит, что стенки сообщают системе импульс силы — $Ps \Delta t = \frac{v P V^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$. Тем не менее центры

массы стенок и системы, как и раньше, совпадают. Это может быть только в том случае, если система в начальный момент обладает некоторым избытком импульса (тогда как у стенок есть некоторая нехватка импульса), который в точности компенсируется импульсом, передаваемым в течение времени Δt . Этот избыток импульса как раз равен

$$\Delta p = \frac{PV^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

II. Пример с фотонным газом

Пусть в цилиндре движутся два фотона в разных направлениях и в собственной системе отражаются от передней и задней стенок одновременно. По отношению к движущейся системе отсчета отражения этих двух фотонов неодновременны, а отличаются на промежуток времени

$$\Delta t = \frac{v l^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В течение этого промежутка оба фотона движутся «вперед». Избыток импульса Δp рассматриваемых фотонов, наблюдаемый относительно движущейся системы отсчета, как раз равен импульсу этих фотонов.

Движущийся наблюдатель установит, что в течение времени Δt стенки сообщают фотонам импульс силы

$$Ps\Delta t = \frac{vPV^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}},$$

вследствие чего их общий импульс будет

$$p = \frac{PV^{(0)}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

III. Временная компонента метрического тензора в слабом поле

Для определения g_{00} в слабом гравитационном поле выразим энергию E частицы массы m через элемент интервала сначала в отсутствии поля, а

потом, используя выражение интервала в теории тяготения Эйнштейна, получим аналогичное выражение при наличии гравитационного поля.

Как известно, энергия свободно движущейся частицы равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}} = \frac{imc^3 dt}{ds}.$$

Но

$$\frac{\partial (ds)}{\partial (dt)} = \frac{\partial}{\partial (dt)} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2} = -\frac{c^2 dt}{ds}$$

и, следовательно,

$$E = -imc \frac{\partial (ds)}{\partial (dt)} = -imc^2 \frac{\partial (ds)}{\partial (dx^0)}.$$

При наличии гравитационного поля

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

поэтому энергия частицы в поле

$$E = -imc^2 \frac{\partial}{\partial (dx^0)} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} = \\ = -imc^2 \frac{g_{00} dx^0 + g_{30} dx^3 + g_{20} dx^2 + g_{10} dx^1}{\sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}}. \quad (*)$$

В слабом гравитационном поле компоненты метрического тензора должны мало отличаться от своих галилеевых значений и, следовательно,

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 + q; \quad g_{00} = -(1 + p),$$

$$g_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

где $q, p, r_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей. Тогда, поскольку

$$\frac{dx^1}{dt} = v_x, \quad \frac{dx^2}{dt} = v_y, \quad \frac{dx^3}{dt} = v_z$$

и в слабом поле приобретаемые телом скорости малы ($v \ll c$), выражение (*) в первом приближении имеет вид

$$E = mc^2 \frac{1 + p}{\sqrt{1 + p - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} pmc^2.$$

С другой стороны, энергия частицы в ньютоновском гравитационном поле

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi,$$

поэтому

$$p = \frac{2\varphi}{c^2} \text{ и } g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}.$$

IV. Закон эволюции и критическая плотность однородного и изотропного мира

Выделим в Метагалактике сферический объем радиуса R со средней плотностью ρ и определим эволюцию однородной и изотропной космологической модели. Воспользуемся теорией тяготения Ньютона, поскольку для локальных свойств Метагалактики она является точной. Масса выделенной сферы

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3.$$

Ускорение частицы, находящейся на поверхности шара,

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\gamma M}{R^2},$$

откуда после интегрирования получаем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{\gamma M}{R} = \text{const} = E. \quad (1)$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии единицы массы.

Если в данный момент $dR/dt > 0$ и $E > 0$, то, очевидно, скорость dR/dt никогда не обратится в нуль, т. е. расширение никогда не сменится сжатием.

По закону Хаббла $\frac{dR}{dt} = HR$, поэтому из выражения (1) получаем:

$$\frac{8\pi\gamma}{3} \left(\frac{3}{8\pi\gamma} H^2 - \rho \right) R^2 = 2E.$$

Знак полной механической энергии единицы массы E определяется знаком разности

$$\frac{3}{8\pi\gamma} H^2 - \rho$$

и не зависит от размеров шара (что позволяет обобщить расчет на произвольно большую сферу).

Если плотность ρ превышает критическое значение

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi\gamma} H^2,$$

то $E < 0$ и расширение должно в будущем смениться сжатием. Если же $\rho \leq \rho_c$, то процесс расширения продолжается неограниченно долго, причем скорость уменьшается, стремясь к нулю при $E=0$ и к отличному от нуля значению при $E>0$.

По современным данным $\rho < \rho_c$, и, следовательно, Метагалактика неограниченно расширяется.

Найдем закон изменения плотности ρ и постоянной Хаббла H как для $\rho > \rho_c$, так и для $\rho < \rho_c$. Из формулы (1) видно, что скорость расширения уменьшается со временем. При $R \rightarrow 0$ скорость $v \rightarrow \infty$. Поэтому для ранних стадий расширения, когда кинетическая и потенциальная энергии единицы массы велики, их разностью E можно пренебречь. Тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{\gamma M}{R}$$

и после интегрирования

$$\frac{2}{3} R^{3/2} = t \sqrt{2\gamma M}, \quad (2)$$

где при $t=0$ положено $R=0$.

Так как $M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, то с помощью формулы (2) находим

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi \cdot \gamma t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2},$$

а для постоянной Хаббла

$$H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}.$$

V. Попытка опровержения соотношения неопределенностей Гейзенberга

Рассмотрим предложенный в работах [54, 60, 61] эксперимент с лазерным усилителем, который, по мнению авторов, позволяет сколь угодно точно одновременно определить координату q и импульс p частицы — фотона в момент прохождения через щель по его последующему обнаружению в лазере.

Пусть лазер имеет длину L и ширину R с зеркалами А и В на концах. Если на отверстие ширины Δy в зеркале А подаются кратковременные световые импульсы, то «...лазер может возбудиться лишь от фотона или группы фотонов, способных, пройдя расстояние L , равное длине лазера, отразиться от зеркала В. Но для таких фотонов, во всяком случае, должно удовлетворяться условие

$$\frac{\Delta p_y}{p} < \frac{R}{L}, \quad (1)$$

т. е. разброс импульса удовлетворяет условию

$$\Delta p_y < \frac{Rh}{L\lambda}.$$

Но для фотона, прошедшего через отверстие Δy , координата y известна с точностью до Δy . Следовательно, для фотона, возбудившего лазерный усилитель,

$$\Delta y \Delta p_y < \frac{Rh \Delta y}{L\lambda}. \quad (2)$$

Это произведение может быть сделано сколь угодно малым, если уменьшать Δy или увеличивать L , т. е. $\Delta y \Delta p_y$ может быть сколь угодно меньшим постоянной Планка \hbar'' [60, с. 13, 14].

На основании этого результата в [54, 60, 61] делается вывод о существовании у частицы совершенно определенных q и p , т. е. о ее движении по классической траектории.

Нетрудно, однако, убедиться в ошибочности полученного результата и сделанного из него вывода. В самом деле, при увеличении L необходимо в (2) увеличивать и R , чтобы выполнялось исходное неравенство (1). А уменьшать Δy нельзя до величины, меньшей λ , поскольку приведенные формулы основаны на теории дифракции Гюйгенса — Кирхгофа, которая теряет смысл, когда размеры дифракционного отверстия малы по сравнению с длиной волны или только порядка нескольких длин волн [62, с. 356].

Таким образом, соотношение неопределенностей Гейзенberга

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

имеет место и в лазерном усилителе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18.
2. Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 39.
3. Базаров И. П. О взаимосвязи динамических и статистических закономерностей в физике.— «Философские науки», 1975, № 2, с. 151—152.
4. Боголюбов Н. Н. Избранные труды, т. 2. Киев, «Нauкова думка», 1970.
5. Зельманов А. Л. Многообразие материального мира и проблема бесконечности Вселенной.— В кн.: Бесконечность и Вселенная. М., «Мысль», 1969, с. 274—324.
6. Rahman A. Correlations in the Motion of Atoms in Liquid Argon.— «Phys. Rev.», 1964, **136A**, 405—411.
7. Евсеев А. М. Молекулярная динамика и термодинамические свойства растворов.— «Журн. физ. химии», 1968, т. 42, вып. 3, с. 584—587.
8. Евсеев А. М., Френкель М. Я., Шинкарев А. Н. Метод молекулярной динамики в теории равновесных состояний и необратимых процессов.— «Вестн. Моск. ун-та. Сер. химия», 1970, № 2, с. 154—164.
9. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.—Л., ГИТТЛ, 1946.
10. Терлецкий Я. П. Дополнительность в статистической физике.— В кн.: Теоретическая физика. М., Ун-т Дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1974, с. 3—10.
11. Франк-Каменецкий Д. А. Термодинамическая аналогия принципа неопределенности.— ЖЭТФ, 1940, т. 10, вып. 6, с. 700—702.
12. Шапошников И. Г. К вопросу о классической аналогии соотношения неопределенности.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 5, с. 485—488.
13. Мюнстер А. Теория флуктуаций.— В кн.: Термодинамика необратимых процессов. М., ИЛ, 1962, с. 36—145.
14. Базаров И. П. Термодинамика. М., «Высшая школа», 1976.
15. Бор Н. Избранные научные труды, т. 2. М., «Наука», 1971.
16. Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
17. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 3. М. «Наука», 1966.
18. Тамм И. Новые принципы статистической механики Бозе—Эйнштейна в связи с вопросом о физической природе материи.— УФН, 1926, т. 6, вып. 2, с. 112—141.
19. Шредингер Э. Статистическая термодинамика. М., ИЛ, 1948.
20. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М., ИЛ, 1955.
21. Шеффер К. Теория теплоты, ч. 1, М.—Л., ГТИ, 1933.
22. Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса.— УФН, 1971, т. 105, вып. 2, с. 353—359.

23. Кедров Б. М. Парадокс Гиббса. М., «Наука», 1969.
24. Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М., «Наука», 1975.
25. Базаров И. П. Кvantовый парадокс Гиббса. — В кн.: История и методология естественных наук, вып. 17. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.
26. Базаров И. П. Парадокс Гиббса и его экспериментальное обнаружение. — «Изв. высш. учебн. заведений. Физика», 1973, № 12, с. 110—114.
27. Базаров И. П. Качественно разные виды смешения газов и их особенности. — В кн.: История и методология естественных наук, вып. 19. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977.
28. Базаров И. П. Парадокс Эйнштейна и новый парадокс смешения. — «Изв. высш. учебн. заведений. Физика», 1975, № 5, с. 30—43.
29. Базаров И. П. Парадоксы смешения газов. — УФН, 1976, т. 118, вып. 3, с. 539—543.
30. Лоренц Г. А. Лекции по термодинамике. М.—Л., ГИТТЛ, 1941.
31. Кубо Р. Статистическая механика. М., «Мир», 1967.
32. Хуанг К. Статистическая механика. М., «Мир», 1966.
33. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., «Наука», 1971.
34. Исихара А. Статистическая физика. М., «Мир», 1973.
35. Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики. М., «Наука», 1973.
36. Базаров И. П. Парадокс Гиббса и его решение. — «Журн. физ. химии», 1972, т. 46, вып. 7, с. 1892—1895.
37. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М., «Наука», 1964.
38. Варшавский Ю. С., Шейнин А. Б. Об энтропии систем, содержащих трудно различимые компоненты. — ДАН, 1963, т. 148, № 5, с. 1099—1101.
39. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
40. Planck M. Zur Dynamik bewegter Systeme. — «Ann. Phys.», 1908, 26, № 6, 1—34.
41. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 1. М., «Наука», 1966.
42. Ott H. Lorentz — Transformation Wärme und der Temperatur. — «Zs. Phys.», 1963, 175, 70—104.
43. Мёллер Х. Релятивистская термодинамика. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1969—1970. М., «Наука», 1970.
44. Базаров И. П., Геворкян Э. В. О релятивистском преобразовании теплоты и температуры. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика», 1972, № 4, с. 488—490.
45. Van Kampen N. G. Relativistic Thermodynamics of Moving Systems. — «Phys. Rev.», 1968, 173, 295—301.
46. Каллен К., Горвиц Дж. Релятивистская термодинамика. — УФН, 1972, т. 107, вып. 3, с. 489—502.
47. Паули В. Теория относительности. М.—Л., ГИТТЛ, 1947. Мёллер К. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.

48. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
49. Фридман А. А. О кривизне пространства.— УФН, 1967, т. 93, вып. 2, с. 280—287.
50. Бесконечность и Вселенная. М., «Мысль», 1969.
51. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М., «Наука», 1974.
52. Терлецкий Я. П. Абсолютно ли возрастание энтропии в бесконечной Вселенной? — ДАН, 1950, т. 72, № 6, с. 1041—1044.
53. Гейзенберг В. Физические принципы квантовой теории. М.—Л., ГТТИ, 1932.
54. Терлецкий Я. П. Дополнительность и необратимость.— В кн.: История и методология естественных наук, вып. 21. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979.
55. Марков М. Знание «прошлого» и «будущего» в квантовой механике. — ЖЭТФ, 1936, т. 6, вып. 1, с. 9—11.
56. Черников Н. А. Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле. — ДАН, 1960, т. 133, № 2, с. 333—336.
Черников Н. А. Вектор потока и тензор массы релятивистского идеального газа. — ДАН, 1962, т. 144, № 2, с. 314—317.
- Черников Н. А. Релятивистское распределение Максвелла — Больцмана и интегральная форма законов сохранения. — ДАН, 1962, т. 144, № 3, с. 544—547.
57. Черников Н. А. Равновесное распределение релятивистского газа. — Сообщение ОИЯИ Р-1159. Дубна, 1962.
58. Chernikov N. A. Equilibrium Distribution of the relativistic Gas. — «Acta Phys. Polon.», 1964, 26, 1069—1092.
59. Alts T., Müller I. Relativistic Thermodynamics. — «Arch. Rational Mech. Anal.», 1972, 48, № 4, 245—300.
60. Терлецкий Я. П. Дополнительность и необратимость.— В кн.: Проблемы статистической и квантовой физики. М., Ун-т Дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1978.
61. Terletsky J., Broglie L. de.—C. R. Acad. Sc., Paris, 1971, 272, 1161—1163.
62. Зоммерфельд А. Оптика. М., ИЛ, 1953.

Иван Павлович Базаров

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ**

Зав. редакцией А. А. Локшин

Редактор С. И. Зеленский

Мл. редактор В. В. Конкина

Обложка художника В. С. Казакевич

Технический редактор Г. Д. Колоскова

Корректор Л. А. Айдарбекова

Тематический план 1979 г. № 84

ИБ № 712

Сдано в набор 18.01.79.

Подписано к печати 28.03.79.

Л-73536

Формат 84×108/32

Бумага тип. № 1

Гарнитура литературная.

Высокая печать.

Физ. печ. л. 2,75

Усл. печ. л. 4,62

Уч.-изд. л. 3,89

Изд. № 345

Зак. 23

Тираж 3260 экз.

Цена 20 коп.

Издательство

Московского университета.

Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной

торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

