Справочная
Математическая
Библиотека

Высшие трансцендентные функции

Эллиптические и автоморфные функции

Функции Ламе и Матье

Этот труд посвящен памяти
ГАРРИ БЕЙТМЕНА,
создавшего столь грандиозный проект и продвинувшего свой замысел столь далеко по пути к завершению

HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

Volume 3

BASED, IN PART, ON NOTES LEFT BY
HARRY BATEMAN

AND COMPILED BY THE
STAFF OF THE BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT
DIRECTOR ARTHUR ERDÉLYI

NEW YORK TORONTO LONDON
MC GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
1955

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

Г. БЕЙТМЕН и А. ЭРДЕЙИ

ВЫСШИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ФУНКЦИИ ЛАМЕ И МАТЬЕ

Перевод с английского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2 (083)
Б 41
УДК 517.5 (083)

АННОТАЦИЯ

Эта книга является переводом завершающего третьего тома трехтомной монографии по теории специальных функций. Она содержит теорию эллиптических функций (которая в американском издании входила в состав второго тома), теорию автоморфных функций, а также теорию функций Ламе и Матье. Кроме того, подробно изложена теория сфероидальных и эллипсоидальных функций, даны сведения о функциях теории чисел. Весьма подробно изложена теория производящих функций. Таблиц 13, иллюстраций 15, библ. 531 назв.

Настоящая книга, как и две предыдущие, явится настольной для физиков-теоретиков и экспериментаторов, инженеров-исследователей, математиков-прикладников и др.

ШТАБ ПО ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ ПРОЕКТА БЕЙТМЕНА

Директор

АРТУР ЭРДЕЙИ

Руководство штаба:

ВИЛЬГЕЛЬМ МАГНУС, ФРИЦ ОБЕРХЕТТИНГЕР, ФРАНЦИСКО Г. ТРИКОМИ

Ассистенты:

Д. Бертин, Д. Л. Томсон,
В. Б. Фалкс, Мария А. Вебер,
А. Р. Харви, Е. Л. Уитней

2-2-4
159-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 13

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛЫ

Глава 14

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 15

ФУНКЦИИ ЛАМЕ

Глава 16

ФУНКЦИИ МАТЬЕ, СФЕРОИДАЛЬНЫЕ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 17

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Глава 18

РАЗЛИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 19

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА 13

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Введение

Эллиптические интегралы встречаются впервые у Джона Валлиса в 1655—1659 гг. Они были известны Эйлеру, который в 1753 г. получил для них теорему сложения. Лежандр, чья работа над эллиптическими интегралами продолжалась многие десятилетия, ввел нормальные формы этих интегралов, которые применяются и в настоящее время. Якоби в 1828 г. ввел эллиптические функции, получив их путем обращения (неопределенных) эллиптических интегралов; кроме того, он систематически изучил тета-функции. Абель получил независимо от Якоби некоторые из его результатов. Он также изучил интегралы, называемые сейчас гиперэллиптическими или абелевыми. Вейерштрасс показал, что теория эллиптических функций может быть основана на теории функций комплексного переменного, и построил общую теорию двояко-периодических функций.

История эллиптических функций изложена в статье Р. Фрике (R. Fricke) в Encyklopädie (1913). Эта статья содержит список литературы вплоть до 1913 г. Наиболее важные книги об эллиптических функциях, появившиеся позже 1913 г., указаны в конце этой главы. Относительно более старой литературы отсылаем читателя к упомянутой статье Фрике.

Эта глава состоит из двух частей, первая из которых посвящена эллиптическим интегралам, а вторая—эллиптическим функциям. Во второй части рассматриваются как функции Якоби, так и функции Вейерштрасса. Первые весьма полезны при численных расчетах, а вторые важны ввиду их симметрии и простоты основных соотношений. Следует отметить, что Невилль (Neville; 1944) развил систематические обозначения для эллиптических функций Якоби, с помощью которых заметно упростил соответствующие формулы; в этой главе мы будем придерживаться традиционных обозначений, поскольку их часто употребляют в современных работах Тета-функции также включены во вторую часть, где, кроме того, есть небольшой раздел, касающийся эллиптических модулярных функций. Относительно дальнейшей информации о модулярных функциях см. главу 14.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.2. Эллиптические интегралы

Простейшими (неопределенными) интегралами являются интегралы от рациональных функций. Следующим по простоте является тип интегралов вида

$$I=\int R(x, y)\,dx, \tag{1}$$

где R — рациональная функция от двух переменных, а y — *алгебраическая функция* от x. Это означает, что y удовлетворяет уравнению вида

$$P(x, y) = 0, \tag{2}$$

где P — многочлен степени n от двух переменных. Такие интегралы называют *абелевыми* интегралами.

Замечательной особенностью теории абелевых интегралов является то, что поведение интеграла (1) зависит не столько от природы функции R, сколько от природы функции P, или, точнее говоря, от *алгебраической кривой* C_n в (x, y)-плоскости, выражаемой уравнением (2). В теории абелевых интегралов алгебраические кривые степени n классифицируются по их роду

$$p = \binom{n-1}{2} - d. \tag{3}$$

Род равен разности между наибольшим возможным числом $\binom{n-1}{2}$ двойных точек невырожденной кривой степени n и наличным числом двойных точек d рассматриваемой кривой. Род является *бирациональным инвариантом*, т. е. он остается неизменным, если подвергнуть кривую *бирациональному преобразованию*

$$x = R_1(\xi, \eta), \qquad y = R_2(\xi, \eta), \tag{4}$$

где рациональные функции R_1 и R_2 таковы, что существуют две другие рациональные функции R_3 и R_4 такие, что

$$\xi = R_3(x, y), \qquad \eta = R_4(x, y). \tag{5}$$

Кривые рода нуль называются *уникурсальными* (или *рациональными*) кривыми. Известно, что для таких кривых x и y могут быть выражены как *рациональные функции* параметра. Так как рациональные функции однозначны, этот параметр является *униформизирующей переменной* для кривой. Если принять этот параметр за новую переменную интегрирования в (1), то подынтегральная функция окажется рациональной функцией параметра и интеграл может быть вычислен в элементарных функциях (параметра). Сам параметр является алгебраической функцией от x. Следовательно, *абелевы интегралы рода нуль могут быть выражены через элементарные и алгебраические функции.*

Для алгебраических кривых рода один Клебш (Clebsch; 1865) доказал, что x и y могут быть выражены как рациональные функции *двух* параметров ξ и η, где η^2 является многочленом от ξ третьей или четвертой степени. Введем ξ как новое переменное интегрирования в интеграл (1), тогда каждый интеграл рода один сводится к интегралу, для которого уравнение (2) имеет вид

$$y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4, \tag{6}$$

где либо $a_0 \neq 0$, либо $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$. Интегралы, определяемые формулами (1), (6), называют *эллиптическими интегралами*, и мы показали, что *абелевы интегралы рода один можно свести с помощью рациональной подстановки к эллиптическим интегралам.* Ниже, в п. 13.14, мы увидим, что в уравнении (6), а следовательно, и для любой алгебраической кривой рода один, можно выразить переменные x и y рационально через однозначную эллиптическую функцию переменной z, которая является униформизирующей переменной для рассматриваемой кривой.

При $p \geqslant 2$ ситуация значительно сложнее. Мы имеем здесь *гиперэллиптические интегралы*, для которых уравнение (2) имеет вид

$$y^2 = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{7}$$

Однако не все кривые можно преобразовать с помощью бирационального преобразования к виду (7). Поэтому гиперэллиптических функций недостаточно для униформизации алгебраических кривых рода $p \geqslant 2$ и для этого приходится использовать еще *автоморфные функции*, см. также п. 14.9.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением эллиптических интегралов, определяемых равенствами (1), (6), и эллиптических функций, связанных с такими интегралами. Многочлен в правой части равенства (6) при $a_0 \neq 0$ будем обозначать через $G_4(x)$, а при $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ — через $G_3(x)$. Если многочлен в правой части равенства (6) имеет двойной нуль, то интеграл I может быть выражен через элементарные функции. Поэтому мы будем предполагать, что G_4 (или G_3) не имеет двойных нулей.

13.3. Приведение эллиптических интегралов

В п. 13.2 было указано, что свойства эллиптического интеграла

$$I = \int R(x, y)\,dx, \quad y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{1}$$

более зависят от многочлена $a_0x^4 + \ldots + a_4$, чем от рациональной функции R. Это утверждение оправдывается и значительно уточняется следующей теоремой, принадлежащей Лежандру.

Эллиптический интеграл (1) *может быть выражен в виде линейной комбинации* (*с постоянными коэффициентами*) *интеграла от рациональной функции аргумента x и интегралов следующих видов:*

$$I_1 = \int \frac{dx}{y}, \qquad I_2 = \int \frac{\frac{1}{2}a_0x^2 + a_1x}{y}\,dx, \qquad I_3 = \frac{dx}{(x-c)\,y}, \tag{2}$$

где c — постоянный параметр и

$$I_3^* = \int \frac{x\,dx}{y} \tag{3}$$

интерпретируется как интеграл I_3, соответствующий случаю $c = \infty$. Приведение выполняется в несколько шагов.

Поскольку любая четная степень y может быть выражена в виде многочлена от x, то R можно представить в виде

$$R(x, y) = \frac{M_1(x) + M_2(x)\,y}{N_1(x) + N_2(x)\,y} = \frac{[M_1(x) + M_2(x)\,y]\,[N_1(x) - N_2(x)\,y]\,y}{\{[N_1(x)]^2 - [N_2(x)\,y]^2\}\,y}, \tag{4}$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 являются многочленами от x. Это выражение можно переписать так:

$$R(x, y) = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{y}, \tag{5}$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции. Этим завершается первый шаг процесса приведения.

Второй шаг заключается в том, что рациональная функция $R_2(x)$ разлагается на многочлен от x и сумму элементарных дробей. Таким образом,

$$I = \int R(x, y)\,dx = \int R_1(x)\,dx + \sum_n a_n \int \frac{x^n}{y}\,dx + \sum_{m,\,r} A_{m,\,r} \int \frac{dx}{(x-c_m)^r\,y}, \tag{6}$$

и нам достаточно в дальнейшем рассмотреть интегралы

$$\left.\begin{aligned} J_n &= \int \frac{x^n}{y}\,dx, & n &= 0, 1, 2, \ldots, \\ H_r &= \int \frac{dx}{(x-c)^r\,y}, & r &= 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Третий шаг процесса приведения основан на некоторых рекуррентных соотношениях для интегралов J_n и H_r. Определим $b_0, \ldots, b_4$ с помощью тождества

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4= \\ =b_0(x-c)^4+4b_1(x-c)^3+6b_2(x-c)^2+4b_3(x-c)+b_4. \tag{8}$$

Мы имеем тогда следующие тождества:

$$\frac{d}{dx}(x^my)=mx^{m-1}y+x^my'=\frac{1}{y}\left[mx^{m-1}y^2+\frac{1}{2}x^m\frac{d(y^2)}{dx}\right]= \\ =\frac{1}{y}\left[mx^{m-1}(a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4)+\right. \\ \left.+\frac{1}{2}x^m(4a_0x^3+12a_1x^2+12a_2x+4a_3)\right]= \\ =(m+2)a_0\frac{x^{m+3}}{y}+2(2m+3)a_1\frac{x^{m+2}}{y}+6(m+1)a_2\frac{x^{m+1}}{y}+ \\ +2(2m+1)a_3\frac{x^m}{y}+ma_4\frac{x^{m-1}}{y}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[(x-c)^my]=(m+2)b_0\frac{(x-c)^{m+3}}{y}+2(2m+3)b_1\frac{(x-c)^{m+2}}{y}+ \\ +6(m+1)b_2\frac{(x-c)^{m+1}}{y}+2(2m+1)b_3\frac{(x-c)^m}{y}+mb_4\frac{(x-c)^{m+1}}{y}. \tag{10}$$

Полагая в (9) $m=0, 1, 2, \ldots$, а в (10) $m=-1, -2, -3, \ldots$ и интегрируя, последовательно получаем

$$\left.\begin{aligned} &2a_0J_3+2\cdot 3a_1J_2+6\cdot 1a_2J_1+2\cdot 1a_3J_0=y,\\ &3a_0J_4+2\cdot 5a_1J_3+6\cdot 2a_2J_2+2\cdot 3a_3J_1+a_4J_0=xy,\\ &4a_0J_5+2\cdot 7a_1J_4+6\cdot 3a_2J_3+2\cdot 5a_3J_2+2a_4J_1=x^2y,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &b_0\int\frac{(x-c)^2}{y}dx+2\cdot 1\cdot b_1\int\frac{x-c}{y}dx-2\cdot 1\cdot b_3H_1-1\cdot b_4H_2=\frac{y}{x-c},\\ &-2\cdot 1\cdot b_1J_0-6\cdot 1\cdot b_3H_1-2\cdot 3\cdot b_3H_2-2\cdot b_4H_3=\frac{y}{(x-c)^2},\\ &-b_0J_0-2\cdot 3\cdot b_1H_1-6\cdot 2\cdot b_2H_2-2\cdot 5\cdot b_3H_3-3\cdot b_4H_4=\frac{y}{(x-c)^3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Но

$$\int\frac{x-c}{y}dx=J_1-cJ_0, \qquad \int\frac{(x-c)^2}{y}dx=J_2-2cJ_1+J_0. \tag{13}$$

Следовательно, равенства (11) и (12) позволяют выразить J_n и H_r через J_0, J_1, J_2, H_1 и некоторые рациональные функции от x и y. Кроме того, сравнивая (7) с (2) и (3), мы видим, что

$$J_0=I_1, \qquad J_1=I_3^*, \qquad a_0J_2=2I_2-2a_1I_3^*, \qquad H_1=I_3. \tag{14}$$

Тем самым теорема Лежандра доказана.

Если $a_0=0$, а следовательно, и $b_0=0$, то описанный процесс несколько упрощается. В этом случае

$$I_2=a_1I_3^*, \qquad a_0=0 \tag{15}$$

и, следовательно, все интегралы сводятся к линейной комбинации интегралов I_1, I_3, I_3^*. Из (11) и (12) видно, что в этом случае все интегралы J_n и H_r могут быть выражены через интегралы J_0, J_1, H_1 и рациональные функции от x и y.

Интегралы I_1, I_2, I_3 называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго* и *третьего рода.*

Если сделать в (1) дробно линейное преобразование переменной интегрирования, то многочлен y^2 изменится. Выбирая соответствующее преобразование этого вида, можно свести многочлен к стандартной форме (см. п. 13.5). Обычно применяются две такие стандартные формы, и мы укажем в этом пункте наиболее важные результаты для каждой из этих двух стандартных форм, а также дадим краткие сведения относительно третьей формы.

Форма Вейерштрасса. Здесь

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3. \tag{16}$$

Интегралами первого, второго и третьего рода являются соответственно

$$\left.\begin{aligned}
I_1&=J_0=\int\frac{dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}},\\
I_2&=I_2^*=J_1=\int\frac{x\,dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}},\\
I_3&=H_1=\int\frac{dx}{(x-c)\,(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Первыми рекуррентными соотношениями являются

$$\left.\begin{aligned}
J_2&=\int\frac{x^2\,dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}=\frac{1}{6}(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}+\frac{1}{12}g_2J_0,\\
J_3&=\int\frac{x^3\,dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}=\frac{1}{10}x\,(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}+\frac{3}{20}g_2J_1+\frac{1}{10}g_3J_0,\\
H_2&=\int\frac{dx}{(x-c)^2\,(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}=\\
&=\frac{2\,(J_1-cJ_0)-\left(6c^2-\frac{1}{2}g_2\right)H_1-(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}(x-c)^{-1}}{4c^3-g_2c-g_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Форма Лежандра. Здесь

$$y^2=(1-x^2)\,(1-k^2x^2). \tag{19}$$

Принято определять соответствующие эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно формулами

$$\left.\begin{aligned}
F&=\int\frac{dx}{[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2}}=\int\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}},\\
E&=\int\left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{1/2}dx=\int(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi,\qquad x=\sin\varphi,\\
\Pi&=\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2}}=\\
&=\int\frac{d\varphi}{(1-c^{-2}\sin^2\varphi)\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}},\qquad x=\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Основными интегралами общей теории являются

$$I_1 = J_0 = F, \tag{21}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(F - E), \tag{22}$$

$$I_3 = H_1 = \int \frac{(x+c)\,dx}{(x^2-c^2)[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}} = \\ = \int \frac{\frac{1}{2}\,d(x^2)}{(x^2-c^2)\,[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2}} - \frac{1}{c}\,\Pi, \tag{23}$$

$$I_3^* = J_1 = \int \frac{x\,dx}{[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2}}. \tag{24}$$

Первый интеграл во второй строке формулы (23) и интеграл (24) могут быть выражены через элементарные функции, а потому любой интеграл можно выразить через E, F, П. Рекуррентное соотношение для J_n имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &2k^2J_3 - (1+k^2)\,J_1 = [(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2},\\ &3k^2J_4 - 2\,(1+k^2)\,J_2 + J_0 = x\,[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2},\\ &4k^2J_5 - 3\,(1+k^2)\,J_3 + 2J_1 = x^2\,[(1-x^2)\,(1-k^2x^2)]^{1/2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

а рекуррентное соотношение для H_r может быть получено из равенства (12).

Третий канонический вид

$$y^2 = x\,(x-m)\,(x-1) \tag{26}$$

был введен Лау (A. R. Low; 1950). В некотором смысле он занимает промежуточное положение между формами Вейерштрасса и Лежандра и обладает некоторыми преимуществами, присущими и тому и другому. Он может быть получен из формы Вейерштрасса с помощью сдвига и нормализации, а из формы Лежандра с помощью подстановки $x^2 = 1/\xi$, $y^2 = \eta^2/\xi^3$. Недавние исследования показали, что параметр m соответствует параметру k^2 в форме Лежандра.

13.4. Периоды и особенности эллиптических интегралов

Мы будем рассматривать

$$I(x) = \int_a^x R(\xi, \eta)\,d\xi, \tag{1}$$

где

$$\eta^2 = G(\xi) = a_0\xi^4 + 4a_1\xi^3 + 6a_2\xi^2 + 4a_3\xi + a_4, \tag{2}$$

и изучим $I(x)$ как функцию от верхнего предела x, считая нижний предел a фиксированным и таким, что подынтегральная функция регулярна в точке $\xi = a$.

Под знаком интеграла стоит двузначная функция от ξ, точки ветвления которой совпадают с точками ветвления для η; нам будет удобнее изучать поведение $I(x)$ не на x-плоскости, а на римановой поверхности для функции $[G(x)]^{1/2}$.

В случае, когда $a_0 \neq 0$, обозначим через α_1, α_2, α_3, α_4 четыре (различных) нуля функции $G_4(x)$; если же $a_0=0$ (и $a_1 \neq 0$), то через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ обозначим три (различных) нуля $G_3(x)$ и положим $\alpha_4=\infty$. В обоих случаях соединим α_1 и α_2 дугою c, а α_3 и α_4 — дугою c', не пересекающейся с c. Разрежем два экземпляра комплексной x-плоскости вдоль кривых c и c' и склеим эти экземпляры крест-накрест вдоль разрезов. Мы получим тогда модель римановой поверхности $\mathfrak{R}$ для функции $[G(x)]^{1/2}$. Подынтегральная функция $R(x, y)$ мероморфна на поверхности $\mathfrak{R}$, т. е. $R(x, y)$ является однозначной функцией от x на $\mathfrak{R}$, всюду аналитичной, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы. С другой стороны, $I(x)$ является многозначной функцией на $\mathfrak{R}$, так как на поверхности $\mathfrak{R}$ существуют замкнутые кривые Γ, которые нельзя деформировать в точку и на которых $\int_\Gamma R d\xi \neq 0$. Примерами таких кривых являются γ_1 и γ_3 на рис. 1. (Кривая пересекает разрезы, и часть, изображенная пунктиром, лежит на «втором листе» римановой поверхности.) Кроме того, существуют кривые, окружающие полюсы, в которых вычеты не равны нулю. Пусть b_1 — один из полюсов функции R и r_i — вычет функции R в полюсе b_1. Пусть C — любая замкнутая кривая на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Деформируя ее, получаем

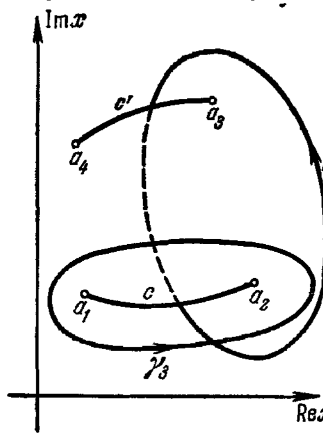


Рис. 1.

$$\int_C R(\xi, \eta)\, d\xi = m \int_{\gamma_1} R\, d\xi + n \int_{\gamma_3} R\, d\xi + \sum_i p_i 2\pi i r_i,$$

где m, n, p_i — целые числа (положительные, отрицательные или равные нулю).

Это показывает, что если $I_0(x)$ — одно из возможных значений $I(x)$, то все остальные значения этой функции имеют вид

$$I(x) = I_0(x) + m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \ldots + m_k\Omega_k, \tag{3}$$

где $m_1, \ldots, m_k$ — любые целые числа, а $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ — некоторые комплексные числа, не зависящие от x. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_k$ называют *периодами* или *модулями периодичности функции* $I(x)$.

Каждый эллиптический интеграл имеет по меньшей мере два периода (например, периоды, соответствующие кривым γ_1 и γ_2). Подынтегральные функции интегралов I_1 и I_2 в 13.3 (2) не имеют отличных от нуля вычетов в разрезанной плоскости, следовательно, эллиптические интегралы первого и второго рода имеют *ровно два* (независимых) периода. С другой стороны, для подынтегральной функции в I_3 $x=c$ является простым полюсом с вычетом $[G(c)]^{-1/2}$. Следовательно, эллиптические интегралы третьего рода имеют *три* (независимых) периода.

Мы можем теперь описать особые точки эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода. Все они имеют *точки ветвления* при $x=\alpha_1$, α_2, α_3, α_4 и их значения в этих точках ветвления *конечны*, за единственным исключением — точки $\alpha_4=\infty$ для I_2 в случае $a_0=0$. Кроме того, мы имеем следующие свойства этих интегралов.

Эллиптические интегралы первого рода аналитичны на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, исключая точки $x=\alpha_1$, α_2, α_3, α_4. Они конечны в каждой точке *римановой поверхности* $\mathfrak{R}$. Это очевидно из свойств подынтегральной функции.

Эллиптические интегралы второго рода аналитичны на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, *исключая точки* $x=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *и* ∞. *Если* $a_0 \neq 0$, *то при* $x=\infty$ *эти интегралы имеют полюс.* (Если $a_0=0$, то $\alpha_4=\infty$ и интеграл I_2 имеет здесь точку ветвления и принимает в ней бесконечное значение.) Если $a_0 \neq 0$, то мы имеем два полюса на бесконечности, по одному на каждом листе поверхности $\mathfrak{R}$, причем вычеты в этих полюсах равны нулю.

Эллиптические интегралы третьего рода аналитичны на $\mathfrak{R}$, *исключая точки* $x=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *и* c. *При* $x=c$ *они имеют логарифмическую особенность.* Мы имеем две точки $x=c$, по одной на каждом листе римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и I_3 в этих точках имеет логарифмическую особенность вида

$$\pm [G(c)]^{-1/2} \ln (x-c).$$

Различие в свойствах эллиптических интегралов показывает, что, вообще говоря (т. е. за исключением некоторых специальных значений c или x), эллиптический интеграл третьего рода не может быть сведен к эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Другое любопытное свойство эллиптических интегралов третьего рода выражается *теоремой перестановки.* Пусть

$$I_3(x, c)=\int_{\infty}^{x} \frac{d\xi}{(\xi-c)\eta}.$$

Тогда

$$I_3(x, c)-I_3(c, x)=I_1(c)\, I_2(x)-I_1(x)\, I_2(c)+(2m+1)\pi.$$

Относительно доказательства сформулированных в этом пункте утверждений и дальнейших деталей см. Tricomi (1937).

13.5. Приведение $G(x)$ к нормальной форме

При изучении эллиптических интегралов удобно приводить многочлен

$$G(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=y^2 \tag{1}$$

к одной из двух стандартных форм, указанных в п. 13.3. Это приведение выполняется с помощью дробно-линейного преобразования переменной x. Для формы Вейерштрасса один из нулей функции $G(x)$ отображается в бесконечно удаленную точку, а центр тяжести оставшихся трех нулей совмещается с точкой $x=0$. Для приведения к форме Лежандра выбирают пару точек z_1, z_2, образующую ангармоническую четверку с двумя непересекающимися парами нулей многочлена $G(x)$, т. е. такую, что

$$\frac{z_1-\alpha_1}{z_1-\alpha_2} : \frac{z_2-\alpha_1}{z_2-\alpha_2}=-1, \qquad \frac{z_1-\alpha_3}{z_1-\alpha_4} : \frac{z_2-\alpha_3}{z_2-\alpha_4}=-1$$

и точки z_1, z_2 отображаются в нуль и в бесконечно удаленную точку. Поскольку четыре корня многочлена $G(x)$ можно тремя различными способами разбить на две пары, мы получаем три различных пути приведения данного многочлена $G(x)$ к форме Лежандра. Форма Вейерштрасса более симметрична и поэтому более удобна для теоретических исследований; форма Лежандра более стандартизирована и поэтому более удобна в численных расчетах. Большинство из существующих таблиц эллиптических интегралов вычислены для формы Лежандра. Мы опишем здесь кратко приведение к обеим стандартным формам.

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса. Если $a_0 \neq 0$, то мы сводим $G(x)$ к кубическому многочлену с помощью преобразования

$$x=\alpha_4-\frac{1}{X}, \qquad y=\frac{Y}{X^2}, \tag{2}$$

где α_4—один из нулей функции $G(x)$. Это преобразование переводит многочлен (1) в

$$4A_1X^3+6A_2X^2+4A_3X+A_4=Y^2, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1&=\frac{1}{4}G'(\alpha_4)=a_0\alpha_4^3+3a_1\alpha_4^2+3a_2\alpha_4+a_3,\\ A_2&=\frac{1}{12}G''(\alpha_4)=a_0\alpha_4^2+2a_1\alpha_4+a_2,\\ A_3&=\frac{1}{24}G'''(\alpha_4)=a_0\alpha_4+a_1,\\ A_4&=\frac{1}{24}G''''(\alpha_4)=a_0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если $a_0=0$, то многочлен (1) уже имеет форму (3) и поэтому не требуется выполнять предварительное преобразование.

Далее, исключим член, содержащий квадрат независимого переменного. Для этого выполним преобразование

$$X=\frac{\xi-\frac{1}{2}A_2}{A_1}, \qquad Y=\frac{\eta}{A_1}, \tag{5}$$

которое преобразует (3) к форме Вейерштрасса

$$4\xi^3-g_2\xi-g_3=\eta^2, \tag{6}$$

где

$$g_2=3A_2^2-4A_1A_3, \qquad g_3=2A_1A_2A_3-A_2^3-A_1^2A_4. \tag{7}$$

Из (4) и (7) видно, что

$$g_2=a_0a_4+3a_2^2-4a_1a_3, \qquad g_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix} \tag{8}$$

являются *инвариантами* кривой четвертой степени $G(x)=0$; см., например, Burnside и Panton (1892, п. 160), где даны выражения этих инвариантов в виде симметрических функций от корней многочлена $G(x)$. Следует отметить, что окончательная форма (6) не зависит от того, какой именно нуль многочлена $G(x)$ отображен в бесконечно удаленную точку, а также что коэффициенты многочлена (6) являются рациональными функциями (точнее говоря, многочленами) от коэффициентов (1). В частности, если $a_0, \ldots, a_4$—вещественные числа, то g_2 и g_3 также вещественны.

Приведение к нормальной форме Лежандра. Покажем сначала, что многочлен $G(x)$ может быть следующим образом разложен на множители:

$$G(x)=[B_1(x-\beta)^2+C_1(x-\gamma)^2]\,[B_2(x-\beta)^2+C_2(x-\gamma)^2]. \tag{9}$$

В самом деле, многочлен $G(x)$ всегда можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &G(x)=Q_1(x)\,Q_2(x),\\ &Q_1(x)=p_1x^2+2q_1x+r_1, \qquad Q_2(x)=p_2x^2+2q_2x+r_2.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если для некоторого λ выполняется условие

$$(p_1-\lambda p_2)(r_1-\lambda r_2)-(q_1-\lambda q_2)^2=0, \tag{11}$$

то $Q_1-\lambda Q_2$ является точным квадратом. Пусть λ_1, λ_2 — корни уравнения (11), тогда

$$\left.\begin{aligned} Q_1-\lambda_1 Q_2 &= (p_1-\lambda_1 p_2)(x-\beta)^2, \\ Q_1-\lambda_2 Q_2 &= (p_1-\lambda_2 p_2)(x-\gamma)^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= B_1(x-\beta)^2+C_1(x-\gamma)^2, \\ Q_2 &= B_2(x-\beta)^2+C_2(x-\gamma)^2, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $B_1, \ldots, \gamma$ — некоторые постоянные; тем самым доказано равенство (9). Далее, пусть $a_0, \ldots, a_4$ — вещественные числа и $G(x)$ имеет по крайней мере одну пару комплексных корней, скажем, пусть $Q_1(x)$ имеет комплексные корни. Тогда левая часть равенства (11) положительна при $\lambda=0$ и отрицательна или равна нулю при $\lambda=p_1/p_2$; поэтому корни λ_1 и λ_2 уравнения (11) вещественны, а потому β и γ в (12) вещественны. Следовательно, вещественны и $B_1, \ldots, C_2$ в формуле (13). Если же $a_0, \ldots, a_4$ — вещественны и все корни многочлена $G(x)$ вещественны, то разложение (10) можно выбрать так, чтобы нули многочлена $Q_1(x)$ не перемежались с нулями многочлена $Q_2(x)$. Легко видеть, что в этом случае $B_1, \ldots, \gamma$ — вещественные числа. Таким образом, для вещественного многочлена $G(x)$ всегда существует вещественное разложение вида (9). Это разложение имеет место как для G_4, так и для G_3. В последнем случае либо $B_1+C_1=0$, либо $B_2+C_2=0$.

Полагая в (9)

$$\frac{x-\gamma}{x-\beta}=\left(-\frac{B_1}{C_1}\right)^{1/2}\xi, \qquad \frac{y}{(x-\beta)^2}=(B_1B_2)^{1/2}\eta, \tag{14}$$

получаем нормальную форму Лежандра

$$(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)=\eta^2, \tag{15}$$

где

$$k^2=\frac{B_1C_2}{B_2C_1}. \tag{16}$$

Величину k называют *модулем*. Не теряя общности, можно считать, что $|k^2|\leqslant 1$, причем в случае, когда $|k^2|=1$, можно, изменив группировку нулей, сделать так, что $|k^2|<1$. Единственным исключением является так называемый *эквиангармонический* случай, когда $-k^2$ является комплексным кубическим корнем из единицы. Этот исключительный случай встречается, когда корни многочлена $(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$ лежат на концах двух диаметров единичного круга, образующих друг с другом угол $\pi/6$. В случае, когда коэффициенты в (1) вещественны и $G(x)\geqslant 0$, на промежутке интегрирования можно указать иную формулу приведения. В этом случае приведение может быть выполнено с помощью *вещественного преобразования* так, чтобы имело место неравенство $0<k^2<1$. Мы выполним это приведение в тригонометрической форме (переменная φ в равенстве 13.3 (20))

$$y^2=\cos^2\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi). \tag{17}$$

Делением на положительное число мы можем добиться того, чтобы коэффициент при старшем члене (a_0 в G_4 или a_1 в G_3) равнялся ± 1. Поэтому можно считать, что многочлен $G(x)$ имеет вид

$$G(x)=\pm\prod_i (x-\alpha_i), \tag{18}$$

где $i=1, 2, 3, 4$ или $i=1, 2, 3$ в зависимости от того, имеет ли многочлен G четвертую или третью степень. Мы будем использовать сокращенные обозначения

$$\alpha_{rs}=\alpha_s-\alpha_r. \tag{19}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\,\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}, \tag{20}$$

$$\mu=\left(\frac{1-k^2\sin^2\varphi}{G(x)}\right)^{1/2}\frac{dx}{d\varphi}, \tag{21}$$

где μ — постоянное и

$$\frac{dx}{[G(x)]^{1/2}}=\mu\,\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)}. \tag{22}$$

Таким образом, μ связано с обращением эллиптических интегралов первого рода.

Табл. 1 дает формулы преобразования для случая, когда все корни многочлена $G(x)$ вещественны, причем предполагается, что

$$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4 \tag{23}$$

(в случае многочлена G_3 надо опустить α_4). Для каждого из двух возможных значений 1 или -1 коэффициента при старшем члене многочлена $G(x)$ таблица дает перечень промежутков, в которых $G(x)\geqslant 0$, формулы преобразования, некоторые соответствующие значения x и φ, значения k^2 и μ.

Табл. 2 дает соответствующие преобразования в случае, когда многочлен имеет комплексные корни. В случае многочлена G_3 вещественным корнем является α_1, а комплексными

$$b\pm ic,\qquad c>0. \tag{24}$$

В случае многочлена G_4, имеющего два вещественных корня и пару комплексных корней, $\alpha_1>\alpha_2$ являются вещественными корнями, а равенство (24) задает комплексные корни. В случае, когда G_4 имеет две пары комплексно сопряженных корней, эти корни имеют вид

$$b_1\pm ic_1,\qquad b_2\pm ic_2,\qquad b_1\geqslant b_2,\qquad c_1>0,\qquad c_2>0. \tag{25}$$

В этой таблице формулы преобразований, k^2 и μ выражены через некоторые вспомогательные величины, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\theta_1=\frac{\alpha_1-b}{c},\qquad \operatorname{tg}\theta_2=\frac{\alpha_2-b}{c},\\&\nu=\operatorname{tg}\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta_2+\theta_1}{2},\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\theta_3=\frac{c_1+c_2}{b_1-b_2},\qquad \operatorname{tg}\theta_4=\frac{c_1-c_2}{b_1-b_2},\\&\operatorname{tg}^2\frac{\theta_5}{2}=\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_4}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Формулы преобразования, данные в этих таблицах, остаются справедливыми и в случае, когда нули $G(x)$ не удовлетворяют условиям, указанным в первом столбце таблицы, и равенствам (23)—(25); однако в этом случае преобразования и величина k^2 являются, вообще говоря, комплексными.

Есть много таблиц интегралов, учебников и работ, где даны таблицы формул приведения эллиптических интегралов к нормальной форме. Мы укажем книги Gröbner, Hofreiter (1949, пп. 241—246, 1950, пп. 221—223); Янке—Эмде—Лёш (1964, стр. 96—98); Magnus и Oberhettinger (1949, гл. VII); Meyer zur Capellen (1950, п. 2.3); Oberhettinger и Magnus (1949, п. 2), Tricomi (1937, стр. 76, 77) и И. С. Градштейн и И. М. Рыжик (1963, стр. 233—295).

Таблица 1

Преобразования к нормальной форме Лежандра. Все нули $G(x)$ вещественны

Нули $G(x)$	Коэффициент при старшем члене	Промежуток	Преобразование $x=$	$\sin^2\varphi=$	Соответствующие значения x	Соответствующие значения φ	k^2	μ
$G_4(x)$ имеет четыре вещественных нуля	$+1$	$\alpha_1 \leqslant x$ или $x \leqslant \alpha_4$	$\dfrac{\alpha_1\alpha_{42}-\alpha_2\alpha_{41}\sin^2\varphi}{\alpha_{42}-\alpha_{41}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}}\dfrac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}$	α_1 α_4	0 $\pi/2$	$(\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_3)$	$\dfrac{2}{(\alpha_{31}\alpha_{42})^{1/2}}$
		$\alpha_3 \leqslant x \leqslant \alpha_2$	$\dfrac{\alpha_3\alpha_{42}-\alpha_4\alpha_{32}\sin^2\varphi}{\alpha_{42}-\alpha_{32}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}}\dfrac{x-\alpha_3}{x-\alpha_4}$	α_3 α_2	0 $\pi/2$		
	-1	$\alpha_4 \leqslant x \leqslant \alpha_3$	$\dfrac{\alpha_4\alpha_{31}+\alpha_1\alpha_{43}\sin^2\varphi}{\alpha_{31}+\alpha_{43}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{43}}\dfrac{x-\alpha_4}{\alpha_1-x}$	α_4 α_3	0 $\pi/2$	$(\alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_1)$	
		$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\dfrac{\alpha_2\alpha_{31}-\alpha_3\alpha_{21}\sin^2\varphi}{\alpha_{31}-\alpha_{21}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{21}}\dfrac{x-\alpha_2}{x-\alpha_3}$	α_2 α_1	0 $\pi/2$		
$G_3(x)$ имеет три вещественных нуля	$+1$	$\alpha_3 \leqslant x \leqslant \alpha_2$	$\alpha_3+\alpha_{32}\sin^2\varphi$	$\dfrac{x-\alpha_3}{\alpha_{32}}$	α_3 α_2	0 $\pi/2$	$\dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}$	$\dfrac{2}{(\alpha_{31})^{1/2}}$
		$\alpha_1 \leqslant x$	$\dfrac{\alpha_1-\alpha_2\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}$	$\dfrac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}$	α_1 ∞	0 $\pi/2$		
	-1	$x \leqslant \alpha_3$	$\alpha_1-\dfrac{\alpha_{31}}{\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_1-x}$	$-\infty$ α_3	0 $\pi/2$	$\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}}$	
		$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\dfrac{\alpha_2\alpha_{31}-\alpha_3\alpha_{21}\sin^2\varphi}{\alpha_{31}-\alpha_{21}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{21}}\dfrac{x-\alpha_2}{x-\alpha_3}$	α_2 α_1	0 $\pi/2$		

Таблица 2

Преобразования к нормальной форме Лежандра. $G(x)$ имеет комплексные нули

Нули $G(x)$	Коэффициент при старшем члене	Промежуток	Преобразование	Вспомогательные величины	Соответствующие значения x	Соответствующие значения φ	k^2	μ
$G_4(x)$ имеет два вещественных и два комплексных нуля	1	$\alpha_1 \leqslant x$ или $x \leqslant \alpha_2$	$x = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\,\frac{\nu-\cos\varphi}{1-\nu\cos\varphi}$	θ_1 острый, θ_2 тупой	α_1	0	$\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$	$\frac{(-\cos\theta_1\cos\theta_2)^{1/2}}{c}$
	-1	$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\,\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}$	θ_1, θ_2 острые	α_2	π		$\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2)^{1/2}}{c}$
$G_3(x)$ имеет два комплексных нуля	1	$\alpha_1 \leqslant x$	$x = \alpha_1 - \frac{c}{\cos\theta_1}\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$	θ_1 тупой	α_1	0	$\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{-\cos\theta_1}{c}\right)^{1/2}$
	-1	$x \leqslant \alpha_1$	$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{c}(\alpha_1-x)$	θ_1 острый	∞	π		$-\left(\frac{\cos\theta_1}{c}\right)^{1/2}$
$G_4(x)$ имеет четыре комплексных нуля $b_1>b_2$	1	$-\infty<x<\infty$	$x = b_1 + c_1\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right) = \frac{x-b_1}{c_1}$	θ_3, θ_4, $\frac{\theta_5}{2}$ острые	$-\infty$ b_1	$-\frac{\pi+\theta_3+\theta_4}{2}$ $-\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$	$\sin^2\theta_5$	$\left(\frac{\cos\theta_5}{c_1c_2}\right)^{1/2}$
$G_4(x)$ имеет четыре комплексных нуля $b_1=b_2$, $c_1>c_2$			$x = b_1 - c_1\operatorname{ctg}\varphi$ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1}{b_1-c}$	$\theta_3=\theta_4=\frac{\pi}{2}$	∞	$\frac{\pi-\theta_3-\theta_4}{2}$	$1-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$	$\frac{1}{c_1}$

Приведенные здесь таблицы заимствованы из книги Tricomi. См. также книгу Byrd, Friedman (1954).

Относительно вычисления эллиптических интегралов с помощью эллиптических функций см. п. 13.14; относительно их выражения через тета-функции см. п. 13.20.

13.6. Вычисление эллиптических интегралов Лежандра

В пп. 13.3 и 13.5 было описано, как приводится любой эллиптический интеграл к эллиптическим интегралам первого, второго и третьего рода в нормальной форме. Выражение интегралов в нормальной форме Вейерштрасса через эллиптические функции Вейерштрасса будет дано в п. 13.14; в этом пункте мы рассмотрим вычисление эллиптических интегралов Лежандра.

Сначала уточним определение 13.3(20), положив

$$F(\varphi, k)=\int_0^{\varphi}(1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt, \tag{1}$$

$$E(\varphi, k)=\int_0^{\varphi}(1-k^2\sin^2 t)^{1/2}\,dt, \tag{2}$$

$$\Pi(\varphi, \nu, k)=\int_0^{\varphi}(1+\nu\sin^2 t)^{-1}(1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt. \tag{3}$$

Напомним, что за исключением эквиангармонического случая приведение может быть выполнено так, чтобы удовлетворялось условие

$$|k|<1. \tag{4}$$

Интегралы первого и второго рода могут быть вычислены путем разложения подынтегральной функции по биномиальной формуле:

$$F(\varphi, k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}k^{2n}S_{2n}(\varphi), \qquad |k|<1, \qquad |\sin\varphi|\leqslant 1, \tag{5}$$

$$E(\varphi, k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/2)_n}{n!}k^{2n}S_{2n}(\varphi), \qquad |k|<1, \qquad |\sin\varphi|\leqslant 1, \tag{6}$$

где

$$(\alpha)_0=1, \qquad (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \tag{7}$$

$$S_{2n}(\varphi)=\int_0^{\varphi}(\sin t)^{2n}\,dt=2^{-2n}\left[\binom{2n}{n}\varphi+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2n}{n-m}\frac{\sin(2m\varphi)}{m}\right]. \tag{8}$$

Таким образом, в вещественном случае мы получаем хорошо сходящиеся ряды для вычисления F и E Если модуль k близок к единице, то ряды сходятся медленно и в этом случае должны быть использованы другие, более сложные разложения Некоторые из таких разложений даны Радоном: (Radon; 1950), который указал также разложения для F и E в тригонометрические ряды Есть много обширных численных таблиц для эллиптических интегралов первого и второго рода; см. Янке—Эмде—Лёш (1964, стр. 103—108), Fletcher, Miller и Rosenhead (1946, п. 21).

Вычисление эллиптических интегралов третьего рода значительно более громоздко, поскольку они зависят от трех параметров. Аналогом равенств (5) и (6) является

$$\Pi(\varphi, \nu, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu)^n B_n^{(-1/2)}\left(\frac{k^2}{\nu}\right) S_{2n}(\varphi), \tag{9}$$

$$|k| < 1, \quad |\nu| < 1, \quad |\sin\varphi| \leq 1,$$

где

$$B_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\alpha}{m} z^m \tag{10}$$

— усеченное биномиальное разложение. Условие $|\nu| < 1$ в (9) ограничивает полезность этого разложения. Относительно других разложений см. Radon (1950).

Относительно вычисления $\Pi(\varphi, \nu, k)$ с помощью тета-функций и эллиптических функций Якоби см. п. 13.20.

Отметим, что

$$\Pi(\varphi, 0, k) = F(\varphi, k), \tag{11}$$

$$(1-k^2)\,\Pi(\varphi, -k^2, k) = E(\varphi, k) - (1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2} k^2 \sin\varphi\cos\varphi, \tag{12}$$

$$(1-k^2)\,\Pi(\varphi, -1, k) = (1-k^2)\,F(\varphi, k) - E(\varphi, k) + \operatorname{tg}\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}. \tag{13}$$

13.7. Некоторые дальнейшие свойства нормальных эллиптических интегралов Лежандра

Интегралы

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(k) = F(\pi/2, k), \qquad \mathrm{E} = \mathrm{E}(k) = E(\pi/2, k) \tag{1}$$

являются соответственно *полными эллиптическими интегралами* первого и второго рода. Назовем

$$k' = (1-k^2)^{1/2} \tag{2}$$

дополнительным модулем. Тогда

$$\mathrm{K}' = \mathrm{K}'(k) = F(\pi/2, k'), \qquad \mathrm{E}' = \mathrm{E}'(k) = E(\pi/2, k'). \tag{3}$$

Неполные эллиптические интегралы $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ являются многозначными функциями на римановой поверхности $\mathcal{R}$ функции y, определенной равенством 13.3 (19). Точками ветвления являются $x = \sin\varphi = \pm 1$, $\pm k^{-1}$. Периоды можно выразить через полные эллиптические интегралы.

Интегралы	Периоды
$F(\varphi, k)$,	$4\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$,
$E(\varphi, k)$,	$4\mathrm{E}$, $2i(\mathrm{K}'-\mathrm{E}')$.

Первый из этих периодов называется *вещественным*, а второй — *мнимым периодом* (поскольку они соответственно вещественны или мнимы, когда $0 < k < 1$).

Хотя $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ являются многозначными функциями от $x = \sin\varphi$ на римановой поверхности $\mathcal{R}$, функция E, рассматриваемая как функция от F, однозначна на $\mathcal{R}$; разумеется, мы рассматриваем здесь лишь соответствующие друг другу значения E и F, получаемые при интегрировании вдоль одного и того же пути. Это приводит к функции Якоби $E(u)$, см. п. 13.16.

Эллиптические интегралы, как и эллиптические функции, обладают *теоремами сложения*. Пусть заданы φ и ψ. Определим χ из равенств

$$\left.\begin{aligned}&(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\sin\chi=\\&\quad=\sin\varphi\cos\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}+\sin\psi\cos\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2},\\&(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\cos\chi=\\&\quad=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Обозначим через $\equiv$ соотношение (конгруэнтности) между двумя функциями, отличающимися друг от друга лишь линейной комбинацией их периодов (с постоянными коэффициентами) Тогда

$$F(\chi)\equiv F(\varphi)+F(\psi),\tag{5}$$

$$F(\chi)\equiv E(\varphi)+E(\psi)-k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\tag{6}$$

являются теоремами сложения для $E(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$.

Теорему перестановки, указанную в п 13.4, удобнее всего выражать для эллиптического интеграла третьего рода

$$\Pi^*(\varphi,\ \psi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{k^2\cos\psi\sin\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2\psi\sin^2 t)\,(1-k^2\sin^2 t)^{1/2}}\,dt=$$
$$=\operatorname{ctg}\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}\,[\Pi(\varphi,\ -k^2\sin^2\psi,\ k)-F(\varphi,\ k)].\tag{7}$$

Она имеет для него вид

$$\Pi^*(\varphi,\ \psi)-\Pi^*(\psi,\ \varphi)=F(\varphi)\,E(\psi)-F(\psi)\,E(\varphi)+n\pi i.\tag{8}$$

Здесь в символах всех эллиптических интегралов опускается k, и n является целым числом.

Обе теоремы сложения и теорема перестановки зависят от связи между эллиптическими интегралами и эллиптическими функциями

В п. 13 5 было указано, что перегруппировка нулей для $G(x)$ приводит к изменению модуля. Если k — первоначальное значение модуля, то путем такой перегруппировки мы можем получить одно из следующих значений модуля:

$$k,\ \frac{ik}{k'},\ k',\ \frac{1}{k},\ \frac{1}{k'},\ \frac{k'}{ik}.\tag{9}$$

Эллиптические интегралы, принадлежащие любым двум из этих модулей, связаны друг с другом рациональными соотношениями (*линейными преобразованиями*). К выражениям, перечисленным в (9), добавим

$$\frac{1-k'}{1+k'}.\tag{10}$$

Эллиптические интегралы от модулей k и (10) также связаны рациональными соотношениями (*преобразования Ландена*)

Табл. 3 дает для любого из модулей (9) или (10), обозначенного через $\dot{k}$, преобразованное значение $\dot{\varphi}$, выраженное через φ и k, а также $F(\dot{\varphi},\ \dot{k})$ и $E(\dot{\varphi},\ \dot{k})$, выраженные через $F(\varphi,\ k)$, $E(\varphi,\ k)$, φ и k. Мы используем здесь, как и выше, обозначения (2) и сокращенные обозначения

$$\Delta(\varphi, k)=(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2},\quad \Delta(\pi/2,\ k)=k'.\tag{11}$$

Таблица 3

Преобразования эллиптических интегралов

$\dot{k}$	$\sin\dot{\varphi}$	$\cos\dot{\varphi}$	$F(\dot{\varphi}, \dot{k})$	$E(\dot{\varphi}, \dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	$\Delta(\varphi, k)$	$kF(\varphi, k)$	$\frac{1}{k}[E(\varphi, k)-k'^2F(\varphi, k)]$
k'	$-i\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$-iF(\varphi, k)$	$i[E(\varphi, k)-F(\varphi, k)-\operatorname{tg}\varphi\,\Delta(\varphi, k)]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik'\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos\varphi}$	$-ik'F(\varphi, k)$	$\frac{i}{k'}[E(\varphi, k)-k'^2F(\varphi, k)-\operatorname{tg}\varphi\,\Delta(\varphi, k)]$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$k'F(\varphi, k)$	$\frac{1}{k'}\left[E(\varphi, k)-k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right]$
$\frac{k'}{ik}$	$-\frac{ik\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{1}{\Delta(\varphi, k)}$	$-ikF(\varphi, k)$	$\frac{i}{k}\left[E(\varphi, k)-F(\varphi, k)-k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{\cos^2\varphi-k'\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$(1+k')F(\varphi, k)$	$\frac{2}{1+k'}[E(\varphi, k)+k'F(\varphi, k)]-(1-k')\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$

Величина $\dot{\varphi}$ в этой таблице определена с точностью до кратного 2π заданием $\sin\dot{\varphi}$ и $\cos\dot{\varphi}$.

Отметим также формулы дифференцирования

$$\frac{\partial F}{\partial k}=\frac{1}{k'^2}\left[\frac{E-k'^2F}{k}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi,\ k)}\right],\quad \frac{\partial E}{\partial k}=\frac{E-F}{k}. \tag{12}$$

13.8. Полные эллиптические интегралы

Мы будем использовать следующие обозначения для полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода:

$$\mathsf{K}=\mathsf{K}(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\ k)}=\int\limits_0^1\frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}, \tag{1}$$

$$\mathsf{E}=\mathsf{E}(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\Delta(\varphi,\ k)\,d\varphi=\int\limits_0^1\left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{1/2}dx, \tag{2}$$

$$\Pi_1=\Pi_1(\nu,\ k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1+\nu\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi,\ k)}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+\nu x^2)\,[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}. \tag{3}$$

Из 13.6 (8) следует

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{(1/2)_n}{n!}\,\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Используя это в 13.6 (5), (6) и (9), имеем

$$\mathsf{K}(k)=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right),\quad |k|<1, \tag{5}$$

$$\mathsf{E}(k)=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right),\quad |k|<1 \tag{6}$$

$$\Pi_1(\nu,\ k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}(-\nu)^n B_n^{(-1/2)}\left(\frac{k^2}{\nu}\right),\ |k|<1,\ |\nu|<1. \tag{7}$$

В формулах (5) и (6)

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{n!\,(c)_n}z^n$$

является гипергеометрическим рядом Гаусса, см. гл. 2. Трикоми (Tricomi; 1935, 1936) указал также разложение

$$\mathsf{K}(\sin\alpha)=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(1/2)_n}{n!}\right]^2\sin[(4n+1)\alpha],\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2} \tag{8}$$

и неравенства

$$\ln 4\leqslant\mathsf{K}+\ln k'\leqslant\pi/2. \tag{9}$$

Из (5) видно, что $\mathsf{K}(k)$ является монотонно возрастающей функцией от k на промежутке $0 < k < 1$. $\mathrm{K}(0)=\pi/2$, и из (9) видно, что K логарифмически стремится к бесконечности, когда $k \to 1$. Более точно,

$$\mathrm{K}=\ln(4/k')+O(k'^2 \ln k'), \qquad k' \to 0. \tag{10}$$

С другой стороны, (6) показывает, что функция E убывает в промежутке $0 < k < 1$ и из (2) следует, что

$$1 \leqslant \mathrm{E} \leqslant \pi/2, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{11}$$

Разложения, справедливые в окрестности точки $k=1$, были указаны многими авторами; см., например, Radon (1950). Отметим также формулу для интегралов третьего рода, выведенную Гамелем (Hamel; 1932).

Относительно вычисления полных эллиптических интегралов первого и второго рода с помощью тета функций см. п. 13.20.

Соответственно преобразованиям табл. 3 имеют место преобразования полных эллиптических интегралов. Они указаны в табл. 4 (точки ветвления обходятся выше вещественной оси).

Таблица 4

Преобразования полных эллиптических интегралов

$\dot{k}$	$\mathrm{K}(\dot{k})$	$\mathrm{K}'(\dot{k})$	$\mathrm{E}(\dot{k})$	$\mathrm{E}'(\dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')$	$k\mathrm{K}'$	$\frac{1}{k}(\mathrm{E}-i\mathrm{E}'-k'^2\mathrm{K}+ik^2\mathrm{K}')$	$\frac{1}{k}\mathrm{E}'$
k'	K'	K	E'	E
$\frac{1}{k'}$	$k'(\mathrm{K}'+i\mathrm{K})$	$k'\mathrm{K}$	$\frac{1}{k'}(\mathrm{E}'-i\mathrm{E}-k^2\mathrm{K}'+ik'^2\mathrm{K})$	$\frac{1}{k'}\mathrm{E}$
$\frac{ik}{k'}$	$k'\mathrm{K}$	$k'(\mathrm{K}'+i\mathrm{K})$	$\frac{1}{k'}\mathrm{E}$	$\frac{1}{k'}(\mathrm{E}'-i\mathrm{E}-k^2\mathrm{K}'+ik'^2\mathrm{K})$
$\frac{k'}{ik}$	$k\mathrm{K}'$	$k(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')$	$\frac{1}{k}\mathrm{E}'$	$\frac{1}{k}(\mathrm{E}-i\mathrm{E}'-k'^2\mathrm{K}+ik^2\mathrm{K}')$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2}\mathrm{K}$	$(1+k')\mathrm{K}'$	$\frac{\mathrm{E}+k'\mathrm{K}}{1+k'}$	$\frac{2\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}'}{1+k'}$
$\frac{2k^{1/2}}{1+k}$	$(1+k)\mathrm{K}$	$\frac{1+k}{2}\mathrm{K}'$	$\frac{2\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}}{1+k}$	$\frac{\mathrm{E}'+k\mathrm{K}'}{1+k}$

Преобразования

$$\dot{k}=\frac{1-k'}{1+k'}, \qquad \mathrm{K}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{1+k'}{2}\mathrm{K}(k) \tag{12}$$

играют особо важную роль, поскольку их можно использовать для отыскания численных значений K. Первое равенство в (12) можно также записать в виде

$$\dot{k}'=\frac{2k'^{1/2}}{1+k'}$$

Здесь $k' < \bar{k}' < 1$ при $0 < k' < 1$. Если повторить это преобразование несколько раз, то k' быстро стремится к единице. Соответствующее значение $\mathsf{K}(0)$ равно $\pi/2$. Положим теперь

$$k_0' = k', \qquad k_{n+1}' = \frac{2k_n'^{1/2}}{1+k_n'}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Последовательно применяя преобразование (12), получаем

$$\mathsf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+k_n'}. \tag{14}$$

Для четырех полных эллиптических интегралов, принадлежащих дополнительным модулям, мы имеем *соотношения Лежандра*

$$\mathsf{K}\mathsf{E}' + \mathsf{K}'\mathsf{E} - \mathsf{K}\mathsf{K}' = \pi/2. \tag{15}$$

Для частных значений k укажем следующие соотношения:

$$\mathsf{K}(2^{-1/2}) = \mathsf{K}'(2^{-1/2}) = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\pi^{1/2}}, \tag{16}$$

$$\mathsf{K}'\left(\sin\frac{\pi}{18}\right) = 3^{1/2}\mathsf{K}\left(\sin\frac{\pi}{18}\right), \tag{17}$$

$$\mathsf{K}'(2^{1/2}-1) = 2^{1/2}\mathsf{K}(2^{1/2}-1), \tag{18}$$

$$\mathsf{K}'\left(\frac{2^{1/2}-1}{2^{1/2}+1}\right) = 2\mathsf{K}\left(\frac{2^{1/2}-1}{2^{1/2}+1}\right), \tag{19}$$

$$\mathsf{K}'(e^{i\pi/3}) = e^{i\pi/6}\mathsf{K}(e^{i\pi/3}) = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(1/6)}{2\cdot 3^{3/4}\Gamma(2/3)} e^{-i\pi/6}. \tag{20}$$

Первое из этих соотношений соответствует *лемнискатным функциям*, которые возникают при обращении интеграла

$$\int (1-x^4)^{-1/2}\,dx,$$

а последние соотношения отвечают *эквиангармоническому* случаю для эллиптических интегралов.

Полные эллиптические интегралы третьего рода $\Pi_1(\nu, k)$ могут быть выражены через неполные эллиптические интегралы первого и второго рода. При $\nu > -1$ это было отмечено Лежандром, а для $\nu < -1$ (когда надо брать главное значение интеграла в смысле Коши) доказано Трикоми. Параметр ν выражается через вспомогательную величину θ; при этом имеют место различные выражения в промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, -k^2)$, $(-k^2, 0)$ и $(0, \infty)$. Результаты имеют вид

$$\operatorname{ctg}\theta\,\Delta(\theta, k)\,\Pi_1\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}, k\right) = \mathsf{E}(k)F(\theta, k) - \mathsf{K}(k)E(\theta, k), \tag{21}$$

$$k'\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(\theta, k')}[\Pi_1(-\Delta^2(\theta, k'), k) - \mathsf{K}(k)] = \\ = \pi/2 - [\mathsf{E}(k) - \mathsf{K}(k)]F(\theta, k') - \mathsf{K}(k)E(\theta, k), \tag{22}$$

$$\operatorname{ctg}\theta\,\Delta(\theta, k)[\Pi_1(-k^2\sin^2\theta, k) - \mathsf{K}(k)] = -\mathsf{E}F(\theta, k) + \mathsf{K}E(\theta, k), \tag{23}$$

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(\theta, k')}[\Pi_1(k^2\operatorname{tg}^2\theta, k) - \mathsf{K}(k)\cos^2\theta] = \\ = [\mathsf{E}(k) - \mathsf{K}(k)]F(\theta, k') + \mathsf{K}(k)E(\theta, k'). \tag{24}$$

Вместо K, E, Π_1 в некоторых случаях удобно ввести

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{D}(\kappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\,d\varphi, \qquad \mathsf{B}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\,d\varphi, \\ \mathsf{C}(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\varphi\cos\varphi)^2}{[\Delta(\varphi, k)]^3}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При $\kappa = k^2$ имеем следующие формулы дифференцирования и интегрирования, а также соотношения между различными интегралами

$$\mathsf{D} = \frac{\mathsf{K}-\mathsf{E}}{k^2}, \quad \mathsf{B} = \mathsf{K}-\mathsf{D} = \frac{\mathsf{E}-k'^2\mathsf{K}}{k^2}, \quad \mathsf{C} = \frac{\mathsf{D}-\mathsf{B}}{k^2} = \frac{1}{k^4}\left[(2-k^2)\mathsf{K}-2\mathsf{E}\right], \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{d\mathsf{K}}{d\kappa} = \frac{\mathsf{B}}{1-\kappa}, \quad 2\frac{d\mathsf{E}}{d\kappa} = -\mathsf{D}, \quad 2\frac{d\mathsf{D}}{d\kappa} = \frac{\mathsf{D}-\mathsf{C}}{1-\kappa}, \\ &2\frac{d\mathsf{B}}{d\kappa} = \mathsf{C}, \quad 2\kappa\frac{d\mathsf{C}}{d\kappa} = \frac{\mathsf{B}}{1-\kappa} - 4\mathsf{C}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \mathsf{K}\,d\kappa = 2\kappa\mathsf{B}, \qquad \int \mathsf{E}\,d\kappa = \frac{2}{3}\kappa(\mathsf{E}+\mathsf{B}), \\ &\int \mathsf{D}\,dk = -2\mathsf{E}, \qquad \int \mathsf{B}\,d\kappa = 2(\mathsf{E}+\kappa\mathsf{B}), \qquad \int \mathsf{C}\,d\kappa = 2\mathsf{B}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Разложения в ряды и другие формулы для этих интегралов, а также краткие числовые таблицы см. Янке—Эмде—Лёш (1964, стр. 109—119).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

13.9. Обращение эллиптических интегралов

Исторически *эллиптические функции* впервые были введены путем обращения эллиптических интегралов. Чтобы получить *эллиптические функции Якоби*, рассмотрим соотношение

$$u = \int_0^{\varphi} (1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt = F(\varphi, k) \tag{1}$$

между комплексными переменными u и φ. Мы уже знаем, что u является многозначной функцией от $x = \sin\varphi$. Обратно, равенство (1) определяет φ или $\sin\varphi$ как (быть может, многозначную) функцию от u. Якоби положил

$$\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}(u, k) \tag{2}$$

и принял в качестве основных функций

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \operatorname{sn}(u, k) = \sin(\operatorname{am} u), \\ \operatorname{cn} u &= \operatorname{cn}(u, k) = \cos(\operatorname{am} u), \\ \operatorname{dn} u &= \operatorname{dn}(u, k) = \Delta(\operatorname{am} u, k) = [1-k^2\sin^2(\operatorname{am} u)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Кроме них, часто используются следующие девять функций:

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{ns} u=\dfrac{1}{\operatorname{sn} u}, & \operatorname{nc} u=\dfrac{1}{\operatorname{cn} u}, & \operatorname{nd} u=\dfrac{1}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{cs} u=\dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, & \operatorname{sc} u=\dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, & \operatorname{sd} u=\dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{ds} u=\dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, & \operatorname{dc} u=\dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, & \operatorname{cd} u=\dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Эти обозначения ввел Глешер.

При $u=0$ положим

$$\operatorname{sn} 0=0, \qquad \operatorname{cn} 0=\operatorname{dn} 0=1. \tag{5}$$

Это, очевидно, определяет три основные функции, а следовательно, и девять функций (4), как однозначные аналитические функции в некоторой окрестности точки $u=0$ (исключая функции $\operatorname{ns} u$, $\operatorname{cs} u$, $\operatorname{ds} u$, которые имеют простые полюсы при $u=0$ и аналитичны в «проколотой» окрестности этой точки). Важнейшим фактом теории эллиптических функций является то, что аналитическое продолжение двенадцати функций, определенных таким образом в окрестности $u=0$, приводит к *однозначным* функциям от u всюду аналитичным, за исключением бесконечного множества точек, где эти функции имеют простые полюсы Этот результат может быть получен путем исследования *проблемы обращения* для интеграла (1), см. Hancock (1917), Neville (1944).

Эллиптические функции Вейерштрасса возникают аналогичным образом. Соотношение

$$z=\int_{\infty}^{w}(4t^3-g_2t-g_3)^{-1/2}\,dt \tag{6}$$

между двумя комплексными переменными z и w может быть обращено и приводит к $\wp$-функции Вейерштрасса

$$w=\wp(z)=\wp(z;\ g_2,\ g_3). \tag{7}$$

Эта функция однозначна и аналитична всюду, за исключением бесконечного множества полюсов (второго порядка).

В обоих случаях задача обращения чрезвычайно громоздка (исключая случай интеграла (1) в вещественной области при $0<k<1$), причем есть различные пути решения этой задачи, каждый из которых имеет свои преимущества. Вейерштрасс показал, что изучение двояко-периодических аналитических функций естественным образом приводит к теории эллиптических функций. Поэтому обычно изложение теории эллиптических функций начинают с изучения общей теории двояко-периодических аналитических функций. Мы сделаем это в данной главе, а позже установим связь с эллиптическими интегралами, см. п. 13.14.

13.10. Двояко-периодические функции

Пусть $f(z)$ — однозначная функция, аналитическая всюду, за исключением изолированного множества особых точек. Периодом такой функции называют комплексное число p такое, что

$$f(z)=f(z+p) \tag{1}$$

для всех значений z, при которых f аналитична. Функция, имеющая один (отличный от нуля) период, имеет бесконечное множество периодов (а именно

np для всех целых n). Пусть Ω — множество всех точек комплексной плоскости, соответствующих периодам фиксированной функции $f(z)$. Если $f(z)$ постоянна, то Ω совпадает со всей плоскостью. Если исключить этот случай, то можно доказать (см., например, Tricomi, 1937, гл. I, п. 2), что Ω либо является системой равноудаленных точек, лежащих на проходящей через начало координат прямой линии, либо *точечной решеткой*, образованной путем пересечения двух семейств равноудаленных параллельных линий (*линейной решетки*). В первом случае $f(z)$ называют *просто-периодической* функцией, а во втором случае — *двояко-периодической* функцией.

Рассмотрим двояко-периодическую функцию $f(z)$ и соответствующую точечную решетку Ω. Эта решетка может быть различными способами получена путем пересечения двух семейств равноудаленных параллельных линий. Она состоит, таким образом, из бесконечного множества конгруэнтных параллелограммов. Возьмем один из этих параллелограммов, одной из вершин которого является нуль, а тремя другими вершинами — точки 2ω, $2\omega'$, $2\omega+2\omega'$. Тогда 2ω и $2\omega'$ называют парой *примитивных периодов* $f(z)$, а все остальные периоды имеют вид

$$2\omega_{m,n}=2m\omega+2n\omega', \qquad m,\ n\text{ — целые}. \tag{2}$$

Очевидно, что ω'/ω не является вещественным числом, и примитивные периоды можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Im}(\omega'/\omega)>0. \tag{3}$$

Мы будем предполагать это условие выполненным на протяжении всей этой главы.

Как уже говорилось, точечная решетка может быть получена бесчисленным множеством способов путем пересечения двух семейств равноудаленных параллельных линий. Поэтому можно бесчисленным множеством способов выбрать пару примитивных периодов. Пусть ω, ω' — примитивные полупериоды Ω, и пусть α, β, γ, δ — любые целые числа. Тогда

$$\dot\omega=\alpha\omega+\beta\omega', \qquad \dot\omega'=\gamma\omega+\delta\omega' \tag{4}$$

являются парой полупериодов. Если

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \tag{5}$$

то из (4) имеем

$$\omega=\delta\dot\omega-\beta\dot\omega', \qquad \omega'=-\gamma\dot\omega+\alpha\dot\omega', \tag{6}$$

так что ω и ω', а следовательно, и все полупериоды $f(z)$ являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами $\dot\omega$, $\dot\omega'$. Поэтому (4) дает другую пару примитивных полупериодов. *Эквивалентные пары примитивных полупериодов связаны друг с другом унимодулярными преобразованиями*

$$\begin{bmatrix}\dot\omega\\ \dot\omega'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \omega'\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=1. \tag{7}$$

Можно показать [см., например, Tricomi (1937, гл. I, п. 2)], что пару примитивных периодов всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$|\omega|\leqslant|\omega'| \quad\text{и}\quad \operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

Мы не будем, однако, требовать в этой главе выполнения условий (8).

Две точки z-плоскости назовем *конгруэнтными*, если они отличаются друг от друга на период. Связное множество точек называется *фундаментальной областью*, если каждая точка плоскости конгруэнтна в точности одной точке этого множества. Мы будем брать в качестве фундаментальной области параллелограмм, и считать, что две стороны этого параллелограмма и вершина, в которой они пересекаются, рассматриваются как принадлежащие параллелограмму, а две другие стороны и три вершины не принадлежат ему. При фиксированном z_0 точки

$$z=z_0+2\xi\omega+2\eta\omega', \qquad 0\leqslant\xi<1,\ 0\leqslant\eta<1 \tag{9}$$

образуют фундаментальный параллелограмм периодов. Любой параллелограмм, полученный из него смещением на период, т. е. любое множество точек вида

$$z=z_0+2(m+\xi)\,\omega+2(n+\eta)\,\omega', \qquad 0\leqslant\xi<1,\quad 0\leqslant\eta<1 \tag{10}$$

для фиксированной пары целых чисел (m, n) является *параллелограммом периодов*.

Поскольку двояко-периодическая функция принимает одинаковые значения в конгруэнтных точках, то достаточно описать свойства такой функции в любом параллелограмме периодов. Так как $f(z)$ имеет лишь изолированные особые точки и изолированные нули, то всегда можно выбрать фундаментальный параллелограмм периодов (т. е. точку z_0) так, чтобы на границе этого параллелограмма не было ни одной особой точки и ни одного нуля функции $f(z)$. Это условие будет предполагаться выполненным в общих теоремах п. 13.11. Такой параллелограмм периодов мы будем для краткости называть *ячейкой*.

13.11. Общие свойства эллиптических функций

Двояко-периодическая мероморфная функция называется *эллиптической функцией*. Иными словами, мы определяем эллиптическую функцию как однозначную двояко-периодическую аналитическую функцию, единственными особенностями которой в любой конечной части плоскости могут быть полюсы. Здесь мы будем обозначать такую функцию через $f(z)$. Через ω и ω' обозначим пару примитивных полупериодов $f(z)$ и через Ω точечную решетку, связанную с $f(z)$.

Заметим, что часто сигма- и дзета-функции Вейерштрасса, тета-функции и другие функции, связанные с эллиптическими функциями, также называют эллиптическими функциями (в обобщенном смысле). Однако в этой главе термин «эллиптическая функция» будет использоваться лишь в указанном выше смысле.

Каждая эллиптическая функция, не являющаяся тождественной постоянной, имеет полюсы.

В самом деле, если бы $f(z)$ не имела полюсов в параллелограмме периодов, то она была бы ограничена в нем, а тогда она была бы ограничена и во всей плоскости. По теореме Лиувилля она была бы постоянной.

Любая аналитическая функция имеет в каждом параллелограмме периодов лишь конечное число полюсов и в случае, когда она не равна тождественно нулю, лишь конечное число нулей.

В самом деле, если бы она имела в параллелограмме периодов бесконечно много полюсов, то тогда эти полюсы имели бы предельную точку, которая была бы существенно особой точкой. Аналогично, если бы в каком-нибудь параллелограмме периодов эллиптическая функция имела бесконечно много нулей и не обращалась тождественно в нуль, то она должна была бы иметь существенную особенность.

Число полюсов, лежащих в ячейке, причем каждый полюс считается столько раз, какова его кратность, называется *порядком* эллиптической функции. Множество полюсов или нулей в заданной ячейке называется *неприводимым* множеством.

Сумма вычетов эллиптической функции во всех полюсах, принадлежащих любой ячейке, равна нулю. Пусть C — граница ячейки. Сумма вычетов равна $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz$, но эта сумма равна нулю, поскольку интегралы, взятые по противоположным сторонам, взаимно уничтожаются.

Нет эллиптических функций первого порядка.

В самом деле, такая функция должна была бы иметь в каждой ячейке в точности один простой полюс, а тогда вычет в этом полюсе равнялся бы нулю в силу предыдущей теоремы.

Эллиптическая функция порядка r принимает в любом параллелограмме периодов каждое значение в точности r раз (считая кратность).

Для того чтобы доказать, что функция $f(z)-c$ имеет в точности r нулей внутри каждого параллелограмма периодов, возьмем этот параллелограмм таким, чтобы функция $f'(z)/[f(z)-c]$ была регулярной на его границе. Разность между числом полюсов и числом нулей функции $f(z)-c$ равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz,$$

но этот интеграл равен нулю, поскольку взносы по противоположным сторонам параллелограмма взаимно уничтожаются.

Сумма неприводимого множества нулей конгруэнтна сумме неприводимого множества полюсов (каждый нуль и полюс берутся столько раз, какова их кратность). Пусть C — граница ячейки, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — нули, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ — полюсы функции $f(z)$, лежащие внутри C. Функция $f'(z)/f(z)$ имеет простые полюсы с вычетом k в нулях порядка k и простые полюсы с вычетом $-k$ в полюсах порядка k функции $f(z)$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{h=1}^{r}(\alpha_h-\beta_h). \tag{1}$$

Если вершинами ячейки являются z_0, $z_0+2\omega$, $z_0+2\omega+2\omega'$, $z_0+2\omega'$, то интеграл (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\omega}\left[\frac{(z_0+t)\,f'(z_0+t)}{f(z_0+t)}-\frac{(z_0+2\omega'+t)\,f'(z_0+2\omega'+t)}{f(z_0+2\omega'+t)}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\omega'}\left[\frac{(z_0+t)\,f'(z_0+t)}{f(z_0+t)}-\frac{(z_0+2\omega+t)\,f'(z_0+2\omega+t)}{f(z_0+2\omega+t)}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{2\omega\left[\ln f(z_0+t)\right]_0^{2\omega'}-2\omega'\left[\ln f(z_0+t)\right]_0^{2\omega}\right\}.$$

Так как $f(z)$ имеет периоды 2ω, $2\omega'$, то $\ln f(z_0)$, $\ln f(z_0+2\omega')$ и $\ln f(z_0+2\omega)$ отличаются друг от друга на целое, кратное $2\pi i$, следовательно, интеграл в формуле (1) имеет значение вида $2m\omega+2n\omega'$.

Из этих фундаментальных теорем легко вытекают некоторые следствия. Отметим лишь два из них.

1. *Две эллиптические функции, имеющие одинаковые периоды, одинаковые полюсы и одинаковые главные части в каждом полюсе, отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым.*

2. *Отношение двух эллиптических функций, имеющих одинаковые периоды, полюсы и нули* (и кратности полюсов и нулей), *является постоянным.*

Все эллиптические функции, имеющие одинаковые периоды $(2\omega, 2\omega')$, образуют *поле* $\mathfrak{K}$, т. е. сумма, разность, произведение и частное двух таких функций имеют одинаковые периоды Очевидно, что любая рациональная функция (с постоянными коэффициентами) от таких функций принадлежит $\mathfrak{K}$. Кроме того, производная любой функции из $\mathfrak{K}$ также принадлежит $\mathfrak{K}$, т. е. $\mathfrak{K}$ является *дифференциальным полем* Интеграл от функции из $\mathfrak{K}$ может не принадлежать $\mathfrak{K}$. Хотя $(2\omega, 2\omega')$ является парой примитивных периодов для некоторых функций из $\mathfrak{K}$ и парой периодов для любой функции из $\mathfrak{K}$, она может не быть парой примитивных периодов для всех функций из $\mathfrak{K}$.

Из представления эллиптических функций через некоторые стандартные функции (см. п. 13 14) легко вывести дополнительные результаты.

Любые две функции f и g из $\mathfrak{K}$ связаны друг с другом алгебраическим уравнением $P(f, g)=0$, где $P(x, y)$ — многочлен с постоянными коэффициентами и алгебраическая кривая $P(x, y)=0$ уникурсальна

Любая эллиптическая функция удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению первого порядка $P(f, f')=0$. Здесь $P(x, y)$ также является многочленом с постоянными коэффициентами рода нуль.

Любая эллиптическая функция $f(x)$ удовлетворяет алгебраической теореме сложения

$$A[f(u),\ f(v),\ f(u+v)]=0, \tag{2}$$

где $A(x, y, z)$ — многочлен с коэффициентами, не зависящими от u и v, и (2) *выполняется тождественно по u и v.*

Обратно, можно показать, что *однозначная аналитическая функция от z, удовлетворяющая алгебраической теореме сложения вида* (2), *является либо рациональной функцией от z, либо рациональной функцией от $e^{\lambda z}$* при некотором λ, *либо эллиптической функцией.*

Простейшими (не тривиальными) эллиптическими функциями являются функции рода два. Среди них можно выбрать в качестве стандартных функций либо функции, имеющие один двойной полюс (с нулевым вычетом) в каждой ячейке, либо функции, которые в каждой ячейке имеют два простых полюса (с вычетами, равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку) Первая возможность использована в теории Вейерштрасса, вторая — в теории Якоби.

13.12. Функции Вейерштрасса

Пусть 2ω, $2\omega'$ — фиксированная пара примитивных периодов

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}, \qquad \operatorname{Im}\tau>0, \tag{1}$$

$$w=w_{mn}=2m\omega+2n\omega'. \tag{2}$$

Будем обозначать через $\sum$ и $\prod$ бесконечные суммы и произведения, взятые по множеству всех пар целых чисел m, n, а через $\sum'$ и $\prod'$ — суммы и произведения, взятые по множеству всех пар целых чисел m, n, за исключением $m=n=0$

Функция Вейерштрасса $\wp(z)=\wp(z\,|\,\omega, \omega')$ является эллиптической функцией второго порядка с периодами 2ω, $2\omega'$, имеющей двойной полюс в точке $z=0$. Ее главная часть в этом полюсе равна z^{-2}, причем функция $\wp(z)-z^{-2}$ обращается в нуль при $z=0$ и аналитична в окрестности этой точки. Эти условия однозначно определяют $\wp(z)$. Для того чтобы получить аналитическое выражение этой функции, построим мероморфную функцию, имеющую двойные полюсы в каждой точке $w=w_{mn}$ с главной частью $(z-w)^{-2}$. Разложение такой функции на элементарные дроби имеет вид

$$f(z)=z^{-2}+\sum{}'[(z-w)^{-2}-w^{-2}]. \tag{3}$$

Полученная функция такова, что $f(z)-z^{-2}$ обращается в нуль при $z=0$. Кроме того, меняя порядок членов ряда, убеждаемся, что $f(z+2\omega)=f(z)=f(z+2w')$. Отсюда вытекает, что построенная функция $f(z)=\wp(z)$ Таким образом,

$$\wp(z)=\wp(z\mid\omega,\ \omega')=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2}-\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right]. \tag{4}$$

Функция $\wp(z)$ является четиой Поэтому

$$\wp'(z)=-2z^{-3}-2\sum{}'(z-w)^{-3}=-2\sum(z-w)^{-3}. \tag{5}$$

Интегрируя почленно, мы получаем *дзета-функцию Вейерштрасса*, которая является мероморфной фуикцией с простыми полюсами:

$$\zeta(z)=\zeta(z\mid\omega,\ \omega')=z^{-1}+\sum{}'[(z-w)^{-1}+w^{-1}+zw^{-2}], \tag{6}$$

$$\wp(z)=-\zeta'(z). \tag{7}$$

Функция $\zeta(z)$ нечетиа. Она не является двояко-периодической и, следовательно, не есть эллиптическая функция. Обычно полагают

$$\zeta(z+2\omega)=\zeta(z)+2\eta,\qquad \zeta(z+2\omega')=\zeta(z)+2\eta'. \tag{8}$$

Так как $\zeta(z)$ нечетная функция от z, то

$$\eta=\zeta(\omega),\qquad \eta'=\zeta(w'). \tag{9}$$

Интегрируя $\zeta(z)$ по границе ячейки, получаем *соотношение Лежандра*

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{1}{2\pi i}. \tag{10}$$

Сигма-функция Вейерштрасса является целой функцией, логарифмическая производная которой равна дзета-функции

$$\sigma(z)=\sigma(z\mid\omega,\ \omega')=z\prod{}'\left\{\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left[\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2\right]\right\}, \tag{11}$$

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},\qquad \wp(z)=\frac{\sigma'^2(z)-\sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}. \tag{12}$$

Используя сокращенные обозначения

$$g_2=60\sum{}'w^{-4},\qquad g_3=140\sum{}'w^{-6}, \tag{13}$$

можно записать разложение $\sigma(z)$ в степенной ряд, а также лорановские разложения функций $\zeta(z)$, $\wp(z)\,\wp'(z)$ в окрестности точки $z=0$ в виде

$$\sigma(z)=z-\frac{g_2z^5}{2^4\cdot3\cdot5}-\frac{g_3z^7}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}-\frac{g_2^2z^9}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}-\frac{g_2g_3z^{11}}{2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11}-\ldots, \tag{14}$$

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{g_2z^3}{2^2\cdot3\cdot5}-\frac{g_3z^5}{2^2\cdot5\cdot7}-\frac{g_2^2z^7}{2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7}+\ldots, \tag{15}$$

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2z^2}{2^2\cdot5}+\frac{g_3z^4}{2^2\cdot7}+\frac{g_2^2z^6}{2^4\cdot3\cdot5^2}+\ldots, \tag{16}$$

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2z}{2\cdot5}+\frac{g_3z^3}{7}+\frac{g_2^2z^5}{2^3\cdot5^2}+\ldots \tag{17}$$

Радиус сходимости этих рядов равен наименьшему расстоянию между точками решетки Ω, т. е. наименьшему из чисел $|2\omega|$, $|2\omega'|$, $|2\omega \pm 2\omega'|$.

Формулы для функций Вейерштрасса могут быть записаны в более симметричном виде с помощью обозначений

$$\omega_1=\omega, \quad \omega_2=-\omega-\omega', \quad \omega_3=\omega', \tag{18}$$

$$\eta_\alpha=\zeta(\omega_\alpha), \quad \alpha=1,\ 2,\ 3. \tag{19}$$

Мы имеем тогда

$$\zeta(z+2\omega_\alpha)=\zeta(z)+2\eta_\alpha, \quad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{20}$$

$$\sigma(z+2\omega_\alpha)=-\sigma(z)\exp[2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)], \quad \alpha=1,\ 2,\ 3. \tag{21}$$

Удобно ввести три функции

$$\sigma_\alpha(z)=\frac{\sigma(z+\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)}\exp(-z\eta_\alpha), \quad \alpha=1,\ 2,\ 3. \tag{22}$$

Для них имеем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\alpha(z+2\omega_\alpha)=-\sigma_\alpha(z)\exp[2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)], \quad \alpha=1,\ 2,\ 3,\\ &\sigma_\alpha(z+2\omega_\beta)=\sigma_\alpha(z)\exp[2\eta_\beta(z+\omega_\beta)], \quad \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ \alpha\neq\beta. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Функция $\wp'(z)$ является нечетной эллиптической функцией третьего порядка с периодами $2\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3$; она имеет три нуля в каждой ячейке. Но $\wp'(-\omega_\alpha)=\wp'(\omega_\alpha)$, так как $\wp'$ имеет период $2\omega_\alpha$, и $\wp'(-\omega_\alpha)=-\wp'(\omega_\alpha)$, так как $\wp'(z)$ является нечетной функцией от z Таким образом, $z=\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3$ является неприводимым множеством нулей для $\wp'(z)$. Обычно полагают

$$e_\alpha=\wp(\omega_\alpha), \quad \alpha=1,\ 2,\ 3. \tag{24}$$

Функция $\wp(z)-\wp(\omega_\alpha)$ является эллиптической функцией второго порядка. Она имеет полюсы второго порядка во всех точках, конгруэнтных точке $z=0$, и нули второго порядка в точках, конгруэнтных с ω_α Поскольку ее порядок равен двум, она имеет лишь эти полюсы и нули. Следовательно, функция $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}$ является однозначной функцией (но 2ω, $2\omega'$ не являются ее периодами, см. пп. 13.13, 13.16).

13.13. Дальнейшие свойства функций Вейерштрасса

Мы будем указывать зависимость $\wp(z)$ от полупериодов ω, ω' следующим образом. $\wp(z\,|\,\omega, \omega')$, а зависимость от инвариантов g_2 и g_3 так: $\wp(z;\ g_2, g_3)$. Аналогичные обозначения будут применяться для других функций Вейерштрасса

По определению при любом $t\neq 0$ имеют место соотношения однородности

$$\left.\begin{aligned} \wp'(tz\,|\,t\omega,\ t\omega')&=t^{-3}\wp'(z\,|\,\omega,\ \omega'),\\ \wp(tz\,|\,t\omega,\ t\omega')&=t^{-2}\wp(z\,|\,\omega,\ \omega'),\\ \zeta(tz\,|\,t\omega,\ t\omega')&=t^{-1}\zeta(z\,|\,\omega,\ \omega'),\\ \sigma(tz\,|\,t\omega,\ t\omega')&=t\sigma(z\,|\,\omega,\ \omega'); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \wp'(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3)&=t^{-3}\wp'(z;\ g_2,\ g_3),\\ \wp(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3)&=t^{-2}\wp(z;\ g_2,\ g_3),\\ \zeta(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3)&=t^{-1}\zeta(z;\ g_2,\ g_3),\\ \sigma(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3)&=t\sigma(z,\ g_2,\ g_3). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Таким образом, функции Вейерштрасса зависят, по сути дела, от двух параметров, в качестве которых мы можем, например, выбрать отношения z, ω и ω'. Выражение инвариантов через периоды дано в 13.12(13). Обратно, из

13.9(6) и 13.12(24) имеем

$$\omega_\alpha = \int_\infty^{e_\alpha} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-1/2}\, dt.$$

Функции $\wp'^2(z)$ и $[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3]$ являются эллиптическими функциями шестого порядка с периодами $2\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3$ Обе они имеют неприводимое множество нулей в точках ω_α, $\alpha=1, 2, 3$ и полюс шестого порядка в точке $z=0$ В силу общей теоремы п. 13.11 отношение этих двух функций является постоянной величиной Значение этой постоянной может быть вычислено из разложений 13 12(4) и (5). Мы получаем, таким образом, *алгебраическое дифференциальное уравнение* для $\wp$-функций Вейерштрасса

$$\wp'^2(z) = 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3] \tag{3}$$

Иной вид этого дифференциального уравнения может быть получен из того, что $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z)$ является эллиптической функцией не более чем шестого порядка и что все полюсы этой функции конгруэнтны с точкой $z=0$. Из разложений 13 12(16) и (17) вытекает, что эта функция регулярна при $z=0$ и, следовательно, в силу результатов п 13 11, постоянна. Значение этой постоянной, полученное с помощью формул 13 12(16) и (17) равно $-g_3$, следовательно, мы получаем иной вид дифференциального уравнения:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \tag{4}$$

Сравнение правых частей уравнений (3) и (4) показывает, что e_α, $\alpha=1, 2, 3$, являются корнями алгебраического уравнения $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$. Используя формулы для симметрических функций корней алгебраических уравнений, получаем следующие соотношения:

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad -4(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)=g_2, \quad 4e_1e_2e_3=g_3, \tag{5}$$

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=\frac{1}{2}g_2, \quad e_1^3+e_2^3+e_3^3=\frac{3}{4}g_3, \quad e_1^4+e_2^4+e_3^4=\frac{1}{8}g_2^2, \tag{6}$$

$$16(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = \Delta. \tag{7}$$

Последнее выражение является *дискриминантом* кубического уравнения.

Используя дифференциальное уравнение (4) и замечая, что при $z=0$ функция $\wp(z)$ имеет полюс и, следовательно, обращается в бесконечность, устанавливаем соотношения 13.9(6) и (7) Таким образом, мы получили связь между канонической формой Вейерштрасса для эллиптических интегралов первого рода и $\wp$-функцией Вейерштрасса. Из (4) имеем также

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2, \qquad \wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z), \tag{8}$$

отсюда по индукции следует, что

$$\wp^{(2n-2)}(z) \quad \text{и} \quad \frac{\wp^{(2n+1)}(z)}{\wp'(z)}$$

являются многочленами степени n от $\wp(z)$.

Теорема сложения для $\wp$-функций может быть написана в различных видах:

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2 - \wp(u) - \wp(v), \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right] = \wp(v) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right], \tag{11}$$

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = 2\wp(u) - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\{\ln[\wp(u)-\wp(v)]\}. \tag{12}$$

Эти теоремы сложения могут быть получены многими путями. Их можно доказать, например, если заметить, что функции в обеих частях равенств являются эллиптическими функциями с одинаковыми периодами, полюсами и главными частями, и принимают одинаковые значения в некоторых фиксированных точках.

Из теорем сложения вытекают многие формулы для функций Вейерштрасса. Отметим следующие:

$$\wp(z+\omega_\alpha)=e_\alpha+\frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp(z)-e_\alpha},\quad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{13}$$

$$\wp(2z)=-2\wp(z)+\left[\frac{\wp''(z)}{2\wp'(z)}\right]^2, \tag{14}$$

$$\wp(z/2)=\wp(z)+[\wp(z)-e_2]^{1/2}[\wp(z)-e_3]^{1/2}+[\wp(z)-e_3]^{1/2}[\wp(z)-e_1]^{1/2}+\\ +[\wp(z)-e_1]^{1/2}[\wp(z)-e_2]^{1/2}. \tag{15}$$

В первой из них α, β, γ — любая перестановка чисел 1, 2, 3. Равенство (14) называется *формулой удвоения*. Квадратный корень в (15) выбирается в соответствии с формулой (22).

Для дзета- и сигма-функций Вейерштрасса имеют место соответствующие формулы

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}, \tag{16}$$

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)=-\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)\,[\wp(u)-\wp(v)]. \tag{17}$$

Эти формулы иногда называют теоремами сложения для дзета- и сигма-функций, хотя они и не являются теоремами сложения в смысле, введенном в 13.11(2). Так как $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$ не являются эллиптическими функциями, они не могут обладать алгебраическими теоремами сложения. Следующие формулы выводятся из (16) и (17):

$$\zeta(z\pm\omega_\alpha)=\zeta(z)\pm\eta_\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-e_\alpha},\qquad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{18}$$

$$\zeta(z+2m\omega+2n\omega')=\zeta(z)+2m\eta+2n\eta',\qquad m,\ n \text{ — целые}, \tag{19}$$

$$\sigma(z+2m\omega+2n\omega')=\\ =(-1)^{m+n+mn}\sigma(z)\exp[(z+m\omega+n\omega')(2m\eta+2n\eta')],\qquad m,\ n \text{ — целые}. \tag{20}$$

Равенства (16)—(18) можно доказать, выражая эллиптические функции $[\wp'(u)-\wp'(v)]/[\wp(u)-\wp(v)]$ через дзета-функции, $\wp(u)-\wp(v)$ через сигма-функции и $\wp'(z)/[\wp(z)-e_\alpha]$ через дзета-функции (см. следующие пункты).

В п. 13.12 в строке, следующей за формулой 13 12(24), было отмечено, что можно определить $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}$ как однозначную функцию от z. Для этого надо выбрать квадратный корень так, чтобы при $z=0$ функция имела простой полюс с вычетом 1. Так как главная часть вблизи точки $z=0$ для функции $\wp'(z)$ равна $-2z^{-3}$, это определение приводит к

$$\wp'(z)=-2\,[\wp(z)-e_1]^{1/2}\,[\wp(z)-e_2]^{1/2}\,[\wp(z)-e_3]^{1/2}. \tag{21}$$

Чтобы получить явную формулу для $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}$, положим в формуле (17) $u=z$, $v=\omega_\alpha$ и применим формулы (20) и 13.12(21):

$$\wp(z)-e_\alpha=-\frac{\sigma(z+\omega_\alpha)\,\sigma(z-\omega_\alpha)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\omega_\alpha)}=\frac{\sigma^2(z+\omega_\alpha)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\omega_\alpha)}\exp[-2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)]=\\ =\left[\frac{\sigma_\alpha(z)}{\sigma(z)}\right]^2.$$

Извлекая квадратный корень в соответствии с даным выше определением, получаем

$$[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}=\frac{\sigma_\alpha(z)}{\sigma(z)}. \tag{22}$$

В частности, полагая $z=\omega_\beta$,

$$(e_\beta-e_\alpha)^{1/2}=\frac{\sigma_\alpha(\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\beta)}. \tag{23}$$

В соотношениях, содержащих квадратные корни, например таких, как (15) мы будем всегда предполагать, что квадратные корни определены так, как в (22) и (23). Из (23) и 13.12(22) имеем

$$(e_\beta-e_\alpha)^{1/2}=\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha)\,\sigma(\omega_\beta)}\exp(-\eta_\alpha\omega_\beta). \tag{24}$$

Это равенство вместе с соотношением Лежандра 13.12(10) показывает, что

$$\left.\begin{aligned}&(e_1-e_3)^{1/2}=i\,(e_3-e_1)^{1/2}, \quad (e_1-e_2)^{1/2}=i\,(e_2-e_1)^{1/2},\\&(e_2-e_3)^{1/2}=i\,(e_3-e_2)^{1/2}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

13.14. Выражение эллиптических функций и эллиптических интегралов через функции Вейерштрасса

Рассмотрим задачу о выражении эллиптической функции через стандартные функции либо в виде рациональной комбинации $\wp$ и $\wp'$ (линейной по $\wp'$), либо в виде линейной комбинации дзета-функции и ее производных, либо в виде отношения двух произведений сигма-функций. Пусть $f(z)$ — эллиптическая функция с периодами 2ω, $2\omega'$, и пусть $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ — функции Вейерштрасса, построенные по примитивным периодам 2ω, $2\omega'$.

Выражение через $\wp(z)$ и $\wp'(z)$. Рассмотрим сначала случай, когда $f(z)$ является четной функцией от z. Если $f(z)$ имеет нуль или полюс при $z=0$, то этот нуль или полюс должен иметь четный порядок и, следовательно, при некотором целом значении s функция $f(z)[\wp(z)]^s$ должна быть аналитической и отличной от нуля при $z=0$. Нули и полюсы четной функции $f(z)[\wp(z)]^s$ симметрично расположены относительно точки $z=0$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_h$ — неприводимое множество нулей и $\beta_1, \ldots, \beta_h$, $-\beta_1, \ldots, -\beta_h$ — неприводимое множество полюсов, где каждый нуль и каждый полюс встречаются столько раз, какова их кратность. Тогда

$$f(z)[\wp(z)]^s\prod_{r=1}^{h}\frac{\wp(z)-\wp(\beta_r)}{\wp(z)-\wp(\alpha_r)}$$

является эллиптической функцией, не имеющей нулей и полюсов и, следовательно, постоянна. Итак, *любая четная эллиптическая функция может быть выражена как рациональная функция от* $\wp(z)$. Пусть теперь $f(z)$ — любая эллиптическая функция. Запишем ее в виде

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]+\wp'(z)\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)}.$$

Здесь $f(z)+f(-z)$ и $[f(z)-f(-z)]/\wp'(z)$ — четные эллиптические функции и, следовательно, являются рациональными функциями от $\wp(z)$. Таким образом, *любая эллиптическая функция может быть представлена в виде*

$$f(z)=R_1[\wp(z)]+R_2[\wp(z)]\,\wp'(z), \tag{1}$$

где $R_1(w)$ и $R_2(w)$ — рациональные функции от w.

Из доказанного утверждения и из дифференциального уравнения и теоремы сложения для функции $\wp$ легко вытекает, что любая эллиптическая функция удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению и обладает алгебраической теоремой сложения, а также что любые две эллиптические функции с одинаковыми периодами алгебраически зависимы (см. п. 13.11).

Выражение через дзета-функции. Функция $\zeta(z)$ не является эллиптической функцией, но из 13.13(19) легко вывести, что функция

$$\sum_{r=1}^{h} c_r \zeta(z-\gamma_r)$$

является эллиптической тогда и только тогда, когда

$$\sum_{r=1}^{h} c_r = 0.$$

Кроме того, $\zeta'(z) = -\wp(z)$, так что производная от функции $\zeta(z)$ является эллиптической функцией.

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_h$ — неприводимое множество различных полюсов функции $f(z)$, и пусть

$$\sum_{s=1}^{m_r} b_{r,\,s}(z-\beta_r)^{-s}$$

является главной частью (суммой отрицательных степеней в лорановском разложении) функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\beta_r$, являющейся полюсом порядка m_k. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = f(z) - \sum_{r=1}^{h} \sum_{s=1}^{m_r} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} b_{r,\,s} \zeta^{(s-1)}(z-\beta_r).$$

Но

$$\sum_{r=1}^{h} b_{r,\,1} \zeta(z-\beta_r)$$

является эллиптической функцией, поскольку сумма $\sum b_{r,\,1}$ равна нулю как сумма вычетов для неприводимого множества полюсов (см. п. 13.11). С другой стороны, $\zeta^{(s-1)}(z-\beta_r)$ является при $s=2, 3, \ldots$ эллиптической функцией, а потому $\Phi(z)$ — эллиптическая функция. Так как главная часть $\zeta(z-\beta_r)$ при $z=\beta_r$ равна $(z-\beta_r)^{-1}$, то $\Phi(z)$ не имеет полюсов в точках $z=\beta_1, \ldots, \beta_h$. Но тогда эта функция вообще не имеет полюсов и, следовательно, является постоянной. Итак, *любая эллиптическая функция может быть представлена в виде*

$$f(z) = b_0 + \sum_{r=1}^{h} \sum_{s=1}^{m_r} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} b_{r,\,s} \zeta^{(s-1)}(z-\beta_r). \tag{2}$$

Такое представление особо полезно при интегрировании эллиптических функций. Из (2), 13.12(7) и 13.12(12) вытекает, что

$$\int f(u)\,du = b_0 u + c + \sum_{r=1}^{h} \Bigg\{ b_{r,\,1} \ln[\sigma(u-\beta_r)] - \\ - b_{r,\,2} \zeta(u-\beta_r) + \sum_{s=3}^{m_r} \frac{(-1)^s}{(s-1)!} b_{r,\,s} \wp^{(s-3)}(u-\beta_r) \Bigg\}. \tag{3}$$

Разложение (2) можно использовать для вывода формул 13.13(16) и (18).

Выражение через сигма-функции. Хотя функция $\sigma(z)$ не является эллиптической, легко показать с помощью 13.13(20), что функция

$$\Psi(z)=\prod_{r=1}^{h}\frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)} \tag{4}$$

является эллиптической тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)=0$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$; $\beta_1 \ldots, \beta_h$ — неприводимые множества нулей и полюсов функции $f(z)$, каждый из которых берется столько раз, какова его кратность. Мы знаем (см. 13.11), что $\sum\limits_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)$ является периодом. Поэтому, заменяя, если потребуется, некоторые из нулей конгруэнтными, мы можем добиться, чтобы $\sum\limits_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)=0$. Образуем функцию $\Psi(z)$ по формуле (4). Мы видим, что $f(z)/\Psi(z)$ является эллиптической функцией, не имеющей нулей и полюсов, и, следовательно, постоянна. Итак, *любая эллиптическая функция может быть представлена в виде*

$$f(z)=c\prod_{r=1}^{h}\frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)}, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ — неприводимое множество нулей и $\beta_1, \ldots, \beta_h$ — неприводимое множество полюсов функции $f(z)$, причем каждый нуль и каждый полюс повторяются столько раз, какова их кратность, и множества эти выбраны так, что

$$\sum_{r=1}^{h}\alpha_r=\sum_{r=1}^{h}\beta_r. \tag{6}$$

Представление (5) можно использовать для доказательства формулы 13.13(17).

Эллиптические интегралы. Пусть дан эллиптический интеграл в канонической форме Вейерштрасса

$$I=\int R(x,\ y)\,dx, \qquad y^2=4x^3-g_2x-g_3. \tag{7}$$

Если положить

$$x=\wp(z;\ g_2,\ g_3), \qquad y=\wp'(z;\ g_2,\ g_3), \tag{8}$$

то этот интеграл примет вид

$$I=\int R[\wp(z),\ \wp'(z)]\,\wp'(z)\,dz. \tag{9}$$

Подынтегральная функция является рациональной функцией от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ и, следовательно, эллиптической функцией, скажем, $f(z)$. Эту функцию можно разложить по формуле (2), а тогда интеграл может быть вычислен в виде (3).

Подстановка (8) представляет точки алгебраической кривой

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3. \tag{10}$$

Координаты x и y выражаются как однозначные функции параметра z, который является *униформизирующей переменной* для (10) (см. также п. 13.2).

Любой эллиптический интеграл

$$I = \int R(x, y)\,dx, \tag{11}$$

$$y^2 = G(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{12}$$

может быть сведен к функциям Вейерштрасса. Сначала мы сводим (12) к канонической форме Вейерштрасса согласно п. 13.5 и далее поступаем, как указано выше. Громоздкость вычислений, указанных в п. 13.5, может быть устранена, если использовать выражения 13.5(8) для инвариантов, по которым строятся функции Вейерштрасса. См., например, Bianchi (1916, 371—374), где проведено вычисление эллиптического интеграла первого рода вида (12).

13.15. Дескриптивные свойства и вырожденные случаи функций Вейерштрасса

Во многих приложениях коэффициенты многочлена $G(x)$ вещественны. В этом случае 13.5(8) показывает, что инварианты g_2 и g_3 также вещественны. Мы опишем кратко свойства функций $\wp(z)$ для вещественных значений g_2 и g_3. При этом рассмотрим раздельно случаи, когда дискриминант $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ положителен, и когда он отрицателен.

Пусть $\Delta > 0$. Тогда существует такая пара примитивных периодов 2ω, $2\omega'$, что ω — вещественное число, а ω' — чисто мнимое. В этом случае точечная решетка, состоящая из всех периодов функции, получается путем пересечения двух взаимно перпендикулярных систем, состоящих из равноудаленных параллельных линий. Параллелограмм периодов в этом случае является прямоугольником. Функция $\wp(z)$ вещественна на прямых этих систем

$$\operatorname{Re} z = 2m\omega, \quad i \operatorname{Im} z = 2n\omega', \quad m, n \text{ — целые},$$

а также на прямых, соответствующих полупериодам

$$\operatorname{Re} z = (2m+1)\omega, \quad i \operatorname{Im} z = (2n+1)\omega', \quad m, n \text{ — целые}.$$

Мы имеем следующие соотношения симметрии, в которых z_1 и z_2 — вещественные числа:

$$\wp(z_1 + iz_2) = \overline{\wp(z_1 - iz_2)} = \wp(-z_1 - iz_2) = \overline{\wp(-z_1 + iz_2)}.$$

Здесь черта означает переход к сопряженному комплексному выражению. В этом случае величины e_1, e_2, e_3 — вещественны, $e_1 > e_2 > e_3$, $e_1 > 0$, $e_3 < 0$. Когда z пробегает границу прямоугольника 0, ω, $\omega + \omega'$, ω', 0, функция $\wp(z)$ убывает сначала от бесконечности до $e_1 = \wp(\omega)$, потом до $e_2 = \wp(\omega + \omega')$, затем до $e_3 = \wp(\omega')$ и, наконец, до $-\infty$.

Пусть теперь $\Delta < 0$. Этот случай существенно отличается от рассмотренного выше. Здесь также существует пара периодов, первый из которых веществен, а второй — чисто мнимый, но в данном случае они не являются примитивными периодами. Однако существует пара комплексно сопряженных примитивных периодов, порождающая фундаментальный параллелограмм, который является ромбом. Если 2ω, $2\omega'$ — пара комплексно сопряженных примитивных периодов, то диагоналями параллелограмма периодов являются линии

$$\operatorname{Re} z = m(\omega + \omega'), \quad i \operatorname{Im} z = n(\omega - \omega'), \quad m, n \text{ — целые}.$$

На этих и только на этих линиях $\wp(z)$ вещественна. В данном случае только e_2 вещественно, числа же e_1 и e_3 комплексно сопряжены. Когда z пробегает диагонали параллелограмма периодов от нуля до $\omega + \omega'$ и далее до 2ω (или $2\omega'$), $\wp(z)$ убывает от $+\infty$ до e_2, а потом до $-\infty$.

Вырожденные случаи функции Вейерштрасса встречаются когда один или оба периода бесконечны или, что то же самое, два или все три из чисел e_1, e_2, e_3 совпадают. Мы имеем следующие три случая.

1. Вещественный период бесконечен:

$$e_1=e_2=a, \quad e_3=-2a, \tag{1}$$

$$g_2=12a^2, \quad g_3=-8a^3, \quad \omega=\infty, \quad \omega'=(12a)^{-1/2}\pi i, \tag{2}$$

$$\wp(z;\ 12a^2,\ -8a^3)=a+3a\left\{\operatorname{sh}\left[(3a)^{1/2}z\right]\right\}^{-2}, \tag{3}$$

$$\zeta(z;\ 12a^2,\ -8a^3)=-au+(3a)^{1/2}\operatorname{cth}\left[(3a)^{1/2}z\right], \tag{4}$$

$$\sigma(z;\ 12a^2,\ -8a^3)=(3a)^{-1/2}\operatorname{sh}\left[(3a)^{1/2}z\right]\exp\left(-\frac{1}{2}az^2\right). \tag{5}$$

2. Чисто мнимый период бесконечен:

$$e_1=2a, \quad e_2=e_3=-a, \tag{6}$$

$$g_2=12a^2, \quad g_3=8a^3, \quad \omega=(12a)^{-1/2}\pi, \quad \omega'=i\infty, \tag{7}$$

$$\wp(z;\ 12a^2,\ 8a^3)=-a+3a\left\{\sin\left[(3a)^{1/2}z\right]\right\}^{-2}, \tag{8}$$

$$\zeta(z;\ 12a^2,\ 8a^3)=az+(3a)^{1/2}\operatorname{ctg}\left[(3a)^{1/2}z\right], \tag{9}$$

$$\sigma(z;\ 12a^2,\ 8a^3)=(3a)^{-1/2}\sin\left[(3a)^{1/2}z\right]\exp\left(\frac{1}{2}az^2\right). \tag{10}$$

3. Оба периода бесконечны:

$$e_1=e_2=e_3=0, \quad g_2=g_3=0, \quad \omega=-i\omega'=\infty, \tag{11}$$

$$\wp(z;\ 0,\ 0)=z^{-2}, \quad \zeta(z;\ 0,\ 0)=z^{-1}, \quad \sigma(z;\ 0,\ 0)=z. \tag{12}$$

Во всех трех случаях $\Delta=0$.

13.16. Эллиптические функции Якоби

Функция Якоби

$$w=\operatorname{sn}u=\operatorname{sn}(u,\ k) \tag{1}$$

может быть определена, как в п. 13.9, с помощью интеграла

$$u=\int_0^w\left[(1-x^2)(1-k^2x^2)\right]^{-1/2}dx, \tag{2}$$

где квадратный корень принимает значение 1 при $x=0$. Поэтому $\operatorname{sn}(0,\ k)=1$. Интеграл можно вычислить через функции Вейерштрасса (см. п. 13.14). Оказывается, что

$$e_1:e_2:e_3=(2-k^2):(2k^2-1):-(1+k^2), \quad z=(e_1-e_3)^{-1/2}u \tag{3}$$

и

$$\operatorname{sn}(u,\ k)=\frac{(e_1-e_3)^{1/2}}{\left[\wp(z)-e_3\right]^{1/2}}. \tag{4}$$

Для других двух основных функций Якоби имеем

$$\operatorname{cn}(u,\ k)=\frac{\left[\wp(z)-e_1\right]^{1/2}}{\left[\wp(z)-e_3\right]^{1/2}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}(u,\ k)=\frac{\left[\wp(z)-e_2\right]^{1/2}}{\left[\wp(z)-e_3\right]^{1/2}}. \tag{6}$$

В (4), (5), (6) имеем

$$u=(e_1-e_3)^{1/2}z, \qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Все встречающиеся здесь квадратные корни однозначно определяются согласно 13.13(22) и (23). Используя эти два соотношения, можно переписать соотношения (4)—(6) в виде

$$\operatorname{sn}(u,\ k)=(e_1-e_3)^{1/2}\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{cn}(u,\ k)=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{dn}(u,\ k)=\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}. \tag{8}$$

Девять вспомогательных функций 13.9 (4) могут быть аналогичным образом выражены через сигма-функции. В дальнейшем мы не будем указывать формул для этих девяти функций, поскольку их легко получить из формул для трех основных функций (8).

В п. 13.9 функции Якоби были определены в окрестности точки $z=0$ с помощью обращения эллиптического интеграла. Равенства (8) показывают, что аналитические продолжения этих функций приводят к *однозначным аналитическим функциям*, полюсами которых являются нули функции $\sigma_3(z)$. Кроме того, из (8) и 13.12 (23) легко следует, что *функции Якоби — двоякопериодические*. Положим

$$u=(e_1-e_3)^{1/2}z, \quad \mathrm{K}=(e_1-e_3)^{1/2}\omega, \quad i\mathrm{K}'=(e_1-e_3)^{1/2}\omega' \tag{9}$$

и назовем K *вещественной четвертью периода*, а K' — *чисто мнимой четвертью периода*. Легко проверить, что (9) находится в соответствии с определением K и K' как полных эллиптических интегралов в 13.7 (1) и (2). Примитивные периоды функций sn, cn, dn могут быть теперь найдены с помощью 13.12 (23). Нули функции $\sigma(z)$ являются простыми и могут быть определены из 13.12 (11), нули же для $\sigma_\alpha(z)$ находятся с помощью 13.12 (22). Это дает (простые) нули и полюсы для функций Якоби. Наконец, из 13.12 (14) и 13.13 (23) легко найти вычеты всех трех функций (8). Результаты указаны в табл. 5.

Таблица 5

Периоды, полюсы и вычеты эллиптических функций Якоби

m и n — целые

Функции	Примитивные периоды	Нули	Полюсы	Вычеты
$\operatorname{sn}(u,\ k)$	$4\mathrm{K}$ $2i\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\,i\mathrm{K}'$	$\frac{(-1)^m}{k}$
$\operatorname{cn}(u,\ k)$	$4\mathrm{K}$ $2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$	$(2m+1)\,\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\,i\mathrm{K}'$	$\frac{(-1)^{m+n}}{ik}$
$\operatorname{dn}(u,\ k)$	$2\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$	$(2m+1)\,\mathrm{K}+(2n+1)\,i\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\,i\mathrm{K}'$	$(-1)^{n+1}\,i$

Если $0<k^2<1$, то K и K' вещественны. Выбирая и e_α вещественными, можно в силу (3) сделать так, что $e_1>e_2>e_3$, а тогда ω принимает вещественное значение и ω' — чисто мнимое. Это — случай $\Delta>0$ в п. 13.15.

Для любого $k^2\ (\neq 0,\ 1)$ возьмем параллелограмм, который является восьмой частью фундаментального параллелограмма для sn или dn, и обозначим его вершины буквами S, C, D, N, как на рис. 2. В этих обозначениях первая буква символа двенадцати функций Якоби указывает положение нуля, а вторая — положение полюса. Нули и полюсы повторяются через половину периода.

С помощью табл. 5 легко проверить, что любая ячейка содержит два простых полюса (причем сумма вычетов в этих полюсах равна нулю) и два простых нуля любой эллиптической функции Якоби. Таким образом, *функции* Якоби sn, cn, dn *являются эллиптическими функциями второго порядка.* Если задан модуль k, то формулы 13.7 (1) и (2) определяют четверть-периоды K и K' как функции от k, однозначные в k-плоскости, разрезанной от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞. Поэтому данные, указанные в табл. 5, однозначно определяют функции Якоби. Мы выразили эти функции через сигма-функции, однако можно провести конструкцию независимым образом так, как это было проведено в п. 13.12. См. Neville (1944), где симметричным образом проведена конструкция всех двенадцати функций Якоби. (Читатель должен иметь, однако, в виду, что обозначения Невиля несколько отличаются от обычных обозначений, используемых в этой книге.)

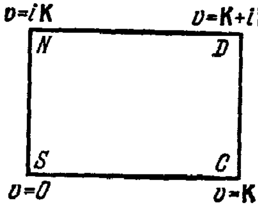


Рис. 2.

Полные эллиптические интегралы Лежандра второго рода также можно выразить через функции Вейерштрасса

$$E = \frac{e_1\omega + \eta}{(e_1 - e_3)^{1/2}}, \qquad E' = i\,\frac{e_3\omega' + \eta'}{(e_1 - e_3)^{1/2}}. \tag{10}$$

Модуль k и дополнительный модуль k' однозначно определяются формулами

$$k = \frac{(e_2 - e_3)^{1/2}}{(e_1 - e_3)^{1/2}}, \qquad k' = \frac{(e_1 - e_2)^{1/2}}{(e_1 - e_3)^{1/2}}. \tag{11}$$

Если задан модуль k, то равенство (3) определяет значение e_α (с точностью до общего множителя), а тогда по формулам 13.13 (5) можно найти инварианты. Функции Вейерштрасса, построенные по этим инвариантам, полностью определяют функции Якоби, их периоды и полные эллиптические интегралы. Обратно, функции Вейерштрасса, построенные по любым инвариантам, определяют функции Якоби, модуль которых задается формулой (11).

В п. 13.7 было указано, что (неполный) эллиптический интеграл второго рода является однозначной функцией от u. Он определяет функцию Якоби $E(u)$. Полагая в 13.6 (2) $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$, $\sin\varphi = \operatorname{sn}(u, k)$ и $\sin t = \operatorname{sn}(x, k)$, получаем

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(x, k)\,dx. \tag{12}$$

Функция Якоби $E(u)$ не является периодической, так как

$$E(u + 2K) = E(u) + 2E, \quad E(u + 2iK') = E(u) + 2i(K' - E'). \tag{13}$$

В некоторых случаях удобно использовать функцию

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}\,u, \tag{14}$$

которая является просто-периодической, так как

$$Z(u+2K)=Z(u), \qquad Z(u+2iK')=Z(u)-i\pi/K. \tag{15}$$

Хотя функции $E(u)$, $Z(u)$ не являются эллиптическими, они обладают многими свойствами, похожими на свойства эллиптических функций. См., например, Уиттекер и Ватсон (1963, пп. 22.73—22.734).

13.17. Дальнейшие свойства эллиптических функций Якоби

Мы будем часто употреблять сокращенные обозначения

$$s=\operatorname{sn}(u, k), \qquad c=\operatorname{cn}(u, k), \qquad d=\operatorname{dn}(u, k). \tag{1}$$

Следующие основные формулы являются следствиями определений функций Якоби и свойств $\wp$-функций Вейерштрасса. Дифференцирование по переменной u обозначено штрихом. Таким образом,

$$(s)'=\frac{ds}{du}, \qquad (s)''=\frac{d^2s}{du^2} \text{ и т. д.}$$

$$s^2+c^2=1, \qquad k^2s^2+d^2=1, \qquad d^2-k^2c^2=k'^2, \tag{2}$$

$$(s)'=cd, \qquad (c)'=-sd, \qquad (d)'=-k^2sc, \tag{3}$$

$$(s)''=-s(d^2+k^2c^2), \qquad (c)''=-c(d^2-k^2s^2), \qquad (d)''=-k^2d(c^2-s^2), \tag{4}$$

$$(s)'^2=(1-s^2)(1-k^2s^2), \tag{5}$$

$$(c)'^2=(1-c^2)(k^2c^2+k'^2), \tag{6}$$

$$(d)'^2=(1-d^2)(d^2-k'^2), \tag{7}$$

$$\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u, \qquad \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u, \qquad \operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u, \tag{8}$$

$$\operatorname{sn}(2K-u)=\operatorname{sn}u, \qquad \operatorname{cn}(2K-u)=-\operatorname{cn}u, \qquad \operatorname{dn}(2K-u)=\operatorname{dn}u, \tag{9}$$

$$\operatorname{sn}(2iK'-u)=-\operatorname{sn}u, \qquad \operatorname{cn}(2iK'-u)=-\operatorname{cn}u, \qquad \operatorname{dn}(2iK'-u)=-\operatorname{dn}u. \tag{10}$$

Разложения в степенные ряды

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u, k)&=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-\ldots,\\
\operatorname{cn}(u, k)&=1-\frac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}+\ldots,\\
\operatorname{dn}(u, k)&=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}+\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

имеют радиус сходимости

$$\min(|K'|, |2K+iK'|, |2K-iK'|). \tag{12}$$

Теоремы сложения для функций Якоби могут быть получены из теорем сложения для $\wp$-функций с помощью преобразований (см. на стр. 64 табл. 11 н. 13.22)

$$\operatorname{sn}(iu, k)=i\operatorname{sc}(u, k'), \qquad \operatorname{cn}(iu, k)=\operatorname{nc}(u, k'), \qquad \operatorname{dn}(iu, k)=\operatorname{dc}(u, k'). \tag{13}$$

В теоремах сложения мы будем применять сокращенные обозначения

$$s_1=\operatorname{sn}(u_1, k), \qquad s_2=\operatorname{sn}(u_2, k), \qquad s_2'=\operatorname{sn}(u_2, k') \tag{14}$$

и аналогичные сокращенные обозначения для cn, dn. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u_1+u_2,\ k)&=\frac{s_1c_2d_2+c_1d_1s_2}{1-k^2s_1^2s_2^2},\\ \operatorname{cn}(u_1+u_2,\ k)&=\frac{c_1c_2-s_1d_1s_2d_2}{1-k^2s_1^2s_2^2},\\ \operatorname{dn}(u_1+u_2,\ k)&=\frac{d_1d_2-k^2s_1c_1s_2c_2}{1-k^2s_1^2s_2^2};\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u_1+iu_2,\ k)&=\frac{s_1d_2'+ic_1d_1s_2'c_2'}{c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2},\\ \operatorname{cn}(u_1+iu_2,\ k)&=\frac{c_1c_2'-is_1d_1s_2'd_2'}{c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2},\\ \operatorname{dn}(u_1+iu_2,\ k)&=\frac{d_1c_2'd_2'-ik^2s_1c_1s_2'}{c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2};\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(2u,\ k)&=\frac{2scd}{1-k^2s^4},\\ \operatorname{cn}(2u,\ k)&=\frac{c^2-s^2d^2}{1-k^2s^4},\\ \operatorname{dn}(2u,\ k)&=\frac{d^2-k^2s^2c^2}{1-k^2s^4};\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u/2,\ k)&=(1-c)^{1/2}(1+d)^{-1/2},\\ \operatorname{cn}(u/2,\ k)&=(d+c)^{1/2}(1+d)^{-1/2},\\ \operatorname{dn}(u/2,\ k)&=(d+k^2c+k'^2)^{1/2}(1+d)^{-1/2}.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

В формулах (17) и (18) снова использованы обозначения (1). Равенства (16) показывают, что значения эллиптических функций Якоби для любого комплексного числа u могут быть вычислены, если известны значения этих функций и функций с дополнительным модулем на вещественной оси.

Отметим также следующие разложения в ряды Фурье:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} u&=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{2K},\\ \operatorname{cn} u&=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)\frac{\pi u}{2K},\\ \operatorname{dn} u&=\frac{2\pi}{K}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos n\frac{\pi u}{K}\right],\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

где

$$q=e^{i\pi\tau}=\exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right).\tag{20}$$

Таблица 6

Частные значения эллиптических функций Якоби

$\mathrm{sn}\ (n\ (mK/2+niK'/2)$

$mK/2$ \ $niK'/2$	0	$K/2$	K	$3K/2$
0	0	$(1+k')^{-1/2}$	1	$(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}]$
iK'	∞	$(1-k')^{-1/2}$	k^{-1}	$(1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}]$

$\mathrm{cn}\ (mK/2+niK'/2)$

$mK/2$ \ $niK'/2$	0	$K/2$	K	$3K/2$
0	1	$k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$	0	$-k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$	$-ik^{-1}k'$	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$

$\mathrm{dn}\ (mK/2+niK'/2)$

$mK/2$ \ $niK'/2$	0	$K/2$	K	$3K/2$
0	1	$k'^{1/2}$	k'	$k'^{1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$(1+k)^{1/2}$	$\left(\frac{1}{2}k'\right)^{1/2}[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}]$	$(1-k)^{1/2}$	$\left(\frac{1}{2}k'\right)^{1/2}[(1+k')^{1/2}+i(1-k')^{1/2}]$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}$	0	$ik'^{1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-(1+k)^{1/2}$	$-\left(\frac{1}{2}k'\right)^{1/2}[(1+k')^{1/2}+i(1-k')^{1/2}]$	$-(1-k)^{1/2}$	$-\left(\frac{1}{2}k'\right)^{1/2}[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}]$

Разложения (19) справедливы в полосе комплексной плоскости, ограниченной прямыми линиями $\pm iK'+\lambda K$, $-\infty<\lambda<\infty$.

Значения sn, cn, dn в точках вида $mK+niK'$ (m, n — целые) могут быть найдены с помощью 13.12 (24); после этого значения в точках

$$\frac{1}{2}mK+\frac{1}{2}niK', \qquad m,\ n\text{ — целые,} \tag{21}$$

могут быть найдены с помощью формул (18). Результаты для $0\leqslant m, n\leqslant 3$ указаны в табл. 6. В этой таблице в каждом случае взяты точки, принадлежащие половине ячейки. Значения в точках вида (21), принадлежащих второй половине ячейки, могут быть найдены с помощью табл 7, а в остальных точках (21) — с помощью свойств периодичности функций sn, cn, dn. Все квадратные корни в этой таблице взяты положительными при $0<k<1$, а для остальных значений k определяются с помощью аналитического продолжения.

Из теорем сложения и табл. 6 можно получить значения функций Якоби в точках вида $\frac{1}{2}mK+\frac{1}{2}niK'+u$ через их значения в точке u. Табл. 7 дает результаты для точек вида $mK+niK'\pm u$. Для того чтобы выявить симметрию

Таблица 7

Изменение аргумента эллиптических функций на четверть и половину периода. Симметрия

sn $(mK+niK'\pm u)$

niK' \ mK	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
0	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
iK'	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
$2iK'$	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$

cn $(mK+niK'\pm u)$

niK' \ mK	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$
0	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$
iK'	$ik'/(kc)$	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$
$2iK'$	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$

Продолжение табл. 7

$\mathrm{dn}\,(m\mathrm{K}+ni\mathrm{K}'\pm u)$

$ni\mathrm{K}'$ \ $m\mathrm{K}$	$-\mathrm{K}$	0	K	$2\mathrm{K}$
$-i\mathrm{K}'$	$\mp ik'{s}/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$
0	k'/d	d	k'/d	d
$i\mathrm{K}'$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$
$2i\mathrm{K}'$	$-k'/d$	$-d$	$-k'/d$	$-d$
$3i\mathrm{K}'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$

функций Якоби относительно точек S, C, D, N, в таблицу включены значения, выходящие за границы одной ячейки В таблице используются сокращения (1). В тех случаях, когда в ней встречаются двойные знаки, верхний знак относится к точке $m\mathrm{K}+ni\mathrm{K}'+u$, а нижний — к точке $m\mathrm{K}+ni\mathrm{K}'-u$.

Если заданы e_1, e_2 и e_3, то эллиптические функции Якоби можно использовать для вычисления функций Вейерштрасса Модули функций Якоби и значения переменных для этих функций даются формулами 13 16 (7). Периоды функций Вейерштрасса вытекают из 13 16 (9), а значения величин η и η' — из 13.16 (10). Основной функцией Вейерштрасса является

$$\wp(z)=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}. \tag{22}$$

Величины e_α нумеруются при этом так, чтобы выполнялось неравенство $|k|\leqslant 1$.

13.18. Дескриптивные свойства и вырожденные случаи эллиптических функций Якоби

Во многих приложениях встречается случай, когда $0<k<1$ При этом выполняется также неравенство $0<k'<1$, и соотношение 13 8 (1) показывает, что K и K' вещественны. В этом случае точечная решетка $m\mathrm{K}+ni\mathrm{K}'$ порождается прямоугольной решеткой (последняя, однако, не обязана соответствовать примитивным периодам) Укажем свойства, которыми в этом случае обладают функции $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ (рис 3—5) Обозначения вне фигуры указывают положение точек решетки $m\mathrm{K}+ni\mathrm{K}'$. Обозначения внутри фигуры дают значения рассматриваемой функции в точках решетки Вдоль сплошных прямых функции вещественны, причем они монотонны между двумя соседними точками решетки Вдоль пунктирных прямых функции принимают чисто мнимые значения, причем коэффициенты при i монотонно меняются между любыми двумя соседними точками решетки Вдоль прямых, соединяющих нуль данной функции с ее полюсом, знак мнимой части не всегда ясен из рисунка, и мы его указываем знаками минус и плюс, Из рис 3—5 видно, что все три функции вещественны и периодичны на прямых $\operatorname{Im} u = 2nK'$ Функции sn и cn имеют период 4K и колеблются от —1 до +1. Функция dn имеет период 2K и колеблется от +1 до k' на прямых,

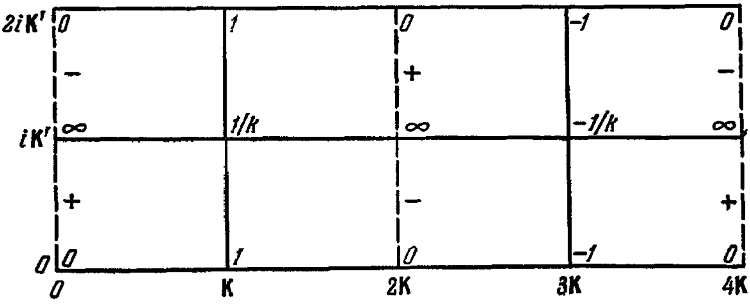


Рис. 3. sn (u) для $0 \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant 4K$ $0 \leqslant \operatorname{Im} u \leqslant 2K'$.

соответствующих четным значениям n, и от —1 до $—k'$ на прямых, соответствующих нечетным значениям n

Рисунки могут быть также использованы для определения знаков вещественных и мнимых частей функции Якоби в любом из прямоугольников. Возьмем, например, прямоугольник, вершинами которого являются K, 2K,

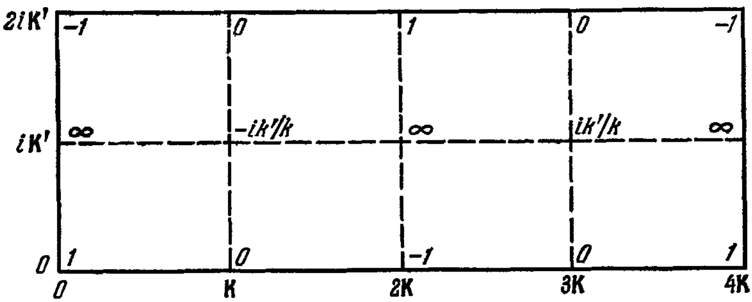


Рис 4 cn (u) для $0 \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant 4K$, $0 \leqslant \operatorname{Im} u \leqslant 2K'$.

$2K + iK'$, $K + iK'$. Из рис. 3—5 видно, что на границах этого прямоугольника

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re} \operatorname{sn} u \geqslant 0, & \operatorname{Im} \operatorname{sn} u \leqslant 0, \\ \operatorname{Re} \operatorname{cn} u \leqslant 0, & \operatorname{Im} \operatorname{cn} u \leqslant 0, \\ \operatorname{Re} \operatorname{dn} u \geqslant 0, & \operatorname{Im} \operatorname{dn} u \geqslant 0; \end{array}$$

и в силу свойств конформного отображения эти равенства остаются справедливыми и внутри прямоугольника

Симметрии эллиптических функций Якоби также можно вывести из рис. 3—5. Пусть, скажем, u_1 и u_2 симметричны относительно нуля или полюса одной из функций Якоби $f(u)$, пусть u_1 и u_3 симметричны относительно точки решетки, которая не является ни нулем, ни полюсом, u_1 и u_4 симметричны относительно прямой, на которой $f(u)$ вещественна, и u_1 и u_5 симметричны относительно прямой, на которой $f(u)$ принимает чисто мнимые значения (рис 6). Тогда

$$f(u_1) = -f(u_2) = f(u_3) = \overline{f(u_4)} = -\overline{f(u_5)}.$$

Отметим также, что

$$|\operatorname{sn} u| = k^{-1/2}, \qquad \operatorname{Im} u = (n + 1/2)\,K', \tag{1}$$

$$|\operatorname{dn} u| = k'^{1/2}, \qquad \operatorname{Re} u = (n + 1/2)\,K. \tag{2}$$

Поворот иа прямой угол преобразует диаграмму для $\operatorname{sn} u$ (рис. 3) в диаграмму для $\operatorname{dn} u$ (рис. 5), вращение на прямой угол не изменяет диаграмму для $\operatorname{cn} u$ (рис. 4).

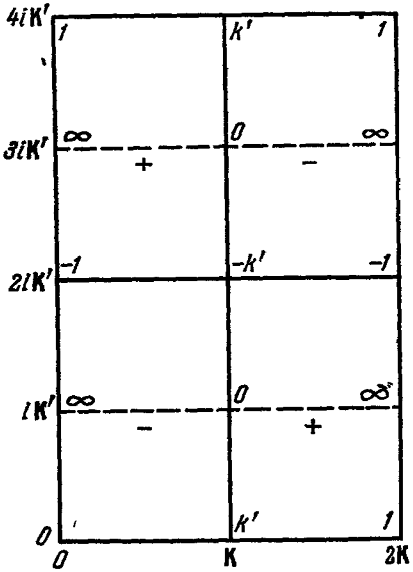


Рис. 5. $\operatorname{dn}(u)$ для $0 \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant 2K$, $0 \leqslant \operatorname{Im} u \leqslant 4K'$.

Более полное описание свойств эллиптических функций Якоби при $0 < k < 1$ содержится в изображении рельефа этих функций, данном в книге Янке—Эмде—Леш (1964, стр. 122, 123).

Эллиптические функции Якоби *вырождаются*, если один или оба их периода обращаются в бесконечность, т е если k^2 равно нулю, единице или не определено (последний случай тривиален). Как и для функции Вейерштрасса (см. п. 13 15), мы укажем три случая:

1. Вещественный период бесконечен:

$$k = 1, \quad k' = 0, \quad K = \infty, \quad K' = \pi/2, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th} u, \\ &\operatorname{cn}(u, 1) = \operatorname{dn}(u, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} u}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Чисто мнимый период бесконечен:

$$\left.\begin{aligned} &k = 0, \quad k' = 1, \quad K = \pi/2, \\ &K' = \infty, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u, \qquad \operatorname{cn}(u, 0) = \cos u, \qquad \operatorname{dn}(u, 0) = 1. \tag{6}$$

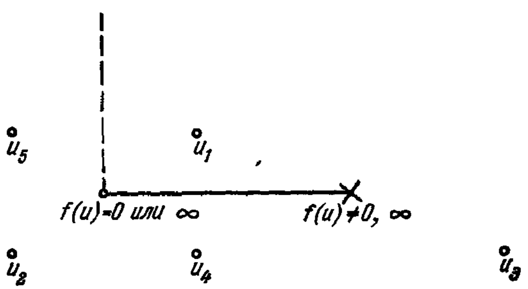


Рис. 6. Симметрии эллиптических функций Якоби.

3. Оба периода бесконечны:

$$K = K' = \infty, \qquad \operatorname{sn} u = 0, \qquad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = 1. \tag{7}$$

13.19. Тета-функции

Хотя функции, тесно связанные с тета-функциями, изучались Эйлером, Яковом Бернулли и Фурье, их систематическое изучение и применение к теории эллиптических функций было проведено Якоби. Тета-функции Якоби соответствуют сигма-функциям в теории Вейерштрасса. Подобно сигма-функциям, тета-функции являются целыми и, следовательно, не обладают двоякой периодичностью. Однако они весьма просто преобразуются при сдвиге на период. Тета-функции более стандартизированы, чем сигма-функции. Они периодичны, могут быть представлены чрезвычайно быстро сходящимися рядами и являются наилучшим средством для вычисления значений эллиптических функций.

Для функций Вейерштрасса с переменной z и полупериодами ω, ω' мы положили $\tau=\omega'/\omega$ и ввели условие $\operatorname{Im}\tau > 0$. Функции Якоби были выражены через u и четверти периодов K, K', где

$$u=(e_1-e_3)^{1/2}z, \qquad \mathrm{K}=(e_1-e_3)^{1/2}\,\omega, \qquad i\mathrm{K}'=(e_1-e_3)^{1/2}\,\omega'. \tag{1}$$

Тета-функции выражаются через переменную

$$v=\frac{z}{2\omega}=\frac{u}{2\mathrm{K}}, \tag{2}$$

а в качестве параметра выбирается либо

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}=i\,\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}, \qquad \operatorname{Im}\tau > 0, \tag{3}$$

либо

$$q=e^{i\pi\tau}=e^{i\pi\omega'/\omega}=\exp\left(-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right), \qquad |q|<1. \tag{4}$$

Полупериодами являются 1 и τ. Используя 13.10 (8), можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

$$|q|<\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right). \tag{5}$$

Однако в дальнейшем не будет предполагаться, что примитивные периоды выбраны так, чтобы выполнялось это неравенство.

Четыре тета-функции определяются следующим образом:

$$\theta_1(v)=\theta_1(v,q)=\theta_1(v\,|\,\tau)=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin\left[(2n+1)\pi v\right], \tag{6}$$

$$\theta_2(v)=\theta_2(v,q)=\theta_2(v\,|\,\tau)=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\cos\left[(2n+1)\pi v\right], \tag{7}$$

$$\theta_3(v)=\theta_3(v,q)=\theta_3(v\,|\,\tau)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}\cos(2n\pi v), \tag{8}$$

$$\theta_4(v)=\theta_4(v,q)=\theta_4(v\,|\,\tau)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi v). \tag{9}$$

Последняя из этих функций обычно обозначается просто через $\theta_0(v)$ или $\theta(v)$; эти ряды сходятся для всех (комплексных) v и для всех значений q таких, что $|q|<1$. Благодаря наличию множителя q^{n^2} ряды сходятся чрезвычайно быстро. Эти четыре ряда можно переписать так:

$$\theta_1(v)=i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)v}, \tag{10}$$

$$\theta_2(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)v}, \tag{11}$$

$$\theta_3(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i\pi 2nv}, \tag{12}$$

$$\theta_4(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{i\pi 2nv}. \tag{13}$$

В этом виде они определяют лорановское разложение по переменной $\exp(i\pi v)$ и сходятся для всех конечных значений этой переменной, отличных от нуля.

Все четыре тета-функции являются целыми функциями от v. Все они периодичны, причем период θ_1 и θ_2 равен 2, а период θ_3 и θ_4 равен 1. Их свойства при сдвиге на половину и четверть периода видны из табл. 8, в которой приняты сокращения

$$A(v)=e^{-i\pi(2v+\tau)}, \qquad B(v)=e^{-i\pi(v+\tau/4)}. \tag{14}$$

Табл. 8 показывает также четность или нечетность тета-функций.

Таблица 8

Изменение аргумента тета-функции на четверть и половину периода. Симметрия

$\theta(v)$	$\theta(-v)$	$\theta(v+1)$	$\theta(v+\tau)$	$\theta(v+1+\tau)$	$\theta(v+1/2)$	$\theta(v+\tau/2)$	$\theta(v+1/2+\tau/2)$
$\theta_1(v)$	$-\theta_1(v)$	$-\theta_1(v)$	$-A(v)\,\theta_1(v)$	$A(v)\,\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$iB(v)\,\theta_4(v)$	$B(v)\,\theta_3(v)$
$\theta_2(v)$	$\theta_2(v)$	$-\theta_2(v)$	$A(v)\,\theta_2(v)$	$-A(v)\,\theta_2(v)$	$-\theta_1(v)$	$B(v)\,\theta_3(v)$	$-iB(v)\,\theta_4(v)$
$\theta_3(v)$	$\theta_3(v)$	$\theta_3(v)$	$A(v)\,\theta_3(v)$	$A(v)\,\theta_3(v)$	$\theta_4(v)$	$B(v)\,\theta_2(v)$	$iB(v)\,\theta_1(v)$
$\theta_4(v)$	$\theta_4(v)$	$\theta_4(v)$	$-A(v)\,\theta_4(v)$	$-A(v)\,\theta_4(v)$	$\theta_3(v)$	$iB(v)\,\theta_1(v)$	$B(v)\,\theta_2(v)$

Табл. 8 показывает также, что тета-функции могут порождаться любой из них путем прибавления четвертей периодов. Из этой таблицы видно, что функция θ_1 имеет нуль при $v=0$ и, следовательно, нули во всех точках $m+n\tau$, где m и n — целые. Можно доказать (путем интегрирования θ_1'/θ_1 по границе параллелограмма с вершинами $\pm 1/2 \pm \tau/2$), что этим исчерпываются нули функции θ_1; табл. 8 может быть использована для того, чтобы определять нули остальных трех тета-функций. В табл 9 m и n — целые числа.

Поскольку мы знаем нули тета-функций, можно получить разложение этих функций в бесконечные произведения, а из этих произведений — разложения для $\ln\theta(v)$ и $\theta'(v)/\theta(v)$ на простые дроби. Из (17) вытекает также

Нули тета-функции — Таблица 9

$\theta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\theta_4(v)$
Нули	$m+n\tau$	$m+1/2+n\tau$	$m+1/2+(n+1/2)\tau$	$m+(n+1/2)\tau$

разложение (19). В этих произведениях мы используем обозначение

$$q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}). \tag{15}$$

Соответствующие формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1(v)&=2q_0\,q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),\\
\theta_2(v)&=2q_0\,q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),\\
\theta_3(v)&=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),\\
\theta_4(v)&=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2});
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ln\left[\pi\frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(v)}\right]&=\ln(\sin\pi v)+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\frac{\sin^2 m\pi v}{m},\\
\ln\left[\frac{\theta_2(v)}{\theta_2(0)}\right]&=\ln(\cos\pi v)+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\frac{\sin^2 m\pi v}{m},\\
\ln\left[\frac{\theta_3(v)}{\theta_3(0)}\right]&=4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^{m}}{1-q^{2m}}\frac{\sin^2 m\pi v}{m},\\
\ln\left[\frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)}\right]&=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m}}{1-q^{2m}}\frac{\sin^2 m\pi v}{m};
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)}&=\pi\operatorname{ctg}\pi v+4\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v,\\
\frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)}&=-\pi\operatorname{tg}\pi v+4\pi\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v,\\
\frac{\theta_3'(v)}{\theta_3(v)}&=4\pi\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^{m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v,\\
\frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)}&=4\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v;
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(v+w)}{\theta_1(v-w)}\right]=\\
&\qquad=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sin\pi(v+w)}{\sin\pi(v-w)}\right]+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v\sin 2m\pi w,\\
&\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_2(v+w)}{\theta_2(v-w)}\right]=\\
&\qquad=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\cos\pi(v+w)}{\cos\pi(v-w)}\right]+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v\sin 2m\pi w,\\
&\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_3(v+w)}{\theta_3(v-w)}\right]=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v\sin 2m\pi w,\\
&\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_4(v+w)}{\theta_4(v-w)}\right]=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v\sin 2m\pi w.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Равенства (16) справедливы во всей v-плоскости. Равенства (17) и (18) для функций θ_1 и θ_2 справедливы в полосе $|\operatorname{Im} v|<\operatorname{Im}\tau$, а для функций θ_3 и θ_4 — в полосе $|\operatorname{Im} v|<\frac{1}{2}\operatorname{Im}\tau$. Что касается равенств (19), то первые два из них справедливы, если $|\operatorname{Im} v|+|\operatorname{Im} w|<\operatorname{Im}\tau$, а последние два — если $|\operatorname{Im} v|+|\operatorname{Im} w|<\frac{1}{2}\operatorname{Im}\tau$. Из (18) вытекает, что

$$\frac{\theta'_\alpha(v+m+n\tau)}{\theta_\alpha(v+m+n\tau)}=\frac{\theta'_\alpha(v)}{\theta_\alpha(v)}-2n\pi i,\qquad \alpha=1,\,2,\,3,\,4;\ m,\ n\text{ — целые.}\qquad(20)$$

Между квадратами тета-функций одного и того же переменного имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1^2(v)\,\theta_2^2(0)&=\theta_4^2(v)\,\theta_3^2(0)-\theta_3^2(v)\,\theta_4^2(0),\\
\theta_1^2(v)\,\theta_3^2(0)&=\theta_4^2(v)\,\theta_2^2(0)-\theta_2^2(v)\,\theta_4^2(0),\\
\theta_1^2(v)\,\theta_4^2(0)&=\theta_3^2(v)\,\theta_2^2(0)-\theta_2^2(v)\,\theta_3^2(0),\\
\theta_4^2(v)\,\theta_4^2(0)&=\theta_3^2(v)\,\theta_3^2(0)-\theta_2^2(v)\,\theta_2^2(0).
\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Каждое из этих соотношений может быть доказано следующим образом: мы показываем, что отношение обеих частей равенств является двояко-периодической функцией (с периодами 1 и τ), не имеющей нулей и полюсов, а следовательно, постоянно, и вычисляем эту постоянную, используя специальные значения v (полупериоды).

Равенства (21) являются частными случаями так называемых формул сложения для тета-функций, которые выражают

$$\theta_\alpha(v+w)\,\theta_\alpha(v-w)\,\theta_4^2(0)$$

через квадраты тета-функций от v и w (см. Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 21.21).

«Тета-функции нулевого аргумента»

$$\theta_1'(0),\quad \theta_2(0),\quad \theta_3(0),\quad \theta_4(0)$$

имеют важное значение (см. п. 13.20). Они удовлетворяют многим тождествам, среди которых наиболее важными являются

$$\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta_4(0), \tag{22}$$

$$\theta_2^4(0) + \theta_4^4(0) = \theta_3^4(0). \tag{23}$$

Относительно графической иллюстрации свойств тета-функций нулевого аргумента и относительно графического изображения и описания свойств $\theta_\alpha(v\,|\,0;\ 1)$ при вещественных значениях v см. книгу Tricomi (1937, стр. 137—140).

Тета-функции встречаются, помимо теории эллиптических функций, в теории теплопроводности и аналогичных краевых задачах математической физики. Как видно из (10)—(13), функции $\theta_\alpha\left(\frac{1}{2}x\,|\,i\pi t\right)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

В этой связи следует отметить, что тета-функции имеют чрезвычайно простое преобразование Лапласа.

Существуют также нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка (по переменной v), которым удовлетворяют отношения тета-функций. Эти уравнения могут быть легко выведены из связи между эллиптическими функциями и отношениями тета-функций (см. п. 13.20).

Эрмит изучал функцию

$$\theta_{\mu,\nu}(v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi\tau\left(n + \frac{1}{2}\mu\right)^2 + 2i\pi v\left(n + \frac{1}{2}\mu\right) + i\pi n\nu\right] \tag{25}$$

(см. Гурвиц, 1933, стр. 260—263). Четыре тета-функции Якоби являются частными случаями функции Эрмита.

13.20. Выражение эллиптических функций и эллиптических интегралов через тета-функции. Проблема обращения

Тета-функции тесно связаны с сигма-функциями Вейерштрасса. Поэтому функции Вейерштрасса можно выразить через тета-функции. Поскольку функции Якоби выражаются через функции Вейерштрасса, их также можно выразить через тета-функции. Наконец, с помощью тета-функций можно получить выражения для полных и неполных эллиптических интегралов третьего рода. Мы будем использовать обозначения z для переменной в функциях Вейерштрасса, u — для переменной в эллиптических функциях Якоби и v — для переменной в тета-функциях. Эти переменные связаны формулами 13.19(2). Связь между различными обозначениями периодов и других величин дается равенствами 13.19(1)—(4).

Функции Вейерштрасса:

$$\sigma(z) = 2\omega \exp\left(\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\frac{\theta_1(v)}{\theta_1'(0)}, \tag{1}$$

$$\sigma_\alpha(z) = \exp\left(\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\frac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_{\alpha+1}(0)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$\zeta(z)=\frac{\eta}{\omega}z+\frac{1}{2\omega}\frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)}, \tag{3}$$

$$\wp(z)=e_\alpha+\frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_{\alpha+1}(0)}\frac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_1(v)}\right]^2, \qquad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{4}$$

$$\wp'(z)=-\frac{1}{4\omega^3}\frac{\theta_2(v)\,\theta_3(v)\,\theta_4(v)\,\theta_1'(0)}{\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta_4(0)\,\theta_1^3(v)}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
12\omega^2 e_1&=\pi^2\left[\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)\right],\\
12\omega^2 e_2&=\pi^2\left[\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)\right],\\
12\omega^2 e_3&=-\pi^2\left[\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
(e_2-e_3)^{1/2}&=i\,(e_3-e_2)^{1/2}=\frac{\pi}{2\omega}\,\theta_2^2(0),\\
(e_1-e_3)^{1/2}&=i\,(e_3-e_1)^{1/2}=\frac{\pi}{2\omega}\,\theta_3^2(0),\\
(e_1-e_2)^{1/2}&=i\,(e_2-e_1)^{1/2}=\frac{\pi}{2\omega}\,\theta_4^2(0),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_2&=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4\left[\theta_2^8(0)+\theta_3^8(0)+\theta_4^8(0)\right],\\
g_3&=\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6\left[\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\right]\left[\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)\right]\left[\theta_4^4(0)-\theta_2^4(0)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\Delta^{1/4}=\frac{\pi}{4\omega^3}\,\theta_1'^2(0)=\frac{\pi^3}{4\omega^3}\left[\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta_4(0)\right]^2, \tag{9}$$

$$\eta=-\frac{1}{12\omega}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}, \qquad \eta'=-\frac{\pi i}{2\omega}-\frac{\tau}{12\omega}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}. \tag{10}$$

Для доказательства равенства (1) заметим, что отношение функций, стоящих в обеих частях равенства, является двояко-периодической функцией, не имеющей полюсов и нулей, и стремится к единице, когда v и z стремятся к нулю Равенство (2) следует из 13.12 (22) и табл. 8 п. 13 19. Равенство (3) получается логарифмическим дифференцированием (1), равенство (4) — из (2) и 13.13 (22), равенство (5) — из (4) и 13.13 (21), равенства (6) и (7) — из 13.13 (23), равенство (8) — из 13.13 (5) и (6), равенство (9) — из 13.13 (7) и равенство (10) — из (1) и (3). Все функции Вейерштрасса имеют периоды 2ω, $2\omega'$ и переменную z. Переменные v и q для тета-функций даются соотношениями 13 19 (2) и (4).

Эллиптические функции Якоби. Следующие соотношения получаются из формул п. 13.16 с помощью равенств (1)—(10):

$$k^{1/2}=\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \qquad k'^{1/2}=\frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}, \tag{11}$$

$$K^{1/2}=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2}\theta_3(0), \qquad K'^{1/2}=\left(-\frac{\tau i}{2}\right)^{1/2}\theta_3(0), \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}u&=\frac{\theta_3(0)\,\theta_1(v)}{\theta_2(0)\,\theta_4(v)}, & \operatorname{cn}u&=\frac{\theta_4(0)\,\theta_2(v)}{\theta_2(0)\,\theta_4(v)},\\
\operatorname{dn}u&=\frac{\theta_4(0)\,\theta_3(v)}{\theta_3(0)\,\theta_4(v)}, & Z(u)&=E(u)-\frac{E}{K}u=\frac{1}{2K}\frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если дано τ, то равенство (11) определяет модуль эллиптических функций Якоби, равенство (12) — четверть периоды, а равенство (13) — сами функции. В приложениях эллиптических функций обычно бывает задана величина k^2 и задача состоит в том, существует ли число q такое, что $|q| < 1$ и

$$k^2 = \frac{\theta_2^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)} = 1 - \frac{\theta_4^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)}. \tag{14}$$

Задача известна под названием *проблемы обращения*. Во многих практических приложениях мы имеем $0 < k^2 < 1$. В этом случае по 13.19 (16) имеем

$$\frac{\theta_4^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n+1}}.$$

Когда q возрастает по вещественной оси от 0 до 1, то бесконечное произведение монотонно убывает от 1 до 0 и, следовательно, уравнение (14) имеет в точности одно решение q, для которого $0 < q < 1$. Для других значений k^2 изучение значительно более сложно (см., например, Уиттекер и Ватсон, 1963, пп. 21.7—21.71) и приводит к комплексным значениям q. Доказательство единственности системы эллиптических функций Якоби для заданного $k^2 \neq 0$, 1 может быть основано на теории эллиптических модулярных функций.

Эллиптические интегралы. Основные эллиптические интегралы в нормальной форме Лежандра 13.6 (1)—(3) можно вычислить с помощью тета-функций. Образуем эллиптические функции Якоби с модулем k, определим четверти периода K и K′ и положим параметр и аргумент тета-функций соответственно равными

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right), \qquad v = \frac{F(\varphi, k)}{2K}. \tag{15}$$

Тогда в силу (13) имеем

$$E(\varphi, k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)} + 2Ev. \tag{16}$$

Вычисление эллиптических интегралов третьего рода более сложно. Мы укажем результаты для случая, когда φ и ν вещественны и $0 < k < 1$, выразив ν через вспомогательный вещественный параметр γ, причем в промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, -k^2)$, $(-k^2, 0)$, $(0, \infty)$ это выражение имеет различный вид. Используя (15) и полагая

$$\beta = \frac{\gamma}{2K}, \tag{17}$$

имеем (см. Tricomi, 1937, стр. 153—158)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\operatorname{cn}(\gamma, k)\operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)} \Pi\left[\varphi, -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(\gamma, k)}, k\right] = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(v+\beta)}{\theta_1(v-\beta)}\right] - \frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)} v, \quad 0 < \gamma < K, |v| > \beta, \\ &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(\beta+v)}{\theta_1(\beta-v)}\right] - \frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)} v, \quad 0 < \gamma < K, |v| < \beta; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\gamma, k')\operatorname{cn}(\gamma, k')}{\operatorname{dn}(\gamma, k')} \Pi[\varphi, -\operatorname{dn}^2(\gamma, k'), k] =$$

$$= -\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_2(v+i\beta)}{\theta_2(v-i\beta)}\right] - i\frac{\theta_3'(i\beta)}{\theta_3(i\beta)} v, \qquad 0 < \gamma < K', \tag{19}$$

$$\frac{\operatorname{cn}(\gamma, k)\operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)}\Pi[\varphi, -k^2\operatorname{sn}^2(\gamma, k), k] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_4(v+\beta)}{\theta_4(v-\beta)}\right] + \frac{\theta_1'(\beta)}{\theta_1(\beta)}v, \qquad 0<\gamma<K, \tag{20}$$

$$\frac{\operatorname{dn}(\gamma, k')}{\operatorname{sn}(\gamma, k')\operatorname{cn}(\gamma, k')}\Pi\left[\varphi, k^2\frac{\operatorname{sn}^2(\gamma, k')}{\operatorname{cn}^2(\gamma, k')}, k\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_4(v+i\beta)}{\theta_4(v-i\beta)}\right] + i\frac{\theta_1'(i\beta)}{\theta_1(i\beta)}v, \qquad 0<\gamma<K'. \tag{21}$$

Во всех этих формулах берется главное значение логарифма В (18) и (20) оно вещественно, в (19) и (21) $-\pi \leqslant \operatorname{Im}\ln[\quad] \leqslant \pi$ Правые части равенств (19) и (21) вещественны Из 13 19 (18) и (19) следует

$$i\frac{\theta_1'(i\beta)}{\theta_1(i\beta)} = \pi\operatorname{cth}\pi\beta - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\operatorname{sh}2n\pi\beta, \tag{22}$$

$$i\frac{\theta_3'(i\beta)}{\theta_3(i\beta)} = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\operatorname{sh}2n\pi\beta, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_2(v+i\beta)}{\theta_2(v-i\beta)}\right] =$$

$$= -\operatorname{arctg}(\operatorname{th}\pi\beta\cdot\operatorname{tg}\pi v) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v\cdot\operatorname{sh}2n\pi\beta, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_4(v+i\beta)}{\theta_4(v-i\beta)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v\cdot\operatorname{sh}2n\pi\beta. \tag{25}$$

Бесконечные ряды в (23) и (25) не всегда сходятся столь быстро, как этого хотелось бы Если q не слишком мало, то для вычисления правых частей равенств (19) и (21) можно использовать разложения

$$\theta_4(v\pm i\beta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi v)\operatorname{ch}(2n\pi\beta) \pm$$

$$\pm i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{n^2}\sin(2n\pi v)\operatorname{sh}(2n\pi\beta), \tag{26}$$

$$\theta_3(i\beta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\operatorname{ch}(2n\pi\beta), \tag{27}$$

$$i\theta_3'(i\beta) = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n^2}\operatorname{sh}(2n\pi\beta). \tag{28}$$

Эти разложения, равно как и некоторые другие полезные для вычисления формулы, вытекают из 13 19 (6)—(9)

Выше уже было дано выражение полных эллиптических интегралов первого рода через тета-функции (см. (12)). Для полных эллиптических интегралов второго рода из формул (6), (7), (10) и 13 16(10) следует

$$\mathrm{E}=\frac{\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)}{3\theta_3^4(0)}\mathrm{K}-\frac{1}{12\mathrm{K}}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}. \tag{29}$$

Полные эллиптические интегралы третьего рода были сведены в 13 8(21)—(24) к эллиптическим интегралам первого и второго рода Следовательно, их тоже можно вычислить с помощью тета функций

Укажем, наконец, что когда тета функции применяются для вычисления эллиптических функции Якоби или эллиптических интегралов с заданным модулем k, $0<k<1$, их параметр q можно вычислять по формулам

$$q=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+\ \ldots,\qquad 2\varepsilon=\frac{1-k'^{1/2}}{1+k'^{1/2}} \tag{30}$$

13.21. Теория преобразования эллиптических функций

Теория преобразования эллиптических функций дает соотношения между эллиптическими функциями, соответствующими различным парам примитивных периодов Так как любая эллиптическая функция с периодами 2ω, $2\omega'$ может быть алгебраически выражена через $\wp(z\,|\,\omega\ \omega')$, то достаточно изучить соотношения между $\wp$ функциями Будем предполагать здесь, что выполнены условия

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)>0,\qquad \operatorname{Im}\left(\frac{\dot\omega'}{\dot\omega}\right)>0, \tag{1}$$

и кратко сформулируем результаты общей теории преобразований, отсылая читателя относительно доказательств и дальнейших деталей к книгам, указанным в конце этой главы

Скажем, что функции $f(z)$ и $g(z)$ *алгебраически зависимы*, если существует многочлен $P(x, y)$ от двух переменных такой, что тождественно по z выполняется равенство $P[f(z), g(z)]=0$

Для того чтобы функции $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$ и $\wp(u\,|\,\dot\omega, \dot\omega')$ были алгебраически зависимы, необходимо и достаточно, чтобы существовали целые числа α, β, γ, δ, ρ такие, что

$$\rho\dot\omega=\alpha\omega+\beta\omega',\qquad \rho\dot\omega'=\gamma\omega+\delta\omega',\qquad D=\alpha\delta-\beta\gamma>0. \tag{2}$$

Если выполнено равенство (2), то как $\wp(u\,|\omega,\ \omega')$, так и $\wp(u\,|\,\dot\omega,\ \dot\omega')$ являются четными эллиптическими функциями с периодами $\rho\omega$, $\rho\omega'$ и, следовательно, они являются рациональными функциями от $\wp(u\,|\,\rho\omega,\ \rho\omega')$ Таким образом, достаточно рассмотреть подстановку (2) при $\rho=1$. В этом случае ее можно записать в матричных обозначениях как

$$\begin{bmatrix}\dot\omega\\ \dot\omega'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \omega'\end{bmatrix},\qquad D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}>0 \tag{3}$$

Тогда соотношение между

$$x=\wp(z\,|\,\omega,\ \omega'),\qquad y=\wp(z\,|\,\dot\omega,\ \dot\omega') \tag{4}$$

имеет вид

$$P(x,\ y)=0, \tag{5}$$

где P—многочлен от x и y, линейный по x и имеющий степень D по y (Степень по y выясняется с помощью подсчета числа полюсов) Мы назовем

D *степенью* или *порядком* преобразования

$$T=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} \tag{6}$$

и будем перемножать преобразования как матрицы

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d\\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d\end{bmatrix}.$$

Преобразования (3) можно рассматривать как дробно-линейные преобразования верхней полуплоскости в себя

$$\dot{\tau}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}. \tag{7}$$

Все преобразования первого порядка образуют группу (модулярную группу). *Для того чтобы выполнялось равенство* $\wp(u\,|\,\omega,\ \omega')=\wp(u\,|\,\dot{\omega},\ \dot{\omega}')$, *необходимо и достаточно, чтобы* ω, ω' *и* $\dot{\omega}$, $\dot{\omega}'$ *были связаны друг с другом преобразованием первого порядка* (унимодулярным преобразованием).

Модулярная группа порождается преобразованиями

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

иными словами, любое унимодулярное преобразование можно представить в виде произведения степеней преобразований A и B. Таким образом, при изучении унимодулярных преобразований можно ограничиться изучением преобразований A и B.

Точно так же *изучение преобразования второго порядка сводится к изучению преобразования Ландена*

$$L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{9}$$

так как *любое преобразование S второго порядка может быть представлено в виде $S=HLK$, где H и K — унимодулярные преобразования.*

13.22. Унимодулярные преобразования

Унимодулярные преобразования оставляют неизменной решетку Ω, состоящую из всех периодов (см. п. 13.10). Так как функции Вейерштрасса $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ и инварианты g_2, g_3, $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ зависят лишь от Ω, они также остаются неизменными. Величины e_α могут лишь переставляться друг с другом. Из 13.12 (19) и 13.13 (19) следует, что

$$\dot{\eta}=\zeta(\dot{\omega}\,|\,\dot{\omega},\ \dot{\omega}')=\zeta(\dot{\omega}\,|\,\omega,\ \omega')=\zeta(\alpha\omega+\beta\omega'\,|\,\omega,\ \omega')=\alpha\eta+\beta\eta',$$
$$\dot{\eta}'=\gamma\eta+\delta\eta',$$

и, таким образом, η и η' преобразуются с помощью того же преобразования, что ω, ω'. Функции $\sigma_\alpha(z)$ подвергаются лишь перестановке. Прямое вычисление показывает, что преобразование A из 13.21 (8) переставляет в e_1, e_2, e_3 и $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ индексы 2 и 3, а преобразование B — индексы 1 и 3.

Более сложно поведение при унимодулярных преобразованиях эллиптических функций Якоби. Если в 13.21 (6) α и δ являются нечетными целыми числами, а β и γ — четными целыми числами, то назовем T *λ-преобразованием.* Легко проверить, что совокупность всех λ-преобразований образует *подгруппу* модулярной группы. Ее называют *λ-группой*. При λ-преобразованиях имеем

$$\dot{e}_1 = \wp(\dot{\omega} \mid \dot{\omega}, \dot{\omega}') = \wp(\alpha\omega + \beta\omega' \mid \omega, \omega') = \wp(\omega) = e_1.$$

В самом деле, $\beta\omega'$ является при четном β периодом, а $\alpha\omega$ при нечетном α отличается от ω на период. Точно так же доказывается, что $\dot{e}_2 = e_2$ и $\dot{e}_3 = e_3$. Из 13.16 (4)—(6) следует, что *функции Якоби* sn, cn, dn *инвариантны относительно λ-преобразований*. Все остальные унимодулярные преобразования меняют эллиптические функции Якоби.

Рассмотрим пять преобразований:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Последние три из них выражаются через A и B:

$$C = ABA, \quad D = ABAB, \quad E = BABA. \tag{2}$$

В табл. 10 преобразованиям U (тождественное), $A, \ldots, E$ сопоставлены соответствующие перестановки величин e_α. Мы видим, что при этом встречаются все возможные перестановки e_1, e_2, e_3. Так как перестановка e_α полностью определяет преобразование эллиптических функций Якоби, достаточно рассмотреть преобразования (1) для того, чтобы получить все возможные унимодулярные преобразования эллиптических фуикций Якоби.

Таблица 10

Перестановки

Преобразования	$\dot{\omega}$	$\dot{\omega}'$	$\dot{e}_1$	$\dot{e}_2$	$\dot{e}_3$	Преобразования	$\dot{\omega}$	$\dot{\omega}'$	$\dot{e}_1$	$\dot{e}_2$	$\dot{e}_3$
U	ω	ω'	e_1	e_2	e_3	C	$\omega+\omega'$	ω'	e_2	e_1	e_3
A	ω	$\omega+\omega'$	e_1	e_3	e_2	D	$-\omega+\omega'$	$-\omega$	e_2	e_3	e_1
B	ω'	$-\omega$	e_3	e_2	e_1	E	ω'	$-\omega-\omega'$	e_3	e_1	e_2

Эта таблица в сочетании с 13.16 (4)—(6), (9) и (11) приводит к формулам преобразования, указанным в табл. 11.

Относительно преобразований эллиптических интегралов см. табл. 3 п. 13.7 (стр. 25) и табл. 4 п. 13.8 (стр. 27).

Преобразования четырех тета-функций могут быть получены из выражения

$$\theta_1(v \mid \tau) = \frac{\omega^{1/2}\Delta^{1/8}}{\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\sigma(z), \qquad v = \frac{z}{2\omega}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \tag{3}$$

которое следует из 13.20 (1), (9) и 13.19 (2), (3). Мы знаем уже, как преобразуется правая часть этого равенства при унимодулярном преобразовании 13.21 (6). В частности, отметим, что в силу 13.12 (10) имеем

$$\frac{\eta}{\omega} - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\omega}} = \frac{\eta}{\omega} - \frac{\alpha\eta + \beta\eta'}{\alpha\omega + \beta\omega'} = \frac{\beta(\eta\omega' - \eta'\omega)}{\omega\dot{\omega}} = \frac{\beta\pi i}{2\omega\dot{\omega}},$$

Таблица 11

Унимодулярные преобразования эллиптических функций Якоби

Преобразования	$\mathring{\omega}$, $\mathring{\omega}'$	$\mathring{u}$	$\mathring{k}$	$\mathring{k}'$	$\mathring{K}$	$\mathring{K}'$	$\operatorname{sn}(\mathring{u}, \mathring{k})$	$\operatorname{cn}(\mathring{u}, \mathring{k})$	$\operatorname{dn}(\mathring{u}, \mathring{k})$
A	ω, $\omega+\omega'$	$k'u$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'K$	$k'(K'-iK)$	$k'\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(u,k)}$
B	ω', $-\omega$	$-iu$	k'	k	K'	K	$-i\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(u,k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$
C	$\omega+\omega'$, ω'	ku	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{ik}$	$k(K+iK')$	kK'	$k\operatorname{sn}(u,k)$	$\operatorname{dn}(u,k)$	$\operatorname{cn}(u,k)$
D	$-\omega+\omega'$, $-\omega$	$-ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{ik'}$	$k'(K'+iK)$	$k'K$	$-ik'\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$	$\frac{dn(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(u,k)}$
E	ω', $-(\omega+\omega')$	$-iku$	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{1}{k}$	kK'	$k(K+iK')$	$-ik\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(u,k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}$

а также
$$\mathring{v}=\frac{z}{2\mathring{\omega}}=\frac{z}{2(\alpha\omega+\beta\omega')}=\frac{v}{\alpha+\beta\tau},\qquad \mathring{\tau}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}.$$

Таким образом, мы имеем в силу (3) *общую формулу преобразований* $\theta_1(v\,|\,\tau)$ *при унимодулярных преобразованиях*

$$\theta_1\left(\frac{v}{\alpha+\beta\tau}\,\Big|\,\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=\varepsilon(\alpha+\beta\tau)^{1/2}\exp\left(\frac{i\pi\beta v^2}{\alpha+\beta\tau}\right)\theta_1(v\,|\,\tau), \tag{4}$$

где $\varepsilon^8=1$. Множитель ε связан с многозначностью дробных степеней в (3) и может быть определен путем деления (4) на v, перехода к пределу при $v\to 0$ и сравнения обеих частей. Тогда преобразования остальных трех тета-функций следуют из табл. 8. п. 13.19 (стр. 54).

Явная формула для преобразований A и B из (1), порождающих модулярную группу, имеет следующий вид.

Преобразование A:

$$\mathring{v}=v,\quad \mathring{\tau}=1+\tau,\quad \mathring{q}=-q, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1(v\,|\,\tau+1)=e^{\pi i/4}\,\theta_1(v\,|\,\tau),\quad \theta_2(v\,|\,\tau+1)=e^{\pi i/4}\,\theta_2(v\,|\,\tau),\\ &\theta_3(v\,|\,\tau+1)=\theta_4(v\,|\,\tau),\quad \theta_4(v\,|\,\tau+1)=\theta_3(v\,|\,\tau).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Преобразование B:

$$\mathring{v}=\frac{v}{\tau},\qquad \mathring{\tau}=-\frac{1}{\tau},\qquad \ln\mathring{q}=\frac{\pi^2}{\ln q}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)=-i(-i\tau)^{1/2}\exp\frac{i\pi v^2}{\tau}\,\theta_1(v\,|\,\tau),\\ &\theta_2\left(\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}\exp\frac{i\pi v^2}{\tau}\,\theta_4(v\,|\,\tau),\\ &\theta_3\left(\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}\exp\frac{i\pi v^2}{\tau}\,\theta_3(v\,|\,\tau),\\ &\theta_4\left(\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}\exp\frac{i\pi v^2}{\tau}\,\theta_2(v\,|\,\tau).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В этих формулах $(-i\tau)^{1/2}$ имеет главное значение (лежащее в правой полуплоскости). Преобразование B известно как *мнимое преобразование Якоби*.

Преобразование B можно использовать для вычисления значений тета-функций, если q близко к единице или τ очень мало, поскольку в этом случае ряд для $\theta_1(v\,|\,\tau)$ сходится очень медленно, в то время как ряд $\theta_1(v/\tau\,|\,-1/\tau)$ сходится весьма быстро. В частности, этим способом может быть изучено асимптотическое поведение при $q \to 1$, и мы получаем

$$\theta_2(0,\ q) \sim \theta_3(0,\ q) \sim \left(-\frac{\pi}{\ln q}\right)^{1/2}, \qquad q \to 1. \tag{9}$$

13.23. Преобразования второго порядка

Изучение преобразований второго порядка сводится, по сути дела, к изучению одного такого преобразования; в самом деле, любое преобразование второго порядка получается путем *суперпозиции преобразования*

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

и двух унимодулярных преобразований. В указанных ниже формулах преобразований мы считаем, что все функции Вейерштрасса, период которых явно не указан, образованы с помощью примитивных периодов ω, ω', а все величины e_α, η_α (не отмеченные точками) связаны с этими функциями.

Преобразование Ландена. Функции Вейерштрасса:

$$\dot\omega = \frac{\omega}{2}, \qquad \dot\omega' = \omega'; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot e_1 &= e_1 + 2(e_1 - e_2)^{1/2}(e_1 - e_3)^{1/2}, \\ \dot e_2 &= e_1 - 2(e_1 - e_2)^{1/2}(e_1 - e_3)^{1/2}, \\ \dot e_3 &= -2e_1; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot\eta_1 = \eta_1 + \frac{e_1}{2}\omega_1, \qquad \dot\eta_2 = \eta_2 - \eta_3 + \frac{e_1}{2}(\omega_2 - \omega_3), \qquad \dot\eta_3 = 2\eta_3 + e_1\omega_3; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) &= \exp\left(\frac{e_1}{2}z^2\right)\sigma(z)\,\sigma_1(z), \\ \sigma_1\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) &= \exp\left(\frac{e_1}{2}z^2\right)[\sigma_1^2(z) - (e_1 - e_2)^{1/2}(e_1 - e_3)^{1/2}\sigma^2(z)], \\ \sigma_2\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) &= \exp\left(\frac{e_1}{2}z^2\right)[\sigma_1^2(z) + (e_1 - e_2)^{1/2}(e_1 - e_3)^{1/2}\sigma^2(z)], \\ \sigma_3\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) &= \exp\left(\frac{e_1}{2}z^2\right)\sigma_2(z)\,\sigma_3(z); \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\zeta\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \zeta(z) + \zeta(z + \omega) + e_1 z - \eta_1; \tag{6}$$

$$\wp\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \wp(z) + \wp(z - \omega_1) - e_1 = \wp(z) + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1}. \tag{7}$$

Так как преобразование Ландена функций Вейерштрасса затрагивает величины e_α, η_α, которые не являются инвариантными относительно унимодулярных преобразований, укажем основные формулы для двух других преобразований второго порядка.

Преобразование Гаусса. $\wp$-функция Вейерштрасса:

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=-BLB, \tag{8}$$

$$\wp\left(z \mid \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right)=\wp(z)+\wp(z-\omega_3)-e_3=\wp(z)+\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp(z)-e_3}. \tag{9}$$

Иррациональное преобразование. $\wp$-функция Вейерштрасса:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=-ABLABAB, \tag{10}$$

$$\wp\left(z \mid \omega,\ \frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\wp(z)+\wp(z-\omega_2)-e_2=\wp(z)-\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{\wp(z)-e_2}. \tag{11}$$

Преобразование Ландена. Эллиптические функции Якоби и тета-функции. В тех случаях, когда параметр тета-функции явно не указан, подразумевается, что он равен τ:

$$\dot{u}=(1+k')u, \quad \dot{k}=\frac{1-k'}{1+k'}, \quad \dot{k}'=\frac{2k'^{1/2}}{1+k'}, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left[(1+k')u,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]&=(1+k')\frac{\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{cn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)},\\
\operatorname{cn}\left[(1+k')u,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]&=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)},\\
\operatorname{dn}\left[(1+k')u,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]&=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)};
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\dot{v}=2v, \quad \dot{\tau}=2\tau, \quad \dot{q}=q^2; \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1'(0\mid 2\tau)&=\frac{\pi^{1/2}}{2}[\theta_2^3(0)\,\theta_1'(0)]^{1/2}=\frac{1}{2}\,\frac{\theta_2(0)\,\theta_1'(0)}{[\theta_3(0)\,\theta_4(0)]^{1/2}},\\
\theta_2(0\mid 2\tau)&=2^{-1/2}[\theta_3^2(0)-\theta_4^2(0)]^{1/2},\\
\theta_3(0\mid 2\tau)&=2^{-1/2}[\theta_3^2(0)+\theta_4^2(0)]^{1/2},\\
\theta_4(0\mid 2\tau)&=[\theta_3(0)\,\theta_4(0)]^{1/2};
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1(2v\mid 2\tau)&=\frac{\theta_1(v)\,\theta_2(v)}{\theta_4(0\mid 2\tau)},\\
\theta_2(2v\mid 2\tau)&=\frac{\theta_2^2(v)-\theta_1^2(v)}{2\theta_3(0\mid 2\tau)}=\frac{\theta_3^2(v)-\theta_4^2(v)}{2\theta_2(0\mid 2\tau)},\\
\theta_3(2v\mid 2\tau)&=\frac{\theta_2^2(v)+\theta_1^2(v)}{2\theta_2(0\mid 2\tau)}=\frac{\theta_3^2(v)+\theta_4^2(v)}{2\theta_3(0\mid 2\tau)},\\
\theta_4(2v\mid 2\tau)&=\frac{\theta_3(v)\,\theta_4(v)}{\theta_4(0\mid 2\tau)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Преобразование Гаусса. Эллиптические функции Якоби:

$$\dot{u}=(1+k)\,u,\quad \dot{k}=\frac{2k^{1/2}}{1+k},\quad \dot{k}'=\frac{1-k}{1+k},\tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn}\left[(1+k),u,\frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=(1+k)\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)},\\
&\operatorname{cn}\left[(1+k)\,u,\frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=\frac{\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)},\\
&\operatorname{dn}\left[(1+k)\,u,\frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=\frac{1-k\operatorname{sn}^2(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)}.
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Преобразования высших порядков более сложны. Мы рассмотрим здесь лишь преобразование $(LB)^2$, имеющее четвертый порядок, которое приводит к следующим *формулам удвоения для тета-функций.* Все тета-функции имеют один и тот же параметр τ:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1(2v)=2\frac{\theta_1(v)\,\theta_2(v)\,\theta_3(v)\,\theta_4(v)}{\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta_4(0)},\\
&\theta_2(2v)=\frac{\theta_2^2(v)\,\theta_3^2(v)-\theta_1^2(v)\,\theta_4^2(v)}{\theta_2(0)\,\theta_3^2(0)},\\
&\theta_3(2v)=\frac{\theta_2^2(v)\,\theta_3^2(v)+\theta_1^2(v)\,\theta_4^2(v)}{\theta_2^2(0)\,\theta_3(0)},\\
&\theta_4(2v)=\frac{\theta_3^4(v)-\theta_2^4(v)}{\theta_4^3(0)}=\frac{\theta_4^4(v)-\theta_1^4(v)}{\theta_4^3(0)}.
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

13.24. Эллиптические модулярные функции

Эллиптической модулярной функцией $f(\tau)$ называют функцию, регулярную с точностью до полюсов в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau>0$ и обладающую тем свойством, что если τ и $\dot{\tau}$ связаны друг с другом преобразованием *модулярной группы*

$$\dot{\tau}=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\text{ — целые},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\tag{1}$$

то $f(\tau)$ и $f(\dot{\tau})$ *алгебраически* зависимы. (Отметим, что $\alpha,\ldots,\gamma$ имеют иной смысл по сравнению с 13 21 (7).) Если для любого преобразования модулярной группы имеем $f(\tau)=f(\dot{\tau})$, то $f(\tau)$ называют *автоморфной функцией модулярной группы.*

Первым примером такой модулярной функции является квадрат модуля для эллиптических функций Якоби. Из 13.16 (7) и 13.20 (14) следует, что

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\theta_2^4(0\,|\,\tau)}{\theta_3^4(0\,|\,\tau)}=\lambda(\tau)\tag{2}$$

является аналитической функцией от τ в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau>0$, причем, вещественная τ-ось является естественной границей этой функции. Из инвариантности e_1, e_2, e_3 относительно τ-преобразований (α, δ — нечетные, β, γ — четные, см. п. 13.22) следует, что $\lambda(\tau)$ является *автоморфной функцией для*

λ-группы. В общем случае преобразование модулярной группы переставляет величины e_α и, следовательно, преобразует $\lambda(\tau)$ в одно из шести значений:

$$\lambda(\tau),\quad 1-\lambda(\tau),\quad \frac{1}{\lambda(\tau)},\quad \frac{1}{1-\lambda(\tau)},\quad \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\quad 1-\frac{1}{\lambda(\tau)}. \tag{3}$$

Так как все эти значения алгебраически связаны с $\lambda(\tau)$, то *эта функция является эллиптической модулярной функцией.*

В силу 13.12 (13) g_2, g_3 и $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ являются однородными функциями от ω и ω', имеющими соответственно степени -4, -6, -12. *Абсолютный инвариант*

$$\frac{g_2^3}{\Delta}=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=J(\tau) \tag{4}$$

зависит только от τ и аналитичен в верхней полуплоскости. Преобразования модулярной группы оставляют неизменными g_2 и Δ (см. п. 13.22), откуда следует, что $J(\tau)$ *является автоморфной функцией модулярной группы*. В силу 13.1? (6), (7) и 13.16 (3) J можно выразить через λ, а в силу 13.20 (8), (9) — через тета-функции

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\,\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}=\frac{1}{54}\,\frac{[\theta_2^8(0\,|\,\tau)+\theta_3^8(0\,|\,\tau)+\theta_4^8(0\,|\,\tau)]^3}{\theta_2^8(0\,|\,\tau)\,\theta_3^8(0\,|\,\tau)\,\theta_4^8(0\,|\,\tau)}. \tag{5}$$

Назовем две точки τ, $\dot{\tau}$ в верхней полуплоскости комплексной τ-плоскости *эквивалентными*, если их можно перевести друг в друга с помощью преобразования (1) модулярной группы. *Фундаментальная область* для модулярной группы определяется неравенствами

$$|\tau|\geqslant 1,\qquad |\tau+1|>|\tau|,\qquad |\tau-1|\geqslant|\tau|.$$

Верхнюю τ полуплоскость можно разбить на бесконечное множество областей, каждая из которых ограничена тремя дугами окружностей (одна или две из которых могут вырождаться в отрезки или прямолинейные лучи), причем каждая из этих областей эквивалентна фундаментальной области. В самом деле, каждая точка верхней полуплоскости эквивалентна в точности одной точке фундаментальной области.

Если задана автоморфная функция для модулярной группы, то достаточно изучить свойства этой функции в фундаментальной области. Например, можно доказать, что $J(\tau)$ принимает в фундаментальной области каждое конечное значение в точности один раз. Это показывает, что каждому (конечному) значению J отвечает в точности одна система функций Вейерштрасса.

Фундаментальная область для λ-группы ограничена прямыми линиями $\operatorname{Re}\tau=\pm 1$ и окружностью $|2\tau\pm 1|=1$; граничные точки в $\operatorname{Re}\tau\geqslant 0$ принадлежат области, граничные же точки в $\operatorname{Re}\tau<0$ не принадлежат ей. Можно доказать, что $\lambda(\tau)$ принимает в фундаментальной области для λ-группы каждое конечное значение, отличное от нуля и единицы, в точности один раз. Это замечание является ключом к решению проблемы обращения (см. п. 13.20), можно использовать это замечание, чтобы доказать, что эллиптические функции Якоби однозначно определяются заданием квадрата модуля, причем этот квадрат может быть любым числом, отличным от нуля и единицы.

13.25. Конформные отображения

Эллиптические интегралы, эллиптические функции и связанные с ними функции встречаются во многих важных конформных отображениях. Многие примеры таких конформных отображений и некоторые дальнейшие ссылки можно найти в книге: H. Kober, Dictionary of conformal representations, 1952, стр. 170—200). В этом пункте мы опишем лишь наиболее важные из этих отображений. На протяжении этого пункта будем рассматривать лишь «вещественный» случай

$0 < k < 1$, $0 < q < 1$, ω вещественно, ω' чисто мнимое, K, K′ вещественны и положим $e_1 > e_2 > e_3$. Мы полагаем $\operatorname{Re} z = z_1$, $\operatorname{Im} z = z_2$ и аналогично для

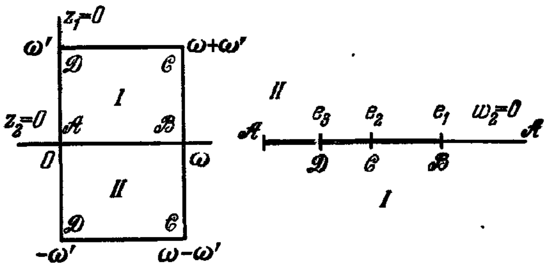


Рис. 7. Отображение $w = \wp(z)$.

других комплексных переменных. На рис. 7—14, иллюстрирующих конформное отображение из плоскости одного комплексного переменного в плоскость другого комплексного переменного, соответствующие точки обозначаются одинаковыми буквами.

Функция $w = \wp(z)$. Когда z пробегает границу прямоугольника с вершинами 0, ω, $\omega + \omega'$, ω' (рис. 7), переменная w вещественна и убывает от ∞ до e_1, затем от e_1 до e_2, от e_2 до e_3 и от e_3 до $-\infty$ (см. п. 13 15). Эта функция отображает внутреннюю область прямоугольника на верхнюю w-полуплоскость. В силу принципа симметрии Шварца прямоугольник с вершинами $-\omega'$, $\omega - \omega'$, $\omega + \omega'$, ω' на z-плоскости отображается на всю w-плоскость, разрезанную от $-\infty$ до e_1.

В *лемнискатическом* случае $g_3 = 0$, $g_2 > 0$ мы имеем $e_2 = 0$, $e_3 = -e_1$. Прямоугольник в z-плоскости в этом случае является *квадратом*, диагональ $\mathcal{AC}$, соединяющая 0 с $\omega + \omega'$, отображается на отрицательную мнимую полуось на w-плоскости, а диагональ $\mathcal{BD}$ отображается на нижнюю половину окружности в w-плоскости с центром в точке $e_2 = 0$ и радиусом e_1. При этом внутренняя область прямоугольного равнобедренного треугольника с вершинами $\omega'/2 + \omega'/2$, ω, $\omega' + \omega$ в z-плоскости отображается на четвертый квадрант круга с радиусом e_1 на w-плоскости.

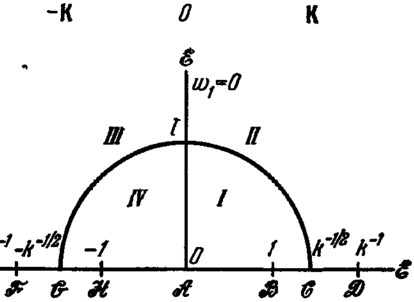


Рис. 8. Отображение $w = \operatorname{sn}(u, k)$.

Функция $w = \operatorname{sn}(u, k)$. Из п. 13.18 видно, что внутренняя область прямоугольника с вершинами 0, K, K$+i$K′, iK′ на u-плоскости отображается на первый квадрант w-плоскости (рис. 8). Прямоугольник —K, K, K$+i$K′,

$-\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$ отображается на верхнюю полуплоскость w-плоскости, а прямоугольник с вершинами $\pm\mathrm{K}\pm i\mathrm{K}'$ отображается на всю w плоскость, разрезанную от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞. Можно доказать (см., например, Dixon, 1894, приложение A), что прямые $u_1=\mathrm{const}$, $u_2=\mathrm{const}$ отображаются на дважды ортогональную систему конфокальных бициркулярных кривых четвертого порядка на w-плоскости, фокусами которых являются ± 1, $\pm k^{-1}$. Эти кривые четвертого порядка симметричны как относительно оси w_1, так и относительно оси w_2 Кривые четвертого порядка, соответствующие прямым $u_1=\mathrm{const}$, имеют две ветви, одна—охватывающая $\mathscr{B}\mathscr{D}$, соответствует $u_1>0$, а другая, охватывающая $\mathscr{F}\mathscr{H}$, соответствует $u_1<0$. Кривые четвертого порядка, соответствующие $u_2=0$ являются овалами, охватывающими $\mathscr{H}\mathscr{B}$. В частности, при $u_2=(n+1/2)\mathrm{K}'$ мы получаем окружность, см. 13.18 (1). Дальнейшие детали изображены на рис. 8.

Функция $w=\mathrm{cn}(u, k)$ Внутренность прямоугольника с вершинами 0, K, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$ на u плоскости отображается на четвертый квадрант на w-плоскости (рис. 9). Прямоугольник $-\mathrm{K}$, K, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $-\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$ отображается

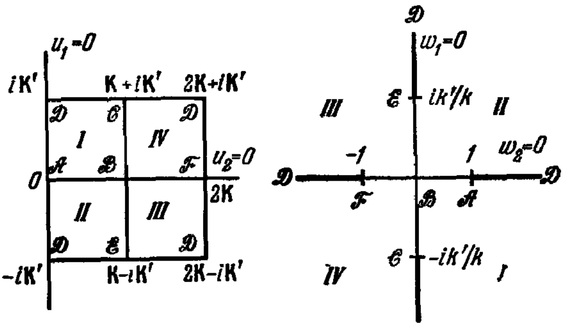


Рис. 9. Отображение $w=\mathrm{cn}(u, k)$.

на правую w-полуплоскость, разрезанную от 0 до 1. Прямоугольник $-i\mathrm{K}'$, $\mathrm{K}-i\mathrm{K}'$, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$ отображается на правую полуплоскость, разрезанную от 1 до ∞, а прямоугольник с вершинами $\pm i\mathrm{K}'$, $2\mathrm{K}\pm i\mathrm{K}'$ отображается на всю w-плоскость, разрезанную от $-\infty$ до -1, от 1 до ∞, от $-i\infty$ до $-\frac{ik'}{k}$ и от $\frac{ik'}{k}$ до $i\infty$. Прямые $u_1=\mathrm{const}$, $u_2=\mathrm{const}$ отображаются на дважды ортогональную систему конфокальных бициркулярных кривых четвертого порядка на w-плоскости, фокусами которых являются точки ± 1, $\pm\frac{ik'}{k}$. Оба семейства являются овалами, причем овалы, соответствующие $u_1=\mathrm{const}$, охватывают $\mathscr{C}\mathscr{E}$, а соответствующие $u_2=\mathrm{const}$—охватывают $\mathscr{A}\mathscr{F}$. Оба семейства симметричны относительно осей $w_1=0$, $w_2=0$.

Функция $w=\mathrm{dn}(u, k)$. Так как из табл. 7 (п. 13.17) и 11 (п.13.22) следует, что

$$\mathrm{dn}(u, k)=k'\,\mathrm{sn}(\mathrm{K}'-i\mathrm{K}+iu, k'),$$

то отображение $w=\mathrm{dn}\,u$ может быть сведено к отображению $w=\mathrm{sn}\,u$. В частности, прямоугольник с вершинами 0, K, $\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, $2i\mathrm{K}'$ отображается на нижнюю w полуплоскость так, как изображено на рис. 10, а прямоугольник с вершинами 0, $2\mathrm{K}$, $2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, $2i\mathrm{K}'$ отображается на всю w-плоскость, разрезанную от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞. Прямые $u_1=\mathrm{const}$, $u_2=\mathrm{const}$ отображаются в дважды ортогональную систему конфокальных бициркулярных кривых четвертого порядка, фокусами которой являются точки ± 1, $\pm k'$. В частности, прямые $u_1=(m+1/2)\mathrm{K}$ отображаются в окружность с центром в точке $w=0$ и радиусом $k'^{1/2}$.

Функции $w=\zeta(z)+e_\alpha z$. Очевидно, $\zeta(z_1)$ вещественно, $\zeta(-iz_2)$ — чисто мнимое; так как из 13.13 (18) следует, что

$$\zeta(\omega+iz_2)-\zeta(\omega)=\zeta(iz_2)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(iz_2)}{\wp(iz_2)-e_1},$$

$$\zeta(\omega'+z_1)-\zeta(\omega')=\zeta(z_1)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z_1)}{\wp'(z_1)-e_3},$$

то первое из этих двух выражений является чисто мнимым, а второе — вещественным. Исследуя отображение прямоугольника с вершинами 0, ω,

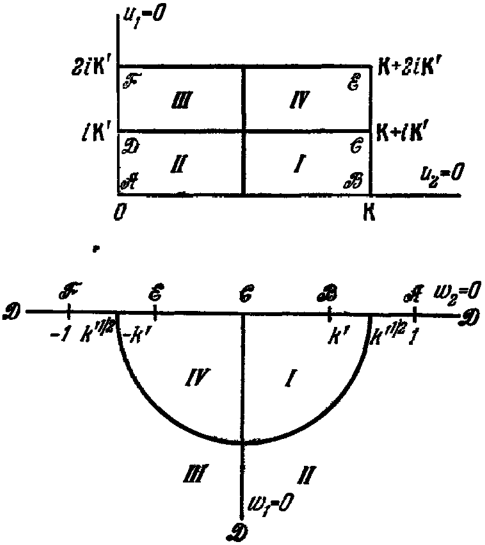


Рис. 10. Отображение $w=\mathrm{dn}(u,k)$

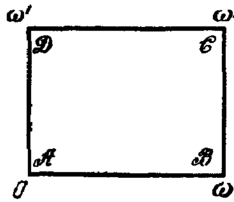


Рис. 11. z-плоскость.

$\omega+\omega'$, ω' (рис. 11) на z-плоскости, мы убеждаемся, что $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{CD}$ отображаются на горизонтальные прямые, а $\mathcal{BC}$ и $\mathcal{AD}$ — на вертикальные прямые на w-плоскости ($\alpha=1, 2, 3$). Кроме того,

$$w(\mathcal{A})=\infty,\quad w(\mathcal{B})=\eta+e_\alpha\omega,$$
$$w(\mathcal{C})=\eta+\eta'+e_\alpha(\omega+\omega'),\quad w(\mathcal{D})=\eta'+e_\alpha\omega'.$$

Рассмотрим, какие знаки имеют $\eta+e_\alpha\omega$ и $\dfrac{\eta+e_\alpha\omega'}{i}$. Из 13.16 (9), (10), (11) и 13 8 (25), (26) следует, что

$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_1\omega)=\mathrm{E}>0,$$
$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_2\omega)=\mathrm{E}-(e_1-e_3)^{-1/2}(e_1-e_2)\,\omega=\mathrm{E}-k'^2\,\mathrm{K}=k^2\mathrm{B}>0,$$
$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_3\omega)=\mathrm{E}-(e_1-e_3)^{-1/2}\,\omega=\mathrm{E}-\mathrm{K}=-k^2\mathrm{D}<0,$$
$$-i\,(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_3\omega')=-\mathrm{E}'<0,$$
$$-i\,(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_2\omega')=-\mathrm{E}'-(e_1-e_3)^{-1/2}(e_2-e_3)\,i\omega'=-\mathrm{E}'+k^2\mathrm{K}'=$$
$$=-k'^2\mathrm{B}<0,$$
$$-i\,(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_1\omega')=-\mathrm{E}'-(e_1-e_3)^{1/2}\,i\omega'=\mathrm{K}'-\mathrm{E}'=k'^2\mathrm{D}'>0.$$

На рис. 12—14, иллюстрирующих отображения $w=\zeta(z)+e_\alpha z$ прямоугольника $\mathcal{ABCD}$, мы использовали сокращенные обозначения

$$\eta+e_\alpha\omega=H_\alpha,\quad \eta'+e_\alpha\omega'=H'_\alpha i.$$

Из доказанного выше следует, что

$$H_1 > H_2 > 0 > H_3, \quad H_1' > 0 > H_2' > H_3'.$$

В каждом из случаев часть плоскости, лежащая слева от линии $\mathcal{ABCDA}$ (в этом порядке), является образом прямоугольника. Путем отражений в сто-

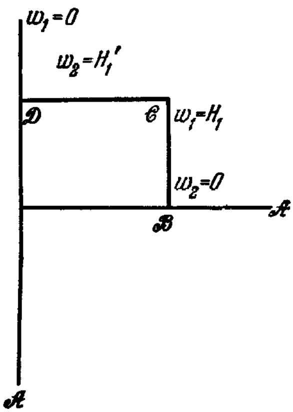


Рис. 12. Отображение $w = \zeta(z) + e_1 z$.

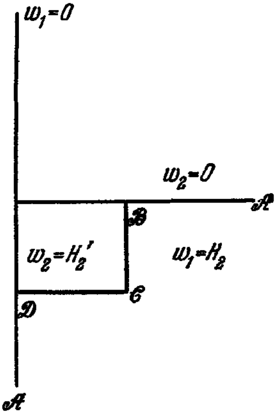


Рис. 13. Отображение $w = \zeta(z) + e_2 z$.

ронах прямоугольника получаем следующие результаты. Функция $w = \zeta(z) + e_1 z$ (рис. 12) отображает внутреннюю область прямоугольника с вершинами $\pm\omega$, $\pm\omega + 2\omega'$ на z плоскости на область w-плоскости, лежащую вне полубесконечной горизонтальной полосы с вершинами $\pm H_1$, $\pm H_1 + 2iH_1'$. Функция $w = \zeta(z) + e_2 z$ (рис. 13) отображает внутреннюю область прямоугольника с вершинами $\pm\omega \pm \omega'$ на z-плоскости на внешнюю область прямоугольника в w-плоскости с вершинами $\pm H_2 \pm iH_2'$. Функция $w = \zeta(z) + e_3 z$ (рис 14) отображает внутреннюю область прямоугольника на z-плоскости с вершинами $\pm\omega'$, $2\omega \pm \omega'$ на область, лежащую вне двух полубесконечных вертикальных полос на w-плоскости, вершинами которых являются $\pm iH_3'$, $2H_3 \pm \pm iH_3'$.

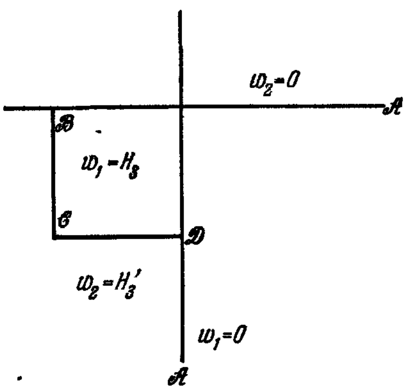


Рис. 14. Отображение $w = \zeta(z) + e_3(z)$.

Отображение $w = \zeta(z) + e_2 z$ можно скомбинировать с одним из рассмотренных выше отображений для того, чтобы получить отображение внешней области прямоугольника на полуплоскость.

ГЛАВА 14

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Эта глава содержит основные определения, касающиеся автоморфных функций, и некоторые легко получающиеся примеры таких функций, в частности модулярных функций. Мы не будем рассматривать здесь многочисленные разветвления теории, связанные с теорией групп, многими ветвями геометрии, теории чисел и важными аспектами общей теории комплексного переменного. Мы лишь схематично изложим фундаментальные идеи Феликса Клайна, старательные исследования Фрикке, более современные открытия Гекке и К. Л. Зигеля и приложения их результатов к теории чисел, а краткие замечания относительно тета-рядов Пуанкаре далеки от того, чтобы дать адекватное изложение этой теории.

В конце главы указана библиография. Наиболее важными книгами, касающимися содержания этой главы, являются Fricke (1901—1921), Fricke и Klein (1897, 1912), Fubini (1908), Giraud (1920), Schlesinger (1924) и Форд (1936, с обширной библиографией). Относительно приложений к теории чисел читатель может посмотреть Reid (1910), а к алгебре— Ван дер Варден (1947).

К отдельным пунктам существенны следующие ссылки:

14 1 4—Форд (1936),

14.3—Klein (1884),

14 4—Krazer и Wirtinger (1901, 1921).

14 6 —Klein и Fricke (1890, 1892),

14 6 4.—Fricke (1916, 1922).

Другие ссылки будут сделаны в соответствующих местах.

14.1. Разрывные группы и дробно-линейные преобразования

14.1.1. Дробно-линейные преобразования. Пусть z—комплексное переменное, изображаемое либо точкой $z=x+iy$ на комплексной плоскости (дополненной бесконечно удаленной точкой), либо точкой (x_1, x_2, x_3) трехмерной сферы

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1. \tag{1}$$

Мы будем обозначать эту сферу через S_0 и называть ее *римановой* сферой. Соответствие между точками комплексной плоскости и точкой римановой сферы определяется равенствами

$$x=\frac{x_1}{1+x_3}, \quad y=\frac{x_2}{1+x_3}, \quad z=x+iy, \tag{2}$$

$$x_1=\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad x_2=\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad x_3=\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}. \tag{3}$$

Отображение S_0 на z-плоскость является конформным и известно под названием *стереографической проекции* Окружности на сфере отображаются при этой проекции в окружности или прямые линии на плоскости. В этой главе прямые линии будут рассматриваться как частный случай окружностей (а именно как окружности, проходящие через точку $z=\infty$), так что под словом «окружность» мы будем понимать обычную окружность или прямую линию, а под дугой окружности — часть окружности или отрезок прямой линии Если отрезок прямой линии содержит бесконечно удаленную точку, то его изображение на евклидовой плоскости может состоять из двух компонент. Тем не менее на комплексной плоскости этот отрезок является связным множеством (поскольку обе компоненты соединяются в бесконечно удаленной точке)

Пусть a, b, c, d — любые комплексные числа такие, что

$$ad-bc=1. \tag{4}$$

Соотношение

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}=\sigma(z) \tag{5}$$

определяет отображение z-плоскости, или, что то же самое, S_0 на себя; это отображение называется *дробно-линейным преобразованием* σ. При такой интерпретации мы рассматриваем z' как другую точку комплексной плоскости. При иной интерпретации z' рассматривают как новое переменное или как новую координату той же самой точки Однако в этой главе мы будем придерживаться первой интерпретации. Если $ad-bc\neq 0$, то отображение (5) не вырождено и, поскольку преобразование (5) однородно относительно a, b, c, d, в этом случае можно добиться, чтобы выполнялось условие (4) Таким образом, (4), (5) определяют самое общее невырожденное преобразование вида (5). (Для вырожденного преобразования (5) мы имеем $ad-bc=0$ и отображение либо не определено, либо переводит всю плоскость в одну точку.) Соотношение между z и z' взаимно однозначно. Из (4) и (5) вытекает

$$z=\frac{dz'-b}{-cz'+a}. \tag{6}$$

Пусть σ' — другое дробно-линейное преобразование

$$\sigma'(z)=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}, \qquad a'd'-b'c'=1. \tag{7}$$

Тогда

$$\sigma'[\sigma(z)]=\frac{(a'a+b'c)\,z+a'b+b'd}{(c'a+d'c)\,z+c'b+d'd} \tag{8}$$

определяет дробно-линейное преобразование, так как

$$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(a'b+b'd)(c'a+d'c)=(ad-bc)(a'd'-b'c')=1.$$

Преобразование (8) называют *произведением* преобразований σ' и σ (в этом порядке) и обозначают через $\sigma'\sigma$. Произведение любого (конечного) числа дробно-линейных преобразований определяется тем же способом Вообще говоря, преобразования $\sigma'\sigma$ и $\sigma\sigma'$ различны. *Обратным* к σ является дробно-линейное преобразование

$$z'=\frac{dz-b}{-cz+a}=\sigma^{-1}(z), \qquad ad-bc=1, \tag{9}$$

которое мы будем обозначать через σ^{-1}. Если I — тождественное преобразование $I(z)=z$, то, очевидно, имеем

$$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=I \quad \text{или} \quad \sigma[\sigma^{-1}(z)]=\sigma^{-1}[\sigma(z)]=z,$$

Любое дробно-линейное преобразование переводит любую окружность на S_0 в окружность, обратно, любое взаимно однозначное преобразование сферы S_0 на себя, при котором окружности переходят в окружности, является дробно линейным преобразованием.

14.1.2. Неподвижные точки. Классификация преобразований. Точка ζ называется *неподвижной точкой* преобразования $\sigma(z)$, если выполняется условие $\sigma(\zeta)=\zeta$. Если $c\neq 0$, то неподвижными точками преобразования σ, заданного формулой (5) п. 14.1.1, являются

$$\zeta_1=\frac{1}{2c}\{a-d+[(a+d)^2-4]^{1/2}\},\qquad \zeta_2=\frac{1}{2c}\{a-d-[(a+d)^2-4]^{1/2}\};$$

если же $c=0$ и $a\neq d$, то неподвижными точками являются

$$\zeta_1=\frac{b}{d-a},\qquad \zeta_2=\infty.$$

Если $c=0$ и $a=d$, то обе неподвижные точки совпадают с бесконечно удаленной точкой, исключая случай, когда $b=0$, в котором все точки неподвижны В написанных выше формулах для ζ_1 и ζ_2 использовано условие (4).

Дробно линейные преобразования можно классифицировать по их неподвижным точкам следующим образом.

1. *Тождественное преобразование.* Все точки неподвижны

$$a=d=\pm 1,\qquad b=c=0.$$

2. *Параболические преобразования.* Обе неподвижные точки совпадают друг с другом

$$a+d=\pm 2,\qquad \zeta_1=\zeta_2=\zeta.$$

Преобразование можно записать в одном из видов:

$$\frac{1}{z'-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\delta,\qquad \zeta\neq\infty,$$
$$z'=z+\delta,\qquad \zeta=0.$$

В первом случае

$$(a+d)^2=4,\qquad \zeta=\frac{a-d}{2c},\qquad \delta=\pm c\neq 0,$$

а во втором случае

$$a=d=\pm 1,\qquad c=0,\qquad \delta=\frac{b}{d}\neq 0.$$

3 *Преобразование с двумя различными фиксированными точками* ζ_1 и ζ_2. Такие преобразования могут быть записаны в одном из видов:

$$\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\lambda\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},\qquad \zeta_1,\zeta_2\neq\infty,$$
$$z'-\zeta_1=\lambda(z-\zeta_1),\qquad \zeta_1\neq\infty,\quad \zeta_2=\infty,$$

где

$$\lambda^{1/2}=\frac{1}{2}\{(a+d)-[(a+d)^2-4]^{1/2}\}\quad\text{при}\quad c\neq 0,\quad \lambda=a\quad\text{при}\quad c=0.$$

При этом могут встретиться три возможности:

3а) $|\lambda|=1$ — *эллиптическое преобразование;*

3б) λ вещественно — *гиперболическое преобразование;*

3в) λ не является вещественным числом и $|\lambda|\neq 1$ — *локсодромическое преобразование.*

Преобразования σ и $\tau^{-1}\sigma\tau$, где τ—невырожденное дробно-линейное преобразование, называются *подобными*. Подобные преобразования имеют одинаковый тип, т. е. либо оба являются эллиптическими, либо оба параболическими и т. д.

14.1.3. Разрывные группы. Множество G дробно-линейных преобразований σ, σ', ... называется *группой*, если оно обладает следующими свойствами:

1. Тождественное преобразование I принадлежит G.
2. Если σ принадлежит G, то σ^{-1} также принадлежит G.
3. Если σ и σ' принадлежит G, то $\sigma\sigma'$ также принадлежит G.

Преобразования σ_1, σ_2, ... называются *образующими группы* G, если любое преобразование из G является произведением конечного числа положительных или отрицательных степеней некоторых из преобразований σ_i.

Две точки P и P' (на S_0 или на комплексной плоскости) называются *эквивалентными* или *конгруэнтными* относительно G, если $P \neq P'$, и G содержит преобразование, переводящее P в P'

Пусть D_0—фиксированная открытая область (открытое связное точечное множество) на S_0 или на комплексной плоскости, и пусть G—группа дробно-линейных преобразований, каждое из которых переводит область D_0 в себя. Некоторые из преобразований группы G могут иметь в D_0 неподвижные точки. Удалим из D_0 все точки, которые либо являются неподвижными для некоторых преобразований группы G (отличных от I), либо предельными точками для множества неподвижных точек Предположим, что оставшееся множество D_1 (являющееся открытым) связно и, следовательно, является областью. Для любой точки P_1 из D_1 рассмотрим множество всех точек, эквивалентных P_1 относительно G. Если для всех точек P_1 из D_1 выполняется условие, что P_1 не является предельной для множества точек, эквивалентных с P_1 (т. е. если все точки, эквивалентные с P_1, лежат вне некоторой окрестности этой точки), то группа G называется *разрывной группой* в области D_0. Относительно простого доказательства критерия разрывности группы вещественных преобразований см. Siegel (1950).

14.1.4. Фундаментальная область. Мы будем рассматривать группу G дробно-линейных преобразований, которым можно поставить в соответствие (замкнутое связное множество) F^*, обладающее следующими свойствами.

1. F^* ограничено конечным числом окружностей или дуг окружностей (при этом могут встретиться несколько непересекающихся дуг одной и той же окружности). Мы будем обозначать эти окружности и дуги окружностей через A_1, A_2, ..., A_n. Точки, в которых пересекаются две дуги, будем называть *вершинами* и обозначать через V_1, V_2, ..., V_m.
2. Никакие две внутренние точки F^* не являются эквивалентными относительно G.
3. Компоненты A_1, ..., A_n границы можно разбить на пары A_ν, $A_{\nu'}$, $\nu \neq \nu'$, так что для каждого ν существует в точности одно преобразование $\overset{*}{\sigma}_\nu$ в G, отображающее A_ν в $A_{\nu'}$.
4. Преобразования $\overset{*}{\sigma}_\nu$ в условии 3 являются *образующими* G, иными словами, каждое преобразование в G является произведением конечного числа (положительных или отрицательных) степеней преобразований $\overset{*}{\sigma}_\nu$.

Заметим сначала, что ни одно из преобразований G (отличных от I) не имеет внутри F^* неподвижных точек. Если точка P является внутренней для F^* и неподвижна при преобразовании σ в G, то σ отображает окрестность точки P в некоторую окрестность той же точки, причем можно считать, что обе эти окрестности принадлежат F^*. Но тогда мы получили бы в F^* две эквивалентные внутренние точки, что противоречит условию 2. Рассмотрим теперь образы множества F^* при всех преобразованиях G. Объединение всех этих образов является областью (оно связно в силу условий 3 и 4). При этом ни одна точка не может быть представлена двумя способами, как образ внутренних точек F^*. В самом деле, пусть $\sigma(P)=\sigma'(P')$, где P и P' — внутренние точки для F^*. Тогда $P=\sigma^{-1}\sigma'(P')$. Если $P \neq P'$, то это равенство противоречит условию 2. Если же $P \doteq P'$, но $\sigma \neq \sigma'$, то оно противоречит условию отсутствия неподвижных точек. С другой стороны, точки, являющиеся образами граничных точек для F^*, могут встретиться несколько раз, например $\sigma_\nu^* P_\nu = I P_{\nu'}$, где P_ν — точка из A_ν и $P_{\nu'}$ — соответствующая точка из $A_{\nu'}$. Если удалить часть границы F^*, то получится область F, которая не является ни открытой, ни замкнутой и образ которой при отображении от G *однократно* покрывает область на S_0 или на z плоскости. Эту область F мы будем называть *фундаментальной областью* для группы G.

Чтобы построить F, возьмем окружности и дуги окружностей, составляющие границу F^*, разобьем их на пары A_ν, $A_{\nu'}$, как указано выше, и из каждой пары оставим одну и удалим вторую. Удалим также вершины, в которых пересекается бесконечное число образов области F^*, разделим оставшиеся вершины на классы эквивалентных вершин, в каждом классе оставим одну вершину и удалим все остальные. Множество всех оставшихся точек (куда, в частности, входят все внутренние точки из F^*) является фундаментальной областью F для G: оно не содержит никаких двух эквивалентных точек.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — преобразования из G, причем σ_1 — тождественное преобразование. Преобразование σ_r отображает F на F_r и $F_1=F$. Объединение всех F_r образует область D_1 (не являющуюся, вообще говоря, ни открытой, ни замкнутой), и множество внутренних точек D_0 из D_1 является открытой областью, что было выяснено в п. 14.1.3.

Пусть z — любая точка из F, и пусть $z_r=\sigma_r(z)$. Предельная точка последовательности $\{z_r\}$ называется *предельной точкой* для G (бесконечно удаленная точка также может быть предельной). Множество всех предельных точек при каждом преобразовании из G отображается само на себя, оно может быть использовано для определения *границы* D_0 или D_1.

Для данной группы фундаментальная область F не является однозначно определенной, и можно доказать (см. Fricke и Klein, 1897, гл. 2, стр. 128), что F можно выбрать так, чтобы никакая из ее вершин не была неподвижной точкой гиперболического или локсодромического преобразования. Для эллиптических вершин V области F^* угол между двумя дугами, пересекающимися в V, имеет вид $\frac{2\pi}{l}$, где l — натуральное число. Если V — неподвижная точка эллиптического преобразования σ из G, то σ^l — тождественное преобразование, l называют *порядком* σ или V. Вершина F^*, являющаяся неподвижной точкой параболического преобразования из G, называется *параболическим острием*.

Две группы G и G' дробно-линейных преобразований называются *подобными* или *эквивалентными*, если существует фиксированное преобразование τ такое, что $G'=\tau^{-1}G\tau$, т. е. такое, что для каждого преобразования σ из G преобразование $\sigma'=\tau^{-1}\sigma\tau$ принадлежит G', причем любое σ' из G' может быть получено, таким образом, из некоторого преобразования σ, принадлежащего G. Если F — фундаментальная область для G, то $\tau^{-1}F=F'$ является фундаментальной областью для G' ($\tau^{-1}F$ является множеством всех точек $\tau^{-1}(z)$, где z пробегает область F).

Данное нами определение фундаментальной области не является наиболее общим, ради простоты мы ввели некоторые дополнительные ограничения; относительно более общих рассмотрений см. Fricke и Klein (1897). Вообще говоря, для фундаментальной области не является существенным то обстоятельство, что она ограничена конечным числом окружностей и дуг окружностей. Существенно лишь то, что фундаментальная область содержит полное множество попарно неэквивалентных точек, что она связна и имеет достаточно регулярную форму. Легко дать точную формулировку первым двум из этих условий. Однако весьма трудно сформулировать третье условие так, чтобы эта формулировка была простой, точной и достаточно общей. Предположение о конечности числа вершин в F налагает некоторые ограничения на автоморфные функции, которые мы будем рассматривать. Эти ограничения ведут к сравнительно простым формулировкам некоторых общих теорем.

Относительно определений фундаментальной области для автоморфных функций многих переменных см. литературу, указанную в пп. 14.11, 14.12.

14.2. Определение автоморфных функций

Пусть G — группа дробно-линейных преобразований

$$z_r=\sigma_r(z)=\frac{a_rz+b_r}{c_rz+d_r},\qquad a_rd_r-b_rc_r=1,\qquad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

σ_0 — тождественное преобразование

$$a_0=d_0=\pm 1,\qquad b_0=c_0=0.$$

Пусть группа G разрывна в области D_0, и пусть F — фундаментальная область для G. Рассмотрим *автоморфные функции* $\varphi(z)=\varphi(z;\ G)$, т. е. функции, удовлетворяющие тождеству

$$\varphi(z_r)=\varphi[\sigma_r(z)]=\varphi(z),\qquad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Поведение этих функций в окрестности особой точки z_0 описывается с помощью *униформизирующей переменной* t:

$$\varphi(z)=t^m(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots), \tag{3}$$

где m — целое число и униформизирующая переменная определяется по группе G следующим образом.

Если z_0 не является неподвижной точкой какого-либо преобразования из G, мы полагаем

$$t=z-z_0,\qquad z_0\neq\infty, \tag{4}$$

$$t=z^{-1},\qquad z_0=\infty. \tag{5}$$

Если z_0 — фиксированная точка параболического преобразования

$$\frac{1}{z'-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+\delta,\qquad z_0\neq\infty, \tag{6}$$

то полагаем

$$t=\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{\delta}\,\frac{1}{z-z_0}\right), \tag{7}$$

выбирая знак так, чтобы $t\to 0$, когда $z\to z_0$ в F. Если же $z_0=\infty$ — неподвижная точка параболического преобразования

$$z'=z+\delta, \tag{8}$$

то полагаем

$$t=\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{\delta}\,z\right), \tag{9}$$

снова выбирая знак так, чтобы $t\to 0$, когда $z\to\infty$ в F. Если z_0 — фиксированная точка эллиптического преобразования порядка l и z_0' — другая неподвижная точка этого преобразования, то полагаем

$$t=\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)^l, \qquad z_0\neq\infty,\ z_0'\neq\infty, \tag{10}$$

$$t=z^{-l}, \qquad z_0=\infty,\ z_0'\neq\infty, \tag{11}$$

$$t=(z-z_0)^l, \qquad z_0\neq\infty,\ z_0'=\infty. \tag{12}$$

Назовем функцию $\varphi(z)=\varphi(z;\ G)$ *автоморфной функцией* для группы G (или принадлежащей к группе G), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi(z)$ является однозначной функцией в F, аналитичной во всех точках из F, исключая, быть может, конечное число точек.

2. Если $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 из F, то ее можно аналитически продолжить (внутри D_0) в точку $z_-=\sigma_-(z_0)$, причем все возможные аналитические продолжения (внутри D_0) приводят к одному и тому же значению $\varphi(z_-)$, и $\varphi(z_-)=\varphi(z_0)$.

3. В окрестности особой точки z_0 функция $\varphi(z)$ может быть представлена в виде (3).

4. $\varphi(z)$ не является постоянной.

Напомним еще раз, что данное нами определение автоморфных функций (и фундаментальных областей) не является самым общим. Для класса определенных выше функций можно дать простые формулировки теорем, о которых будет идти речь в п. 14.7. Форд (1936, п. 86) называет автоморфные функции рассмотренного здесь вида *простыми* автоморфными функциями.

Наиболее важным характеристическим свойством автоморфных функций является их инвариантность относительно преобразований из G. Это свойство выражено равенством (2). В более общем смысле термин автоморфная функция применяется для функций одного или нескольких переменных, инвариантных относительно группы преобразований этого переменного или переменных. Некоторые примеры таких обобщений будут рассмотрены в п. п. 14.11, 14.12.

14.3. Группа икосаэдра

Вообще группа G, входящая в определение автоморфных функций, является бесконечной (т. е. состоит из бесконечного множества преобразований). В этом пункте мы рассмотрим автоморфные функции *конечной* группы (состоящей из конечного числа преобразований). Этот пример позволит рассмотреть существенные принципы, связанные с конструкцией автоморфных функций, не входя в осложнения, возникающие в общем случае. Группа, которую мы рассмотрим здесь, является группой симметрии *икосаэдра* (правильного многогранника, состоящего из двадцати равносторонних треугольников). Эта группа может рассматриваться как группа отображений икосаэдра в себя и известна как *группа икосаэдра*. Она тождественна с группой симметрии додекаэдра (правильного многогранника, состоящего из двенадцати правильных пятиугольников) и поэтому иногда называется *группой додекаэдра*. Согласно Евклиду, с каждым додекаэдром связан куб, ребра которого являются диагоналями граней додекаэдра. При этом в любой додекаэдр можно вписать таким образом пять различных кубов, и вращения додекаэдра приводят к перестановкам этих кубов. Таким образом, нашу группу можно отождествить с группой перестановок пяти элементов, точнее говоря, с *знакопеременной группой* (состоящей из всех четных перестановок).

Пусть икосаэдр вписан в сферу S_0 из 14.1(1), и пусть ребра икосаэдра проектируются на S_0 из центра сферы. Мы получим тогда сеть из двадцати конгруэнтных равносторонних сферических треугольников, покрывающую S_0. Существует 60 вращений сферы, которые оставляют эту сеть инвариантной, поскольку каждый центр тяжести треугольника может быть переведен в любое из 20 положений, после чего остается еще три вращения (на угол $2\pi/3$), оставляющих инвариантной нашу сеть.

Если отобразить сферу S_0 на комплексную z-плоскость с помощью стереографической проекции 14.1(2), то получим сеть из 20 криволинейных треугольников на z-плоскости, каждый из которых ограничен дугами окружностей (в смысле п. 14.1.1, так что некоторые из этих дуг окружностей могут быть прямолинейными отрезками). 60 вращений сферы индуцируют 60 дробно-линейных преобразований. Мы получаем, таким образом, группу G_{60} — реализацию группы икосаэдра. Выберем начало координат на z-плоскости в одной из вершин, а вещественную ось z направим по оси симметрии фундаментальной области. Тогда в группу G_{60} входят три преобразования

$$U(z) = -\frac{1}{z}, \tag{1}$$

$$S(z) = \varepsilon z = \frac{\varepsilon^3 z}{\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon = e^{2\pi i/5}, \tag{2}$$

$$T(z) = \frac{(1+\varepsilon) z + \varepsilon^3}{\varepsilon^3 z - (1+\varepsilon)} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon^4) 5^{-1/2} z - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) 5^{-1/2}}{-(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) 5^{-1/2} z - (\varepsilon - \varepsilon^4) 5^{-1/2}}. \tag{3}$$

Для преобразований S и T первая из двух записей является простейшей, а вторая удовлетворяет условию унимодулярности 14.1(4). Преобразования U, S, T являются образующими для группы G_{60}. Более точно, 60 преобразований из G_{60} задаются в виде

$$S^{\varkappa},\ S^{\varkappa} T S^{\lambda},\ U S^{\varkappa},\ U S^{\varkappa} T S^{\lambda}, \tag{4}$$

где $\varkappa$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$. Тождественное преобразование в такой записи имеет вид S^0.

Группа G_{60} разрывна и D_0 для нее совпадает со всей плоскостью. Фундаментальная область F имеет вершины в точках $z_0 = 0$, z_1 и $\bar{z}_1$, где

$$z_1 = \varepsilon^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} - \left(\frac{15}{8} + \frac{3}{8} \sqrt{5} \right)^{1/2} \right] \tag{5}$$

и z_1, $\bar{z}_1$ — комплексно сопряжены. Граница области F состоит из прямолинейных отрезков A_1, A_2, соединяющих z_0 с z_1 и $\bar{z}_1$, и дуги окружности A_3, соединяющей z_1 и $\bar{z}_1$ и пересекающей вещественную ось в точке

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Все преобразования из G_{60} эллиптичны, причем U, S и T имеют соответственно порядки 2, 5, 2. Точки z_0, z_2, z_1 являются соответственно неподвижными точками для преобразований S, T и TS. S отображает A_1 на A_2, а T отображает часть A_3, соединяющую z_1 и z_2, на часть, соединяющую $\bar{z}_1$ и z_2. Таким образом, надо рассматривать две половины A_3 как отдельные дуги, z_2 считать вершиной, а поэтому полное множество вершин для F состоит из точек z_0, z_1, z_2, $\bar{z}_1$. Если отбросить часть границы в соответствии с п. 14.1.4, то образ F относительно 60 преобразований (4) однократно покрывает всю z-плоскость. Сеть треугольников на S_0 или на z-плоскости приведена в книге Forsyth (1900, рис. 104, стр. 660 и рис. 107, стр. 667), где шесть треугольников, попеременно окрашенных в белый и черный цвет, образуют фундаментальную область.

В рассматриваемом случае все автоморфные функции являются рациональными функциями от z, и можно показать (см., например, Fricke, 1926, т. 2, гл. 3), что их можно выразить нижеследующим образом через функции

$$u(z)=z^{20}+1-228(z^{15}-z^{5})+494z^{10}, \tag{7}$$

$$v(z)=z^{30}+1+522(z^{25}-z^{5})-10\,005(z^{20}+z^{10}), \tag{8}$$

$$w(z)=z(z^{10}+11z^{5}-1). \tag{9}$$

Пусть k, l, m, n — целые числа, $n\geqslant 0$ (если $n=0$, то сумма в (10) может быть заменена нулем, а произведение в (11) — единицей), пусть $\varepsilon_\nu=\pm 1$ и a_ν и b_ν — отличные от нуля постоянные, $\nu=1, \ldots, n$; кроме того, пусть выполняется соотношение

$$20k+30l+12m+60\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu=0. \tag{10}$$

Тогда любая функция вида

$$\varphi(z)=u^k v^l w^m \prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu u^3+b_\nu v^2)^{\varepsilon_\nu} \tag{11}$$

является автоморфной функцией для группы G_{60} и каждая автоморфная функция этой группы может быть представлена в таком виде. Поскольку три функции u, v, w не являются независимыми друг от друга, а удовлетворяют соотношению

$$u^3-v^2+12^3w^5=0, \tag{12}$$

представление (11) не является однозначно определенным.

Относительно описания положения нулей и полюсов автоморфной функции, определенной равенством (11), и приложения теории автоморфных функций группы G_{60} к решению общего уравнения пятой степени см. Fricke (1926, т. 2, гл. 2 и 3).

Можно перечислить все конечные группы дробно-линейных преобразований. Относительно теории автоморфных функций, соответствующих этим группам, см. Fricke (1926, т. 2, гл. 2).

14.4. Параболические преобразования

Если все преобразования группы G, за исключением тождественного, параболичны, то можно показать, что все параболические преобразования группы имеют общую неподвижную точку. Не теряя общности, можно предположить, что этой общей неподвижной точкой является бесконечно удаленная точка. В этом случае D_0 является *конечной частью* плоскости, т. е. множеством всех конечных комплексных чисел z (конечную часть комплексной плоскости называют также плоскостью с выколотой бесконечно удаленной точкой). Соответствующие разрывные группы принадлежат одному из следующих двух типов. Либо существует вещественное или комплексное число ω такое, что

$$\sigma_r(z)=z+r\omega, \qquad r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

либо существуют два фиксированных вещественных или комплексных числа ω и ω' такие, что ω/ω' не является вещественным числом, и преобразования группы имеют вид

$$\sigma_{rr'}(z)=z+r\omega+r'\omega', \qquad r, r'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

В случае группы, состоящей из преобразований (1), автоморфной функцией для группы G является

$$t=\exp\left(\frac{2\pi i z}{\omega}\right). \tag{3}$$

Любая мероморфная функция от t (однозначная функция, аналитическая с точностью до полюсов) является автоморфной функцией и каждая автоморфная функция имеет такой вид. Таким образом, в этом случае автоморфными функциями группы G являются мероморфные периодические функции с периодом ω.

Если G состоит из преобразований (2), то автоморфными функциями группы G являются мероморфные двояко-периодические (т е. эллиптические, см. п. 13.11) функции от G, имеющие периоды ω, ω'.

Группы параболических преобразований с тремя или большим числом периодов не представляют для нас интереса, поскольку можно показать (см. п. 13.10), что мероморфная функция комплексного переменного, имеющая более двух независимых периодов, постоянна. Таким образом, группы, содержащие более двух независимых параллельных переносов, не обладают автоморфными функциями.

Обобщения. Кратно-периодические функции. Группы параллельных переносов с несколькими независимыми образующими обладают автоморфными функциями, если вместо функций одного комплексного переменного рассматривать мероморфные функции от p комплексных переменных, $p=2, 3, 4, \ldots$ Такие функции могут иметь $2p$ (или меньше) периодов. Они определяются $2p^2$ постоянными

$$\omega_{\mu\alpha}, \qquad \mu=1, 2, \ldots, p; \ \alpha=1, 2, \ldots, 2p, \tag{4}$$

которые называются *периодами*. Постоянные $\omega_{\mu\alpha}$ не могут быть выбраны произвольно, а должны удовлетворять некоторым условиям. Можно показать, что путем соответствующего преобразования переменных и периодов получаем

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{i\pi\delta_{\mu\nu}}{e_\mu}, \qquad \omega_{\mu, p+\nu}=a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}, \qquad \mu, \nu=1, \ldots, p, \tag{5}$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, e_μ — натуральные числа, и для всех вещественных x_α, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha=1}^{p} x_\alpha^2 > 0, \tag{6}$$

выполняется соотношение

$$\operatorname{Re}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu < 0. \tag{7}$$

Пусть числа $\omega_{\mu\alpha}$ таковы, что по крайней мере для одного μ

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \lambda_\alpha\omega_{\mu\alpha} \neq 0$$

при всех вещественных $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2p}$, за исключением $\lambda_1=\ldots=\lambda_{2p}=0$, и пусть $f(u_1, \ldots, u_p)$ — однозначная аналитическая функция от p комплексных переменных, регулярная для всех конечных значений $u_1, \ldots, u_p$, за исключением изолированного множества точек, не являющихся существенными особенностями, причем $f(u_1, \ldots, u_p)$ не может быть выражено как функция менее чем p линейных комбинаций переменных. Мы будем называть $f(u_1, \ldots, u_p)$ *2p-кратно периодической функцией* от $u_1, \ldots, u_p$, если при любых целых $n_{\mu\alpha}$, $\mu=1, \ldots, p$, $\alpha=1, \ldots, 2p$, и

$$\eta_\mu=\sum_{\alpha=1}^{2p} n_{\mu\alpha}\omega_{\mu\alpha}, \qquad \mu=1, \ldots, p, \tag{8}$$

для всех конечных точек $(u_1, \ldots, u_p)$, в которых f регулярна, выполняется равенство

$$f(u_1+\eta_1, \ldots, u_p+\eta_p)=f(u_1, \ldots, u_p). \tag{9}$$

Можно доказать, что для любого множества периодов $\omega_{\mu\alpha}$, удовлетворяющего условиям (5), (7), существуют $2p$-кратно периодические функции. При этом существуют p таких функций, которые алгебраически независимы друг от друга; любые $p+1$ такие функции связаны алгебраическим соотношением (см. п. 13.11 для случая $p=1$). Каждая $2p$-кратно периодическая функция может быть выражена как рациональная функция соответственно выбранных тета-функций, определенных с помощью p-кратных бесконечных рядов

$$\theta(u_1, \ldots, u_p)=\sum_{m_1, \ldots, m_p=-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}m_\mu m_\nu+2\sum_{\mu=1}^{p} m_\mu u_\mu\right). \tag{10}$$

Здесь $a_{\mu\nu}$—вещественные или мнимые числа такие, что $\operatorname{Re} a_{\mu\nu}$ образует отрицательно определенную симметрическую матрицу, т. е. $a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}$ и

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu\right)<0 \tag{11}$$

для всех вещественных $x_1, \ldots, x_p$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\mu=1}^{p} x_\mu^2 > 0.$$

Относительно теории кратных периодических функций и их связи с алгебраическими функциями одного переменного и с теорией абелевых функций см. Baker (1907), Krazer и Wirtinger (1901—1921).

14.5. Бесконечная циклическая группа с двумя неподвижными точками

Пусть σ—гиперболическое или локсодромическое преобразование. Если ζ_1 и ζ_2—неподвижные точки преобразования σ, то это преобразование можно представить в виде

$$\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\rho e^{i\varphi}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \quad \text{или} \quad z'-\zeta_1=\rho e^{i\varphi}(z-\zeta_1)$$

в зависимости от того, имеем ли мы $\zeta_2 \neq \infty$ или $\zeta_2=\infty$. В обоих случаях предполагается, что $\zeta_1 \neq \infty$. Здесь $\rho>0$, $\rho \neq 1$. Если φ является целым кратным 2π, то преобразование гиперболично, в противном случае оно локсодромическое.

Рассмотрим группу G, порожденную преобразованием σ. Элементами этой группы являются σ^n. $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Преобразования σ^n можно представить в виде

$$\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\rho^n e^{in\varphi}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad \zeta_1, \zeta_2 \neq \infty, \tag{1}$$

или

$$z'-\zeta_1=\rho^n e^{in\varphi}(z-\zeta_1), \qquad \zeta_1 \neq \infty, \ \zeta_2=\infty, \tag{2}$$

где ρ, φ — введенные выше величины и n — любое (положительное или отрицательное) целое число.

Группа G разрывна в области D_0, состоящей из всех комплексных чисел, отличных от ζ_1 и ζ_2 (т. е. являющейся комплексной плоскостью с выколотыми точками ζ_1 и ζ_2). Для того чтобы получить фундаментальную область F, возьмем любую окружность C_0, разделяющую точки ζ_1 и ζ_2 (так что любая непрерывная кривая, соединяющая ζ_1 и ζ_2, пересекает C_0), обозначим через C_n образ окружности C_0 при отображении σ^n. Последовательность окружностей C_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, инвариантна относительно G. При этом никакие две окружности этой последовательности не пересекаются друг с другом. Любая область, ограниченная двумя смежными окружностями C_n и C_{n+1} (причем одна окружность является частью области, а другая нет), может быть выбрана в качестве фундаментальной области F.

Автоморфными функциями группы G являются эллиптические функции комплексного переменного

$$\left.\begin{aligned} u &= \ln \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, && \zeta_1, \zeta_2 \neq \infty, \\ u &= \ln (z-\zeta_1), && \zeta_1 \neq \infty, \ \zeta_2 = \infty \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

с периодами

$$\omega_1 = \ln \rho + i\varphi, \qquad \omega_2 = 2\pi i. \tag{4}$$

То, что в качестве автоморфных функций группы G появились двоякопериодические функции, может быть объяснено следующим образом: группа G, по сути дела, совпадает с группой, рассмотренной в 14.4 (1). Между этими группами с точки зрения алгебры нет никакого различия, они изоморфны. Однако области, относящиеся к этим группам, существенно различны. Область D_0 (плоскость с выколотой бесконечно удаленной точкой) и фундаментальная область F (бесконечная полоса) в 14.4 (1) были *односвязными областями*; рассматриваемая здесь область D_0 (плоскость с двумя выколотыми точками) и фундаментальная область F (ограниченная двумя непересекающимися окружностями) *двусвязны*. В двусвязной области (такой, как F) функция может быть всюду аналитична и многозначна, что нарушает условие 2 п. 14.2. Мы используем одну из периодичностей, чтобы сделать нашу функцию однозначной в F, а другую — чтобы определить ее в образах области F в соответствии с 14.2 (2).

Относительно приложений к краевым задачам электростатики см. Burnside (1891, 1892), где изучен случай $2n$ ограничивающих окружностей.

14.6. Эллиптические модулярные функции

14.6.1. Модулярная группа. Пусть M — группа всех дробно-линейных преобразований

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1 \tag{1}$$

с целыми a, b, c, d. M называется *модулярной группой* (см. также п. 13.24); она имеет бесконечный порядок и все ее преобразования отображают верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на себя. Пусть D_0 — верхняя полуплоскость. Тогда M разрывна в D_0. В качестве фундаментальной области F можно взять множество точек z таких, что

$$\operatorname{Im} z > 0 \text{ и либо } |z| \geqslant 1, \quad -1/2 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0, \text{ либо } |z| > 1, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1/2. \tag{2}$$

Вершинами F являются точки

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3},\qquad z_2=i,\qquad z_3=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3},\qquad z_4=\infty. \tag{3}$$

Преобразование σ, соответствующее значениям параметра $a=b=d=1$, $c=0$, т. е.

$$z'=\sigma(z)=z+1 \tag{4}$$

отображает отрезок (луч), соединяющий z_1 и z_4, на отрезок, соединяющий z_3 и z_4, причем z_4 является параболической неподвижной точкой этого преобразования. Преобразование τ, соответствующее значениям параметров $a=d=0$, $b=-1$, $c=1$, т. е.

$$z'=\tau(z)=-\frac{1}{z}, \tag{5}$$

отображает дугу верхней единичной полуокружности, соединяющую точки z_1 и z_2, на дугу, соединяющую z_3 с z_2. Для этого преобразования неподвижной точкой является z_3 (другая неподвижная точка лежит в нижней полуплоскости).

Группа M порождается преобразованиями σ, τ. Так как $\tau^2=I$, то любое преобразование из M можно представить в виде

$$\sigma^{n_1}\tau\sigma^{n_2}\tau\ldots\sigma^{n_{l-1}}\tau\sigma^{n_l},$$

где

$$l=1, 2, 3, \ldots,\qquad n_1, n_l=0, 1, 2, \ldots,\qquad n_2, \ldots, n_{l-1}=1, 2, 3, \ldots$$

Образы области F при всех этих преобразованиях однократно покрывают верхнюю полуплоскость.

14.6.2. Модулярная функция $J(z)$. *Абсолютный инвариант* $J(z)$ модулярной группы M возникает в теории эллиптических функций (где переменная обычно обозначается через τ, см. п. 13.24). Он играет важную роль в этой теории и ее приложениях. Тесно связанная с ним функция лежит в основе первоначального доказательства теоремы Пикара. Основными свойствами $J(z)$ являются следующие.

1. Функция $J(z)$ однозначна и аналитична в D_0 (верхней полуплоскости) и для всех преобразований 14.6 (1) модулярной группы выполняется условие

$$J(z')=J\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=J(z)\ \text{в}\ D_0. \tag{6}$$

2. Функция $w=J(z)$ отображает фундаментальную область F (определяемую согласно 14.6 (2)) взаимно однозначно на (полную) w-плоскость так, что граница F отображается на часть вещественной оси на плоскости w от $-\infty$ до 1, причем

$$J\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)=0,\qquad J(i)=1,\qquad J(\infty)=\infty. \tag{7}$$

3. В силу 1 и 2 $J(z)$ является автоморфной функцией от M, причем каждая автоморфная функция от M есть рациональная функция от $J(z)$.

Кроме того, отметим, что каждая точка вещественной оси на плоскости z является особой для $J(z)$, а потому вещественная ось есть *натуральная граница* для $J(z)$.

Выражение $J(z)$ через ряды Эйзенштейна. Пусть ω, ω' — два вещественных или комплексных числа таких, что $\operatorname{Im}(\omega'/\omega)>0$. Будем рассматривать ω и ω' как полупериоды и образуем инварианты Вейерштрасса

$$g_2(\omega, \omega')=60\sum{}'(m\omega+n\omega')^{-4},\qquad g_3(\omega, \omega')=140\sum{}'(m\omega+n\omega')^{-6} \tag{8}$$

(см 13 12 (13)), где $\sum'$ означает суммирование по всем парам целых чисел (m, n), за исключением $m=n=0$ Мы полагаем также

$$\Delta(\omega, \omega') = g_2^3 - 27 g_3^2 \tag{9}$$

(см 13.13 (7)). Очевидно, что g_2^3/Δ — это однородная функция нулевой степени от ω и ω' и, следовательно, она зависит только от

$$z = \omega'/\omega, \tag{10}$$

где z рассматривается как комплексное переменное, пробегающее верхнюю полуплоскость, Мы имеем

$$J(z) = g_2^3/\Delta \tag{11}$$

(см 13 24 (4)).

Сгруппируем в рядах

$$\left.\begin{aligned} E_2(z) &= \omega^4 g_2(\omega, \omega') = 60 \sum{}' (m+nz)^{-4}, \\ E_3(z) &= \omega^6 g_3(\omega, \omega') = 140 \sum{}' (m+nz)^{-6} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

все члены, для которых m и n имеют один и тот же наибольший общий делитель d, и пусть $n=sd$, $m=-td$, $s \geqslant 0$, где s и t взаимно просты. Если $s=0$, то $t=1$. Принимая во внимание соотношение

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^6} = \frac{\pi^6}{945}, \tag{13}$$

вытекающее из 1 13 (16), мы получаем, наконец,

$$\left.\begin{aligned} E_2(z) &= \frac{4}{3}\pi^4 \left[1 + \sum_{(s,t)=1,\ s>0} (sz-t)^{-4}\right], \\ E_3(z) &= \frac{8}{27}\pi^6 \left[1 + \sum_{(s,t)=1,\ s>0} (sz-t)^{-6}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В последних двух суммах s пробегает все натуральные числа и для каждого s переменная t пробегает все (положительные, отрицательные и нулевые) целые числа, взаимно простые с s.

Ряды (14) являются примерами *рядов Эйзенштейна* Характеристическое свойство таких рядов состоит в том, что на индексы суммирования иалагают теоретико числовые условия

Выражения g_2 и g_3 в (8) называют *однородными модулярными формами* (т е модулярными формами, которые выражаются через однородные переменные ω, ω') степени -4 и -6 соответственно, а E_2 и E_3 в (14) называют *неоднородными модулярными формами* (т. е. модулярными формами, выражаемыми через неоднородное переменное z) Относительно определения модулярных форм см Klein и Fricke (1890, 1892) и п 14 8 3.

Пусть a, b, c, d — целые числа такие, что $ad-bc=1$; тогда, если s и t пробегают все множество пар взаимно простых целых чисел, то $s'=as-ct$, $t'=dt-bs$ пробегают это же самое множество При этом мы считаем, что множеству принадлежит лишь одна из пар s', t' и $-s'$, $-t'$. Отсюда следует, что для любого преобразования 14.6. (1) в M имеем

$$\left.\begin{aligned} E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= (cz+d)^4 E_2(z), \\ E_3\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= (cz+d)^6 E_3(z), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

и потому

$$J(z)=\frac{[E_2(z)]^3}{[E_2(z)]^3-27[E_3(z)]^2}\tag{16}$$

удовлетворяет (6).

Из (14) видно, что функции $E_2(z)$ и $E_3(z)$ являются однозначными аналитическими функциями от z в верхней полуплоскости D_0 и что вещественная ось является множеством особенностей этих функций Более подробное исследование показывает, что $J(z)$ обладает этими же свойствами (см. выше, 1 на стр 85)

Выражение $J(z)$ через тета-функции Положим

$$q=e^{i\pi z},\qquad |q|<1.\tag{17}$$

Так как преобразование $z'=z+1$ принадлежит M, то $J(z)$ является в верхней полуплоскости периодической аналитической функцией с периодом 1. Следовательно, $J(z)$ — это четная аналитическая функция от q в единичном круге с выколотой точкой $q=0$ и может быть разложена в ряд по четным степеням q

Это разложение можно вывести из формулы

$$J(z)=\frac{\pi^8}{54}\frac{(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8)^3}{\theta_1'^8}=\frac{4\pi^8}{27}\frac{(\theta_3^8-\theta_2^4\theta_4^4)^3}{\theta_1'^8},\tag{18}$$

вытекающей из 13.24 (5), 13.19 (12) и (23), где

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1'&=\theta_1'(0)=2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3,\\
\theta_2&=\theta_2(0)=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}[(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2],\\
\theta_3&=\theta_3(0)=\prod_{n=1}^{\infty}[(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2],\\
\theta_4&=\theta_4(0)=\prod_{n=1}^{\infty}[(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2]
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

(см. 13 19 (16)) являются тета-функциями нулевого аргумента. Из (18) и (19) мы имеем разложение

$$1728\,J(z)=q^{-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^{2n},\qquad q=e^{i\pi z},\tag{20}$$

сходящееся при $0<|q|<1$. Очевидно, что коэффициенты a_n — целые числа; относительно их значений при $0\leqslant n\leqslant 24$, см. Zuckerman (1939). Другое выражение, которое можно получить из (18), имеет вид

$$J(z)=\frac{\left(1+240\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^3}{12^3q^2\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{24}}.\tag{21}$$

Связь с гипергеометрическим рядом. Из свойства 2 функции $J(z)$ следует, согласно п. 2 7 2, что обратная функция для $J(z)$ может быть выражена через гипергеометрическую функцию. См. также 13.24(2) и (5) и 13.8(5) и (6).

Положим

$$\left.\begin{aligned} F(J) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}; J\right), \\ F^*(J) &= {}_2F_1\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}; \frac{4}{3}; J\right), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрический ряд Гаусса, определенный в 2.1(2), и введем

$$\gamma = \frac{F(1)}{F^*(1)} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}\right]^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}, \tag{23}$$

$$\lambda = (2-\sqrt{3})\,\gamma. \tag{24}$$

Можно показать, что

$$z = e^{2\pi i/3}\frac{F - \lambda e^{i\pi/3} J^{1/3} F^*}{F - \lambda e^{-\pi i/3} J^{1/3} F^*}, \tag{25}$$

где положено $J = J(z)$, $F = F(J)$, $F^* = F^*(J)$. Это равенство дает значение z для любого J, принадлежащего единичному кругу. Вне единичного круга мы имеем

$$\begin{gathered} 2\pi i z = -\ln J - 3\ln 12 + \frac{G\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; J^{-1}\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; J^{-1}\right)}, \\ |J| > 1, \quad |\arg(1-J)| < \pi, \end{gathered} \tag{26}$$

где ${}_2F_1$ — снова ряд Гаусса и

$$\begin{aligned} G(a, b; 1; u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} [\psi(a+n) + \psi(b+n) - \\ - 2\psi(n+1) + \psi(a) + \psi(b) - 2\psi(1)], \end{aligned} \tag{27}$$

ψ — логарифмическая производная гамма-функции (см. Fricke, 1930).

Относительно приложений модулярных инвариантов к теории чисел см. п. 14.6.5. Относительно приложений к теории функций комплексного переменного (для доказательства теоремы Пикара) см. например, Курант (1934, стр. 249).

14.6.3. Подгруппы модулярной группы. Мы рассмотрим здесь некоторые подгруппы модулярной группы. Эти подгруппы определяются сравнениями, которым должны удовлетворять целые числа a, b, c, d, задающие дробно-линейное преобразование

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1. \tag{28}$$

Пусть m — натуральное число. Обозначим через M_m множество всех преобразований (28) из M таких, что

$$a+1,\ b,\ c,\ d+1 \quad \text{или} \quad a-1,\ b,\ c,\ d-1 \tag{29}$$

являются целыми числами, делящимися на m. Легко видеть, что M_m само является группой, оно называется *главной конгруэнц подгруппой* m-й ступени модулярной группы M. Каждая подгруппа M_m разрывна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, причем фундаментальная область для M_m может быть построена путем склеивания соответственным образом выбранных γ_m «копий» фундаментальной области F группы M (определенной в (2)). Под «копией» F мы понимаем область, являющуюся образом F при некотором модулярном преобразовании. Если

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{30}$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа, то $\gamma_2 = 6$ и

$$\gamma_m = \frac{1}{2} m^3 (1 - p_1^{-2})(1 - p_2^{-2}) \ldots (1 - p_k^{-2}), \qquad m > 2. \tag{31}$$

Мы рассмотрим в дальнейшем случаи $m=2, 5$. Относительно других подгрупп M_m см. Fricke (1926), Klein и Fricke (1890, 1892).

При $m=2$ мы имеем преобразование (28), где a и d — нечетные целые числа, b и c — четные целые числа. Таким образом, M_2 является λ-группой (пп. 13.22, 13.24). Фундаментальная область F_2 для M_2 определяется так:

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad |z - 1/2| > 1/2, \quad |z + 1/2| \geqslant 1/2, \quad -1 \leqslant \operatorname{Re} z < 1. \tag{32}$$

Вершинами F_2 являются точки

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \infty. \tag{33}$$

Граница F_2 состоит из лежащих в верхней полуплоскости частей прямых линий $\operatorname{Re} z = \pm 1$ и окружностей $|2z \pm 1| = 1$. Обозначим компоненты границы $A_1, \ldots, A_4$:

$$\left.\begin{array}{lll} A_1\colon & \operatorname{Im} z \geqslant 0, & \operatorname{Re} z = -1, \\ A_2\colon & \operatorname{Im} z \geqslant 0, & |z + 1/2| = 1/2, \\ A_3\colon & \operatorname{Im} z \geqslant 0, & |z - 1/2| = 1/2. \\ A_4\colon & \operatorname{Im} z \geqslant 0, & \operatorname{Re} z = 1. \end{array}\right\} \tag{34}$$

Согласно (32) A_1 и A_2 принадлежат F_2, а A_3 и A_4 не принадлежат этой области. λ-группа порождается (в смысле, указанном в п. 14.1.4) преобразованиями

$$z' = \sigma(z) = z + 2, \qquad z' = \tau(z) = \frac{z}{2z+1}. \tag{35}$$

Мы уже видели в п. 13.24, что $k^2 = \lambda(z)$ является *автоморфной функцией* группы M_2. Эта функция однозначна и аналитична в верхней полуплоскости, инвариантна относительно преобразований из M_2 и отображает F_2 на всю w-плоскость. Кроме того, каждая автоморфная функция для группы M_2 является рациональной функцией от k^2 Так как M_2 — подгруппа M и $J(z)$ — автоморфная функция для группы M, то $J(z)$ является автоморфной функцией и для M_2 и, следовательно, рациональной функцией от k^2. Явное выражение имеет вид

$$J(z) = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}. \tag{36}$$

Функцию $\lambda(z)$ легко выразить через тета-функции (см. 13.20(14)). Мы имеем

$$\lambda(z) = k^2 = \frac{\theta_2^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)} = 16q \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2m}}{1 + q^{2m-1}} \right)^8 = 16 \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)^2}}{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}} \right)^4, \tag{37}$$

где

$$q = e^{i\pi z}, \qquad |q| < 1. \tag{38}$$

Разложение функции $\lambda(z)$ в ряды типа Эйзенштейна можно вывести из теории $\wp$-функции Вейерштрасса.

Функция

$$w=\lambda(z) \tag{39}$$

отображает область

$$\operatorname{Im} z \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1, \quad |z-1/2| > 1/2 \tag{40}$$

плоскости z на верхнюю полуплоскость w-плоскости так, что точкам $z=0$, 1, ∞ соответствуют точки $w=1$, ∞, 0. Как и в случае $J(z)$, отсюда следует, что функция, обратная (39), может быть выражена через гипергеометрическую функцию. В силу 13.19(3) и 13.8(5) мы имеем

$$z=i\,\frac{{}_2F_1(1/2,\ 1/2;\ 1;\ 1-\lambda)}{{}_2F_1(1/2,\ 1/2;\ 1;\ \lambda)}, \tag{41}$$

где ${}_2F_1$ — ряд Гаусса.

Другой подход к теории функций $\lambda(z)$ принадлежит Нехари (Nehari; 1947), который рассматривал функциональное уравнение

$$f(q)=4\,[f(q^2)]^{1/2}\,\{1+[f(q^2)]^{1/2}\}^{-2} \tag{42}$$

и показал, что условие

$$f(0)=0, \quad f'(0)>0, \quad f(q) \text{ аналитична для } |q|<1 \tag{43}$$

определяет единственное решение $f_0(q)$ этого функционального уравнения. Мы имеем $f_0(q)=\lambda(z)=k^2$, где q и z связаны соотношением (38), и (42) является, по сути дела, преобразованием Ландена (см. п. 13.23).

Перейдем теперь к рассмотрению подгруппы M_5. Фундаментальная область F_5 для M_5 состоит из $\gamma_5=60$ «копий» фундаментальной области F группы M, лежащих в верхней полуплоскости. 60 модулярных преобразований, отображающих F на эти 60 копий, являются представителями шестидесяти смежных классов подгруппы M_5 в M. (Относительно понятия смежного класса подгруппы см. Ван дер Варден (1947).)

Существует автоморфная функция $\Lambda(z)$, таким же образом связанная с M_5 и F_5, как $J(z)$ с M и F или $\lambda(z)$ с M_2 и F_2. Явное выражение для $\Lambda(z)$ имеет вид

$$\Lambda(z)=q^{2/5}\,\frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\,q^{5m^2+3m}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\,q^{5m^2+m}}. \tag{44}$$

Каждая автоморфная функция для группы M_5 является рациональной функцией от $\Lambda(z)$; абсолютный инвариант $J(z)$ является автоморфной функцией для любой подгруппы M и, в частности, для M_5. Поэтому его можно выразить как рациональную функцию от $\Lambda(z)$. Это выражение имеет вид

$$\frac{J}{J-1}=\frac{[u(\Lambda)]^3}{[v(\Lambda)]^2}, \quad J=-\frac{[u(\Lambda)]^3}{1728\,[w(\Lambda)]^5}, \tag{45}$$

где u, v, w — многочлены, определенные формулами 14.3(7), (8), (9). Формула (45) играет важную роль в знаменитом решении уравнения пятой степени, принадлежащем Ф. Клейну.

Для всех целых положительных чисел l функция $[\lambda(z)]^{1/2l}$ является автоморфной функцией некоторой подгруппы группы M. Тогда, и только тогда, когда $l=1$, 2 или 4, существует главная конгруэнц-подгруппа (M_4, M_8 и M_{16} соответственно), для которой $[\lambda(z)]^{1/2l}$ — автоморфная функция.

14.6.4. Модулярные уравнения. Если $f(z)$ является либо функцией $J(z)$, либо соответствующей автоморфной функцией главной конгруэнц-подгруппы (например, $\lambda(z)$ в случае M_2 и $\Lambda(z)$ в случае M_5), то для любого целого $l > 1$ функции $f(z)$ и $f(lz)$ связаны алгебраическим уравнением. Такие уравнения называют *модулярными уравнениями.*

В случае абсолютного инварианта мы имеем следующее положение дел. Для любого целого $l > 1$ функция $J(lz)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $l+1$. Коэффициентами этого уравнения являются рациональные функции от $J(z)$, причем коэффициенты, входящие в эти рациональные функции, являются рациональными числами. Корни этого уравнения имеют вид

$$J(lz),\quad J\left(\frac{z}{l}\right),\quad J\left(\frac{z+1}{l}\right),\quad \ldots,\quad J\left(\frac{z+l-1}{l}\right).$$

Укажем явное выражение модулярного уравнения, которому удовлетворяет $J(2z)$. Оно имеет вид

$$j^{*3}+j^3-(jj^*)^2+2^4\cdot 3\cdot 31\,jj^*(j+j^*)-2^4\cdot 3^4\cdot 5^3(j^2+j^{*2})+ \\ +3^4\cdot 5^3\cdot 4027jj^*+2^8\cdot 3^7\cdot 5^6(j+j^*)-2^{12}\cdot 3^9\cdot 5^9=0, \tag{46}$$

где для краткости положено

$$j=12^3J(z),\qquad j^*=12^3J(2z). \tag{47}$$

14.6.5. Приложения к теории чисел. Эллиптические модулярные функции и связанные с ними функции (ряды Эйзенштейна, тета функции) играют важную роль в теории чисел. Относительно некоторых приложении см. пп. 17.2, 17.3, 17.4 и Hardy (1940). Абсолютные инварианты $J(z)$ обладают тем свойством, что если α имеет положительную мнимую часть и является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, то $J(\alpha)$ является целым алгебраическим числом. Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, для которых одним из корней является $J(\alpha)$, являются так называемыми уравнениями класса для мнимых квадратичных числовых полей (см. Fricke (1928), Fueter (1924, 1927)), см. также Schneider (1936), Hecke (1939).

Новое и далеко идущее развитие этой теории было начато Гекке (Hecke; 1935, 1937, 1939, 1940a, 1940б), см. также Petersson (1939) и, относительно некоторых числовых результатов, Zassenhaus (1941).

Некоторые результаты, относящиеся к теме этого пункта, но значительно более общие, содержатся в статье Зигеля (Siegel; 1935).

14.7. Общая теория автоморфных функций

В этом пункте мы опишем кратко классификацию разрывиых групп дробно-линейных преобразований и сформулируем некоторые общие теоремы об автоморфных функциях одного переменного. Все результаты, о которых здесь будет идти речь, основываются на определениях первых пунктов этой главы; мы хотим еще раз напомнить, что эти определения не являются наиболее общими.

14.7.1. Классификация групп. Автоморфные функции часто классифицируют в соответствии с группами, к которым они принадлежат. Классификация всех разрывных групп дробно линейных преобразований (см. п. 14 1 3) была дана Пуанкаре. Она была далее развита Фрикке, который примерно треть первого тома книги Fricke и Klein (1897) посвятил детальной классификации. Ее результаты сформулированы на стр. 164, 165 этой книги (Fricke и Klein, 1897, т. I).

Как и в начале этой главы мы будем обозначать через G группу дробно-линейных преобразований σ_r ($r=0, 1, 2, 3, \ldots$), где

$$\sigma_r(z)=\frac{a_rz+b_r}{c_rz+d_r},\qquad a_rd_r-b_rc_r=1. \tag{1}$$

Если существует окружность C_0, которая отображается на себя при всех преобразованиях σ_r, то группу G называют *фуксовой* группой. Окружность C_0 называют *главной окружностью* группы G, а G называют также группой, обладающей главной окружностью. Если группа G имеет главную окружность, то с помощью дробно-линейного преобразования плоскости z можно преобразовать C_0 в стандартную окружность. Применяются две такие стандартизации:

1) C_0—единичная окружность. Для того чтобы единичная окружность отображалась на себя при дробно-линейном преобразовании σ_r, необходимо и достаточно, чтобы

$$d_r=\overline{a_r}, \quad c_r=\overline{b_r}, \quad |a_r|\neq|b_r|, \quad r=0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где черточка сверху обозначает комплексно сопряженную величину.

2) C_0—вещественная ось. Для того чтобы вещественная ось отображалась на себя при всех преобразованиях σ_r, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_r, b_r, c_r, d_r \text{ вещественны}, \quad a_rd_r-b_rc_r\neq 0, \quad r=0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Модулярная группа и ее подгруппы являются примерами разрывных групп, для которых вещественная ось есть главная окружность.

В общем случае группа G имеет предельные точки (см. п. 14.1.4). Пусть их число равно l. Можно доказать, что l может принимать лишь значения 0, 1, 2 и ∞. Если $l=0$, то очевидно, что группа G конечна (примеры таких групп даны в п. 14 3). Если $l=1$, то можно показать, что G—группа параболических преобразований, причем все преобразования этой группы имеют одну и ту же неподвижную точку. Эти группы были изучены в п. 14.4. Если $l=2$, то мы имеем случай, изученный в п. 14.5, и несколько более общий случай, когда G подобна группе, порожденной двумя преобразованиями

$$\sigma(z)=\alpha z, \qquad \tau(z)=\frac{\varepsilon}{z}, \tag{4}$$

где ε—корень из 1, т. е. $\varepsilon^m=1$ для некоторого натурального значения m, см. Fricke и Klein (1897). Если $l=\infty$, то предельные точки группы G образуют бесконечное точечное множество и легко показать, что это множество замкнуто.

Если существует главная окружность C_0 и каждая точка этой окружности является предельной для группы G, то C_0 называют *предельной окружностью* группы G, а саму группу G *фуксовой группой первого рода*. Если же предельные точки образуют нигде не плотное множество на C_0, то G называют *фуксовой группой второго рода*. Все остальные группы G, обладающие бесконечным множеством предельных точек, называют *клейновскими группами*. Если $l=\infty$ и группа не обладает главной окружностью, то можно доказать, что она содержит локсодромические преобразования. Модулярная группа и ее подгруппы, изученные в п. 14.6.3, являются примерами групп, для которых вещественная ось есть предельная окружность.

14.7.2. Общие теоремы об автоморфных функциях. Пусть G—бесконечная разрывная группа (см. п. 14.1.3) дробно-линейных преобразований, а F—фундаментальная область (см. п. 14.1.4) и $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, ...—автоморфные функции (в смысле п. 14.2) группы G Для автоморфных функций справедливы следующие общие теоремы, которые соответствуют общим теоремам п. 13.11 об эллиптических функциях (напомним, что эллиптические функции это автоморфные функции для группы 14.4 (2), порожденной двумя сдвигами).

Каждая автоморфная функция имеет полюсы в F. Число нулей и полюсов автоморфной функции в F одинаково. Автоморфная функция принимает в F каждое значение одно и то же число раз.

Любые две автоморфные функции данной группы *алгебраически зависимы*, иными словами, для любых двух автоморфных функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ группы G существует многочлен $P(u, v)$ от двух переменных с постоянными коэффициентами, такой, что $P(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) = 0$ для всех значений z, при которых определены $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$.

Для любой группы G можно найти две автоморфные функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, такие, что любая автоморфная функция от G является рациональной функцией от $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ с постоянными коэффициентами. Выражение любой эллиптической функции через $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ в п. 13.14 может служить примером для этой теоремы.

Если существует автоморфная функция $\varphi_0(z)$ группы G, имеющая единственный простой полюс в F и аналитическая во всех остальных точках, то каждая автоморфная функция от G является рациональной функцией от $\varphi_0(z)$. Примерами такой функции могут служить $J(z)$ в п. 14.6.2 и $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$ в п. 14.6.3. Можно доказать, что для существования такой функции $\varphi_0(z)$ необходимо и достаточно, чтобы «род» F равнялся нулю; относительно определения рода фундаментальной области см. п. 14.8.2, а также Fricke и Klein (1897) или Форд (1936, § 92).

Если существует автоморфная функция $\varphi_0(z)$, обладающая указанными выше свойствами, то она принимает каждое значение в точности один раз. Поэтому существует обратная функция $z = \eta(w)$ для $w = \varphi_0(z)$. Эту функцию можно представить в виде отношения y_1/y_2 двух частных решений линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dw^2} = u(w)\,y, \tag{5}$$

где u — рациональная функция от w. (В более общем случае u является алгебраической функцией, см. Форд (1936, § 44)) Относительно частного случая, когда (5) эквивалентно гипергеометрическому уравнению, см. п. 14.10. В случае функций $J(z)$, $\lambda(z)$, $\Lambda(z)$ дифференциальное уравнение, соответствующее (5), является частным случаем гипергеометрического уравнения.

Каждая предельная точка (в смысле п. 14.1.4) является существенно особой точкой для любой автоморфной функции группы G. В частности, в случае фуксовой группы первого рода предельная окружность является *натуральной границей* для всех автоморфных функций группы G; эти функции невозможно аналитически продолжить за эту окружность.

14.8. Существование и конструкция автоморфных функций

14.8.1. Общие замечания. В теории автоморфных функций есть две основные проблемы. Первая состоит в перечислении всех возможных фундаментальных областей (или всех фундаментальных областей, удовлетворяющих некоторым условиям), и построении групп, соответствующих каждой из этих фундаментальных областей. Вторая проблема состоит в построении всех автоморфных функций, принадлежащих заданной группе.

Задача отыскания всех групп, обладающих фундаментальной областью, полностью решена в случае групп, имеющих предельную окружность: см. Fricke и Klein (1897). Решение опирается на некоторые положения неевклидовой геометрии. Что касается более сложной проблемы об отыскании единственной стандартной формы фундаментальной области для заданной группы, то частичное решение ее известно в случае групп с предельной окружностью, порождаемых конечным числом преобразований.

Что касается второй проблемы об отыскании всех автоморфных функций, принадлежащих заданной группе с заданной фундаментальной областью, то общие теоремы п. 14.7.2 показывают, что основной проблемой здесь является следующая: найти две автоморфные функции, через которые можно рационально выразить все остальные функции, и найти алгебраические соотношения между автоморфными функциями, принадлежащими одной и той же группе. Два мощных метода для решения этих проблем будут указаны в п. 14.8 2 и 14.8.3.

В общем случае очень трудно получить явные формулы. Теории модулярных и эллиптических функций представляют в этом смысле исключение. В частности, для большинства групп коэффициенты преобразований, входящих в эти группы, не могут быть охарактеризованы явным и простым образом.

14.8.2. Римановы поверхности. Пусть заданы группа G и фундаментальная область F. Тогда образующие группы G устанавливают соответствие между парами граничных точек фундаментальной области F (см. п. 14.1.4, условие 3). Если отождествить эквивалентные граничные точки, то получится *риманова поверхность* S. Эта риманова поверхность может иметь граничные точки, соответствующие неподвижным точкам преобразований из G на границе F. Род римановой поверхности является также *родом фундаментальной области* F (см. Форд, 1936, § 92).

Однозначные аналитические функции на римановой поверхности S соответствуют автоморфным функциям группы G, так что построение автоморфных функций для данной группы с заданной фундаментальной областью эквивалентно построению однозначных аналитических функций на (не обязательно открытой) римановой поверхности. Относительно эскиза этого метода см. Курант (1934). Проблема униформизации (см. п. 14.9) играет важную роль в этом подходе к теории автоморфных функций.

В частных случаях конструкция может быть описана явным образом. Простейшим примером являются функции треугольника Римана — Шварца. Относительно этих функций и теорем о дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют функции, обратные к автоморфным, см. п. 14.10.

14.8.3. Автоморфные формы. Тета-ряды Пуанкаре. Пуанкаре, и, следуя ему, Риттер (Ritter; 1892, 1894) и Фрикке (Fricke, Klein; 1912) развили теорию автоморфных функций с помощью метода, похожего на конструкцию эллиптических функций Вейерштрасса.

Пусть G — разрывная группа дробно-линейных преобразований, как в п. 14.2, и F — фундаментальная область для G.

Пусть s — постоянная, и пусть для каждого $r=0, 1, 2, \ldots$ задано вещественное или комплексное число $v(\sigma_r)$, модуль которого равен единице (так что $v(\sigma_r)$ является функцией, заданной на группе G и принимающей значения на единичной окружности комплексной плоскости). Мы будем называть функцию $\psi(z)$ *автоморфной формой* класса $\{G, -s, v\}$, если выполняются следующие условия (мы используем здесь обозначения и определения п. 14.2).

1. Функция $\psi(z)$ аналитична и однозначна в F, за исключением, быть может, конечного числа точек.

2. Если функция $\psi(z)$ аналитична в точке z_0 в F, то ее можно аналитически продолжить (в D_0) в точку $z_r=\sigma_r(z_0)$, причем все возможные аналитические продолжения в D_0 приводят к тому же самому значению $\psi(z_r)$ и

$$\psi(z_r)=v(\sigma_r)(c_r z_0+d_r)^s\,\psi(z_0). \tag{1}$$

3. В окрестности особой точки $\psi(z)$ может быть представлена в виде 14.2(3).

4. $\psi(z)$ не является постоянной.

Функцию $v(\sigma_r)$ называют *системой множителей*, и из соотношения (1) следует, что v является мультипликативной функцией на группе G, т. е.

$$v(\sigma_r\sigma_{r'})=v(\sigma_r)\,v(\sigma_{r'}). \tag{2}$$

При этом обычно предполагают $|v(\sigma_r)|=1$. Автоморфные формы, удовлетворяющие соотношению (1), называют формами размерности $-s$. Автоморфные функции являются автоморфными формами нулевой размерности, для которых система множителей имеет вид $v(\sigma_r)=1$. Автоморфные формы, принадлежащие подгруппам модулярной группы, называются также *модулярными формами*.

Конструкция автоморфных функций сводится к построению автоморфных форм. Если $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — автоморфные формы классов $\{G, -s_1, v_1\}$ и $\{G, -s_2, v_2\}$ соответственно и если

$$[v_1(\sigma_r)]^{s_2}[v_2(\sigma_r)]^{s_1}=1, \qquad r=0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$\varphi(z)=[\psi_1(z)]^{s_2}[\psi_2(z)]^{s_1}$$

является либо постоянной, либо автоморфной функцией для G.

Можно показать, что каждая автоморфная форма представима *тета-рядом Пуанкаре*. Мы построим сейчас такой ряд при условии, что бесконечно удаленная точка не является предельной точкой группы G. Этот ряд имеет тогда вид

$$\theta(z;\ G)=\sum_{r=0}^{\infty}[v(\sigma_r)]^{-1}(c_r z+d_r)^{-2l}H(z_r), \tag{3}$$

где z_r, $v(\sigma_r)$, c_r, d_r имеют смысл, указанный в п. 14.2 и в этом пункте, l — натуральное число $\geqslant 2$ и $H(z)$ — рациональная функция от z, аналитическая во всех предельных точках группы G. Этот ряд равномерно и абсолютно сходится на каждом замкнутом подмножестве F, на котором функция $H(z)$ аналитична, и можно показать с помощью (2) и соотношения

$$\sigma_r(z_{r'})=\sigma_r[\sigma_{r'}(z)]=\sigma_{r''}(z)=z_{r''},$$

что тета-ряд Пуанкаре представляет автоморфную форму класса $\{G, -2l, v\}$.

При построении автоморфных форм с помощью тета-рядов в некоторых случаях, особенно если G является группой с предельной окружностью, возникает осложнение, состоящее в том, что функция, представимая тета-рядом, может тождественно обращаться в нуль. В случае автоморфных функций, имеющих полюсы, это осложнение можно устранить путем построения тета-ряда, имеющего единственный полюс в области F; очевидно, что этот ряд не может тождественно обращаться в нуль в области F. С другой стороны, при построении автоморфных форм, аналитических в F и обращающихся в нуль в параболических остриях F, функция $H(z)$ аналитична в F и могло бы случиться, что ряд (3) тождественно обращается в нуль. Это обстоятельство было наибольшей трудностью, которую пришлось преодолеть Пуанкаре при построении теории тета-рядов (3).

Петерсон (Petersson; 1940) дал новое обоснование теории автоморфных форм и тета-рядов Пуанкаре с помощью метризации автоморфных форм. Пусть G — фуксова группа первого рода, содержащая параболические преобразования. Если предельной окружностью для группы является вещественная ось, то можно взять коэффициенты a_r, b_r, c_r, d_r в преобразованиях этой группы вещественными. При этих предположениях Петерсон полагает $z=x+iy$ и определяет скалярное произведение двух форм равенством

$$(\psi_1, \psi_2)=\iint_F \psi_1(z)\overline{\psi_2(z)}\,y^{s-2}\,dx\,dy, \qquad s>2, \tag{4}$$

где черточка сверху, как обычно, обозначает переход к комплексно сопряженному выражению. Используя инвариантность гиперболической меры относительно преобразований группы G, Петерсон вычислил в явном виде интеграл (4) для случая, когда ψ_1 — автоморфная форма, аналитическая в области F и обращающаяся в нуль во всех параболических остриях области F («Spitzenform»), а ψ_2—тета-ряд Пуанкаре. Получившаяся формула используется для описания тета-рядов и для доказательства фундаментальных теорем теории этих рядов. Если G—конгруэнц-подгруппа модулярной группы, то теория справедлива при $s=2$, $v(\sigma_r)=1$. Относительно расширений, обобщений и приложений этого метода см. Petersson (1941, 1944, 1949).

Для случая фуксовых групп первого порядка, содержащих лишь гиперболические преобразования Далцел (Dalzell; 1932, 1944, 1949a, 1949b) развил новый метод для тета-рядов Пуанкаре и родственных им функций.

Во многих случаях теория тета-рядов Пуанкаре может быть дополнена теорией функций, аналогичных сигма- и дзета-функциям Вейерштрасса (в то время как тета-ряды аналогичны $\wp$-функции). См. Форд (1936), ссылки, данные в п. 14.10.2, а также Ritter (1892), Stahl (1888), Dalzell (1932).

В случае группы, не имеющей предельной окружности, тета-ряды Пуанкаре могут абсолютно сходиться при $l=1$ и системе множителей $v(\sigma_r)=1$ (см. п. 14.10.2).

14.9. Униформизация

Пусть G—фуксова группа первого рода, такая, что замыкание фундаментальной области F целиком лежит внутри предельной окружности (если в качестве предельной окружности выбрана вещественная ось, то мы считаем внутренней областью верхнюю полуплоскость). Предположим, что все преобразования в G (за исключением единичного, σ_0) гиперболические. Мы знаем из п. 14.7.2, что любые две автоморфные функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ для группы G алгебраически зависимы, т. е. тождественно в F удовлетворяют соотношению

$$P(\varphi_1(z),\ \varphi_2(z))=0, \tag{1}$$

где $P(u, v)$—многочлен. Это означает, что переменные u, v, связанные соотношением

$$P(u, v)=0 \tag{2}$$

и, следовательно, такие, что каждая из них является алгебраической функцией другой, могут быть выражены как однозначные функции

$$u=\varphi_1(z), \qquad v=\varphi_2(z) \tag{3}$$

вспомогательной переменной z, называемой *униформизирующей переменной* для алгебраического соотношения (2). С другой точки зрения (2) можно рассматривать как уравнение *алгебраической кривой*, а (3) как параметрическое представление этой кривой через однозначные функции. Весьма важным является тот факт, что любое алгебраическое соотношение можно униформизировать таким способом, причем наиболее общими функциями, используемыми для этого, являются автоморфные функции (см. также п. 13.2). Этот результат можно более детально описать следующим образом.

Пусть $P(u, v)$—неприводимый многочлен от переменных u и v (т. е. многочлен, который нельзя разложить на произведение многочленов меньшей степени), и пусть переменные u и v связаны алгебраическим соотношением (2). Тогда существуют две функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ комплексного переменного z и область F^* на плоскости z со следующими свойствами: для любой пары u, v комплексных чисел, удовлетворяющих (2), существует z в F^*, такое, что $u=\varphi_1(z)$, $v=\varphi_2(z)$ и исключая конечное число пар (u, v), это z в F^* однозначно определено. Кроме того, функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ можно выбрать так, что *либо* $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$—рациональные функции и F^*—вся плоскость z, *либо* $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$—эллиптические функции, имеющие общую пару периодов и F^*—параллелограмм периодов для этих функций (при этом лишь одна вершина и две из сторон этого параллелограмма принадлежат F^*), *либо, наконец,* $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — автоморфные функции для фуксовой группы первого рода, все преобразования которой (за исключением σ_0) гиперболичны и F^* — фундаментальная область этой группы.

Относительно теории и истории униформизации см., например, Курант (1934, гл. IX).

14.10. Некоторые частные виды автоморфных функций

Некоторые автоморфные функции были уже описаны в п. 14.3—14.6.3.

14.10.1. Функции треугольника Римана — Шварца. В некоторых случаях дифференциальное уравнение 14.7(5) можно свести к гипергеометрическому уравнению 2.1(1). Получающиеся автоморфные функции обладают предельной окружностью. Они называются *функциями треугольника* Римана—Шварца; см. также п. 2.7.2, Klein и Fricke (1890—1892), Форд (1936, § 114).

Для того чтобы построить фундаментальную область для группы, связанной с функциями треугольника, и получить саму эту группу, возьмем три окружности C_1, C_2, C_3 и окружность C_0, ортогональную к C_1, C_2, C_3. Мы возьмем в качестве C_0 вещественную ось, а в качестве C_1, C_2, C_3 — окружности, центры которых лежат на этой оси (одна или несколько из окружностей C_i, $i=1, 2, 3$, могут быть прямыми линиями, перпендикулярными к вещественной оси, в этом случае их центр лежит в бесконечно удаленной точке вещественной оси). Пусть Δ — треугольник, ограниченный дугами A_1, A_2, A_3 окружностей C_1, C_2, C_3; мы предполагаем, что Δ лежит в верхней полуплоскости. Пусть n_1, n_2, n_3 — три натуральных числа, и пусть внутренние углы треугольника Δ равны α_1, α_2, α_3, где

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2n_i}, \qquad i=1, 2, 3, \tag{1}$$

причем

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 < \pi. \tag{2}$$

При этом допускаются углы, равные нулю (соответствующие бесконечному значению n). Занумеруем углы и вершины так, что α_1 — угол, образованный A_2 и A_3 и т. д., V_1 — вершина, в которой пересекаются A_2 и A_3 и т. д. Пусть Δ' — треугольник, получающийся при инверсии Δ в окружности C_3. Точки V_1 и V_2 являются тогда вершинами Δ'; обозначим третью вершину Δ' через V_4. Мы можем тогда принять область $\Delta+\Delta'$ за область F^* п. 14.1.4. Очевидно, что область F^* удовлетворяет условию 1 п. 14.1.4, и мы построим группу G так, чтобы выполнялись и условия 2—4.

Существует единственная дробно-линейная подстановка σ_1 с вещественными коэффициентами, отображающая точку V_1 в себя и переводящая V_3 в V_4. Точно так же есть подстановка σ_2, которая оставляет точку V_2 неподвижной и переводит V_3 в V_4. Очевидно, что σ_1 отображает A_2 на A_2', а σ_2 отображает A_1 на A_1'. Дуги A_1, A_1', A_2, A_2' ограничивают область F^*, а потому выполнено условие 3 п. 14.1.4. Группа G, порожденная σ_1 и σ_2, удовлетворяет, очевидно, условиям 2 и 4. Пусть F — область, получающаяся из F^* отбрасыванием V_4 и внутренних частей дуг A_1', A_2'. Тогда G — фуксова группа первого рода, предельной окружностью которой является вещественная ось, и F — фундаментальная область группы G.

Группа G имеет автоморфную функцию $\varphi_0(z)$, обратная функция к которой является *функцией Шварца* (см. п. 2.7.2) и может быть выражена как отношение двух гипергеометрических функций. Функция $\varphi_0(z)$ принимает каждое значение в области F в точности один раз, и каждая автоморфная функция для группы G является рациональной функцией от $\varphi_0(z)$. Простыми примерами таких функций являются абсолютный инвариант п. 14.6.2 или соответствующие автоморфные функции (в п. 14.6.3) для подгрупп модулярной группы. Если

$$\alpha_1=\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2=0, \quad \alpha_3=\frac{\pi}{3}, \tag{3}$$

то G является модулярной группой M и мы можем положить $\varphi_0(z)=J(z)$. Если

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0, \tag{4}$$

то G является λ-группой M_2, и можно положить $\varphi_0(z)=k^2(z)=\lambda(z)$.

Е. Т. Уиттекер (E. T. Whittaker; 1899, 1902) изучил другой класс автоморфных функций, обладающий тем свойством, что каждая функция этого класса является рациональной функцией от одной автоморфной функции. См. Форд (1936, § 96).

14.10.2. Автоморфные функции Бернсайда. Пусть C_μ, C'_μ, $\mu=1, \ldots, m$ такие $2m$ окружностей, что никакие две из них не пересекаются и никакая окружность не разделяет двух других. Из этих предположений следует, что среди окружностей есть не более одной прямой линии и что если среди них есть прямая линия, то все остальные окружности лежат от нее по одну сторону; полуплоскость, ограниченная прямой линией и не содержащая окружностей, будет рассматриваться как внутренняя область.

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m$ такие m гиперболических или локсодромических преобразований, что τ_μ отображает внутреннюю область C_μ на внешнюю область C'_μ, и пусть G—группа, порожденная преобразованиями $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Часть плоскости F, внешняя ко всем окружностям, является одной из фундаментальных областей для этой группы. Группа G не имеет главной окружности. Если $m>1$, то у группы G есть бесконечное множество предельных точек; если отбросить все эти точки, то оставшаяся часть z-плоскости будет связной.

Автоморфные функции для группы G можно выразить через тета-ряды Пуанкаре, в этом случае ряды размерности —2 абсолютно сходятся. Теория автоморфных функций для группы G была развита Бернсайдом (Burnside; 1891, 1892), применившим свои результаты к изучению граничных задач для уравнения Лапласа. См. также Риман (1948) и, относительно похожей группы и ее автоморфных функций, Schottky (1887).

14.11. Модулярные группы Гильберта

Теория модулярных и автоморфных функций различными способами обобщалась на функции нескольких переменных. Первые результаты принадлежат Пикару (Picard, 1882). В этом пункте мы кратко укажем на принадлежащий Гильберту подход к этой теории, а в следующем пункте опишем исследование, ведущее начало от Зигеля. Относительно общей теории автоморфных функций многих переменных см. также Hurwitz (1905), Fubini (1908, гл. 3). Sugawara (1940 a, b), Hua (1946).

Пусть R—поле рациональных чисел, K_1—конечное вещественное алгебраическое расширение R, $K_2, \ldots, K_n$—сопряженные с K_1 поля, и пусть все поля K_ρ, $\rho=1, \ldots, n$, вещественны. Для любого $\alpha^{(1)}$ из K_1 обозначим через $\alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ сопряженные с ним числа, где $\alpha^{(\rho)}$ принадлежит K_ρ; аналогичные обозначения используются для β, γ, δ. Пусть z_ρ, $\rho=1, \ldots, n$,— комплексные переменные, и пусть S—область $\operatorname{Im} z_\rho>0$, $\rho=1, \ldots, n$, в пространстве n комплексных переменных (это пространство имеет вещественную размерность $2n$). Пусть $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, $\delta^{(1)}$—любые алгебраические целые числа в K_1, такие, что

$$\alpha^{(1)}\delta^{(1)}-\gamma^{(1)}\beta^{(1)}=1. \tag{1}$$

Более общо, вместо единицы в (1) можно взять любую вполне положительную единицу из K_1. Определим модулярное преобразование σ равенством

$$z'_\varrho = \frac{\alpha^{(\rho)} z_\rho + \beta^{(\rho)}}{\gamma^{(\rho)} z_\rho + \delta^{(\rho)}}, \qquad \rho = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Ясно, что σ отображает множество S на себя. Множество таких σ образует группу, которую называют *модулярной группой Гильберта* поля K_1.

Блюменталь (Blumenthal; 1903, 1904) доказал, что G имеет в S фундаментальную область, а также что существуют автоморфные функции n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, принадлежащие группе G. Если наложить условие регулярности, аналогичное условиям п. 14,2, то окажется, что любые $n+1$ автоморфные функции связаны друг с другом алгебраическим соотношением и что можно так выбрать $n+1$ автоморфную функцию, что любая автоморфная функция для группы G является рациональной функцией этих $n+1$ функций.

Маас (Maass; 1941) изучил модулярную группу Гильберта для случая, когда $K_1 = R(\sqrt{5})$, т. е. поле получается присоединением $\sqrt{5}$ к R и, следовательно, $n=2$. Он применил теорию модулярных форм получающейся группы к задачам теории чисел (квадратичных форм). Относительно других исследований модулярной группы Гильберта и соответствующих автоморфных функций и распространения на эту группу теории Петерсона тета-рядов Пуанкаре, см. Maass (1940 a, b, 1942, 1948). Маас (Maass; 1940 a, b) изучил также обобщения модулярной группы Гильберта.

Относительно обобщения результатов Блюменталя в направлении теории Гекке модулярных форм одного переменного см. Bruijn (1943).

14.12. Функции Зигеля

Зигель (Siegel; 1935, 1936, 1937, 1939) развил теорию модулярных функций от $\frac{1}{2}n(n+1)$ комплексных переменных, где $n=1, 2, \ldots$ Исходным пунктом для развития теории так называемых *модулярных функций n-й степени* явилась для него арифметическая теория квадратичных форм. Многие общие теоремы этой теории сводятся при $n=1$ к известным результатам о модулярных функциях или модулярных формах одного переменного; другие приводят даже в случае $n=1$ к новым результатам. Для теории Зигеля характерно то, что вместо *неевклидовой* (гиперболической) геометрии в полуплоскости Пуанкаре, имеющей вещественную размерность 2, он использовал симплектическую геометрию в пространстве вещественной размерности $n(n+1)$ (геометрию положительно определенных матриц в пространстве симметрических матриц). Это привело к теории автоморфных функций (Siegel, 1942, 1943). Другой характерной чертой этой теории является частое использование арифметических методов для доказательства результатов, которые в случае одного переменного обычно доказываются аналитически. Многие из групп автоморфных функций одного переменного обладают важными арифметическими свойствами, однако обычно их изучают геометрически; в теории Зигеля арифметические методы играют центральную роль при определении разрывных групп.

В этом пункте мы дадим некоторые из основных определений и результатов в простейшем случае, соответствующем для функции одного переменного теории модулярной группы M и ее абсолютного инварианта $J(z)$. Рассмотрение дальнейших обобщений теории Зигеля и ее многочисленных важных результатов и приложений останется вне рамок этого пункта.

Модулярная группа степени n. Назовем *целыми матрицами* матрицы, элементы которых — целые числа. За исключением случаев, когда это будет явно оговорено, прописными буквами в этом пункте мы будем обозначать квадратные матрицы с n строками и n столбцами. Элемент, стоящий в l-й строке и k-м столбце матрицы A, мы будем обозначать a_{lk} и писать

$$A=[a_{lk}], \qquad l, k=1, \ldots, n. \tag{1}$$

Через N обозначим нулевую матрицу, а через I — единичную матрицу n-го порядка,

$$N=[n_{lk}], \quad I=[i_{lk}], \quad n_{lk}=0, \quad i_{lk}=\delta_{lk}, \quad l, k=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Транспонированную матрицу A обозначим через A', так что $a'_{lk}=a_{kl}$; обратной матрицей для A является матрица A^{-1}, так что $AA^{-1}=A^{-1}A=1$.

Пусть A, B, C, D — четыре $(n\times n)$-матрицы с целыми коэффициентами, и пусть

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3}$$

является $(2n\times 2n)$-клеточной матрицей, состоящей из клеток A, B, C, D, как указано в (3). Определим $(2n\times 2n)$-матрицу

$$J=\begin{pmatrix} N & I \\ -I & N \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Предположим, что целые матрицы $A, \ldots, D$ таковы, что

$$M'JM=J. \tag{5}$$

Необходимым и достаточиым условием для этого является

$$AB'=BA', \quad CD'=DC', \tag{6}$$

$$AD'-BC'=I. \tag{7}$$

Если C и D удовлетворяют второму условию (6), т. е. если CD' является симметрической матрицей, то мы будем говорить, что C и D образуют *симметрическую пару*. Пусть C_1, D_1 и C_2, D_2 — две симметрические пары матриц. Назовем их *ассоциированными*, если существует такая матрица U, что как U, так и U^{-1} — целые матрицы и

$$C_1=UC_2, \qquad D_1=UD_2. \tag{8}$$

Все симметрические пары матриц, ассоциированные с данной парой, образуют *класс*. Пусть C, D — фиксированная симметрическая пара целых матриц, и пусть U пробегает множество всех невырожденных целых матриц. Матрицы C и D называют *взаимно простыми*, если матрицы $U^{-1}C$ и $U^{-1}D$ являются целыми тогда и только тогда, когда U^{-1} — целая матрица.

Все $(2n\times 2n)$-матрицы с целыми элементами M, удовлетворяющие условию (5), образуют группу. Два элемента

$$\pm\begin{pmatrix} I & N \\ N & I \end{pmatrix} \tag{9}$$

этой группы образуют нормальный делитель второго порядка. Факторгруппа группы всех матриц M по подгруппе (9), т. е. группа, состоящая из матриц M, удовлетворяющих условию (5), где отождествлены M_1 и $M_2=-M_1$, называется *модулярной группой степени* n и обозначается $\mathfrak{M}$. Элементы $\mathfrak{M}$ мы будем называть преобразованиями. Каждое из них определяется четырьмя матрицами A, B, C, D, удовлетворяющими условиям (6), (7). Матрицы A, B, C, D и $-A, -B, -C, -D$ определяют одно и то же преобразование.

Пусть Z — комплексная симметрическая матрица. Положим

$$z_{lk}=z_{kl}=x_{lk}+iy_{lk}, \qquad l, k=1, \ldots, n \tag{10}$$

и соответственно

$$Z = X + iY, \tag{11}$$

где x_{ik} и y_{ik} — вещественные числа, а X и Y — вещественные матрицы. Мы будем рассматривать z_{ik} как комплексные переменные и ограничим их лишь условием, что Y — *положительно определенная* матрица (т. е. квадратичная форма, коэффициентами которой являются элементы Y, положительно определена). Матрица Z может рассматриваться как точка пространства, в котором координатами являются числа z_{ik}, либо x_{ik} и y_{ik}; это пространство имеет комплексную размерность $\frac{1}{2}n(n+1)$ и вещественную размерность $n(n+1)$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ часть этого пространства, в которой Y — положительно определенная матрица. Матрица Z пробегает пространство $\mathfrak{H}$ (положительный конус).

Для любых целых матриц A, B, C, D, удовлетворяющих условиям (6) и (7), т. е. для любого элемента из $\mathfrak{M}$ определено преобразование

$$\sigma(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \tag{12}$$

Можно доказать, что каждое преобразование (12) определяет взаимно однозначное отображение конуса $\mathfrak{H}$ на себя и что группа этих преобразований является гомоморфным образом группы $\mathfrak{M}$. Можно показать также, что группа $\mathfrak{M}$, рассматриваемая как группа отображений $\mathfrak{H}$ на себя, имеет фундаментальную область $\mathfrak{F}$, ограниченную конечным числом аналитических гиперповерхностей. Относительно образующих $\mathfrak{M}$ см. Hua и Reiner (1949).

Модулярные формы и модулярные функции. Пусть L — множество всех классов взаимно простых симметрических пар матриц. Выберем из каждого класса пару C, D и образуем обобщенные ряды Эйзенштейна

$$\psi_r(Z) = \sum_L [\det(CZ + D)]^{-2r}. \tag{13}$$

Можно показать, что при достаточно больших натуральных r ряды в (13) абсолютно сходятся для любого Z из $\mathfrak{H}$ и определяют в $\mathfrak{H}$ аналитическую функцию от $\frac{1}{2}n(n+1)$ комплексных переменных z_{ik}. Функция $\psi_r(Z)$, определенная таким образом, называется *модулярной формой*, соответствующей $\mathfrak{M}$.

Если r и s — достаточно большие целые числа, то существуют формы ψ_r и ψ_s и

$$\psi_r^s \psi_s^{-r} \tag{14}$$

является *модулярной функцией* $\mathfrak{M}$ с фундаментальной областью $\mathfrak{F}$. Можно показать, что существует $\frac{1}{2}n(n+1)$ алгебраически независимых модулярных функций вида (14) и что любые $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ таких функций связаны алгебраическим соотношением с рациональными коэффициентами.

Модулярную форму (13) можно также разложить в тета-ряд.

Теория Петерсона (Petersson; 1940) тета-рядов Пуанкаре была обобщена Маасом (Maass; 1951). В этом обобщении гиперболическая метрика полуплоскости Пуанкаре заменяется симплектической метрикой Зигеля в положительном конусе $\mathfrak{H}$.

Два тождества. Мы дадим в заключение нашего краткого изложения теории Зигеля два замечательных тождества, имеющих место при $n=2$.

Первое из этих тождеств принадлежит Зигелю (Siegel; 1937) и выражает модулярную форму через двойные тета-ряды. Пусть L — множество всех классов взаимно простых пар матриц второго порядка. Выберем из каждого класса пару C, D. Пусть L_2 — подмножество всех таких пар, для которых

$$CD' \equiv N \pmod 2,$$

т. е. элементы CD' являются четными числами (если это условие выполнено для одной пары, представляющей класс, то оно выполняется и для всех других пар из этого класса). Положим

$$Z=\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}=X+iY,$$

где u, v и w — комплексные переменные, X, Y — вещественные матрицы и Y — положительно определенная матрица, и пусть a, b пробегают множество всех целых чисел. Тождество Зигеля устанавливает, что

$$\sum_{L_2} [\det (CZ+D)]^{-4}=\Big\{\sum_{a,b} \exp [i\pi (ua^2+2vab+wb^2)]\Big\}^8. \tag{15}$$

Второе из этих тождеств принадлежит Витту (Witt; 1941) и является тождеством, связывающим две модулярные формы второй степени Используя обозначения, приведенные в (13), можно записать это тождество следующим образом:

$$\psi_4(Z)=[\psi_2(Z)]^2. \tag{16}$$

Тождество Витта аналогично хорошо известной формуле

$$\sum_{a,b} (az+b)^{-8}=\Big[\sum_{a,b} (az+b)^{-4}\Big]^2 \tag{17}$$

в теории рядов Эйзенштейна одного комплексного переменного. В формуле (17) a и b пробегают все пары взаимно простых чисел такие, что $a \geqslant 0$ и $b=1$, если $a=0$.

ГЛАВА 15

ФУНКЦИИ ЛАМЕ

15.1. Введение

Функции Ламе возникают при решении уравнения Лапласа в некоторых системах криволинейных координат. Разделение переменных для уравнения Лапласа в пространстве трех измерений полностью изучено в книге Бохера (Bôcher; 1891) и в недавних работах Левинсона (Levinson), Богерта (Bogert) и Редеффера (Redheffer; 1949), Муна и Спенсера (Moon and Spencer; 1952 a, b, 1953) относительно разделения переменных для более общих дифференциальных уравнеиий см. Eisenhart (1934), где указаны ссылки на более ранние работы, М. Н. Олевский (1950).

Монография Стретта (1935) содержит изложение результатов по теории функций Ламе, полученных до 1932 г., многие приложения и обширную библиографию. Относительно дальнейшей информации об этих функциях см. также Уиттекер и Ватсон (1963, гл. XXIII) и Гобсон (1952, гл. XI).

15.1.1. Координаты, связанные с конфокальными областями второго порядка. Пусть $a > b > c > 0$ — фиксированные числа, и пусть θ — переменный параметр. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1, \tag{1}$$

где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты, представляет конфокальное семейство поверхностей второго порядка. Поверхность второго порядка, задаваемая уравнением (1), является:

эллипсондом, если $-c^2 < \theta$,

однополостным гиперболоидом, если $-b^2 < \theta < -c^2$,

двуполостным гиперболоидом, еслн $-a^2 < \theta < -b^2$,

мнимой поверхностью второго порядка, если $\theta < -a^2$.

При $\theta = -a^2$, $-b^2$, $-c^2$ получаем вырожденные поверхности.

Так как (1) является кубическим уравненнем относительно θ, то через каждую точку (x, y, z), для которой $xyz \neq 0$, проходят три поверхности второго порядка, принадлежащие конфокальным семействам (условие $xyz \neq 0$ исключает плоскости, в которых лежат вырожденные поверхности). Рассматривая знак левой части уравнения (1) при изменении θ, мы убеждаемся, что в каждом из промежутков $(-c^2, \infty)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-a^2, -b^2)$ лежит в точности один корень этого уравнения. Это показывает, что через каждую точку (не лежащую на одной из координатных плоскостей) проходит однн эллипсоид, один однополостный гиперболоид и один двуполостный гиперболоид из конфокального семейства.

Пусть λ, μ, ν — три корня уравнения (1) для заданных ненулевых значений x, y, z, и пусть

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2. \tag{2}$$

Мы можем считать λ, μ, ν — новыми криволинейными координатами. Преобразуя уравнение Лапласа

$$\Delta W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0 \tag{3}$$

к этим криволинейным координатам, получаем

$$\frac{4f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[f(\lambda)\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right]+\frac{4f(\mu)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[f(\mu)\frac{\partial W}{\partial\mu}\right]+\\+\frac{4f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[f(\nu)\frac{\partial W}{\partial\nu}\right]=0, \tag{4}$$

где

$$f(\theta)=[(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{1/2}. \tag{5}$$

Но λ, μ, ν зависят лишь от x^2, y^2, z^2 и, следовательно, принимают одинаковые значения для восьми точек ($\pm x$, $\pm y$, $\pm z$). Для того чтобы получить взаимно однозначное соответствие между декартовыми и криволинейными координатами, введем *униформизирующие переменные*, выразив λ, μ, ν, а следовательно, x, y, z через эллиптические функции Якоби трех новых переменных α, β, γ. Положим

$$k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\qquad k'^2=\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},\qquad 0<k,\ k'<1. \tag{6}$$

В дальнейшем k будет модулем эллиптических функций. Положим далее

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=-(a\operatorname{cn}\alpha)^2-(b\operatorname{sn}\alpha)^2,\\ \mu&=-(a\operatorname{cn}\beta)^2-(b\operatorname{sn}\beta)^2,\\ \nu&=-(a\operatorname{cn}\gamma)^2-(b\operatorname{sn}\gamma)^2.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В новых криволинейных координатах имеем

$$\left.\begin{aligned}x&=k^2(a^2-c^2)^{1/2}\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma,\\ y&=-\frac{k^2}{k'}(a^2-c^2)^{1/2}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma,\\ z&=\frac{i}{k'}(a^2-c^2)^{1/2}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и уравнение Лапласа (3) принимает вид

$$\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^2}\,\frac{1}{[(\operatorname{sn}\alpha)^2-(\operatorname{sn}\beta)^2][(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2][(\operatorname{sn}\gamma)^2-(\operatorname{sn}\alpha)^2]}\times\\ \times\left\{[(\operatorname{sn}\gamma)^2-(\operatorname{sn}\beta)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}+[(\operatorname{sn}\alpha)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}+\right.\\ \left.+[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\alpha)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma^2}\right\}=0. \tag{9}$$

Если α изменяется от iK' до $K+iK'$, β — от K до $K+2iK'$ и γ — от 0 до $4K$, то легко проверить с помощью формул и рисунков, указанных в п 13 18, что выполняются неравенства (2) и, кроме того, что (8) определяет взаимно однозначное соответствие между декартовыми координатами x, y, z и криволинейными координатами α, β, γ Мы будем называть их *эллипсоидальными координатами* или *координатами конфокальных поверхностей второго порядка*

Особо важную роль играют конечные точки отрезков, на которых меняются α, β, γ. Они соответствуют бесконечно удаленной точке и вырожденным поверхностям нашей системы и могут быть перечислены следующим образом

$\alpha = i\mathrm{K}'$ — бесконечность,

$\alpha = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ — вырожденный эллипсоид, дважды покрывающий фокальный эллипс,

$\beta = \mathrm{K}$ и $\beta = \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'$ — две половины вырожденного гиперболоида, дважды покрывающего область «между» двумя ветвями фокальной гиперболы;

$\beta = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ — вырожденный гиперболоид (дважды), покрывающий область на (x, y) плоскости, лежащую вне фокального эллипса,

$\gamma = 0$, K, 2K, 3K, 4K — части вырожденного двуполостного гиперболоида, дважды покрывающего площадь «вне» фокальной гиперболы, $\gamma = 0$ и $\gamma = 4\mathrm{K}$ представляют одну и ту же поверхность.

Вырожденные поверхности являются как бы сечениями ветвления и требование непрерывности функции при переходе через эти сечения носит характер граничных условий

Отметим что α соответствует сферической координате r, β — координате θ и γ — координате φ

Вместо униформизирующих переменных Якоби многие авторы используют переменные Вейерштрасса (см , например, Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 23.31).

Уравнение Лапласа (9) имеет *нормальные решения*

$$W = A(\alpha)\ B(\beta)\ C(\gamma). \tag{10}$$

Подставляя в (9), получаем

$$[(\operatorname{sn}\gamma)^2 - (\operatorname{sn}\beta)^2]\frac{A''}{A} + [(\operatorname{sn}\alpha)^2 - (\operatorname{sn}\gamma)^2]\frac{B''}{B} + [(\operatorname{sn}\beta)^2 - (\operatorname{sn}\alpha)^2]\frac{C''}{C} = 0. \tag{11}$$

Поскольку это равенство должно быть тождеством относительно α, β, γ, существуют такие постоянные h и l, что

$$\frac{A''}{A} = l(\operatorname{sn}\alpha)^2 - h, \qquad \frac{B''}{B} = l(\operatorname{sn}\beta)^2 - h, \qquad \frac{C''}{C} = l(\operatorname{sn}\gamma)^2 - h. \tag{12}$$

Положим $l = k^2 n(n+1)$. Ясно, что функции A, B, C удовлетворяют *уравнению Ламе*

$$\frac{d^2\Lambda(z)}{dz^2} + \{h - n(n+1)[k \operatorname{sn}(z, k)]^2\}\Lambda(z) = 0 \tag{13}$$

для соответствующих переменных.

Предположим, что (10) представляет решение уравнения Лапласа, непрерывное и имеющее непрерывный градиент на эллипсоиде $\alpha = \mathrm{const}$. Так как $\gamma = 0$ и $\gamma = 4\mathrm{K}$ представляют одну и ту же кривую на этом эллипсоиде, то

$$C(0) = C(4\mathrm{K}), \quad \frac{\partial C}{\partial\gamma}(0) = \frac{\partial C}{\partial\gamma}(4\mathrm{K}). \tag{14}$$

Поскольку коэффициенты уравнения Ламе имеют период 4K, то $C(\gamma)$ также должно иметь тот же период Если $C(\gamma)$ — любое решение уравнения Ламе, имеющее период 4K, то $C(2\mathrm{K} - \gamma)$ и $C(\gamma) \pm C(2\mathrm{K} - \gamma)$ обладают теми же свойствами Поэтому можно ограничиться периодическими решениями, которые являются либо четными, либо нечетными функциями от $\gamma - \mathrm{K}$, мы будем называть такие решения четными или нечетными относительно K.

Кривые $\beta = \mathrm{K}$ и $\beta = \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'$ являются сечениями ветвления на эллипсоиде; точки (K, γ), $(\mathrm{K}, 2\mathrm{K} - \gamma)$ совпадают. Условие непрерывности имеет вид

$$\left.\begin{aligned} B(\mathrm{K})\,C(\gamma) &= B(\mathrm{K})\,C(2\mathrm{K} - \gamma), \\ \frac{\partial B}{\partial\beta}(\mathrm{K})\,C(\gamma) &= -\frac{\partial B}{\partial\beta}(\mathrm{K})\,C(2\mathrm{K} - \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если $C(\gamma)$ четно относительно K, то имеем $\frac{\partial B}{\partial \beta}(K)=0$, так что $B(\beta)$ также четно относительно K, а если $C(\gamma)$ нечетно относительно K, то имеем $B(K)=0$, так что $B(\beta)$ тоже нечетно относительно K. Аналогично обстоит дело при $\beta=K+2iK'$. Таким образом, если $C(\gamma)$ четно (нечетно) относительно K, то $B(\beta)$ четно (нечетно) как относительно K, так и относительно $K+2iK'$. В обоих случаях $B(\beta)$ — *периодическая функция* с периодом $4iK'$ Кроме того, $B(\theta)$ и $C(\theta)$ имеют одинаковую четность при $\theta=K$ и удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению Отсюда следует, что они отличаются друг от друга лишь постоянным множителем. Мы пришли, таким образом, к вопросу о существовании *двояко-периодических решений* уравнения (13). Ниже мы увидим (см п. 15.5.2), что такие решения существуют лишь в случае, когда n — целое число и h принимает одно из счетного множества собственных значений. Надо отметить, что исследование решений в сферических полярных координатах и в декартовых координатах также приводит к условию, что n должно быть целым числом

Выбор $A(\alpha)$ зависит от рассматриваемого типа эллипсоидальных гармонических функций. Для *внутренних гармонических функций* мы требуем, чтобы (10) было регулярно внутри эллипсоида $\alpha=\text{const}$. Но $\alpha=K+iK'$ является сечением ветвления (фокальным эллипсом), точки $(K+iK', \beta, \gamma)$ и $(K+iK', 2K+2iK'-\beta, \gamma)$ идентичны, а потому, как и выше, выводим, что $A(\theta)$ и $B(\theta)$ должны иметь одинаковую четность относительно $K+iK'$ и, следовательно, отличаться друг от друга лишь постоянным множителем Для *внешних гармоник* требуется, чтобы функция (10) была регулярна вне эллипсоида $\alpha=\text{const}$, в частности, на бесконечности, причем $A(\alpha)$ должно быть решением уравнения Ламе, обращающимся в нуль при $\alpha=iK'$ Наконец, для эллипсоидальных гармоник, регулярных между двумя эллипсоидами конфокального семейства, мы берем линейные комбинации этих двух решений

15.1.2. Координаты конфокальных конусов. Введем координаты r, β, γ, связанные с декартовыми координатами x, y, z и сферическими полярными координатами r, θ, φ соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi=kr\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma,\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi=i\frac{k}{k'}\,r\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma,\\ z&=r\cos\theta=\frac{1}{k'}\,r\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Как и в п. 15.1.1, β меняется от K до $K+2iK'$, γ от 0 до 4K и $r>0$. Координатными поверхностями являются концентрические сферы $r=\text{const}$ и конфокальные конусы

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=0, \tag{17}$$

где θ есть μ или ν (см. (7)), и k определяется равенством (6). Эти координаты известны как *сферо-конические* координаты, см. Hobson, 1892 и Гобсон, 1952, гл. XI.

Уравнение Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial W}{\partial r}\right)-\frac{1}{k^2r^2[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma^2}\right)=0. \tag{18}$$

Нормальные решения имеют вид

$$W=R(r)\,B(\beta)\,C(\gamma) \tag{19}$$

и приводят к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=n(n+1). \qquad (20)$$

Уравнение для B и C таково же, как в (12), где $l=k^2n(n+1)$.

Если (19) является функцией, непрерывной и имеющей непрерывный градиент на сфере $r=\text{const}$, то те же самые рассуждения, что и в п. 15.1 1, приводят к выводу, что $B(\theta)=C(\theta)$ должно быть двояко периодическим решением уравнения Ламе. Следовательно, n должно быть целым числом и h — одним из собственных значений. С другой стороны, соотношения (16) устанавливают связь между сферическими и сферо коническими координатами, а это приводит к связи между сферическими и эллипсоидальными гармоническими функциями Отсюда следует, что если n — целое число, то h принимает ровно $2n+1$ собственных значений.

Ситуация меняется коренным образом, если (19) представляет функцию, регулярную внутри конуса $\beta=\text{const}$, где β лежит между K и $K+iK'$. Если функция (19) регулярна внутри половины конуса $\beta=\text{const}$, то должно выполняться соотношение $n=-1/2+ip$, где p вещественно и произвольно Если же функция (19) регулярна лишь внутри части конуса, заключенной между сферами $r=r_1$ и $r=r_2$ и обращается в нуль на этих сферах, то должно выполняться соотношение $n=-1/2+ip$, где p — корень трансцендентного уравнения $\sin\left[p\ln\frac{r_1}{r_2}\right]=0$. В обоих случаях n комплексно и $\operatorname{Re} n=-1/2$. Поскольку $\gamma=0$ и $\gamma=4K$ являются одной и той же поверхностью, то $C(\gamma)$ должно быть периодической функцией с периодом 4K и h должно принимать одно из счетного множества собственных значений. Непрерывность в точке $\beta=K$ приводит к тому, что $B(\theta)$ и $C(\theta)$ имеют относительно K одну и ту же четность и, следовательно, отличаются друг от друга лишь постоянным множителем, однако получающиеся здесь функции не являются уже двояко-периодическими.

15.1.3. Координаты конфокальных циклид вращения. В цилиндрических координатах ρ, φ, z уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=0. \qquad (21)$$

Введем теперь в меридиональной плоскости новые координаты u, v, положив $z=z(u,v)$, $\rho=\rho(u,v)$. Вангерин (Wangerin; 1875) нашел наиболее общие системы *ортогональных криволинейных координат* u, v, в которых уравнение Лапласа допускает *разделение переменных*, т. е. обладает *нормальными решениями* вида

$$W=w(u,v)\,U(u)\,V(v)\,\Phi(\varphi), \qquad (22)$$

где $w(u,v)$ — фиксированная функция, а U, V, Φ — решения обыкновенных дифференциальных уравнений Исследование Вангерина было повторено Сноу (Snow, 1952), а также Р Лагранжем (R Lagrange, 1939, 1944). Мы изложим сейчас вкратце исследования Вангерина, после чего более детально расскажем о полученных им системах криволинейных координат и о краевых задачах, с которыми они связаны

Сначала доказывают следующий результат. Если u и v — ортогональные координаты и уравнение Лапласа имеет решение вида (22), то $w=\rho^{-1/2}$ и координаты u, v можно выбрать так, что отображение (z,ρ)-плоскости на (u,v)-плоскость *конформно*. В соответствии с этим положим

$$z+i\rho=f(u+iv), \qquad (23)$$

где f — аналитическая функция; положим также

$$W=\rho^{-1/2}\Psi(u,v)\,e^{\pm im\varphi}=\rho^{-1/2}U(u)\,V(v)\,e^{\pm im\varphi} \qquad (24)$$

в уравнении Лапласа (21). Функция Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)F(u,v)\Psi=0, \tag{25}$$

где

$$F(u,v)=\frac{|f'(u+iv)|^2}{[\operatorname{Im} f(u+iv)]^2}=\frac{|f'|^2}{\rho^2}. \tag{26}$$

Если F имеет вид $F(u,v)=F_1(u)+F_2(v)$, то уравнение (25) имеет решение вида $U(u)V(v)$ При этом U и V удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2U}{du^2}+\left[h-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)F_1(u)\right]U=0,\quad \frac{d^2V}{dv^2}-\left[h+\left(m^2-\frac{1}{4}\right)F_2(v)\right]V=0.$$

Доказано, что $F(u,v)=F_1(u)+F_2(v)$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'^2=a_0+a_1f+a_2f^2+a_3f^3+a_4f^4=P_4(f),$$

где $a_0, \ldots, a_4$ — вещественные постоянные. Таким образом, f является либо элементарной, либо *эллиптической функцией*. Кроме того, вид дифференциального уравнения для f не изменяется при замене f на $\dfrac{Af+B}{Cf+D}$, где A, B, C, D — вещественные постоянные и $AD-BC\neq 0$. С помощью этого преобразования можно привести уравнение к нормальному виду.

Мы будем предполагать, что многочлен P_4 имеет четыре различных нуля. В этом случае приведение к нормальному виду выполняется с помощью процесса, описанного в п. 13.5. При этом возникают три различных случая в зависимости от того, будут ли все нули этого многочлена вещественны, все нули комплексны или мы имеем два вещественных и два комплексных нуля. Стандартными формами для f в этих трех случаях являются

$$\operatorname{sn}(u+iv,k),\qquad i\operatorname{sn}(u+iv,k),\qquad \operatorname{cn}(u+iv,k).$$

Изучим каждый из этих трех случаев отдельно Черта сверху обозначает переход к комплексно сопряженному выражению. Кроме того, используем следующие сокращенные обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&s=\operatorname{sn}(u+iv,k),\ s_1=\operatorname{sn}(u,k),\ s_2=\operatorname{sn}(iv,k),\ s_2'=\operatorname{sn}(v,k'),\\
&c=\operatorname{cn}(u+iv,k),\ c_1=\operatorname{cn}(u,k),\ c_2=\operatorname{cn}(iv,k),\ c_2'=\operatorname{cn}(v,k'),\\
&d=\operatorname{dn}(u+iv,k),\ d_1=\operatorname{dn}(u,k),\ d_2=\operatorname{dn}(iv,k),\ d_2'=\operatorname{dn}(v,k'),\\
&F(u,v)=\frac{|f'(u+iv)|^2}{[\operatorname{Im} f(u+iv)]^2},\qquad n=\pm m-\frac{1}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Целью дальнейшего исследования является показать, что в каждом из этих случаев $F(u,v)$ имеет вид

$$[a\operatorname{sn}(bu+c,\ a/b)]^2+[a_1\operatorname{sn}(b_1v+c_1,\ a_1/b_1)]^2,$$

так что уравнение (25) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}-
-n(n+1)\left\{\left[a\operatorname{sn}\left(bu+c,\ \frac{a}{b}\right)\right]^2+\left[a_1\operatorname{sn}\left(b_1v+c_1,\ \frac{a_1}{b_1}\right)\right]^2\right\}\Psi=0.$$

Для нормальных решений $\Psi=U(u)V(v)$ и U и V удовлетворяют уравнениям, легко сводящимся к уравнению Ламе, причем переменными в уравнении Ламе являются $bu+c$ и b_1v+c_1 соответственно. Мы изучим далее краевые условия, которые должны быть наложены на U и V.

Использованные выше координаты u, v наиболее естественным образом возникают из общей теории. Однако они не обязательно являются наиболее удобными в той или иной конкретной задаче, и мы увидим в п. 15.8, как с помощью теории преобразований эллиптических функций можно перейти к новым более удобным координатам.

Случай I. *Четыре вещественных фокуса на оси.* Положим

$$z+i\rho=\frac{As+B}{Cs+D},\quad A,\ B,\ C,\ D \text{ вещественны},\quad AD-BC\neq 0 \tag{28}$$

и найдем с помощью прямого вычисления, использующего 13.17(16), 13.23(13) и табл. 7 из п. 13.18,

$$F(u,\ v)=-\frac{4cd\bar{c}\bar{d}}{(s-\bar{s})^2}=\frac{k'^4s_1^2}{c_1^2d_1^2}+\frac{d_2'^2}{s_2'^2c_2'^2}=$$
$$=-\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[i(1+k)\,u,\frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2+\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[(1+k)(v-i\mathrm{K}),\ \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2. \tag{29}$$

Для дальнейшего исследования положим в (28) $A=D=1$, $B=C=0$. Отображение $z+i\rho=\mathrm{sn}\,(u+iv)$ было описано в п. 13.25. Мы видим из приведенного там рис. 8, что полуплоскость $\rho>0$ отображается на прямоугольник $(u,\ v)$-плоскости, имеющий вершины $(\pm\mathrm{K},\ 0)$ и $(\pm\mathrm{K},\ i\mathrm{K}')$.

Таким образом $-\mathrm{K}\leqslant u\leqslant\mathrm{K}$ и $0\leqslant v\leqslant\mathrm{K}'$. Кривые $u=\mathrm{const}$ и $v=\mathrm{const}$ в $(z,\ \rho)$-плоскости являются конфокальными бициркулярными кривыми четвертого порядка, фокусы которых лежат в точках $z=\pm 1,\ \pm 1/k$, $\rho=0$. Отметим, что F обращается в бесконечность при $u=\pm\mathrm{K}$ или $v=0,\ \mathrm{K}'$, так что концы промежутков для u и v соответствуют особым точкам обыкновенных дифференциальных уравнений для U и V.

Для потенциала, регулярного внутри (или вне) поверхности $u=\mathrm{const}$, $\rho^{-1/2}V(v)$ должно быть конечным в обеих концевых точках $v=0,\ \mathrm{K}'$. Мы увидим ниже, что это определяет некоторые собственные значения h, а также собственные решения $V(v)$. Для потенциалов, регулярных вне (внутри) поверхности $u=c<0$, или внутри (вне) поверхности $u=c>0$, $U(\mathrm{K})$ $[U(-\mathrm{K})]$ должно быть конечным, что определяет выбор U. Аналогичное утверждение справедливо для потенциалов, регулярных внутри или вне поверхности $v=\mathrm{const}$.

Случай II. *На оси нет вещественных фокусов.* Здесь

$$z+i\rho=\frac{Ais+B}{Cis+D},\quad A,\ B,\ C,\ D \text{ вещественны},\quad AD-BC\neq 0, \tag{30}$$

$$F(u,\ v)=\frac{4c\bar{c}d\bar{d}}{(s+\bar{s})^2}=\frac{c_1^2d_1^2}{s_1^2}-\frac{k'^4s_2^2}{c_2^2d_2^2}=$$
$$=-\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[i(1+k)(u-\mathrm{K}),\frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2+\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[(1+k)\,v,\ \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2. \tag{31}$$

Для дальнейшего исследования мы снова положим $A=D=1$, $B=C=0$. Отображение квадранта $z<0$, $\rho>0$ на прямоугольник с вершинами $(0,\ 0)$, $(\mathrm{K},\ 0)$, $(\mathrm{K},\ \mathrm{K}')$, $(0,\ \mathrm{K}')$ на $(u,\ v)$-плоскости описывается рис. 8 в п. 13.25. Чтобы дополнить отображение, отразим $(z,\ \rho)$ плоскость в прямой $z=0$, а $(u,\ v)$-плоскость либо в $v=0$, либо в $u=\mathrm{K}$. Линии $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ в

z, ρ)-плоскости являются конфокальными бициркулярными кривыми четвертого порядка с вещественными фокусами в $z=0$, $\rho=1$, $1/k$.

Для потенциалов, регулярных внутри или вне поверхности $u=\mathrm{const}$, отобразим полуплоскость $\rho>0$ на прямоугольник на (u, v)-плоскости с вершинами $(0, \pm \mathrm{K}')$. $(\mathrm{K}, \pm \mathrm{K}')$; $v=\mathrm{K}'$ и $v=-\mathrm{K}'$ являются образами $z=0$, $\rho>1/k$. Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 15.1.1, показывают, что $V(v)$ должно быть периодическим решением соответствующего дифференциального уравнения, имеющим период $2\mathrm{K}'$. Это условие определяет собственные значения h и соответствующие собственные функции $V(v)$. Для потенциалов, регулярных внутри $u=\mathrm{const}$, условие непрерывности при $u=\mathrm{K}$ (т. е. $z=0, 1<\rho<1/k$) приводит к тому, что U относительно K и V относительно 0 имеют одинаковую четность. Для потенциалов, регулярных вне $u=\mathrm{const}$, U должно оставаться конечным при $u=0$. Этот случай детально изучил Пуль (Poole; 1929, 1930), который использовал несколько иное отображение.

Для потенциалов, регулярных внутри или вне поверхности $v=\mathrm{const}$, мы отображаем полуплоскость $\rho>0$ на прямоугольник с вершинами (0, 0), ($2\mathrm{K}$, 0), ($2\mathrm{K}$, K'), (0, K'). Здесь $\rho^{1/2}U(u)$ должно оставаться конечным как при $u=0$, так и при $u=2\mathrm{K}$, это условие определяет собственные значения h и собственные функции $U(u)$. Тогда $V(v)$ определяется его четностью относительно нуля (для потенциалов, регулярных внутри $v=\mathrm{const}$) или относительно K' (для потенциалов, регулярных вне $v=\mathrm{const}$).

Случай III. *Два вещественных фокуса на оси.* Здесь

$$z+i\rho=\frac{Ac+B}{Cc+D},\quad A,\ B,\ C,\ D \text{ вещественны},\ AD-BC\neq 0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} F(u,\ v)&=-\frac{4sd\,\bar{s}\,\bar{d}}{(c-\bar{c})^2}=\frac{c_1^2}{s_1^2 d_1^2}-\frac{c_2^2}{s_2^2 d_2^2}=\\ &=\left\{(k-ik')\,\mathrm{sn}\left[(k+ik')(u+\mathrm{K}),\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]\right\}^2-\\ &\qquad-\left\{(k-ik')\,\mathrm{sn}\left[i(k+ik')(v-i\mathrm{K}),\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]\right\}^2. \end{aligned} \tag{33}$$

В этом случае модуль эллиптических функций, связанных с уравнением Ламе, является не вещественной правильной дробью, а комплексным числом, равным по модулю единице. С помощью теории преобразований эллиптических функций (см. табл. 11 в п. 13.22) можно привести все функции к случаю вещественного модуля, лежащего между нулем и единицей. Положим $A=D=1$, $B=C=0$. Кривые $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ в (z, ρ)-плоскости являются конфокальными бициркулярными кривыми четвертого порядка, фокусы которых лежат в точках $z=\pm 1$, $\rho=0$ и $z=0$, $\rho=k'/k$. Дальнейшие детали относительно отображения можно усмотреть из п. 13.25.

Для потенциалов, регулярных внутри или вне поверхности $u=\mathrm{const}$, мы отображаем полуплоскость $\rho>0$ на прямоугольник (u, v)-плоскости с вершинами (0, $-2\mathrm{K}'$), (K, $-2\mathrm{K}'$), (K, 0), (0, 0). Условие, что $\rho^{1/2}V(v)$ остается конечным как в точке $v=0$, так и при $v=-2\mathrm{K}'$, определяет собственные значения h и собственные функции $V(v)$. Для потенциалов, регулярных внутри $u=\mathrm{const}$, мы имеем разрез $z=0$, $\rho<k'/k$ или $u=\mathrm{K}$. Условие непрерывности при переходе через этот разрез показывает, что четность U относительно K совпадает с четностью V относительно $-\mathrm{K}'$. Для потенциалов, регулярных вне $u=\mathrm{const}$, $\rho^{-1/2}U$ определяется условием, что оно остается конечным при $u=0$.

Для потенциалов, регулярных внутри или вне поверхности $v=\mathrm{const}$ мы отображаем полуплоскость $\rho>0$ на прямоугольник в (u, v)-плоскости с вершинами $(0, -\mathrm{K}')$, $(2\mathrm{K}, -\mathrm{K}')$, $(2\mathrm{K}, 0)$, $(0, 0)$. При этом $\rho^{-1/2} U(u)$ должно оставаться конечным как при $u=0$, так и при $u=2\mathrm{K}$. Это условие определяет собственные значения h и собственные функции $U(u)$. Для потенциалов, регулярных внутри $v=\mathrm{const}$, $\rho^{-1/2}V(v)$ должно быть конечным при $v=0$, а для потенциалов, регулярных вне $v=\mathrm{const}$, четность V относительно $-\mathrm{K}'$ должна совпадать с четностью U относительно K.

15.2. Уравнение Ламе

В предыдущих пунктах мы показали, что решение многих краевых задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2}+\{h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}(z, k)]^2\}\Lambda=0, \tag{1}$$

которое мы будем называть *якобиевой формой уравнения Ламе* или, короче, *уравнением Ламе*. Эта форма уравнения использовалась Эрмитом, Унттекером, Айнсом и другими авторами и более удобна для численных расчетов, чем указанные ниже другие формы.

В (1) k обычно заключено между 0 и 1, но мы встретились в п. 15.1.3 сб случаем, когда k—комплексное число и $|k|=1$; z—комплексное переменное, но в большинстве краевых задач z меняется вдоль линий $\mathrm{Re}\,z=N\mathrm{K}$, $\mathrm{Im}\,z=N\mathrm{K}'$, где N—целое число. h—параметр, собственные значения которого определяются либо из свойств периодичности, либо из условий конечности. n—обычно целое число, иногда половииа нечетного числа (как в п. 15.1.3), иногда (как в одной из задач п. 15.1.2)—комплексное число, вещественная часть которого равна $-\frac{1}{2}$.

Мы встречались с различными типами решений. Во-первых, существуют решения, имеющие заданную четность относительно одной из точек $M\mathrm{K}+iN\mathrm{K}'$ (M, N—целые), либо решения, остающиеся конечными в одном из полюсов $2M\mathrm{K}+i(2N+1)\mathrm{K}'$ (M, N—целые) функцни $\mathrm{sn}\,z$. Такие решения существуют и определены с точностью до постоянного множителя для любых заданных значений h, n, k. Далее существуют решения, имеющие заданный период (который является также периодом $\mathrm{sn}\,z$). Мы увидим ниже, что для заданных n и k существует бесконечное множество собственных значений h, при которых существуют такие решения В пп 15.1.1 и 15.1.2 нам понадобились решения, имеющие два заданных периода Мы увидим ниже, что такие решения существуют лишь в случае, когда $2n$—целое число. Наконец, в п. 15.1.3 мы ввели решение, которое остается конечным в двух полюсах. Мы увидим ниже, что при заданных n и k есть бесконечная последовательность собственных значений h, для которых существуют такие функции.

Помимо якобиевой формы (1) уравнения Ламе, встречаются другие важные формы этого уравнения. Если положить

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \qquad z=i\mathrm{K}'+u(e_1-e_3)^{1/2}, \quad (e_1-e_3)h+n(n+1)e_3=H \tag{2}$$

и использовать 13.16(4) в сочетании с табл. 7 из п. 13.18, то получим *форму Вейерштрасса для уравнения Ламе*

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}+[H-n(n+1)\wp(u)]\Lambda=0. \tag{3}$$

Эта форма была использована Альфаном и другими французскими математиками и часто встречается в современных теоретических работах.

Тригонометрическая форма может быть получена с помощью подстановки

$$\operatorname{sn} z = \cos \zeta, \quad \zeta = \pi/2 - \operatorname{am} z, \tag{4}$$

которая приводит к уравнению

$$[1-(k\cos\zeta)^2]\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2}+k^2\cos\zeta\sin\zeta\frac{d\Lambda}{d\zeta}+[h-n(n+1)(k\cos\zeta)^2]\Lambda=0. \tag{5}$$

Эта форма была использована Дж. Дарвином и Айнсом.

Встречаются также многочисленные *алгебраические формы*. С помощью подстановки

$$(\operatorname{sn} z)^2 = x \tag{6}$$

мы получаем из (1) уравнение

$$\frac{d^2\Lambda}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-k^{-2}}\right)\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{hk^{-2}-n(n+1)x}{4x(x-1)(x-k^{-2})}\Lambda=0, \tag{7}$$

а полагая

$$\wp(u) = p, \tag{8}$$

получаем из (3)

$$\frac{d^2\Lambda}{dp^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-e_1}+\frac{1}{p-e_2}+\frac{1}{p-e_3}\right)\frac{d\Lambda}{dp}+\frac{H-n(n+1)p}{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}\Lambda=0. \tag{9}$$

Другие алгебраические формы могут быть получены с помощью рациональных преобразований этих форм. Алгебраические формы были использованы Стилтьесом, Ф. Клейном, Бохером и др.

Алгебраические формы уравнения Ламе принадлежат к уравнениям типа Фукса, имеющим четыре регулярные особые точки. Они имеют три конечные регулярные особенности (в точках 0, 1, k^{-2} для (7) и e_1, e_2, e_3 для (9)) с индексами 0, 1/2 и регулярную особую точку на бесконечности с индексами $-\frac{n}{2}$, $\frac{n+1}{2}$. Относительно теории уравнений Фукса см., например, Айнс (1939, стр. 498 и далее) или Poole (1936, стр. 74 и далее).

Существуют общие теории, содержащие как частный случай другие формы уравнения Ламе. Относительно теории дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами см. Айнс (1939, стр. 505 и далее) или Poole (1936, стр. 170 и далее). Относительно уравнений с периодическими коэффициентами см. Айнс (1939, стр. 513 и далее) или Poole (1936, стр. 178 и далее).

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать h, k, n как заданные (вещественные или комплексные) постоянные, а переменные как комплексные переменные.

15.3. Уравнение Гойна

Можно доказать, что любое уравнение Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками можно привести к виду

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-a}\right)\frac{dw}{dx}+\frac{\alpha\beta x-q}{x(x-1)(x-a)}w=0, \tag{1}$$

где

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta-\varepsilon+1=0. \tag{2}$$

Здесь $x=0$, 1, a, ∞ — особые точки уравнения (1), причем индексы в этих особых точках зависят от $\alpha, \ldots, \varepsilon$, а постоянная q — так называемый *вспомогательный параметр*, наличие которого связано с тем, что уравнение

Фукса второго порядка с четырьмя (или большим числом) особыми точками не определяется однозначно положением особых точек и индексами. (См. Айнс, 1939, стр. 498 и далее; Poole, 1936, стр. 77 и далее.) Приведение выполняется с помощью дробно-линейного преобразования независимого переменного и соответствующего преобразования зависимого переменного, соответственно (4) и (5). Уравнение (1) известно как уравнение Гойна (Heun, 1889, Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 23.71).

Уравнение Гойна можно охарактеризовать с помощью P-символа (см п. 2.6.1, или Айнс, 1939, стр. 500):

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{matrix}\right\}. \tag{3}$$

Следует отметить, что P-символ не характеризует полностью уравнение и что при любом преобразовании уравнения надо отдельно с помощью непосредственного вычисления установить, как преобразуется вспомогательный параметр.

Для P-символа с четырьмя столбцами мы имеем *линейные преобразования*

$$\left(\frac{x-a}{x-d}\right)^{\rho}\left(\frac{x-b}{x-d}\right)^{\sigma}\left(\frac{x-c}{x-d}\right)^{\tau} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & d & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & x \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & d & \\ \alpha'+\rho & \beta'+\sigma & \gamma'+\tau & \delta'-\rho-\sigma-\tau & x \\ \alpha''+\rho & \beta''+\sigma & \gamma''+\tau & \delta''-\rho-\sigma-\tau & \end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & d & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & x \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} M(a) & M(b) & M(c) & M(d) & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & M(x) \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{matrix}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''+\gamma'+\gamma''+\delta'+\delta''=2, \\ &M(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}, \qquad AD-BC\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если две из разностей показателей равны 1/2, то имеем *квадратичное преобразование*. Например, если в (1), (3) мы имеем

$$\delta=\varepsilon=1/2, \quad \gamma=\alpha+\beta, \tag{7}$$

то

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1/2 & 1/2 & \beta & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \dfrac{x-a}{x-1} \\ 1/2 & \beta & 1-\gamma & 1/2 & \end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{matrix} -a^{1/2} & -1 & 1 & a^{1/2} & \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 & \left(\dfrac{x-a}{x-1}\right)^{1/2} \\ 1-\gamma & \beta & \beta & 1-\gamma & \end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & A^2 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & X \\ \beta & 1-\gamma & 1-\gamma & \beta & \end{matrix}\right\}, \tag{8}$$

где в последнем P-символе

$$A=\frac{1+a^{1/2}}{1-a^{1/2}}, \qquad X=A\frac{(x-1)^{1/2}+(x-a)^{1/2}}{(x-1)^{1/2}-(x-a)^{1/2}}. \tag{9}$$

Если три разности показателей равны 1/2 (как в случае алгебраической формы уравнения Ламе), то имеем три различных квадратичных преобразования. Делая после каждого из них еще одно квадратичное преобразование, получаем *биквадратные* преобразования

Перейдем к аналитическим представлениям решений уравнения (1). Пусть $a_1, \ldots, a_4$—особые точки P-символа с четырьмя столбцами, α_i' и α_i''—показатели в a_i, и $\sum(\alpha_i'+\alpha_i'')=2$. По аналогии с 24 рядами Куммера для P-символа с четырьмя столбцами (п 2.9) имеем 192 ряда вида

$$\left(\frac{x-a_j}{x-a_l}\right)^{\sigma}\left(\frac{x-a_k}{x-a_l}\right)^{\tau}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\left(\frac{a_j-a_l}{a_j-a_i}\,\frac{x-a_i}{x-a_l}\right)^{\varrho+m}, \tag{10}$$

где i, j, k, l—перестановки 1, 2, 3, 4, ρ есть α_i' или α_i''; σ есть α_j' или α_j'' и τ есть α_k' или α_k''. Лишь 96 из 192 рядов различны. Эти ряды были изучены Гойном (Heun; 1889), Сноу (Snow, 1952, гл VII) и др В тех случаях, когда существуют квадратичные преобразования (как в случае уравнения (8)), они приводят к новым разложениям в степенные ряды.

С другой стороны, решения уравнения (1) можно разложить в ряды по гипергеометрическим функциям. Такие разложения были изучены Свартхольмом (Svartholm; 1939) и Эрдейи (Erdélyi; 1942, 1944). В качестве типичного разложения можно указать

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{Bmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \lambda+m & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & \mu-m & \end{Bmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon. \tag{12}$$

Оказывается (Erdélyi, 1944), есть две существенно различные возможности выбора λ и μ. Для рядов типа I (Erdelyi, 1942) $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta-\varepsilon$. Эти ряды сходятся вне эллипса с фокусами 0, 1, проходящего через точку a, и выражают ветвь (3), которая соответствует показателю α в бесконечно удаленной точке. Существуют три различных разложения такого типа для каждой ветви (3). Для рядов типа II (Svartholm; 1939) $\mu=0$, $\gamma-1$, $\delta-1$ или $\gamma+\delta-2$. Они являются рядами по многочленам Якоби, но, вообще говоря, не сходятся; они сходятся в исключительном случае *функций Гойна* (см. ниже), когда вспомогательный параметр имеет одно из собственных значений.

Во всех рассмотренных выше разложениях коэффициенты X_r удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\beta_0X_0+\gamma_1X_1=0,\\ &\alpha_rX_{r-1}+\beta_rX_r+\gamma_{r+1}X_{r+1}=0, \quad r=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где α_r, β_r, γ_r имеют известные выражения через r и параметры, $\gamma_r \neq 0$ и

$$\alpha_r\to\alpha,\ \beta_r\to\beta,\ \gamma_r\to\gamma, \text{ когда } r\to\infty. \tag{14}$$

Если t_1 и t_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\alpha+\beta t+\gamma t^2=0 \tag{15}$$

и $|t_1|<|t_2|$, то существует $\lim\limits_{r\to\infty}(X_r/X_{r-1})$, который, вообще говоря, равен t_2; если параметры задачи удовлетворяют некоторым условиям, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{X_r}{X_{r-1}}=t_1$$

(Perron, 1929, п. 57). Рекуррентное соотношение можно записать в виде

$$\frac{X_r}{X_{r-1}}=\frac{-\alpha_r}{\beta_r+\gamma_{r+1}X_{r+1}/X_r},\quad r=1,\ 2,\ \ldots$$

Путем повторного применения этой формулы приходим к бесконечной непрерывной дроби

$$q_r=-\cfrac{\alpha_r}{\beta_r-\cfrac{\alpha_{r+1}\gamma_{r+1}}{\beta_{r+1}-\cfrac{\alpha_{r+2}\gamma_{r+2}}{\beta_{r+2}-\cfrac{\alpha_{r+3}\gamma_{r+3}}{\beta_{r+3}-\ldots}}}}\qquad (16)$$

Можно показать, что эта непрерывная дробь расходится, если $|t_1|=|t_2|$ и $t_1\neq t_2$, и сходится, если $|t_1|<|t_2|$ или $t_1=t_2$, причем $q_r\to t_1$, когда $r\to\infty$.

Если $|t_1|<|t_2|$ и параметры удовлетворяют условию $\beta_0=q_1\gamma_1$, то $X_r/X_{r-1}\to t_1$, когда $r\to\infty$ и X_r можно вычислить с помощью q_r; если $|t_1|<|t_2|$ и $\beta_0\neq q_1\gamma_1$, то $X_r/X_{r-1}\to t_2$, а если $|t_1|=|t_2|$, $t_1\neq t_2$, то $\lim(X_r/X_{r-1})$ не существует.

В приложении к уравнению Гойна (а следовательно, и к уравнению Ламе) β_0 и q_r зависят от вспомогательного параметра (q или h). В общем случае $\beta_0\neq q_1\gamma_1$, $X_r/X_{r-1}\to t_2$, область сходимости степенных рядов и рядов типа I по гипергеометрическим функциям ограничена и содержит лишь одну из четырех особых точек уравнения; ряды типа II по гипергеометрическим функциям в этом случае не существуют. Если вспомогательный параметр принимает одно из *собственных значений*, то $\beta_0=q_1\gamma_1$, $X_r/X_{r-1}\to t_1$, ряды сходятся в более широкой области, содержащей по крайней мере две особые точки, соответствующие собственные решения имеют заданный характер в окрестности этих двух особых точек и называются *функциями Гойна* (или *Ламе*). В этом случае ряды типа II по гипергеометрическим функциям также сходятся и представляют функцию Гойна (или Ламе).

Теоремы о существовании и распределении собственных значений вспомогательного параметра вытекают из общей теории (сингулярных) уравнений Штурма — Лиувилля

Вообще, уравнение $\beta_0=q_1\gamma_1$ для вспомогательного параметра трансцендентно, однако случай, когда $\alpha_R=0$ для некоторого натурального значения R представляет исключение. При $r\leqslant R$, q_r является конечной непрерывной дробью и $\beta_0=q_1\gamma_1$ — алгебраическим уравнением для вспомогательного параметра. Если $\beta_0=q_1\gamma_1$, то $X_R=0$ и из (13) следует, что $X_{R+1}=X_{R+2}=\ldots=0$. В этом случае разложения в ряды состоят из конечного числа членов и мы имеем *многочлены Гойна* (или *Ламе*) или *алгебраические функции Гойна* (или *Ламе*). С другой стороны, если $\alpha_R=0$, можно положить $X_0=X_1=\ldots=X_{R-1}=0$, определить вспомогательный параметр из уравнения $\beta_R=\gamma_{R+1}q_{R+1}$ (которое является трансцендентным уравнением) и получить трансцендентные функции Гойна (или Ламе).

§ 15.4. Решения общего уравнения Ламе

Применим теперь результаты п. 15.3 к уравнению Ламе. Положим

$$s = \operatorname{sn} z, \quad c = \operatorname{cn} z, \quad d = \operatorname{dn} z. \tag{1}$$

На протяжении этого пункта n и h произвольны.

Из 15.2. (7) имеем

$$\Lambda = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & k^{-2} & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & -n/2 & s^2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & n/2+1/2 & \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

и различные преобразования этого выражения вытекают из 15.3 (4), (5), (8). В частности, из 15.3 (8) следует

$$\Lambda = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 & \infty & \\ -n/2 & 0 & 0 & -n/2 & \frac{1+k}{1-k}\,\frac{d+kc}{d-kc} \\ n/2+1/2 & 1/2 & 1/2 & n/2+1/2 & \end{matrix}\right\}. \tag{3}$$

Дальнейшее квадратичное преобразование (2) приводит к

$$\Lambda = P\left\{\begin{matrix} -1 & 1 & k^{-1} & -k^{-1} & \\ 0 & 0 & -n/2 & -n/2 & \frac{c}{d} \\ 1/2 & 1/2 & n/2+1/2 & n/2+1/2 & \end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

$$\Lambda = P\left\{\begin{matrix} k' & -k' & ik & -ik & \\ 0 & 0 & -n/2 & -n/2 & \frac{d}{s} \\ 1/2 & 1/2 & n/2+1/2 & n/2+1/2 & \end{matrix}\right\}, \tag{5}$$

$$\Lambda = P\left\{\begin{matrix} ik' & -ik' & i & -i & \\ 0 & 0 & -n/2 & -n/2 & \frac{c}{s} \\ 1/2 & 1/2 & n/2+1/2 & n/2+1/2 & \end{matrix}\right\}. \tag{6}$$

Из (2), (4), (5), (6) и результатов п 15.3 следует много разложений для решений уравнения Ламе Неопубликованный список, составленный Эрдейи, дает 30 переменных, которые могут быть использованы в рядах, аналогичных 15 3 (10), с четырьмя различными множителями для каждого переменного Принимая во внимание, что для первых 18 ти из этих переменных ρ может равняться нулю или 1/2, мы получаем 192 различных ряда. Относительно некоторых из простейших степенных рядов и рекуррентных соотношений для их коэффициентов см Ince, 1940 a, и указанную там литературу. Относительно разложений по функциям Лежандра см Erdelyi, 1942 a. Разложения по показательным и тригонометрическим функциям вытекают из 15 2 (5) и других тригонометрических форм уравнения Ламе, с помощью теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (Айнс, 1939, стр 513 и далее, Poole, 1936, стр 182 и далее) Эти разложения были изучены Айнсом (Ince, 1940 b) и Эрдейи (Erdelyi, 1942a).

§ 15.5. Функции Ламе

Мы будем предполагать, что k и n—заданные числа такие, что $0<k<1$ и $n(n+1)$ вещественно, так что либо n вещественно, либо $n=-1/2+ip$, где p—вещественное число. Мы изучим *периодические решения* уравнения Ламе и покажем, что такие решения существуют для некоторых (собственных) значений h; мы будем их называть *периодическими функциями Ламе* или, кратко, функциями Ламе.

15.5.1. Вещественные периоды функции Ламе. Так как $\operatorname{sn}^2 z$ имеет примитивный вещественный период $2K$, то примитивный вещественный период любой функции Ламе, обладающей вещественными периодами, должен иметь вид $P=2pK$, где $p=1, 2, \ldots$ Но $\operatorname{sn}^2 z$ является четной функцией от $z-K$, и если $\Lambda(z)$—периодическое решение уравнения Ламе, то функции $\Lambda(2K-z)$, $\Lambda(z)\pm\Lambda(2K-z)$ также являются периодическими решениями этого уравнения. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением функций Ламе, которые являются четными или нечетными функциями от $z-K$. Если функция Ламе с вещественным периодом является четной функцией от $z-K$, мы будем обозначать ее $\operatorname{Ec}_n(z, k^2)$, а если она является нечетной функцией от $z-K$, то $\operatorname{Es}_n(z, k^2)$. Далее мы будем писать $\operatorname{Ec}_n^m(z, k^2)$ и $\operatorname{Es}_n^m(z, k^2)$ для функций с периодом $P=2pK$, которые имеют в точности pm нулей на полуоткрытом промежутке $0\leqslant z<2pK$ (или на любом полуоткрытом вещественном промежутке длины P). Собственные значения h, соответствующие Ec_n^m и Es_n^m, мы будем обозначать соответственно через $a_n^m(k^2)$ и $b_n^m(k^2)$. Эти обозначения были введены Айнсом (Ince, 1940a) и модифицированы Эрдейи (Erdélyi, 1941a). Поскольку для этих функций нет общепризнанной нормировки, мы будем считать функции $\operatorname{Ec}_n^m(z)$ и $\operatorname{Es}_n^m(z)$ заданными с точностью до постоянного множителя. Поэтому мы будем опускать постоянные множители в таких соотношениях, как (31) (см. ниже).

Решения с периодами $2K$ *и* $4K$. В каждом из этих случаев имеет место в силу периодичности равенство $\operatorname{Ec}(-K+t)=\operatorname{Ec}(3K+t)$, а это выражение в силу четности равно $\operatorname{Ec}(-K-t)$. Таким образом, $\operatorname{Ec}(z)$ является четной функцией как от $z-K$, так и от $z+K$. Мы имеем, таким образом, краевое условие

$$\Lambda'(-K)=\Lambda'(K)=0 \quad \text{для} \quad \Lambda=\operatorname{Ec}(z). \tag{1}$$

Обратно, если решение $\Lambda(z)$ уравнения 15.2(1) удовлетворяет условию (1), то оно является четной функцией как от $z-K$, так и от $z+K$ и поэтому должно иметь период $4K$. Аналогично,

$$\Lambda(-K)=\Lambda(K)=0 \text{ для } \Lambda=\operatorname{Es}(z). \tag{2}$$

Учитывая соотношения симметрии относительно $\pm K$, достаточно изучить функции Ламе с периодами $2K$ и $4K$ на промежутке $(-K, K)$. Мы покажем, что этот промежуток можно свести к $(0, K)$.

Пусть $E(z)$ означает либо $\operatorname{Ec}(z)$, либо $\operatorname{Es}(z)$. Тогда $E(z)$ и $E(-z)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и, в силу (1) и (2), одному и тому же граничному условию. Поэтому они могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Таким образом, $E(z)$ является либо четной, либо нечетной функцией от z, и мы имеем следующие четыре случая $(m=0, 1, 2, \ldots)$:

$$\Lambda(0)=\Lambda(K)=0, \quad \Lambda=\operatorname{Es}_n^{2m+2}(z), \quad \text{период } 2K, \tag{3}$$

$$\Lambda'(0)=\Lambda(K)=0, \quad \Lambda=\operatorname{Es}_n^{2m+1}(z), \quad \text{»} \quad 4K, \tag{4}$$

$$\Lambda(0)=\Lambda'(K)=0, \quad \Lambda=\operatorname{Ec}_n^{2m+1}(z), \quad \text{»} \quad 4K, \tag{5}$$

$$\Lambda'(0)=\Lambda'(K)=0, \quad \Lambda=\operatorname{Ec}_n^{2m}(z), \quad \text{»} \quad 2K \tag{6}$$

с соответствующими соотношениями симметрии.

Наши функции можно определить также как решения краевых задач на промежутке $(0, 2K)$:

$$\Lambda(0) = \Lambda(2K) = 0 \quad \text{для} \quad \Lambda = \mathrm{Es}_n^{2m}(z) \quad \text{или} \quad \mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z), \tag{7}$$

$$\Lambda'(0) = \Lambda'(2K) = 0 \quad \text{для} \quad \Lambda = \mathrm{Es}_n^{2m+1}(z) \quad \text{или} \quad \mathrm{Ec}_n^{2m}(z). \tag{8}$$

Существование в точности одного решения для каждой из задач (3) — (6) при каждом $m = 0, 1, 2, \ldots$ следует из теории уравнения Штурма—Лиувилля (см , например, Айнс, 1939, п. 10 61). Так как собственные числа для задачи Штурма—Лиувилля образуют возрастающую последовательность, имеем из (1), (2), (7), (8):

$$a_n^0 < a_n^1 < a_n^2 < \ldots, \qquad a_n^m \to \infty, \text{ когда } m \to \infty, \tag{9}$$

$$b_n^1 < b_n^2 < \ldots, \qquad b_n^m \to \infty, \;\text{»}\; m \to \infty, \tag{10}$$

$$a_n^1 < b_n^2 < a_n^3 < b_n^4 < \ldots, \tag{11}$$

$$a_n^0 < b_n^1 < a_n^2 < b_n^3 < \ldots \tag{12}$$

Таким образом, можно достаточно хорошо установить взаимное расположение собственных значений, за исключением того, что мы не можем сделать никаких утверждений относительно взаимного расположения a_n^m и b_n^m. Айнс (Ince; 1940a, b) вычислил собственные значения для целых значений $2n$, но надо отметить, что его обозначения несколько отличаются от использованных нами: чтобы согласовать обозначения Айнса с нашими, надо переставить a_n^{2m+1} и b_n^{2m+1}.

Айнс (Ince; 1940a) первым использовал для построения функции Ламе степенные ряды. Позже (1940b) он открыл разложения в тригонометрические ряды, которые сходятся быстрее, особенно если k близко к 1.

Разложения в тригонометрические ряды основаны на 15.2(5) и аналогичном дифференциальном уравнении, которому удовлетворяет функция $\dfrac{\Lambda(z)}{\mathrm{dn}(z)}$. Для каждой функции Ламе с периодом $2K$ или $4K$ мы имеем два разложения, указанных ниже. Здесь используются сокращенные обозначения

$$\zeta = \frac{1}{2} - \mathrm{am}\, z, \qquad H = 2h - k^2 n(n+1) \tag{13}$$

и m является неотрицательным целым числом.

Тригонометрические ряды для функций Ламе с периодами $2K$, $4K$:

$$\mathrm{Ec}_n^{2m}(z) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r}\cos(2r\zeta) = \mathrm{dn} z\left[\frac{1}{2}C_0 + \sum_{r=1}^{\infty} C_{2r}\cos(2r\zeta)\right], \tag{14}$$

$$\mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}\cos[(2r+1)\zeta] = \mathrm{dn}\, z \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}\cos[(2r+1)\zeta], \tag{15}$$

$$\mathrm{Es}_n^{2m}(z) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}\sin(2r\zeta) = \mathrm{dn}\, z \sum_{r=1}^{\infty} D_{2r}\sin(2r\zeta), \tag{16}$$

$$\mathrm{Es}_n^{2m+1}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}\sin[(2r+1)\zeta] = \mathrm{dn}\, z \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+1}\sin[(2r+1)\zeta]. \tag{17}$$

Рекуррентными формулами для коэффициентов в формулах (14) — (17) являются ($r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$):

$$\left.\begin{aligned} &-HA_0+(n-1)(n+2)\,k^2A_2=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r+2)(n+2r-1)\,k^2A_{2r-2}-[H-4r^2(2-k^2)]\,A_{2r}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)\,k^2A_{2r+2}=0,\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} &-HC_0+n(n+1)\,k^2C_2=0\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)\,k^2C_{2r-2}-[H-4r^2(2-k^2)]\,C_{2r}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)\,k^2C_{2r+2}=0,\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\left[H-2+k^2-\tfrac{1}{2}n(n+1)k^2\right]A_1+\tfrac{1}{2}(n-2)(n+3)\,k^2A_3=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)\,k^2A_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]\,A_{2r+1}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)\,k^2A_{2r+3}=0,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\left[H-2+k^2-\tfrac{1}{2}n(n+1)k^2\right]C_1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n+2)\,k^2C_3=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)\,k^2C_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]\,C_{2r+1}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)\,k^2C_{2r+3}=0,\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} &-(H-8+4k^2)\,B_2+\tfrac{1}{2}(n-3)(n+4)\,k^2B_4=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)\,k^2B_{2r}-[H-(2r+2)^2(2-k^2)]\,B_{2r+2}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-3)(n+2r+4)\,k^2B_{2r+4}=0,\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &-(H-8+4k^2)\,D_2+\tfrac{1}{2}(n-2)(n+3)\,k^2D_4=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)\,k^2D_{2r}-[H-(2r+2)^2(2-k^2)]\,D_{2r+2}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)\,k^2D_{2r+4}=0,\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\left[H-2+k^2+\tfrac{1}{2}n(n+1)k^2\right]B_1+\tfrac{1}{2}(n-2)(n+3)\,k^2B_3=0,\\ &\tfrac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)\,k^2B_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]\,B_{2r+1}+\\ &\qquad+\tfrac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)\,k^2B_{2r+3}=0,\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\left[H-2+k^2+\frac{1}{2}n(n+1)k^2\right]D_1+\frac{1}{2}(n-1)(n+2)k^2D_3=0,\\ &\frac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)k^2D_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]D_{2r+1}+\\ &\qquad\qquad+\frac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)k^2D_{2r+3}=0. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Если каждое из этих восьми рекуррентных соотношений разделить на $4r^2$, они примут вид 15.3(13), где X_r равно соответственно $A_{2r}, A_{2r+1}, \ldots, D_{2r+1}$. Во всех восьми случаях $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}k^2$, $\beta=k^2-2$ и корни квадратного уравнения 15.3(15) равны

$$t_{1,2}=\left(\frac{1\pm k'}{k}\right)^2. \quad (26)$$

Для периодических функций Ламе X_r/X_{r-1} стремится при $r\to\infty$ к меньшему корню и скорость сходимости рядов (14)—(17) при вещественных ζ сравнима со скоростью сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $(1-k')/(1+k')$.

Непрерывная дробь 15.3(16) дает в каждом случае уравнение для собственных значений h. Эти уравнения получены Айнсом (Ince; 1940 b). Вообще они являются трансцендентными, метод их численного решения дан Айнсом (Ince, 1932, стр. 359). Однако если n—целое число, то некоторые из непрерывных дробей конечны, и мы получаем (для $n=0, 1, 2, \ldots$) всего $2n+1$ функций Ламе, представимых конечными тригонометрическими рядами. Эти ряды являются, следовательно, многочленами от s, c, d. Такие функции Ламе известны как *многочлены Ламе*. Отметим, что и в этих случаях существует бесконечная последовательность трансцендентных функций Ламе (Ince, 1940a).

Функции Ламе с вещественным периодом можно также представить в виде рядов по функциям Лежандра (см. Erdélyi. 1948 и указанную там литературу). Мы получаем конечные разложения в случае многочленов Ламе и бесконечные ряды для трансцендентных функций Ламе. Коэффициенты в этих рядах являются кратными коэффициентам тригонометрических разложений. Разложения по многочленам Лежандра весьма полезны для построения функций Ламе второго рода (см. ниже).

Айнс (Ince; 1940b) изучил также вопрос о *сосуществовании*. Его результаты могут быть сформулированы следующим образом. Если n не является целым числом, то не могут существовать два различных периодических решения, соответствующих одному и тому же собственному значению h. Если n—целое и мы имеем многочлен Ламе, то второе решение никогда не является периодическим. С другой стороны, если n—целое и мы имеем трансцендентную функцию Ламе, то четное и нечетное решения соответствуют одному и тому же собственному значению h. Таким образом, (9)—(12) могут быть дополнены соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &a_n^m\neq b_n^m \text{ для всех } m=0, 1, 2, \ldots, \text{ если } n \text{ не является целым,}\\ &\text{или если } n\text{—целое и } m=0, 1, \ldots, |n+{}^1/_2|-{}^1/_2;\\ &a_n^m=b_n^m, \text{ если } m \text{ и } n\text{—целые и } m>|n+{}^1/_2|-{}^1/_2. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Айнс (Ince; 1940a) изучил также асимптотические свойства собственных значений при больших значениях n и доказал, что для больших вещественных n

$$\left.\begin{aligned} a_n^{2m}\sim b_n^{2m+1}\sim(4m+1)k[n(n+1)]^{1/2},\\ a_n^{2m+1}\sim b_n^{2m+2}\sim(4m+3)k[n(n+1)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Решения с другими вещественными периодами. Решения с примитивным периодом 8K можно представить в виде ряда Фурье

$$\sum A_r \frac{\cos}{\sin}\left(2r-\frac{1}{2}\right)\zeta,$$

причем легко установить рекуррентные соотношения для коэффициентов и связанное с непрерывной дробью уравнение для определения собственных значений h Если $2n$ — нечетное целое число, то непрерывная дробь конечна и мы получаем алгебраическое уравнение для h. Функции Ламе с периодом 8K, соответствующие корням этого алгебраического уравнения, являются алгебраическими функциями от s, c, d и известны как *алгебраические функции Ламе* (Относительно алгебраических функций Ламе см. Lambe, 1951, 1952 и указанную там литературу). Как для алгебраических, так и для трансцендентных функций Ламе мы имеем $a_n^{m+1/2}=b_n^{m+1/2}$ при $m=0, 1, 2, \ldots$ и всех значениях n.

Решения с примитивным периодом $2pK$ можно представить в виде ряда Фурье

$$\sum A_r \frac{\cos}{\sin}\left(2r-\frac{q}{p}\right)\zeta,$$

который приводит к соответствующим рекуррентным соотношениям и т. д. За исключением случаев $p=1$, 2 или 4, уравнение, определяющее h, является трансцендентным и ряд Фурье бесконечен.

Функции второго рода. Пусть h равно одному из собственных значений a_n^m или b_n^m Тогда одно из решений уравнения Ламе является (периодической) функцией Ламе, например $E(z)$. Исключая случай, когда $2n$ — целое число и $m>|n+{}^1/_2|-{}^1/_2$, уравнение Ламе имеет единственное периодическое решение, и поэтому нам нужно построить *функцию Ламе второго рода.* Для многих задач удобной функцией второго рода является решение уравнения Ламе, принадлежащее в бесконечно удаленной точке показателю ${}^n/_2+{}^1/_2$ (см. 15.4(2)) Мы полагаем $\operatorname{Re} n \geqslant -{}^1/_2$.

Существует много конструкций функций Ламе второго рода. Так, из равенства 15 4(2) можно получить разложение по убывающим степеням s, и теория уравнений Гойна указывает многочисленные иные разложения в степенные ряды. Далее, если $E(z)$ (периодическая) функция Ламе первого рода, то

$$E(z)\int\limits_{iK'}^{z}[E(u)]^{-2}\,du$$

представляет собой функцию Ламе второго рода. Это представление часто использовалось в прежней литературе (см., например, Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 23 71)

Если функции Ламе первого рода можно представить в виде ряда по функциям Лежандра первого рода, в котором переменная пропорциональна s, c или d, то соответствующую функцию Ламе второго рода можно получить, заменив каждую функцию Лежандра первого рода соответствующей функцией Лежандра второго рода. Это решение особенно важно, если $2n$ и $2m$ — целые числа, и $0 \leqslant m \leqslant |n+{}^1/_2|-{}^1/_2$ В этом случае функция Ламе первого рода является многочленом Ламе (если $2n$ четно) или алгебраической функцией Ламе (если $2n$ нечетно) В обоих случаях она может быть представлена конечным рядом по функциям Лежандра первого рода, и соответствующая функция Ламе второго рода может быть представлена в виде конечной комбинации функций Лежандра второго рода. Эти представления очень полезны при конструировании *внешних эллипсоидальных гармонических функций* (см. п. 15.1.1).

15.5.2. Функции Ламе с чисто мнимым периодом. Формулы преобразования. Так как $\operatorname{sn}^2 z$ имеет примитивный чисто мнимый период $2i\mathrm{K}'$, то примитивный период любой функции Ламе с мнимым периодом должен иметь вид $2ip\mathrm{K}'$, где $p=1, 2, \ldots$ Существование и свойства таких функций могут быть установлены тем же способом, что был применен в п. 15.5.1, путем сведения к некоторой задаче Штурма—Лиувилля, например, для промежутка $(\mathrm{K}, \mathrm{K}+i\mathrm{K}')$. Вместо этого мы выведем всю необходимую нам информацию из результатов п. 15.5.1 с помощью *мнимого преобразования* уравнения Ламе.

Положим в 15.2 (1)

$$z'=i(z-\mathrm{K}-i\mathrm{K}'), \qquad h'=n(n+1)-h \tag{29}$$

и используем табл. 7 п. 13.18 и табл. 11 п. 13.22. Получаем

$$[k\operatorname{sn}(z, k)]^2=\left[\frac{\operatorname{dn}(iz', k)}{\operatorname{cn}(iz', k)}\right]^2=[\operatorname{dn}(z', k')]^2=1-[k'\operatorname{sn}(z', k')]^2$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2\Lambda}{dz'^2}+\{h'-n(n+1)[k'\operatorname{sn}(z', k')]^2\}\Lambda=0. \tag{30}$$

Очевидно, что каждое решение уравнения (30) удовлетворяет 15.2(1), и *обратно*. Кроме того, решения уравнения (30), имеющие как функции от z' вещественный период, будучи рассматриваемы как функции от z, имеют чисто мнимый период. Из результатов п. 15.5.1 получаем следующую информацию.

Достаточно рассматривать функции Ламе с чисто мнимым периодом $2ip\mathrm{K}'$, $p=1, 2, \ldots$, которые являются четными или нечетными функциями от $z-\mathrm{K}=-i(z'-\mathrm{K}')$. Если четные функции имеют в точности pm нулей, когда $z=\mathrm{K}+it$ и t принадлежит промежутку $0\leqslant t<2p\mathrm{K}'$ (или любому полуоткрытому промежутку длины $2p\mathrm{K}'$) мы будем обозначать их $\mathrm{Ec}_n'^m(z, k^2)$. Соответствующие нечетные функции мы будем обозначать $\mathrm{Es}_n'^m(z, k^2)$. Собственные значения $h'=n(n+1)-h$ для $\mathrm{Ec}_n'^m$ и $\mathrm{Es}_n'^m$ мы будем обозначать соответственно $a_n'^m(k^2)$ и $b_n'^m(k^2)$.

Если $0<k<1$ и $n(n+1)$ вещественно, то для каждого $m=0, 1, 2, \ldots$ существует в точности одно $\mathrm{Ec}_n'^m$ и для каждого $m=1, 2, \ldots$ в точности одно $\mathrm{Es}_n'^m$. Эти функции имеют период $2i\mathrm{K}'$, если m четно, и $4i\mathrm{K}'$, если m нечетно. Эти функции и соответствующие им собственные значения h' можно выразить следующим образом:

$$\mathrm{Ec}_n'^m(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n^m(z', k'^2), \qquad \mathrm{Es}_n'^m(z, k^2)=\mathrm{Es}_n^m(z', k'^2), \tag{31}$$

$$a_n'^m(k^2)=a_n^m(k'^2), \qquad b_n'^m(k^2)=b_n^m(k'^2). \tag{32}$$

Два различных решения с периодами $2i\mathrm{K}'$ или $4i\mathrm{K}'$ принадлежат одному и тому же собственному значению h' (или h) тогда и только тогда, когда n — целое число и рассматриваемые функции являются трансцендентными функциями Ламе чисто мнимого периода, т. е. $m>|n+{}^1/_2|-{}^1/_2$.

Информацию относительно взаимного расположения и асимптотических свойств собственных значений можно получить с помощью соотношений (32) и (9)—(12), (27), (28).

Многочлены Ламе, являясь многочленами по s, c и d, обладают как вещественным, так и чисто мнимым периодом. Исследование их нулей приводит к тождествам

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Ec}_n^m(z, k^2) = \mathrm{Ec}'^{n-m}_n(z, k^2) = \mathrm{Ec}_n^{n-m}(z', k'^2),\\ &\mathrm{Es}_n^m(z, k^2) = \mathrm{Es}'^{n-m+1}_n(z, k^2) = \mathrm{Es}_n^{n-m+1}(z', k'^2), \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_n^m(k^2) + a'^{n-m}_n(k^2) = a_n^m(k^2) + a_n^{n-m}(k'^2) = n(n+1),\\ &b_n^m(k^2) + b'^{n-m+1}_n(k^2) = b_n^m(k^2) + b_n^{n-m+1}(k'^2) = n(n+1), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

которые справедливы при условии, что n — целое число, $m = 0, 1, \ldots$ $\ldots, |n+1/2| - 1/2$ и функции Ламе нормированы соответствующим образом (Erdélyi, 1941 a). В частности, при $k^2 = k'^2 = 1/2$ имеем

$$a_n^m(1/2) + a_n^{n-m}(1/2) = b_n^m(1/2) + b_n^{n-m+1}(1/2) = n(n+1), \tag{35}$$

$$a_{2n}^n(1/2) = n(2n+1), \quad b_{2n+1}^{n+1}(1/2) = (n+1)(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Похожие соотношения справедливы для *алгебраических функций Ламе* (Erdélyi, 1941 b)

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Ec}_n^{m+1/2}(z, k^2) = \mathrm{Ec}'^{n-m}_n(z, k^2) = \mathrm{Ec}_n^{n-m}(z', k'^2),\\ &\mathrm{Es}_n^{m+1/2}(z, k^2) = \mathrm{Es}'^{n-m}_n(z, k^2) = \mathrm{Es}_n^{n-m}(z', k'^2), \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$a_n^{m+1/2}(k^2) + a'^{n-m}_n(k^2) = a_n^{m+1/2}(k^2) + a_n^{n-m}(k'^2) = n(n+1), \tag{38}$$

$$a_n^{m+1/2}(1/2) + a_n^{n-m}(1/2) = n(n+1) \tag{39}$$

при условии, что $n - 1/2$ — целое число, $m = 0, \ldots, |n - 1/2|$ и функции Ламе нормированы соответствующим образом. Отметим, что соответствующие четные и нечетные алгебраические функции Ламе отвечают одному и тому же собственному значению и, следовательно, для этих функций $a = b$. Из (39) мы имеем также

$$a_{2m+1/2}^{m+1/2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2m + \frac{1}{2}\right)\left(2m + \frac{3}{2}\right), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Обсудим теперь *проблему сосуществования* для решений с периодами $2K$, $4K$, $2iK'$, $4iK'$ (см. Erdélyi, 1941 a). Мы знаем уже, что два решения с вещественными периодами сосуществуют (соответствуют одному собственному значению) тогда и только тогда, когда n — целое и рассматриваемые функции являются трансцендентными функциями Ламе с одним и тем же вещественным периодом. Аналогично два решения с чисто мнимым периодом существуют тогда и только тогда, когда n — целое число и рассматриваемые функции являются трансцендентными функциями Ламе с одним и тем же чисто мнимым периодом. Кроме того, в случае многочленов Ламе функции Ламе с вещественным периодом и функции Ламе с чисто мнимым периодом совпадают. Многочлены Ламе являются двояко-периодическими функциями Ламе, и можно показать, что они являются единственными двояко-периодическими решениями уравнения Ламе с периодами $4K$, $4iK'$. Анализ информации относительно взаимного положения собственных значений показывает, что две различные функции Ламе, одна из которых имеет вещественный период $2K$ или $4K$, а другая — чисто мнимый период $2iK'$ или $4iK'$, никогда не могут принадлежать одному и тому же значению h.

Суммируя сказанное выше, мы видим, что если $E_n(z)$ — функция Ламе с периодом $2K$, $4K$, $2iK'$ или $4iK'$ и n не является целым числом, то $E_n(z)$ имеет либо только вещественный, либо только чисто мнимый период и является единственным периодическим решением уравнения Ламе. С другой стороны, если n — целое, то $E_n(z)$ является либо многочленом Ламе и в этом случае двояко-периодично (в этом случае соответствующая функция Ламе второго рода не периодична), либо $E_n(z)$ — трансцендентная периодическая функция Ламе, сосуществующая с другой функцией Ламе, имеющей тот же самый период.

15.5.3. Интегральные уравнения для функций Ламе. Интегральные уравнения для функций Ламе были открыты Уиттекером (Whittaker; 1915 a, b) и изучены Айнсом (Ince; 1922, 1940 a, b), Эрдейи (Erdelyi; 1943) и др. Соответствующие интегральные уравнения для функций Гойна были изучены Лэмбом, Уэрдом. (Lambe and Ward; 1934) и Эрдейи (Erdelyi; 1942 b).

Пусть $N(\beta, \gamma)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \beta^2} - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\beta, k)]^2 N = \frac{\partial^2 N}{\partial \gamma^2} - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\gamma, k)]^2 N, \tag{41}$$

и пусть $\Lambda(\gamma)$ является решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{d\gamma^2} + \{h - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\gamma, k)]^2\}\Lambda = 0. \tag{42}$$

Тогда с помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d^2}{d\beta^2} + h - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\beta, k)]^2\right\} \int_a^b N(\beta, \gamma)\Lambda(\gamma)\, d\gamma = \\ = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \gamma^2} + \{h - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\gamma, k)]^2\} N\right)\Lambda(\gamma)\, d\gamma = \\ = \left[\frac{\partial N(\beta, \gamma)}{\partial \gamma}\Lambda(\gamma) - N(\beta, \gamma)\frac{d\Lambda}{d\gamma}\right]_a^b + \\ + \int_a^b N(\beta, \gamma)\left(\frac{d^2\Lambda}{d\gamma^2} + \{h - n(n+1)[k \operatorname{sn}(\gamma, k)^2]\}\Lambda\right) d\gamma.\end{aligned} \tag{43}$$

Отсюда следует, что если проинтегрированная часть $[\ldots]_a^b$ обращается в нуль, то $\int_a^b N(\beta, \gamma)\Lambda(\gamma)\, d\gamma$ является решением уравнения Ламе.

Пусть теперь $h = a_n^m$ или b_n^m, и пусть $\Lambda(\gamma) = E_n^m(\gamma)$ является решением с периодом 2K или 4K, соответствующим h; предположим также, что $N(\beta, \gamma)$ — решение уравнения (41), являющееся периодической функцией с периодом 4K как по β, так и по γ. Тогда из наших рассуждений следует, что

$$\int_{-2K}^{2K} N(\beta, \gamma) E_n^m(\gamma)\, d\gamma$$

является решением уравнения Ламе, имеет период 4K и соответствует тому же самому собственному значению, что и $E_n^m(\gamma)$. Если n не является целым числом или если n — целое и $m \leqslant n$, так что $E_n^m(\gamma)$ — многочлен Ламе, то $E_n^m(\gamma)$ — единственное периодическое решение уравнения (42), и мы получаем *интегральное уравнение* для E_n^m,

$$\int\limits_{-2K}^{2K} N(\beta,\gamma)\,E_n^m(\gamma)\,d\gamma=\lambda_n^m E_n^m(\beta), \tag{44}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$
$$\text{или } n \text{ не целое, } m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Если n — неотрицательное целое число и $m>n$, то уравнение Ламе имеет два различных периодических решения и интеграл должен быть линейной комбинацией $\mathrm{Ec}_n^m(\beta)$ и $\mathrm{Es}_n^m(\beta)$. В этом случае мы получаем интегральные уравнения для двух различных периодических решений, которые, вообще говоря, не должны совпадать с Ec_n^m и Es_n^m. Однако можно получить интегральные уравнения для Ec_n^m (Es_n^m), выбирая в качестве $N(\beta,\gamma)$ четную (нечетную) функцию от $\beta-\mathrm{K}$.

Построение соответствующего ядра $N(\beta,\gamma)$ облегчается с помощью следующего замечания: если ввести новые независимые переменные θ, φ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\cos\varphi &= k\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma,\\ \sin\theta\sin\varphi &= i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma,\\ \cos\theta &= \frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

то из 15 1 (16) и 15.1 (18) видно, что дифференциальное уравнение в частных производных (41) превратится в дифференциальное уравнение в частных производных для сферических гармоник, поэтому $N(\beta,\gamma)$ является некоторым решением последнего уравнения, выраженным в сферо-конических координатах. Если n — целое число и $N(\beta,\gamma)$ — (регулярная) сферическая гармоника и, следовательно (в соответствии с п. 15.1 2), также и (регулярная) эллипсоидальная гармоника, то все собственные функции, соответствующие ненулевым значениям λ_n^m ядра N, являются многочленами Ламе.

Перечислим некоторые простые ядра и соответствующие им собственные функции (определенные путем рассмотрения четности ядра как функции от β и $\beta-\mathrm{K}$):

$$N=P_n(\cos\theta)=P_n\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right),\qquad (\mathrm{Ec}_n^{2m}), \tag{46}$$

$$N=P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi=k\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\,P_n'\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right),\qquad (\mathrm{Ec}_n^{2m+1}), \tag{47}$$

$$N=P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi=i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\,P_n'\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right),\qquad (\mathrm{Es}_n^{2m}), \tag{48}$$

$$N=P_n^2(\cos\theta)\sin(2\varphi)=$$
$$=2i\frac{k^2}{k'}\operatorname{sn}\beta\ \mathrm{n}\gamma\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\,P_n''\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right),\qquad (\mathrm{Es}_n^{2m+1}). \tag{49}$$

Если n — целое число, то собственные функции ядер (46) — (49) являются многочленами Ламе: ядра, соответствующие трансцендентным функциям Ламе, выражаются через Q_n. Следует отметить, что известны и другие простые ядра, выражающиеся через функции Лежандра от $k\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma$ или $i(k/k')\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma$.

15.5.4. Вырожденные случаи. Если $k=0$, то уравнение Ламе принимает вид

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2}+h\Lambda=0. \tag{50}$$

Мы имеем $K=\pi/2$, и решение уравнения (50), удовлетворяющее условиям (3) — (6), имеют вид

$$\mathrm{Ec}_n^m(z,\ 0)=\cos[m(z-\pi/2)],\quad \mathrm{Es}_n^m(z,\ 0)=\sin[m(z-\pi/2)]. \tag{51}$$

Оба эти решения соответствуют собственному значению

$$a_n^m(0)=b_n^m(0)=m^2. \tag{52}$$

Если $k=1$, то из 13.18 (4) следует, что уравнение Ламе принимает вид

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2}+[h-n(n+1)(\operatorname{th} z)^2]\,\Lambda=0 \tag{53}$$

и $K=\infty$, $K'=\pi/2$. В этом случае Айнс (Ince; 1940 a) показал, что

$$\left.\begin{aligned} a_n^{2m}(1)&=b_n^{2m+1}(1)=(4m+1)\,n-4m^2,\\ a_n^{2m+1}(1)&=b_n^{2m+2}(1)=(4m+3)\,n-(2m+1)^2,\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ec}_n^{2m}(z,\ 1)&=\mathrm{Es}_n^{2m+1}(z,\ 1)=P_n^{n-2m}(\operatorname{th} z),\\ \mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z,\ 1)&=\mathrm{Es}_n^{2m+2}(z,\ 1)=P_n^{n-2m-1}(\operatorname{th} z).\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Наконец, пусть $n\to\infty$ и одновременно с этим $k\to 0$ таким образом, что

$$n(n+1)\,k^2\to -4\theta. \tag{56}$$

В этом случае $\operatorname{sn}(z,\ 0)=\sin z$ и, в силу 15.2 (4), $\zeta=1/2-z$. Уравнение 15.2 (5) принимает форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2}+[h+4\theta(\cos\zeta)^2]\,\Lambda=0, \tag{57}$$

являющуюся одной из форм *уравнения Матье*. Функции Ламе с вещественным периодом переходят при этом в функции Матье. Чисто мнимый период K' в этом случае равен бесконечности.

15.6. Функции Ламе — Вангерина

Мы видели в п. 15.1.3, что некоторые из задач теории потенциала, сформулированные во введенной Вангерином системе координат, приводят к отысканию решений, которые конечны в двух особых точках уравнения Ламе. Покажем сейчас, что такие решения могут существовать лишь для некоторых собственных значений h: соответствующие собственные решения будем называть *конечными функциями Ламе* или *функциями Ламе — Вангерина* для того, чтобы отличить их от периодических функций Ламе, изученных в предыдущих пунктах. Относительно функций Ламе—Вангерина известно сравнительно мало, и основной материал, который сейчас будет изложен, содержится в заметке (1948 a) и в неопубликованных работах Эрдейи.

Функция Ламе—Вангерина является решением уравнения Ламе 15.2 (1) и обладает тем свойством, что $(\operatorname{sn} z)^{1/2}\Lambda(z)$ ограничено в области, содержащей по крайней мере два полюса $\operatorname{sn} z$. Точнее говоря, мы будем обозначать через $F_n^m(z,\ k^2)$ функцию Ламе—Вангерина, для которой $(\operatorname{sn} z)^{1/2}F_n^m(z,\ k^2)$ ограничено и имеет в точности m нулей в открытом промежутке $(iK',\ 2K+iK')$;

отсюда следует, что $(\operatorname{sn} z)^{1/2} F_n^m(z, k^2)$ ограничено также в области, содержащей этот промежуток, а фактически в бесконечной полосе, содержащей линию $z = iK' + 2Kt, -\infty < t < \infty$. Собственные значения h, соответствующие F_n^m, мы будем обозначать $c_n^m(k^2)$.

Будем предполагать, что k и n заданы и что для вещественных t выражение

$$n(n+1)[kK \operatorname{sn}(iK' + 2Kt, k^2)]^2$$

вещественно, так что дифференциальное уравнение Ламе 15.2 (1) после перехода к независимому переменному t является дифференциальным уравнением с вещественными коэффициентами. Не теряя общности, можно считать, что $\operatorname{Re} n \geqslant -1/2$. Наше предположение заведомо выполнено, если $0 < k < 1$ и $n(n+1)$ — вещественное число, но из 15.1 (33) видно, что могут встретиться также и случаи комплексных значений k. Из 13.23 (13) и табл. 11 в п. 13.22 легко получить, что функции, входящие в 15.1 (33), удовлетворяют нашему условию вещественности.

Если $F(z)$ — функция Ламе—Вангерина, то такими же будут и функции

$$F(2K + 2iK' - z) \quad \text{и} \quad F(z) \pm F(2K + 2iK' - z).$$

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением функций Ламе—Вангерина, являющихся четными или нечетными функциями от $z - K - iK'$. Если $F_n^m(z, k^2)$ — такая функция, то она будет четной или нечетной функцией от $z - K - iK'$ в зависимости от того, четно или нечетно m. Мы получаем, таким образом, следующие краевые условия:

$$(\operatorname{sn} z)^{1/2} \Lambda(z) \text{ ограничено при } z = iK', \ \Lambda'(K + iK') = 0 \quad \text{для} \quad \Lambda = F_n^{2m}(z), \tag{1}$$

$$(\operatorname{sn} z)^{1/2} \Lambda(z) \text{ ограничено при } z = iK', \ \Lambda(K + iK') = 0 \quad \text{для} \quad \Lambda = F_n^{2m+1}. \tag{2}$$

Так как $z = iK'$ — особая точка уравнения Ламе, то существование и свойства функций Ламе — Вангерина связаны с теорией *сингулярных* уравнений Штурма—Лиувилля. Однако характер особенностей в точке $z = iK'$ и краевые условия позволяют нам использовать простейшую форму теории сингулярных уравнений Штурма—Лиувилля, сводящуюся, по сути дела, к теории регулярных уравнений Штурма—Лиувилля. Из работы Мак-Кри и Невиня (McCrea, Newing; 1933) вытекает, что для каждого $m = 0, 1, \ldots$ существует в точности одна функция Ламе—Вангерина и что собственные значения $K^2 h$, соответствующие этой функции, образуют неограниченную возрастающую последовательность

$$K^2 c_n^0 \leqslant K^2 c_n^1 \leqslant K^2 c_n^2 \leqslant \ldots, \qquad K^2 c_n^m \to \infty \text{ при } m \to \infty. \tag{3}$$

Если $\operatorname{Re} n > -1/2$ или $n = -1/2$, то никакие две функции Ламе—Вангерина не принадлежат одному и тому же собственному значению, и мы имеем строго возрастающую последовательность

$$K^2 c_n^0 < K^2 c_n^1 < K^2 c_n^2 < \ldots, \qquad \operatorname{Re} n > -1/2 \text{ или } n = -1/2. \tag{4}$$

Если $0 < k < 1$, так что K вещественно, то c_n^m также вещественны, и мы имеем

$$c_n^0 < c_n^1 < c_n^2 < \ldots, \quad c_n^m \to \infty, \quad 0 < k < 1, \quad n \geqslant -1/2. \tag{5}$$

Функции Ламе—Вангерина могут быть представлены разложениями вида 15.3 (10). Различные разложения этого вида описываются P-символами, данными в п. 15.4. Мы укажем здесь ряды по убывающим степеням s, которые сходятся при $0 < k < 1$.

Любая функция Ламе—Вангерина принадлежит в точке $s=\infty$ показателю $n/2+1/2$ в 15.4 (2), и 15.3 (10) дает разложение этой функции по степеням s^{-2}, умноженное на $s^{-n-1-2\rho-2\sigma}c^{2\rho}d^{2\sigma}$, где ρ и σ принимают значения 0 или 1/2. Очевидно, что для F_n^{2m} имеем $\sigma=0$, а для F_n^{2m+1} имеем $\sigma=1/2$. Мы получаем, таким образом, степенные ряды

$$F_n^{2m}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r s^{-n-2r-1}=c\sum_{r=0}^{\infty}C_r s^{-n-2r-2}, \tag{6}$$

$$F_n^{2m+1}(z)=d\sum_{r=0}^{\infty}A_r s^{-n-2r-2}=cd\sum_{r=0}^{\infty}D_r s^{-n-2r-3}. \tag{7}$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов имеют вид ($r=1, 2, 3, \ldots$):

$$\left.\begin{aligned}&[h-(n+1)^2(1+k^2)]\,A_0+2(2n+3)\,k^2A_1=0,\\ &(n+2r-1)(n+2r)\,A_{r-1}+[h-(n+2r+1)^2(1+k^2)]\,A_r+\\ &\qquad+2(r+1)(2n+2r+3)\,k^2A_{r+1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&[h-(n+2)^2-(n+1)^2k^2]\,B_0+2(2n+3)\,k^2B_1=0,\\ &(n+2r)(n+2r+1)\,B_{r-1}+[h-(n+2r+2)^2-(n+2r+1)^2k^2]\,B_r+\\ &\qquad+2(r+1)(2n+2r+3)\,k^2B_{r+1}=0,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&[h-(n+1)^2-(n+2)^2k^2]\,C_0+2(2n+3)\,k^2C_1=0,\\ &(n+2r)(n+2r+1)\,C_{r-1}+[h-(n+2r+1)^2-(n+2r+2)^2k^2]\,C_r+\\ &\qquad+2(r+1)(2n+2r+3)\,k^2C_{r+1}=0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&[h-(n+2)^2(1+k^2)]\,D_0+2(2n+3)\,k^2D_1=0,\\ &(n+2r+1)(n+2r+2)\,D_{r-1}+[h-(n+2r+2)^2(1+k^2)]\,D_r+\\ &\qquad+2(r+1)(2n+2r+3)\,k^2D_{r+1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если разделить каждое из этих рекуррентных соотношений на $4r^2$, оно примет вид 15.3 (13). Во всех четырех случаях $\alpha=1$, $\beta=-(1+k^2)$, $\gamma=k^2$ и корнями квадратного уравнения 15.3 (15) являются $t_1=1$, $t_2=k^{-2}$. Если h не является собственным значением, то отношение двух последующих коэффициентов стремится к k^{-2} и ряды (6), (7), где $s^{-2}=k^2$, не сходятся при $z=K+iK'$. Если h равно одному из характеристических значений, то отношение двух последующих коэффициентов стремится к 1, и ряд сходится в области $|s|>1$, содержащей всю прямую $\operatorname{Im} z=K'$.

Ряды (6), (7) неудобны, если $|z|=1$, т. е. в случае III п. 15.1.3. В этом случае удобнее применять аналогичные ряды по убывающим степеням c.

Более удобные для численных расчетов ряды могут быть получены с помощью P-символов 15.4 (4), (5), (6). При $z=iK'$, $c/s=-i$ функции Ламе—Вангерина принадлежат в точке $c/s=-i$ показателю $\frac{n+1}{2}$ (см. 15.4 (6)). Из 15.3 (10) вытекает, что разложения имеют вид рядов по степеням $\frac{c+is}{c-is}=(c+is)^2$, умноженных на

$$\left(\frac{c+is}{c-is}\right)^{n/2+1/2}\left(\frac{c-ik's}{c-is}\right)^{\rho}\left(\frac{c+ik's}{c-is}\right)^{\sigma},$$

где ρ и σ принимают значения 0 или 1/2. Ясно, что для четных m надо брать $\rho=\sigma=0$, а для нечетных m $\rho=\sigma=1/2$. Кроме того, вводя ζ, как в 15.5 (13), имеем

$$\operatorname{sn} z=\cos\zeta,\quad \operatorname{cn} z=\sin\zeta,\quad c\pm is=\pm ie^{\mp i\zeta}. \tag{12}$$

Мы получаем, таким образом, иные разложения:

$$F_n^{2m}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \exp[-(n+2r+1)\zeta i], \tag{13}$$

$$F_n^{2m+1}(z) = \operatorname{dn} z \sum_{r=0}^{\infty} B_r \exp[-(n+2r+2)\zeta i], \tag{14}$$

коэффициенты которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &[H-(n+1)^2(2-k^2)]A_0+(2n+3)k^2A_1=0,\\ &(2r-1)(n+r)k^2A_{r-1}+[H-(n+1+2r)^2(2-k^2)]A_r+\\ &\qquad+(r+1)(2n+2r+3)k^2A_{r+1}=0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &[H-(n+2)^2(2-k^2)]B_0+(2n+3)k^2B_1=0,\\ &(2r+1)(n+r+1)k^2B_{r-1}+[H-(n+2r+2)^2(2-k^2)]B_r+\\ &\qquad+(r+1)(2n+2r+3)k^2B_{r+1}=0,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $H=2h-n(n+1)k^2$ и $r=1, 2, 3, \ldots$

Если разделить эти рекуррентные соотношения на $2r^2$, они примут вид 15.3 (13), где $\alpha=\gamma=k^2$, $\beta=-2(2-k^2)$, и корнями квадратного уравнения 15.3 (15) являются

$$t_1=\frac{1-k'}{1+k'}, \qquad t_2=\frac{1+k'}{1-k'}.$$

Если $\operatorname{Re} k'>0$, то $|t_1|<|t_2|$. Рассмотрим вопрос о сходимости рядов (13), (14) при $0<k,\ k'<1$. Если $z=iK'+u$, $0\leqslant u\leqslant K$, то из табл. 7 п. 13.18 видно, что

$$c+is=\frac{ik \operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$$

и, следовательно, $|c+is|^2\leqslant\frac{1-k'}{1+k'}$. Если h равно одному из характеристических значений, то отношение двух последовательных коэффициентов в (13) или (14) стремится к $t_1=\frac{1-k'}{1+k'}$, а потому ряды (13) и (14) сходятся на прямой $\operatorname{Im} z=K'$ по меньшей мере столь же хорошо, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2$. Отметим, что

$$e^{-i\zeta}=-i(c+is)=\frac{k \operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$$

вещественно на прямой $\operatorname{Im} z=K'$.

Другие разложения в степенные ряды, равно как и ряды по показательным функциям и разложения по функциям Лежандра, могут быть получены способом, указанным в пп 15 3 и 15.4.

Для функций Ламе—Вангерина можно получить много интегральных уравнений тем же способом, что и для периодических функций Ламе. Как и в п. 15 5 3, обозначим через $N(\beta, \gamma)$ одно из решений дифференциального уравнения в частных производных 15.5 (41) и рассмотрим интеграл

$$\int_{iK'}^{2K+iK'} N(\beta, \gamma) F_n^m(\gamma)\, d\gamma.$$

Вычисление, намеченное в 15.5 (43), показывает, что если ядро выбрано так, что

$$N(\beta, \gamma)\frac{dF_n^m(\gamma)}{d\gamma} \to 0, \qquad \frac{\partial N(\beta, \gamma)}{\partial\gamma} F_n^m(\gamma) \to 0,$$

когда $\gamma \to iK'$ или $\gamma \to 2K+iK'$, то этот интеграл удовлетворяет уравнению Ламе при $h=c_n^m$. Если, кроме того, $N(\beta, \gamma)$ для всех γ в области интегрирования принадлежит при $\beta=iK'$ и $\beta=2K+iK'$ к показателю $\frac{n+1}{2}$, то указанный выше интеграл отличается от функции Ламе—Вангерина лишь постоянным множителем, и мы имеем интегральное уравнение

$$\int_{iK'}^{2K+iK'} N(\beta, \gamma) F_n^m(\gamma)\, d\gamma = \lambda_n^m F_n^m(\beta). \tag{17}$$

Построение соответствующего ядра $N(\beta, \gamma)$ основано на замечании, что замена переменных 15.5 (45) преобразует 15.5 (41) в дифференциальное уравнение для сферических гармоник. Надо заметить (см. рис. 8—10 в п. 13.25), что на отрезке $(iK', 2K+iK')$ s положительно, c лежит на отрицательной мнимой полуоси и d вещественно, так что в 15.5 (45)

$$\cos\theta \text{ вещественно}, \quad \sin\theta\cos\varphi > 0, \quad i\sin\theta\sin\varphi > 0. \tag{18}$$

Но для каждой достаточно регулярной функции f и каждого постоянного α функция

$$f(x\cos\alpha + y\sin\alpha - iz)$$

является решением уравнения Лапласа (в декартовых координатах x, y, z). Если взять $f(u)=u^{-n-1}$ и выбрать α так, чтобы выражение в скобках не обращалось в нуль, когда β и γ пробегают промежуток $(iK', 2K+iK')$, то

$$(\sin\theta\cos\varphi\cos\alpha + \sin\theta\sin\varphi\sin\alpha - i\cos\theta)^{-n-1} =$$

$$= \left(k\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\cos\alpha + i\frac{k}{k'}\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\sin\alpha - \frac{i}{k'}\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\right)^{-n-1} \tag{19}$$

является сферической гармоникой. Кроме того, N и $\frac{\partial N}{\partial\gamma} \to 0$, когда β или γ приближаются к одному из концов промежутка, так что (19) представляет соответствующее ядро. В частности, при $\alpha = \pm\pi/2$ получаем интегральное уравнение

$$\int_{iK'}^{2K+iK'} (\pm\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma - k\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma)^{-n-1} F_n^m(\gamma)\, d\gamma = \lambda_n^m F_n^m(\beta). \tag{20}$$

Можно также построить интегральные уравнения на промежутке $(iK', K+iK')$, которым удовлетворяют лишь четные или нечетные функции Ламе—Вангерина. Соответствующие ядра являются суммами или разностями двух ядер в (20).

15.7. Эллипсоидальные и сферо-конические гармоники

Опишем кратко приложение полученных выше результатов для построения эллипсоидальных и сферо-конических гармоник.

Введем вместо прямоугольных координат x, y, z *эллипсоидальные координаты* α, β, γ. Формулы преобразования даны в 15.1 (8), а области изменения α, β, γ описаны в строках, следующих за формулой 15.1 (9). Мы будем называть $B(\beta)\,C(\gamma)$ *эллипсоидальной поверхностной гармоникой*, если B и C удовлетворяют уравнению Ламе и BC непрерывно и имеет непрерывный градиент на всем эллипсоиде $\alpha=\text{const}$. Мы будем называть $A(\alpha)\,B(\beta)\,C(\gamma)$ *внутренней эллипсоидальной гармоникой*, если A, B, C удовлетворяют уравнению Ламе и ABC непрерывно и имеет непрерывную производную внутри эллипсоида $\alpha=\text{const}$. Наконец, мы будем называть $A(\alpha)\,B(\beta)\,C(\gamma)$ *внешней эллипсоидальной гармоникой*, если выполнены условия, подобные указанным выше, вне эллипсоида и $A(i\mathrm{K}')=0$.

Мы видели в п. 15.1.1, что для поверхностной эллипсоидальной гармоники должно выполняться равенство $B(\theta)=C(\theta)$ и что эти функции должны быть двояко-периодическими функциями Ламе с периодами $4K$ и $4i\mathrm{K}'$. В силу п. 15.5.2 единственными функциями Ламе с периодами $4K$ и $4i\mathrm{K}'$ являются многочлены Ламе, и для них n должно быть целым числом, которое можно выбрать неотрицательным, а $m\leqslant n$. Таким образом, мы получаем $2n+1$ *эллипсоидальных поверхностных гармоник степени* n:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)=\mathrm{Ec}_n^m(\beta)\,\mathrm{Ec}_n^m(\gamma), \quad n=0,1,2,\ldots,\quad m=0,1,\ldots,n,\\ &\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)=\mathrm{Es}_n^m(\beta)\,\mathrm{Es}_n^m(\gamma), \quad n=1,2,3,\ldots,\quad m=1,2,\ldots,n.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

В переменных θ, φ из 15.5 (45) эти функции являются сферическими поверхностными гармониками, и число $2n+1$ линейно независимых поверхностных гармоник может быть получено с помощью этой связи.

Эллипсоидальные поверхностные гармоники образуют ортогональную систему, т. е.

$$\iint_{\mathscr{E}}\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Sc}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\,[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,d\beta\,d\gamma=$$
$$=\iint_{\mathscr{E}}\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Ss}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\,[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,d\beta\,d\gamma=0,\qquad(2)$$

за исключением случаев $n=\nu$ и $m=\mu$, и

$$\iint_{\mathscr{E}}\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Ss}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\,[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,d\beta\,d\gamma=0.\qquad(3)$$

Здесь $\mathscr{E}$ обозначает поверхность эллипсоида, β изменяется от K до $\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, а γ — от 0 до $4\mathrm{K}$. Равенство (3) вытекает из того, что функции Sc и Ss имеют различную четность при $\gamma=\mathrm{K}$. Для того чтобы доказать равенство (2) при $n\neq\nu$, вспомним, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_n=n(n+1)\,[(k\,\mathrm{sn}\,\beta)^2-(k\,\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,\mathrm{S}_n,$$

где S_n равно $\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)$ или $\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)$, и, следовательно,

$$\mathrm{S}_\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_n\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_\nu=$$
$$=[n(n-1)-\nu(\nu-1)]\,k^2\,[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,\mathrm{S}_n\mathrm{S}_\nu.$$

Интегрируя по $\mathscr{E}$, имеем

$$[n(n-1)-\nu(\nu-1)]\iint_{\mathscr{E}}[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\,\mathrm{S}_n\mathrm{S}_\nu\,d\beta\,d\gamma=0,$$

и, следовательно, (2) выполняется при $n\neq\nu$. При $n=\nu$ и $m\neq\mu$ заметим, что Ec_n^m и Ec_n^μ (и аналогично Es_n^m и Es_n^μ) являются двумя собственными функциями одной и той же задачи Штурма—Лиувилля 15.5 (1) (или 15.5 (2)) и что в силу 15.5 (9) (и 15.5 (10)) они принадлежат различным собственным значениям Равенство (2) при $n=\nu$, $m\neq\mu$ вытекает из свойств ортогональности функций Штурма—Лиувилля

Свойство ортогональности эллипсоидальных поверхностных гармоник позволяет определить коэффициенты разложений в ряды по эллипсоидальным поверхностным гармоникам для любой функции, заданной на эллипсоиде $\mathcal{E}$. Справедливость этих разложений может быть выведена из связей между эллипсоидальными и сферическими поверхностными гармониками

Для *внутренних эллипсоидальных гармоник* мы видели в п. 15.1.1, что $A(\theta)=B(\theta)=C(\theta)$, так что внутренние эллипсоидальные гармоники имеют одну из следующих форм

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Hc}_n^m(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{Ec}_n^m(\alpha)\,\mathrm{Ec}_n^m(\beta)\,\mathrm{Ec}_n^m(\gamma),\\ &\qquad\qquad n=0,1,2,\ldots,\quad m=0,1,2,\ldots,n,\\ &\mathrm{Hs}_n^m(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{Es}_n^m(\alpha)\,\mathrm{Es}_n^m(\beta)\,\mathrm{Es}_n^m(\gamma),\\ &\qquad\qquad n=1,2,3,\ldots,\quad m=1,2,3,\ldots,n.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Встречающиеся здесь многочлены Ламе могут быть записаны в виде произведения $s^\rho c^\sigma d^\tau$ и многочлена степени $\frac{1}{2}(n-\rho-\sigma-\tau)$ от s^2. Следовательно, Hc_n^m и Hs_n^m являются многочленами степени n от декартовых координат x, y, z (гармоническими многочленами).

Уиттекер (Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 23 62) нашел изящное интегральное представление для внутренних эллипсоидальных гармоник

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{4K} P_n(w)\,\mathrm{Ec}_n^m(\tau)\,d\tau=\lambda\,\mathrm{Hc}_n^m(\alpha,\beta,\gamma),\\ \int_0^{4K} P_n(w)\,\mathrm{Es}_n^m(\tau)\,d\tau=\lambda\,\mathrm{Hs}_n^m(\alpha,\beta,\gamma),\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

где

$$w=\frac{k'x\,\mathrm{sn}\,\tau+y\,\mathrm{cn}\,\tau-iz\,\mathrm{dn}\,\tau}{k'(a^2-c^2)^{1/2}}=k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\tau-$$
$$-\frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\tau+\frac{1}{k'^2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\tau\tag{6}$$

является сферическим расстоянием двух точек единичной сферы, декартовы координаты которых равны

$$\left(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta,\; i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta,\; \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\right)\tag{7}$$

и

$$\left(k\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\tau,\; i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\tau,\; \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\tau\right).\tag{8}$$

Чтобы доказать формулы (5), заметим, что $P_n(w)$ является решением уравнения Лапласа, равно как и интегралы в левой части равенства (5). Кроме того, эти интегралы являются многочленами от $\mathrm{sn}\,\alpha$, $\mathrm{sn}\,\beta$, $\mathrm{sn}\,\gamma$, $\mathrm{cn}\,\alpha$, ... , $\mathrm{dn}\,\gamma$ Наконец, $P_n(w)$, как функция от точки (8), является поверхностной сферической гармоникой степени n, и в силу 15 5 (44) интегралы должны быть кратны $\mathrm{Ec}_n^m(\gamma)$, $\mathrm{Es}_n^m(\gamma)$ Так как α, β, γ входят в w симметрично, то равенство (5) доказано.

Внешние эллипсоидальные гармоники отличаются от (4) тем, что $\mathrm{Ec}_n^m(\alpha)$, $\mathrm{Es}_n^m(\alpha)$ заменяются соответствующими функциями Ламе второго рода (см конец п. 15 5.1) Такие гармоники можно также выразить с помощью интегралов

$$\int_0^{4K} Q_n(w)\,\mathrm{Ec}_n^m(\tau)\,d\tau, \qquad \int_0^{4K} Q_n(w)\,\mathrm{Es}_n^m(\tau)\,d\tau,$$

где Q_n—функции Лежандра второго рода и w задается формулой (6)

В сферо конических координатах 15 1 (16) мы имеем поверхностные гармоники (1), которые, если β и γ—сферо-конические координаты, являются сферическими поверхностными гармониками. Внутренние и внешние сфероконические гармоники имеют соответственно вид

$$r^n\,\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma), \qquad r^n\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma) \quad \text{(внутренние)},$$
$$r^{-n-1}\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma), \qquad r^{-n-1}\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma) \quad \text{(внешние)},$$

где n—целое неотрицательное число и $m < n$.

15.8. Гармоники, связанные с циклидами вращения

Для того чтобы показать приложение функции Ламе—Вангерина для построения гармонических функций, связанных с конфокальными системами циклид вращения, изучим более детально случай I п 15 1 3 т е случаи конфокальной системы циклид вращения с четырьмя (вещественными) фокусами на оси вращения В частности, построим гармонические функции, регулярные внутри поверхностей $u=\mathrm{const}>0$

Для того чтобы свести дифференциальное уравнение для f к нормальной форме, в этом случае целесообразно ввести криволинейные координаты u, v с помощью преобразования

$$z+i\rho=s=\mathrm{sn}\,(u+iv,\ k); \tag{1}$$

15.1 (29) показывает, что разделение переменных приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2U}{du^2}-(1+k)^2\left\{h-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1-k}{1+k}\,\mathrm{sn}\left(i(1+k)u,\frac{1-k}{1+k}\right)\right]^2\right\}U=0,\\ &\frac{d^2V}{dv^2}+(1+k)^2\left\{h-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1-k}{1+k}\,\mathrm{sn}\left((1+k)(v-iK),\frac{1-k}{1+k}\right)\right]^2\right\}V=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В п 15.1.3 было показано, что граничные условия заключаются в том, что $\rho^{-1/2}V$ должно оставаться конечным как при $v=0$ так и при $v=K'$ (где второе уравнение (2) имеет особенность) и что $\rho^{-1/2}U$ должно оставаться конечным при $u=K$ (где имеет особенность первое уравнение)

Но уравнение (2) имеет вид уравнения Ламе, и искомое решение может быть получено способом, указанным в п 15 6 Этот метод удовлетворителен, если k близко к 1 (когда два из фокусов конфокальной системы близки к двум другим). Для меньших значений k удобнее иметь дело с уравнением Ламе с модулем k, чем с модулем $\dfrac{1-k}{1+k}$, как в (2). Этого можно достичь, используя криволинейные координаты u, v, отличающиеся от введенных в (1).

Комбинируя преобразование B из табл. 11 п. 13.22 с преобразованием Ландена в 13.23 (13), мы видим, что

$$\operatorname{sn}(u, k) = -i \operatorname{sc}(iu, k') = -\frac{2i}{1+k} \frac{\operatorname{sn}(\dot{u}, \dot{k})}{\operatorname{cn}(\dot{u}, \dot{k}) + \operatorname{dn}(\dot{u}, \dot{k})},$$

где

$$\dot{u} = i(1+k)u, \qquad \dot{k} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Это подсказывает ввести криволинейные координаты u, v с помощью равенств

$$z + i\rho = \frac{iak's}{c+d} = ia\frac{d-c}{k's} = f(u+iv), \tag{3}$$

где

$$s = \operatorname{sn}(u+iv, k), \quad c = \operatorname{cn}(u+iv, k), \quad d = \operatorname{dn}(u+iv, k) \tag{4}$$

и фокусы

$$z = \pm a\left[\frac{1-k}{1+k}\right]^{1/2}, \ \pm a\left[\frac{1+k}{1-k}\right]^{1/2}$$

конфокальной системы определяют $a > 0$ и k, $0 < k < 1$. Начиная отсюда, мы будем обозначать через u и v криволинейные координаты, введенные в (3), и применять сокращенные обозначения 15.1 (27).

С помощью формул п. 13.17 получаем вещественную форму преобразования (3)

$$z = \frac{iak's_2}{c_1d_2 + c_2d_1}, \qquad \rho = \frac{ak's_1}{c_1d_2 + c_2d_1}, \tag{5}$$

и также

$$F(u, v) = \frac{|f'(u+iv)|^2}{\rho^2} = \frac{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}{s_1^2} =$$

$$= \frac{1}{s_1^2} - k^2 s_2^2 = [k \operatorname{sn}(u + iK', k)]^2 - [k \operatorname{sn}(iv, k)]^2. \tag{6}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения для U и V имеют вид

$$\frac{d^2U}{du^2} + \left\{h - \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)[k \operatorname{sn}(u + iK', k)]^2\right\} U = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{d^2V}{dv^2} + \left\{h - \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)[k \operatorname{sn}(iv, k)]^2\right\} V = 0. \tag{8}$$

Преобразования (3) отображают прямоугольник с вершинами $\pm iK'$, $2K \pm iK'$ на (u, v) плоскости на полуплоскость $\rho > 0$. На рис. 15 соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами. Прямая $v = v_0 > 0$ отображается на часть бициркулярной кривой четвертого порядка, фокусы которой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ лежат в точках

$$z = -a\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \qquad z = -a\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}, \qquad \rho = 0.$$

Мы построим гармоническую функцию, регулярную внутри этой бициркулярной кривой четвертого порядка. Условие, что $\rho^{-1/2}UV$ остается ограниченным на оси вращения внутри $v = v_0$, влечет за собой условие, что $\sqrt{\operatorname{sn}(u + iK', k)}\, U(u)$ остается ограниченным на промежутке $(0, 2K)$, а $\sqrt{\operatorname{sn}(iv, k)}\, V(v)$ остается ограниченным на промежутке (v_0, K').

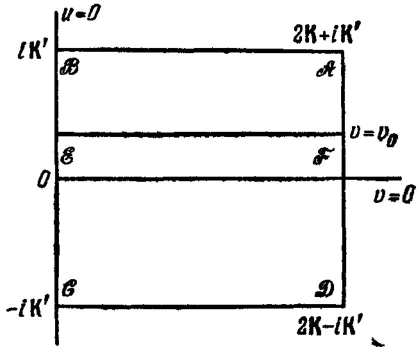
Но дифференциальное уравнение (7) является уравнением Ламе при $n=m-1/2$ и $z=u+iK'$. Решения, для которых $\sqrt{\operatorname{sn} z}\, U(u)$ ограничено при $z=iK'$ и $z=2K+iK'$, существуют тогда и только тогда, когда $h=c^r_{m-1/2}(k^2)$ и единственным таким решением является

$$U(u)=F^r_{m-1/2}(u+iK',\ k^2),\qquad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

В уравнении (8) мы имеем $h=c^r_{m-1/2}(k^2)$, так что одним из решений этого уравнения является

$$V(v)=F^r_{m-1/2}(iv,\ k^2).$$

Кроме того, это решение обладает тем свойством, что $\sqrt{\operatorname{sn}(iv,\ k)}\, V(v)$ ограничено при $v=K'$ и определяется этим свойством с точностью до постоянного множителя.



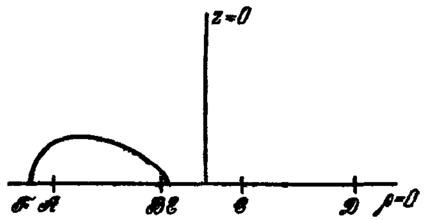


Рис. 15. Отображение (5).

Равенство 15.1 (24) показывает, что единственными нормальными решениями уравнения Лапласа в криволинейных координатах, определенных формулой (3), являются

$$W_{m,r}=\left(\frac{c_1d_2+c_2d_1}{s_1}\right)^{1/2} F^r_{m-1/2}(u+iK',\ k^2)\, F^r_{m-1/2}(iv,\ k^2)\, e^{\pm im\varphi},$$
$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{9}$$

Другие задачи теории потенциала в координатах конфокальных циклид вращения могут быть рассмотрены аналогичным образом. Следует отметить, что ни одна из граничных задач, рассмотренных в п. 15.1.3, а на самом деле ни одна из известных граничных задач во введенных Вангерином координатах, не приводит к алгебраическим функциям Ламе (хотя такие функции и существуют при некоторых значениях h, так как $n+1/2$ — целое число). За исключением гармоник, связанных с плоским кольцом, которые были изучены Пулем (Poole; 1929, 1930) и, как показано им, приводят к периодическим функциям Ламе, все другие граничные задачи п. 15.1.3 приводят к конечным функциям Ламе, т. е. к функциям Ламе—Вангерина.

ГЛАВА 16

ФУНКЦИИ МАТЬЕ, СФЕРОИДАЛЬНЫЕ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

16.1. Введение

В этой главе мы изучим функции, которые возникают при решении волнового уравнения $\Delta W + k^2 W = 0$ путем разделения переменных в некоторых системах криволинейных координат. Относительно общей задачи разделения переменных в волновом уравнении и родственных ему дифференциальных уравнениях в частных производных см. литературу, указанную в п. 15.1.

Относительно функций Матье существует основная работа Мак-Лахлана (1953), которая содержит многочисленные приложения этих функций и библиографию. Вышла также книга по теории и приложениям функций Матье и сфероидальных волновых функций, написанная Мейкснером и Шефке (Meixner and Schäfke). Монография Стретта (1935) содержит теорию всех функций, изучаемых в этой главе, указывает их приложения и дает обширный список литературы. Дополнения к этому списку опубликованы Стреттом (1935). Относительно функций Матье см. также Уиттекер и Ватсон (1963, гл. XIX).

В этой главе мы дадим краткое описание основных свойств рассматриваемых функций и ссылки на дальнейшую литературу. Относительно более детального изучения этих функций и прежней литературы см. указанные выше работы. В разделе о функциях Матье мы будем следовать книге Мак Лахлана, а в разделах о сфероидальных волновых функциях — работам Мейкснера. Очень мало известно об эллипсоидальных волновых функциях. То, что известно относительно них, изложено в монографии Стретта.

16.1.1. Координаты эллиптического цилиндра. Введем вместо декартовых координат x, y криволинейные координаты u, v, связанные с ними соотношениями

$$x = c\operatorname{ch} u\cos v,\qquad y = c\operatorname{sh} u\sin v,\tag{1}$$

где c — положительная постоянная. На (x, y)-плоскости кривые $u = \text{const}$ образуют конфокальное семейство эллипсов, а кривые $v = \text{const}$ — конфокальное семейство гипербол. Фокусы конфокальных систем находятся в точках $(\pm c, 0)$. Каждая кривая $v = \text{const}$ является четвертью гиперболы, и мы получаем полную (x, y)-плоскость, если u и v изменяются в области $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$. Кривые $v = 0$ и $v = 2\pi$ совпадают (они являются частью оси x от $x = c$ до $x = +\infty$). Кривая $u = 0$ является вырожденным эллипсом (дважды пробегаемым отрезком $-c \leqslant x \leqslant c$). Этот отрезок является разрезом, причем точки $u = 0$, $v = v_1$ и $u = 0$, $v = 2\pi - v_1$ совпадают. В пространстве x, y, z мы имеем соответственно конфокальные семейства эллиптических и гиперболических цилиндров.

В координатах, определяемых равенством (1), имеем

$$\Delta W+\kappa^2 W=\frac{2c^{-2}}{\operatorname{ch}(2u)-\cos(2v)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\kappa^2 W=0. \tag{2}$$

Если существуют нормальные решения вида

$$W=U(u)V(v)Z(z), \tag{3}$$

то функции U, V, Z должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2U}{du^2}-[h-2\theta\operatorname{ch}(2u)]U=0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+[h-2\theta\cos(2v)]V=0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+l^2Z=0. \tag{6}$$

Здесь h, θ и l — постоянные разделения, h произвольно, причем

$$\kappa^2=l^2+4c^{-2}\theta. \tag{7}$$

Уравнение (5) называют *уравнением Матье*; (4) сводится к уравнению Матье путем замены u на iv и известно как *модифицированное уравнение Матье.*

Для того чтобы волновая функция W была непрерывна и имела непрерывные производные на эллиптическом цилиндре $u=u_0$, должны выполняться условия $V(2\pi)=V(0)$, $V'(2\pi)=V'(0)$ Так как 2π является периодом коэффициентов уравнения (5), то отсюда следует, что $V(v)$ должно быть периодической функцией от v с периодом 2π Мы увидим, что для заданного θ имеется бесконечная последовательность собственных значений h, при которых существуют такие периодические решения Эти решения называют *функциями Матье* Если $V(v)$ является периодическим решением уравнения (5) с периодом 2π, то такими же решениями являются $V(-v)$ и $V(v)\pm V(-v)$, поэтому мы можем ограничиться рассмотрением функций Матье, являющихся четными или нечетными функциями от v.

Предположим теперь, что W непрерывно и имеет непрерывный градиент внутри эллиптического цилиндра $u=u_0$. Так как $u=0$, $v=v_1$ и $u=0$, $v=2\pi-v_1$ представляют одну и ту же точку на противоположных сторонах разреза, мы должны иметь

$$U(0)V(v_1)=U(0)V(2\pi-v_1),\qquad U'(0)V(v_1)=-U'(0)V(2\pi-v_1)$$

при $0\leqslant v_1\leqslant 2\pi$ Если $V(v)$ является четной функцией Матье, то $V(2\pi-v_1)=V(-v_1)=V(v_1)$ Первое из этих условий выполнено всегда, а второе влечет за собой $U'(0)=0$ Из (4) следует тогда, что $U(u)$ является четной функцией от u и что $U(u)=V(iu)$ с точностью до постоянного множителя. Точно так же, если $V(v)$ является нечетной функцией от v, то $U(u)$ должно быть нечетной функцией от u, и снова $U(u)=V(iu)$. Определенные таким образом решения уравнения (4) являются так называемыми *модифицированными функциями Матье первого рода.*

На непрерывные и имеющие непрерывный градиент вне эллиптического цилиндра $u=u_0$ волновые функции W обычно налагаются условия на их поведение на бесконечности (например, зоммерфельдовские условия излучения). Для больших значений u

$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2}=c\,[(\operatorname{ch}u\cos v)^2+(\operatorname{sh}u\sin v)^2]^{1/2}$$

приблизительно равно $\frac{1}{2}ce^u$, и решения уравнения (4), которые асимптотически подобны $\exp\left(\frac{1}{2}i\varkappa ce^{u}\right)$ или $\exp\left(-\frac{1}{2}i\varkappa ce^{u}\right)$, называют обычно *модифицированными функциями Матье третьего рода.*

16.1.2. Координаты вытянутого эллипсоида вращения (вытянутого сфероида). Введем теперь *координаты вытянутого сфероида* с помощью равенств

$$x=c\,\operatorname{sh} u\sin v\cos\varphi,\quad y=c\,\operatorname{sh} u\sin v\sin\varphi,\quad z=c\,\operatorname{ch} u\cos v, \tag{8}$$

где c — положительная постоянная. Поверхности $u=\text{const}$ образуют конфокальную систему вытянутых сфероидов, а поверхности $v=\text{const}$ — конфокальную систему двуполостных гиперболоидов. Фокусы этих конфокальных систем находятся в точках $x=y=0$, $z=\pm c$. Соответствующие области изменения u, v и φ имеют вид $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Поверхности $\varphi=\text{const}$ являются меридиональными плоскостями, причем $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ совпадают; $u=0$ — вырожденный эллипсоид, который сводится к отрезку $x=y=0$, $-c\leqslant z\leqslant c$; а поверхности $v=0$ и $v=\pi$ являются двумя половинами вырожденного гиперболоида системы, сводящимися соответственно к $x=y=0$, $z\geqslant c$ и $x=y=0$, $z\leqslant -c$. Таким образом, вся ось вращения является особой линией координатной системы.

В координатах, введенных равенствами (8), имеем

$$\Delta W+\varkappa^2W=\frac{c^{-2}}{(\operatorname{ch} u)^2-(\cos v)^2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2W}{\partial v^2}+\operatorname{cth} u\frac{\partial W}{\partial u}+\operatorname{ctg} v\frac{\partial W}{\partial v}\right)+$$
$$+\frac{1}{(c\,\operatorname{sh} u\sin v)^2}\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}+\varkappa^2W=0, \tag{9}$$

и если существуют нормальные решения вида

$$W=U(u)\,V(v)\,e^{\pm im\varphi}, \tag{10}$$

то функции U, V должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2U}{du^2}+\operatorname{cth} u\frac{dU}{du}-\left[h-(\varkappa c\,\operatorname{sh} u)^2+\left(\frac{m}{\operatorname{sh} u}\right)^2\right]U=0, \tag{11}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+\operatorname{ctg} v\frac{dV}{dv}+\left[h+(\varkappa c\sin v)^2-\left(\frac{m}{\sin v}\right)^2\right]V=0, \tag{12}$$

где h — снова постоянная разделения. Уравнение (12) называют тригонометрической формой уравнения сфероидальных волновых функций: (11) сводится к (12) заменой переменной u на iv.

Для того чтобы волновая функция W была непрерывна внутри или вне сфероида $u=u_0$, W должна быть периодической функцией от φ с периодом 2π; следовательно, m в равенстве (10) должно быть целым числом. Далее, W должна быть ограничена на эллипсоидах $u=\text{const}$; иными словами, $V(v)$ должна быть решением уравнения (12), ограниченным на отрезке $0\leqslant v\leqslant\pi$. Как и в случае уравнения Лежандра 3.1(2), к которому сводится (12) при $\varkappa=0$, такие решения существуют лишь для некоторых собственных значений h: ограниченные решения (12) называются *сфероидальными волновыми функциями*. Если W непрерывна внутри сфероида $u=u_0$, то она должна быть ограничена на вырожденном сфероиде $u=0$; это определяет выбор решения U и показывает, что $U(u)$ должно отличаться от $V(iv)$ лишь постоянным множителем, т. е. $U(u)$ — *модифицированная сфероидальная волновая функция первого рода.* С другой стороны, если W является волновой функцией, регулярной вне сфероида $u=u_0$, то обычно требуют, чтобы ее поведение на бесконечности асимптотически совпадало с $r^{-1}\exp(\pm i\varkappa r)$, где

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=c\left[(\operatorname{sh} u\sin v)^2+(\operatorname{ch} u\cos v)^2\right]^{1/2}$$

при больших u приблизительно равно $\frac{1}{2}ce^u$. Решение уравнения (11), обладающее таким поведением на бесконечности, называют *модифицированной сфероидальной волновой функцией третьего рода.* Решения уравнения (11), для которых h имеет одно из собственных значений, более точно было бы называть *модифицированными волновыми функциями вытянутого эллипсоида вращения* (*вытянутого сфероида*).

16.1.3. Координаты сжатого эллипсоида вращения (сжатого сфероида). *Координаты сжатого сфероида* u, v, φ определяются равенствами

$$x=c\operatorname{ch}u\sin v\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{ch}u\sin v\sin\varphi,\quad z=c\operatorname{sh}u\cos v, \tag{13}$$

где c — положительная постоянная. Поверхности $u=\mathrm{const}$ образуют конфокальное семейство сжатых эллипсоидов вращения, поверхности $v=\mathrm{const}$ — конфокальное семейство однополостных гиперболоидов и поверхности $\varphi=\mathrm{const}$ — семейство меридиональных плоскостей. Фокальными окружностями конфокальной системы являются $x^2+y^2=c^2$, $z=0$. Областью изменения переменных u, v, φ являются $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, причем $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ являются одной и той же меридиональной плоскостью. $u=0$ — вырожденный эллипсоид, дважды покрывающий область, лежащую внутри фокальной окружности, $v=0$ и $v=\pi$ — две половины вырожденного гиперболоида, сводящиеся тождественно к положительной и отрицательной полуоси z, а $v=\pi/2$ является вырожденным гиперболоидом, который лежит на плоскости $z=0$ и дважды покрывает область, лежащую вне фокальной окружности. Таким образом, вся (x, y)-плоскость является особой поверхностью координатной системы.

В координатах, определяемых равенством (13), имеем

$$\Delta W+\kappa^2W=\frac{c^{-2}}{(\operatorname{ch}u)^2-(\sin v)^2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2W}{\partial v^2}+\operatorname{th}u\frac{\partial W}{\partial u}+\operatorname{ctg}v\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\\+\frac{1}{(c\operatorname{ch}u\sin v)^2}\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}+\kappa^2W=0. \tag{14}$$

Если существуют нормальные решения вида

$$W=U(u)\,V(v)\,e^{\pm im\varphi}, \tag{15}$$

то функции U и V должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2U}{du^2}+\operatorname{th}u\frac{dU}{du}-\left[h-(\kappa c\operatorname{ch}u)^2-\left(\frac{m}{\operatorname{ch}u}\right)^2\right]U=0, \tag{16}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+\operatorname{ctg}v\frac{dV}{dv}+\left[h-(\kappa c\sin v)^2-\left(\frac{m}{\sin v}\right)^2\right]V=0, \tag{17}$$

где h — снова постоянная разделения. Уравнение (17) является дифференциальным уравнением сфероидальных волновых функций, где κ^2c^2 замеиено на $-\kappa^2c^2$: (16) сводится к (17) подстановкой $u=i(v-\pi/2)$.

Как и в п. 16.1.2 m должно быть целым числом, V — сфероидальной волновой функцией и h — одним из собственных значений. Решения уравнения (16) можно назвать *модифицированными волновыми функциями сжатого эллипсоида вращения* (*сжатого сфероида*), и надо отметить, что модификация, соответствующая сжатому сфероиду $u=iv-\frac{\pi}{2}i$ отличается от модификации, соответствующей вытянутому сфероиду $u=iv$. Так как $V(\pi-v)$, $V(v)\pm\pm V(\pi-v)$ также являются сфероидальными волновыми функциями, можно выбрать $V(v)$ так, чтобы оно было четной или нечетной функцией от $v-\pi/2$. Для волновых функций, регулярных внутри сфероида $u=u_0$, рассмотрения, подобные проведенным в п. 16.1.1, показывают, что из непрерывности на вырожденном сфероиде координатной системы (где точки $u=0$, $v=v_1$ и $u=0$, $v=\pi-v_1$ совпадают) вытекает условие: $U(u)$ должно быть четной или нечетной функцией от u в зависимости от того, является ли $V(v)$ четной или нечетной функцией от $v-\frac{\pi}{2}$, т. е. что $U(u)=V\left(iv-\frac{\pi}{2}i\right)$; мы будем называть такие решения уравнения (16) *модифицированными сфероидальными волновыми функциями первого рода.* Волновые функции во внешней области сжатого сфероида определяются их поведением при $u=\infty$, и эти функции приводят к *модифицированным сфероидальным функциям третьего рода.*

16.1.4. Эллипсоидальные координаты. Определим *эллипсоидальные координаты* α, β, γ равенствами 15.1(8), где $a>b>c>0$ и k дается равенством 15.1(6). Относительно описания координатных поверхностей и области изменения α, β, γ см. п. 15.1.1. Мы видим из 15.1(9), что в эллипсоидальных координатах α, β, γ дифференциальное уравнение в частных производных $\Delta W+\kappa^2W=0$ принимает вид

$$[(\operatorname{sn}\gamma)^2-(\operatorname{sn}\beta)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}+[(\operatorname{sn}\alpha)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}+[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\alpha)^2]\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma^2}+$$
$$+(a^2-b^2)k^2\kappa^2[(\operatorname{sn}\alpha)^2-(\operatorname{sn}\beta)^2][(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2][(\operatorname{sn}\gamma)^2-(\operatorname{sn}\alpha)^2]\,W=0. \quad (18)$$

Если существуют нормальные решения этого уравнения вида

$$W=A(\alpha)B(\beta)C(\gamma), \quad (19)$$

то функции A, B, C должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2}+[h-l(\operatorname{sn}\alpha)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\operatorname{sn}\alpha)^4]A=0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2B}{d\beta^2}+[h-l(\operatorname{sn}\beta)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\operatorname{sn}\beta)^4]B=0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2C}{d\gamma^2}+[h-l(\operatorname{sn}\gamma)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\operatorname{sn}\gamma)^4]C=0, \quad (22)$$

где h и l — постоянные разделения. Эти три уравнения имеют одинаковый вид и отличаются областью изменения независимых переменных. Уравнения этого вида называются *уравнениями эллипсоидальных волновых функций* или *волновыми уравнениями Ламе.* Решения этих уравнений, которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям, называются *эллипсоидальными волновыми функциями* или *волновыми функциями Ламе.* При $\kappa=0$ эти уравнения сводятся к уравнению Ламе (гл. 15) и волновые функции Ламе сводятся к функциям Ламе.

Если W непрерывно и имеет непрерывные производные внутри или вне эллипсоида $u=u_0$, то на B и C должны быть наложены граничные условия, установленные в п. 15.1.1. Эти граничные условия определяют собственные значения h и l и соответствующие волновые функции Ламе первого рода. Для волновых функций, регулярных внутри эллипсоида $u=u_0$, граничное условие на A совпадает с установленным в 15.1.1, так что A является волновой функцией Ламе первого рода. Для волновых функций, регулярных вне эллипсоида, задается асимптотическое поведение на бесконечности, т. е. вблизи $\alpha=iK'$ и A можно выразить как волновую функцию Ламе третьего рода.

ФУНКЦИИ МАТЬЕ

16.2. Общее уравнение Матье и его решение

Мы будем рассматривать

$$\frac{d^2u}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]\,u=0 \tag{1}$$

как стандартный вид уравнения Матье. Этот вид применялся Айнсом (Ince; 1932 и другие работы) и многими другими авторами. Многие авторы применяют другие формы. Уиттекер и Ватсон (1963, гл. XIX) полагают $h=a$, $\theta=-8q$. Стреттон (Stretton; 1942) и др. полагают $h=b-\frac{1}{2}c^2$, $4\theta=c^2$. Янке—Эмде—Лёш (1964) полагают $h=4\alpha$, $\theta=8q$, а в таблицах, составленных National Bureau of Standards (1951), положено $h=b-s/2$, $\theta=s/4$. Айнс (Ince; 1923) изучал также уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left[h-2\theta\cos(2z)-\frac{\nu(\nu-1)}{(\sin z)^2}\right]u=0,$$

которое он называет *присоединенным уравнением Матье.*

Подстановка $u=(\sin z)^{1/2}v$ преобразует это уравнение в

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\operatorname{ctg} z\frac{dv}{dz}+\left[h-\frac{1}{4}-2\theta\cos(2z)-\frac{(\nu-1/2)^2}{(\sin z)^2}\right]v=0,$$

т. е. в дифференциальное уравнение сфероидальных волновых функций, поэтому мы не будем здесь его изучать.

В этой главе мы будем рассматривать h и θ как заданные вещественные или комплексные постоянные. Уравнение (1) будет называться тогда *общим уравнением Матье* в отличие от уравнения для функций Матье, в котором задано лишь θ, в то время как h является одним из собственных значений. Для краткости будем называть (1) уравнением Матье.

При

$$x=(\sin z)^2 \tag{2}$$

получаем

$$4x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+2(1-2x)\frac{du}{dx}+(h-2\theta+4\theta x)\,u=0 \tag{3}$$

и будем называть это уравнение *алгебраическим уравнением Матье.* Эта алгебраическая форма и связанные с ней уравнения были использованы в исследованиях Линдемана, Стилтьеса и др. Алгебраическое уравнение Матье имеет две регулярные особые точки при $x=0$ и $x=1$, обе с показателями 0 и 1/2 и одну иррегулярную особую точку на бесконечности. Из-за этой иррегулярной особенности уравнение (3) сравнительно трудно для изучения. Тем не менее его можно использовать для вывода некоторых разложений решений как в ряды по степеням x и $1-x$, так и в ряды по гипергеометрическим функциям. Это уравнение является предельным случаем уравнения Гойна (п. 15.3).

Уравнение Матье (1) является дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Из общей теории таких уравнений (Айнс, 1939, стр. 513 и далее, Poole, 1936, стр. 178 и далее) вытекает, что уравнение (1) имеет решение вида

$$e^{\mu z}P(z), \tag{4}$$

где $P(z)$ — периодическая функция с периодом π, и μ — постоянная, называемая *характеристическим показателем*, которая зависит от h и θ (теорема

Флоке). Очевидно, что

$$e^{-\mu z} P(-z) \tag{5}$$

также является решением уравнения (1). Вообще, решения (4) и (5) линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Единственным исключением является случай, когда $i\mu$ — целое число. Этот случай, когда функции Матье периодичны, будет изучен в пп. 16.4—16.8.

Решения вида (4) и (5) иногда называют *решениями первого рода*. Другими важными решениями уравнения Матье являются решения, обращающиеся в нуль, когда $z \to i\infty$ или $z \to -i\infty$; такие решения называются *решениями третьего рода*.

Существует много методов для определения μ. Мы опишем здесь кратко некоторые из них и отошлем читателя к работам Blanch (1946) и гл. IV и V книги Мак-Лахлана относительно дальнейших деталей и описания численных методов.

Пуанкаре основывает определение μ на двух решениях u_1 и u_2 уравнения (1), определяемых начальными условиями

$$u_1(0) = 1, \qquad u_1'(0) = 0; \qquad u_2(0) = 0, \qquad u_2'(0) = 1. \tag{6}$$

Эти два решения линейно независимы, их вронскиан равен единице и u_1 (u_2) является четной (нечетной) функцией от z. Если $P(0) \neq 0$, то имеем

$$u_1(z) = \frac{e^{\mu z} P(z) + e^{-\mu z} P(-z)}{2P(0)},$$

а если $P'(0) + \mu P(0) \neq 0$, то имеем

$$u_2(z) = \frac{e^{\mu z} P(z) - e^{-\mu z} P(-z)}{2[P'(0) + \mu P(0)]}.$$

По крайней мере одно из этих двух выражений имеет смысл. Продифференцируем u_2 и положим $z = \pi$ в u_1 и u_2'. Так как $P(\pm\pi) = P(0)$, $P'(\pm\pi) = P'(0)$, получаем

$$\operatorname{ch}(\mu\pi) = u_1(\pi) = u_2'(\pi). \tag{7}$$

Из (7) очевидно, что μ определяется с точностью до знака и целого кратного $2i$. Соотношение (7) можно применить для вычисления μ, если $u_1(\pi)$ или $u_2'(\pi)$ можно вычислить с достаточной точностью. (См. также п. 16.3.)

Хилл разлагает решение (4) в ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{(\mu + 2ni)z}. \tag{8}$$

Подстановка в (1) приводит к рекуррентным соотношениям

$$-\theta c_{n-1} + [h + (\mu + 2ni)^2]\, c_n - \theta c_{n+1} = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

для коэффициентов c_n. Мы записываем (9) в виде

$$c_n + \gamma_n(\mu)(c_{n-1} + c_{n+1}) = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{10}$$

где

$$\gamma_n = \gamma_n(\mu) = \frac{\theta}{(2n - \mu i)^2 - h}. \tag{11}$$

Бесконечный определитель системы (10) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \gamma_{-2}(\mu) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \gamma_{-1}(\mu) & 1 & \gamma_{-1}(\mu) & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \gamma_0(\mu) & 1 & \gamma_0(\mu) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \gamma_1(\mu) & 1 & \gamma_1(\mu) & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \gamma_2(\mu) & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \Delta(\mu), \quad (12)$$

и μ определяется из уравнения $\Delta(\mu)=0$. Бесконечный определитель (12), очевидно, абсолютно сходится и представляет мероморфную функцию от μ. Эта функция имеет простые полюсы в точках $\mu=\pm i(h^{1/2}+2n)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Так как $\gamma_n(\mu+2ki)=\gamma_{n+k}(\mu)$, k целое и $\gamma_n(-\mu)=\gamma_{-n}(\mu)$, то ясно, что $\Delta(\mu)$ является четной периодической функцией с периодом $2i$. Таким образом,

$$\Delta(\mu)-\frac{C}{\operatorname{ch}(\mu\pi)-\cos(\pi h^{1/2})} \qquad (13)$$

является четной периодической мероморфной функцией от μ. Если C определено так, что (13) не имеет полюса при $\mu=ih^{1/2}$, то (13) нигде не имеет полюсов и, следовательно, является постоянной. Так как $\Delta(\mu)\to 1$, когда $\mu\to\infty$, то значение постоянной равно единице. Для того чтобы определить C, полагаем $\mu=0$ и получаем

$$\Delta(\mu)=1-\frac{[1-\Delta(0)][1-\cos(h^{1/2}\pi)]}{\operatorname{ch}(\mu\pi)-\cos(h^{1/2}\pi)}=\frac{\operatorname{ch}(\mu\pi)-1+\Delta(0)[1-\cos(h^{1/2}\pi)]}{\operatorname{ch}(\mu\pi)-\cos(h^{1/2}\pi)}. \qquad (14)$$

Так как μ определяется уравнением $\Delta(\mu)=0$, получаем

$$\operatorname{ch}(\mu\pi)=1+2\Delta(0)\left[\sin\left(\frac{1}{2}h^{1/2}\pi\right)\right]^2. \qquad (15)$$

Относительно дальнейших работ о бесконечном определителе, встретившимся в связи с уравнением Матье и родственными дифференциальными уравнениями, см. Magnus (1953).

Если h и θ — вещественные числа, то из (7) или (15) видно, что $\operatorname{ch}(\mu\pi)$ также вещественно. Если $-1<\operatorname{ch}(\mu\pi)<1$, то μ — чисто мнимое число, причем μi не является целым и из (4) и (5) вытекает, что каждое решение уравнения Матье ограничено на вещественной оси z. *Областями устойчивости* являются те области на (h, θ)-плоскости, в которых $-1<\operatorname{ch}(\mu\pi)<1$. Если $\operatorname{ch}(\mu\pi)>1$, то μ можно выбрать вещественным (и отличным от нуля), а если $\operatorname{ch}(\mu\pi)<-1$, то вещественным (и отличным от нуля) можно выбрать число $\mu-i$; в любом случае из (4) и (5) видно, что уравнение Матье не имеет ограниченных решений на вещественной оси. Области на (h, θ)-плоскости, в которых $\operatorname{ch}(\mu\pi)>1$ или $\operatorname{ch}(\mu\pi)<-1$ будем называть *областями неустойчивости*. Области устойчивости и неустойчивости разделяются кривыми, вдоль которых $\operatorname{ch}(\mu\pi)=\pm 1$. На этих кривых одно из решений уравнения Матье ограничено (и периодично), а общее решение неограничено: относительно этого исключительного случая см. пп. 16.4—16.8. Относительно *карты устойчивости*, показывающей области устойчивости и неустойчивости на (h, θ)-плоскости см. Стретт (1935, стр. 22), Мак-Лахлан (1953, стр. 50, 51), а также стр. XLIV, XLV в NBS таблицах. Относительно вычисления карты устойчивости см. также Blanch (1946), Schäfke (1950).

Многие численные методы решения уравнения Матье при небольших значениях λ и θ основаны на рекуррентных соотношениях (9) или некоторых видоизменениях этих соотношений. Из (9) следует, что

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{\theta}{h-(2n-i\mu)^2-\dfrac{\theta c_{n+1}}{c_n}}=\frac{-\theta\,(2n-i\mu)^{-2}}{1-h\,(2n-i\mu)^{-2}+\theta\,(2n-i\mu)^{-2}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}}.$$

Повторно применяя это соотношение, как в п. 15.3, мы получаем сходящуюся бесконечную непрерывную дробь R_n, так что

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=R_n(\mu). \tag{16}$$

С другой стороны, из (9) мы имеем также

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{-\theta\,(2n-i\mu)^{-2}}{1-h\,(2n-i\mu)^{-2}+\theta\,(2n-i\mu)^{-2}\dfrac{c_{n-1}}{c_n}}.$$

Повторное применение этого соотношения приводит к

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=L_n(\mu)=R_{-n}(-\mu), \tag{17}$$

где $L_n(\mu)$ снова является бесконечной непрерывной дробью. Для определения μ имеем уравнение

$$L_0(\mu)\,R_1(\mu)=1, \tag{18}$$

и при вычислении μ из соотношения (18) все отношения (16) и (17) получаются автоматически, так что

$$c_n=c_0R_1(\mu)\,R_2(\mu)\,\ldots\,R_n(\mu),\qquad n=1,\,2,\,3,\,\ldots, \tag{19}$$

$$c_{-n}=c_0L_{-1}(\mu)\,L_{-2}(\mu)\,\ldots\,L_{-n}(\mu),\qquad n=1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{20}$$

Из (16) и (17) следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2c_n}{c_{n-1}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2c_n}{c_{n+1}}=-\frac{\theta}{4}, \tag{21}$$

так что ряд (8) абсолютно и равномерно сходится в любой области, где $e^{\pm iz}$ ограничено, например, в любой горизонтальной полосе комплексной z-плоскости.

В области устойчивости $\mu=i\rho$, где ρ вещественно, и если c_0 выбрано вещественным числом все c_n будут вещественны,. Из (8) мы получаем два линейно независимых вещественных решения:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\cos\,[(\rho+2n)\,z],\qquad \sum_{-\infty}^{\infty}c_n\sin\,[(\rho+2n)\,z]. \tag{22}$$

В области неустойчивости либо μ либо $\mu-i$ вещественно. В обоих случаях (8) является вещественным решением и два линейно независимых вещественных решения даются формулами

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{(\mu+2ni)\,z},\qquad \sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{-(\mu+2ni)\,z}. \tag{23}$$

Хотя (8) является наилучшим разложением в случае, когда z вещественно, для комплексных значений z другие разложения дают быстрее сходящиеся ряды. Эти разложения удобны для представления решений третьего рода.

Эрдейи (Erdélyi; 1942) положил

$$\varphi_\nu(z)=\left[e^{i\pi}\frac{\cos\,(z-\beta)}{\cos\,(z+\beta)}\right]^{\nu/2}J_\nu\left\{2\,[\theta\cos\,(z-\beta)\cos\,(z+\beta)]^{1/2}\right\}, \tag{24}$$

где β—произвольное фиксированное вещественное или комплексное число. Непосредственное вычисление, использующее рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для бесселевых функций, показывает, что

$$\frac{d^2\varphi_\nu}{dz^2}-2\theta\varphi_\nu\cos(2z)=-\theta\varphi_{\nu-2}-\nu^2\varphi_\nu-\theta\varphi_{\nu+2}. \tag{25}$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\varphi_{2n-i\mu}(z) \tag{26}$$

является формальным решением уравнения Матье при условии, что коэффициенты c_n удовлетворяют уравнению (9), т. е. совпадают с коэффициентами c_n из (8).

Из асимптотической формулы для функций Бесселя находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{2n-i\mu-2}}{n^2\,\varphi_{2n-i\mu}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{\varphi_{2n-i\mu}}{n^2\varphi_{2n-i\mu+2}}=\frac{-4}{\theta\,[\cos(z-\beta)]^2}. \tag{27}$$

Соотношения (21) и (27) показывают, что ряд (26) сходится при условии $|\cos(z-\beta)|>1$ и представляет в этом случае решение. Область сходимости состоит из двух непересекающихся частей, одна из которых целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$, а другая—в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$. Из (24) мы видим, что φ_ν равно целой функции от z, умноженной на $[\cos(z-\beta)]^\nu$. При изменении z на $z+2\pi$ в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$, $\cos(z-\beta)$ описывает линию, охватывающую начало координат и пробегаемую по часовой стрелке. Отсюда следует, что в области сходимости в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$ ряд (26) представляет собой решение первого рода (5). Аналогичные рассмотрения показывают, что в области сходимости в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$ ряд (26) представляет решение (4).

При $\beta=0$ и $\beta=\pi/2$ получаем частные формы ряда (26). Это соответственно

$$e^{\pi\mu/2}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n c_n J_{2n-i\mu}(2\theta^{1/2}\cos z), \tag{28}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n J_{2n-i\mu}(2\theta^{1/2}i\sin z). \tag{29}$$

Ряд (8) является предельной формой (26), когда $\beta\to i\infty$.

Заменим теперь в (24) J_ν на $H_\nu^{(j)}$, $j=1, 2$, и обозначим получающиеся функции через $\psi_\nu^{(j)}$. Так как функции Бесселя первого и третьего рода удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям и тем же самым формулам дифференцирования, то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\psi_{2n-i\mu}^{(j)} \tag{30}$$

является формальным решением уравнения Матье, если коэффициенты c_n те же, что и в (8). Исследование сходимости ряда (30) по признаку Даламбера показывает, что он сходится, если $|\cos(z-\beta)|>1$ и $|\cos(z+\beta)|>1$. Это приводит к двум областям сходимости, расположенным в полуплоскостях $\operatorname{Im}z>|\operatorname{Im}\beta|$ и $\operatorname{Im}z<-|\operatorname{Im}\beta|$. В обеих этих областях ряд (30) представляет решение третьего рода, что можно установить, рассматривая асимптотическое поведение этого ряда при $z\to i\infty$ (см. Meixner, 1949). Если $|\operatorname{Im}\beta|$ достаточно велико, точнее, если $\operatorname{sh}|\operatorname{Im}\beta|>1$, то существует третья область сходимости, содержащая всю вещественную ось z и расположенная в полосе $|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Im} \beta|$. В этой области сходимости ряд (30) представляет решение первого рода, а именно (4) или (5) в зависимости от того, положительно или отрицательно $\operatorname{Im} \beta$.

Разложения решений уравнения Матье в ряды по произведениям функций Бесселя были введены Зигером (Sieger; 1908) и Дуголлом (Dougall; 1916). В этом случае полагаем

$$\varphi_{\nu\,\lambda}(z) = e^{i\nu\pi} J_{\nu+\lambda}\left(\theta^{1/2} e^{iz}\right) J_{\nu}\left(\theta^{1/2} e^{-iz}\right) \tag{31}$$

и получаем путем непосредственного вычисления

$$\frac{d^2\varphi_{\nu,\lambda}}{dz^2} - 2\theta\varphi_{\nu,\lambda}\cos(2z) = -\theta\varphi_{\nu-1,\lambda} - (2\nu+\lambda)^2\varphi_{\nu,\lambda} - \theta\varphi_{\nu+1,\lambda}; \tag{32}$$

Это соотношение показывает, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi_{n,\,-i\mu} \tag{33}$$

является формальным решением уравнения Матье, если коэффициенты ряда определены соотношением (9). Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\varphi_{n+1,\,-i\mu}}{\varphi_{n,\,-i\mu}} = -\frac{\theta}{4}, \quad \lim_{n\to-\infty} \frac{\varphi_{n,\,-i\mu}}{\varphi_{n+1,\,-i\mu}} = -e^{-2iz}, \tag{34}$$

то из (21) следует, что ряд (33) сходится во всей z-плоскости. Так как (33) равно целой функции от z, умноженной на $e^{\mu z}$, то оно представляет решение первого рода (4).

Имеется много рядов по произведениям функций Бесселя, например,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n H^{(j)}_{n-i\mu}\left(\theta^{1/2} e^{iz}\right) J_{-n}\left(\theta^{1/2} e^{-iz}\right), \qquad j = 1, 2. \tag{35}$$

Другие ряды являются модификациями и комбинациями рядов (33) и (35). См. также пп. 16.5 и 16.6.

16.3. Приближения, интегральные соотношения и интегральные уравнения для решений общего уравнения Матье

Приближения для малых $|\theta|$. Если $\theta = 0$, то двумя (вырожденными) решениями первого рода уравнения Матье 16.2 (1) являются $\exp\left(\pm i h^{1/2} z\right)$, так что в этом случае $\mu = i h^{1/2}$. Для малых значений $|\theta|$ определитель 16.2 (15) может быть вычислен в виде

$$\Delta(0) = 1 + \frac{\pi\theta^2}{(1-h)\,h^{1/2}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi h^{1/2}}{2}\right) + O(\theta^4), \tag{1}$$

так что уравнение 16.2 (15) принимает вид

$$\operatorname{ch}(\mu\pi) = \cos\left(h^{1/2}\pi\right) + \frac{\pi\theta^2}{(1-h)\,h^{1/2}} \sin\left(h^{1/2}\pi\right) + O(\theta^4) \tag{2}$$

и может быть использовано для вычисления μ. В свою очередь функцию u_1, определяемую формулами 16.2 (1) и 16.2 (6), можно разложить в степенной ряд по θ

$$u_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n f_n(z),$$

где

$$f_0(z)=\cos(h^{1/2}z),$$

$$f_n(z)=2h^{-1/2}\int_0^z \cos(2t)\sin\left[h^{1/2}(z-t)\right]f_{n-1}(t)\,dt, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

а тогда для вычисления характеристических показателей μ можно использовать 16.2 (7). Если μ известно, то коэффициенты разложения 16.2 (8) можно вычислить с помощью непрерывной дроби или разложить функцию $P(z)$ из 16.2 (4) по степеням θ, а члены разложения рекуррентно определить из 16.2 (1).

Относительно других методов приближения при малых $|\theta|$ см. Уиттекер и Ватсон (1963, п. 19.7) или Стретт (1935, стр. 24).

Асимптотические формы при больших $|h|$, $|\theta|$. Будем предполагать, что как h, так и θ вещественны.

Если $h>2|\theta|$, то преобразование Лиувилля

$$\zeta=\int_0^z [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}\,dt, \qquad \eta=[h-2\theta\cos(2z)]^{1/4}u, \tag{3}$$

преобразует уравнение Матье 16.2 (1) в

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}+[1+r(\zeta)]\,\eta=0, \tag{4}$$

где

$$r(\zeta)=\frac{4\theta^2-2h\theta\sin(2z)+\theta^2[\sin(2z)]^2}{[h-2\theta\cos(2z)]^3}. \tag{5}$$

Если h велико, то $r(\zeta)$ мало по сравнению с единицей, а потому решение уравнения (4), соответствующее u_1, аппроксимируется кратным $\cos\zeta$, и из 16.2 (7) получаем

$$\operatorname{ch}(\mu\pi)=\cos\left\{\int_0^{\pi}[h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}\,dt\right\}+O(h^{-1/2}),$$

$$h\to\infty, \qquad 2|\theta|\leqslant h-\varepsilon, \qquad \varepsilon>0. \tag{6}$$

Если $h<-2|\theta|$, мы применяем несколько иное преобразование

$$\zeta=\int_0^z[-h+2\theta\cos(2t)]^{1/2}\,dt, \qquad \eta=[-h+2\theta\cos(2z)]^{1/4}u$$

и снова получаем (6). Фактически формула (6) справедлива для любых комплексных значений h при условии $2|\theta|\leqslant|h|-\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Если h и θ вещественны и $-2\theta<h<2\theta$, то функция $r(\zeta)$, задаваемая формулой (5), уже не является ограниченной и для значений z, близких к $\frac{1}{2}\arccos\frac{h}{2\theta}$ ее нельзя отбрасывать. Поэтому интеграл в (6) не будет ни вещественным, ни мнимым. Стретт (1935, стр. 34) показал, что в этом случае $\operatorname{ch}(\mu\pi) =$

$$= \cos\left\{\operatorname{Re}\int_0^\pi [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}\,dt\right\}\operatorname{ch}\left\{\operatorname{Im}\int_0^\pi [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}\,dt\right\}+O\left(h^{-1/2}\right),$$
$$h\longrightarrow\infty. \qquad (7)$$

Детальное исследование решения уравнения Матье 16.2(1) для больших вещественных h, θ и комплексных значений z проведено Лангером (Langer, 1934).

Асимптотические формы для больших значений $|\sin z|$. Точка $x=\infty$ является иррегулярной особенностью алгебраической формы 16.2(3) уравнения Матье. Существуют формальные ряды вида

$$\exp\left(\pm 2\theta^{1/2}x^{1/2}\right)\sum a_n x^{-1/4-n/2},$$

удовлетворяющие 16.2(3), они являются *поднормальными решениями* (Айнс, 1939, п. 17.53). Хотя эти ряды расходятся, из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что при $x\longrightarrow\infty$ они асимптотически представляют некоторые решения 16.2(3).

Обращая преобразование 16.2(2), видим, что существуют формальные ряды

$$\exp\left(\pm 2\theta^{1/2}\sin z\right)\sum a_n(\sin z)^{-1/2-n}, \qquad (8)$$

удовлетворяющие уравнению Матье 16.2(1), и существуют некоторые решения уравнения Матье (решения третьего рода), которые при $\operatorname{Im} z\longrightarrow\pm\infty$ асимптотически представляются тем или иным из рядов (8). Любое решение уравнения Матье можно представить в виде линейной комбинации двух рядов (8), но коэффициенты этих линейных комбинаций различны в различных вертикальных полосах z-плоскости. См. также Dougall (1916) и Уиттекер и Ватсон (1963, п. 19.8).

Относительно асимптотических разложений решения первого рода по убывающим степеням e^{iz} и $\sin z$ см. Erdélyi (1936, 1938). Асимптотическое поведение решений уравнения Матье при $\operatorname{Im} z\longrightarrow\pm\infty$ может быть также установлено при помощи рядов по бесселевым функциям, представляющих различные решения. Необходимые общие теоремы были доказаны Мейкснером (Meixner, 1949a).

Интегральные соотношения и интегральные уравнения. Пусть $N(z, \zeta)$ — ядро, удовлетворяющее дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}-2\theta\cos(2z)\,N=\frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2}-2\theta\cos(2\zeta)\,N, \qquad (9)$$

и пусть

$$g(z)=\int_a^b N(z,\zeta)\,f(\zeta)\,d\zeta. \qquad (10)$$

Тогда, последовательно интегрируя по частям, устанавливаем, что

$$\frac{d^2 g}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]\,g=\int_a^b\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2}+[h-2\theta\cos(2\zeta)]\,N\right\}f\,d\zeta=$$
$$=\left[\frac{\partial N}{\partial\zeta}f-N\frac{df}{d\zeta}\right]_a^b+\int_a^b N\left\{\frac{d^2 f}{d\zeta^2}+[h-2\theta\cos(2\zeta)]\,f\right\}d\zeta. \qquad (11)$$

Если ядро N и пределы интегрирования a и b выбраны так, что

$$\left[\frac{\partial N}{\partial \zeta} f - N \frac{df}{d\zeta}\right]_{\zeta=a}^{\zeta=b} = 0, \tag{12}$$

то из равенства (11) следует, что если $f(z)$ является решением уравнения Матье, то $g(z)$ является решением этого же уравнения.

Случай $\operatorname{ch}(\mu\pi) = \pm 1$, приводящий к периодическим функциям Матье, будет изучен ниже (см. пп. 16 4, 16 8) В этом пункте мы будем предполагать, что $\operatorname{ch}(\mu\pi) \neq \pm 1$ и что два решения первого рода

$$u_0(z) = e^{\mu z} P(z), \qquad u_0(-z) = e^{-\mu z} P(-z) \tag{13}$$

линейно независимы. Мы знаем из (8), что при $z \to \pm i\infty$

$$u_0(z) = c_1 (\sin z)^{-1/2} \exp\left(2\vartheta^{1/2} \sin z\right) [1 + O(|\sin z|^{-1})] + \\ + c_2 (\sin z)^{-1/2} \exp\left(-2\vartheta^{1/2} \sin z\right) [1 + O(|\sin z|^{-1})], \tag{14}$$

где постоянные c_1 и c_2 могут изменяться, когда мы переходим из одной вертикальной полосы в другую.

Положим в (10) $f(\zeta) = u_0(\zeta)$ и

$$N(z, \zeta) = \exp\left[2\theta^{1/2} (\sin z \sin \zeta \sin \beta + i \cos z \cos \zeta \cos \beta)\right], \tag{15}$$

где β — фиксированное вещественное или комплексное число; тогда (15) удовлетворяет уравнению (9) Асимптотическое поведение выражения в квадратных скобках в формуле (12), когда $\operatorname{Im} \zeta \to \pm\infty$, может быть изучено при помощи (14) и (15). Положим

$$\left.\begin{aligned} &\arg\left\{\theta^{1/2}[\cos(z-\beta)+1]\right\} = \alpha_1, && \arg\left\{\theta^{1/2}[\cos(z-\beta)-1]\right\} = \alpha_2, \\ &\arg\left\{\theta^{1/2}[\cos(z+\beta)+1]\right\} = \alpha_3, && \arg\left\{\theta^{1/2}[\cos(z+\beta)-1]\right\} = \alpha_4. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Оказывается, что если $\rho = \operatorname{Re}\zeta$ удовлетворяет условиям

$$\sin(\rho - \alpha_1) < 0, \qquad \sin(\rho - \alpha_2) < 0, \tag{17}$$

то

$$\frac{\partial N}{\partial \zeta} u_0 - N \frac{du_0}{d\zeta} \to 0, \quad \text{когда} \quad \operatorname{Im}\zeta \to \infty,$$

а если $\rho' = \operatorname{Re}\zeta$ удовлетворяет условиям

$$\sin(\rho' + \alpha_3) > 0, \qquad \sin(\rho' + \alpha_4) > 0, \tag{18}$$

то

$$\frac{\partial N}{\partial \zeta} u_0 - N \frac{du_0}{d\zeta} \to 0, \quad \text{когда} \quad \operatorname{Im}\zeta \to -\infty.$$

Неравенства (17) совместны, если $\operatorname{Im}(z-\beta) \neq 0$, а неравенства (18) совместны, если $\operatorname{Im}(z+\beta) \neq 0$ Если ρ является одним из решений системы неравенств (17), то при целом n и $\rho + 2n\pi$ также является решением этих неравенств Аналогичное утверждение верно для ρ'. Это исследование показывает, что пути интегрирования в (10) можно выбрать подобными путям, встречающимся в интегральных представлениях Зоммерфельда для функций Бесселя (см. п. 7 3 5)

Пусть ρ удовлетворяет неравенствам (17). Рассмотрим интеграл

$$g(z) = \int_{\rho + i\infty}^{\rho + 2\pi + i\infty} N(z, \zeta) u_0(\zeta) \, d\zeta,$$

где путь интегрирования подобен пути C_3 из п. 7.3.5. Тогда выполняется условие (12) и $g(z)$ является решением уравнения Матье, а потому имеет вид

$$g(z)=C_1 u_0(z)+C_2 u_0(-z). \tag{19}$$

При переходе от z к $z+2\pi$ в полуплоскости $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$ величины α_1 и α_2, а следовательно, и ρ, увеличиваются на 2π:

$$g(z+2\pi)=C_1 e^{2\mu\pi}u_0(z)+C_2 e^{-2\mu\pi}u_0(-z)=\int\limits_{\varrho+2\pi+i\infty}^{\varrho+4\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta. \tag{20}$$

Заменяя в последнем интеграле ζ на $\zeta+2\pi$, получаем

$$g(z+2\pi)=\int\limits_{\varrho+i\infty}^{\varrho+2\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta+2\pi)\,d\zeta=e^{2\mu\pi}g(z). \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), убеждаемся, что $C_2=0$. Следовательно, решение первого рода удовлетворяет *сингулярному интегральному уравнению*

$$\int\limits_{\varrho+i\infty}^{\varrho+2\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta=\lambda u_0(z), \qquad \operatorname{Im}(z-\beta)<0. \tag{22}$$

Тесная связь с интегральным представлением Зоммерфельда 7.3 (23) для функций Бесселя первого рода становится ясной, если положить в (22) $\beta=0$. При этом уравнение (22) принимает вид

$$u_0(z)=\mathrm{const}\int\limits_{\rho+i\infty}^{\rho+2\pi+i\infty} \exp\left(2i\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\right)u_0(\zeta)\,d\zeta, \quad \operatorname{Im} z<0. \tag{23}$$

Это интегральное уравнение можно использовать также для того, чтобы прояснить связь между различными разложениями решений первого рода, данными в п. 16.2. Если подставить под знак интеграла в (23) вместо u_0 выражение 16.2(8) и использовать затем соотношение 7.3(23), то получится 16.2(28). Точно так же 16.2(26) получается из (22). Таким образом, интересный факт, что все разложения в п. 16.2 имеют одинаковые коэффициенты, является прямым следствием интегрального уравнения, которому удовлетворяет $u_0(z)$.

Вместо пути интегрирования типа C_3 из п. 7.3.5 можно использовать пути C_1 и C_2. Пусть ρ и ρ' удовлетворяют неравенствам (17) и (18). Рассмотрим

$$g(z)=\int\limits_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta, \qquad \operatorname{Im}(z\pm\beta)\neq 0. \tag{24}$$

Предположим сначала, что z находится в полосе $|\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|$. Когда z увеличивается в этой полосе на 2π, то либо ρ и ρ' увеличиваются на 2π, либо ρ и ρ' уменьшаются на 2π в зависимости от того, положительно или отрицательно $\operatorname{Im}\beta$. Таким образом,

$$\int\limits_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta=\lambda u_0(\pm z), \qquad |\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|, \tag{25}$$

является другим интегральным уравнением, которому удовлетворяет $u_0(z)$. Это уравнение приводит к разложениям вида 16.2(30) для решений первого рода в полосе $|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Im} \beta|$ (см. также п. 16.2). С другой стороны, если $\operatorname{Im} z > |\operatorname{Im} \beta|$ или $\operatorname{Im} z < -|\operatorname{Im} \beta|$, то при увеличении ρ на 2π либо ρ' увеличивается на 2π, а z уменьшается на 2π, либо наоборот, ρ' уменьшается на 2π, а z увеличивается на 2π. В этом случае путь интегрирования в (24) меняет как свой вид, так и положение, и интеграл не представляет больше решения первого рода. Из поведения N при $\operatorname{Im} z \to \infty$ следует, что

$$u_3(z) = \int_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z, \zeta)\, u_0(\zeta)\, d\zeta, \quad \operatorname{Im} z > |\operatorname{Im} \beta|, \tag{26}$$

экспоненциально убывает, когда $\operatorname{Im} z \to \infty$ и, следовательно, является решением третьего рода. Интегральные соотношения этого вида между решениями первого и третьего рода приводят к разложениям вида 16.2(30) для решений третьего рода.

Существуют также сингулярные интегральные уравнения для решений третьего рода, а также интегральные соотношения, выражающие решения первого рода в виде интеграла, содержащего u_3.

16.4. Периодические функции Матье

Если $i\mu$ — целое число, то решение первого рода 16.2(4) *периодично:* если $i\mu$ — четное целое число, то период равен π, а если $i\mu$ — нечетное число, то π является полупериодом (т. е. решение меняет знак, когда z увеличивается на π). В последнем случае период равен 2π. Если не оговорено противоположное, мы будем называть решение *периодическим*, если его основной период равен π или полупериод равен π. Периодические решения встречаются во многих приложениях уравнения Матье и мы посвятим пп. 16.4—16.8 изучению периодических функции Матье и соответствующих им решений второго и третьего рода.

Кривые на вещественной (h, θ)-плоскости, вдоль которых $i\mu$ является целым числом, будем называть *характеристическими кривыми.* Они разбивают (h, θ)-плоскость на области устойчивости и неустойчивости (см. п. 16.2). Если задано θ, то значения h, при которых существуют периодические решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие периодические решения называются *функциями Матье* или же *функциями Матье первого рода.* Не существует общепризнанных определений и обозначений для функций Матье. Мы будем использовать обозначения Айнса (Ince; 1932), которые применяют также Мак-Лахлан (1953) и многие другие авторы. Следует, однако, отметить, что 1) многие старые авторы применяли нормализацию, отличную от предложенной Гольдштейном и использованной Айнсом и Мак-Лахланом, которой мы следуем здесь; 2) Стреттон (Stratton) и др. (1941), а также авторы таблиц NBS использовали другие обозначения и другие нормализации. На стр. 38 таблиц NBS дано детальное сравнение трех видов обозначений.

Мы будем считать в нашем исследовании, что θ вещественно, так что и собственные значения h и соответствущие им собственные функции вещественны. Случай комплексных параметров был изучен Струттом (Strutt; 1935, 1948).

Если $u(z)$ является функцией Матье, то и

$$u(-z), \qquad u(z) \pm u(-z)$$

также являются функциями Матье. Мы можем поэтому ограничиться изучением функций Матье, являющихся четными или нечетными функциями от z. Четную функцию Матье, имеющую n нулей на промежутке $0 \leqslant z < \pi$ или на любом полуоткрытом промежутке вещественной оси длины π мы обозначим через $\mathrm{ce}_n(z, \theta)$, а нечетную фуикцию Матье с теми же свойствами — через $\mathrm{se}_n(z, \theta)$ Соответствующие собствеииые зиачения h будут обозначаться через $a_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$ соответственно. Часто мы будем писать просто $\mathrm{ce}_n(z)$, $\mathrm{se}_n(z)$, a_n, b_n, опуская θ

Функции Матье являются собственными функциями задачи Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]\,u=0 \tag{1}$$

и граничных условий

$$u(0)=u(\pi)=0 \quad \text{для} \quad \mathrm{se}_n(z, \theta), \tag{2}$$

$$\frac{du}{dz}(0)=\frac{du}{dz}(\pi)=0 \quad \text{для} \quad \mathrm{ce}_n(z, \theta). \tag{3}$$

Из общей теории Штурма—Лиувилля (см , например, Айнс, 1939, гл X) следует, что для любого $n=1, 2, \ldots$ существует определенная с точностью до постоянного множителя собственная функция $\mathrm{se}_n(z, \theta)$ и что для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ существует определенная с точностью до постоянного множителя функция $\mathrm{ce}_n(z, \theta)$ Мы дополним определение функции Матье, выбрав произвольный постоянный множитель так, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{ce}_n(0, \theta)>0, && \int_0^{2\pi}[\mathrm{ce}_n(z, \theta)]^2\,dz=\pi, \\ &\frac{d\,\mathrm{se}_n}{dz}(0, \theta)>0, && \int_0^{2\pi}[\mathrm{se}_n(z, \theta)]^2\,dz=\pi. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если $\mathrm{e}(z)$ означает либо $\mathrm{ce}_n(z)$, либо $\mathrm{se}_n(z)$, то $\mathrm{e}(z)$ и $\mathrm{e}(\pi-z)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и одинаковым граничным условиям Поэтому эти функции отличаются друг от друга лишь постояиным множителем Следовательно, $\mathrm{e}(z)$ является либо четной, либо нечетной функцией от $\pi/2-z$ и мы имеем следующие четыре случая:

$$u(0)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \mathrm{e}=\mathrm{se}_{2m+2}(z), \quad \text{период} \quad \pi, \tag{5}$$

$$u(0)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \mathrm{e}=\mathrm{se}_{2m+1}(z), \quad » \quad 2\pi, \tag{6}$$

$$\frac{du}{dz}(0)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \mathrm{e}=\mathrm{ce}_{2m+1}(z), \quad » \quad 2\pi, \tag{7}$$

$$\frac{du}{dz}(0)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \mathrm{e}=\mathrm{ce}_{2m}(z), \quad » \quad \pi. \tag{8}$$

Для каждого $m=0, 1, 2, \ldots$ существует в точности одна собственная функция для каждой из четырех граничных задач и m равно числу нулей в промежутке $0<z<\pi/2$

Из (5)—(8) мы получаем также

$$u\left(-\frac{\pi}{2}\right)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{для} \quad \mathrm{ce}_{2m+1}(z) \quad \text{и} \quad \mathrm{se}_{2m+2}(z), \tag{9}$$

$$\frac{du}{dz}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{для} \quad \mathrm{ce}_{2m}(z) \quad \text{и} \quad \mathrm{se}_{2m+1}(z), \tag{10}$$

и окончательно

$$u(-\pi)=u(\pi), \qquad \frac{du}{dz}(-\pi)=\frac{du}{dz}(\pi) \tag{11}$$

для всех функций Матье.

Используя теорему сравнения для собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, получаем $a_n < a_{n+1}$ для (3), $b_n < b_{n+1}$ для (2), $a_{2m+1} < b_{2m+2} < a_{2m+3}$ для (9) и $a_{2m} < b_{2m+1} < a_{2m+2}$ для (10). Таким образом, мы знаем взаимное расположение собственных значений, исключая взаимное расположение a_n и b_n. Айнс доказал, что если $\theta \lesseqgtr 0$, то $a_n \neq b_n$, и установил из таблиц, что если $\theta < 0$, то $a_n > b_n$. Таким образом, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \ldots, \quad \theta > 0,\\ &a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < \ldots, \quad \theta < 0,\\ &a_n, b_n \to \infty, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Относительно дальнейших исследований, оценок и асимптотических форм для собственных значений см. Strutt (1943).

Соотношения симметрии для указанных выше граничных условий даны в табл. 12.

Таблица 12

Соотношения симметрии для функций Матье

e(z)	e$(-z)$	e$(\pi-z)$	e$(\pi+z)$
ce_{2m}	ce_{2m}	ce_{2m}	ce_{2m}
ce_{2m+1}	ce_{2m+1}	$-ce_{2m+1}$	$-ce_{2m+1}$
se_{2m+1}	$-se_{2m+1}$	se_{2m+1}	$-se_{2m+1}$
se_{2m+2}	$-se_{2m+2}$	$-se_{2m+2}$	se_{2m+2}

Уравнение Матье остается инвариантным при преобразовании $\theta=-\theta'$, $z=\pi/2-z'$. Из (5)—(8) и (14) следует, что

$$a_{2m}(-\theta)=a_{2m}(\theta), \quad b_{2m+2}(-\theta)=b_{2m+2}(\theta), \quad a_{2m+1}(-\theta)=b_{2m+1}(\theta), \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} ce_{2m}(z, -\theta)&=(-1)^m ce_{2m}(\pi/2-z, \theta),\\ se_{2m+2}(z, -\theta)&=(-1)^m se_{2m+2}(\pi/2-z, \theta),\\ ce_{2m+1}(z, -\theta)&=(-1)^m se_{2m+1}(\pi/2-z, \theta). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Так как функции Матье являются собственными функциями некоторой задачи Штурма—Лиувилля, для них имеют место следующие *соотношения* *ортогональности:*

$$\int_0^{\pi/2} ce_{2k}(z)\, ce_{2m}(z)\, dz = \int_0^{\pi/2} ce_{2k+1}(z)\, ce_{2m+1}(z)\, dz =$$
$$= \int_0^{\pi/2} se_{2k+1}(z)\, se_{2m+1}(z)\, dz = \int_0^{\pi/2} se_{2k+2}(z)\, se_{2m+2}(z)\, dz = 0,$$
$$k, m = 0, 1, 2, \ldots, k \neq m, \tag{15}$$
$$\int_0^{\pi} ce_n(z)\, ce_l(z) dz = \int_0^{\pi} se_{n+1}(z)\, se_{l+1}(z)\, dz = 0,$$
$$l, n = 0, 1, 2, \ldots, l \neq n, \tag{16}$$
$$\int_0^{2\pi} ce_n(z)\, se_{l+1}(z)\, dz = 0, \quad l, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Если $i\mu$ является рациональным числом, то 16.2(4) и 16 2(5) — периодические решения уравнения Матье, период которых кратен π. Такие решения иногда называют *функциями Матье дробного порядка* (см. Мак-Лахлан, 1953, гл. IV). Свойства ортогональности для таких решений были получены Шефке (Schäfke; 1953).

Интегральные уравнения для функций Матье могут быть получены из результатов п. 16.3. Если f — любая периодическая функция Матье и $b = a + 2\pi$, N — периодическое по ζ решение уравнения 16.3(9), то выполняется условие 16.3(12), и 16.3(10) является решением уравнения Матье. Если N является также периодической функцией от z, то 16.3(10) является периодическим решением (1) и, следовательно, кратно функции Матье. В качестве ядра можно выбрать 16.3(15) при произвольном значении β или при частных значениях β, комбинации ядер 16.3(15), частные производные этих ядер по β

Таблица 13

Интегральные уравнения для функций Матье

a	b	$N(z, \zeta)$	$e(z)$
0	π	$\exp(2i\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{ch}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$ce_n(z)$
0	π	$\exp(2i\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{sh}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$se_{n+1}(z)$
0	$\pi/2$	$\cos(2\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{ch}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$ce_{2m}(z)$
0	$\pi/2$	$\sin(2\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{ch}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$ce_{2m+1}(z)$
0	$\pi/2$	$\cos(2\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{sh}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$se_{2m+1}(z)$
0	$\pi/2$	$\sin(2\theta^{1/2} \cos z \cos\zeta \cos\beta)\, \mathrm{sh}\,(2\theta^{1/2} \sin z \sin\zeta \sin\beta)$	$se_{2m+2}(z)$

и тому подобное. Промежуток можно привести, используя соотношения симметрии для функций Матье. В табл. 13 перечислены промежутки и ядра главных интегральных уравнений вида

$$\int_a^b N(z, \zeta)\, \mathrm{e}(\zeta)\, d\zeta = \lambda\, \mathrm{e}(z) \tag{18}$$

для функции Матье. Другие ядра могут быть получены путем придания специальных значений β (если $\beta=0$ или $\beta=\pi/2$, то надо предварительно разделить ядро на $\sin\beta$ или $\cos\beta$), или путем интегрирования по β. Таким путем могут быть получены ядра, содержащие функции Бесселя (Erdélyi, 1942a, Мак-Лахлан, 1953, гл. X).

16.5. Разложения функций Матье и функций второго рода

Из периодичности функций Матье и указанных в табл. 12 свойств симметрии этих функций вытекает, что эти функции можно разложить *в ряды Фурье* следующего вида:

$$\mathrm{ce}_{2m}(z, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos(2rz), \tag{1}$$

$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos[(2r+1)z]. \tag{2}$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}(z, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \sin[(2r+1)z], \tag{3}$$

$$\mathrm{se}_{2m+2}(z, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2} \sin[(2r+2)z]. \tag{4}$$

Это—формы, к которым сводится 16.2(8) при целых значениях $i\mu$. Если это окажется необходимым, мы будем указывать порядок функции Матье и значение θ и писать $A_{2r}^{2m}(\theta)$ вместо A_{2r} и т. д.

Подставляя разложения (1)—(4) в уравнение Матье 16.4(1), получаем следующие рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $A_{2r}, \ldots, B_{2r+2}$:

$$\left.\begin{aligned} &hA_0 - \theta A_2 = 0,\\ &(h-4)A_2 - \theta(2A_0 - A_4) = 0,\\ &(h-4r^2)A_{2r} - \theta(A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0, \quad h = a_{2m}(\theta), \quad r = 2, 3, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &(h-\theta-1)A_1 - \theta A_3 = 0,\\ &[h-(2r+1)^2]A_{2r+1} - \theta(A_{2r-1} + A_{2r+3}) = 0,\\ &\qquad h = a_{2m+1}(\theta), \quad r = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &(h+\theta-1)B_1 - \theta B_3 = 0,\\ &[h-(2r+1)^2]B_{2r+1} - \theta(B_{2r-1} + B_{2r+3}) = 0,\\ &\qquad h = b_{2m+1}(\theta), \quad r = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &(h-4)B_2 - \theta B_4 = 0,\\ &[h-(2r+2)^2]B_{2r+2} - \theta(B_{2r} + B_{2r+4}) = 0,\\ &\qquad h = b_{2m+2}(\theta), \quad r = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Как и в случае 15.3(13), каждое из рекуррентных соотношений приводит к выражению отношения двух последовательных коэффициентов в виде бесконечной непрерывной дроби, содержащей h, а подстановка в первое уравнение каждой из систем (5)—(8) приводит к трансцендентному уравнению для h, которое можно использовать для определения собственных значений. В случае (5), например, трансцендентное уравнение для h имеет вид

$$h=\cfrac{-\theta^2/2}{1-\cfrac{h}{4}-\cfrac{\theta^2/64}{1-\cfrac{h}{16}-\cfrac{\theta^2/576}{1-\cfrac{h}{36}-\dots}}}\qquad h=a_{2m}(\theta).$$

Если h определено, то мы знаем отношение последовательных коэффициентов. Для определения самих этих коэффициентов надо дополнить (5)—(8) соотношениями

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}>0,\qquad 2[A_0]^2+\sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r}]^2=1, \tag{9}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}>0,\qquad \sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r+1}]^2=1, \tag{10}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)B_{2r+1}>0,\qquad \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+1}]^2=1, \tag{11}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}>0,\qquad \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+2}]^2=1, \tag{12}$$

вытекающими из 16.4(4). Относительно более детального описания вычислений см. Ince (1932), Blanch (1946) и Мак-Лахлан (1953). Относительно списка числовых таблиц см. Bickley (1945), а список литературы дан в таблицах NBS (1951).

Из бесконечных непрерывных дробей следует

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+2}}{A_{2r}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+1}}{A_{2r-1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+1}}{B_{2r-1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+2}}{B_{2r}}=-\frac{\theta}{4}, \tag{13}$$

так что ряды (1)—(4) сходятся во всей комплексной плоскости.

Разложения функций Матье в *ряды функций Бесселя* могут быть получены из 16.2(26), (28), (29), если положить $i\mu=0$, 1 и использовать симметрию функций Матье, или же из интегральных уравнений, указанных в табл. 13, путем подстановки под знаком интеграла разложений Фурье (1)—(4). Следующие разложения вытекают из интегральных уравнений, если использовать предельные формы ядер при $\beta=0$, $\beta=\pi/2$:

$$\operatorname{ce}_{2m}(z,\theta)=\frac{\operatorname{ce}_{2m}(\pi/2,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r}J_{2r}(2\theta^{1/2}\cos z)=$$

$$=\frac{\operatorname{ce}_{2m}(0,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r}I_{2r}(2\theta^{1/2}\sin z), \tag{14}$$

$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z,\ \theta)=-\frac{\mathrm{ce}'_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}J_{2r+1}(2\theta^{1/2}\cos z)=$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(0,\ \theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)}\operatorname{ctg} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)A_{2r+1}I_{2r+1}(2\theta^{1/2}\sin z),\qquad(15)$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}(z,\ \theta)=\frac{\mathrm{se}_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)}{\theta^{1/2}B_1^{2m+1}(\theta)}\operatorname{tg} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)B_{2r+1}J_{2r+1}(2\theta^{1/2}\cos z)=$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2m+1}(0,\ \theta)}{\theta^{1/2}B_1^{2m+1}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}I_{2r+1}(2\theta^{1/2}\sin z),\qquad(16)$$

$$\mathrm{se}_{2m+2}(z,\theta)=-\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(\pi/2,\ \theta)}{\theta B_2^{2m+2}(\theta)}\operatorname{tg} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}J_{2r+2}(2\theta^{1/2}\cos z)=$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(0,\ \theta)}{\theta B_2^{2m+2}(\theta)}\operatorname{ctg} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}I_{2r+2}(2\theta^{1/2}\sin z).\qquad(17)$$

В этих формулах положено $\mathrm{e}'=\frac{de}{dz}$. Постоянный множитель λ в 16.4(18) в каждом случае определяется путем подстановки $z=0$ или $z=\pi/2$ в само разложение или результат его почленного дифференцирования. Бесконечные ряды по функциям Бесселя сходятся при всех значениях z.

Имеется значительное число разложений функций Матье по *произведениям функций Бесселя* вида 16.2(33), (35). Наиболее важными среди них являются

$$\mathrm{ce}_{2m}(z,\theta)=\frac{p_{2m}}{A_0^{2m}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}J_r(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_r(\theta^{1/2}e^{-iz}),\qquad(18)$$

$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z,\ \theta)=\frac{p_{2m+1}}{A_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}\times$$
$$\times[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-iz})+J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})],\qquad(19)$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}(z,\ \theta)=-\frac{s_{2m+1}}{iB_2^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}\times$$
$$\times[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-iz})-J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})],\qquad(20)$$

$$\mathrm{se}_{2m+2}(z,\ \theta)=\frac{s_{2m+2}}{iB_2^{2m+2}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+2}\times$$
$$\times[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_{r+2}(\theta^{1/2}e^{-iz})-J_{r+2}(\theta^{1/2}e^{iz})\,J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})].\qquad(21)$$

Множители p_n и s_n были определены Мак-Лахланом (1953, стр. 438 и далее), который сравнил асимптотические формы обеих частей разложений

(18)—(21). С помощью результатов п. 16.7 получаем

$$\left.\begin{aligned} A_0^{2m} p_{2m} &= \mathrm{ce}_{2m}(0)\,\mathrm{ce}_{2m}(\pi/2), \\ \theta^{1/2} A_1^{2m+1} p_{2m+1} &= -\mathrm{ce}_{2m+1}(0)\,\mathrm{ce}'_{2m+1}(\pi/2), \\ \theta^{1/2} B_1^{2m+1} s_{2m+1} &= \mathrm{se}'_{2m+1}(0)\,\mathrm{se}_{2m+1}(\pi/2), \\ \theta B_2^{2m+2} s_{2m+2} &= \mathrm{se}'_{2m+2}(0)\,\mathrm{se}'_{2m+2}(\pi/2). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ряды (18)—(21) сходятся при всех значениях z. Эти ряды и разложения в ряды по произведениям функций Бесселя могут быть получены с помощью интегральных уравнений, ядра которых содержат функции Бесселя (Мак-Лахлан, 1953, стр. 216 и далее).

Айнс доказал (см., например, Мак Лахлан, 1953, гл. VII), что при $\theta \neq 0$ общее решение уравнения Матье никогда не является периодическим. Таким образом, если $\mathrm{e}(z)$—любая функция Матье первого рода, то второе решение уравнения Матье непериодично Так как функции Матье второго рода менее важны, мы не будем останавливаться на деталях, касающихся этих функций, и отошлем читателя к книге Мак-Лахлана или к аналогичным работам, связанным с модифицированным уравнением Матье, см п. 16 6.

Есть много путей для построения *функций Матье второго рода*. Вырожденная форма теоремы Флоке устанавливает, что в случае, когда $i\mu$—целое число и $\mathrm{e}(z)$—соответствующая функция Матье первого рода, второе решение можно искать в виде $z\,\mathrm{e}(z)+f(z)$. Здесь $f(z)$—периодическая функция, которая разлагается в ряд Фурье по синусам, если $\mathrm{e}(z)$ разлагается в ряд по косинусам и *обратно*. Другой метод основан на интегральных соотношениях вида 16.3(26). Простейший и зачастую наиболее эффективный метод основан на том замечании, что ряды по функциям Бесселя, данные в этом пункте, остаются формальными решениями уравнения Матье, если заменить функции Бесселя первого рода функциями Бесселя второго или третьего родов. Получающиеся таким путем из (14)—(17) ряды сходятся, если $|\cos z| > 1$ или $|\sin z| > 1$ соответственно, и неудобны для вычисления функций Матье второго и третьего рода при вещественных z. С другой стороны, ряды по произведениям функций Бесселя, в которых один множитель является функцией Бесселя первого рода, а второй множитель—функцией Бесселя второго или третьего рода, такие, как 16 2(35), сходятся для всех значений z. Эти ряды весьма удобны для вычислений.

§ 16.6. Модифицированные функции Матье

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} - [h - 2\theta\,\mathrm{ch}\,(2z)]\,u = 0 \tag{1}$$

называют *модифицированным уравнением Матье*; оно отличается от уравнения 16.2(1) лишь тем, что z заменено в нем на iz. Соответственно результаты пп. 16.2 и 16.3 применяются, с небольшими изменениями, к этому уравнению. Часто уравнение (1) появляется в связи с уравнением Матье, когда h принимает одно из собственных значений a_n или b_n. Мы ограничимся этим случаем.

Модифицированные функции Матье первого рода определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ce}_n(z,\ \theta) &= \mathrm{ce}_n(iz,\ \theta), & h &= a_n(\theta),\\ \mathrm{Se}_n(z,\ \theta) &= -i\,\mathrm{se}_n(iz,\ \theta), & h &= b_n(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Разложения модифицированных функций Матье в ряды Фурье, ряды по бесселевым функциям и в ряды по произведениям бесселевых функций вытекают из результатов п. 16.5 и перечислены в книге Мак-Лахлана (1953, пп. 2.30, 2.31, гл. VIII и XIII).

Модифицированные функции Матье второго рода получаются путем замены в 16.5(11)—(17) функций Бесселя первого рода функциями Бесселя второго рода. Аналогично функции Бесселя третьего рода входят в определение модифицированных функций Матье третьего рода. Мак-Лахлан использует следующие обозначения. Он обозначает через Fe функции, соответствующие Ce, а через Ge функции, соответствующие Se, и добавляет букву y для функций второго рода и букву k для функций третьего рода.

Модифицированные функции Матье второго рода:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fey}_{2m}(z,\ \theta) &= \frac{\mathrm{ce}_{2m}(\pi/2,\ \theta)}{A_0^{2m}(\theta)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r} Y_{2r}(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z) = \\ &= \frac{\mathrm{ce}_{2m}(0,\ \theta)}{A_0^{2m}(\theta)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} Y_{2r}(2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z) = \\ &= \frac{p_{2m}}{A_0^{2m}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r} J_{2r}(\theta^{1/2}e^{-z})\, Y_{2r}(\theta^{1/2}e^{z}),\ h = a_{2m}(\theta), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\ \theta) &= -\frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1} Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z) = \\ &= \frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(0,\ \theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)} \operatorname{cth} z \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1} Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z) = \\ &= \frac{p_{2m+1}}{A_1^{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1} [J_r(\theta^{1/2}e^{-z})\, Y_{r+1}(\theta^{1/2}e^{z}) + \\ &\qquad + J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-z})\, Y_r(\theta^{1/2}e^{z})], \qquad h = a_{2m+1}(\theta), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\ \theta) &= \\ &= \frac{\mathrm{se}_{2m+1}(\pi/2.\ \theta)}{\theta^{1/2}B_1^{2m+1}} \operatorname{th} z \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1} Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z) = \\ &= \frac{\mathrm{se}'_{2m+1}(0,\ \theta)}{\theta^{1/2}B_1^{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z) = \\ &= \frac{s_{2m+1}}{B_1^{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1} [J_r(\theta^{1/2}e^{-z})\, Y_{r+1}(\theta^{1/2}e^{z}) - \\ &\qquad - J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-z})\, Y_r(\theta^{1/2}e^{z})], \qquad h = b_{2m+1}(\theta), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathrm{Gey}_{2m+2}(z, \theta)=$$
$$=-\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(\pi/2, \theta)}{\theta B_2^{2m+2}}\operatorname{th} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}Y_{2r+2}(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z)=$$
$$=\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(0, \theta)}{\theta B_2^{2m+2}}\operatorname{cth} z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}Y_{2r+2}(2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z)=$$
$$=-\frac{s_{2m+2}}{B_2^{2m+2}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+2}[J_r(\theta^{1/2}e^{-z})Y_{r+2}(\theta^{1/2}e^{z})-$$
$$-J_{r+2}(\theta^{1/2}e^{-z})Y_r(\theta^{1/2}e^{z})], \qquad h=b_{2m+2}(\theta). \tag{6}$$

В каждой из этих четырех групп разложений первый ряд сходится, если $|\operatorname{ch} z|>1$, а второй—если $|\operatorname{sh} z|>1$, третий—для всех значений z. В первых двух рядах мы предполагаем также $\operatorname{Re} z>0$.

Имеется много *модифицированных функций Матье третьего рода*. Функции, получающиеся путем замены в рядах для Fey_n и Gey_n функций Y_ν на $H_\nu^{(j)}$, $j=1, 2$, обозначаются обычно через $\mathrm{Me}_n^{(j)}$ и $\mathrm{Ne}_n^{(j)}$, $j=1, 2$. Функции, получаемые путем замены $Y_{2r}(w)$ на $(-1)^r\pi^{-1}K_{2r}(-iw)$, а $Y_{2r+1}(w)$ на $(-1)^r\pi^{-1}K_{2r+1}(-iw)$, в первых двух рядах, представляющих Fey_n и Gey_n, обозначаются соответственно Fek_n и Gek_n. Так как из 7.2(5) и 7.2(17) следует, что

$$J_\nu(w)+iY_\nu(w)=H_\nu^{(1)}(w)=\frac{2}{\pi}i^{-\nu-1}K_\nu(-iw),$$

то различные модифицированные функции Матье получаются из соотношений

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Ce}_{2m}(z, \theta)+i\,\mathrm{Fey}_{2m}(z, \theta)=\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z, \theta)=-2i\,\mathrm{Fek}_{2m}(z, \theta),\\
&\mathrm{Ce}_{2m+1}(z, \theta)+i\,\mathrm{Fey}_{2m+1}(z, \theta)=\mathrm{Me}_{2m+1}^{(1)}(z, \theta)=-2\mathrm{Fek}_{2m+1}(z, \theta),\\
&\mathrm{Se}_{2m+1}(z, \theta)+i\,\mathrm{Gey}_{2m+1}(z, \theta)=\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(1)}(z, \theta)=-2\mathrm{Gek}_{2m+2}(z, \theta),\\
&\mathrm{Se}_{2m+2}(z, \theta)+i\,\mathrm{Gey}_{2m+2}(z, \theta)=\mathrm{Ne}_{2m+2}^{(1)}(z, \theta)=-2i\mathrm{Gek}_{2m+2}(z, \theta).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Относительно разложений различных модифицированных функций Матье третьего рода см Мак-Лахлан (1953, пп 8 14, 8.30, 13 30, 13 40).

Асимптотическое поведение модифицированных функций Матье при $z\to\infty$ может быть выведено из их разложений в ряды по функциям Бесселя или в ряды по произведениям функций Бесселя (см. п. 16 7).

Существует много *интегральных соотношений* между функциями Матье и модифицированными функциями Матье, а также между различными модифицированными функциями Матье. Если $N(z, \zeta)$ является ядром на промежутке (a, b), таким, как в 16.4(18), то

$$\int_b^a N(iz, \zeta)\,\mathrm{e}(\zeta)\,d\zeta$$

отличается лишь постоянным множителем от модифицированной функции Матье первого рода Интегральные соотношения, возникающие из предельных случаев $\beta=0$, $\beta=\pi/2$ ядер в табл. 13 п. 16.4, перечислены в книге Мак-Лахлана (1953, п. 10 20).

Пусть $\theta > 0$, $z > 0$. Тогда сходятся интегралы

$$\int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Ce}_n(\zeta, \theta)\, d\zeta,$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sh} z \operatorname{sh} \zeta \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Se}_{n+1}(\zeta, \theta)\, d\zeta.$$

Если подставить вместо модифицированных функций Матье первого рода их разложения в ряды Фурье и вычислить получающиеся интегралы с помощью формулы 7.12(21), то получаем следующие интегральные соотношения:

$$\pi A_0^{2m} \operatorname{Fek}_{2m}(z, \theta) = \\ = \operatorname{ce}_{2m}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Ce}_{2m}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \qquad \theta > 0, \qquad z > 0, \tag{8}$$

$$\pi A_1^{2m+1} \operatorname{Fek}_{2m+1}(z, \theta) = \\ = -\theta^{1/2} \operatorname{ce}'_{2m+1}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Ce}_{2m+1}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \\ \theta > 0, \qquad z > 0, \tag{9}$$

$$\pi B_1^{2m+1} \operatorname{Gek}_{2m+1}(z, \theta) = \\ = -2i \operatorname{se}_{2m+1}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \operatorname{sh} z \operatorname{sh} \zeta \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Se}_{2m+1}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \\ \theta > 0, \qquad z > 0, \tag{10}$$

$$\pi B_2^{2m+2} \operatorname{Gek}_{2m+2}(z, \theta) = \\ = -2i\theta^{-1/2} \operatorname{se}'_{2m+2}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \operatorname{sh} z \operatorname{sh} \zeta \exp(2i\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Se}_{2m+2}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \\ \theta > 0, \qquad z > 0. \tag{11}$$

Отделим в соотношениях (8)—(11) вещественную и мнимую части с помощью равенства (7). Мы получим тогда следующую группу интегральных соотношений:

$$\pi A_0^{2m} \operatorname{Fey}_{2m}(z, \theta) = \\ = -2 \operatorname{ce}_{2m}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \cos(2\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Ce}_{2m}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \quad \theta > 0, \quad z > 0, \tag{12}$$

$$\pi A_1^{2m+1} \operatorname{Fey}_{2m+1}(z, \theta) = \\ = 2\theta^{-1/2} \operatorname{ce}'_{2m+1}(\pi/2, \theta) \int_0^\infty \sin(2\theta^{1/2} \operatorname{ch} z \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{Ce}_{2m+1}(\zeta, \theta)\, d\zeta, \\ \theta > 0, \qquad z > 0, \tag{13}$$

$$\pi B_1^{2m+1}\,\mathrm{Gey}_{2m+1}{}'(z,\ \theta)=$$
$$=4\mathrm{se}_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)\int_0^\infty \mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,\zeta\cos(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\,\mathrm{Se}_{2m+1}(\zeta,\ \theta)\,d\zeta,$$
$$\theta>0,\qquad z>0, \tag{14}$$

$$\pi B_2^{2m+2}\,\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\ \theta)=$$
$$=-4\theta^{-1/2}\,\mathrm{se}'_{2m+2}(\pi/2,\ \theta)\int_0^\infty \mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,\zeta\sin(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\,\mathrm{Se}_{2m+2}(\zeta,\ \theta)\,d\zeta,$$
$$\theta>0,\qquad z>0, \tag{15}$$

а также интегральные уравнения

$$\pi A_0^{2m}\,\mathrm{Ce}_{2m}(z,\ \theta)=$$
$$=2\mathrm{ce}_{2m}(z,\ \theta)\int_0^\infty \sin(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\,\mathrm{Ce}_{2m}(\zeta,\ \theta)\,d\zeta,\qquad \theta>0,\qquad z>0, \tag{16}$$

$$\pi A_1^{2m+1}\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(z,\ \theta)=$$
$$=2\theta^{-1/2}\,\mathrm{ce}'_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)\int_0^\infty \cos(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(\zeta,\ \theta)\,d\zeta,$$
$$\theta>0,\qquad z>0, \tag{17}$$

$$\pi B_1^{2m+1}\,\mathrm{Se}_{2m+1}(z,\ \theta)=$$
$$=-4\mathrm{se}_{2m+1}(\pi/2,\ \theta)\int_0^\infty \mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,\zeta\sin(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\mathrm{Se}_{2m+1}(\zeta,\ \theta)\,d\zeta,$$
$$\theta>0,\qquad z>0, \tag{18}$$

$$\pi B_2^{2m+2}\mathrm{Se}_{2m+2}(z,\ \theta)=$$
$$=-4\theta^{-1/2}\mathrm{se}'_{2m+2}(\pi/2,\ \theta)\int_0^\infty \mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,\zeta\cos(2\theta^{1/2}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,\zeta)\mathrm{Se}_{2m+2}(\zeta,\theta)\,d\zeta,$$
$$\theta>0,\qquad z>0. \tag{19}$$

Относительно интегральных соотношений при отрицательном θ см Мак-Лахлан (1953, гл. X). Относительно интегральных соотношений с ядрами, содержащими функции Бесселя, см. Мак-Лахлан (1953, гл. X) и Meixner (1951a). Мейкснер (Meixner; 1951a) вычислил также некоторые интегралы, содержащие произведения функций Матье.

16.7. Приближения и асимптотические формы

Приближения при малых $|\theta|$. Если $\theta=0$, то уравнение Матье сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &a_n(0)=b_n(0)=n^2,\\ &\mathrm{ce}_0(z,\ 0)=2^{-1/2},\ \mathrm{ce}_n(z,\ 0)=\cos(nz),\ \mathrm{se}_n(z,\ 0)=\sin(nz),\ n=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Отправляясь от соотношений (1), можно разложить собственные значения и собственные функции по степеням θ. Стретт (1935, стр. 42) доказал, что

$$a_n(\theta)=n^2+O(|\theta|^n), \quad b_n(\theta)=n^2+O(|\theta|^n), \quad \theta\to 0. \tag{2}$$

Отсюда видно, что характеристические кривые, соответствующие ce_n и se_n, имеют в точке $h=n^2$, $\theta=0$ касание порядка $n-1$ Точка $h=n^2$, $\theta=0$ является единственной общей точкой этих двух характеристических кривых. Стретт (1935, стр. 38 и далее) дал также разложение для $a_n(\theta)$ до θ^6 для $ce_n(z, \theta)/A_n^n$ до θ^4 и для некоторых коэффициентов A_r^n/A_n^n до θ^4 или θ^5. Числовые границы для O-члена в (2) получены Вайнштейном (Weinstein; 1935).

Асимптотические формы при больших значениях $|z|$. Асимптотическое поведение функций Матье при $\operatorname{Im} z\to\infty$ или модифицированных функций Матье при $\operatorname{Re} z\to\infty$ можно вывести из разложений по функциям Бесселя с помощью доказанной Мейкснером (Meixner; 1949a) общей теоремы. Она устанавливает при некоторых условиях, что можно получить асимптотические разложения рядов, подобных 16 6(3), путем подстановки в эти ряды асимптотических разложений функций Бесселя.

Для того чтобы получить главный член асимптотических разложений модифицированных функций Матье при $\operatorname{Re} z\to\infty$, заметим, что в силу 7.13(3)

$$J_\nu(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z)\sim\theta^{-1/4}(\pi\operatorname{ch} z)^{-1/2}\cos\left(2\theta^{1/2}\operatorname{ch} z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sim$$
$$\sim\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos\left(\theta^{1/2}e^z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right),$$
$$\operatorname{Re} z\to\infty, \quad -\pi<\operatorname{Im} z<\pi.$$

Подставляя это в 16.5(14), получаем

$$Ce_{2m}(z, \theta)=ce_{2m}(iz, \theta)\sim\frac{ce_{2m}(0)\,ce_{2m}(\pi/2)}{(\pi/2)^{1/2}\,\theta^{1/4}A_0^{2m}}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-\pi/4).$$

С другой стороны, применяя 16.5(18) и замечая, что при больших значениях $\operatorname{Re} z$ первый член ряда доминирует над остальными, имеем

$$Ce_{2m}(z, \theta)=ce_{2m}(iz, \theta)\sim p_{2m}(\pi/2)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-\pi/4).$$

Сравнивая последние два равенства, получаем первое соотношение 16.5(22), остальные могут быть проверены аналогично. Для того чтобы получить асимптотические формы модифицированных функций Матье второго рода из 16 6(3)—(6), применим вместо 7.13(3) формулу 7.13(4), что сводится к замене

$$\cos\left(\theta^{1/2}e^z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right) \text{ на } \sin\left(\theta^{1/2}e^z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right).$$

Этим путем получаются следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned}
&Ce_{2m}(z, \theta)\sim p_{2m}(\pi/2)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-\pi/4),\\
&Ce_{2m+1}(z, \theta)\sim p_{2m+1}(\pi/2)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-3\pi/4),\\
&Se_{2m+1}(z, \theta)\sim s_{2m+1}(\pi/2)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-3\pi/4),\\
&Se_{2m+2}(z, \theta)\sim s_{2m+2}(\pi/2)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-z/2}\cos(\theta^{1/2}e^z-\pi/4),\\
&\qquad\operatorname{Re} z\to\infty, \quad -\pi<\frac{1}{2}\arg\theta+\operatorname{Im} z<\pi,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Fey}_{2m}(z,\ \theta) \sim p_{2m}(\pi/2)^{-1/2}\,\theta^{-1/4}\,e^{-z/2}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\pi/4),\\
&\mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\ \theta) \sim p_{2m+1}(\pi/2)^{-1/2}\,\theta^{-1/4}\,e^{-z/2}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-3\pi/4),\\
&\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\ \theta) \sim s_{2m+1}(\pi/2)^{-1/2}\,\theta^{-1/4}\,e^{-z/2}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-3\pi/4),\\
&\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\ \theta) \sim s_{2m+2}(\pi/2)^{-1/2}\,\theta^{-1/4}\,e^{-z/2}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\pi/4),\\
&\qquad\qquad \mathrm{Re}\,z \longrightarrow \infty, \quad -\pi < \frac{1}{2}\arg\theta + \mathrm{Im}\,z < \pi.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Асимптотические ряды по убывающим степеням e^z или $\operatorname{ch} z$ могут быть получены из модифицированного уравнения Матье 16.6(1) (см. Мак-Лахлан (1953, гл. XI)).

Асимптотические формы при больших значениях $|\theta|$. Асимптотическое поведение функций Матье и собственных значений h при больших вещественных значениях θ было изучено Джеффрисом, Гольдштейном и Айнсом. Результаты этих исследований и ссылки на литературу приведены у Стретта (1935, стр. 42 и далее) и Мак-Лахлана (1953, пп. 11.40—11.44).

Основными результатами являются:

$$a_n(\theta) \sim b_{n+1}(\theta) \sim -2\theta + 2(2n+1)\,\theta^{1/2} - \frac{1}{4}(2n^2+2n+1), \quad \theta \longrightarrow \infty, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ce}_n(z,\ \theta) \sim C_n(\cos z)^{-n-1}\,\{[\cos^{2n+1}(z/2+\pi/4)]\exp(2\theta^{1/2}\sin z)+\\
&\qquad +[\sin^{2n+1}(z/2+\pi/4)]\exp(-2\theta^{1/2}\sin z)\},\\
&\mathrm{se}_{n+1}(z,\ \theta) \sim S_{n+1}\cos^{-n-1}z\,\{[\cos^{2n+1}(z/2+\pi/4)]\exp(2\theta^{1/2}\sin z)-\\
&\qquad -[\sin^{2n+1}[z/2+\pi/4)]\exp(-2\theta^{1/2}\sin z)\},\\
&\qquad\qquad -\pi/2 < z < \pi/2, \quad \theta \longrightarrow \infty,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Ce}_n(z,\ \theta) \sim\\
&\quad \sim C_n 2^{1/2-n}(\operatorname{ch} z)^{-1/2}\cos[2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z-(2n+1)\operatorname{arctg}(\operatorname{th} z/2)],\\
&\mathrm{Se}_{n+1}(z,\ \theta) \sim\\
&\quad \sim S_{n+1}2^{1/2-n}(\operatorname{ch} z)^{-1/2}\sin[2\theta^{1/2}\operatorname{sh} z-(2n+1)\operatorname{arctg}(\operatorname{th} z/2)],\\
&\qquad\qquad z > 0, \quad \theta \longrightarrow \infty.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

При больших значениях z сравнение (7) и (3) приводит к

$$C_n = (-1)^m\,2^{n-1/2}\,\theta^{-1/4}\,\pi^{-1/2}\,p_n, \qquad S_n = (-1)^m\,2^{n-3/2}\,\theta^{-1/4}\,\pi^{-1/2}\,s_n, \tag{8}$$

где $m=[n/2]$, т. е. $n=2m$ или $n=2m+1$ в зависимости от того, четно или нечетно n.

Лангер (Langer; 1934) изучил асимптотическое поведение функций Матье при больших вещественных значениях θ, в то время как z может быть комплексным числом.

Равенство (6) описывает поведение функций Матье, когда $-1 < \cos z < 1$, и (7), когда $\cos z > 1$. Обе формулы теряют силу вблизи значений z, для которых $\cos z = 1$. Для того чтобы получить формулы, справедливые в областях, содержащих эту точку, Мейкснер (Meixner, 1948) и Сипс (Sips; 1949) разложили функции Матье в ряды по функциям параболического цилиндра. Эти разложения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ce}_n(z,\ \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r D_r\,(2\theta^{1/2}\cos z),\\
&\mathrm{se}_{n+1}(z,\ \theta) = \sin z\sum_{r=0}^{\infty} \beta_r D_r\,(2\theta^{1/2}\cos z),
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где r пробегает четные или нечетные целые числа в зависимости от того, четно или нечетно n, а α_r и β_r удовлетворяют рекуррентным соотношениям, содержащим пять членов Если θ велико, то доминирующий член разложений (9) соответствует значению $r=n$, и мы получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ce}_n(z,\ \theta) &\sim \alpha_n D_n(2\theta^{1/2}\cos z), \\ \mathrm{se}_{n+1}(z,\ \theta) &\sim \beta_n \sin z\, D_n(2\theta^{1/2}\cos z), \quad \theta\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Коэффициенты α_n и β_n можно определить, положив $z=\pi/2$ (если необходимо, то после дифференцирования) и использовав значения $D_\nu(0)$, $D'_\nu(0)$, полученные в 8.2(4).

16.8. Ряды, интегралы, задачи разложения

Многие из известных *бесконечных рядов*, содержащих функции Матье, можно интерпретировать как суперпозиции решений волнового уравнения. Как и в п. 16.1.1, обозначим через x, y декартовы координаты, через u, v — эллиптические координаты и через ρ, φ — полярные координаты, так что

$$x+iy=c\,\mathrm{ch}\,(u+iv)=\rho e^{i\varphi}. \tag{1}$$

Типичными решениями двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\kappa^2 W=0 \tag{2}$$

в эллиптических координатах являются $U(u)V(v)$, где V — функция Матье, U — присоединенная функция Матье и

$$\theta=\left(\frac{1}{2}\kappa c\right)^2 \tag{3}$$

в уравнении Матье. Типичными решениями в полярных координатах являются

$$Z_\nu(\kappa\rho)\,e^{i\nu\varphi},$$

где Z_ν — функция Бесселя порядка ν. Замечание, что эллиптические цилиндрические волны могут быть получены путем суперпозиции (круговых) цилиндрических волн и обратно, приводит к большому числу важных бесконечных рядов. Эллиптические цилиндрические волны могут быть аналогичным путем связаны с плоскими волнами.

Рассмотрим

$$W=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}(\theta)H_{2r}^{(j)}(\kappa\rho)\cos(2r\varphi), \qquad j=1,\ 2, \tag{4}$$

как функцию от u и v и вспомним, что из (1) следует

$$\kappa\rho=2\,[\theta\,\mathrm{ch}\,(u+iv)\,\mathrm{ch}\,(u-iv)]^{1/2}, \qquad e^{2i\varphi}=\frac{\mathrm{ch}\,(u+iv)}{\mathrm{ch}\,(u-iv)}. \tag{5}$$

Таким образом, (4) является разложением вида 16.2(30) и при вещественных u и v (или, более общо, при $|\mathrm{Im}\,v|<|\mathrm{Re}\,u|$ и фиксированном u сумма этого разложения кратна $\mathrm{ce}_{2m}(v,\ \theta)$. Так как

$$W=U(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v,\ \theta),$$

то из 16.1.1 следует, что $U(u)$ является присоединенной функцией Матье. Асимптотическое поведение ряда (4), когда $u\to\infty$ и, следовательно, $\rho\to\infty$, показывает, что $U(u)$ должно быть присоединенной функцией Матье третьего рода, а именно

$$W = \mathrm{const}\ \mathrm{Me}_{2m}^{(j)}(u,\ \theta)\,\mathrm{ce}_{2m}(v,\ \theta),\quad j=1,\ 2.$$

Чтобы определить постоянный множитель, надо перейти к пределу при $u\to\infty$, $\rho\to\infty$, использовать формулы 7.13(1), (2) в левой части и 16.7(3), (4) в правой части. Это вычисление и аналогичные вычисления для ce_{2m+1}, se_{2m+1}, se_{2m+2} приводят к следующим разложениям, где для краткости в обозначениях функций Матье и в коэффициентах опущено переменное θ,

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Me}_{2m}^{(j)}(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v) &= p_{2m}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}\,H_{2r}^{(j)}(\kappa\rho)\cos(2r\varphi),\\
\mathrm{Me}_{2m+1}^{(j)}(u)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(v) &= p_{2m+1}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{2m+1}H_{2r+1}^{(j)}(\kappa\rho)\cos[(2r+1)\varphi],\\
\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(j)}(u)\,\mathrm{se}_{2m+1}(v) &= s_{2m+1}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}^{2m+1}H_{2r+1}^{(j)}(\kappa\rho)\sin[(2r+1)\varphi],\\
\mathrm{Ne}_{2m+2}^{(j)}(u)\,\mathrm{se}_{2m+2}(v) &= -s_{2m+2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+2}^{2m+2}H_{2r+2}^{(j)}(\kappa\rho)\sin[(2r+2)\varphi],\\
&\qquad j=1,\ 2.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Здесь p и s имеют тот же смысл, что и в 16.5(22).

При $v=0$ и $v=\pi/2$ разложения (6) сводятся к 16 5(14)—(17), а при $u\to\infty$ (6) сводятся к 16.5(1)—(4), так что многие важные разложения функций Матье являются частными или предельными случаями разложений (6).

Мейкснер (Meixner; 1949a, см. также Schäfke, 1953) обобщил разложение (6) в двух направлениях. Он использовал систему полярных координат, полюс которой не совпадает с центром конфокального семейства эллипсов и гипербол, и разложил произведение $U(u)\,V(v)$, где $V(v)$ — решение первого рода общего уравнения Матье (т. е. с произвольно заданными h и θ), а $U(u)$ — решение третьего рода соответствующего модифицированного уравнения. Его разложения имеют вид

$$U(u)\,V(v)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r H_{r-i\mu}^{(j)}(\kappa\rho)\,e^{(r-i\mu)\,i\varphi},$$

где

$$\kappa\rho=2\left\{\theta\,[\mathrm{ch}(u+iv)-\alpha]\,[\mathrm{ch}(u-iv)-\alpha]\right\}^{1/2},$$

$$e^{2i\varphi}=\frac{\mathrm{ch}(u+iv)-\alpha}{\mathrm{ch}(u-iv)-\alpha},$$

и μ — характеристический показатель общего уравнения Матье. Коэффициенты d_r представлены в статье Мейкснера в виде

$$d_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n c_n J_{2n-r}(2\alpha\theta),$$

где c_n — встречающиеся в 16.2(8) коэффициенты и $V(z)$ — решение общего уравнения Матье, представляемое формулой 16.2(8).

Представление эллиптических цилиндрических волн как суперпозиции плоских волн чаще приводит к интегралам, чем к рядам. Рассмотрим

$$W=\int_0^{2\pi}\exp[i\kappa(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]\,\mathrm{ce}_n(\alpha,\ \theta)\,d\alpha \qquad (7)$$

как функцию от u и v. Мы видим из табл. 13 п. 16.4, что W при фиксированном u является кратным от $\mathrm{ce}_n(v)$, а при фиксированном v — кратно $\mathrm{Ce}_n(u)$. Таким образом,

$$W = \mathrm{const}\,\mathrm{Ce}_n(u)\,\mathrm{ce}_n(v).$$

Постоянный множитель можно найти, положив $x=y=0$, т. е. $u=0$, $v=\pi/2$ в функциях W или $\partial W/\partial v$ в зависимости от того, четно или нечетно n. Проводя аналогичную процедуру с se_{n+1} и используя соотношения симметрии из табл. 12 п. 16.4, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Ce}_{2m}(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v)= \\
&\qquad = 2\pi^{-1}p_{2m}\int_0^{\pi/2}\cos(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\,d\alpha, \\
&\mathrm{Ce}_{2m+1}(u)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(v)= \\
&\qquad = 2\pi^{-1}p_{2m+1}\int_0^{\pi/2}\sin(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\,d\alpha, \\
&\mathrm{Se}_{2m+1}(u)\,\mathrm{se}_{2m+1}(v)= \\
&\qquad = 2\pi^{-1}s_{2m+1}\int_0^{\pi/2}\cos(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\,d\alpha, \\
&\mathrm{Se}_{2m+2}(u)\,\mathrm{se}_{2m+2}(v)= \\
&\qquad = -2\pi^{-1}s_{2m+2}\int_0^{\pi/2}\sin(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{se}_{2m+2}(\alpha)\,d\alpha,
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

где x и y даны формулами 16.1(1), θ — формулой (3), а p и s — формулами 16.5(22).

Аналогичные интегралы, использующие функции Бесселя вместо тригонометрических функций, даны Сипсом (Sips; 1953, 1954).

Обращение полученных выше соотношений приводит к суммам бесконечных рядов произведений функций Матье. Равенства (8) можно рассматривать как выражения коэффициентов Фурье в разложениях функций

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\kappa x\cos\alpha)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\kappa y\sin\alpha)$$

в ряды по функциям Матье. Это приводит к следующим разложениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha) = 2\sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}^{-1}\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\,\mathrm{Ce}_{2m}(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v), \\
&\sin(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha) = 2\sum_{m=0}^{\infty} p_{2m+1}^{-1}\,\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(u)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(v), \\
&\cos(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha) = 2\sum_{m=0}^{\infty} s_{2m+1}^{-1}\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\,\mathrm{Se}_{2m+1}(u)\,\mathrm{se}_{2m+1}(v), \\
&\sin(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha) = -2\sum_{m=0}^{\infty} s_{2m+2}^{-1}\mathrm{se}_{2m+2}(\alpha)\,\mathrm{Se}_{2m+2}(u)\,\mathrm{se}_{2m+2}(v)
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Здесь снова x, y, κ, c и u, v, θ связаны, как в 16.1(1) и 16.8(3). Кроме того, здесь в обозначениях функции Матье опущено θ, а $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{s}$ заданы формулами 16.5(22). Из разложений (9) можно получить большое число новых разложений путем дифференцирования по параметрам α, u или v и выбора частных значений для некоторых из этих параметров. Некоторые из этих разложений перечислены в книге Мак-Лахлана (1953, пп. 10.60, 10.61).

Обращение разложений (6) приводит к разложениям функций

$$H_\nu^{(j)}(\kappa\rho)\,{\cos \atop \sin}(\nu\varphi), \qquad j=1,\ 2,$$

в ряды по произведениям функций Матье и присоединенных функций Матье (см., например, Sips, 1953, 1954). Этот результат можно интерпретировать как получение круговых цилиндрических волн путем суперпозиции эллиптических цилиндрических волн. Сипс получил также разложения, содержащие произведение четырех функций Матье. Эти разложения связаны со случаем, когда ось кругового цилиндра отличается от оси эллиптического цилиндра. Обобщение на разложения, содержащие произведение решений общего уравнения Матье, дано Шефке (Schäfke; 1953).

Наконец, порождение эллиптических цилиндрических волн путем суперпозиции других эллиптических цилиндрических волн приводит к так называемой *теореме сложения* для функций Матье (Schäfke, 1953).

Несколько иной тип бесконечных рядов, составленных из функций Матье и произведений функций Матье, был изучен Айнсом (Ince; 1939). Используя частные случаи разложений (9) и разложений, получаемых дифференцированием (9), он разложил $\frac{\mathrm{se}_{2m+1}(z)}{\sin z}$ в ряды вида $\sum \alpha_r \mathrm{ce}_{2r}(z)$ и дал много других разложений, содержащих функции Матье и их производные в комбинации с тригонометрическими функциями. При $\theta=0$ разложения Айнса сводятся к теоремам сложения и формулам дифференцирования для тригонометрических функций и другим тригонометрическим тождествам.

Относительно *интегральных соотношений* с тригонометрическими ядрами см. пп. 16.4, 16.6 и (8), а также Мак-Лахлан (1953, гл. X, XIV). Интегралы, содержащие функции Бесселя, даны в книгах: Мак-Лахлан (1953, гл. X), Sips (1949), Meixner (1951), Schäfke (1953). Последний из этих авторов вычислил интеграл от произведения трех функций Матье. Как Мейкснер, так и Шефке распространили свои результаты на решения общего уравнения Матье.

Свойства ортогональности функций Матье указаны в 16.4(15)—(17). Из общей теории уравнений Штурма—Лиувилля следует, что каждая из четырех систем функций

$$\{\mathrm{ce}_{2m}\},\quad \{\mathrm{ce}_{2m+1}\},\quad \{\mathrm{se}_{2m+1}\},\quad \{\mathrm{se}_{2m+2}\}$$

полна на промежутке $(0, \pi/2)$, каждая из двух систем $\{\mathrm{ce}_n\}$, $\{\mathrm{se}_{n+1}\}$ полна на $(0, \pi)$, а система $\{\mathrm{ce}_n, \mathrm{se}_{n+1}\}$ полна на $(0, 2\pi)$, где m, $n=0, 1, 2, \ldots$ *Любая функция, которую можно разложить в ряд Фурье, может быть также разложена в ряд по функциям Матье.* Коэффициенты последнего разложения можно вычислить, используя свойства ортогональности функций Матье. Важными примерами таких разложений являются (9), а также разложения (круговых) цилиндрических волн в ряды по функциям Матье.

Задача о собственных значениях для (непериодических) решений общего уравнения Матье была изучена Стреттом (Strutt; 1943), который дал границы для собственных значений, асимптотические формы, формулы разложения и теоремы о разложениях. В работе Стретта $\cos(2z)$ в формуле 16.2(1) заменяется любой вещественной периодической функцией (с периодом p), которую можно разложить в сходящийся ряд Фурье; получающееся дифференциальное уравнение является *уравнением Хилла*, и поэтому Стретт назвал *проблемой Хилла* граничную задачу, состоящую из уравнения Хилла и граничных условий

$$u(z_0+p)=\sigma\, u(z_0), \qquad u'(z_0+p)=\sigma\, u'(z_0),$$

где σ задано (в случае периодических функций Матье, $\sigma=\pm 1$).

Разложения в ряды по произведениям функций Матье и присоединенных функций Матье встречаются в связи с (двумерным) волновым уравнением (2). Предположим, что мы рассматриваем уравнение (2) внутри эллипса $u=u_0$ и накладываем граничное условие $W(u_0, v)=0$ (это условие соответствует задаче о колебаниях эллиптической мембраны). Решение (2) имеет вид

$$\psi c_n(u, v)=\mathrm{Ce}_n(u, \theta)\,\mathrm{ce}_n(v, \theta),$$
$$\psi s_{n+1}(u, v)=\mathrm{Se}_{n+1}(u, \theta)\,\mathrm{se}_{n+1}(v, \theta), \qquad n=0, 1, \ldots$$

Значения κ, при которых $\mathrm{Ce}_n(u_0, \theta)=0$ или $\mathrm{Se}_{n+1}(u_0, \theta)=0$ являются *собственными значениями* для уравнения (2) в области $u\leqslant u_0$. Они соответствуют некоторым собственным значениям θ. Мы обозначим получающиеся собственные функции через ψc_n^m, ψs_{n+1}^m, $n=0, 1, 2, \ldots$, $m=1, 2, \ldots$ Элемент площади имеет вид $[\mathrm{ch}(2u)-\cos(2v)]\,du\,dv$, и мы получаем следующие соотношения ортогональности:

$$\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi} \psi c_n^m \psi c_k^l\,[\mathrm{ch}(2u)-\cos(2v)]\,du\,dv=\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi} \psi s_{n+1}^m \psi s_{k+1}^l\,[\mathrm{ch}(2u)-\cos(2v)]\,du\,dv=0,$$
$$k, n=0, 1, \ldots; \quad m, l=1, 2, \ldots; \quad k\neq n \text{ или } m\neq l,$$
$$\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi} \psi c_n^m \psi s_{k+1}^l\,[\mathrm{ch}(2u)-\cos(2v)]\,du\,dv=0,$$
$$k, n=0, 1, \ldots; \quad l, m=1, 2, \ldots$$

Относительно вычислений интегралов, содержащих $[\psi c_n^m]^2$ и $[\psi s_n^m]^2$, см. Мак-Лахлан (1953, п. 9.40). Из этих формул вытекает разложение произвольной функции в ряды по функциям ψc и ψs в области $u\leqslant u_0$. Существуют соответствующие разложения для других граничных условий.

СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

16.9. Дифференциальное уравнение для сфероидальных волновых функций и его решение

В качестве стандартной формы *дифференциального уравнения для сфероидальных волновых функций* мы возьмем

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+\left[\lambda+4\theta(1-z^2)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]y=0. \tag{1}$$

Здесь не существует общепринятой стандартной формы. Мейкснер в своих недавних работах (Meixner; 1950, 1951) использовал уравнение (1), где $4\theta=\gamma^2$; Бувкамп, Стретт (Bouwkamp, Strutt; 1932) и Мейкснер в своих более ранних работах (Meixner; 1944, 1947, 1948) брали соответственно k^2z^2, $-k^2c^2z^2$ и $-\gamma^2z^2$ вместо $4\theta(1-z^2)$, так что их λ соответствует $\lambda+4\theta$ в уравнении (1). Страттон и другие (Stratton; 1941) использовали дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $(1-z^2)^{\mu/2}y$. Мы будем в этом пункте рассматривать θ, λ, μ

как заданные вещественные или комплексные параметры, z как комплексное переменное, μ можно назвать *порядком* сфероидальных волновых функций.

Полагая

$$z=\cos v, \tag{2}$$

получаем

$$\frac{d^2y}{dv^2}+\operatorname{ctg} v\frac{dy}{dv}+\left[\lambda+4\theta(\sin v)^2-\frac{\mu^2}{(\sin v)^2}\right]y=0. \tag{3}$$

Это — *тригонометрическая форма* дифференциального уравнения для сфероидальных волновых функции (см также 16 1(11), (12), (16), (17)).

Мы будем рассматривать здесь многие специальные и предельные случаи уравнения (1), так как они облегчают поиск нужных решений.

Если в волновом уравнении 16 1(9) и (14) $\theta=0$, т. е. $\kappa=0$, то уравнение (1) сводится к уравнению Лежандра 3 2(1) при $\lambda=\nu(\nu+1)$. Относительно решений в разрезанной z плоскости см. п. 3.2 и относительно соответствующих свойств решений на разрезе см п. 3 4.

Если $\mu=1/2$, то простое вычисление показывает, что функция $(\sin v)^{-1/2}y(v)$ переменного v удовлетворяет уравнению Матье, где θ имеет тот же смысл, что и в 16 2(1), и $h=\lambda+1/4+2\theta$

Если принять за независимое переменное

$$\zeta=2\theta^{1/2}z, \tag{4}$$

то уравнение (1) принимает вид

$$(\zeta^2-4\theta)\frac{d^2y}{d\zeta^2}+2\zeta\frac{dy}{d\zeta}+\left(\zeta^2-\lambda-4\theta-\frac{4\theta\mu^2}{\zeta^2-4\theta}\right)y=0. \tag{5}$$

Если положить в уравнении (5) $\theta=0$, то его решения можно выразить через функции Бесселя. В частности, если $\theta=0$ в (5), то это уравнение имеет следующие четыре решения:

$$\left.\begin{aligned}\psi_\nu^{(1)}(\zeta)&=\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2}J_{\nu+1/2}(\zeta), & \psi_\nu^{(2)}(\zeta)&=\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2}Y_{\nu+1/2}(\zeta),\\ \psi_\nu^{(3)}(\zeta)&=\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2}H^{(1)}_{\nu+1/2}(\zeta), & \psi_\nu^{(4)}(\zeta)&=\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2}H^{(2)}_{\nu+1/2}(\zeta),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\lambda=\nu(\nu+1)=(\nu+1/2)^2-1/4$; относительно обозначениий см также 7.2(44).

Эти частные и предельные случаи важны не только потому, что они дают возможность установить связь сфероидальных волновых функций с другими специальными функциями, но и потому, что они указывают на поведение решений уравнения (1) вблизи особых точек и облегчают нахождение частных решений уравнения (1), равно как и разложение этих решений в ряды по функциям Лежандра и Бесселя Относительно связи уравнения (1) с дифференциальными уравнениями для вырожденных гипергеометрических функций и функций параболического цилиндра см Meixner (1948, 1951), Sips (1949).

Дифференциальное уравнение (1) имеет три особые точки, $z=1$, -1 и ∞. При этом $z=\pm 1$ являются регулярными особыми точками, в каждой из которых показатель равен $-\mu/2$, а $z=\infty$ — нерегулярная особая точка При этом (5) показывает, что существуют два решения уравнения (1), одно из которых ведет себя в бесконечно удаленной точке как z^ν, умноженное на однозначную функцию, а другое — как $z^{-\nu-1}$, умноженное на однозначную функцию Встречающийся здесь показатель ν называется *характеристическим показателем* уравнения (1), он является функцией от θ, λ и μ и, подобно характеристическому показателю уравнения Матье, определяется из соотношения вида $\cos(2\pi\nu)=f(\lambda, \mu^2, \theta)$ Часто более удобно представлять λ как функцию от θ, μ и ν и использовать обозначения Мейкснера $\lambda_\nu^\mu(\theta)$ Очевидно, что

$$\lambda_\nu^\mu(0)=\nu(\nu+1),\qquad \lambda_\nu^\mu(\theta)=\lambda_\nu^{-\mu}(\theta)=\lambda_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\theta). \tag{7}$$

Относительно обсуждения функциональных связей между λ, μ, ν и θ см. Schmid (1948, 1949), Schäfke (1950), Meixner (1951).

Мы будем предполагать, что в уравнении (1) $\lambda=\lambda_\nu^\mu(\theta)$, и выражать решение через θ, μ, ν.

Первая группа решений может быть получена в виде разложений в ряды по функциям Бесселя. Уравнение (5) подсказывает искать разложения в виде

$$S_\nu^{\mu\,(j)}(z,\theta)=(1-z^{-2})^{-\mu/2}s_\nu^\mu(\theta)\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_{\nu,r}^\mu(\theta)\,\psi_{\nu+2r}^{(j)}(2\theta^{1/2}z),$$
$$j=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{8}$$

где $\psi^{(j)}$ являются функциями, определенными в (6). Как правило, мы будем писать a_r вместо $a_{\nu,r}^\mu(\theta)$, а также упрощать таким же образом остальные обозначения. Подстановка разложения (8) в уравнение (1) приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов a_r, которые были даны Мейкснером (Meixner, 1951). Они имеют вид

$$\frac{(\nu+2r-\mu)(\nu+2r-\mu-1)}{(\nu+2r-3/2)(\nu+2r-1/2)}\theta a_{r-1}+\frac{(\nu+2r+\mu+2)(\nu+2r+\mu+1)}{(\nu+2r+3/2)(\nu+2r+5/2)}\theta a_{r+1}+$$
$$+\left[\lambda_\nu^\mu(\theta)-(\nu+2r)(\nu+2r+1)+\frac{(\nu+2r)(\nu+2r+1)+\mu^2-1}{(\nu+2r-1/2)(\nu+2r+3/2)}2\theta\right]a_r=0,$$
$$r=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{9}$$

Начиная отсюда, мы будем предполагать, что $\nu+1/2$ не является целым числом (По-видимому, исключаемый случай не исследован полностью в настоящее время)

Рекуррентное соотношение (9) подобно 16 2(9) После деления на соответствующий множитель оно приводит к бесконечному определителю, обращение в нуль которого дает функциональные соотношения между θ, λ, μ, ν. С другой стороны, точно так же как в 16 2(16), (17), можно вывести бесконечные непрерывные дроби R_n и L_n. Мы будем предполагать, что $a_{\nu,0}^\mu(\theta)$ выбраны так, что

$$a_{\nu,0}^\mu(\theta)=a_{-\nu-1,0}^\mu(\theta)=a_{\nu,0}^{-\mu}(\theta). \tag{10}$$

Тогда мы имеем

$$a_{\nu,r}^\mu(\theta)=a_{-\nu-1,-r}^\mu(\theta)=\frac{(\nu-\mu+1)_{2r}}{(\nu+\mu+1)_{2r}}a_{\nu,r}^{-\mu}(\theta). \tag{11}$$

Из непрерывных дробей, как и в 16.2(21), имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2a_r}{a_{r-1}}=\lim_{r\to-\infty}\frac{r^2a_r}{a_{r+1}}=\frac{\theta}{4}, \tag{12}$$

за исключением случая, когда последовательность коэффициентов $\ldots,a_{-2}$, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, $\ldots$ обрывается справа или слева. В этих случаях первый или второй предел в (12) теряет смысл. Это может произойти лишь в случае, когда $\nu+\mu$ или $\nu-\mu$ — целое число. Из асимптотических формул для функций Бесселя имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi^{(1)}_{\nu+2r-2}}{r^2\psi^{(1)}_{\nu+2r}}=\lim_{r\to-\infty}\frac{\psi^{(1)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(1)}_{\nu+2r+2}}=\frac{4}{\theta z^2}, \tag{13}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(j)}_{\nu+2r-2}}=\lim_{r\to-\infty}\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(j)}_{\nu+2r+2}}=\frac{4}{\theta z^2},\quad j=2,3,4, \tag{14}$$

и из (12)—(14) вытекает, что разложение (8) сходится, если $|z|>1$. В этой области функция $(1-z^{-2})^{-\nu/2}$ может быть однозначно определена с помощью биномиального разложения, и мы будем полагать в (8) $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. В случаях, когда один или оба предела в (12) теряют смысл, ряды из коэффициентов обрываются в одном направлении и вопрос о сходимости в этом направлении теряет смысл.

Шмид (H. L. Schmid, 1948, 1949) полностью изучил класс рекуррентных соотношений, включающих в себя соотношение (9). Его результаты устанавливают существование и единственность с точностью до постоянного множителя для a_r, а также разложение λ^μ_ν и $a^\mu_{\nu,r}$ в сходящиеся степенные ряды по θ.

Асимптотическое поведение $S^{(j)}$ при $z\to\infty$ может быть получено с помощью результатов Мейкснера (Meixner, 1949). Если $j=1$, 2 и $\theta>0$, то мы полагаем, что $z\to\infty$ в верхней или нижней полуплоскости, а если $j=3$, 4, то $z\to\infty$ любым образом. Тогда из 7.13(1)—(4) следует, что

$$\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{\psi^{(j)}_\nu}\to(-1)^r\quad\text{при}\quad z\to\infty.$$

Если положить в (8)

$$s^\mu_\nu(\theta)=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r a^\mu_{\nu,r}(\theta)\right]^{-1}, \tag{15}$$

то

$$\lim_{z\to\infty}\left[S^{\mu(j)}_\nu(z,\theta)/\psi^{(j)}_\nu(2\theta^{1/2}z)\right]=1, \tag{16}$$

где в случаях $j=1$, 2 предполагается, что $\operatorname{Im}(\theta^{1/2}z)\neq 0$. Это соотношение можно записать также в виде

$$S^{\mu(j)}_\nu(z,\theta)\sim\psi^{(j)}_\nu(2\theta^{1/2}z),\quad j=1,2,3,4,\quad z\to\infty,\ |\arg(\theta^{1/2}z)|<\pi. \tag{17}$$

В этой форме не надо исключать случай положительного $\theta^{1/2}z$. Если $j=3$, 4, то область $\arg(\theta^{1/2}z)$ может быть расширена, как в 7.13(1), (2), до $(-\pi, 2\pi)$, $(-2\pi, \pi)$ соответственно. Мы будем предполагать далее, что s^μ_ν определено формулой (15).

Из (6) вытекает, что $\psi^{\mu(1)}_{\nu+2r}$, а следовательно и $S^{\mu(1)}_\nu$, равно z^ν, умноженному на функцию, однозначную в окрестности бесконечной точки, поэтому $S^{\mu(1)}_\nu$ является *решением первого рода*. $S^{\mu(2)}_\nu$ можно назвать *решением второго рода*. Из (16), (6) и 7.13(1), (2) видно, что $S^{\mu(3)}_\nu$ и $S^{\mu(4)}_\nu$ экспоненциально убывают при $z\to\infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Im}(\theta^{1/2}z)>0$ и $\operatorname{Im}(\theta^{1/2}z)<0$ соответственно. Таким образом, $S^{(3,4)}$ являются *решениями третьего рода*. Наряду с $S^{\mu(j)}_\nu$ мы имеем также решения $S^{-\mu(j)}_\nu$ и $S^{\pm\mu(j)}_{-\nu-1}$, $j=1$, 2, 3, 4. Между этими 16 решениями есть много соотношений, которые являются следствиями соотношений (16) или (11) и тождеств между функциями Бесселя.

Укажем некоторые из этих соотношений, опуская z и θ, которые всюду являются одними и теми же:

$$S_\nu^{\mu(j)} = S_\nu^{-\mu\,(j)}, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} S_\nu^{\mu\,(3)} &= S_\nu^{\mu\,(1)} + iS_\nu^{\mu\,(2)} = e^{-i\pi(\nu+1/2)}\, S_{-\nu-1}^{\mu\,(3)}, \\ S_\nu^{\mu\,(4)} &= S_\nu^{\mu\,(1)} - iS_\nu^{\mu\,(2)} = e^{i\pi(\nu+1/2)}\, S_{-\nu-1}^{\mu\,(4)}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} S_\nu^{\mu\,(2)} &= -(\cos\nu\pi)^{-1}\left[S_\nu^{\mu\,(1)}\sin(\nu\pi) + S_{-\nu-1}^{\mu\,(1)}\right], \\ S_\nu^{\mu\,(3)} &= [i\cos(\nu\pi)]^{-1}\left[S_{-\nu-1}^{\mu\,(1)} - S_\nu^{\mu\,(1)} e^{-i\pi(\nu+1/2)}\right], \\ S_\nu^{\mu\,(4)} &= [i\cos(\nu\pi)]^{-1}\left[S_\nu^{\mu\,(1)} e^{i\pi(\nu+1/2)} - S_{-\nu-1}^{\mu\,(1)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Соотношение (18) вытекает из соотношения (17), так как асимптотические представления в секторе, угол которого больше π, однозначно определяют решение уравнения (1) Соотношения (19) и (20) вытекают из (6), (8), (11) и (15) в комбинации с 7.2(4), (5), (6), (9) Мейкснер (Meixner; 1951) дал эти и другие соотношения, в частности формулы для аналитического продолжения значений $\arg(\theta^{1/2} z)$ за пределы $(-\pi, \pi)$ и формулы для вронскианов решений $S_\nu^{\mu\,(j)}$. Оказывается, как и в случае функций Бесселя, что любые два из наших четырех решений линейно независимы, поскольку мы предположили, что $\nu + 1/2$ не является целым числом.

Изученные здесь решения представлены рядами, которые сходятся при $|z| > 1$ и особо полезны, когда z велико. Перейдем теперь к решениям, полезным вблизи ± 1, а также на отрезке $[-1, 1]$, и к разложениям, сходящимся внутри единичного круга. Мейкснер обозначил эти решения следующим образом.

$$\left.\begin{aligned} Ps_\nu^\mu(z, \theta) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)\, P_{\nu+2r}^\mu(z), \\ Qs_\nu^\mu(z, \theta) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)\, Q_{\nu+2r}^\mu(z), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ps}_\nu^\mu(x, \theta) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)\, \mathrm{P}_{\nu+2r}^\mu(x), \\ \mathrm{Qs}_\nu^\mu(x, \theta) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)\, \mathrm{Q}_{\nu+2r}^\mu(x). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь P и Q — функции Лежандра, определенные, как это сделано в п. 3.2, на разрезанной плоскости, а P, Q — функции Лежандра на разрезе, определенные в п. 3.4. Соответственно в (21) z лежит на комплексной плоскости, разрезанной вдоль вещественной оси от $-\infty$ до 1, и мы полагаем в (21) $|\arg(z \pm 1)| < \pi$, а в (22) x лежит на разрезе $-1 < x < 1$, хотя сами решения считаются аналитически продолженными в комплексную плоскость, разрезанную вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞.

Подстановка разложений (21) и (22) в уравнение (1) приводит к рекуррентному соотношению (9), так что a_r являются теми же коэффициентами, что и ранее. Предположим теперь, что

$$a_{\nu,0}^\mu(0) = 1, \tag{23}$$

а также, что справедливы соотношения (10) и (11), так что

$$\left.\begin{aligned} Ps_\nu^\mu(z, 0) = P_\nu^\mu(z), \qquad Qs_\nu^\mu(z, 0) = Q_\nu^\mu(z), \\ \mathrm{Ps}_\nu^\mu(x, 0) = \mathrm{P}_\nu^\mu(x), \qquad \mathrm{Qs}_\nu^\mu(x, 0) = \mathrm{Q}_\nu^\mu(x). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Из (12) и п. 3.9.1 вытекает, что разложения (21) и (22) сходятся всюду, за исключением, быть может, точек ± 1 и ∞. Из 3.2 (3), 3.6 (2) следует, что при $\mu \neq 0$ функция Ps равна $(z-1)^{-\mu/2}$, умноженному на функцию, однозначную в окрестности точки $z=1$, а если $\mu \neq 0, 1, 2, \ldots$, то Ps равно $(z-1)^{m/2}$, умноженному на функцию, однозначную в окрестности $z=1$. Из 3.2 (5) следует, что если $\mu+\nu$ не является отрицательным целым числом, то Qs равно $z^{-\nu-1}$, умноженному на функцию, однозначную в окрестности бесконечно удаленной точки. Таким образом, Qs является *решением первого рода*.

Между 16 решениями $Ps_\nu^{\pm\mu}$, $Qs_\nu^{\pm\mu}$, $Ps_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $Qs_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $\mathrm{Ps}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathrm{Qs}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathrm{Ps}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $\mathrm{Qs}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$ имеется ряд соотношений. Они вытекают из аналогичных соотношений для функций Бесселя, данных в п. 3.3.1 и 3.4 и напоминают их. Примерами таких соотношеиий являются

$$Ps_\nu^\mu = Ps_{-\nu-1}^\mu, \qquad \mathrm{Ps}_\nu^\mu = \mathrm{Ps}_{-\nu-1}^\mu, \tag{25}$$

$$e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)\, Qs_\nu^{-\mu} = e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)\, Qs_\nu^\mu, \tag{26}$$

$$\mathrm{Ps}_\nu^\mu(-x) = \cos[(\mu+\nu)\pi]\, \mathrm{Ps}_\nu^\mu(x) - (2/\pi)\sin[(\mu+\nu)\pi]\, \mathrm{Qs}_\nu^\mu(x), \tag{27}$$

которые вытекают соответственно из 3.3 (1), 3.4 (7), 3.3 (2), 3.4 (14) и формулы (11). Относительно более подробного списка таких соотношений и перечня вронскианов см. Meixner (1951).

Укажем, наконец, соотношения между решениями, представляемыми рядами функций Бесселя и решениями представляемыми рядами функций Лежандра. Как $S_\nu^{\mu\,(1)}$, так и $Qs_{-\nu-1}^\mu$ являются решениями первого рода; кроме того, оба решения имеют один и тот же показатель ν в бесконечно удаленной точке. Следовательно, они могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Мейкснер (Meixner; 1951) положил

$$S_\nu^{\mu\,(1)}(z, \theta) = \pi^{-1}\sin[(\nu-\mu)\pi]\, e^{-(\nu+\mu+1)\pi i} K_\nu^\mu(\theta)\, Qs_{-\nu-1}^\mu(z, \theta) \tag{28}$$

и установил ряд тождеств, которым удовлетворяет $K_\nu^\mu(\theta)$. Эти тождества вытекают из тождеств для $S_\nu^{\mu\,(1)}$ и Qs_ν^μ. Явное выражение для K_ν^μ основано на замечании, что из (8), (6) и 7.2 (2) вытекает

$$z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\mu/2} S_\nu^{\mu\,(1)}(z, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{1/2} s_\nu^\mu(\theta) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_{\nu,r}^\mu(\theta) \frac{\theta^{\nu/2+r+s} z^{2r+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+2r+s+3/2)},$$

а из (21) и 3.2 (41) следует

$$z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\mu/2} e^{-i\mu\pi} Qs_{-\nu-1}^\mu(z, \theta) =$$

$$= \pi^{1/2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=0}^{8} (-1)^r a_{-\nu-1,r}^\mu(\theta)\, 2^{\nu-2r-2t} z^{-2r-2t} \frac{\Gamma(\mu-\nu+2r+2t)}{t!\,\Gamma(1/2+2r+t-\nu)}.$$

Умножая обе части формулы (28) на $z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\mu/2}$, разлагая в ряд Лорана и сравнивая коэффициенты при z^{2k}, получаем после некоторых упрощений

$$K_\nu^\mu(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\theta\right)^{\nu/2+k}\Gamma(1+\nu-\mu+2k)\,e^{(\nu+k)\pi i}s_\nu^\mu(\theta)\times$$
$$\times\frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{k}\frac{(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)}{(k-r)!\,\Gamma(\nu+k+r+3/2)}}{\sum\limits_{r=k}^{\infty}\frac{(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)}{(r-k)!\,\Gamma(1/2-\nu-k-r)}}. \tag{29}$$

Так как все функции $S^{(j)}$ могут быть с помощью равенства (20) выражены через $S^{(1)}$, а Ps могут быть выражены с помощью 3.3(8) через Qs, то ясно, что (28) достаточно для того, чтобы разложить любую функцию Бесселя по функциям Лежандра и обратно. Все эти соотношения заметно упрощаются, если μ и ν—целые числа, см. п. 16.11.

16.10. Дальнейшие разложения, приближения, интегральные соотношения

Разложения в степенные ряды. Разложения по степеням z или z^2-1 были даны Фишером (Fisher; 1937) и другими. Эти ряды представляются мало полезными как для аналитических исследований, так и для вычислений.

Разложения в ряды по произведениям функций Бесселя, по видимому, неизвестны, за исключением случая сфероидальных волновых функций, см. также п. 16.11.

Мейкснер (Meixner; 1950) дал разложения произведений решений 16.9(1) в ряды по произведениям функций Бесселя и функций Лежандра. Его разложения основаны на следующем замечании: в обозначениях, лишь слегка отличающихся от использованных в п. 16.1.2, мы вводим, с одной стороны, сфероидальные координаты ξ, η, φ, а с другой стороны—сферические полярные координаты r, χ, φ, полюс которых лежит на оси вращения. Эти координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x&=c\,[(\xi^2-1)(1-\eta)^2]^{1/2}\cos\varphi=r\sin\chi\cos\varphi,\\ y&=c\,[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}\sin\varphi=r\sin\chi\sin\varphi,\\ z&=c\xi\eta=r\cos\chi+c\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и мы полагаем, что $4\theta=\kappa^2c^2$. Из п. 16.1.2 следует, что функции

$$S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\,Ps_\nu^\mu(\eta,\theta)\,e^{\pm i\mu\varphi},\qquad S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\,Qs_\nu^\mu(\eta,\theta)\,e^{\pm i\mu\varphi}$$

являются решениями уравнения $\Delta W+\kappa^2W=0$, равно как и функции

$$\psi_\lambda^{(j)}(\kappa r)\;P_\lambda^\mu(\cos\chi)\,e^{\pm i\mu\varphi},\qquad \psi_\lambda^{(j)}(\kappa r)\;Q_\lambda^\mu(\cos\chi)\,e^{\pm i\mu\varphi}.$$

Изучение поведения этих решений, когда $\xi\to\infty$ и, следовательно, $r\to\infty$, а также когда $\eta\to\pm1$, и потому $\chi\to0$ или π, дает разложения вида

$$\left.\begin{aligned} S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\,Ps_\nu^\mu(\eta,\theta)&=\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,\alpha)\,\psi_{\nu+t}^{(j)}(\kappa r)\;P_{\nu+t}^\mu(\cos\chi),\\ S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\,Qs_\nu^\mu(\eta,\theta)&=\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,\alpha)\,\psi_{\nu+t}^{(j)}(\kappa r)\;Q_{\nu+t}^\mu(\cos\chi),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \kappa r &= 2\theta^{1/2}(\xi^2+\eta^2+\alpha^2-2\alpha\xi\eta-1)^{1/2}, \\ \cos\chi &= (\xi^2+\eta^2+\alpha^2-2\alpha\xi\eta-1)^{-1/2}(\xi\eta-\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мейкснер показал, что коэффициенты b_t удовлетворяют рекуррентным соотношениям, содержащим пять членов (которые при $\alpha=\pm 1$ или $\alpha=0$ сводятся к трехчленным рекуррентным соотношениям), доказал существование решений этих рекуррентных соотношений и сходимость в соответствующей области разложения (2) и дал явные представления для коэффициентов b_t через a_r в 16 9(9) и некоторых других коэффициентов $\delta^{\mu\ s}_{\nu\ t}$, которые удовлетворяют сравнительно простым рекуррентным соотношениям Он изучил случай, когда μ, ν, $\mu\pm\nu$ принимают целые значения, и показал, что все важные разложения решений 16 9(1) могут быть получены путем специального выбора параметров в (2) Например, если $\alpha=0$ и $\eta\to 1$ в первом разложении (2), то получаем 16 9(8), а если $\alpha=0$ и $\xi\to\infty$, то получаем 16 9(21)

Новые разложения для решений 16 9(1) получатся, если положить в (2) $\alpha=\pm 1$, $\xi\to\infty$ или $\eta\to 1$ Эти разложения и их области сходимости имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} Ps^{\mu}_{\nu}(z,\theta) &= \exp(\pm 2\theta^{1/2}zi)\sum_{t=-\infty}^{\infty} i^{\pm t} b^{\mu}_{\nu,t}(\theta,1)\,P^{\mu}_{\nu+t}(z), \\ Qs^{\mu}_{\nu}(z,\theta) &= \exp(\pm 2\theta^{1/2}zi)\sum_{t=-\infty}^{\infty} i^{\pm t} b^{\mu}_{\nu,t}(\theta,1)\,Q^{\mu}_{\nu+t}(z),\quad z\neq 1,-1,\infty, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} S^{\mu(j)}_{\nu}(z,\theta) &= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu/2} s^{\mu}_{\nu}(\theta)\sum_{t=-\infty}^{\infty} b^{\mu}_{\nu,t}(\theta,1)\,\psi^{(j)}_{\nu+t}[2\theta^{1/2}(z-1)], \\ &\qquad |z-1|>2,\quad j=1,2,3,4, \\ S^{\mu(j)}_{\nu}(z,\theta) &= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} s^{\mu}_{\nu}(\theta)\sum_{t=-\infty}^{\infty} b^{\mu}_{\nu,t}(\theta,-1)\,\psi^{(j)}_{\nu+t}[2\theta^{1/2}(z+1)], \\ &\qquad |z+1|>2,\quad h=1,2,3,4. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Коэффициенты всех этих разложений удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям и в некоторых областях эти разложения более удобны, чем изученные в п. 16.9. Для $\mathrm{Ps}^{\mu}_{\nu}(x,\theta)$, $\mathrm{Qs}^{\mu}_{\nu}(x,\theta)$ надо заменить в (4)

$$P^{\mu}_{\nu+t}(z),\quad Q^{\mu}_{\nu+t}(z)\quad \text{на}\quad \mathrm{P}^{\mu}_{\nu+t}(x),\quad \mathrm{Q}^{\mu}_{\nu+t}(x).$$

Мейкснер получил также более общие разложения, полагая в (2) $\xi\to\infty$ или $\eta\to 1$ и не придавая специального значения параметру α Вытекающие разложения содержат произвольный параметр при частных значениях произвольного параметра они сводятся к 16 9(8) и 16 9(22) или (4) и (5)

Разложения $S^{\mu(j)}_{\nu}(z,\theta)$ в ряды по функциям Бесселя аргумента $2\theta^{1/2}(z^2-1)^{1/2}$ могут быть получены, если положить в разложении (2) $\alpha=\eta=0$. Такие разложения были даны Фишером (Fisher, 1937), Мейкснером (Meixner; 1944) и другими.

Приближения при малом $|\theta|$. Полагая в 16.9(29) $k=0$, получаем из 16 9(7), (9), (24), (28), (29)

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_\nu^\mu(0)=\nu(\nu+1), \quad Ps_\nu^\mu(z,\ 0)=P_\nu^\mu(z), \quad Qs_\nu^\mu(z,\ 0)=Q_\nu^\mu(z),\\
&\mathrm{Ps}_\nu^\mu(x,\ 0)=\mathrm{P}_\nu^\mu(x), \quad \mathrm{Qs}_\nu^\mu(x,\ 0)=\mathrm{Q}_\nu^\mu(x),\\
&a_{\nu,0}^\mu(0)=s_\nu^\mu(0)=1, \quad a_{\nu,r}^\mu(0)=0, \quad r=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\\
&\lim_{\theta\to 0}\theta^{-\nu/2}K_\nu^\mu(\theta)=\frac{e^{\nu\pi i}\,\Gamma(1+\nu-\mu)\,\Gamma(1/2-\nu)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+3/2)},\\
&\lim_{\theta\to 0}\theta^{-\nu/2}S_\nu^{\mu(1)}(z,\ \theta)=-\frac{2^{-\nu-1}\,\Gamma(1/2-\nu)}{\Gamma(\mu-\nu)\,\Gamma(\nu+3/2)}\,e^{-\mu\pi i}\,Q_{-\nu-1}^\mu(z).
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Из последнего из этих соотношений и 16.9(20) легко вычислить

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-\nu/2}S_\nu^{\mu(j)}(z,\ \theta), \quad j=2,\ 3,\ 4.$$

Относительно разложений $\lambda_\nu^\mu(\theta)$ и $a_{\nu,r}(\theta)$ по степеням θ см. Meixner (1944, п 6 3)

Асимптотические формы при больших $|z|$ Из 16.9(17), 16.9(6) и 7.13(1), (2) следует, что

$$S_\nu^{\mu(3)}(z,\ \theta)=\frac{1}{2}\theta^{-1/2}z^{-1}e^{i(2\theta^{1/2}z-\nu\pi/2-\pi/2)}\,[1+O(|z|^{-1})],$$

$$z\to\infty, \quad -\pi<\arg(\theta^{1/2}z)<2\pi, \qquad (7)$$

$$S_\nu^{\mu(4)}(z,\ \theta)=\frac{1}{2}\theta^{-1/2}z^{-1}e^{-i(2\theta^{1/2}z-\nu\pi/2-\pi/2)}\,[1+O(|z|^{-1})],$$

$$z\to\infty, \quad -2\pi<\arg(\theta^{1/2}z)<\pi \qquad (8)$$

и асимптотические формы $S_\nu^{\mu(1)}$, $S_\nu^{\mu(2)}$ вытекают с помощью 16 9(19). Мейкснер (Meixner, 1951) получил асимптотические разложения по убывающим степеням $z-\alpha$, где α произвольно, и дал четырехчленные рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты его разложений

Асимптотическая форма для функции Qs получается из 16 9(28), а функция Ps может быть в силу 3 3(3) представлена как комбинация функций Qs.

Поведение вблизи $z=1$ Если μ не является целым положительным числом, то из 16 9(21) и 3 2(14) следует, что

$$Ps_\nu^\mu(z,\ \theta)=\frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)}(z-1)^{-\mu/2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)\,[1+O(|z-1|)]=$$

$$=\frac{(z/2-1/2)^{-\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)\,s_\nu^\mu(\theta)}\,[1+O(|z-1|)], \qquad z\to 1 \qquad (9)$$

и, аналогично,

$$\mathrm{Ps}_\nu^\mu(x,\ \theta)=\frac{(1/2-x/2)^{-\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)\,s_\nu^\mu(\theta)}\,[1+O(1-x)], \qquad x\to 1. \qquad (10)$$

Поведение функции Qs может быть выведено из (9), а поведение $S_\nu^{\mu(j)}$ вытекает из 16 9(28) и 16 9(20).

Интегральные соотношения. Для того чтобы получить интегральные соотношения между решениями уравнения 16 9(1), заметим, что это уравнение возникает при решении волнового уравнения $\Delta W + \kappa^2 W = 0$ методом разделения переменных в координатах ξ, η, φ, введенных равенствами (1) Пусть $N(\xi, \eta) e^{i\mu\varphi}$ является решением уравнения $\Delta W + \kappa^2 W = 0$, и пусть $f(z)$— решение уравнения 16 9(1). Вычисления, подобные проведенным в п. 16.3, показывают, что

$$g(\xi) = \int_a^b N(\xi, \eta) f(\eta)\, d\eta \tag{11}$$

является решением 16.9(1) (где $\xi = z$) при условии, что

$$\left[(1-\eta^2)\left(\frac{\partial N}{\partial \eta} f - N \frac{df}{d\eta}\right)\right]_a^b = 0. \tag{12}$$

Мы выберем $f(\eta) = Ps_\nu^{-\mu}(z, \theta)$ и

$$N(\xi, \eta) = (\xi^2 - 1)^{\mu/2} (\eta^2 - 1)^{\mu/2} \exp(2\theta^{1/2}\xi\eta i). \tag{13}$$

Из (9) и асимптотического поведения Ps вытекает, что (12) удовлетворяется при $a=0$, $b = i\infty$ и $\operatorname{Re}(\theta^{1/2}\xi) > |\operatorname{Re}\theta^{1/2}|$. При этих предположениях

$$g(\xi) = (\xi^2 - 1)^{\mu/2} \int_1^{i\infty} (\eta^2 - 1)^{\mu/2} Ps_\nu^{-\mu}(\eta, \theta) \exp(2\theta^{1/2}\xi\eta i)\, d\eta$$

является решением уравнения 16.9(1) с $\xi = z$. Кроме того, из (9) и теории интегралов Лапласа следует, что при $\xi \to \infty$ в области $\operatorname{Re}(\theta^{1/2}\xi) > |\operatorname{Re}\theta^{1/2}|$ функция $g(\xi)$ имеет асимптотическое выражение

$$2^{\mu/2}\xi^\mu \int_1^{i\infty} \frac{(\eta/2 - 1/2)^{\mu/2}}{\Gamma(1+\mu)\, s_\nu^{-\mu}(\theta)} (\eta - 1)^{\mu/2} \exp(2\theta^{1/2}\xi\eta i)\, d\eta =$$
$$= \frac{\exp\left(2\theta^{1/2}\xi i + \frac{1}{2}\mu\pi i + \frac{1}{2}\pi i\right)}{(2\theta^{1/2})^{\mu+1}\xi s_\nu^{-\mu}(\theta)},$$

так что из (7) следует $g(\xi) = \dfrac{-e^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi i}}{(2\theta^{1/2})^\mu s_\nu^{-\mu}(\theta)} S_\nu^{\mu(3)}(\xi, \theta)$.

Таким образом, мы доказали первое из двух интегральных соотношений

$$S_\nu^{\mu(3)}(\xi, \theta) = -e^{-1/2(\mu+\nu)\pi i} 2^\mu \theta^{\mu/2} s_\nu^{-\mu}(\theta) (\xi^2 - 1)^{\mu/2} \times$$
$$\times \int_1^{i\infty} (\eta^2 - 1)^{\mu/2} Ps_\nu^{-\mu}(\eta, \theta) \exp(2\theta^{1/2}\xi\eta i)\, d\eta, \qquad \operatorname{Re}(\theta^{1/2}\xi) > |\operatorname{Re}\theta^{1/2}|, \tag{14}$$

$$S_\nu^{\mu(4)}(\xi, \theta) = -e^{1/2(\mu+\nu)\pi i} 2^\mu \theta^{\mu/2} s_\nu^{-\mu}(\theta) (\xi^2 - 1)^{\mu/2} \times$$
$$\times \int_1^{-i\infty} (\eta^2 - 1)^{\mu/2} Ps_\nu^{-\mu}(\eta, \theta) \exp(-2\theta^{1/2}\xi\eta i)\, d\eta, \quad \operatorname{Re}(\theta^{1/2}\xi) > |\operatorname{Re}\theta^{1/2}|. \tag{15}$$

Доказательство (15) проходит точно так же.

16.11. Сфероидальные волновые функции

В приложениях к решению волнового уравнения в координатах вытянутого или сжатого сфероида (см п 16 1 2 и 16 1 3) параметр μ в 13 9(1) является целым, $\mu=m$. Кроме того, представляют интерес лишь те значения ν и λ, для которых 16 9(1) обладает ограниченными на промежутке $(-1, 1)$ решениями Не теряя общности, можно считать $m=0, 1, 2, \ldots$ Мы видим из таблицы п 3 9 2, что единственным решением 16 9(1), которое остается ограниченным при $z=1$, является $\mathrm{Ps}_\nu^m(x, \theta)$ (или кратное этой функции) Из 16 9(22) и 3 9(13) и (15) видно, что, за исключением случая, когда ν также целое число, эти решения не ограничены при $z=-1$ Поэтому, начиная отсюда, мы ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+[\lambda_n^m(\theta)+4\theta(1-z^2)-m^2(1-z^2)^{-1}]\,y=0, \qquad (1)$$

где m и n — целые и θ — вещественно. В силу 16.9(7) можно считать $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ и $n \geqslant m$

Большинство из прежних и многие из современных работ посвящены исключительно случаю целых μ и ν и решения уравнения (1) обычно называют *сфероидальными волновыми функциями*, хотя некоторые авторы применяют это же название для решений более общего уравнения 16 9(1) Числа $\lambda_n^m(\theta)$, $m, n=0, 1, 2, \ldots$, называют *собственными значениями* λ и ограниченные решения $\mathrm{Ps}_n^m(x, \theta)$, которые являются соответствующими *собственными функциями*, называются *сфероидальными волновыми функциями первого рода*. Существует очень обширная литература, посвященная сфероидальным волновым функциям Относительно библиографии и сводки результатов, полученных до 1932 г, см Стретт (1935), относительно ссылок на более новую литературу см Bouwkamp (1947) и Meixner (1951), последняя работа содержит также превосходную сводку всех результатов Некоторые из более новых работ указаны в библиографии (см Abramowitz, Bouwkamp, Eberlein, Hanson, Leitner и Spence, Meixner, Sips, Spence, Stratton и др Относительно таблиц значений функций см Stratton и др (1941), Bouwkamp (1941, 1947), Meixner (1944), Leitner и Spence (1950) Следует отметить, что для этих функций нет общепринятых обозначений, это следует иметь в виду при использовании результатов перечисленных выше статей

Вычисление значений $\lambda_n^m(\theta)$ при небольших значениях θ можно провести с помощью бесконечных непрерывных дробей, выведенных в п 16 9, этот метод имеет преимущество, поскольку в ходе вычислений получаются значения отношений a_r/a_0 Относительно описания принятой системы вычислений см Bouwkamp (1941, 1947), Blanch (1946) Для малых значений θ собственные значения и коэффициенты могут быть выражены в виде рядов по возрастающим степеням θ Бувкамп (Bouwkamp, 1950), а также Лейтнер и Спенс (Leitner and Spence, 1950) дали разложение $\lambda_n^m(0)$ по степеням θ вплоть до θ^4. Численные значения коэффициентов в этих разложениях были протабулированы Бувкампом (Bouwkamp, 1941, 1947, 1950) Мейкснер (Meixner, 1944) протабулировал коэффициенты разложений для $\lambda_n^m(\theta)$ вплоть до θ^5 и для a

$$\frac{a_{n,r}^m(\theta)}{a_{n,0}^m(\theta)}$$ вплоть до θ^3.

Мы будем теперь предполагать, что m и n — целые и $0 \leqslant m \leqslant n$. В этом случае в рекуррентных соотношениях 16.9(9), которым удовлетворяют коэффициенты разложения 16.9(22), множитель при a_{r+1} обращается в нуль при

$$2r = -m - n - 1 \quad \text{или} \quad 2r = -m - n - 2$$

в зависимости от того, является ли $m+n$ нечетным или четным числом Для бесконечных непрерывных дробей, представляющих коэффициенты, отсюда следует, что

$$a^m_{n,r}(\theta) = 0, \qquad 2r \leqslant -m-n-1. \tag{2}$$

Из 3 6 (3) и (6) вытекает, что

$$P^m_{n+2r}(x) = 0, \qquad -m-n-1 < 2r < m-n, \tag{3}$$

и первое разложение (22) сводится к

$$\mathrm{Ps}^m_n(x, \theta) = \sum_{2r \geqslant m-n} (-1)^r a^m_{n,r}(\theta)\, \mathrm{P}^m_{n+2r}(x) \tag{4}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ps}^m_{m+2k}(x, \theta) &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{k+r} a^m_{m+2k,\, r-k}(\theta)\, \mathrm{P}^m_{m+2r}(x), \\ \mathrm{Ps}^m_{m+2k+1}(x, \theta) &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{k+r} a^m_{m+2k+1,\, r-k}(\theta)\, \mathrm{P}^m_{m+2r+1}(x), \\ &\qquad k, m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Коэффициенты удовлетворяют 16.9 (9), где

$$\mu = m, \quad \nu = n \quad \text{и} \quad a_r = 0 \quad \text{при} \quad 2r \leqslant -m-n-1.$$

Мы *нормируем* (4) так, что

$$\int_{-1}^{1} [\mathrm{Ps}^m_n(x, \theta)]^2\, dx = \frac{1}{n+1/2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{6}$$

В силу 3 12 (19) и (21) это эквивалентно нормировке коэффициентов, при которой

$$\sum_{2r \geqslant m-n} \frac{1}{n+2r+1/2} \frac{(n+2r+m)!}{(n+2r-m)!} \left[a^m_{n,r}(\theta)\right]^2 = \frac{1}{n+1/2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \tag{7}$$

и мы дополняем нормировку условием

$$a^m_{n,0}(\theta) > 0. \tag{8}$$

Из 16 10 (6) видно, что эта нормировка совместима с 16.9 (23). Ряды

$$Ps^m_n(z, \theta) = \sum_{2r \geqslant m-n} (-1)^r a^m_{n,r}(\theta)\, P^m_{n+2r}(z) \tag{9}$$

сходятся при всех конечных значениях z и функции (4) и (9) отличаются лишь множителем $(\pm\, i)^m$

Из 3 3 (7), (10) и 16 9 (11) вытекает

$$\left.\begin{aligned} Ps^{-m}_n(z, \theta) &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Ps^m_n(z, \theta), \\ Ps^m_n(-z, \theta) &= (-1)^n Ps^m_n(z, \theta) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Многочисленные другие соотношения для Ps и Ps следуют из известных формул для функций Лежандра Из 3 4 (20) и 3 4 (23) следует

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ps}^m_{m+2k}(0,\theta)&=\frac{(2m+2k)!}{(2k)!}\mathrm{Ps}^{-m}_{m+2k}(0,\theta)=\\&=2^m\pi^{1/2}\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{(-1)^r a^m_{m+2k,r}(\theta)}{(k+r)!\,\Gamma(1/2-k-m-r)},\\\mathrm{Ps}^{\pm m}_{m+2k+1}(0,\theta)&=0,\qquad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathrm{Ps}^{\pm m}_{m+2k}}{dx}(0,\theta)=0,\\&\frac{d\mathrm{Ps}^m_{m+2k+1}}{dx}(0,\theta)=\frac{(2m+2k+1)!}{(2k+1)!}\frac{d\mathrm{Ps}^{-m}_{m+2k+1}}{dx}(0,\theta)=\\&\qquad=-2^{m+1}\pi^{1/2}\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{(-1)^r a^m_{m+2k+1,r}(\theta)}{(k+r)!\,\Gamma(-1/2-k-m-r)},\\&\qquad\qquad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Для решений 16 9 (8) мы имеем в этом случае

$$S^{m(j)}_n(z,\theta)=S^{-m(j)}_n(z,\theta)=$$
$$=(1-z^{-2})^{m/2}\,s^{-m}_n(\theta)\sum_{2r\geqslant m-n}a^{-m}_{n,r}(\theta)\,\psi^{(j)}_{n+2r}(2\theta^{1/2}z),\quad j=1,2,3,4.\tag{13}$$

Функция $Qs^{\mu}_{-\nu-1}$ обращается в бесконечность, если $\nu-\mu$ является нулем или целым положительным числом, но функция $\sin[(\nu-\mu)\pi]\,Qs^{\mu}_{-\nu-1}$ при этом стремится к конечному пределу. В силу 3 3 (3) имеем при $\mu\to m$, $\nu\to n$

$$\sin[(\nu-\mu)\pi]\,Qs^{\mu}_{-\nu-1}(z,\theta)\to(-1)^{m+n+1}\pi Ps^m_n(z,\theta)$$

и 16 9 (28) дает соотношение

$$S^{m(1)}_n(z,\theta)=K^m_n(\theta)Ps^m_n(z,\theta)\tag{14}$$

между двумя решениями (9) и (13) Это показывает, что сфероидальные волновые функции первого рода могут быть представлены в виде рядов по функциям Бесселя первого рода, и эти ряды оказываются сходящимися для любого конечного z, отличного от нуля Выражение для K^m_n заметно упрощается. Используя (9) и (13) и поступая так же, как и при выводе 16 9 (29) при $k=\frac{m-n}{2}$ или $k=\frac{m-n+1}{2}$ в зависимости от того, четно или нечетно $m-n$, получаем

$$\Gamma(m+3/2)\,K^m_n(\theta)\,\mathrm{Ps}^m_n(0,\theta)=$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^n\pi^{1/2}\theta^{m/2}s^{-m}_n(\theta)\,a^m_{n,\frac{m-n}{2}}(\theta),\quad n-m\ \text{четно},\tag{15}$$

$$\Gamma(m+5/2)\,K^m_n(\theta)\frac{d\mathrm{Ps}^m_n}{dx}(0,\theta)=$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\theta^{\frac{m+1}{2}}s^{-m}_n(\theta)\,a^m_{n,\frac{m-n+1}{2}}(\theta),\quad n-m\ \text{нечетно}.\tag{16}$$

Из (14), (15), (16) вытекает явное выражение для значений $S^{(1)}$ и $\dfrac{dS^{(1)}}{dz}$ при $z=0$.

Другими разложениями сфероидальных волновых функций первого рода являются

$$Ps_n^m(z,\ \theta)=\exp(\pm 2\theta^{1/2}zi)\sum_{t=m}^{\infty} i^{\pm t}B_{n,\,t}^m(\theta)\,P_t^m(z), \tag{17}$$

которые вытекают из 16.10 (4); некоторые разложения можно вывести из 16.10 (2), (5), а разложения по произведениям функций Бесселя были даны Мейкснером (Meixner; 1949).

Сфероидальные волновые функции первого рода ортогональны на промежутке $(-1,\ 1)$. Относительно положения нулей этих функций см. Meixner (1944).

Как $S_n^{m(2)}(z,\ \theta)$, так и $Qs_n^m(z,\ \theta)$ являются *сфероидальными волновыми функциями второго рода*. Если $|z|>1$, то обе эти функции удовлетворяют функциональному уравнению $f(-z)=(-1)^{n+1}f(z)$ и, следовательно, кратны друг другу. Мейкснер (Meixner; 1951) дал соотношение между ними вида

$$2\theta^{1/2}K_n^{-m}(\theta)\,S_n^{m(2)}(z,\ \theta)=(-1)^{m+1}s_n^m(\theta)\,s_n^{-m}(\theta)\,Qs_n^m(z,\ \theta). \tag{18}$$

Другими разложениями, следующими из 16.10 (2), (4), (5), являются разложения по произведениям функций Бесселя, которые дал Мейкснер (Meixner; 1949). *Сфероидальными волновыми функциями третьего рода* являются $S_n^{m(3,\,4)}$: они могут быть выражены в виде рядов функций Лежандра с помощью 16.9(19), 16.11(14), (18).

Мы можем теперь построить требуемые нормальные решения волнового уравнения в сфероидальных координатах. Сначала рассмотрим *координаты вытянутого сфероида* u, v, φ. В п. 16.1.2 было показано, что для волновых функций, регулярных внутри сфероида $u=u_0$, U является сфероидальной волновой функцией первого рода, V — модифицированной сфероидальной волновой функцией первого рода. Таким образом, *внутренние волновые функции вытянутого сфероида* должны иметь вид

$$S_n^{m(1)}\left(\operatorname{ch} u,\ \frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)\operatorname{Ps}_n^m\left(\cos v,\ \frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)e^{\pm im\varphi},$$
$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{19}$$

в то время как *внешние волновые функции вытянутого сфероида* имеют вид

$$S_n^{m(j)}\left(\operatorname{ch} u,\ \frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)\operatorname{Ps}_n^m\left(\cos v,\ \frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)e^{\pm im\varphi},$$
$$j=3,\ 4;\qquad m=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\qquad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{20}$$

где $j=3$ или 4 в зависимости от того, имеет ли асимптотическое поведение на бесконечности вид $r^{-1}e^{i\kappa r}$ или $r^{-1}e^{-i\kappa r}$.

Для *волновых функций сжатого сфероида* из п. 16.1.3 аналогичным путем получаем

$$S_n^{m(j)}\left(-i\operatorname{sh} u,\ \frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)\operatorname{Ps}_n^m\left(\cos v,\ -\frac{1}{4}\kappa^2c^2\right)e^{\pm im\varphi},$$
$$j=1,\ 3,\ 4;\qquad m=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\qquad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{21}$$

где $j=1$ для волновых функций внутри и $j=3$, 4 вне эллипсоида $u=u_0$. В (21) надо положить $4\theta=-\kappa^2c^2$. При этом подразумевается, что в асимптотических формулах п. 16.10 положено $2\theta^{1/2}=i\kappa c$.

Разложение произвольных функций, заданных на (вытянутом или сжатом) сфероиде $u=u_0$, в ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_n^m\cos m\varphi+B_n^m\sin m\varphi\right)\mathrm{Ps}_n^m(\cos v,\ \theta)$$

справедливо при тех же условиях, что и для сферических поверхностных гармоник, а коэффициенты этих разложений могут быть вычислены путем использования свойств ортогональности тригонометрических функций и сфероидальных волновых функций.

16.12. Приближения и асимптотические формы для сфероидальных волновых функций

Поведение вблизи точки ± 1. Поведение сфероидальных волновых функций вблизи точки ± 1 может быть изучено путем подстановки приближений, данных в таблице п. 3.9.2, в разложения сферических волновых функций по функциям Лежандра и последующего использования формул 16.11(2), 16.9(11) и 16.9(15) для упрощения полученных формул. Результаты имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&Ps_n^m(z,\ \theta)=\left[K_n^m(\theta)\right]^{-1}S_n^{m(1)}(z,\theta)=\\
&\qquad=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(z-1)^{m/2}}{2^{m/2}m!\,s_n^{-m}(\theta)}+O\left(|z-1|^{1+m/2}\right),\\
&\mathrm{Ps}_n^m(x,\ \theta)=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(-1)^m(1-x)^{m/2}}{2^{m/2}m!\,s_n^{-m}(\theta)}+O\left(|1-x|^{1+m/2}\right),\\
&\qquad m=0,\ 1,\ \dots,\ n;\qquad n=0,\ 1,\ \dots,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Qs_n^0(z,\ \theta)=-2\theta^{1/2}\left[s_n^0(\theta)\right]^{-2}K_n^0(\theta)\,S_n^{0(2)}(z,\theta)=\\
&=-\frac{1}{2}\left[s_n^0(\theta)\right]^{-1}\ln\left(\frac{z-1}{2}\right)-\sum_{2r\geqslant -n}(-1)^r a_{n,r}^0(\theta)\,h_{n+2r}+O\left(|z-1|\right),\\
&Qs_n^m(z,\ \theta)=(-1)^{m+1}2\theta^{1/2}\left[s_n^m(\theta)s_n^{-m}(\theta)\right]^{-1}K_n^{-m}(\theta)s_n^{m(2)}(z,\ \theta)=\\
&\qquad=\frac{(-1)^m(m-1)!\,2^{m/2-1}}{s_n^m(\theta)(z-1)^{m/2}}+O\left(|z-1|^{1-m/2}\right),\\
&\qquad m=1,\ 2,\ \dots,\ n;\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots,
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где

$$h_0=0,\quad h_k=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k},\qquad k=1,\ 2,\ \dots\tag{3}$$

Для Qs надо в формуле (2) заменить $z-1$ на $1-x$.

Поведение этих функций вблизи точки -1 вытекает из формул

$$\left.\begin{aligned}
&Ps_n^m(-z,\ \theta)=(-1)^n Ps_n^m(z,\theta),\qquad Qs_n^m(-z,\ \theta)=(-1)^{n+1}Qs_n^m(z,\ \theta),\\
&\mathrm{Ps}_n^m(-x,\ \theta)=(-1)^{n-m}\mathrm{Ps}_n^m(x,\ \theta),\quad \mathrm{Qs}_n^m(-x,\ \theta)=(-1)^{n-m+1}\mathrm{Qs}_n^m(x,\ \theta).
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Поведение на бесконечности. Для $S_n^{m(j)}$ см. 16.10(7), (8) и 16.9(19). Ps и Qs можно выразить с помощью формул 16.11(14), (18) через $S_n^{m(j)}$.

Приближения при малых $|\theta|$. Относительно λ, Ps, Qs, a_r, s_n^m см. 16.10 (6). Из 16.10 (6) мы имеем также

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\theta\to 0} \theta^{-n/2} K_n^m(\theta) = \frac{(n-m)!}{2^n (1/2)_n (3/2)_n}, \\ &\lim_{\theta\to 0} \theta^{-n/2} K_n^{-m}(\theta) = \frac{(n+m)!}{2^n (1/2)_n (3/2)_n}, \quad m=0, 1, \ldots, n; \quad n=0, 1, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и тогда в силу 16.11(14), (18)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\theta\to 0} \theta^{-n/2} S_n^{m\,(1)}(z, \theta) = \frac{(n-m)!}{2^n (1/2)_n (3/2)_n} P_n^m(z), \\ &\lim_{\theta\to 0} \theta^{n/2+1/2} S_n^{m\,(2)}(z, \theta) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{n-1}}{(n+m)!} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n Q_n^m(z), \\ &\qquad m=0, 1, \ldots, n; \quad n=0, 1, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Асимптотические формы при больших значениях $|\theta|$. Рассмотрим сначала случай, когда θ положительно. Подстановка

$$y = (1-z^2)^{m/2} Y, \qquad 2\theta^{1/4} z = Z \tag{7}$$

преобразует 16.11(1) в

$$\left(1 - \frac{Z^2}{2\theta^{1/2}}\right)\frac{d^2Y}{dZ^2} - \frac{m+1}{2\theta^{1/2}} \frac{dY}{dZ} + \left(\Lambda - \frac{Z^2}{4}\right) Y = 0, \tag{8}$$

где

$$\Lambda = \theta^{1/2} + \frac{1}{4}\theta^{-1/2}\left(\lambda_n^m - m - m^2\right). \tag{9}$$

При больших значениях θ дифференциальное уравнение (8) аппроксимируется дифференциальным уравнением 8.2 (1) для функций параболического цилиндра, а интервал $-1 < z < 1$ соответствует при предельном переходе $\theta \to \infty$ промежутку $-\infty < Z < \infty$. Но Ps_n^m является ограниченным решением уравнения 16.11(1), а функция $(1-z^2)^{-m/2}\mathrm{Ps}_n^m(z, \theta)$ также ограничена на $-1 < z < 1$. С другой стороны, из п. 8.4 видно, что дифференциальное уравнение Вебера имеет решение, ограниченное на всей оси $-\infty < Z < \infty$ тогда и только тогда, когда $\Lambda - 1/2$ — неотрицательное целое число. Кроме того, это целое число равно числу нулей ограниченного решения. Так как Ps_n^m имеет в точности $n-m$ нулей, мы выводим отсюда, что Λ приблизительно равно $n-m+1/2$ и Ps_n^m приблизительно равно целому кратному функции $(1-z^2)^{m/2} D_{n-m}(2\theta^{1/4} z)$. Таким образом, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_n^m(\theta) = -4\theta + 2\theta^{1/2}(2n-2m+1) + O(1), \qquad \theta \to \infty, \\ &\mathrm{Ps}_n^m(x, \theta) \sim c_n^m (1-x^2)^{m/2} D_{n-m}(2\theta^{1/4} x), \qquad \theta \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &c_n^m = \mathrm{Ps}_n^m(0, \theta)/D_{n+m}(0), \qquad n-m \text{ четно}, \\ &c_n^m = \frac{1}{2}\theta^{-1/4} \frac{d\mathrm{Ps}_n^m}{dx}(0, \theta) \bigg/ \frac{dD_{n-m}}{dZ}(0), \qquad n-m \text{ нечетно}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Явные выражения для c_n^m вытекают из 8.2 (4) и 16.11(11), (12).

Для того чтобы получить более высокую точность, надо заменить (10) формальным бесконечным рядом

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n^m(\theta) &= -4\theta + 2\theta^{1/2}(2n-2m+1) + \sum_{r=0}^{\infty} \theta^{-r/2}\lambda_{n,r}^m, \\ \mathrm{Ps}_n^m(x,\theta) &= (1-x^2)^{m/2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n,r}^m D_{n-m+2r}(2\theta^{1/4}x), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

подставить (12) в 16.11(1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях θ. В этом направлении приближения были получены Мейкснером (Meixner; 1944, 1947, 1948, 1951), Эберлейном (Eberlein; 1948), Сипсом (Sips; 1949). В частности, Мейкснер (Meixner; 1951) дал разложения λ_n^m вплоть до члена, содержащего $\theta^{-5/2}$, и установил также значения некоторых из коэффициентов $c_{n,r}^m$. Полезность этих формул была проверена численными расчетами.

Если x находится вне некоторой окрестности нуля, то функция параболического цилиндра в формуле (10) может быть заменена ее асимптотическим представлением 8.4(1). В окрестности точки $x=0$ поведение функции $\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)$ более сложно, так как около этой точки группируются все нули.

Если θ отрицательно, то нули группируются около точек $x=\pm 1$, и поэтому в окрестности этих точек поведение функции $\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)$ более сложно. Для изучения поведения вблизи точки $x=1$ можно применить подстановку

$$y=(1-z^2)^{m/2}Y, \quad 4(-\theta)^{1/2}(1-z)=Z, \quad (13)$$

которая преобразует уравнение 16.11(1) в

$$Z\left[1-\frac{Z}{8(-\theta)^{1/2}}\right]\frac{d^2Y}{dZ^2}+(m+1)\left[1-\frac{Z}{4(-\theta)^{1/2}}\right]\frac{dY}{dZ}+ \\ +\left\{\Lambda-\frac{Z}{4}\left[1-\frac{Z}{8(-\theta)^{1/2}}\right]\right\}Y=0, \quad (14)$$

где

$$8\Lambda=(-\theta)^{-1/2}(\lambda_n^m-m-m^2). \quad (15)$$

При больших значениях $-\theta$ дифференциальное уравнение (14) аппроксимируется дифференциальным уравнением вида 6.2(1), где

$$a_0=1, \quad a_1=0, \quad a_2=-1/4, \quad b_0=0, \quad b_1=m+1, \quad b_2=\Lambda.$$

Общее решение этого аппроксимирующего уравнения было дано в 6.2(6). Оно имеет вид

$$e^{-Z/2}\,\mathfrak{I}\left(\frac{m+1}{2}-\Lambda,\ m+1,\ Z\right),$$

где $\mathfrak{I}(a, c, x)$ является общим решением 6.1(2). Так как Y ограничено на $0<z<1$, а этот промежуток при $\theta\to-\infty$ переходит в полуось $0<Z<\infty$, то решение должно быть ограничено на этой полуоси. Но единственным решением вырожденного гипергеометрического уравнения при $c=m+1$, которое ограничено в точке $Z=0$, является $\Phi(a, c, Z)$, и из 6.13(2) видно, что эта функция экспоненциально возрастает, когда $Z\to\infty$, за исключением случая, когда a — нуль или отрицательное целое число. Таким образом,

$\frac{1}{2}(m+1)-\Lambda=-M$, где $M=0, 1, 2, \ldots$, и решение приближенно равно кратному функции

$$e^{-Z/2}\Phi(-M,\ m+1,\ Z)$$

или в силу 6.9 (36) кратному функции

$$\exp[2(-\theta)^{1/2}z]\,L_M^m[4(-\theta)^{1/2}(1-z)].$$

Но M является числом нулей решения на промежутке $0<z<1$. Так как $Ps_n^m(z,\theta)$ имеет $\frac{n-m}{2}$ или $\frac{n-m-1}{2}$ нулей на этом промежутке в зависимости от того, четно или нечетно число $n-m$, мы имеем $n=m+2M$ или $n=m+2M+1$ в зависимости от того, четно или нечетно $n-m$. Кроме того, $\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)$ является четной или нечетной функцией от z в зависимости от того, четно или нечетно $n-m$. Следовательно, мы получили такие результаты:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_{m+2k}^m(\theta)=4(-\theta)^{1/2}(m+2k+1)+O(1), \qquad \theta\to-\infty,\\
&\mathrm{Ps}_{m+2k}^m(x,\theta)\sim\frac{1}{2}c_{m+2k}^m(1-x^2)^{m/2}\{\exp[2(-\theta)^{1/2}x]\times\\
&\qquad\times L_k^m[4(-\theta)^{1/2}(1-x)]+\exp[-2(-\theta)^{1/2}x]\times\\
&\qquad\qquad\times L_k^m[4(-\theta)^{1/2}(1+x)]\}, \quad \theta\to-\infty,\\
&c_{m+2k}^m=\mathrm{Ps}_{m+2k}^m(0)/L_k^m[4(-\theta)^{1/2}],
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_{m+2k+1}^m(\theta)=4(-\theta)^{1/2}(m+2k+1)+O(1), \quad \theta\to-\infty,\\
&\mathrm{Ps}_{m+2k+1}^m(x,\theta)\sim\frac{1}{2}c_{m+2k+1}^m(1-x^2)^{m/2}\{\exp[2(-\theta)^{1/2}x]\times\\
&\qquad\times L_k^m[4(-\theta)^{1/2}(1-x)]-\exp[-2(-\theta)^{1/2}x]\times\\
&\qquad\qquad\times L_k^m[4(-\theta)^{1/2}(1+x)]\}, \quad \theta\to-\infty.
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Коэффициенты c_n^m могут быть вычислены путем сравнения обеих частей при малых значениях x.

Как и в случае $\theta\to\infty$, лучшую точность можно получить путем разложения λ_n^m по убывающим степеням $(-\theta)^{1/2}$ и Ps_n^m в ряды по многочленам Лагерра (комбинированным с экспоненциальными функциями, как и выше), подстановкой этих разложений в 16.11(1) и последующим сравнением коэффициентов при одинаковых степенях θ. См. Svartholm (1938), Meixner (1944, 1947, 1948, 1951), Sips (1949). В частности, Мейкснер (Meixner; 1951) дал разложение для λ_n^m вплоть до члена, содержащего $(-\theta)^{-5/2}$, а также дал некоторые коэффициенты разложений в ряды по многочленам Лагерра.

Если x находится вне некоторых окрестностей точек ± 1, то многочлены Лагерра в (16) и (17) можно заменить главными членами

$$\frac{(-1)^k}{k!}[4(-\theta)^{1/2}(1\mp x)]^k.$$

Вблизи точек ± 1 поведение Ps более сложно и не может быть описано с помощью элементарных функций.

Другие асимптотические формы. Асимптотическое поведение $\lambda_n^m(\theta)$ и $a_{n,r}^m(\theta)$ при $n \to \infty$ было изучено Мейкснером (Meixner; 1944), который нашел, что непрерывные дроби приводят к разложениям по убывающим степеням $2n+1$. Он дал разложение для λ_n^m вплоть до члена, содержащего $(2n+1)^{-5}$ и разложения для a_r/a_0 вплоть до члена, содержащего $(2n+1)^{-2}$.

Абрамович (Abramowitz; 1949) изучил случай больших значений m и больших m и θ с помощью метода, похожего на использованный выше, при изучении больших значений $|\theta|$. Он также проверил свои формулы численными расчетами.

16.13. Ряды и интегралы, содержащие сфероидальные волновые функции

Интегральные соотношения и интегральные уравнения. Интегральные соотношения, установленные выше, в конце п. 16.10, остаются справедливыми и для сфероидальных волновых функций. Кроме того, существуют интегральные соотношения при $a=-1$, $b=1$, так как Ps_n^m ограничено на $(-1, 1)$ и имеет на этом промежутке ограниченную производную, а следовательно, 16.10 (12) выполняется при $a=-1$, $b=1$, если N и $\partial N/\partial\eta$ ограничены. Используем ядра 16.10 (13) и рассмотрим

$$g(\xi)=(1-\xi^2)^{m/2}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{m/2}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\ \theta)\exp(2\theta^{1/2}\xi\eta i)\,d\eta. \tag{1}$$

Из результатов п. 16.10 следует, что это—эллипсоидальная волновая функция, и так как $g(\xi)$ ограничено на промежутке $-1<\xi<1$, эта функция кратна $\mathrm{Ps}_n^m(\xi,\ \theta)$. Для того чтобы определить коэффициент пропорциональности, вычислим

$$\left.\begin{aligned} g(0)&=\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{m/2}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\ \theta)\,d\eta,\\ \frac{dg}{d\xi}(0)&=2\theta^{1/2}i\int_{-1}^{1}\eta(1-\eta^2)^{m/2}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\ \theta)\,d\eta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

путем подстановки 16.11(4). Но

$$\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{m/2}\,\mathrm{P}_{n+2r}^m(\eta)\,d\eta, \tag{3}$$

очевидно, обращается в нуль, если $n-m$—нечетное число, поскольку тогда подынтегральная функция является нечетной функцией от η. В силу 3.12 (25) этот интеграл обращается также в нуль, если $n-m$ четно, но $n+2r\neq m$. Наконец, при $n+2r=m$ имеем в силу 3.12 (25)

$$\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{m/2}\,\mathrm{P}_m^m(\eta)\,d\eta=\frac{(-2)^m m!}{m+1/2}. \tag{4}$$

Аналогично интеграл

$$\int_{-1}^{1} \eta (1-\eta^2)^{m/2} \mathrm{P}_{n+2r}^{m} (\eta)\, d\eta$$

обращается в нуль, за исключением случая, когда $n+2r=m+1$, и

$$\int_{-1}^{1} \eta (1-\eta^2)^{m/2} \mathrm{P}_{m+1}^{m} (\eta)\, d\eta = \frac{(-2)^m m!}{m+3/2}, \tag{5}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= (-1)^{k+m} \frac{2^m m!}{m+1/2} a_{n,\,-k}^{m} (\theta), && n=m+2k, \\ g(0) &= 0, && n=m+2k+1, \\ \frac{dg}{d\xi}(0) &= 0, && n=m+2k, \\ \frac{dg}{d\xi}(0) &= 2\theta^{1/2} i (-1)^{k+m} \frac{2^m m!}{m+3/2} a_{n,\,-k}^{m} (\theta), && n=m+2k+1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Используя эти результаты и четности Ps, получаем из (1) интегральные уравнения

$$(m+1/2)\, \mathrm{Ps}_n^m (0,\ \theta) (1-\xi^2)^{m/2} \int_{0}^{1} (1-\eta^2)^{m/2} \cos (2\theta^{1/2}\xi\eta)\, \mathrm{Ps}_n^m (\eta,\ \theta)\, d\eta =$$
$$= (-1)^{k+m}\, 2^{m-1} m!\, a_{n,\,-k}^{m} (\theta)\, \mathrm{Ps}_n^m (\xi,\ \theta), \qquad n=m+2k, \tag{7}$$

$$(m+3/2) \frac{d\,\mathrm{Ps}_n^m}{d\xi} (0,\ \theta) (1-\xi^2)^{m/2} \int_{0}^{1} (1-\eta^2)^{m/2} \sin (2\theta^{1/2}\xi\eta)\, \mathrm{Ps}_n^m (\eta,\ \theta)\, d\eta =$$
$$= (-1)^{k+m}\, 2^m m! \theta^{1/2} a_{n,\,-k}^{m} (\theta)\, \mathrm{Ps}_n^m (\xi,\ \theta), \qquad n=m+2k+1. \tag{8}$$

Мейкснер (Meixner; 1951) дал также интегральные соотношения

$$\int_{-1}^{1} \exp (2i\theta^{1/2}\sigma\xi\eta)\, J_m \left\{ 2 [\theta (1-\sigma^2)(1-\eta^2)(\xi^2-1)]^{1/2} \right\} \mathrm{Ps}_n^m (\eta,\ \theta)\, d\eta =$$
$$= 2i^{n-m} S_n^{m\,(1)} (\xi,\ \theta)\, \mathrm{Ps}_n^m (\sigma,\ \theta), \tag{9}$$

$$s_n^{-m} (\theta) \int_{-1}^{1} P_n^{-m} (\cos \chi)\, \psi_m^{(j)} (\kappa r)\, Ps_n^m (\eta,\ \theta)\, d\eta =$$
$$= \frac{(-1)^m \theta^{-m/2} (n+m)!}{2^{2m-1} m! (n-m)!} (\alpha^2-1)^{-m/2} S_n^{m\,(j)} (\xi,\ \theta)\, S_m^{m\,(1)} (\alpha,\ \theta). \tag{10}$$

В (10) κr и $\cos\chi$ имеют тот же смысл, что и в 16.10 (3). При $j=1$ формула (10) справедлива для всех ξ, а при $j=2,\ 3,\ 4$ — лишь при достаточно больших значениях ξ. Оба соотношения могут быть установлены, если заметить, что их ядра как функции от ξ и η удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных для N из п. 16.10 и, следовательно, интегралы, как функции от ξ, являются эллипсоидальными волновыми функциями. Для соотношения (9) эта волновая функция ограничена при $\xi=\pm 1$ и, следовательно, кратна $S^{m\,(1)}(\xi)$. Коэффициент пропорциональности может быть здесь вычислен путем умножения обеих частей равенства (9) на $(\xi^2-1)^{-m/2}$, предельного перехода $\xi \to 1$ и использования формул (7), (8) и 16.12 (1). Для соотношения (10) используется асимптотическое поведение правой части при $\xi \to \infty$.

Другие интегральные формулы могут быть получены из некоторых разложений, выведенных в предыдущих пунктах, путем использования свойств ортогональности функций Лежандра. Например, из 16.11(4), 16.9 (11) и свойств ортогональности и нормировки 3.12 (19) и (21) для функций Лежандра вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \mathrm{Ps}_n^m(x,\ \theta)\, \mathrm{P}_l^m(x)\, dx = 0, \text{ если } l-n \text{ отрицательно или нечетно,} \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{Ps}_n^m(x,\ \theta)\, \mathrm{P}_l^m(x)\, dx = \frac{(-1)^r a_{n,r}^m(\theta)}{l+1/2} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} = \\ &\qquad = \frac{(-1)^r a_{n,r}^{-m}(\theta)}{l+1/2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \text{ если } l-n=2r, \quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Другие интегральные формулы могут быть выведены из таких разложений, как 16.10 (2) и их различных частных и предельных случаев. Некоторые важные интегралы могут быть получены путем подстановки специальных значений для α, σ, ξ в (9) и (10), см. Meixner (1951).

Из полученных выше рядов и интегралов вытекает много разложений в ряды по сфероидальным волновым функциям или по произведениям таких функций. Формулы (11) могут рассматриваться как определяющие коэффициенты Фурье в разложении $\mathrm{P}_l^m(x)$ в ряды по сфероидальным волновым функциям. Они приводят к разложениям

$$\mathrm{P}_l^m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{l-2r+1/2}{l+1/2} a_{l-2r,\ r}^{-m}(\theta)\, \mathrm{Ps}_{l-2r}^m(x,\ \theta), \tag{12}$$

которые могут рассматриваться как обращения 16.11(4). Аналогично (7) — (10) можно интерпретировать как определение коэффициентов Фурье для разложения ядер этих интегральных соотношений в ряды по сфероидальным волновым функциям, см. Meixner (1951) Разложения плоских, сферических и цилиндрических волн по сфероидальным волнам были даны Мейкснером (Meixner; 1944, 1951), Лейтнером и Спенсом (Leitner and Spence; 1950).

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

16.14. Волновое уравнение Ламе

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2} + \{h - l[\mathrm{sn}(z,\ k)]^2 + \omega^2 k^2 [\mathrm{sn}(z,\ k)]^4\}\Lambda = 0 \tag{1}$$

(см. п. 16 1 4) называют *якобиевой формой волнового уравнения Ламе*; иногда его называют обобщенным уравнением Ламе или дифференциальным уравнением эллипсоидальных волновых функций. Если $\omega = 0$, то уравнение (1) сводится к уравнению Ламе 15.1(6). В этом пункте мы будем рассматривать эллиптические функции с одним и тем же модулем k, причем из 15.1(6) видно, что $0<k<1$. Из п. 15.1.1 следует также, что в эллипсоидальных волновых функциях встречаются лишь такие значения z, что $\operatorname{Im} z=0$ или $\operatorname{Im} z=K'$, либо, наконец, $\operatorname{Re} z=K$. Однако сначала мы рассмотрим уравнение (1) для произвольных комплексных значений z.

Алгебраическая форма волнового уравнения Ламе может быть получена путем замены переменных

$$(\operatorname{sn} z)^2=x, \tag{2}$$

преобразующей уравнение (1) в

$$\frac{d^2\Lambda}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-k^{-2}}\right)\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{hk^{-2}-lk^{-2}x+\omega^2x^2}{4x(x-1)(x-k^{-2})}\Lambda=0. \tag{3}$$

Форма Вейерштрасса уравнения (1) может быть получена путем подстановки 15.2 (2), тригонометрическая форма — с помощью 15.2 (4), комбинированной с $\Lambda=f(z)M$, где $f(z)$ равно 1, $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, $\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$, $\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z$, $\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$ или $\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$ и другие алгебраические формы — с помощью 15.2 (8) и других рациональных преобразований уравнения (3).

Уравнение (3) имеет четыре особые точки: $x=0, 1, k^{-2}$ являются регулярными особыми точками, каждая из которых имеет показатели 0 и $\frac{1}{2}$, а $x=\infty$ — нерегулярной особой точкой. Относительно общей теории уравнений с нерегулярными особыми точками см. Айнс (1939, стр. 571 и далее). В окрестности любой регулярной особой точки существуют решения в виде степенных рядов, весьма напоминающих ряды для уравнения Гойна (см. 15.3), но в окрестности нерегулярной особой точки нет ни одного сходящегося разложения. Однако существуют формальные разложения вида

$$e^{\pm i\omega\xi}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\xi^{-2-n}, \tag{4}$$

где $\xi=x^{1/2}$, $(x-1)^{1/2}$ или $(x-k^{-2})^{1/2}$ (*поднормальные решения*, Айнс, 1939, п. 17.53). Хотя эти формальные ряды расходятся, они асимптотически представляют решения уравнения (3), когда $x\to\infty$ в некоторых секторах.

Уравнение (3) можно рассматривать многими способами как вырожденную форму уравнения Фукса. В качестве отправного пункта можно выбрать либо уравнение с пятью регулярными особыми точками (Айнс, 1939, п. 15.4), либо уравнение, имеющее шесть элементарных особых точек (Айнс, 1939, стр. 677).

Из общей теории дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами (Айнс, 1939, стр. 505 и далее, Poole, 1936, стр. 170 и далее) вытекает, что уравнение (1) имеет решение вида

$$u_0(z)=e^{\mu z}\frac{\theta_1\left(\frac{z-a}{2K}\right)}{\theta_1\left(\frac{z}{2K}\right)}P(z), \tag{5}$$

где a и μ — постоянные, зависящие от h, k^2, l, ω, и $P(z)$ — двояко-периодическая функция с периодами $2K$, $2iK'$. (Мы использовали здесь соотношение 13.20 (1) между сигма-функцией и тета-функциями.) Очевидно, что

$$u_0(-z)=e^{-\mu z}\frac{\theta_1\left(\frac{z+a}{2K}\right)}{\theta_1\left(\frac{z}{2K}\right)}P(-z) \tag{6}$$

также является решением, и из (5), (6) и табл. 8 п. 13.19 видно, что a определяется с точностью до знака и целого кратного 2K и $2i$K′. Если выбрано одно из возможных значений a, то тем самым определено μ.

Вообще, $u_0(z)$ и $u_0(-z)$ линейно независимы и общее решение уравнения (1) является линейной комбинацией функций (5) и (6). Единственное исключение возникает, если $u_0(z)=\pm u_0(-z)$ или

$$e^{2\mu z}\theta_1\left(\frac{z+a}{2K}\right)=\pm\theta_1\left(\frac{z-a}{2K}\right).$$

Полагая $z=a$, получаем из табл. 9 п. 13.19, что в этом случае a/K является нулем $\theta_1(v)$ и, следовательно, в этом случае $a=mK+nK'i$. Полагая $z=K$, получаем из табл. 8 п. 13.19, что $e^{2\mu K}=\pm 1$ и, следовательно, в этом случае $2K\mu=n'\pi i$; простое вычисление показывает, что $n=n'$ Во всяком случае, видно, что для исключительных значений u_0 является либо четной, либо нечетной функцией от z, $u_0(z+2K)=\pm u_0(z)$, $u_0(z+2K'i)=\pm u_0(z)$, так что 2K и $2K'i$ являются периодами или полупериодами $u_0(z)$. В этих исключительных случаях, для того чтобы получить общее решение уравнения (1), надо построить решение второго (или третьего) рода.

В соответствии с п. 16.1.4 граничные условия для $B(\beta)$ и $C(\gamma)$ в случае *эллипсоидальных волновых фучкций* являются теми же самыми, что и в случае эллипсоидальных гармоник. В силу п. 15.1 1 это означает, что единственным случаем, представляющим интерес с точки зрения эллипсоидальных волновых функций, является случай, когда (1) имеет решение, являющееся *двояко-периодической* функцией от z с периодами 4K и $4i$K′. Это в точности исключительный случай предыдущего абзаца. Двояко-периодическим решением является $u_0(z)$ и оно называется *волновой функцией Ламе первого рода*. Есть два условия для существования такого решения, одно является условием на a, а другое — на μ. Если задано $\omega\ (=(a^2-b^2)^{1/2}\kappa$ в случае волнового уравнения), то эти два условия определяют *собственные значения* как для h, так и для l.

Начиная отсюда, мы будем предполагать, что в уравнении (1) ω фиксировано, а h и l принимают собственные значения. Если $\omega\to 0$, то собственные значения l стремятся к числам $l_n=n(n+1)k^2$, где $n=0, 1, \ldots$, причем каждому числу l_n соответствуют $2n+1$ собственные значения h, а именно собственные значения h, соответствующие многочленам Ламе (см. п. 15.1 1). Это показывает, что при $\omega=0$ собственные значения для l вырождены (или кратны), это вырождение нарушается, если $\omega\neq 0$ (см. также Стретт, 1935, стр. 67).

Если h и l принимают собственные значения, то $u_0(z)$ является волновой функцией Ламе первого рода. Мы видели выше, что в этом случае $u_0(-z)$ и $u_0(z)$ линейно зависимы, т. е. u_0 является либо четной, либо нечетной функцией от z, и можно доказать, как в п. 15.5.1 и 16.4, что u_0 также является четной или нечетной функцией от $z-K$ и от $z-K-K'i$. В соответствии с четностью в точках 0, K, $K+K'i$ функции Ламе первого рода можно подразделить на восемь классов. Функции, принадлежащие одному и тому же классу, можно охарактеризовать числом их нулей в промежутках (0, K), (K, $K+K'i$). Для этих функций, однако, нет ни стандартных определений, ни хорошо развитой системы обозначений.

Как и в п. 15.5 и 16.4, свойства волновых функций Ламе в точках $z=0$, K, $K+iK'$ можно использовать для постановки ряда задач Штурма — Лиувилля на промежутках (0, K) и (K, $K+K'i$). Как и в п. 15.5, каждая волновая функция Ламе является общей собственной функцией для двух задач Штурма — Лиувилля, одна из которых ставится на промежутке (0, K), а другая — на промежутке (K, $K+K'i$). Для каждой из этих двух задач Штурма — Лиувилля мы получаем *характеристические кривые*, т. е. графики собственных значений h как функций от l. Собственные значения h и l являются координатами точек пересечения этих кривых на (h, l)-плоскости. Свойства *ортогональности волновых функций* Ламе вытекают из свойств ортогональности функций Штурма—Лиувилля в сочетании со свойствами симметрии в точках 0, K, K+K$'i$.

По-видимому, для волновых функций Ламе неизвестно никаких *интегральных уравнений*, однако Мёглих (Möglich; 1927) вывел интегральное уравнение для *эллипсоидальных поверхностных волновых функций*. Из 16.1 (21), (22) видно, что функция

$$\Psi(\beta, \gamma)=B(\beta)\,C(\gamma) \tag{7}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]^{-1}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\gamma^2}\right)+\left\{\omega^2k^2[(\operatorname{sn}\beta)^2+(\operatorname{sn}\gamma)^2]-l\right\}\Psi=0. \tag{8}$$

Регулярные на поверхности эллипсоида (см. п. 15.1.1) решения уравнения (8) мы будем называть *эллипсоидальными поверхностными волновыми функциями*. Через

$$L_{\theta,\,\varphi}\Psi=0 \tag{9}$$

сокращенно обозначим уравнение (8), преобразованное к координатам φ, θ, введенным в 15.5 (45). Рассмотрим теперь выражение

$$\exp\left[i\kappa\left(x\sin\theta'\cos\varphi'+y\sin\theta'\sin\varphi'+z\cos\theta'\right)\right], \tag{10}$$

которое при фиксированных θ', φ' представляет плоскую волну и, следовательно, является решением уравнения $\Delta W+\kappa^2W=0$. Используя 15.1 (8) и 15.5 (45) и полагая $\omega=(a^2-b^2)^{1/2}\kappa$, получаем для (10)

$$K(\theta, \varphi;\, \theta', \varphi')=\exp\left[i\omega\left(k\operatorname{sn}\alpha\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi\cos\varphi'+\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\,\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\alpha\sin\theta\sin\theta'\sin\varphi\sin\varphi'+i\operatorname{dn}\alpha\cos\theta\cos\theta'\right)\right]. \tag{11}$$

Мёглих показал, что при любом фиксированном α функция K удовлетворяет уравнению

$$(L_{\theta,\varphi}-L_{\theta',\varphi'})\,K=0, \tag{12}$$

и вывел с помощью процесса, использованного в пп. 15.5.3 и 16.3, что для каждого фиксированного α собственная функция интегрального уравнения

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(\theta, \varphi;\, \theta', \varphi')\,\Psi(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'=\lambda\Psi(\theta, \varphi) \tag{13}$$

является эллипсоидальной поверхностной волновой функцией, выраженной в координатах θ, φ п. 15.5 (45).

Весьма мало известно относительно конкретного построения волновых функций Ламе. Эллипсоидальные поверхностные волновые функции при $\omega\to 0$ сводятся к эллипсоидальным поверхностным гармоникам, и это подсказывает искать разложения эллипсоидальных поверхностных волновых функций в ряды по произведениям функций Ламе (т. е. в ряды по произведениям эллипсоидальных поверхностных гармоник). Для малых значений ω эти разложения сходятся достаточно быстро (Стретт, 1932, стр. 67 и далее).

Мёглих (Möglich; 1927) получил много разложений волновых функций Ламе с помощью различных разложений ядра интегрального уравнения (13) и подстановки различных частных значений α (обычно 0, $\pm$K, $\pm$K$\pm$K$'i$). Наиболее существеными из этих результатов являются разложения эллипсоидальных поверхностных волновых функций в ряды по сферическим поверхностным гармоникам, разложения волновых функций Ламе в ряды по функциям Лежандра переменного $k'^{-1}\,\mathrm{dn}\, z$ (другими возможными переменными являются $\mathrm{sn}\, z$, $k\,\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $ikk'^{-1}\,\mathrm{cn}\, z$ и $\mathrm{dn}\, z$) и разложения волновых функций Ламе в ряды по сферическим функциям Бесселя 16 9 (6). Эти последние ряды представляются наиболее удобными для изучения асимптотического поведения волновых функций Ламе при $z \to iK'$.

Волновые функции Ламе второго и третьего рода могут быть получены, если заменить в разложениях Меглиха по функциям Бесселя $\psi_\nu^{(1)}$ на $\psi_\nu^{(j)}$, $j = 2, 3, 4$ (Мёглих рассматривал ряды с $\psi_\nu^{(4)}$, которые называл интегралами второго рода). Для эллипсоидальных волновых функций величины B и C в п. 16 1.4 являются волновыми функциями Ламе первого рода, в то время как A является волновой функцией Ламе первого или третьего рода в зависимости от того, строится ли эллипсоидальная волновая функция внутри или вне эллипсоида.

Относительно дальнейшей информации об эллипсоидальных волновых функциях см Malurkar (1935) и Möglich (1927).

ГЛАВА 17

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Предварительные замечания Целью этой главы является главным образом дать первоначальную информацию относительно часто встречающихся функций теории чисел и указать, где можно найти дальнейшие результаты. Мы не стремимся при этом к полному охвату материала, и, в частности, будет опущена вся теория алгебраических чисел, равно как и все вопросы, требующие определения группы, нормирования или других алгебраических понятий

Для того чтобы не давать слишком много ссылок в тексте, мы приведем здесь список тех стандартных работ, к которым надо обращаться за информацией относительно вопросов, рассматриваемых в каждом индивидуальном пункте Относительно всей главы 17 наиболее полным является труд Диксона (Dickson, 1919—1923) Относительно отдельных пунктов смотри:

17.1. L E. Dickson, 1919, т I, Hardy и Wright, 1938, 1945.
17 2. Mac Mahon, 1915, 1916; Hardy и Wright, 1938, 1945.
17.3 L. E Dickson, 1919—1923
17.5. Landau, 1927, т. I.
17.6 Landau, 1927, т. I; Hardy и Wright, 1938, 1945.
17.7. Landau 1927, т. II; Титчмарш, 1947, 1953; Ингам, 1936.
17.8. Landau, 1927, т. I, 1909, т I
17.10 Landau, 1927, т. II.

17.1. Элементарные теоретико-числовые функции, порождаемые дзета-функцией Римана

17.1.1. Обозначения и определения. На протяжении этой главы будут использованы следующие обозначения

l, m, n	обозначают натуральные числа (за исключением случая, когда даются другие обозначения)
$m \mid n$	означает, что m делит n
$m \nmid n$	означает, что m не является делителем n.
(m, n)	обозначает наибольший общий делитель m и n. Если $(m, n)=1$, то мы говорим, что m и n взаимно просты.
$\sum\limits_{d \mid n}, \prod\limits_{d \mid n}$	—сумма или произведение, взятая по всем (положительным) делителям $d \mid n$.
$\sum\limits_{(m,n)=1}$	—сумма по всем m, взаимно простым с n
p, p_1, p_2 q, q_1, q_2	обозначают простые числа, т. е. числа >1, но не имеющие делителей, за исключением единицы и самого числа.

$\sum\limits_p, \prod\limits_p$ — сумма или произведение, взятые по всем простым числам $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu} \tag{1}$$

является *каноническим разложением* числа n, т. е его записью в виде произведения степеней различных простых чисел. За исключением случая $n=1$, мы будем предполагать

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \ldots,\ \alpha_\nu > 0. \tag{2}$$

$\nu(n)$ обозначает число различных простых делителей числа n; $\nu(1)=0$.

$\varphi(n)$ обозначает *функцию Эйлера*. Она равна числу положительиых целых m, взаимно простых и не превосходящих n.

$\varphi_k(n) = \sum\limits_{(m,n)=1,\ 1\leqslant m\leqslant n} m^k$; $\varphi_0(n) = \varphi(n)$

$J_k(n)$ при $k=1, 2, 3, \ldots$ обозначает *функцию Жордана*. Она равна числу различных множеств из k (равных или различных) на туральных чисел $\leqslant n$, наибольший общий делитель которых взаимно прост с n. Обычным обозначением для $J_k(n)$ является $\tau^k(n)$

$d(n) = \sum\limits_{l\mid n} 1$ — число делителей n.

$d_k(n)$ при $k=2, 3, 4, \ldots$ обозначает число способов представить n в виде произведения k различных миожителей. Разложения, отличающиеся порядком сомножителей, рассматриваются как различные

$$\sigma_k(n) = \sum_{d\mid n} d^k \tag{3}$$

обозначает сумму k-х степеией делителей числа n (включая 1 и n).

$$d(n) = d_2(n) = \sigma_0(n). \tag{4}$$

Вместо $\sigma_1(n)$ мы будем часто писать $\sigma(n)$.

Следующие обозначения связаны с каионическим разложением (1) числа n

$\lambda(n)$ обозначает *функцию Лиувилля*. Если n имеет каноническое разложение (1), то $\lambda(1)=1$ н $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu}$.

$\mu(n)$ обозначает *функцию Мебиуса*, $\mu(1)=1$, $\mu(n) = (-1)^\nu$, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 1$ В остальных случаях $\mu(n)=0$.

$\Lambda(n)$ равно нулю, за исключением случая, когда $n = p^m$, где p — простое число. В этом случае

$$\Lambda(n) = \ln p$$

Мультипликативные функции. Функция $f(n)$, определенная для всех натуральных n и такая, что

$$f(n)\, f(m) = f(nm), \quad \text{если } (n, m) = 1, \tag{5}$$

называется *мультипликативной*. Если $f(n)\, f(m) = f(nm)$ для всех m и n, то $f(n)$ называется *вполне мультипликативной* Применяются также термины *факторизуемая* и *дистрибутивная*

Функции, которые мы будем использовать в этой главе, называют также *арифметическими* функциями Это название связано с тем, что все указанные функции $f(n)$ определены для всех натуральных значений n.

17.1.2. Явные выражения и производящие функции. Если n записано в каноническом виде (1), то $\varphi(1)=1$, $J_k(1)=1$ и при $n>1$

$$\varphi(n)=n(1-p_1^{-1})(1-p_2^{-1})\ldots(1-p_\nu^{-1}), \tag{6}$$

$$J_k(n)=n^k(1-p_1^{-k})(1-p_2^{-k})\ldots(1-p_\nu^{-k}), \tag{7}$$

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_\nu+1), \tag{8}$$

$$\sigma_k(n)=\frac{p_1^{k(\alpha_1+1)}-1}{p_1^k-1}\ldots\frac{p_\nu^{k(\alpha_\nu+1)}-1}{p_\nu^k-1}. \tag{9}$$

Для мультипликативной функции $f(n)$ справедливо фундаментальное тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_p[1+f(p)+f(p^2)+\ldots],$$

которое имеет место, если стоящий слева ряд абсолютно сходится. В этом случае произведение в правой части равенства также абсолютно сходится и называется *произведением Эйлера* для данного ряда. Если функция $f(n)$ вполне мультипликативна, то $1+f(p)+f(p^2)+\ldots$ является геометрической прогрессией, и мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_p[1-f(p)]^{-1}, \quad f(n) \text{ вполне мультипликативна.}$$

Применяя фундаментальное тождество для вполне мультипликативной функции n^{-s} и для некоторых связанных с ней мультипликативных функций, получаем ряд тождеств для дзета-функции Римана. Дзета-функция будет изучена в п 17 7, и многие из указанных ниже тождеств получаются описанным способом·

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}, \qquad \operatorname{Re} s>1,$$

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>1, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\,n^{-s}, && \operatorname{Re} s>2,\\
\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\,n^{-s}, && \operatorname{Re} s>1,\\
\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}&=\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(n)|\,n^{-s}, && \operatorname{Re} s>1,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{[\zeta(s)]^2}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\nu(n)}n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>1, \tag{12}$$

$$[\zeta(s)]^k=\sum_{n=1}^{\infty}d_k(n)\,n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>1,\ k=2, 3, \ldots \tag{13}$$

$$\frac{[\zeta(s)]^4}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}[d(n)]^2 n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>1, \tag{14}$$

$$\zeta(s)\,\zeta(s-k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)\,n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>\max(1, \operatorname{Re} k+1), \tag{15}$$

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)\,n^{-s},$$

$$\operatorname{Re} s>\max[1, \operatorname{Re} a+1, \operatorname{Re} b+1, \operatorname{Re}(a+b)+1], \tag{16}$$

$$[\zeta(s)]^k\prod_p P_{k-1}\left(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}[d_k(n)]^2 n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s>1,\ k\geqslant 2, \tag{17}$$

где P — многочлен Лежандра (определен в п. 3.6 2),

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-s}, \tag{18}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной s. Соотношения (14), (16) были открыты Рамануджаном, а (17) доказано Титчмаршем; (16) обобщено Чоула (Chowla; 1928).

Функции в левой части равенств (10)—(18) могут рассматриваться как производящие функции для коэффициентов при n^{-s} в правой части в силу следующей леммы.

Лемма. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s}$ *обращается в нуль для всех вещественных* $s\geqslant s_0$, *и если ряд абсолютно сходится при* $s=s_0$, то $c_n=0$ *при* $n=1, 2, 3, \ldots$ (см. Hardy, Wright, 1945, п. 17.1).

17.1.3. Соотношения и свойства. Функции $\varphi(n)$, $\mu(n)$ и $J_k(n)$ мультипликативны и

$$\sum_{d\mid n}\Lambda(d)=\ln n. \tag{19}$$

Функции $\varphi(n)$ и $\mu(n)$ связаны *формулой обращения Мёбиуса* (ее называют также *формулой Дедекинда — Лиувилля*). Пусть $f(n)$ определено для всех $n=1, 2, 3, \ldots$, и пусть

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d). \tag{20}$$

Тогда

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\,g(n/d) \tag{21}$$

и обратно. В частности,

$$n=\sum_{d\mid n}\varphi(d), \qquad \varphi(n)=\sum_{d\mid n}\frac{n}{d}\,\mu(d). \tag{22}$$

Формула обращения Мёбиуса является следствием формулы

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}0 & \text{при } n>1,\\ 1 & \text{при } n=1.\end{cases} \tag{23}$$

Ее можно записать также в виде

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) m^{-s} F(mx), \tag{24}$$

если

$$F(x)=\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} f(mx), \tag{25}$$

где $f(x)$ определено для всех $x>0$, $|f(x)|=O(x^{s_0})$, когда $x\to\infty$ и $\operatorname{Re} s>s_0+2$.

Другая формула обращения (см. Hardy и Wright, 1945, гл. 16) состоит в том, что следующие два равенства определяют взаимно обратные преобразования

$$G(x)=\sum_{n=1}^{[x]} F\left(\frac{x}{n}\right), \qquad F(x)=\sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Здесь x — вещественное положительное переменное, $[x]$ — наибольшее целое $\leqslant x$, причем пустая сумма (например, первая при $x<1$) интерпретируется как нуль. Если $F(x)=1$ для всех x, то это приводит к формуле

$$\sum_{m=1}^{n} \mu(m)\left[\frac{n}{m}\right]=1.$$

Формула обращения Мебиуса была обобщена (см. Cesàro, 1887; H. F. Baker, 1889, Gegenbauer, 1893, Bell, 1926) Она используется для определения арифметического интегрирования и дифференцирования. Функцию $g(n)$ в формуле (20) называют «интегралом» функции $f(n)$ (см. L. E Dickson, 1919, т. I, гл 14). Другие связи между μ и φ были установлены Радемахером и доказаны Брауэром (R. Brauer; 1926):

$$\varphi(m) \sum_{d|m,\ (d,n)=1} \frac{d}{\varphi(d)} \mu\left(\frac{m}{d}\right)=\mu(m) \sum_{d|(m,n)} d\mu\left(\frac{m}{d}\right). \tag{26}$$

Для функции φ имеем

$$\sum_{d|n} (-1)^{n/d} \varphi(d)=\begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно}, \\ -n, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases} \tag{27}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi(l^r)\left\{1^{r-1}+2^{r-1}+\ldots+[n/l]^{r-1}\right\}=1^r+2^r+\ldots+n^r, \tag{28}$$

где $r=1, 2, 3, \ldots$ и $[x]$ обозначает наибольшее целое $\leqslant x$;

$$\sum_{d|n} (n/d) \varphi_k(d)=1^k+2^k+\ldots+n^k, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

$$\varphi_1(n)=\frac{1}{2} n\varphi(n), \qquad n>1, \tag{30}$$

$$\sum_{d|n} (n/d)^3 \varphi_3(d)=\left\{\sum_{d|n} (n/d) \varphi(d)\right\}^2, \tag{31}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}[\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)]\right\}=\frac{3}{\pi^2}, \tag{32}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi(n)}{n} \ln\ln n\right)=e^{-\gamma}, \tag{33}$$

где γ — постоянная Эйлера. Девенпорт (Davenport; 1932) доказал, что при $n\to\infty$

$$\varphi_\alpha(n)=\frac{n^\alpha}{\alpha+1}\{\varphi(n)+O(1)\},\qquad \alpha\geqslant 0,$$

и получил аналогичные результаты при $\alpha<0$.

Функцию $\mu(n)$ можно представить в виде

$$\mu(n)=\sum_{(m,n)=1} e^{2\pi i m/n}. \tag{34}$$

Это показывает, что $\mu(n)$ является суммой первообразных корней n-й степени из единицы, т. е. суммой таких чисел ρ, что $\rho^n=1$, но $\rho^m\neq 1$, если $1\leqslant m<n$. Эти числа ρ являются корнями многочлена

$$k_n(x)=\prod_{d|n}(x^d-1)^{\mu(n/d)} \tag{35}$$

степени $\varphi(n)$.

Относительно следующих ниже результатов см. Landau (1927, т. 2, гл. 7) и Титчмарш (1953). Пусть

$$M(n)=\mu(1)+\mu(2)+\ldots+\mu(n). \tag{36}$$

Тогда при $n\to\infty$

$$M(n)=O\left[n^{1/2}\exp\left(\frac{A\ln n}{\ln\ln n}\right)\right], \tag{37}$$

где A — вещественная положительная постоянная. Следствием этого результата является

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0. \tag{38}$$

Гипотеза Римана (см. п. 17.7) верна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-s} \tag{39}$$

сходится для всех s, принадлежащих полуплоскости $\operatorname{Re}s>1/2$.

Для $\Lambda(n)$ аналогом (38) является

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)-1}{n}=-2\gamma, \tag{40}$$

где γ означает постоянную Эйлера, определенную в 1.1 (4). См. также Kienast (1926).

Относительно следующего ниже перечня свойств $\sigma(n)$ и $d(n)$ см. Hardy, Wright (1945, гл. 18). Мы имеем

$$\sigma(n)=O(n\ln\ln n),$$

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)=\frac{1}{12}\pi^2n^2+O(n\ln\ln n).$$

Существует положительная постоянная A такая, что

$$A<\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2}\leqslant 1,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\{\sigma_\alpha(n)n^{-\alpha}\}=\zeta(\alpha),\qquad \alpha>1,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n}=e^\gamma$$

(см. Gronwall, 1913). Относительно случая $-1<\alpha<0$ см. Bellmann (1950). Вайдинатасвами (Vaidyanathaswamy; 1930, 1931) показал, что

$$\sigma_k(m, n)=\sum_{d|(m, n)} \sigma_k\left(\frac{m}{d}\right) \sigma_k\left(\frac{n}{d}\right) d^k \mu(d),$$

и Ватсон (G. N. Watson; 1935) нашел, что для любого фиксированного целого k $\sigma_{2m+1}(n)$ делится на k для почти всех значений n. Выражение «почти все» определено в начале п. 17.2.

Если $\varepsilon>0$ произвольно и фиксировано, то для всех достаточно больших значений n

$$d(n)<2^{(1+\varepsilon)\ln n/\ln\ln n}$$

и для бесконечного числа n

$$d(n)>2^{(1-\varepsilon)\ln n/\ln\ln n}.$$

При $n \rightarrow \infty$

$$d(1)+d(2)+\ldots+d(n)=n \ln n+(2\gamma-1) n+O\left(n^{1/3}\right),$$

где γ — постоянная Эйлера. Относительно $d(d(n))$ и связанных с этим вопросов см. Ramanujan (1915).

Асимптотическое поведение

$$d_k(1)+d_k(2)+\ldots+d_k(n)$$

при больших значениях n изучил Титчмарш (Titchmarsh; 1938).

Если $Q(n)$ означает число целых m, $1 \leqslant m \leqslant n$, которые не делятся на квадрат целого числа >1, то при $n \rightarrow \infty$ мы имеем

$$Q(n)=6n/\pi^2+O\left(n^{1/2}\right).$$

Общие теоремы относительно арифметических функций. Беллман и Шапиро (Bellmann and Shapiro; 1948) доказали, что функции $\varphi(n)$, $\sigma(n)$, $d(n)$, $2^{\nu}(n)$, $\mu(n)$ алгебраически независимы.

Шёнберг изучил асимптотические свойства класса арифметических функций. Относительно изучения аддитивных арифметических функций см. Erdös и Winter (1939). Относительно других результатов см. E. T. Bell (1930), D. H. Lehmer (1931).

17.2. Разбиения

17.2.1. Обозначения и определения. Мы будем писать

$$a \equiv b\,(\operatorname{mod} n), \tag{1}$$

если $a-b$ является целым числом, делящимся на n.

Пусть $\{a_\nu\}$, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, — некоторое множество S натуральных чисел, и пусть $N(x)$ — число тех a_ν, которые не превосходят x. Предположим, что существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} N(x)=\alpha. \tag{2}$$

Если $\alpha=0$, то говорят, что *почти все* целые числа n не принадлежат S. Если $\alpha=1$, говорят, что *почти все* целые числа n принадлежат S.

Количество разложений

$$n=m_1+m_2+\ldots+m_k, \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

числа n в сумму любого количества натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, где

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k, \tag{4}$$

называется *числом разбиений* n и обозначается $p(n)$. Если k ограничено условием

$$k \leqslant l, \tag{5}$$

то *число разбиений* n *на не более чем* l *частей* мы обозначаем через $p_l(n)$. Если m_1 также ограничено, $m_1 \leqslant N$, то мы обозначаем через $p_{l,N}(n)$ число разбиений n на не более чем l частей, каждая из которых не превосходит N. Число разбиений n на четное число неравных слагаемых будет обозначаться через $E(n)$, а на нечетное число неравных слагаемых — через $U(n)$.

17.2.2. Разбиения и производящие функции. Если $P(n)$ — число разбиений n некоторого типа, и если для достаточно малых $|x|$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)\,x^n = F(x), \tag{6}$$

то производящая функция $F(x)$ называется *энумератой* для $P(n)$. Иногда удобно рассматривать и случай, когда $F(0) \neq 0$; тогда $P(0)$ определяется как $F(0)$. Мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \{1-x^k\}^{-1}, \qquad |x| < 1, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)\,x^n = \prod_{k=1}^{m} (1-x^k)^{-1}, \qquad |x| < 1. \tag{8}$$

Соотношение (8) выражает тот факт, что $p_m(n)$ является также числом разбиений n на части, каждая из которых не превосходит m. Можно показать, что число разбиений n на точно m равных частей, равно числу разбиений n на части, наибольшая из которых в точности равна m.

Многие теоремы о разбиениях можно установить в виде некоторых тождеств для энумеративной функции $F(x)$. Эти тождества обычно имеют следующий вид: $F(x)$ выражается как бесконечное произведение и как ряд; как произведение, так и каждый член ряда могут быть разложены в степенной ряд по x. Примеры:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{9}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \{1-x^{2k-1}\}^{-1}. \tag{10}$$

Тождества Эйлера:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{2k-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}, \tag{11}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{2k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}, \tag{12}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}, \tag{13}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\ldots(1-x^k)^2}, \tag{14}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(3m+1)}. \tag{15}$$

Тождества Якоби:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left\{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2})\right\}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^{2m}, \qquad z\neq 0, \tag{16}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left\{(1-x^{2k-1})^2(1-x^{2k})\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{m^2}, \tag{17}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^{2k}}{1-x^{2k-1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \tag{18}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^3=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \tag{19}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left\{(1-x^{5k+1})(1-x^{5k+4})(1-x^{5k+5})\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(5m+3)}, \tag{20}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left\{(1-x^{5k+2})(1-x^{5k+3})(1-x^{5k+5})\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(5m+1)}. \tag{21}$$

Тождества Роджерса—Рамануджана:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left\{(1-x^{5k+1})^{-1}(1-x^{5k+4})^{-1}\right\}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}, \tag{22}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left\{(1-x^{5k+2})^{-1}(1-x^{5k+3})^{-1}\right\}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}. \tag{23}$$

Тождества (17)—(22), а также (15) получаются из формулы Якоби (16) при $z=e^{i\pi u}$, $x=e^{i\pi\tau}$; при этом правая часть равенства (16) превращается в разложение Фурье функции $\theta_3(u\,|\,\tau)$, а левая часть—в разложение θ_3 в бесконечное произведение, где θ_3—одна из эллиптических тета-функций в обычных обозначениях (см. гл. 13). Обзор связей между задачей разбиения и модулярными формами дан Радемахером (Rademacher; 1940).

Формулы (9)—(23) можно сформулировать как теоремы о разбиениях. Например,

Формула (9) показывает, что любое натуральное число n можно представить в точности одним способом как сумму различных степеней числа 2.

Формула (10) устанавливает тот факт, что число разбиений n на неравные части равно числу разбиений на нечетные части.

Формула (15) показывает, что

$$E(n)-U(n)=(-1)^k, \quad \text{если} \quad n=\frac{1}{2}k(3k\pm 1), \qquad k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,m,$$

$$E(n)-U(n)=0 \quad \text{для всех остальных } n,$$

здесь E и U определены, как в п. 17.2.1.

Общий член суммы в правой части равенства (22) позволяет найти число разбиений для $n-m^2$ на не более чем m частей. Так как

$$m^2=1+3+\ldots+2m-1,$$

то этот общий член позволяет также найти число разбиений n на не более чем m слагаемых с наименьшей разностью 2. Таким образом, равенство (22) эквивалентно следующему утверждению: число разбиений n на части вида $5m+1$ и $5m+4$ равно числу разбиений n на части с наименьшей разностью 2.

Относительно соответствующей теоремы о числе разбиений на части вида $6m+1$, $6m+5$ см. Schur (1926); асимптотическая формула для этого числа была дана Нивеном (Niven; 1940).

Относительно некоторых тождеств теории разбиений см. D. H. Lehmer (1946) и Alder (1948).

17.2.3. Свойства сравнений. Рамануджан (Ramanujan; 1919, 1921) высказал предположение, а Дарлинг (Darling, 1921) и Морделл (Mordell, 1922) доказали, что

$$p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5, \tag{24}$$

$$p(7n+5)\equiv 0 \pmod 7, \tag{25}$$

$$p(11n+6)\equiv 0 \pmod{11}. \tag{26}$$

Эти формулы могут быть выведены из некоторых тождеств, первые два из которых имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)\,x^n=5\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{5k})^5}{(1-x^k)^6}, \tag{27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)\,x^n=7\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{7k})^3}{(1-x^k)^4}+49x\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{7k})^7}{(1-x^k)^8}. \tag{28}$$

Существует аналогичное тождество для энумеративной функции $p(13n+6)$, которое было открыто Радемахером и Цукерманом (Rademacher and Zuckerman; 1939). Однако не все члены в правой части этого тождества делятся на 13.

Ватсон (Watson; 1938) доказал, что если $n=7^b n'$, где $(n',\,7)=1$ и $b=2,\,3,\,4,\,\ldots$, и если $24n\equiv 1 \pmod{7^{2b-2}}$, то

$$p(n)\equiv 0 \pmod{7^b}. \tag{29}$$

Относительно обзора результатов этого типа см. Rademacher (1940).

Лемер (D. H. Lehmer; 1936; 1938) доказал, что

$$p(599)\equiv 0 \pmod{5^4}, \tag{30}$$

$$p(721)\equiv 0 \pmod{11^3}, \tag{31}$$

$$p(14\,031)\equiv 0 \pmod{11^4}. \tag{32}$$

Это подтверждает, что некоторые предположения Рамануджана справедливы в отдельных частных случаях. Число $p(14\,031)$ имеет 127 цифр и было вычислено с помощью асимптотической формулы Харди и Рамануджана (см. п. 17.2.4) для $p(n)$.

17.2.4. Асимптотические формулы и родственные вопросы. Харди и Рамануджан (Hardy and Ramanujan; 1916, 1918) показали, что

$$\lim_{n\to\infty} 4n3^{1/2}p(n)\exp\left[-\pi(2n/3)^{1/2}\right]=1. \tag{33}$$

Они получили также асимптотический ряд для $p(n)$ вплоть до членов порядка $O(n^{-1/4})$; так как $p(n)$ — целое число, то с помощью этого результата можно вычислять, пользуясь асимптотическим разложением, точные значения $p(n)$ для достаточно больших значений n (D. H. Lehmer; 1938). Относительно упрощенного доказательства см. также Knopp и Schur (1925). Лемер (D. H. Lehmer; 1937) показал, что ряд Харди—Рамануджана расходится. Радемахер (Rademacher; 1937 a, 1937 b, 1943) получил замечательный сходящийся ряд для $p(n)$, а именно

$$p(n)=\frac{1}{2^{1/2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\,k^{1/2}\,\frac{d}{dn}f_k\left(n-\frac{1}{24}\right),$$

где

$$f_k(n)=n^{-1/2}\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{k}\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right],$$

$$A_k(n)=\sum_{\substack{(h,\,k)=1\\ 1\leqslant h\leqslant k}}\exp\left\{-2\pi i n\frac{h}{k}+\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Формула суммирования для $p(n)$ была дана Аткинсоном (Atkinson; 1939).

Хусими (Husimi; 1938) изучил интегральные представления для $p_m(n)$.

Трикоми (Tricomi; 1928) установил асимптотическое поведение для $p_{l,N}(n)$, а Бригем (Brigham; 1950) — общие асимптотические формулы для функций разбиения.

Относительно вопросов, связанных с этим пунктом, см. также Rademacher (1940).

17.3. Представления в виде суммы квадратов

Общие замечания. Задача представления целого числа в виде суммы квадратов является частным случаем задачи представления числа с помощью (положительно определенной) квадратичной формы. Относительно этой последней проблемы см. Siegel (1935, 1936, 1937) и Minkowski (1911). Представление n в виде суммы квадратов можно также рассматривать как частный случай задачи представления n в виде суммы фиксированного числа k-х степеней. Относительно результатов в этой области см. Landau (1927, т. II).

Вычисление (или приближенное вычисление) суммы $\sum\limits_{n\leqslant x} r_k(n)$ является задачей подсчета числа точек целочисленной решетки внутри k-мерной сферы. Относительно случая $k=2$ и общего случая целочисленных решеток в двумерном пространстве см. Landau (1927, т. II), а также п. 17.10.

17.3.1. Определения и обозначения. Пусть $k\geqslant 2$ — фиксированное целое число. Обозначим через $r_k(n)$ число представлений n в виде суммы k квадратов целых чисел

$$n=l_1^2+l_2^2+\ldots+l_k^2, \tag{1}$$

где $l_1, \ldots, l_k$ не обязательно должны быть отличными друг от друга и могут быть отрицательными числами или нулями. Два представления считаются различными, если они содержат одни и те же числа $l_1, \ldots, l_k$, но в разном порядке. Например, мы имеем $r_2(2)=4$, так как $2=1^2+1^2=(-1)^2+1^2=1^2+(-1)^2=(-1)^2+(-1)^2$. Мы будем использовать суммы степеней некоторых делителей n. Пусть d^*, d^{**}, d', d'', d_+, d_-, d_1, d_2, d_3, d_4 — любые (положительные) делители n, удовлетворяющие условиям

$$d^*\equiv 1 \pmod 4), \qquad d^{**}\equiv 3 \pmod 4), \tag{2}$$

$$n/d'\equiv 1 \pmod 4), \qquad n/d''\equiv 3 \pmod 4), \tag{3}$$

$$d_+\equiv 0 \pmod 2), \qquad d_-\equiv 1 \pmod 2), \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\equiv 0 \pmod 2), \qquad n/d_1\equiv 0 \pmod 2),\\ d_2\equiv 1 \pmod 2), \qquad n/d_2\equiv 1 \pmod 2),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} d_3\equiv 0 \pmod 2), \qquad n/d_3\equiv 1 \pmod 2),\\ d_4\equiv 1 \pmod 2), \qquad n/d_4\equiv 0 \pmod 2).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Положим

$$E_k(n)=\sum d^{*k}-\sum d^{**k}, \tag{7}$$

$$E'_k(n)=\sum d'^k-\sum d''^k, \tag{8}$$

$$\Delta_k(n)=\sum d_-^k, \tag{9}$$

$$\zeta_k(n)=\sum d_-^k-\sum d_+^k, \tag{10}$$

$$\xi_k(n)=\sum d_1^k+\sum d_2^k-\sum d_3^k-\sum d_4^k. \tag{11}$$

Мы используем также коэффициенты разложений некоторых произведений эллиптических тета-функций в степенные ряды. Пусть $\theta_\nu(u, \tau)$ [$\nu=1, 2, 3, 4$; $\theta_4(u, \tau)=\theta_0(u, \tau)$] обозначает четыре эллиптические тета-функции (см. гл. 13). Мы будем писать θ_ν вместо $\theta_\nu(0, \tau)$ и q вместо $e^{i\pi\tau}$. Тогда имеем

$$\theta_4=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})^2, \tag{12}$$

$$\theta_2=2q^{1/4}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+q^{2k})^2, \tag{13}$$

$$\theta_3=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})^2. \tag{14}$$

Используя эти бесконечные произведения для θ_4, θ_2, θ_3, определим функции $\Omega(m)$, $W(m)$, $G(m)$, $\Theta(m)$ с помощью их производящих функций:

$$16\sum_{m=0}^{\infty}\Omega(m)q^m=\theta_2^4\theta_3^4\theta_4^4, \tag{15}$$

$$16\sum_{m=0}^{\infty}W(m)q^m=\theta_2^4\theta_3^6\theta_4^4, \tag{16}$$

$$16\sum_{m=0}^{\infty}\Theta(m)q^m=\theta_2^4\theta_3^{10}\theta_4^4, \tag{17}$$

$$16\sum_{m=0}^{\infty}G(m)q^m=\theta_2^4\theta_4^4\theta_3^6(\theta_4^4-\theta_2^4). \tag{18}$$

17.3.2. Формулы для $r_k(n)$. *Представления в виде суммы четного числа квадратов.* Глешер (Glaisher; 1907) дал обзор известных формул для $r_{2l}(n)$, где $2l=2, 4, \ldots, 18$. Его таблица была пополнена Рамануджаном (Ramanujan; 1918), который дал формулы для r_{20}, r_{22}, r_{24}. При $2l \geqslant 12$ эти формулы содержат функции $\Omega(n)$, $W(n)$, $\Theta(n)$, $G(n)$, которые не имеют теоретико-числового смысла. (Формулы, содержащие лишь выражения, имеющие теоретико-числовой смысл, были даны Булыгиным (см. Dickson, 1939, т. II, стр. 317). При $2l=10$ и $2l=18$ формулы в таблице Глешера содержат также сумму степеней некоторых комплексных делителей n. При этом под комплексным делителем n мы понимаем число $a+ib$, где a, b — целые, такое, что $(a^2+b^2)\mid n$. Если опустить эти два случая, то таблица Глешера имеет вид (в обозначениях п. 17.3.1):

$$r_2(n)=4E_0(n), \tag{19}$$

$$r_4(n)=(-1)^{n-1}8\xi_1(n), \tag{20}$$

$$r_6(n)=4\left\{4E_2'(n)-E_2(n)\right\}, \tag{21}$$

$$r_8(n)=(-1)^{n-1}16\zeta_3(n), \tag{22}$$

$$r_{12}(2n)=-8\xi_5(n), \tag{23}$$

$$r_{12}(2n+1)=8\left\{\Delta_5(2n+1)+2\Omega(2n+1)\right\}, \tag{24}$$

$$r_{14}(n)=\frac{4}{61}\left\{64E_6'(n)-E_6(n)+364W(n)\right\}, \tag{25}$$

$$r_{16}(n)=(-1)^{n-1}\frac{32}{17}\left\{\zeta_7(n)+16\Theta(n)\right\}. \tag{26}$$

Относительно формулы для r_{24} см. п. 17.4. Формула для $r_2(n)$ эквивалентна тождеству в теории эллиптических тета-функций, а именно

$$\theta_3^2=\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}\right\}^2=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}=$$
$$=1+4\sum_{n,\,m=1}^{\infty}\left\{q^{(4m-3)n}-q^{(4m-1)n}\right\}. \tag{27}$$

Как следствие (19) получаем следующий критерий. Пусть $k(p)$ — наивысшая степень простого числа p, на которую делится n. Для того чтобы n можно было представить в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы $k(p)$ было четным при $p\equiv 3 \pmod 4$.

Формула (20) эквивалентна знаменитому тождеству Якоби

$$\theta_3^4=\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}\right\}^4=-4q\frac{d}{dq}\left(\ln\frac{\theta_2}{\theta_4}\right)=$$
$$=1+8\sum_{n,\,m=1}^{\infty}\left\{nq^{nm}-4nq^{4nm}\right\}. \tag{28}$$

Это тождество можно сформулировать следующим образом: число представлений n в виде суммы четырех квадратов в восемь раз больше суммы всех делителей n, которые не делятся на четыре. Для всех нечетных n оно в восемь раз больше (а для четных n в 24 раза больше) суммы четных делителей n. Отсюда вытекает теорема Лагранжа: каждое целое $n>0$ может быть представлено в виде суммы четырех квадратов. Отсюда следует также, что $r_k(n)>0$ для всех n и $k=4, 5, 6, \ldots$

Представление в виде суммы нечетного числа квадратов. Эта задача более сложна, чем задача представления в виде суммы четного числа квадратов. Число n можно представить в виде суммы трех квадратов тогда и только тогда, когда n не имеет вида

$$4^a(8b+7), \qquad a,\ b=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{29}$$

Для нечетных значений n Эйзенштейн (Eisenstein; 1847) показал, что

$$r_3(4m+1)=24\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{l}{4m+1}\right), \tag{30}$$

$$r_3(4m+3)=8\sum_{l=1}^{2m+1}\left(\frac{l}{4m+3}\right), \tag{31}$$

где $\left(\frac{l}{k}\right)$ — символ Лежандра — Якоби, который будет определен в п. 17.5.

Если m — нечетное число и не делится на квадрат простого числа, то

$$r_5(n)=-80s, \qquad -80\sigma, \qquad -112\sigma, \qquad 80s, \tag{32}$$

соответственно

$$n\equiv \quad 1, \qquad 3, \qquad 5, \qquad 7 \pmod 8.$$

Это утверждение было сформулировано Эйзенштейном (Eisenstein; 1847) и доказано Смитом (Smith; 1894) и Минковским (Minkowski; 1911).

Применяя символ Лежандра — Якоби из п. 17.5, имеем

$$s=\sum_{\mu=1}^{n/2-1/2}\mu\left(\frac{\mu}{n}\right), \qquad \sigma=\sum_{\mu=1}^{n/2-1/2}\mu\left(\frac{\mu}{n}\right).$$

Харди (Hardy; 1920) доказал, что число $\bar{r}_5(n)$ примитивных представлений n в виде суммы пяти квадратов (т. е. представлений, для которых наибольший общий делитель пяти квадратов есть единица) равно

$$\bar{r}_5(n)=\frac{c}{\pi^2}n^{-3/2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2l+1}\right)(2l+1)^{-2}, \tag{33}$$

где

$$c=80, \qquad 160, \qquad 112$$

в соответствии с

$$n\equiv 0,\ 1,\ 4, \qquad n\equiv 2,\ 3,\ 6,\ 7, \qquad n\equiv 5 \qquad \pmod 8.$$

Относительно более общих результатов, в частности, для $r_7(n)$ см. Mordell (1919 b), Stanley (1927), Hardy (1918, 1920, 1927).

Харди и Рамануджан (Hardy and Ramanujan; 1918) нашли асимптотические разложения для $r_k(n)$, которые точны при $k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$.

17.4. Функция Рамануджана

Определим функцию Рамануджана $\tau(n)$ для $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n=x\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{24}. \tag{1}$$

Функция Рамануджана связана с функцией $r_{24}(n)$ (определенной в п. 17.3.1) соотношениями

$$\frac{691}{16} r_{24}(2n) = \sigma_{11}(2n) - 2\sigma'_{11}(n) - 8\,[259\tau(2n) + 512\tau(n)], \tag{2}$$

$$\frac{691}{16} r_{24}(2n+1) = \sigma_{11}(2n+1) + 2072\tau(2n+1), \tag{3}$$

где $\sigma_{11}(m)$ — сумма одиннадцатых степеней делителей m и $\sigma'_{11}(m)$ — сумма одиннадцатых степеней его нечетных делителей; см. Ramanujan (1916), Hardy (1927).

Рамануджан высказал предположение, доказанное Морделлом (Mordell; 1919 b), что $\tau(n)$ является мультипликативной функцией (в смысле п. 17.1 1) и что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, n^{-s} = \prod_{p} [1 - \tau(p)\, p^{-s} + p^{11-2s}]^{-1}, \tag{4}$$

где $\operatorname{Re} s > 13/2$ и произведение взято по всем простым числам p. Морделл доказал также, что для всех p

$$\tau(p^m) = \tau(p)\,\tau(p^{m-1}) - p^{11}\tau(p^{m-2}), \qquad m = 2, 3, 4, \ldots \tag{5}$$

Из формулы (5) вытекает, что $\tau(p^n)$ является многочленом от $\tau(p)$ и p^{11}; этот многочлен был определен Сенгупта (Sengupta; 1948). Относительно разложения $\sum_{n \leqslant x} \tau(n)(x-n)^k$ в ряд, содержащий функции Бесселя, см. Wilton (1929) и п. 17.11 2; относительно других рядов, содержащих $\tau(n)$, см. van der Blij (1948)

Рамануджан высказал предположение, доказанное Ватсоном (Watson; 1935), что почти для всех n (в смысле, определенном в начале п. 17.2) $\tau(n)$ делится на 691. Это утверждение справедливо, однако, как показал Рамануджан, $\tau(n)$ не делится на 691, если

$$1 \leqslant n \leqslant 5000, \qquad n \neq 1381.$$

Вальфиш (Walfisz; 1938) показал, что почти для всех n $\tau(n)$ делится на $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691$. Относительно свойств делимости $\tau(n)$ см. также Wilton (1929), Bambah и Chowla (1947). Лемер показал, что если $n < 214\,928\,640$, то $\tau(n) \neq 0$.

Морделл (Mordell; 1917) доказал формулу, аналогичную формуле (4), для коэффициентов $f(n)$ ряда

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2m+1)^2} \right\}^4 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, q^{4n}. \tag{6}$$

Она имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s} = \prod_{p} \{1 - 2f(p)\, p^{-s} + p^{5-2s}\}^{-1}. \tag{7}$$

Этот результат также был сформулирован ранее Рамануджаном. Относительно других результатов и обобщений см. Rankin (1939).

17.5. Символ Лежандра — Якоби

В этом пункте p, p_1, p_2, ... обозначают нечетные простые числа, а u, v—нечетные натуральные числа.

Целое число k назовем *квадратичным вычетом* $(\bmod n)$, если сравнение

$$x^2 \equiv k \pmod n \tag{1}$$

имеет целое решение x. Определим символ Лежандра—Якоби $\left(\frac{k}{u}\right)$ для всех $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и всех $u=1, 3, 5, 7, \ldots$ следующим образом. Если $u=p$ является нечетным простым числом, то

$$\left(\frac{k}{p}\right)=1, \text{ если } p\nmid k \text{ и } k \text{ является квадратичным вычетом } (\bmod p); \tag{2}$$

$$\left(\frac{k}{p}\right)=-1, \text{ если } p\nmid k \text{ и } k \text{ не является квадратичим вычетом } (\bmod p); \tag{3}$$

$$\left(\frac{k}{p}\right)=0, \text{ если } p \mid k. \tag{4}$$

Если $u=p_1 p_2 \ldots p_r$ является произведением нечетных простых чисел (не обязательно различных между собой), то положим

$$\left(\frac{k}{u}\right)=\left(\frac{k}{p_1}\right)\left(\frac{k}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{k}{p_r}\right). \tag{5}$$

Если u и v—нечетные натуральные числа и $(u, v)=1$, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{v}{u}\right)=(-1)^{(u/2-1/2)(v/2-1/2)}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{-1}{u}\right)=(-1)^{u/2-1/2}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{2}{u}\right)=(-1)^{(u^2-1)/8}. \tag{8}$$

Равенства (6), (7), (8) называются соответственно *квадратичным законом взаимности и его первой и второй дополнительными теоремами*. В частности, (7), (8) устанавливают, что -1 является квадратичным вычетом $(\bmod p)$ тогда и только тогда, когда $p\equiv 1 \pmod 4$, а 2 является квадратичным вычетом $(\bmod p)$ тогда и только тогда, когда $p\equiv 1$ или $p\equiv 7 \pmod 8$. Лишь в случае, когда u—нечетное простое число, из равенства $\left(\frac{k}{u}\right)=1$ следует, что k является квадратичным вычетом $(\bmod u)$.

Символ Лежандра можно обобщить, если использовать теорию алгебраических полей. См. относительно этого, например, Hasse (1930).

Суммы Якобсталя. Определим q-ю сумму Якобсталя от s формулой

$$\Phi_q(s)=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^q+s}{p}\right), \qquad q=2, 3, \ldots, \qquad s=1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Пусть простое число p имеет вид $p=4f+1$, где f—натуральное число. Тогда $p=a^2+b^2$, где a, b—целые. Якобсталь (Jacobsthal; 1907) доказал, что

$$a=\frac{1}{2}\Phi_2(r), \qquad b=\frac{1}{2}\Phi_2(n), \qquad \frac{1}{2}\Phi_2(-1)\equiv\frac{1}{2}(p-3) \pmod 8, \tag{10}$$

где r обозначает любой квадратичный вычет, а n — любой квадратичный невычет по модулю p. Аналогичные результаты для $p=6f+1=a^2+3b^2$ были получены Шрутка (Schrutka; 1911) и Чоула (Chowla; 1949). Относительно различных других результатов и обобщений см. Whiteman (1949, 1952); E. Lehmer (1949).

17.6. Тригонометрические суммы и связанные с ними вопросы

Суммы Гаусса. Пусть n — натуральное число. Определим для любого целого m

$$S(m,\ n)=\sum_{r=0}^{n-1}\exp(2\pi i r^2 m/n). \tag{1}$$

Если $(n,\ n')=1$, то

$$S(m,\ nn')=S(mn',\ n)\,S(mn,\ n'). \tag{2}$$

При $m=1$

$$S(1,\ n)=\begin{cases}(1+i)\,n^{1/2}, & \text{если } n\equiv 0,\\ n^{1/2}, & \text{»} \quad n\equiv 1,\quad (\mathrm{mod}\ 4)\\ 0, & \text{»} \quad n\equiv 2,\\ i n^{1/2}, & \text{»} \quad n\equiv 3\end{cases} \tag{3}$$

Если $n=p$ — простое число и $(m,\ p)=1$, то

$$S(m,\ p)=\sum_{r=1}^{p-1}\left(\frac{r}{p}\right)\exp\left(\frac{2\pi i r m}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right)S(1,p)=$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{m}{p}\right)p^{1/2}, & \text{если}\quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4), \quad (4)\\[2ex] \left(\dfrac{m}{p}\right)i p^{1/2}, & \text{»}\quad p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4), \quad (5)\end{cases}$$

где $\left(\dfrac{m}{p}\right)$ обозначает символ Лежандра, определенный в п. 17.5.

Суммы Рамануджана определяются формулой

$$c_n(m)=\sum_{(r,\ n)=1}\exp(2\pi i r m/n), \tag{6}$$

где сумма берется по множеству таких чисел $r=1, 2, \ldots, n-1$, что $(r\ n)=1$ Используя функцию Мебиуса (см. п. 17.1), можно записать $c_n(m)$ в виде

$$c_n(m)=\sum_{d|n,\ d|m} d\mu\left(\frac{n}{d}\right), \tag{7}$$

где сумма берется по всем натуральным числам d, которые являются общими делителями n и m. Если $(n,\ n')=1$, то

$$c_{nn'}(m)=c_n(m)\,c_{n'}(m). \tag{8}$$

Справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}c_n(m)=-\Lambda(n). \tag{9}$$

Относительно доказательств см. Hölder (1936). Относительно приложений см. Ramanujan (1918); суммы $c_n(m)$ важны в вопросах представлений чисел в виде суммы квадратов. Относительно разложений в ряды см. Carmichael (1932); относительно статистики сумм Рамануджана см. Wintner (1942).

Суммы Клостермана. Пусть $n > 0$ — целое число, и пусть r обозначает целое число $0 < r \leqslant n$, взаимно простое с n. Тогда существует однозначно определенное r' такое, что

$$0 < r' \leqslant n, \qquad rr' \equiv 1 \pmod n. \tag{10}$$

Суммы Клостермана определяются для целых u, v, n формулой

$$S(u,\ v,\ n) = \sum_r \exp\left[\frac{2\pi i}{n}(ur + vr')\right]. \tag{11}$$

Если $(n,\ m) = 1$, то

$$S(u,\ v,\ n)\, S(u,\ w,\ m) = S(u,\ vm^2 + wn^2,\ nm). \tag{12}$$

Относительно приложений см. Kloosterman (1926), Atkinson (1948). Относительно обобщений см А. Weil (1948), а также Salié (1931), D. H. Lehmer (1938), Whiteman (1945)

Обобщения Суммы Гаусса можно обобщать в различных направлениях Относительно обобщений, связанных с теорией квадратичных форм, см. Siegel (1935, 1936, 1937, 1941). Выражения вида

$$\sum_{r=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i m}{n} r^k\right), \qquad (m,\ n) = 1, \tag{13}$$

при фиксированных значениях $k > 2$ были использованы Харди и Литтлвудом для определения так называемых сингулярных рядов в проблеме Варинга (т. е. в задаче о представлении целых чисел в виде суммы фиксированного числа k х степеней), см Hardy и Littlewood (1920, 1921, 1922a, b, d, 1925) На эти работы обычно ссылаются под названием Partitio Numerorum. Относительно других типов тригонометрических сумм см И. М Виноградов (1939, 1940).

17.7. Дзета-функция Римана и распределение простых чисел

Пусть s — комплексное переменное. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{1}$$

является аналитической функцией от s Как показал Эйлер,

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \tag{2}$$

где произведение распространено на все простые числа $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$ Интегральное представление

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\varphi}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz \tag{3}$$

показывает, что функцию $\zeta(s)$ можно аналитически продолжить, причем это продолжение однозначно и регулярно всюду, исключая точку $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Равенство (3) показывает также, что

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-2m)=0, \qquad \zeta(1-2m)=-\frac{B_m}{2m}, \tag{4}$$

где $m=1, 2, 3, \ldots$ и B_m есть m-е число Бернулли (см. п. 1.13).

Ряд Лорана для $\zeta(s)$ в окрестности точки $s=1$ был получен Стилтьесом. Мы имеем

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\gamma_1(s-1)+\gamma_2(s-1)^2+\ldots,$$

где γ обозначает постоянную Эйлера (см. 1.1(4)) и где при $k=1, 2, 3, \ldots$

$$\gamma_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{v=1}^{n}\frac{(\ln v)^k}{v}-\frac{1}{k+1}(\ln n)^{k+1}\right\}$$

(см. Hardy, 1912).

Из (3) вытекают функциональные уравнения

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s), \tag{5}$$

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(s)\zeta(s). \tag{6}$$

Нули функции $\zeta(s)$ в точках $s=-2, -4, -6, \ldots$ являются ее единственными вещественными нулями.

Можно показать, что за исключением этих нулей функция $\zeta(s)$ не имеет нулей, лежащих вне полосы $0<\operatorname{Re}s<1$, но что в этой полосе есть бесконечно много комплексных нулей ρ, причем

$$\zeta(s)=\frac{e^{bs}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}\prod_{\rho}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right], \tag{7}$$

где произведение распространяется на все комплексные нули ρ и где

$$b=\ln 2\pi-1-\frac{1}{2}\gamma. \tag{8}$$

Определение постоянной Эйлера γ дано в 1.1(4).

Если h — положительная постоянная, $s=\sigma+it$,

$$0\leqslant\sigma\leqslant 1, \qquad 2\pi xy=|t|, \qquad x>h>0, \qquad y>h>0,$$

$$\chi(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)},$$

то

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}n^{-s}+\chi(s)\sum_{n\leqslant y}n^{s-1}+O(x^{-\sigma})+O(|t|^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}). \tag{9}$$

Это равенство называют *приближенным функциональным уравнением* для дзета-функции. O-член в (9) можно заменить асимптотическим рядом по степеням $|t|^{-1/2}$, коэффициенты которого являются тригонометрическими функциями. См Siegel (1931) и Титчмарш (1935, 1953).

Функция

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) \tag{10}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(1-s)=\xi(s), \tag{11}$$

и имеет интегральное представление

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)x^{s/2-1}\,dx. \tag{12}$$

Если положить

$$s=\frac{1}{2}+it, \qquad \xi(s)=\Xi(t), \tag{13}$$

то из уравнения (12) получаем

$$\Xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)x^{-3/2}\cos\left(\frac{1}{2}t\ln x\right)dx. \tag{14}$$

Относительно других результатов, связанных с функцией $\zeta(s)$, см. п. 1.12.

Нули функции $\zeta(s)$. Риман высказал гипотезу, что вещественная часть всех комплексных нулей $\zeta(s)$ равна 1/2 (т. е. функция $\Xi(t)$ имеет лишь вещественные нули). Гипотеза Римана до сих пор не доказана и не опровергнута, однако со времени появления работы Римана получено много относящихся сюда результатов. Известно, что для справедливости гипотезы Римана необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-s}$ сходился в полуплоскости $\operatorname{Re}s>1/2$ (относительно $\mu(n)$ см. пп. 17.2 и 17.3).

Укажем некоторые известные в настоящее время результаты относительно комплексных нулей $\zeta(s)$. Пусть $s=\sigma+it$. Обозначим через $N_0(T)$ число тех нулей $\zeta(s)$, для которых $\sigma=1/2$ и $0<t<T$, через $N(T)$ — число тех нулей, для которых $0<\sigma<1$ и $0<t<T$, и через $N(\sigma',T)$ — число нулей, для которых $0<t<T$ и $\sigma>\sigma'$. Сельберг (Selberg; 1942) доказал существование такого положительного числа A, что для достаточно больших T

$$N_0(T)>AT\ln T. \tag{15}$$

При $T\to\infty$ имеем

$$2\pi N(T)=T\ln T-(1+\ln 2\pi)T+O(\ln T), \tag{16}$$

$$N(\sigma,T)=O\left[T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)}(\ln T)^5\right]. \tag{17}$$

Последний результат был получен Ингамом (Ingham; 1940), и он справедлив для любого фиксированного σ на отрезке $1/2<\sigma<1$. Выбирая σ как функцию от T такую, чтобы $\sigma-1/2$ было достаточно мало, Сельберг (Selberg; 1946) получил улучшение формулы (17).

Относительно некоторых вычислений, связанных с проверкой гипотезы Римана, см. Титчмарш (1935, 1936). Титчмарш использовал приближенное функциональное уравнение (9) и заменил O-члены количественными приближениями. Это позволило ему вычислить комплексные нули функции $\zeta(\sigma+it)$ вплоть до $t=1468$, и он нашел, что все они лежат на прямой $\sigma=1/2$, причем их число равно 1041.

Большое количество теорем было доказано относительно распределения значений $\zeta(s)$. Относительно этих теорем см. Титчмарш (1947). Относительно нулей $\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-s}$ см. Davenport и Heilbronn (1936).

Распределение простых чисел Пусть $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих x. Тогда при $x\to\infty$ имеем

$$\pi(x)=\int_{2}^{x}\frac{du}{\ln u}+O\left\{x\exp\left[-a(\ln x)^{1/2}\right]\right\}, \qquad (18)$$

где a—абсолютная положительная постоянная В частности,

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^{-1}\pi(x)\ln x\right]=1. \qquad (19)$$

Этот результат известен как теорема о распределении простых чисел. Функция

$$\pi(x)-\int_{2}^{x}\frac{du}{\ln u}=P(x) \qquad (20)$$

при $x\to\infty$ бесконечно много раз меняет свой знак. В самом деле, существует постоянная a такая, что как неравенство

$$P(x)>a\frac{x^{1/2}}{\ln x}\ln\ln\ln x, \qquad (21)$$

так и неравенство

$$P(y)<-a\frac{y^{1/2}}{\ln y}\ln\ln\ln y \qquad (22)$$

справедливы для некоторых произвольно больших значений x и y Однако в пределах вычисленных до сих пор таблиц простых чисел для всех $x>10$ выполняется неравенство $P(x)<0$.

Все эти результаты относительно $\pi(x)$ могут быть доказаны с помощью теорем, касающихся распределения нулей $\zeta(s)$. Если верна гипотеза Римана, то при $x\to\infty$ имеем

$$P(x)=O(x^{1/2}\ln x). \qquad (23)$$

Однако это соотношение в настоящее время не доказано С другой стороны, если считать доказанным (23) или если считать доказанным, что для любого $\varepsilon>0$ мы имеем

$$P(x)=O(x^{1/2+\varepsilon})$$

при $x\to\infty$, то справедлива гипотеза Римана.

Миллс (Mills; 1947) доказал существование вещественного числа $A>1$ такого, что $[A^{3^n}]$ является простым для всех целых $n\geqslant 1$, он весьма просто вывел это утверждение из принадлежащего Ингаму (Ingham; 1937) результата, а именно из того, что для всех больших x существует простое число, лежащее между x^3 и $(x+1)^3$ См также Niven (1951)

Обобщения Дзета функция Дедекинда является аналогом дзета-функции Римана для полей алгебраических чисел, $\zeta(s)$ можно рассматривать также как дзета функцию Дедекинда для поля рациональных чисел (Hasse, 1927, 1930, Brauer, 1947). Относительно определения дзета функции в «полях характеристики p» и в «простых алгебрах» см F K. Schmidt (1931), Hasse (1933), Deuring (1935) и Eichler (1949) Другими обобщениями дзета функции Римана являются L ряды Дирихле и их обобщения, а также дзета-функция П Эпштейна Относительно этих обобщений см. пп 17 8 и 17 9.

17.8. Характеры и L-ряды

Пусть $n > 1$ — фиксированное натуральное число, и пусть m — любое целое число. Будем рассматривать функции $\chi(m)$ такие, что

1) $\chi(m) = \chi(m')$, если $m \equiv m' \pmod n$,
2) $\chi(1) = 1$,
3) $\chi(m) = 0$, если $(m, n) \neq 1$,
4) $\chi(m)\chi(m') = \chi(mm')$.

Функции, обладающие этими четырьмя свойствами, называются *характерами* по модулю n. Функция

$$\chi_1(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } (m, n) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1}$$

называется *главным характером* по модулю n Значения $\chi(m)$ отличны от нуля тогда и только тогда, когда $(m, n) = 1$, и ее $\varphi(n)$-я степень тогда равна единице Здесь через $\varphi(n)$ обозначена функция Эйлера из п 17 1 Характер называется *вещественным*, если все его значения вещественны. Вещественными характерами по модулю n являются главный характер и символ Лежандра — Якоби $\left(\frac{m}{n}\right)$. Произведение $\chi_a(m)\chi_b(m)$ двух характеров снова является характером по модулю n. Существует в точности $\varphi(n)$ различных характеров по модулю n. Если мы обозначим $\varphi(n)$ через h и h различных характеров через $\chi_1, \ldots, \chi_h$, то

$$\sum_{m=1}^{n} \chi_\nu(m)\,\overline{\chi}_\mu(m) = \begin{cases} h, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu \neq \mu, \end{cases} \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, h, \tag{2}$$

где черта сверху обозначает переход к комплексно сопряженному значению. Если $(m, n) = 1$, $(m', n) = 1$, то

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(m)\,\chi_\nu(m') = \begin{cases} h, & \text{если } mm' \equiv 1 \pmod n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Положив в равенстве (2) $\mu = 1$, получим $\sum\limits_{m=1}^{n} \chi(m) = 0$, где сумма распространена на все неглавные характеры.

Пусть $n > 1$ — фиксированное целое число, и пусть χ — характер по модулю n. Тогда ряд

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)\, m^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1 \tag{4}$$

называется *L рядом*. L-ряды были введены Дирихле Многие свойства этих рядов являются общими с дзета-функцией Римана. Аналогом произведения

Эйлера является

$$L(s, \chi)=\prod_{p}[1-\chi(p) p^{-s}]^{-1}, \qquad \operatorname{Re} s>1, \tag{5}$$

где произведение берется по всем простым числам p. Если χ_1 обозначает главный характер, то

$$L(s, \chi_1)=\zeta(s) \prod_{p \mid n}(1-p^{-s}), \tag{6}$$

где произведение берется по конечному числу простых чисел, делящихся на n. Если $\chi \neq \chi_1$, то $L(s, \chi)$ является целой функцией от s, не обращающейся в нуль при $s=1$.

Пусть χ—характер по модулю n. Предположим, что для некоторого фиксированного делителя N числа n $(N<n)$ и для всех m и m', удовлетворяющих соотношению

$$m \equiv m' \ (\bmod N), \qquad (m, n)=(m', n)=1,$$

имеем

$$\chi(m)=\chi(m').$$

Тогда характер χ называют *импримитивным* $(\bmod n)$ В противном случае χ называют *примитивным* характером $(\bmod n)$. Если $n>1$ и мы берем $N=1$, то χ импримитивно $(\bmod n)$, если $\chi(m)=\chi(m')$ при $(m, n)=(m', n)=1$. Так как $(1, n)=1$ и $\chi(1)=1$, то такое χ должно быть главным характером $(\bmod n)$. Следовательно, главный характер $(\bmod n)$ примитивен тогда и только тогда, когда $n=1$.

Пусть χ—примитивный характер $(\bmod n)$. Тогда, если $\chi(-1)=1$, то $L(s, \chi)$ обращается в нуль при $s=0,-2,-4, \ldots$, а если $\chi(-1)=-1$, то при $s=-1,-3,-5, \ldots$ Положим

$$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \chi(-1). \tag{7}$$

Тогда для каждого примитивного характера χ при $n>2$

$$\xi(s, \chi)=\pi^{-s/2-a/2} n^{s/2+a/2} \Gamma(s/2+a/2) L(s, \chi) \tag{8}$$

является целой аналитической функцией, которая не обращается в нуль вне полосы $0<\operatorname{Re} s<1$. Она допускает представление в виде бесконечного произведения, аналогичное 17.7 (7), и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(s, \chi)=\varepsilon(\chi) \xi(1-s, \chi), \tag{9}$$

где

$$\varepsilon(\chi)=-i n^{-1/2} \sum_{m=1}^{n} \chi(m) \cos(2 m \pi / n). \tag{10}$$

Можно показать, что $|\varepsilon(\chi)|=1$.

L-ряды важны для изучения распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

Относительно связей между (5) и (9) см. Hecke (1944), Petersson (1948).

Нули функции $\xi(s, \chi)$ ведут себя примерно так же, как нули $\zeta(s)$. Существует не доказанное до сих пор предположение, что их вещественная часть равна $\frac{1}{2}$. Относительно нижней грани для $L(1, \chi)$ и приложений к теории чисел см. Siegel (1935, 1943), Page (1935), Rosser (1949).

L-ряды были обобщены (Артином Artin; 1924, 1931, 1932). Артин ввел в коэффициенты характеры групп, отличных от мультипликативной группы классов вычетов, взаимно простых с n. (Эти характеры являются коэффициентами в обычных L-рядах.)

17.9. Дзета-функция Эпштейна

Пусть p — положительное число,

$$g=(g_1, \ldots, g_p), \quad h=(h_1, \ldots, h_p), \quad m=(m_1, \ldots, m_p)$$

— векторы с p вещественными компонентами (компоненты m должны быть целыми) и пусть

$$(g, h)=\sum_{\nu=1}^{p} g_\nu h_\nu \tag{1}$$

является скалярным произведением g и h и аналогично для других векторов. Пусть $[a_{\mu\nu}]$ — невырожденная симметричная $p\times p$ матрица, $[a^*_{\mu\nu}]$ — обратная (взаимная) матрица. Пусть

$$\varphi(x)=\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \tag{2}$$

является квадратичной формой, связанной с $[a_{\mu\nu}]$, $\varphi^*(x)$ — квадратичной формой, связанной с $[a^*_{\mu\nu}]$, и Δ — определителем матрицы $a_{\mu\nu}$. Предположим, что вещественная часть квадратичной формы $\varphi(x)$ положительно определена. Наконец, пусть s — комплексное переменное.

Дзета-функция Эпштейна порядка p, ассоциированная с квадратичной формой φ, определяется равенством

$$Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = Z\left|\begin{matrix} g_1, & \ldots, & g_p \\ h_1, & \ldots, & h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi =$$
$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty}{}' \, [\varphi(m+g)]^{-\frac{1}{2}ps} \exp[2\pi i (m, h)]. \tag{3}$$

Штрих указывает, что суммирование ведется по всем целым числам $m_1, \ldots, m_p$, исключая случай, когда все компоненты g целые — в этом случае надо опустить член $m=-g$. Ряд абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию от s в полуплоскости $\operatorname{Re} s>1$.

Фундаментальной теоремой в теории дзета-функций является *функциональное уравнение*

$$\pi^{-\frac{1}{2}ps}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}ps\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi =$$
$$= \Delta^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}p(1-s)}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}p(1-s)\right] e^{-2\pi i (g, h)} Z\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(1-s)_{\varphi^*}. \tag{4}$$

Функция, определенная равенством (3), и ее аналитическое продолжение являются целыми функциями от s, за исключением случая, когда все компоненты h целые. В этом случае дзета-функция имеет простой полюс в точке $s=1$, причем вычет в этом полюсе равен

$$\pi^{p/2}\Delta^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}p+1\right). \tag{5}$$

Дзета-функция обращается в нуль в точках

$$s=-2k/p, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6}$$

Она также обращается в нуль при $s=0$, за исключением случая, когда все компоненты g—целые. В этом случае ее значение при $s=0$ равно

$$-\exp[-2\pi i\,(g,\ h)]. \tag{7}$$

Эти результаты принадлежат Эпштейну (P. Epstein; 1903, 1907). Эпштейн изучил также некоторые частные случаи, например случай, когда $p=1$ и $p=2$ и все компоненты g и h равны нулю. В частности, он вычислил постоянную c_0 в разложении Лорана

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(s)_\varphi=\frac{c}{s-1}+c_0+c_1(s-1)+\ldots \tag{8}$$

Он показал также, что результаты Герглотца (Herglotz; 1905) можно вывести из его формул. Герглотц изучил суммы вида

$$\sum_{a=-\infty}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}{}'\,(a+ib)^n\,(a^2+b^2)^{-n/2-s}, \tag{9}$$

где $n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ Зигель (Siegel; 1943) изучил и обобщил дзета-функцию Эпштейна и доказал теоремы относительно нулей этой функции.

17.10. Целочисленные решетки

Назовем целочисленной решеткой на $(x,\ y)$-плоскости множество всех точек, обе координаты которых целые. Существует общая теорема ван дер Корпута (van der Corput; 1919) относительно числа точек решетки в некоторых областях. Частные случаи этой теоремы будут указаны ниже. Определим область D на $(x,\ y)$-плоскости следующим образом. Пусть $w-1/2$—натуральное число, и пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные положительные первую и вторую частные производные на отрезке $1/2\leqslant x\leqslant w$. Пусть

$$f(1/2)>2, \qquad 0<f'(x)<1, \qquad f''(x)>z^{-3}, \tag{1}$$

где $z>1$ не зависит от x. Пусть D—замкнутая область

$$1/2\leqslant x\leqslant w, \qquad 1/2\leqslant y\leqslant f(x), \tag{2}$$

причем

$$A(D)=\int_{1/2}^{w}[f(x)-1/2]\,dx \tag{3}$$

является ее площадью, и пусть $L(D)$—число точек решетки в области D. Тогда теорема ван дер Корпута утверждает, что

$$|L(D)-A(D)|<cz^2, \tag{4}$$

где c — постоянная. Ярник (Jarník; 1926) доказал, что для некоторых кривых $f(x)$ показатель 2 в правой части равенства (4) является наилучшим из возможных в том смысле, что его нельзя заменить никаким меньшим показателем.

Более детальные результаты были получены для областей, ограниченных частными видами кривых, например окружностью. Пусть $A(u)$ обозначает число точек решетки внутри замкнутой области

$$x^2+y^2 \leqslant u. \tag{5}$$

Используя обозначения п. 17.3, можно написать

$$A(u)=\sum_{n \leqslant u^{1/2}} r_2(n). \tag{6}$$

Пусть $J_1(z)$ обозначает функцию Бесселя первого рода первого порядка (см. п. 7.2.1). Харди доказал, что для всех $u>0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{1}{2}A(u+\varepsilon)+\frac{1}{2}A(u-\varepsilon)\right]=\pi u+u^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} r_2(n) J_1[2\pi(nu)^{1/2}]. \tag{7}$$

Если u не является целым, то левая часть равенства (7) просто равна $A(u)$. Можно доказать, что равенство

$$A(u)-\pi u=O(u^{\nu})$$

справедливо для всех $\nu \geqslant 1/3$ и неверно для любого $\nu \leqslant 1/4$.

Существует большое число работ, посвященных теории целочисленных решеток; в частности, число целых точек в эллипсоиде было изучено ван дер Корпутом.

17.11. Тождества для функций Бесселя

Изучение порядка роста различных числовых функций привело к большому числу тождеств, содержащих функции Бесселя. Два примера

$$\sum_{n \leqslant x}{}' r_2(n)=\pi x+x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^{1/2}} J_1[2\pi(nx)^{1/2}] \tag{1}$$

и

$$\sum_{n \leqslant x}{}' \tau(n)=x^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^6} J_{12}[4\pi(nx)^{1/2}] \tag{2}$$

были уже указаны выше. Другими примерами являются

$$\sum_{n \leqslant x}{}' \frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\pi^2 x}{6}-\frac{1}{2}(\gamma+\ln 2\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n} J_0[4\pi(nx)^{1/2}], \tag{3}$$

$$\sum_{n \leqslant x}{}' d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+\frac{1}{4}-$$
$$-x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} d(n)\left\{Y_1[4\pi(nx)^{1/2}]+2\pi^{-1}K_1[4\pi(nx)^{1/2}]\right\}, \tag{4}$$

где γ — постоянная Эйлера и штрих указывает, что если x — целое число, то последний член суммы надо умножить на $\frac{1}{2}$. Бесконечные ряды по функциям Бесселя можно рассматривать как точные выражения для ошибки, получающейся при замене левой части равенства стоящими справа элементарными функциями.

Формула (1) была высказана без доказательства Вороным (1904), впервые ее строго доказал Харди (Hardy; 1915). Формула (3) принадлежит Вигерту (Wigert; 1917), и (4)—Вороному (1904).

Тонкие вопросы сходимости могут быть обойдены путем рассмотрения «проинтегрированной формы» этих тождеств, в которых левые члены предполагаются имеющими вид

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)(x-n)^q}{q!}.$$

Оппенгейм (Oppenheim; 1926) дал общий метод вывода многих из этих наиболее общих тождеств и изучил суммируемость бесконечных рядов справа с помощью средних Рисса. Апостол (Apostol; 1951) дал краткое доказательство теоремы Ландау (Landau; 1915); эта теорема гласит, что если числа $a(n)$ являются коэффициентами ряда Дирихле

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-1},$$

абсолютно сходящегося при $\operatorname{Re} s > k$, сумма которого регулярна для всех s, исключая возможный полюс при $s=k$ с вычетом ρ, и обладает функциональным уравнением вида

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\,\varphi(s) = \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s)\,\varphi(k-s),$$

то имеет место тождество

$$\frac{1}{q!}\sum_{n=0}^{x} a(n)(x-n)^q =$$

$$= \rho \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+q+1)} x^{k+q} + \gamma \frac{x^{\frac{1}{2}(q+k)}}{(2\pi/\lambda)^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{\frac{1}{2}(k+q)}} J_{k+q}\left[\frac{4\pi}{\lambda}(nx)^{1/2}\right]. \quad (5)$$

Такие ряды Дирихле были детально изучены Гекке (Hecke; 1938). Примерами допустимых коэффициентов $a(n)$ являются функция Рамануджана $\tau(n)$ и функция $r_k(n)$ п. 17.3. Ряды функций Бесселя в правой части (5) абсолютно сходятся, если $q > k - 1/3$, но в некоторых частных случаях они могут сходиться и при меньших значчниях q.

Пример тождества иного типа был найден Харди (Hardy; 1940):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, e^{-4\pi s n^{1/2}} = 2^{1/2} s \pi^{-25/2} \Gamma\left(\frac{25}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(s^2+n)^{25/2}}.$$

Оно может рассматриваться как частный случай тождества для функций Бесселя

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, K_\nu(4\pi s n^{1/2})\, n^{-\nu/2} = (2\pi)^{\nu-k} s^{-\nu}\, \Gamma(k-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{(s^2+n)^{k-\nu}},$$

где $a(n)$ удовлетворяет тем же самым условиям, что и в (5).

Относительно результатов, связанных с формулой суммирования, см. Ferrar (1935, 1937).

ГЛАВА 18

РАЗЛИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Функция Миттаг-Лефлера $E_\alpha(z)$ и связанные с ней функции

Функция

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{1}$$

была введена Миттаг-Лефлером (Mittag-Leffler; 1903, 1904, 1905) и была изучена многими авторами, среди которых мы отметим Вимана (Wiman, 1905), Полларда (Pollard; 1948), Гумберга (Humbert; 1953). В этой главе символ E мы будем использовать лишь для функции (1); его не следует смешивать с обозначением, применяемым физиками для неполной гамма-функции, о которой шла речь в п. 9.2.

$E_\alpha(z)$ при $\alpha>0$ дает важные примеры целых функций любого конечного порядка. В некотором смысле каждая $E_\alpha(z)$ является простейшей целой функцией своего порядка (Phragmén; 1904). Функции Миттаг-Лефлера дают также примеры и контрпримеры, касающиеся роста и других свойств целых функций конечного порядка, и имеют иные приложения (Buhl; 1925).

Мы имеем

$$E_1(z)=e^z,\qquad E_2(z^2)=\operatorname{ch} z,\qquad E_{1/2}(z^{1/2})=2\pi^{-1/2}e^{-z}\operatorname{Erfc}(-z^{1/2}), \tag{2}$$

и $E_n(z^n)$ при натуральном n является обобщенной гиперболической функцией (см. также п. 18.2).

Многие из наиболее важных свойств $E_\alpha(z)$ вытекают из интегрального представления Миттаг-Лефлера

$$E_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{t^{\alpha-1}e^t}{t^\alpha-z}\,dt, \tag{3}$$

где путем интегрирования C является петля, начинающаяся и заканчивающаяся в $-\infty$ и охватывающая круг $|t|\leqslant|z|^{1/\alpha}$ в положительном направлении: $-\pi\leqslant\arg t\leqslant\pi$. Для того чтобы доказать равенство (3), разложим подынтегральную функцию по степеням z, почленно проинтегрируем и используем интеграл Ганкеля 1.6 (2) для функции $1/\Gamma(z)$.

Подынтегральная функция в (3) имеет точку ветвления при $t=0$. Разрежем комплексную t-плоскость вдоль отрицательной вещественной полуоси. Тогда в разрезанной плоскости подынтегральная функция будет однозначной.

Мы выберем в разрезанной плоскости главную ветвь для t^{α}. Подынтегральная функция имеет полюсы в точках

$$t_m = z^{1/\alpha} e^{2\pi i m/\alpha}, \qquad m \text{ — целое}. \tag{4}$$

Но на разрезанной плоскости лежат лишь те из этих полюсов, для которых

$$-\alpha\pi < \arg z + 2\pi m < \alpha\pi. \tag{5}$$

Таким образом, число полюсов внутри C равно либо $[\alpha]$, либо $[\alpha+1]$ в зависимости от значения $\arg z$

Феллер высказал предположение и Поллард (Pollard; 1948) доказал, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ функция $E_\alpha(-x)$ *вполне монотонна* на полуоси $x \geqslant 0$, т. е. что

$$(-1)^n \frac{d^n E_\alpha(-x)}{dx^n} \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

Доказательство основано на интегральном представлении (3).

Для того чтобы изучить асимптотическое поведение $E_\alpha(z)$, когда $z \to \infty$, предположим сначала, что z стремится к бесконечности вдоль луча, лежащего вне сектора $|\arg z| \leqslant \alpha\pi/2$ (такие лучи существуют, если $0 < \alpha < 2$). Если существуют полюсы t_m, удовлетворяющие (5), то они должны лежать в полуплоскости $\operatorname{Re} t < 0$. Преобразуем путь C так, чтобы получились два луча в полуплоскости $\operatorname{Re} t < 0$ такие, что полюсы лежат слева от C. Положим в (3)

$$\frac{t^\alpha}{t^\alpha - z} = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{t^{n\alpha}}{z^n} - \left(1 - \frac{t^\alpha}{z}\right)^{-1} \frac{t^{N\alpha}}{z^N}$$

и отметим, что функция $(1 - t^\alpha z^{-1})^{-1}$ равномерно ограничена по $|z|$ и t, если $\arg z$ постоянен и t лежит на контуре C. Снова применяя 1.6(2), получаем

$$E_\alpha(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)} + O(|z|^{-N}), \quad z \to \infty, \quad |\arg(-z)| < (1-\alpha/2)\pi, \tag{7}$$

O-член равномерен по $\arg z$, если

$$|\arg(-z| \leqslant (1-\alpha/2-\varepsilon)\pi, \quad \varepsilon > 0.$$

Этот результат теряет смысл, если $\alpha \geqslant 2$.

Теперь предположим, что $z \to \infty$ вдоль луча и $|\arg z| \leqslant \alpha\pi/2$. Тогда существует по крайней мере одно t_m, удовлетворяющее условию

$$-\frac{1}{2}\alpha\pi \leqslant \arg z + 2\pi m \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi, \tag{8}$$

причем таких t_m может быть много (если $\alpha \geqslant 2$); эти полюсы лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} t \geqslant 0$. Контур C можно теперь деформировать, как выше, исключая то, что в ходе деформации C проходит через полюсы, удовлетворяющие (8), и они дают вклад в виде вычетов. В этом случае результат имеет вид

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_m e^{t_m} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)} + O(|z|^{-N}), \quad z \to \infty,$$
$$|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi, \tag{9}$$

где t_m даны формулой (4) и суммирование ведется по всем целым значениям m, удовлетворяющим (8). В частности, если $0<\alpha<2$, то $m=0$ является единственным целым числом, удовлетворяющим условию (8), и мы имеем

$$E_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}\exp z^{1/\alpha}+O(|z|^{-1}),\quad 0<\alpha<2,\quad |\arg z|\leqslant\frac{1}{2}\alpha\pi,\quad z\to\infty. \tag{10}$$

Из (7), (9), (10) и определения порядка целой функции (см., например, Левин, 1956, стр 11) заключаем, что при $\alpha>0$ функция $E_\alpha(z)$ является *целой функцией порядка* $1/\alpha$. Асимптотическое разложение (7), (9) обобщено на комплексные значения α Виманом (Wiman, 1905).

Нули функции $E_\alpha(z)$ были изучены Виманом (Wiman, 1905). Он доказал, что если $\alpha\geqslant 2$, то функция $E_\alpha(z)$ имеет бесконечное множество нулей на отрицательной вещественной полуоси и не имеет иных нулей. Обозначим через $n(r)$ число нулей функции $E_\alpha(z)$ в круге $|z|<r$. Виман доказал, что

$$\left[\frac{r^{1/\alpha}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right]\leqslant n(r)<\left[\frac{r^{1/\alpha}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right]+1,\qquad \alpha\geqslant 2, \tag{11}$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. При $0<\alpha<2$ распределение нулей существенно отлично от этого случая. Виман доказал, что, за исключением случая $\alpha=1$ (при котором нулей нет), нули асимптотически лежат на кривой

$$\operatorname{Re} z^{1/\alpha}+\ln|z|+\ln|\Gamma(-\alpha)|=0, \tag{12}$$

а также что

$$\left[\pi^{-1}r^{1/\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\right]-1\leqslant n(r)\leqslant\left[\pi^{-1}r^{1/\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\right]+1,\quad 0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1. \tag{13}$$

Кроме того, при $1<\alpha<2$ мы имеем нечетное число отрицательных нулей. Виман также изучил нули функции $E_\alpha(z)$ при комплексных значениях α.

Из равенства (1) непосредственно вытекают функциональные соотношения

$$\sum_{h=0}^{m-1}E_\alpha(ze^{2\pi ih/m})=mE_{m\alpha}(z^m), \tag{14}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m E_m(z^m)=E_m(z^m), \tag{15}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m E_{m/n}(z^{m/n})=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{-km/n}}{\Gamma(1-km/n)}+E_{m/n}(z^{m/n}), \tag{16}$$

где m и $n-1$ — положительные целые числа. Из (16) следует, что

$$\frac{d}{dz}[e^{-z}E_{1/n}(z^{1/n})]=e^{-z}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{-k/n}}{\Gamma(1-k/n)}.$$

Интегрируя это равенство с помощью 9.1 (1), получаем

$$E_{1/n}(z^{1/n})=e^z\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\gamma(1-k/n,\ z)}{\Gamma(1-k/n)}\right],\qquad n=2,3,\ldots \tag{17}$$

Явное выражение для $E_{m/n}$ вытекает из (14) и (17). Третье равенство (2) вытекает из (17) при $n=2$ с помощью 9.9 (1), (2).

Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t} E_\alpha(t^\alpha z)\,dt = \frac{1}{1-z}, \qquad \alpha \geqslant 0, \tag{18}$$

был вычислен Миттаг-Лефлером, который показал, что область сходимости этого интеграла содержит единичный круг и ограничена линией $\operatorname{Re} z^{1/\alpha}=1$. С помощью (18) можно получить преобразование Лапласа для функции $E_\sigma(t^\alpha)$, это было использовано Гумбертом (Humbert, 1953) для получения различных функциональных соотношений, которым удовлетворяет функция $E_\alpha(z)$.

Функция

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha,\ \beta > 0, \tag{19}$$

обладает свойствами, весьма похожими на свойства функции Миттаг-Лефлера, см. Wiman (1905), Agarwal (1953), Humbert и Agarwal (1953). Следующие формулы выводятся точно так же, как полученные выше их частные случаи при $\beta=1$:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{\alpha-\beta}e^t}{t^\alpha - z}\,dt, \tag{20}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta-\alpha n)} + O(|z|^{-N}), \qquad z\to\infty,$$
$$|\arg(-z)| < (1-\alpha/2)\pi, \tag{21}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_m t_m^{1-\beta}e^{t_m} - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta-\alpha n)} + O(|z|^{-N}), \qquad z\to\infty,$$
$$|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z),\\ &E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\sum_{h=0}^{m-1} E_{\alpha,\beta}\left(ze^{2\pi i h/m}\right) = mE_{m\alpha,\beta}(z^m), \tag{24}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m [z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha), \tag{25}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}E_\alpha(t^\alpha z)\,dt = \frac{1}{1-z}, \qquad \alpha,\ \beta>0. \tag{26}$$

В формуле (20) C — тот же самый путь, что и в формуле (3). В (22) t_m задается формулой (4) и m пробегает все целые числа, удовлетворяющие неравенству (8) В (21) и (25) m может быть любым целым положительным числом. Область сходимости в (26) такая же, как и в (18). Преобразование Лапласа функции $t^{\beta-1}E_\alpha(t^\alpha)$ можно вычислить с помощью формулы (26), это было использовано Агарвалем (Agarwal, 1953) и Гумбертом и Агарвалем (Humbert and Agarwal, 1953) для получения дальнейших свойств $E_{\alpha,\beta}$

Функция от двух переменных, похожая на $E_{\alpha,\beta}$, была рассмотрена кратко Гумбертом и Делерю (Humbert and Delerue; 1953).

Функции E_α и $E_{\alpha,\beta}$ стремятся к бесконечности, когда $z \to \infty$ в некотором секторе с углом $\alpha\pi$, и стремятся к нулю, когда $z \to \infty$ вне этого сектора. Известны также целые функции, которые стремятся к бесконечности в единственном направлении и к нулю во всех остальных направлениях. Двумя такими функциями являются

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma[1+k(\ln k)^{-\alpha}]}, \qquad 0<\alpha<1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z}{\ln(k+1/\alpha)}\right]^k, \qquad 0<\alpha<1.$$

Они были соответственно изучены Мальмквистом (Malmquist; 1905) и Линделефом (Lindelof, 1903).

Бернс (Barnes, 1906) изучил асимптотическое поведение $E_\alpha(z)$ и многих аналогичных функций, в частности функций

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\theta)^\beta \Gamma(1+\alpha k)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(1+\alpha k)}{k!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+\alpha+\alpha k)}.$$

С функцией $E_{\alpha,\beta}$ тесно связана целая функция

$$\varphi(\alpha,\ \beta;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha,\ \beta>0. \tag{27}$$

Райт (Wright; 1934) использовал ее для асимптотической теории разбиений. Связь с $E_{\alpha,\beta}$ дается формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-ts}\varphi(\alpha,\ \beta;\ t)\,dt = s^{-1}E_{\alpha,\beta}(s^{-1}), \qquad \alpha>1,\ \beta>0. \tag{28}$$

Функцию $\varphi(z)$ можно представить интегралом (Wright, 1933)

$$\varphi(\alpha,\ \beta;\ z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} u^{-\beta}\exp(u+zu^{-\alpha})\,du, \qquad \alpha>0. \tag{29}$$

Для того чтобы доказать равенство (29), разложим подынтегральную функцию по степеням z и используем 1.6 (2). Асимптотическое поведение φ при $z \to \infty$ также было изучено Райтом (Wright, 1934a, 1940). Из (27) вытекают соотношения

$$\alpha z\varphi(\alpha,\ \alpha+\beta,\ z) = \varphi(\alpha,\ \beta-1;\ z)+(1-\beta)\,\varphi(\alpha,\ \beta;\ z), \tag{30}$$

$$\frac{d\varphi(\alpha,\ \beta;\ z)}{dz} = \varphi(\alpha,\ \alpha+\beta;\ z), \tag{31}$$

$$\alpha z\frac{d\varphi(\alpha,\ \alpha+\beta;\ z)}{dz} = \varphi(\alpha,\ \beta-1,\ z)+(1-\beta)\,\varphi(\alpha,\ \beta;\ z). \tag{32}$$

Так как

$$J_\nu(z)=\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \varphi\left(1,\ \nu+1;\ -\frac{z^2}{4}\right), \tag{33}$$

то функцию Райта можно рассматривать как одно из обобщений функции Бесселя. Соотношение (30) является обобщением рекуррентного соотношения для функций Бесселя, а (31), (32)—обобщениями формул дифференцирования этой функции. Некоторые из свойств, которые являются у функции φ общими с функциями Бесселя, были перечислены Райтом. Обобщенное преобразование Ганкеля с ядром

$$(1/2)^{\beta-1}(xy)^{\beta-1/2}\varphi\left(\alpha,\ \beta;\ -\frac{x^2y^2}{4}\right)$$

было изучено Агарвалем (Agarwal; 1950, 1951, 1953).

18.2. Тригонометрические и гиперболические функции порядка n

В этом пункте n будет положительным целым числом и

$$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right). \tag{1}$$

n функций

$$h_i(x,\ n)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\omega^{(1-i)m}\exp(\omega^m x), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

иногда называют *гиперболическими функциями порядка n*. При $n=2$ они сводятся к гиперболическим функциям:

$$h_1(x,\ 1)=e^x, \qquad h_1(x,\ 2)=\operatorname{ch} x, \qquad h_2(x,\ 2)=\operatorname{sh} x. \tag{3}$$

В общем случае n будет фиксированным положительным целым числом и, как правило, не будет указываться. Нам будет удобно распространить определение (2) на все (положительные, отрицательные или равные нулю) целые числа i, что равносильно тому, чтобы положить

$$h_{i+n}(x,\ n)=h_i(x,\ n), \qquad i\text{—целое}. \tag{4}$$

Это часто упрощает запись формул.

Так как $\omega^n=1$, то все h_i удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^ny}{dx^n}-y=0, \tag{5}$$

и так как

$$\sum_{m=1}^{n}\omega^{rm}=\begin{cases}0 \text{ для целых } r, \text{ которые не делятся на } n,\\ n \text{ для целых } r, \text{ которые делятся на } n,\end{cases} \tag{6}$$

то h_i удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{d^{j-1}h_i}{dx^{j-1}}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если } i\neq j,\\ 1, \text{ если } i=j,\end{cases} \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{7}$$

Таким образом, функции $h_1, \ldots, h_n$ образуют линейно независимую систему решений уравнения (5), и их определитель Вронского равен единице.

Разложение в степенной ряд

$$h_i(x,\ n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{nr+i-1}}{(nr+i-1)},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{8}$$

получается путем разложения показательных функций в равенстве (2) и использования соотношения (6); интегральное представление

$$h_i(x,\ n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{t^{n-1}e^{xt}}{t^n-1}\,dt,\qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{9}$$

где C — простая замкнутая кривая, охватывающая единичную окружность один раз в положительном направлении, получается, если вычислить интеграл в виде суммы вычетов, что приводит к равенству (2); а соотношение

$$\exp(\omega^m x)=\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)m}h_i(x,\ n),\qquad m\text{ — целое}, \tag{10}$$

вытекает из (8).

Некоторыми из главных формул для гиперболических функций порядка n являются

$$h_i(\omega^m x)=\omega^{(i-1)m}h_i(x), \tag{11}$$

$$\frac{d^j h_i(x)}{dx^j}=h_{i-j}(x), \tag{12}$$

$$h_i(x+y)=\sum_{j=1}^{n}h_j(x)\,h_{i-j+1}(y), \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n\\ h_n & h_1 & \ldots & h_{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ h_2 & h_3 & \ldots & h_1\end{vmatrix}=\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)m}h_i(x)\right)=1, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-st}h_i(t)\,dt=\frac{s^{n-i}}{s^n-1},\qquad \operatorname{Re}s>1,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{15}$$

Здесь i, j, m — любые целые числа (за исключением формулы (15), где i принимает лишь значения 1, 2, ...); (11) и (12) вытекают из (2), (13) — из (5), так как $h_i(x+a)$ является решением дифференциального уравнения (5), j-я производная которого при $x=0$ равна $h_{i-j}(a)$; (14) является определителем Вронского от h_1, ..., h_n; этот определитель есть *циркулянт* (см. Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, 1964, пример 300) и может быть явно вычислен. Наконец, (15) является преобразованием Лапласа функции $h_i(t)$ и получается сходным образом из (2) или (8).

Относительно этих и других формул см. Poli (1940, 1949a, в последней работе имеется детальная библиография), Oniga (1948), Bruwier (1949, 1949a) и Silverman (1953). Поли (Poli; 1949a) указал некоторые соотношения, имеющие место в случае, когда n — сложное число, дал разложения по функциям h_i и указал некоторые приложения. Брювье (Bruwier; 1949b) рассмотрел 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1} как единицы линейной алгебры, таблица умножения которой имеет вид $\omega^i\cdot\omega^j=\omega^{i+j}$ (гиперкомплексные числа). $e^{\omega x}$ является гиперкомплексным числом и (10) показывает, что h_i являются компонентами для

$e^{\omega x}$. Этот факт был использован Брювье для того, чтобы доказать свойства $h_i(x)$. Матрицы, элементами которых, стоящими на пересечении i-й строки и j-го столбца, являются $\alpha_i h_{j-i}(x, n)/\alpha_j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — заданное множество постоянных, были изучены Лерером (Lehrer; 1954).

Из (8) и 18.1(19) следует

$$h_i(x) = x^{i-1} E_{n, i}(x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

и, в частности,

$$h_1(x) = E_n(x^n) \tag{17}$$

дает связь с функцией Миттаг-Лефлера.

n функций

$$k_i(x, n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{nr+i-1}}{(nr+i-1)!}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

иногда называют *тригонометрическими функциями порядка n*. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + y = 0 \tag{19}$$

и удовлетворяют начальным условиям

$$\frac{d^{j-1} k_i}{dx^{j-1}}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Здесь также мы распространим определение на все целые значения i, положив

$$k_{i+n}(x, n) = -k_i(x, n). \tag{21}$$

Эти функции были изучены указанными выше авторами, а также Микусинским (Mikusinski; 1948). Положим

$$\lambda = \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right), \tag{22}$$

так что λ является корнем n-й степени из -1. Мы имеем

$$k_i(x) = \lambda^{1-i} h_i(\lambda x, n), \tag{23}$$

и свойства функций k_i легко вытекают из свойств функции h_i. Основными формулами являются:

$$k_i(\lambda x) = \lambda^{i-1} h_i(x), \tag{24}$$

$$k_i(\omega^m x) = \omega^{(i-1)m} k_i(x), \tag{25}$$

$$\frac{d^j k_i(x)}{dx^j} = k_{i-j}(x), \tag{26}$$

$$k_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \lambda^{(1-i)(2m+1)} \exp(\lambda^{2m+1} x), \tag{27}$$

$$\exp(\lambda^{2m+1} x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{(i-1)(2m+1)} k_i(x), \tag{28}$$

$$k_i(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{n-i} e^{xt}}{t^n + 1}\, dt, \tag{29}$$

$$k_i(x+y)=\sum_{j=1}^{n} k_j(x)\,k_{i-j-1}(y), \tag{30}$$

$$\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda^{(i-1)(2m+1)}k_i(x)\right)=1, \tag{31}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}k_i(t)\,dt=\frac{s^{n-i}}{s^n+1},\qquad \operatorname{Re}s>1,\ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} h_i(x,\ n)+k_i(x,\ n)&=2h_i(x,\ 2n),\\ h_i(x,\ n)-k_i(x,\ n)&=2h_{n+i}(x,\ 2n).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Из (27) можно вывести, что функция $k_i(x,\ n)$ не является периодической функцией, исключая случаи $n=1,\ 2$. Нули функции $k_i(x)$ были изучены Поли (Poli; 1949a) для $n=3$ и Микусинским (Mikusinski; 1948) для любого $n>1$. Исследование Микусинского основано на системе линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $k_1(x),\ \ldots,\ k_n(x)$, и приводит к следующим выводам. Каждая функция $k_i(x,\ n)$ имеет бесконечно много простых положительных нулей; нули функций $k_i(x,\ n)$ и $k_j(x,\ n)$, $i\not\equiv j\pmod n$ перемежаются. Наименьший положительный нуль функции $k_i(x,\ n)$ лежит между

$$\left[\frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}\right]^{1/n}\quad \text{и}\quad \left[\frac{2\,(i+n-1)!}{(i-1)!}\right]^{1/n}.$$

Большие положительные нули функции $k_i(x,\ n)$ приближенно равноотстоят друг от друга; расстояние между двумя последовательными нулями функции $k_i(x,\ n)$ стремится к $\dfrac{\pi}{\sin \pi/n}$.

Отношения вида $\dfrac{k_i(x,\ n)}{k_j(x,\ n)}$ можно рассматривать как обобщения функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$; относительно этих обобщений см. Oniga (1948), Poli (1949).

Совершенно иное обобщение тригонометрических функций было дано Граммелем (Grammel; 1948, 1948a, 1950).

18.3. Функция $\nu(x)$ и родственные функции

В этом пункте мы рассмотрим следующие функции:

$$\nu(x)=\int_0^\infty \frac{x^t\,dt}{\Gamma(t+1)},\quad \nu(x,\ \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}, \tag{1}$$

$$\mu(x,\ \beta)=\int_0^\infty \frac{x^t t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(t+1)},\qquad \mu(x,\ \beta,\ \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+t+1)}. \tag{2}$$

Первая из этих функций встретилась у Вольтерра в связи с его теорией свертки (Volterra, 1916, гл. VI; Volterra and Pérès, 1924, гл. X); Вольтерра обозначил $\nu(y-x)$ через $\lambda(x,\ y)$ и $\nu(y-x,\ \alpha)$ через $\lambda(x,\ y;\ \alpha)$ или $\lambda(x,\ y\,|\,\alpha)$. Эти функции встречаются также в связи с операционным исчислением, входят в формулы обращения для преобразования Лапласа и интересны в связи с некоторыми интегральными уравнениями. Надо отметить, что (2) является определением функции μ, применяемым в современных работах; некоторые из более ранних работ используют символ μ для функции, отличающейся от нашей на множитель $\Gamma(\beta+1)$.

Между четырьмя функциями, определяемыми равенствами (1), (2), существуют следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \nu(x)=\nu(x,\ 0)=\mu(x,\ 0)=\mu(x,\ 0,\ 0), \\ \nu(x,\ \alpha)=\mu(x,\ 0,\ \alpha),\quad \mu(x,\ \beta)=\mu(x,\ \beta,\ 0)=x\mu(x,\ \beta,\ -1,\ -1), \\ x\nu(x,\ \alpha-1)-\alpha\nu(x,\ \alpha)=\mu(x,\ 1,\ \alpha). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Все интегралы в (1), (2) сходятся, если $x\neq 0$, α произвольно и $\operatorname{Re}\beta>-1$. Все четыре функции являются аналитическими функциями от x с точками ветвления при $x=0$ и ∞ и не имеющими других особенностей; $\nu(x,\ \alpha)$ и $\mu(x,\ \beta,\ \alpha)$ являются целыми функциями от α. Определение функции μ можно распространить на всю плоскость β путем последовательного интегрирования по частям. Из (2) вытекает, что

$$\mu(x,\beta,\alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\,d\left[\frac{t^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}\right]=-\frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\int_0^\infty t^{\beta+1}\frac{d}{dt}\left[\frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\right]dt=$$

. . . .

$$=\frac{(-1)^m}{\Gamma(\beta+m+1)}\int_0^\infty t^{\beta+m}\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\right]dt \tag{4}$$

и последнее выражение можно рассматривать как определение $\mu(x,\ \beta,\ \alpha)$ при $\operatorname{Re}\beta>-m-1$. Так распространенные функции $\mu(x,\ \beta,\ \alpha)$ и $\mu(x,\ \beta)=\mu(x,\ \beta,\ 0)$ являются целыми функциями от β и аналитическими функциями от x, а $\mu(x,\ \beta,\ \alpha)$ является, кроме того, целой функцией от α.

Из (4) вытекает, что

$$\mu(x,\ -m,\ \alpha)=(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right],\qquad m=1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

и так как $\dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ является целой функцией от α, имеем разложение в ряд Тейлора

$$\frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(x,\ -n-1,\ \alpha)\frac{(-t)^m}{m!}. \tag{6}$$

Для того чтобы изучить поведение $\mu(x,\ \beta,\ \alpha)$, когда $x\to 0$, перепишем вторую формулу (2) следующим образом:

$$\Gamma(\beta+1)\,\mu(x,\ \beta,\ \alpha)=x^\alpha\int_0^\infty \exp\left(-t\ln\frac{1}{x}\right)\frac{t^\beta\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}. \tag{7}$$

Из (6) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+t+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(1,\ -n-1,\alpha)\frac{(-t)^m}{m!}, \tag{8}$$

и из леммы Ватсона (Copson, 1935, п 9.52) следует, что подстановка разложения (8) в (7) и почленное интегрирование дают асимптотическое разложение интеграла по убывающим степеням $\ln\frac{1}{x}$. Таким образом,

$$\mu(x,\beta,\alpha)=x^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\beta-1}\times$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^m(\beta+1)_m}{m!}\mu(1,-n-1,\alpha)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-n}+O\left(\left|\ln\frac{1}{x}\right|^{-N}\right)\right],$$
$$\operatorname{Re}\beta>-1,\qquad x\to 0,\qquad \left|\arg\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|<\pi. \tag{9}$$

Асимптотические разложения других трех функций по убывающим степеням $\ln\frac{1}{x}$ вытекают из (3). Первые члены асимптотических разложений для $\nu(x)$ и $\nu(x,\alpha)$ были получены Вольтерра.

Поведение $\nu(x)$ при $\operatorname{Re}x\to\infty$ видно из интеграла Рамануджана (Hardy, 1940, стр 196):

$$\nu(x)=e^x-\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\,dt}{t\,[\pi^2+(\ln t)^2]},\qquad \operatorname{Re}x>0. \tag{10}$$

Полное исследование асимптотического поведения $\nu(x)$ было проведено Фордом (Ford; 1936). Метод Форда вкратце заключается в следующем. Проинтегрируем равенство

$$H(x,w)=\frac{1}{[\sin(\pi w)]^2}\int_0^{w}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}$$

по прямоугольнику на плоскости w с вершинами $-N-{}^1/_2-ic$, $k+{}^1/_2-ic$, $k+{}^1/_2+ic$, $-N-{}^1/_2+ic$, где k и N — целые числа, $k+N\geqslant 0$ и c — положительное число Функция $H(x,w)$ мероморфна и ее полюсами, лежащими внутри прямоугольника, являются $w=n$, $n=-N,\ -N+1,\ \dots,\ k-1,\ k$. Вычет функции H в полюсе $w=n$ равен $\frac{\pi^{-2}x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ Если $c\to\infty$, то интегралы вдоль горизонтальных сторон прямоугольника стремятся к нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+{}^1/_2-i\infty}^{k+{}^1/_2+i\infty}H\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{-N-{}^1/_2-i\infty}^{-N-{}^1/_2+i\infty}H\,dw=\sum_{n=-N}^{k}\frac{\pi^{-2}x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Очевидно, что второй интеграл есть $O(|x|^{\alpha-N-{}^1/_2})$. В первом интеграле положим

$$H(x,w)=H_1+H_2=\frac{1}{[\sin(\pi w)]^2}\left(\int_0^{k+{}^1/_2}+\int_{k+{}^1/_2}^{\infty}\right).$$

Можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty} H_1\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{k+1/2}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty}[\sin(\pi w)]^{-2}\,dw=$$

$$=\pi^{-2}\int_0^{k+1/2}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty} H_2\,dw\longrightarrow 0 \text{ при } k\longrightarrow\infty,$$

и, следовательно, при $k\longrightarrow\infty$ получаем

$$\nu(x,\alpha)-\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}=-\frac{1}{2}\pi i\int_{-N-1/2-i\infty}^{-N-1/2+i\infty} H\,dw=$$

$$=O\left(|x|^{\alpha-N-1/2}\right),\qquad |x|\longrightarrow\infty.$$

Комбинируя этот результат с 18.1 (21), (22), выводим, что

$$\nu(x,\alpha)=\begin{cases} e^x+O\left(|x|^{\alpha-N}\right), & x\longrightarrow\infty,\ |\arg x|\leqslant\pi/2,\\ O\left(|x|^{\alpha-N}\right), & x\longrightarrow\infty,\ \pi/2<|\arg x|\leqslant\pi\end{cases}$$

для любого целого N.

Для функции $\mu(x,\beta,\alpha)$ получаются несколько менее полные результаты Из-за наличия точки ветвления для функции

$$H(x,w,\beta)=\frac{1}{[\sin(\pi w)]^2}\int_0^{w}\frac{x^{\alpha+t}t^{\beta}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)},$$

при $w=0$, приходится полагать $N=-1$, что, как и выше, приводит к

$$\mu(x,\beta,\alpha)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha+n}n^{\beta}}{\Gamma(\alpha+n+1)}=-\frac{1}{2}\pi i\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}H(x,w,\beta)\,dw.$$

Дальнейший прогресс связан с изучением асимптотического разложения целой функции

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^{\beta}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Из (1) и (2) вытекают следующие рекуррентные формулы, формулы дифференцирования, ряды и интегралы:

$$\mu(x, \beta+1, \alpha) = x\mu(x, \beta, \alpha-1) - \alpha\mu(x, \beta, \alpha), \tag{11}$$

$$\frac{d^n \nu(x)}{dx^n} = \nu(x, -n), \qquad \frac{d^n \nu(x, \alpha)}{dx^n} = \nu(x, \alpha-n), \tag{12}$$

$$\frac{d^n \mu(x, \beta)}{dx^n} = \mu(x, \beta, -n), \qquad \frac{d^n \mu(x, \beta, \alpha)}{dx^n} = \mu(x, \beta, \alpha-n), \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu(x, n) = e^{-u}\nu(xe^u), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu(x, n, \alpha) = e^{-(\alpha+1)u}\nu(xe^u, \alpha), \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+1)_n}{n!} u^n \mu(x, \beta+n, \alpha) = e^{-(\alpha+1)u}\mu(xe^u, \beta, \alpha), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha u} u^{\gamma-1} \mu(xe^{-u}, \beta, \alpha)\, du = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)} \mu(x, \beta-\gamma, \alpha),$$

$$\operatorname{Re}\beta > -1, \qquad \operatorname{Re}\gamma > 0. \tag{15}$$

Относительно многочисленных других формул, касающихся этих функций, см., в частности, Barrucand (1951), Colombo (1950, 1953), Humbert и Poli (1944).

Функции ν и μ встречаются в операционном исчислении. С одной стороны, это связано с формулами

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\Gamma(t+1)}\, dt = \nu(e^{-s}), \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\, dt = e^{\alpha s}\nu(e^{-s}, \alpha), \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{t^{\beta} e^{-st}}{\Gamma(t+1)}\, dt = \mu(e^{-s}, \beta), \qquad \operatorname{Re}\beta > -1, \\ &\int_0^{\infty} \frac{t^{\beta} e^{-st}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\, dt = e^{\alpha s}\mu(e^{-s}, \beta, \alpha), \qquad \operatorname{Re}\beta > -1, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

которые эквивалентны формулам (1), (2) и показывают, что ν и μ являются преобразованиями Лапласа функций простого вида, с другой стороны, это связано с формулами

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-st}\nu(t)\, dt = (s \ln s)^{-1}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \\ &\int_0^{\infty} e^{-st}\nu(t, \alpha)\, dt = s^{-\alpha-1}(\ln s)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1, \quad \operatorname{Re} s > 1, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-st}\mu(t, \beta)\, dt = s^{-1}(\ln s)^{-\beta-1}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \\ &\int_0^{\infty} e^{-st}\mu(t, \beta, \alpha)\, dt = s^{-\alpha-1}(\ln s)^{-\beta-1}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1, \quad \operatorname{Re} s > 1, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

которые можно вывести из формул (1), (2), (4) и которые показывают, что ν и μ обладают весьма простыми преобразованиями Лапласа. Для вывода многих свойств функций ν и μ применяется операционное исчисление. Относительно приложения этих функций в операционном исчислении см. Barrucand и Colombo (1950), Colombo (1943, 1943a, 1948), Humbert (1944, 1950), Humbert и Poli (1944), Parodi (1945, 1947, 1949) и Poli (1946). Кроме того, одна из многих формул обращения для преобразования Лапласа

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt, \tag{20}$$

а именно формула (Doetsch, 1937)

$$F(t)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(s)\left[\nu(st,\,-{}^1/_2+\lambda i)-\nu(st,\,-{}^1/_2-\lambda i)\right]ds, \tag{21}$$

содержит функцию $\nu(x,\alpha)$.

Формулы интегрирования

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx=2^{\beta+1}y^{1/2}\pi^{1/2}\mu(y,\beta,\alpha/2),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>-1,\qquad \operatorname{Re}y>0, \tag{22}$$

$$\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta,\alpha)=2^{\beta+2}\pi^{1/2}y^{3/2}\mu(y,\beta,\alpha/2-{}^1/_2),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>-2,\qquad \operatorname{Re}y>0, \tag{23}$$

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_\nu\left(\frac{x}{2^{1/2}y^{1/2}}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx=$$
$$=2^{\beta+\nu/2+1}\pi^{1/2}y^{\nu/2+1/2}\mu(y,\beta,\alpha/2-\nu/2),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>-1,\qquad \operatorname{Re}y>0, \tag{24}$$

могут быть получены путем подстановки в подынтегральную функцию выражения (4). В последнем случае (24) мы применяем формулу 8.3 (20). Эти формулы показывают, в частности, что функции ν и μ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\pi^{-1/2}y^{-1/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\nu(x)\,dx=\nu(y),\\ &\frac{1}{2}\pi^{-1/2}y^{-1/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta)\,dx=2^\beta\mu(y,\beta),\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\pi^{-1/2}y^{-3/2}\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\nu(x,\,-1)\,dx=\nu(y,\,-1),\\
&\frac{1}{4}\pi^{-1/2}y^{-3/2}\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\,\beta,\,-1)\,dx=2^\beta\mu(y,\,\beta,\,-1),
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&2^{-\nu/2-1}\pi^{-1/2}y^{-\nu/2-1/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_{-\alpha}\left(\frac{x}{2^{1/2}y^{1/2}}\right)\nu(x,\alpha)\,dx=\\
&\qquad\qquad=\nu(y,\alpha),\qquad \operatorname{Re}\alpha>-1,\\
&2^{-\nu/2-1}\pi^{-1/2}y^{-\nu/2-1/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_{-\alpha}\left(\frac{x}{2^{1/2}y^{1/2}}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx=\\
&\qquad\qquad=2^\beta\mu(y,\beta,\alpha),\qquad \operatorname{Re}\alpha>-1.
\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

В случае интегрального уравнения с ядром

$$\frac{1}{2\pi^{1/2}y^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)$$

известно (Stanković, 1953), что (25) дает все собственные функции, имеющие, в некотором смысле, регулярный рост. Аналогичное утверждение, по-видимому, справедливо в случаях (26) и (27). Относительно других интегральных уравнений, решения которых содержат функции ν и μ, см. Colombo (1943a, 1952) и Parodi (1948).

ГЛАВА 19

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ *)

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ОБЩИЙ ОБЗОР

19.1. Введение

Если последовательность чисел g_1, g_2, ... определяется как последовательность коэффициентов разложения некоторой функции в бесконечный ряд, то G называют *производящей функцией* для чисел g_n.

Чаще всего в качестве такого ряда берут *степенной ряд*

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n.$$

Часто g_n являются функциями от одного или нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, и мы имеем соотношение вида

$$G(x_1, \ldots, x_p; t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_1, \ldots, x_p) t^n. \tag{1}$$

Тогда G называется *производящей функцией* для функций $g_n(x_1, \ldots, x_p)$ и $x_1, \ldots, x_p, t$ рассматриваются как $p+1$ независимых переменных. На протяжении этой главы, за исключением нескольких важных случаев, мы будем считать, что p равно единице, и писать

$$G(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n$$

для производящей функции $G(x, t)$ функций $g_n(x)$ одного переменного.

Как правило, степенные ряды, связанные с производящей функцией, имеют положительный радиус сходимости Однако иногда бывает полезно рассматривать степенные ряды, радиус сходимости которых равен нулю, т. е. ряды, которые расходятся при всех значениях t, за исключением $t=0$. Если вопрос о сходимости не играет роли, мы говорим о *формальных*

---

*) Эта глава основана на обширном списке производящих функций, составленном покойным профессором Гарри Бейтменом.

Профессор Е. Д. Рейнвилл любезно согласился дополнить этот список другими производящими функциями и помогал при подготовке этой главы весьма полезными советами и участием в обсуждениях.

степенных рядах, пишем

$$G(x,\ t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n \tag{2}$$

и говорим, что $G(x, t)$ *эквивалентно* или *ассоциировано* с формальным степенным рядом, стоящим в правой части равенства (2).

Иногда рассматривают ряды Лорана, т. е. разложения вида

$$G(x,\ t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x)\, t^n. \tag{3}$$

Степенные ряды и ряды Лорана не являются единственными разложениями, встречающимися в теории производящих функций. В п. 17.12 мы встретились с производящими функциями, приводящими к другим типам рядов Эти ряды часто встречаются в теории чисел. Отметим еще факториальные ряды, которые часто встречаются, например, в комбинаторном анализе.

Название «производящая функция» было введено Лапласом в 1812 г. Краткое изложение работы Лапласа о производящих функциях можно наити в книге Дёча (Doetsch, 1937). Лаплас использовал не только производящие ряды, но также и производящие интегралы. Наиболее важным интегралом такого рода является так называемый интеграл Лапласа, который записывают обычно в виде

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\, g(u)\, du.$$

Связь с производящим степенным рядом легче всего усмотреть, если сделать замену переменной $t = e^{-s}$. Как ряды, так и интегралы можно заменить интегралом Лапласа—Стилтьеса

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\, d\alpha(u), \tag{4}$$

где $\alpha(u)$—функция с ограниченным изменением и правая часть является интегралом Стилтьеса. Многие современные авторы, например Уиддер (Widder, 1936), применяют термин «производящая функция» в смысле (4). Легко видеть, что как производящие степенные ряды, так и ряды Дирихле, и интегралы Лапласа являются частными случаями (4)

19.2. Типичные примеры применения производящих функций

Производящая функция для последовательности чисел $\{g_n\}$ часто строится для того, чтобы изучить свойства чисел g_n. Приведем типичный пример из комбинаторного анализа.

В обычной алгебре умножение *ассоциативно*, т. е. $(ab)c = a(bc)$, и аналогично для любого числа множителей Произведение n сомножителей зависит от их порядка, но не зависит от того, как они сгруппированы, чтобы представить произведение в виде последовательного умножения двух сомножителей. Даже в некоторых алгебрах, в которых не выполняется коммутативный закон умножения $ab = ba$, умножение остается ассоциативным Примером такой алгебры является алгебра матриц; однако существуют алгебры, в которых не выполняется ассоциативный закон умножения. Их называют *неассоциативными алгебрами*. В таких алгебрах может случиться, что $(ab)c$ и $a(bc)$ различны, так что произведение abc может иметь $p_3 = 2$

различных значений в зависимости от того, умножаем ли мы произведение ab на c, или a на произведение bc. Заметим, что мы не изменяем порядок сомножителей и различие результатов связано лишь с неассоциативностью умножения. Если даны n сомножителей в заданном порядке, то мы можем различными способами расставить скобки для того, чтобы свести умножение n сомножителей к $n-1$ умножению двух множителей. Для четырех сомножителей a, b, c, d имеем следующие возможности

$$((ab)(cd)),\ (a(b(cd))),\ (((ab)c)d),\ (a((bc)d)),\ ((a(bc))d).$$

Пусть p_n — число способов расстановки скобок в произведении n сомножителей. Очевидно, что $p_1=p_2=1$, $p_3=2$ и $p_4=5$

Последний шаг преобразования произведения n сомножителей заключается в умножении произведения первых m сомножителей на произведение последних $n-m$ сомножителей. Первые m сомножителей можно перемножить p_m способами, а последние $n-m$ сомножителей p_{n-m} способами. При этом m может принимать любое из значений $1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом,

$$p_n=p_1 p_{n-1}+p_2 p_{n-2}+\ldots+p_{n-1} p_1. \tag{1}$$

При $n=4$ получаем $p_4=1\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1=5$; при $n=5$ получаем $p_5=1\cdot 5+1\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 1=14$ и т. д.

Образуем теперь производящую функцию

$$G(t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n \tag{2}$$

и заметим, что в силу равенства (1) коэффициент при t^n для $n \geqslant 2$ в разложении

$$[G(t)]^2=p_1^2 t^2+(p_2p_1+p_1p_2)\,t^3+(p_3p_1+p_2p_2+p_1p_3)\,t^4+\ldots \tag{3}$$

снова равен p_n. При этом в разложении (3) отсутствует линейный член. Таким образом, мы имеем

$$[G(t)]^2+t=G(t). \tag{4}$$

Это является квадратным уравнением для $G(t)$, и $G(t)$ — корень этого уравнения, обращающийся в нуль при $t=0$. Положим $|4t|<1$ и обозначим через $(1-4t)^{1/2}$ значение квадратного корня, имеющее положительную вещественную часть. Мы получим тогда

$$G(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4t)^{1/2}. \tag{5}$$

Разлагая правую часть равенства (5) в биномиальный ряд, находим, таким образом,

$$G(t)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\binom{1/2}{n}t^n \tag{6}$$

и, следовательно,

$$p_n=(-1)^{n-1}2^{2n-1}\binom{1/2}{n}=\frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n}, \qquad n\geqslant 2. \tag{7}$$

Это равенство дает, во первых, простую формулу для вычисления p_n, позволяющую найти значение p_n, не вычисляя предварительно $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots$; кроме того, формулу (7) можно использовать для изучения асимптотического поведения p_n при $n \to \infty$. Из 1.18 (4) находим

$$p_n = \pi^{-1/2} 2^{2n-2} n^{-3/2} [1 + O(n^{-1})], \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

Производящие функции являются также полезным средством для изучения систем многочленов. В качестве примера изучим многочлены Чебышева $T_n(x)$, определяемые производящей функцией

$$G(x, t) \equiv \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n T_n(x) t^n, \tag{9}$$

где $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Свойства многочленов $T_n(x)$ были изучены в гл. 10. Разложение функции G в геометрическую прогрессию

$$G(x, t) = (1-t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2 + 2xt)^n \tag{10}$$

показывает, что коэффициент при t^n в правой части равенства является многочленом от x, что наивысшей показатель степени x в коэффициенте при t^n в точности равен n и что коэффициент при $x^n t^n$ равен 2^n. Мы видим, таким образом, что $T_n(x)$ должно быть многочленом от x степени n и что коэффициент при x^n в $T_n(x)$ при $n \geqslant 1$ равен 2^{n-1}.

Умножая равенство (9) на $1 - 2tx + t^2$ и собирая в обеих частях равенства члены, содержащие t^n, получаем

$$\varepsilon_n T_n - 2x\,\varepsilon_{n-1} T_{n-1} + \varepsilon_{n-2} T_{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{при } n > 2, \\ -1 & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

Так как из (10) следует, что $T_0 = 1$, $T_1 = x$, то

$$T_n - 2xT_{n-1} + T_{n-2} = 0, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{11}$$

Пусть x вещественно и $-1 < x < 1$. Так как особыми точками $G(x, t)$, как функции от t, являются $t = t_1$ и $t = t_2$, где

$$t_1 = x + (x^2-1)^{1/2}, \qquad t_2 = x - (x^2-1)^{1/2}, \qquad |t_1| = |t_2| = 1, \tag{12}$$

то ряды в правой части равенства (9) абсолютно сходятся для всех комплексных значений t таких, что $|t| < 1$. Формула Коши дает поэтому

$$\varepsilon_n T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-n-1} G(x, t)\, dt, \tag{13}$$

где через C обозначен любой замкнутый простой путь, окружающий точку $t = 0$, и такой, что $|t| < 1$ вдоль этого пути C. Интегральные представления типа (13) могут быть использованы для того, чтобы получить оценку представляемых им функций. В частном случае, который мы сейчас рассматривали, интеграл в (13) можно вычислить в явном виде Мы полагаем $x = \cos\varphi$, $t_1 = e^{i\varphi}$, $t_2 = e^{-i\varphi}$, так что

$$G(x, t) = (1-t^2)(t - e^{i\varphi})^{-1} (t - e^{-i\varphi})^{-1},$$

и из (13) выводим

$$\varepsilon_n T_n(x) = (2\pi i)^{-1} \int_C t^{-n-1} (1-t^2)(t - e^{i\varphi})^{-1} (t - e^{-i\varphi})^{-1}\, dt. \tag{14}$$

Если $n \geqslant 1$, то бесконечно удаленная точка не является особой и вычисление интегралов с помощью вычетов в полюсах t_1 и t_2 дает

$$T_n(x) = \cos n\varphi = \cos(n \arccos x). \tag{15}$$

Это выражение справедливо и при $n=0$.

Если положить в (9)

$$x = \cos\varphi, \qquad t = e^{i\omega}, \tag{16}$$

то получим

$$G(x, t) = G^*(\varphi, \omega) = (1 - e^{i\omega + i\varphi})^{-1} + (1 - e^{i\omega - i\varphi})^{-1} - 1 \tag{17}$$

Таким образом, G^* является функцией, зависящей только от $\varphi+\omega$ и $\varphi-\omega$, и потому

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial\omega^2} = \frac{\partial^2 G^*}{\partial\varphi^2}. \tag{18}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{dx}{d\varphi}\frac{\partial}{\partial x} = -(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{dt}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t} = it\frac{\partial}{\partial t}. \tag{20}$$

Подставляя (19), (20) в (18), находим из (17)

$$\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}G\right] + \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t}G\right) = 0. \tag{21}$$

Разлагая левую часть (21) в степенной ряд по t, получаем, что функция $T_n(x) = y$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{22}$$

Свойства ортогональности для $T_n(x)$ могут быть получены путем вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}\,\frac{1-s^2}{1-2xs+s^2}(1-x^2)^{-1/2}\,dx. \tag{23}$$

Этот интеграл является элементарным и может быть вычислен в явной форме. Результат имеет вид $2\pi\left(\frac{1}{1-st} - \frac{1}{2}\right)$. Разлагая по степеням s и t и сравнивая коэффициенты в обеих частях при $s^m t^n$, находим

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \pi/\varepsilon_n & \text{при } n = m. \end{cases} \tag{24}$$

Хотя этот вывод равенств (24) несколько трудоемок, описанный здесь метод полезно отметить, поскольку он может быть применен во многих случаях.

Доказательства формул (13), (22), (24) являются типичными примерами того, каким образом можно использовать производящую функцию, чтобы получать интегральные представления, дифференциальные уравнения или интегральные соотношения для производимых функций. Вообще, комбинации рекуррентных соотношений и дифференциальных уравнений получаются, если удается найти соотношение между функцией G и ее производными по t и x. Например, если

$$G(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n, \tag{25}$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра степени n (см. гл. 3), то из тождества

$$t\frac{\partial G}{\partial t} = (x - t)\frac{\partial G}{\partial x} \tag{26}$$

следует, что

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x), \tag{27}$$

а соотношение

$$(1 - 2tx + t^2)\frac{\partial G}{\partial x} = tG \tag{28}$$

дает

$$P'_n - 2xP'_{n-1} + P'_{n-2} = P_{n-1}. \tag{29}$$

Если исключить P'_{n-2}, применяя равенство (27) с заменой n на $n-1$, то получим

$$nP_{n-1} = P'_n - xP'_{n-1}. \tag{30}$$

Из (27) и (30) вытекает, что

$$(1 - x^2)P'_n = -nxP_n + nP_{n-1}. \tag{31}$$

Дифференцируя (31) по x и комбинируя полученный результат с равенством (27), получаем дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)P''_n - 2xP'_n + n(n+1)P_n = 0. \tag{32}$$

Во многих случаях, когда производящая функция содержит показательную функцию, можно получить разностные уравнения. Производящая функция для многочленов Бернулли $B_n(x)$ (см. гл. 1)

$$te^{xt}(e^t - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{33}$$

дает

$$t(e^t - 1)^{-1}[e^{(x+1)t} - e^{xt}] = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n(x+1) - B_n(x)]\frac{t^n}{n!}. \tag{34}$$

Так как левая часть в равенстве (34) равна te^{xt}, то

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{35}$$

Другие типы функциональных уравнений для порождаемых функций могут быть получены аналогичным образом.

Наконец, существование производящей функции для последовательности g_n чисел или функций может оказаться полезным для вычисления

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \tag{36}$$

с помощью методов суммирования Абеля или Чезаро. Если

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \tag{37}$$

и если

$$\Lambda(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n, \tag{38}$$

то

$$\Lambda(t)\, G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n, \tag{39}$$

где

$$\gamma_n=\lambda_n g_0+\lambda_{n-1} g_1+\ldots+\lambda_0 g_n. \tag{40}$$

19.3. Общие теоремы

Пусть для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ функция $g_n(x)$ является многочленом от x, имеющим в точности степень n. Если выполняется равенство

$$\frac{d}{dx} g_n(x) \equiv g_n'(x)=g_{n-1}(x), \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

то говорят, что многочлены $g_n(x)$ образуют *множество Аппеля*. В этом случае существует такой формальный степенной ряд

$$A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

что

$$A(t)\, e^{tx} \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n. \tag{2}$$

Торн (Thorne; 1945) показал: многочлены $g_n(x)$ образуют множество Аппеля тогда и только тогда, когда существует функция $\alpha(x)$, имеющая ограниченное изменение на луче $(0, \infty)$, такая, что все интегралы Стилтьеса

$$\mu_n=\int_0^{\infty} x^n d\alpha(x), \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

сходятся, $\mu_0 \neq 0$ и

$$\int_0^{\infty} g_n^{(r)}(x)\, d\alpha(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } n \neq r, \\ 1 \text{ при } n=r. \end{cases}$$

Тогда формальный степенной ряд $A(t)$ определяется так:

$$A(t) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!}\right)^{-1} \sim \left[\int_0^{\infty} e^{xt} d\alpha(x)\right]^{-1}.$$

Шеффер (Scheffer; 1945) доказал, что $\{g_n(x)\}$ является множеством Аппеля тогда и только тогда, когда существует функция $\beta(x)$, имеющая ограниченное изменение на луче $(0, \infty)$ и такая, что интегралы

$$b_n=\int_0^\infty x^n d\beta(x), \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

сходятся, $b_0 \neq 0$ и

$$g_n(x)=\int_0^\infty \frac{(x+t)^n}{n!} d\beta(t), \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Варма (Varma; 1951) показал, что тогда при том же самом $\beta(t)$ многочлены

$$g_n^*(x)=\int_0^\infty \frac{x^n}{n!} {}_3F_2(-n, a, b; c, d; -t/x)\, d\beta(t) \tag{4}$$

также образуют множество Аппеля. Здесь ${}_3F_2$ обозначает обобщенный гипергеометрический ряд (см. 4.1). Производящая функция, связанная с g_n^*, имеет вид

$$A^*(u)e^{ux} \sim \sum_{n=0}^\infty g_n^*(x)u^n, \tag{5}$$

где

$$A^*(u) \sim \int_0^\infty {}_2F_2(a, b; c, d; ut)\, d\beta(t). \tag{6}$$

Относительно примеров множеств Аппеля см. формулы 19.7 (1), 19.7 (2), 19.7 (23) и 19.7 (34)

Разложения вида

$$\frac{e^{xt}}{f(t)}=\sum_{n=-\infty}^\infty g_n(x)t^n \tag{7}$$

были изучены Альфаном (Halphen; 1881) и Бердом (Bird; 1934). Шеффер (Scheffer, 1939) использовал понятие множества Аппеля как основу для классификации множеств многочленов Пусть для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ функция $g_n(x)$ является многочленом от x, имеющим в точности степень n. Тогда существует оператор J, однозначно определяемый функциями $g_n(x)$ и обладающий следующими свойствами

J является линейным оператором, действующим на x^n (и, следовательно, на любой многочлен от x) Пусть $y \equiv y(x)$ является любым многочленом от x, и $J[y]$ обозначает многочлен, в который переходит y при отображении J. Пусть J таково, что при $n=1, 2, 3, \ldots$ многочлен $J[x^n]$ имеет в точности степень $n-1$ и что $J[x^0]$ есть нуль. Можно показать, что тогда для любого y имеет место равенство

$$J[y]=\sum_{m=1}^\infty L_m(x)y^{(m)}(x), \tag{8}$$

где $y^{(m)}$ обозначает m-ю производную от y и где

$$L_m(x)=l_{m,0}+l_{m,1}x+\ldots+l_{m,m-1}x^{m-1} \tag{9}$$

является многочленом по x степени $\leqslant m-1$ таким, что

$$\lambda_m = ml_{1,0} + m(m-1)\,l_{2,1} + \ldots + m!\,l_{m,m-1} \neq 0, \qquad m=1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Но $L_m(x)$ (и, следовательно, J) однозначно определяются условием

$$J[g_n] = g_{n-1}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Пусть k — наибольшая из степеней многочленов $L_m(x)$. (Если степени L_m не ограничены в совокупности, то полагаем $k=\infty$.) Тогда говорят, что множество многочленов $g_n(x)$ имеет *А-тип* k. Аппелевы множества являются частным случаем множеств нулевого A-типа. Для них

$$L_m(x) = c_m, \qquad c_1 \neq 0, \qquad m=1, 2, 3, \ldots,$$

и c_m — постоянные. Если сопоставить с J формальный степенной ряд

$$J(t) \sim c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots,$$

то можно определить другой формальный степенной ряд $H(t)$ формулой

$$J[H(t)] = t. \tag{12}$$

Тогда все множества $g_n(x)$, удовлетворяющие условию (11), могут быть построены следующим образом. Мы выбираем любое множество постоянных a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, где $a_0 \neq 0$, полагаем

$$A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

и

$$A(t)\, e^{xH(t)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n. \tag{13}$$

Мейкснер (Meixner; 1934) нашел все ортогональные множества $g_n(x)$, определяемые производящей функцией такого типа (см. п. 19.12).

Случай, где

$$(1-t)^{\beta}\, \Phi(t) \exp\left(\frac{x}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n \tag{14}$$

и $\Phi(t)$ регулярно при $|t| \leqslant 1$, был изучен Райтом (Wright; 1932), который получил результаты об асимптотическом поведении $g_n(x)$ при $n \to \infty$.

Хафф (Huff; 1947), а также Хафф и Рейнвилл (Huff and Rainville; 1952) доказали: если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \tag{15}$$

и

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \tag{16}$$

то

$$\varphi(t)\, f(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n \tag{17}$$

определяет множество $g_n(x)$, имеющее A-тип k, тогда и только тогда, когда

$$f(z)={}_0F_k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k; \sigma z), \tag{18}$$

где ${}_0F_k$ обозначает обобщенный гипергеометрический ряд (см. гл. 4), и $\beta_1, \ldots, \beta_k$, σ — произвольные постоянные. Относительно многочисленных других результатов о производящих функциях типа (17) см. Huff (1947), Brenke (1945). Рейнвилл (Rainville; 1947, не опубликовано) заметил, что в частном случае, когда функция $\varphi(t)$ в (16) равна $\exp t$, функции $g_n(x)$ в (17) удовлетворяют соотношению

$$(1-t)^{-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n a_n}{n!}\left(\frac{xt}{1-t}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(c)_n g_n(x)\, t^n. \tag{19}$$

Относительно приложений см. 19.10 (15) и 19.10 (16).

Рейнвилл (Rainville; 1945) доказал: если

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!} \tag{20}$$

и

$$G(x, t)=e^t H(xt)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{21}$$

то

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k x^k, \tag{22}$$

$$xg_n'(x)=n\,[g_n(x)-g_{n-1}(x)], \quad n\geqslant 1, \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g_k(x)=(-1)^n a_n x^n, \tag{24}$$

$$g_n(xy)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k(1-y)^{n-k}g_k(x). \tag{25}$$

Фазенмайер (Fasenmyer; 1947) доказала: если

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \tag{26}$$

то

$$\frac{1}{1-t}H\left[\frac{-4tx}{(1-t)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n, \tag{27}$$

где

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+1)_k a_k}{(1/2)_k\, k!}x^k. \tag{28}$$

В случае, когда $H(x)$ является обобщенным гипергеометрическим рядом ${}_pF_q$ (см. гл. 4), каждое g_n является обобщенным гипергеометрическим рядом ${}_{p+2}F_{q+2}$.

Вильямс (K. P. Williams; 1924) изучил производящие функции вида $\Phi(2xt+t^2)$, где $\Phi(z)$—степенной ряд от z, и использовал свои результаты для характеристики многочленов Лежандра и Эрмита.

Тресделл (Truesdell; 1948) изучил производящие функции $F(z, \alpha)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, \alpha) = F(z, \alpha+1). \tag{29}$$

В частности, Тресделл доказал следующую теорему.

Если функция $F(z+t, \alpha)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням t, то

$$F(z+t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha+n) \frac{t^n}{n!}. \tag{30}$$

Пусть для фиксированного значения α и $z=z_0$ имеем

$$\sup_{n \to \infty} \frac{F(z_0, \alpha+n+1)}{F(z_0, \alpha+n)} = \frac{1}{k}, \qquad k \neq 0, \tag{31}$$

и пусть существует такое вещественное число $h<1$, что для некоторого значения w такого, что $|w|<k$, имеем

$$|F(z+tw, \alpha)| < e^{ht}, \qquad t > t_0. \tag{32}$$

Тогда для того же самого значения w имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha+n) w^n = \int_0^{\infty} e^{-t} F(z+tw, \alpha)\, dt \tag{33}$$

при условии, что ряд равномерно сходится по z в области, включающей фиксированную точку z_0.

Другие теоремы Тресделла связаны с рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha-n) w^n. \tag{34}$$

Различные приложения будут перечислены в таблице производящих функций, в частности, см. пп. 19.9 и 19.10.

19.4. Символические соотношения

В старых работах, для того, чтобы кратко выразить некоторые тождества, а также для сокращенных доказательств, часто применялись символические соотношения. В современной литературе применение символических соотношений стало реже. Мы укажем два примера.

Введем, следуя Рейнвиллу (Rainville; 1946), следующие обозначения. Мы будем писать $\doteq$ вместо $=$, если в правой части равенства надо заменить показатели индексами в любом символе, таком как B, P, H, L, не имеющем смысла без индекса. Таким образом, если B_n обозначают числа Бернулли, которые можно определить с помощью производящей функции

$$t(e^t-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

то будем писать

$$B_n(x) \doteq (x+B)^n \tag{2}$$

для того, чтобы указать, что многочлены Бернулли $B_n(x)$ из 19.2 (33) можно явно выразить в виде

$$B_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r x^{n-r}. \tag{3}$$

Символический вывод этого выражения проводится следующим образом. Производящие функции (1) и 19.2 (33) имеют символическую форму

$$t(e^t-1)^{-1} \doteq e^{Bt}, \qquad te^{xt}(e^t-1)^{-1} \doteq e^{B(x)t}.$$

Путем сравнения получаем

$$e^{B(x)t} \doteq e^{xt}e^{Bt} \doteq e^{(x+B)t},$$

и (2) вытекает из сравнения коэффициентов при t^n.

Аналогично, если $L_n(x)$ является многочленом Лагерра степени n

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!\, k!\, (n-k)!} x^k \tag{4}$$

и если P_k — многочлен Лежандра степени k, то соотношение

$$2^n L_n[P(x)] \doteq [L(x-1)+L(x+1)]^n \tag{5}$$

означает, что

$$2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!\, k!\, (n-k)!} P_k(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(x-1)\, L_{n-k}(x+1). \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) были доказаны Рейнвиллом (Rainville; 1946), который дал много других подобных соотношений между многочленами Эрмита, Лежандра и Лагерра. Доказательство использует производящие функции.

В исчислении конечных разностей часто употребляют символ E для *оператора сдвига*, который увеличивает индексы (или другие отмеченные переменные) на единицу. Таким образом,

$$Eg_n = g_{n+1}, \qquad E^k g_n = g_{n+k}, \qquad k, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Применяя этот оператор, можно записать производящую функцию для многочленов Эрмита

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{8}$$

в виде

$$e^{2xt-t^2} = e^{Et} H_0(x). \tag{9}$$

Определенный выше оператор E действует на (дискретные) переменные n. Фридман (Friedman; 1952) распространил его определение так, что он действует также на переменные x. Пусть дана любая функция от x. Разложим ее в ряд по многочленам Эрмита и применим E к многочленам Эрмита. Таким образом, если

$$f(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + \ldots, \tag{10}$$

то определяем

$$Ef(x) = a_0 H_1(x) + a_1 H_2(x) + \ldots \tag{11}$$

Все другие переменные (s, t, y, ...) не изменяются при действии оператора E и, следовательно, перестановочны с E. Умножение на переменную x определяет оператор, действующий на любую функцию $f(x)$. Из рекуррентных формул

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \tag{12}$$

получаем

$$xH_n(x)=\frac{1}{2}H_{n+1}(x)+nH_{n-1}(x).$$

Следовательно, умножение на x отображает функцию $f(x)$ в (10) на

$$xf(x)=a_1H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}\right]H_n(x). \tag{13}$$

Из (11) и (13) получаем

$$xEf(x)-Exf(x)=f(x). \tag{14}$$

Соотношения вида (14) между двумя операторами играют роль в квантовой теории. Равенство (14) показывает, что E не коммутирует с x. Однако мы можем умножить любое выражение, содержащее E, на величины, не содержащие x, и сложить. Например, из

$$e^{iEt}H_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}i^nH_n(x)\frac{t^n}{n!}=e^{2ixt+t^2} \tag{15}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(ist-\frac{1}{4}t^2y^{-2}\right)dt=2\pi^{1/2}y\exp(-y^2s^2) \tag{16}$$

находим, путем подстановки E вместо s:

$$2y\pi^{1/2}e^{-E^2y^2}H_0(x)=2y\pi^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_{2n}(x)\frac{y^{2n}}{n!}, \tag{17}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2ixt+t^2-\frac{1}{4}t^2y^{-2}\right)dt, \tag{18}$$

$$=\frac{2\pi^{1/2}y}{(1-4y^2)^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2y^2}{1-4y^2}\right). \tag{19}$$

Сравнивая (17) и (19), получаем

$$w^{-1}\exp(-x^2y^2w^{-2})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_{2n}(x)\frac{y^{2n}}{n!}, \tag{20}$$

где $w^2=1-4y^2$.

19.5. Асимптотические представления

Производящие функции успешно применяются для определения асимптотического поведения производимых чисел (или функций) при $n \to \infty$. Если ряд

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \tag{1}$$

имеет конечный радиус сходимости, то функция $G(t)$ имеет одну или несколько особых точек на границе круга сходимости, и природа этих особых точек определяет поведение g_n при больших n. Если ряд (1) всюду сходится, то $G(t)$ является целой функцией и поведение $G(t)$ при больших значениях $|t|$ определяет поведение g_n при больших n.

Случай конечного радиуса сходимости ряда (1) был впервые изучен Дарбу (Darboux; 1878), а позднее—многими авторами. Метод Дарбу приводит к следующей общей теореме, сформулированной Сеге (1962, теорема 8.4).

Пусть функция $G(t)$ регулярна при $|t| < 1$, и пусть она имеет конечное число особых точек

$$e^{i\varphi_1}, \quad e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_r} \tag{2}$$

на единичной окружности $|t| = 1$. Пусть в окрестности точки $e^{i\varphi_k}$ имеем

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(k)} (1 - te^{-i\varphi_k})^{a_k + \nu b_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

где $b_k > 0$. Тогда выражение

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} c_\nu^{(k)} \binom{a_k + \nu b_k}{n} (-e^{-i\varphi_k})^n \tag{4}$$

дает асимптотическое выражение g_n в следующем смысле: если Q—любое положительное число, то взяв в (4) достаточно много членов, мы получаем приближенное выражение для g_n, причем ошибка является $O(n^{-Q})$, когда $n \to \infty$.

Любой конечный радиус сходимости R можно привести к единице путем подстановки $t = Ru$. Метод Дарбу можно применить также для случая (изолированных) логарифмических особенностей. Случай показательной особенности на окружности сходимости более сложен. Он был изучен Перроном, Фабером и Гейслером и, сравнительно недавно, Райтом (Wright; 1932, 1933, 1949), который дал ссылки на более раннюю литературу.

Метод Дарбу был с успехом использован для изучения асимптотического поведения классических ортогональных многочленов и некоторых арифметических функций. Если производящая функция является целой, то во многих случаях можно найти другой производящий ряд, имеющий конечный радиус сходимости. Многочлены Эрмита (четной степени), например, могут быть порождены либо 19.4(8), либо 19.4(20), и метод Дарбу применим ко второй производящей функции, но не применим к первой.

Случай целой производящей функции был изучен многими авторами. Среди более ранних авторов наиболее важные работы принадлежат Берису, Линделёфу и Ватсону.

Форд (Ford; 1936) дал сводку результатов и ссылки на работы, появившиеся до 1936 г., а Райт (Wright; 1948) дал ссылки на более современную литературу.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ФОРМУЛЫ.

Следующий ниже список производящих функций, разумеется, не претендует на полноту. Производящие функции приведены в порядке возрастания сложности. Выбранная нами «иерархия» функций ясна из заголовков следующих ниже функций. Каждая производящая функция указана в пункте, соответствующем наивысшей из входящих в нее функций. Мы не использовали лексикографического порядка, но были приняты следующие принципы при составлении этого списка, которые могут облегчить отыскание требуемых результатов. Функции параметров рассматриваются как более элементарные, чем подобные функции главных переменных x и t. Таким образом, $(1+t)^{\nu}$ встречается позже, чем $(1-2xt+t^2)^{-\nu}$. Произведение алгебраической функции и показательной считается более элементарной, чем показательная функция от алгебраической функции.

Почти все изложенные ниже результаты сопровождаются ссылками на литературу. Эти ссылки были выбраны так, чтобы они были наиболее доступны, и далеко не всегда означают, что соответствующая производящая функция впервые появилась в данной работе.

Мы не включили сюда производящие функции теории чисел. Относительно этих функций см. гл. 17. Производящие функции комбинаторного анализа точно так же исключены из данного списка.

19.6. Рациональные и алгебраические функции. Степени с произвольными показателями

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\,t^n; \tag{1}$$

$T_n(x)$ — многочлены Чебышева гл. 10.

$$(1-t)^{-k-1}(1-xt)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(k)}(x)\,t^n, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2}$$

$$g_n^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\binom{k-1}{n-m}x^m. \tag{3}$$

Здесь $g_n^{(k)}(x)$ является k-м чезаровским средним первых n частичных сумм ряда $1+x+x^2+\ldots$ (Относительно приложений см. Obrechkoff, 1934.)

$$(1-2tx+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n; \tag{4}$$

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра (см. гл. 10).

$$\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)\,t^n; \tag{5}$$

U_{n+1} — многочлены Чебышева второго рода (см. гл. 10).

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)\,t^n; \tag{6}$$

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра, см. гл. 10.

$$(1-3xt+t^3)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n. \tag{7}$$

Рекуррентные соотношения и линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка для g_n было выведено Пинчерле (Pincherle; 1889). Многочлены, порожденные функцией $(1-3xt+t^3)^{-\nu}$, были изучены Гумбертом (Humbert; 1920).

$$\frac{1+t}{(1-t)^k(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n, \tag{8}$$

$$g_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(k+n-\nu+1)(2\nu+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-\nu+1)}P_\nu(x), \tag{9}$$

где $P_\nu(x)$ — многочлен Лежандра степени ν и $\operatorname{Re} k>-1$. Приложения к задаче суммирования рядов Лапласа и Лежандра были даны Гроноуллом (Gronwall; 1914).

$$t^{-1}(1-t)^{-k}\left[\frac{1+t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}-1\right]=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n, \tag{10}$$

$$g_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(k+n-\nu)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-\nu)}[P_\nu(x)+P_{\nu+1}(x)]. \tag{11}$$

Относительно приложений см. Gronwall (1914); ср. также с (8).

$$(1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,t^n; \tag{12}$$

C_n^ν — многочлены Гегенбауэра. См. гл. 10, п. 11.1.2, а также Gegenbauer (1874).

Пусть $w=(1-2xt+t^2)^{1/2}$, тогда

$$\frac{2^\alpha}{w(1-xt+w)^\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha)_n}{(2\alpha+1)_n}C_n^{1/2+\alpha}(x)\,t^n, \tag{13}$$

где C_n^ν — многочлены Гегенбауэра из гл. 10; ср. также (12) и Szegö (1962).

$$(1-3xt+3yt^2-t^3)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} H_n^\nu(x,y)\,t^n. \tag{14}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных для H_n^ν были выведены Девизмом (Devisme; 1932, 1933).

$$[1-x^m+(x-t)^m]^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} {}_mc_n^\nu(x)\,t^n. \tag{15}$$

Относительно изучения ${}_m\epsilon_n^{\nu}$ см. Devisme (1936).

$$(1-t)^{b-c}(1-t+xt)^{-b}=\sum_{n=0}^{\infty}(c)_n F(-n,\ b;\ c;\ x)\frac{t^n}{n!}. \tag{16}$$

Обозначения те же, что в п. 2.1. Относительно приложений (к физике) см. Gordon (1929).

Пусть $w=(1-2xt+t^2)^{1/2}$, тогда

$$2^{\alpha+\beta}w^{-1}(1-t+w)^{-\alpha}(1+t+w)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,t^n, \tag{17}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_n}{n!}F\left(\alpha+\beta+n+1,\ -n;\ \alpha+1;\ \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)t^n, \tag{18}$$

где $P_n^{(\alpha,\,\beta)}$ — многочлены Якоби (ср. гл. 10 и п. 2.5.1, где дано доказательство).

$$(1+t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}t^n, \tag{19}$$

где

$$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\ \dots\ (x-n+1)}{n!},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots, \tag{20}$$

$$\binom{x}{0}=1 \tag{21}$$

являются *биномиальными многочленами* от x. Равенство (19) является хорошо известной биномиальной теоремой, которая была строго доказана Абелем в 1826 г.

$$\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n, \tag{22}$$

$$g_n(x)=\frac{(x)_n}{n!}F(-n,\ -x;\ 1-n-x;\ -1), \tag{23}$$

$$=2x\,F(1-n,\ 1-x;\ 2;\ 2),\quad n\geqslant 1. \tag{24}$$

Обозначения даны в п. 2.1. Ссылки: Mittag-Leffler (1891), Bateman (1940). Производящая функция имеет обобщенный аппелев тип 19.3(13), с $A(t)=1$,

$$\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x(1-t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n. \tag{25}$$

Явное выражение для $g_n(x)$ может быть получено из (22) и 19.2(37) — 19.2(40), где $\Lambda(t)=(1-t)^{-1}$. Относительно приложений см. Pidduck (1910, 1912).

$$(2xt)^{-q}\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x-1\right]^q=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n \tag{26}$$

(см. Mittag-Leffler (1891)).

$$[1+\beta t(a_0+a_1t+\ldots+a_kt^k)]^{x/\beta}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n. \tag{27}$$

Функции $g_n(x)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$g_n(x+y)=\sum_{r=0}^{n} g_r(x)\,g_{n-r}(y), \tag{28}$$

и любое решение уравнения (28), имеющее вид многочлена, может быть получено из производящей функции вида

$$\left(1+\beta t\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m\right)^{x/\beta}$$

при соответствующем выборе постоянных β, a_0, a_1, ... Ссылки: René Lagrange (1928). Производящая функция является одной из функций обобщенного аппелева типа 19.3(13).

Пусть $G=G(x, t)$ является корнем уравнения

$$1+xG-(1+G)^x=xt^2, \tag{29}$$

обладающим разложением

$$G(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(x)\,t^n}{n!}. \tag{30}$$

Тогда

$$g_n(x)=\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial G^{n-1}}\left[\frac{1+xG-(G+1)^x}{xG^2}\right]^{-n/2}\right\}_{G=0} \tag{31}$$

и $g_1=2^{1/2}(1-x)^{-1/2}$. Функции $g_n(x)$ были использованы Берисом (Barnes; 1906) для изучения асимптотического поведения (при $z\to\infty$) ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+nx)}{n!}z^n.$$

19.7. Показательные функции

$$(t-1)^m e^{xt}=\sum_{n=-m}^{\infty} x^m L_m^n(x)\,m!\,\frac{t^{n+m}}{(m+n)!}. \tag{1}$$

Здесь L_m^n — многочлены Лагерра из гл. 10. См. также Truesdell (1948).

$$\exp(2xt-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{2}$$

H_n — многочлены Эрмита из гл. 10.

$$(1-t)^{-1}\exp\frac{x^2t(t-2)}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}(x)\,t^n, \tag{3}$$

$$g_{2n}(x)=\frac{e^{x^2}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x^2}) \tag{4}$$

(см. Humbert, 1923); функции $g_{2n}(x)$ обладают свойством

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^s g_{2n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}x^s g_{2n}(x)\,dx = 0,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}x(t-t^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n; \tag{5}$$

функции $J_n(x)$—функции Бесселя первого рода (см. гл. 7).

$$\exp\left\{\frac{x[u+t-(ut)^{-1}]}{3}\right\} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} J_{n,m}(x)\,u^m t^n, \tag{6}$$

$$J_{n,m}(x) = \frac{x^{n+m}}{3^{n+m}\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}\,{}_0F_2(m+1,\ n+1;\ -x^3/27), \tag{7}$$

где ${}_0F_2$—обобщенный гипергеометрический ряд (ср. п. 4.1). Для отрицательных значений n, m правая часть равенства (7) понимается как

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{n+m}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-x/3)^{3l}}{\Gamma(l+1+n)\Gamma(l+1+m)}. \tag{8}$$

Относительно доказательств и приложений к решению уравнения

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+U=0 \tag{9}$$

см. Humbert (1930).

$$\exp\left[(t^2-uv)\,x-\frac{t^3}{3}\right] = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} t^l u^m v^n P_{l,m,n}(x); \tag{10}$$

см. Devisme (1932, 1933).

$$(1+4t^2)^{-3/2}(1+2xt+4t^2)\exp\left(\frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{l!}, \tag{11}$$

где $l=\frac{n}{2}$, если n четно, и $l=\frac{n-1}{2}$, если n нечетно. H_n—многочлены Эрмита из гл. 10; см. также (2) и Сеге (1962).

$$(1-t^2)^{-1/2}\exp\left(\frac{2x^2t}{1+t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}[H_n(x)]^2\frac{(t/2)^n}{n!}; \tag{12}$$

H_n—многочлены Эрмита из (2) (см. также гл. 10 и Чебышев (1889)).

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\,t^n. \tag{13}$$

Функции $L_n^\alpha(x)$ — обобщенные многочлены Лагерра из гл. 10. См. также Сеге (1962).

$$\exp\left[x\frac{(1-t^2)^{1/2}-1}{t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n, \tag{14}$$

$$g_n(x)=\left(-\frac{x}{2}\right)^n (n-1)!\sum_{l=0}^{[n/2]}\frac{x^{-2l}}{l!\,(n-l)!\,(n-2l-1)!}, \tag{15}$$

$$=(n!)^{-1}(-x/2)^n\,{}_3F_0(-n,\ 1/2-n/2,\ 1-n/2;\ -4x^{-2}), \tag{16}$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, если n четно и $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$, если n нечетно, а ${}_3F_0$ — обобщенный гипергеометрический ряд; обозначения те же, что в п. 4.1. Относительно приложений к задаче теории электрона см. Mott (1932).

$$(1-2xt)^{-1/2}\exp\{x^{-1}[1-(1-2xt)^{1/2}]\}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2F_0(-n,\ n+1;\ -x/2)\frac{t^n}{n!}; \tag{17}$$

здесь ${}_2F_0$ — многочлены Бесселя. См. (18), (19) и Krall и Frink (1949), Burchnall (1951).

$$(1-2xt)^{-1/2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2xt)^{1/2}\right]^{2-a}\exp\left\{\frac{1}{2}bx^{-1}[1-(1-2tx)^{1/2}]\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\ a,\ b)\frac{t^n}{n!}. \tag{18}$$

Кролл и Френк (Krall and Frink; 1949) называют функции $y_n(x,\ a,\ b)$ *обобщенными многочленами Бесселя*; эти функции обладают свойствами ортогональности на единичном круге в комплексной x-плоскости. Относительно доказательства (18) см. Burchnall (1951). Явное выражение имеет вид

$$y_n(x,\ a,\ b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k+a-2}{k}k!\left(\frac{x}{b}\right)^k=$$

$$={}_2F_0(-n,\ a-1+n;\ -x/b), \tag{19}$$

$$y_n(bx,\ a,\ b)=x^{1-a/2}\exp\left(\frac{1}{2x}\right)W_{1-a/2,\ n-1/2+a/2}(x^{-1}). \tag{20}$$

Обозначения: ${}_2F_0$ — как в гл. 4; W — как в гл. 6; см. также п. 4.7 и (17).

$$(1-t)^{\beta}\exp\left(\frac{x}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n, \tag{21}$$

$$g_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m-\beta)_n}{n!\,m!}x^m=e^x L_n^{-\beta-1}(-x); \tag{22}$$

см. (13) и пп. 2.1 и 6.9.2 относительно обозначений. Функции $L_n^{-\beta-1}$ — обобщенные многочлены Лагерра. Ссылка: Wright (1932).

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{23}$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{24}$$

$B_n(x)$ — *многочлены Бернулли* и $E_n(x)$ — *многочлены Эйлера* степени n. Пусть

$$B_n=B_n(0), \tag{25}$$

$$E_n=2^nE_n(1/2); \tag{26}$$

B_n — *числа Бернулли* (см. гл. 1) и E_n — *числа Эйлера*.

$$B_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_\nu x^{n-\nu}, \tag{27}$$

$$E_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}2^{-\nu}E_\nu(x-1/2)^{n-\nu}. \tag{28}$$

Относительно отчета об обширной литературе и многочисленных результатах и приложениях см. Fort (1948) и Nörlund (1924). Относительно обобщений ср. (30), (34)—(37) и (57).

$$\frac{e^{tx}-1}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n. \tag{29}$$

Функции $g_n(x)$ тесно связаны с многочленами Бернулли (см. (23), а также Hermite (1878) и Berger (1888) относительно обобщений и приложений).

$$\frac{t^le^{xt}}{(e^t-1)^l}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(l)}(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{30}$$

$B_n^{(l)}(x)$ называются *обобщенными многочленами Бернулли*. Ср. (23) и см. также Nörlund (1920, 1924). Частными случаями являются:

$$B_n^{(n)}(x)=\int_x^{x+1}(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\,ds, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} &B_n^{(l+1)}(x)=\frac{n!}{l!}\frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}}(x-1)(x-2)\ldots(x-n), \quad l\geqslant n,\\ &B_n^{(l)}(x+y)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x(x-1)\ldots(x-r+1)\,B_{n-r}^{(l-r)}(y), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$2te^{tx}\left(\frac{p+t}{p-t}e^{2t}-1\right)^{-1}=\frac{p}{p+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{(p)}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{33}$$

Если $p \neq 0$, то $\omega_n^{(p)}$ — многочлен от x степени n. Если $p \to \infty$, то

$$\omega_n^{(p)}(x) \to 2^n B_n(x/2),$$

где $B_n(x)$ — многочлен Бернулли (см. 19.4 (3) и (23)). Функции $\omega_n^{(p)}(x)$ можно разложить в ряды по функциям $\sin \mu_l x$, $\cos \mu_l x$, $l=1, 2, 3, \ldots$, где μ_l есть l-й вещественный корень уравнения

$$\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0.$$

Относительно этого и других результатов, а также приложений к задаче теплопроводности см. Н. С. Кошляков (1935).

$$\frac{(e^{\omega_1 t}-1)\ldots(e^{\omega_l t}-1)}{\omega_1\ldots\omega_l t^l} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-l)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_l) \frac{t^n}{n!}, \tag{34}$$

$$2^{-l}(e^{\omega_1 t}+1)\ldots(e^{\omega_l t}+1) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(-l)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_l) \frac{t^n}{n!}, \tag{35}$$

$$\frac{\omega_1\ldots\omega_l t^l}{(e^{\omega_1 t}-1)\ldots(e^{\omega_l t}-1)} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(l)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_l) \frac{t^n}{n!}, \tag{36}$$

$$\frac{2^l e^x}{(e^{\omega_1 t}+1)\ldots(e^{\omega_l t}+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(l)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_l) \frac{t^n}{n!}, \quad l=1, 2, 3, \ldots \tag{37}$$

Функции $B_n^{(-l)}$, $B_n^{(l)}$ — *многочлены Бернулли порядка* $-l$ и l соответственно. Функции $E_n^{(-l)}$, $E_n^{(l)}$ — соответствующие *многочлены Эйлера высшего порядка*. Относительно результатов и приложений этих многочленов см. Nörlund (1920, 1924).

$$(e^{xt}-1)\, t^{\nu} (e^t-1)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\nu, n+1}(x)\, t^n, \tag{38}$$

$$(e^{xt}-1)\, t^{-\nu-2} (e^t-1)^{\nu+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{\nu, n+1}(x)\, t^n. \tag{39}$$

Имшенецкий (1884) изучил функции $\Phi_{\nu, n+1}$, $\Psi_{\nu, n+1}$ при $\nu=0, 1, 2, \ldots$ Они тесно связаны с обобщенными многочленами Бернулли и Эйлера и с (34)—(37); см. также Nörlund (1924).

$$\exp[x(1+t-e^t)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{40}$$

Малер (Mahler; 1930) ввел функции $g_n(x)$ для изучения нулей неполной гамма-функции (см. гл. 9, а также (41), (46)).

$$\exp[\alpha t + x(1-e^t)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{41}$$

Функции $g_n^{(\alpha)}$ были изучены Тоскано (Toscano; 1950). Связанные с ними функции были также изучены Хилбом (Hilb; 1922), ср. (46), и Малером

(Mahler; 1930), ср. (40). Тоскано (Toscano; 1950) дает ссылки на более раннюю литературу, где функции $g_n^{(\alpha)}$ были введены в связи с математическими задачами, возникающими в страховом деле. Одним из результатов Тоскано (Toscano; 1950) является

$$g_n^{(\alpha+1)}(x)-g_n^{(\alpha)}(x)=-\frac{d}{dx}g_n^{(\alpha)}(x). \tag{42}$$

Равенство (42) связывает функцию $g_n^{(\alpha)}$ с изученным Труcделлом (Truesdell; 1948) функциональным уравнением. Функции $g_n^{(\alpha)}(x)$ являются многочленами степени n как по x, так и по α.

$$g_n^{(\alpha)}(x)=x^{-\alpha}e^{x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^{\alpha}e^{-x}. \tag{43}$$

Если Δ_α—разностный оператор, определяемый формулой

$$\Delta_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha), \tag{44}$$

то

$$g_n^{(\alpha)}(x)=[\exp(-x\Delta_\alpha)]\,\alpha^n=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}x^m\Delta_\alpha^m\alpha^n. \tag{45}$$

Тоскано дал разложение для $g_n^{(\alpha)}(x)$ в ряды по многочленам Лагерра L^β (см. гл. 10) и доказал следующее интегральное соотношение:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha/2}J_\alpha[2(xu)^{1/2}]\,g_n^{(\beta)}(x)\,dx=(-1)^n u^{\alpha/2}e^{-u}g_n^{(\alpha-\beta+1)}(u).$$

Соотношение

$$e^x g_n^{(\alpha)}(-x)=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha+m)^n\frac{x^m}{m!}$$

было установлено Уиттекером и Ватсоном (1963; гл. 15, задача 48).

$$\exp(e^t-tx)\int_t^\infty\exp(sx-e^s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n. \tag{46}$$

Функции $g_n(x)$ были использованы Хилбом (Hilb; 1922) для того, чтобы построить решение функционального уравнения

$$u(x+1)-xu(x)=h(x), \tag{47}$$

где $h(x)$—заданная функция. Хилб показал, что при некоторых условиях на $h(x)$ решением уравнения (47) является

$$\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,h^{(n)}(x)=u(x). \tag{48}$$

Здесь $h^{(0)}\equiv h(x)$ и $h^{(n)}$ есть n-я производная от $h(x)$.

$$e^{-t}(1+a^{-1}t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n/2}(n!)^{-1/2}p_n(x)\,t^n; \tag{49}$$

$p_n(x)$ — многочлены Пуассона — Шарлье из гл. 10; см. также Сеге (1962).

$$(1-t)^{-x}e^{tx} = \exp[x(2t+t^2/2+t^3/3+\ldots)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n; \tag{50}$$

$g_n(x)$ — множество многочленов обобщенного аппелева типа 19.3 (13). В обозначениях п. 2.1

$$g_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{x^{n-l}(x)_l}{(n-l)!\, l!} = \frac{x^n}{n!}\, {}_2F_0(-n,\ x;\ -x^{-1}). \tag{51}$$

Сильвестр (Sylvester; 1879) изучил многочлены $g_n(x)$ и показал, что числа $g_n(1/4)$ можно использовать для подсчета количества различных членов в определителе кососимметрической матрицы порядка $2n$. Аналогично $g_n(^1/_8)$ полезно при отыскании числа различных членов в определителе порядка $4n$ матрицы, кососимметрической относительно обеих диагоналей.

$$(1+t)^{-x}e^{x\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)} = \exp[x(-t^3/3+t^4/4-\ldots)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n; \tag{52}$$

$g_n(x)$ — обобщенное аппелево множество типа 19.3 (13), которое связано с многочленами Эрмита (см. гл. 10). Относительно применений к задаче об асимптотическом поведении многочленов Эрмита см. Veen (1931).

$$(1-t^2)^{-c/2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x e^{-2xt} =$$
$$= (1-t^2)^{-c/2}\exp[x(t^2/2+t^3/3+\ldots)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n. \tag{53}$$

Функции $g_n(x)$ образуют обобщенное аппелево множество многочленов типа 19.3(13). Они были введены Трикоми (Tricomi; 1949) для изучения асимптотического поведения многочленов Лагерра (см. гл. 10). Основным рекуррентным соотношением является

$$(n+1)\, g_{n+1} = (n+c-1)\, g_{n-1} + 2xg_{n-2}, \tag{54}$$

$$e^{-x}(1+xt)^{1/t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(x)\, t^n. \tag{55}$$

Функции $A_n(x)$ иногда называют многочленами Аппеля. Они связаны с частным случаем многочленов $g_n(x)$, определенных в 19.3(13). Это можно усмотреть, если заметить, что

$$e^{-x}(1+xt)^{1/t} = \exp\{x[s^{-1}\ln(1+s)-1]\},\quad s = xt.$$

Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1} + x^2A_{n-2} + \ldots,\quad A_n(x) = x^{n+1}\sum_{m=1}^{n} P_m x^{m-1},\\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} P_m = e^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Числа P_m применяются при вычислении теоретико-числовых функций (см. Appell; 1880).

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^{(x)}}{n!}t^n; \tag{57}$$

$B_n^{(x)}$ обобщают числа Бернулли (см. гл. 1 и ср. с (25)); $B_n^{(x)}$ — многочлены от x степени n, которые являются частным случаем многочленов Р. Лагранжа (R. Lagrange, 1928) (см. 19.6 (27)). Относительно других производящих функций см. 19.8 (6); теория и приложения даны в статьях Норлунд (Norlund; 1920, 1924). Путем небольшого изменения (см. (58)) из $B_n^{(x)}$ получаются многочлены Стирлинга.

$$\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^{-x-1}=1+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\,t^{n+1}; \tag{58}$$

$\psi_n(x)$ — *многочлены Стирлинга*. Они связаны с *числами Стирлинга* $C_n^{(r)}$ и $\mathfrak{C}_n^{(r)}$ соотношениями

$$C_{n+1}^{(r)}=\frac{(n+1)!}{(n-r)!}\psi_{r-1}(n), \qquad r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{59}$$

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{(r)}=\frac{(-1)^{r+1}(n+r)!}{(n-1)!}\psi_{r-1}(-n-1). \tag{60}$$

Здесь ψ_0 по определению равно $\frac{1}{2}$ и числа Стирлинга определяются независимым образом формулами:

$$(t)_t=\sum_{r=0}^{n-1}C_n^{(r)}t^{n-r}, \qquad C_n^{(0)}=1, \tag{61}$$

$$\frac{1}{(t)_n}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,\mathfrak{C}_n^{(r)}}{t^{n+r}}, \qquad \mathfrak{C}_n^{(0)}=1, \tag{62}$$

$$t^n=-\sum_{r=0}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-r+1}^{(r)}(-t)_r. \tag{63}$$

Определение $(t)_n$ такое же, как в п. 2.1. Ссылки: Nielsen (1906); Nörlund (1924). См. также (57) и 19.8 (7).

$$(1-t)^{-1/2}\exp\left\{x\left[(1-t)^{-1/2}-1\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\,t^n, \tag{64}$$

$$g_n(x)=(n!)^{-1}xe^{-x}\left[\frac{d}{d(x^2)}\right]^n(x^{2n-1}e^x), \tag{65}$$

$$(1-t)^{-3/2}\exp\left\{x\left[(1-t)^{-1/2}-1\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)!\,p_n(x)\frac{t^n}{(2^n n!)^2}, \tag{66}$$

$$p_n(x)=\frac{\pi^{1/2}e^{-x}}{2x\Gamma(n+3/2)}\left[\frac{d}{d(x^2)}\right]^n(x^{2n+1}e^x). \tag{67}$$

Относительно приложений g_n, p_n в (65), (67) к теории гиперболических дифференциальных уравнений см. Курант и Гильберт (1951), гл. 6, § 5, п. 3.

19.8. Логарифмы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Другие элементарные функции и их интегралы

$$\frac{1-(1-t)^x}{\ln(1-t)}=\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(x)\,t^n, \tag{1}$$

$$g_{n+1}(x)=(n!)^{-1}\int_0^x u(1-u)\ldots(n-1-u)\,du. \tag{2}$$

См. Appell (1929), Jordan (1929) и ср. с 19.6 (19) и 19.10 (14). Приложения к вычислению $\Sigma n^{-\lambda}$.

$$[-\ln(1-t)]^{\kappa}(1-t)^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\kappa)}(x)\frac{t^n}{n!},\quad \kappa=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{3}$$

Асимптотическое поведение $A_n^{(\kappa)}$ при $n\to\infty$ было изучено Наруми (Narumi; 1929). Здесь $A_n^{(\kappa)}(x)$ — коэффициент при $t^{\kappa}/\kappa!$ разложения $\dfrac{\Gamma(n+t+x)}{\Gamma(n+t)}$ по степеням t. Они имеют приложения к доказательству теорем о функциях, регулярных внутри единичного круга $|z|<1$ и имеющих единственную особую точку фиксированного положения ($z=1$) и типа на $|z|=1$.

$$[1-x\ln(1+t)]^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n, \tag{4}$$

$$g_n(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}\binom{\lambda x}{n}e^{-\lambda}\lambda^{\nu-1}d\lambda,\qquad \operatorname{Re}\nu>0. \tag{5}$$

Здесь $\binom{\lambda x}{n}$ — биномиальный многочлен 19.6 (19) степени n от λx (см. Lerch, 1905).

$$[t^{-1}\ln(1+t)]^x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^{(x+n)}}{x+n}\,\frac{t^n}{n!}, \tag{6}$$

где $B_n^{(x)}$ определено в 19.7 (57); см. Nörlund (1920, 1924).

$$[-t^{-1}\ln(1-t)]^x=1+xt\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x+n)\,t^n; \tag{7}$$

ψ_n — многочлены Стирлинга; см. 19.7 (58) и Nielsen (1906).

$$\frac{kte^{xt}}{\sin kt}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x,\ k)\,t^n. \tag{8}$$

Пусть $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, если n четно, и $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$, если n нечетно. Пусть постоянные b_{2n} определены формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}t^{2n} = \frac{t}{\operatorname{ch} t}. \tag{9}$$

Тогда

$$g_n(x,\ k) = \sum_{m=0}^{[n/2]} b_{2m}\frac{k^{2m}x^{n-2m}}{(n-2m)!}. \tag{10}$$

Относительно этого результата и приложений к задаче о приближении функции с заданными средними значениями самой функции и ее производных см. Léaute (1881). Аппель (Appell, 1897) показал, что при $-k < x < k$ имеем

$$g_{2m}(x,\ k) = 2(-1)^m k^{2m}\pi^{-2m}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-2m}\cos(l\pi x/k),\ m > 0,$$

$$g_{2m+1}(x,\ k) = 2(-1)^m k^{2m+1}\pi^{-2m-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-2m-1}\sin(l\pi x/k).$$

Функции g_n связаны с многочленами Бернулли из 19.7 (23):

$$g_n(x,\ k) = \frac{(2k)^n}{n!}B_n\left(\frac{x+k}{2k}\right).$$

Разложение

$$\frac{\operatorname{sh} xt}{\operatorname{sh} t} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n \tag{11}$$

можно свести к 19.7 (23) (многочлены Бернулли). Приложения к двуточечным разложениям аналитических функций см. Whittaker (1933).

$$g_n(x) = \frac{2^n}{(n+1)!}\left[B_n\left(\frac{1+x}{2}\right) - B_n\left(\frac{1-x}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\operatorname{ch} xt}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n. \tag{12}$$

Функции g_n связаны с многочленами Эйлера [см. 19.7 (24), а также Whittaker (1933)].

$$\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-1/2}\cos(x^2-2xt)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} J_{n-1/2}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{13}$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-1/2}\sin(x^2-2xt)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} J_{1/2-n}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{14}$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν (относительно обозначений см. гл. 7). Ссылки. Glaisher (1873).

$$(\cos t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\, t^n, \tag{15}$$

$$(t^{-1} \sin t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x)\, t^n. \tag{16}$$

Относительно приложений к теории чисел Бернулли и других свойств функций c_n, s_n см. Nielsen (1914) и ср. с Nörlund (1920, 1924) и 19.7 (57).

$$\exp(x \operatorname{arctg} t) = \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^{-\frac{1}{2} ix}. \tag{17}$$

См. 19.6 (22).

$$\exp(x \arcsin t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n, \tag{18}$$

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \tag{19}$$

$$g_{2k}(x) = \frac{1}{(2k)!}\, x^2 (x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots[x^2+(2k-2)^2], \tag{20}$$

$$g_{2k+1}(x) = \frac{1}{(2k+1)!}\, x(x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots[x^2+(2k-1)^2]. \tag{21}$$

Это — обобщенное аппелево множество типа 19.3 (13) с $A(t) \equiv 1$. Явная форма для $g_n(x)$ может быть получена, если положить $\sin\varphi = t$ и продифференцировать (18) по φ.

$$\exp\left[\int_1^t s^{-1}(1+s)^x (1-s)^{-x}\, ds\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n; \tag{22}$$

см. Mittag-Leffler (1901) и ср. с 19.6 (22).

$$\exp\left\{m \int_0^t \left[\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^x - 1\right] \frac{ds}{s}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^m(x)\, t^n; \tag{23}$$

см. Mittag-Leffler (1901).

$$e^x \int_{1-t}^{1} e^{-x/u} u^{1/2}\, du = -t \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n; \tag{24}$$

см. Rogowski (1932).

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1+tx^l) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n, \qquad |x| < 1, \tag{25}$$

$$g_n(x) = x^{\frac{1}{2}(n+1)n} \prod_{l=1}^{n} (1-x^l)^{-1}. \tag{26}$$

Относительно результатов и приложений к теории вероятностей см. Oettinger (1867).

19.9. Функции Бесселя. Вырожденные гипергеометрические функции и их частные случаи (функции параболического цилиндра и др.)

В этом пункте будут применяться обозначения гл 7 для функций Бесселя и гл. 6 и 8 для вырожденных гипергеометрических функций и их частных случаев.

$$J_0\{[(x^2-2xt)]^{1/2}\}=\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{1}$$

см. гл. 7 и Truesdell (1948).

$$(x+t)^{-\alpha/2}J_\alpha[2(x+t)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty} x^{-\alpha/2-n/2}J_{\alpha+n}(x)\frac{(-t)^n}{n!}; \tag{2}$$

см. Truesdell (1948).

$$(x+t)^{\alpha/2}J_\alpha[2(x+t)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha/2-n/2}J_{\alpha-n}(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{3}$$

см. Truesdell (1948).

$$e^{xt}J_0[t(1-x^2)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{4}$$

$$e^tI_0(tx)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)^{n/2}P_n[(1-x^2)^{-1/2}]\frac{t^n}{n!}, \tag{5}$$

$$e^tJ_0[2(tx)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{6}$$

$$I_0[2t(x-1)^{1/2}]\,I_0[2t(x+1)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-2}P_n(x)t^n; \tag{7}$$

P_n, L_n—многочлены Лежандра и Лагерра (см. гл 10). Ссылки и приложения: для (4), (5), (6) Rainville (1945); для (7) Bateman (1905).

$$e^t{}_0F_1(1+\alpha;\ -xt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^\alpha(x)}{(1+\alpha)_n}t^n; \tag{8}$$

L_n^α—обобщенные многочлены Лагерра из гл. 10; см. также Сеге (1962).

$$e^{xt}t^{-\alpha/2}J_\alpha(2t^{1/2})=\sum_{n=0}^{\infty} x^nL_n^\alpha(x^{-1})\frac{t^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}; \tag{9}$$

L_n^α—многочлены Лагерра из гл. 10; см. также Truesdell (1948), стр. 2.

$$e^{xt}{}_0F_1\left[1+\alpha;\ \frac{1}{4}t^2(x^2-1)\right]=e^{xt}\left[\frac{1}{2}t^2(1-x^2)\right]^{-\alpha}J_\alpha[t(1-x^2)^{1/2}]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(2\alpha+1)_n]^{-1}C_n^{\alpha+1/2}(x)\,t^n, \tag{10}$$

где C_n^ν — многочлены Гегенбауэра из гл. 10; см. Truesdell (1948).

$$e^t (xt)^{-\alpha/2} J_\alpha [2 (xt)^{1/2}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha (x)\, t^n}{\Gamma (n+\alpha+1)}; \tag{11}$$

L_n^α — многочлены Лагерра из гл. 10; см. Сеге (1962).

$$\begin{aligned} {}_0F_1 \left[1+\alpha;\ \frac{1}{2} t (x-1)\right] {}_0F_1 \left[1+\beta;\ \frac{1}{2} t (x+1)\right] = \\ = \Gamma (\alpha+1)\, \Gamma (\beta+1) \left(\frac{1}{2} t\right)^{-\alpha/2-\beta/2} (1-x)^{-\alpha/2} (1+x)^{-\beta/2} \times \\ \times J_\nu \left\{[2t (1-x)]^{1/2}\right\} I_\nu \left\{[2t (x+1)]^{1/2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)} (x)\, t^n}{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}; \end{aligned} \tag{12}$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}$ — многочлены Якоби. См. гл. 10, 7 и 2 относительно обозначений и Bateman (1905) относительно доказательства. В случае $\alpha=\beta$ правая часть равенства содержит многочлены Гегенбауэра; при $\alpha=\beta=0$ функции $P_n^{(\alpha, \beta)}$ сводятся к многочленам Лежандра (ср гл 10), и (12) переходит в (7).

$$D_m (x+t) \exp \left[\frac{1}{4} (2xt+t^2)\right] = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} D_n (x)\, t^{m-n}; \tag{13}$$

D_m $(m=0, 1, 2, \ldots)$ — функции параболического цилиндра (ср. п. 8.2 и Prasad (1926)).

$$(1-t)^{-p} {}_1F_1 \left(p;\ 1+\alpha;\ -\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n L_n^\alpha (x)}{(1+\alpha)_n} t^n, \tag{14}$$

p — произвольно, а L_n^α — обобщенные многочлены Лагерра из гл. 10. Ссылки: Chaundy (1943).

$$\begin{aligned} (1+4t^2)^{-c} {}_1F_1 \left(c;\ \frac{1}{2};\ \frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right) + \frac{32ct^3x^3}{3 (1+4t^2)^{c+2}} {}_1F_1 \left(c+1;\ \frac{5}{2};\ \frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right) + \\ + \frac{2xt (1+4t^2-8ct^2)}{(1+4t^2)^{c+1}} {}_1F_1 \left(c;\ \frac{3}{2};\ \frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_l}{(2l)!} 2^{2l} H_n (x)\, t^n, \end{aligned} \tag{15}$$

где $l=\frac{n}{2}$, если n четно, и $l=\frac{n-1}{2}$, если n нечетно. H_n — многочлены Эрмита из гл. 10. Ссылки: Brafman (1951).

$$e^{-t} {}_1F_1 (-b,\ a+1;\ x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b+1)_n}{(a+1)_n} {}_1F_1 (-b,\ a+n+1;\ x) \frac{(-t)^n}{n!}; \tag{16}$$

см Truesdell (1948).

19.10. Гамма-функция. Функции Лежандра и гипергеометрическая функция Гаусса. Обобщенные гипергеометрические функции

В этом пункте мы используем следующие обозначения: для Γ и $(a)_n$ см. гл. 1; для F, ${}_2F_1$ см. гл. 2; для P_ν^μ см. гл. 3; для ${}_pF_q$ см. гл. 4.

$$\frac{\Gamma(m+x+t)}{\Gamma(m+t)}=\sum_{n=0}^{\infty} A_m^{(n)}(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{1}$$

$A_m^{(n)}$—функции, определенные в 19.8 (3); см. также Narumi (1929).

$$(1-2tx+t^2)^{-1/2-\nu/2}P_\nu^\mu\left[\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu-\mu+n}{n}P_{\nu+n}^\mu(x)\,t^n, \tag{2}$$

$$(1-2xt+t^2)^{\nu/2}P_\nu^\mu\left[\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{n}P_{\nu-n}^\mu(x)(-t)^n, \tag{3}$$

$$[1-t^2-2(1-x^2)^{-1/2}xt]^{-\mu/2}P_\nu^\mu\,[x+t(1-x^2)^{1/2}]=\sum_{n=0}^{\infty}P_\nu^{\mu+n}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{4}$$

$$[1-2t(1-x^2)^{1/2}]^{-1/2-\nu/2}P_\nu\left\{\frac{x}{[1-2t(1-x^2)^{1/2}]^{1/2}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{\nu+n}^n(x)\frac{t^n}{n!}; \tag{5}$$

см. Truesdell (1948).

$$R^{-1}P_\nu\left(\frac{1+t}{R}\right)P_\nu\left(\frac{1-t}{R}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos x)\,F_\nu(-2n-1)\,t^n, \tag{6}$$

где

$$R=(1-2t\cos x+t^2)^{1/2},\qquad F_\nu(z)={}_3F_2(-\nu,\ \nu+1,\ 1/2+z/2;\ 1,\ 1;\ 1). \tag{7}$$

Здесь P_ν—функции Лежандра, P_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$—многочлены Лежандра (см. гл. 3 и 10), ${}_3F_2$—обобщенный гипергеометрический ряд (см. п. 4.1.1). Ссылки: Bateman (1934), Rice (1940)

$$\frac{1}{1-t}\,{}_2F_1[\zeta,\ 1/2;\ p;\ -4xt(1-t)^{-2}]=\sum_{n=0}^{\infty}{}_3F_2(-n,\ n+1,\ \zeta;\ 1,\ p;\ x)\,t^n; \tag{8}$$

${}_2F_1$, ${}_3F_2$—гипергеометрические и обобщенные гипергеометрические ряды. Ссылки: Rice (1940), Fasenmyer (1947); см также 19.3 (27), 19.3 (28) и п 4.7.

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1[1/2+\alpha/2+\beta/2,\ 1+\alpha/2+\beta/2;\ 1+\alpha;\ 2t(x-1)(1-t)^{-2}]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,t^n, \tag{9}$$

$$(1+t)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1[1/2+\alpha/2+\beta/2,\ 1+\alpha/2+\beta/2;\ 1+\beta;\ 2t(x+1)(1+t)^{-2}]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,t^n; \tag{10}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби; ${}_2F_1$ — гипергеометрический ряд. Относительно обозначений см. гл. 2 и 10, а относительно доказательства — Watson (1939).

$$(1-xt)^{-p}\,{}_2F_1[p/2,\ p/2+1/2;\ 1+\alpha;\ t^2(x^2-1)(1-xt)^{-2}]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_n}{(2\alpha+1)_n}C_n^{\alpha+1/2}(x)\,t^n, \qquad (11)$$

где C_n^{ν} — многочлены Гегенбауэра из гл. 10. Ссылки: Brafman (1951). Параметр p — произвольный. При $\alpha=0$ C_n^{ν} переходят в многочлены Лежандра.

$${}_2F_1(p,1+\alpha+\beta-p;\ 1+\alpha;\ 1/2-t/2-w/2)\,{}_2F_1(p,1+\alpha+\beta-p;\ 1+\beta;\ 1/2+t/2-w/2)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_n(1+\alpha+\beta-p)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,t^n, \qquad (12)$$

где $w=(1-2xt+t^2)^{1/2}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ — многочлены Якоби из гл. 10 и p — произвольный параметр. Ссылки: Brafman (1951). Частные случаи $\alpha=\beta$ и $\alpha=\beta=0$ приводят к функциям, являющимся кратными ультрасферических многочленов или многочленов Гегенбауэра и многочленов Лежандра (см. гл. 10).

$$[F(a,\ b;\ c;\ -t)]^2 e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,{}_4F_2\left[\begin{matrix}2a,\ 2b,\ a+b,\ -n; \\ c,\ 2c-1;\end{matrix}\ x^{-1}\right]t^n; \qquad (13)$$

F — гипергеометрический ряд, как в п. 2.1; ${}_4F_2$ — обобщенный гипергеометрический ряд, как в п. 4.1. Ссылки: Humbert (1924).

$$\int_0^{-x} F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ t)\,d\alpha=\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(x)\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n}t^n; \qquad (14)$$

F — гипергеометрический ряд. См. п. 2.1 относительно обозначений и Appell (1929) относительно приложений; g_{n+1} являются функциями из 19.8 (2). Пусть

$$e^t\,{}_1F_2(a;\ b_1,\ b_2;\ -x^2t^2)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\frac{t^n}{n!}. \qquad (15)$$

Тогда для любого c имеем

$$(1-t)^{-c}\,{}_3F_2[c/2,\ c/2+1/2,\ a;\ 1/2,\ b_1,\ b_2;\ -x^2t^2(1-t)^{-2}]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n}{n!}g_n(x)\,t^n; \qquad (16)$$

см. Rainville (1947). Ср. с 19.3 (19).

$$e^{xt}(1-x^2)^{m/2}\,{}_2F_3\left[m+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ \frac{m}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{m}{2}+1;\ -\frac{1}{4}t^2(1-x^2)\right]=$$
$$=\frac{\pi 2^{-m}m!}{\Gamma(m+1/2)\,\Gamma(m+1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}P_{m+n}^{m}(x)\frac{t^n}{(m+n)!}; \qquad (17)$$

P_n^m—функции Лежандра из гл. 3; см. Truesdell (1948).

$$(1-t)^{a-1}{}_2F_0[a/2-1/2; a/2, 4xtb^{-1}(1-t)^{-2}] \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, a, b)\,(a-1)_n \frac{t^n}{n!}; \qquad (18)$$

$y_n(x, a, b)$—обобщенные многочлены Бесселя. Ср. 19.7 (18) (Rainville, не опубликовано). Равенство (18) является частным случаем равенства (23).

$$(1-2xt)^{-1}{}_2F_0[1, 1/2; -4t^2(1-2xt)^{-2}] \sim \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,t^n; \qquad (19)$$

H_n—многочлены Эрмита из гл. 10. Ссылки: Rainville (1947).

$$(1-2xt)^{-a}{}_2F_0[a/2, a/2+1/2; -4t^2(1-2tx)^{-2}] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} H_n(x)\,t^n; \qquad (20)$$

H_n—многочлены Эрмита из гл. 10. Ссылки: Brafman (1951).

$$\frac{1}{1-t}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p; \\ b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\; -\frac{4xt}{(1-t)^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-n, n+1, a_1, \ldots, a_p; \\ 1/2, 1, b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\; x\right] t^n. \qquad (21)$$

Обозначения, как в п. 4.1.1 См. также 19.3 (27), 19.3 (28) и Fasenmyer (1947).

$$(1-t)^{-\lambda}{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q;\end{matrix}\; -\frac{xt}{1-t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!}\,{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q;\end{matrix}\; x\right] t^n, \qquad (22)$$

Chaundy (1943).

$$(1-4xt)^{-1/2}2^{c-1}[1+(1-4xt)^{1/2}]^{1-c}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix}\; \frac{1-(1-4xt)^{1/2}}{2x}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{q+2}F_p\left[\begin{matrix}-n, c+n, 1-\beta_1-n, \ldots, 1-\beta_q-n; \\ 1-\alpha_1-n, \ldots, 1-\alpha_p-n;\end{matrix}\; (-1)^{p+q+1}x\right] \lambda_n t^n, \qquad (23)$$

где

$$\lambda_n = \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n \ldots (\beta_q)_n}\,\frac{1}{n!}, \qquad (24)$$

Rainville (1947).

$$e^t\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix}\; -xt\right] = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix}\; x\right] \frac{t^n}{n!}, \qquad (25)$$

Rainville (1947).

$$F_4\left[\gamma,\ \delta;\ 1+\alpha,\ 1+\beta;\ \frac{1}{2}t(x-1),\ \frac{1}{2}t(x+1)\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n(\delta)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,t^n, \tag{26}$$

где F_4—гипергеометрическая функция Аппеля от двух переменных (см. гл. 5); $P_n^{(\alpha,\beta)}$—многочлены Якоби из гл. 5.

19.11. Производящие функции для многих переменных

$$(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x,y)\,t^n; \tag{1}$$

$g_n(x, y)$—так называемые *многочлены Лагранжа:*

$$g_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha)_r(\beta)_{n-r}}{r!\,(n-r)!}x^ry^{n-r}. \tag{2}$$

Приложения к статистике и общие ссылки: Lagrange (1868).

$$(1+t)^{\lambda}(1+xt)^{\mu}(1+yt)^{\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}F_1(-n,\ -\mu,\ -\nu,\ \lambda-n+1;\ x,\ y)\,t^n, \tag{3}$$

где F_1—гипергеометрический ряд Аппеля от двух переменных (см. гл. 5). Ссылки: Devisme (1932, 1933).

$$\exp\left(xt-yt^2+\frac{t^3}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x,y)\,t^n. \tag{4}$$

Явное (но сложное) выражение для многочленов U_n было дано Девизмом (Devisme; 1932, 1933), который указал также приложения к уравнению

$$\frac{\partial^3U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3U}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0,$$

и к родственным дифференциальным уравнениям в частных производных.

$$\exp\left\{i\left[x(1+t^2)^{1/2}-yt\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x,y)\,t^n, \tag{5}$$

$$g_n(x,y)=(-iy)^n\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{\left(\dfrac{x}{2y^2}\right)^k H^{(1)}_{k-1/2}(x)}{\Gamma(n-2k+1)\,k!}, \tag{6}$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, если n четно, и $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$, если n нечетно, и $H^{(1)}_{k-1/2}$ — первая функция Ганкеля порядка $k-1/2$. См. Hall (1936), а относительно приложений к задачам теплопроводности см. Green (1934).

$$[(1-xt-ys)^2+(t^2+s^2)(1-x^2-y^2)]^{-1/2-\alpha}=\sum_{m,\,n=0}^{\infty} g_{m,n}(x,\,y)\,t^m s^n. \tag{7}$$

Пусть $p=1-x^2-y^2$ и $\alpha>-1/2$. Тогда

$$g_{m,n}=\frac{(-1)^{n+m}}{2^{m+n}\,m!\,n!}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2a+m+n+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+m+n+1)}\,p^{-\alpha}\,\frac{\partial^{m+n}p^{\alpha+m+n}}{\partial x^m\partial y^n}, \tag{8}$$

см. Koschmieder (1924).

Положим

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,\,y)&=ax^2+2bxy+cy^2, \quad a>0, \quad \Delta=ac-b^2>0,\\ \Delta\psi(x,\,y)&=cx^2-2bxy+ay^2, \quad \xi=ax+by, \quad \eta=bx+cy.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Многочлены, порожденные

$$\exp\left[t\xi+s\eta-\frac{1}{2}\varphi(t,\,s)\right]=\sum_{m,\,n=0}^{\infty} H_{m,n}(x,\,y)\,\frac{t^m}{m!}\,\frac{s^n}{n!}, \tag{10}$$

$$\exp\left[tx+sy-\frac{1}{2}\psi(t,\,s)\right]=\sum_{m,\,n=0}^{\infty} G_{m,n}(x,\,y)\,\frac{t^m}{m!}\,\frac{s^n}{n!}, \tag{11}$$

являются многочленами Эрмита от двух переменных. Относительно их свойств и обобщений на случай многих переменных см. Appell и Kampe de Fériet (1926). Относительно производящей функции для произведения таких многочленов см. Koschmieder (1937, 1938) и Erdélyi (1938).

Некоторые производящие функции для многих переменных. Пусть $x_1,\,\ldots,\,x_l$ — переменные, и пусть

$$G_0(t)\equiv\prod_{r=1}^{l}(1-tx_r)=\sum_{r=0}^{l}(-1)^r s_r\,t^r. \tag{12}$$

Тогда $s_0=1$, $s_1=x_1+x_2+\ldots+x_l$ и s_r является r-й элементарной симметрической функцией от переменных $x_1,\,\ldots,\,x_l$. Пусть $k=0,\,1,\,2,\,\ldots$, и пусть

$$p_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_l^k \tag{13}$$

является суммой k-х степеней переменных. Мы имеем тогда

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\ln G_0)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k t^{k-1}. \tag{14}$$

Умножая обе части равенства (14) на G_0 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях равенства, получаем рекуррентные формулы Ньютона, которые позволяют выразить p_k через s_r. Пусть y_k $(k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$

являются переменными, и пусть

$$\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{k}t^k\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}B_n t^n. \tag{15}$$

Тогда

$$B_n(y_1, \ldots, y_n)=\sum\frac{y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}\ldots y_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\;\alpha_2!\;\ldots\;\alpha_n!\;1^{\alpha_1}\,2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}}, \tag{16}$$

где сумма берется по всем неотрицательным целым числам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таким, что

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n. \tag{17}$$

Пусть теперь G_0 и s_r определены равенством (12) и p_k—равенством (13). Тогда

$$[G_0(t)]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(x_1, \ldots, x_l)\,t^n, \tag{18}$$

где

$$h_n(x_1, \ldots, x_l)=B_n(p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{19}$$

$$s_r(x_1, \ldots, x_l)=(-1)^r B_r(-p_1, -p_2, \ldots, -p_r). \tag{20}$$

Если $r > l$, то левая часть равенства (20) тождественно равна нулю. Это показывает, что правая часть дает алгебраическое соотношение между суммами степеней $x_1, \ldots, x_l$. Справедливость этих формул вытекает из того, что

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{k}t^k\right)=\exp(-\ln G_0)=\frac{1}{G_0(t)}, \tag{21}$$

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{k}t^k\right)=G_0(t). \tag{22}$$

Функции B_n применяются к теории групповых характеров. См. Littlewood (1940) для некоторых явных выражений функции B_n. При небольшом изменении определения B_n были подробно изучены Беллом (Bell; 1934).

Относительно производящих функций многих переменных см. также пп. 11.5, 11.6 и 11.8, где даны производящие функции для сферических и гиперсферических гармонических многочленов См. Appell и Kampe de Feriet (1926) относительно гармонических многочленов, изученных этими авторами.

19.12. Некоторые производящие функции, связанные с ортогональными многочленами

В этом пункте мы опишем два множества производящих функций, которые были построены, исходя из точки зрения теории ортогональных многочленов.

Пусть $g_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$—последовательность многочленов такая, что $g_n(x)$ имеет степень n, и пусть $\alpha(x)$—функция с ограниченным изменением такая, что интегралы Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, g_m(x)\, d\alpha(x)=\lambda_{n,m} \tag{1}$$

сходятся при $n, m=0, 1, 2, \ldots$ Если $\lambda_{n,m}=0$ при $n \neq m$, то функции $g_n(x)$ образуют ортогональную систему; если, кроме того, $\lambda_{n,n}=1$ при $n=0, 1, 2, \ldots$, то эта система называется ортонормальной (см. гл. 10). Если существует $\frac{d\alpha}{dx}=w(x)$, то $w(x)$ называют *весовой функцией*, ассоциированной с системой g_n. Если w равна нулю вне отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, мы будем в (1) писать интеграл от a до b и говорить, что система g_n ортонормальна на отрезке $[a, b]$. Ватсон (Watson; 1933, 1934) нашел явное выражение для билинейных производящих функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, g_n(y)\, t^n, \tag{2}$$

где g_n — ортонормальные системы, получаемые из многочленов Лежандра, Гегенбауэра, Якоби, Лагерра и Эрмита (см. гл. 10). Используя обозначения гл. 10, можно выразить результаты Ватсона следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)\, P_n(x)\, P_n(y)\, t^n =$$
$$=\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1-t^2)\, dw}{\left\{1-2t\,[xy+(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}\cos w]+t^2\right\}^{3/2}}. \tag{3}$$

Относительно явного выражения для

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, P_n(y)\, t^n \tag{4}$$

см. Watson (1933).

$$2^{2\nu-1}[\Gamma(\nu)]^2 (1-x^2)^{\nu/2}(1-y^2)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)\, n!}{\Gamma(n+2\nu)}\, C_n^{(\nu)}(x)\, C_n^{(\nu)}(y)\, t^n =$$
$$=\frac{(1-x^2)^{\nu/2}(1-y^2)^{\nu/2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\nu(1-t^2)(\sin w)^{2\nu-1}\, dw}{\left\{1-2t\,[xy+(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}\cos w]+t^2\right\}^{\nu+1}}. \tag{5}$$

Пусть

$$\theta_n=(2n+\alpha+\beta+1)\frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\, 2^{-\alpha-\beta-1}, \tag{6}$$

т. е.

$$\theta_n^{-1}=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\, dx. \tag{7}$$

Пусть

$$u=\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1-y)^{1/2}, \qquad v=\frac{1}{2}(1+x)^{1/2}(1+y)^{1/2}, \tag{8}$$

$$k=\frac{1}{2}(t^{1/2}+t^{-1/2}), \tag{9}$$

$$y=\left\{\left[\left(\frac{k}{\cos w}\right)^2-u^2-v^2\right]^2-4u^2v^2\right\}^{1/2}, \tag{10}$$

$$z_1=\left(\frac{k}{\cos w}\right)^2+u^2-v^2+y, \tag{11}$$

$$z_2=\left(\frac{k}{\cos w}\right)^2-u^2+v^2+y. \tag{12}$$

Тогда

$$[(1-x)(1-y)]^{\alpha/2}[(1+x)(1+y)]^{\beta/2}\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\, t^n=$$

$$=t^{1/2-\alpha/2-\beta/2}\frac{d}{dt}\left\{u^\alpha v^\beta k\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2k}{z_1\cos w}\right)^\alpha\left(\frac{2k}{z_2\cos w}\right)^\beta\frac{\cos[(\alpha-\beta)w]\,dw}{y\cos^2 w}\right\}, \tag{13}$$

$$\pi^{-1/2}e^{-x^2/2-y^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}H_n(x)\,H_n(y)\frac{t^n}{n!}=$$

$$=\pi^{-1/2}(1-t^2)^{-1/2}\exp\left[\frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right]. \tag{14}$$

Эта формула была выведена Мелером (Mehler; 1866); см. также Erdélyi (1938).

$$(xy)^{\alpha/2}e^{-x/2-y/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x)\,L_n^\alpha(y)\,t^n=$$

$$=t^{-\alpha/2}(1-t)^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}(x+y)\frac{1+t}{1-t}\right]I_\alpha\left[\frac{2(xy)^{1/2}}{1-t}\right], \tag{15}$$

где I_α—модифицированная функция Бесселя из гл. 7. Это—формула Хилле—Харди (см. также Миллер-Лебедева, 1907).

Мейкснер (Meixner; 1934) определил все ортогональные многочлены $g_n(x)$, обладающие производящей функцией вида

$$f(t)\exp[xu(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{16}$$

Он показал, что возможны лишь пять случаев:

1) Многочлены, выражаемые через многочлены Эрмита

$$f(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}kt^2\right),\qquad u(t)=t,\qquad \frac{d\alpha}{dx}=\exp\left(\frac{-x^2}{2k}\right). \tag{17}$$

2) Многочлены, выражаемые через (обобщенные) многочлены Лагерра

$$f(t)=(1-\lambda t)^{-k/\lambda^2}\exp\left[\frac{kt}{\lambda(\lambda t-1)}\right],\qquad u(t)=\frac{t}{1-\lambda t}, \tag{18}$$

$$\frac{d\alpha}{dx}=0,\qquad x>k/\lambda, \tag{19}$$

$$\frac{d\alpha}{dx}=(-x+k/\lambda)^{-1+k/\lambda^2}e^{x/\alpha},\qquad -\infty<x<k/\lambda. \tag{20}$$

3) Многочлены, выражаемые через многочлены Пуассона—Шарлье

$$f(t)=(1-\lambda t)^{k/\lambda^2}e^{kt/\lambda}, \tag{21}$$

$$u(t)=-\lambda^{-1}\ln(1-\lambda t). \tag{22}$$

Здесь $\alpha(x)$ постоянно, за исключением точек

$$x=x_n=\lambda^{-1}k-\lambda n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{23}$$

где $\alpha(x)$ имеет скачок, определяемый формулой

$$\alpha(x_n+0)-\alpha(x_n-0)=\frac{1}{n!}\left(\frac{k}{\lambda^2}\right)^n. \tag{24}$$

4) Гипергеометрические многочлены; дискретное переменное

$$\left.\begin{aligned} f(t)&=[(1-\mu t)^{-\mu^{-1}}(1-\lambda t)^{-\lambda^{-1}}]^{k/(\mu-\lambda)},\\ u(t)&=(\lambda-\mu)^{-1}[\ln(1-\mu t)-\ln(1-\lambda t)],\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где λ и μ вещественны и $\alpha(x)$ постоянно, за исключением точек вида

$$x=x_m=k/\lambda-(\lambda-\mu)n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{26}$$

где $\alpha(x)$ имеет скачок, определяемый формулой

$$\alpha(x_n+0)-\alpha(x_n-0)=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\binom{-k/(\lambda\mu)}{n}. \tag{27}$$

5) Гипергеометрические многочлены; непрерывное переменное; мы имеем снова равенство (25), где λ и μ комплексно сопряжены и

$$\operatorname{Im}\lambda>\operatorname{Im}\mu. \tag{28}$$

Тогда при $-\infty<x<\infty$

$$\frac{d\alpha}{dx}=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/(\mu-\lambda)}\Gamma(\omega)\,\Gamma(\varphi), \tag{29}$$

где

$$\omega=\frac{x}{\mu-\lambda}+\frac{k}{\mu(\lambda-\mu)}, \qquad \varphi=\frac{x}{\lambda-\mu}+\frac{k}{\lambda(\mu-\lambda)} \tag{30}$$

и

$$\left|\arg\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\right|<\pi. \tag{31}$$

Во всех случаях можно установить для $g_n(x)$ дифференциальные или разностные уравнения.

Относительно ссылок на другие случаи, когда производящая функция содержит ортогональные функции, ср. конец п. 19.11.

19.13. Производящие функции для некоторых непрерывных ортогональных систем

Многочлены Эрмита, Лагерра, Лежандра, Гегенбауэра и Якоби возникают при изучении некоторых линейных дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля. После умножения на весовую функцию получаемые таким образом ортогональные функции являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, имеющей в этих случаях дискретный спектр. Относительно линейных и билинейных производящих функций для таких систем см. п. 19.12.

Для других областей изменения переменных эти же дифференциальные уравнения могут иметь непрерывный спектр. Пусть $f_\nu(x)$ — соответствующая система собственных функций. Тогда интегралы

$$\int t^\nu f_\nu(x)\,d\nu, \qquad \int t^\nu f_\nu(x) f_\nu(y)\,d\nu,$$

взятые по соответствующей области значений ν, могут называться линейными и билинейными производящими функциями для $f_\nu(x)$. Это связано с первоначальным определением Лапласа производящих функций (см. п. 19.1).

В этом пункте будут даны линейные и билинейные производящие функции для функций параболического цилиндра D_ν из гл. 8, вырожденных гипергеометрических функций $M_{\varkappa,\mu}$ и $W_{\varkappa,\mu}$ из гл. 6, функций Гегенбауэра G_μ^ν и гипергеометрической функции, соответствующей многочленам Якоби (см. гл. 2 и 10).

Относительно доказательств и ссылок о приложениях непрерывных ортогональных систем к краевым задачам см. Erdélyi (1941).

$$\exp\left(-\frac{1}{4}x^2 - xt - \frac{1}{2}t^2\right) = (2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^\nu \Gamma(-\nu) D_\nu(x)\,d\nu, \tag{1}$$

$$c < 0, \quad |\arg t| < \pi/4,$$

$$(1+t^2)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{4}\frac{1-t^2}{1+t^2}(x^2+y^2) + \frac{ixyt}{1+t^2}\right] =$$

$$= \frac{(\pi/2)^{1/2}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{t^{-\nu-1}}{\sin(-\nu\pi)}\left[D_\nu(x) D_{-\nu-1}(iy) + D_\nu(-x) D_{-\nu-1}(-iy)\right] d\nu, \tag{2}$$

$$-1 < c < 0, \quad |\arg t| < \pi/2,$$

$$\Gamma(2\mu+1)(1+t)^{-2\mu-1} x^{\mu+1/2}\exp\left(\frac{x}{2}\frac{t-1}{t+1}\right) =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-1/2+\varkappa-\mu}\,\Gamma(1/2+\varkappa+\mu)\,\Gamma(1/2-\varkappa+\mu)\,M_{\varkappa,\mu}(x)\,d\varkappa, \tag{3}$$

$$|c| < 1/2 + \operatorname{Re}\mu, \quad |\arg t| < \pi,$$

$$\frac{(txy)^{1/2}}{1+t}\exp\left(-\frac{x+y}{2}\frac{1-t}{1+t}\right) J_{2\mu}\left[\frac{2(txy)^{1/2}}{1+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L t^\varkappa \frac{\Gamma(1/2-\varkappa+\mu)\,\Gamma(1/2+\varkappa+\mu)}{[\Gamma(2\mu+1)]^2} M_{\varkappa,\mu}(x)\, M_{\varkappa,\mu}(y)\,d\varkappa, \tag{4}$$

$$|\arg t| < \pi,$$

где $J_{2\mu}$ — функция Бесселя первого рода порядка 2μ (см. гл. 7), и L — путь, ведущий из $-i\infty$ в $i\infty$ и отделяющий полюсы $\Gamma(1/2-\varkappa+\mu)$ от полюсов $\Gamma(1/2+\varkappa+\mu)$.

Заменив в равенстве (4) функции $J_{2\mu}$ функцией Ганкеля $H_{2\mu}^{(1)}$ первого рода, получим

$$\frac{(txy)^{1/2}}{1+t}\exp\left(-\frac{x+y}{2}\frac{1-t}{1+t}\right) H_{2\mu}^{(1)}\left[\frac{2(txy)^{1/2}}{1+t}\right] =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_L t^\varkappa e^{i\pi(\varkappa-\mu)}\left[U(\varkappa)\, W_{\varkappa,\mu}(x)\, W_{\varkappa,\mu}(y) + \right.$$

$$\left. + U(-\varkappa)\, W_{-\varkappa,\mu}(-x)\, W_{-\varkappa,\mu}(-y)\right] d\varkappa, \tag{5}$$

где $U(\varkappa) = \Gamma(1/2-\varkappa-\mu)\,\Gamma(1/2-\varkappa+\mu)$.

Функции Гегенбауэра C_μ^ν можно определить формулой

$$C_\mu^\nu(x) = \frac{\Gamma(\mu+2\nu)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\nu)} F(\mu+2\nu, -\mu;\ \nu+1/2;\ 1/2-x/2), \tag{6}$$

где F — гипергеометрический ряд из 2.1. При $\mu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ C_μ^ν является многочленом Гегенбауэра или ультрасферическим многочленом из п. 11.1.2. Линейная производящая функция имеет вид

$$(1+2tx+x^2)^{-\nu} = -\frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^\mu \frac{C_\mu^\nu(x)}{\sin(\mu\pi)}\, d\mu, \quad -2\operatorname{Re}\nu < c < 0. \tag{7}$$

Вычисление интеграла (7) с помощью вычетов дает 11.1(16).

Наиболее важным случаем, когда в математической физике возникают функции Гегенбауэра с нецелым индексом μ, является $\mu = -1/2 + i\sigma$, σ вещественно. В этом случае $C_{\mu+l}^{1/2-l}$ входит в выражение присоединенных сферических гармоник. Нормированная форма для них дана Вейлем (Weyl; 1910), она имеет вид

$$\psi_\mu^{\pm l}(x,\ \varphi) = N^{1/2}\frac{(x^2-1)^{l/2}}{2^l l!} F(l-\mu,\ l+\mu+1;\ l+1;\ 1/2-x/2)\, e^{\pm il\varphi},$$

$$l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{8}$$

где

$$N = (-1)^l(\mu+1/2)\operatorname{ctg}(-\mu\pi)\frac{\Gamma(1+\mu+l)}{\Gamma(1+\mu-l)}. \tag{9}$$

Пусть

$$\omega = xy-(x^2-1)^{1/2}(y^2-1)^{1/2}\cos(\varphi-\theta). \tag{10}$$

Тогда

$$(t^2-1)(1+2t\omega+t^2)^{-3/2} =$$

$$= i\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{t^\mu}{\cos(\mu\pi)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_\mu^l(x,\ \varphi)\,\psi_\mu^{-l}(y,\ \theta)\, d\mu, \qquad -1<c<0. \tag{11}$$

Для обобщения многочленов Якоби мы имеем следующие результаты. Пусть

$$S = [1+2(1-2x)ut^{1/2}+u^2t]^{1/2}, \tag{12}$$

$$T = [1+2(1-2y)ut^{-1/2}+u^2t^{-1}]^{1/2}, \tag{13}$$

$$V = [1+2(1-2x)t+t^2]^{1/2}. \tag{14}$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{V}\left(\frac{V-t-1}{-2tx}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{V-t+1}{2}\right)^{\gamma-\alpha} =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(-\nu)\,\Gamma(\gamma+\nu)\, t^\nu F(-\nu,\ \alpha+\nu;\ \gamma;\ x)\, d\nu, \tag{15}$$

$$0 < -c < \operatorname{Re}\gamma$$

и

$$t^{-\alpha/2}\int_0^\infty u^{\alpha-1}\left(\frac{S-ut^{1/2}-1}{-2ux}\,\frac{T-ut^{-1/2}-1}{-2uy}\right)^{\gamma-1}\times$$
$$\times\left(\frac{S-ut^{1/2}+1}{2}\,\frac{T-ut^{-1/2}+1}{2}\right)^{\gamma-\alpha}\frac{du}{ST}=$$
$$=(2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(\nu)\,t^{\nu}F(-\nu,\ \alpha+\nu;\ \gamma;\ x)\,F(-\nu,\ \alpha+\nu;\ \gamma;\ y)\,d\nu, \qquad (16)$$
$$0<-c<\operatorname{Re}\alpha,\quad \operatorname{Re}(\alpha-\gamma)<-c<\operatorname{Re}\gamma,$$

где

$$\Phi(\nu)=\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\alpha+\nu)\,\Gamma(\gamma+\nu)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\nu). \qquad (17)$$

Если параметр ν в (7) или параметры α, γ в (15), (16) не удовлетворяют соответствующим неравенствам, то путь интегрирования надо изменить так, чтобы он отделял различные группы полюсов интегральной функции. Этот искривленный путь можно деформировать так, чтобы он совпал с прямой линией, идущей от $c-i\infty$ к $c+i\infty$. Если мы поступим так, то пересечем некоторое количество полюсов, которые внесут сумму вычетов. Наша производящая функция будет тогда суммой вычетов и интеграла и представляет собственные функции «смешанного» спектра.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

К главе 13

Appell Paul, Emile Lacour, 1922: Fonctions elliptiques et applications, Gauthier-Villars, Paris.

Bianchi Luigi, 1916: Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, 2nd edition, Spoerri, Pisa.

Burkhardt Heinrich, Georg Faber, 1920: Elliptische Funktionen 3rd edition, Gruyter, Berlin.

Burnside W. S., A. W. Panton, 1892: Theory of equations, 3rd edition, Longmans, Roberts and Green, London.

Byrd Paul F., Morris Friedman, Handbook of elliptic integrals, Springer, 1954.

Clebsch Alfred, 1865: J. f. Math. 64, 210—270.

Dixon A. C., 1894: Elliptic functions with examples, Macmillan and Co. Ltd., London.

Enriques Federigo, Oscar Chisini, 1934: Funczioni elliticheed abeliane, vol. IV, Della Teoria geometrica delle equazioni, ecc. Zanichelli, Bologna.

Fletcher Allan, J. C. P. Miller, Louis Rosenhead, 1946: An index of mathematical tables, Scientific Computing Service, London.

Fricke Robert, 1913: Elliptische Funktionen, Encyklopädie, der mathematischen Wissenschaften, vol. 2, pt. 2, p. 181—348, B. G. Teubner, Leipzig.

Fricke Robert, 1916—1922: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen I, II, B. G. Teubner, Leipzig.

Gröbner Wolfgang, Nikolaus Hofreiter, 1949: Integraltafel, Erster Teil, Unbestimmte Integrale, Springer-Verlag, Wien.

Gröbner Wolfgang, Nikolaus Hofreiter, 1950: Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale, Springer-Verlag, Wien.

Hamel Georg, 1932: S.-B. Berlin Math. Ges. 31, 17—22.

Hancock Harris, 1917: Elliptic integrals, Wiley.

Humbert Pierre, 1922: Introduction a l'étude des fonctions elliptiques, Hermann and Cie., Paris.

Kober Hermann, 1952: Dictionary of conformal representations, Dover.

König Robert, Maximilian Krafft, 1928: Elliptische Funktionen, Gruyter, Berlin.

Low A. R., 1950: Normal elliptic functions, University of Toronto press.

Magnus Wilhelm, Fritz Oberhettinger, 1949: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Meyer zur Cappellen Walther, 1950: Integraltafeln, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Milne-Thomson L. M., 1950: Jacobian elliptic function tables, Dover, New York.

Neville E. H., 1944: Jacobian Elliptic Functions, Oxford, Clarendon Press.

Oberhettinger Fritz, Wilhelm Magnus, 1949: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Springer, Berlin.

Prasad Ganesh, 1948: An introduction to the theory of elliptic functions and higher pranscendentals, University of Calcutta.

Radon Brigitte, 1950: Atti Accad. Naz. Lincei, Mem., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 2, 69—109.

Roberts W. R. Westropp, 1938: Elliptic and hyperelliptic integrals and allied theory, Cambridge University Press.

Spenceley G. W, R. M. Spenceley, 1947: Smithsonian Elliptic Functions Tables, The Smithsonian Institute Washington.

Tricomi F. G., 1935: Boll. Un. Mat. Ital. 14, 213—218 and 277—282.

Tricomi F. G., 1936: Boll. Un. Mat. Ital. 15, 102—195.

Tricomi F. G., 1937: Funzioni elliptische, Bologna, Zanichelli, 1951 (German edition, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1948: second Italian edition 1951).

Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М., 1948.

Градштейн И. С. и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4 перераб., Физматгиз, М., 1963.

Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1933.

Курант Р., Геометрическая теория функций комплексного переменного, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1934.

Уиттекер Э. и Г. Ватсон, Курс современного анализа, перев. с англ., Физматгиз, М., т. I, 1961, т. II, 1962.

Янке Е., Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го перераб. нем. изд, «Наука», М., 1964.

К главе 14

Baker H. F., 1907: Multiply periodic functions, Cambridge.

Blumenthal Otto, 1903: Math. Ann. 56, 509—548.

Blumenthal Otto, 1904: Math. Ann. 58, 497—527.

de Bruijn.Nicolaas, 1943; Over Modulaire Vormen van Meer Veranderlijken, Thesis. Free University of Amsterdam.

Burnside William, 1891: Proc. London Math. Soc. 22, 346—358.

Burnsibe William, 1892: Proc. London Math. Soc. 23, 49—88.

Copson E. T., 1935: Theory of functions of a complex variable, Oxford.

Dalzell D. P., 1932: Proc. London Math. Soc. (2) 33, 539—558.

Dalzell D. P., 1944: J. London Math. Soc. 19, 135—137.

Dalzell D. P., 1949a: Proc. London Math. Soc. (2) 51, 90—113.

Dalzell D. P., 1949b: Proc. London Math. Soc. (2) 51, 114—131.

Forsyth A. R., 1900: Theory of functions of a complex variable, second edition, Cambridge.

Fricke Robert, 1901—1921: Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol. 2, second part, B4, Leipzig.

Fricke Robert, 1916, 1922: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, 2 volumes, Leipzig.

Fricke Robert, 1926: Lehrbuch der Algebra, vol. 2, Braunschweig.

Fricke Robert, 1928: Lehrbuch der Algebra, vol. 3, Braunschweig.

Fricke Robert, Felix Klein, 1897: Vorlesunger über die Theorie der automorphen Funktionen, vol. 1, B. G. Teubner, Leipzig.

Fricke Robert, Felix Klein, 1912: Vorlesungen über die Teorie der automorphen Funktionen, vol. 2, B. G. Teubner, Leipzig.

Fubini Guido, 1908: Introduzione Nella Teoria Dei Gruppi Discontinui e Delle Funzioni Automorfe, Pisa.

Fueter Rudolf, 1924, 1927: Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplication der elliptischen Funktionen, 2 volumes, B. G. Teubner, Leipzig.

Giraud Georges, 1920: Leçons sur les fonctions automorphes, Gauthier-Villars, Paris.
Hardy G. H., 1940: Romanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work, Cambridge.
Hecke Erich, 1912: Math. Ann. 71, 1—37.
Hecke Erich, 1927: Math. Ann. 97, 210—242.
Hecke Erich, 1935: Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 13, No. 10, 16 pp.
Hecke Erich, 1937: Math. Ann. 114, 1—28, 316—351.
Hecke Erich, 1939: Monatsh. Math. Phys. 48, 75—83.
Hecke Erich, 1940a: Vierteljschr, Naturforsch. Ges. Zürich. 85, Beiblatt, 64—70.
Hecke Erich, 1940b: Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 17, No. 12, 134 pp.
Hua L. K., 1946: Ann. of Math. (2) 47, 167—191.
Hua L. K., Irving Reiner, 1949: Trans. Amer. Math. Soc. 65, 415—426.
Hurwitz Adolf, 1905: Math. Ann. 61, 325.
Klein Felix, 1884: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, B. G. Teubner, Leipzig.
Klein Felix, Robert Fricke, 1890—1892: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 2 volumes, B. G. Teubner, Leipzig.
Krazer Adolf, Wilhelm Wirtinger, 1901—1921; Enzyklopädie der Mathematischen, Wissenschaften, vol. 2, second part, B7.
Maass Hans, 1940a: Math. Ann. 117, 538—578.
Maass Hans, 1940b: S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., No.2, 26 pp.
Maass Hans, 1941: Math. Ann. 118, 65—84.
Maass Hans, 1942: Math. Ann. 118, 518—543.
Maass Hans, 1948: Math. Z. 51, 255—261.
Maass Hans, 1951: Math. Ann. 123, 125—151.
Nehari Zeev, 1947: Amer. J. Math. 69, 70—86.
Petersson Hans, 1939; Math. Ann. 116, 401—412.
Petersson Hans, 1939: Math. Ann. 117, 39—64.
Petersson Hans, 1940: Math. Ann. 117, 453—537.
Petersson Hans, 1941: Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, 22—60.
Petersson Hans, 1944: Math. Z. 49, 441—496.
Petersson Hans, 1949: Comment. Math. Helv. 22, 168—199.
Picard Émile, 1882: Acta Math. 1, 297—320.
Picard Émile, 1885: J. Math. Pures Appl. (4) 1, 87.
Poincaré Henri, 1916: Oeuvres, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris.
Rademacher Hans, 1940: Bull. Amer. Math. Soc. 46, 59—73.
Reid L. W., 1910: The elements of the theory of algebraic numbers, MacMillan.
Ritter Ernst, 1892: Math. Ann.41, 1—82.
Ritter Ernst, 1894: Math. Ann. 45, 473—554.
Ritter Ernst, 1894: Math. Ann. 46, 200—248.
Schlesinger Ludwig, 1924: Automorphe Funktionen, B. G. Teubner, Berlin and Leipzig.
Schneider Theodor, 1936: Math. Ann. 113, 1—13.
Schottky Friedrich, 1887: J. Reine Angew. Math. 101, 227—257.
Siegel C. L., 1935: Ann. of Math. 36, 527—606.
Siegel C. L., 1936: Ann. of Math. 37, 230—263.
Siegel C. L., 1937: Ann. of Math. 38, 212—291.
Siegel C. L., 1939: Math. Ann. 116, 617—657.
Siegel C. L., 1942: Ann of Math. (2) 43, 613—616.
Siegel C. L., 1943: Amer. J. Math. 65, 1—86.
Siegel C. L., 1950: Mat. Tidsskr. B, 66—70.
Stahl Hermann, 1888: Math. Ann. 34, 291—309.
Sugawara Masao, 1940a: Ann. of Math. (2) 41, 488—494.
Sugawara Masao, 1940b: Proc. Imp. Acad: Tokyo 16, 367—372.
Whittaker E. T., 1899: Philos. Trans. Roy Soc. London, Ser. A 192, 1—32

Whittaker E. T., 1902: Messenger Math. 31, 145—148.
Witt Ernst, 1941: Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, 323—337.
Zassenhaus Hans, 1941: Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, 285—288.
Zuckerman H. S., 1939: Bull. Amer. Math. Soc. 45, 917—919.
Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, перев. с нем., т. I, Гостехиздат, М., 1947.
Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1933.
Курант Р., Геометрическая теория функций комплексного переменного, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1934.
Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, М., 1950.
Риман Б., Сочинения, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1948.
Форд Р., Автоморфные функции, перев. с англ., Гостехиздат, 1936.

К главе 15

Bôcher Maxim, 1891: Über die Reihenenwicklungen der Potentialtheorie, Göttingen, B. G. Teubner.
Eisenhart L. P., 1934: Ann. Math. 35, 284—305.
Erdélyi Arthur, 1941a: Philos. Mag. (7) 31, 123—130.
Erdélyi Arthur, 1941b: Philos. Mag. (7) 32, 348—350.
Erdélyi Arthur, 1942: Duke Math. J. 9, 48—58.
Erdélyi Arthur, 1942a: Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 364—367.
Erdélyi Arthur, 1942b: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 13, 107—112.
Erdélyi Arthur, 1943: Proc. Edindurgh Math. Soc. (2) 7, 3—15.
Erdélyi Arthur, 1944: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 15, 62—69.
Erdélyi Arthur, 1948: Proc. Royal Soc., Edinburgh, Sect. A62, 247—267.
Erdélyi Arthur, 1948a: J. London Math. Soc. 23, 64—69.
Heun Karl, 1889: Math. Ann. 33, 161—179, 180—196.
Hobson E. W., 1892: Proc. London Math. Soc. 23, 231—240.
Ince E. L., 1922: Proc. Royal Soc., Edinburgh, 42, 43—53.
Ince E. L., 1932: Proc. Royal Soc., Edinburgh, 52 355—433.
Ince E. L., 1940a: Proc. Royal Soc., Edinburgh, 60, 47—63.
Ince E. L., 1940b: Proc. Royal Soc., Edinburgh, 60, 83—99.
Lagrange René, 1939: Acta Math. 71, 283—315.
Lagrange René, 1944: Bull. Soc. Math. France 72, 169—177.
Lambe C. G., 1951: Quart. J. Math., Oxford, Ser. (2) 2, 53—59.
Lambe C. G. 1952: Quart. J. Math., Oxford, Ser. (2) 3, 107—114.
Lambe C. G., D. R. Ward, 1934: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 5, 81—97.
Levinson Norman, B. Bogert, R. M. Redheffer, 1949: Quart. Appl. Math. 7, 241—262.
McCrea W. H., R. A. Newing, 1933: Proc. London Math. Soc. (2) 37, 520—534.
Moon Parry, D. E. Spencer, 1952a: J. Franklin Inst. 253, 585—600.
Moon Parry, D. E. Spencer, 1952b: J. Franklin Inst. 254, 227—242.
Moon Parry, D. E. Spencer, 1953: Proc. Amer. Math. Soc. 4, 302—307.
Perron Oskar, 1929: Die Lehre von den Kettenbrüchen, B. G. Teubner, Leipzig.
Poole E. G. C., 1929: Proc. London Math. Soc. (2) 29, 342—354.
Poole E. G. C., 1930: Proc. London Math. Soc. (2) 30, 174—186.
Poole E. G. C., 1936: Introduction to the theory of Linear differential equations, Oxford.
Snow Chester, 1952: Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 19.
Svartholm N., 1939: Math. Ann. 116, 413—421.
Wangerin Albert, 1875: Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, S. Hirzel, Leipzig.

Whittaker E. T., 1915a: Proc. Royal Society Edinburgh 35, 70—77.
Whittaker E. T., 1915b: Proc. London Math. Soc. (2) 14, 260—268.
Айнс И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, перев. с англ., Харьков, 1939.
Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, перев. с англ., ИЛ, М., 1952.
Олевский М. Н., Матем. сб. 27 (69), 1950, стр. 379—426.
Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, перев. с англ., Харьков – Киев, 1935.
Уиттекер Э. и Г. Ватсон, Курс современного анализа, перев. с англ., Физматгиз, М., т. I, 1962, т. II, 1963.

К главе 16

Abramowitz Milton, 1949: J. Math. Phys. 28, 195—199.
Bickley W. G., 1945: Mathematical tables and other aids to computation 1, 409—419.
Bickley W. G., N. W. McLachlan, 1946: Mathematical tables and other aids to computation 2, 1—11.
Blanch Gertrude, 1946: J. Math. Phys. 25, 1—20.
Bouwkamp C. J., 1941: Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door een ronde opening, Groningen-Batavia.
Bouwkamp C. J., 1947: J. Math. Phys. 26, 79—92.
Bouwkamp C. J., 1950: Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 53, 931—944.
Bouwkamp C. J., 1950a: Philips Res. Rep. 5, 87—90.
Dougall John, 1916: Proc. Edinburgh Math. Soc. 34, 176—196.
Eberlein W. F., 1948: Phys. Rev. 74, 190—191.
Erdélyi Arthur, 1936: Math. Z. 41, 653—664.
Erdélyi Arthur, 1938: Compositio Math. 5, 435—441.
Erdélyi Arthur, 1942: Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 28—33.
Erdélyi Arthur, 1942a: Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 7, 3—15.
Fisher Ernst, 1937: Philos. Mag. (7) 24, 245—256.
Hanson E. T., 1933: Philos. Trans. A232, 223—283.
Humbert Pierre, 1926: Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu (Mémorials des sciences mathematiques, Fasc. 10), Paris, Gauthier-Villars.
Ince E. L., 1923: Proc. Edinburgh Math. Soc. 41, 94—99.
Ince E. L., 1932: Proc. Royal Soc., Edinburgh 52, 355—433.
Ince E. L., 1939: Proc. Royal Soc., Edinburgh. 59, 179—183.
Langer R. E., 1934: Trans Amer. Math Soc. 36, 637—695.
Leitner A., R. D. Spence, 1950: J. Franklin Inst. 249, 299—321.
Magnus Wilhelm, 1953: Infinite determinants in the theory of Mathieu's and Hill's equations, Mathematics Research Group, Washington Square College of Arts and Science, New York University, Res. Rep., No. BR-1.
Malurkar S. L., 1935: Indian J. Phys. 9, 45—80 and 251—254.
Meixner Josef, 1944: Die Laméschen Wellenfunktionen des Drehellipsoids, ZWB Forschungsbericht, No. 1952. English translation appeared as NACA Technical Memorandum, No. 1224, April 1949.
Meixner Josef, 1947: Z. Angew. Math. Mech. 25/27, 1—2.
Meixner Josef, 1948: Z. Angew. Math. Mech. 28, 304—310.
Meixner Josef, 1949: Arch. Math. 1, 432—440.
Meixner Josef, 1949a: Math. Nachr. 3, 9—19.
Meixner Josef, 1950: Math. Nachr. 3, 193—207.
Meixner Josef, 1951: Math. Nachr. 5, 1—18.
Meixner Josef, 1951a: Math. Nachr. 5, 371—378.
Meixner Josef, Schäfke F. W., Mathieu'che Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer, 1954.
Möglich Friedrich, 1927: Ann. d. Phys. (4) 83, 609—734.

National Bureau of Standards, Computation Laboratory, 1951: Tables relating to Mathieu, functions, Columbia University Press, New York.
Poole E. G. C., 1936: Introduction to the theory of linear differential equations, Oxford.
Schäfke F. W., 1950: Math. Nachr. 4, 175—153.
Schäfke F. W., 1953: Math. Z. 58, 436—447.
Schmid H. L., 1948: Math. Nachr. 1, 377—398.
Schmid H. L., 1949: Math. Nachr. 2, 35—44.
Sieger Bruno, 1908: Ann. d. Phys. (4) 27, 626—664.
Sips Robert, 1949: Trans. Amer. Math. Soc. 66, 93—134.
Sips Robert, 1949a: Bull. Soc. Sci. Liège 18, 498—515.
Sips Robert, 1953: Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège 22, 341—387, 444—455, 530—540.
Sips Robert, 1954: Bull. Soc. Royale Sci. de Liège 23, 41—51, 90—102.
Spence R. D., The scattering of sound from prolate spheroids. Contract report, undated.
Stratton J. A., P. M. Morse, L. J. Chu, R. A. Hutner, 1941: Elliptic cylinder and spheroidal wave functions, Wiley.
Strutt M. J. O., 1935: Nieuw Arch voor Wiskunde 18, 31—55.
Strutt M. J. O., 1943: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde 52, 83—90, 97—104, 153—162, 212—222, 488—496, 584—591.
Strutt M. J. O., 1948: Proc. Royal Soc., Edinburgh, A62, 278—296.
Svartholm N., 1938: Z. Physik 111, 186—194.
Weinstein D. H., 1935: Philos. Mag. (7) 20, 288—294.
Айнс И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, перев. с англ., Харьков, 1941.
Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, перев. с англ., ИЛ, М., 1953.
Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, перев. с англ., Харьков — Киев, 1935.
Уиттекер Э. и Г. Ватсон, Курс современного анализа, перев. с англ., Физматгиз, М., т. I, 1961, т. II, 1962.
Янке Е., Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го перераб. нем. изд, «Наука», М., 1964.

К главе 17

Alder H. L., 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 54, 712—722.
Apostol T. M., 1951: Duke Math. J. 18, 517—525.
Artin Emil, 1924: Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 3, 89—108.
Artin Emil, 1931: J. Reine Angew. Math. 164, 1—11.
Artin Emil, 1932: Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 8, 292—315.
Atkinson F. V., 1939: J. London Math. Soc. 14, 175—184.
Atkinson F. V., 1941: Proc. London Math. Soc. (2) 47, 174—200.
Atkinson F. V., 1948: J. London Math Soc. 23, 128—135.
Baker H. F., 1889: Proc. London Math. Soc. 21, 30—32.
Bambah R. D., S. D. Chowla, 1947: J. London Math. Soc. 22, 140—147.
Bell E. T., 1926: Amer. Math. Monthly 33, 206—210.
Bell E. T., 1931: Bull. Amer. Math. Soc. 37, 251—253.
Bellman Richard, H. N. Shapiro, 1948: Duke Math. J. 15, 229—235.
Bellman Richard, 1950: Duke Math. J. 17, 159—168.
Blij Frederik van der, 1948: Math. Centrum Amsterdam, Rapport. ZW, 1948, 010, pp. 18.
Bohr Harald, Harald Cramér, 1922: Enzykl. Math. Wiss. IIc, 8, 815—826.
Brauer Richard, 1926: Jber. Deutsch. Math. Verein. 35, 94—96.
Brauer Richard, 1947: Amer. J. Math. 69, 243—250.
Brigham N. A., 1950: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 182—191.

Carmichael R. D., 1932: Proc. London Math. Soc. (2) 34, 1—26.
Cesáro Ernesto, 1887: Giorn. di Mat. 25, 14—19.
Chowla S. D., 1928: J. Indian Math. Soc. 17, 153—163.
Chowla S. D., 1945: Proc. Lahore Philos. Soc., 7 pages.
Chowla S. D., 1947: Proc. Nat. Inst. Sci. India 13, No. 4, 1 page.
Chowla S. D., 1949: Proc. Nat. Acad. Sci. India 35, 244—246.
Corput J. G. van der, 1919: Diss. Leiden, 128 p., Noordhoff, Groningen.
Corput J. G. van der, 1920: Math. Ann. 81, 1—20.
Darling H. B. C., 1921: Proc. London Math. Soc. (2) 19, 350—372.
Davenport Harold, 1932: J. London Math. Soc. 7, 290—298.
Davenport Harold, Hans Heilbronn, 1936: J. London Math. Soc. 11, 181—185.
Deuring Max, 1935: Algebren, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 4, Springer, Berlin.
Dickson L. E., 1919: History of the theory of numbers (3 vols.), vol. I, Washington.
Dickson L. E., 1939: History of the theory of numbers, vol. II, New York.
Eichler Martin, 1949: Ann. of Math. 50, 816—826.
Eisenstein Gotthold, 1847: J. Reine Angew. Math. 35, 368.
Eisenstein Gotthold, 1850: J. Reine Angew. Math. 39, 180—182.
Epstein Paul, 1903: Math. Ann. 56, 615—644.
Epstein Paul, 1907: Math. Ann. 63, 205—216.
Erdös Paul, Aurel Wintner, 1939: Amer. J. Math. 61, 713—721.
Estermann Theodor, 1928: Proc. London Math. Soc. (2) 29, 453—478.
Ferrar W. L., 1935: Compositio Math. 1, 344—360.
Ferrar W. L., 1937: Compositio Math 4, 394—405.
Gegenbauer Leopold, 1893: Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 102, Part 2, 951—976.
Glaisher J. W. L., 1907: Proc. London Math. Soc. (2) 5, 479—490.
Gronwall T. H., 1913: Trans. Amer. Math. Soc. 14, 113—122.
Hardy G. H., 1912: Quart J. Math. 43, 215—216.
Hardy G. H., 1918: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 4, 189—193.
Hardy G. H., 1920: Trans. Amer. Math. Soc. 21, 255—289.
Hardy G. H., 1927: Proc. Cambridge Philos. Soc. 23, 675—680.
Hardy G. H., 1940: Ramanujan, Cambridge.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1920: Nachr. Ges. Wiss., Gottingen, 33—54.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1921: Math. Z. 9, 14—27.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1922a: Acta Math. 44, 1—70.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1922b: Marh. Z. 12, 161—188.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1922c: Proc. London Math. Soc. (2) 22, 46—56.
Hardy G. H., J. E. Littlewood, 1925: Math. Z. 23, 1—37.
Hardy G. H., Srinivasa Ramanujan, 1916: Proc. London Math. Soc. (2) 16, 112—132.
Hardy G. H., Srinivasa Ramanujan, 1918: Proc. London Math. Soc. (2) 17, 75—115.
Hardy G. H., E. M. Wright, 1938, 1945: An introduction to the theory of numbers, first and second editions, Oxford.
Hasse Helmut, 1926: Jber. Deutsche Math. Verein 35, 1—55.
Hasse Helmut, 1927: Jber. Deutsche Math. Verein 36, 233—311.
Hasse Helmut, 1930: Jber. Deutsche Math. Verein Ergänzunngsband 6, 22—34.
Hasse Helmut, 1933: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 253—262.
Hecke Erich, 1938: Dirichlet Series, Institute for Advanced Study, Princeton.
Hecke Erich, 1944: Math. Ann. 119, 226—287.
Herglotz Gustav, 1905: Math. Ann. 61, 551—560.
Heilbronn Hans, 1937: asta Arith. 2, 212—213.
Hölder Otto, 1936: Prace Mat.-Fiz. 43, 13—23.
Husimi Kôdi, 1938: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 20, 912—925.

Ingham A. E., 1937: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 8, 255—266.
Ingham A. E., 1940: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 11, 291—292.
Jacobsthal Ernst, 1907: J. Reine Angew. Math. 132, 238—245.
Jarník Vojtěch, 1926: Math. Z. 24, 500—518.
Jordan Camille, 1870: Traité des Substitutions, Gauthier-Villars, Paris.
Kac Marc E. R. van Kampen, Aurel Wintner, 1940: Amer. J. Math. 62, 107—114, 613—626.
Kienast Alfred, 1926: Proc. London Math. Soc. (2) 25, 45—52.
Kloosterman H. D., 1926: Acta Math. 49, 407—464.
Knopp Konrad, Issai Schur, 1925: Math. Z. 24, 559—574.
Landau Edmund, 1909: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (2 vols), B. G. Teubner, Leipzig.
Landau Edmund, 1915: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 209—243.
Landau Edmund, 1927: Vorlesungen über Zahlentheorie (3 vols.), S. Hirzel, Leipzig.
Lehmer D. H., 1931: Amer. J. Math. 53, 843—845.
Lehmer D. H., 1936: J. London Math. Soc. 11, 114—118.
Lehmer D. H., 1937: J. London Math. Soc. 12, 171—176.
Lehmer D. H., 1938: Trans. Amer. Math. Soc. 43, 271—295.
Lehmer D. H., 1946: Bull. Amer. Math. Soc. 52, 538—544.
Lehmer Emma, 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 55, 62.
MacMahon P. A., 1915—1916: Combinatory Analysis (2 vols.), Cambridge.
MacMahon P. A., 1926: Proc. London Math. Soc. (2) 25, 469—483.
Maass Hans, 1949: S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., No. 1, 42 pp.
Mills W. H., 1947: Bull. Amer. Math. Soc. 53, 604, 1196.
Minkowski Herman, 1911: Gesammelte Abhandlungen, vol. 1, 118—119, 133—134. B. G. Teubner, Leipzig.
Mordell L. J., 1917: Quart. J. Math. 48, 93—104.
Mordell L. J., 1919a: Trans. Cambridge Philos. Soc. 22, 361—372.
Mordell L. J., 1919b: Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 117—124.
Mordell L. J., 1922: Proc. London Math. Soc., 408—416.
Mordell L. J., 1931: Proc. London Math. Soc. (2) 32, 501—556.
Niven Ivan, 1940: Amer. J. Math. 62, 343—364.
Niven Ivan, 1951: Proc. Amer. Math. Soc. 2, 753
Oppenheim Alexander, 1926: Proc. London Math. Soc. (2) 26, 295—350.
Page Arthur, 1935: Proc. London Math. Soc. (2) 39, 116—141.
Petersson Hans, 1948: Acta Math. 80, 191—221.
Rademacher Hans, 1937a: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 78—84.
Rademacher Hans, 1937b: Proc. London Math. Soc. (2) 43, 241—254.
Rademacher Hans, 1940: Bull. Amer. Math. Soc. 46, 59—73.
Rademacher Hans, 1943: Ann. of Math. 44, 416—422.
Rademacher Hans, H. S. Zuckerman, 1939: Ann. of Math. (2) 40, 473—489.
Ramanujan Srinivasa, 1915: Proc. London Math. Soc. (2) 14, 347—409.
Ramanujan Srinivasa, 1916: Trans. Cambridge Philos. Soc. 22, 159—184.
Ramanujan Srinivasa, 1918: Trans. Cambridge Philos. Soc. 22, No. 13, 259—276 (collected papers pp. 179—199).
Ramanujan Srinivasa, 1919: Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 207—210.
Ramanujan Srinivasa, 1921: Math. Z. 9, 147—153.
Ramanujan Srinivasa, 1927: Collected mathematical papers, Cambridge.
Rankin R. A., 1939: Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 351—372.
Rogers L. J., Srinivasa Ramanujan, 1919: Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 211—216.
Rosser J. B., 1949: Bull. Amer. Math. Soc. 55, 906—913.
Salié Hans, 1931: Math. Z. 34, 91—109.
Schmidt F. K., 1931: Math. Z. 33, 1—32.
Schoenberg I. J., 1937: Trans. Amer. Math. Soc. 39, 315—330.

Schrutka Lothar Freiherr von, 1911: J. Reine Angew. Math. **140**, 252—265.
Schur Issai, 1926: S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 488—495.
Selberg Atle, 1942: Skr. Norske Vid. Akad. Oslo **1**, No. 10, 1—59.
Selberg Atle, 1946: Arch. Math. Naturvid. **B48**, No. 5.
Sengupta H. M., 1948: Math. Student **15**, 9—10.
Shapiro H. N., 1950: Ann. of Math. **52**, 217—230.
Siegel C. L., 1923: Math. Ann. **88**, 184—210.
Siegel C. L., 1931: Quel. Gesch. Math. **B2**, 45—80.
Siegel C. L., 1935: Acta Arith. **1**, 83—86.
Siegel C. L., 1935a: Ann. of Math. (2) **36**, 527—606.
Siegel C. L., 1936: Ann. of Math. (2) **37**, 230—263.
Siegel C. L., 1937: Ann. of Math. (2) **38**, 212—291.
Siegel C. L., 1941: Amer. J. Math. **63**, 658—680.
Siegel C. L., 1943: Ann. of Math. (2) **44**, 143—172.
Smith H. J. S., 1867: Proc. Roy. Soc. London **16**, 207 (Collected papers **1**, 1894, p. 521).
Stanley G. K., 1927: J. London Math. Soc. **2**, 91—96.
Stanley G. K., 1928: J. London Math. Soc. **3**, 232—237.
Titchmarsh E. C., 1931: Proc. London Math. Soc. (2) **32**, 488—500.
Titchmarsh E. C., 1935: Proc. Roy. London **A151**, 234—256.
Titchmarsh E. C., 1936: Proc. Roy. Soc. London **A157**, 261—264.
Titchmarsh E. C., 1938: Quart. J. Math., Oxford, Ser. **9**, 216—220.
Tricomi Francesco, 1928: Boll. Un. Mat. Ital. **7**, 243—245.
Vaidyanathaswamy R., 1930: Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 762—772.
Vaidyanathaswamy R., 1931: Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 579—662.
Voronoi Georges, 1904: Ann. Ec. Norm. (3) **21**, 207—268, 459—534.
Walfisz A., 1938: Trans. Inst. Math., Tbilissi, **5**, 145—152.
Watson G. H., 1935: Math. Z. **39**, 712—731.
Watson G. H., 1938: J. Reine Angew. Math. **179**, 97—128.
Weil André, 1948: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **34**, No. 5, 204—207.
Whiteman A. L., 1945: Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 373—377.
Whiteman A. L., 1949: Duke Math. J. **16**, 619—626.
Whiteman A. L., 1952: Amer. J. Math. **74**, 89—99.
Wigert S., 1917: Acta Math. **41**, 197—218.
Wilton J. R., 1929: Proc. Cambridge Philos. Soc. **25**, 121—129.
Wintner Aurel, 1941: Amer. J. Math. **63**, 619—627.
Wintner Aurel, 1942: Amer. J. Math **64**, 106—114.
Wintner Aurel, 1946: Duke Math. J. **13**, 185—193.
Wright E. M., 1931: Quart. J. Math., Oxford, Ser. **2**, 177—189.
Wright E. M, 1931a: Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 117—141.
Виноградов И. М., 1939: Известия АН СССР, серия матем., 371—382.
Виноградов И. М., 1946: ДАН СССР **51**, 491—492.
Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1933.
Ингам А. Е., Распределение простых чисел, перев. с англ., Гостехиздат, М., 1936.
Курант Р., Геометрическая теория функций комплексного переменного, перев. с нем., Гостехиздат, М., 1934.
Титчмарш Е., Дзета-функция Римана, ИЛ, М., 1947.
Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, М., 1953.

К главе 18

Agarval R. P., 1950: Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1, **64**, 164—168.
Agarval R. P., 1951: Bull. Calcutta Math. Soc. **43**, 153—167.
Agarval R. P., 1953: C. R. Acad. Sci., Paris, **236**, 2031—2032.

Agarval R. P., 1953a: Bull. Calcutta Math. Soc. 45, 69—73.
Aitken A. C., 1939: Determinants and matrices, Oliver and Boyd, Edinburgh and London.
Barnes E. W., 1906: Philos. Trans. Royal Soc. A206, 249—297.
Barrucand Pierre, 1951: C. R. Acad. Sci., Paris, 232, 1058—1060.
Barrucand P. A., Serge Colombo, 1950: C. R. Acad. Sci., Paris, 230, 1335—1337.
Bruwier Laurent, 1949: Bull. Soc. Roy. Sci., Liège, 18, 72—82.
Bruwier Laurent, 1949a: Bull Soc Roy. Sci., Liège, 18, 169—183.
Bruwier Laurent, 1949b: Mathesis 58, 216—222.
Buhl Adolphe, 1925: Séries analytique, Sommabilité (Mem. Sci. Math. Fasc. 7), Gauthier-Villars, Paris.
Colombo Serge, 1943: Bull. Sci. Math. (2) 67, 104—108.
Colombo Serge, 1943a: C. R. Acad. Sci., Paris, 216, 368—369.
Colombo Serge, 1948: C. R. Acad. Sci., Paris, 226, 1235—1236.
Colombo Serge, 1950: Ann. Télécomm. 5, 347—364.
Colombo Serge, 1952: C. R. Acad. Sci., Paris, 235, 857—858, 928—929.
Colombo Serge, 1953: Bull. Sci. Math. (2) 77, 89—104.
Copson E. T., 1935: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford.
Doetsch Gustav, 1937: Math. Z. 42, 263—286.
Ford W. B., 1936: The asymptotic developments of functions defined by Maclourin series, Univ. of Michigan.
Grammel Richard, 1948: Arch. Math. 1, 47—51.
Grammel Richard, 1948a: Ing.-Arch. 16, 188—200.
Grammel Richard, 1950: Ing.-Arch. 18, 250—254.
Hardy G. H., 1940: Ramanujan, Cambridge.
Humbert Pierre, 1944: C. R. Acad. Sci., Paris, 218, 99—100.
Humbert Pierre, 1950: C. R. Acad. Sci., Paris, 230, 504—505.
Humdert Pierre, 1953: C. R. Acad. Sci., Paris, 236, 1467—1468.
Humbert Pierre, R. P. Agarwal, 1953: Bull. Sci. Math. (2) 77, 180—185.
Humbert Pierre, Paul Delerue, 1953: C. R. Acad. Sci., Paris, 237, 1059—1060.
Humbert Pierre, Louis Poli, 1944: Bull. Sci. Math. (2) 68, 204—214.
Lehrer Yehiel, 1954: Riveon Lematematika 7, 71—73.
Lindelöf Ernst, 1903: Bull. Sci. Math. (2) 27, 213—226.
Malmquist Johannes, 1905: Acta. Math. 29, 203—215.
Mikusinski Jan G., 1948: Ann. Soc. Polon. Math. 21, 46—51.
Mittag-Leffler G. M., 1903: C. R. Acad. Sci., Paris (2), 137, 554—558.
Mittag-Leffler G. M., 1904: R. Accad. dei Lincei, Rendiconti (5), 13, 3—5.
Mittag-Leffler G. M., 1905: Acta Math. 29, 101—182.
Oniga Théodore, 1948: C. R. Acad. Sci. Paris 227, 1138—1140.
Parodi Maurice, 1945: Bull. Sci. Math. (2) 69, 174—184.
Parodi Maurice, 1947: C. R. Acad. Sci., Paris, 224, 780—782.
Parodi Maurice, 1947a: Revue Sci. 85, 360.
Parodi Maurice, 1948: Ann. Soc. Sci. Bruxelles 1, 62, 24—26.
Phragmén Edvard, 1904: Acta Math. 28, 351—368.
Poli Louis, 1940: Ann. Soc. Sci. Bruxelles 1, 60, 15—30.
Poli Louis, 1946: C. R. Acad. Sci., Paris, 222, 580—581.
Poli Louis, 1949: Ann. Univ. Lyon. Sect. A93, 12, 5—25.
Poli Louis, 1949a: Cahiers Rhodanies 1, 1—15.
Pollard Harry, 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1115—1116.
Silverman L. L., 1953: Riveon Lematematika 6, 53—60.
Stanković Bogoljub, 1953: Rec. Acad. Serbe Sci. 35, 95—106.
Volterra Vito, 1916: Acc. dei Lincei, Memorie (5) 11, 167—249.
Volterra Vito and Joseph Pérès, 1924: Leçons sur la composition et les fonctions permutables, Gautchier-Villars, Paris.

Wiman Anders, 1905: Acta Math. 29, 191—201, 217—234.
Wright E. M., 1933: J. London Math. Soc. 8, 71—79.
Wright E. M., 1934: Acta Math. 63, 143—191.
Wright E. M., 1934a: Proc. London Math. Soc. (2) 38, 257—270.
Wright E. M., 1940: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 11, 36—48.
Винер Н. и Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, перев. с англ., «Наука», М., 1964.
Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.

К главе 19

Appell Paul, 1880: Arch. Math. Phys. 65, 171—175.
Appell Paul, 1897: Nouv. Ann. Math. (3) 16, 265—268.
Appell Paul, 1929: Acta Math. 52, 317—325.
Appell Paul and Joseph Kampé de Fériet, 1926: Fonctions Hypergéométriques et hypersphériques; Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris.
Barnes E. W., 1906: Cambridge Philos. Soc. Trans. 20, 215—232.
Bateman Harry, 1905: Proc. London Math. Soc. (2) 3, 111—123.
Bateman Harry, 1934: Ann. of Math. 35, 767—775.
Bateman Harry, 1940: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 491—496.
Bell E. T., 1934: Ann. of Math. (2) 35, 258—277.
Berger A. H., 1888: Stockh. Vetensk. Bihang. 13, 43.
Bird M. T., 1934: Dissertation, Illinois.
Brafman Fred, 1951: Proc. Amer. Math. Soc. 2, 942—949.
Brenke W. C., 1945: Amer. Math. Monthly 52, 297—301.
Burchnall J. L., 1951: Canadian J. Math. 3, 62—68.
Chaundy T. W., 1943: Quart. J. Math., Oxford, Ser. 14, 55—78.
Darboux J. G., 1878: J. Math. Pures Appl. (3) 4, 5—56 and 377—416.
Devisme Jacques, 1932: C. R. Acad. Sci., Paris, 195, 437—439.
Devisme Jacques, 1933: Toulousé, Faculté des Sciences, Annales (3) 25, 143—238.
Devisme Jacqnes, 1936: Congres International des Mathématiciens, Oslo, 2, 92—93.
Doetsch Gustav, 1937: Theorie und Anwendung der Laplace Transformation (p. 6ff), Springer, Berlin.
Erdélyi Arthur, 1938: Math. Z. 44, 201—211.
Erdélyi Arthur, 1941: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A., 61, 61—70.
Fasenmyer Mary Celine, 1947: Bull. Amer. Math. Soc. 53, 806—812.
Ford W. B., 1936: The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series, University of Michigan Studies, Ann. Arbor.
Fort Tomlinson, 1948: Finite differences and difference equations in the real domain, Oxford.
Friedman Bernard, 1952: Unpublished.
Frink Orrin: see Krall H. L.
Gegenbauer Leopold, 1874: Akad. Wiss. Wien. S.-B., IIa, 70, 433—443.
Glaisher J., 1873: Consult G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, 1922 (p. 140).
Gordon W. O., 1920: Ann. Physik (5) 2, 1031—1056.
Green George, 1934: Philos. Mag. (7) 18, p. 631.
Gronwall T. H., 1914: Math. Ann. 75, 321—375.
Hall N. A., 1936: Bull. Amer. Math. Soc. 42, 695—698.
Halphén G., 1881: C. R. Acad. Sci., Paris, 93, 781—783, 833—835.
Halphén G., 1881: Bull. Sci. Math. (2) 5, 462—488.
Hermite Charles, 1878: J. Reine Angew. Math. 84, 64—69.
Hilb Emil, 1922: Math. Ann. 85, 89—98.
Huff W. N., 1947: Duke Math. J. 14, 1091—1104.
Huff W. N. and E. D. Rainville, 1952: Proc. Amer. Math. Soc. 3, 296—299.
Humbert Pierre, 1920: Proc. Edinburgh Math. Soc. 39, 21—24.

Humbert Pierre, 1923: C. R. Acad. Sci., Paris, 176, 1282—1284.
Humbert Pierre, 1924: J. École Polytech. 24, 59—75.
Humbert Pierre, 1930: C. R. Acad. Sci., Paris, 190, 159.
Imschenetzky B., 1884: Petersb. Mém. (7) 31, No. 11.
Jordan Charles, 1929: Acta Szeged 4, 130—150.
Kampé de Fériet Joseph, 1926: see Appell, Paul.
Koschmieder Lothar, 1924: Math. Ann. 91, 62—79.
Koschmieder Lothar, 1937: Math. Z. 43, 248—254.
Koschmieder Lothar, 1938: Math. Z. 43, 783—792.
Koshliakov N. S., 1935: Rec. Math. 42, 425—434.
Krall H. L., Orrin Frink, 1949: Trans. Amer. Math. Soc. 65, 100—115.
Lagrange J. L., 1868: Oeuvres 2, 173—234, Paris.
Lagrange René, 1928: Acta Math. 51, 201—309.
Laplace P. S. de, 1812; Théorie analytique des probabilités, Paris; Reprinted in Oeuvres Complétes, 7, Paris, 1886.
Léauté H., 1881: J. Math. (3) 7, 185—200.
Lerch M., 1905: J. Reine Angew. Math. 128, 211—221.
Littlewood D. E., 1940: The theory of group characters and matrix representations of groups (in particular p. 82), Oxford.
Mahler Kurt, 1930: Rend. Circ. Mat., Palermo, 54, 1—41.
Mehler F. G., 1866: J. Reine Angew. Math. 66, 161—176.
Meixner Joseph, 1934: J. London Math. Soc. 9, 6—13.
Mittag-Leffler G. M., 1891: Acta Math. 15, 1—32.
Mittag-Leffler G. M., 1901: Acta Math. 24, 183—204, 205—244.
Mott N. F., 1932: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 135, 429—458 (particularly p. 442).
Myller-Lebedeff Wera, 1907: Math. Ann. 64, 388—416.
Narumi Seimatsu, 1929: Tohoku Math. J. 30, 185—201.
Nielsen Niels, 1906: Handbuch der Theorie der Gamma Function (in particular Chapter 5, §§ 26—28), B. G. Teubner, Leipzig.
Nielsen Niels, 1912: Ann. Math. (3) 19, 179—204.
Nielsen Niels, 1914: Monatsh. Math. Phys. 25, 328—336.
Nörlund N. E., 1920: Acta Math. 43, 121—196.
Nörlund N. E., 1924: Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, Berlin.
Obrechkoff Nikola, 1934: Bull. Soc. Math. France 62, 84—109.
Oettinger L., 1867: J. Reine Angew. Math. 67, 327—359.
Pidduck F. B., 1910: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 83, 347—356.
Pidduck F. B., 1912: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 86, 396—405.
Pincherle Salvadore, 1889: Bologna Mém. (5) 1, 337—364.
Prasad Ganesh, 1926: Proc. Benares Math. Soc., 7—8, 47—53.
Rainville E. D., 1945: Bull. Amer. Math. Soc. 51, 268—271.
Rainville E. D., 1946: Amer. Math. Monthly, 53, 299—305.
Rainville E. D., 1947: Unpublished results.
Rainville E. D., 1952: see akso Huff, 1952.
Rice S. O., 1940: Duke Math. J. 6, 108—119.
Rogowski W., 1932: Arch. Electrotechnik 32, 643—678.
Sheffer I. M., 1939: Duke Math. J. 5, 590—622.
Sheffer I. M., 1945: Bull. Amer. Math. Soc. 51, 739—744.
Sylvester J. J., 1879: C. R. Acad. Sci., Paris, 89, 24—26; Collected Mathematical papers (3), 253—255.
Tchebycheff P., 1889: Acta Math. 12, 287—322.
Thorne C. J., 1945: Amer. Math. Monthly 52, 191—193.
Toscano Letterio, 1950: Rivista Mat. Univ., Parma, 1, 459—470.
Tricomi F. G., 1949: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 28, 263—289.
Truesdell C. A., 1948: An assay toward a unified theory of special functions, Princeton University Press, Princeton, N. J.
Van Veen S. C., 1931: Math. Ann. 105, 408—436.

Varma R. S., 1951: Proc. Amer. Math. Soc. 2, 593—596.
Watson G. N., 1933: J. London Math. Soc. 8, 189—192, 194—199, 289—292.
Watson G. N., 1934: J. London Math. Soc. 9, 22—28.
Weyl H., 1910: Nachr. d. Gottinger Ges. Wiss. 442—467.
Whittaker J. M., 1933: Proc. London Math. Soc. (2) 36, 451—469.
Widder D. V., 1936: Trans. Amer. Math. Soc. 39, 244—298.
Williams K. P., 1924: Trans. Amer. Math. Soc. 26, 441—445.
Wright E. M., 1932: J. London Math. Soc. 7, 256—262.
Wright E. M., 1933: J. London Math. Soc. 8, 71—79.
Wright E. M., 1948: Trans. Amer. Math. Soc. 64, 409—438.
Wright E. M., 1949: J. London Math. Soc. 24, 304—309.
Курант Р. и Д. Гильберт, Методы математической физики, перев. с нем, Гостехиздат, М., т. I, изд. 3, т II, изд. 2, 1951.
Сеге Д., Ортогональные многочлены, Физматгиз, М, 1962.
Уиттекер Э. и Г. Ватсон, Курс современного анализа, перев. с англ., Физматгиз, М., т. I, 1961, т. II, 1962.

ЗАМЕЧЕННАЯ ОПЕЧАТКА

к книге: Г. Бейтмена и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции (гиперболическая функция, функции Лежандра), «Наука», 1965.

В формуле (32) из п. 3.7 интеграл следует читать так:

$$\int_0^\infty e^{-(\nu+\mu+1)}\left\{(1-e^{-t})\left[z+\sqrt{z^2-1}-ze^{-t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{z^2-1}\,e^{-t}\right]\right\}^{-\mu-1/2} dt.$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинский и готический алфавиты

Греческий алфавит

Математические знаки

Г. Бейтмен и А Эрдейи

**Высшие трансцендентные функции.
Эллиптические и автоморфные функции.
Функции Ламе и Матье**

(Серия: «Справочная математическая библиотека»)

М., 1967 г., 300 стр. с илл.

Редакторы: *Н. Х. Розов* и *А. З. Рывкин*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректоры *З В Автонеева* и *О. А. Сигал*

Сдано в набор 30/III 1967 г. Подписано к печати 14/VIII 1967 г. Бумага $60 \times 90/_{16}$, тип № 1. Физ. печ. л. 18,75. Условн. печ л 18,75. Уч -изд. л. 22,22. Тираж 20 000 экз. Цена книги 1 р. 33 к. Заказ № 1558.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28